В.С. Бескин

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В АСТРОФИЗИКЕ

В.С. Бескин

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В АСТРОФИЗИКЕ

Рекомендовано УМО по классическому университетскому образованию РФ в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 010700 - «Физика» и по специальностям 010701 - «Физика» и 010702 - «Астрономия»

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ
2006

УДК 524
ББК 22 632
Б 53

Бескин В С **Осесимметричные стационарные течения в астрофизике.** — М ФИЗМАТЛИТ, 2006 — 384 с — ISBN 5-9221-0646-5

Книга посвящена методу уравнения Греда–Шафранова, позволяющему на достаточно простом языке описывать идеальные осесимметричные стационарные течения, которые могут иметь место у самого широкого класса астрофизических объектов

Для студентов и аспирантов вузов, обучающихся по специальности «астрофизика»

ISBN 5-9221-0646-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5

Введение 9

Глава 1. **Гидродинамический предел — классические задачи аккреции и эжекции** 13

1.1. Астрофизическое введение — аккреция на компактные объекты 13

1.1.1. Аккреционные диски (14). 1.1.2. Стандартная модель (18). 1.1.3. ADAF, ADIOS и другие (21).

1.2. Основные свойства трансзвуковых гидродинамических течений 23

1.2.1. Основные уравнения (23). 1.2.2. Сферически-симметричное течение (25). 1.2.3. Плоское потенциальное течение (28).

1.3. Осесимметричные стационарные течения — нерелятивистский случай 34

1.3.1. Основные уравнения (34). 1.3.2. Математическое интермеццо — ковариантный подход (35). 1.3.3. Структура двумерного течения (37). 1.3.4. Аккреция Бонди–Хойла (45). 1.3.5. Истечение из медленно вращающейся звезды (50).

1.4. Осесимметричные стационарные течения в окрестности черной дыры 57

1.4.1. Физическое интермеццо — (3 + 1)-расщепление в метрике Керра (57). 1.4.2. Основные уравнения (61). 1.4.3. Точные решения (65). 1.4.4. Аккреция Бонди–Хойла — релятивистский режим (68). 1.4.5. Аккреция на медленно вращающуюся черную дыру (70). 1.4.6. Аккреция вещества с малым угловым моментом на невращающуюся черную дыру (72). 1.4.7. Тонкий трансзвуковой диск (78).

1.5. Заключение 88

Приложение 89

Глава 2. **Бессиловое приближение — магнитосфера радиопульсаров** 91

2.1. Астрофизическое введение 91

2.2. Основные физические процессы 95

2.2.1. Вакуумное приближение (95). 2.2.2. Рождение частиц в сильном магнитном поле (99). 2.2.3. Структура магнитосферы (102).

2.3. Генерация вторичной плазмы 106

2.3.1. «Внутренний зазор» (106). 2.3.2. Поверхность нейтронной звезды (110). 2.3.3. Распространение гамма-квантов в сверхсильном магнитном поле (111). 2.3.4. Эффекты общей теории относительности (112). 2.3.5. Генерация частиц в магнитосфере (115). 2.3.6. Модель «полого конуса» (116). 2.3.7. Генерация вторичной плазмы — «внешний зазор» (121).

2.4. Пульсарное уравнение 121

2.4.1. Бессиловое приближение. Параметр замагниченности (121). 2.4.2. Удобная запись электромагнитного поля. Интегралы движения (123). 2.4.3. Уравнение Грэда–Шафранова (126). 2.4.4. Математическое интермеццо — квазистационарный формализм (129).

2.5. Энергетические потери пульсаров 132

2.5.1. Механизм токовых потерь (132). 2.5.2. Торможение наклонного и ортогонального ротатора (135).

2.6. Структура магнитосферы 144
2.6.1. Точные решения (144). 2.6.2. Структура магнитосферы с продольными токами (158). 2.6.3. Модели магнитосферы (166).
2.7. Заключение 172

Глава 3. **Бессиловое приближение — магнитосфера черной дыры** 173
3.1. Астрофизическое введение — центральная машина в ядрах активных галактик 173
3.1.1. Возможные механизмы образования черных дыр (175). 3.1.2. Природа активности и переменность (177). 3.1.3. Замагниченный аккреционный диск (178). 3.1.4. Генерация регулярного магнитного поля (180).
3.2. Основные уравнения 184
3.2.1. Электромагнитное поле и $(3+1)$-расщепление (184). 3.2.2. «Теорема об отсутствии волос» (185). 3.2.3. Вакуумное приближение (189). 3.2.4. Бессиловое уравнение Грэда–Шафранова в метрике Керра (192). 3.2.5. Рождение частиц (198).
3.3. Механизм энерговыделения 199
3.3.1. Процесс Блендфорда–Знайека (199). 3.3.2. Физическое интермеццо — термодинамика черной дыры (204).
3.4. Структура магнитосферы черной дыры 207
3.4.1. Общие свойства (207). 3.4.2. Точные решения (209). 3.4.3. Модели магнитосферы (216).
3.5. Заключение 221

Глава 4. **Полная магнитогидродинамическая версия — ускорение частиц и образование струйных выбросов** 222
4.1. Астрофизическое введение — коллимация и ускорение частиц . . 222
4.1.1. Радиопульсары (222). 4.1.2. Активные галактические ядра (226). 4.1.3. Молодые звезды (230). 4.1.4. Микроквазары и космологические гамма-всплески (232).
4.2. Основные уравнения 234
4.2.1. Физическое интермеццо — магнитогидродинамические волны (234). 4.2.2. Общий случай релятивистского течения (239). 4.2.3. Нерелятивистское течение (250). 4.2.4. Случай анизотропного давления (253).
4.3. Общие свойства 257
4.3.1. Некоторые полезные соотношения (257). 4.3.2. Альфвеновская поверхность (261). 4.3.3. Быстрая магнитозвуковая поверхность — релятивистский случай (263). 4.3.4. Быстрая магнитозвуковая поверхность — нерелятивистский случай (271). 4.3.5. Поведение решения на больших расстояниях (276). 4.3.6. Поведение решения вблизи горизонта событий (282). 4.3.7. Анализ алгебраических соотношений (287).
4.4. Точные решения 291
4.4.1. Цилиндрические струйные выбросы — бессиловое приближение (291). 4.4.2. Цилиндрические релятивистские струйные выбросы (296). 4.4.3. Цилиндрические нерелятивистские струйные выбросы (311). 4.4.4. Радиальный замагниченный ветер (316). 4.4.5. Магнитосфера черной дыры (333).
4.5. Другие методы исследования 346
4.5.1. Автомодельные решения (346). 4.5.2. Результаты численного расчета (352).
4.6. Заключение 358

Заключение 361
Список литературы 364

ПРЕДИСЛОВИЕ

Читателю предлагается монография, основанная на курсе лекций, который впервые был прочитан сотрудникам отдела теоретической астрофизики Национальной астрономической обсерватории (Митака, Япония) в 1998 году и затем читался как часть годового курса «магнитная гидродинамика» на кафедре проблем физики и астрофизики МФТИ, а также в ГАИШ МГУ. Она посвящена одному из наиболее известных аналитических подходов в современной астрофизике, восходящему к уравнению Грэда–Шафранова, названному по фамилии ученых, первыми сформулировавших это уравнение для статических магнитных конфигураций. Рассматриваемый метод позволяет на достаточно простом языке описывать идеальные осесимметричные стационарные течения, которые могут иметь место у самого широкого класса астрофизических объектов.

Многие, привлеченные удивительным блеском отдельных граней данной теории, полагали, что метод уравнения Грэда–Шафранова может быть использован как основной материал для построения работоспособных моделей реальных астрофизических источников. Однако, как оказалось, этот материал непригоден для строительства самого здания и может быть использован лишь в качестве фундамента для построения будущей теории. В таком контексте и следует рассматривать настоящий курс. Он в значительной степени нацелен на проведение дальнейших исследований, а не на подведение итогов.

Несколько слов следует сказать о необходимой подготовке. Предполагается, что читатель знаком с основными понятиями, используемыми в общей теории относительности (ковариантная производная, тензорная алгебра). Впрочем, как мы увидим, использование языка (3+1)-разложения, позволяющего сформулировать все законы на языке трехмерных векторов, имеющих прозрачный физический смысл, существенно упрощает изложение даже для наиболее сложного случая течений в окрестности вращающейся черной дыры. Здесь в качестве введения я настоятельно рекомендую ознакомиться с книгой «Черные дыры. Мембранный подход» (М.: Мир, 1988) под редакцией К. Торна, Р. Прайса и Д. Макдональда. В некотором смысле можно рассматривать настоящий курс как продолжение первых четырех глав этой замечательной книги (однако, как будет показано, сама мембранная трактовка не всегда позволяет правильно интерпретировать процессы, происходящие вблизи горизонта черной дыры). В остальном же все ключевые соотношения будут выведены по ходу изложения.

Пользуясь случаем, хотелось бы поблагодарить В. Л. Гинзбурга за постоянный интерес и поддержку, а также А. В. Гуревича и Я. Н. Истомина, с которыми были выполнены совместные работы по физике магнитосферы радиопульсаров и советы которых позволили существенно продвинуться в понимании основных свойств осесимметричных стационарных течений. За более чем десятилетний период,

посвященный исследованию уравнения Грэда–Шафранова и возможности его применения для конкретных астрофизических объектов, мне посчастливилось иметь многочисленные беседы с людьми, стоявшими у истоков рассматриваемого здесь подхода. Это, прежде всего, сам В. Д. Шафранов (не знавший, к моему удивлению, о широком использовании в астрофизике уравнения, носящего его имя), а также Р. Блендфорд, М. Камензинд, Р. Ловлейс, Л. Местел, И. Окамото, И. Новиков, Г. Пеллетьер, Р. Пудриц, А. Томимацу, К. Торн, Ж. Эйвертс. Им, а также их ученикам и последователям (Х. Ардавану, М. ван Путтену, Н. Влахакису, О. Кабураки, И. Контополосу, А. Левинсону, Ш. Нитте, Й. Пайцу, М. Такахаши, Х. Фендту, Дж. Феррейре, К. Хиротани, К. Цинганосу, Ш. Шибате) автор выражает свою самую искреннюю признательность. Хотелось бы поблагодарить Г. С. Бисноватого–Когана, В. И. Докучаева, Б. В. Комберга, С. С. Комиссарова, М. В. Конюкова, В. М. Липунова, Ю. Э. Любарского, К. А. Постнова, А. Н. Тимохина, Д. А. Узденского, В. М. Чечеткина и, особенно, С. В. Боговалова за плодотворные дискуссии, позволившие прояснить многие детали обсуждаемой здесь теории. Автор также выражает благодарность своим студентам кафедры проблем физики и астрофизики МФТИ — В. И. Парьеву, Ю. Н. Пидопрыгоре, Л. М. Малышкину, И. В. Кузнецовой, Р. Р. Рафикову, Н. Л. Закамской, Р. Ю. Компанейцу, А. Д. Чеховскому и Е. Е. Нохриной — за радость совместной работы, которая, как можно надеяться, тоже позволила внести вклад в развитие аналитических методов теории уравнения Грэда–Шафранова.

Наконец, мне бы хотелось сделать несколько замечаний личного характера. Я был последним студентом Сергея Ивановича Сыроватского. Он три года был моим научным руководителем на кафедре проблем физики и астрофизики и умер от второго инфаркта осенью 1979 года, в год моего окончания института и поступления в отделение теоретической физики ФИАН. Поэтому я не успел по-настоящему поработать вместе с ним. Тем не менее яркие воспоминания о С. И. Сыроватском по-прежнему остаются в памяти. Более того, с годами становится все более ясно, какое определяющее влияние оказал на меня мой учитель. Вот почему я считаю своим долгом посвятить эту книгу его светлой памяти.

В статье, опубликованной в УФН, сказано, что «жизнь, отданная науке» в применении к С. И. Сыроватскому перестает быть трафаретом и приобретает свой истинный смысл. Трудно что-то добавить к этим словам. Сергей Иванович Сыроватский принадлежал к поколению 1925 года; он прошел всю войну и был несколько раз тяжело ранен. Однако героическая юность сформировала основные черты его характера, которые впоследствии и позволили ему стать одним из ведущих астрофизиков-теоретиков. Перенеся тяжелейший инфаркт и будучи несколько месяцев оторванным от науки, он нашел в себе силы вернуться и продолжал работать столь же самозабвенно, как и до болезни. Не случайно его портрет висит в конференц-зале отделения теоретической физики ФИАН рядом с портретами И. Е. Тамма и А. Д. Сахарова.

Область научных интересов С. И. Сыроватского была достаточно широка. Им получены важнейшие результаты в магнитной гидродинамике (классификация разрывов и ударных волн, вопрос об их эволюционности, анализ устойчивости тангенциальных разрывов), радиоастрономии (теория космического синхротронного излучения с учетом неоднородного распределения, диффузии и энергетических потерь электронов), астрофизике космических лучей (вопросы преимущественного ускорения тяжелых ядер и универсальности спектра), физике Солнца. В 1964 году им вместе с В. Л. Гинзбургом была написана фундаментальная монография «Происхождение космических лучей», на которую, несмотря на бурное развитие этой области за последние сорок лет, широко ссылаются до сих пор.

Мне бы хотелось выделить здесь одну черту, которая, как мне кажется, верно характеризует С. И. Сыроватского как ученого. Сергей Иванович любил точные решения. Именно поэтому он отдал много сил анализу двумерных течений в магнитной гидродинамике, в случае которых, как известно, методы теории функции комплексного переменного позволяют продвинуться существенно дальше, чем в трехмерном случае. Уже его первая большая научная работа — вопрос об эволюционности разрывов в магнитной гидродинамике — продемонстрировала удивительную ясность мысли и фундаментальность научного подхода. Фактически, необходимо было просто аккуратно пересчитать количество уравнений и количество неизвестных (или, на физическом языке, количество возмущений и количество волн, которые могли бы унести эти возмущения), чтобы получить результат, немедленно включенный в курс Ландау–Лифшица. И впоследствии, обсуждая на семинаре научную статью или работу студентов, Сергей Иванович особенно выделял четкость (или, наоборот, нечеткость) постановки физической задачи и формулировку граничных условий. Как мы увидим, именно анализ точных решений и будет основной темой настоящего курса.

Точные решения, хотя и приближенных уравнений, как считал С. И. Сыроватский, чрезвычайно важны для формирования нашей интуиции, позволяющей в дальнейшем понимать основные свойства происходящих процессов уже на качественном уровне. Здесь, в частности, проявлялась его принадлежность к школе И. Е. Тамма, утверждавшей, что в основе любой интерпретации наблюдений должна лежать фундаментальная физика. В этом вопросе, кстати, он спорил с Я. Б. Зельдовичем, который считал, что, напротив, необходимо прежде всего сконцентрироваться на анализе приближенных решений точных уравнений.

Следует особенно подчеркнуть, что несмотря на относительно малое количество ссылок на его журнальные работы, особенно в последние годы, его авторитет в научном мире был и остается чрезвычайно высоким. Я думаю, что помимо высочайшего научного потенциала, здесь важнейшую роль сыграли такие черты его характера, как принципиальность и доброжелательность. При этом он был совершенно лишен какой-либо зависти к чужим работам или чужим успехам. Вопросы приоритета его абсолютно не интересовали. Вместе с тем он всегда отстаивал принципы научной добросовестности и уважения к чужому труду, принципы, которым сам всегда неукоснительно следовал. Поэтому несомненно, что именно С. И. Сыроватскому, наряду с С. Б. Пикельнером, принадлежит заслуга в формировании атмосферы высоких научных и моральных стандартов, без которых было бы невозможным существование поистине золотого века советской астрофизики.

Помимо научной работы, С. И. Сыроватский много сил и времени уделял преподаванию. Он действительно создал научную школу, объединенную общей задачей — построением последовательной теории токовых слоев в применении к вспышечным процессам на Солнце. С. В. Буланов, В. А. Догель, Ю. Д. Жугжда, Б. В. Сомов, А. Г. Франк — вот лишь несколько имен его учеников, позволяющие судить о ее уровне. В этом проявилась его способность объединять и вести за собой в общем-то совершенно разных людей. Именно такая «интерференция», при которой удается сложить положительные потенциалы, а разногласия вынести за скобки, и является условием создания научной среды — уникального сообщества ученых, способного решать серьезные научные задачи.

Очень хорошо помню, как все перечисленные качества С. И. Сыроватского проявлялись при его общении со студентами и учениками. С самого начала обучения на кафедре я попал в удивительную атмосферу научного творчества, в которой главным было доброжелательное отношение к окружающим и полное равенство перед лицом науки. При этом сектор С. И. Сыроватского был погружен в подобную же ауру отделения теоретической физики ФИАНа, что придавало нашему общению еще большую устойчивость и защищенность. Стоит ли говорить, что сейчас, работая на кафедре проблем физики и астрофизики МФТИ и читая годовой курс «магнитная гидродинамика», который когда-то слушал у Сергея Ивановича, я стараюсь во многом подражать моему учителю.

Вот почему в последние годы, выступая в новой аудитории, я все чаще начинаю свои доклады со слов: «Я был последним студентом Сергея Ивановича Сыроватского ...» И очень приятно, что эти слова всегда звучат камертоном, помогая мне и аудитории настроиться на верный лад.

ВВЕДЕНИЕ

Осесимметричные стационарные течения, рассматриваемые в рамках идеальной магнитной гидродинамики (МГД), уже давно обсуждаются в связи со многими астрофизическими источниками. К этому классу течений относятся как аккреция на обычные звезды и черные дыры [Bondi, Hoyle, 1944; Bondi, 1952; Зельдович, Новиков, 1967а; Шапиро, Тьюколски, 1985; Липунов, 1987], так и аксиально симметричный звездный (солнечный) ветер [Parker, 1958; Тассуль, 1982; Михалас, 1982; Бисноватый-Коган, 1989; Lammers, Cassinelli, 1999], струйные выбросы из молодых звездных объектов [Lada, 1985; Reipurth, Bally, 2001] и эжекция частиц из магнитосферы радиопульсаров [Michel, 1991; Beskin, Gurevich, Istomin, 1993; Mestel, 1999]. Такие модели активно развиваются и в связи с теорией строения магнитосфер сверхмассивных черных дыр, которые, как полагают, являются «центральной машиной» в активных галактических ядрах и квазарах [Blandford, 1976; Lovelace, 1976; Phinney, 1983; Бегельман, Блендфорд, Рис, 1987; Торн, Прайс, Макдональд, 1988].

Привлекательность МГД-моделей связана с их относительной простотой. Дело в том, что благодаря осесимметричности и стационарности (а также условию вмороженности) в общем случае имеют место пять «интегралов движения», сохраняющихся на осесимметричных магнитных поверхностях. Это, прежде всего, поток энергии (интеграл Бернулли) и z-компонента углового момента, а также электрический потенциал, энтропия и отношение потока частиц к потоку магнитного поля. Этот замечательный факт позволяет отделить задачу о структуре полоидального поля (структуре полоидального течения в гидродинамике) от задачи об ускорении частиц и структуре электрических токов. Решение последней задачи в заданном полоидальном поле выражается достаточно простыми алгебраическими соотношениями. Важно, что подобный подход легко обобщается и на течения вблизи вращающейся черной дыры, поскольку метрика Керра также является осесимметричной и стационарной. В результате стало возможным количественно исследовать чрезвычайно широкий класс течений — от намагниченного звездного (солнечного) ветра [Weber, Davis, 1967; Mestel, 1968; Sakurai, 1990] и струйных выбросов из молодых звезд [Blandford, Payne, 1982; Heyvaerts, Norman, 1989] до процессов, происходящих в магнитосфере радиопульсаров [Michel, 1969; Ardavan, 1976; Okamoto, 1978; Kennel, Fujimura, Okamoto, 1983] и сверхмассивных черных дыр в активных галактических ядрах [Camenzind, 1986; Takahashi et al., 1990; Chakrabarti, 1990]. В частности, была показана принципиальная возможность извлечения энергии из вращающейся черной дыры [Blandford, Znajek, 1977; Macdonald, Thorne, 1982]. Иными словами, в этом направлении достигнут несомненный прогресс.

С другой стороны, задача о нахождении структуры полоидального магнитного поля (структуры гидродинамического течения) сталкивается с гораздо большими трудностями. Прежде всего, это связано со сложной структурой уравнения, описывающего стационарные осесимметричные течения. В общем случае оно оказывается нелинейным уравнением смешанного типа, меняющимся от эллиптического к гиперболическому на особых поверхностях и к тому же содержащим интегралы движения в виде свободных функций. Вообще говоря, аналогичные уравнения, восходящие к классическому уравнению Трикоми, обсуждались с начала этого века в связи с проблемой трансзвуковых гидродинамических течений [Гудерлей, 1960; Мизес, 1961; Смирнов, 1970; Франкль 1973]. В частности, для плоских течений чрезвычайно плодотворным оказывается метод преобразования годографа (приводящий к линейному уравнению Чаплыгина), который позволил существенно продвинуться в понимании рассматриваемых процессов [Франкль 1973; Ландау, Лифшиц, 1986]. В астрофизической же литературе за осесимметричными стационарными уравнениями равновесия закрепилось название уравнений Грэда–Шафранова. В конце пятидесятых годов они сформулировали уравнение подобного вида в связи с проблемой управляемого термоядерного синтеза [Шафранов, 1957; Grad, 1960]. Это уравнение, однако, относилось лишь к равновесным статическим конфигурациям и требовало, вообще говоря, существенного изменения при обобщении на случай трансзвуковых течений. Полная версия такого уравнения, включающая в себя все пять интегралов движения, была сформулирована Л. С. Соловьевым в 1963 году в третьем томе знаменитой серии сборников «Вопросы теории плазмы» и хорошо известна среди физиков. Однако, как это часто случается, в астрофизической литературе уравнение Грэда–Шафранова оставалось малоизвестным, так что оно неоднократно переоткрывалось заново.

В применении к астрофизике уравнения типа Грэда–Шафранова (в бессиловом приближении и в отсутствие гравитации) впервые широко обсуждались в 70-х годах прошлого века в связи с вопросом о строении магнитосфер радиопульсаров [Mestel, 1973; Scharlemann, Wagoner, 1973; Michel, 1973a; Okamoto, 1974; Mestel, Wang, 1979]. Полная нерелятивистская версия, содержащая пять инвариантов, независимо получена в работах [Okamoto, 1975] и [Heinemann, Olbert, 1978]. Релятивистское обобщение в плоском пространстве было найдено X. Ардаваном [Ardavan, 1979], а затем исследовалось в десятках, если не в сотнях, работ, посвященных самым различным астрофизическим объектам [Mestel, 1973; Lovelace, Wang, Sulkanen, 1987; Боговалов, 1990; Pelletier, Pudritz, 1992; Shu et al., 1994]. Наконец, в [Lovelace et al., 1986] рассматривался случай метрики Шварцшильда, а в [Nitta, Takahashi, Tomimatsu, 1991; Бескин, Парьев, 1993] уравнение равновесия записано и в наиболее общей метрике Керра. Тем не менее, несмотря на большое количество работ, посвященных этому направлению, существенного прогресса здесь достигнуть не удалось.

Сложность, как мы увидим, состоит в том, что сама постановка прямой задачи в рамках метода уравнения Грэда–Шафранова оказывается нетривиальной. Так, в гидродинамическом пределе, когда имеется лишь три интеграла движения, задача требует четырех граничных условий для трансзвукового режима течения. Это значит, что на некоторой поверхности должны быть заданы, например, две термодинамические функции, а также две компоненты скорости. Однако для определения интеграла Бернулли, без знания которого уравнение равновесия, естественно, не может быть решено, необходимо задать все три компоненты скорости, что невозможно, поскольку третья компонента скорости сама должна быть найдена из решения. В подобной непоследовательности и заключена, собственно, одна из основных сложностей метода уравнения Грэда–Шафранова. Более того, с самого начала было совершенно ясно, что этот подход невозможно обобщить на случай неидеальных, неосесимметричных и нестационарных течений, что не позволяет учесть многие процессы, которые могут играть решающую роль в конкретных астрофизических источниках. Сюда относятся взаимодействие вещества с собственным излучением при аккреции [Шварцман, 1970; Bisnovatyi-Kogan, Blinnikov, 1980; Thorne, Flammang, Zytkov, 1981; Nobili, Turolla, Zampieri, 1991] и при формировании звездного (солнечного) ветра [Тассуль, 1982; Михалас, 1982], учет вязких сил [Шакура, 1972; Shakura, Sunyaev, 1973; Novikov, Thorne, 1973] и эффектов переноса излучения при дисковой аккреции [Abramowicz et al., 1988; Narayan, Yi, 1995b], а также кинетические эффекты [Гуревич, Димант, Зыбин, 1993].

Вместе с тем в некоторых случаях приближение идеальной гидродинамики является все же вполне приемлемым. Так, например, излучение, связанное с адиабатическим разогревом аккрецирующего вещества, оказывается малым по сравнению с эддингтоновской светимостью [Шапиро, Тьюколски, 1985], что дает возможность считать энтропию вещества постоянной. Идеальность среды обеспечивает и высокая проводимость космической плазмы. Приведенные примеры позволяют надеяться, что приближение идеальной (магнитной) гидродинамики способно достаточно точно описать реальные астрофизические течения. Поэтому анализ идеальных течений активно продолжался на протяжении последних тридцати лет. Большую роль здесь сыграла замечательная работа Р. Бленфорда и Д. Пайна [Blandford, Payne, 1982], в которой было показано, что уравнение Грэда–Шафранова имеет достаточно широкий класс автомодельных решений. В результате анализ таких автомодельных решений, для получения которых уравнение Грэда–Шафранова сводилось к обыкновенному дифференциальному уравнению, сформировал одно из самых популярных направлений исследований, посвященных астрофизике компактных объектов (см., например, [Low, Tsinganos, 1986; Lovelace, Wang, Sulkanen, 1987; Li, Chiueh, Begelman, 1992; Sauty, Tsinganos, 1994; Sauty, Tsinganos, Trussoni, 1999]).

Однако сложности, связанные с применением метода уравнения Грэда–Шафранова, оказались все же слишком серьезными. Внутренняя непоследовательность, о которой говорилось выше, не позволяла в общем случае решать прямые задачи, т. е. определять структуру течения в некоторой области по заданным физическим параметрам на ее границе. Все это в полной мере относится и к автомодельным решениям, которые в своей основе требуют самоподобия граничных условий. В результате за последние двадцать лет, в течение которых исследования в данной области проводились особенно интенсивно, фактически так и не удалось построить ни одной общепринятой модели для конкретных астрофизических объектов. Поэтому неудивительно, что подавляющее большинство исследователей, интересующихся прежде всего астрофизическими приложениями, в последнее время перенесло центр тяжести своих работ на совершенно другой класс уравнений, а именно на временны́е задачи установления, решение которых возможно лишь при использовании численных методов [Pneuman, Kopp, 1971; Hunt, 1979; Macdonald, 1984; Hawley, Smarr, Wilson, 1984; Shima et al., 1985; Pudritz, Norman, 1986; Petrich et al., 1989; Ruffert, Arnett, 1994; Cao, Spruit, 1994; Ustyugova et al., 1995].

Тем не менее все же существует подход, позволяющий аналитически решать прямые задачи в рамках метода уравнения Грэда–Шафранова. Например, подобная возможность возникает в случае, когда известно его точное решение и мы исследуем течения, которые слабо отличаются от известного. Таким точным решением, как мы увидим, служит сферически-симметричная аккреция (эжекция) вещества. В результате, зная структуру течения в нулевом приближении, можно непосредственно из граничных условий с нужной точностью определить как положение особых поверхностей, так и все интегралы движения, что и позволяет решать уравнение равновесия в прямой постановке. Тем самым появляется нетривиальная возможность аналитического исследования течений. Подробному введению в аналитические методы анализа уравнения Грэда–Шафранова и посвящена настоящая книга.

Необходимо сразу подчеркнуть, что обсуждаемые ниже аналитические методы позволяют получить решение лишь в исключительных случаях. Поэтому на самом деле нашей основной задачей будет не построение работоспособных моделей конкретных компактных объектов, а выяснение некоторых ключевых свойств, которыми должны обладать МГД-течения в окрестности реальных космических источников. Одновременно на простых примерах будут прояснены возможности и пределы применимости метода уравнения Грэда–Шафранова. Таким образом, настоящая книга посвящена не астрофизическим, а чисто физическим аспектам теории. Однако все приложения являются астрофизическими, так что можно надеяться, что книга будет интересна и для астрофизиков. Тем более что ключевые физические результаты, полученные в рамках метода уравнения Грэда–Шафранова, естественно, не должны зависеть от метода вычислений.

ГЛАВА 1

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ — КЛАССИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ АККРЕЦИИ И ЭЖЕКЦИИ

1.1. Астрофизическое введение — аккреция на компактные объекты

Вопрос о гидродинамической аккреции и эжекции находится в центре внимания астрофизики компактных объектов с самого начала ее возникновения. С ним связаны, например, проблема активности галактических ядер и квазаров [Зельдович, Новиков, 1967а], механизм образования и устойчивости струйных выбросов [Бегельман, Блендфорд, Рис, 1987; Торн, Прайс, Макдональд, 1988], а также природа галактических рентгеновских источников [Сюняев и др., 1991; Mirabel et al., 1992].

Последовательная теория таких течений была заложена еще в сороковых-пятидесятых годах, когда Х. Бонди и Ф. Хойл подробно исследовали задачу о трансзвуковой аккреции идеального газа на гравитирующий центр [Bondi, Hoyle, 1944; Bondi, 1952], а Е. Паркер рассмотрел сферически-симметричное трансзвуковое истечение изотермического газа [Parker, 1958]. Особого же расцвета теория гидродинамической аккреции достигла после обнаружения в начале семидесятых годов галактических рентгеновских источников, связанных с аккрецирующими нейтронными звездами и черными дырами солнечных масс, а также квазаров и других активных галактик, в центрах которых, как полагают, находятся сверхмассивные черные дыры. Тогда стало ясно, что основным источником активности всех перечисленных объектов является гравитационная энергия, выделяющаяся при аккреции. Например, для аккреции на нейтронную звезду энерговыделение L должно полностью определяться величиной темпа аккреции $\dot{M}$ (массы, падающей на нейтронную звезду в единицу времени):

$$L = \frac{GM\dot{M}}{R}. \tag{1.1}$$

При этом важнейшим аргументом, подтверждающим правильность теории, явилось отсутствие рентгеновских источников со светимостями, превышающими эддингтоновский предел:

$$L_{\mathrm{Ed}} \approx 10^{38}\frac{M}{M_\odot}\ \text{эрг/с}. \tag{1.2}$$

При аккреции на черную дыру значительная часть излучения, вообще говоря, может поглощаться ею. Тем не менее для грубой оценки энерговыделения в аккреционном диске обычно используют формулу

$$L \sim \eta \dot{M} c^2, \tag{1.3}$$

где $\eta \approx 0{,}06 \div 0{,}4$. Отметим, что даже для адиабатических течений с нулевой вязкостью точные решения были получены лишь для ряда частных случаев, например для сферически-симметричной аккреции. В этом случае структура течения фактически определена: движение происходит по радиусу, а наличие интегралов движения позволяет полностью определить характеристики течения.

Все сказанное выше относится и к проблеме эжекции газа из звезд (прежде всего, ранних спектральных классов). В этом случае также отсутствуют точные двумерные решения, хотя численно данный вопрос исследован достаточно подробно [Черепащук, 1988; Bjorkman, Cassinelli, 1993; Owocki, Cranmer, Blondin, 1994]. Напомним, что здесь одна из главных задач связана с проблемой предельной скорости истечения. Дело в том, что в середине прошлого века существовало две точки зрения на вопрос о структуре солнечного ветра. Они отвечали двум различным асимптотикам уравнений гидродинамики, соответствующим сверхзвуковому («ветер») и дозвуковому («бриз») режиму истечения. Именно Паркеру принадлежит заслуга в выяснении выделенности трансзвукового режима и роли гравитационного поля, позволяющего преодолеть звуковой барьер. Понятно, что прямое доказательство сверхзвукового режима истечения солнечного ветра стало возможным лишь после прямых измерений, выполненных с искусственных спутников Земли.

1.1.1. Аккреционные диски. Простейшие адиабатические (в том числе и сферически-симметричные) модели аккреции и эжекции позволили существенно прояснить многие особенности излучения реальных астрофизических объектов. Вместе с тем такие модели, конечно же, не всегда позволяют получить даже качественное согласие с наблюдательными данными. В частности, достаточно скоро стало очевидно, что при адиабатической аккреции газа на черную дыру его излучение оказывается слишком мало. Подобный результат находится уже в прямом противоречии с данными наблюдений кандидатов в черные дыры. Впрочем, объяснение этого факта было быстро найдено — сильное энерговыделение может происходить в аккреционных дисках, в которых эффекты неидеальности неизбежно становятся определяющими. Такие аккреционные диски естественным образом возникают в двойных системах, у которых удельный угловой момент аккрецирующего вещества достаточно велик.

Очевидно, что движение газа в аккреционных дисках не может быть описано в рамках уравнений идеальной гидродинамики. Действительно, аккреционный диск представляет собой газ, который приближается к компактному объекту (нейтронной звезде, черной дыре) по спирали за счет вязкого трения, выделяя свою гравитационную энергию в виде тепла и излучения. Если газ излучает значительную часть своей энергии и, значит, сам остается холодным, то диск является тонким. Приближение тонкого диска хорошо выполняется во внешних его областях. Так, оценки показывают, что для активных ядер этот режим реализуется при $r \gg r_g$, где величина

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} \tag{1.4}$$

представляет собой гравитационный радиус. Другой крайний случай — толстый диск, в котором излученная энергия полностью поглощается аккрецирующим веществом. Он может быть реализован лишь при достаточно больших темпах аккреции. При этом приближение толстого диска может быть выполнено лишь вблизи черной дыры ($r < 20r_g$), где и происходит основное энерговыделение.

Для активных ядер рентгеновский спектр, ассоциируемый с центральными областями аккреционного диска ($r < 10r_g$), обычно можно представить в виде суммы двух компонент: жесткой степенной (до 100 кэВ) и более мягкой в континууме и линиях излучения (в основном в отраженной линии железа — 6,4 кэВ). Поэтому вероятнее всего, что в аккреции на центральный объект участвует как горячий ($T > 10^8$ К), так и сравнительно холодный ($T \sim 10^6$ К) газ [Mushotzky, Done, Pounds, 1993]. Горячая и холодная фазы, скорее всего, интенсивно взаимодействуют, но рассмотреть это взаимодействие не представляется возможным до тех пор, пока не будет определена геометрия источника — взаимное расположение горячей и холодной фаз.

В модели *диск + корона* холодная фаза представляет собой диск, а горячая — оптически тонкую корону над ним. В этой модели нагрев короны может быть связан, например, с перезамыканием мелкомасштабного магнитного поля, выносимого из области диска за счет турбулентной диффузии. Предположение о наличии короны наиболее последовательно объясняет особенности спектров дисков [Liang, 1977; Haardt, Marashi, 1991, 1993]. Действительно, в таком случае мягкие фотоны от диска претерпевают обратное комптоновское рассеяние на горячем веществе короны, что и дает наблюдаемый жесткий степенной спектр. При этом часть высокоэнергетичных фотонов возвращается к диску, нагревая его, что мы и наблюдаем в виде эмиссионных линий. Как показывает моделирование, распределение энергии по спектру лучше объясняется, если предположить, что корона неоднородна, поэтому энергия выделяется порциями, а не однородно во времени, подобно тому, как это имеет место в звездных коронах [Haardt, Marashi, Ghisellini, 1994]. Как мы увидим, корона может играть заметную роль и в формировании струйных выбросов.

Альтернативная модель объясняет некоторые особенности спектра в предположении, что система представляет собой *холодные облака, погруженные в горячую среду* [Guilbert, Rees, 1988; Celotti, Fabian, Rees, 1992; Kuncic, Celotti, Rees, 1997]. В этом случае вблизи центрального объекта диск как таковой отсутствует. Важным преимуществом данной модели является то, что в ней легко добиться теплового и вязкого равновесия. Основное ее отличие от предыдущей модели заключается в том, что линия железа не обязательно излучается в непосредственной близости от центрального объекта. Эта модель дает хорошие результаты для источников нашей Галактики, связанных с аккреционными дисками. Кроме того, она может объяснить некоторые особенности спектров галактических ядер.

Теория гидродинамической дисковой аккреции на компактные объекты (нейтронные звезды, черные дыры) активно развивается с конца шестидесятых годов [Lynden-Bell, 1969; Шакура, 1972; Shakura, Sunyaev, 1973; Novikov, Thorne, 1973], однако до сих пор многие ее детали оставались невыясненными. Поэтому приходилось пользоваться упрощенными решениями, такими как стандартная модель (α-диск) [Shakura, Sunyaev, 1973], а также их различными модификациями [Abramowicz et al., 1988; Narayan, Yi, 1994].

Не нужно забывать и о том, что в случае аккреции на черную дыру эффекты общей теории относительности приводят к двум новым существенным свойствам.

1. Во-первых, как хорошо известно, на малых расстояниях от черной дыры отсутствуют устойчивые круговые орбиты. Так, для шварцшильдовской (невращающейся) черной дыры радиус r_0 предельной орбиты составляет [Шапиро, Тьюколски, 1985]

$$r_0 = 3r_{\rm g}. \tag{1.5}$$

Это значит, что аккрецирующее вещество, попавшее в область $r < r_0$, достаточно быстро, точнее, за динамическое время

$$\tau_{\rm d} \sim \left[\frac{v_r(r_0)}{c}\right]^{-1/3} \frac{r_{\rm g}}{c}, \tag{1.6}$$

приблизится к горизонту черной дыры. Важно, что такое движение будет иметь место и при отсутствии вязкости. При аккреции же на нейтронную звезду со слабым магнитным полем медленное движение по спирали происходит вплоть до самой поверхности. Отметим, что в большинстве случаев при анализе релятивистских эффектов, учет которых необходим при построении последовательной модели аккреции на черную дыру, обсуждение ограничивалось использованием модельного гравитационного потенциала Пачинского–Вииты [Paczyński, Wiita, 1980]:

$$\varphi_{\rm g} = -\frac{GM}{r - r_{\rm g}}, \tag{1.7}$$

который, хотя и позволяет во многих случаях смоделировать реальную ситуацию (например, рассчитать радиус последней устойчивой отбиты), все же не полностью соответствует метрике Шварцшильда.

2. Во-вторых, принципиально важным является то обстоятельство, что аккреция на черную дыру должна иметь трансзвуковой характер.

Действительно, как будет показано ниже, на горизонте черной дыры течение должно быть сверхзвуковым. С другой стороны, как будет видно из оценки (1.14), в рамках стандартного подхода условие малости радиальной скорости ($v_r \ll c_s$) остается справедливым вплоть до последней устойчивой орбиты, по крайней мере для не слишком больших темпов аккреции. Поэтому звуковая поверхность, на которой по определению полоидальная скорость вещества сравнивается со скоростью звука, расположена где-то между горизонтом и последней устойчивой орбитой. Таким образом, вопрос о структуре аккреционного течения на черную дыру требует последовательного анализа трансзвукового режима течения.

УПРАЖНЕНИЕ. Покажите, что для потенциала Пачинского–Виита (1.7):

а) радиус последней устойчивой орбиты, как и в метрике Шварцшильда, задается соотношением (1.5);

б) орбитальная скорость $v = v_\varphi$ на последней устойчивой орбите отличается от релятивистского значения $v_{\text{рел}} = c/2$:

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\, c \tag{1.8}$$

(соответственно будет отличаться и удельный угловой момент $L = rv_\varphi$).

Здесь же можно упомянуть и еще один чрезвычайно интересный вопрос, который также связан с использованием упрощенных уравнений. Он касается проблемы причинности, возникающей в случае стандартной записи вязких членов в уравнениях гидродинамики [Narayan, 1992; Narayan, Loeb, Kumar, 1994]. При использовании стандартного подхода приходилось ставить дополнительные граничные условия на горизонте черной дыры [Narayan, Kato, Honma, 1997; Chen, Abramowicz, Lasota, 1997], который по определению не может быть причинно связан с аккрецирующей плазмой.

Следует отметить, что интерес к теории аккреционных дисков со временем не ослабевает, что не удивительно, поскольку увеличение чувствительности приемной аппаратуры постоянно дает новую и новую информацию о свойствах аккрецирующих систем. Поэтому в последнее время наблюдался несомненный рост количества публикаций, посвященных данному вопросу [Igumenshchev, Abramowicz, Narayan, 2000; Artemova et al., 2001]. При этом все чаще исследование аккреции проводится с использованием метрики Керра [Riffert, Herold, 1995; Peitz, Appl, 1997, 1998; Gammie, Popham, 1998ab; Beloborodov, 1998], позволяющей естественным образом включить также и эффекты, связанные с вращением черной дыры. Большое внимание было уделено гидродинамическим уравнениям с ненулевой вязкостью, в которых, однако, не возникает трудностей, связанных с причинностью [Gammie, Popham, 1998ab; Kley, Papaloizou, 1997]. Это позволило снять многие вопросы, относящиеся к проблеме граничных условий.

1.1.2. Стандартная модель. Напомним, что в основе стандартной модели лежат два упрощающих предположения (см., например, [Шапиро, Тьюколски, 1985]):

1) предположение о том, что тензор вязких напряжений $t_{r\varphi}$, приводящий к потере углового момента плазмы и, следовательно, к ее аккреции, может быть представлен в модельном виде:

$$t_{r\varphi} = \alpha_{\rm SS} P, \tag{1.9}$$

где P — давление газа, а феноменологический параметр $\alpha_{\rm SS} < 1$ считается постоянной величиной;

2) предположение о полном переизлучении *in situ* энергии, выделяемой в результате вязкого трения:

$$F^+ = F^-. \tag{1.10}$$

При этом величина F^+ соответствует вязкому нагреву плазмы единичной площади диска:

$$F^+ \approx H t_{r\varphi} r \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}r}, \tag{1.11}$$

а тепловое излучение единицы площади, пропорциональное четвертой степени температуры, обычно оценивается как

$$F^- \approx \frac{2}{3}\frac{aT^4 c}{\varkappa \rho H}. \tag{1.12}$$

Здесь H — толщина аккреционного диска; угловая скорость $\Omega = v_\varphi/r$; $\varkappa$ — коэффициент непрозрачности; a — постоянная излучения.

Как хорошо известно, сделанных предположений оказывается достаточно для того, чтобы в случае тонкого диска все параметры течения можно было найти с помощью простых аналитических соотношений. В частности, в рамках этой модели

— вращение плазмы происходит практически с кеплеровской скоростью: $v_\varphi \approx v_{\rm K} = (GM/r)^{1/2}$;

— толщина диска H определяется балансом силы гравитации и градиента давления:

$$\frac{H}{r} \approx \frac{c_{\rm s}}{v_{\rm K}}; \tag{1.13}$$

— радиальная скорость на расстояниях, больших радиуса звуковой поверхности, мала по сравнению с азимутальной:

$$\frac{v_r}{v_{\rm K}} \approx \alpha_{\rm SS}\frac{c_{\rm s}^2}{v_{\rm K}^2}; \tag{1.14}$$

— звуковая поверхность находится вблизи последней устойчивой орбиты.

При этом величинами, полностью характеризующими аккрецию, являются естественные физические параметры: масса компактного объекта M, скорость аккреции $\dot M$ и параметр $\alpha_{\rm SS}$. Именно чрезвычайная простота стандартной модели и стала причиной того, что в течение многих лет она рассматривалась как базовая [Шапиро, Тьюколски, 1985; Липунов, 1987].

С другой стороны, сама природа ключевого параметра модели — величины $\alpha_{\rm SS}$ — до сих пор остается неясной. Во всяком случае она не может быть связана с обычной молекулярной вязкостью, поскольку тогда величина $\alpha_{\rm SS}$ не превышала бы значений 10^{-6} [Шапиро, Тьюколски, 1985]. Однако, как непосредственно следует из наблюдений, $\alpha_{\rm SS}$ оказывается значительно больше. Естественно было бы связать ее с турбулентностью (магнитной) [Balbus, Hawley, 1998]; вместе с тем лишь в самое последнее время появились первые работы, в которых удалось определить величину параметра $\alpha_{\rm SS}$ «из первых принципов» [Brandenburg et al., 1995; Hawley, Gammie, Balbus, 1995; Stone et al., 1996; Arlt, Rüdiger, 2001].

Кроме того, в последние годы возникла проблема так называемой медленной аккреции: было обнаружено, что многие ядра галактик излучают намного меньше, чем предсказывает стандартная модель (до $10^{-7}\dot{M}c^2$). Именно этот случай реализуется в нашей собственной Галактике [Narayan et al., 1998; Mahadevan, 1998], а также в гигантских эллиптических галактиках, проявляющих активность, но с низкой светимостью [Reynolds et al., 1996a; DiMatteo, Fabian, 1997; Mahadevan, 1997]. Относительно неэффективной (в смысле регистрируемого излучения) является и сверхкритическая аккреция, при которой темпы аккреции существенно превышают эддингтоновский предел и достигается равновесие между давлением падающего вещества и давлением излучения, выходящего из внутренних слоев. Подобная ситуация может реализоваться в радиоспокойных квазарах и в квазарах с широкими линиями поглощения.

Объяснить малую излучательную способность в указанных случаях можно следующим образом. Черные дыры отличаются от других астрофизических объектов тем, что не имеют поверхности и поглощают не только падающее на них вещество, но и излучение. Поэтому если «заставить» газ либо не излучать свою гравитационную или магнитную энергию, либо направлять излученный поток прямо на черную дыру, то вся энергия поглотится вместе с веществом, а удаленный наблюдатель увидит, что переработка гравитационной энергии в уходящее излучение происходит с низкой эффективностью. Первый случай реализуется, если темпы аккреции очень малы. Второй же может реализоваться в оптически толстых дисках, когда выделяемая в виде тепла энергия не успевает излучиться и в конечном счете все равно попадает в черную дыру вместе с веществом.

Важным наблюдательным тестом здесь было бы сравнение эффективности излучения слабых источников, ассоциируемых с черными дырами, и других аккреторов, например нейтронных звезд. Если бы оказалось, что аккрецирующие черные дыры излучают существенно менее эффективно, появился бы сильный аргумент в пользу того, что поглощение энергии черной дырой действительно имеет место. Однако ясности в данном вопросе пока нет, поскольку имеются публикации как подтверждающие [Garcia et al., 2001], так и опровергающие [Abramowicz, Kluźniak, Lasota, 2002] это утверждение. Подобная неопределенность связана со сложностями в выделении группы самых слабых источников.

Ясно, что для объяснения природы слабоизлучающих объектов нужно включить в рассмотрение радиальный перенос энергии. Впервые такой анализ был выполнен в работе Б. Пачинского и Г. С. Бисноватого–Когана [Paczyński, Bisnovatyi-Kogan, 1981]. Они показали, что усредняя двумерные (т. е. осесимметричные стационарные) уравнения гидродинамики в направлении, перпендикулярном плоскости тонкого диска, можно свести их к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых все величины будут зависеть лишь от радиальной координаты r. В простейшей нерелятивистской версии соответствующая система уравнений выглядит следующим образом [Artemova et al., 2001]:

— уравнение непрерывности:

$$\dot{M} = 2\pi r H \rho v; \tag{1.15}$$

— r-компонента уравнения Эйлера:

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} + \left(\Omega^2 - \Omega_\mathrm{K}^2\right) r; \tag{1.16}$$

— φ-компонента уравнения Навье–Стокса, проинтегрированная по r:

$$\frac{\dot{M}}{4\pi}(l - l_0) + r^2 H t_{r\varphi} = 0; \tag{1.17}$$

— θ-компонента уравнения Эйлера, эквивалентная (1.13):

$$H = \frac{c_\mathrm{s}}{\Omega_\mathrm{K}}; \tag{1.18}$$

— уравнение энергии:

$$F^+ - F^- = -\frac{\dot{M}}{2\pi r}\left[\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r} + P\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]. \tag{1.19}$$

Здесь $E = 3\mathcal{R}T/2 + aT^4/\rho$ есть полная энергия на одну частицу (где $\mathcal{R}$ — газовая постоянная); $l = \Omega r^2$ — удельный угловой момент; l_0 — константа интегрирования. При этом плотность ρ, давление P, скорость $v = v_r$ и энергия E соответствуют своим значениям в экваториальной плоскости. В девяностых годах XX века анализ уравнений (1.15)–(1.19) и их обобщений, позволяющих включить в рассмотрение эффекты общей теории относительности, представлял собой одно из основных направлений, посвященных дисковой аккреции на компактные объекты [Riffert, Herold, 1995; Peitz, Appl, 1997, 1998; Gammie, Popham, 1998ab; Beloborodov, 1998].

1.1.3. ADAF, ADIOS и другие. В качестве еще одного из решений проблемы неэффективности энерговыделения при аккреции были предложены течения с доминирующей адвекцией (переносом) энергии аккрецирующим веществом — так называемые ADAF (advection dominated accretion flows) [Ichimaru, 1977; Narayan, Yi, 1994]. Такое течение должно иметь вид толстого квазисферического диска, в котором радиальная скорость близка к тороидальной: $v_r \sim v_\varphi$. Этот режим может быть осуществлен в случае достаточно медленной ($\dot{M} \ll \dot{M}_{\rm Ed}$) аккреции оптически тонкого газа.

В основе указанных моделей лежит хорошо известное свойство, согласно которому при вязком трении нагрев приводит к увеличению температуры тяжелых частиц (ионов), тогда как легкие частицы (электроны), с которыми связан механизм излучения, могут оставаться холодными [Брагинский, 1963]. Если предположить, что ионы и электроны достаточно медленно обмениваются энергией, то вязкий нагрев не должен сопровождаться эффективной ее потерей. Поэтому энергия будет переноситься вместе с аккрецирующим веществом и в итоге поглощаться черной дырой. Эта модель была разработана достаточно детально [Narayan, Yi, 1995ab; Abramowicz et al., 1995; Chen et al., 1995; Igumenshchev, Abramowicz, Novikov, 1998; Medvedev, Narayan, 2000] и позволила объяснить множество наблюдательных фактов, например светимость и спектр центрального источника в нашей Галактике [Narayan, Mahadevan, Quataert, 1998; Mahadevan, 1998]. Она также обсуждалась в связи с активными эллиптическими галактиками с низкой светимостью [Reynolds et al., 1996a; DiMatteo, Fabian, 1997; Mahadevan, 1997], с галактикой NGC4258 [Lasota et al., 1996] и с некоторыми другими источниками в нашей Галактике. Вместе с тем иногда возникали и сложности с согласованием модели с наблюдениями. В частности, не наблюдался предсказанный ею поток от источников в радиодиапазоне [Herrnstein et al., 1998; DiMatteo et al., 1999] (см., однако, [Celotti, Rees, 1999]).

Кроме того, и в физическом описании рассматриваемой модели имеют место явные пробелы.

1. В рамках ADAF предполагается, что нагрев ионов происходит более эффективно, чем нагрев электронов, и что обмен энергией между двумя сортами частиц является малоэффективным. Поэтому вещество диска должно существовать в виде двухтемпературной плазмы, так что вблизи внутреннего края аккреционного диска температуры ионов и электронов должны сильно отличаться друг от друга ($T_{\rm i} \sim 10^{12}$ K, $T_{\rm e} \sim 10^9$ K) [Quataert, 1998; Gruzinov, 1998; Begelman, Chiueh, 1988; Blackman, 1999; Quataert, Gruzinov, 1999]. Однако подобные предположения не являются очевидными. Например, не учтена возможность нагрева электронов за счет пересоединения магнитных силовых линий [Bisnovatyi-Kogan, Lovelace, 1997], хотя этот процесс, несомненно, имеет место (он непосредственно наблюдается в солнечных вспышках) и очень эффективен.

2. Предполагается, что суммарная энергия падающего газа положительна, а значит диск в целом не является гравитационно связанным. В результате в такой системе после перераспределения энергии и падения части газа на черную дыру могут возникнуть истекающие струи (джеты), которые в рамках ADAF не учитываются [Blandford, Begelman, 1999].

3. Рассмотренное решение является автомодельным; поэтому в его рамках невозможно удовлетворить естественным граничным условиям на бесконечности и вблизи гравитирующего центра.

4. Есть указания на то, что подобный режим аккреции неустойчив относительно тепловых возмущений, концентрации вещества в сгустки и т. п. [Blandford, 2002].

Недавно была предложена модифицированная модель течений с доминирующей адвекцией, в принципе решившая проблему положительной энергии связи, — так называемая ADIOS (advection dominated inflow-outflow solutions) [Blandford, Begelman, 1999]. Помимо втекающего потока с отрицательной суммарной энергией в ней введен истекающий более или менее изотропный ветер. В рамках этой модели только малая часть вещества, поступающего с больших расстояний, в итоге падает на черную дыру. Тем самым объясняется низкая эффективность излучения и решается проблема избытка излучения в радиодиапазоне [Beckert, 2000; Becker, Subramanian, Kazanas, 2001].

Однако и эта модель сталкивается с определенными трудностями.

1. Для эжекции вещества необходимо, чтобы его энергия (величина интеграла Бернулли E) была положительной. Вместе с тем при дисковой аккреции энергия связи газа, вращающегося по кеплеровским орбитам, заведомо отрицательна. Как показал подробный анализ, для достаточно малой вязкости ($\alpha_{\rm SS} < 0{,}1$) такой режим истечения оказывается невозможным [Abramowicz, Lasota, Igumenshchev, 2000]. Об этом говорят как условия регулярности на особых поверхностях, однозначно показывающие, что энергия падающего вещества должна быть отрицательной, так и прямые численные расчеты [Narayan, Kato, Honma, 1997; Chen, Abramowicz, Lasota, 1997; Abramowicz et al., 1988; Gammie, Popham, 1998ab; Ogilvie, 1999].

2. Положительная величина энергии связи является необходимой, но не достаточной причиной истечения (как известно, интеграл Бернулли в сферически-симметричной аккреции Бонди положителен).

Таким образом, в целом можно сделать вывод о том, что даже в простейшем гидродинамическом приближении теория аккреции на компактные объекты еще очень далека от своего завершения. В частности, в рамках чисто гидродинамического подхода пока не удалось построить достаточно убедительную модель центральной машины в активных галактических ядрах, которая приводила бы к эффективному истечению вещества и, следовательно, давала начало струйным выбросам, уносящим значительную часть освобождаемой энергии. Истечение могло бы быть связано с сильно нагретой короной, но в этом случае рентгеновская светимость активных ядер должна была бы быть значительно выше, чем следует из наблюдений. Кроме того, несмотря на различные модификации, модели течений с доминирующей адвекцией пока не дают последовательного объяснения неэффективно излучающих источников. Однако несомненно, что для полного описания аккреции учет адвекции — как перемешивания вещества, так и явлений переноса энергии — совершенно необходим [Bisnovatyi-Kogan, Lovelace, 2001].

С другой стороны, нельзя не отметить, что подробные расчеты показали достаточную устойчивость стандартной модели. В частности, для широкого класса аккреционных течений и в широком интервале расстояний от гравитирующего центра азимутальная скорость вращения аккрецирующего вещества мало отличается от кеплеровской скорости, а звуковая поверхность находится вблизи последней устойчивой орбиты. Отличие возникает лишь вблизи горизонта черной дыры, когда становятся существенными релятивистские эффекты.

1.2. Основные свойства трансзвуковых гидродинамических течений

1.2.1. Основные уравнения. Перейдем к подробному описанию осесимметричных стационарных гидродинамических течений. Начнем с самого начала. Запишем уравнения идеальной стационарной ($\partial/\partial t = 0$) гидродинамики в плоском пространстве [Ландау, Лифшиц, 1986]. Полная система уравнений включает в себя

— уравнение непрерывности:

$$\nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0; \tag{1.20}$$

— уравнение Эйлера:

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla P}{m_{\mathrm{p}} n} - \nabla\varphi_{\mathrm{g}}; \tag{1.21}$$

— условие идеальности:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla s = 0; \tag{1.22}$$

— уравнение состояния:

$$P = P(n, s). \tag{1.23}$$

Последнее соотношение может быть переписано в виде

$$\mathrm{d}P = m_{\mathrm{p}} n \mathrm{d}w - nT\mathrm{d}s. \tag{1.24}$$

Здесь n [см$^{-3}$] — концентрация; s — энтропия на одну частицу (безразмерна); w [см^2/с^2] — удельная энтальпия; m_{p} [г] — масса частиц ($\rho = m_{\mathrm{p}} n$ — плотность); T [эрг] — температура в энергетических единицах; ниже c_s [см/с] — скорость звука. Для политропного уравнения состояния:

$$P = k(s)n^{\Gamma}, \tag{1.25}$$

которым мы для простоты будем пользоваться в дальнейшем, для $\Gamma = \mathrm{const} \neq 1$ имеем

$$c_s^2 = \frac{1}{m_\mathrm{p}}\left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)_s = \frac{1}{m_\mathrm{p}}\Gamma k(s) n^{\Gamma-1}; \tag{1.26}$$

$$w = \frac{c_s^2}{\Gamma - 1}; \tag{1.27}$$

$$T = \frac{m_\mathrm{p}}{\Gamma} c_s^2. \tag{1.28}$$

Упражнение. Воспользовавшись термодинамическим тождеством (1.24) и явными выражениями (1.25)–(1.28), покажите, что для $\Gamma = \mathrm{const} \neq 1$ функция $k(s)$ должна иметь вполне определенный вид:

$$k(s) = k_0 e^{(\Gamma-1)s}. \tag{1.29}$$

Уже здесь можно сделать ряд важных замечаний.

1. Уравнение Эйлера (1.21) вместе с соотношениями (1.20), (1.22) и (1.24) может быть переписано в виде закона сохранения потока энергии:

$$\nabla \cdot \left[n\mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + w + \varphi_\mathrm{g} \right) \right] = 0. \tag{1.30}$$

Используя теперь уравнение непрерывности (1.20), получаем

$$\mathbf{v} \cdot \nabla E = 0, \tag{1.31}$$

где

$$E = \frac{v^2}{2} + w + \varphi_\mathrm{g}. \tag{1.32}$$

Это хорошо известный интеграл Бернулли, который, как мы видим, должен сохраняться на линиях тока.

2. Уравнение энергии (1.30) вместе с уравнением Эйлера (1.21) могут быть переписаны в форме четырехмерного закона сохранения энергии-импульса:

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0, \tag{1.33}$$

где для $\varphi_\mathrm{g} = 0$

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \dfrac{n m_\mathrm{p} v^2}{2} + n\epsilon & n m_\mathrm{p} \mathbf{v} \left(\dfrac{v^2}{2} + w \right) \\ m_\mathrm{p} n v^i & P\delta^{ik} + n m_\mathrm{p} v^i v^k \end{pmatrix}. \tag{1.34}$$

Здесь ϵ — внутренняя энергия. В дальнейшем греческие индексы α, β будут соответствовать четырехмерным величинам, а латинские индексы i, j, k — трехмерным.

3. Уравнения гидродинамики представляют собой систему из пяти нелинейных уравнений для пяти неизвестных: двух термодинамических функций и трех компонент скорости $\mathbf{v}$.

Упражнение. Проверьте соотношения (1.30)–(1.34).

1.2.2. Сферически-симметричное течение. В качестве простейшего, но очень важного примера рассмотрим сферически-симметричное течение. Поскольку, как мы видели, уравнения идеальной гидродинамики могут быть записаны в виде законов сохранения, для чисто радиального течения имеем

— уравнение непрерывности:

$$\Phi = 4\pi r^2 n(r) v(r) = \text{const}; \tag{1.35}$$

— условие идеальности:

$$s = \text{const}; \tag{1.36}$$

— уравнение энергии:

$$E = \frac{v^2(r)}{2} + w(r) + \varphi_\mathrm{g}(r) = \text{const}. \tag{1.37}$$

В результате, зная три параметра, Φ, s и E, можно определить все физические характеристики течения. Действительно, переписав уравнение Бернулли (1.37) как

$$E = \frac{\Phi^2}{32\pi^2 n^2 r^4} + w(n, s) + \varphi_\mathrm{g}(r), \tag{1.38}$$

мы видим, что оно содержит лишь одну неизвестную величину — концентрацию n. Следовательно, это алгебраическое уравнение в неявной форме задает концентрацию n как функцию трех инвариантов и радиуса r:

$$n = n(E, s, \Phi; r). \tag{1.39}$$

Вместе с энтропией s данное соотношение дает возможность определить и все остальные термодинамические функции, а благодаря соотношению (1.35) — и скорость течения v.

Необходимо подчеркнуть, что уравнение (1.38) имеет особенность на звуковой поверхности. Чтобы показать это, определим производную $\mathrm{d}n/\mathrm{d}r$. Дифференцируя уравнение (1.38) по r, для гравитационного потенциала $\varphi_\mathrm{g} = -GM/r$ имеем

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_s - \frac{\Phi^2}{16\pi^2 n^3 r^4}\right] - \frac{\Phi^2}{8\pi^2 n^2 r^5} + \frac{GM}{r^2} = 0. \tag{1.40}$$

Воспользовавшись термодинамическим соотношением (1.24), для логарифмической производной η_1 получаем

$$\eta_1 = \frac{r}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r} = \frac{2v^2 - GM/r}{c_s^2 - v^2} = \frac{2 - GM/(rv^2)}{-1 + c_s^2/v^2} = \frac{N}{D}. \tag{1.41}$$

Видно, что производная (1.41) имеет особенность, если скорость вещества равна скорости звука: $v = c_\mathrm{s} = c_*$ $(D = 0)$. Следовательно, для гладкого прохождения звуковой поверхности $r = r_*$ должно быть выполнено дополнительное условие:

$$N(r_*) = 2 - \frac{GM}{r_* c_*^2} = 0. \tag{1.42}$$

Иными словами, трансзвуковые течения являются двухпараметрическими. Как показано на рис. 1.1, звуковая поверхность является X-точкой на плоскости «расстояние r–скорость v».

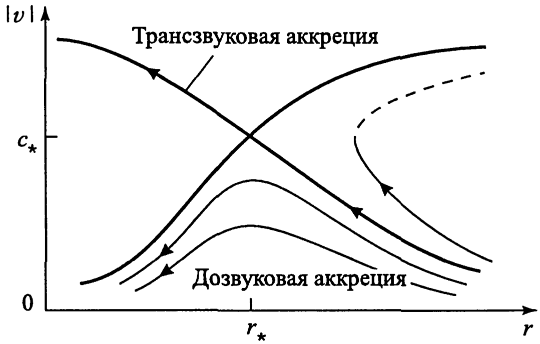


Рис. 1.1. Структура сферически-симметричной аккреции. Трансзвуковое течение соответствует критической скорости аккреции $\Phi = \Phi_{\rm crit}$ (см. (1.55)); кривые ниже X-точки — дозвуковой аккреции с $\Phi < \Phi_{\rm crit}$

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Для случая сферически-симметричной трансзвуковой аккреции (так называемой аккреции Бонди), при которой аккрецирующее вещество имеет нулевую скорость при $r \to \infty$, интеграл Бернулли E может быть выражен через скорость звука на бесконечности:

$$E = w_\infty = \frac{c_\infty^2}{\Gamma - 1}.$$

Используя соотношения (1.35)–(1.37) и (1.42), получите известные выражения для скорости звука c_* и концентрации n_* на звуковом радиусе r_* [Bondi, 1952]:

$$c_*^2 = \left(\frac{2}{5 - 3\Gamma}\right) c_\infty^2; \tag{1.43}$$

$$n_* = \left(\frac{2}{5 - 3\Gamma}\right)^{1/(\Gamma-1)} n_\infty; \tag{1.44}$$

$$r_* = \left(\frac{5 - 3\Gamma}{4}\right) \frac{GM}{c_\infty^2}. \tag{1.45}$$

2. Покажите, что

$$\eta_1(r_*) = \frac{-4 \pm \sqrt{10 - 6\Gamma}}{\Gamma + 1}, \tag{1.46}$$

где знак *плюс* соответствует аккреции, а знак *минус* — эжекции.

3. Покажите, что для сферически-симметричной аккреции

а) при $r \gg r_*$ (дозвуковой режим) течение можно считать несжимаемым:

$$n(r) \approx \text{const}; \tag{1.47}$$

$$v(r) \propto r^{-2}; \tag{1.48}$$

б) при $r \ll r_*$ (сверхзвуковое течение) движение частиц близко к свободному падению:

$$n(r) \propto r^{-3/2}; \tag{1.49}$$

$$v(r) \approx \left(\frac{2GM}{r}\right)^{1/2} \tag{1.50}$$

4. Покажите, что для сферически-симметричного трансзвукового истечения (истечения Паркера [Parker, 1958])

а) физические параметры при звуковой поверхности $r = r_*$, где

$$r_* = \frac{GM}{2c_*^2}, \tag{1.51}$$

связаны с соответствующими значениями на поверхности звезды $r = R$ как

$$c_*^2 = \left(\frac{2}{5-3\Gamma}\right) c_R^2 + \left(\frac{\Gamma-1}{5-3\Gamma}\right)\left(v_R^2 - \frac{2GM}{R}\right); \tag{1.52}$$

$$n_* = n_R \left(\frac{c_*^2}{c_R^2}\right)^{1/(\Gamma-1)}; \tag{1.53}$$

б) радиальная скорость на поверхности звезды должна составлять

$$v_R = c_* \left(\frac{c_*^2}{c_R^2}\right)^{1/(\Gamma-1)} \left(\frac{r_*}{R}\right)^2. \tag{1.54}$$

Будучи чрезвычайно упрощенной моделью, радиальное одномерное течение тем не менее позволяет сформулировать несколько важных свойств, причем многие из них, как мы увидим, останутся справедливыми и для уравнения Грэда–Шафранова.

1. При отсутствии границ звуковая поверхность может быть пройдена лишь в гравитационном поле. Действительно, числитель N в (1.41) может быть равен нулю только в присутствии гравитационного слагаемого GM/rv^2.

2. Решения (1.43)–(1.45) и (1.52) имеют особенность при $\Gamma = 5/3$. Это означает, что при $\Gamma = 5/3$ увеличение/уменьшение скорости звука за счет адиабатического нагрева/охлаждения в точности совпадает с изменением скорости движения вещества. В результате в нерелятивистском случае для $\Gamma > 5/3$ трансзвуковое течение не может быть реализовано.

3. Трансзвуковая задача является двухпараметрической. Это означает, что для полного определения трансзвукового течения нужно задать два граничных условия, например плотность $\rho_\infty = m_\text{p} n_\infty$ и скорость звука c_∞ на бесконечности. Тогда все остальные параметры могут быть выражены через эти величины. Например, для полного

темпа аккреции имеем $\Phi_{\text{tot}} = \Phi_{\text{crit}}$, где

$$\Phi_{\text{crit}} = 4\pi r_*^2 c_* n_* = \pi\left(\frac{2}{5-3\Gamma}\right)^{(5-3\Gamma)/2(\Gamma-1)} \frac{(GM)^2}{c_\infty^3} n_\infty. \tag{1.55}$$

С другой стороны, для данных значений n_∞ и c_∞ существует бесконечное число дозвуковых течений с $\Phi < \Phi_{\text{crit}}$ (см. рис. 1.1).

4. Для заданной структуры течения числа интегралов движения достаточно для того, чтобы все его параметры могли быть определены из алгебраических соотношений.

Последнее свойство и является, фактически, ключевым свойством рассматриваемого подхода. Действительно, алгебраические соотношения (1.35)–(1.37) вместе с уравнением состояния позволяют определить все физические параметры течения (скорость $v(r)$, температуру $T(r)$ и т. д.) через инварианты E и s, а также функцию тока Φ. Это свойство остается справедливым и для произвольного двумерного течения. С другой стороны, понятно, что в общем случае структура самого течения (т. е. функция $\Phi(r,\theta)$) заранее не известна. Для ее определения необходимо использовать все пять гидродинамических уравнений.

1.2.3. Плоское потенциальное течение. В качестве простейшего примера течения, структура которого заранее не известна, рассмотрим плоское потенциальное течение без гравитации. В этом случае скорость $\mathbf{v}$, лежащую в плоскости xy, можно определить из условия

$$\mathbf{v} = \nabla\phi(x,y), \tag{1.56}$$

где $\phi(x,y)$ — скалярный потенциал. Кроме того, для простоты положим, что интегралы E и s постоянны во всем пространстве:

$$E = \text{const}, \qquad s = \text{const}. \tag{1.57}$$

Тогда уравнение непрерывности $\nabla\cdot(n\mathbf{v}) = 0$ может быть переписано как

$$\nabla^2\phi + \frac{\nabla n\cdot\nabla\phi}{n} = 0. \tag{1.58}$$

Наконец, используя уравнение Эйлера для определения величины $\nabla n\cdot\nabla\phi$:

$$\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) + c_{\text{s}}^2\frac{\nabla n\cdot\nabla\phi}{n} = 0,$$

получаем

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} + \frac{(\phi_y)^2\phi_{xx} - 2\phi_x\phi_y\phi_{xy} + (\phi_x)^2\phi_{yy}}{(\nabla\phi)^2 D} = 0. \tag{1.59}$$

Здесь опять

$$D = -1 + \frac{c_s^2}{v^2}, \tag{1.60}$$

а нижние индексы обозначают частные производные по соответствующим координатам.

Уравнение (1.59) в частных производных второго порядка хорошо известно; его можно найти во многих учебниках (см., например, [Ландау, Лифшиц, 1986]). Оно обладает следующими свойствами, большинство из которых, как мы увидим, останется справедливым и для уравнения Грэда–Шафранова.

1. Для определения величины c_s^2 уравнение (1.59) должно быть дополнено уравнением Бернулли. В случае политропного уравнения состояния скорость звука c_s может быть явно выражена через величины E и ϕ:

$$c_s^2 = (\Gamma - 1)E - \frac{\Gamma - 1}{2}(\nabla\phi)^2. \tag{1.61}$$

2. Вместе с уравнением Бернулли уравнение (1.59) содержит только потенциал $\phi(x, y)$ и инвариант E (оно не содержит энтропию s, однако знание s нужно для определения концентрации n).

3. При $n = \text{const}$ ($c_s^2 \to \infty$) уравнение становится линейным.

4. В общем случае оно нелинейно, однако всегда линейно относительно старших производных.

5. Уравнение (1.59) является эллиптическим для дозвукового течения (при $D > 0$).

6. Уравнение (1.59) является гиперболическим для сверхзвукового течения (при $D < 0$).

7. При известной структуре течения (т. е. для заданных $\phi(x, y)$, E и s) все физические параметры определяются из алгебраических соотношений.

8. Уравнение (1.59) не содержит явно координат x и y.

Последнее свойство позволяет провести так называемое преобразование годографа, т. е. замену переменных из физической плоскости xy в плоскость скоростей $v_x v_y$, где $v_x = v \sin\theta$, $v_y = v \cos\theta$. При этом вводится другой потенциал, $\phi_v(v, \theta)$, так что $\mathbf{r} = \nabla_{\mathbf{v}}\phi_v$. В результате уравнение (1.59) может быть переписано в виде

$$\frac{\partial^2\phi_v}{\partial\theta^2} + \frac{v^2}{1 - v^2/c_s^2}\frac{\partial^2\phi_v}{\partial v^2} + v\frac{\partial\phi_v}{\partial v} = 0. \tag{1.62}$$

Это линейное уравнение впервые было получено в 1902 году С. А. Чаплыгиным и носит его имя.

Метод преобразования годографа являлся основным направлением при анализе плоских потенциальных течений на протяжении всего XX века [Мизес, 1961; Франкль 1973]. Сформулируем два полученных в этой области важных результата, которые понадобятся нам в дальнейшем.

1. Для трансзвукового течения в общем случае невозможно решить прямую задачу (т. е. определить структуру течения по известной форме границы, например задавая форму сопла или крыла).

2. С другой стороны, можно решить обратную задачу. Этот факт основывается на фундаментальной теореме: трансзвуковое течение аналитично в критической точке (единственной точке, в которой зву- ковая поверхность ортогональна линии тока; рис. 1.2) [Франкль 1973; Ландау, Лифшиц, 1986].

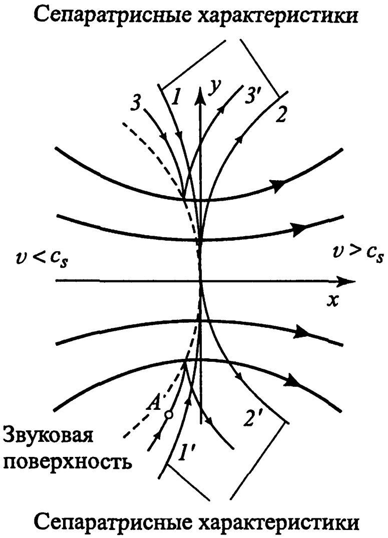


Рис. 1.2. Структура «аналитического сопла» вблизи особой точки $x = y = 0$. Характеристические поверхности (тонкие линии), пересекающие звуковую поверхность (штриховая линия) не в особой точке, имеют на ней точку возврата. Сепаратрисные характеристики касаются звуковой поверхности в особой точке

Прокомментируем приведенные утверждения. Наиболее наглядный пример, проясняющий отсутствие регулярной (т. е. не итерационной) процедуры решения уравнения (1.59) для трансзвукового течения, состоит в следующем. Как известно, число граничных условий b для произвольного (не обязательно чисто гидродинамического) течения может быть определено как [Бескин, 1997; Bogovalov, 1997a]

$$b = 2 + i - s'. \tag{1.63}$$

Здесь i — число инвариантов, а s' — число особых поверхностей. В гидродинамике единственной особенностью является звуковая поверхность. Поэтому для трансзвукового течения $s' = 1$. Далее, для плоского течения мы имеем два инварианта, E и s, так что $i = 2$. Поэтому для определения структуры трансзвукового течения необходимо задать три граничных условия на некоторой поверхности. Ими могут быть две термодинамические функции, а также тангенциальная компонента скорости, задающая потенциал ϕ на этой поверхности. Вторая (и последняя для плоского течения) компонента скорости должна определяться из решения. Однако для решения уравнения (1.59) необходимо знать интеграл Бернулли ($E = v^2/2 + w$), т. е. обе компоненты скорости на этой поверхности. Следовательно, в общем случае даже само уравнение, описывающее структуру течения, не может быть сформулировано. Для дозвуковых и сверхзвуковых течений $s' = 0$ (так что $b = 4$) и подобная трудность отсутствует.

С другой стороны, структура трансзвукового течения может быть найдена путем разложения решения вблизи особой точки (в которой мы положим $x = y = 0$). Действительно, в дополнение к инвариантам E и s (последний, как уже говорилось, необходим для определения концентрации n) можно задать x-компоненту скорости $v_x(x,0)$ вдоль оси x. При этом в первом приближении достаточно знать лишь первые два члена разложения

$$v_x(x,0) = c_* + kx + \ldots \tag{1.64}$$

Здесь $c_*^2 = 2E(\Gamma-1)/(\Gamma+1)$ (данное соотношение следует из уравнения Бернулли (1.61) при $v = c_\mathrm{s} = c_*$), так что эта величина также непосредственно определяется из граничных условий. В результате, как нетрудно проверить непосредственной подстановкой, первые члены разложения потенциала $\phi(x,y)$ будут выглядеть следующим образом [Ландау, Лифшиц, 1986]:

$$\phi(x,y) = c_*x + \frac{kx^2}{2} + \frac{k^2(\Gamma+1)}{2c_*}\,xy^2 + \frac{k^3(\Gamma+1)^2}{24c_*^2}\,y^4 + \ldots \tag{1.65}$$

Зная же все коэффициенты в разложении (1.64), можно восстановить потенциал ϕ с любой точностью. Кстати, легко проверить, что вблизи особой точки можно пренебречь y-компонентой скорости; поэтому звуковая поверхность может быть определена из условия $v_x = c_*$. Воспользовавшись явным выражением (1.65), получаем, что звуковая поверхность имеет стандартную параболическую форму:

$$x_*(y) = -\frac{k(\Gamma+1)}{2c_*}\,y^2. \tag{1.66}$$

Упражнения.

1. Покажите, что

$$n(0,y) \approx n_*\left[1 - \frac{k^2(\Gamma+1)}{2c_*^2}\,y^2 + \ldots\right]; \tag{1.67}$$

$$(nv_x)(0,y) \approx n_*c_*\left[1 - \frac{k^4(\Gamma+1)^3}{8c_*^4}\,y^4 + \ldots\right], \tag{1.68}$$

поэтому характерный масштаб $\delta y \approx c_*/k$ изменения величин в поперечном направлении оказывается таким же, как и в продольном.

2. Покажите, что, помимо оси симметрии, геометрическое место точек, в которых вектор скорости параллелен оси x, также является параболой:

$$x_0(y) = -\frac{k(\Gamma+1)}{6c_*}\,y^2. \tag{1.69}$$

Следовательно, звуковая поверхность находится в области сходящегося потока ($|x_*| > |x_0|$).

Говоря о свойствах особых точек, нельзя не упомянуть о структуре характеристических поверхностей, которые имеют место в гиперболической (т. е. сверхзвуковой) области уравнения (1.59). Как хорошо известно, для уравнения второго порядка в частных производных, записанного в канонической форме ($\mathcal{A}\phi_{xx} + 2\mathcal{B}\phi_{xy} + \mathcal{C}\phi_{yy} + \dots = 0$), дифференциальное уравнение для характеристических поверхностей имеет вид [Корн, Корн, 1984]

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathcal{B} \pm \sqrt{\mathcal{B}^2 - \mathcal{A}\mathcal{C}}}{\mathcal{C}}. \tag{1.70}$$

Воспользовавшись явным видом коэффициентов $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, получаем уравнение для определения характеристических поверхностей:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{-\,\phi_x\phi_y \pm \left(\phi_x^2 + \phi_y^2\right)\sqrt{-D(D+1)}}{\phi_x^2 + D\left(\phi_x^2 + \phi_y^2\right)}. \tag{1.71}$$

Поскольку в общем случае на звуковой поверхности частная производная $\phi_y \neq 0$, то, согласно (1.71), и производная $\mathrm{d}(x - x_*)/\mathrm{d}y$ на ней также будет отлична от нуля. Это означает, что в данной области звуковая поверхность не ортогональна линиям тока. В результате через каждую такую точку на звуковой поверхности (в отличие от любой точки в гиперболической области) будет проходить лишь одна характеристика, имеющая здесь точку возврата [Ландау, Лифшиц, 1986]. На рис. 1.2 ей соответствуют кривые *3* и *3'*. Подобная структура связана с тем, что на звуковой поверхности конус Маха вырождается в плоскость, а также с тем, что характеристики существуют лишь в гиперболической области уравнения (1.59). Однако в особых точках, в которых частная производная $\phi_x = 0$ (т. е. вблизи точки $x = y = 0$), для определения поведения характеристических поверхностей требуется более детальное рассмотрение. Оно вновь может быть проведено путем разложения решения в ряд по степеням малых смещений x и y. Вводя новую переменную

$$R = \frac{x - x_*}{D_1}, \tag{1.72}$$

где $D_1 = -(\partial D/\partial x)_{x=y=0}$ (так что здесь $D_1 > 0$), перепишем уравнение (1.71) в виде

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}y} = ay \pm \sqrt{R}, \tag{1.73}$$

где

$$a = -\frac{\left(\partial^2 D/\partial y^2\right)_{x=y=0}}{D_1^2} - \frac{(\phi_{yy})_{x=y=0}}{(\phi_x)_{x=y=0} D_1}. \tag{1.74}$$

Точное решение уравнения (1.73) может быть найдено с помощью замены

$$R(y) = w^2(y)\, y^2. \tag{1.75}$$

Подставляя выражение (1.75) в уравнение (1.73), в неявном виде получаем

$$w(y) = w_1 + C\left[w_2 - w(y)\right]^{w_2/w_1} y^{(w_2-w_1)/w_1}. \tag{1.76}$$

Здесь C — постоянная интегрирования, а величины w_1 и w_2 соответствуют двум выделенным решениям $R_{1,2}(y) = w_{1,2}^2 y^2$, в которых коэффициенты $w_{1,2}$ не зависят от координаты y. Они могут быть получены прямой подстановкой определения (1.75) в уравнение (1.73). В результате имеем

$$2w^2 \pm w - a = 0, \tag{1.77}$$

и, следовательно,

$$w_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8a}}{4}. \tag{1.78}$$

Здесь следует особо отметить, что в случае плоского потенциального течения всегда оказывается выполненным условие $a > 0$. Это условие, отвечающее стандартной особой точке, показывает, что линии тока пересекают звуковую поверхность в области сходящегося потока ($|x_*| > |x_0|$). В таком случае через особую точку будут проходить две характеристики (две входящие ветви — *1* и *1'*, и две выходящие — *2* и *2'*), соответствующие двум корням (1.78). Действительно, при $w(y) \approx w_1$ уравнение (1.76) дает

$$w(y) \approx w_1 + C(w_2 - w_1)^{w_2/w_1}\, y^m, \tag{1.79}$$

где показатель степени

$$m = -\frac{1 + 8a + \sqrt{1+8a}}{4a}. \tag{1.80}$$

Поэтому при $a > 0$, когда $m < 0$, второе слагаемое в (1.79) расходится при $y \to 0$. Следовательно, при $w \approx w_1$ через начало координат будут проходить лишь характеристики, соответствующие постоянной $C = 0$.

Для рассматриваемого случая легко получить, что

$$D_1 = (\Gamma + 1)\frac{k}{c_*}, \quad \left(\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\right)_{x=y=0} = -(\Gamma+1)^2\frac{k^2}{c_*^2}, \quad (\phi_{yy})_{x=y=0} = 0, \tag{1.81}$$

откуда

$$a = 1, \tag{1.82}$$

и поэтому

$$w_1^2 = \frac{1}{4}, \quad w_2^2 = 1. \tag{1.83}$$

В итоге через особую точку действительно будут проходить две характеристики, касающиеся звуковой поверхности в особой точке. При этом их входящие и выходящие ветви также имеют параболическую форму [Ландау, Лифшиц, 1986]:

$$x^{(1,1')} = -\frac{k(\Gamma+1)}{4c_*}\,y^2; \tag{1.84}$$

$$x^{(2,2')} = \frac{k(\Gamma+1)}{2c_*}\,y^2, \tag{1.85}$$

причем входящим ветвям соответствует решение $R(y) = w_1^2 y^2$, а выходящим — решение $R(y) = w_2^2 y^2$. В случае же $a < 0$ (который может быть реализован лишь при наличии гравитационного поля) ситуация оказывается гораздо более сложной. Такая нестандартная особая точка подробно рассматривается в следующем параграфе.

Упражнение. Получите выражения (1.81)–(1.85).

В заключение отметим еще одно чрезвычайно важное обстоятельство. Как видно из рис. 1.2, возмущение от точки A, находящейся в сверхзвуковой области течения, вдоль характеристики достигает звуковой поверхности и, следовательно, может влиять на структуру течения во всей дозвуковой области. Последнее означает, что именно сепаратрисная характеристика, а не звуковая поверхность, будет разделять две причинно несвязанные области.

Подводя итоги, еще раз подчеркнем, что в общем случае прямой процедуры решения уравнения (1.59) не существует. Это свойство является общим для подобного класса уравнений. В частности, оно будет справедливым и для уравнения Грэда–Шафранова. Кроме того, в рамках плоского течения невозможно:

а) рассмотреть случай $E \neq \text{const}$, $s \neq \text{const}$;

б) рассмотреть непотенциальные течения с $\nabla \times \mathbf{v} \neq 0$;

в) включить гравитацию (которая в общем случае не является плоской).

1.3. Осесимметричные стационарные течения — нерелятивистский случай

1.3.1. Основные уравнения. Покажем, как подобный подход может быть применен для осесимметричных стационарных течений. Это означает, что мы по-прежнему будем предполагать зависимость всех величин лишь от двух переменных — r и θ. Однако теперь все три компоненты скорости могут быть отличны от нуля. Поэтому осесимметричные стационарные течения гораздо богаче плоских.

В осесимметричном стационарном случае можно ввести потенциал $\Phi(r,\theta)$, связанный с полоидальной скоростью $\mathbf{v}_\mathrm{p}$ равенством

$$n\mathbf{v}_\mathrm{p} = \frac{\nabla\Phi \times \mathbf{e}_\varphi}{2\pi r \sin\theta}. \tag{1.86}$$

Такое определение приводит к следующим свойствам (рис. 1.3).

1. Уравнение непрерывности, $\nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0$, выполняется автоматически.

2. Легко проверяется, что $\mathrm{d}\Phi = n\mathbf{v}\mathrm{d}\mathbf{S}$, где $\mathrm{d}\mathbf{S}$ — элемент площади. Таким образом, потенциал $\Phi(r,\theta)$ представляет собой поток вещества через круг r, θ, $0 < \varphi < 2\pi$. В частности, полный поток через поверхность сферы радиуса r есть $\Phi_{\text{tot}} = \Phi(r, \pi)$.

3. Поскольку $\mathbf{v} \cdot \nabla\Phi = 0$, векторы скорости $\mathbf{v}$ лежат на поверхностях $\Phi(r,\theta) = \text{const}$.

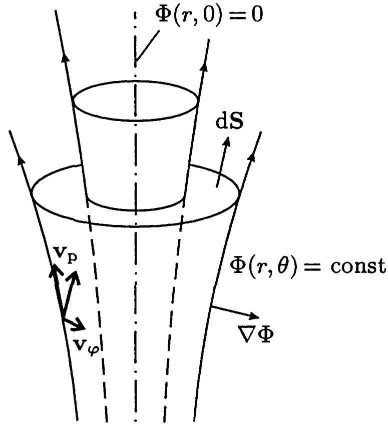


Рис. 1.3. Поверхности постоянного потока $\Phi(r,\theta) = \text{const}$. Векторы скорости $\mathbf{v}$ всегда лежат на этих поверхностях, поэтому полный поток вещества сохраняется внутри каждой трубки

Сформулируем законы сохранения, которые должны выполняться для осесимметричных стационарных течений. Как и ранее, компонента $\beta = t$ и проекция на направление $\mathbf{v}_\mathrm{p}$ закона сохранения энергии-импульса $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ дают

$$E = E(\Phi) = v^2/2 + w + \varphi_\mathrm{g}, \tag{1.87}$$

$$s = s(\Phi). \tag{1.88}$$

Однако теперь оказывается гораздо проще описать случай, когда сами интегралы различны на разных линиях тока, поскольку это свойство формулируется через явную зависимость интегралов движения от функции Φ.

Новая информация возникает из ($\beta = \varphi$)-компоненты закона сохранения энергии-импульса (или, что то же самое, из φ-компоненты уравнения Эйлера):

$$\nabla_\varphi \left(\frac{v^2}{2}\right) - [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})]_\varphi + \frac{\nabla_\varphi P}{m_\mathrm{p} n} + \nabla_\varphi \varphi_\mathrm{g} = 0. \tag{1.89}$$

Действительно, для рассматриваемого осесимметричного течения все градиенты ∇_φ равны нулю. Слагаемое же $[\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})]_\varphi$, как легко проверить, может быть переписано в виде

$$\mathbf{v} \cdot \nabla(v_\varphi r \sin\theta) = 0. \tag{1.90}$$

Следовательно, в осесимметричном случае z-компонента углового момента,

$$L(\Phi) = v_\varphi r \sin\theta, \tag{1.91}$$

является третьим интегралом движения.

1.3.2. Математическое интермеццо — ковариантный подход. Поскольку в дальнейшем мы собираемся обобщить наш подход на случай сильных гравитационных полей, представляется целесообразным уже сейчас переписать все соотношения в ковариантной форме. Для этого напомним, что в плоском пространстве метрический тензор g_{ik} ($\mathrm{d}l^2 = g_{ik}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^k$) в сферических координатах $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$ имеет вид

$$g_{rr} = 1, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2\sin^2\theta, \tag{1.92}$$

а все остальные компоненты равны нулю. Используя выражение (1.34):

$$T_i^k = P\delta_i^k + (nm_\mathrm{p})v^k v_i, \tag{1.93}$$

для φ-компоненты закона сохранения энергии-импульса получаем

$$\nabla_k T_\varphi^k = \nabla_k(\delta_\varphi^k P) + \nabla_k(nm_\mathrm{p}v^k v_\varphi) =$$
$$= \frac{\partial P}{\partial\varphi} + \frac{\partial}{\partial x^k}(nm_\mathrm{p}v^k v_\varphi) + \Gamma_{ik}^k(nm_\mathrm{p})v^i v_\varphi - \Gamma_{\varphi i}^k(nm_\mathrm{p})v^i v_k = 0, \tag{1.94}$$

где Γ_{jk}^i — символы Кристоффеля.

Нетрудно проверить, что последний член в (1.94) равен нулю: $\Gamma_{\varphi i}^k(nm_\mathrm{p})v^i v_k = 0$. Первое слагаемое также равно нулю вследствие осесимметричности задачи (все величины не зависят от угла φ). Используя уравнение непрерывности:

$$\nabla_k(nm_\mathrm{p}v^k) = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}nm_\mathrm{p}v^k) = \frac{\partial}{\partial x^k}(nm_\mathrm{p}v^k) + \Gamma_{ik}^i nm_\mathrm{p}v^k = 0, \tag{1.95}$$

где $g = \det g_{ik} = g_{rr}g_{\theta\theta}g_{\varphi\varphi}$, мы видим, что условие (1.94) вновь может быть переписано в форме закона сохранения: $\nabla_k T_\varphi^k = (nm_\mathrm{p})\mathbf{v}\cdot\nabla v_\varphi$. Следовательно, третий инвариант имеет вид

$$L(\Phi) = v_\varphi. \tag{1.96}$$

Упражнения.

1. Проверьте соотношения (1.94)–(1.96).
2. Как объяснить противоречие между (1.91) и (1.96)?

Чтобы понять различие между выражениями (1.91) и (1.96), необходимо вернуться к основным соотношениям ковариантного подхода. До сих пор мы имели дело лишь с физическими компонентами векторов. Ниже в релятивистских соотношениях такие компоненты будут отмечаться шапочками над соответствующими индексами; так $v_{\hat\varphi} = v^{\hat\varphi}$ есть физическая компонента тороидальной скорости с размерностью см/с. Однако в ковариантных соотношениях (1.94)–(1.96) мы фактически имели дело с другими объектами — контравариантными компонентами v^i и ковариантными компонентами v_k. Воспользовавшись определением длины вектора ($\mathbf{v}^2 = g_{ik}v^i v^k = g^{ik}v_i v_k$), для диагональной метрики (1.92) получаем

$$(v_{\hat\varphi})^2 = g_{\varphi\varphi}(v^\varphi)^2 = g^{\varphi\varphi}(v_\varphi)^2; \tag{1.97}$$

то же самое справедливо для других компонент. Поэтому контравариантная (v^{φ}) и ковариантная (v_{φ}) компоненты скорости будут выражаться через физическую компоненту $v_{\hat{\varphi}}$ согласно соотношениям

$$v^{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}} v_{\hat{\varphi}}, \tag{1.98}$$

$$v_{\varphi} = \sqrt{g_{\varphi\varphi}} v_{\hat{\varphi}}. \tag{1.99}$$

В частности, это означает, что размерность ковариантных и контравариантных компонент может отличаться от размерности самой физической величины. Теперь становится понятным различие соотношений (1.91) и (1.96): в (1.91) содержится физическая компонента тороидальной скорости, тогда как в (1.96) — ее ковариантная компонента.

1.3.3. Структура двумерного течения. Чтобы получить уравнение для функции потока $\Phi(r, \theta)$, необходимо вернуться к полоидальной компоненте уравнения Эйлера. Оказывается, что вместе с определениями инвариантов $E(\Phi)$, $L(\Phi)$ и $s(\Phi)$ это векторное уравнение может быть записано как произведение скалярного сомножителя [GS] на вектор $\nabla\Phi$:

$$[\text{Эйлер}]_{\rm p} = [\mathrm{GS}] \cdot \nabla\Phi. \tag{1.100}$$

Поэтому во многих работах, посвященных магнитогидродинамическим течениям, уравнение Грэда–Шафранова — $[\mathrm{GS}] = 0$ — получалось как проекция полоидального уравнения на направление, параллельное $\nabla\Phi$. Для чисто гидродинамических течений соответствующая проекция имеет вид

$$\frac{1}{(\nabla\Phi)^2} \nabla\Phi \cdot \left[(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + \frac{\nabla P}{n m_{\rm p}} + \nabla\varphi_{\rm g} \right] = 0. \tag{1.101}$$

Используя определения (1.86), (1.87) и (1.91), находим

$$- \varpi^2 \nabla_k \left(\frac{1}{\varpi^2} \nabla^k \Phi \right) + \frac{1}{n} \nabla_k n \cdot \nabla^k \Phi - 4\pi^2 L \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\Phi} + \\ + 4\pi^2 \varpi^2 n^2 \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\Phi} - 4\pi^2 \varpi^2 n^2 \frac{T}{m_{\rm p}} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\Phi} = 0. \tag{1.102}$$

Здесь и до конца книги

$$\varpi = \sqrt{g_{\varphi\varphi}}, \tag{1.103}$$

так что для плоской метрики $\varpi = r \sin\theta$.

Как и в случае плоского течения, для замыкания системы, т. е. для определения произведения $(\nabla n \cdot \nabla\Phi)$, уравнение (1.102) должно быть дополнено уравнением Бернулли (1.87), которое теперь может быть переписано в виде (ср. (1.38))

$$E = \frac{(\nabla\Phi)^2}{8\pi^2 \varpi^2 n^2} + \frac{1}{2} \frac{L^2}{\varpi^2} + w(n, s) + \varphi_{\rm g}. \tag{1.104}$$

Уравнение (1.104) наряду с n вновь содержит лишь инварианты E, L и s, а также функцию потока Φ. Следовательно, оно, как и раньше, в неявной форме определяет концентрацию n через функцию потока Φ и интегралы движения:

$$n = n(\nabla\Phi; E, L, s; r, \theta). \tag{1.105}$$

С другой стороны, неявное алгебраическое уравнение (1.104) может быть записано в явной дифференциальной форме:

$$\nabla_k n = n\frac{N_k}{D}, \tag{1.106}$$

где

$$D = -1 + c_{\rm s}^2/v_{\rm p}^2, \tag{1.107}$$

а

$$\begin{aligned} N_k = &-\frac{\nabla^i\Phi\cdot\nabla_i\nabla_k\Phi}{(\nabla\Phi)^2} + \frac{1}{2}\frac{\nabla_k\varpi^2}{\varpi^2} - 4\pi^2\varpi^2 n^2\frac{\nabla_k\varphi_{\rm g}}{(\nabla\Phi)^2} + \\ &+ 4\pi^2\varpi^2 n^2\frac{{\rm d}E}{{\rm d}\Phi}\frac{\nabla_k\Phi}{(\nabla\Phi)^2} - 4\pi^2 n^2 L\frac{{\rm d}L}{{\rm d}\Phi}\frac{\nabla_k\Phi}{(\nabla\Phi)^2} + 2\pi^2 n^2 L^2\frac{\nabla_k\varpi^2}{\varpi^2(\nabla\Phi)^2} - \\ &- 4\pi^2\varpi^2 n^2\left[\frac{T}{m_{\rm p}} + \frac{1}{m_{\rm p}n}\left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_n\right]\frac{{\rm d}s}{{\rm d}\Phi}\frac{\nabla_k\Phi}{(\nabla\Phi)^2}. \end{aligned} \tag{1.108}$$

Упражнения.

1. Покажите, что

$$\nabla^i\Phi\cdot\nabla_i\nabla_k\Phi = \frac{1}{2}\nabla_k(\nabla\Phi)^2. \tag{1.109}$$

2. Покажите, что в сферически-симметричном случае величина N_r соответствует значению N, задаваемому выражением (1.42), а $N_\theta = 0$.

В результате уравнение для функции потока может быть записано в виде [Бескин, 1997]

$$\begin{aligned} &-\varpi^2\nabla_k\left(\frac{1}{\varpi^2}\nabla^k\Phi\right) - \frac{\nabla^i\Phi\cdot\nabla^k\Phi\cdot\nabla_i\nabla_k\Phi}{(\nabla\Phi)^2 D} + \frac{\nabla\varpi^2\cdot\nabla\Phi}{2D\varpi^2} - \\ &- 4\pi^2\varpi^2 n^2\frac{\nabla\varphi_{\rm g}\cdot\nabla\Phi}{D(\nabla\Phi)^2} - 4\pi^2 n^2\frac{D+1}{D}L\frac{{\rm d}L}{{\rm d}\Phi} + 2\pi^2 n^2\frac{\nabla\varpi^2\cdot\nabla\Phi}{D\varpi^2(\nabla\Phi)^2}L^2 + \\ &+ 4\pi^2\varpi^2 n^2\frac{D+1}{D}\frac{{\rm d}E}{{\rm d}\Phi} - 4\pi^2\varpi^2 n^2\left[\frac{D+1}{D}\frac{T}{m_{\rm p}} + \frac{1}{Dm_{\rm p}n}\left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_n\right]\frac{{\rm d}s}{{\rm d}\Phi} = 0, \end{aligned} \tag{1.110}$$

или, в компактной форме, в виде (ср. [Heyvaerts, 1996])

$$-\varpi^2\nabla_k\left(\frac{1}{\varpi^2 n}\nabla^k\Phi\right) - 4\pi^2 nL\frac{{\rm d}L}{{\rm d}\Phi} + 4\pi^2\varpi^2 n\frac{{\rm d}E}{{\rm d}\Phi} - 4\pi^2\varpi^2 n\frac{T}{m_{\rm p}}\frac{{\rm d}s}{{\rm d}\Phi} = 0. \tag{1.111}$$

На первый взгляд, уравнение (1.110) гораздо сложнее уравнения (1.59) для плоского течения. Тем не менее они имеют много общего. Как и уравнение (1.59), уравнение (1.110) начинается с линейного эллиптического слагаемого и с нелинейного слагаемого подобной же формы. Третье слагаемое в (1.59), разумеется, отсутствует — оно является результатом того, что уравнение (1.110) записано в произвольных координатах. Однако все остальные слагаемые не следует рассматривать как усложнение. Они позволяют включить в рассмотрение не только гравитацию, но и гораздо более широкий класс течений, в которых инварианты на разных токовых поверхностях различны.

В остальном же уравнение для функции потока вполне аналогично уравнению (1.59). Действительно, оно обладает следующими свойствами.

1. Уравнение (1.110) должно быть дополнено уравнением Бернулли (1.104).

2. Вместе с уравнением Бернулли уравнение (1.110) содержит лишь потенциал $\Phi(r,\theta)$ и инварианты $E(\Phi)$, $L(\Phi)$ и $s(\Phi)$ (т. е. оно имеет вид уравнения Грэда–Шафранова).

3. При $n = \text{const}$ ($c_s^2 \to \infty$), $E = \text{const}$, $s = \text{const}$ и $L = 0$ уравнение становится линейным.

4. В общем случае оно нелинейно, однако остается линейным относительно старших производных.

5. Уравнение (1.110) является эллиптическим для дозвукового течения (при $D > 0$).

6. Уравнение (1.110) является гиперболическим для сверхзвукового течения (при $D < 0$).

7. Для заданной структуры течения (т. е. для заданной функции потока Φ) и инвариантов $E(\Phi)$, $L(\Phi)$ и $s(\Phi)$ все физические параметры определяются из алгебраических соотношений.

Здесь необходимо отметить следующее обстоятельство. Знаменатель $D = -1 + c_\mathrm{s}^2/v_\mathrm{p}^2$ (см. (1.107)) содержит не полную, а полоидальную скорость v_p. Последнее означает, что звуковая поверхность соответствует тому моменту, когда не полная, а полоидальная скорость сравнивается со скоростью звука. Это свойство является прямым следствием нашего основного предположения об осесимметричности течения. В результате все возмущения (волны) также должны быть осесимметричными, т. е. они могут распространяться лишь в полоидальной плоскости. Поэтому особенность в течении возникает в момент, когда полоидальная скорость вещества сравнивается со скоростью возмущений.

Упражнения.

1. Введя для плоскопараллельного течения функцию потока $\psi(x,y)$ как $n\mathbf{v} = \nabla\psi \times \mathbf{e}_z$, покажите, что первые члены ее разложения вблизи особой точки $x = y = 0$, соответствующие решению (1.65), имеют вид

$$\psi(x,y) = n_* c_* \left[y - \frac{k^2(\Gamma+1)}{2c_*^2} x^2 y - \frac{k^3(\Gamma+1)^2}{6c_*^3} x y^3 - \frac{k^4(\Gamma+1)^3}{40c_*^4} y^5 + \ldots \right]. \quad (1.112)$$

2. Покажите, что первые члены разложения для потенциала $\phi(\varpi, z)$ в цилиндрических координатах ϖ, z вблизи особой точки для обычного осесимметричного сопла (т. е. при отсутствии гравитации и при $L = 0$) имеют вид [Гудерлей, 1960]

$$\phi(\varpi, z) = c_* z + \frac{kz^2}{2} + \frac{k^2(\Gamma+1)}{4c_*} z\varpi^2 + \frac{k^3(\Gamma+1)^2}{64c_*^2}\varpi^4 + \ldots \tag{1.113}$$

В дальнейшем мы неоднократно будем сталкиваться с линейным оператором

$$\hat{\mathcal{L}} = \varpi^2 \nabla_k \left(\frac{1}{\varpi^2}\nabla^k\right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right). \tag{1.114}$$

Как видно из уравнения (1.102), потенциал Φ, удовлетворяющий условию $\hat{\mathcal{L}}\Phi = 0$, описывает течение однородной несжимаемой жидкости. Поэтому целесообразно сразу обсудить свойства этого оператора более подробно. Прежде всего, рассмотрим угловой оператор

$$\hat{\mathcal{L}}_\theta = \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right). \tag{1.115}$$

Он имеет следующие собственные функции:

$$Q_0 = 1 - \cos\theta, \tag{1.116}$$

$$Q_1 = \sin^2\theta, \tag{1.117}$$

$$Q_2 = \sin^2\theta\cos\theta, \tag{1.118}$$

$$\ldots,$$

$$Q_m = \frac{2^m m!(m-1)!}{(2m)!}\sin^2\theta\mathcal{P}'_m(\cos\theta), \tag{1.119}$$

и собственные числа

$$q_m = -m(m+1). \tag{1.120}$$

Здесь $\mathcal{P}_m(x)$ — полиномы Лежандра, а штрих означает их производные. В результате без учета размерности собственные функции полного оператора $\hat{\mathcal{L}}$ имеют вид

1) для $m = 1$

— $\Phi_1^{(1)} = r^2\sin^2\theta$ — однородное течение (рис. 1.4, *а*),

— $\Phi_1^{(2)} = \sin^2\theta/r$ — дипольное течение (рис. 1.4, *б*);

2) для $m = 2$

— $\Phi_2^{(1)} = r^3\sin^2\theta\cos\theta$ — нулевая точка (рис. 1.4, *в*),

— $\Phi_2^{(2)} = \sin^2\theta\cos\theta/r^2$ — квадрупольное течение (рис. 1.4, *г*);

3) ...

На первый взгляд, в данном вопросе имеет место полная ясность, так что здесь невозможно встретиться с какими-либо затруднениями.

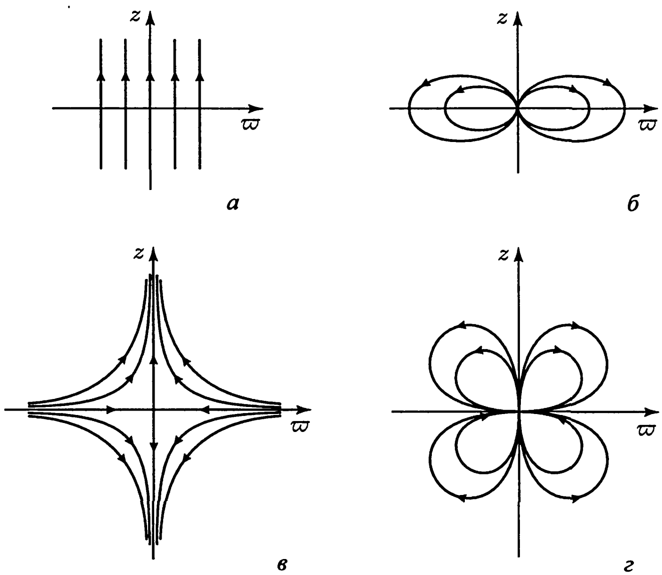


Рис. 1.4. Собственные функции оператора $\hat{\mathcal{L}}$ для $m = 1$ (*а*, *б*) и $m = 2$ (*в*, *г*), описывающие однородное (*а*), дипольное (*б*) и квадрупольное (*г*) течения, а также течение вблизи нулевой точки (*в*)

Тем не менее это не так. Действительно, рассмотрим собственные функции, соответствующие $m = 0$. Первая из них очевидна:

$$\Phi_0^{(1)} = (1 - \cos\theta); \tag{1.121}$$

она описывает сферически-симметричную аккрецию или эжекцию (рис. 1.5, *а*). Кстати, лишь эта гармоника определяет скорость аккреции или эжекции, поскольку для всех остальных собственных функций с $m > 0$ мы имеем $\Phi_m(r, \pi) = 0$. Неопределенность возникает в связи со второй собственной функцией:

$$\Phi_0^{(2)} = r(1 - \cos\theta), \tag{1.122}$$

линии тока для которой представляют собой параболы (рис. 1.5, *б*):

$$z = \frac{\varpi^2 - \varpi_0^2}{2\varpi_0}. \tag{1.123}$$

Здесь ϖ_0 — координата пересечения линией тока плоскости экватора. Для этой собственной функции $\Phi_0(r, \pi) \neq \text{const}$. Последнее означает, что подобная гармоника может быть реализована лишь в случае, когда в объеме (а не только вблизи гравитирующего центра или на бесконечности) имеются источники или стоки вещества. Во всех остальных случаях вторая собственная функция должна быть отброшена.

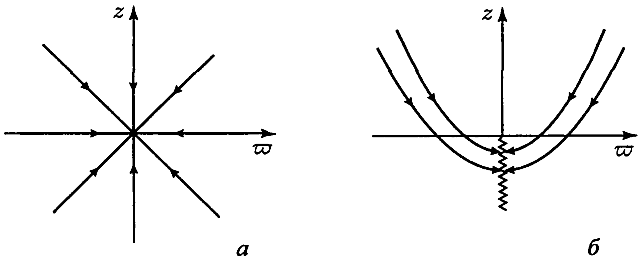


Рис. 1.5. Собственные функции оператора $\hat{\mathcal{L}}$ для $m = 0$, соответствующие сферически-симметричному течению (a), а также параболическому течению ($б$), которое может быть реализовано лишь при наличии объемных источников или стоков вещества, например, на оси $\theta = \pi$

В заключение вернемся к вопросу о поведении характеристик вблизи особых точек, теперь для случая осесимметричных стационарных течений. Поскольку уравнение (1.110) по-прежнему является квазилинейным (т. е. линейным относительно старших производных), уравнение для характеристик опять может быть записано в стандартной форме:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathcal{B} \pm \sqrt{\mathcal{B}^2 - \mathcal{A}\mathcal{C}}}{\mathcal{C}}. \tag{1.124}$$

Вновь воспользовавшись явным видом коэффициентов $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, имеем

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{r^2\,(\partial\Phi/\partial r)\,(\partial\Phi/\partial\theta) \pm r\left[r^2\,(\partial\Phi/\partial r)^2 + (\partial\Phi/\partial\theta)^2\right]\sqrt{-D(D+1)}}{(\partial\Phi/\partial\theta)^2 + D\left[r^2\,(\partial\Phi/\partial r)^2 + (\partial\Phi/\partial\theta)^2\right]}. \tag{1.125}$$

В итоге в безразмерных переменных

$$R = \frac{r_* - r}{r_* D_1}, \tag{1.126}$$

где $D_1 = r_*(\partial D/\partial r)$ при $r = r_*$, уравнение (1.125) может быть переписано в виде

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\vartheta} = a\vartheta \pm \sqrt{R}. \tag{1.127}$$

Теперь

$$a = -\frac{\left(\partial^2 D/\partial\theta^2\right)_*}{D_1^2} - \frac{r_*(\partial^2\Phi/\partial r\partial\theta)_*}{(\partial\Phi/\partial\theta)_* D_1}, \tag{1.128}$$

угол $\vartheta = \theta - \theta_*$, а частные производные берутся в особой точке $r = r_*$, $\theta = \theta_*$. Подчеркнем, что переменная R остается положительной в гиперболической области как для случая эжекции ($r > r_*$, $D_1 < 0$), так и для случая аккреции ($r < r_*$, $D_1 > 0$).

Точное решение уравнения (1.127) опять может быть найдено с помощью замены

$$R(\vartheta) = w^2(\vartheta)\vartheta^2, \tag{1.129}$$

где неявное решение для функции $w(\vartheta)$ имеет вид

$$w(\vartheta) = w_1 + C\left[w_2 - w(\vartheta)\right]^{w_2/w_1} \vartheta^{(w_2-w_1)/w_1}. \tag{1.130}$$

Величины же w_1 и w_2, соответствующие двум направляющим параболам (см. рис. 1.2), по-прежнему задаются соотношением

$$w_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8a}}{4}. \tag{1.131}$$

Следует, однако, подчеркнуть два важных отличия от рассмотренного выше случая плоскопараллельного течения. Во-первых, для сферически-симметричных течений все линии тока пересекают звуковую поверхность под прямым углом. В итоге a здесь везде равно нулю, так что все точки на звуковой поверхности оказываются особыми, а решение уравнения (1.127) приводит лишь к выходящим характеристикам:

$$R = \pm\frac{1}{4}\vartheta^2. \tag{1.132}$$

Во-вторых, для несферических течений на звуковой поверхности неизбежно должна появиться не только стандартная особая точка с $a > 0$, но и совершенно новая нестандартная особая точка с $a < 0$. Действительно, знак величины a показывает направление наклона линий тока по отношению к звуковой поверхности, причем положительная величина a соответствует сходящимся линиям тока. Этот случай, показанный на рис. 1.2, и был рассмотрен нами в предыдущем параграфе. Однако для осесимметричного случая, когда течение не ограничено стенками и должно охватывать все пространство, на звуковой поверхности неизбежно должна возникнуть хотя бы одна особая точка, вблизи которой линии тока будут расходиться (ясно, что если особая точка имеет место при $\theta_* \neq 0, \pi$, то ей будет соответствовать окружность).

Важнейшим свойством нестандартных особых точек является эффект бифуркации характеристик [Bogovalov, 1994; Бескин, Кузнецова, 1998]. При выполнении условия $-1/8 < a < 0$, соответствующего действительным корням уравнения (см. 1.131), показатель степени m (см. (1.80)) в решении $w(\vartheta) \approx w_1 + C_1\vartheta^m$ оказывается положительным. При этом через особую точку будет проходить бесконечно много характеристик, поскольку $w(\vartheta) \to w_1$ при $\vartheta \to 0$ для всех значений постоянной C_1. С другой стороны, при $a < -1/8$, когда корни (1.131) становятся комплексными, структура характеристических поверхностей резко изменяется, в результате чего через особую точку уже не будет проходить ни одной характеристики.

Поведение характеристических поверхностей для нестандартного случая приведено на рис. 1.6 слева. Справа же показаны стандартные особые точки с $a > 0$, через которые проходят две характеристики,

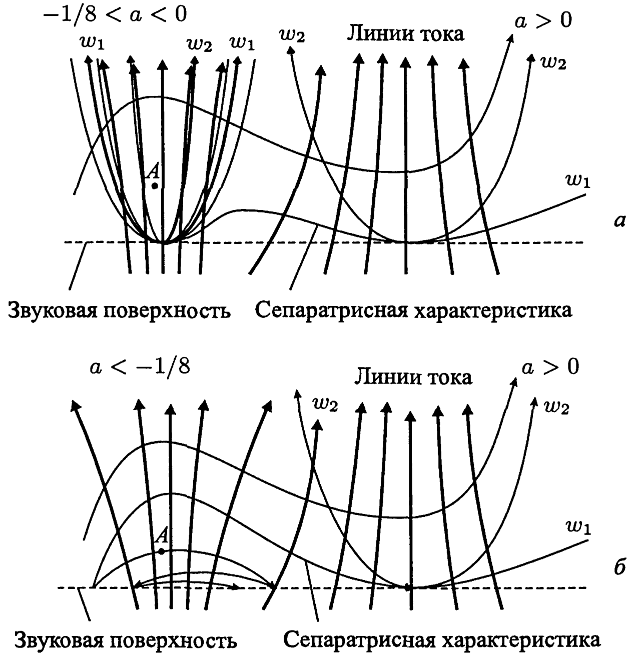


Рис. 1.6. Поведение характеристических поверхностей в случае нестандартной особой точки (слева) при $-1/8 < a < 0$. Стандартная особая точка ($a > 0$) показана справа. Точка A не оказывает влияния на дозвуковую область (*а*). То же для $a < -1/8$. Возмущение от точки A вдоль характеристики достигает звуковой поверхности (*б*)

соответствующие двум ветвям корней (1.131). Таким образом, мы видим, что при достаточно сильном отличии течения от сферически-симметричного вся структура характеристических поверхностей, в том числе и положение сепаратрисной характеристики (которая, как уже говорилось, разделяет две причинно несвязанные области), резко изменяется. В частности, если при $a > -1/8$ сепаратрисная характеристика соединяет обе особые точки, то при $a < -1/8$ уже нет.

В результате при медленном изменении параметра a вся область, находящаяся непосредственно над нестандартной особой точкой, при $a = -1/8$ внезапно начинает влиять на эллиптическую область уравнения равновесия, поскольку, как видно из рис. 1.6, *б*, возмущение из этой области вдоль характеристик достигает теперь звуковой поверхности. Отметим также, что если вблизи стандартной особой точки положение сепаратрисной характеристики в точности определяется решением $R(\vartheta) = w_1^2\vartheta^2$, то для нестандартной особой точки форма сепаратрисной характеристики (константа C в соотношении (1.130) при $a > -1/8$) не может быть определена локально. Для ее определения необходимо интегрировать полное уравнение (1.125) вплоть до стандартной особой точки.

Следует также подчеркнуть, что в момент бифуркации характеристик (т. е. при резком изменении формы сепаратрисной характеристики) никаких изменений в процедуре построения решения вблизи особой точки не происходит. Как и для случая плоскопараллельного течения, при заданных интегралах движения для построения решения необходимо задать лишь еще одну функцию, например скорость вдоль линии тока, проходящей через особую точку [Бескин, Кузнецова, 1998]. Иными словами, как при $a > -1/8$, так и при $a < -1/8$ уравнение Грэда–Шафранова требует одинакового количества граничных условий. И лишь при еще более сильном искажении течения, когда $a \to -\infty$ (т. е. $D_1 \to 0$), структура течения существенно изменяется. Дело в том, что величина D_1 на звуковой поверхности должна определяться в результате раскрытия особенности типа 0/0 в выражении для градиента концентрации $\nabla_k n = nN_k/D$ (фактически мы уже сталкивались с этой процедурой при определении логарифмической производной $\eta_1 = (r_*/n_*)\mathrm{d}n/\mathrm{d}r$; см. (1.46)). В результате величина D_1 находится как решение квадратного уравнения вида $D_1^2 = F$, которое при $F < 0$ не имеет действительных решений (подробнее см. [Бескин, Кузнецова, 1998]). Напомним, что для сферически-симметричного случая $D_1^2 = 10 - 6\Gamma$.

Отсутствие действительных решений для величины D_1 означает, что нарушается наше исходное предположение о возможности разложения решения по целым степеням отклонения от особой точки. Иными словами, решение в особой точке перестает быть аналитическим. Как хорошо известно [Ландау, Лифшиц, 1986], это означает, что вблизи особой точки возникают слабые разрывы, так что гладкое трансзвуковое течение оказывается невозможным. Ниже мы обсудим поведение сепаратрисных характеристик для различных конкретных случаев осесимметричных стационарных течений.

Наконец, отметим, что поскольку оператор второго порядка в уравнении Грэда–Шафранова остается совершенно неизменным для любых осесимметричных стационарных течений, в том числе и для рассматриваемых ниже течений в окрестности черной дыры (изменяется лишь явное выражение для знаменателя D), выписанные выше соотношения (1.127) и (1.128) имеют универсальный характер. Более того, они оказываются справедливыми и для сильнозамагниченных течений: нужно лишь заменить функцию тока $\Phi(r,\theta)$ на магнитный поток $\Psi(r,\theta)$.

1.3.4. Аккреция Бонди–Хойла. В качестве первого примера рассмотрим аккрецию на движущийся гравитирующий центр (аккрецию Бонди–Хойла [Bondi, Hoyle, 1944]) — одну из классических задач современной астрофизики [Зельдович, Новиков, 1967а; Шапиро, Тьюколски, 1985; Липунов, 1987]. Для построения несферического решения можно предположить, что малые возмущения сферически-симметричного течения не могут существенно изменить структуру аккреции [Бескин, Пидопрыгора, 1995]. Следовательно, решение уравнения для функции потока можно искать как малую поправку к сферически-симметричному решению.

Прежде всего, следует напомнить основные результаты качественной теории. Вычисления удобно проводить в системе отсчета, движущейся вместе с гравитирующим центром со скоростью v_∞. Сравнивая теперь темп аккреции Бонди, $4\pi r_*^2 n_* c_* \sim (GM)^2 n_\infty / c_\infty^3$ (см. (1.43)–(1.45)), с потоком $\Phi \sim \pi R_c^2 n_\infty v_\infty$, захваченным в пределах радиуса захвата R_c, можно оценить величину R_c как

$$R_c \sim \varepsilon_1^{-1/2} r_*, \tag{1.133}$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{v_\infty}{c_\infty}. \tag{1.134}$$

Следовательно, для $\varepsilon_1 \ll 1$ радиус захвата будет намного больше, чем радиус звуковой поверхности, поэтому естественно предположить, что для $r \ll R_c$ течение будет близко к сферически-симметричному. Тогда решение уравнения (1.110) можно искать в виде

$$\Phi(r, \theta) = \Phi_0[1 - \cos\theta + \varepsilon_1 f(r, \theta)]. \tag{1.135}$$

Для покоящегося гравитирующего центра, т. е. для случая $\varepsilon_1 = 0$, мы возвращаемся к сферически-симметричному течению.

Поскольку уравнение для функции потока (1.110) содержит все три инварианта ($i = 3$), откуда $b = 2 + 3 - 1 = 4$, необходимо задать четыре граничных условия, например две компоненты скорости на бесконечности, а также две термодинамические функции. Направляя ось z вдоль скорости движения набегающего потока, для однородной внешней среды имеем

1) $v_z = -v_\infty = \text{const}$;
2) $v_\varphi = 0$ (и следовательно, $L = 0$);
3) $s_\infty = \text{const}$;
4) $E_\infty = c_\infty^2/(\Gamma - 1) = \text{const}$.

В последнем соотношении мы пренебрегли членами $\sim \varepsilon_1^2$, так как при ненулевой скорости v_∞ интеграл Бернулли ($E = w_\infty + v_\infty^2/2$) будет отличаться от случая покоящегося гравитационного центра ($E^{(0)} = w_\infty$) на величину порядка ε_1^2:

$$E = E^{(0)} \left(1 + \frac{\Gamma - 1}{2}\varepsilon_1^2\right). \tag{1.136}$$

В результате уравнение (1.110) может быть линеаризовано:

$$-\varepsilon_1 D \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{\varepsilon_1}{r^2}(D+1)\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \varepsilon_1\left(\frac{2}{r} - \frac{GM}{c_s^2 r^2}\right)\frac{\partial f}{\partial r} = 0. \tag{1.137}$$

Уравнение (1.137) имеет следующие свойства.

1. Оно линейно.

2. Его угловой оператор совпадает с оператором $\hat{\mathcal{L}}_\theta$ (см. (1.115)).

3. Поскольку все члены уравнения содержат малый параметр ε_1, функции D, c_s и т. д. могут быть взяты из нулевого приближения.

4. Поскольку для сферически-симметричного течения функции D, c_s и т. д. не зависят от θ, решение уравнения (1.137) может быть разложено по собственным функциям оператора $\hat{\mathcal{L}}_\theta$.

Следовательно, решение уравнения (1.137) может быть представлено в виде

$$f(r,\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} g_m(r) Q_m(\theta), \tag{1.138}$$

причем уравнения для радиальных функций $g_m(r)$ запишутся как

$$-r^2 D \frac{\mathrm{d}^2 g_m}{\mathrm{d}r^2} + \left(2r - \frac{GM}{c_s^2}\right)\frac{\mathrm{d}g_m}{\mathrm{d}r} + m(m+1)(D+1)g_m = 0. \tag{1.139}$$

Что же касается граничных условий, то они могут быть сформулированы следующим образом.

1. Отсутствие особенности на звуковой поверхности, где $r^2 N_r = 2r - GM/c_s^2 = 0$, $D = 0$, для $m \neq 0$ дает

$$g_m(r_*) = 0. \tag{1.140}$$

2. Условие однородности течения на бесконечности, $\Phi = \pi n_\infty v_\infty r^2 \times \sin^2\theta$, дает

$$g_1 \to \frac{1}{2}\,\frac{n_\infty c_\infty}{n_* c_*}\,\frac{r^2}{r_*^2}, \quad g_2, g_3, \dots = 0. \tag{1.141}$$

Определим теперь величину g_0, фиксирующую изменение темпа аккреции. Для этого запишем точные значения радиуса звуковой поверхности $r_*(\theta)$, а также термодинамических функций $n_*(\theta) = n(r_*,\theta)$, $w_*(\theta) = w(r_*,\theta)$ и $c_*(\theta) = c_s(r_*,\theta)$ в виде

$$\begin{aligned}
r_*(\theta) &= r_*^{(0)}[1 + \varepsilon_1 d(\theta)];\\
c_*(\theta) &= c_*^{(0)}[1 + \varepsilon_1 b(\theta)];\\
n_*(\theta) &= n_*^{(0)}[1 + \varepsilon_1 q(\theta)];\\
w_*(\theta) &= w_*^{(0)}[1 + \varepsilon_1 p(\theta)],
\end{aligned}$$

где индексы 0 соответствуют невозмущенным значениям величин. При этом первые два уравнения, связывающие безразмерные функции $d(\theta)$, $b(\theta)$, $p(\theta)$ и $q(\theta)$:

$$p - q = 0; \tag{1.142}$$

$$2b - (\Gamma - 1)p = 0, \tag{1.143}$$

непосредственно следуют из термодинамических соотношений (1.26) и (1.27). Уравнения же $D(r_*) = 0$ и $N_r(r_*) = 0$, в которых необходимо провести разложение до величин порядка ε_1, запишутся теперь в виде

$$b + 2d + p = 0; \tag{1.144}$$

$$4b + 2d = \frac{r_*^{(0)}}{\sin\theta}\,\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta}\bigg|_{r=r_*}. \tag{1.145}$$

Наконец, можно написать и пятое соотношение, следующее из уравнения Бернулли (1.104), в котором также необходимо провести разложение до величин порядка ε_1:

$$b + 2d + q = \frac{2}{\sin\theta}\,\frac{\partial f}{\partial\theta}\bigg|_{r=r_*}. \tag{1.146}$$

Здесь мы воспользовались соотношением (1.136), согласно которому интеграл Бернулли с точностью до членов $\sim \varepsilon_1$ остается таким же, как и в случае сферически-симметричной аккреции. Подставляя в правую часть (1.146) выражение

$$\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial f}{\partial\theta}\bigg|_{r=r_*} = g_0 + 2g_1(r_*)\cos\theta, \tag{1.147}$$

из условия совместности уравнений (1.142)–(1.146) получаем

$$g_0 = 0. \tag{1.148}$$

Таким образом, в первом порядке по величине ε_1 темп аккреции на движущийся гравитирующий центр не изменяется.

В результате все радиальные функции g_m, за исключением g_1, оказываются равными нулю, так что полное решение может быть представлено в виде

$$\Phi(r,\theta) = \Phi_0[1 - \cos\theta + \varepsilon_1 g_1(r)\sin^2\theta]. \tag{1.149}$$

При этом радиальная функция $g_1(r)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения (1.139) для $m = 1$ с граничными условиями (1.140) и (1.141).

При современном уровне развития персональных компьютеров последнее означает, что нам удалось построить аналитическое решение поставленной задачи, которое позволяет получить исчерпывающую информацию о структуре течения. Например, звуковая поверхность имеет теперь несферическую форму:

$$r_*(\theta) = r_*^{(0)}\left[1 + 2\varepsilon_1\left(\frac{\Gamma+1}{D_1^2}\right)k_1\cos\theta\right], \tag{1.150}$$

где снова $D_1^2 = 10 - 6\Gamma$, а численный коэффициент $k_1 = r_* g_1'(r_*) > 0$ может быть найден непосредственно из решения обыкновенного дифференциального уравнения (1.139) (подробнее см. [Бескин, Пидопрыгора, 1995], а также табл. 1.2). Как показано на рис. 1.7, аналитическое решение находится в полном согласии с результатами численных рас-

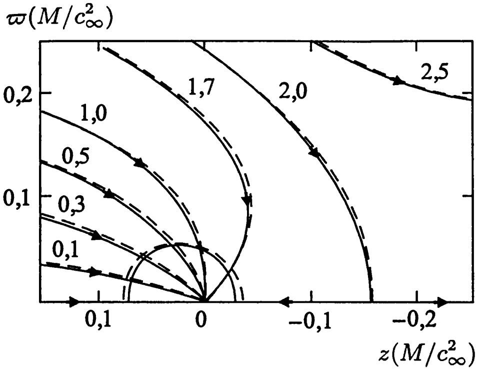


Рис. 1.7. Структура течения и форма звуковой поверхности при аккреции на движущийся гравитирующий центр для $\Gamma = 4/3$, $\varepsilon_1 = 0{,}6$ [Бескин, Пидопрыгора, 1995]. Числа на кривых обозначают величины Φ/Φ_0. Штриховые линии показывают рассчитанную форму линий тока и звуковой поверхности [Hunt, 1979]

четов [Hunt, 1979] несмотря на то, что параметр ε_1 здесь достаточно велик ($\varepsilon_1 = 0{,}6$).

В связи с полученным выше решением необходимо сделать одно замечание. Как легко видеть, вне радиуса захвата наше основное предположение — малость возмущения сферически-симметричного течения — нарушается. Тем не менее построенное решение остается справедливым. Это замечательное свойство связано с уже упоминавшимся фактом: при постоянной концентрации n уравнение для функции потока становится линейным. Однако, как показывает анализ сферически-симметричной аккреции Бонди (см. (1.47)), вдали от звуковой поверхности ($r \gg r_*$) плотность аккрецирующего вещества остается практически постоянной. Соответственно плотность постоянна и для однородного течения. В результате при условии $R_c \gg r_*$, которое выполняется для $\varepsilon_1 \ll 1$, вблизи и за пределами радиуса захвата (где возмущение $\sim \varepsilon_1 g_1(r)$ оказывается одного порядка с величиной нулевого приближения, т. е. ~ 1), уравнение (1.110) становится линейным. В итоге сумма двух решений, однородного и сферически-симметричного, также является решением.

Наконец, отметим, что «северный полюс» звуковой поверхности ($\theta = 0$, $\Phi = 0$) соответствует нестандартной особой точке, а противоположный ему «южный полюс» ($\theta = \pi$, $\Phi = 2\Phi_0$) — стандартной. Для доказательства данного утверждения нет необходимости проводить сложные расчеты и вычислять знак величины a (см. (1.128)). Дело в том, что движение вдоль характеристической поверхности всегда соответствует движению вместе с потоком; поэтому в случае аккреции стандартная особая точка должна находиться на меньшем расстоянии от компактного объекта. В результате две сепаратрисные характеристики, выходя из нестандартной особой точки и двигаясь в противоположных направлениях практически вдоль звуковой поверхности, вновь касаются ее в стандартной особой точке и лишь затем начинают спиральное движение по направлению к гравитирующему центру. Что же касается величины a, то в нестандартной особой точке она может быть записана как [Бескин, Кузнецова, 1998]

$$a = -\frac{2b_1 + b_3(\Gamma + 1)}{D_1^2}, \tag{1.151}$$

где

$$b_1 = 2k_1\varepsilon_1, \tag{1.152}$$

$$b_3 = \frac{4k_1}{\sqrt{10-6\Gamma}}\left(\frac{4-\sqrt{10-6\Gamma}}{\Gamma+1} - 1\right)\varepsilon_1, \tag{1.153}$$

$$D_1^2 = 4(2-b_1)^2 - (\Gamma+1)(6 - 6b_1 + b_1^2 + 2b_3). \tag{1.154}$$

Поэтому в рассматриваемом здесь случае дозвукового движения ($\varepsilon_1 \ll 1$) имеем $a > -1/8$, так что в нестандартной особой точке бифуркации характеристик не происходит.

1.3.5. Истечение из медленно вращающейся звезды. Другим интересным примером нерелятивистского течения является трансзвуковая эжекция из медленно вращающейся звезды [Тассуль, 1982; Lammers, Cassinelli, 1999]. Необходимо сразу подчеркнуть, что этот пример имеет лишь иллюстративный характер, поскольку в действительности определяющую роль в звездах играет давление излучения, которое не может быть последовательно включено в рассмотрение в рамках указанного подхода. Тем не менее анализ данного случая поможет нам прояснить многие вопросы, связанные с методом уравнения Грэда–Шафранова [Бескин, Пидопрыгора, 2000].

В качестве нулевого приближения естественно рассмотреть хорошо известное решение Паркера для сферически-симметричного трансзвукового истечения (см. (1.51)–(1.54)). Таким образом, мы предполагаем, что все параметры сферически-симметричного течения (в том числе радиус звуковой поверхности r_*, скорость звука на звуковой поверхности c_*, радиальная скорость v_R на поверхности звезды, т. е. при $r = R$) нам заранее известны. Для политропного уравнения состояния (1.25), которое мы и будем рассматривать в дальнейшем, они задаются соотношениями (1.51)–(1.53):

$$c_*^2 = \frac{2}{5-3\Gamma}c_R^2 + \frac{\Gamma-1}{5-3\Gamma}\left(v_R^2 - \frac{2GM}{R}\right), \tag{1.155}$$

$$r_* = \frac{GM}{2c_*^2}, \tag{1.156}$$

$$n_* = n_R\left(\frac{c_*^2}{c_R^2}\right)^{1/(\Gamma-1)}, \tag{1.157}$$

где величины с индексом R соответствуют поверхности звезды. Далее, ясно, что постоянная Φ_0 в выражении $\Phi = \Phi_0(1-\cos\theta)$ может быть записана в виде

$$\Phi_0 = 2\pi r_*^2 c_* n_*. \tag{1.158}$$

Наконец поскольку скорость истечения газа v_R на поверхности звезды (при $r = R$) благодаря условию сохранения потока задается формулой (1.54):

$$v_R = c_* \left(\frac{c_*^2}{c_R^2}\right)^{1/(\Gamma-1)} \left(\frac{r_*}{R}\right)^2,$$

это соотношение вместе с (1.155) неявно определяет скорость звука c_* как функцию n_R и c_R^2:

$$\frac{c_*^2}{2}\left(\frac{c_*^2}{c_R^2}\right)^{2/(\Gamma-1)}\left(\frac{GM}{2c_*^2 R}\right)^4 + \frac{c_R^2}{\Gamma-1} - \frac{GM}{R} = \frac{5-3\Gamma}{2(\Gamma-1)}c_*^2. \qquad (1.159)$$

На больших же расстояниях от звезды (при $r \gg r_*$), где происходит свободное истечение плазмы, имеем

$$v_r = (2E)^{1/2} = v_\infty, \qquad (1.160)$$

$$n(r) = n_* \frac{c_*}{v_\infty}\left(\frac{r_*}{r}\right)^2, \qquad (1.161)$$

где

$$2E = v_R^2 + \frac{2c_R^2}{\Gamma-1} - \frac{2GM}{R}. \qquad (1.162)$$

Как мы видим, все параметры течения полностью определяются двумя термодинамическими функциями n_R и c_R^2, заданными на поверхности звезды.

УПРАЖНЕНИЕ. Покажите, что в рассматриваемом здесь приближении для существования трансзвукового режима истечения должны быть выполнены достаточно жесткие условия (см., например, [Leer, Axford, 1972]):

$$(\Gamma-1)\frac{GM}{R} < c_R^2 < \frac{GM}{2R}. \qquad (1.163)$$

Правое неравенство соответствует условию существования трансзвукового течения. В противном случае, начиная с самой поверхности звезды, течение являлось бы сверхзвуковым. Нарушение же левого неравенства (при $v_R \ll c_R$) означало бы отсутствие истечения с поверхности звезды (интеграл Бернулли оказался бы меньше нуля).

Как и раньше, будем искать решение уравнения Грэда–Шафранова в виде

$$\Phi(r,\theta) = \Phi_0[1 - \cos\theta + \varepsilon_2^2 f(r,\theta)]. \qquad (1.164)$$

Теперь малый параметр

$$\varepsilon_2^2 = \frac{\Omega^2 R^3}{GM}, \qquad (1.165)$$

где Ω есть угловая скорость вращения звезды.

Рассматриваемая задача требует определения всех $i = 3$ инвариантов. Следовательно, $b = 2 + 3 - 1 = 4$, так что необходимо задать четыре граничных условия на поверхности $r = r_R(\theta)$ звезды, которая теперь отличается от сферы:

$$r_R(\theta) = R[1 + \varepsilon_2^2 \rho(\theta)]. \qquad (1.166)$$

В (1.166) мы ввели безразмерный параметр $\rho(\theta) \approx 1$.

Подчеркнем, что, на первый взгляд, здесь имеется явное противоречие. Действительно, в рассматриваемом примере мы добавили одну степень свободы (тороидальную скорость $v_\varphi \neq 0$), тогда как задача потребовала двух дополнительных функций по сравнению с осесимметричным случаем. Ниже мы постараемся прояснить этот вопрос.

Важно, что для малых значений параметра ε_2 все три интеграла движения могут быть определены через реальные физические параметры на поверхности звезды, т.е. через две термодинамические функции (например, T и n) и две компоненты скорости (например, v_r и v_φ). Их удобно выразить через четыре безразмерные функции — $\tau(\theta)$, $\eta(\theta)$, $\omega(\theta)$ и $h(\theta)$:

$$T(r_R, \theta) = T_R[1 + \varepsilon_2^2 \tau(\theta)]; \tag{1.167}$$

$$n(r_R, \theta) = n_R[1 + \varepsilon_2^2 \eta(\theta)]; \tag{1.168}$$

$$v_\varphi(r_R, \theta) = \varepsilon_2 \left(\frac{GM}{R}\right)^{1/2} \omega(\theta) \sin\theta; \tag{1.169}$$

$$v_r(r_R, \theta) = v_R[1 + \varepsilon_2^2 h(\theta)], \tag{1.170}$$

где параметр $\omega(\theta)$, определяемый как

$$\Omega(r_R, \theta) = \Omega\omega(\theta), \tag{1.171}$$

описывает дифференциальное вращение поверхности звезды.

Используя термодинамическое соотношение

$$\mathrm{d}s = \frac{1}{\Gamma - 1}\frac{\mathrm{d}T}{T} - \frac{\mathrm{d}n}{n}, \tag{1.172}$$

для первого инварианта, $s(\theta)$, получаем (постоянное слагаемое здесь опущено)

$$\delta s(\theta) = \varepsilon_2^2 \left[\frac{1}{\Gamma - 1}\tau(\theta) - \eta(\theta)\right]. \tag{1.173}$$

Два других инварианта также могут быть определены через граничные условия:

$$\delta E(\theta) = \varepsilon_2^2 v_R^2 h(\theta) + \varepsilon_2^2 \frac{GM}{2R}\omega^2(\theta)\sin^2\theta + \varepsilon_2^2 \frac{\Gamma}{\Gamma - 1}\frac{T}{m_\mathrm{p}}\tau(\theta) + \delta\varphi_\mathrm{g}; \tag{1.174}$$

$$L^2(\theta) = \varepsilon_2^2 R^2 \frac{GM}{R}\omega^2(\theta)\sin^2\theta. \tag{1.175}$$

Например, для случая, когда основная масса звезды сосредоточена в ее центре, можно использовать следующее выражение для возмущения гравитационного потенциала на поверхности звезды:

$$\delta\varphi_\mathrm{g}(r_R, \theta) = \varepsilon_2^2 \frac{GM}{R}\rho(\theta). \tag{1.176}$$

Чрезвычайно важно то, что возможность осуществления следующего шага, т.е. записи самого уравнения Грэда–Шафранова, связана с простотой нулевого приближения. Действительно, поскольку в нулевом приближении $\Phi = \Phi_0(1-\cos\theta)$, т. е. функция потока зависит лишь от угла θ (и кроме того, для невращающейся звезды производные $\mathrm{d}E/\mathrm{d}\Phi$, $\mathrm{d}L/\mathrm{d}\Phi$ и $\mathrm{d}s/\mathrm{d}\Phi$, как и сама величина L, равны нулю), можно воспользоваться соотношением $\mathrm{d}\Phi = \Phi_0 \sin\theta \mathrm{d}\theta$. Оно позволяет с необходимой точностью определить производные $\mathrm{d}E/\mathrm{d}\Phi$, $\mathrm{d}L/\mathrm{d}\Phi$ и $\mathrm{d}s/\mathrm{d}\Phi$ не только на поверхности звезды, но и во всем пространстве.

В результате уравнение для функции потока вновь может быть линеаризовано, причем уравнение на возмущение $\varepsilon_2^2 f(r,\theta)$ запишется как

$$
\begin{aligned}
-\varepsilon_2^2\Phi_0^2 D\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{\varepsilon_2^2}{r^2}\Phi_0^2(D+1)\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \varepsilon_2^2\Phi_0^2 N_r\frac{\partial f}{\partial r} = \\
= -4\pi^2 n^2 r^2 \sin\theta(D+1)\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\theta} + 4\pi^2 n^2(D+1)\,\frac{L}{\sin\theta}\,\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta} - \\
- 4\pi^2 n^2\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}L^2 + 4\pi^2 n^2 r^2\sin\theta\left[(D+1)\frac{T}{m_\mathrm{p}} + \frac{\Gamma-1}{\Gamma}c_s^2\right]\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta},
\end{aligned}
\tag{1.177}
$$

где $N_r = 2/r - 4\pi^2 n^2 r^2 GM/\Phi_0^2$. Для определения частной производной $(\partial P/\partial s)_n$ мы воспользовались политропным уравнением состояния $P = k(s)n^\Gamma$ (см. (1.25)) и явным видом функции $k(s)$ (см. (1.29)).

Свойства уравнения (1.177) полностью аналогичны свойствам уравнения (1.137).

1. Уравнение (1.177) линейно.
2. Его угловой оператор совпадает с оператором $\hat{\mathcal{L}}_\theta$ (см. (1.115)).
3. Поскольку все члены уравнения содержат малый параметр ε_2^2, функции D, c_s, n и т. д. могут быть взяты из нулевого приближения.
4. Поскольку для сферически-симметричного течения функции D, c_s, n и т. д. не зависят от θ, решение уравнения (1.177) может быть разложено по собственным функциям оператора $\hat{\mathcal{L}}_\theta$.

Следовательно, мы вновь можем искать решение в виде

$$
f(r,\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} g_m(r) Q_m(\theta). \tag{1.178}
$$

Вводя безразмерные переменные

$$
x = \frac{r}{r_*}, \quad u = \frac{n}{n_*}, \quad w = \frac{c_s^2}{c_*^2}, \tag{1.179}
$$

получаем следующие обыкновенные дифференциальные уравнения, описывающие радиальные функции $g_m(r)$:

$$
\begin{aligned}
(1-x^4wu^2)\frac{\mathrm{d}^2 g_m}{\mathrm{d}x^2} + 2\left(\frac{1}{x} - x^2u^2\right)\frac{\mathrm{d}g_m}{\mathrm{d}x} + m(m+1)x^2wu^2 g_m = \varkappa_m\frac{R^2}{r_*^2}x^4wu^4 - \\
- \lambda_m\frac{R^2}{r_*^2}u^2 - \sigma_m x^6wu^4 + \frac{1}{\Gamma}\nu_m x^6w^2u^4 + \frac{\Gamma-1}{\Gamma}\nu_m x^2wu^2,
\end{aligned}
\tag{1.180}
$$

где величины $\varkappa_m$, λ_m, σ_m и ν_m определяются как коэффициенты разложения:

$$\sin\theta\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\theta} = \varepsilon_2^2 c_*^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_m Q_m(\theta); \tag{1.181}$$

$$\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}L^2 = \varepsilon_2^2 c_*^2 r_*^2 \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m Q_m(\theta); \tag{1.182}$$

$$\frac{L}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta} = \varepsilon_2^2 c_*^2 r_*^2 \sum_{m=0}^{\infty} \varkappa_m Q_m(\theta); \tag{1.183}$$

$$\sin\theta\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = \varepsilon_2^2 \sum_{m=0}^{\infty} \nu_m Q_m(\theta). \tag{1.184}$$

Наконец, функции $w(x)$ и $u(x)$, соответствующие сферически-симметричному течению, для политропного уравнения состояния (1.25) связаны соотношением $w = u^{\Gamma-1}$, а функция $u(x)$, согласно (1.106)–(1.108), может быть найдена из обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -2\frac{u}{x}\frac{1-x^3u^2}{1-x^4wu^2} \tag{1.185}$$

с граничными условиями (сравните с (1.46))

$$u(x)|_{x=1} = 1; \quad \left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1} = -\frac{4+\sqrt{10-6\Gamma}}{\Gamma+1}. \tag{1.186}$$

Что же касается граничных условий к системе уравнений (1.180), то они вполне аналогичны случаю аккреции Бонди–Хойла [Бескин, Пидопрыгора, 2000].

1. Поскольку на поверхности звезды

$$\mathrm{d}\Phi = 2\pi r^2 n v_r \sin\theta\,\mathrm{d}\theta = 2\pi R^2 n_R v_R[1+\varepsilon_2^2(\eta+h+2\rho)]\sin\theta\,\mathrm{d}\theta, \tag{1.187}$$

имеем

$$g_m(R/r_*) = \frac{(2m)!}{2^m(m+1)!m!}(\eta_m + h_m + 2\rho_m). \tag{1.188}$$

Здесь η_m, h_m и ρ_m — коэффициенты разложения по полиномам Лежандра, например $\eta(\theta) = \sum\limits_m \eta_m \mathcal{P}_m(\cos\theta)$. Если же задавать на поверхности звезды меридиональную компоненту скорости v_θ, то, воспользовавшись определениями (1.86) и (1.138), получаем

$$n v_\theta = -\frac{\partial\Phi/\partial r}{2\pi R\sin\theta} = \varepsilon_*^2 \frac{\Phi_0}{2\pi R\sin\theta}\sum_m \left.\frac{\mathrm{d}g_m}{\mathrm{d}r}\right|_{r=R} Q_m(\theta). \tag{1.189}$$

В результате величина $v_\theta(R,\theta)$, фактически, определяет производную g_m' на поверхности звезды:

$$\frac{v_\theta(R,\theta)}{v_R} = \varepsilon_*^2 \frac{R}{\sin\theta}\sum_m g_m'\big|_{r=R} Q_m(\theta); \tag{1.190}$$

следовательно,

$$g'_m\big|_{r=R} = \frac{1}{\varepsilon_*^2 R v_R}(v_\theta)_m\,. \tag{1.191}$$

В частности, при отсутствии меридиональной конвекции ($v_\theta(R,\theta)=0$) имеем просто

$$g'_m\big|_{r=R} = 0. \tag{1.192}$$

Как мы видим, в обоих случаях для определения граничного условия на радиальную функцию $g_m(R/r_*)$ на поверхности звезды необходимо задать еще одну дополнительную функцию по сравнению со случаем сферически-симметричного течения.

2. Отсутствие особенности на звуковой поверхности, $N_\theta=0$, дает

$$\varepsilon_2^2 g_m(1) = \frac{(2m)!}{2^m(m+1)!m!}\left[\frac{(\delta E)_m}{c_*^2} - (\delta s)_m - \frac{(L/\sin^2\theta)_m}{2c_*^2 r_*^2}\right], \tag{1.193}$$

где $(\ldots)_m$ опять означает разложение по полиномам Лежандра, которое может быть найдено из соотношений (1.173)–(1.175).

Уравнения (1.180) вместе с граничными условиями (1.188) и (1.193) позволяют решить прямую задачу, т. е. определить структуру течения из физических граничных условий на поверхности звезды.

Здесь необходимо подчеркнуть два важных обстоятельства.

1. Нам вновь удалось сформулировать условие регулярности решения на звуковой поверхности $N_\theta=0$ (и следовательно, решить прямую задачу) лишь благодаря простой геометрии нулевого приближения. В частности, в рамках рассматриваемого приближения само положение звуковой поверхности могло быть взято из сферически-симметричного решения. В общем случае положение особой поверхности неизвестно, так что условие $N_\theta=0$ не может быть выражено через известные функции $(\delta E)_m$, $(\delta s)_m$ и т. д. на поверхности звезды.

2. Теперь становится понятным и возникновение «дополнительного» граничного условия. Дело в том, что, как уже подчеркивалось, для $m=0$ мы должны выбрать лишь одно собственное решение, а именно $g_0=\mathrm{const}$. Другое собственное решение оказывается нефизическим. Следовательно, для $m=0$ имеется дополнительное соотношение:

$$g_0(R) = g_0(r_*). \tag{1.194}$$

Это условие определяет величину h_0, которая уже не является свободным параметром. Иными словами, мы не полностью свободны в выборе функции $h(\theta)$, определяющей радиальную скорость: ее нулевая гармоника должна находиться из условия (1.194). Однако, как уже говорилось, именно нулевая гармоника g_0, связанная с h_0, задает скорость эжекции. Следовательно, скорость эжекции является функцией лишь трех параметров, а именно двух нулевых гармоник термодинамических функций (η_0 и τ_0), а также тороидальной скорости (v_φ). Для сферически-симметричного течения $v_\varphi=0$ и мы возвращаемся к двум функциям, задающим скорость эжекции. Что же касается высших гармоник с $m > 0$, то они полностью свободны и для их определения необходимо знать четыре функции на поверхности звезды. Таким образом, сферически-симметричное течение является вырожденным и нужно быть очень осторожным, распространяя его свойства на двумерное течение.

В завершении настоящего параграфа рассмотрим простой пример истечения. Будем предполагать, что

— почти вся масса звезды сосредоточена в ее центре, так что $\varphi_{\rm g} = -GM/r$;

— отсутствует дифференциальное вращение: $\omega(\theta) = 1$;

— справедлив закон Фон Цепеля для температуры на поверхности звезды: $T(R,\theta) \propto g_{\rm ef}^{1/4}$, где $\mathbf{g}_{\rm ef} = -\nabla\varphi_{\rm ef}$ и $\varphi_{\rm ef} = \varphi_{\rm g} + L^2/\varpi^2$;

— отсутствует меридиональная конвекция на поверхности звезды: $v_\theta(r_R,\theta) = 0$ (это означает, что мы задаем не радиальную, $v_r(r_R,\theta)$, а меридиональную, $v_\theta(r_R,\theta)$, скорость, так что теперь коэффициенты h_0, h_1 и т. д. должны быть найдены из решения).

Упражнения.

1. Покажите, что возмущения поверхности звезды $\rho(\theta)$ в (1.166) и температуры $\tau(\theta)$ в (1.167) имеют вид

$$\rho(\theta) = \frac{1}{2}\sin^2\theta \quad \text{и} \quad \tau(\theta) = -\frac{1}{2}\sin^2\theta. \tag{1.195}$$

2. Покажите, что в разложении (1.178) будут присутствовать лишь гармоники с $m = 0$ и $m = 2$, причем коэффициенты разложения в (1.181)–(1.184) определяются как

$$\sigma_2 = 2\frac{r_*}{R} - \frac{5-3\Gamma}{2(\Gamma-1)} + \frac{1}{2}\frac{v_R^2}{c_*^2} - 3\frac{v_R^2}{c_*^2}h_2; \tag{1.196}$$

$$\lambda_2 = 2\frac{R}{r_*}; \quad \varkappa_2 = 4\frac{R}{r_*}; \quad \nu_2 = -\frac{\Gamma}{\Gamma-1} \tag{1.197}$$

и $\sigma_0, \ldots, \nu_0 = 0$. Напомним, что $h(\theta) = h_0 + h_1\cos\theta + h_2\mathcal{P}_2(\cos\theta) + \ldots$

3. Найдите форму звуковой поверхности и, качественно, поведение сепаратрисной характеристики.

Решив уравнение (1.180) для $m = 2$, находим, что

1) темп эжекции представим в виде

$$\Phi_{\rm tot} = 2\Phi_0\left[1 + \frac{\Omega^2R^3}{GM}(1+h_0)\right], \tag{1.198}$$

где величина h_0 может быть найдена из соотношения (1.194) (табл. 1.1):

$$h_0 = -\frac{1}{6} + \frac{2}{3}\,\frac{r_*/R - R/r_*}{1 - v_R^2/c_*^2}. \tag{1.199}$$

Как и следовало ожидать, вращение увеличивает темп эжекции;

2) вдали от звуковой поверхности ($r \gg r_*$) функция потока имеет вид

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\Phi(r,\theta)}{\Phi_0} = (1-\cos\theta) + \frac{\Omega^2 R^3}{GM}(1+h_0)(1-\cos\theta) + \frac{\Omega^2 R^3}{GM} q_2 \sin^2\theta\cos\theta. \tag{1.200}$$

Коэффициенты q_2 также приведены в табл. 1.1. Поскольку в выражении (1.200) отсутствует зависимость от r, можно сделать вывод о том, что течение на больших расстояниях становится радиальным;

Таблица 1.1

Модель	$1+h_0$	h_2	q_2	b_0	b_2
$r_*/R = 1{,}1$; $\Gamma = 4/3$	2,9	−0,8	−0,40	2,2	−0,41
$r_*/R = 2{,}0$; $\Gamma = 4/3$	3,2	−3,3	−0,71	2,5	−0,47
$r_*/R = 10$; $\Gamma = 4/3$	8,0	−56,0	−2,18	5,7	−0,92
$r_*/R = 1{,}1$; $\Gamma = 1{,}1$	1,7	−0,8	−0,15	1,8	−0,37
$r_*/R = 2{,}0$; $\Gamma = 1{,}1$	2,1	−2,3	−0,18	2,2	−0,40
$r_*/R = 10$; $\Gamma = 1{,}1$	7,4	−26,0	−0,40	7,2	−0,58

3) асимптотическое выражение для концентрации n имеет вид

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r,\theta)}{n_*} = \frac{c_*}{v_\infty}\frac{r_*^2}{r^2}\left[1 + \frac{\Omega^2 R^3}{GM} b_0 + \frac{1}{2}\frac{\Omega^2 R^3}{GM} b_2(3\cos^2\theta - 1)\right], \tag{1.201}$$

где $v_\infty^2 = v_R^2 - 2GM/R$. Как видно из табл. 1.1, для всех рассмотренных случаев выполняется условие $b_2 < 0$. Последнее означает, что вращение приводит к появлению плотного диска в экваториальной плоскости; этот результат хорошо известен [Lammers, Cassinelli, 1999], но прежде он был получен лишь на основе численных расчетов;

4) как показывают отрицательные значения q_2 в (1.200), для $\varepsilon_2 > 1$ большая часть потока вещества также будет сконцентрирована вблизи экваториальной плоскости.

1.4. Осесимметричные стационарные течения в окрестности черной дыры

1.4.1. Физическое интермеццо — (3+1)-расщепление в метрике Керра. Рассмотрим, как метод уравнения Грэда–Шафранова может быть применен для осесимметричных стационарных течений в окрестности вращающейся черной дыры. Напомним, что одна из основных сложностей общей теории относительности состоит в необходимости работать с четырехмерными объектами. В результате мы часто не можем использовать нашу трехмерную интуицию при анализе релятивистских процессов.

Тем не менее был создан простой язык (так называемое (3 + 1)-расщепление), который позволяет работать с трехмерными величинами даже в рамках общей теории относительности [Thorne, Macdonald, 1982]. (Подробнее см. книгу «Черные дыры. Мембранный подход» под редакцией К. Торна, Р. Прайса и Д. Макдональда; 1988 г.) Основная идея данного подхода состоит в том, что для стационарной метрики собственное время τ однозначно связано со «временем на бесконечности» t. Этот факт и позволяет отделить время t от пространственных координат x^i $(i = 1, 2, 3)$. В результате все уравнения могут быть переписаны в простой трехмерной форме, причем их физический смысл остается совершенно прозрачным. Ниже будут изложены основные результаты указанного подхода.

Прежде всего, вспомним основные соотношения для метрики Керра — метрики вращающейся черной дыры. В координатах Бойера–Линдквиста — t, r, θ и φ — она имеет вид

$$\mathrm{d}s^2 = -\alpha^2\mathrm{d}t^2 + g_{ik}(\mathrm{d}x^i + \beta^i\mathrm{d}t)(\mathrm{d}x^k + \beta^k\mathrm{d}t), \tag{1.202}$$

где величина

$$\alpha = \frac{\rho}{\Sigma}\sqrt{\Delta} \tag{1.203}$$

есть гравитационное красное смещение, а вектор $\boldsymbol{\beta}$ является тороидальным:

$$\beta^r = \beta^\theta = 0, \quad \beta^\varphi = -\omega. \tag{1.204}$$

Здесь

$$\omega = \frac{2aMr}{\Sigma^2} \tag{1.205}$$

есть так называемая угловая скорость Лензе–Тирринга (где β^φ — контравариантная компонента вектора $\boldsymbol{\beta}$); M и a — масса и удельный угловой момент черной дыры $(a = J/M)$. Кроме того, мы ввели стандартные обозначения:

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr; \quad \rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta;$$
$$\Sigma^2 = (r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta; \quad \varpi = \frac{\Sigma}{\rho}\sin\theta. \tag{1.206}$$

Далее в настоящей главе везде будут использоваться единицы, в которых $c = G = 1$. Подчеркнем, что трехмерная метрика g_{ik} в (1.202) является диагональной:

$$g_{rr} = \rho^2/\Delta; \quad g_{\theta\theta} = \rho^2; \quad g_{\varphi\varphi} = \varpi^2. \tag{1.207}$$

Метрика Керра имеет следующие свойства:

— она осесимметрична и стационарна. Именно это и нужно для использования метода уравнения Грэда–Шафранова;

— метрика Керра является двухпараметрической, т. е. зависит от двух параметров: массы M и удельного углового момента a;

— для невращающейся черной дыры метрика Керра переходит в метрику Шварцшильда: $g_{rr} = \alpha^{-2}$; $g_{\theta\theta} = r^2$; $g_{\varphi\varphi} = r^2\sin^2\theta$. Здесь $\alpha^2 = 1 - 2M/r$;

— на больших расстояниях (при $r \gg 2M$) координаты Бойера–Линдквиста совпадают со сферическими координатами: $g_{rr} = 1$; $g_{\theta\theta} = r^2$; $g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2\theta$.

Как мы видим, одним из основных параметров метрики Керра является красное смещение α. Эта величина позволяет определить основные характеристики пространства-времени вблизи вращающейся черной дыры:

— красное смещение α описывает задержку между собственным временем τ и временем на бесконечности t: $\mathrm{d}\tau = \alpha\,\mathrm{d}t$;

— условие $\alpha = 0$ определяет положение горизонта событий, т. е. радиус черной дыры:

$$r_{\mathrm{g}} = M + \sqrt{M^2 - a^2}; \tag{1.208}$$

— координаты Бойера–Линдквиста не описывают пространство-время внутри горизонта; при $r = r_{\mathrm{g}}$ метрика Керра имеет координатную особенность.

Перечислим также основные свойства угловой скорости Лензе–Тирринга ω, которая является вторым ключевым параметром метрики Керра:

— угловая скорость Лензе–Тирринга ω соответствует собственному движению пространства вокруг черной дыры;

— при малых угловых скоростях $\omega \propto a$;

— по определению $\Omega_{\mathrm{H}} = \omega(r_{\mathrm{g}})$ есть угловая скорость вращения черной дыры (не зависящая от угла θ);

— как видно из соотношения (1.208), параметр a ограничен сверху: $a \leqslant M$;

— для любых скоростей вращения $\Omega_{\mathrm{H}} r_{\mathrm{g}} = a/(2M)$.

Наконец, удобно ввести специальную систему координат — ZAMO (от англ. *Zero Angular Momentum Observers* — наблюдатели с нулевым угловым моментом [Thorne, Macdonald, 1982]) — обладающую следующими свойствами:

— наблюдатели ZAMO располагаются при постоянном радиусе $r = \mathrm{const}$, $\theta = \mathrm{const}$, но вращаются с угловой скоростью Лензе–Тирринга ($\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t = \omega$);

— для ZAMO четырехмерная метрика $g_{\alpha\beta}$ диагональна, причем ее трехмерная часть, g_{ik}, совпадает с (1.207);

— в локальном эксперименте, выполненном ZAMO, отсутствует вращение гироскопов.

Упражнение. Покажите прямой подстановкой, что поверхность эргосферы черной дыры

$$r = M + \sqrt{M^2 - a^2\cos^2\theta} \tag{1.209}$$

(в пределах которой отсутствие вращения для любого тела становится невозможным) задается простым условием:

$$\alpha^2 = \omega^2 \varpi^2. \tag{1.210}$$

Чтобы прояснить физический смысл величин α и ω, рассмотрим движение частицы в гравитационном поле вращающейся черной дыры. Оказывается, что четырехмерное уравнение движения:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}s} = 0, \tag{1.211}$$

может быть переписано в простой трехмерной форме:

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}\tau} = \frac{m_\mathrm{p}}{\sqrt{1-v^2}}g_i + H_{ik}\frac{m_\mathrm{p}v^k}{\sqrt{1-v^2}}; \tag{1.212}$$

$$\mathbf{g} = -\frac{1}{\alpha}\nabla\alpha; \tag{1.213}$$

$$H_{ik} = \frac{1}{\alpha}\nabla_i\beta_k. \tag{1.214}$$

Напомним, что

— греческие индексы α, β и γ соответствуют четырехмерным величинам, тогда как латинские i, j и k — трехмерным;

— τ есть собственное время, а все трехмерные физические величины измеряются ZAMO;

— ∇_i означает ковариантную производную в трехмерной метрике (1.207).

Оказывается, что в слабом гравитационном поле, т. е. вдали от черной дыры, имеет место замечательная аналогия между гравитационными и электромагнитными уравнениями. Действительно, уравнение движения (1.212) можно переписать в виде

$$m_\mathrm{p}\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}\tau^2} = m_\mathrm{p}\left(\mathbf{g} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\tau}\times\mathbf{H}\right), \tag{1.215}$$

где

$$\mathbf{g} = -\nabla\alpha, \quad \mathbf{H} = \nabla\times\boldsymbol{\beta}, \tag{1.216}$$

причем, как мы видим, величины α и $\boldsymbol{\beta}$ играют здесь роль скалярного и векторного потенциалов. Более того, уравнения Эйнштейна в слабом гравитационном поле будут также полностью эквивалентны уравнениям Максвелла:

$$\nabla\cdot\mathbf{g} = -4\pi\rho_\mathrm{m}; \tag{1.217}$$

$$\nabla\times\mathbf{g} = 0; \tag{1.218}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{H} = 0; \tag{1.219}$$

$$\nabla\times\mathbf{H} = -16\pi\rho_\mathrm{m}\mathbf{v}. \tag{1.220}$$

Отличие состоит лишь в знаках в первом и последнем уравнениях (в гравитации одноименные заряды притягиваются). Иными словами, гравитационное поле $\mathbf{g}$ аналогично электрическому полю, а новое (так называемое гравитомагнитное) поле $\mathbf{H}$ — магнитному полю, которое пропорционально угловой скорости вращения черной дыры. При этом источником гравитоэлектрического поля $\mathbf{g}$ являются массы, а источником гравитомагнитного поля $\mathbf{H}$ — потоки масс. Появление дополнительной гравитомагнитной силы и является наиболее важным следствием движения тел в общей теории относительности.

Например, вращающийся шар с массой M и угловым моментом $\mathbf{J}$ будет создавать поля [Торн, Прайс, Макдональд, 1988]

$$\mathbf{g} = -\frac{M}{r^2}\mathbf{e}_{\hat{r}}; \tag{1.221}$$

$$\mathbf{H} = 2\frac{\mathbf{J} - 3\mathbf{e}_{\hat{r}}(\mathbf{J}\mathbf{e}_{\hat{r}})}{r^3}, \tag{1.222}$$

т. е. обычное поле гравитации и дипольное гравитомагнитное поле (напомним, что $G = c = 1$). Приведем еще один пример. Покоящийся бесконечно длинный массивный цилиндр (для простоты направим его вдоль вертикальной оси) создает вокруг себя гравитационное поле

$$\mathbf{g} = -\frac{2}{\varpi}\mu_{\mathrm{g}}\mathbf{e}_{\hat{\varpi}}, \tag{1.223}$$

где μ_{g} [г/см] — масса на единице длины. Если же цилиндр будет двигаться вдоль своей оси со скоростью v, то в дополнение к гравитоэлектрическому полю $\mathbf{g}$ появится и гравитомагнитное поле $\mathbf{H}$, величину которого согласно (1.220) можно определить в точном соответствии с законом Био-Савара:

$$\mathbf{H} = \frac{8v}{\varpi}\mu_{\mathrm{g}}\mathbf{e}_{\hat{\varphi}}. \tag{1.224}$$

Основное отличие от случая электромагнетизма состоит в том, что в теории гравитации имеются частицы лишь одного знака заряда; поэтому гравитомагнитная сила всегда существует на фоне в c^2/v^2 большей гравитоэлектрической силы. В электродинамике же возможна ситуация, при которой провод с током не содержит полного заряда, т. е. существует лишь магнитное поле, а электрическое поле вообще отсутствует.

1.4.2. Основные уравнения. Итак, язык $(3+1)$-расщепления позволяет описывать физические процессы на простом трехмерном языке. Если к тому же в качестве опорных наблюдателей использовать ZAMO, то уравнения движения удается записать в наиболее компактной форме. Дело в том, что ZAMO является аналогом инерциальной системы отсчета, во всяком случае относительно тороидального движения. В итоге, в рамках $(3+1)$-расщепления

— все трехмерные векторы должны определяться локальными наблюдениями ZAMO;

— все вычисления должны производиться в трехмерной диагональной метрике (1.207), например [Корн, Корн, 1984]

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}A^i\right); \tag{1.225}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{g}}\begin{pmatrix} \sqrt{g_{rr}}\mathbf{e}_{\hat{r}} & \sqrt{g_{\theta\theta}}\mathbf{e}_{\hat{\theta}} & \sqrt{g_{\varphi\varphi}}\mathbf{e}_{\hat{\varphi}} \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\theta & \partial/\partial\varphi \\ \sqrt{g_{rr}}A_{\hat{r}} & \sqrt{g_{\theta\theta}}A_{\hat{\theta}} & \sqrt{g_{\varphi\varphi}}A_{\hat{\varphi}} \end{pmatrix}; \tag{1.226}$$

— все векторные соотношения остаются такими же, как и в плоском пространстве, например $\nabla \times (\nabla a) = 0$ и $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$.

С другой стороны, все термодинамические функции в рамках $(3+1)$-расщепления должны определяться в сопутствующей системе координат. По этой причине не возникает вопроса о переходе из одной системы отсчета в другую. Фактически здесь имеется лишь одно усложнение: в релятивистском случае приходится иметь дело с релятивистской энтальпией μ, включающей в себя массу покоя:

$$\mu = \frac{\rho_\mathrm{m} + P}{n} \approx m_\mathrm{p}c^2 + m_\mathrm{p}w + \ldots, \tag{1.227}$$

где ρ_m — плотность внутренней энергии. Для политропного уравнения состояния, $P = k(s)n^\Gamma$ (см. (1.25)), при $c = 1$ получаем [Шапиро, Тьюколски, 1985]

$$\mu = m_\mathrm{p} + \frac{\Gamma}{\Gamma - 1}k(s)n^{\Gamma-1}; \tag{1.228}$$

$$c_\mathrm{s}^2 = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)_s = \frac{\Gamma}{\mu}k(s)n^{\Gamma-1}. \tag{1.229}$$

Наконец, релятивистский тензор энергии-импульса, имеющий симметричный вид, выглядит практически так же, как и в плоском пространстве:

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \mathbf{S} \\ \mathbf{S} & T^{ik} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\rho_\mathrm{m} + Pv^2)\gamma^2 & (\rho_\mathrm{m} + P)\gamma\mathbf{u} \\ (\rho_\mathrm{m} + P)\gamma\mathbf{u} & (\rho_\mathrm{m} + P)u^i u^k + Pg^{ik} \end{pmatrix}. \tag{1.230}$$

Напомним, что γ есть лоренц-фактор среды, измеренный ZAMO. Используя релятивистское выражение для закона сохранения энергии-импульса: $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$, получаем [Thorne, Macdonald, 1982]

$$-\frac{1}{\alpha}(\beta\nabla)\varepsilon = -\frac{1}{\alpha^2}\nabla \cdot (\alpha^2\mathbf{S}) + H_{ik}T^{ik}, \tag{1.231}$$

$$\nabla_k T_i^k + \frac{1}{\alpha}S_\varphi\frac{\partial\omega}{\partial x^i} + (\varepsilon\delta_i^k + T_i^k)\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x^k} = 0. \tag{1.232}$$

Дополнительные слагаемые в уравнениях энергии (1.231) и импульса (1.232) обусловлены действием гравитомагнитной силы.

Перейдем теперь к рассмотрению осесимметричных стационарных течений. Для этого, как и в плоском пространстве, введем функцию потока $\Phi(r,\theta)$ через полоидальную компоненту четырех-скорости $\mathbf{u}_\mathrm{p}$:

$$\alpha n\mathbf{u}_\mathrm{p} = \frac{\nabla\Phi \times \mathbf{e}_{\hat\varphi}}{2\pi\varpi}. \tag{1.233}$$

Векторное определение (1.233) означает следующие соотношения для физических компонент:

$$\alpha n u_{\hat r} = \frac{1}{2\pi\varpi}(\nabla\Phi)_{\hat\theta}; \tag{1.234}$$

$$\alpha n u_{\hat\theta} = -\frac{1}{2\pi\varpi}(\nabla\Phi)_{\hat r}. \tag{1.235}$$

При этом физические компоненты градиента определяются как $(\nabla\Phi)_{\hat{r}} = g_{rr}^{-1/2}\partial\Phi/\partial r$ и $(\nabla\Phi)_{\hat{\theta}} = g_{\theta\theta}^{-1/2}\partial\Phi/\partial\theta$, поскольку производные $\partial\Phi/\partial r$ и $\partial\Phi/\partial\theta$ являются ковариантными компонентами градиента Φ. Из определения (1.233) следует также, что уравнение непрерывности:

$$\nabla\cdot(\alpha n\mathbf{u}) = 0, \qquad (1.236)$$

будет выполнено автоматически. Поясним появление в (1.236) дополнительного фактора α. Оно связано с тем обстоятельством, что трехмерное уравнение непрерывности (1.236) в действительности является следствием четырехмерного уравнения

$$\nabla_\beta N^\beta = \frac{1}{\sqrt{-g_{tt}g}}\frac{\partial}{\partial x^\beta}(\sqrt{-g_{tt}g}N^\beta), \qquad (1.237)$$

где $-g_{tt}$ как раз и равен α^2.

В результате, используя определения (1.230) и (1.233), можно переписать уравнение энергии (1.231) и φ-компоненту уравнения (1.232) как

$$\mathbf{u}\cdot\nabla(\alpha\mu\gamma) + \mu u_\varphi\mathbf{u}\cdot\nabla\omega = 0; \qquad (1.238)$$

$$\mathbf{u}\cdot\nabla(\mu u_\varphi) = 0. \qquad (1.239)$$

Следовательно, два интеграла движения могут быть представлены в виде

$$E(\Phi) = \alpha\mu\gamma + \mu\omega\varpi u_{\hat{\varphi}}; \qquad (1.240)$$

$$L(\Phi) = \mu\varpi u_{\hat{\varphi}}. \qquad (1.241)$$

Упражнение. Получите выражения (1.238)–(1.241).

Выражения (1.240) и (1.241) являются обобщением нерелятивистских соотношений (1.87) и (1.91) на случай вращающейся черной дыры. Действительно, для $\omega = 0$ для интеграла Бернулли, например, имеем (восстановив здесь размерность)

$$E = \gamma\mu\alpha \approx \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)(m_\mathrm{p}c^2 + m_\mathrm{p}w)\left(1 - \frac{GM}{c^2 r}\right) \approx$$

$$\approx m_\mathrm{p}c^2 + m_\mathrm{p}\left(\frac{v^2}{2} + w + \varphi_\mathrm{g}\right) + \ldots \qquad (1.242)$$

Мы видим, что размерность релятивистского интеграла Бернулли E (как и инварианта L) отличается от нерелятивисткого значения только фактором m_p. Третьим же инвариантом по-прежнему является энтропия:

$$s = s(\Phi). \qquad (1.243)$$

Используя инварианты E, L и s, вновь можно записать полоидальную компоненту релятивистского уравнения Эйлера [Frolov, Novikov, 1998]:

$$nu^b\nabla_b(\mu u_a) + \nabla_a P - \mu n(u_{\hat{\varphi}})^2\frac{1}{\varpi}\nabla_a\varpi + \frac{1}{\alpha}\mu n\gamma(\varpi u_{\hat{\varphi}})\nabla_a\omega + \frac{1}{\alpha}\mu n\gamma^2\nabla_a\alpha = 0, \qquad (1.244)$$

где индексы a и b пробегают лишь значения r и θ, как $[\mathrm{Euler}]_{\mathrm{p}} = [\mathrm{GS}]\nabla\Phi$; уравнение для функции потока, $[\mathrm{GS}] = 0$, теперь имеет вид

$$-\hat{\mathcal{M}}^2\left[\alpha\varpi^2\nabla_k\left(\frac{1}{\alpha\varpi^2}\nabla^k\Phi\right) + \frac{\nabla^i\Phi\cdot\nabla^k\Phi\cdot\nabla_i\nabla_k\Phi}{(\nabla\Phi)^2 D}\right] + \frac{\hat{\mathcal{M}}^2\nabla'_k F\cdot\nabla^k\Phi}{2(\nabla\Phi)^2 D} + \\ + \frac{32\pi^4}{\hat{\mathcal{M}}^2}\frac{\partial}{\partial\Phi}\left[\varpi^2(E-\omega L)^2 - \alpha^2 L^2\right] - 16\pi^3\alpha^2\varpi^2 nT\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\Phi} = 0. \quad (1.245)$$

Здесь

$$F = \frac{64\pi^4}{\hat{\mathcal{M}}^4}\left[\varpi^2(E-\omega L)^2 - \alpha^2L^2 - \varpi^2\alpha^2\mu^2\right], \quad (1.246)$$

где введена термодинамическая функция

$$\hat{\mathcal{M}}^2 = \frac{4\pi\mu}{n}. \quad (1.247)$$

Оператор ∇'_k действует на все переменные, за исключением $\hat{\mathcal{M}}^2$, а оператор $\partial/\partial\Phi$ — лишь на инварианты $E(\Phi)$, $L(\Phi)$ и $s(\Phi)$. Наконец, знаменатель D выглядит теперь как

$$D = -1 + \frac{1}{u_{\mathrm{p}}^2}\frac{c_{\mathrm{s}}^2}{1-c_{\mathrm{s}}^2}, \quad (1.248)$$

причем физическая компонента полоидальной четырех-скорости u_{p} может быть найдена из определения (1.233). В компактной же форме релятивистское уравнение имеет вид

$$-\alpha\varpi^2\nabla_k\left(\frac{\hat{\mathcal{M}}^2}{\alpha\varpi^2}\nabla^k\Phi\right) + \frac{32\pi^4}{\hat{\mathcal{M}}^2}\frac{\partial}{\partial\Phi}\left[\varpi^2(E-\omega L)^2 - \alpha^2L^2\right] - \\ - 16\pi^3\alpha^2\varpi^2 nT\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\Phi} = 0. \quad (1.249)$$

Гидродинамическая версия уравнения Грэда–Шафранова в метрике Керра была получена М. Андерсоном [Anderson, 1989] в рамках стандартного четырехмерного формализма, а также В. С. Бескиным и В. И. Парьевым (1993 г.) в рамках $(3+1)$-расщепления.

Релятивистское уравнение Грэда–Шафранова должно быть дополнено релятивистским же уравнением Бернулли ($\gamma^2 = 1 + u_{\hat{\varphi}}^2 + u_{\mathrm{p}}^2$), которое может быть записано в виде

$$(E-\omega L)^2 = \alpha^2\mu^2 + \frac{\alpha^2}{\varpi^2}L^2 + \frac{\hat{\mathcal{M}}^4}{64\pi^4\varpi^2}(\nabla\Phi)^2 \quad (1.250)$$

или, в дифференциальной форме, в виде

$$\nabla_k\hat{\mathcal{M}}^2 = -\hat{\mathcal{M}}^2\frac{N_k}{D}, \quad (1.251)$$

где

$$N_k = -\frac{\nabla^i\Phi\cdot\nabla_i\nabla_k\Phi}{(\nabla\Phi)^2} + \frac{\nabla'_k F}{2(\nabla\Phi)^2}. \quad (1.252)$$

Напомним, что в (1.245), (1.250) и (1.252) релятивистскую энтальпию μ нужно рассматривать как функцию $\hat{\mathcal{M}}^2$ и s: $\mu = \mu(\hat{\mathcal{M}}^2, s)$. В общем случае соответствующая дифференциальная связь имеет вид [Бескин, Парьев, 1993]

$$\mathrm{d}\mu = -\frac{c_\mathrm{s}^2}{1-c_\mathrm{s}^2}\mu\frac{\mathrm{d}\hat{\mathcal{M}}^2}{\hat{\mathcal{M}}^2} + \frac{1}{1-c_\mathrm{s}^2}\left[\frac{1}{n}\left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_n + T\right]\mathrm{d}s. \qquad (1.253)$$

Поэтому, как и в нерелятивистском случае, уравнение Бернулли (1.250) неявно определяет $\hat{\mathcal{M}}^2$ через функцию потока Φ и три интеграла движения: $\hat{\mathcal{M}}^2 = \hat{\mathcal{M}}^2(\nabla\Phi; E, L, s)$.

Для полоидальной физической четырех-скорости u_p удобно использовать другую форму:

$$u_\mathrm{p}^2 = \frac{(E-\omega L)^2 - \alpha^2 L^2/\varpi^2 - \alpha^2\mu^2}{\alpha^2\mu^2}. \qquad (1.254)$$

Таким образом, при приближении к горизонту $u_\mathrm{p} \to \infty$ как α^{-1}. Как уже подчеркивалось, подобное поведение является следствием выбора системы координат, которая имеет координатную особенность при $r = r_\mathrm{g}$. Отметим, наконец, что из соотношения (1.254) следует важный вывод — вблизи горизонта черной дыры течение должно быть сверхзвуковым ($u_\mathrm{p} > c_\mathrm{s}$).

Воспользовавшись определением (1.233), легко показать, что при приближении к горизонту черной дыры расходится лишь радиальная компонента полоидальной четырех-скорости, тогда как θ-компонента остается конечной:

$$|u_{\hat{r}}| = O(\alpha^{-1}); \qquad (1.255)$$

$$|u_{\hat{\theta}}| = O(1). \qquad (1.256)$$

Соответственно, конечной остается и тороидальная компонента четырех-скорости:

$$|u_{\hat{\varphi}}| = O(1). \qquad (1.257)$$

Последнее соотношение означает, что вблизи горизонта $|v_{\hat{\varphi}}| = O(\alpha)$, и поэтому *для удаленного наблюдателя все тела вблизи горизонта будут вращаться с угловой скоростью ω Лензе–Тирринга.*

Как мы увидим в дальнейшем, это важное свойство оказывается справедливым и для замагниченных течений.

УПРАЖНЕНИЕ. Покажите, что при приближении к горизонту $v_{\hat{r}} \to -1$, $v_{\hat{\theta}} \to 0$, так что с точки зрения опорных наблюдателей движение становится чисто радиальным.

1.4.3. Точные решения.

1. *Сферически-симметричная аккреция* [Michel, 1972]. Если скорость течения газа на бесконечности равна нулю ($\gamma_\infty = 1$), а термодинамические функции изотропны, то $E = \mu_\infty = \mathrm{const}$ и $s = s_\infty = \mathrm{const}$. Следовательно, как и в нерелятивистском случае, две термодинами-

ческие функции определяют два интеграла движения — E и s. Для сферически-симметричного течения можно положить $L = 0$. При указанных условиях уравнение для функции потока (1.245) имеет тривиальное решение: $\Phi = \Phi_0(1 - \cos\theta)$, где темп аккреции $(2\Phi_0)$ должен быть определен из критических условий на звуковой поверхности $(r = r_*)$.

В результате можно получить следующее выражение для радиуса звуковой поверхности:

$$r_* = \frac{M}{2}\left(\frac{1}{c_*^2} + 3\right), \tag{1.258}$$

так что для $c_*^2 \ll 1$ мы возвращаемся к нерелятивистскому выражению (1.51). Что же касается самой величины c_*^2, то она может быть выражена через значение c_∞ скорости звука на бесконечности из неявного соотношения [Бескин, Пидопрыгора, 1995]

$$\left(1 - \frac{c_\infty^2}{\Gamma - 1}\right)^2 = (1 + 3c_*^2)\left(1 - \frac{c_*^2}{\Gamma - 1}\right)^2. \tag{1.259}$$

В пределе $c_\infty \ll 1$ равенство (1.259) переходит в хорошо известное выражение (1.43). Величины $\hat{\mathcal{M}}_*^2$ и μ_* на звуковой поверхности определяются как

$$\hat{\mathcal{M}}_*^2 = \hat{\mathcal{M}}_\infty^2 \left(\frac{c_\infty^2}{c_*^2}\right)^{1/(\Gamma-1)} \left(\frac{\Gamma - 1 - c_*^2}{\Gamma - 1 - c_\infty^2}\right)^{(2-\Gamma)/(\Gamma-1)}; \tag{1.260}$$

$$\mu_* = \mu_\infty \frac{\Gamma - 1 - c_\infty^2}{\Gamma - 1 - c_*^2}. \tag{1.261}$$

Таким образом, темп аккреции может быть записан как $\dot{M} = 2m_\text{p}\Phi_\text{crit}$, где в релятивистском случае

$$\Phi_\text{crit} = -\frac{8\pi^2 r_*^2 E c_*}{\hat{\mathcal{M}}_*^2}. \tag{1.262}$$

Упражнения.

1. Воспользовавшись явным видом числителя и знаменателя в (1.251), получите выражения (1.258), (1.259) и (1.262) для $E = \text{const}$, $L = 0$, $s = \text{const}$ и $\omega = 0$.

2. Покажите, что при учете эффектов общей теории относительности трансзвуковая аккреция имеет место и для $\Gamma = 5/3$.

Наконец, в сверхзвуковой области $(r \ll r_*)$ имеем

$$\frac{\hat{\mathcal{M}}^2}{\hat{\mathcal{M}}_*^2} \simeq 2\left(\frac{r}{r_*}\right)^{3/2}; \tag{1.263}$$

$$\frac{c_s^2}{c_*^2} \simeq \frac{1}{2^{\Gamma-1}}\left(\frac{r}{r_*}\right)^{-3(\Gamma-1)/2} \tag{1.264}$$

В частности, на горизонте

$$c_{\rm s}^2(r_{\rm g}) = \frac{1}{16^{\Gamma-1}}(c_*)^{5-3\Gamma}. \tag{1.265}$$

Следовательно, для $c_*^2 \approx c_\infty^2 \ll 1$ скорость звука остается малой ($c_{\rm s} \ll 1$) вплоть до горизонта черной дыры.

Необходимо подчеркнуть, что аккреция на черные дыры существенно отличается от нерелятивистского случая. Дело в том, что в релятивистском случае все дозвуковые решения, существующие при аккреции на обычные звезды, имеют на горизонте особенность $v(r \to r_{\rm g}) = 0$, $n(r \to r_{\rm g}) = \infty$ (рис. 1.8). Иными словами, для поддержания дозвукового стационарного режима аккреции бесконечная сила гравитации вблизи горизонта должна быть уравновешена бесконечным градиентом давления. Следовательно, единственным физически приемлемым режимом аккреции на черную дыру является трансзвуковая аккреция [Michel, 1972].

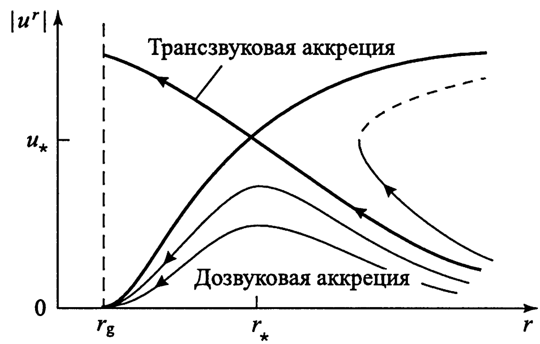


Рис. 1.8. Структура сферически-симметричной аккреции на черную дыру. Все кривые ниже X-точки, соответствующие дозвуковой аккреции, имеют на горизонте особенность $v_{\hat r} \to 0$ (т. е. $n \to \infty$)

2. *Аккреция пыли* ($P = 0$). Для аккреции вещества с нулевым давлением (аккреции пыли) линии тока должны совпадать с траекториями частиц, свободно движущихся в гравитационном поле вращающейся черной дыры. Для случая $L = 0$ ($u_\varphi = 0$) и нулевой кинетической энергии на бесконечности ($\gamma_\infty = 1$) такие траектории представляют собой «прямые линии» ($\theta = \text{const}$) для произвольного параметра вращения a [Frolov, Novikov, 1998]. Более того, для нулевого давления ($P = 0$) плотность линий тока может быть какой угодно. Иными словами, произвольная функция

$$\Phi = \Phi(\theta) \tag{1.266}$$

должна быть решением уравнения Грэда–Шафранова. В частности, это означает, что произволен темп аккреции. Последнее неудивительно, поскольку течение является сверхзвуковым во всем пространстве.

УПРАЖНЕНИЕ. Используя уравнение Бернулли (1.250) и компактную форму релятивистского уравнения для функции потока (1.249), покажите, что при $E = \mu = \mathrm{const}$, $L = 0$ и $s = 0$ произвольная функция $\Phi(\theta)$ действительно является его решением.

3. *Аккреция газа с* $c_{\mathrm{s}} = 1$ [Petrich, Shapiro, Teukolsky, 1988]. Как следует из соотношения (1.248), для $c_{\mathrm{s}} = 1$ имеем $D^{-1} = 0$. Следовательно, при $E = \mathrm{const}$, $L = 0$ и $s = \mathrm{const}$ уравнение для функции потока становится линейным:

$$\frac{\Delta}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{\rho^2}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) = 0. \qquad (1.267)$$

В результате его решение вновь может быть разложено по собственным функциям оператора $\hat{\mathcal{L}}_\theta$. Так, для движущейся черной дыры получаем [Petrich, Shapiro, Teukolsky, 1988]

$$\Phi = \Phi_0(1-\cos\theta) + \pi n_\infty v_\infty(r^2 - r_{\mathrm{g}}r)\sin^2\theta. \qquad (1.268)$$

Здесь темп аккреции ($2\Phi_0$) произволен по другой причине — течение остается дозвуковым вплоть до горизонта.

1.4.4. Аккреция Бонди–Хойла — релятивистский режим. Рассмотрим аккрецию на движущуюся черную дыру, т. е. релятивистскую версию аккреции Бонди–Хойла. Малым параметром задачи вновь является величина $\varepsilon_1 = v_\infty/c_\infty$. В релятивистском случае линеаризованное уравнение для возмущения функции потока $\varepsilon_1 f$, $\Phi = \Phi_0[1-\cos\theta + \varepsilon_1 f(r,\theta)]$, можно записать как [Бескин, Пидопрыгора, 1995]

$$-\varepsilon_1\alpha^2 D\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{\varepsilon_1}{r^2}(D+1)\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \varepsilon_1\alpha^2 N_r\frac{\partial f}{\partial r} = 0, \qquad (1.269)$$

где

$$N_r = \frac{2}{r} - \frac{\mu^2}{E^2 - \alpha^2\mu^2}\frac{M}{r^2}. \qquad (1.270)$$

Уравнение (1.269) имеет те же свойства, что и нерелятивистское уравнение (1.137).

1. Уравнение (1.269) линейно.

2. Его угловой оператор совпадает с оператором $\hat{\mathcal{L}}_\theta$ (см. (1.115)).

3. Поскольку все члены уравнения содержат малый параметр ε_1, функции D, c_{s} и т. д. могут быть взяты из нулевого приближения.

4. Поскольку для сферически-симметричного течения функции D, c_{s} и т. д. не зависят от θ, решение уравнения (1.269) может быть разложено по собственным функциям оператора $\hat{\mathcal{L}}_\theta$.

Вместе с тем рассматриваемое уравнение обладает еще одним замечательным свойством. Согласно (1.248) и (1.254)

$$D + 1 = \frac{\alpha^2\mu^2}{E^2 - \alpha^2\mu^2}\frac{c_{\mathrm{s}}^2}{1 - c_{\mathrm{s}}^2}, \qquad (1.271)$$

так что множитель α^2 содержится во всех слагаемых уравнения (1.269). Следовательно, оно не имеет особенности на горизонте. В частности, это означает, что на горизонте не нужно ставить никаких дополнительных граничных условий. Впрочем, последнее и не удивительно, поскольку горизонт соответствует сверхзвуковой области, которая не может влиять на структуру течения на больших расстояниях от черной дыры.

В результате решение уравнения (1.269) можно вновь искать в виде [Бескин, 1997; Бескин, Пидопрыгора, 1995]

$$\Phi(r,\theta) = \Phi_0[1 - \cos\theta + \varepsilon_1 g_1(r)\sin^2\theta], \tag{1.272}$$

причем уравнение для радиальной функции $g_1(r)$ теперь выглядит как

$$-D\frac{\mathrm{d}^2 g_1}{\mathrm{d}r^2} + N_r\frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}r} + 2\frac{\mu^2}{E^2 - \alpha^2\mu^2}\frac{c_\mathrm{s}^2}{1 - c_\mathrm{s}^2}\frac{g_1}{r^2} = 0. \tag{1.273}$$

При этом, как и в нерелятивистском случае, темп аккреции не изменяется в первом порядке по величине ε_1.

Что же касается граничных условий в случае уравнения для радиальной функции $g_1(r)$, то они формулируются следующим образом.

1. Условие регулярности на звуковой поверхности дает $g_1(r_*) = 0$.

2. На бесконечности

$$g_1(r) \to K(\Gamma)\frac{r^2}{r_*^2}, \tag{1.274}$$

где

$$K(\Gamma) = \frac{1}{2}\frac{\hat{\mathcal{M}}_*^2}{\hat{\mathcal{M}}_\infty^2}\frac{c_\infty}{c_*} \tag{1.275}$$

(табл. 1.2; отметим, что в таблице приведены значения для $c_\infty \ll 1$; в общем случае эти величины зависят и от c_∞).

Таблица 1.2

Γ	1,01	1,1	1,2	1,333	1,5	1,6
$K(\Gamma)$	0,49	0,09	0,07	0,044	0,016	0,003
$k_1(\Gamma)$	3,00	0,56	0,46	0,31	0,12	0,023
$K_\mathrm{in}(\Gamma)$	−0,74	−0,09	−0,03	0,025	0,0081	0,0002

Уравнение (1.273) с граничными условиями 1 и 2 полностью определяет структуру аккреции Бонди–Хойла на невращающуюся черную дыру. В частности, радиус звуковой поверхности по-прежнему выглядит как

$$r_*(\theta) = r_*^{(0)}\left[1 + 2\varepsilon_1\left(\frac{\Gamma+1}{D_1^2}\right)k_1(\Gamma)\cos\theta\right], \tag{1.276}$$

где теперь

$$D_1^2 = 10 - 6\Gamma + 18c_*^2 \quad \text{при} \quad \Gamma \neq 5/3,$$
$$D_1^2 = 12c_\infty \quad \text{при} \quad \Gamma = 5/3, \tag{1.277}$$

а $k_1(\Gamma)$ есть $g_1'(r_*)r_*$. Значения $k_1(\Gamma)$ приведены в табл. 1.2.

В целом же структура течения мало отличается от нерелятивистского случая, показанного на рис. 1.7. Здесь можно отметить лишь одно новое свойство, характерное как раз для случая аккреции на компактные объекты. Дело в том, что при $r \ll r_*$ радиальная функция $g_1(r)$ имеет асимптотику:

$$g_1(r) \approx K_{\text{in}}(\Gamma)\left(\frac{r}{r_*}\right)^{-1/2} \tag{1.278}$$

(значения K_{in} также можно найти в табл. 1.2). Следовательно, при $\varepsilon_1 > (M/r_*)^{1/2}$ вблизи черной дыры (т. е. при $r < \varepsilon_1^2 K_{\text{in}}^2 r_*$) линейное приближение будет нарушено, так что в этой области необходимо анализировать уже полное нелинейное уравнение (1.245). Поскольку знак коэффициента $K_{\text{in}}(\Gamma)$ зависит от показателя политропы Γ, область сгущения линий тока будет иметь место либо с фронтальной части черной дыры — при $\Gamma > 1{,}27$, либо с тыловой — при $\Gamma < 1{,}27$. Однако подобная концентрация линий тока соответствует сверхзвуковой области течения, которая не влияет на построенное выше решение.

1.4.5. Аккреция на медленно вращающуюся черную дыру. Рассмотрим аккрецию газа с нулевым собственным угловым моментом, $L = 0$ (т. е. $i = 2$ и $b = 2 + 2 - 1 = 3$), на медленно вращающуюся черную дыру. В данном случае малым параметром является величина

$$\varepsilon_3 = \frac{a}{M} \ll 1. \tag{1.279}$$

При этом компоненты метрики g_{ik} (см. (1.207)) будут отличаться от компонент метрики невращающейся черной дыры на величины порядка ε_3^2. Естественно предположить, что термодинамические функции на бесконечности, s_∞ и μ_∞, останутся теми же, что и для сферически-симметричной аккреции. Следовательно, мы вновь можем искать решение уравнения (1.245) в виде

$$\Phi(r,\theta) = \Phi_0[1 - \cos\theta + \varepsilon_3^2 f(r,\theta)], \tag{1.280}$$

где поток Φ_0 соответствует невозмущенному случаю ($a = 0$). Подставляя выражение (1.280) в (1.245), в первом порядке по величине ε_3^2 получаем

$$\begin{aligned} -\varepsilon_3^2\alpha^2 D\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{\varepsilon_3^2}{r^2}(D+1)\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \varepsilon_3^2\alpha^2 N_r\frac{\partial f}{\partial r} = \\ = \frac{a^2}{r^4}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(1 - 2\frac{\mu^2}{E^2-\alpha^2\mu^2}\frac{M}{r}\right)\sin^2\theta\cos\theta, \end{aligned} \tag{1.281}$$

где N_r по-прежнему определяется соотношением (1.270).

Очевидно, что свойства уравнения (1.281) вполне аналогичны свойствам уравнения (1.269). В частности, оно не имеет особенности на горизонте. В результате, как и для случая эжекции из медленно вращающейся звезды, поток $\Phi(r,\theta)$ будет содержать лишь две гармоники — $m = 0$ и $m = 2$; поэтому функцию потока $\Phi(r,\theta)$ можно представить в виде [Бескин, Пидопрыгора, 1995]

$$\Phi(r,\theta) = \Phi_0[(1-\cos\theta) + \varepsilon_3^2 g_0(1-\cos\theta) + \varepsilon_3^2 g_2(r)\sin^2\theta\cos\theta]. \quad (1.282)$$

Уравнение же для радиальной функции $g_2(r)$ примет вид

$$-D\frac{\mathrm{d}^2 g_2}{\mathrm{d}r^2} + N_r\frac{\mathrm{d}g_2}{\mathrm{d}r} + 6\frac{\mu^2}{E^2-\alpha^2\mu^2}\frac{c_s^2}{1-c_s^2}\frac{g_2}{r^2} = \frac{M^2}{r^4}\left(1-2\frac{\mu^2}{E^2-\alpha^2\mu^2}\frac{M}{r}\right). \quad (1.283)$$

Соответственно, условие $N_\theta(r_*) = 0$ регулярности на звуковой поверхности будет выглядеть следующим образом:

$$g_2(r_*) = -\frac{1}{2}\frac{M^2}{r_*^2}\alpha^2(r_*). \quad (1.284)$$

С другой стороны, условие на бесконечности (которое является третьим граничным условием, помимо величин s_∞ и μ_∞) дает $g_2(r\to\infty) = 0$.

Прямой подстановкой легко проверить, что при $r \ll r_*$ радиальная функция $g_2(r)$ может быть записана как

$$g_2(r) = -G(r)\frac{M^2}{r_*^2}\left(\frac{r}{r_*}\right)^{(1-3\Gamma)/2}, \quad (1.285)$$

где $G(r)\approx 1$. Следовательно, на горизонте $g_2(r_g) \sim (M/r_*)^{(5-3\Gamma)/2}$; поэтому возмущение сферически-симметричного течения остается малым ($\varepsilon_3^2 g_2(r) \ll 1$) вплоть до горизонта черной дыры. С другой стороны, поскольку $g_2(r) < 0$, вращение черной дыры приводит к концентрации линий тока в экваториальной плоскости. Дополнительное рассмотрение, подобное проведенному для нерелятивистской аккреции Бонди–Хойла, показывает, что [Бескин, Пидопрыгора, 1995]

$$g_0 = -2\frac{M^3}{r_*^3}. \quad (1.286)$$

Таким образом, вращение черной дыры уменьшает темп аккреции. Однако обычно в реальных условиях $c_\infty^2 \ll 1$ (откуда $M/r_* \ll 1$), так что эффекты вращения черной дыры оказываются чрезвычайно малыми.

Наконец, выражение для радиуса звуковой поверхности имеет вид

$$r_*(\theta) = r_*^{(0)}\left\{1-\varepsilon_3^2\frac{M^2}{D_1^2 r_*^2}\left[(10-6\Gamma)\cos^2\theta + (1-k_4)(\Gamma+1)(3\cos^2\theta-1)\right]\right\}, \quad (1.287)$$

где величина D_1^2 опять определяется из соотношений (1.277), а коэффициент $k_4 = r_*^3 g_2'(r_*)/M^2$, изменяющийся в пределах $0{,}86 \div 0{,}89$, практически не зависит от политропного индекса Γ (подробнее см. [Бескин, Пидопрыгора, 1995]). Наличие дополнительного малого параметра M^2/r_*^2 показывает, что и форма звуковой поверхности будет мало отличаться от сферической даже для $\varepsilon_3 \approx 1$. Тем не менее мы видим, что звуковая поверхность оказывается сплюснутой у полюсов и вытянутой у экватора ($r_*(0) < r_*(\pi/2)$). Последнее означает, что стандартная особая точка находится у полюсов, а нестандартная — в экваториальной плоскости. В результате сепаратрисные характеристики будут выходить из точек, расположенных на экваторе, вновь касаться звуковой поверхности в полярных областях и затем уже закручиваться по направлению к черной дыре.

1.4.6. Аккреция вещества с малым угловым моментом на невращающуюся черную дыру. Рассмотрим задачу об аккреции вещества с малым угловым моментом на невращающуюся черную дыру [Anderson, 1989; Бескин, Малышкин, 1996]. Для получения аналитического решения, следуя развитому ранее методу расчета, будем считать, что угловой момент L аккрецирующего вещества достаточно мал, так что радиальная скорость среды $v_{\hat{r}}$ всегда больше азимутальной скорости $v_{\hat{\varphi}}$. В этом случае естественно предположить, что структура течения будет слабо отличатся от сферически-симметричной аккреции.

Отметим одно важное отличие данной задачи от случая аккреции вещества с нулевым угловым моментом. Дело в том, что закон сохранения углового момента, $L \propto r v_{\hat{\varphi}}$, показывает, что на больших расстояниях $v_{\hat{\varphi}} \propto r^{-1}$. С другой стороны, для сферически-симметричного решения при $r \gg r_*$ имеем $v_{\hat{r}} \propto r^{-2}$. Таким образом, при любых сколь угодно малых угловых моментах L на больших расстояниях от гравитирующего центра структура течения будет уже сильно отличаться от случая сферически-симметричной аккреции. Поэтому мы ограничимся рассмотрением лишь области в пределах некоторого внешнего радиуса R, внутри которого радиальная скорость $v_{\hat{r}}$ всегда много больше азимутальной скорости $v_{\hat{\varphi}}$. Кстати, такая постановка задачи более соответствует действительности, поскольку естественно рассматривать лишь область, в которой скорость $v_{\rm tur}$ турбулентных пульсаций во внешней среде всюду меньше гидродинамической скорости v. Как мы увидим, условия на внешней границе ($r = R$) практически не влияют на структуру аккреции в области сверхзвукового течения.

Итак, рассмотрим осесимметричную стационарную аккрецию идеальной среды на невращающуюся (шварцшильдовскую) черную дыру. Согласно (1.63) указанная задача требует четырех граничных условий. Ими могут быть, например, две термодинамические функции s и $c_{\rm s}$, угловой момент L, а также еще одна функция на внешней границе — при $r = R$ (см. ниже). Для простоты здесь предполагается, что энтропия s одинакова для всех линий тока.

Решение нашей задачи будем, как и раньше, искать в виде

$$\Phi(r,\theta) = \Phi_0\left[1 - \cos\theta + \varepsilon_L^2 f(r,\theta)\right], \tag{1.288}$$

где последнее слагаемое является поправкой к сферически-симметричному течению с малым параметром ε_L^2. Линеаризуя уравнение (1.245) по малым величинам ε_L^2, L^2 и $\mathrm{d}E/\mathrm{d}\theta$ и снова переходя с помощью соотношения $\mathrm{d}\Phi = \Phi_0 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta$ от производных $\mathrm{d}/\mathrm{d}\Phi$ к производным $\mathrm{d}/\mathrm{d}\theta$, получаем (сравните с (1.177))

$$-\varepsilon_L^2 D\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \varepsilon_L^2 \frac{D+1}{\alpha^2 r^2}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \varepsilon_L^2 N_r\frac{\partial f}{\partial r} =$$
$$= -\frac{D+1}{\alpha^2}\frac{E}{E^2-\alpha^2\mu^2}\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\theta} + \frac{1}{E^2-\alpha^2\mu^2}\frac{1}{r^4}\left(-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}L^2 + \frac{D+1}{\sin\theta}L\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta}\right). \tag{1.289}$$

Понятно, что и в этом уравнении все величины (кроме L, $\mathrm{d}L/\mathrm{d}\theta$ и $\mathrm{d}E/\mathrm{d}\theta$) берутся из сферически-симметричного решения. В частности,

$$D = -1 + \frac{1}{u_\mathrm{p}^2}\frac{c_\mathrm{s}^2}{1-c_\mathrm{s}^2} = -1 + \frac{\alpha^2\mu^2}{E_0^2-\alpha^2\mu^2}\frac{c_\mathrm{s}^2}{1-c_\mathrm{s}^2}, \tag{1.290}$$

$$N_r = \frac{2}{r} - \frac{\mu^2}{E_0^2-\alpha^2\mu^2}\frac{M}{r^2}. \tag{1.291}$$

Здесь вновь необходимо особо подчеркнуть тот факт, что поскольку $D+1 \propto \alpha^2$, то, как и в рассмотренных выше случаях, уравнение (1.289) не имеет особенности на горизонте событий.

Определим теперь условия на внешней границе ($r = R$). Будем считать, что при $r = R$ газ вращается как единое целое, т. е. $v_{\hat\varphi} \propto \sin\theta$ и $v_{\hat\theta} = 0$. Отсюда следует, что

$$L(\Phi) = m_\mathrm{p} R v_{\hat\varphi}\sin\theta = L_0\sin^2\theta, \tag{1.292}$$

$$E(\Phi) = E_0 + \frac{1}{2}m_\mathrm{p} v_{\hat\varphi}^2 = E_0 + \frac{L_0^2}{2R^2E_0}\sin^2\theta, \tag{1.293}$$

$$v_{\hat\theta}(R) = 0. \tag{1.294}$$

Здесь предполагается, что вдали от черной дыры $c_\mathrm{s} \ll 1$, а значит, $\mu \approx m_\mathrm{p}$. Как мы видим, малым параметром нашей задачи будет величина

$$\varepsilon_L = \frac{L_0}{E_0 r_\mathrm{g}}. \tag{1.295}$$

В результате уравнение (1.289) можно переписать в виде

$$-D\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{D+1}{\alpha^2 r^2}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + N_r\frac{\partial f}{\partial r} =$$
$$= \frac{4E_0^2}{E_0^2-\alpha^2\mu^2}\frac{M^2}{r^2}\left(\frac{2D+1}{r^2} - \frac{D+1}{\alpha^2R^2}\right)\sin^2\theta\cos\theta. \tag{1.296}$$

Раскладывая $f(r,\theta)$ по собственным функциям оператора $\hat{\mathcal{L}}_\theta$ аналогично тому, как это было сделано ранее, и подставляя полученный ряд в уравнение (1.296), находим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно радиальных функций $g_m(r)$:

$$-D\frac{d^2 g_m}{dr^2} + N_r\frac{dg_m}{dr} - q_m\frac{\mu^2}{E_0^2-\alpha^2\mu^2}\frac{c_s^2}{1-c_s^2}\frac{g_m}{r^2} = 0 \quad \text{при} \quad m \neq 2; \tag{1.297}$$

$$-D\frac{d^2 g_2}{dr^2} + N_r\frac{dg_2}{dr} + 6\frac{\mu^2}{E_0^2-\alpha^2\mu^2}\frac{c_s^2}{1-c_s^2}\frac{g_2}{r^2} = \\ = \frac{4E_0^2}{E_0^2-\alpha^2\mu^2}\frac{M^2}{r^2}\left(\frac{2D+1}{r^2}-\frac{D+1}{\alpha^2R^2}\right) \quad \text{при} \quad m = 2, \tag{1.298}$$

где $q_m = -m(m+1)$ — собственные числа оператора $\hat{\mathcal{L}}_\theta$.

В результате, как и в рассмотренных выше примерах, отличными от нуля оказываются лишь две радиальные функции: $g_0 = \mathrm{const}$ и $g_2(r)$. При этом при $R \gg r_*$, $c_* \ll 1$ получаем

$$g_0 = -\frac{16}{3}c_*^2; \tag{1.299}$$

$$g_2(r_*) = \frac{8}{3}c_*^2. \tag{1.300}$$

Вместе с условием на внешней границе $u_{\hat\theta}(R) = 0$, которое равносильно условию

$$g_2{}'(R) = 0, \tag{1.301}$$

уравнения (1.298)–(1.300) полностью решают поставленную задачу. В частности, отрицательная величина g_0 показывает, что вращение вещества замедляет темп аккреции. Далее, функция тока может быть записана в виде

$$\Phi(r,\theta) = \Phi_0\left[(1+\varepsilon_L^2 g_0)(1-\cos\theta) + \varepsilon_L^2 g_2(r)\sin^2\theta\cos\theta\right]. \tag{1.302}$$

Наконец, радиус $r_*(\theta)$ звуковой поверхности может быть представлен как

$$r_*(\theta) = r_*^{(0)} + \frac{1}{2}\varepsilon_L^2 c_*^2 r_*^{(0)}\frac{\Gamma+1}{3\Gamma-5}\left\{\left[3k(\Gamma)+16\frac{3-\Gamma}{\Gamma+1}\right]\sin^2\theta - 2k(\Gamma)\right\}; \tag{1.303}$$

входящие сюда значения $k(\Gamma) = r_* g_2'(r_*)/c_*^2$ приведены в табл. 1.3. Очевидно, что в рассматриваемом нами случае, $r_* \gg r_\mathrm{g}$ $(c_* \ll 1)$, возмущение звуковой поверхности будет чрезвычайно мало даже при $\varepsilon_L^2 \sim 1$. Как легко проверить, звуковая поверхность окажется вытя-

Таблица 1.3

Γ	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,65
$k(\Gamma)$	3,8	3,2	2,6	1,8	0,7	−0,8	−2,4

нутой вдоль оси вращения. Поэтому в данном случае нестандартные особые точки расположены на полюсах, а стандартные — в экваториальной плоскости.

Для дальнейшего исследования нам опять будет удобно ввести безразмерные переменные:

$$x = r/r_*; \tag{1.304}$$

$$u = \hat{\mathcal{M}}_*^2/\hat{\mathcal{M}}^2 \approx n/n_*; \tag{1.305}$$

$$w = c_\mathrm{s}^2/c_*^2; \tag{1.306}$$

$$y(x) = g_2(xr_*)/c_*^2. \tag{1.307}$$

Используя их, можно переписать уравнение (1.298) в виде (сравните с (1.180))

$$\left(1 - x^4wu^2\right)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + 2\left(\frac{1}{x} - x^2u^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 6x^2wu^2y =$$

$$= -16u^2\left[1 - 2x^4wu^2\left(1 - \frac{x^2}{2}\frac{r_*^2}{R^2}\right)\right]. \tag{1.308}$$

Здесь мы вновь для простоты предполагаем, что $c_* \ll 1$, откуда $r_* \gg r_\mathrm{g}$ и $\alpha^2(r_*) = 1$. Уравнение второго порядка (1.308) требует, естественно, двух граничных условий. Одним из них будет условие регулярности на звуковой поверхности. Согласно (1.300) имеем

$$y(1) = 8/3. \tag{1.309}$$

В качестве второго условия удобно использовать равенство нулю азимутальной скорости на внешней границе: $v_{\hat{\theta}}(R) = 0$. Оно дает

$$y'(R/r_*) = 0. \tag{1.310}$$

Для иллюстрации рассмотрим более подробно область сверхзвукового течения $r < r_*$. Для этого вычислим асимптотику уравнения (1.308) при $x \ll 1$. В указанном случае уравнение Бернулли (1.250) и политропное уравнение состояния (1.25) дают

$$u = x^{-3/2}/2;$$

$$w = u^{-(\Gamma-1)} \propto x^{-3(\Gamma-1)/2}. \tag{1.311}$$

Тогда из (1.308) следует, что функция $y(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$y'' + \frac{3}{2x}y' + \frac{3w}{2x}y = -\frac{4}{x^3}. \tag{1.312}$$

При малых x решение этого уравнения универсально (т. е. не зависит от граничных условий) и задается равенством

$$y(x) = -8/x. \tag{1.313}$$

Данное свойство связано с тем, что оба фундаментальных решения линейного уравнения растут медленнее, чем решение неоднородного уравнения. Соответственно, функция тока вблизи черной дыры имеет вид

$$\Phi(r,\theta) = \Phi_0\left[\left(1 - \frac{16}{3}\varepsilon_L^2 c_*^2\right)(1 - \cos\theta) - 2\varepsilon_L^2 \frac{r_g}{r}\sin^2\theta\cos\theta\right] \approx$$

$$\approx \Phi_0\left[(1 - \cos\theta) - 2\varepsilon_L^2 \frac{r_g}{r}\sin^2\theta\cos\theta\right], \quad (1.314)$$

т. е. зависит только от малого параметра ε_L и не зависит от условий на внешней границе ($r = R$) и от показателя политропы Г.

Наконец, концентрация газа в сопутствующей системе координат вблизи горизонта черной дыры (для получения которой следует воспользоваться соотношением (1.254)) для нерелятивистских температур ($c_s \ll 1$) может быть записана как

$$n = \frac{|\Phi_0|}{2\pi\sqrt{r_g r^3}}\left[1 - \frac{\varepsilon_L^2}{2}\frac{r_g}{r}\left(13\cos^2\theta - 5 + \frac{r_g}{r}\sin^2\theta\right)\right]. \quad (1.315)$$

Таким образом, благодаря наличию у вещества углового момента плотность газа вблизи экватора становится больше его плотности вблизи оси вращения. Аналогично для компонент четырех-скорости находим

$$u_{\hat{r}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - r_g/r}}\left(\frac{r_g}{r}\right)^{1/2}\left[1 - \frac{\varepsilon_L^2}{2}\frac{r_g}{r}\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\sin^2\theta\right]; \quad (1.316)$$

$$u_{\hat{\theta}} = 2\varepsilon_L^2\left(\frac{r_g}{r}\right)^{3/2}\sin\theta\cos\theta; \quad (1.317)$$

$$u_{\hat{\varphi}} = \varepsilon_L \frac{r_g}{r}\sin\theta. \quad (1.318)$$

Естественно, соотношения (1.316)–(1.318) могут быть использованы лишь в случае, когда $\varepsilon_L^2 r_g/r \ll 1$.

На рис. 1.9 построены линии тока $\Phi(r,\theta) = \mathrm{const}$ в интервале углов $0° < \theta < 90°$ для расстояний от черной дыры $r_g < r < 3r_g$ и значений ε_L^2, равных 0,1 и 0,3. Для сравнения там же точками показаны линии тока для сферически-симметричной задачи. Что же касается области параметров $\varepsilon_L \gtrsim 1$, то здесь на расстояниях $r \approx r_g\varepsilon_L^2$ в рамках идеальной гидродинамики неизбежно должна появиться точка остановки газа ($v_{\hat{r}} = 0$), поэтому рассматриваемое нами приближение, $v_{\hat{r}} \gg v_{\hat{\varphi}}$, будет нарушено.

Таким образом, метод уравнения Грэда–Шафранова позволяет найти точное решение и для случая аккреции вещества с малым угловым моментом. При этом удается получить аналитическую асимптотику (1.313) решения вблизи черной дыры, или, более точно, во всей сверхзвуковой области течения ($r \ll r_*$). Полученное решение подтверждает хорошо известный факт, состоящий в том, что уже в рамках идеальной гидродинамики наличие углового момента у аккрецирующего вещества приводит к образованию диска.

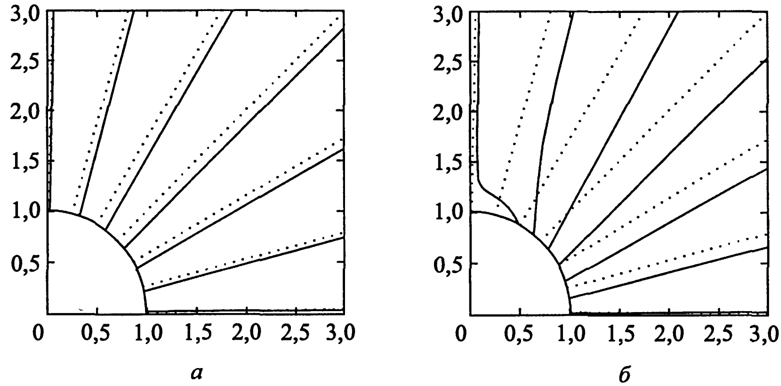


Рис. 1.9. Линии тока вещества в интервале углов $0^\circ < \theta < 90^\circ$ для расстояний от черной дыры $r_g < r < 3r_g$ [Бескин, Малышкин, 1996]. Параметр ε_L^2 равен 0,1 (*а*) и 0,3 (*б*). Точками показаны линии тока для сферически-симметричной аккреции

Конечно, в случае $\varepsilon_L \ll 1$, единственном, для которого было найдено решение во всей области пространства, можно говорить лишь о тенденции его образования. С другой стороны, в области $r > r_g\varepsilon_L^2$ ($\varepsilon_L > 1$), где вязкость и теплопроводность не играют существенной роли, решения (1.302) и (1.313) по-прежнему остаются справедливыми. Поэтому их можно использовать во внешних областях реальных аккреционных дисков, где, как правило, выполнено условие $\varepsilon_L \gg 1$. Отметим, наконец, что для нерелятивистских температур (при $c_* \ll 1$, а значит, и $r_* \gg r_g$) полученные решения могут быть непосредственно применены к задаче об аккреции на ньютоновский тяготеющий центр, т. е. к внешним областям многих других источников, в которых реализуется трансзвуковой режим аккреции. К ним относятся, в частности, молодые звездные объекты (YSO), а также, вероятно, некоторые рентгеновские источники, в которых аккреция происходит на нейтронную звезду со слабым магнитным полем.

В заключение отметим, что подобный подход был использован также и для построения решения в случае аккреции газа с нерелятивистской температурой ($c_\infty \ll 1$) и нулевым собственным угловым моментом ($L = 0$) на черную дыру, вращающуюся с произвольной скоростью [Pariev, 1996]. Построение такого решения становится возможным благодаря тому, что

— при $c_\infty \ll 1$ радиус звуковой поверхности существенно превышает радиус черной дыры; поэтому эффекты нерадиального гравитационного поля здесь оказываются малыми;

— при малой температуре падение вещества на произвольно быстро вращающуюся черную дыру, как мы видели, происходит вдоль радиальной координаты ($\theta = \text{const}$).

В результате и в этом случае решение уравнения Грэда–Шафранова можно искать в виде малой поправки к сферически-симметричному течению.

Подводя итоги, можно сказать, что простое нулевое приближение — сферически-симметричное течение — позволяет найти аналитическое решение для ряда важных астрофизических случаев. К сожалению, на сегодняшний день рассмотренные выше течения являются единственными примерами, в которых удалось получить аналитическое решение для двумерных течений в окрестности черной дыры.

1.4.7. Тонкий трансзвуковой диск. В качестве последнего примера исследуем внутреннюю двумерную структуру тонкого аккреционного диска. Такой режим аккреции реализуется, если угловой момент аккрецирующего газа достаточно велик ($\varepsilon_L \gg 1$) [Шапиро, Тьюколски, 1985]. Для простоты мы рассмотрим лишь случай невращающейся (шварцшильдовской) черной дыры [Бескин, Компанеец, Чеховской, 2002].

Напомним, что согласно стандартной модели [Шакура, 1972; Shakura, Sunyaev, 1973; Novikov, Thorne, 1973] при $\varepsilon_L \gg 1$ аккрецирующее вещество образует диск, вращающийся вокруг гравитирующего центра с кеплеровской скоростью: $v_{\rm K}(r) = (GM/r)^{1/2}$. Такой диск будет тонким при условии, что его температура достаточно мала ($c_{\rm s} \ll v_{\rm K}$), поскольку, как следует из вертикального баланса сил гравитации и градиента давления, $H \approx rc_{\rm s}/v_{\rm K}$. При этом, согласно оценке $v_r/v_{\rm K} \approx \alpha_{\rm SS}c_{\rm s}^2/v_{\rm K}^2$ (см. (1.14)), для $c_{\rm s} \ll v_{\rm K}$ радиальная скорость v_r остается много меньше как кеплеровской скорости $v_{\rm K}$, так и скорости звука $c_{\rm s}$. Эффекты же общей теории относительности приводят к двум важным свойствам:

— отсутствию устойчивых круговых орбит при $r < r_0 = 3r_{\rm g}$;

— трансзвуковому режиму аккреции.

Важно, что быстрое падение газа внутри последней устойчивой орбиты будет иметь место и при отсутствии вязкости. Отметим также, что при малой радиальной четырех-скорости на последней устойчивой орбите ($u_0 \ll 1$) свободная частица, согласно (1.6), совершит большое количество оборотов ($\sim u_0^{-1/3}$) прежде, чем достигнет горизонта черной дыры.

Очевидно, что метод уравненения Грэда–Шафранова неприменим в области устойчивых орбит, в которой диссипативные вязкие силы играют ведущую роль. Однако, как мы видели, после прохождения последней устойчивой орбиты влияние вязкости уже не должно быть определяющим. Поэтому можно предположить, что при описании течений во внутренних областях аккреционного диска приближение идеальной гидродинамики является достаточно точным.

Как уже отмечалось, в подавляющем большинстве работ, посвященных тонким аккреционным дискам, применялась процедура вертикального усреднения. При этом вертикальная скорость $u_{\hat\theta}$ в вертикальном балансе сил (1.18) считалась равной нулю. Поэтому и вертикальная компонента динамической силы $nu^b\nabla_b(\mu u_\theta)$ в (1.244) также предполагалась малой вплоть до горизонта черной дыры. Отсюда был сделан вывод о том, что толщина диска должна определяться градиентом давления и в сверхзвуковой области [Abramowicz, Lanza, Percival, 1997]. В дальнейшем будет показано, что предположение $u_{\hat\theta} = 0$ вблизи звуковой поверхности не соответствует действительности. В результате, как и в случае аккреции Бонди, динамическая сила вблизи звуковой поверхности становится существенной.

Прежде всего, рассмотрим область дозвукового течения вблизи последней устойчивой орбиты, $r_0 = 3r_{\rm g}$, где полоидальная скорость $u_{\rm p}$ еще много меньше скорости звука. В этом случае уравнение (1.245) может быть существенно упрощено. Действительно, при $u_{\rm p} \ll c_{\rm s}$ можно пренебречь слагаемыми, пропорциональными $D^{-1} \sim u_{\rm p}^2/c_{\rm s}^2$. В результате имеем

$$-\hat{\mathcal{M}}^2\frac{1}{\alpha}\nabla_k\left(\frac{1}{\alpha\varpi^2}\nabla^k\Phi\right)+\frac{64\pi^4}{\alpha^2\varpi^2\hat{\mathcal{M}}^2}\left(\varpi^2E\frac{{\rm d}E}{{\rm d}\Phi}-\alpha^2L\frac{{\rm d}L}{{\rm d}\Phi}\right)-16\pi^3nT\frac{{\rm d}s}{{\rm d}\Phi}=0. \tag{1.319}$$

Уравнение (1.319), описывающее дозвуковое течение, является эллиптическим.

Для определения структуры двумерного дозвукового течения ($s' = 0$, следовательно, $b = 2 + 3 - 0 = 5$) необходимо задать пять величин (три компоненты скорости и две термодинамические функции) на некоторой поверхности $r = r_0(\theta)$. В качестве нее естественно выбрать поверхность последней устойчивой орбиты $r_0 = 3r_{\rm g}$, на которой $\alpha_0 = \alpha(r_0) = \sqrt{2/3}$, $u_{\hat\varphi}(r_0) = 1/\sqrt{3}$ и $\gamma_0 = \gamma(r_0) = \sqrt{4/3}$ [Шапиро, Тьюколски, 1985]. Для простоты рассмотрим случай, когда радиальная скорость на поверхности $r = r_0$ постоянна, а тороидальная в точности равна $u_{\hat\varphi}(r_0)$:

$$u_{\hat r}(r_0,\Theta) = -u_0; \tag{1.320}$$

$$u_{\hat\Theta}(r_0,\Theta) = \Theta u_0; \tag{1.321}$$

$$u_{\hat\varphi}(r_0,\Theta) = 1/\sqrt{3}. \tag{1.322}$$

Условие для $u_{\hat\Theta} \ll |u_{\hat r}|$ соответствует плоскопараллельному течению на последней устойчивой орбите. Здесь мы ввели новую угловую переменную, $\Theta = \pi/2 - \theta$ ($\Theta_{\rm disk} \sim c_0$), отсчитываемую от экватора в вертикальном направлении.

Будем предполагать, что скорость звука также постоянна на всей поверхности $r = r_0$:

$$c_{\rm s}(r_0,\Theta) = c_0. \tag{1.323}$$

Для политропного уравнения состояния ($P = kn^\Gamma$; см. (1.25)) это означает, что как температура $T_0 = T(r_0)$, так и релятивистская энтальпия $\mu_0 = \mu(r_0)$ на указанной поверхности тоже будут постоянны. В результате, согласно (1.14), для нерелятивистских температур ($c_{\rm s} \ll 1$)

малый параметр задачи может быть определен следующим образом:

$$\varepsilon_5 = \frac{u_0}{c_0} \sim \alpha_{\rm SS} c_0 \ll 1. \tag{1.324}$$

Наконец, в качестве последнего, пятого граничного условия удобно выбрать энтропию $s(\Phi)$.

Подчеркнем, что существование малого параметра $\varepsilon_5 \ll 1$ полностью опирается на соотношение (1.14) для радиальной скорости течения газа в аккреционном диске. В районе последней устойчивой орбиты такая оценка, по-видимому, не соответствует действительности [Igumenshchev, Abramowicz, Narayan, 2000; Artemova et al., 2001]. Тем не менее ниже мы будем считать параметр ε_5 малым, поскольку

— наличие малого параметра позволяет исследовать многие детали течения аналитически;

— при наличии малого параметра обсуждаемый эффект оказывается более ярко выражен.

В заключение настоящего пункта будут сформулированы общие свойства, которые остаются справедливыми при произвольной продольной скорости течения вещества в районе последней устойчивой орбиты.

Введя величины $e_0 = \alpha_0\gamma_0 = \sqrt{8/9}$ и $l_0 = u_{\hat{\varphi}}(r_0)r_0 = \sqrt{3}r_{\rm g}$, можно записать инварианты $E(\Phi)$ и $L(\Phi)$ в виде

$$E(\Phi) = \mu_0 e_0 = \text{const}; \tag{1.325}$$

$$L(\Phi) = \mu_0 l_0 \cos\Theta_m, \tag{1.326}$$

где $\Theta_m = \Theta_m(\Phi)$ — угол, для которого $\Phi(r_0, \Theta_m) = \Phi(r, \Theta)$. Иными словами, функция $\Theta_m(r, \Theta)$ имеет смысл лагранжевой координаты Θ на радиусе последней устойчивой орбиты, связанной с заданной точкой (r, Θ) линией тока $\Phi(r, \Theta) = \text{const}$. В частности, $\Theta_m(r_0, \Theta) = \Theta$.

Прежде всего, мы видим, что условие (1.325) ($E = \text{const}$) позволяет переписать уравнение (1.319) в еще более простом виде:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{\cos\Theta}{\alpha^2 r^2}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\frac{1}{\cos\Theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\Theta}\right) = -4\pi^2 n^2 \frac{L}{\mu^2}\frac{{\rm d}L}{{\rm d}\Phi} - 4\pi^2 n^2 r^2 \cos^2\Theta \frac{T}{\mu}\frac{{\rm d}s}{{\rm d}\Phi}. \tag{1.327}$$

Далее, как будет показано в приложении к настоящей главе, для $r = r_0$ правая часть уравнения (1.327) описывает поперечный баланс сил градиента давления и гравитационного потенциала, тогда как левая его часть соответствует динамической силе $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$. На последней устойчивой орбите она имеет порядок малости u_0^2/c_0^2, и следовательно, может быть отброшена. Поэтому естественно выбрать энтропию $s(\Phi)$ из условия поперечного баланса сил на поверхности $r = r_0$:

$$r_0^2 \cos^2\Theta_m \frac{{\rm d}s}{{\rm d}\Theta_m} = -\frac{\Gamma}{c_0^2}\frac{L}{\mu_0^2}\frac{{\rm d}L}{{\rm d}\Theta_m}, \tag{1.328}$$

где вид инварианта $L(\Theta_m)$ определяется из граничного условия (1.326). В итоге имеем

$$s(\Theta_m) = s(0) - \frac{\Gamma}{3c_0^2}\ln(\cos\Theta_m). \tag{1.329}$$

Благодаря (1.229) это означает, что для $c_s = c_0 = \mathrm{const}$ соотношение (1.329) соответствует стандартному профилю плотности:

$$n(r_0, \Theta) \approx n_0 \exp\left(-\frac{\Gamma}{6c_0^2}\Theta^2\right). \tag{1.330}$$

УПРАЖНЕНИЕ. Используя соотношения (1.24) и (1.25), покажите, что точное выражение для $n(r_0, \Theta)$ имеет вид $n(r_0, \Theta) = n_0(\cos\Theta)^{\Gamma/3c_0^2}$.

Наконец, определение (1.233) приводит к следующей связи между функциями Φ и Θ_m:

$$\mathrm{d}\Phi = 2\pi\alpha_0 r_0^2 n(r_0, \Theta_m) u_0 \cos\Theta_m \mathrm{d}\Theta_m. \tag{1.331}$$

В результате с помощью (1.326), (1.330) и (1.331) инвариант $L(\Phi)$ также может быть выражен непосредственно через граничные условия.

Уравнение (1.327) вместе с граничными условиями (1.326), (1.329), (1.330) и (1.331), а также соотношением (1.321), фиксирующим производную $\partial\Phi/\partial r$, и задает структуру идеального дозвукового течения сразу после прохождения последней устойчивой орбиты. Например, для нерелятивистских температур ($c_s \ll 1$) получаем

$$u_p^2 = u_0^2 + w^2 + \frac{1}{3}\left(\Theta_m^2 - \Theta^2\right) + \frac{2}{\Gamma - 1}(c_0^2 - c_s^2) + \ldots \tag{1.332}$$

Здесь величина $w(r)$, определяемая как

$$w^2(r) = \frac{e_0^2 - \alpha^2 l_0^2/r^2 - \alpha^2}{\alpha^2} \approx \frac{1}{6}\left(\frac{r_0 - r}{r_0}\right)^3 \tag{1.333}$$

и зависящая лишь от координаты r, есть полоидальная четырехскорость свободной частицы, имеющей нулевую полоидальную скорость при $r = r_0$. Как мы видим, при удалении от последней устойчивой орбиты w^2 растет очень медленно. Поэтому ее вкладом при $u_0 \ll c_0$ можно пренебречь.

Чрезвычайно важный вывод может быть получен непосредственно из анализа соотношения (1.332), если в экваториальной плоскости положить $\Theta_m = \Theta = 0$. Считая, что $u_p = c_s = c_*$ и пренебрегая величиной w^2, обнаруживаем, что скорость звука c_* на звуковой поверхности ($r = r_*$; $\Theta = 0$) должна иметь тот же порядок, что и на последней устойчивой орбите c_0:

$$c_* \approx \sqrt{\frac{2}{\Gamma + 1}}\, c_0. \tag{1.334}$$

Важно, что этот вывод остается справедливым и для других линий тока, поскольку характерное значение углов Θ также не превышает величины c_0. Поскольку же энтропия s остается строго постоянной вдоль линий тока, концентрация газа на поверхностях $\Phi = \mathrm{const}$ тоже должна оставаться приблизительно постоянной $(n(r_*, \Theta) \sim n(r_0, \Theta_m))$. Иными словами, как уже было показано для случая аккреции Бонди, дозвуковое течение можно рассматривать как несжимаемое.

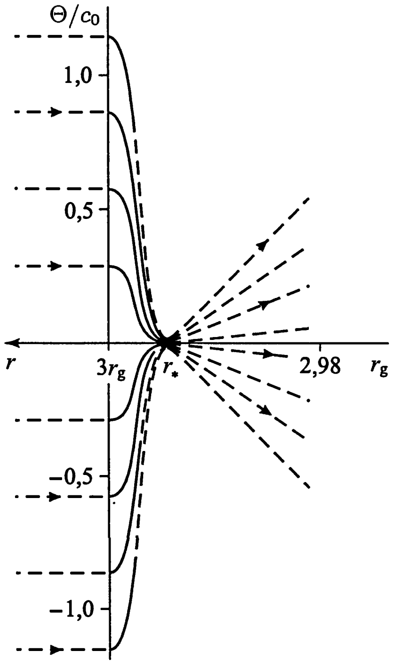


Рис. 1.10. Структура тонкого аккреционного диска (реальный масштаб) после прохождения последней устойчивой орбиты ($r = 3r_g$) для $c_0 = 10^{-2}$, $u_0 = 10^{-5}$. Сплошные линии соответствуют области параметров $u_p^2/c_0^2 < 0{,}2$. Пунктиром показана экстраполяция решения уравнения (1.245) к области звуковой поверхности

С другой стороны, поскольку плотность остается приблизительно постоянной, а радиальная скорость меняется от u_0 до $c_* \sim c_0$, т. е. для $\varepsilon_5 \ll 1$ изменяется на несколько порядков, согласно уравнению непрерывности толщина диска H должна измениться в той же пропорции (рис. 1.10):

$$H(r_*) \approx \frac{u_0}{c_0} H(3r_g). \tag{1.335}$$

В результате быстрое изменение толщины диска должно сопровождаться появлением вертикальной компоненты скорости, которую необходимо учитывать в уравнении Эйлера (1.244). Еще раз напомним, что в указанной области как радиальная, так и вертикальная компоненты скорости остаются много меньше тороидальной.

Действительно, анализируя асимптотику уравнения (1.327), получаем, что при приближении к звуковой поверхности, расположенной при

$$r_* = r_0 - \Lambda u_0^{2/3} r_0, \tag{1.336}$$

где логарифмический фактор $\Lambda \approx (3/2)^{2/3}[\ln(c_0/u_0)]^{2/3} \approx 5 \div 7$, компоненты четырех-скорости вещества $\mathbf{u}$ и градиента давления $\nabla_{\hat\theta} P$ по порядку величины стремятся к значениям [Бескин, Компанеец, Чеховской, 2002]

$$u_{\hat\Theta} \to -\frac{c_0}{u_0}\Theta; \tag{1.337}$$

$$u_{\hat r} \to -c_*; \tag{1.338}$$

$$-\frac{\nabla_{\hat\theta} P}{\mu} \to \frac{c_0^2}{u_0^2}\frac{\Theta}{r}. \tag{1.339}$$

При этом вблизи звуковой поверхности продольный масштаб δr, определяющий радиальные производные, становится порядка поперечного размера диска: $\delta r \approx H(r_*) \approx u_0 r_0$, так что логарифмическая производная концентрации составляет

$$\eta_1 = \frac{r}{n}\frac{\partial n}{\partial r} \approx u_0^{-1}. \tag{1.340}$$

В результате вблизи звуковой поверхности обе компоненты динамической силы:

$$\frac{u_{\hat{\Theta}}}{r}\frac{\partial u_{\hat{\Theta}}}{\partial \Theta} \to \frac{c_0^2}{u_0^2}\frac{\Theta}{r}; \tag{1.341}$$

$$-u_{\hat{r}}\frac{\partial u_{\hat{\Theta}}}{\partial r} \to \frac{c_0^2}{u_0^2}\frac{\Theta}{r}, \tag{1.342}$$

становятся величинами одного порядка с градиентом давления (1.339).

Чтобы проверить справедливость наших выводов, рассмотрим структуру течения вблизи звуковой поверхности более подробно. Вновь воспользовавшись теоремой о свойствах гладкого трансзвукового течения (трансзвуковое течение аналитично в критической точке), можно записать (сравните с (1.64) и (1.65))

$$n = n_*\left(1 + \eta_1 h + \frac{1}{2}\eta_3\Theta^2 + \ldots\right); \tag{1.343}$$

$$\Theta_m = a_0\left(\Theta + a_1 h\Theta + \frac{1}{2}a_2 h^2\Theta + \frac{1}{6}b_0\Theta^3 + \ldots\right), \tag{1.344}$$

где $h = (r - r_*)/r_*$. Здесь мы предполагаем, что три инварианта — E, L и s — нам заранее известны, т. е. $i = 0$ и $b = 2 + 0 - 1 = 1$. Следовательно, как и для случая плоского течения, наша задача требует еще одного граничного условия. Сравнивая теперь соответствующие коэффициенты в уравнении Бернулли (1.250) и в полном уравнении Грэда–Шафранова (1.249) и пренебрегая членами $\sim u_0^2/c_0^2$ и отличием r_* от r_0, получаем

$$a_0 = \left(\frac{2}{\Gamma + 1}\right)^{(\Gamma+1)/2(\Gamma-1)}\frac{c_0}{u_0}; \tag{1.345}$$

$$a_1 = 2 + \frac{1 - \alpha_*^2}{2\alpha_*^2} \approx 2{,}25; \tag{1.346}$$

$$a_2 = -(\Gamma + 1)\eta_1^2; \tag{1.347}$$

$$b_0 = \left(\frac{\Gamma + 1}{6}\right)\frac{a_0^2}{c_0^2}; \tag{1.348}$$

$$\eta_3 = -\frac{2}{3}(\Gamma + 1)\eta_1^2 - \left(\frac{\Gamma - 1}{3}\right)\frac{a_0^2}{c_0^2}, \tag{1.349}$$

где $\alpha_*^2 = \alpha^2(r_*) \approx 2/3$. В отличие от плоского потенциального течения, здесь все коэффициенты выражены через радиальную логарифмическую производную η_1 (см. (1.340)), которая и играет роль последнего граничного условия.

Коэффициенты (1.345)–(1.349) имеют ясный физический смысл. Так, величина a_0 определяет степень сжатия линий тока: $a_0 = H(r_0)/H(r_*)$. В соответствии с оценкой (1.335) получаем $a_0 \approx c_0/u_0$. Величина a_1 определяет наклон линий тока по отношению к экваториальной плоскости. Поскольку $a_1 > 0$, в непосредственной окрестности звуковой поверхности имеет место уже не уменьшение, а увеличение толщины аккреционного диска. С другой стороны, так как $a_1 \ll u_0^{-1}$, при $r = r_*$ расхождение линий тока еще очень слабо. Следовательно, при $u_0 \ll c_0$ вблизи звуковой поверхности течение имеет форму обычного плоского сопла (см. рис. 1.2). Наконец, поскольку $a_2 \sim \eta_3 \sim b_0 \sim u_0^{-2}$, можно сделать вывод о том, что поперечный масштаб неоднородности ($\sim H(r_*)$) действительно одного порядка с продольным масштабом. Последний вывод приводит к чрезвычайно важному следствию. Как мы видим, течение вблизи звуковой поверхности существенно двумерно, поэтому его нельзя анализировать в рамках стандартного одномерного подхода.

Нужно подчеркнуть, что само значение логарифмической производной $\eta_1 = \eta_1(r_*)$ не может быть явно выражено через физические граничные условия на поверхности последней устойчивой орбиты ($r = r_0$); для этого необходимо знать все коэффициенты разложения в (1.343) и (1.344). В частности, невозможно сформулировать соотношение связи между пятью граничными условиями, (1.320)–(1.323) и (1.329), следующими из критического условия на звуковой поверхности. Тем не менее оценка (1.340) позволяет нам достаточно надежно определить параметр η_1. Согласно же (1.345)–(1.349) связь между всеми остальными коэффициентами разложения может быть определена точно.

Воспользовавшись разложениями (1.343) и (1.344), легко определить все основные характеристики трансзвукового течения. В частности, имеем

$$u_{\rm p}^2 = c_*^2 \left[1 - 2\eta_1 h + \frac{1}{6}(\Gamma - 1)\,\frac{a_0^2}{c_0^2}\Theta^2 + \frac{2}{3}(\Gamma + 1)\eta_1^2\Theta^2 + \ldots\right];$$

$$c_{\rm s}^2 = c_*^2 \left[1 + (\Gamma - 1)\,\eta_1 h + \frac{1}{6}(\Gamma - 1)\,\frac{a_0^2}{c_0^2}\Theta^2 - \frac{1}{3}(\Gamma - 1)(\Gamma + 1)\eta_1^2\Theta^2 + \ldots\right].$$

В результате звуковая поверхность ($u_{\rm p} = c_{\rm s}$) имеет стандартную параболическую форму:

$$h = \frac{\Gamma + 1}{3}\eta_1\Theta^2. \tag{1.350}$$

Ясно, что и в этой области движение в основном остается азимутальным ($u_{\hat\varphi} \gg u_{\rm p}$).

В заключение необходимо сказать несколько слов о сверхзвуковой области течения ($r < r_*$). Здесь, как мы видели, роль градиента давления в общем балансе сил становится несущественной. Поэтому θ-компонента уравнения Эйлера (1.244) для невращающейся черной дыры может быть переписана как (сравните с [Abramowicz, Lanza, Percival, 1997])

$$\alpha u_{\hat{r}} \frac{\partial(r u_{\hat{\Theta}})}{\partial r} + \frac{(r u_{\hat{\Theta}})}{r^2} \frac{\partial(r u_{\hat{\Theta}})}{\partial \Theta} + (u_{\hat{\varphi}})^2 \mathrm{tg}\Theta = 0. \tag{1.351}$$

Используя явное выражение (1.241) для инварианта $L(\Psi)$, можно переписать величину $u_{\hat{\varphi}}$ в виде $u_{\hat{\varphi}} = \sqrt{3}/x$, где $x = r/r_{\mathrm{g}}$. С другой стороны, понятно, что вблизи экватора скорость $u_{\hat{\Theta}}$ должна быть нечетной функцией Θ. Поэтому удобно ввести безразмерные функции $f(x)$ и $g(x)$:

$$\Theta f(x) = x u_{\hat{\Theta}}; \tag{1.352}$$

$$g(x) = -\alpha u_{\hat{r}} > 0. \tag{1.353}$$

В результате уравнение (1.351) может быть записано в виде простого обыкновенного дифференциального уравнения для функции $f(x)$:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{f^2 + 3}{x^2 g(x)}. \tag{1.354}$$

Интегрируя уравнение (1.354), получаем

$$f(x) = \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left[\sqrt{3}\int\limits_{x_*}^{x} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi^2 g(\xi)} + \frac{\pi}{2}\right]. \tag{1.355}$$

При этом, согласно (1.332), вблизи черной дыры $u_{\mathrm{p}}^2 \to w^2$. С другой стороны, $u_{\mathrm{p}} \approx c_* \approx c_0$ для $r \sim r_*$. Поэтому во всей сверхзвуковой области ($r_{\mathrm{g}} < r < r_*$) с хорошей точностью можно положить

$$g(x) \approx \sqrt{(\alpha w)^2 + (\alpha c_*)^2}, \tag{1.356}$$

причем, благодаря (1.333),

$$(\alpha w)^2 = \frac{(3 - x)^3}{9x^3}. \tag{1.357}$$

В итоге, как это показано на рис. 1.11, в области сверхзвукового течения аккреционный диск должен иметь квазипериодическую структуру. После стадии расширения течение вновь начинает сжиматься за счет действия вертикальной компоненты гравитационного поля. При этом, согласно определению (1.352), положение узлов будет отвечать условию $f(x_n) = \pm\infty$. Поэтому их координаты могут быть найдены из очевидного условия:

$$\sqrt{3}\int\limits_{x_n}^{x_*} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi^2 g(\xi)} = n\pi, \tag{1.358}$$

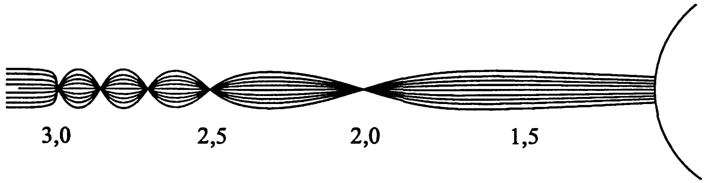


Рис. 1.11. Структура тонкого аккреционного диска в сверхзвуковой области для случая $c_0 = 10^{-2}$, $u_0 = 10^{-5}$ и $a = 0$. Числа показывают расстояние от центра черной дыры в единицах гравитационного радиуса

где узел $n = 0$ соответствует звуковой поверхности. Для случая $c_0 \ll 1$ можно также аналитически оценить расстояние $(\Delta r)_1 = r_* - r_1$ между звуковой поверхностью и первым узлом. Предполагая, что величина $g(x)$ остается постоянной и равной своему значению на звуковой поверхности ($\xi = x_*$), получаем

$$(\Delta r)_1 = \frac{\pi}{\sqrt{3}} x_*^2 g(x_*) r_{\rm g} \approx 3\sqrt{3}\pi\alpha_* c_* r_{\rm g} \approx \frac{6\pi}{\sqrt{\Gamma+1}} c_0 r_{\rm g}. \qquad (1.359)$$

Подчеркнем, что выражение (1.359) не содержит u_0. Поэтому в рассматриваемом здесь приближении ($u_0 \ll c_0$) положение узлов, показанных на рис. 1.12, определяется лишь параметром c_0.

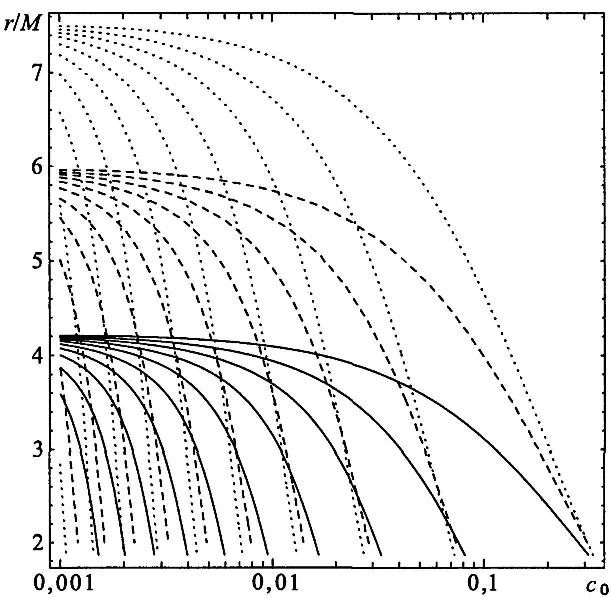


Рис. 1.12. Положение узлов для различных значений параметра c_0 для $a = 0$ (штриховые линии), $a = -M/2$ (пунктир) и $a = M/2$ (сплошные линии) при $\Gamma = 4/3$

Упражнения.

1. Покажите, что простая форма записи уравнения Эйлера (1.354) вблизи экватора остается справедливой и для вращающейся черной дыры:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} = \frac{f^2 + a^2(1 - e_0^2) + l_0^2}{r^2 g(r)}, \tag{1.360}$$

где постоянные e_0 и l_0 вновь соответствуют удельным значениям энергии и углового момента на последней устойчивой орбите, а функция $f(r)$ определяется из условия $\Theta f = r u_{\hat{\Theta}}$.

2. Покажите, что характерная толщина диска в сверхзвуковой области близка к его толщине в области устойчивых орбит: $H \sim r c_\mathrm{s}/v_\mathrm{K}$.

Таким образом, гидродинамическое уравнение Грэда–Шафранова (1.245) позволяет определить нетривиальную внутреннюю структуру тонкого трансзвукового диска. Как было показано выше, при $\varepsilon_5 = u_0/c_0 \ll 1$ резкое уменьшение толщины диска при подходе к звуковой поверхности неизбежно должно приводить к появлению вертикальной компоненты скорости аккрецирующего вещества. В результате здесь уже нельзя пренебречь вкладом динамического слагаемого $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ в вертикальном балансе сил. В этом смысле ситуация вполне подобна случаю аккреции Бонди, при которой вклад динамического слагаемого становится существенным вблизи звуковой поверхности и определяющим в области сверхзвукового течения. Понятно, что указанное свойство остается справедливым для произвольной радиальной скорости течения, т. е. даже в случае, когда поперечное сжатие диска не будет столь заметным.

С другой стороны, в случае аккреции Бонди динамическое слагаемое $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ имеет лишь одну компоненту, $v_r \partial v_r/\partial r$, которая вблизи звуковой поверхности становится одного порядка как с градиентом давления, так и с силой гравитации. Для тонкого же аккреционного диска мы имеем уже две компоненты динамической силы $[(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}]_\theta$, (1.341) и (1.342), причем обе они на звуковой поверхности по порядку величины сравниваются с градиентом давления. Однако гравитационная сила по-прежнему определяется как $\nabla_\theta \varphi_\mathrm{g} \sim \Theta/r$, т. е. теперь она оказывается в c_0^2/u_0^2 раз меньше по сравнению с лидирующими членами.

В результате при наличии малого параметра $\varepsilon_5 \ll 1$ трансзвуковой диск вблизи звуковой поверхности вполне аналогичен обычному плоскому соплу, в котором гравитация не играет определяющей роли. При $\varepsilon_5 \sim 1$ все слагаемые оказываются одного порядка, так что вертикальные колебания становятся не столь заметными. Однако в любом случае учет динамических сил приводит к появлению двух дополнительных степеней свободы, связанных со старшими производными в уравнении Грэда–Шафранова. По этой причине можно сделать еще один общий вывод, справедливый вне зависимости от величины параметра ε_5. В тонком аккреционном диске критическое условие на звуковой поверхности уже не фиксирует темп аккреции, а определяет изгиб линий тока. По-видимому, при заданном темпе аккреции критическое условие в итоге задает вертикальную скорость v_θ на последней устойчивой орбите, $r = r_0$, которая слабо влияет на характеристики трансзвукового течения.

Далее, независимо от величины ε_5 учет вертикальной скорости приводит к тому, что в районе звуковой поверхности неизбежно возникает малый продольный масштаб, $\delta r_{\parallel} \approx H_*$, который для тонкого диска (т. е. при условии $c_0 \ll 1$) оказывается много меньше расстояния до черной дыры. Лишь в этом случае динамический вклад $\mu v_r \partial v_\theta / \partial r$ может стать одного порядка с градиентом давления, и следовательно, течение сможет пересечь звуковую поверхность. При стандартном одномерном подходе такой малый масштаб не возникает.

Наконец, очевидно, что время прохождения между узлами для сверхзвукового течения вещества должно быть в точности равно половине времени орбитального движения свободной частицы на соответствующем радиусе, поскольку как вращение по спирали при $r < r_*$, так и колебание в вертикальной плоскости обусловлены действием гравитационного поля черной дыры. Поэтому в пределе $c_0 \ll 1$ время пролета между узлами вообще не должно зависеть от свойств аккрецирующего газа.

В заключение отметим, что в рассматриваемом здесь приближении гармонических колебаний все линии тока должны пересечься в одной точке. Понятно, что в результате уравнение (1.354) будет неприменимо в районе узлов, где вновь нельзя пренебрегать градиентом давления. В частности, узлы могут стать областями дополнительного энерговыделения, что, в свою очередь, должно привести к уменьшению амплитуды колебания в вертикальной плоскости. Ясно, однако, что подробное исследование всех этих вопросов выходит далеко за рамки нашего изложения [Beskin, Tchekhovskoy, 2005].

1.5. Заключение

Таким образом, в настоящей главе были сформулированы основные уравнения, описывающие осесимметричные стационарные гидродинамические течения в окрестности вращающейся черной дыры. Начав с хорошо известных уравнений для нерелятивистских идеальных течений, мы постепенно перешли к более общему случаю, в котором были последовательно учтены эффекты общей теории относительности. При этом удалось построить аналитические решения для ряда важных с астрофизической точки зрения случаев, в том числе и для трансзвуковой аккреции на вращающиеся черные дыры.

Существует несколько причин, по которым чисто гидродинамические течения были рассмотрены столь подробно. Гидродинамическая версия уравнения Грэда–Шафранова далеко не так популярна, как его полная магнитогидродинамическая версия. Вместе с тем она содержит практически всю информацию о структуре полного уравнения Грэда–Шафранова. Наконец, уже в рамках гидродинамического подхода можно ввести язык $(3+1)$-расщепления, наиболее удобный при рассмотрении течений в окрестности вращающейся черной дыры.

В результате анализ гидродинамической версии позволил продемонстрировать возможности и пределы применимости метода уравнения Грэда–Шафранова. Как было показано, в некоторых простейших случаях этот метод действительно позволяет построить точное аналитическое решение задачи. В частности, использование указанного подхода чрезвычайно удобно при исследовании аналитических свойств трансзвуковых течений и при определении количества необходимых граничных условий. С другой стороны, в общем случае в рамках метода уравнения Грэда–Шафранова последовательной процедуры построения решения не существует. Дело в том, что положение особых поверхностей, на которых необходимо сформулировать критические условия, заранее не известно и должно само определяться из решения задачи.

Приложение

Покажем, как уравнение Грэда–Шафранова (1.327), описывающее дозвуковое течение, может быть получено непосредственно из уравнения Эйлера. Для простоты рассмотрим нерелятивистский случай (так что все величины с индексами будут соответствовать физическим компонентам векторов) и лишь малые углы $\Theta = \pi/2 - \theta$ вблизи экваториальной плоскости.

Запишем θ-компоненту уравнения Эйлера:

$$v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_\theta\frac{\partial v_\theta}{r\partial\theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\varphi^2}{r}\mathrm{ctg}\theta = -\frac{\nabla_\theta P}{m_\mathrm{p} n} - \nabla_\theta\varphi_\mathrm{g}. \qquad (\text{П}1)$$

Прибавляя к обеим частям уравнения (П1) $v_\varphi\partial v_\varphi/r\partial\theta$, а также прибавляя и вычитая $v_r\partial v_r/r\partial\theta$ в его левой части, получаем

$$v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - v_r\frac{\partial v_r}{r\partial\theta} + \nabla_\theta\left(\frac{v^2}{2}\right) + \frac{v_r v_\theta}{r} = \frac{v_\varphi^2}{r}\mathrm{ctg}\theta + v_\varphi\frac{\partial v_\varphi}{r\partial\theta} - \frac{\nabla_\theta P}{m_\mathrm{p} n} - \nabla_\theta\varphi_\mathrm{g}. \qquad (\text{П}2)$$

Воспользовавшись теперь определением интеграла Бернулли ($E = v^2/2 + w + \varphi_\mathrm{g}$) и термодинамическим равенством $\mathrm{d}P = m_\mathrm{p} n\mathrm{d}w - nT\mathrm{d}s$, для $E = \mathrm{const}$ имеем

$$v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - v_r\frac{\partial v_r}{r\partial\theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} = \frac{r v_\varphi \sin\theta}{\varpi^2}\frac{\partial}{r\partial\theta}(r v_\varphi\sin\theta) + \frac{T}{m_\mathrm{p}}\frac{\partial s}{r\partial\theta}. \qquad (\text{П}3)$$

Однако, как следует из определения (1.86),

$$v_r = \frac{1}{2\pi n r^2\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}, \quad v_\theta = -\frac{1}{2\pi n r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial r}. \qquad (\text{П}4)$$

Полагая $n \approx \mathrm{const}$ (что как раз и соответствует случаю дозвукового течения), получаем

$$- \frac{1}{4\pi^2 n^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)\right] = \\ = r v_\varphi \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}(r v_\varphi \sin\theta) + \varpi^2 \frac{T}{m_\mathrm{p}}\frac{\partial s}{\partial\theta}. \quad (\Pi 5)$$

Наконец, разделив все члены на $-(\partial\Phi/\partial\theta)$, возвращаемся к уравнению (1.327) (а в случае $E \neq \mathrm{const}$ — к уравнению (1.319)).

Таким образом, мы видим, что если первое слагаемое в левой части уравнения (1.327) действительно соответствует одной из компонент динамической силы $v_r \partial v_\theta / \partial r$, а последнее слагаемое в его правой части (для $c_\mathrm{s} = \mathrm{const}$) — градиенту давления, то роль слагаемого, пропорционального $L\partial L/\partial\Phi$, оказывается менее тривиальной. Оно содержит как градиент эффективного потенциала, так и, фактически, другую компоненту динамической силы $v_\theta \partial v_\theta / \partial\theta$. При этом первый вклад является существенным вблизи последней устойчивой орбиты ($r \approx 3r_\mathrm{g}$), тогда как второй — лишь вблизи звуковой поверхности.

ГЛАВА 2

БЕССИЛОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ — МАГНИТОСФЕРА РАДИОПУЛЬСАРОВ

2.1. Астрофизическое введение

Открытие в конце шестидесятых годов радиопульсаров — источников импульсного космического радиоизлучения с характерным периодом $P \sim 1$ с [Hewish et al., 1968] — без преувеличения можно назвать одним из важнейших событий в астрофизике XX века. Действительно, впервые был обнаружен новый класс космических источников, связанных с нейтронными звездами, существование которых было предсказано еще в тридцатые годы [Baade, Zwicky, 1934; Landau, 1932]. Открытые впоследствии многие другие компактные объекты (рентгеновские пульсары, рентгеновские новые [Giacconi et al., 1971]) показали, что нейтронные звезды действительно являются если не одними из самых богатых, то во всяком случае одними из самых активных населений в Галактике. Неудивительно поэтому, что за это открытие А. Хьюишу в 1974 году была присуждена Нобелевская премия.

Нейтронные звезды (с массой порядка солнечной, $M_{\odot} \cong 2 \cdot 10^{33}$ г, при радиусе R лишь $10 \div 15$ км) должны образовываться в результате катастрофического сжатия (коллапса) обычных массивных звезд на поздней стадии их эволюции или, например, белых карликов, превысивших в результате аккреции чандрасекаровский предел массы — $1{,}4M_{\odot}$. Именно на таком механизме образования основывается простейшее объяснение как малых периодов вращения P (наименьший известный период вращения $P = 1{,}5$ мс), так и сверхсильных магнитных полей $B_0 \sim 10^{12}$ Гс [Кардашев, 1964; Pacini, 1967]. Действительно, если предположить, что нейтронная звезда образовалась из нормальной (с радиусом $R_{\rm s} \sim 10^{12}$ см и периодом вращения $P_{\rm in} \sim 10 \div 100$ лет) с магнитным полем $B_{\rm in} \sim 1$ Гс, то из законов сохранения углового момента и магнитного потока:

$$MR_{\rm s}^2\Omega_{\rm in} = MR^2\Omega, \quad R_{\rm s}^2 B_{\rm in} = R^2 B_0, \tag{2.1}$$

следует, что после сжатия до размеров R нейтронная звезда будет иметь период вращения P и магнитное поле B_0 порядка

$$P \sim \left(\frac{R}{R_{\rm s}}\right)^2 P_{\rm in} \sim 0{,}01 \div 1 \text{ с} \tag{2.2}$$

и

$$B_0 \sim \left(\frac{R_{\rm s}}{R}\right)^2 B_{\rm in} \sim 10^{12} \text{ Гс}. \tag{2.3}$$

Интересно, что основные физические процессы, определяющие наблюдаемую активность радиопульсаров, были поняты практически непосредственно после их открытия. Так, сразу стало ясно, что чрезвычайно регулярные пульсации наблюдаемого радиоизлучения связаны с вращением нейтронной звезды [Gold, 1968]. У некоторых пульсаров стабильность частоты на масштабах нескольких лет даже превышает стабильность атомных стандартов, так что в настоящее время ведутся работы по построению новой пульсарной шкалы времени [Ильясов, Копейкин, Родин, 1998]. Далее, энергетический источник радиопульсаров обусловлен энергией вращения, а механизм энерговыделения связан с их сверхсильным магнитным полем: $B_0 \sim 10^{12}$ Гс. Действительно, оцениваемые по простой магнитодипольной формуле [Ландау, Лифшиц, 1973b] энергетические потери

$$W_{\rm tot} = -J_{\rm r}\Omega\dot{\Omega} \approx \frac{1}{6}\frac{B_0^2\Omega^4R^6}{c^3}\sin^2\chi, \tag{2.4}$$

где $J_{\rm r} \sim MR^2$ — момент инерции звезды, χ — угол наклона оси магнитного диполя к оси вращения, а $\Omega = 2\pi/P$ — угловая скорость вращения, составляют для большинства пульсаров $10^{31} \div 10^{34}$ эрг/с. Подобное энерговыделение как раз и приводит к наблюдаемой скорости замедления ${\rm d}P/{\rm d}t \sim 10^{-15}$, что соответствует времени торможения $\tau_{\rm D} = P/\dot{P} \sim 1 \div 10$ млн. лет. Радиопульсары, таким образом, являются единственными космическими объектами, чья эволюция полностью определяется электродинамическими силами. Напомним, что само радиоизлучение составляет лишь $10^{-4} \div 10^{-6}$ от полных потерь энергии. Для большинства пульсаров это соответствует $10^{26} \div 10^{28}$ эрг/с, что на 5-7 порядков меньше светимости Солнца. Вместе с тем чрезвычайно высокая яркостная температура — $T_{\rm я} \sim 10^{25} \div 10^{28}$ К — однозначно свидетельствует в пользу того, что радиоизлучение пульсаров генерируется когерентным механизмом [Гинзбург, 1969; Гинзбург, Железняков, Зайцев, 1969].

Как уже отмечалось, о вероятности существования подобных объектов говорилось еще с тридцатых годов прошлого века. Более того, с начала шестидесятых годов активно обсуждалась возможность сверхтекучести и сверхпроводимости во внутренних областях нейтронных звезд [Гинзбург, Киржниц, 1964]. Тем не менее считалось, что из-за малого размера (а значит, малого и энерговыделения) обнаружить нейтронные звезды практически невозможно. Несмотря на ряд работ [Кардашев, 1964; Pacini, 1967], до открытия радиопульсаров не было понято, что нейтронные звезды должны вращаться настолько быстро, что основным источником излучаемой ими энергии оказывается их кинетическая энергия вращения. В результате не предпринималось и целенаправленных попыток обнаружить пульсирующее излучение у известных объектов. И это несмотря на то, что в центре Крабовидной туманности к указанному времени уже была зарегистрирована необычная оптическая звезда, совпадающая с также необычным радиоисточником. Именно с ее активностью связывалось энерговыделение $W_{\rm tot} \approx 5 \cdot 10^{38}$ эрг/с, необходимое для подпитки Крабовидной туманности релятивистскими электронами [Rees, Gunn, 1974]. В противном случае свечение Крабовидной туманности давно бы прекратилось.

Лишь после того, как стало ясно, что столь необычный источник действительно связан с вращающейся нейтронной звездой, был проведен анализ переменности его оптического потока [Wampler, Scargle, Miller, 1969]. Оказалось, что оптическое излучение также приходит к нам в виде отдельных импульсов, период которых ($P \approx 0{,}033$ с) в точности совпадает с периодом, определенным по данным в радиодиапазоне. Момент же истины наступил после того, как была измерена скорость $\dot{P}$ замедления вращения пульсара в Крабовидной туманности и стало ясно, что

1) скорость потери энергии вращающейся нейтронной звезды, определенная по скорости замедления угловой скорости вращения $W = -J_{\rm r}\Omega\dot{\Omega}$, совпадает с величиной $W_{\rm tot} \approx 5 \cdot 10^{38}$ эрг/с;

2) характерный возраст радиопульсара ($\tau_{\rm D} = \Omega/|\dot{\Omega}| \approx 1000$ лет) совпадает с возрастом Крабовидной туманности, возникшей, как известно, во время взрыва исторической сверхновой AD 1054.

Большинство радиопульсаров — одиночные нейтронные звезды. Из известных к середине 2005 года более 1500 пульсаров лишь 100 входят в состав двойных систем. Однако во всех этих случаях достоверно известно, что в подобных двойных системах отсутствует сколь-либо существенное перетекание вещества со звезды-компаньона на нейтронную звезду. Поскольку, как уже подчеркивалось, радиосветимости пульсаров невелики, современный уровень приемной аппаратуры позволяет наблюдать их лишь до расстояний порядка $3 \div 5$ кпк, что меньше расстояния до центра Галактики. Поэтому мы имеем возможность наблюдать лишь малую часть всех «действующих» радиопульсаров. Полное же число нейтронных звезд в нашей Галактике должно составлять $10^8 \div 10^9$. Столь большое количество потухших нейтронных звезд естественным образом связано с малой продолжительностью их активной жизни, о которой говорилось выше.

Открытие нейтронных звезд, вне всякого сомнения, произвело революцию в астрофизике. Оно стимулировало появление новых, чисто теоретических вопросов (строение магнитосферы и механизм когерентного радиоизлучения [Michel, 1991; Beskin, Gurevich, Istomin, 1993; Lyubarskii, 1995; Mestel, 1999]; теория аккрецирующих источников в тесных двойных системах [Шапиро, Тьюколски, 1985; Липунов, 1987]; теория внутреннего строения и поверхностных слоев нейтронных звезд [Baym, Pethick, 1979; Седракян, Шахабасян, 1991; Либерман, Йоханссон, 1995; Киржниц, Юдин, 1995; Яковлев, Левенфиш, Шибанов, 1999]), вызвавших взрыв теоретических исследований. Кроме того, радиопульсары используются и для конкретных астрофизических измерений. Последнее стало возможным благодаря уникальным свойствам импульсного излучения радиопульсаров, позволяющим, в частности, контролировать не только частоту, но и фазу сигнала. Здесь можно отметить, например,

— определение плотности электронов в межзвездной среде по задержке времени прихода импульсов на разных частотах [Lyne, Graham-Smith, 1998; Johnston et al., 1999];

— определение галактического магнитного поля по разности поворота плоскости поляризации на разных частотах [Lyne, Graham-Smith, 1998; Brown, Taylor, 2001];

— тонкую диагностику эффектов общей теории относительности в тесных двойных системах [Taylor, Weisberg, 1989; Тейлор, 1993];

— поиск реликтовых гравитационных волн [Сажин, 1978].

Таким образом, общая картина активности радиопульсаров уже много лет представляется установленной. С другой стороны, некоторые принципиальные вопросы еще далеки от своего решения. Прежде всего, открытым остается вопрос о физической природе когерентного радиоизлучения пульсаров. В частности, как и в семидесятые годы, нет единой точки зрения на то, является ли когерентный механизм радиоизлучения мазерным или антенным [Blandford, 1975; Melrose, 1978; Beskin, Gurevich, Istomin, 1988; Lyubarskii, 1995; Usov, Melrose, 1996; Lyutikov, Blandford, Machabeli, 1999]. Кроме того, нет единой точки зрения и на вопрос о строении магнитосферы пульсаров [Michel, 1991; Beskin, Gurevich, Istomin, 1993; Lyubarskii, 1995; Mestel, 1999]. Дело в том, что изначальная гипотеза о магнитодипольном механизме потерь энергии (см. (2.4)), вне всякого сомнения, не соответствует действительности. Собственно, доказательству этого положения и будет в значительной степени посвящена настоящая глава. Здесь мы отметим лишь тот факт, что низкочастотные волны с частотой $\nu = 1/P$ не могут распространяться в межзвездной среде, для которой плазменная частота составляет в среднем несколько килогерц [Липунов, 1987]. Поэтому вопрос о механизме торможения может быть решен только вместе с определением структуры магнитосферы нейтронной звезды. Однако до сих пор последовательная теория строения магнитосферы радиопульсаров еще не построена. Тем самым не определена структура продольных токов, циркулирующих в магнитосфере, и следовательно, не решена задача о замедлении вращения нейтронной звезды, ускорении частиц и переносе энергии за пределами светового цилиндра. Далека от своего завершения и теория внутреннего строения нейтронных звезд.

Естественно, последовательно рассмотреть здесь все перечисленные вопросы не представляется возможным. Поэтому мы подробно обсудим лишь те проблемы, которые напрямую связаны с главной темой настоящей книги, а именно с теорией строения магнитосферы радиопульсаров. При этом основными вопросами, которые мы постараемся осветить, будут

1) строение магнитосферы вращающейся нейтронной звезды;

2) определение механизма энергетических потерь радиопульсаров;

3) передача энергии от вращающейся нейтронной звезды в пределах магнитосферы;

4) определение механизма ускорения частиц в пульсарном ветре.

2.2. Основные физические процессы

2.2.1. Вакуумное приближение. Прежде чем переходить к последовательному изложению теории магнитосферы радиопульсаров, обсудим основные физические процессы, происходящие в ней. При этом сразу следует оговориться, что в настоящей главе мы практически не будем касаться эффектов общей теории относительности; исключение будет сделано лишь для одного из механизмов рождения частиц. Хотя на поверхности нейтронной звезды эффекты ОТО могут достигать 20%, при построении теории магнитосферы радиопульсаров они обычно не учитываются. Дело в том, что электромагнитная сила $F_{\rm em} \sim eE$, действующая на заряженную частицу у поверхности нейтронной звезды, оказывается на много порядков больше силы тяжести $F_{\rm g} = GMm/R^2$. Это условие позволяет пренебречь искажением электромагнитного поля, связанным с искривленностью пространства вблизи нейтронной звезды.

Прежде всего, обсудим простейшую вакуумную модель, которая, хотя и очень далека от реальности, тем не менее позволяет понять многие ключевые свойства реальной магнитосферы нейтронной звезды. Итак, рассмотрим однородно намагниченный шар, вращающийся в вакууме. Основными параметрами, определяющими свойства магнитосферы, при этом будут магнитное поле B_0, радиус шара R и угловая скорость вращения Ω. Внутри хорошо проводящей звезды

$$\mathbf{E}_{\rm in} + \frac{\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}}{c} \times \mathbf{B}_{\rm in} = 0. \tag{2.5}$$

В настоящей главе мы, следуя традиции, восстанавливаем размерность. Условие (2.5) означает просто, что электрическое поле во вращающейся со звездой системе координат равно нулю: $\mathbf{E}' = 0$.

Пусть ось вращения шара параллельна оси намагниченности. Тогда задача является стационарной; поэтому электрическое поле полностью определяется потенциалом Φ_e $(\mathbf{E} = -\nabla\Phi_e)$, который внутри шара может быть записан в виде

$$\Phi_e(r < R, \theta) = \frac{1}{2}\,\frac{\Omega B_0}{c}\,r^2 \sin^2\theta. \tag{2.6}$$

Следовательно, на поверхности звезды

$$\Phi_e(R, \theta) = \Phi_0(\theta) = -\frac{1}{3}\,\frac{\Omega B_0}{c} R^2 \mathcal{P}_2(\cos\theta) + \text{const}, \tag{2.7}$$

где $\mathcal{P}_2(x) = (3x^2 - 1)/2$ — полином Лежандра. Вне звезды электрический потенциал может быть найден из решения уравнения Лапласа:

$\nabla^2\Phi_e = 0$, с граничными условиями

$$\Phi(R,\theta) = \Phi_0(\theta);$$
$$\Phi(r,\theta) \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty.$$

Решение, соответствующее нулевому полному электрическому заряду звезды, имеет вид

$$\Phi_e(r>R,\theta) = -\frac{1}{3}\frac{\Omega B_0}{c}\frac{R^5}{r^3}\mathcal{P}_2(\cos\theta). \tag{2.8}$$

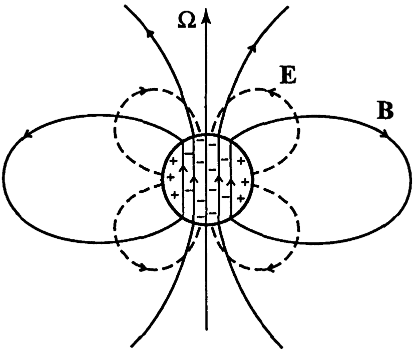


Рис. 2.1. Структура вакуумной магнитосферы нейтронной звезды. Вращающаяся однородно намагниченная звезда генерирует квадрупольное электрическое поле

Как показано на рис. 2.1, вращение однородно намагниченной звезды приводит к появлению квадрупольного электрического поля за ее пределами. Что же касается магнитного поля, то для соосного ротатора оно в точности равно дипольному магнитному полю:

$$\mathbf{B}(r > R) = \frac{3(\mathbf{mr})\mathbf{r} - \mathbf{m}r^2}{r^5}, \tag{2.9}$$

где $|\mathbf{m}| = B_0R^3/2$ — магнитный момент звезды.

Упражнение. Покажите, что поверхностная плотность заряда σ_{s}, определяемая через скачок нормальной компоненты электрического поля: $2\pi\sigma_{\mathrm{s}} = \{E_{\mathrm{n}}\}$, имеет вид [Mestel, 1971]

$$\sigma_{\mathrm{s}}(\theta) = \frac{1}{8\pi}\frac{\Omega R}{c}B_0(3 - 5\cos^2\theta). \tag{2.10}$$

Объясните, почему полный поверхностный заряд отличен от нуля:

$$Q = \int \sigma_{\mathrm{s}}(\theta)\,\mathrm{d}o = \frac{2}{3}\frac{\Omega B_0}{c}R^3 \neq 0. \tag{2.11}$$

Уже на основе простейшей вакуумной модели мы можем сделать ряд достаточно общих выводов.

1. Продольное электрическое поле $E_{\parallel} = \mathbf{E}\cdot\mathbf{B}/B$ вблизи поверхности звезды по порядку величины может быть оценено как

$$E_{\parallel} \sim \frac{\Omega R}{c}B_0. \tag{2.12}$$

2. В осесимметричном случае (и для нулевого полного электрического заряда) нормальная компонента электрического поля имеет постоянный знак на всей поверхности нейтронной звезды.

Последнее обстоятельство оказывается чрезвычайно существенным. Дело в том, что постоянство нормальной компоненты электрического поля вблизи магнитных полюсов означает, что в случае соосного ротатора с обоих магнитных полюсов нейтронной звезды будут эжектироваться частицы одного знака. Как мы увидим, это важное свойство сохраняется и в случае магнитосферы, полностью заполненной плазмой.

Задача о структуре вакуумной магнитосферы для произвольного угла наклона осей была решена А. Дойчем [Deutsch, 1955] задолго до открытия пульсаров. В данном случае электромагнитные поля являются суммой полей вращающегося магнитного диполя и электрического квадруполя, причем квадрупольный момент может быть представлен в виде

$$Q_{ik} = \frac{R^2}{c}\left[m_i\Omega_k + m_k\Omega_i - \frac{2}{3}(\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\Omega})\delta_{ik}\right]. \qquad (2.13)$$

При этом электромагнитные поля для произвольного расстояния r в пределе $R \to 0$ для $\chi = 90°$ описываются хорошо известными выражениями [Ландау, Лифшиц, 1973b]:

$$\mathbf{E} = [\mathbf{m}\times\mathbf{n}]\,\mathrm{Re}\left(i\frac{\Omega}{c}\frac{1}{r^2} + \frac{\Omega^2}{c^2}\frac{1}{r}\right)\exp\left(i\frac{\Omega r}{c} + i\varphi - i\Omega t\right) + \mathbf{E}_Q; \qquad (2.14)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{m}\,\mathrm{Re}\left(-\frac{1}{r^3} + i\frac{\Omega}{c}\frac{1}{r^2} + \frac{\Omega^2}{c^2}\frac{1}{r}\right)\exp\left(i\frac{\Omega r}{c} + i\varphi - i\Omega t\right) + \\ + (\mathbf{nm})\mathbf{n}\,\mathrm{Re}\left(\frac{3}{r^3} - 3i\frac{\Omega}{c}\frac{1}{r^2} - \frac{\Omega^2}{c^2}\frac{1}{r}\right)\exp\left(i\frac{\Omega r}{c} + i\varphi - i\Omega t\right), \qquad (2.15)$$

где $\mathbf{E}_Q$ — статическое электрическое поле квадруполя:

$$\mathbf{E}_Q = -\nabla\Phi_Q, \quad \Phi_Q = \frac{Q_{ik}n_in_k}{2r^2}. \qquad (2.16)$$

На расстояниях, много меньших длины волны ($r \ll c/\Omega$), электромагнитные поля близки к сумме полей покоящихся магнитного диполя и электрического квадруполя, а на больших расстояниях ($r \gg c/\Omega$) представляют собой поле сферической волны. Поскольку же, согласно (2.12), электрическое поле квадруполя на поверхности звезды гораздо меньше магнитного, а квадрупольное электрическое поле спадает с расстоянием быстрее, чем дипольное магнитное поле, электрический квадруполь не вносит реального вклада в энергетические потери пульсара. Следовательно, потери энергии с хорошей точностью определяются стандартным выражением (2.4). Поэтому мы и ограничились в (2.14) лишь статической частью поля электрического квадруполя.

Здесь нужно особенно подчеркнуть следующее обстоятельство. Как оказалось, магнитодипольное излучение приводит к изменению не только периода вращения $P = 2\pi/\Omega$, но и к эволюции угла наклона осей χ, поскольку при магнитодипольных потерях остается постоянным инвариант [Davis, Goldstein, 1970]

$$I_{\mathrm{md}} = \Omega\cos\chi. \qquad (2.17)$$

Следовательно, при магнитодипольных потерях угол наклона осей отдельных пульсаров должен уменьшаться с характерным временем $\tau_{\rm D} = P/\dot{P}$, совпадающим с характерным временем изменения периода вращения. В результате уменьшение энерговыделения будет происходить не только за счет увеличения периода вращения, но и за счет уменьшения угла наклона осей χ.

К сожалению, единственным прямым наблюдательным каналом, позволяющим судить о механизме энерговыделения радиопульсаров, является так называемый параметр торможения

$$n_{\rm br} = \frac{\ddot{\Omega}\Omega}{\dot{\Omega}^2} = 2 - \frac{\ddot{P}P}{\dot{P}^2}, \tag{2.18}$$

который, как нетрудно проверить, совпадает с показателем степени в зависимости скорости замедления от угловой скорости вращения: $\dot{\Omega} \propto \Omega^{n_{\rm br}}$. Мы видим, что для определения параметра торможения необходимо знать вторую производную периода по времени. Однако для большинства радиопульсаров вторую производную невозможно выделить на фоне шумов, связанных с более быстрыми (по сравнению со временем замедления) вариациями периода вращения нейтронной звезды [Johnston, Galloway, 1998]. Поэтому параметр замедления удается определить лишь для самых быстрых радиопульсаров. Как видно из табл. 2.1, во всех случаях параметр замедления оказывается меньше трех, тогда как закон дипольного торможения (2.4) дает $n_{\rm br} = 3$.

Таблица 2.1

Пульсар	P [c]	$\dot{P}$ $[10^{-15}]$	$n_{\rm br}$
0531 + 21	0,033	421	2,51 ± 0,01
0540 − 693	0,050	479	2,24 ± 0,04
0833 − 45	0,089	124	1,40 ± 0,20
1509 − 58	0,150	1490	2,837 ± 0,001

Упражнения.

1. Покажите, что в более реалистической модели, учитывающей эволюцию угла наклона осей (2.17), параметр торможения будет еще больше [Davis, Goldstein, 1970]:

$$n_{\rm br} = 3 + 2{\rm ctg}^2\chi. \tag{2.19}$$

2. Проинтегрируйте уравнение эволюции (2.4) с учетом интеграла движения (2.17) и покажите, что период пульсара $P(t)$ экспоненциально быстро (с характерным временем $\tau_{\rm D} = P_0/\dot{P}_0$) приближается к максимальному значению $P_{\rm max} = P_0/\sin\chi_0$, а угол χ — к 90°.

Таким образом, уже из анализа параметра торможения следует вывод о том, что простейший магнитодипольный механизм, по-видимому, не может быть ответственен за наблюдаемое замедление вращения радиопульсаров. Поэтому предпринимались неоднократные попытки «подправить» соотношение (2.19), например за счет эволюции магнитного поля [Blandford, Romani, 1988; Chen, Ruderman, Zhu, 1998] или же за счет взаимодействия сверхтекучей компоненты в ядре нейтронной звезды с ее твердой корой [Allen, Horvath, 1997; Baykal et al., 1999] (см. также [Melatos, 1997; Xu, Qiao, 2001]). Оказалось, однако, что большинство из подобных эффектов способно привести лишь к незначительным поправкам и не может существенно изменить величину (2.19). Так или иначе, определение параметра торможения у других нейтронных звезд, а также определение параметра торможения второго порядка — $n_{\rm br}^{(2)} = \Omega\dddot{\Omega}/\dot{\Omega}^3$ (этот параметр в настоящее время известен лишь у одного пульсара [Lyne, Graham-Smith, 1998]) позволили бы существенно прояснить природу торможения радиопульсаров.

С другой стороны, практически сразу после обнаружения радиопульсаров стало ясно, что вакуумная модель не является хорошим нулевым приближением для описания магнитосферы нейтронной звезды. Причина последнего, как не странно, кроется в существовании сверхсильного магнитного поля.

2.2.2. Рождение частиц в сильном магнитном поле. Сверхсильное магнитное поле приводит к ряду важных следствий.

1. Время синхротронного высвечивания [Ландау, Лифшиц, 1973b]

$$\tau_{\rm s} \approx \frac{1}{\omega_B}\left(\frac{c}{\omega_B r_{\rm e}}\right) \sim 10^{-15}\ \text{с} \tag{2.20}$$

(где $\omega_B = eB/(m_{\rm e}c)$, $r_{\rm e} = e^2/(m_{\rm e}c^2)$ — классический радиус электрона) оказывается существенно меньше времени ухода частицы за пределы магнитосферы. В результате движение заряженных частиц в магнитосфере нейтронной звезды будет складываться из движения вдоль магнитных силовых линий и электрического дрейфа в поперечном направлении.

2. Поскольку силовые линии дипольного магнитного поля искривлены, движение релятивистских частиц вдоль искривленной траектории будет приводить к излучению жестких гамма-квантов за счет так называемых изгибных потерь [Железняков, 1977]. Этот процесс вполне аналогичен обычному синхротронному излучению, поскольку природа ускоренного движения несущественна, а для релятивистских частиц размер зоны формирования $\delta r \sim R_{\rm c}\gamma^{-1}$ много меньше радиуса кривизны $R_{\rm c}$. Поэтому все формулы для синхротронного излучения могут быть использованы и для описания изгибного излучения с единственным изменением: радиус ларморовской окружности $r_B = m_{\rm e}c^2\gamma/eB$ должен быть заменен на радиус кривизны магнитной силовой линии $R_{\rm c}$. В частности, частота, соответствующая максимуму излучения, будет выглядеть теперь как

$$\omega_{\rm cur} = 0{,}44\frac{c}{R_{\rm c}}\gamma^3. \tag{2.21}$$

Здесь дополнительная степень γ, в отличие от случая синхротронного излучения ($\omega_{\rm syn} = 0{,}44\omega_B\gamma^2$), связана с тем фактом, что для синхротронных потерь радиус r_B ларморовской окружности сам пропорционален энергии частиц.

3. Наконец, была понята важность процесса рождения фотонами электронно-позитронных пар в сверхсильном магнитном поле: $\gamma + B \to e^+ + e^- + B$ [Sturrock, 1971], имеющего место в случае, когда фотоны при своем движении пересекают силовые линии магнитного поля. Действительно, вероятность однофотонной конверсии фотона с энергией $\mathcal{E}_{\rm ph}$, распространяющегося под углом θ к магнитному полю B, вдали от порога $\mathcal{E}_{\rm ph} = 2m_{\rm e}c^2$ имеет вид [Берестецкий, Лифшиц, Питаевский, 1989]

$$w = \frac{3\sqrt{3}}{16\sqrt{2}}\,\frac{e^3 B\sin\theta}{\hbar m_{\rm e}c^3}\exp\left(-\frac{8}{3}\frac{B_{\rm crit}}{B\sin\theta}\frac{m_{\rm e}c^2}{\mathcal{E}_{\rm ph}}\right). \tag{2.22}$$

Здесь величина

$$B_{\rm crit} = \frac{m_{\rm e}^2c^3}{e\hbar} \approx 4{,}4\cdot 10^{13}\ \text{Гс} \tag{2.23}$$

соответствует критическому магнитному полю, при котором энергетическая щель между двумя ближайшими уровнями Ландау достигает энергии покоя электрона: $\hbar\omega_B = m_{\rm e}c^2$. Напомним, что в отличие от электрического поля само магнитное поле не может рождать частицы. Однако оно может играть роль катализатора, позволяющего выполнить законы сохранения энергии и импульса для рассматриваемого здесь процесса.

Как мы видим, характерные магнитные поля нейтронных звезд не намного меньше критического магнитного поля. В результате магнитосфера нейтронной звезды оказывается непрозрачной уже для достаточно малоэнергичных фотонов с энергией $\mathcal{E}_{\rm ph} \sim 2 \div 3$ МэВ, т. е. вблизи са́мого порога рождения частиц. При этом возникает следующая цепочка процессов.

1. Ускорение первичных частиц продольным электрическим полем, существующим, как было показано, в вакуумном приближении.

2. Излучение изгибных фотонов с характерными частотами $\omega \leqslant \omega_{\rm cur}$ (см. (2.21)).

3. Распространение фотонов в искривленном магнитном поле вплоть до рождения вторичных электронно-позитронных пар.

4. Ускорение вторичных частиц, излучение ими изгибных фотонов, которые, в свою очередь, дают начало все новым и новым поколениям вторичных частиц.

5. Экранировка продольного электрического поля вторичной плазмой.

Таким образом, можно сделать следующий вывод: *вакуумная магнитосфера нейтронной звезды с магнитным полем $B_0 \sim 10^{12}$ Гс оказывается неустойчивой относительно рождения заряженных частиц.*

Сделаем несколько замечаний, уточняющих сформулированную выше картину. Прежде всего, отметим, что несмотря на то, что излучение изгибных фотонов происходит практически параллельно магнитной силовой линии, вследствие все той же искривленности силовых линий гамма-квант при распространении начинает двигаться под все большим и большим углом θ к магнитному полю. С другой стороны, при малых по сравнению с радиусом кривизны длинах пробега фотонов l_γ можно положить $\sin\theta \approx l_\gamma/R_\mathrm{c}$. Поэтому длина пробега гамма-кванта оценивается как [Sturrock, 1971]

$$l_\gamma = \frac{8}{3\Lambda} R_\mathrm{c} \frac{B_\mathrm{crit}}{B} \frac{m_\mathrm{e}c^2}{\mathcal{E}_\mathrm{ph}}, \tag{2.24}$$

где $\Lambda \approx 20$ — логарифмический фактор.

Далее, для не слишком сильных магнитных полей ($B < 10^{13}$ Гс) рождение вторичных частиц происходит на ненулевые уровни Ландау [Бескин, 1982; Daugherty, Harding, 1983]. Благодаря малому времени синхротронного высвечивания τ_s (см. (2.20)) вся «поперечная» энергия практически мгновенно высвечивается за счет излучения синхротронных фотонов. Оказывается, энергия таких синхрофотонов достаточно велика для того, чтобы и эти фотоны могли поглотиться в сильном магнитном поле и родить вторичные частицы. Что же касается первичных частиц, то они вполне могут быть объяснены космическим фоновым излучением. Как показал подробный анализ [Shukre, Radhakrishnan, 1982], космический гамма-фон приводит к генерации 10^5 первичных частиц в секунду. Этого вполне достаточно для эффективного заполнения магнитосферы нейтронной звезды электронно-позитронной плазмой.

Упражнения.

1. Определив длину пробега l_γ как $\int_0^{l_\gamma} w(l)\mathrm{d}l = 1$, покажите, что

$$\Lambda \approx \ln\left[\frac{e^2}{\hbar c}\frac{\omega_B R_\mathrm{c}}{c}\left(\frac{B_\mathrm{crit}}{B}\right)^2\left(\frac{m_\mathrm{e}c^2}{\mathcal{E}_\mathrm{ph}}\right)^2\right]. \tag{2.25}$$

2. Покажите, что если фотон с энергией $\mathcal{E}_\mathrm{ph} \gg m_\mathrm{e}c^2$ рождает пару, двигаясь под углом θ к магнитному полю, то после того как вторичные частицы опустятся на нижний уровень Ландау, их лоренц-факторы будут равны

$$\gamma \approx \frac{1}{\theta} \approx \frac{R_\mathrm{c}}{l_\gamma}. \tag{2.26}$$

3. Воспользовавшись законом движения релятивистской частицы:

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_\mathrm{e}}{\mathrm{d}l} = eE_\parallel - \frac{2}{3}\frac{e^2}{R_\mathrm{c}^2}\gamma^4, \tag{2.27}$$

где первое слагаемое в правой части соответствует ускоряющему электрическому полю, а второе — реакции излучения, покажите, что для стандартного радиопульсара ($B_0 = 10^{12}$ Гс, $P = 1$ с) энергия первичных электронов (как и позитронов) может достигать 10^9 МэВ, а энергия изгибных фотонов — 10^8 МэВ.

2.2.3. Структура магнитосферы. Таким образом, мы приходим к важному выводу: более естественным нулевым приближением является не вакуумная модель, а модель магнитосферы, полностью заполненной плазмой. Следовательно, в нулевом приближении можно считать продольное электрическое поле равным нулю:

$$E_{\|} = 0. \tag{2.28}$$

Физически условие (2.28) означает, что легкие электроны и позитроны всегда смогут перераспределиться таким образом, чтобы заэкранировать продольное электрическое поле. Появление же в какой-либо области магнитосферы продольного поля немедленно приведет к резкому ускорению плазмы и к взрывному рождению вторичных частиц.

В результате основные параметры, определяющие строение магнитосферы пульсаров, могут быть описаны следующим образом.

Коротация. Наличие плазмы в магнитосфере пульсаров приводит к тому, что условие вмороженности (см. (2.5))

$$\mathbf{E} + \frac{\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}}{c} \times \mathbf{B} = 0 \tag{2.29}$$

с хорошей точностью будет выполнено не только в нейтронной звезде, но и во всей магнитосфере. В итоге дрейфовая скорость частиц

$$\mathbf{U}_{\rm dr} = c\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + j_{\|}\mathbf{B} \tag{2.30}$$

(где $j_{\|}$ — скалярная функция) складывается из их движения вдоль магнитного поля и совместного твердотельного вращения вместе с нейтронной звездой. Такая коротация хорошо известна в магнитосфере Земли и больших планет.

Световой цилиндр. Понятно, что твердотельная коротация становится невозможной на больших расстояниях от оси вращения ($\varpi > R_{\rm L}$), где радиус светового цилиндра $R_{\rm L}$ определяется как

$$R_{\rm L} = \frac{c}{\Omega}. \tag{2.31}$$

Фактически этот масштаб и задает границу магнитосферы. Для обычных пульсаров $R_{\rm L} \sim 10^9 \div 10^{10}$ см, т. е. световой цилиндр находится на расстояниях, в несколько тысяч раз превышающих радиус нейтронной звезды.

Световая поверхность. Как мы увидим в дальнейшем, важную роль в структуре магнитосферы радиопульсаров играет так называемая световая поверхность — поверхность, на которой электрическое поле сравнивается по величине с магнитным. При наличии продольных токов эта поверхность не совпадает со световым цилиндром, а находится на бóльших расстояниях, причем для достаточно больших продольных токов вообще уходит на бесконечность. Световая поверхность более точно определяет границу магнитосферы, поскольку за ее пределами становится неприменимым дрейфовое приближение (2.29), (2.30), а значит, и само МГД-приближение.

Полярная шапка. Поскольку в полярных координатах r, θ силовые линии дипольного магнитного поля описываются соотношением $r = R_{\max} \sin^2 \theta$, где $R_{\max}$ — максимальное удаление данной силовой линии от центра звезды, мы можем оценить радиус полярной шапки у магнитного полюса пульсара, $R_0 = R \sin \theta_0$, из которой магнитные силовые линии выходят за пределы светового цилиндра. Подставляя вместо $R_{\max}$ радиус светового цилиндра R_{L}, получаем

$$R_0 \approx R \left(\frac{\Omega R}{c} \right)^{1/2}. \tag{2.32}$$

Таким образом, для обычных радиопульсаров размер полярной шапки составляет лишь несколько сот метров. Именно на столь ничтожной по космическим масштабам площади, сравнимой с размером стадиона, и разыгрываются основные процессы, приводящие к наблюдаемой активности радиопульсаров.

Открытые и замкнутые силовые линии. Как показано на рис. 2.2, магнитные силовые линии, выходящие за пределы светового цилиндра, могут размыкаться и уходить на бесконечность. Поскольку же, как уже подчеркивалось, движение частиц возможно лишь вдоль магнитного поля, в магнитосфере выделяются две группы магнитных силовых линий. Одна из них, выходящая из пределов полярной шапки, пересекает световой цилиндр и уходит на бесконечность, а другая, находящаяся вдали от магнитной оси, замыкается в пределах светового цилиндра. При этом плазма, находящаяся на замкнутых магнитных силовых линиях, оказывается захваченной, тогда как плазма, заполняющая открытые магнитные силовые линии, может покинуть магнитосферу нейтронной звезды.

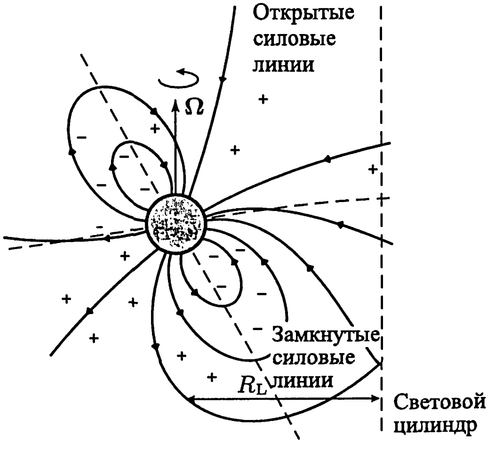


Рис. 2.2. Структура магнитосферы радиопульсаров. Открытые силовые линии, выходящие из магнитных полюсов, пересекают поверхность светового цилиндра. Плотность заряда ρ_{GJ} (см. (2.33)) меняет знак на поверхности, на которой магнитные силовые линии ортогональны вектору угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$

Критическая плотность заряда. Чрезвычайно важно, что плотность заряда в магнитосфере вращающейся нейтронной звезды должна отличаться от нуля. Действительно, воспользовавшись соотношением (2.29), находим

$$\rho_{\mathrm{e}} \approx \rho_{\mathrm{GJ}} = -\frac{\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{B}}{2\pi c}. \tag{2.33}$$

Это выражение впервые получено в пионерской работе П. Гольдрайха и В. Джулиана [Goldreich, Julian, 1969], поэтому критическую плотность заряда (2.33) обычно называют гольдрайховской. Соответственно, характерная величина плотности тока может быть записана как $j_{\mathrm{GJ}} = \rho_{\mathrm{GJ}}c$. Наконец, характерная величина полного электрического тока, текущего в магнитосфере, может быть оценена как произведение площади полярной шапки, гольдрайховской плотности заряда и скорости света:

$$I_{\mathrm{GJ}} \approx \pi R_0^2 \rho_{\mathrm{GJ}} c. \tag{2.34}$$

Физический смысл гольдрайховской плотности прост — это та плотность заряда, которая необходима для экранирования продольного электрического поля. При этом возникает перпендикулярное электрическое поле, причем, как мы видели, его величина оказывается в точности такой, чтобы электрический дрейф в скрещенных полях приводил к коротации плазмы.

Упражнения.

1. Покажите, что для случая полной коротации (т. е. когда в магнитосфере нейтронной звезды отсутствуют полоидальные токи и поэтому полный ток $\mathbf{j}$ может быть записан как $\mathbf{j} = \rho_{\mathrm{e}}\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}$) точное выражение для гольдрайховской плотности заряда имеет вид

$$\rho_{\mathrm{GJ}} = -\frac{\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{B}}{2\pi c\left(1 - \Omega^2\varpi^2/c^2\right)}. \tag{2.35}$$

Как можно объяснить особенность на световом цилиндре?

2. Определите полный электрический заряд нейтронной звезды и сравните его с величиной Q, полученной интегрированием поверхностной плотности заряда для случая вакуумной магнитосферы (см. (2.11)).

Здесь также следует сделать несколько пояснений. Прежде всего, как видно из соотношения (2.30), световой цилиндр является реальной границей магнитосферы лишь при нулевом тороидальном магнитном поле, т. е. при нулевом продольном электрическом токе. В дальнейшем мы увидим, что для достаточно больших значений продольного тока (и следовательно, для больших величин тороидального магнитного поля) дрейфовое движение может иметь место на расстояниях, значительно превышающих радиус светового цилиндра. Однако, как показано на рис. 2.3, в этом случае происходит почти полная компенсация коротационной скорости $\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}$ и тороидальной скорости скольжения вдоль магнитного поля $j_{\parallel}B_{\varphi}\mathbf{e}_{\varphi}$, так что дрейфовая скорость $\mathbf{U}_{\mathrm{dr}}$ направлена радиально от звезды. Поэтому за пределами светового цилиндра, несмотря на справедливость дрейфового приближения,

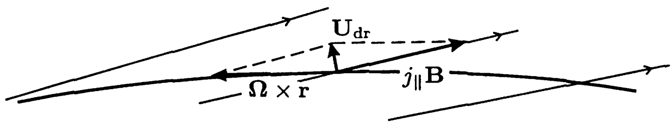


Рис. 2.3. Практически радиальное дрейфовое движение заряженной частицы за пределами светового цилиндра при наличии сильного тороидального поля ($B_{\varphi} \gg B_{\mathrm{p}}$). Ось вращения направлена перпендикулярно плоскости рисунка

движение частиц будет происходить практически перпендикулярно магнитным силовым линиям.

Далее, соотношение (2.32) для радиуса полярной шапки является лишь оценкой по порядку величины. Дело в том, что электрические токи, связанные с электрическими зарядами, заполняющими магнитосферу пульсара, вблизи светового цилиндра начинают возмущать дипольное магнитное поле. Поэтому точная форма полярной шапки может быть найдена только вместе с решением полной задачи о структуре магнитосферы нейтронной звезды. С другой стороны, выражение (2.32) позволяет оценить максимальную величину падения напряжения вблизи магнитных полюсов ($\psi_{\mathrm{max}} = E(R_0)R_0$):

$$\psi_{\mathrm{max}} = \left(\frac{\Omega R}{c}\right)^2 RB_0. \tag{2.36}$$

Наконец, важные следствия вытекают из выражения (2.33) для гольдрайховской плотности. Как было показано на рис. 2.2, вблизи нейтронной звезды плотность заряда ρ_{GJ} меняет знак на поверхности, на которой $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{B} = 0$. Поэтому, за исключением случая ортогонального ротатора ($\chi = 90°$), гольдрайховская плотность имеет одинаковый знак вблизи обоих магнитных полюсов (фактически, это свойство напрямую связано с уже упоминавшимся свойством вакуумной магнитосферы — радиальное электрическое поле в районе магнитных полюсов одинаково). Последнее означает, что неизбежно должен возникать обратный электрический ток, текущий вблизи границы замкнутых и открытых силовых линий: только тогда суммарный заряд нейтронной звезды не будет изменяться. Запомним это свойство — оно станет ключевым при построении теории магнитосферы нейтронной звезды.

Упражнение. Покажите, что радиус светового цилиндра (места, где скорость коротации приближается к скорости света) является тем масштабом, на котором

а) электрическое поле сравнивается по величине с полоидальным магнитным полем;

б) тороидальные электрические токи, текущие в магнитосфере, начинают возмущать полоидальное магнитное поле нейтронной звезды;

в) тороидальное магнитное поле, связанное с продольным гольдрайховским током, сравнивается по величине с полоидальным магнитным полем.

2.3. Генерация вторичной плазмы

2.3.1. «Внутренний зазор». Итак, в магнитосфере радиопульсаров должны образовываться две существенно различные области, а именно области открытых и замкнутых силовых линий. Частицы, находящиеся на силовых линиях, не пересекающих световой цилиндр, оказываются захваченными, тогда как плазма, находящаяся на силовых линиях, пересекающих световой цилиндр, может уходить на бесконечность. Следовательно, плазма должна постоянно генерироваться в районе магнитных полюсов нейтронной звезды.

Впервые на необходимость учета генерации вторичной плазмы в районе магнитных полюсов было указано П. Старроком [Sturrock, 1971]. Затем этот процесс был более подробно исследован М. Рудерманом и П. Сазерлендом [Ruderman, Sutherland, 1975], а также группой В. Я. Эйдмана [Альбер, Кротова, Эйдман, 1975]. Процесс основывается на уже обсуждавшемся выше однофотонном рождении частиц в сильном магнитном поле. При этом продольное электрическое поле генерируется за счет постоянного ухода частиц вдоль открытых силовых линий за пределы магнитосферы. В результате вблизи магнитных полюсов образуется область с продольным электрическим полем (английский термин *gap* — зазор), величина которого определяется из условия рождения вторичной плазмы. Иными словами, имеет место следующая цепочка процессов (рис. 2.4).

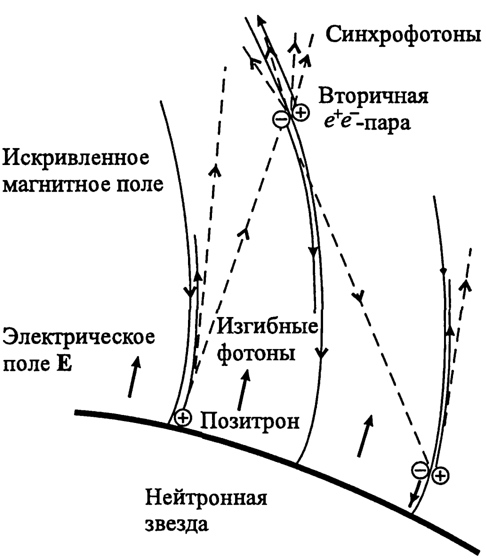


Рис. 2.4. Структура области ускорения и рождения частиц вблизи поверхности нейтронной звезды. Размер области ускорения H определяется высотой, на которой начинается эффективное рождение вторичной плазмы

1. Ускорение первичных частиц продольным электрическим полем, возникающим за счет отличия плотности заряда ρ_e от гольдрайховской плотности ρ_{GJ}.

2. Излучение изгибных фотонов с характерными частотами $\omega \leqslant \omega_{\text{cur}}$ (см. (2.21)).

3. Распространение фотонов в искривленном магнитном поле вплоть до рождения вторичных электронно-позитронных пар.

4. Ускорение вторичных частиц, излучение ими изгибных фотонов, которые, в свою очередь, дают начало все новым и новым поколениям вторичных частиц.

Важно, что основная часть вторичных частиц рождается уже над областью ускорения, где продольное электрическое поле достаточно мало, так что вторичная плазма способна покинуть магнитосферу нейтронной звезды.

При оценке продольного электрического поля рассмотрим для простоты лишь одномерное уравнение:

$$\frac{\mathrm{d}E_{\parallel}}{\mathrm{d}h} = 4\pi(\rho_{\mathrm{e}} - \rho_{\mathrm{GJ}}), \tag{2.37}$$

которым можно пользоваться в случае, когда высота зазора H много меньше поперечного размера полярной шапки R_0 (см. (2.32)). К сожалению, это приближение справедливо лишь для самых быстрых пульсаров. Тем не менее оно содержит всю качественную информацию о структуре внутреннего зазора. Несмотря на внешнюю простоту, уравнение (2.37) содержит ряд существенных неопределенностей. Главная из них, безусловно, заключена в выражении для плотности заряда ρ_{e}, зависящей от механизма рождения частиц, который, в свою очередь, определяется величиной продольного электрического поля.

Обсудим основные свойства уравнения (2.37). Для моделей с затрудненным выходом частиц с поверхности нейтронной звезды, которые обычно называют моделью Рудермана–Сазерленда (см. § 2.4), в нулевом приближении можно положить $|\rho_{\mathrm{e}}| \ll |\rho_{\mathrm{GJ}}|$, причем электрическое поле на поверхности звезды может быть отлично от нуля. В результате имеем [Ruderman, Sutherland, 1975]

$$E_{\parallel} \approx E_{\mathrm{RS}} \frac{H - h}{H}, \tag{2.38}$$

где

$$E_{\mathrm{RS}} = 4\pi\rho_{\mathrm{GJ}} H, \tag{2.39}$$

а H — высота области с продольным электрическим полем. Величина последней как раз и должна быть определена из условия начала рождения вторичной плазмы. Действительно, при $H < H_{\mathrm{crit}}$ продольное электрическое поле недостаточно велико для эффективного рождения частиц, тогда как при $H > H_{\mathrm{crit}}$ вторичная плазма приводит к быстрой экранировке области ускорения. Кстати, для твердой поверхности звезды этот случай может быть реализован при антипараллельных направлениях магнитной оси и оси вращения, когда $\rho_{\mathrm{GJ}} > 0$, так что с поверхности должны эжектироваться положительно заряженные частицы.

Упражнение. Воспользовавшись выражением (2.39), связывающим продольное электрическое поле и высоту зазора H, а также соотношениями (2.21) и (2.24) для характерной энергии и длины пробега изгибных фотонов, получите следующие выражения для высоты зазора H и падения потенциала $\psi = E_{\parallel} H$ [Ruderman, Sutherland, 1975]:

$$H_{\mathrm{RS}} \sim \lambda_{\mathrm{c}}^{2/7} R_{\mathrm{c}}^{2/7} R_{\mathrm{L}}^{3/7} \left(\frac{B}{B_{\mathrm{crit}}}\right)^{-4/7}, \tag{2.40}$$

$$\psi_{\mathrm{RS}} \sim \frac{m_{\mathrm{e}}c^2}{e} \lambda_{\mathrm{c}}^{-3/7} R_{\mathrm{c}}^{4/7} R_{\mathrm{L}}^{-1/7} \left(\frac{B}{B_{\mathrm{crit}}}\right)^{-1/7}, \tag{2.41}$$

где $\lambda_{\mathrm{c}} = \hbar/m_{\mathrm{e}}c$ — комптоновская длина волны.

(Пояснение: высота зазора H может быть оценена как сумма длины ускорения первичной частицы l_{ac} и длины пробега излученного ею изгибного фотона l_{γ}. Понятно, что при малых длинах ускорения l_{ac} энергия первичной частицы $\mathcal{E}_{\mathrm{e}} = eE_{\parallel} l_{\mathrm{ac}}$, а следовательно, и энергия излученного фотона $\mathcal{E}_{\mathrm{ph}}$ будут невелики. Длина же пробега таких малоэнергичных фотонов окажется значительной. Малые длины пробега могут быть реализованы лишь для достаточно больших энергий фотонов, для излучения которых первичная частица должна пройти большое расстояние. Поэтому сумма величин l_{ac} и l_{γ} имеет наименьшее значение, при котором и начинается рождение вторичной плазмы, способной заэкранировать продольное электрическое поле. Именно эта величина выбирается в качестве оценки высоты зазора.)

Если же частицы могут свободно покидать поверхность нейтронной звезды, то естественно положить

$$E_{\parallel}(h = 0) = 0, \tag{2.42}$$

причем плотность заряда ρ_{e} будет близка к ρ_{GJ}. На верхней границе области ускорения продольное электрическое поле также должно равняться нулю:

$$E_{\parallel}(h = H) = 0. \tag{2.43}$$

В противном случае вторичные частицы одного из знаков не смогли бы уйти на бесконечность.

Таким образом, в модели со свободным выходом частиц продольное электрическое поле определяется лишь малой разницей между плотностью заряда ρ_{e} и критической плотностью ρ_{GJ}. Действительно, гольдрайховская плотность может быть записана в виде

$$\rho_{\mathrm{GJ}} = -\frac{\Omega B \cos\theta_b}{2\pi c}, \tag{2.44}$$

где θ_b — угол между вектором магнитного поля и осью вращения. С другой стороны, для релятивистской плазмы, движущейся со скоростью $v \approx c$, с той же точностью имеем

$$\rho_{\mathrm{e}} = C(\Psi)B, \tag{2.45}$$

где величина $C(\Psi)$ постоянна вдоль магнитных силовых линий. Как мы видим, плотности заряда (2.44) и (2.45) по-разному изменяются вдоль магнитной силовой линии. Гольдрайховская плотность (2.44), помимо фактора B, содержит геометрический фактор $\cos\theta_b$. В итоге однозарядная релятивистская плазма при своем движении не в состоянии удовлетворить условию $\rho_e = \rho_{GJ}$, что и вызывает появление продольного электрического поля. Продольное же электрическое поле приводит к ускорению частиц, излучению жестких фотонов, и в результате — к рождению вторичной электронно-позитронной плазмы [Sturrock, 1971]. Поэтому вне области ускорения продольное поле должно быть близко к нулю.

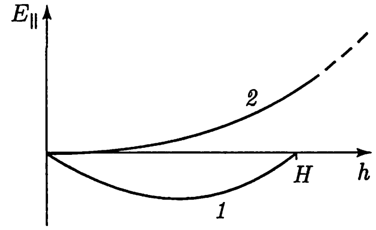


Рис. 2.5. Значение продольного электрического поля в моделях Аронса (*1*) [Arons, 1981] и Местеля (*2*) [Mestel, Shibata, 1994] на «предпочтительных» силовых линиях при $\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{B} > 0$

Отметим, что одновременно условия (2.42) и (2.43) могут быть выполнены лишь в случае, когда плотность электрического заряда на границах области ускорения не совпадает с гольдрайховской плотностью, т. е. когда производная $\mathrm{d}E_\parallel/\mathrm{d}h$ на них отлична от нуля (рис. 2.5). Поэтому для существования такого решения необходим поток обратных частиц, величина которого самосогласованно определяется из уравнения (2.37):

$$\frac{j_{\text{об}}}{j} \approx \varepsilon_A = \left(\frac{\Omega R}{c}\right)^{1/2} \sim 10^{-2}. \tag{2.46}$$

В результате уравнение (2.37) можно переписать в виде

$$\frac{\mathrm{d}E_\parallel}{\mathrm{d}h} = A_a\left(h - \frac{H}{2}\right), \tag{2.47}$$

где

$$A_a = 4\pi \left.\frac{\mathrm{d}(\rho_e - \rho_{GJ})}{\mathrm{d}h}\right|_{h=H/2}. \tag{2.48}$$

Окончательно имеем

$$A_a = \frac{3}{2}\varepsilon_A \frac{\Omega B_0}{cR}\cos\varphi_m \sin\chi, \tag{2.49}$$

где φ_m — азимутальный угол относительно оси магнитного диполя. В итоге решение уравнения (2.37) приобретает вид

$$E_\parallel \approx E_A \frac{h(H-h)}{H^2}, \tag{2.50}$$

где

$$E_A = 4\pi\rho_{GJ}\frac{H^2}{R} \sim \varepsilon_A E_{RS}, \tag{2.51}$$

а дополнительный фактор $\varepsilon_A \sim H/R \ll 1$. Такая модель впервые была рассмотрена группой Дж. Аронса [Fawley, Arons, Scharlemann, 1977; Scharlemann, Fawley, Arons, 1978; Arons, Scharlemann, 1979].

Подчеркнем, что режим ускорения (при котором возникающее продольное электрическое поле ускоряет частицы по направлению от поверхности звезды) может быть реализован лишь на северной половине полярной шапки, т. е. при $-\pi/2 < \varphi_m < \pi/2, A_a > 0$, где магнитные силовые линии искривляются в направлении оси вращения, а значит, $\cos\theta_b$ увеличивается при удалении от поверхности звезды. Такие силовые линии называют «предпочтительными». В области же $\pi/2 < \varphi_m < 3\pi/2$ $(A_a < 0)$, где магнитные силовые линии, напротив, стремятся стать перпендикулярными оси вращения, возникающее продольное электрическое поле привело бы не к ускорению, а к остановке частиц. В результате в рамках описываемой модели ускорение и генерация вторичных частиц будут происходить лишь в половине области открытых силовых линий, и следовательно, диаграмма направленности радиоизлучения также должна иметь форму полукруга [Arons, Scharlemann, 1979]. Однако этот вывод находится в противоречии с наблюдательными данными [Lyne, Graham-Smith, 1998].

Если же обратный поток частиц отсутствует, то уравнение (2.37) приводит к совершенно другому решению:

$$E_{\parallel} \approx -4\pi\rho_{\rm GJ}\frac{h^2}{R}, \tag{2.52}$$

согласно которому продольное электрическое поле оказывается направленным в противоположную сторону. Понятно, что соотношением (2.52) можно пользоваться лишь до расстояний $h \ll R$; на бо́льших расстояниях продольное электрическое поле стремится к нулю. Следовательно, ускорение частиц становится возможным только на «непредпочтительных» магнитных силовых линиях. Именно эта модель, в которой поток обратных частиц, естественно, должен быть достаточно мал, уже много лет развивается в работах Л. Местеля [Mestel, Wang, 1979; Fitzpatrick, Mestel, 1988; Mestel, Shibata, 1994; Mestel, 1999]. Лишь последовательная кинетическая модель способна сделать выбор между двумя указанными реализациями (подробное исследование данного вопроса можно найти в работах [Shibata, 1997; Shibata, Miyazaki, Takahara, 1998]).

2.3.2. Поверхность нейтронной звезды. Вопрос о строении поверхностных слоев нейтронной звезды, помимо самостоятельного интереса, имеет также и прямое отношение к теории магнитосферы радиопульсаров. Действительно, как уже говорилось, структура «внутреннего зазора» существенно зависит от работы $\varphi_{\rm w}$ выхода частиц с поверхности нейтронной звезды. Напомним, что в семидесятые годы основное развитие получила модель с затрудненным выходом частиц, впервые рассмотренная Рудерманом и Сазерлендом [Ruderman, Sutherland, 1975]. Она опиралась на серию теоретических работ по структуре вещества в сверхсильном магнитном поле, которые давали достаточно большую величину работы выхода частиц: $\varphi_{\rm w} \sim 1 \div 5$ кэВ [Кадомцев, Кудрявцев, 1971; Гинзбург, Усов, 1972; Chen, Ruderman, Sutherland, 1974; Hillebrandt, Müller, 1976; Flowers et al., 1977]. Однако с начала восьмидесятых годов, когда более точные расчеты понизили работу выхода до $\varphi_{\rm w} \sim 0{,}1$ кэВ [Müller, 1984; Jones, 1985, 1996; Neuhauser, Langanke, Koonin, 1986; Neuhauser, Koonin, Langanke, 1987], все большую популярность стали приобретать модели со свободным выходом частиц. Как уже упоминалось, первые детальные расчеты в рамках этой модели были выполнены группой Дж. Аронса [Arons, 1981].

Подчеркнем, что до сих пор ситуация все еще очень далека от своего разрешения. И дело здесь не только в том, что точность определения работы выхода пока недостаточно велика [Usov, Melrose, 1996]. Оказалось, что не известен даже химический состав поверхностных слоев нейтронной звезды — они могут и не состоять из атомов железа, как это предполагалось в большинстве работ. Во-первых, химический состав поверхностных слоев полярных шапок может существенно измениться за счет их бомбардировки энергичными частицами, ускоряемыми продольным электрическим полем в зазоре. Во-вторых, как широко обсуждается в настоящее время, атомы железа (несомненно, образующиеся в преобладающем количестве как наиболее устойчивые ядра) в первые несколько лет после образования нейтронной звезды, в течение которых ее поверхность, несомненно, не является твердой, могут «утонуть» под действием гравитационного поля [Salpeter, Lai, 1997]. Поэтому не исключено, что в действительности поверхностные слои нейтронных звезд состоят не из железа, а из гораздо более легких атомов — водорода и гелия. Тогда, поскольку температура плавления, грубо оцениваемая по формуле [Шапиро, Тьюколски, 1985]

$$T_{\rm m} \approx 3{,}4 \cdot 10^7 \left(\frac{Z}{26}\right)^{5/3} \left(\frac{\rho}{10^6\ [\text{г/см}^3]}\right) \text{K}, \tag{2.53}$$

зависит от атомного числа Z, поверхность нейтронной звезды при температуре $\sim 10^6$ К, характерной для обычных радиопульсаров, должна быть жидкой, и уж во всяком случае не препятствовать свободному выходу частиц. На основе такой картины и строятся современные модели теплового излучения радиопульсаров [Яковлев, Левенфиш, Шибанов, 1999; Pavlov, Zavlin, Sanwal, 2002; Zavlin, Pavlov, 2002].

2.3.3. Распространение гамма-квантов в сверхсильном магнитном поле. Перейдем к краткому обсуждению эффектов распространения высокоэнергичных фотонов в сверхсильном магнитном поле вблизи поверхности нейтронной звезды. Очевидно, что этот вопрос также имеет прямое отношение к механизму рождения частиц в полярных областях радиопульсаров. Квантовые эффекты в магнитном поле, величина которого близка к критическому значению ($B_{\rm crit} = 4{,}4 \cdot 10^{13}$ Гс; см. (2.23)), хорошо известны уже очень давно [Берестецкий, Лифшиц, Питаевский, 1989], однако только после открытия радиопульсаров появилась надежда на их прямое наблюдение. Сюда можно отнести, например, процесс расщепление фотонов: $\gamma + B \to \gamma + \gamma + B$ [Bialynicka-Birula, Bialynicka-Birula, 1970; Adler, 1971]; существенное изменение сечения двухфотонного рождения пар: $\gamma + \gamma \to e^+ + e^-$, особенно вблизи порога рождения [Козленков, Митрофанов, 1986]; квантовое синхротронное охлаждение, связанное с быстрым переходом частиц на нижний уровень Ландау [Митрофанов, Позаненко, 1987]; эффекты распространения, обусловленные как двойным лучепреломлением вакуума [Bialynicka-Birula, Bialynicka-Birula, 1970], так и особенностями траекторий фотонов вблизи порога рождения вторичных электронно-позитронных пар [Shabad, Usov, 1984, 1985, 1986]. В результате в семидесятые годы возможность прямого обнаружения эффектов, связанных с квантующим магнитным полем (см. (2.23)), казалась совершенно реальной [Долгинов, Гнедин, Силантьев, 1979]. Тем не менее эти эффекты для большинства радиопульсаров оказались все же достаточно слабыми. Дело в том, что, например, в выражение для коэффициента преломления в сильном магнитном поле (формула соответствует одной из линейных поляризаций):

$$n = 1 + \frac{7\alpha_{\text{fin}}}{90\pi}\left(\frac{B}{B_{\text{crit}}}\right)^2, \tag{2.54}$$

входит постоянная тонкой структуры $\alpha_{\text{fin}} = e^2/\hbar c \approx 1/137$, в результате чего можно ожидать появления зна́чимых квантовых эффектов лишь при полях $B > 10^{14}$ Гс. Для большинства же нейтронных звезд, наблюдаемых как радиопульсары, можно с хорошей точностью считать, что гамма-кванты распространяются прямолинейно.

Однако в последнее время в связи с открытием магнетаров (источников пульсирующего рентгеновского излучения, периоды которых составляют несколько секунд, а магнитное поле, оцениваемое по формуле (2.4), достигает $10^{15} \div 10^{16}$ Гс [Thompson, Duncan, 1993; Kouveliotou et al., 1998]) этот вопрос вновь приобрел актуальность. Поэтому были выполнены новые подробные вычисления, касающиеся как процессов генерации вторичных частиц [Weise, Melrose, 2002], так и эффектов расщепления фотонов [Baring, Harding, 1997; Chistyakov, Kuznetsov, Mikheev, 1998] и определения траекторий жестких гамма-квантов вблизи порога рождения частиц [Shaviv, Heyl, Lithwick, 1999]. В частности, было показано, что при достаточно больших магнитных полях ($B \sim 10^{14} \div 10^{15}$ Гс) процесс конверсии гамма-квантов за счет расщепления фотонов должен быть существенно подавлен [Baring, Harding, 1998]. Следовательно, значительно подавленным должен оказаться и процесс рождения вторичной плазмы. Неудивительно поэтому, что большинство магнетаров не проявляют себя как радиопульсары. Вместе с тем новых качественных явлений, способных привести к прямому наблюдению квантовых эффектов в сверхсильном магнитном поле, обнаружено не было, а проведенные расчеты лишь уточнили полученные ранее результаты.

2.3.4. Эффекты общей теории относительности. Исследуем релятивистские эффекты, которые, в отличие от рассмотренных выше эффектов квантующего магнитного поля, несомненно, могут оказывать существенное влияние на процессы рождения частиц вблизи радиопульсаров. Оказалось, что в модели со свободным выходом частиц с поверхности нейтронной звезды заметную роль должны играть эффекты общей теории относительности. Напомним, что на поверхности пульсара гравитационное красное смещение достаточно велико:

$$\frac{2\varphi_{\mathrm{g}}}{c^2} \approx \frac{2GM}{Rc^2} \sim 0{,}2. \tag{2.55}$$

Поэтому любые расчеты, претендующие на точность, лучшую, чем 20%, должны быть выполнены с учетом релятивистских эффектов. Однако в модели с затрудненным выходом частиц учет таких эффектов не приводит к существенным поправкам, поскольку не изменяет качественно структуру электродинамических уравнений. В модели же со свободным выходом частиц в уравнении (2.37), помимо малого геометрического фактора

$$\varepsilon_{\mathrm{A}} \approx \left(\frac{\Omega R}{c}\right)^{1/2}, \tag{2.56}$$

возникает чисто релятивистский фактор

$$\varepsilon_{\mathrm{g}} \approx \frac{2\varphi_{\mathrm{g}}}{c^2}, \tag{2.57}$$

связанный с уже обсуждавшимся выше увлечением инерциальных систем отсчета (эффект Лензе–Тирринга [Торн, Прайс, Макдональд, 1988]). При этом для большинства радиопульсаров с $P \sim 1$ с релятивистская поправка ε_{g} оказывается по крайней мере на порядок больше величины ε_{A}, в результате чего учет эффектов общей теории относительности становится необходимым.

Действительно, как уже говорилось, в модели Аронса появление продольного электрического поля в области ускорения и рождения частиц связано с отличием плотности заряда плазмы ρ_{e} от гольдрайховской плотности ρ_{GJ} (см. (2.33)). В общем релятивистском случае уравнение Гаусса переписывается как [Торн, Прайс, Макдональд, 1988]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\left(\frac{1}{\alpha}E_{\parallel}\right) = 4\pi(\rho_{\mathrm{e}} - \rho_{\mathrm{GJ}}), \tag{2.58}$$

причем гольдрайховская плотность имеет теперь вид (см. гл. 3)

$$\rho_{\mathrm{GJ}} = -\frac{1}{8\pi^2}\nabla_k\left(\frac{\Omega - \omega}{\alpha c}\nabla^k\Psi\right). \tag{2.59}$$

Здесь по-прежнему α — гравитационное красное смещение, ω — угловая скорость вращения Лензе–Тирринга, а Ψ — магнитный поток. С необходимой точностью они могут быть записаны следующим образом:

$$\alpha^2 = 1 - \frac{r_{\mathrm{g}}}{r}; \tag{2.60}$$

$$\omega = \Omega \frac{r_{\mathrm{g}} J_r}{M r^3}; \tag{2.61}$$

$$\Psi = \frac{1}{2} B_0 R^3 \, \frac{\sin^2\theta}{r}, \tag{2.62}$$

где B_0 — магнитное поле на полюсе нейтронной звезды, а J_r — ее момент инерции. В линейном порядке по малым величинам ε_{A} и ε_{g} имеем

$$\rho_{\mathrm{GJ}} = -\frac{(\Omega - \omega) B \cos\theta_b}{2\pi c \alpha}, \tag{2.63}$$

где θ_b — снова угол между осью магнитного диполя и осью вращения. С другой стороны, выражение для плотности заряда релятивистской плазмы имеет теперь вид

$$\rho_{\mathrm{e}} = C(\Psi) \frac{B}{\alpha}, \tag{2.64}$$

где величина $C(\Psi)$ по-прежнему постоянна вдоль магнитных силовых линий. В результате гольдрайховская плотность (2.63), помимо фактора B/α, совпадающего с плотностью ρ_{e} из (2.64), а также геометрического фактора $\cos\theta_b$, содержит множитель $\Omega - \omega$, который изменяется благодаря зависимости $\omega(r)$ от r. Постоянная A_a, входящая в уравнение (2.47), приобретает вид [Муслимов, Цыган, 1990; Бескин, 1990; Muslimov, Tsygan, 1992]

$$A_a = \frac{3}{2} \frac{\Omega B_0}{cR} \left[4 \frac{\omega}{\Omega} \cos\chi + \varepsilon_{\mathrm{A}} \cos\varphi_m \sin\chi + O(\varepsilon_g^2) + \ldots \right]. \tag{2.65}$$

Как мы видим, учет эффектов общей теории относительности приводит к появлению дополнительного слагаемого, пропорционального $\omega/\Omega \sim \varepsilon_{\mathrm{g}}$. При этом, согласно (2.65), при $4\,\omega/\Omega > \varepsilon_{\mathrm{A}} \mathrm{tg}\chi$ определяющий вклад в величину A_a будет вносить именно гравитационная поправка. Так, для однородной по плотности звезды, на поверхности которой

$$\frac{\omega}{\Omega} = \frac{2}{5} \varepsilon_{\mathrm{g}}, \tag{2.66}$$

это условие можно переписать в виде

$$P > 10^{-3} \left(\frac{R}{10^6 \ [\text{см}]} \right)^2 \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-2} \ \text{с}. \tag{2.67}$$

Следовательно, практически для всех наблюдаемых пульсаров эффекты ОТО являются определяющими. Важнейшее же следствие выражения (2.65) состоит в том, что все открытые силовые линии являются «предпочтительными» [Бескин, 1990], поскольку при $\chi < 90^\circ$ первое слагаемое в (2.65) оказывается положительным. Таким образом, учет эффектов ОТО действительно приводит к качественному изменению выводов первоначальной версии модели Аронса. Стационарная генерация становится возможной по всей поверхности полярной шапки.

2.3.5. Генерация частиц в магнитосфере. Исследуем, как все обсуждавшиеся выше физические процессы влияют на генерацию частиц вблизи поверхности нейтронной звезды. Прежде всего, рассмотрим эффекты сверхсильного магнитного поля ($B > 10^{14}$ Гс), характерного для магнетаров. Как уже говорилось, лишь при таких больших магнитных полях следует ожидать заметных эффектов квантующего магнитного поля [Baring, Harding, 1997; Shaviv, Heyl, Lithwick, 1999]. Прежде всего, уже давно было понято, что сильное магнитное поле подавляет процесс рождения вторичной плазмы Во-первых, при полях, больших 10^{13} Гс, вторичная электронно-позитронная пара должна рождаться на нижнем уровне Ландау, что приводит к подавлению синхротронного излучения [Бескин, 1982; Daugherty, Harding, 1983]. Во-вторых, нетривиальность проницаемости вакуума вблизи порога рождения на нулевые уровни Ландау при поперечном импульсе фотона, близком к $2m_ec$, может приводить к отклонению гамма-квантов вдоль направления магнитного поля, причем в результате будет образовываться не две свободные частицы, а их связанное состояние — позитроний [Shabad, Usov, 1985, 1986]. В-третьих, как уже говорилось, существенным становится процесс расщепления фотонов: $\gamma \to \gamma + \gamma$, приводящий к уменьшению их энергии и подавлению (хотя и неполному) рождения вторичных частиц [Baring, Harding, 1998]. Однако большинство радиопульсаров обладает магнитными полями, недостаточно большими для того, чтобы подобные эффекты были зарегистрированы.

С другой стороны, для обычных радиопульсаров существенным может оказаться процесс взаимодействия первичных частиц, ускоренных в зазоре, с рентгеновскими фотонами, излучаемыми нагретой поверхностью нейтронной звезды. Впервые на важность обратного комптоновского рассеяния в области рождения частиц было указано Н. С. Кардашевым, И. Г. Митрофановым и И. Д. Новиковым (1984 г.). Как оказалось, образующиеся в результате такого взаимодействия жесткие гамма-кванты имеют энергию, достаточную для того, чтобы родить электронно-позитронные пары, и следовательно, повлиять на структуру области ускорения частиц [Cheng, Ho, Ruderman, 1986; Hirotani, Shibata, 2001].

Наконец, как уже подчеркивалось, величина работы выхода частиц также существенно влияет на структуру электрического поля. Неопределенность в данном вопросе по-прежнему существенно сдерживает построение последовательной модели области ускорения.

Тем не менее в последнее время в этой части теории были получены новые важные результаты. Здесь необходимо отметить работы А Г. Муслимова и А. Хардинг [Muslimov, Harding, 1997, 1998, 2002]. Они включили в рассмотрение как эффекты общей теории относительности, так и процесс обратного комптоновского рассеяния (нерезонансного и резонансного) на рентгеновских фотонах, излучаемых поверхностью нейтронной звезды. Интересно, что в указанной модели область ускорения может и не примыкать к поверхности нейтронной звезды, а быть как бы подвешенной над магнитными полюсами пульсара. Однако, как уже говорилось, для полного анализа нужен учет кинетических эффектов, подобный выполненному впервые А. В. Гуревичем и Я. Н. Истоминым (1995 г.) для области ускорения вблизи поверхности нейтронной звезды в модели с затрудненным выходом частиц (см. также [Hirotani, Shibata, 2001]). Напомним, что анализ кинетических эффектов необходим, в частности, для решения проблемы о потоке обратных частиц, что, в свою очередь, непосредственно связано и с самой проблемой строения области рождения плазмы.

В заключение подчеркнем, что общие свойства вторичной электронно-позитронной плазмы, истекающей из магнитосферы, оказались в целом малочувствительными к деталям строения области ускорения. Для большинства моделей [Ruderman, Sutherland, 1975; Daugherty, Harding, 1982; Гуревич, Истомин, 1985] как плотность, так и энергетический спектр истекающей плазмы являются достаточно универсальными. Поэтому с уверенностью можно сказать, что плазма, текущая вдоль открытых магнитных силовых линий в магнитосфере пульсара, состоит из пучка первичных частиц с энергией $\mathcal{E} \approx 10^7$ МэВ и с плотностью, близкой к гольдрайховской, а также из вторичной электронно-позитронной компоненты. Ее энергетический спектр с хорошей точностью имеет степенной вид:

$$N(\mathcal{E}_\mathrm{e}) \propto \mathcal{E}_\mathrm{e}^{-2}, \tag{2.68}$$

а сами энергии заключены в пределах от $\mathcal{E}_\mathrm{min} \sim 100$ МэВ до $\mathcal{E}_\mathrm{max} \sim \sim 10^4$ МэВ (правда, если предположить наличие сильной недипольной компоненты у магнитных полюсов, то минимальные энергии можно уменьшить до 10 МэВ и даже до 3 МэВ). Отметим, что значение минимальной энергии $\mathcal{E}_\mathrm{min}$ непосредственно следует из оценки (2.26), где для самых низкоэнергетичных частиц нужно положить $l_\gamma = R$, поскольку при больших длинах пробега становится существенным дипольное спадание магнитного поля с удалением от поверхности нейтронной звезды. Полная же плотность вторичной плазмы, как показывают многочисленные расчеты, должна в $10^3 \div 10^4$ раз превышать гольдрайховскую:

$$\lambda = \frac{n_\mathrm{e}}{n_\mathrm{GJ}} \sim 10^3 \div 10^4. \tag{2.69}$$

Такая модель и рассматривалась в подавляющем большинстве работ, посвященных теории радиоизлучения пульсаров. Важно, что функции распределения электронов и позитронов должны быть сдвинуты друг относительно друга (на это указывалось еще в работе Рудермана и Сазерленда). Только тогда плотность заряда истекающей плазмы может совпадать с гольдрайховской плотностью.

2.3.6. Модель «полого конуса». Как уже подчеркивалось, единой точки зрения на природу когерентного радиоизлучения пульсаров в настоящее время не существует. Тем не менее оказалось, что наблюдаемые свойства радиоизлучения могут быть поняты на основе изложенной выше картины рождения частиц. Имеется так называемая модель полого конуса [Radhakrishnan, Cocke, 1969], предложенная уже в конце шестидесятых годов и прекрасно объяснившая основные геометрические свойства радиоизлучения. Действительно, как было показано, рождение вторичных частиц невозможно в прямолинейном магнитном поле, когда, во-первых, невелика интенсивность изгибного излучения и, во-вторых, фотоны, излучаемые релятивистскими частицами, распространяются под малыми углами к магнитному полю. Поэтому в центральных областях открытых силовых линий следует ожидать уменьшения плотности вторичной плазмы (рис. 2.6).

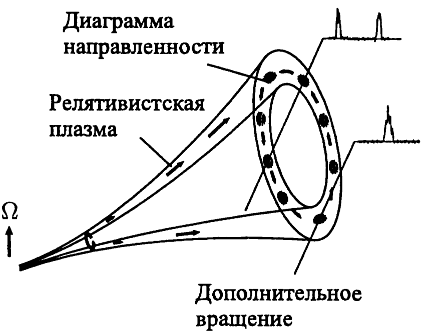


Рис. 2.6. Модель полого конуса

Если сделать достаточно разумное предположение о том, что интенсивность радиоизлучения напрямую связана с плотностью истекающей плазмы, то в центре диаграммы направленности должно иметь место понижение интенсивности радиоизлучения. Поэтому, если отвлечься от деталей (на самом деле средние профили радиопульсаров имеют достаточно сложную структуру [Rankin, 1983; Rankin, 1990; Lyne, Graham-Smith, 1998]), то следует ожидать одногорбый средний профиль у пульсаров, у которых луч зрения пересекает диаграмму направленности вдали от ее центра, и двугорбый профиль при центральном прохождении. Вращение плазмы вокруг магнитной оси должно приводить к дрейфу субимпульсов. Именно такая картина и наблюдается в действительности [Lyne, Graham-Smith, 1998].

В результате удалось объяснить практически все основные свойства радиоизлучения пульсаров, такие как

— линия погасания на плоскости параметров P–$\dot{P}$ (рис. 2.7);

— статистическое распределение пульсаров с одиночными и двойными средними профилями (двугорбые профили наблюдаются главным образом у пульсаров вблизи линии погасания, когда рождение частиц может происходить лишь в тонком кольце вблизи границы полярной шапки) [Beskin, Gurevich, Istomin, 1993];

— характерное S-образное изменение позиционного угла линейной поляризации вдоль среднего профиля [Radhakrishnan, Cocke, 1969] (как показывает рис. 2.8, полное изменение позиционного угла близко к 180°, если луч зрения пересекает диаграмму направленности вблизи ее центра, и мало при периферийном прохождении);

— ширина $w_{\rm d}$ диаграммы направленности и даже ее статистическая зависимость от периода пульсара [Rankin, 1990; Beskin, Gurevich, Istomin, 1993].

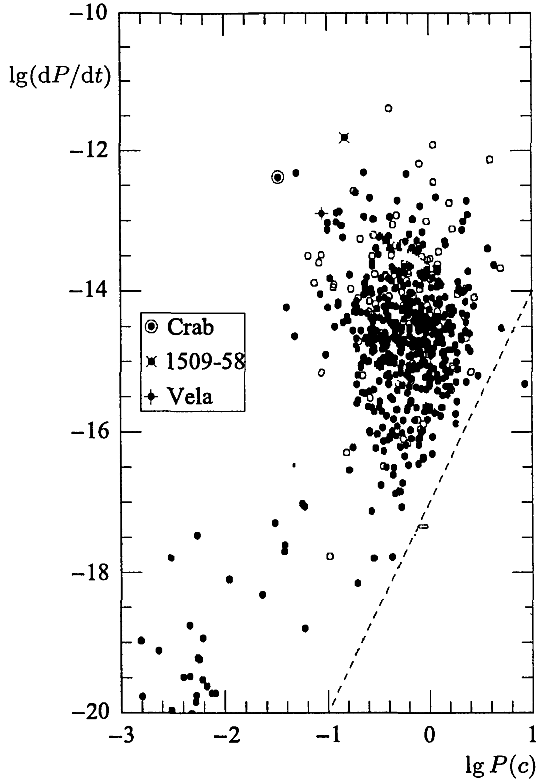


Рис. 2.7. Распределение пульсаров на диаграмме P–$\dot{P}$. Линия погасания («death line») соответствует соотношению $H = R_0$

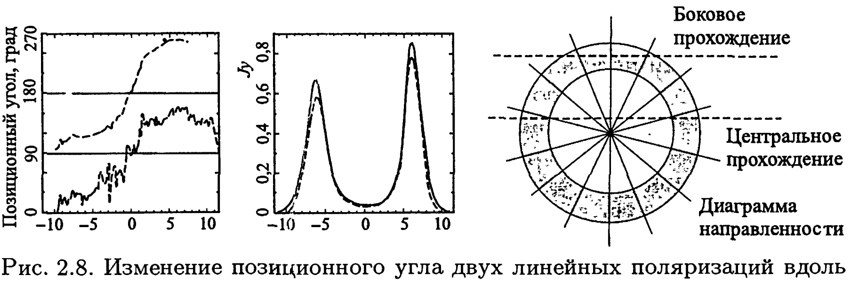


Рис. 2.8. Изменение позиционного угла двух линейных поляризаций вдоль среднего профиля, которое естественно связать с изменением ориентации магнитного поля (радиальные линии) в картинной плоскости

Последнее обстоятельство основывается на предположении о том, что у всех пульсаров генерация излучения происходит примерно на одном расстоянии $r_{\text{изл}}$ от нейтронной звезды. Поэтому для ширины диаграммы направленности имеем

$$w_{\mathrm{d}} \approx \left(\frac{\Omega r_{\text{изл}}}{c}\right)^{1/2} \approx 10^{\circ} P^{-1/2} \left(\frac{r_{\text{изл}}}{10R}\right)^{1/2}, \tag{2.70}$$

т. е. $w_{\mathrm{d}} \propto P^{-1/2}$, что согласуется с наблюдениями.

Что же касается линии погасания, то ее естественно связать с прекращением генерации вторичной плазмы вблизи магнитных полюсов. Действительно, как уже говорилось, радиоизлучение должно генерироваться вторичной электронно-позитронной плазмой, рождающейся в полярных областях нейтронной звезды. Поэтому равенство

$$H(P, B) = R_0(P) \tag{2.71}$$

($\psi = \psi_{\max}$) можно рассматривать как «условие зажигания», разделяющее активную область параметров и пассивную, в которой нейтронная звезда не проявляет себя как радиопульсар. В модели с затрудненным выходом частиц соотношение (2.71) принимает вид [Beskin, Gurevich, Istomin, 1984]

$$P_{\max} \approx \left(\frac{B_0}{10^{12}\ [\text{Гс}]}\right)^{8/15} c \approx 1 \div 3 \text{ с}. \tag{2.72}$$

На диаграмме P–$\dot{P}$ это условие обычно и изображается как «линия погасания». Такое хорошее соответствие, безусловно, можно рассматривать как прямое подтверждение обсуждаемой здесь картины. Для моделей же со свободным выходом частиц благодаря существенно меньшим значениям ускоряющего потенциала предельный период также должен быть значительно меньше [Arons, Scharlemann, 1979]:

$$P_{\max} = 0{,}1 \div 0{,}3 \text{ с}. \tag{2.73}$$

Надежды на то, что предельный период удастся поднять за счет учета эффектов общей теории относительности, как оказалось, не оправдались [Arons, 1998]. Здесь, впрочем, все же возможны различные решения, например смещение диполя относительно центра пульсара [Arons, 1998] или существование достаточно сильного недипольного магнитного поля у поверхности нейтронной звезды [Пальшин, Цыган, 1988, Gil, Melikidze, 2002; Asséo, Khechinashvili, 2002], приводящего к уменьшению радиуса кривизны магнитных силовых линий R_{c}, и следовательно, к увеличению эффективности рождения частиц. Тем не менее, как мы видим, модели со свободным выходом частиц сталкиваются с определенными трудностями.

Для моделей с затрудненным выходом частиц удобно ввести параметр Q:

$$Q = 2\left(\frac{P}{1\ [\text{с}]}\right)^{11/10} \left(\frac{\dot{P}}{10^{-15}}\right)^{-4/10}, \tag{2.74}$$

определяемый непосредственно из наблюдений. Он чрезвычайно удобен и описывает основные характеристики радиопульсаров [Beskin, Gurevich, Istomin, 1984; Taylor, Stinebring, 1986; Rankin, 1990]. Например, отношения внутреннего радиуса диаграммы направленности r_{in} и высоты области ускорения H к размеру полярной шапки R_0 записываются с его помощью в виде

$$\frac{r_{\text{in}}}{R_0} \approx Q^{7/9}; \tag{2.75}$$

$$\frac{H}{R_0} \approx Q. \tag{2.76}$$

Поэтому пульсары с $Q > 1$, у которых диаграмма направленности представляет собой достаточно тонкий конус, в большей степени имеют двугорбый средний профиль радиоизлучения; именно у таких пульсаров в их радиоизлучении регистрируются различные нерегулярности, в том числе прекращение радиоизлучения (нуллинг), переключение мод, и т. д. Напротив, пульсары с $Q \ll 1$ ($r_{\text{in}} \ll R_0$) характеризуются стабильным радиоизлучением, а их средние профили преимущественно являются одногорбыми.

Наконец, некоторые свойства радиопульсаров (например, дрейф субимпульсов) косвенно подтверждают существование области падения потенциала и ускорения частиц в районе магнитных полюсов нейтронной звезды [Ruderman, Sutherland, 1975]. Действительно, если вблизи поверхности пульсара имеется область с продольным электрическим полем, то на открытых силовых линиях, расположенных над областью ускорения, появляется дополнительная разность потенциалов между центральными и периферийными магнитными поверхностями, так что дополнительное электрическое поле направлено

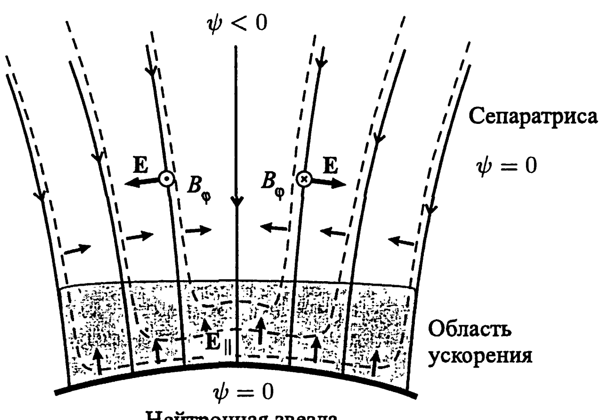


Рис. 2.9. Эквипотенциальные поверхности $\psi = \text{const}$ (штриховые линии) в области открытых силовых линий. Дополнительное электрическое поле (тонкие стрелки) приводит к вращению плазмы вокруг магнитной оси

либо к магнитной оси, либо от нее (рис. 2.9). В результате, помимо общего движения вокруг оси вращения, дополнительный электрический дрейф приводит к вращению плазмы вокруг магнитной оси, что, в свою очередь, может проявляться как регулярное смещение излучающих областей в пределах среднего импульса (см. рис. 2.6). В настоящее время известно более двадцати радиопульсаров с дрейфующими субимпульсами [Lyne, Graham-Smith, 1998].

2.3.7. Генерация вторичной плазмы — «внешний зазор». Наконец, необходимо отметить еще один механизм рождения частиц, который может иметь место уже вдали от поверхности нейтронной звезды. Как хорошо видно из рис. 2.2, на некоторых открытых силовых линиях, где $\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{B} = 0$, плотность заряда, согласно (2.33), меняет знак. Понятно, что однозарядная плазма, истекающая из звезды, не смогла бы обеспечить выполнение условия $\rho_\mathrm{e} = \rho_\mathrm{GJ}$. Поэтому была высказана гипотеза о существовании «внешнего зазора» вблизи линии $\rho_\mathrm{GJ} = 0$, в котором возникающее продольное электрическое поле также приводит к рождению вторичной плазмы. Однако поскольку из-за слабого магнитного поля однофотонная конверсия фотонов здесь становится невозможной, основным механизмом рождения частиц окажется процесс двухфотонной конверсии: $\gamma + \gamma \to e^+ + e^-$ [Cheng, Ho, Ruderman, 1986]. В настоящее время проведены детальные расчеты каскадных процессов во внешнем зазоре, направленные прежде всего на объяснение высокоэнергичного излучения радиопульсаров [Chiang, Romani, 1994; Zhang, Cheng, 1997; Cheng, Ruderman, Zhang, 2000; Hirotani, Shibata, 2001]. При этом цепочка процессов выглядит следующим образом.

1. Возникновение продольного электрического поля, связанного с невозможностью выполнения условия $\rho_\mathrm{e} = \rho_\mathrm{GJ}$.
2. Ускорение первичных частиц.
3. Излучение изгибных фотонов.
4. Обратное комптоновское рассеяние на тепловых рентгеновских фотонах, излучаемых поверхностью нейтронной звезды.
5. Рождение вторичных частиц за счет столкновения высокоэнергичных комптоновских γ-квантов с мягкими рентгеновскими фотонами.

Конечно, в реальных условиях плазма, истекающая из магнитосферы, содержит частицы обоих знаков, так что, в принципе, условие $\rho_\mathrm{e} = \rho_\mathrm{GJ}$ могло бы быть выполнено за счет небольшого изменения продольных скоростей частиц. Однако такая задача, требующая, вообще говоря, кинетического рассмотрения, в настоящее время не решена (см., например, [Lyubarskii, 1995]).

2.4. Пульсарное уравнение

2.4.1. Бессиловое приближение. Параметр замагниченности. Вернемся к нашей основной теме и рассмотрим бессиловой предел уравнения Грэда–Шафранова. Для возможности использовать это приближение необходимо, чтобы

1) плотность энергии плазмы была много меньше плотности энергии электромагнитного поля;

2) плазмы тем не менее было достаточно для того, чтобы заэкранировать продольное электрическое поле $E_{\|}$.

Бессиловое приближение должно выполняться в магнитосфере радиопульсаров с большим запасом, поскольку плазма, заполняющая магнитосферу, является вторичной по отношению к магнитному полю. Для количественной оценки введем, следуя Ф. К. Майкелю, параметр замагниченности [Michel, 1969]:

$$\sigma = \frac{e\Omega\Psi_{\rm tot}}{4\lambda m_e c^3}, \tag{2.77}$$

где $\Psi_{\rm tot}$ — полный магнитный поток, а λ — множественность рождения частиц (см. (2.69)). Следует, однако, подчеркнуть, что в работе Майкеля для простоты рассматривался случай монопольного магнитного поля. Поэтому при определении этой величины для конкретных астрофизических объектов необходимо быть осторожным. В частности, для радиопульсаров

$$\Psi_{\rm tot} = \pi B_0 R_0^2 \approx \pi B_0 R^2 \frac{\Omega R}{c}, \tag{2.78}$$

что соответствует магнитному потоку лишь в области открытых силовых линий. Поэтому для магнитосферы радиопульсаров

$$\sigma = \frac{eB_0\Omega^2 R^3}{4\lambda m_e c^4}. \tag{2.79}$$

В результате условие малости вклада частиц в тензор энергии-импульса — $T_{ik}^{\rm par} \ll T_{ik}^{\rm em}$ — вплоть до светового цилиндра может быть записано в виде

$$\sigma \gg \gamma_{\rm in}, \tag{2.80}$$

где $\gamma_{\rm in} \sim 10^2 \div 10^4$ — характерный лоренц-фактор плазмы у поверхности звезды.

Упражнение. Воспользовавшись определениями (2.69) и (2.79), проверьте, что соотношение (2.80) действительно соответствует условию малости вклада частиц (вплоть до светового цилиндра!) для компоненты T^{00}, т. е. для плотности энергии.

Параметр замагниченности является одним из ключевых безразмерных параметров, характеризующих релятивистскую плазму, движущуюся в магнитном поле. Как мы увидим, он с точностью до фактора $\gamma_{\rm in}$ совпадает с отношением потока энергии электромагнитного поля к потоку энергии частиц. В частности, большая величина σ показывает, что основной вклад в поток энергии во внутренних областях магнитосферы вносит поток электромагнитного поля. Для характерных параметров радиопульсаров ($P \sim 1$ с, $B_0 \sim 10^{12}$ Гс) имеем $\sigma \sim 10^4 \div 10^5$, и лишь для самых молодых из них ($P \sim 0{,}1$ с, $B_0 \sim 10^{13}$ Гс) величина σ достигает значений $\sim 10^6$. Тем не менее условие $\sigma \gg \gamma_{\rm in}$ оказывается выполненным. Что же касается экранирования продольного поля, то это условие также должно выполняться с большим запасом благодаря соотношению $\lambda \gg 1$ (см. (2.69)).

Таким образом, в нулевом порядке по параметрам σ^{-1} и λ^{-1} магнитосфера радиопульсаров, действительно, может быть описана в рамках бессилового приближения. Бессиловое же приближение означает, что в общем уравнении — законе сохранения энергии-импульса ($\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$) — вкладом частиц можно пренебречь. Воспользовавшись явным видом тензора энергии-импульса электромагнитного поля [Ландау, Лифшиц, 1973b]:

$$T^{\alpha\beta}_{\rm em} = \begin{pmatrix} \dfrac{E^2+B^2}{8\pi} & \dfrac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{B} \\ \dfrac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{B} & -\dfrac{1}{4\pi}\left(E^iE^k + B^iB^k\right) + \dfrac{1}{8\pi}(E^2+B^2)\,\delta^{ik} \end{pmatrix}, \qquad (2.81)$$

для пространственных компонент получаем хорошо известное уравнение:

$$\frac{1}{c}\mathbf{j}\times\mathbf{B} + \rho_{\rm e}\mathbf{E} = 0, \qquad (2.82)$$

или

$$[\nabla\times\mathbf{B}]\times\mathbf{B} + \nabla\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} = 0. \qquad (2.83)$$

В нерелятивистском пределе уравнение (2.82) сводится к равенству нулю силы Ампера ($\mathbf{F}_{\rm A} = \mathbf{j}\times\mathbf{B}/c$). Именно поэтому рассматриваемое здесь приближение называется бессиловым.

2.4.2. Удобная запись электромагнитного поля. Интегралы движения. Вспомним, что прежде всего нас будут интересовать осесимметричные стационарные конфигурации. В подобном случае удобно в качестве неизвестной переменной перейти к функции магнитного потока $\Psi(r,\theta)$. Собственно, в этом и состоял прием, впервые успешно примененный в работах Г. Грэда [Grad, 1960] и В. Д. Шафранова (1957).

Итак, запишем магнитное поле в виде выражения

$$\mathbf{B} = \frac{\nabla\Psi\times\mathbf{e}_\varphi}{2\pi\varpi} - \frac{2I}{c\varpi}\mathbf{e}_\varphi, \qquad (2.84)$$

в которое входят две скалярные функции — $\Psi(r,\theta)$ и $I(r,\theta)$. Численный коэффициент в первом слагаемом (2.84) выбран таким образом, чтобы функция $\Psi(r,\theta)$ совпадала с магнитным потоком, проходящим через круг r, θ, $0<\varphi<2\pi$ (рис. 2.10).

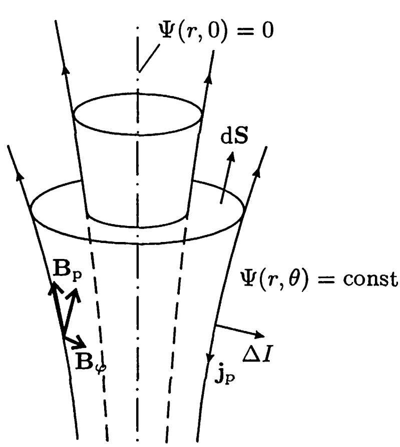


Рис. 2.10. Осесимметричные магнитные поверхности $\Psi(r,\theta) = \mathrm{const}$

Действительно, согласно определению функция магнитного потока вполне аналогична функции тока $\Phi(r, \theta)$, введенной в предыдущей главе (см. (1.86)). Поэтому сохраняются и все основные свойства, с которыми мы уже познакомились, рассматривая гидродинамическую версию уравнения Грэда–Шафранова.

1. Всегда выполнено условие $\mathrm{d}\Psi = \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ (где $\mathrm{d}\mathbf{S}$ — элемент площади). Поэтому функция $\Psi(r, \theta)$ имеет смысл магнитного потока.

2. Автоматически выполнено условие $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Поэтому три компоненты магнитного поля полностью определяются двумя скалярными функциями — $\Psi(r, \theta)$ и $I(r, \theta)$.

3. Выполнено условие $\mathbf{B} \cdot \nabla\Psi = 0$. Поэтому линии $\Psi(r, \theta) = \mathrm{const}$ задают форму магнитных поверхностей.

Что же касается величины $I(r, \theta)$, то она представляет собой полный электрический ток, проходящий через ту же окружность. Последнее легко может быть проверено с помощью очевидного соотношения: $\int B_\varphi \mathrm{d}\varphi = -(4\pi/\varpi c)I$. Знак минус в этом выражении и в выражении (2.84) для тороидального магнитного поля выбран потому, что для электрического тока, связанного с истечением гольдрайховской плотности заряда, величина I будет положительной. Для случая $\Psi > 0$, показанного на рис. 2.10, гольдрайховский заряд $\rho_{\mathrm{GJ}} < 0$ (и наоборот, $\rho_{\mathrm{GJ}} > 0$ при $\Psi < 0$). В результате вблизи северной полярной шапки ток $\mathbf{j}_\mathrm{p}$ всегда направлен антипараллельно магнитному полю $\mathbf{B}$. Записав определение полоидальной плотности электрического тока как

$$\mathbf{j}_\mathrm{p} = -\frac{\nabla I \times \mathbf{e}_\varphi}{2\pi\varpi}, \tag{2.85}$$

получаем тот же набор свойств, что и для функции магнитного потока.

1. Выполнено условие $\mathrm{d}I = -\mathbf{j} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$. Поэтому функция $I(r, \theta)$ имеет смысл полного электрического тока, втекающего в магнитосферу.

2. Автоматически выполнено условие непрерывности $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ (напомним, что мы рассматриваем лишь стационарные конфигурации).

3. Выполнено условие $\mathbf{j} \cdot \nabla I = 0$. Поэтому линии $I(r, \theta) = \mathrm{const}$ задают форму поверхностей, содержащих токи, текущие в магнитосфере.

Наконец, тороидальная компонента плотности электрического тока легко может быть определена из φ-компоненты уравнения Максвелла ($\nabla \times \mathbf{B} = (4\pi/c)\mathbf{j}$). В итоге, воспользовавшись определением (2.84), имеем

$$j_\varphi = -\frac{c}{8\pi^2 r \sin\theta}\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)\right]. \tag{2.86}$$

Итак, в определении тороидальной плотности тока вновь появляется уже хорошо нам знакомый оператор $\hat{\mathcal{L}} = \varpi^2\nabla_k\left(\varpi^{-2}\nabla^k\right)$ (см. (1.114)), записанный в сферических координатах. С другой стороны, при исследовании магнитосферы радиопульсаров, как мы убедимся в дальнейшем, удобнее воспользоваться цилиндрическими координатами ϖ, z. В этом случае выражение для тороидальной плотности электрического тока будет выглядеть как

$$j_\varphi = -\frac{c}{8\pi^2\varpi}\left[\nabla^2\Psi - \frac{2}{\varpi}\frac{\partial\Psi}{\partial\varpi}\right]. \tag{2.87}$$

Перейдем теперь к определению электрического поля. Естественно, в общем случае оно имеет три независимые компоненты. Однако

— уравнение Максвелла $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ в осесимметричном случае приводит к условию $E_\varphi = 0$;

— предположение о полном экранировании дает $E_\parallel = 0$.

В итоге электрическое поле удобно записать в виде

$$\mathbf{E} = -\frac{\Omega_\mathrm{F}}{2\pi c}\nabla\Psi, \tag{2.88}$$

т. е. выразить его через одну скалярную функцию $\Omega_\mathrm{F}(r,\theta)$.

Такое определение приводит к следующим важным свойствам.

1. Условие $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B} = 0$ выполняется автоматически.

2. Из уравнения Максвелла $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ следует, что $\nabla\Omega_\mathrm{F} \times \nabla\Psi = 0$. В осесимметричном случае, когда все величины зависят лишь от двух переменных, это означает, что

$$\Omega_\mathrm{F} = \Omega_\mathrm{F}(\Psi), \tag{2.89}$$

т. е. поверхности $\Omega_\mathrm{F}(r,\theta) = \mathrm{const}$ должны совпадать с магнитными поверхностями $\Psi(r,\theta) = \mathrm{const}$.

3. Дрейфовая скорость $\mathbf{U}_\mathrm{dr} = c[\mathbf{E}\times\mathbf{B}]/B^2$, как уже говорилось, запишется теперь в виде

$$\mathbf{U}_\mathrm{dr} = \boldsymbol{\Omega}_\mathrm{F} \times \mathbf{r} + j_\parallel\mathbf{B}, \tag{2.90}$$

где $j_\parallel$ — снова некоторая скалярная функция. Мы видим, что введенная нами функция Ω_F имеет смысл угловой скорости вращения частиц, движущихся в магнитосфере, полностью заполненной плазмой. Условие (2.89) представляет собой известный закон изоротации Ферраро [Ferraro, 1937; Альвен, Фельтхаммар, 1967], согласно которому угловая скорость вращения частиц на осесимметричных магнитных поверхностях должна быть постоянной.

Используя определения (2.84) и (2.85) для $\mathbf{B}$ и $\mathbf{j}_\mathrm{p}$, можно записать тороидальную компоненту уравнения (2.83) в виде $[\nabla I \times \mathbf{e}_\varphi] \times [\nabla\Psi \times \mathbf{e}_\varphi] = \nabla I \times \nabla\Psi = 0$. Следовательно, полный ток внутри магнитной поверхности также является интегралом движения:

$$I = I(\Psi). \tag{2.91}$$

Упражнение. Покажите, что в бессиловом случае потоки энергии и углового момента по-прежнему определяются как

$$W = \frac{1}{c}\int E(\Psi)\,\mathrm{d}\Psi; \quad K = \frac{1}{c}\int L(\Psi)\,\mathrm{d}\Psi, \tag{2.92}$$

где теперь

$$E(\Psi) = \frac{\Omega_{\rm F} I}{2\pi}; \tag{2.93}$$

$$L(\Psi) = \frac{I}{2\pi}. \tag{2.94}$$

2.4.3. Уравнение Грэда–Шафранова. Теперь мы готовы сформулировать уравнение Грэда–Шафранова, описывающее полоидальную структуру магнитного поля Как и в гидродинамическом ~~случае, запишем полоидальную компоненту уравнения (2.82):~~

$$\frac{j_\varphi}{c}\nabla\Psi + \frac{B_\varphi}{c}\nabla I - \frac{\nabla\cdot\mathbf{E}}{4\pi}\frac{\Omega_{\rm F}}{2\pi\varpi}\nabla\Psi = 0. \tag{2.95}$$

Это векторное уравнение, благодаря условию $\nabla I = ({\rm d}I/{\rm d}\Psi)\nabla\Psi$, следующему из (2.91), вновь может быть сведено к скалярному уравнению, умноженному на $\nabla\Psi$. В цилиндрических координатах оно имеет вид

$$-\left(1 - \frac{\Omega_{\rm F}^2\varpi^2}{c^2}\right)\nabla^2\Psi + \frac{2}{\varpi}\frac{\partial\Psi}{\partial\varpi} - \frac{16\pi^2}{c^2}I\frac{{\rm d}I}{{\rm d}\Psi} + \frac{\varpi^2}{c^2}(\nabla\Psi)^2\,\Omega_{\rm F}\frac{{\rm d}\Omega_{\rm F}}{{\rm d}\Psi} = 0, \tag{2.96}$$

где ∇^2 — оператор Лапласа. Это и есть пульсарное уравнение, полученное в семидесятых годах в десятках работ (см., например, [Mestel, 1973; Scharlemann, Wagoner, 1973; Michel, 1973a; Mestel, Wang, 1979]; окончательная же версия, содержащая последнее слагаемое, была получена И. Окамото [Okamoto, 1974]).

Пульсарное уравнение обладает следующими свойствами.

1. Как и любое уравнение Грэда–Шафранова, оно содержит только потенциал $\Psi(\varpi, z)$ и инварианты $\Omega_{\rm F}(\Psi)$ и $I(\Psi)$.

2. Бессиловое уравнение (2.96) не содержит никаких дополнительных параметров, связанных со свойствами плазмы; поэтому его не нужно дополнять уравнением Бернулли.

3. Уравнение (2.96) остается эллиптическим во всем пространстве, в котором оно определено (последнее замечание, как мы увидим, чрезвычайно существенно). Действительно, бессиловое уравнение (2.82) имеет смысл лишь при выполнении условия $|\mathbf{E}| < |\mathbf{B}|$, тогда как уравнение (2.96) формально может быть продолжено и в негидродинамическую область $|\mathbf{E}| > |\mathbf{B}|$.

4. Дифференциальный оператор

$$\hat{\mathcal{L}}_{\rm psr} = -\left(1 - \frac{\Omega_{\rm F}^2\varpi^2}{c^2}\right)\nabla^2\Psi + \frac{2}{\varpi}\frac{\partial\Psi}{\partial\varpi} \tag{2.97}$$

линеен по производным Ψ, при $\Omega_{\rm F} = {\rm const}$ вся нелинейность содержится лишь в двух последних слагаемых, связанных с интегралами движения.

5. Дифференциальный оператор (2.97) не содержит явно координаты z.

6. На малых по сравнению с радиусом светового цилиндра расстояниях ($\varpi \ll R_{\rm L}$) дифференциальный оператор, $\mathcal{L}_{\rm psr}$ совпадает с оператором $\hat{\mathcal{L}}$, задаваемым формулой (1.114).

7. Пульсарное уравнение содержит одну особую поверхность — световой цилиндр $\varpi_{\rm L} = c/\Omega_{\rm F}$.

8. По общей формуле, $b = 2 + i - s'$, для количества граничных условий имеем $b = 3$, т. е. задача требует трех граничных условий. В качестве них обычно выбирают величины двух интегралов движения $\Omega_{\rm F} = \Omega_{\rm F}(\Psi)$ и $I = I(\Psi)$, а также нормальную компоненту магнитного поля на поверхности нейтронной звезды ($r = R$) или, что то же самое, значение потенциала $\Psi = \Psi(R, \theta)$. Так, например, для дипольного магнитного поля имеем

$$\Psi(R, \theta) \approx |\mathbf{m}| \frac{\sin^2\theta}{R}, \tag{2.98}$$

где $\mathbf{m}$ — магнитный момент нейтронной звезды.

9. При известной структуре течения (т. е. для заданных $\Psi(\varpi, z)$, $\Omega_{\rm F}(\Psi)$ и $I(\Psi)$) электрическое поле и тороидальная компонента магнитного поля определяются из алгебраических соотношений.

Чрезвычайно важен тот факт, что уравнение (2.96) содержит две ключевые величины — продольный ток I и угловую скорость вращения $\Omega_{\rm F}$, причем последняя напрямую связана с величиной падения напряжения во внутреннем зазоре. Действительно, в общем случае электрическое и магнитное поля должны быть связаны соотношением (см. п. 2.4.4)

$$\mathbf{E} + \frac{\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}}{c} \times \mathbf{B} = -\nabla\psi, \tag{2.99}$$

где ψ — электрический потенциал во вращающейся системе координат. В частности, поскольку для идеально проводящей звезды $\mathbf{E}_{\rm in} + (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}/c) \times \mathbf{B}_{\rm in} = 0$, получаем $\psi_{\rm in} = 0$. С другой стороны, для случая нулевого продольного электрического поля ($E_{\parallel} = 0$) имеем $\mathbf{B} \cdot \nabla\psi = 0$. Таким образом, в области, где выполнено условие $E_{\parallel} = 0$, потенциал ψ должен быть постоянен на магнитных поверхностях

$$\psi = \psi(\Psi). \tag{2.100}$$

Следовательно, в области замкнутых силовых линий (т. е. силовых линий, не выходящих за пределы светового цилиндра) имеем просто $\Psi = 0$. В области же открытых силовых линий, которые отделены от нейтронной звезды областью продольного электрического поля, потенциал ψ оказывается отличен от нуля (см. рис. 2.9). При этом его значение совпадает с падением электрического потенциала в области рождения частиц. Появление ненулевого потенциала ψ в области открытых силовых линий и приводит к дополнительному вращению плазмы вокруг магнитной оси, проявляющемуся как дрейф субимпульсов (см. рис. 2.6).

Действительно, воспользовавшись определением электрического поля (2.88), в осесимметричном случае получаем следующее выражение для угловой скорости Ω_{F}:

$$\Omega_{\mathrm{F}} = \Omega + 2\pi c \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\Psi}. \tag{2.101}$$

Легко проверить, что производная $\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}\Psi$ всегда отрицательна, так что угловая скорость плазмы Ω_{F} всегда меньше угловой скорости вращения нейтронной звезды Ω. При этом сама величина $\psi(P, B_0)$ определяется конкретным механизмом рождения частиц. В дальнейшем нам будет удобно ввести безразмерный ускоряющий потенциал

$$\beta_0 = \frac{\psi(P, B_0)}{\psi_{\max}}. \tag{2.102}$$

Входящая в (2.102) величина $\psi_{\max}$ есть максимальное падение потенциала в области ускорения (см. (2.36)). В результате угловая скорость Ω_{F} над областью ускорения, где вторичная плазма экранирует продольное электрическое поле (и следовательно, уже можно использовать метод уравнения Грэда–Шафранова), определяется просто как $\Omega_{\mathrm{F}} = (1 - \beta_0)\Omega$. Что же касается продольных токов, то их удобно нормировать на гольдрайховскую плотность тока $j_{\mathrm{GJ}} = c\rho_{\mathrm{GJ}}$. Тогда можно записать

$$I(\Psi_{tot}) = i_0 I_{\mathrm{GJ}}, \tag{2.103}$$

где

$$I_{\mathrm{GJ}} = \frac{B_0 \Omega^2 R^3}{2c} \tag{2.104}$$

есть характерный полный ток через поверхность полярной шапки.

В заключение необходимо сказать несколько слов о нерелятивистской версии бессилового уравнения (2.96). Как уже говорилось, оно сводится к равенству нулю силы Ампера, $[\nabla \times \mathbf{B}] \times \mathbf{B}$, что эквивалентно пренебрежению вкладом электрического поля. В результате уравнение Грэда–Шафранова приобретает вид

$$-\nabla^2\Psi + \frac{2}{\varpi}\frac{\partial\Psi}{\partial\varpi} - \frac{16\pi^2}{c^2} I \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Psi} = 0. \tag{2.105}$$

Основное отличие уравнения (2.105) от релятивистской версии состоит в том, что оно не содержит интеграла движения Ω_{F}. Следовательно,

— нерелятивистская версия уравнения Грэда–Шафранова не содержит ни одной особой поверхности;

— по общей формуле, $b = 2 + i - s'$, для количества граничных условий находим $b = 3$, т. е. задача требует трех граничных условий.

Ниже мы напомним одно хорошо известное решение уравнения (2.105).

Цилиндрический разряд. Нерелятивистское уравнение Грэда–Шафранова может быть существенно упрощено, если рассматривается одномерная цилиндрическая конфигурация, причем ток $I(\Psi)$ является линейной функцией магнитного потока Ψ. Эту связь удобно записать в виде

$$I(\Psi) = \frac{c}{4\pi\varpi_0}\Psi, \tag{2.106}$$

где ϖ_0 — постоянная размерности длины. В данном случае уравнение (2.105) становится линейным:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_r^2} - \frac{1}{x_r}\frac{\partial\Psi}{\partial x_r} + \Psi = 0, \tag{2.107}$$

где $x_r = \varpi/\varpi_0$. Решением же уравнения (2.107) являются хорошо известные поля:

$$B_z = B_0 J_0(x_r); \tag{2.108}$$

$$B_\varphi = B_0 J_1(x_r), \tag{2.109}$$

где $J_1(x_r)$ и $J_1(x_r)$ — функции Бесселя. Как мы видим, в устойчивом цилиндрическом разряде на некотором расстоянии от оси продольное магнитное поле должно поменять свое направление, что и наблюдается экспериментально (см., например, [Кадомцев, 1988]).

2.4.4. Математическое интермеццо — квазистационарный формализм. Напомним некоторые соотношения, относящиеся к квазистационарному обобщению сформулированных выше уравнений, описывающих магнитосферу наклонного ротатора. Предположение о квазистационарности означает, что мы рассматриваем электромагнитные поля, которые зависят от времени t и угловой координаты φ лишь в комбинации $\varphi - \Omega t$. Подчеркнем, что это условие шире, чем условие независимости всех величин от времени во вращающейся с угловой скоростью Ω системе отсчета, поскольку его можно распространить и за пределы светового цилиндра, где вращение с угловой скоростью Ω становится невозможным. В частности, условию квазистационарности удовлетворяет сферическая волна, излучаемая вращающейся нейтронной звездой в вакууме (см. (2.14) и (2.15)).

Если зависимость от времени входит во все уравнения лишь в комбинации $\varphi - \Omega t$, то все производные по времени могут быть заменены на производные по координатам с помощью соотношений [Mestel, 1973]

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{Q} = -\Omega\frac{\partial}{\partial\varphi}\mathcal{Q}, \tag{2.110}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{V} = -(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}, \nabla)\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{V} \tag{2.111}$$

для произвольных скалярных ($\mathcal{Q}(\varpi,\ \varphi - \Omega t, z)$) и векторных ($\mathbf{V}(\varpi,\ \varphi - \Omega t, z)$) полей. Воспользовавшись известным векторным соотношением:

$$\nabla\times[\mathbf{U}\times\mathbf{V}] = -(\mathbf{U}\nabla)\mathbf{V} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{U} + (\nabla\cdot\mathbf{V})\mathbf{U} - (\nabla\cdot\mathbf{U})\mathbf{V}, \tag{2.112}$$

перепишем условие (2.111) в виде

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{V} = \nabla\times[\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{R}}\times\mathbf{V}] - (\nabla\cdot\mathbf{V})\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{R}}. \tag{2.113}$$

Здесь и далее по определению

$$\boldsymbol{\beta}_{\rm R} = \frac{\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}}{c}, \tag{2.114}$$

причем, как легко проверить, $\nabla \cdot \boldsymbol{\beta}_{\rm R} = 0$.

Упражнение. Проверьте соотношения (2.110)–(2.113).

Используя соотношения (2.110)–(2.113), можно переписать уравнения Максвелла в виде

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho_{\rm e}; \tag{2.115}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times [\boldsymbol{\beta}_{\rm R} \times \mathbf{B}]; \tag{2.116}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \tag{2.117}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times [\boldsymbol{\beta}_{\rm R} \times \mathbf{E}] + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} - 4\pi\rho_{\rm e}\boldsymbol{\beta}_{\rm R}. \tag{2.118}$$

Уравнение (2.116) и приводит к соотношению (2.99):

$$\mathbf{E} + [\boldsymbol{\beta}_{\rm R} \times \mathbf{B}] = -\nabla\psi, \tag{2.119}$$

где $\psi = \Phi_e - (\boldsymbol{\beta}_{\rm R} \cdot \mathbf{A})$, а Φ_e и $\mathbf{A}$ — скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля соответственно.

Если же комбинация $(4\pi/c)\mathbf{j} - 4\pi\rho_{\rm e}\boldsymbol{\beta}_{\rm R}$ в (2.118) также равна нулю (например, в случае вакуумного приближения), то и это уравнение может быть разрешено как

$$\mathbf{B} - [\boldsymbol{\beta}_{\rm R} \times \mathbf{E}] = -\nabla h, \tag{2.120}$$

где $h(\varpi, \varphi - \Omega t, z)$ — произвольная скалярная функция. Тогда электрические и магнитные поля будут выражаться через потенциалы ψ и h как

$$\mathbf{E}_{\rm p} = \frac{1}{1 - \beta_{\rm R}^2}\left(-\nabla\psi + \boldsymbol{\beta}_{\rm R} \times \nabla h\right); \tag{2.121}$$

$$E_\varphi = -\frac{1}{\varpi}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}; \tag{2.122}$$

$$\mathbf{B}_{\rm p} = \frac{1}{1 - \beta_{\rm R}^2}\left(-\nabla h - \boldsymbol{\beta}_{\rm R} \times \nabla\psi\right); \tag{2.123}$$

$$B_\varphi = -\frac{1}{\varpi}\frac{\partial h}{\partial\varphi}. \tag{2.124}$$

Подставляя выражения (2.121)–(2.124) в уравнения $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ и $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, справедливые для вакуумного приближения, получаем следующую систему уравнений [Бескин, Гуревич, Истомин, 1983]:

$$\hat{\mathcal{L}}_2\psi - \frac{2}{1 - x_r^2}\frac{\partial h}{\partial z'} = 0; \tag{2.125}$$

$$\hat{\mathcal{L}}_2 h + \frac{2}{1 - x_r^2}\frac{\partial\psi}{\partial z'} = 0, \tag{2.126}$$

где $x_r = \Omega\varpi/c$, $z' = \Omega z/c$, а оператор $\hat{\mathcal{L}}_2$ есть

$$\hat{\mathcal{L}}_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_r^2} + \frac{1}{x_r}\frac{1+x_r^2}{1-x_r^2}\frac{\partial}{\partial x_r} + \frac{1-x_r^2}{x_r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2}. \qquad (2.127)$$

В дальнейшем для простоты записи мы будем опускать штрих у координаты z.

Упражнение. Проверьте, что решения системы (2.125), (2.126) для ортогонального ротатора (т. е. при $\sin\chi = 1$):

$$h = |\mathbf{m}|\sin\theta \cdot \mathrm{Re}\left(\frac{1}{r^2} - i\frac{\Omega}{c}\frac{1}{r} - \frac{\Omega^2}{c^2}\right)\exp\left(i\frac{\Omega r}{c} + i\varphi - i\Omega t\right); \qquad (2.128)$$

$$\psi = |\mathbf{m}|\sin\theta\cos\theta \cdot \mathrm{Re}\left(\frac{\Omega}{c}\frac{1}{r} - i\frac{\Omega^2}{c^2}\right)\exp\left(i\frac{\Omega r}{c} + i\varphi - i\Omega t\right), \qquad (2.129)$$

в точности соответствуют электромагнитным полям (2.14), (2.15) для вращающегося магнитного диполя.

В рамках квазистационарного приближения можно записать и общее уравнение для величины магнитного поля. Действительно, условие (2.91) постоянства полного тока I на магнитных поверхностях можно рассматривать как следствие уравнения (2.90) для дрейфовой скорости $\mathbf{U}_{\mathrm{dr}}$. Поэтому электрический ток также может быть представлен в виде разложения: $\mathbf{j} = \rho_{\mathrm{e}}\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r} + i_{\parallel}\mathbf{B}$. Подставляя это условие в общее уравнение (2.118), легко убедиться в том, что $\nabla\cdot(i_{\parallel}\mathbf{B}) = 0$, и следовательно, функция $i_{\parallel}$ также должна быть постоянна вдоль магнитных силовых линий: $\mathbf{B}\cdot\nabla i_{\parallel} = 0$. В частности, если продольный ток равен нулю у поверхности нейтронной звезды, то он должен быть равен нулю и во всей магнитосфере. В результате уравнение (2.118) с учетом соотношения (2.99) может быть переписано в виде [Бескин, Гуревич, Истомин, 1983]

$$\begin{gathered}\nabla\times\{(1-\beta_{\mathrm{R}}^2)\mathbf{B} + \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{R}}\cdot\mathbf{B}) + [\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{R}}\times\nabla\psi]\} = \\ = \frac{4\pi}{1-\beta_{\mathrm{R}}^2 - \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{R}}[\nabla\psi\times\mathbf{B}]/B^2}\left[\frac{i_{\parallel}}{c}\left((1-\beta_{\mathrm{R}}^2)\mathbf{B} + [\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{R}}\times\nabla\psi]\right) + \right. \\ \left. + \frac{[\nabla\psi\times\mathbf{B}]}{B^2}\left(\frac{\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{B}}{2\pi c} + \frac{1}{4\pi}(\nabla^2\psi - (\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{R}}\nabla)(\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{R}}\nabla\psi))\right)\right]. \qquad (2.130)\end{gathered}$$

Вместе с уравнением $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$ (при заданных скалярных функциях $i_{\parallel}$ и ψ) оно и определяет структуру квазистационарного магнитного поля.

Квазистационарное приближение является естественным обобщением рассматриваемых здесь осесимметричных стационарных конфигураций. Вместе с тем возможность его использования оказывается очень ограниченной. Дело в том, что в квазистационарном случае невозможно ввести аналог потенциала Ψ, описывающего магнитные поверхности. В результате не удается свести уравнения Максвелла к одному скалярному уравнению для функции потока, формализовав при этом условие постоянства потенциала ψ и тока $i_{\|}$ вдоль данной магнитной силовой линии. Поэтому уравнение (2.130) практически не анализировалось и его решения были найдены лишь в исключительных случаях [Бескин, Гуревич, Истомин, 1983; Mestel, Panagi, Shibata, 1999], когда оно фактически сводилось к системе уравнений (2.125), (2.126) для скалярных функций ψ и h.

2.5. Энергетические потери пульсаров

2.5.1. Механизм токовых потерь. Прежде чем переходить к обсуждению точных решений пульсарного уравнения, рассмотрим вопрос об энергетических потерях вращающейся нейтронной звезды. Как уже говорилось, в вакуумном приближении единственным механизмом, приводящим к замедлению вращения пульсаров, является магнитодипольное излучение. Однако в случае магнитосферы, заполненной плазмой, появляется еще один механизм торможения, связанный с электрическими токами, текущими в магнитосфере.

Действительно, полный ток, истекающий с поверхности пульсара, должен быть равен нулю. С другой стороны, как специально подчеркивалось выше, с обоих магнитных полюсов должен истекать заряд одного знака (плотность заряда $\rho_{\rm GJ}$ вблизи магнитных полюсов одинакова). Поэтому вдоль сепаратрисы, разделяющей открытые и замкнутые силовые линии, неизбежно должен течь обратный ток, компенсирующий потерю заряда нейтронной звезды. В результате по поверхности пульсара будут течь токи $\mathbf{J}_{\rm S}$, замыкающие продольные токи, текущие в магнитосфере (рис. 2.11). Пондеромоторное действие этих токов и должно приводить к замедлению вращения радиопульсаров [Beskin, Gurevich, Istomin, 1993]. Важно, что такой механизм торможения будет иметь место и для соосного ротатора, когда магнитодипольные потери заведомо равны нулю. Фактически этот механизм сформулирован еще в пионерской работе Гольдрайха и Джулиана [Goldreich, Julian, 1969], которая как раз посвящена структуре осесимметричной магнитосферы.

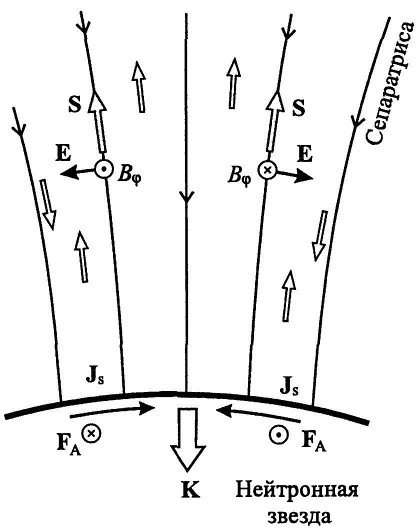


Рис. 2.11. Структура электрических токов (контурные стрелки) в районе магнитных полюсов нейтронной звезды ($\mathbf{S}$ — вектор Пойнтинга)

Прежде всего отметим, что если потери энергии радиопульсаров действительно вызваны потерей вращательной кинетической энергии нейтронной звезды, то полные потери энергии ($W_{\text{tot}} = J_r \Omega \dot{\Omega}$) и углового момента импульса ($K_{\text{tot}} = J_r \dot{\Omega}$) должны быть связаны соотношением

$$W_{\text{tot}} = \Omega K_{\text{tot}}. \tag{2.131}$$

Аналогичному условию должны удовлетворять энергия и угловой момент для уходящего излучения.

Чтобы показать, что соотношение (2.131) действительно будет выполнено и для токовых потерь, запишем скорость потерь энергии как

$$W_{\text{tot}} = -\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{K}, \tag{2.132}$$

где

$$\mathbf{K} = \frac{1}{c} \int [\mathbf{r} \times [\mathbf{J}_{\text{s}} \times \mathbf{B}]] \, \mathrm{d}S \tag{2.133}$$

есть тормозящий момент, связанный с силой Ампера токов, текущих по поверхности. Для простоты мы рассмотрим здесь лишь осесимметричный случай. Общие соотношения будут сформулированы в следующем пункте.

Как легко показать, при угле наклона осей $\chi = 0$ тормозящий момент будет направлен точно антипараллельно угловой скорости нейтронной звезды. При этом поверхностный ток $\mathbf{J}_{\text{s}}$ должен удовлетворять уравнению непрерывности:

$$\nabla_2 \mathbf{J}_{\text{s}} = j_n, \tag{2.134}$$

где ∇_2 — двумерный оператор дифференцирования, а j_n — нормальная компонента продольного тока, текущего в магнитосфере. В результате уравнение (2.134) может быть переписано в виде

$$\frac{1}{R \sin\theta} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} (\sin\theta J_\theta) = \frac{[\nabla I \times \mathbf{e}_\varphi]_n}{2\pi R \sin\theta}, \tag{2.135}$$

откуда

$$\mathbf{J}_{\text{s}} = \frac{I}{2\pi R \sin\theta} \mathbf{e}_\theta. \tag{2.136}$$

Используя формулы (2.132) и (2.133), можно записать полные потери энергии следующим образом:

$$W_{\text{tot}} = \frac{\Omega}{2\pi c} \int I(\Psi) \, \mathrm{d}\Psi. \tag{2.137}$$

С другой стороны, полные потери углового момента K_{tot} (см. (2.133)) перепишутся теперь как

$$K_{\text{tot}} = \frac{1}{2\pi c} \int I(\Psi) \, \mathrm{d}\Psi. \tag{2.138}$$

Как и следовало ожидать, соотношение (2.131) оказывается тождественно выполнено и для токовых потерь.

Вместе с тем необходимо подчеркнуть следующее важное обстоятельство. Нетрудно увидеть, что выражение (2.137) может быть разложено на сумму двух слагаемых:

$$W_{\text{tot}} = W_{\text{em}} + W_{\text{par}}. \tag{2.139}$$

Первое из них,

$$W_{\text{em}} = \frac{1}{2\pi c}\int \Omega_{\text{F}}(\Psi) I(\Psi)\, \mathrm{d}\Psi, \tag{2.140}$$

согласно определениям (2.84) и (2.88) есть в точности поток вектора Пойнтинга:

$$W_{\text{em}} = \frac{c}{4\pi}\int [\mathbf{E}\times\mathbf{B}]\, \mathrm{d}\mathbf{S}. \tag{2.141}$$

Поэтому величина W_{em} соответствует потоку электромагнитной энергии, уходящей от нейтронной звезды. Очевидно, что токовые потери энергии отличны от нуля лишь в присутствии продольного электрического тока, создающего тороидальное магнитное поле. Подчеркнем, что эта энергия переносится на нулевой частоте; поэтому уносящее ее электромагнитное поле не является электромагнитной волной в обычном понимании этого слова.

С другой стороны, второе слагаемое,

$$W_{\text{par}} = \frac{1}{2\pi c}\int I(\Psi)[\Omega - \Omega_{\text{F}}(\Psi)]\mathrm{d}\Psi, \tag{2.142}$$

с помощью соотношения (2.101) переписывается в виде

$$W_{\text{par}} = -\int \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\Psi} I(\Psi)\, \mathrm{d}\Psi = -\int I(\Psi)\, \mathrm{d}\psi = \int \psi\, \mathrm{d}I = -\int \psi \mathbf{j}_{\text{e}}\, \mathrm{d}\mathbf{S}. \tag{2.143}$$

Здесь при интегрировании по частям использовалось условие равенства нулю потенциала ψ на границе полярной шапки. Как мы видим, потери W_{par} соответствуют энергии, приобретаемой первичными частицами в области ускорения.

УПРАЖНЕНИЕ. Покажите, что соотношение (2.139) имеет место при любом угле наклона оси магнитного диполя к оси вращения, в частности при любой форме полярной шапки.

(Пояснение: легко проверить, что поскольку источником как поверхностного тока $\mathbf{J}_{\text{s}}$, так и дополнительного магнитного поля $\mathbf{B}_{\text{T}}$ является продольный ток $i_{\parallel}\mathbf{B}$, текущий в области открытых силовых линий ($\nabla\cdot\mathbf{J}_{\text{s}} = i_{\parallel}B_n$; $\nabla\times\mathbf{B}_{\text{T}} = (4\pi/c)i_{\parallel}\mathbf{B}$), они связаны простым соотношением:

$$\mathbf{J}_{\text{s}} = -\frac{c}{4\pi}[\mathbf{B}_{\text{T}}\times\mathbf{n}]. \tag{2.144}$$

В результате формулы (2.132) и (2.133), справедливые при любом угле наклона осей χ, могут быть тождественно переписаны в виде

$$W_{\text{tot}} = \frac{c}{4\pi}\int (\boldsymbol{\beta}_{\text{R}}\cdot\mathbf{B})(\mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}). \tag{2.145}$$

Далее нужно воспользоваться соотношением (2.99), приводящим к тождеству $[\mathbf{E}\times\mathbf{B}]\,\mathrm{d}\mathbf{S} = (\boldsymbol{\beta}_{\text{R}}\cdot\mathbf{B})(\mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}) + [\nabla\psi\times\mathbf{B}]\,\mathrm{d}\mathbf{S}$, и тем, что для любой формы полярной шапки на ее границе $\psi = 0$.)

В итоге уже из анализа осесимметричного случая можно сделать ряд важных выводов.

1. Условие соответствия $W_{\text{tot}} = \Omega K_{\text{tot}}$ (см. (2.131)) не может быть получено в рамках бессилового приближения, поскольку в этом приближении отсутствует дополнительное слагаемое W_{par} (см. (2.142)), соответствующее энергии частиц, ускоряемых в области внутреннего зазора. Попытка решить вопрос о потерях в рамках бессилового приближения неизбежно приводит к недоразумениям [Holloway, 1977; Shibata, 1994].

2. При выполнении условия $\psi \ll \psi_{\max}$ основную роль в общем балансе токовых потерь играет поток W_{em} электромагнитной энергии на нулевой частоте (см. (2.140)). С другой стороны, для пульсаров, находящихся на диаграмме P–$\dot{P}$ в районе линии погасания (для них выполняется условие $\psi \sim \psi_{\max}$), потери W_{par} соответствуют не энергии частиц, текущих вдоль открытых силовых линий, а лишь энергии, приобретаемой первичными частицами в области ускорения. Как было показано, значительная часть этой энергии уходит на генерацию не частиц, а малоэнергичных гамма-квантов, способных свободно покинуть магнитосферу нейтронной звезды. Кстати, именно поэтому интенсивность гамма-излучения у радиопульсаров, находящихся в районе «линии погасания», достигает нескольких процентов от полных потерь — $J_r\Omega\dot{\Omega}$. В результате у таких пульсаров эффективность переработки энергии вращения в высокочастотной части спектра значительно больше, чем в радиодиапазоне. Следовательно, по крайней мере до светового цилиндра поток энергии частиц оказывается заметно меньше потока W_{em}, переносимого электромагнитным полем. Этот факт как раз и отвечает условию $\sigma \gg 1$ (см. (2.77)), справедливому для всех радиопульсаров.

3. Для обсуждаемого здесь токового механизма торможения изменение углового момента K_{tot} будет полностью обусловлено электродинамическими потерями (2.138). Действительно, угловой момент $\mathcal{L}_{\text{ph}}$ фотонов, излучаемых вблизи поверхности звезды, много меньше $\mathcal{E}_{\text{ph}}/\Omega$. Поэтому гамма-кванты, излученные вблизи поверхности нейтронной звезды, не могут играть заметной роли в общем балансе потерь углового момента.

2.5.2. Торможение наклонного и ортогонального ротатора. Обсудим вопрос об энергетических потерях нейтронных звезд более подробно, не ограничивая себя случаем соосного ротатора. Необходимость подобного рассмотрения ясна уже из неопределенности в выражении для энергетических потерь радиопульсаров, находящихся на стадии ортогонального ротатора. Дело в том, что элементарное рассмотрение, основанное на анализе лишь величины продольного тока, приводит к появлению понижающего фактора $(\Omega R/c)^{1/2}$ (по сравнению с токовыми потерями соосного ротатора) [Mestel, Panagi, Shibata, 1999]. Действительно, оценим потери энергии с помощью потока вектора Пойнтинга через поверхность светового цилиндра

($R_{\rm L} = c/\Omega$):

$$W_{\rm tot} = \frac{c}{4\pi}\int[\mathbf{E}\times\mathbf{B}]d\mathbf{S} \sim cE(R_{\rm L})B_{\varphi}(R_{\rm L})R_{\rm L}^2. \tag{2.146}$$

При этом электрическое поле вблизи светового цилиндра, $E(R_{\rm L})$, определяется лишь величиной $B_{\rm p}$ полоидального магнитного поля:

$$E(R_{\rm L}) \approx \frac{\Omega R_{\rm L}}{c}B_{\rm p} \approx B_{\rm p}, \tag{2.147}$$

причем благодаря зависимости $B \propto r^{-3}$ для дипольного магнитного поля в пределах светового цилиндра имеем $B_{\rm p}(R_{\rm L}) \approx (\Omega R/c)^3 B_0$, где B_0 — магнитное поле на поверхности нейтронной звезды. Тороидальное же магнитное поле B_{φ} будет связано с продольным током, текущим в магнитосфере. Поэтому для случая ортогонального ротатора, когда плотность заряда в пределах полярной шапки, $R_0 \sim (\Omega R/c)^{1/2}R$, в среднем оказывается в $(\Omega R/c)^{1/2}$ раз меньше, чем для соосного ротатора, тороидальное магнитное поле на световом цилиндре можно оценить как

$$B_{\varphi}(R_{\rm L}) \approx \left(\frac{\Omega R}{c}\right)^{1/2} B_{\rm p}(R_{\rm L}), \tag{2.148}$$

что и приводит к дополнительному фактору $(\Omega R/c)^{1/2}$ в выражении для мощности потерь. Более подробный анализ показывает, что в действительности понижающий фактор должен иметь вид $\Omega R/c$, так что полные потери для ортогонального ротатора следует записывать как [Beskin, Gurevich, Istomin, 1993; Бескин, Нохрина, 2004]

$$W_{\rm tot}^{\rm op} \approx \frac{B_0^2\Omega^4R^6}{c^3}\left(\frac{\Omega R}{c}\right). \tag{2.149}$$

Для доказательства последнего нам потребуется привести наиболее общее выражение для поверхностного тока $\mathbf{J}_s$ в присутствии сильного магнитного поля. Его можно разделить на две компоненты, параллельную и перпендикулярную поверхностному электрическому полю $\mathbf{E}_{\rm s}$, т. е. записать ток $\mathbf{J}_s$ в виде $\mathbf{J}_s = \mathbf{J}_s^{(1)} + \mathbf{J}_s^{(2)}$. Здесь

$$\mathbf{J}_s^{(1)} = \Sigma_{||}\mathbf{E}_s; \tag{2.150}$$

$$\mathbf{J}_s^{(2)} = \Sigma_{\perp}\left[\frac{\mathbf{B}_{\rm n}}{B_{\rm n}}\times\mathbf{E}_s\right], \tag{2.151}$$

где $\Sigma_{||}$ — педерсеновская, а $\Sigma_{\perp}$ — холловская проводимость. Предположим теперь, что проводимость поверхности пульсара однородна, а поле $\mathbf{E}_s$ имеет потенциал ξ'. Тогда соотношения (2.150) и (2.151) будут выглядеть как

$$\mathbf{J}_s^{(1)} = \nabla\xi'; \tag{2.152}$$

$$\mathbf{J}_s^{(2)} = \frac{\Sigma_{\perp}}{\Sigma_{||}}\left[\frac{\mathbf{B}_{\rm n}}{B_{\rm n}}\times\nabla\xi'\right]. \tag{2.153}$$

Сразу отметим, что поскольку структура магнитного поля вблизи поверхности пульсара симметрична относительно плоскости, проходящей через векторы угловой скорости и магнитного момента нейтронной звезды, той же симметрией должен обладать и поверхностный ток. В итоге токи, пропорциональные $\Sigma_{\perp}$, не будут вносить вклад в потери энергии нейтронной звезды.

В результате уравнение (2.134) примет вид

$$\nabla_2^2 \xi' = -i_{\parallel} B_0. \tag{2.154}$$

Проводя в нем замену $x = \sin\theta_m$ и вводя безразмерные потенциал $\xi = 4\pi\xi'/B_0 R^2 \Omega$ и ток $i_0 = -4\pi i_{\parallel}/\Omega R^2$, окончательно получаем

$$\left(1 - x^2\right) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{1 - 2x^2}{x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi_m^2} = i_0(x, \varphi_m), \tag{2.155}$$

где θ_m и φ_m — сферические координаты относительно магнитной оси. Естественно, решение уравнения (2.155) существенно зависит от граничных условий. Как будет показано ниже, таким граничным условием должно быть предположение о том, что вне полярной шапки отсутствуют поверхностные токи, связанные с объемным продольным током, текущим в магнитосфере. В этом случае граничное условие может быть записано в виде

$$\xi\left[x_0(\varphi_m), \varphi_m\right] = \mathrm{const}, \tag{2.156}$$

где функция $x_0(\varphi_m)$ задает форму полярной шапки.

Подчеркнем, что именно в данном пункте и содержится основная неопределенность. Действительно, отсутствие продольного тока в области замкнутых силовых линий ($x > x_0$), т. е. выполнение условия $i_0(x > x_0, \varphi_m) = 0$, еще не означает, что градиент потенциала ξ (а значит, и поверхностный ток $\mathbf{J}_\mathrm{s}$) здесь также равен нулю. В случае наклонного ротатора замыкание продольного тока может осуществляться и за пределами полярной шапки, где уравнение на потенциал ξ имеет вид $\nabla^2 \xi = 0$. Как хорошо известно, решением этого уравнения является набор мультипольных течений: $\xi_n = A_n \cos^n \varphi_m / x^n$, амплитуда A_n которых совершенно произвольна. Соответствующий скачок производной потенциала ξ на границе полярной шапки фиксирует величину поверхностного тока, текущего вдоль сепаратрисы, разделяющей области замкнутых и разомкнутых силовых линий (рис. 2.12). Иными словами, помимо объемного тока, текущего вдоль открытых силовых линий, в магнитосфере должны течь дополнительные поверхностные токи, величина которых на первый взгляд может быть никак не связана с величиной объемного тока.

Вместе с тем легко доказать, что замыкающие поверхностные токи не могут выходить за пределы полярной шапки. Если бы это имело место, то продольные токи существовали бы и в области замкнутой магнитосферы вне пределов полярной шапки (рис. 2.13). Действительно, как показывают соотношения (2.150) и (2.151), существование

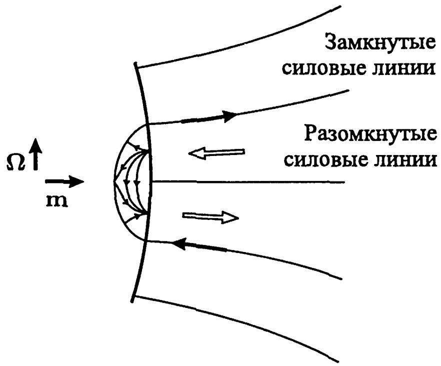


Рис. 2.12. Структура электрических токов вблизи магнитных полюсов ортогонального ротатора. Токи, текущие вдоль сепаратрисы (тонкие стрелки), согласованы с объемными токами таким образом, чтобы замыкающий поверхностный ток был полностью сосредоточен в пределах полярной шапки

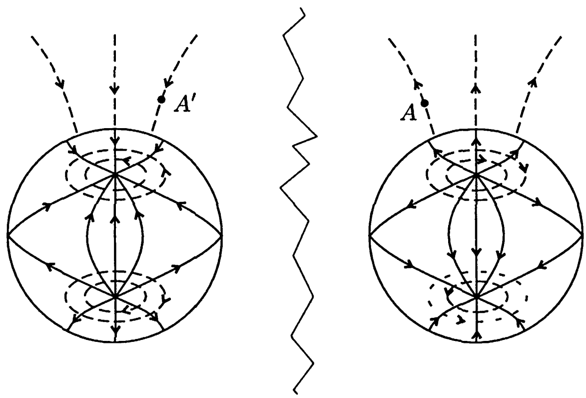


Рис. 2.13. Структура поверхностных токов (тонкие линии) и тороидальное магнитное поле для двух магнитных полюсов ортогонального ротатора

поверхностного тока $\mathbf{J}_\mathrm{s}$ неизбежно должно сопровождаться появлением поверхностного электрического поля $\mathbf{E}_\mathrm{s}$, т. е. разности потенциалов между различными точками поверхности нейтронной звезды (A и A' на рисунке), связанными замкнутыми силовыми линиями магнитного поля. Однако последнее противоречит предположению об отсутствии продольных токов в области замкнутой магнитосферы. Следовательно, токи, текущие вдоль сепаратрисы, должны быть таким образом согласованы с объемными токами, текущими вдоль открытых силовых линий, чтобы замыкающий поверхностный ток был полностью сосредоточен в пределах полярной шапки. Это и приводит к граничному условию (2.156).

С другой стороны, для произвольного угла наклона осей χ ток i_0 можно записать в виде суммы симметричной и асимметричной компонент. Продольный ток естественно нормировать на гольдрайховский ток $j_{\mathrm{GJ}} = c\rho_{\mathrm{GJ}}$. Полагая магнитное поле пульсара дипольным, для гольдрайховского тока при $x \ll 1$ получаем

$$i_{\rm GJ}(x, \varphi_m) \approx \cos\chi + \frac{3}{2} x \cos\varphi_m \sin\chi. \tag{2.157}$$

Поскольку в пределах полярной шапки $x \simeq (\Omega R/c)^{1/2}$, при $\chi \simeq 0$ имеем $i_{\rm GJ} \sim 1$, а при $\chi \simeq 90^\circ - i_{\rm GJ} \sim (\Omega R/c)^{1/2}$. В дальнейшем мы будем записывать ток i_0 в виде $i_0 = i_{\rm S} + i_{\rm A} x \cos\varphi_m$, где величины $i_{\rm S}$ и $i_{\rm A}$ представляют собой амплитуды симметричного и асимметричного продольного тока, нормированного на соответствующие компоненты гольдрайховского тока (2.157). В частности, для гольдрайховского тока $i_{\rm S} = \cos\chi$, а $i_{\rm A} = (3/2)\sin\chi$. В итоге решение уравнения (2.155) будет полностью определяться объемным продольным током i_0. Например, при $\chi = 90^\circ$ для гольдрайховского тока $i_0 = i_{\rm A} x \cos\varphi_m$ и для случая $x_0 = \text{const}$ находим [Beskin, Gurevich, Istomin, 1993]

$$\xi = i_{\rm A}\, \frac{x(x^2 - x_0^2)}{8} \cos\varphi_m. \tag{2.158}$$

Разложим тормозящий момент $\mathbf{K}$ (см. (2.133)) по векторам $\mathbf{e}_m$, $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$, где $\mathbf{e}_m = \mathbf{m}/|\mathbf{m}|$, единичный вектор $\mathbf{n}_1$ перпендикулярен магнитному моменту $\mathbf{m}$ и лежит в плоскости, образуемой векторами $\boldsymbol{\Omega}$ и $\mathbf{m}$ (причем $\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{n}_1 > 0$), а единичный вектор $\mathbf{n}_2$ дополняет их до правой тройки:

$$\mathbf{K} = K_\parallel \mathbf{e}_m + K_\perp \mathbf{n}_1 + K_\dagger \mathbf{n}_2. \tag{2.159}$$

В результате имеем [Beskin, Gurevich, Istomin, 1993]

$$K_\parallel = -\frac{B_0^2 R^4 \Omega}{c} \int\limits_0^{2\pi} \frac{{\rm d}\varphi_m}{2\pi} \int\limits_0^{x_0(\varphi_m)} {\rm d}x\, x^2 \sqrt{1 - x^2}\, \frac{\partial \xi}{\partial x}, \tag{2.160}$$

$$K_\perp = K_1 + K_2, \tag{2.161}$$

где

$$K_1 = \frac{B_0^2 R^4 \Omega}{c} \int\limits_0^{2\pi} \frac{{\rm d}\varphi_m}{2\pi} \int\limits_0^{x_0(\varphi_m)} {\rm d}x \left(x \cos\varphi_m \frac{\partial \xi}{\partial x} - \sin\varphi_m \frac{\partial \xi}{\partial \varphi_m} \right), \tag{2.162}$$

$$K_2 = \frac{B_0^2 R^4 \Omega}{c} \int\limits_0^{2\pi} \frac{{\rm d}\varphi_m}{2\pi} \int\limits_0^{x_0(\varphi_m)} {\rm d}x\, x^3 \cos\varphi_m \frac{\partial \xi}{\partial x}, \tag{2.163}$$

а $K_\dagger$, как мы увидим, вообще не входит в уравнения Эйлера. Здесь мы учли и тот факт, что в тормозящий момент вносят вклад оба магнитных полюса.

Поскольку интегрирование по x в (2.162) и (2.163) идет до границы полярной шапки ($x_0(\varphi_m) \sim (\Omega R/c)^{1/2}$), в качестве оценки можно было бы положить $K_2 \sim (\Omega R/c) K_1$, т. е. $K_2 \ll K_1$. Однако, как легко проверить, при выполнении граничного условия (2.156) подынтегральное выражение в (2.162) является полной производной по φ_m:

$$\int\limits_0^{x_0(\varphi_m)} \mathrm{d}x \left(x\cos\varphi_m \frac{\partial\xi}{\partial x} - \sin\varphi_m \frac{\partial\xi}{\partial\varphi_m} \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\varphi_m}\left[- \int\limits_0^{x_0(\varphi_m)} \mathrm{d}x\, \xi\sin\varphi_m + \xi\,(x_0, \varphi_m)\, x_0(\varphi_m)\sin\varphi_m \right]. \quad (2.164)$$

Поэтому вклад K_1 оказывается тождественно равным нулю. В результате выражения для $K_\|$ и $K_\perp$ будут иметь вид

$$K_\| = -\frac{B_0^2\Omega^3R^6}{c^3}\left[c_\| i_\mathrm{S} + \mu_\| \left(\frac{\Omega R}{c}\right)^{1/2} i_\mathrm{A} \right], \quad (2.165)$$

$$K_\perp = -\frac{B_0^2\Omega^3R^6}{c^3}\left[\mu_\perp \left(\frac{\Omega R}{c}\right)^{1/2} i_\mathrm{S} + c_\perp \left(\frac{\Omega R}{c}\right) i_\mathrm{A} \right], \quad (2.166)$$

где $c_\|$ и $c_\perp$ — множители порядка единицы, зависящие от конкретного профиля продольного тока i_0 и формы полярной шапки. Что же касается коэффициентов $\mu_\|$ и $\mu_\perp$, то они полностью связаны с асимметрией полярной шапки и их вклад оказывается несущественным. В частности, $\mu_\|(0) = \mu_\perp(0) = 0$ и $\mu_\|(90^\circ) = \mu_\perp(90^\circ) = 0$.

Исчезновение лидирующего члена в выражении (2.161) для потерь энергии можно пояснить следующим образом. Как было показано выше, потери энергии радиопульсаров W_tot тождественно представимы в виде (2.145):

$$W_\mathrm{tot} = \frac{c}{4\pi}\int (\boldsymbol{\beta}_\mathrm{R}\mathbf{B})(\mathbf{B}\,\mathrm{d}\mathbf{S}). \quad (2.167)$$

На световом цилиндре выражение (2.167) совпадает с оценкой (2.146), но им можно пользоваться и вблизи поверхности нейтронной звезды. Легко проверить, что условие (2.156) замыкания тока в пределах полярной шапки эквивалентно условию полного экранирования магнитного поля $\mathbf{B}_\mathrm{T}$, обусловленного продольными токами вне области открытых силовых линий. Этот факт очевиден для случая соосного ротатора, однако для углов $\chi \approx 90^\circ$ является существенным дополнительным предположением. Как было показано на рис. 2.13, тороидальное магнитное поле, определяющее величину $(\boldsymbol{\beta}_\mathrm{R}\mathbf{B})$, не должно выходить за пределы полярной шапки и в случае ортогонального ротатора. В результате в нулевом приближении среднее значение скалярного произведения $(\boldsymbol{\beta}_\mathrm{R}\mathbf{B})$ в области открытых силовых линий оказывается равным нулю, а сама величина потерь (2.167) определяется малыми поправками $\sim (\Omega R/c)$, связанными с кривизной поверхности нейтронной звезды. Понятно, что такая же картина должна иметь место и на световом цилиндре. Иными словами, в случае ортогонального ротатора среднее значение тороидального магнитного поля порядка

$B_\varphi(R_L) \sim i_0 B_p(R_L)$ на световом цилиндре должно быть равно нулю. С этим и связано отличие в оценках потерь энергии для пульсаров, находящихся на стадии ортогонального ротатора.

Записывая теперь уравнения Эйлера, можно найти изменение угловой скорости вращения $\dot{\Omega}$ и угла между направлением магнитного поля и осью вращения $\dot{\chi}$ пульсара:

$$J_r \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = K_\parallel \cos\chi + K_\perp \sin\chi; \tag{2.168}$$

$$J_r \Omega \frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t} = K_\perp \cos\chi - K_\parallel \sin\chi. \tag{2.169}$$

Здесь мы для простоты полагаем, что нейтронная звезда сферически-симметрична, поэтому ее момент инерции J_r не зависит от положения оси вращения. В результате для углов χ, не слишком близких к 90°, для которых $\cos\chi > (\Omega R/c)^{1/2}$ (т. е. в случае, когда основную роль играют симметричные токи), получаем

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = -c_\parallel \frac{B_0^2 \Omega^3 R^6}{J_r c^3} i_\mathrm{S} \cos\chi; \tag{2.170}$$

$$\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t} = \quad c_\parallel \frac{B_0^2 \Omega^2 R^6}{J_r c^3} i_\mathrm{S} \sin\chi. \tag{2.171}$$

Легко видеть, что уравнения (2.170) и (2.171) приводят к сохранению величины

$$I_r = \Omega \sin\chi, \tag{2.172}$$

отличной от (2.17). Последнее связано с тем, что, как уже отмечалось, для симметричных токов тормозящий момент $\mathbf{K}$ (см. (2.133)) направлен против магнитного диполя $\mathbf{m}$, поэтому проекция угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ на ось, перпендикулярную $\mathbf{m}$, оказывается интегралом движения. Для случая же $\chi \approx 90°$, когда $\cos\chi < (\Omega R/c)^{1/2}$, получаем

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = -c_\perp \frac{B_0^2 \Omega^4 R^7}{J_r c^4} i_\mathrm{A}, \tag{2.173}$$

поскольку благодаря зависимости $i_\mathrm{S} \approx \cos\chi$ вкладом симметричного тока здесь можно пренебречь. Сравнение соотношений (2.170) и (2.173) как раз и показывает, что энерговыделение пульсаров, находящихся на стадии ортогонального ротатора, в $\Omega R/c$ раз меньше, чем у соосных пульсаров.

Подводя итоги, можно сформулировать следующие общие выводы.

1. Для углов χ, не слишком близких к 90°, тормозящий момент $\mathbf{K}$ (см. (2.133)) направлен антипараллельно магнитному моменту нейтронной звезды. Поэтому для токовых потерь инвариантной оказывается величина $\Omega \sin\chi$:

$$\Omega \sin\chi = \mathrm{const}\,. \tag{2.174}$$

Данный вывод непосредственно следует из анализа уравнений Эйлера: проекция угловой скорости на направление, перпендикулярное приложенному моменту сил, является инвариантом движения [Ландау, Лифшиц, 1973а]. Следовательно, в отличие от магнитодипольных потерь, угол наклона осей должен увеличиваться с течением времени. При этом благодаря сохранению величины (2.172) характерное время изменения угла наклона χ ($\tau_\chi = \chi/\dot{\chi}$) совпадает с динамическим возрастом пульсара ($\tau_{\rm D} = P/\dot{P}$).

2. Токовые потери $W_{\rm tot}$ могут быть переписаны в виде $W_{\rm tot} = VI$, где

$$V \sim EL \sim \left(B_0 \frac{\Omega R_0}{c}\right) R_0 \tag{2.175}$$

есть характерное падение потенциала в пределах полярной шапки, а I — полный ток, циркулирующий в магнитосфере. Используя определение $i_0 = I/I_{\rm GJ}$ и тот факт, что при углах наклона осей χ, не слишком близких к 90°, можно положить $V \approx \psi_{\rm max}$, получаем

$$W_{\rm tot} = c_{\parallel} \frac{B_0^2 \Omega^4 R^6}{c^3} i_0 \cos\chi. \tag{2.176}$$

Как видно из соотношения (2.163), входящий в него коэффициент $c_{\parallel} \sim 1$ зависит от профиля продольного тока. Здесь необходимо подчеркнуть, что помимо фактора $\cos\chi$, связанного со скалярным произведением в (2.132), сильная зависимость токовых потерь $W_{\rm tot}$ от угла наклона осей содержится и в величине $i_0 \approx i_{\rm S}$. Дело в том, что в определении безразмерного тока стоит гольдрайховский ток для осесимметричного случая, тогда как при ненулевых углах наклона осей гольдрайховская плотность заряда вблизи магнитных полюсов существенно зависит от угла χ: $\rho_{\rm GJ} \approx -(\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{B})/2\pi c \propto \cos\chi$. Поэтому естественно ожидать, что для случая наклонного ротатора безразмерный ток i_0 будет ограничен сверху как

$$i_0^{(\rm max)}(\chi) \sim \cos\chi. \tag{2.177}$$

В результате токовые потери падают с ростом угла χ по крайней мере как $\cos^2\chi$.

3. Что же касается пульсаров, у которых угол наклона осей близок к 90°, то здесь начинают играть роль асимметричные продольные токи, обусловленные различием гольдрайховской плотности заряда $\rho_{\rm GJ}$ (см. (2.33)) в северной и южной частях полярной шапки. Как было показано, в этом случае потери энергии могут быть записаны в виде

$$W_{\rm tot} = c_{\perp} \frac{B_0^2 \Omega^4 R^6}{c^3} \left(\frac{\Omega R}{c}\right) i_{\rm A}, \tag{2.178}$$

где коэффициент $c_{\perp} \sim 1$ зависит уже не только от профиля асимметричного продольного тока, но и от формы полярной шапки. Следовательно, токовые потери для ортогонального ротатора оказываются в $\Omega R/c$ раз меньше, чем в осесимметричном случае.

УПРАЖНЕНИЕ. Используя соотношение (2.158), покажите, что [Beskin, Gurevich, Istomin, 1993]

$$c_{\parallel} = \frac{f_*^2}{8}; \tag{2.179}$$

$$c_{\perp} = \frac{f_*^3}{64}, \tag{2.180}$$

где f_* — безразмерная площадь полярной шапки: $S = f_* \pi (\Omega R/c)$.

Таким образом, мы приходим к важному заключению: для токов $I \sim I_{\rm GJ}$ (т. е. для $i_0 \sim 1$), характерных для магнитосферы радиопульсаров, токовые потери (2.176) в буквенном выражении совпадают с магнитодипольными потерями (2.4). Вместе с тем токовые и магнитодипольные потери имеют ряд существенных различий.

1. Для осесимметричного случая магнитодипольные потери (2.4) отсутствуют, тогда как токовые потери при $\chi = 0^\circ$ максимальны.

2. Магнитодипольные потери приводят к уменьшению угла наклона осей с течением времени ($\Omega \cos\chi = {\rm const}$), тогда как при токовых потерях угол χ, напротив, должен увеличиваться ($\Omega \sin\chi = {\rm const}$), приближаясь к 90°. Однако в обоих случаях эволюция угла χ происходит в область параметров, в которой потери энергии нейтронной звезды становятся минимальными.

3. Для магнитодипольных потерь параметр торможения больше трех (см. (2.19)), тогда как для токовых потерь он может быть меньше трех (подробнее см. [Beskin, Gurevich, Istomin, 1993]).

4. Магнитодипольные потери являются универсальными, т. е. не зависят от дополнительных параметров. Токовые же потери (2.176) пропорциональны электрическому току i_0, циркулирующему в магнитосфере.

Иными словами, различия между токовыми и магнитодипольными потерями являются достаточно существенными. Поэтому с теоретической точки зрения возникает естественный вопрос об относительной роли этих двух механизмов торможения в полном балансе энергетических потерь. Ответ на него может быть получен лишь вместе с решением полной задачи о строении магнитосферы нейтронной звезды. С другой стороны, необходимо отметить, что для большинства радиопульсаров безразмерный ток $i_0 \sim 1$, так что простейшая магнитодипольная формула (2.4) дает в целом правильную оценку для полных потерь энергии вращения нейтронной звезды. В результате как магнитодипольные, так и токовые потери приводят к сходным результатам при анализе статистических характеристик радиопульсаров [Michel, 1991; Beskin, Gurevich, Istomin, 1993]. Прямое же определение знака производной $\dot{\chi}$, различной для двух механизмов торможения, находится далеко за пределами возможностей современных приемников. Поэтому в настоящее время наблюдения не позволяют сделать выбор между этими двумя механизмами торможения.

2.6. Структура магнитосферы

2.6.1. Точные решения. Вернемся к нашей основной теме и рассмотрим вопрос о строении магнитосферы радиопульсаров. Выше было показано, что в нулевом порядке по малым параметрам σ^{-1} и λ^{-1} структура магнитосферы может быть описана бессиловым уравнением (2.96). Как уже подчеркивалось, это уравнение содержит лишь одну особую поверхность и поэтому требует трех граничных условий. В качестве последних обычно выбирают значения инвариантов $\Omega_{\mathrm{F}}(\Psi)$ и $I(\Psi)$, а также нормальную компоненту магнитного поля на поверхности нейтронной звезды (или, что то же самое, потенциал $\Psi(R, \theta)$ на ее поверхности).

Уравнение (2.96) является нелинейным уравнением. Однако, в отличие от гидродинамической версии уравнения Грэда–Шафранова, вся нелинейность теперь связана с интегралами движения. В частности, в отсутствие продольного тока и при постоянной угловой скорости $\Omega_{\mathrm{F}}(\Psi) = \Omega$ оно становится линейным:

$$-\left(1 - \frac{\Omega^2 \varpi^2}{c^2}\right) \nabla^2 \Psi + \frac{2}{\varpi} \frac{\partial \Psi}{\partial \varpi} = 0. \tag{2.181}$$

Кроме того, в отличие от гидродинамического случая, при постоянной величине угловой скорости Ω_{F} положение особой поверхности $\Omega_{\mathrm{F}} \varpi / c = 1$ нам известно заранее. Поскольку же уравнение (2.181) не содержит явно цилиндрической переменной z, его решение можно искать методом разделения переменных [Michel, 1973a; Mestel, Wang, 1979]:

$$\Psi(\varpi, z) = \frac{|\mathbf{m}|}{R_{\mathrm{L}}} \int_0^\infty R_\lambda(\varpi) \cos \lambda z' \, \mathrm{d}\lambda. \tag{2.182}$$

Здесь и далее мы вновь будем пользоваться безразмерными переменными $x_r = \Omega\varpi/c$, $z' = \Omega z/c$ (далее штрих опускаем). Перечисленные свойства и позволили достаточно быстро получить решения уравнения (2.96) для ряда простейших случаев.

1. *Осесимметричная магнитосфера с нулевым продольным током для дипольного магнитного поля нейтронной звезды* [Michel, 1973a; Mestel, Wang, 1979]. При отсутствии продольного тока единственными токами в магнитосфере будут токи коротации $\Omega \varpi \rho_{\mathrm{GJ}} \mathbf{e}_\varphi$. Напомним, что здесь мы полагаем $\Omega = \mathrm{const}$. Поэтому область применимости уравнения (2.181) простирается лишь до светового цилиндра, который в этом случае совпадает со световой поверхностью. Подставляя разложение (2.182) в уравнение (2.181), для радиальной функции $R_\lambda(x_r)$ получаем

$$\frac{\mathrm{d}^2 R_\lambda(x_r)}{\mathrm{d}^2 x_r} - \frac{(1 + x_r^2)}{x_r(1 - x_r^2)} \frac{\mathrm{d}R_\lambda(x_r)}{\mathrm{d}x_r} - \lambda^2 R_\lambda(x_r) = 0. \tag{2.183}$$

Граничными же условиями к уравнению (2.183) будут следующие:

1) дипольное магнитное поле $\mathbf{B} = [3(\mathbf{nm})\mathbf{n} - \mathbf{m}]/r^3$ вблизи поверхности звезды, т. е. при $x_r \to 0$ и $z \to 0$

$$\Psi(x_r, z) = \frac{|\mathbf{m}|}{R_\mathrm{L}} \frac{x_r^2}{(x_r^2 + z^2)^{3/2}}; \tag{2.184}$$

2) особенность на световом цилиндре ($x_r = 1$) отсутствует.

Согласно известному разложению:

$$\frac{x_r^2}{(x_r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \lambda x_r K_1(\lambda x_r) \cos(\lambda z)\, \mathrm{d}\lambda, \tag{2.185}$$

где $K_1(x)$ — функция Макдональда первого порядка, первое условие означает, что при $x_r \to 0$ должно быть выполнено соотношение

$$R_\lambda(x_r) \to \frac{2}{\pi} \lambda x_r K_1(\lambda x_r). \tag{2.186}$$

Как мы видим, в вопросе о граничных условиях ситуация полностью эквивалентна гидродинамическому пределу, в котором одно из граничных условий к обыкновенному дифференциальному уравнению связано с источником поля, а второе соответствует отсутствию особенности на сингулярной поверхности.

Упражнение. Покажите, что решение уравнения (2.183) с граничным условием 2 может быть построено в виде формального ряда:

$$R_\lambda(x_r) = \mathcal{D}(\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (1 - x_r^2)^n, \tag{2.187}$$

где коэффициенты разложения a_n удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{n^2}{(n+1)^2} a_n + \frac{\lambda^2}{4(n+1)^2} a_{n-1}. \tag{2.188}$$

Величина же $\mathcal{D}(\lambda)$ может быть определена из граничного условия (2.186) у поверхности нейтронной звезды. Действительно, воспользовавшись асимптотикой $K_1(x) = x^{-1}$ для $x \to 0$, получаем

$$\mathcal{D}^{-1}(\lambda) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n. \tag{2.189}$$

На рис. 2.14 показана структура магнитных поверхностей, полученная из решения уравнения (2.181) [Michel, 1973a]. Как и следовало ожидать, возмущение дипольного магнитного поля имеет место лишь вблизи светового цилиндра; на малых расстояниях магнитное поле остается дипольным. Отметим также, что на световом цилиндре магнитное поле ортогонально его поверхности. Данный факт может быть непосредственно проверен с помощью определения (2.84) и вида разложения (2.187): вертикальная компонента магнитного поля на световом цилиндре — $B_z(x_r = 1)$ — автоматически оказывается равной

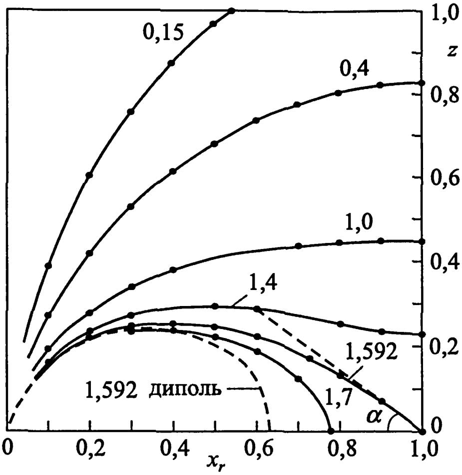


Рис. 2.14. Структура магнитного поля для нулевых продольного тока и ускоряющего потенциала ($i_0 = 0$; $\beta_0 = 0$) при дипольном магнитном поле нейтронной звезды [Michel, 1973a; Mestel, Wang, 1979]. Цифрами показаны значения безразмерной функции магнитного потока f ($\Psi = \pi B_0 R^2 (\Omega R/c)\, f$)

нулю. В этом, кстати, и состоит решение задачи об особенности в выражении (2.35): плотность заряда на световом цилиндре остается конечной. При этом на экваторе светового цилиндра ($\varpi = R_{\mathrm{L}}$, $z = 0$) магнитное поле будет равно нулю. Наконец, оказалось, что полный магнитный поток, выходящий за пределы светового цилиндра, приблизительно в 1,592 раз больше, чем в вакуумном случае. Последнее означает, что в той же пропорции увеличивается и площадь полярной шапки [Michel, 1973a]:

$$S_{\mathrm{cap}} \approx 1{,}592\pi R_0^2. \tag{2.190}$$

Что же касается тороидального магнитного поля, то поскольку в магнитосфере отсутствуют продольные электрические токи, оно тождественно равно нулю во всей магнитосфере.

УПРАЖНЕНИЕ. Записав выражение для потока магнитного поля через поверхность светового цилиндра, покажите, что коэффициент $f_* \approx 1{,}592$ (так называемое число Майкеля) связан с функцией $\mathcal{D}(\lambda)$ соотношением

$$f_* = \int\limits_0^\infty \mathcal{D}(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda. \tag{2.191}$$

Интересно также отметить, что при удалении от плоскости экватора в пределах светового цилиндра электрические и магнитные поля спадают не степенным образом, а экспоненциально быстро; так, на световом цилиндре $B \propto \exp(-pz)$, где $p \approx 3{,}0$. Это свойство связано со структурой разложения (2.182) и с наличием полюса функции R_λ при $\lambda = ip$ [Beskin, Gurevich, Istomin, 1993]. Столь быстрое падение полей становится возможным благодаря тому, что магнитный момент токов коротации практически полностью компенсирует магнитный момент нейтронной звезды.

Далее, на световом цилиндре электрическое поле сравнивается по величине с магнитным, но направлено оно вдоль оси вращения нейтронной звезды. Поскольку же нормальная к поверхности светового цилиндра компонента электрического поля отсутствует, мы приходим к выводу о том, что суммарный заряд нейтронной звезды и магнитосферы оказывается равным нулю. Иными словами, часть заряда Q (см. (2.11)), располагавшегося в вакуумном случае на поверхности нейтронной звезды, переходит в магнитосферу радиопульсара. С другой стороны, равенство электрического и магнитного полей на световом цилиндре показывает, что при нулевом продольном токе световой цилиндр совпадает со световой поверхностью. Именно поэтому построенное решение нельзя продолжать за пределы светового цилиндра, хотя формально пульсарное уравнение здесь не имеет никаких особенностей.

2. *Осесимметричная магнитосфера с нулевым продольным током для монопольного магнитного поля* [Michel, 1973a]. На первый взгляд, рассмотрение этого случая не имеет смысла, поскольку в действительности монопольное магнитное поле не реализуется. Однако, как мы увидим в дальнейшем, анализ магнитосферы вращающегося монополя оказывается весьма плодотворным, особенно для случая магнитосферы черной дыры.

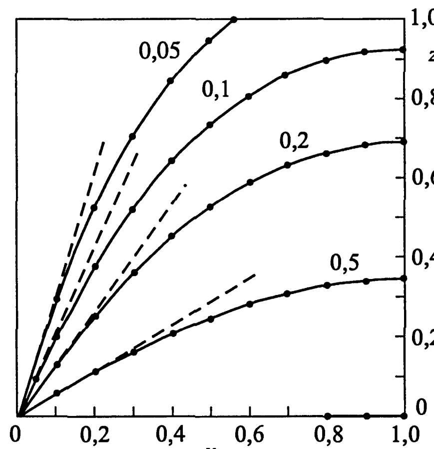


Рис. 2.15. Структура магнитного поля для нулевых продольного тока и ускоряющего потенциала ($i_0 = 0$; $\beta_0 = 0$) при монопольном магнитном поле компактного объекта [Michel, 1973a]

Решение задачи для монопольного магнитного поля строится совершенно аналогично предыдущему случаю. Отличие имеет место лишь в граничном условии 1 на поверхности звезды, и следовательно, лишь в явном виде функции $\mathcal{D}(\lambda)$. В результате, как и для случая дипольного магнитного поля, на световом цилиндре магнитное поле оказывается ортогональным его поверхности, экспоненциально падает при удалении от экваториальной плоскости, а на малых по сравнению с радиусом светового цилиндра расстояниях от звезды возмущения монопольного поля оказываются малыми (рис. 2.15). Точно так же, как и в предыдущем примере, на световом цилиндре электрическое поле сравнивается с магнитным; поэтому решение пульсарного уравнения нельзя продолжать за его пределы.

3. *Осесимметричная магнитосфера с нулевым продольным током для случая наклонного ротатора* [Бескин, Гуревич, Истомин, 1983]. Точное решение для нулевых продольных токов (и при отсутствии

ускоряющего потенциала: $\psi = 0$) может быть построено и для произвольного угла наклона осей χ. Это становится возможным благодаря тому, что при $i_{\parallel} = 0$ и $\psi = 0$ квазистационарное уравнение равновесия (2.130) также становится линейным:

$$\nabla \times \left[(1 - \beta_{\mathrm{R}}^2)\mathbf{B} + \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{R}} \cdot \mathbf{B})\right] = 0. \tag{2.192}$$

В итоге решение уравнения (2.192) принимает вид $\mathbf{B} - [\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{R}} \times \mathbf{E}] = -\nabla h$, причем теперь, в отсутствие потенциала ψ, замыкающее уравнение $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ будет выглядеть как $\hat{\mathcal{L}}_2 h = 0$:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_r^2} + \frac{1 + x_r^2}{x_r(1 - x_r^2)} \frac{\partial h}{\partial x_r} + \frac{1 - x_r^2}{x_r^2} \frac{\partial^2 h}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0. \tag{2.193}$$

Электрическое же поле для потенциала $\psi = 0$ находится из условия $\mathbf{E} + [\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{R}} \times \mathbf{B}] = 0$, поскольку соотношение (2.99) должно выполняться для любых квазистационарных конфигураций. Поэтому электрические и магнитные поля вновь могут быть определены с помощью равенств (2.121)–(2.124), в которых теперь нужно положить $\psi = 0$:

$$\mathbf{E}_{\mathrm{p}} = \frac{[\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{R}} \times \nabla h]}{1 - \beta_{\mathrm{R}}^2}; \tag{2.194}$$

$$E_{\varphi} = 0; \tag{2.195}$$

$$\mathbf{B}_{\mathrm{p}} = -\frac{\nabla h}{1 - \beta_{\mathrm{R}}^2}; \tag{2.196}$$

$$B_{\varphi} = -\frac{1}{\varpi} \frac{\partial h}{\partial \varphi}. \tag{2.197}$$

Для построения решения уравнения (2.193) отметим, что в рассматриваемом здесь линейном случае магнитное поле нейтронной звезды может быть разложено на осесимметричную и ортогональную части. Иными словами, потенциал $h(x_r, \varphi - \Omega t, z)$ представим в виде

$$h(x_r, \varphi - \Omega t, z) = h_0(x_r, z) \cos\chi + h_1(x_r, z) \cos(\varphi - \Omega t) \sin\chi, \tag{2.198}$$

причем теперь потенциалы $h_0(x_r, z)$ и $h_1(x_r, z)$ будут удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial^2 h_0}{\partial x_r^2} + \frac{1 + x_r^2}{x_r(1 - x_r^2)} \frac{\partial h_0}{\partial x_r} + \frac{\partial^2 h_0}{\partial z^2} = 0; \tag{2.199}$$

$$\frac{\partial^2 h_1}{\partial x_r^2} + \frac{1 + x_r^2}{x_r(1 - x_r^2)} \frac{\partial h_1}{\partial x_r} + \frac{\partial^2 h_1}{\partial z^2} - \frac{1 - x_r^2}{x_r^2} h_1 = 0. \tag{2.200}$$

Поэтому, как и в случае соосного ротатора, решение уравнений (2.199) и (2.200) можно найти в виде

$$h_0(\varpi, z) = \frac{|\mathbf{m}|}{R_{\mathrm{L}}^2} \int_0^{\infty} R_{\lambda}^{(0)}(\varpi) \sin\lambda z \, \mathrm{d}\lambda; \tag{2.201}$$

$$h_1(\varpi, z) = \frac{|\mathbf{m}|}{R_{\mathrm{L}}^2} \int_0^{\infty} R_{\lambda}^{(1)}(\varpi) \cos\lambda z \, \mathrm{d}\lambda, \tag{2.202}$$

где радиальные функции $R_\lambda^{(0)}(x_r)$ и $R_\lambda^{(1)}(x_r)$ должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{d^2 R_\lambda^{(0)}(x_r)}{d^2 x_r} + \frac{1+x_r^2}{x_r(1-x_r^2)}\frac{dR_\lambda^{(0)}(x_r)}{dx_r} - \lambda^2 R_\lambda^{(0)}(x_r) = 0; \tag{2.203}$$

$$\frac{d^2 R_\lambda^{(1)}(x_r)}{d^2 x_r} + \frac{1+x_r^2}{x_r(1-x_r^2)}\frac{dR_\lambda^{(1)}(x_r)}{dx_r} - \left(\lambda^2 + \frac{1-x_r^2}{x_r^2}\right) R_\lambda^{(1)}(x_r) = 0. \tag{2.204}$$

Граничными условиями к уравнениям (2.203) и (2.204) вновь будут следующие соотношения:

1) дипольное магнитное поле $\mathbf{B} = [3(\mathbf{nm})\mathbf{n} - \mathbf{m}]/r^3$ вблизи поверхности звезды, т. е. при $x_r \to 0$ и $z \to 0$

$$h_0(x_r, z) \to \frac{|\mathbf{m}|}{R_L^2}\frac{z}{(x_r^2+z^2)^{3/2}}; \tag{2.205}$$

$$h_1(x_r, z) \to \frac{|\mathbf{m}|}{R_L^2}\frac{x_r}{(x_r^2+z^2)^{3/2}}; \tag{2.206}$$

2) особенность на световом цилиндре ($x_r = 1$) отсутствует:

$$\frac{dR_\lambda^{(0)}}{dx_r} = \frac{dR_\lambda^{(1)}}{dx_r} = 0. \tag{2.207}$$

Снова воспользовавшись разложением (2.185), получаем, что при $x_r \to 0$ должны выполняться соотношения

$$R_\lambda^{(0)}(x_r) \to \frac{2}{\pi}\lambda K_0(\lambda x_r); \tag{2.208}$$

$$R_\lambda^{(1)}(x_r) \to \frac{2}{\pi}\lambda K_1(\lambda x_r), \tag{2.209}$$

где $K_0(x)$ и $K_1(x)$ — функции Макдональда нулевого и первого порядка.

Кроме того (и это чрезвычайно важно), следует потребовать, чтобы магнитное поле спадало на бесконечности вдоль оси вращения (при $z \to \infty$). Необходимость введения «дополнительного» граничного условия связана с тем фактом, что магнитная силовая линия, уходящая на бесконечность вдоль оси вращения, не пересекает световой цилиндр, поэтому для нее не возникает дополнительного условия регулярности. Нарушение указанного условия приводит к нефизическому решению [Endean, 1983]:

$$h_E(x_r, \varphi, z, t) = h_0[x_r J_0(x_r) - J_1(x_r)]\cos(\varphi - \Omega t), \tag{2.210}$$

не зависящему от z, и следовательно, не спадающему на бесконечности.

Упражнения.

1. Покажите, что и теперь решение уравнений (2.203), (2.204) с граничным условием 2 может быть построено в виде формального ряда [Бескин,

Гуревич, Истомин, 1983; Mestel, Panagi, Shibata, 1999]:

$$R_\lambda^{(0)}(x_r) = \mathcal{D}_0(\lambda) \sum_{n=2}^{\infty} b_n (1 - x_r^2)^n; \tag{2.211}$$

$$R_\lambda^{(1)}(x_r) = \mathcal{D}_1(\lambda) \sum_{n=2}^{\infty} c_n (1 - x_r^2)^n, \tag{2.212}$$

где коэффициенты разложения b_n и c_n удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$b_{n+1} = \frac{n}{n+1} b_n + \frac{\lambda^2}{4(n^2-1)} b_{n-1};$$

$$c_{n+1} = \frac{n(2n-3)}{n^2-1} c_n - \frac{4(n-1)(n-2)-\lambda^2}{4(n^2-1)} c_{n-1} - \frac{\lambda^2-1}{4(n^2-1)} c_{n-2}, \tag{2.213}$$

причем $b_0 = b_1 = c_0 = c_1 = 0$ и $b_2 = c_2 = 1$.

2. Воспользовавшись асимптотиками $K_0(x) \to -\ln x$ и $K_1(x) \to x^{-1}$ при $x \to 0$, покажите, что

$$\mathcal{D}_0^{-1}(\lambda) = -\frac{\pi}{2\lambda} \lim_{x_r \to 0} \frac{1}{\ln x_r} \sum_{n=2}^{\infty} b_n (1 - x_r^2)^n; \tag{2.214}$$

$$\mathcal{D}_1^{-1}(\lambda) = \frac{\pi}{2} \lim_{x_r \to 0} x_r \sum_{n=2}^{\infty} c_n (1 - x_r^2)^n. \tag{2.215}$$

3. Воспользовавшись определениями (2.194)–(2.197) и (2.211), (2.212), покажите, что магнитное поле и плотность заряда на световом цилиндре определяются как

$$B_\varpi(R_\mathrm{L}, \varphi', z) = 4\frac{|\mathbf{m}|}{R_\mathrm{L}^3} \left[\cos\chi \int_0^\infty \mathcal{D}_0(\lambda)\sin(\lambda z)\,\mathrm{d}\lambda + \sin\chi\cos\varphi' \int_0^\infty \mathcal{D}_1(\lambda)\cos(\lambda z)\,\mathrm{d}\lambda\right]; \tag{2.216}$$

$$\rho_\mathrm{e}(R_\mathrm{L}, \varphi', z) = \frac{\Omega|\mathbf{m}|}{2\pi c R_\mathrm{L}^3} \times$$

$$\times \left[\cos\chi \int_0^\infty \mathcal{D}_0(\lambda)\lambda\sin(\lambda z)\,\mathrm{d}\lambda - \sin\chi\cos\varphi' \int_0^\infty \mathcal{D}_1(\lambda)\lambda\cos(\lambda z)\,\mathrm{d}\lambda\right], \tag{2.217}$$

где $\varphi' = \varphi - \Omega t$.

4. Покажите, что в осесимметричном случае сингулярное решение, не зависящее от z, имеет особенность на световом цилиндре и поэтому автоматически должно быть отброшено.

Как показано на рис. 2.16, для случая наклонного ротатора полностью сохраняются основные свойства, имевшие место для осесимметричной магнитосферы. При отсутствии продольного тока границей области применимости является световой цилиндр, на котором токи коротации начинают искажать дипольное магнитное поле. Само же магнитное поле становится здесь ортогональным к поверхности светового цилиндра. При удалении от плоскости экватора электрические и магнитные поля спадают экспоненциально. Наконец, полный электрический заряд магнитосферы равен нулю.

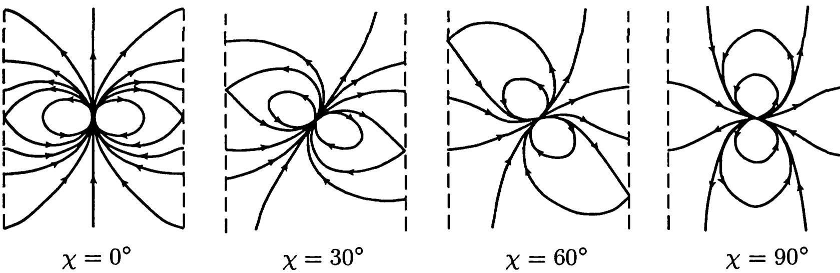


Рис. 2.16. Структура магнитного поля для нулевых продольного тока и ускоряющего потенциала ($i_0 = 0$; $\beta_0 = 0$) при наклонном дипольном магнитном поле нейтронной звезды [Бескин, Гуревич, Истомин, 1983]

Соотношения (2.211) и (2.212) позволяют получить полную информацию о структуре магнитосферы. Так, в табл. 2.2 приведены величины магнитного поля (в единицах $|\mathbf{m}|/R_\mathrm{L}^3$) и плотности заряда (в единицах $\Omega B/2\pi c$) на световом цилиндре для четырех различных углов наклона осей χ. Кроме того, на рис. 2.17 показано изменение формы полярной шапки с ростом угла наклона осей. При этом ее площадь меняется от $1{,}592\pi R_0^2$ при $\chi = 0°$ до $1{,}96\pi R_0^2$ при $\chi = 90°$.

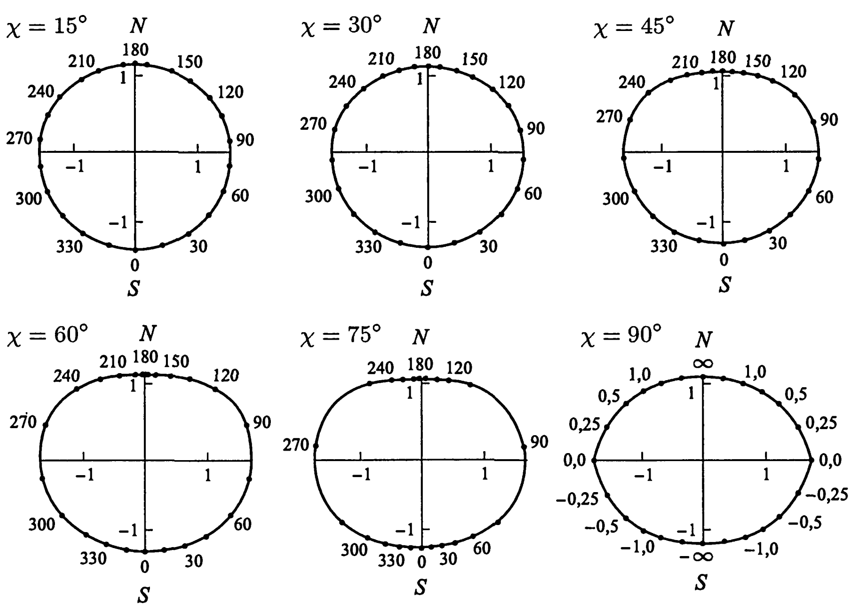


Рис. 2.17. Изменение формы полярной шапки с ростом угла наклона осей χ. Числа означают величину углов φ (в градусах), а для $\chi = 90°$ — значения z/R_L, при которых силовая линия, выходящая из данной точки, пересекает световой цилиндр

Таблица 2.2

z	$\chi = 0°$		$\chi = 30°$		$\chi = 60°$		$\chi = 90°$	
	B_x	ρ_e	B_x	ρ_e	B_x	ρ_e	B_x	ρ_e
1,5	0,16	−0,13	0,17	−0,14	0,12	−0,11	0,05	−0,05
1,4	0,22	−0,17	0,23	−0,19	0,18	−0,16	0,07	−0,08
1,3	0,30	−0,23	0,32	−0,26	0,25	−0,22	0,11	−0,12
1,2	0,41	−0,30	0,44	−0,35	0,36	−0,31	0,18	−0,19
1,1	0,54	−0,38	0,61	−0,48	0,51	−0,44	0,27	−0,29
1,0	0,71	−0,48	0,83	−0,63	0,72	−0,61	0,41	−0,43
0,9	0,93	−0,58	1,11	−0,81	1,00	−0,84	0,62	−0,63
0,8	1,17	−0,65	1,48	−1,02	1,39	−1,11	0,93	−0,90
0,7	1,44	−0,67	1,93	−1,20	1,89	−1,41	1,36	−1,24
0,6	1,70	−0,59	2,43	−1,32	2,52	−1,70	1,93	−1,62
0,5	1,89	−0,35	2,96	−1,30	3,24	−1,90	2,65	−1,99
0,4	1,95	0,08	3,44	−1,05	4,01	−1,90	3,50	−2,23
0,3	1,81	0,67	3,77	−0,53	4,72	−1,59	4,41	−2,22
0,2	1,41	1,31	3,84	0,22	5,23	−0,92	5,23	−1,82
0,1	0,78	1,82	3,58	1,06	5,42	0,01	5,81	−1,04
0,0	0,00	2,01	3,01	1,74	5,22	1,01	6,02	0,00
−0,1	−0,78	1,82	2,23	2,09	4,64	1,81	5,81	1,04
−0,2	−1,41	1,31	1,39	2,05	3,82	2,23	5,23	1,82
−0,3	−1,81	0,67	0,64	1,69	2,91	2,25	4,41	2,22
−0,4	−1,95	0,08	0,06	1,18	2,06	1,97	3,50	2,23
−0,5	−1,89	−0,35	−0,31	0,69	1,35	1,55	2,65	1,99
−0,6	−1,70	−0,59	−0,51	0,30	0,82	1,11	1,93	1,62
−0,7	−1,44	−0,67	−0,57	0,04	0,45	0,74	1,36	1,24
−0,8	−1,17	−0,65	−0,55	−0,11	0,22	0,46	0,93	0,90
−0,9	−0,92	−0,58	−0,49	−0,18	0,08	0,26	0,62	0,63
−1,0	−0,71	−0,48	−0,41	−0,20	0,00	0,14	0,41	0,43
−1,1	−0,54	−0,38	−0,33	−0,19	−0,04	0,06	0,27	0,29
−1,2	−0,41	−0,30	−0,26	−0,16	−0,05	0,02	0,18	0,19
−1,3	−0,30	−0,23	−0,20	−0,13	−0,05	−0,01	0,11	0,12
−1,4	−0,22	−0,17	−0,16	−0,11	−0,05	−0,01	0,07	0,08
−1,5	−0,16	−0,13	0,12	−0,08	−0,04	−0,01	0,05	0,05

Упражнение. Воспользовавшись сингулярным решением (2.210), покажите, что безразмерная площадь поверхности полярной шапки $f_*(90) \approx \approx 1{,}96$ для $\chi = 90°$ выражается через функции Бесселя J_0 и J_1 как

$$f_*(90) = \frac{2}{\pi[J_0(1) - J_1(1)]}. \tag{2.218}$$

(Указание: необходимо определить поток вектора Пойнтинга через поверхность светового цилиндра и поверхность нейтронной звезды).

С другой стороны, анализ полученных решений приводит нас к выводу о том, что на всей поверхности светового цилиндра тороидальное магнитное поле равно нулю, хотя, в отличие от осесимметричного случая, во внутренних областях магнитосферы оно нулю не равно.

Действительно, поскольку разложения (2.211) и (2.212) начинаются со вторых степеней $(1-x_r^2)$, согласно определениям (2.196) и (2.197) при малых расстояниях от светового цилиндра компоненты магнитного поля ведут себя как

$$B_z \propto (1-x_r^2); \quad B_\varphi \propto (1-x_r^2)^2. \tag{2.219}$$

Это, на первый взгляд, чисто математическое свойство на самом деле имеет фундаментальное значение и является, фактически, одним из ключевых выводов настоящей главы. Собственно, именно по этой причине мы и привели здесь столь подробный вывод решений пульсарного уравнения. Подобная структура магнитного поля означает, что *в отсутствие продольного тока и ускоряющего потенциала поток вектора Пойнтинга через поверхность светового цилиндра равен нулю. Иными словами, токи коротации, текущие в магнитосфере, полностью экранируют магнитодипольное излучение нейтронной звезды. Поэтому и в случае наклонного ротатора все потери энергии будут связаны с продольным током, циркулирующим в магнитосфере* [Бескин, Гуревич, Истомин, 1983].

Необходимо отметить, что вывод об отсутствии потерь никак не связан с используемым здесь квазистационарным приближением. Как было показано выше, магнитодипольное излучение может быть получено и в рамках этого формализма. Дело в том, что в вакуумном случае мы имеем два уравнения второго порядка для функций ψ и h, (2.125) и (2.126), которые можно переписать как одно уравнение четвертого порядка для одной из этих величин. Именно поэтому в вакуумном случае возможны два независимых решения, соответствующие запаздывающим и опережающим потенциалам; выбор лишь запаздывающих потенциалов связан с дополнительным физическим предположением об отсутствии сходящегося потока энергии из бесконечности. В случае же заполненной магнитосферы уравнение (2.193) имеет единственное решение в виде стоячей волны, не уносящей энергию на бесконечность.

4. *Осесимметричная магнитосфера с ненулевым продольным током для монопольного магнитного поля* [Michel, 1973b]. Майкелем было найдено еще одно замечательное аналитическое решение для случая монопольного магнитного поля звезды. Оказалось, что при специальном выборе продольного тока:

$$I(\Psi) = I_{\rm M} = \frac{\Omega_{\rm F}}{4\pi}\left(2\Psi - \frac{\Psi^2}{\Psi_0}\right), \tag{2.220}$$

а также при $\Omega_{\rm F} = \text{const}$ монопольное магнитное поле

$$\Psi(r,\theta) = \Psi_0(1-\cos\theta) \tag{2.221}$$

является точным решением нелинейного уравнения равновесия (2.96), в том числе и за пределами светового цилиндра. Иными словами, при токе $I = I_{\rm M}$ происходит полная компенсация влияния продольного тока и токов коротации. При этом, как легко проверить, ток I

приобретает вид $I(\theta) = I_{\mathrm{M}}^{(\mathrm{A})}\sin^2\theta$, где

$$I_{\mathrm{M}}^{(\mathrm{A})} = \frac{\Omega_{\mathrm{F}}\Psi_0}{4\pi}, \tag{2.222}$$

что фактически совпадает с гольдрайховским током. Согласно соотношениям (2.220) и (2.221) в решении Майкеля электрическое поле $\mathbf{E}$, имеющее лишь θ-компоненту, равно по величине тороидальной компоненте магнитного поля:

$$B_{\hat{\varphi}} = E_{\hat{\theta}} = -B_0\left(\frac{\Omega R}{c}\right)\frac{R}{r}\sin\theta, \tag{2.223}$$

которая на расстояниях, превышающих радиус светового цилиндра, становится больше полоидального магнитного поля $B_{\mathrm{p}} = B_0(R/r)^2$. С другой стороны, в этом решении полное магнитное поле остается больше электрического вплоть до бесконечности, что отодвигает на бесконечность и световую поверхность.

Как уже подчеркивалось, решение Майкеля, несмотря на свою искусственность, играет важную роль в теории магнитосферы черных дыр. Поэтому мы еще вернемся к нему в следующей главе. Здесь же отметим, что решение Майкеля оказывается полезным и для теории магнитосферы радиопульсаров, поскольку такая структура магнитного поля может быть реализована за пределами светового цилиндра в области пульсарного ветра. Сразу необходимо подчеркнуть, что в реальных условиях мы, конечно же, будем иметь дело не с обычным монополем, а с так называемым разделенным (*split*), в случае которого магнитный поток собирается в нижней полусфере и расходится в верхней (рис. 2.18). Иными словами, для существования указанного решения необходимо ввести разрез в экваториальной плоскости, разделяющий сходящийся и расходящийся потоки магнитного поля. При этом надо иметь в виду, что в такой геометрии, топологически эквивалентной дипольному магнитному полю, как в северной, так и в южной части магнитосферы будет происходить истечение заряда одного знака. Поэтому вдоль разреза должны течь и полоидальные поверхностные токи, замыкающие объемные токи и обеспечивающие сохранение электрического заряда. Подобный разрез может быть реализован при наличии аккреционного диска, в котором рассматриваемое здесь бессиловое приближение становится неприменимым.

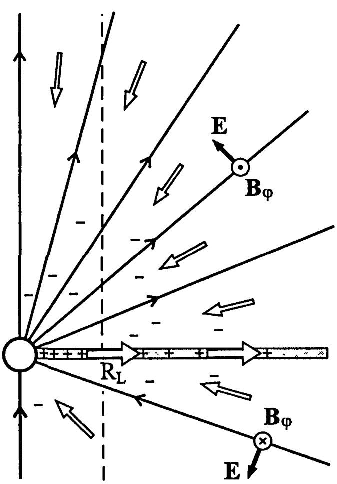


Рис. 2.18. Монопольное решение Майкеля ($E_\theta = B_\varphi$). В экваториальной плоскости имеется проводящий диск, вдоль которого происходит замыкание электрического тока (контурные стрелки)

УПРАЖНЕНИЕ. Прямой подстановкой в уравнение (2.96) покажите, что монопольное магнитное поле остается точным решением для произвольного профиля угловой скорости $\Omega_F(\Psi)$, если электрический ток попрежнему связан с ней соотношением [Blandford, Znajek, 1977; Beskin, Istomin, Pariev, 1992]

$$4\pi I(\Psi) = \Omega_F(\Psi)\left(2\Psi - \frac{\Psi^2}{\Psi_0}\right). \tag{2.224}$$

5. *Осесимметричная магнитосфера с ненулевым продольным током для параболического магнитного поля* [Blandford, 1976]. Как оказалось, точное решение можно построить и на основе «нефизического» параболического поля $\Psi \propto r \times \times(1-\cos\theta)$ (см. (1.122)), показанного на рис. 2.19. Такая структура магнитного поля вновь может быть реализована только при наличии проводящего диска, так что магнитные силовые линии в нижней и верхней полусферах должны зеркально повторять друг друга. Скачок тангенциальной компоненты магнитного поля будет связан с электрическими токами, текущими по поверхности диска. Следует сразу подчеркнуть, что в рассматриваемом здесь решении лишь форма магнитных поверхностей совпадает с вакуумным магнитным полем. Плотность же магнитных силовых линий должна отличаться от магнитного поля в вакууме. Иными словами, магнитный поток $\Psi(r,\theta)$ должен иметь вид $\Psi(r,\theta) = \Psi(X)$, где

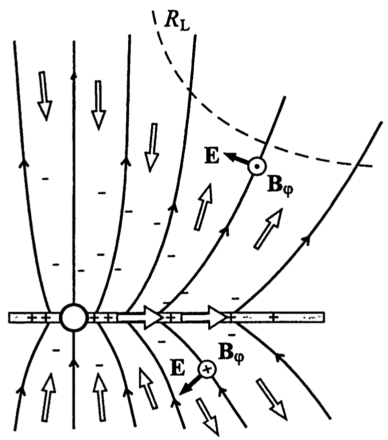


Рис. 2.19. Параболическая структура магнитного поля и продольных токов для «нефизического» решения (2.228)

$$X = r(1-\cos\theta). \tag{2.225}$$

Как и в предыдущем случае, подобная структура магнитного поля может иметь место лишь при определенной связи между угловой скоростью Ω_F и током I, а именно при выполнении соотношения

$$I(\Psi) = \frac{C\Omega_F(X)X}{2\left[1+\Omega_F^2(X)X^2/c^2\right]^{1/2}}, \tag{2.226}$$

где C — постоянная интегрирования. В этом случае магнитный поток находится из условия

$$\frac{d\Psi}{dX} = \frac{\pi C}{\left[1+\Omega_F^2(X)X^2/c^2\right]^{1/2}}. \tag{2.227}$$

Как мы видим, здесь решение также существует для любого профиля $\Omega_F(X)$. В частности, для постоянной угловой скорости оно имеет вид [Lee, Park, 2004]

$$\Psi(r,\theta) = \frac{\pi C}{\Omega_{\rm F}} \ln\left[\frac{\Omega_{\rm F} X}{c} + \sqrt{1 + \frac{\Omega_{\rm F}^2 X^2}{c^2}}\right]. \tag{2.228}$$

Подчеркнем, что несмотря на формальную справедливость приведенных выше решений для любой величины $\Omega_{\rm F}(X)X/c$, в действительности могут быть реализованы только конфигурации, в которых

$$\frac{\Omega_{\rm F}(X)X}{c} < 1. \tag{2.229}$$

Дело в том, что все магнитные поверхности должны пересекать область аккреционного диска (рис. 2.19), скорость которого и определяет величину угловой скорости $\Omega_{\rm F}$. Однако аккреционный диск не может вращаться со скоростью, превышающей скорость света. Поскольку же в экваториальной плоскости $X = \varpi$, условие (2.229) должно выполняться во всем пространстве. В результате структура магнитного поля не будет слишком сильно отличаться от вакуумного решения.

С другой стороны, при быстром уменьшении угловой скорости $\Omega_{\rm F}(\Psi)$ с ростом Ψ (т. е. при $\Omega_{\rm F}(\Psi)r/c \to 0$) продольный ток, согласно (2.226), оказывается сконцентрирован лишь в области $\Omega_{\rm F}(0)X \sim 1$, так что характерный магнитный поток, в пределах которого происходит замыкание тока, может быть оценен как

$$\Psi_0 = \frac{\pi C c}{\Omega_{\rm F}(0)}. \tag{2.230}$$

Это соотношение и определяет связь между константой интегрирования C и потоком Ψ_0, входящим, например, в определение параметра намагниченности σ (см. (2.77)).

К сожалению, «нефизическое» решение не столь известно, как монопольное решение Майкеля, хотя оно во многих отношениях гораздо лучше описывает структуру замагниченного ветра, истекающего из компактных объектов. В частности, оно хорошо моделирует процесс формирования струйных выбросов. С другой стороны, не надо забывать о том, что для существования магнитного поля, спадающего с расстоянием как r^{-1} (а именно так устроено магнитное поле, соответствующее потенциалу $X = r(1-\cos\theta)$), необходимы тороидальные токи, текущие в экваториальной плоскости. При отсутствии таких токов параболическое магнитное поле не может быть реализовано.

УПРАЖНЕНИЕ. Покажите, что для параболического решения, как и для монопольного решения Майкеля, на больших расстояниях ($r \to \infty$) электрическое поле сравнивается по величине с магнитным, так что $B_{\rm p} \ll B_\varphi$ и $B_\varphi \approx |\mathbf{E}|$, где

$$B_\varphi = \frac{C\Omega_{\rm F}}{2\left[1 + \Omega_{\rm F}^2(X)X^2/c^2\right]^{1/2}} \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}; \tag{2.231}$$

$$|\mathbf{E}| = \frac{C\Omega_{\rm F}}{2\left[1 + \Omega_{\rm F}^2(X)X^2/c^2\right]^{1/2}} \left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)^{1/2} \tag{2.232}$$

6. *Возмущение монопольного магнитного поля* [Beskin, Kuznetsova, Rafikov, 1998]. В заключение рассмотрим еще одну модельную задачу о малом возмущении монопольного решения Майкеля. Как уже говорилось, уравнение (2.96) требует трех граничных условий. Будем считать, что угловая скорость вращения $\Omega_{\rm F} = \text{const}$ остается такой же, как и в решении Майкеля, а продольный ток $I(R,\theta)$ мало отличается от равновесного тока (2.222):

$$I(R,\theta) = I_{\rm M}(\theta) + l(\theta) = I_{\rm M}^{(\rm A)} \sin^2\theta + l(\theta), \tag{2.233}$$

где $l(\theta) \ll I_{\rm M}^{(\rm A)}$. Поскольку возмущения предполагаются малыми, соотношение (2.233) определяет величину тока и как функцию потенциала Ψ.

Записывая решение уравнения (2.96) в виде $\Psi(r,\theta) = \Psi_0[1-\cos\theta + \varepsilon f(r,\theta)]$, в первом порядке по малому параметру $\varepsilon = l/I_{\rm M}$ получаем

$$\varepsilon(1-x^2\sin^2\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \varepsilon(1-x^2\sin^2\theta)\frac{\sin\theta}{x^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) - 2\varepsilon x\sin^2\theta\frac{\partial f}{\partial r} -$$

$$- 2\varepsilon\sin\theta\cos\theta\frac{\partial f}{\partial\theta} + 2\varepsilon(3\cos^2\theta - 1)f + \frac{1}{I_{\rm M}^{(\rm A)}\sin\theta}\frac{\rm d}{{\rm d}\theta}(l\sin^2\theta) = 0, \tag{2.234}$$

где $x = \Omega_{\rm F} r/c$. Как и следовало ожидать, уравнение (2.234) имеет особенность на световом цилиндре: $x\sin\theta = 1$.

В общем случае решение уравнения (2.234) чрезвычайно громоздко, но для специального выбора возмущения $l(\theta)$: $l(\theta) = \varepsilon_* I_{\rm M}^{(\rm A)}\sin^2\theta$, где $|\varepsilon_*| = \text{const} \ll 1$, может быть найдено его аналитическое решение. Оно имеет вид [Beskin, Kuznetsova, Rafikov, 1998]

$$\Psi(r,\theta) = \Psi_0\left[1 - \cos\theta + \varepsilon_*\left(\frac{\Omega_{\rm F} r}{c}\right)^2 \sin^2\theta\cos\theta\right]. \tag{2.235}$$

Выражение (2.235) показывает, что при $I < I_{\rm M}$ ($\varepsilon_* < 0$) силовые линии магнитного поля поджимаются к экватору ($\delta\Psi < 0$ при $\theta < \pi/2$). При этом световая поверхность имеет вид цилиндра с радиусом

$$\varpi_{\rm C} = |2\varepsilon_*|^{-1/4} R_{\rm L}, \tag{2.236}$$

на котором возмущение монопольного поля еще можно считать малым. При $I > I_{\rm M}$ ($\varepsilon_* > 0$) магнитные силовые линии разворачиваются в сторону оси вращения ($\delta\Psi > 0$ при $\theta < \pi/2$), а световая поверхность достигается лишь на бесконечности.

УПРАЖНЕНИЕ. Получите соотношение (2.236).

Рассмотренные выше точные решения пульсарного уравнения позволяют сформулировать следующие общие выводы.

1. Решение бессилового уравнения (2.96) может быть построено лишь в пределах световой поверхности ($|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$), которая для нулевого продольного тока совпадает со световым цилиндром ($\varpi = c/\Omega_{\rm F}$). За пределами светового цилиндра электрическое поле становится больше магнитного, что приводит к нарушению условия вморожен-

ности: $\mathbf{E} + [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]/c = 0$. В общем же случае световая поверхность не совпадает со световым цилиндром, а находится на бóльших расстояниях. Как мы увидим, наличие или отсутствие световой поверхности имеет решающее значение при обсуждении вопроса об ускорении частиц (в рамках бессилового приближения на световой поверхности энергия частиц формально становится бесконечной).

2. В случае нулевых продольных токов, независимо от угла наклона магнитной оси к оси вращения, магнитное поле на световом цилиндре должно быть перпендикулярно его поверхности [Henriksen, Norton, 1975; Бескин, Гуревич, Истомин, 1983]. Этот математический результат приводит к важнейшему физическому выводу: вектор Пойнтинга не имеет здесь нормальной компоненты, и следовательно, поток электромагнитной энергии через поверхность светового цилиндра равен нулю. Таким образом, при отсутствии продольного тока вторичная плазма, заполняющая магнитосферу, должна полностью экранировать магнитодипольное излучение нейтронной звезды [Бескин, Гуревич, Истомин, 1983; Mestel, Panagi, Shibata, 1999]. Поэтому потери энергии вращения радиопульсаров могут быть связаны только с пондеромоторным действием продольных токов, текущих в магнитосфере нейтронной звезды, так что формула (2.176) полностью определяет скорость замедления радиопульсаров.

3. При отсутствии продольного тока магнитные силовые линии концентрируются вблизи экватора. Иными словами, тороидальные токи $\mathbf{j} = \rho_{\mathrm{GJ}} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$, связанные с коротацией гольдрайховской плотности ρ_{GJ}, стремятся не сколлимировать, а напротив, развести магнитные силовые линии, прижав их к экватору. В результате магнитное поле вдоль оси вращения спадает не по степенному закону, а экспоненциально быстро. Если же продольный ток больше предельного значения, то происходит коллимация магнитных поверхностей к оси вращения (такое решение было построено в работе [Sulkanen, Lovelace, 1990]). При этом световая поверхность уходит на бесконечность.

2.6.2. Структура магнитосферы с продольными токами. Перейдем к ключевой части настоящей главы, а именно к обсуждению структуры магнитосферы при наличии продольного тока I и ускоряющего потенциала ψ. Важность этой проблемы очевидна: как было показано выше, потери энергии радиопульсаров полностью определяются продольным электрическим током, циркулирующим в магнитосфере. Поэтому вопрос о величине продольного тока (а следовательно, и о наличии или отсутствии световой поверхности) и является основным вопросом, на который должна ответить теория магнитосферы нейтронной звезды.

Здесь сразу нужно отметить два важных обстоятельства. Во-первых, как уже подчеркивалось, в рамках бессилового приближения продольный ток является свободным параметром. Во-вторых, на что также было обращено внимание, в рамках этого приближения не может быть решен вопрос об ускорении частиц. Поэтому в настоящей главе мы сможем проанализировать лишь ограниченный круг вопросов. Более последовательный анализ на основе полной магнитогидродинамической версии уравнения Грэда–Шафранова будет произведен в гл. 4.

С другой стороны, в присутствии продольного тока даже в бессиловом приближении уравнение (2.130) становится существенно нелинейным. Неудивительно поэтому, что в большинстве работ анализ проводился лишь для осесимметричной магнитосферы. Действительно, поскольку полный ток в пределах полярной шапки должен равняться нулю, выражение $I\mathrm{d}I/\mathrm{d}\Psi$ не может быть линейной функцией Ψ на всех открытых силовых линиях. В результате, за исключением замечательного решения Майкеля [Michel, 1973b], к настоящему моменту получен лишь ряд модельных решений [Бескин, Гуревич, Истомин, 1983; Любарский, 1990; Sulkanen, Lovelace, 1990; Fendt, Camenzind, Appl, 1995; Beskin, Malyshkin, 1998]; поэтому вопрос о строении магнитосферы с ненулевыми продольными токами до сих пор остается открытым. Что же касается случая наклонного ротатора, то здесь получены лишь самые предварительные результаты [Mestel, Wang, 1982; Bogovalov, 1999; Bogovalov, 2001].

Техническая трудность связана с тем, что уравнение (2.96) содержит критическую поверхность (световой цилиндр), прохождение которой требует разложения решения на собственные функции, не имеющие особенностей на этой поверхности. Именно такой метод решения и был описан выше при анализе магнитосферы с нулевым продольным током. Поэтому в большинстве случаев задача решалась лишь аналитически, что, в свою очередь, можно было сделать только для определенного класса функций $I(\Psi)$, а именно для случая, когда плотность тока постоянна во всей области открытых магнитных силовых линий (т. е. когда $I(\Psi) = k\Psi$), а замыкание тока происходит вдоль сепаратрисы, разделяющей открытые и замкнутые силовые линии. В подобной постановке уравнение (2.96) оказывается линейным не только в области замкнутых, но и в области разомкнутых магнитных силовых линий, а основная задача сводится к «сшивке» решений в двух указанных областях. Именно в этом направлении и были получены основные результаты, касающиеся структуры магнитосферы с продольным электрическим током. Лишь спустя четверть века после того, как пульсарное уравнение было сформулировано, появилась работа [Contopoulos, Kazanas, Fendt, 1999], в которой впервые удалось (путем итерационной процедуры) численно пройти особенность на световом цилиндре. Этот метод позволяет исследовать случай произвольного профиля тока $I(\Psi)$. Однако в настоящее время здесь получены лишь первые предварительные результаты [Ogura, Kojima, 2003; Goodwin et al., 2004], хотя сам подход представляется чрезвычайно плодотворным.

Обсудим аналитический метод построения решения более подробно, поскольку он позволяет сформулировать основные проблемы, возникающие при попытке построить самосогласованную модель магнитосферы радиопульсаров, содержащих продольные токи. Итак, рассмотрим осесимметричную бессиловую магнитосферу вращающейся нейтронной звезды. Как уже говорилось, при специальном выборе продольного тока и потенциала уравнение (2.96) может быть сведено к линейному. Это становится возможным, если в качестве $\Omega_{\rm F}(\Psi)$ и $I(\Psi)$ взять величины

$$\Omega_{\rm F} = \Omega(1-\beta_0), \tag{2.237}$$

$$I(\Psi) = \frac{\Omega}{2\pi} i_0 \Psi, \tag{2.238}$$

где i_0 и β_0 являются постоянными. Напомним, что их физический смысл определяется соотношениями (2.102) и (2.103).

В рассматриваемом случае уравнение равновесия в области открытых силовых линий в безразмерных переменных $x_r = \Omega\varpi/c$, $z' = \Omega z/c$ примет вид

$$-\nabla^2\Psi\left[1 - x_r^2(1-\beta_0)^2\right] + \frac{2}{x_r}\frac{\partial\Psi}{\partial x_r} - 4i_0^2\Psi = 0. \tag{2.239}$$

В области же замкнутых силовых линий, где, как уже подчеркивалось, потенциал $\psi = 0$ (т. е. $\beta_0 = 0$), имеем просто

$$-\nabla^2\Psi\left(1 - x_r^2\right) + \frac{2}{x_r}\frac{\partial\Psi}{\partial x_r} = 0. \tag{2.240}$$

В результате вся нелинейность окажется заключена в тонком переходном слое вблизи сепаратрисы, само положение которой должно быть найдено из решения. Отметим, что теперь, в отличие от случая с нулевым продольным током, нулевая точка магнитного поля не обязательно лежит на поверхности светового цилиндра $(x_r = 1)$.

Упражнение. Покажите, что и в данном случае решение уравнения (2.239), не имеющее особенности на поверхности $x_r = (1-\beta_0)^{-1}$, может быть построено в виде формального ряда по степеням $1 - x_1^2$ [Бескин, Гуревич, Истомин, 1983]:

$$R_\lambda(x_1) = \mathcal{D}(\lambda)\sum_{n=0}^{\infty} a_n (1 - x_1^2)^n, \tag{2.241}$$

где $x_1 = (\Omega\varpi/c)(1-\beta_0)$, $\alpha_1 = 4i_0^2/(1-\beta_0)^2$, коэффициенты разложения a_n удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$a_0 = 1;\quad a_1 = -\frac{\alpha_1}{4};\quad a_{n+1} = \frac{4n^2-\alpha_1}{4(n+1)^2}\,a_n + \frac{\alpha_1+\lambda^2}{4(n+1)^2}\,a_{n-1}, \tag{2.242}$$

а $\mathcal{D}^{-1} = (\pi/2)(1-\beta_0)^{-1}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

Определим граничные условия к системе уравнений (2.239) и (2.240). Согласно (1.63) в области открытых силовых линий уравнение (2.239) требует трех граничных условий. Прежде всего, ими являются величины i_0 и β_0, определяемые на поверхности звезды. Третьим же граничным условием будет не только значение (2.98) потенциала $\Psi(R,\theta)$ на поверхности звезды, но и значение потенциала Ψ на поверхности сепаратрисы, $z_*(x_r)$, разделяющей области открытой и замкнутой магнитосферы [Okamoto, 1974]:

$$\Psi^{(1)}[x_r, z_*(x_r)] = \Psi^{(2)}[x_r, z_*(x_r)]. \tag{2.243}$$

Наконец, условие регулярности (2.207) на световом цилиндре ($x_r = x_{\rm L}$) запишется теперь как

$$\frac{2}{x_r}\frac{\partial\Psi}{\partial x_r} - 4i_0^2\Psi = 0. \tag{2.244}$$

Ясно, что в присутствии продольного тока (т. е. при $B_\varphi \neq 0$) световая поверхность уже не совпадает со световым цилиндром. Соотношение (2.244) показывает также, что в рассматриваемой здесь постановке задачи на световом цилиндре силовые линии магнитного поля должны быть направлены от экватора ($B_z > 0$ при $\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{m} > 0$).

Что же касается области замкнутых силовых линий, в общем случае вообще не достигающей светового цилиндра, то для нее роль дополнительных граничных условий должны играть именно условия «сшивки» областей замкнутых и разомкнутых силовых линий. Ими являются, прежде всего, совпадение положения сепаратрисной силовой линии — $z = z_*(x_r)$ — для обеих областей (2.243), а также непрерывность величины $\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2$:

$$\{\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2\} = 0. \tag{2.245}$$

Последнее условие легко получить, интегрируя бессиловое уравнение равновесия, записанное в форме $(\nabla\cdot\mathbf{E})\mathbf{E} + [\nabla\times\mathbf{B}]\times\mathbf{B} = 0$, поперек тонкого переходного слоя [Okamoto, 1974; Любарский, 1990]. Важно, что условие (2.245) получается в пренебрежении кривизной магнитных силовых линий; поэтому им нельзя пользоваться вблизи особых точек.

УПРАЖНЕНИЕ. Получите условие (2.245) для декартовой системы координат, в которой поверхность раздела совпадает с плоскостью xy [Любарский, 1990].

Перечислим основные работы по бессиловой магнитосфере радиопульсаров (в которых, в частности, анализировалась система уравнений (2.239), (2.240) для реального дипольного поля нейтронной звезды).

1. В работе [Бескин, Гуревич, Истомин, 1983] в рамках аналитического приближения рассмотрен случай $i_0 \neq 0$ и $\beta_0 \neq 0$. При этом было использовано лишь соотношение (2.243); условие равновесия (2.245) не учитывалось. Кроме того, предполагалось, что область замкнутых силовых линий остается такой же, как и при отсутствии продольного тока.

2. В работе [Любарский, 1990], выполненной в рамках аналитического приближения для случая $\beta_0 = 0$, учитывались оба условия равновесия, (2.243) и (2.245). Вместе с тем было сделано дополнительное предположение о том, что последняя открытая силовая линия, как и в монопольном решении Майкеля, за пределами светового цилиндра совпадает с экватором. Наконец, в этой работе неявно предполага-

лось отсутствие обратного тока вдоль сепаратрисы [Beskin, Malyshkin, 1998], что существенно изменило структуру магнитного поля вблизи нулевой точки (см. рис. 2.25).

3. В работе [Sulkanen, Lovelace, 1990] рассмотрен случай большого продольного тока ($i_0 > 1$) при $\beta_0 = 0$. Как и следовало ожидать, при столь больших продольных токах имеет место коллимация магнитных поверхностей к оси вращения. При этом условия равновесия с областью замкнутых силовых линий вообще не использовались. В результате между открытыми и замкнутыми силовыми линиями возникла область, в которой полоидальное магнитное поле полностью отсутствует.

4. В работе [Beskin, Malyshkin, 1998] в рамках аналитического подхода учитывались как оба условия равновесия, так и возмущение области замкнутых силовых линий. Здесь также было показано, что нулевая точка может находиться в пределах светового цилиндра: $x_r^{(*)} < 1$. Однако строение магнитного поля в экваториальной области за пределами нулевой точки в этой работе не обсуждалось.

5. Наконец, в работе [Contopoulos, Kazanas, Fendt, 1999] для случая $\beta_0 = 0$ система уравнений (2.239), (2.240) впервые была исследована численно. Здесь также было сделано дополнительное предположение о совпадении последней открытой силовой линии с экватором (рис. 2.20). Неудивительно поэтому, что продольный ток (который при наличии дополнительного условия на экваторе уже не является свободным параметром) оказался близок к току $I_{\rm M}$ (см. (2.220)) для монопольного решения Майкеля. Вместе с тем условие равновесия (2.245) в этой работе учтено не было. Позже подобная постановка задачи обсуждалась в работах [Ogura, Kojima, 2003; Goodwin et al., 2004], причем в последней из них анализировался также и случай, когда нулевая точка магнитного поля может располагаться в пределах светового цилиндра.

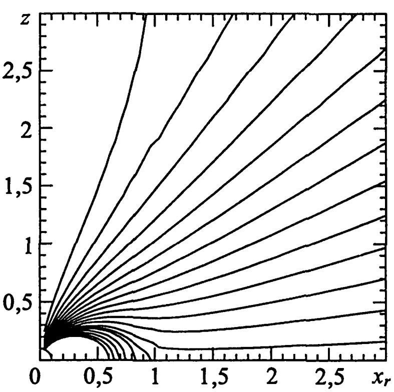
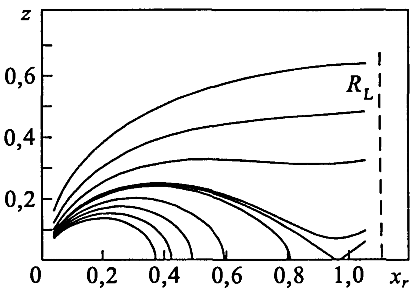


Рис. 2.20. Структура магнитосферы в модели [Contopoulos, Kazanas, Fendt, 1999]

На рис. 2.21 в качестве примера приведена структура магнитных поверхностей для ненулевых продольного тока i_0 и ускоряющего потенциала β_0, полученная численно в результате решения уравнений (2.239) и (2.240) [Beskin, Malyshkin, 1998]. Оказывается, решение задачи можно построить не при любых значениях i_0 и β_0: при определенных параметрах i_0 и β_0 решение уравнения (2.239) в области разомкнутых силовых линий указывает на то, что нулевая линия магнитного поля располагается за пределами светового цилиндра

$(x_{\rm L} = 1)$. Ясно, что в этом случае решение не может быть сшито с областью замкнутой магнитосферы, поскольку решение с $i_0 = 0$ не может быть распространено на область $x_r > 1$. Как видно из рис. 2.22, на плоскости параметров i_0–β_0 запрещенная область соответствует достаточно малым значениям i_0.



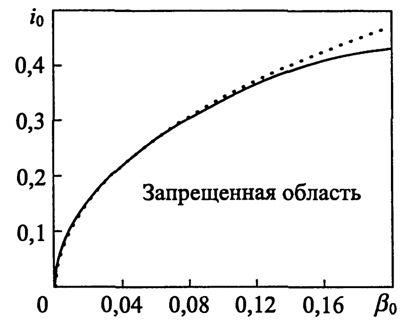


Рис. 2.21. Структура магнитосферы соосного ротатора при $i_0 = 0{,}39$ и $\beta_0 = 0{,}05$. Значения i_0 и β_0 не соответствуют «закону Ома» (2.246); поэтому нулевая точка лежит в пределах «светового цилиндра» $(x_r = 1)$. Световой цилиндр (штриховая линия) находится на расстоянии $x_r = 1(1 - \beta_0)$ от оси вращения [Beskin, Malyshkin, 1998]

Рис. 2.22. Область параметров i_0 и β_0, при которых возможно построение решения уравнения (2.239). Пунктиром показана линия (2.246)

Таким образом, мы приходим к важному заключению: существование в магнитосфере нейтронной звезды замкнутых магнитных силовых линий, не пересекающих световой цилиндр, может наложить определенные ограничения на циркулирующие в ней продольные токи. При этом детальные расчеты показывают, что полная энергия электромагнитного поля оказывается минимальной именно около граничной линии $\beta_0 = \beta_0(i_0)$, когда, кстати, нулевая точка магнитного поля лежит вблизи светового цилиндра [Beskin, Malyshkin, 1998]. Естественно предположить, что равновесие магнитосферы радиопульсаров реализуется лишь при определенной связи между ускоряющим потенциалом $\psi(P, B_0)$ и продольным током.

Справедливость подобного «закона Ома» [Бескин, Гуревич, Истомин, 1983] является, безусловно, чрезвычайно важным выводом. Как было показано, именно продольные токи определяют потери энергии вращения нейтронной звезды. Следовательно, при существовании связи между продольным током и ускоряющим потенциалом потери энергии нейтронной звезды будут полностью определяться конкретным механизмом рождения частиц у поверхности пульсара. Отметим, что соотношение согласования, задающее нелинейный «закон Ома», можно получить непосредственно из уравнения равновесия. Действительно, предполагая, что силовая линия $\Psi = \Psi_*$, соответствующая решению уравнения (2.239) в области открытой магнитосферы, проходит вблизи нулевой точки (где $B_z \propto (\partial\Psi/\partial x_r) = 0$), расположенной на световом цилиндре ($x_r = 1$), непосредственно из (2.239) имеем

$$\beta_0(i_0) = 1 - \left(1 - \frac{i_0^2}{i_{\max}^2}\right)^{1/2}, \tag{2.246}$$

где $i_{\max} = \sqrt{(\nabla^2\Psi)_*/4\Psi_*} \approx 0{,}79$. Как видно из рис. 2.22, аналитическая оценка (2.246) находится в хорошем согласии с численными расчетами. При этом соотношение (2.246) в целом остается справедливым и для наклонного ротатора [Beskin, Gurevich, Istomin, 1993].

С другой стороны, соотношение (2.246) в действительности задает лишь нижнюю границу для продольного тока (см. рис. 2.22). В других работах вывод о малой его величине не был независимо подтвержден. Поэтому вопрос о величине продольного тока остается открытым; единственное, что можно с уверенностью сказать, это то, что продольный ток, циркулирующий в магнитосфере радиопульсаров, по-видимому, не превышает критического: $I \sim I_{\rm GJ}$. В результате открытым остается вопрос и о точном значении потерь энергии $W_{\rm tot}$, и о существовании световой поверхности, на которой, как мы увидим, возможно дополнительное ускорение частиц. Впрочем, для многих приложений оценка $I \approx I_{\rm GJ}$ оказывается совершенно достаточной, так что соотношение (2.4) является хорошим приближением для величины $W_{\rm tot}$. Как бы то ни было, вопрос о величине продольного тока не может быть полностью решен в рамках бессилового приближения.

Постараемся теперь кратко сформулировать основные трудности, с которыми сталкивается теория бессиловой магнитосферы. Прежде всего, оказалось, что аналитический метод решения, изложенный выше, в действительности не позволяет однозначно определять структуру магнитного поля. Дело в том, что дипольное магнитное поле вблизи нейтронной звезды соответствует высоким гармоникам λ в разложении (2.182), тогда как видимая структура магнитного поля на масштабах, сравнимых со световым цилиндром, определяется малыми значениями λ. В результате решение

$$\Psi(\varpi, z) = \frac{|\mathbf{m}|}{R_{\rm L}} \int\limits_0^\infty \mathcal{Q}(\lambda) R_\lambda(\varpi) \cos\lambda z \, {\rm d}\lambda, \tag{2.247}$$

где $\mathcal{Q}(\lambda) \to 1$ при $\lambda \to \infty$, будет по-прежнему соответствовать дипольному магнитному полю при $\mathbf{r} \to 0$. Последнее связано с тем, что на фоне большого дипольного магнитного поля у поверхности нейтронной звезды не удается контролировать гармоники с малой величиной λ, которые становятся определяющими на больших расстояниях от звезды.

Открытым остается и вопрос о строении магнитного поля в экваториальной области за пределами нулевой точки. Как уже говорилось, в большинстве работ по примеру солнечного ветра предполагалось, что здесь должен формироваться токовый слой, разделяющий противоположно направленные потоки магнитного поля (см. рис. 2.20) [Любарский, 1990; Contopoulos, Kazanas, Fendt, 1999; Uzdensky, 2003; Goodwin et al., 2004]. При этом обычно считалось, что обратный ток заключен в бесконечно тонком слое, поэтому тороидальное магнитное поле B_φ не исчезает вплоть до сепаратрисной поверхности. Однако учет конечности ширины слоя с обратным током (т. е. непрерывности величины B_φ) может существенно изменить основные выводы о структуре магнитного поля вблизи сепаратрисы [Beskin, Malyshkin, 1998; Uzdensky, 2003]. В частности, очевидно, что если тороидальное магнитное поле B_φ в плоскости экватора равно нулю, то световая поверхность в плоскости $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$ должна проходить через точку $\varpi = c/\Omega$, $z = 0$ на поверхности светового цилиндра (подробнее см. работу [Uzdensky, 2003], в которой показано, что световая поверхность идет под конечным углом к плоскости экватора). Для солнечного ветра эта проблема не имеет места, поскольку Земля находится в пределах светового цилиндра.

С другой стороны, необходимо отметить, что указанная топология не является единственно возможной. Действительно, уже из вида самого уравнения (2.240) следует, что в нулевой точке (т. е. в точке, где $\partial\Psi/\partial x_r = 0$) должно быть выполнено либо условие $(\nabla^2\Psi)_* = 0$, либо условие $x_r^2 = 1$. Поэтому для достаточно больших продольных токов, при которых нулевая точка расположена в пределах светового цилиндра, должно выполняться условие $(\nabla^2\Psi)_* = 0$. Последнее означает, что угол между сепаратрисами составляет 90°. Такой же угол имеет место и для вакуумного случая. В результате подобная нулевая точка может быть сшита с внешней областью, не связанной магнитными силовыми линиями с поверхностью нейтронной звезды, например с цепочкой магнитных островов, находящихся в экваториальной плоскости (см. рис. 3.12, *б*). Лишь в предельном случае, когда нулевая точка лежит на световом цилиндре, т. е. при $x_r = 1$ (что, например, имеет место для решения с нулевым продольным током), величина $(\nabla^2\Psi)_*$ в ней остается конечной (при этом угол между сепаратрисами составляет 70°; см. рис. 2.14).

Наконец, не следует забывать и о том, что большинство решений, формирующих наш взгляд на структуру магнитосферы радиопульсаров, относилось к осесимметричному случаю. Для наклонного же ротатора могут возникнуть совершенно новые эффекты, которые полностью изменят всю картину происходящего. К сожалению, в этой области (за исключением рассмотренного выше случая нулевого продольного тока) не было получено надежных результатов, позволяющих с уверенностью судить о свойствах магнитосферы наклонного ротатора [Mestel, Wang, 1982; Bogovalov, 1999; Bogovalov, 2001].

Тем не менее попробуем сформулировать общие свойства, следующие из анализа уравнения (2.96), описывающего бессиловую магнитосферу нейтронной звезды.

1. В случае нулевых продольных токов независимо от угла наклона χ вторичная плазма, заполняющая магнитосферу, полностью экранирует магнитодипольное излучение нейтронной звезды [Бескин, Гуревич, Истомин, 1983; Mestel, Panagi, Shibata, 1999]. Поэтому потери энергии вращения радиопульсаров могут быть связаны только с пондеромоторным действием токов, текущих в магнитосфере пульсара и замыкающихся на поверхности нейтронной звезды. Следовательно, формула (2.176) полностью определяет скорость замедления радиопульсаров.

2. В случае, когда продольный ток совпадает с гольдрайховским (решение Майкеля), происходит полная компенсация двух противоположных процессов: деколлимации, связанной с тороидальными токами, и коллимации за счет существования продольных токов. В результате монопольное магнитное поле, которое является решением при отсутствии частиц, оказывается точным решением уравнения (2.96) и при наличии плазмы. Конечно, точное значение критического тока зависит от конкретной геометрии полоидального магнитного поля. Однако можно с уверенностью утверждать, что $j_{\rm crit} \approx \rho_{\rm GJ}c$.

3. При $j_{\parallel} > j_{\rm crit}$ световая поверхность (которая в общем случае не совпадает со световым цилиндром) уходит на бесконечность. Таким образом, для достаточно больших продольных токов решение действительно можно расширить до бесконечности. При этом магнитные поверхности будут сколлимированы в направлении оси вращения [Sulkanen, Lovelace, 1990] (что и нужно для объяснения струйных выбросов, недавно зарегистрированных у радиопульсаров [Markwardt, Ögelman, 1995; Hester et al., 1995]).

4. Если же существуют какие-либо физические ограничения сверху на величину продольного тока, так что $j_{\parallel} < j_{\rm crit}$, то магнитосфера содержит «естественную границу» — световую поверхность. Тогда полная задача, включающая в себя и внешние области, не может быть решена в рамках магнитной гидродинамики, хотя бы потому, что в этом случае неизбежно возникают области с многопотоковым течением.

2.6.3. Модели магнитосферы. Как уже говорилось, вопросы, связанные с пульсарным ветром, невозможно решить в рамках бессилового приближения. Поэтому здесь мы кратко перечислим лишь общие черты наиболее разработанных моделей магнитосферы радиопульсаров, вопросы же, связанные с ускорением частиц, отложим до последней главы.

Прежде всего, скажем несколько слов о световой поверхности, существование которой зависит от величины продольного тока. Дело в том, что, как уже подчеркивалось, наличие световой поверхности на конечном расстоянии от нейтронной звезды должно привести к эффективному ускорению частиц в пульсарном ветре. Так, если соотношение (2.246) действительно выполняется, то в моделях с затрудненным выходом частиц (в которых, напомним, электрический ток в области генерации плазмы может быть произвольным) продольный ток i_0 должен определяться именно из соотношения (2.246). В частности, при достаточно малых значениях падения потенциала ($\beta_0 < 1$) продольный ток тоже должен быть мал. Последнее и означает, что световая поверхность, на которой неизбежно возникает дополнительное ускорение частиц, должна находиться на конечном расстоянии от нейтронной звезды. При этом, конечно же, существование световой поверхности приводит к значительному усложнению теории; фактически, до сих пор ни одного сколько-нибудь надежного результата, касающегося поведения плазмы за пределами световой поверхности, получено не было.

Впрочем, не следует полагать, что существование световой поверхности может быть реализовано только в рамках модели с затрудненным выходом частиц с поверхности нейтронной звезды. Действительно, как видно уже на примере бессилового приближения, световая поверхность уходит на бесконечность лишь при достаточно больших значениях продольного тока. Как будет показано в последней главе, этот вывод остается справедливым и в более общем магнитогидродинамическом случае. В результате при любых дополнительных ограничениях сверху на величину продольного электрического тока можно ожидать появления световой поверхности на конечном расстоянии от пульсара. Однако в рамках модели генерации частиц со свободным выходом с поверхности звезды величина продольного электрического тока фиксирована и, что особенно важно, близка к гольдрайховской плотности тока. Поэтому не исключено, что в реальной дипольной геометрии магнитного поля пульсара этого тока недостаточно для существования непрерывного (в частности, трансзвукового) истечения плазмы вплоть до больших расстояний по сравнению с радиусом светового цилиндра. Во всяком случае (и это очень важно), в решении, полученном численно в работе [Contopoulos, Kazanas, Fendt, 1999], величина продольного тока $I(\Psi)$ меньше, чем предельный ток I_{M} (см. (2.220)), соответствующий монопольному решению Майкеля. Поэтому неудивительно, что световая поверхность для указанного решения находится на конечном расстоянии $\varpi \sim 3R_{\mathrm{L}}$ от нейтронной звезды [Ogura, Kojima, 2003]. Естественно, точное доказательство данного факта требует специального исследования.

Приведенные выше аргументы относительно существования световой поверхности касались осесимметричной магнитосферы. Как оказалось, в случае наклонного ротатора ситуация является гораздо более определенной. Действительно, в случае ортогонального ротатора гольдрайховская плотность заряда вблизи магнитного полюса должна быть в $(\Omega R/c)^{1/2}$ раз меньше, чем для осесимметричной магнитосферы. Можно ожидать, что в той же пропорции будет меньше и продольный ток, текущий вдоль открытых силовых линий. Однако тогда вблизи светового цилиндра тороидальное магнитное поле окажется много меньше полоидального. С другой стороны, как мы видели на примере решения Майкеля, для того чтобы световая поверхность ушла на бесконечность, необходимо, чтобы тороидальное магнитное поле на световом цилиндре было одного порядка с полоидальным полем. Поэтому если в действительности продольный ток $\mathbf{j}$ не превышает в $(\Omega R/c)^{-1/2}$ раз величину $\rho_{\mathrm{GJ}}^{90}c$, где ρ_{GJ}^{90} — средняя плотность заряда на полярной шапке при $\chi \sim 90°$ (для обычных пульсаров этот фактор достигает 10^2), то для ортогонального ротатора световая поверхность неизбежно должна находиться в непосредственной близости от светового цилиндра.

Таким образом, факт наличия или отсутствия световой поверхности должен быть основным образующим элементом при построении модели магнитосферы радиопульсаров. Постараемся проклассифицировать существующие модели именно с этой точки зрения.

1. Первый класс моделей предполагает наличие световой поверхности вблизи светового цилиндра, что может быть реализовано при достаточно малых продольных токах, текущих в магнитосфере. Впервые это предположение было четко сформулировано в работе [Бескин, Гуревич, Истомин, 1983]. Недавно к такому выводу пришли и авторы работы [Chiueh, Li, Begelman, 1998]. В рамках указанного подхода предполагается, что

— потери энергии вращающейся нейтронной звезды полностью определяются токовыми потерями;

— малая величина продольного тока $i_0 < 1$ приводит к появлению световой поверхности;

— вблизи световой поверхности происходит практически полный переход энергии, переносимой электромагнитным полем, в энергию частиц;

— здесь же происходит практически полное замыкание продольного тока, циркулирующего в магнитосфере (рис. 2.23).

Вопросы, касающиеся ускорения частиц вблизи световой поверхности, выходят за рамки нашего курса. Поэтому мы напомним лишь основные черты этого процесса. В простейшей цилиндрической геометрии путем решения уравнений двухжидкостной гидродинамики (описывающей как раз различие в движении электронов и позитронов) было показано [Бескин, Гуревич, Истомин, 1983], что значительная часть энергии, переносимой в пределах световой поверхности электромагнитным полем, в тонком переходном слое

$$\Delta r \sim \lambda^{-1} R_{\mathrm{L}} \tag{2.248}$$

вблизи световой поверхности передается частицам плазмы ($\lambda \sim 10^3 \div 10^5$ — множественность рождения частиц вблизи поверхности нейтронной звезды). Здесь же происходит и практически полное замыкание продольного тока, циркулирующего в магнитосфере (рис. 2.23). В результате естественным образом находит свое объяснение высокая эффективность ускорения частиц. Отметим, однако, что присутствие световой поверхности приводит к существенному усложнению всей задачи о строении магнитосферы нейтронной звезды. В этом случае удается сколь-либо надежно описать лишь внутренние области

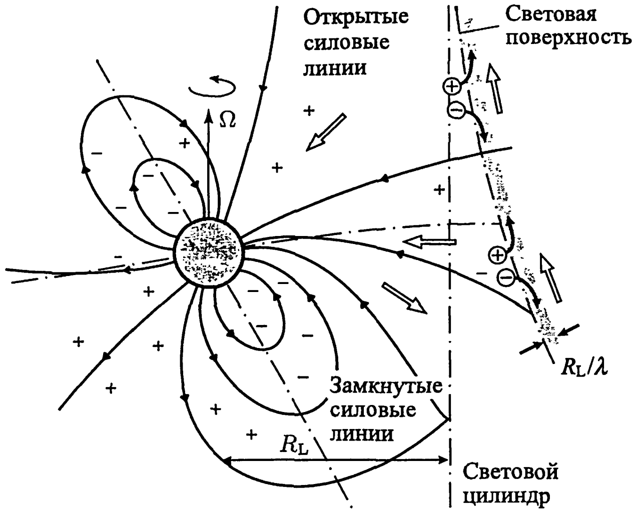


Рис. 2.23. Структура магнитосферы в модели [Beskin, Gurevich, Istomin, 1993]. Если $j_{\parallel} < j_{\rm crit}$, то магнитосфера содержит «естественную границу» — световую поверхность $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$

магнитосферы. Вопросы же о дальнейшей судьбе ускоренных частиц, о переносе энергии на больших расстояниях, а также о замыкании тока фактически остаются открытыми. Как уже подчеркивалось, для решения перечисленных задач требуется выйти за рамки одножидкостной гидродинамики; по-видимому, они вообще не могут быть решены в рамках аналитического подхода.

Выполненный расчет касался только цилиндрической геометрии, в которой, например, невозможно последовательно рассмотреть возмущение магнитных поверхностей и электрического потенциала. Оставалось непонятным, насколько полученные решения являются общими. Лишь недавно аналогичный результат на основе решения уравнений двухжидкостной гидродинамики был получен и для более реалистичной геометрии [Beskin, Rafikov, 2000], в которой полоидальное магнитное поле близко к монопольному. Оказалось, что практически все результаты, полученные для цилиндрического случая, остаются справедливыми и для более реалистичной двумерной геометрии. В частности, было подтверждено, что энергия частиц достигает здесь величин порядка

$$\mathcal{E}_{\rm e} \sim eB_0R\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\Omega R}{c}\right)^2 \sim 10^4\ \text{МэВ}\left(\frac{\lambda}{10^3}\right)^{-1}\left(\frac{B_0}{10^{12}\,[\text{Гс}]}\right)\left(\frac{P}{1\,[\text{с}]}\right)^{-2}, \quad (2.249)$$

но не превышает 10^6 МэВ, когда становятся существенными эффекты радиационного трения. Однако, как и в одномерном случае, вопрос о построении решения за пределами световой поверхности остался открытым. Тем не менее построенное решение вполне может служить «заготовкой» для последующих численных расчетов, поскольку во внутренней области удалось получить простые аналитические соотношения для всех физических параметров.

2. Второй класс моделей также предполагает существование «области выделения энергии» (*dissipation domain*) вблизи светового цилиндра (рис. 2.24), однако здесь постулируется лишь незначительная передача энергии от электромагнитного поля к частицам [Mestel, Shibata, 1994; Mestel, 1999]. Иными словами, в рамках этой модели предполагается, что

— продольный ток близок к критическому ($i_0 \approx 1$);

— вблизи световой поверхности происходит переход лишь незначительной части энергии, переносимой электромагнитным полем, в энергию частиц;

— вблизи световой поверхности происходит лишь частичное замыкание продольного тока, циркулирующего в магнитосфере;

— на больших расстояниях от нейтронной звезды основной поток энергии по-прежнему связан с потоком вектора Пойнтинга.

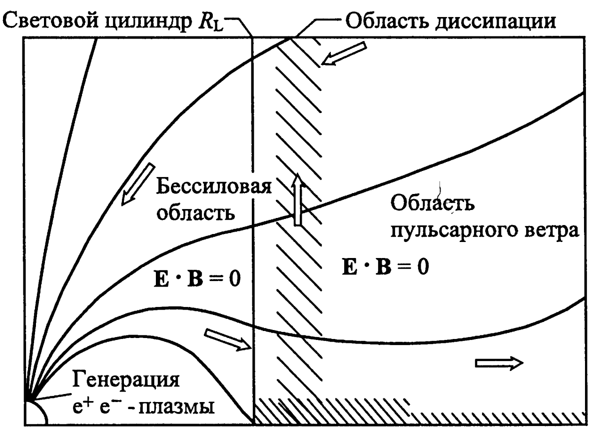


Рис. 2.24. Структура магнитосферы в модели Местеля [Mestel, Shibata, 1994]

Отметим, что в данной модели свойства переходного слоя только постулировались. В частности, предполагалось, что в переходном слое происходит лишь малое изменение продольного тока, тогда как относительное изменение электрического потенциала вдоль магнитных силовых линий (а значит, и изменение угловой скорости Ω_F) считалось значительным. В результате световая поверхность вновь отодвигалась на бесконечность. Именно поэтому на больших расстояниях от нейтронной звезды основной поток энергии по-прежнему был связан с потоком вектора Пойнтинга.

Следует подчеркнуть, что основное свойство рассматриваемого переходного слоя — большое изменение угловой скорости Ω_F при относительно малом изменении продольного тока — находится в противоречии со свойствами области ускорения вблизи световой поверхности. Как показал анализ уравнений двухжидкостной магнитной гидродинамики [Бескин, Гуревич, Истомин, 1983; Beskin, Rafikov, 2000], наиболее быстро в направлении, перпендикулярном переходному слою, должен изменяться продольный ток, а не электрический потенциал.

Приведенный результат легко может быть объяснен. Как уже говорилось, вблизи световой поверхности энергия частиц формально стремится к бесконечности. В итоге происходит нарушение уравнения вмороженности, что и требует перехода к более точным двухжидкостным уравнениям. Физически это приводит к тому, что электроны и позитроны начинают ускоряться в разные стороны вдоль электрического поля (см. рис. 2.23). Как следствие возникает сильный полоидальный электрический ток, в создании которого участвует вся плотность $\lambda|\rho_{GJ}|/|e|$ электронов и позитронов. Этот полоидальный ток и вызывает резкое уменьшение тороидального магнитного поля, т. е. уменьшение потока вектора Пойнтинга. Что же касается электрического потенциала, то его изменение в слое определяется плотностью электрического заряда, которая пропорциональна лишь разности плотностей электронов и позитронов. Поскольку же в магнитосфере радиопульсаров плотность частиц на много порядков превышает гольдрайховскую плотность $n_{GJ} = |\rho_{GJ}|/|e|$, относительное изменение тока в слое должно существенно превышать изменение электрического потенциала. Фактически именно с этим и связано появление фактора $1/\lambda$ в выражении (2.248).

3. Наконец, к третьему классу можно отнести модели, в которых световая поверхность отсутствует [Любарский, 1990; Bogovalov, 1997b; Contopoulos, Kazanas, Fendt, 1999]. Иными словами, в них предполагается, что

— продольный ток больше критического ($i_0 > 1$);

— световая поверхность уходит на бесконечность;

— замыкание продольного тока происходит на больших расстояниях от светового цилиндра;

— на больших расстояниях от нейтронной звезды основной поток энергии по-прежнему связан с потоком вектора Пойнтинга (рис. 2.25).

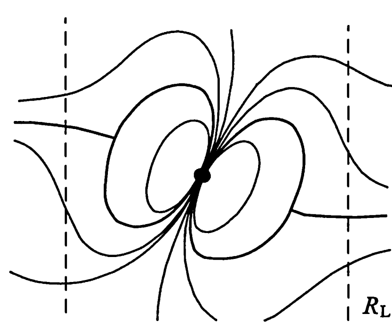


Рис. 2.25. Структура магнитосферы в модели, в которой световая поверхность отсутствует [Lyubarskii, 1996]

В настоящее время данный класс моделей исследован достаточно подробно, хотя вновь главным образом лишь для осесимметричного случая. Вместе с тем в рамках указанного подхода до сих пор не удалось получить эффективную трансформацию энергии от электромагнитного поля к частицам пульсарного ветра. Более подробно этот вопрос будет рассмотрен в последней главе.

2.7. Заключение

Как мы видим, в настоящее время последовательная теория магнитосферы радиопульсаров еще очень далека от своего завершения. Одной из основных проблем здесь является ограниченность аналитических методов, не позволяющих в общем случае построить решение даже в достаточно простом бессиловом приближении. По-видимому, именно по этой причине в девяностых годах появилось не больше десятка работ, посвященных указанному кругу вопросов. Попытки же сформулировать задачу о строении магнитосферы в общем виде как результат движения частиц в самосогласованных электромагнитных полях долгое время находились за пределами имевшихся вычислительных возможностей [Krause-Polstorff, Michel, 1984, 1985; Petri, Heyvaerts, Bonazzola, 2002]. В последние годы в данном направлении были предприняты новые усилия [Smith, Michel, Thacker, 2001; Spitkovsky, Arons, 2003], которые, однако, пока не привели к успеху.

С другой стороны, в рамках бессилового приближения нельзя определить величину продольного тока, текущего в магнитосфере, а значит, и найти потери энергии. Поэтому бессиловая постановка задачи неизбежно требует конкретизации свойств среды на границе бессиловой области, будь то бесконечность или токовый слой, который приходится вводить в экваториальной области во многих моделях. Как мы убедимся, эта проблема будет естественным образом снята в рамках полной версии уравнения Грэда–Шафранова, учитывающей конечность массы частиц.

ГЛАВА 3

БЕССИЛОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ — МАГНИТОСФЕРА ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

3.1. Астрофизическое введение — центральная машина в ядрах активных галактик

Настоящая глава в основном будет посвящена строению магнитосферы сверхмассивных черных дыр, для которых роль магнитных полей представляется более существенной, чем для галактических черных дыр солнечных масс. Поэтому именно во введении к этой главе целесообразно обсудить вопросы, связанные с генерацией магнитного поля в аккреционных дисках. Мы также кратко остановимся здесь на вопросе о том, как влияет магнитное поле на дисковую аккрецию и на процессы истечения вещества.

Прежде всего, напомним, что в настоящее время уже мало кто сомневается в реальности черных дыр. На сегодняшний день обнаружено несколько десятков космических источников, в которых предполагается существование этих необычных объектов, предсказываемых общей теорией относительности [Черепащук, 2003]. Черные дыры могут образовываться на последней стадии эволюции массивных звезд, например как результат взрыва сверхновых, или же в тесных двойных системах, в которых в результате аккреции на нейтронную звезду ее масса становится больше предела устойчивости ($\sim 3M_{\odot}$). Понятно, что характерные массы подобных черных дыр не могут превышать значений $3 \div 30\, M_{\odot}$. Именно такие массы и наблюдаются у галактических кандидатов в черные дыры.

Если постараться кратко сформулировать основные черты центральной машины в активных галактических ядрах, то сейчас большинство астрофизиков склоняется к следующей картине [Шапиро, Тьюколски, 1985; Бегельман, Блендфорд, Рис, 1987]. В центре родительской галактики находится сверхмассивная черная дыра (ее масса достигает $10^8 \div 10^9\, M_{\odot}$), на которую происходит аккреция окружающего вещества [Rees, 1984]. Только в этом случае удается объяснить чрезвычайно высокую эффективность энерговыделения и компактность центральной машины. Энергетическим источником активности галактических ядер может быть как энергия вращения черной дыры:

$$E_{\rm tot} = \frac{J_{\rm r}\Omega^2}{2} \sim 10^{63} \left(\frac{M}{10^9 M_{\odot}}\right) \left(\frac{a}{M}\right)^2 \text{ эрг}, \tag{3.1}$$

так и энергия аккрецирующего вещества. В обоих случаях, когда, фактически, энергетический источник связан с гравитационной энергией, удается получить чрезвычайно высокую эффективность переработки массы падающего вещества в наблюдаемое излучение. Кстати, косвенно в пользу существования черной дыры говорит и тот факт, что эддингтоновская светимость:

$$L_{\mathrm{Ed}} \approx 10^{47} \left(\frac{M}{10^9 M_{\odot}}\right) \text{ эрг/с}, \tag{3.2}$$

близка к характерной светимости активных галактических ядер [Зельдович, Новиков, 1967а].

Далее, обычно (хотя уже далеко не всеми) предполагается, что аккреция вещества имеет дисковый характер [Lynden-Bell, 1969]. Тем самым в пространстве естественным образом возникает выделенное направление (ось вращения), вдоль которого и происходит формирование струйных выбросов. Вообще говоря, не исключено, что подобное истечение может быть реализовано и без регулярного магнитного поля, например за счет нагрева короны [Galeev, Rosner, Vaiana, 1979] или за счет собственной избыточной энергии аккрецирующего вещества [Blandford, Begelman, 1999]. Однако самой предпочтительной является модель, в которой роль приводного ремня между центральной машиной и струйным выбросом выполняет регулярное полоидальное магнитное поле [Blandford, 1976; Lovelace, 1976]. Действительно, на сегодняшний день именно электродинамическими процессами удается наиболее естественно объяснить и ускорение частиц, и их эффективное излучение (например, за счет синхротронного механизма).

Поскольку сама черная дыра не в состоянии иметь собственное магнитное поле (так называемая «теорема об отсутствии волос»; см. ниже), генерация крупномасштабного магнитного поля в ее окрестности может происходить лишь в самом аккреционном диске [Новиков, Фролов, 1986]. Именно с таким регулярным магнитным полем и связывают в большинстве случаев недостающее звено, дающее возможность понять как механизм энерговыделения, эффективно передающий энергию от вращающейся черной дыры и/или внутренних частей диска к активным областям, так и механизм коллимации, позволяющий образовать струйные выбросы. Иными словами, для объяснения активности ядер галактик привлекается пульсарная идея униполярного индуктора, для работы которого необходимо наличие

— регулярного полоидального магнитного поля;

— вращения центрального объекта (приводящего к появлению индукционного электрического поля $\mathbf{E}$);

— продольного электрического тока (приводящего к появлению тороидального магнитного поля B_{φ}).

В рамках описываемой модели, как и в случае магнитосферы радиопульсаров, поток энергии практически полностью связан с потоком электромагнитной энергии (вектора Пойнтинга), а образование струйных выбросов обусловлено, в конечном счете, хорошо известным свойством притяжения параллельных токов. Таким образом, основными образующими элементами центральной машины являются сверхмассивная черная дыра, аккреционный диск и регулярное магнитное поле.

3.1.1. Возможные механизмы образования черных дыр. Многочисленные данные наблюдений действительно указывают на присутствие в центрах галактических ядер (как активных, так и «спокойных» галактик) сверхмассивного центрального объекта [Черепащук, 2003]. В настоящее время существует несколько точек зрения на вопрос о том, образовались ли сверхмассивные черные дыры уже после возникновения галактик, в самом процессе их образования, или же они существовали задолго до появления галактик и сами способствовали их образованию [Rees, 1984; Докучаев, 1991].

Образование массивных черных дыр в догалактическую эру может быть связано с гравитационной неустойчивостью первичных флуктуаций плотности, приводящей к коллапсу наиболее проэволюционировавших (и следовательно, наиболее плотных) областей темной материи [Зельдович, Новиков, 1966, 1967b; Hawking, 1971; Полнарев, Хлопов, 1985; Гуревич, Зыбин, 1995; Гуревич, Зыбин, Сирота, 1997; Niemeyer, Jedamzik, 1999]. К образованию черных дыр могут привести и фазовые переходы, связанные с различными топологическими дефектами, например доменными стенками [Hawking, Moss, Stewart, 1982; Moss, 1994; Khlopov et al., 1999; Rubin, Khlopov, Sakharov, 2000] или космологическими струнами [Hawking, 1989; Polnarev, Zembowicz, 1991]. Здесь, однако, необходимо подчеркнуть, что таким образом могут возникать только черные дыры относительно малых масс. Черные же дыры больших масс образуются лишь при нестандартном спектре начальных флуктуаций, имеющем достаточно протяженное плато. Впрочем, все перечисленные механизмы являются в значительной степени дискуссионными; представляется преждевременным говорить о них в связи с образованием массивных черных дыр в центрах галактик.

Благоприятные условия для образования массивного центрального объекта могут реализоваться на ранних этапах формирования галактик [Rees, 1997], когда в молодой галактике еще много газа, не сконденсировавшегося в звезды. Падающий к центру газ сначала формирует сферическую составляющую звездного населения. Однако часть его может быть не задействована в звездообразовательном процессе; к тому же массивные звезды первого поколения быстро теряют часть своей массы в процессе эволюции. Поэтому на определенном этапе формирования звездной составляющей свободный газ уже не принимает участия в звездообразовании: его конденсации препятствует, в частности, давление излучения [Rees, 1993; Haehnelt, Rees, 1993]. Затем, когда путем тепловой диссипации газ теряет значительную часть углового момента и кинетической энергии, он неминуемо конденсируется в черную дыру, поскольку газовый диск динамически неустойчив. К указанному моменту в образовании дыры может принять участие и газ из первых поколений проэволюционировавших массивных звезд. При этом черная дыра либо образуется как целое из газа, часть которого уже прошла один цикл звездной эволюции, либо ее образование идет через промежуточный этап сверхмассивной звезды ($M \sim 10^3 \div 10^6 M_\odot$) [Rees, 1997]. Имеющая относительно малое время жизни ($\sim 10^7$ лет), такая звезда неизбежно коллапсирует в черную дыру. В дальнейшем масса черной дыры может увеличиваться за счет аккреции и слияния черных дыр при столкновениях галактик [Haehnelt, Kauffmann, 2000].

В качестве аргумента в пользу подобного сценария образования черной дыры часто рассматривается и тот факт, что имеет место сильная корреляция между массой центрального объекта и массой балджа (старой сферической составляющей звездного населения, массивной в случае эллиптических галактик и маломассивной в случае спиральных: $M_c \simeq 0{,}1\% M_{\mathrm{buldge}}$ [Kormendy, Richstone, 1995; Faber et al., 1997]. В общем же случае масса получившейся в результате описанного процесса черной дыры зависит не только от массы сферической звездной составляющей, но и, например, от углового момента галактики. Действительно, в отсутствие эффективного механизма отвода излишнего углового момента процесс формирования черных дыр будет подавлен. Поэтому наиболее яркие квазары наблюдаются именно в эллиптических галактиках, у которых удельный угловой момент заметно меньше, чем в спиральных.

Наконец, черные дыры могут образоваться уже после формирования галактик за счет динамической эволюции их центральных частей. При этом гравитационный коллапс идет через эволюционное сжатие центрального скопления звезд [Begelman, Rees, 1978; Rees, 1984; Quinlan, Shapiro, 1990; Berezinsky, Dokuchaev, 2001]. Когда в процессе эволюции центрального скопления дисперсия скоростей звезд увеличивается до критического значения $\sim 620(m_*/M_\odot)^{1/2}(r_*/R_\odot)^{-1/2}$ км/с, средняя кинетическая энергия звезд сравнивается с их гравитационной энергией связи. Если две обычные звезды сталкиваются или проходят на близком расстоянии друг от друга с такой кинетической энергией, они неизбежно разрушаются за счет приливных возмущений [Spitzer, Saslaw, 1966; Colgate, 1967; Sanders, 1970; Spitzer, 1971; Dokuchaev, 1991]. Выжить могут лишь компактные объекты, такие как нейтронные звезды или черные дыры малых (звездных) масс. На этом этапе центральная область галактики представляет собой скопление компактных звезд, погруженное в газ, образовавшийся в результате разрушения звезд на предшествующем этапе эволюции. В дальнейшем в процессе динамической эволюции скопления дисперсия скоростей компактных звезд все более возрастает, и когда она становится порядка скорости света, неизбежно происходит коллапс скопления в черную дыру [Rees, 1984; Berezinsky, Dokuchaev, 2001]. Какой из процессов — конденсация газа или слияние компактных звезд — окажется наиболее эффективным, зависит от конкретных параметров начального звездного скопления.

3.1.2. Природа активности и переменность. Согласно современным представлениям массивные центральные объекты присутствуют в большинстве галактик и становятся активными, когда на них в достаточном количестве падает вещество («горючее»). Вне зависимости от содержания межзвездного газа, вблизи центрального объекта всегда имеет место процесс, обогащающий веществом его окрестности; это происходящий за счет приливного возмущения разрыв звезд, пролетающих вблизи черной дыры [Lacy, Townes, Hollenbach, 1982; Rees, 1988; Evans, Kochanek, 1989; Khokhlov, Novikov, Pethick, 1993; Frolov et al., 1994]. Оценки показывают, что, например, в Галактике M31 такое событие случается раз в 10^4 лет. В результате аккреционный диск вокруг центрального объекта обогащается. Указанное индивидуальное событие (длительностью около нескольких месяцев) может быть зарегистрировано, причем подобные наблюдения могли бы предоставить еще одну возможность исследования ближайших окрестностей центрального объекта. В настоящее время ведутся поиски таких событий [Renzini et al., 1995], однако возможности этого метода ограничены из-за сложности возникающих газодинамических расчетов; поэтому даже при наличии соответствующих наблюдений вряд ли удастся вычислить параметры центрального объекта (скорость вращения черной дыры, угол наклона и массу диска и т. п.).

В некоторых активных галактиках наблюдались короткие события длительностью от нескольких минут до суток [Papadakis, Lawrence, 1993, 1995; Halpern, Marshall, 1996; Tagliaferri et al., 1996]. Возможно, такая переменность связана с нестабильностями аккреционного диска, например с появлением в нем горячего пятна [Iwasawa et al., 1998]. Механизм подобных вспышек изучен недостаточно хорошо. Однако в этом случае мы не можем восстановить характеристики центрального объекта по наблюдаемой переменности, поскольку вспышка не связана непосредственно с орбитальным движением вокруг черной дыры, а скорее является проявлением какой-то локальной неустойчивости. С другой стороны, такая переменность возникает естественным образом в модели аккреционного диска, в которой линия железа излучается холодными (10^6 K) облаками газа. Действительно, если холодное облако, перемещаясь, случайно оказывается между наблюдателем и центральным объектом, рентгеновский поток должен претерпевать значительные изменения [Abrassart, Czerny, 2000].

Другой вид переменности — так называемые квазипериодические осцилляции (КПО). Их характерное время составляет от суток для сейфертовских галактик до месяца для наиболее активных квазаров, поэтому усложняется сам процесс сбора данных. Однако по крайней мере один пример КПО уже найден — это сейфертовская галактика IRAS 18325-5926 с периодом переменности около 16 ч [Iwasawa et al., 1998]. Указанное время совпадает с орбитальным периодом обращения вокруг черной дыры с массой $M \sim 10^7 \div 10^8 M_{\odot}$ на расстоянии $10 \div 20 r_g$. Вероятно, в данном случае мы непосредственно наблюдаем собственные моды колебания аккреционного диска — дискосейсмические моды, впервые применявшиеся для описания аккрецирующих источников внутри нашей Галактики [Kato, Fukui, 1980; Nowak, Wagoner, 1992, 1993; Nowak et al., 1997; Perez et al., 1997]. Возможно также, что КПО возникают за счет геометрического эффекта: если ось диска не совпадает с осью вращения черной дыры, то благодаря эффектам ОТО на расстояниях менее $10r_g$ возникает сила, стремящаяся изменить ориентацию диска [Bardeen, Petterson, 1975; Rees, 1984]. В итоге в диске возникают неустойчивости и колебания и, как следствие, переменность в излучении. Все перечисленные процессы происходят в сильном гравитационном поле центральной черной дыры и поэтому представляют исключительный интерес в плане изучения ее ближайших окрестностей. Наконец, в последнее время рассматривалась диски, в которых существуют области с противоположно направленными скоростями вращения [Kuznetsov et al., 1999]. Подобная ситуация реализуется в случае, когда аккреционный диск питается за счет приливного разрушения звезд, которые могут иметь произвольный угловой момент.

3.1.3. Замагниченный аккреционный диск. При изучении аккреционных дисков вблизи сверхмассивных черных дыр, помимо чисто гидродинамических моделей, рассмотренных в первой главе, большое внимание уделяется исследованию замагниченных течений в случае, когда в диске имеется достаточно сильное регулярное полоидальное магнитное поле [Campbell, Papaloizou, Agapitou, 1998; Stone, Pringle, 2001; Krolik, 1999a]. Ниже мы отдельно обсудим как природу возникновения такого поля, так и его роль в формировании струйных выбросов. Здесь же мы остановимся на роли регулярного магнитного поля в аккреции вещества на центральную черную дыру, а также рассмотрим влияние магнитного поля на процесс истечения плазмы с поверхности аккреционного диска.

Сначала перечислим основные эффекты, к которым приводит регулярное магнитное поле. Прежде всего, как мы увидим, открытые силовые линии являются чрезвычайно эффективными проводниками, вдоль которых могут быть отведены не только энергия, но, что не менее важно, и угловой момент. Поэтому даже в случае, когда плотность энергии магнитного поля в диске по величине значительно уступает плотности энергии плазмы, роль магнитного поля может оказаться существенной. В частности, аккреция (т. е. появление ненулевой радиальной скорости v_r) становится возможной и при отсутствии вязкости. Кроме того, появление дополнительных сил Ампера, связанных с сильным регулярным магнитным полем в диске, способно изменить угловую скорость вращения плазмы. Отметим, что магнитное поле может оказаться существенным и для слабоионизированных дисков (например, в их внешних, и следовательно, слабо разогретых областях), поскольку эффекты амбиполярной диффузии способны эффективно связать нейтралы с ионизированной компонентой [Königl, 1989].

Были рассмотрены различные варианты замагниченных течений, начиная со слабоионизированных дисков, в которых нарушение вмороженности связано с амбиполярной диффузией заряженных частиц [Wardle, Königl, 1993; Königl, 1989; Li, 1996], и кончая системами, в которых определяющей является омическая диффузия [Li, 1995; Ferreira, Pelletier, 1993ab, 1995; Ogilvie, 1997; Ogilvie, Livio, 1998; Kaburaki, 2000]. В целом проведенные расчеты показали, что магнитное поле слабо влияет на угловую скорость вращения газа (это стало бы возможным лишь в случае, когда плотность энергии магнитного поля превысила бы плотность энергии плазмы). Более существенный эффект состоит в значительном увеличении скорости радиальных движений, благодаря чему аккреция может стать сверхзвуковой уже на больших расстояниях от черной дыры [Li, 1995; Shalybkov, Rüdiger, 2000]. Наконец, присутствие сильных электрических токов в самом аккреционном диске способно искривить магнитные силовые линии полоидального магнитного поля уже на масштабах самого диска [Ogilvie, 1997; Ogilvie, Livio, 1998]. Последнее, в свою очередь, должно привести к заметному увеличению скорости истечения плазмы.

Дело в том, что, как впервые показали Р. Блендфорд и Д. Пейн [Blandford, Payne, 1982], магнитное поле может сыграть роль пращи при эжекции частиц с поверхности аккреционного диска. Действительно, рассмотрим движение частицы, вращающейся по кеплеровской орбите в присутствии регулярного полоидального магнитного поля, наклоненного к вертикальной оси под углом α_{m}. При достаточно сильном магнитном поле заряженная частица может двигаться лишь вдоль магнитных силовых линий; поэтому она будет вынуждена сохранять свою начальную угловую скорость. Как легко проверить, в этом случае при $\alpha_{\mathrm{m}} > 30^\circ$ эффективный потенциал, равный

$$\varphi_{\mathrm{ef}}(\varpi, z) = -\frac{GM}{\varpi_0}\left[\frac{\varpi_0}{(\varpi^2+z^2)^{1/2}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\varpi}{\varpi_0}\right)^2\right] \tag{3.3}$$

и связанный как с силой гравитации центрального тела, так и с центробежной силой, вызывает ускорение частицы в направлении от оси вращения. В результате истечение с поверхности диска становится возможным даже для холодной плазмы.

УПРАЖНЕНИЕ. Покажите, что частица, движущаяся в эффективном потенциале (3.3), при $\alpha_m > 30^\circ$ действительно начинает ускоряться от оси вращения.

Конечно, рассмотренный процесс не является универсальным; в противном случае диск вообще не мог бы существовать [Ogilvie, Livio, 1998]. Истечение становится возможным лишь в короне, где плотность энергии магнитного поля превышает плотность энергии плазмы. В этом случае движение частиц (полоидальное) в целом должно происходить вдоль магнитных силовых линий. Кроме того, в работе Блендфорда и Пейна не учитывались эффекты, связанные с конечной толщиной диска, в котором, в частности, наклон магнитных силовых линий должен изменяться. Тем не менее эта работа во многом определила направление дальнейших исследований. Впоследствии предпринимались неоднократные попытки построить единую модель, описывающую как сам аккреционный диск, где магнитное поле слабо влияет на движение вещества, так и корону, в которой становится возможным истечение вдоль магнитных силовых линий.

Наконец, еще более эффективным истечение плазмы становится в случае, когда эжекция частиц сопровождается генерацией сильного продольного электрического тока, а следовательно, и возникновением азимутального магнитного поля (в предыдущем примере истечение имело место и при $B_\varphi = 0$). Как мы увидим, именно такая модель оказывается наиболее предпочтительной для объяснения эффективного истечения вещества с поверхности аккреционного диска.

В заключение отметим, что даже в том случае, когда основная роль в работе центральной машины принадлежит электродинамическим процессам, значение аккреционного диска нельзя недооценивать. Прежде всего, как подробно обсуждается в следующем пункте, именно в аккреционном диске должно генерироваться регулярное магнитное поле, в которое оказывается погруженной черная дыра. Далее, возможно, что рождение электронно-позитронной плазмы, необходимое для работы центральной машины, связано с жесткими гамма-квантами, излучаемыми из внутренних (и потому наиболее горячих) областей аккреционного диска. Наконец, не исключено, что центральной машиной как раз являются быстровращающиеся внутренние части аккреционного диска, а не черная дыра [Livio, Ogilvie, Pringle, 1999]. Кроме того, именно свойства аккреционного диска определяют свойства высокочастотного излучения, регистрируемого в области центрального источника.

3.1.4. Генерация регулярного магнитного поля. Как уже говорилось, внешнее магнитное поле может не только существенно изменить режим аккреции (и тем самым повлиять на темп энерговыделения аккрецирующего вещества), но и облегчить формирование струйных выбросов. Поэтому вопрос о происхождении магнитного поля, безусловно, является одним из ключевых вопросов, возникающих при построении модели центральной машины в активных галактических ядрах.

С теоретической точки зрения вопрос о магнитном поле распадается на две проблемы: на вопрос о генерации регулярного магнитного поля и на вопрос о его структуре вне аккреционного диска. Дело в том, что, как уже было отмечено, черная дыра не может иметь своего собственного магнитного поля. В частности, любая петля магнитного поля (например, магнитный диполь), пересекающая горизонт черной дыры, исчезает для внешнего наблюдателя за динамическое время $\tau \sim r_g/c$ [Торн, Прайс, Макдональд, 1988]. Исключением является лишь монопольное магнитное поле, однако для его существования требуется привлечь большое количество магнитных монополей, что, несомненно, не соответствует действительности.

С другой стороны, маловероятно, что сильное магнитное поле связано с его нагребанием из окружающего пространства за счет вмороженности магнитного поля в аккрецирующее вещество. Во всяком случае, ясно, что плотность энергии магнитного поля не может превышать плотности энергии аккрецирующей плазмы. Последнее соображение, естественно, относится и к процессу генерации магнитного поля в диске. Дело в том, что как магнитная вязкость $\nu_{\rm m}$, приводящая к нарушению условия вмороженности, и следовательно, к диффузии магнитного поля, так и обычная вязкость ν, приводящая к аккреции вещества, а значит, к адвекции и усилению магнитного поля, имеют, по-видимому, одну и ту же природу — магнитную турбулентность [Balbus, Hawley, 1998]. Таким образом, магнитное число Прандтля ($\mathcal{P} = \nu\nu_{\rm m}$) не может существенно отличаться от единицы. Как следует непосредственно из анализа лидирующих членов уравнений магнитной гидродинамики [Lubow, Papaloizou, Pringle, 1994], значительное усиление внешнего (например, однородного) магнитного поля при его увлечении на аккрецирующий центр возможно только при выполнении условия $(r/H)\mathcal{P} \gg 1$ (где H — полутолщина аккреционного диска). В результате мы приходим к выводу о том, что в реальных условиях указанный процесс не может играть определяющей роли. Усиление поля удалось получить, лишь привлекая дополнительный механизм его генерации в диске [Campbell, 1999], но это уже совсем другая история.

Таким образом, источник регулярного магнитного поля следует искать не во внешней среде, а в самом аккреционном диске. Действительно, аккреционный диск обладает всеми свойствами, необходимыми для генерации такого поля. В нем имеют место как дифференциальное вращение (вещество вращается со скоростями, близкими к кеплеровской скорости $v_{\rm K} = (GM/r)^{1/2}$, и следовательно, угловая частота вращения зависит от расстояния до центра), так и неоднородная по вертикали плотность вещества, что приводит к появлению зеркально несимметричной турбулентности. В результате аккреционный диск может работать как динамо-машина, усиливая стохастическое магнитное поле [Balbus, Hawley, 1998].

Тем не менее механизм генерации магнитного поля до последнего времени оставался неизвестным. В частности, был неясен ответ на вопрос о самой возможности генерации достаточно сильного регулярного магнитного поля (порядка 10^4 Гс), необходимого, как мы увидим, для эффективной работы электродинамического механизма выделения энергии в активных галактических ядрах. Напомним, что подобная оценка связана с простым предположением, утверждающим, что плотность энергии магнитного поля сравнивается с плотностью аккрецирующей плазмы, дающей эддингтоновскую светимость (3.2). В результате имеем

$$B_{\rm Ed} \approx 10^4 \left(\frac{M}{10^9 M_\odot}\right)^{-1/2} \text{ Гс.} \qquad (3.4)$$

УПРАЖНЕНИЕ. Получите формулу (3.4).

Ясно, однако, что эддингтоновское магнитное поле $B_{\rm Ed}$ может рассматриваться лишь как оценка сверху. Действительно, поскольку механизм усиления магнитного поля имеет турбулентный характер, для генерации предельно сильного поля в любом случае необходимо, чтобы турбулентные движения аккрецирующего вещества содержали энергию, сравнимую с его полной энергией. Кроме того, сам механизм динамо должен быть достаточно эффективным, чтобы перекачать значительную часть энергии турбулентных движений в магнитное поле. Поэтому в действительности магнитное поле оказывается заметно меньше, чем это следует из оценки (3.4). Наконец, как известно, в дисковых системах очень сложно сгенерировать квазидипольное магнитное поле — основная растущая мода имеет квадрупольный характер [Рузмайкин, Соколов, Шукуров, 1988].

Вместе с тем именно в последние годы в данной области был достигнут несомненный прогресс. Он связан с существенным увеличением мощности современных компьютеров, позволивших проводить прямое моделирование турбулентных движений и, как следствие, определять ключевые коэффициенты переноса, в частности модельный параметр $\alpha_{\rm SS}$ (см. (1.9)), с помощью прямого усреднения соответствующих корреляторов (ранее предполагалось, что машинная вязкость не позволит реализовать турбулентность при численном моделировании [Balbus, Hawley, 1998]).

В настоящее время в качестве основного источника турбулентности, необходимого для эффективной работы динамо-машины, рассматривается магниторотационная неустойчивость, обсуждавшаяся Е. П. Велиховым еще в 1959 г. в связи с проблемой устойчивости лабораторной плазмы, но, как это очень часто бывает, не известная в астрофизике и переоткрытая С. Балбусом и Дж. Холли уже для случая аккреционных дисков [Balbus, Hawley, 1991]. Она связана с неустойчивостью медленных магнитозвуковых волн в сдвиговом течении, реализуемом при кеплеровском вращении плазмы (физически этот механизм тесно связан с механизмом ускорения плазмы, предложенным Блендфордом и Пейном, а именно с сохранением угловой скорости движения плазмы вдоль магнитных силовых линий). Важным свойством указанной неустойчивости является отсутствие порога; поэтому она имеет место при сколь угодно малых магнитных полях. Иными словами, даже малое магнитное поле приводит к появлению новых неустойчивых степеней свободы.

Численное моделирование магнитной турбулентности показало, что в аккреционных дисках действительно может происходить эффективное усиление регулярного магнитного поля [Brandenburg, Sokoloff, 2002; von Rekowski et al., 2003]. Кроме того, прямые расчеты принесли и ряд неожиданных результатов. Оказалось, что в аккреционных дисках динамо-параметр $\alpha_{\rm dyn}$, входящий, например, в феноменологическое уравнение

$$\frac{\partial\langle\mathbf{B}\rangle}{\partial t} = \nabla \times (\alpha_{\mathrm{dyn}}\langle\mathbf{B}\rangle), \tag{3.5}$$

может оказаться отрицательным [Brandenburg et al., 1995; Ziegler, Rüdiger, 2000]. Как хорошо известно [Рузмайкин, Соколов, Шукуров, 1988], в подобном случае усиление поля за счет процесса низшего порядка (называемого $\alpha\omega$-динамо) становится невозможным, так что может быть реализован лишь процесс более высокого порядка — $\alpha^2\omega$-динамо. Однако в последнем случае усиливаться должно не квадрупольное, а дипольное регулярное магнитное поле, что и требуется для наиболее эффективной работы центральной машины. Наконец, прямым вычислением были получены уже гораздо большие значения вязкого параметра α_{SS} (см. (1.9)), достигающие $\alpha_{\mathrm{SS}} \sim 0{,}01$ [Stone et al., 1996; Arlt, Rüdiger, 2001].

В заключение нельзя не отметить серию работ, в которых анализировалась возможность генерации магнитного поля в диске за счет эффектов общей теории относительности. Дело в том, что увлечение инерциальных систем отсчета, связанное с эффектом Лензе–Тирринга, может привести к тому, что вращающаяся черная дыра, погруженная в магнитное поле, станет источником дополнительных электромагнитных напряжений. Как видно из уравнения индукции, записанного в системе отсчета локально невращающихся наблюдателей:

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times (\alpha\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}), \tag{3.6}$$

эффекты общей теории относительности приводят к появлению дополнительных слагаемых, $\nabla \times [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}]$, играющих роль ЭДС индукции. В частности, известная в теории динамо теорема Каулинга [Альвен, Фельтхаммар, 1967], запрещающая существование осесимметричного стационарного динамо, перестает быть справедливой. Фактически последнее связано с дифференциальным вращением локально невращающихся наблюдателей, благодаря которому тороидальное электрическое поле может возникнуть из полоидального.

В результате была высказана гипотеза [Khanna, Camenzind, 1994, 1996ab] о том, что подобный процесс действительно может приводить к усилению магнитного поля вблизи вращающейся черной дыры. Однако, как показали более аккуратные расчеты для реальных параметров черной дыры ($a < M$) [Brandenburg, 1996], усиление полоидального магнитного поля, вызванное эффектом Лензе–Тирринга, всегда оказывается подавлено прямым процессом, связанным с индукционным действием изменяющегося магнитного поля. Тем не менее идея о генерации магнитного поля в аккреционном диске за счет эффектов общей теории относительности представляется весьма плодотворной и, несомненно, требует дополнительного исследования [Khanna, 1998; Tomimatsu, 2000]. Во всяком случае, при построении последовательной теории генерации магнитного поля во внутренних областях аккреционного диска эффекты общей теории относительности обязательно должны быть учтены.

Подводя итоги, можно сказать, что в настоящее время не существует прямых доказательств того, что в ядрах активных галактик имеются сильные регулярные магнитные поля, заметно влияющие на динамику аккреционных течений. Тем не менее даже в случае, когда при описании аккреции газа влиянием магнитного поля можно пренебречь, магнитное поле, генерирующееся в аккреционном диске, в силу своего дальнодействия способно играть определяющую роль вне аккреционного диска (в окрестности черной дыры и в короне), в частности задавать динамику истекающей плазмы.

3.2. Основные уравнения

3.2.1. Электромагнитное поле и (3 + 1)-расщепление. Перейдем к последовательному изложению теории бессиловой магнитосферы черной дыры. Сразу отметим, что везде в дальнейшем мы по-прежнему будем рассматривать течения в метрике Керра, а не в метрике Керра–Ньюмана. Иными словами, мы будем считать, что полный заряд черной дыры достаточно мал и поэтому не может влиять на кривизну пространства-времени в ее окрестности. Как будет показано ниже, в случае стационарной магнитосферы, полностью заполненной плазмой, это условие выполняется с большим запасом. Влияние заряда черной дыры на электродинамические процессы в ее магнитосфере обсуждалось, например, в работах [Ruffini et al., 1999; Punsly, 2001].

Как уже было продемонстрировано на примере гидродинамических течений, чрезвычайно удобным языком для описания процессов, происходящих в сильных гравитационных полях, является (3 + 1)-расщепление. Например, уравнения Максвелла

$$\nabla_\alpha F_{\beta\gamma} + \nabla_\beta F_{\gamma\alpha} + \nabla_\gamma F_{\alpha\beta} = 0; \tag{3.7}$$

$$\nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = 4\pi j^\beta \tag{3.8}$$

для стационарных течений ($\partial/\partial t = 0$) приобретают тогда вид

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho_{\mathrm{e}}; \tag{3.9}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \tag{3.10}$$

$$\nabla \times (\alpha\mathbf{E}) = \mathcal{L}_{\beta}\mathbf{B}; \tag{3.11}$$

$$\nabla \times (\alpha\mathbf{B}) = -\mathcal{L}_{\beta}\mathbf{E} + 4\pi\alpha\mathbf{j}. \tag{3.12}$$

Здесь производная Ли, $\mathcal{L}_\beta$, действующая по правилу $\mathcal{L}_\beta\mathbf{A} = (\beta\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\nabla)\beta$, возникает за счет дифференциального вращения опорных наблюдателей (которые, напомним, и определяют трехмерные физические величины в своей лаборатории). Далее мы вновь будем пользоваться системой единиц $G = 1$ и $c = 1$.

Физический смысл уравнений (3.9) и (3.10) вполне прозрачен. Независимо от кривизны пространства магнитное поле является вихревым, а источниками электрического поля могут быть лишь электрические заряды. С другой стороны, в случае вращающейся черной дыры генерация гравитомагнитного поля приводит к появлению производных Ли в правых частях уравнений (3.11) и (3.12). Производные Ли подобны дополнительным слагаемым, возникающим в квазистационарном формализме в правых частях уравнений (2.116) и (2.118). В результате уравнения Максвелла (3.9)–(3.12) оказываются близки по форме с уравнениями (2.115)–(2.118). Как мы увидим, именно благодаря действию гравитомагнитных сил в уравнении индукции (3.11) появляется электродвижущая сила, приводящая к потерям энергии вращающейся черной дыры. В плоском пространстве такая ЭДС может быть связана лишь с изменяющимся во времени магнитным потоком через данный контур. В случае же вращающейся черной дыры изменение магнитного потока связано с «потоком пространства», движущимся с угловой скоростью ω Лензе–Тирринга.

Далее, как и в плоском пространстве, в осесимметричном случае магнитное поле удобно выразить через скалярную функцию $\Psi(r,\theta)$, имеющую смысл магнитного потока. В результате получаем

$$\mathbf{B} = \frac{\nabla\Psi\times\mathbf{e}_{\hat{\varphi}}}{2\pi\varpi} - \frac{2I}{\alpha\varpi}\mathbf{e}_{\hat{\varphi}}, \tag{3.13}$$

где снова $I(r,\theta)$ есть полный электрический ток внутри области $\Psi < \Psi(r,\theta)$, а индексы с шапочками соответствуют физическим компонентам векторов. Благодаря определению (3.13) уравнение Максвелла $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$ выполняется автоматически. Легко видеть, что попрежнему выполнено и условие $\mathbf{B}\cdot\nabla\Psi = 0$, поэтому соотношение $\Psi(r,\theta) = \mathrm{const}$ действительно задает магнитные поверхности. Коэффициент пропорциональности в (3.13) опять выбран таким образом, чтобы величина Ψ совпадала с магнитным потоком внутри трубки $\Psi = \mathrm{const}$, т. е. $\mathrm{d}\Psi = \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$.

3.2.2. «Теорема об отсутствии волос». Прежде чем двигаться дальше, докажем важную теорему, которая обычно фигурирует как «теорема об отсутствии волос». В простейшем случае она формулируется следующим образом [Frolov, Novikov, 1998]: *черная дыра не может обладать собственным магнитным полем*; *электрическое же поле за пределами невращающейся черной дыры должно совпадать с полем точечного заряда*, *расположенного в ее центре*.

В качестве иллюстрации рассмотрим простейший случай невращающейся (шварцшильдовской) черной дыры. В этом случае уравнения (3.11) и (3.12) могут быть переписаны в виде

$$\nabla\times(\alpha\mathbf{E}) = 0; \tag{3.14}$$

$$\nabla\times(\alpha\mathbf{B}) = 0. \tag{3.15}$$

Здесь, естественно, предполагается, что черная дыра находится в вакууме. Поэтому уравнения (3.14) и (3.15) должны быть дополнены соотношениями $\nabla\cdot\mathbf{E}=0$ и $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$. Как мы видим, в случае невращающейся черной дыры уравнения для электрического и магнитного полей разделяются и оказываются полностью идентичными. В результате для доказательства достаточно рассмотреть структуру лишь магнитного поля. Воспользовавшись определением (3.13), а также соотношением (1.226) для записи уравнения $\nabla \times (\alpha\mathbf{B}) = 0$, для $I = 0$ получаем

$$r^2\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(1-\frac{r_\mathrm{g}}{r}\right)\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right]+\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)=0. \tag{3.16}$$

УПРАЖНЕНИЕ. Получите уравнение (3.16).

Дифференциальный оператор в уравнении (3.16) лишь дополнительным фактором $1 - r_\mathrm{g}/r$ отличается от оператора $\hat{\mathcal{L}}$ (см. (1.114)). Поэтому его решение снова можно искать в форме (см., например, [Ghosh, 2000])

$$\Psi(r,\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} g_m(r)Q_m(\theta), \tag{3.17}$$

причем теперь радиальные функции $g_m(r)$ должны быть найдены из решения уравнений

$$x(x-1)\frac{\mathrm{d}^2 g_m}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}g_m}{\mathrm{d}x}-m(m+1)g_m=0, \tag{3.18}$$

где $x = r/r_\mathrm{g}$.

Рассмотрим решения уравнения (3.18) более подробно. Первое фундаментальное решение имеет вид

$$g_m^{(1)}(x) = x^2F(1-m, m+2, 3, x), \tag{3.19}$$

где $F(a,b,c,x)$ — гипергеометрическая функция. Поскольку $1-m$ есть целое число, меньшее нуля для $m \neq 0$, функции $g_m^{(1)}(x)$ сводятся к полиномам. В результате с точностью до размерного множителя для полной функции магнитного потока имеем

1) для $m = 1$

$$\Psi_1^{(1)}(r,\theta) = r^2\sin^2\theta \text{ — однородное поле (см. рис. 1.4, } a\text{);}$$

2) для $m = 2$

$$\Psi_2^{(1)}(r,\theta) = \left(r^3-\frac{3}{4}r_\mathrm{g}r^2\right)\sin^2\theta\cos\theta \text{ — нулевая точка (см. рис. 1.4, } в\text{);}$$

3) ...

$$\Psi_m^{(1)}(r,\theta) \propto r^m Q_m(\theta) \text{ при } r\to\infty.$$

Решение с $m = 0$ [Blandford, Znajek, 1977; Ghosh, Abramowicz, 1997]:

$$\Psi_0^{(1)}(r,\theta) = r(1-\cos\theta)+r_\mathrm{g}(1+\cos\theta)[1-\ln(1+\cos\theta)]-2r_\mathrm{g}(1-\ln 2) \tag{3.20}$$

(где последнее слагаемое добавлено для выполнения условия $\Psi(r,0)=0$), как и для гидродинамического случая, является «нефизическим», т. е. может быть реализовано лишь при наличии токов вне черной дыры. Второе же семейство решений можно записать в виде

$$g_m^{(2)}(x) = x^{-m}\left[F\left(m, m+2, 1, 1-\frac{1}{x}\right)\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) + P_m(x)\right], \quad (3.21)$$

где $P_m(x)$ — некоторые полиномы, регулярные на горизонте. Так, например,

$$P_1(x) = x^2 + \frac{x}{2}; \quad (3.22)$$

$$P_2(x) = 4x^4 - x^3 - \frac{x^2}{6}; \quad (3.23)$$

$$P_3(x) = 15x^6 - \frac{25x^5}{2} + x^4 + \frac{x^3}{12}. \quad (3.24)$$

В результате второе семейство имеет при $m \neq 0$ следующие асимптотики:

$$\Psi_m^{(2)}(r,\theta) \to r^{-m}Q_m(\theta) \quad \text{при} \quad r \to \infty;$$

$$\Psi_m^{(2)}(r,\theta) \to \ln\left(1-\frac{r_g}{r}\right)Q_m(\theta) \quad \text{при} \quad r \to r_g.$$

В частности, для дипольной гармоники $m=1$ находим

$$\Psi_1^{(2)}(r,\theta) = |\mathbf{m}|\frac{\sin^2\theta}{r}f(r), \quad (3.25)$$

где [Гинзбург, 1964]

$$f(r) = -3\frac{r^3}{r_g^3}\left[\ln\left(1-\frac{r_g}{r}\right) + \frac{r_g}{r} + \frac{1}{2}\frac{r_g^2}{r^2}\right] \approx 1 + \frac{3}{4}\frac{r_g}{r}. \quad (3.26)$$

Поскольку $f(r) \to 1$ при $r \to \infty$, на больших расстояниях потенциал (3.25) действительно соответствует дипольному магнитному полю. Что же касается нулевой гармоники, то она вновь описывает монопольное поле:

$$\Psi_0^{(2)} = \Psi_0(1-\cos\theta). \quad (3.27)$$

Как мы видим, первое семейство решений не исчезает на бесконечности; поэтому такое магнитное поле может быть реализовано лишь при наличии внешних источников. Иными словами, подобные поля, не имеющие особенности на горизонте, не являются собственными магнитными полями черной дыры. Что же касается второго семейства, имеющего на больших расстояниях мультипольное поведение: r^{-m}, то все входящие в него решения, за исключением случая $m=0$, имеют логарифмическую особенность на горизонте. Последнее и означает, что если поле вблизи магнитного или электрического диполя (квадруполя и т. д.), помещенного в точку $r_g + \delta r$, остается заданным, то на больших расстояниях наблюдатель зарегистрирует поле, в $\ln(r/\delta r)$ меньшее, чем при отсутствии черной дыры. Исключение составляет только монопольное решение (3.27), однако оно в отсутствии аккреционного диска может быть реализовано лишь для электрического поля.

Действительно, рассмотрим поле точечного заряда Q, помещенного в вакууме вблизи поверхности черной дыры в точке с радиальной координатой r_0. Его электрическое поле, получаемое из решения уравнений $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ и $\nabla \times (\alpha \mathbf{E}) = 0$, имеет вид [Linet, 1976]

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{r_0 r^2}\left[M\left(1 - \frac{r_0 - M + M\cos\theta}{\mathcal{D}}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{r((r-M)(r_0-M) - M^2\cos\theta)(r - M - (r_0 - M)\cos\theta)}{\mathcal{D}^3}\right]\mathbf{e}_{\hat{r}} +$$
$$+ \left[\frac{\alpha Q(r_0 - 2M)\sin\theta}{\mathcal{D}^3}\right]\mathbf{e}_{\hat{\theta}}, \qquad (3.28)$$

где $\mathcal{D}^2 = (r-M)^2 + (r_0-M)^2 - M^2 - 2(r-M)(r_0-M)\cos\theta + M^2\cos^2\theta$. Как показано на рис. 3.1, электрическое поле деформируется таким образом, что внешний наблюдатель регистрирует поле электрического заряда, находящегося в центре, а не вблизи горизонта черной дыры (подробнее см. [Торн, Прайс, Макдональд, 1988]). Следовательно, два разноименных заряда, находящиеся вблизи горизонта на фиксированном расстоянии друг от друга, для удаленного наблюдателя оказываются вблизи центра черной дыры, причем чем ближе к горизонту событий расположены заряды, тем меньше кажущееся расстояние между ними. Последнее и означает уменьшение дипольного момента для удаленного наблюдателя.

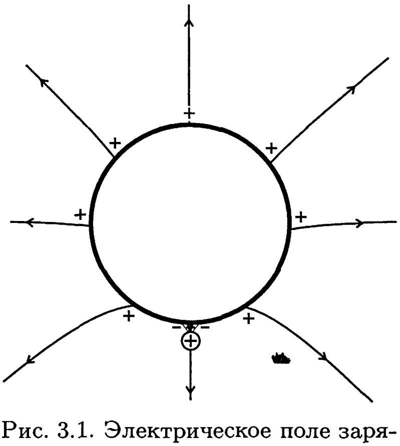


Рис. 3.1. Электрическое поле заряда, находящегося вблизи горизонта черной дыры, и фиктивные заряды, появляющиеся вблизи поверхности «растянутого горизонта»

Подчеркнем, что выше речь шла о стационарных конфигурациях. Впервые теорема об отсутствии волос была доказана именно для статического магнитного поля [Гинзбург, 1964]. Однако данная теорема имеет и несомненный динамический смысл. Она означает, что в случае падения магнитного диполя на поверхность черной дыры магнитное поле на больших расстояниях от этой поверхности за характерное время $\tau \sim r_g/c$ стремиться к нулю. Впоследствии «теорема об отсутствии волос» была обобщена и на все другие физические поля (см., например, [Frolov, Novikov, 1998]).

Наконец, не нужно забывать, что любой процесс вблизи черной дыры длится конечное время (во всяком случае, он ограничен временем жизни Вселенной) и уже поэтому не является стационарным. В результате в координатах Бойера–Линдквиста вблизи самого горизонта всегда существует нестационарная область (волна включения), распространяющаяся по направлению к горизонту [Торн, Прайс, Макдональд, 1988]. За счет релятивистского сокращения времени для удаленного наблюдателя волна включения никогда не достигает горизонта событий. Данное свойство потребовало введения в мембранном подходе поверхности «растянутого горизонта», который находится над переходной областью и выше которого поля можно считать стационарными. Именно такое стационарное поле и изображено на рис. 3.1.

3.2.3. Вакуумное приближение. «Теорема об отсутствии волос» показывает, что магнитосфера черной дыры может возникнуть лишь при наличии внешних источников. Как уже говорилось, очевидным кандидатом на роль «внешней обмотки» является аккреционный диск. Здесь мы обсудим простейшие вакуумные решения, которые, как и в случае магнитосферы радиопульсаров, помогут прояснить некоторые детали более реалистичной магнитосферы, заполненной плазмой.

Прежде всего, рассмотрим черную дыру, помещенную во внешнее однородное магнитное поле B_0. Точное решение для произвольной скорости ее вращения, параллельной внешнему магнитному полю, было получено в работе Р. Уолда [Wald, 1974]. Благодаря осесимметричности задачи это решение удобно записать для функции магнитного потока $\Psi(r,\theta)$:

$$\Psi(r,\theta) = \pi \frac{\Sigma^2 - 4a^2 Mr}{\rho^2} \sin^2\theta \cdot B_0. \tag{3.29}$$

В частности, при отсутствии вращения мы вновь возвращаемся к решению

$$\Psi(r,\theta) = \pi r^2 \sin^2\theta \cdot B_0. \tag{3.30}$$

С другой стороны, в случае вращающейся черной дыры, как видно из уравнений Максвелла (3.11) и (3.12), производные Ли будут играть роль источников поля даже для стационарного случая. В результате вращение черной дыры приводит к возникновению электрического поля [Торн, Прайс, Макдональд, 1988]

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} = -\frac{B_0 a\Sigma}{\rho^2}\Bigg[&\frac{2\Delta r}{\Sigma^2} + 2\,\frac{\rho^2}{\Sigma^2}(r-M) - \\
&-2\,\frac{\rho^2\Delta}{\Sigma^4}(2r^3 + 2a^2 r - ra^2\sin^2\theta + Ma^2\sin^2\theta) + \frac{M\sin^2\theta}{\rho^2}\times(\Sigma^2 - 4a^2 Mr)\times \\
&\times\left(\frac{1}{\Sigma^2} + 2\,\frac{ra^2\sin^2\theta}{\Sigma^4}(r-M) - 4\,\frac{r^2}{\Sigma^4}(r^2+a^2)\right)\Bigg]\mathbf{e}_{\hat r} - \frac{B_0 a\Sigma\Delta^{1/2}}{\rho^2}\sin 2\theta\,\times \\
&\times\left[-\frac{a^2}{\Sigma^2} + \frac{\rho^2\Delta}{\Sigma^4}a^2 + \frac{Mr\sin^2\theta}{\rho^2\Sigma^4}(\Sigma^2 - 4a^2 Mr)a^2\right]\mathbf{e}_{\hat\theta}.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Напомним, что здесь $\rho = r^2 + a^2\cos^2\theta$. Еще раз напомним, что речь идет о полях, измеряемых опорными наблюдателями.

Упражнение. Покажите, что

а) магнитный поток Ψ_*, проходящий через горизонт черной дыры, равен

$$\Psi_* = 4\pi M\sqrt{M^2 - a^2}B_0; \tag{3.32}$$

в частности, для предельно быстро вращающейся черной дыры ($a = M$) происходит полное выталкивание магнитного поля, так что $\Psi_* = 0$;

б) магнитный поток, проходящий через эргосферу черной дыры ($r = M + \sqrt{M^2 - a^2\cos^2\theta}$), не зависит от скорости вращения Ω_{H} и равен

$$\Psi_{\text{эрг}} = 4\pi M^2 B_0. \tag{3.33}$$

Решение (3.30) для невращающейся черной дыры формально не отличается от однородного магнитного поля в вакууме. Однако этот факт связан лишь с удобным выбором координатной сетки (координат r и θ Бойера–Линдквиста). Нетрудно проверить, что в действительности на экваторе черной дыры имеет место особенность — нулевая точка. В самом деле, согласно определению (3.13) физические компоненты магнитного поля имеют вид

$$B_{\hat{r}} = \frac{1}{2\pi\varpi\sqrt{g_{\theta\theta}}}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}; \tag{3.34}$$

$$B_{\hat{\theta}} = -\frac{1}{2\pi\varpi\sqrt{g_{rr}}}\frac{\partial\Psi}{\partial r}. \tag{3.35}$$

Как мы видим, благодаря исчезновению при $\alpha = 0$ метрического коэффициента $1/\sqrt{g_{rr}}$ меридиональная компонента магнитного поля $B_{\hat{\theta}}$ должна равняться нулю на всей поверхности горизонта черной дыры. Следовательно, полоидальное магнитное поле должно быть ортогонально поверхности горизонта. Поскольку же на экваторе радиальная компонента магнитного поля также обращается в нуль (так как $\partial\Psi/\partial\theta = 0$), полное магнитное поле здесь тоже оказывается равным нулю.

Еще одним хорошо известным примером является вращающаяся черная дыра, обладающая электрическим зарядом Q. В этом случае вращение приводит к появлению дипольного магнитного поля [Торн, Прайс, Макдональд, 1988]:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{\rho^4\Sigma}\left[(r^2 + a^2)(r^2 - a^2\cos^2\theta)\mathbf{e}_{\hat{r}} - 2a^2 r\sqrt{\Delta}\sin\theta\cos\theta\,\mathbf{e}_{\hat{\theta}}\right]; \tag{3.36}$$

$$\mathbf{B} = \frac{Qa}{\rho^4\Sigma}\left[2r(r^2 + a^2)\cos\theta\,\mathbf{e}_{\hat{r}} + (r^2 - a^2\cos^2\theta)\sqrt{\Delta}\sin\theta\,\mathbf{e}_{\hat{\theta}}\right]. \tag{3.37}$$

Наконец, примером может служить и магнитное поле тонкого проводящего диска, имеющего внутренний радиус b (рис. 3.2). Если предположить, что магнитные силовые линии не пересекают поверхность диска, то потенциал Ψ в отсутствие черной дыры будет иметь следующий вид [Бескин, 1997]:

$$\Psi(r,\theta) = \Psi_0 \left[1 - \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right)^2 + \frac{r^2\cos^2\theta}{b^2}}} \right]. \quad (3.38)$$

В пределе $b \to 0$ (и при сохранении полного потока Ψ_0) формула (3.38) в каждой из полусфер переходит в монопольное поле $\Psi = \Psi_0(1 \pm \cos\theta)$. Скачок же магнитного поля на экваторе связан с токами, текущими по поверхности диска.

Раскладывая выражение (3.38) около $r = 0$ в ряд по мультиполям и пришивая каждую гармонику к поверхности горизонта черной дыры, легко получить выражение для потенциала Ψ в вакуумном приближении (а значит, и для магнитосферы невращающейся черной дыры) [Beskin, Istomin, Pariev, 1992]. Так, при $r_g \ll b$ имеем [Бескин, 1997]

$$\Psi_v = \Psi_0 \left[\frac{1}{2}\frac{r^2}{b^2}\sin^2\theta - \frac{1}{120}\frac{r^4}{b^4}\mathcal{F}(r)(4\sin^2\theta\cos^2\theta - \sin^4\theta) + \ldots \right], \quad (3.39)$$

где $\mathcal{F}(r) = F(-4, -2, 1, 1 - r_g/r)$ — гипергеометрическая функция. Следовательно, вблизи черной дыры магнитное поле является однородным:

$$\Psi_v \approx \frac{1}{2}\Psi_0 \frac{r^2\sin^2\theta}{b^2}. \quad (3.40)$$

Подчеркнем, что подобная процедура становится возможной именно благодаря тому, что второе семейство фундаментальных решений расходится на горизонте и поэтому должно быть отброшено. Лишь в таком случае можно однозначно выбрать коэффициент перед гипергеометрической функцией.

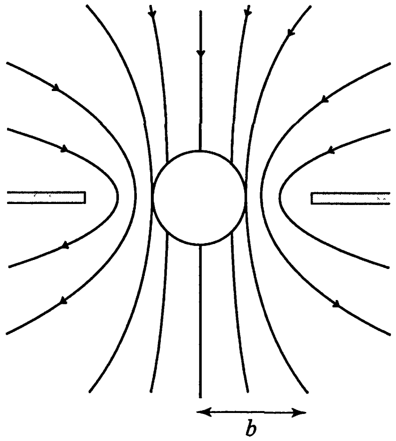


Рис. 3.2. Квазимонопольная структура магнитного поля, возникающая в случае ограниченного диска с внутренним радиусом b. Все силовые линии, пересекающие горизонт черной дыры, уходят на бесконечность

Аналогичным образом были построены и более сложные решения для черной дыры, помещенной в центре кольцевого тока, в центре двух противоположно направленных кольцевых токов [van Putten, Levinson, 2003; Шацкий, 2003], а также для специального выбора токов на поверхности диска [Tomimatsu, Takahashi, 2001]. Все они строились с помощью описанной выше процедуры. Наконец, при наличии диска становится возможным использование параболического решения (3.20).

Как показано на рис. 3.3, в этом случае решение с точностью до константы имеет вид [Blandford, Znajek, 1977; Ghosh, Abramowicz, 1997]

$$\Psi_0^{(1)}(r,\theta) = C(r - r_\mathrm{g})(1 - \cos\theta) - Cr_\mathrm{g}(1 + \cos\theta)\ln(1 + \cos\theta) \quad \text{при} \quad \theta < \pi/2; \tag{3.41}$$

$$\Psi_0^{(1)}(r,\theta) = C(r - r_\mathrm{g})(1 + \cos\theta) - Cr_\mathrm{g}(1 - \cos\theta)\ln(1 - \cos\theta) \quad \text{при} \quad \theta > \pi/2, \tag{3.42}$$

где C — произвольная постоянная. Здесь следует отметить, что к решениям (3.41), (3.42) можно добавить монопольное магнитное поле $\Psi = \Psi_0(1 \pm \cos\theta)$, где величина Ψ_0 является второй постоянной, определяющей течение.

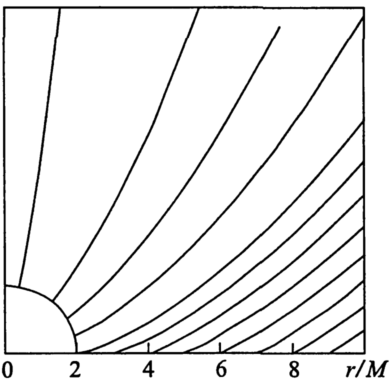


Рис. 3.3. «Нефизическое» решение, реализуемое при наличии аккреционного диска [Ghosh, Abramowicz, 1997]. Скачок тангенциальной компоненты магнитного поля обеспечивается за счет тороидальных токов, текущих в экваториальной плоскости

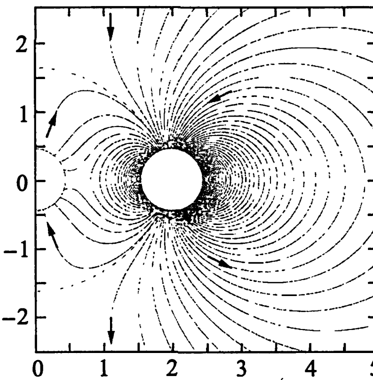


Рис. 3.4. Пример магнитосферы, в которой все силовые линии магнитного поля, проходящие через горизонт черной дыры, замыкаются на поверхности тора, создающего магнитное поле [van Putten, Levinson, 2003]

Наконец, отметим то обстоятельство, что в случае, когда магнитное поле генерируется двумя противоположно направленными кольцевыми токами, топология решения существенно изменяется (рис. 3.4). Силовые линии, проходящие через горизонт черной дыры, теперь не уходят на бесконечность, а замыкаются через поверхность аккреционного диска (или тора), создающего магнитное поле. Такая топология сейчас активно обсуждается в связи с возможными источниками космологических гамма-всплесков [van Putten, Levinson, 2003].

3.2.4. Бессиловое уравнение Грэда–Шафранова в метрике Керра. Перейдем к обсуждению основных уравнений, описывающих бессиловую магнитосферу вращающейся черной дыры. Как и в случае магнитосферы радиопульсаров, будем предполагать, что

1) плотность энергии плазмы много меньше плотности энергии электромагнитного поля;

2) плазмы тем не менее достаточно для экранирования продольного электрического поля $E_\parallel$.

Ясно, что для выполнения указанных условий необходимо, чтобы в магнитосфере имел место достаточно эффективный источник рождения частиц. Этот вопрос будет исследован чуть позже.

В рассматриваемом нами стационарном случае электрическое поле $\mathbf{E}$ вновь может быть записано как некоторый скаляр, умноженный на $\nabla\Psi$. При этом коэффициент пропорциональности удобно выбрать в виде

$$\mathbf{E} = -\frac{\Omega_\mathrm{F} - \omega}{2\pi\alpha}\nabla\Psi. \tag{3.43}$$

Подставляя теперь соотношение (3.43) в уравнение Максвелла (3.11), легко убедиться в том, что $\mathbf{B}\cdot\nabla\Omega_\mathrm{F} = 0$, т. е. величина Ω_F, как и в плоском пространстве, должна быть постоянна на магнитных поверхностях:

$$\Omega_\mathrm{F} = \Omega_\mathrm{F}(\Psi). \tag{3.44}$$

Действительно, производная Ли в уравнении (3.11) при выполнении очевидных условий $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$ и $\nabla\cdot\boldsymbol{\beta} = 0$ может быть записана как

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{B} = \nabla\times[\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B}] = \nabla\times\left(\frac{\omega}{2\pi}\nabla\Psi\right). \tag{3.45}$$

В результате уравнение (3.11) приобретает вид $\nabla\times(\Omega_\mathrm{F}\nabla\Psi) = 0$, откуда и следует соотношение (3.44). Выражение (3.43) представляет собой обобщение закона изоротации Ферраро на случай вращающейся черной дыры [Blandford, Znajek, 1977].

Далее, как и в нерелятивистском случае, рассматривая тороидальную компоненту бессилового баланса сил:

$$[\nabla\times\mathbf{B}]\times\mathbf{B} + (\nabla\cdot\mathbf{E})\mathbf{E} = 0, \tag{3.46}$$

приходим к соотношению $\nabla I\times\nabla\Psi = 0$, так что полный ток внутри магнитной поверхности вновь является интегралом движения:

$$I = I(\Psi). \tag{3.47}$$

Важно, что выражения для потока энергии и углового момента остаются в точности такими же, как и в плоском пространстве:

$$E(\Psi) = \frac{\Omega_\mathrm{F} I}{2\pi}; \quad L(\Psi) = \frac{I}{2\pi}. \tag{3.48}$$

Наконец, уравнение Грэда–Шафранова, получаемое непосредственно из полоидальной компоненты уравнения (3.46), может быть записано в виде [Macdonald, Thorne, 1982]

$$\frac{1}{\alpha}\nabla_k\left\{\frac{\alpha}{\varpi^2}\left[1 - \frac{(\Omega_\mathrm{F} - \omega)^2\varpi^2}{\alpha^2}\right]\nabla^k\Psi\right\} + \frac{\Omega_\mathrm{F} - \omega}{\alpha^2}(\nabla\Psi)^2\frac{\mathrm{d}\Omega_\mathrm{F}}{\mathrm{d}\Psi} + \frac{16\pi^2}{\alpha^2\varpi^2}I\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Psi} = 0. \tag{3.49}$$

Уравнение (3.49) обладает следующими свойствами.

1. Как и любое уравнение Грэда–Шафранова, оно содержит только потенциал $\Psi(\varpi, z)$ и инварианты $\Omega_{\rm F}(\Psi)$ и $I(\Psi)$. При этом, как и в нерелятивистском случае, бессиловое уравнение не следует дополнять уравнением Бернулли.

2. Уравнение (3.49) является эллиптическим во всей области, в которой оно определено. При этом область применимости ограничена световой поверхностью, на которой электрическое поле сравнивается с магнитным. Как и в случае магнитосферы радиопульсаров, уравнение (3.49) не может быть распространено за пределы световой поверхности. Однако если магнитное поле больше электрического вплоть до горизонта событий, то и уравнение (3.49) будет эллиптическим вплоть до горизонта черной дыры.

3. В нерелятивистском пределе $\alpha \to 1$, $\omega \to 0$ уравнение (3.49) переходит в пульсарное уравнение (2.96).

4. На расстояниях, удовлетворяющих условию $\alpha^2 \ll (\Omega_{\rm F} - \omega)^2\varpi^2 \ll 1$, дифференциальный оператор $\hat{\mathcal{L}}_{\rm bh}$ совпадает с вакуумным оператором (3.16).

5. Уравнение содержит две особые поверхности («световых цилиндра), определяемые из условия $\alpha^2 = (\Omega_{\rm F} - \omega)^2\varpi^2$; как мы увидим в дальнейшем, более точно здесь следует говорить об альфвеновских поверхностях. Одна из них, соответствующая истекающей плазме, полностью эквивалентна световому цилиндру в магнитосфере нейтронных звезд, а вторая, внутренняя поверхность, на которой $\alpha \approx (\Omega_{\rm H} - \Omega_{\rm F})\varpi_{\rm H}$, обусловлена эффектами ОТО. Кроме того, как будет показано ниже, решение может быть продолжено до горизонта лишь в случае, когда выполнено еще одно критическое условие, связанное с регулярностью решения при $\alpha^2 = 0$.

6. Согласно общей формуле для количества граничных условий ($b = 2 + i - s'$) имеем $b = 1$ при $s' = 3$, т. е. для бессилового МГД-течения, регулярного вплоть до горизонта и уходящего за пределы внешнего светового цилиндра, задача требует лишь одного граничного условия. Если же магнитное поле связывает горизонт черной дыры с поверхностью аккреционного диска, находящегося внутри внешнего светового цилиндра ($s' = 2$), то регулярное до горизонта решение требует задания уже двух граничных условий, например угловой скорости $\Omega_{\rm F}(\Psi)$ и потенциала Ψ на поверхности диска.

7. При известной структуре течения, т. е. при заданных функциях $\Psi(\varpi, z)$, $\Omega_{\rm F}(\Psi)$ и $I(\Psi)$, электрическое поле и тороидальная компонента магнитного поля определяются из алгебраических соотношений.

Сделаем ряд дополнительных замечаний, проясняющих свойства уравнения (3.49). Прежде всего, подчеркнем, что появление внутренней альфвеновской поверхности за счет эффектов общей теории относительности является общим свойством течений вблизи черных дыр. Ниже это свойство будет продемонстрировано и в общем магнитогидродинамическом случае. Важно, что, как будет показано в следующей главе, в рамках идеальной гидродинамики (и для случая положительного потока энергии от черной дыры) плазма может пересекать альфвеновские поверхности только в одном направлении; понятно, что сказанное не относится к самому аккреционному диску, в котором вязкость играет определяющую роль. При этом внешняя альфвеновская поверхность может пересекаться лишь в направлении от черной дыры ($v^r > 0$), а внутренняя — лишь в обратном направлении ($v^r < 0$). Поэтому на силовых линиях, проходящих через горизонт, должна неизбежно возникать область генерации вещества, разделяющая области аккреции и эжекции, где само уравнение Грэда–Шафранова уже не применимо. Однако если в области генерации падение потенциала много меньше характерной разности потенциалов, а поверхностные токи много меньше продольных, то можно считать, что $\Omega_{\rm F}^{+} = \Omega_{\rm F}^{-}$ и $I^{+} = I^{-}$. В результате значения двух интегралов движения оказываются одинаковыми вдоль всей магнитной силовой линии, связанной с черной дырой.

Следует также упомянуть проблему граничного условия на горизонте. Действительно, как было специально подчеркнуто выше, уравнение (3.49) остается эллиптическим вплоть до горизонта черной дыры; поэтому горизонт событий может быть рассмотрен как некоторая поверхность, на которой следует поставить граничные условия. С другой стороны, горизонт не может быть причинно связан со внешним пространством, а следовательно, и влиять на структуру магнитных полей вне черной дыры. К тому же, если вспомнить, что в действительности горизонт событий отделен от внешнего пространства волной включения, постановка граничного условия на горизонте и вовсе становится проблематичной [Punsly, 2001]. Как мы увидим, последовательно эта проблема может быть решена только в рамках полного уравнения Грэда–Шафранова, включающего в себя конечную массу частиц. Здесь же мы сделаем лишь ряд замечаний, соответствующих рассматриваемому в настоящей главе бессиловому пределу.

Прежде всего, напомним, что согласно определениям (3.13) и (3.43) тороидальная компонента магнитного поля и электрическое поле расходятся на горизонте как α^{-1}. Однако подобное поведение является следствием лишь координатной особенности выбранной нами метрики и не соответствует физической особенности на горизонте. Указанная особенность имела бы место, если бы не только опорные (ZAMO), но и свободно падающие наблюдатели также зарегистрировали бесконечные поля при пересечении горизонта. Условие же конечности электрического поля на горизонте для свободно падающего наблюдателя: $E'_{\hat\theta} = \alpha^{-1}\left(E_{\hat\theta} + B_{\hat\varphi}\right) = 0$, т. е.

$$E_{\hat\theta} = -B_{\hat\varphi}, \tag{3.50}$$

в бессиловом приближении переписывается как [Znajek, 1977; Macdonald, Thorne, 1982]

$$4\pi I(\Psi) = [\Omega_{\rm H} - \Omega_{\rm F}(\Psi)]\sin\theta\frac{r_{\rm g}^2 + a^2}{r_{\rm g}^2 + a^2\cos^2\theta}\left(\frac{{\rm d}\Psi}{{\rm d}\theta}\right). \tag{3.51}$$

Здесь мы просто воспользовались определениями (3.13) и (3.43). Важно, что вектор Пойнтинга, $\mathbf{S} = (c/4\pi)[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]$, на горизонте событий оказывается направлен в сторону черной дыры. Однако, как мы увидим, это не означает, что энергия вращающейся черной дыры увеличивается с течением времени.

Выражение (3.51) обычно и рассматривалось как дополнительное условие на горизонте, играющее роль закона Ома [Macdonald, 1984]. Действительно, при заданной функции $\Psi(r_{\rm g}, \theta)$ потока на горизонте соотношение (3.51) связывает продольный ток $I(\Psi)$ и угловую скорость $\Omega_{\rm F}(\Psi)$, определяющую электрическое поле. Проблема состоит, однако, в том, что нам изначально не известна структура полоидального магнитного поля вблизи горизонта, поэтому соотношение (3.51) нельзя рассматривать как связь только между величинами $I(\Psi)$ и $\Omega_{\rm F}(\Psi)$. Иными словами, магнитный поток $\Psi(r_{\rm g}, \theta)$ на горизонте может быть найден лишь как решение уравнения (3.49) с заданными значениями $I(\Psi)$ и $\Omega_{\rm F}(\Psi)$.

Как нетрудно проверить, в бессиловом пределе «условие на горизонте» (3.51) действительно представляет собой дополнительное условие, обеспечивающее регулярность решения на горизонте событий [Uzdensky, 2004]. Вспомним, что радиальные производные входят в уравнение (3.49) лишь в комбинациях $\alpha\partial/\partial r$ и $\alpha^2\partial^2/\partial r^2$. Замечательное же свойство уравнения Грэда–Шафранова состоит в том, что при условии регулярности решения (т. е. при возможности отбросить на горизонте слагаемые с радиальными производными) оно становится одномерным и может быть проинтегрировано, причем в результате интегрирования мы вновь возвращаемся к соотношению (3.51). Таким образом, при выполнении условия (3.51) на горизонте черной дыры сингулярные слагаемые будут равны нулю. Последнее и означает отсутствие особенности при $\alpha^2 \to 0$.

Однако, как будет показано в следующей главе, на самом деле условие (3.51) представляет собой предел критического условия на быстрой магнитозвуковой поверхности, находящейся над горизонтом событий. В частности, это означает, что через конечное время волна включения окажется в гиперболической области полного уравнения Грэда–Шафранова, и следовательно, не сможет влиять на структуру течения во внешнем пространстве. Поэтому мы все же будем заключать слова «условие на горизонте» в кавычки, подчеркивая, что полное уравнение Грэда–Шафранова никакого дополнительного условия регулярности на горизонте не имеет. Мы уже сталкивались с указанным свойством при анализе гидродинамических течений.

Упражнения.

1. Путем прямого интегрирования бессилового уравнения (3.49) на горизонте получите «граничное условие» (3.51).

2. Покажите, что в случае магнитосферы черной дыры, заполненной плазмой, ее электрический заряд равен (см., например, [Lee, Lee, van Putten,

2001])

$$Q = \int_0^\pi (\Omega_{\rm H} - \Omega_{\rm F}) \frac{\Sigma^2}{4\pi\rho^2} \left(\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) \sin\theta \, {\rm d}\theta. \tag{3.52}$$

Оцените, каким должно быть магнитное поле для того, чтобы заряд (3.52) начал возмущать метрику Керра.

В качестве иллюстрации покажем, что дополнительное условие (3.51) действительно фиксирует величину инварианта $L(\Psi) = I(\Psi)/2\pi$ при $\Psi \to 0$. Рассмотрим задачу о структуре магнитного поля в окрестности вращающейся черной дыры. При этом будем считать, что решение может быть продолжено вплоть до горизонта и что все магнитные силовые линии вморожены во внешнюю вращающуюся оболочку или аккреционный диск в пределах внешней световой поверхности. Согласно формуле $b = 2 + i - s'$ такая задача требует лишь двух граничных условий. В качестве них естественно выбрать величину потенциала $\Psi(\mathbf{r})$ на поверхности оболочки (диска) и угловую скорость вращения $\Omega_{\rm F}(\Psi)$. Величина же $L(\Psi)$ должна быть найдена из условия гладкого прохождения решения через критические поверхности.

Рассмотрим поведение инварианта $L(\Psi)$ вблизи оси вращения. Нам будет удобно записать его в виде

$$L(\Psi) = k \frac{\Omega_{\rm F}}{4\pi^2} \Psi, \tag{3.53}$$

где $\Omega_{\rm F} = \Omega_{\rm F}(0)$. Пропорциональность величин $L(\Psi)$ и Ψ следует здесь из предположения о постоянстве плотности электрического тока вблизи оси вращения, причем случай $k = 1$ соответствует гольдрайховской величине плотности тока. Подставляя выражение (3.53) в «условие на горизонте» (3.51), при малых углах θ получаем

$$\frac{{\rm d}\Psi}{\Psi} = 2k \frac{\Omega_{\rm F}}{\Omega_{\rm H} - \Omega_{\rm F}} \frac{{\rm d}\theta}{\sin\theta}, \tag{3.54}$$

т. е. $\Psi(\theta) \propto \theta^w$, где

$$w = 2k \frac{\Omega_{\rm F}}{\Omega_{\rm H} - \Omega_{\rm F}}. \tag{3.55}$$

Вместе с тем условие конечности магнитного поля на оси вращения требует равенства $w = 2$. Таким образом, при малых Ψ инвариант $L(\Psi)$ должен иметь вид

$$L(\Psi) = \frac{\Omega_{\rm H} - \Omega_{\rm F}}{4\pi^2} \Psi. \tag{3.56}$$

В следующей главе мы увидим, что соотношение (3.56) действительно является пределом условия на внутренних критических поверхностях при их стремлении к горизонту событий.

Наконец, подчеркнем, что дополнительное условие (3.51) возникает лишь в случае, когда мы имеем дело с решениями, которые могут быть продолжены до горизонта. Если же продольный ток достаточно мал, то область применимости уравнения Грэда–Шафранова ограничена световой поверхностью, находящейся вне горизонта. В последнем случае для магнитных силовых линий, пересекающих как внутреннюю, так и внешнюю альфвеновскую поверхности, имеем $s' = 2$, так что задача требует двух граничных условий. В частности, это означает, что могут быть построены решения с нулевым продольным током ($I = 0$) и произвольной угловой скоростью $\Omega_{\rm F}$. На больших расстояниях решение будет совпадать с монопольным решением Майкеля для нулевого тока (см. рис. 2.15), а на малых распространяться лишь до внутреннего светового цилиндра ($\alpha^2 \approx (\Omega_{\rm F} - \Omega_{\rm H})^2\varpi^2$).

3.2.5. Рождение частиц. Для применимости бессилового приближения необходимо, чтобы магнитосфера черной дыры была заполнена плазмой, экранирующей продольное электрическое поле. Как уже отмечалось, в рамках идеальной магнитной гидродинамики аккреция заряженных частиц вдоль магнитных силовых линий из бесконечности до горизонта черной дыры становится невозможной. Таким образом, на открытых силовых линиях плазма (которая нужна как для экранировки продольного электрического поля, так и для создания продольного электрического тока в области силовых линий, проходящих через горизонт черной дыры) должна генерироваться в самой магнитосфере между двумя семействами особых поверхностей. При этом одна ее часть будет истекать за пределы магнитосферы, а другая — аккрецировать на черную дыру. В настоящее время обсуждается несколько механизмов, в которых, однако, генерация плазмы в конечном счете всегда происходит в результате двухфотонного рождения пар. Однофотонная же конверсия, играющая ведущую роль в магнитосфере радиопульсаров, здесь оказывается неэффективной, поскольку для магнитных полей $B \sim B_{\rm Ed} \sim 10^4$ Гс вероятность w рождения пар (см. (2.22)) исчезающе мала.

Прежде всего, достаточно эффективным механизмом генерации плазмы может служить прямой двухфотонный процесс: $\gamma + \gamma = e^+ + e^-$ (см., например, [Swensson, 1984]), в котором необходимые гамма-кванты излучаются внутренними областями аккреционного диска. Однако для этого требуются достаточно высокие температуры, обеспечивающие нужное количество жестких гамма-квантов с энергиями выше $\mathcal{E}_{\rm min} = m_{\rm e}c^2$, соответствующими порогу рождения пар.

С другой стороны, существует еще один механизм, способный поставлять частицы в область силовых линий, проходящих через горизонт черной дыры, и при отсутствии жестких гамма-квантов. Он подобен рассмотренному выше механизму рождения частиц во внешнем зазоре магнитосферы радиопульсаров [Cheng, Ho, Ruderman, 1986]. Действительно, согласно (3.9) и (3.43) точная релятивистская формула для гольдрайховской плотности заряда $\rho_{\rm GJ}$ имеет вид

$$\rho_{\rm GJ} = -\frac{1}{8\pi^2}\nabla_k\left(\frac{\Omega_{\rm F} - \omega}{\alpha}\nabla^k\Psi\right). \tag{3.57}$$

В частности, вблизи оси вращения имеем просто

$$\rho_{\rm GJ} \approx -\frac{(\Omega_{\rm F} - \omega)B}{2\pi\alpha}. \tag{3.58}$$

Именно это выражение использовалось нами в предыдущей главе при анализе эффектов общей теории относительности в полярных областях нейтронной звезды.

В результате эффекты общей теории относительности приводят к тому, что гольдрайховская плотность становится равной нулю при $\omega \approx \Omega_{\mathrm{F}}$. Это оказывается возможным при выполнении условия $0 < \Omega_{\mathrm{F}} < \Omega_{\mathrm{H}}$, когда, как мы увидим, происходит выделение вращательной энергии черной дыры. Например, для монопольного магнитного поля при условии $\Omega_{\mathrm{F}} = \Omega_{\mathrm{H}}/2$ поверхность $\rho_{\mathrm{GJ}} = 0$ является сферой радиуса

$$r_{\mathrm{inj}} = 2^{1/3} r_{\mathrm{g}} \approx 1{,}26 r_{\mathrm{g}}. \tag{3.59}$$

В общем же случае для определения поверхности $\rho_{\mathrm{e}} = 0$ необходимо знать как структуру магнитного поля $\Psi(r, \theta)$, так и зависимость угловой скорости Ω_{F} от потенциала Ψ.

УПРАЖНЕНИЕ. Получите выражение (3.59).

Таким образом, в магнитосфере черной дыры возникает область, вполне аналогичная внешнему зазору в магнитосфере радиопульсаров [Cheng, Ho, Ruderman, 1986]. В ней тоже возможно появление продольных электрических полей, поскольку течение однозарядной плазмы не может обеспечить выполнения условия $\rho_{\mathrm{e}} = \rho_{\mathrm{GJ}}$ (подробнее см. [Бескин, Истомин, Парьев, 1992; Hirotani, Okamoto, 1998], где также показано, что в реальных условиях размер области ускорения много меньше размеров системы, поэтому область ускорения не влияет на глобальную структуру магнитосферы). В результате цепочка процессов выглядит следующим образом.

1. Ускорение первичных частиц продольным электрическим полем.

2. Излучение изгибных фотонов с характерными частотами $\omega \leqslant \omega_{\mathrm{cur}}$ (см. (2.21)).

3. Взаимодействие релятивистских электронов с мягкими рентгеновскими фотонами, излучаемыми аккреционным диском; генерация жестких гамма-квантов за счет обратного комптон-эффекта.

4. Рождение вторичной плазмы $(\gamma + X \to e^{+} + e^{-})$ за счет взаимодействия жестких гамма-квантов, изгибных и рентгеновских фотонов.

5. Экранировка продольного электрического поля вторичной плазмой.

Так или иначе, заполнение магнитосферы черной дыры плазмой возможно лишь при наличии аккреционного диска, поставляющего достаточное количество фотонов в полярные области черной дыры.

3.3. Механизм энерговыделения

3.3.1. Процесс Блендфорда–Знайека. Рассмотрим вопрос о механизме энерговыделения вращающихся черных дыр, помещенных во внешнее регулярное магнитное поле (так называемый процесс Блендфорда–Знайека [Blandford, Znajek, 1977]). Главная его идея основана на аналогии с процессом передачи энергии во внутренних областях магнитосферы радиопульсаров. Действительно, предположим, что в окрестности вращающейся черной дыры имеет место регулярное полоидальное магнитное поле, вдоль которого протекает электрический ток. Тогда за счет возникновения электрического поля $E \sim \Omega_{\mathrm{F}} \varpi B_{\mathrm{p}}$, связанного с индукционным действием вращающейся с угловой скоростью Ω_{F} плазмы, и тороидального магнитного поля $B_{\varphi} \sim -2I/\varpi$, обусловленного продольным током I, происходит формирование потока электромагнитной энергии (потока вектора Пойнтинга), текущего вдоль магнитных силовых линий.

Конечно, в окрестности черной дыры по определению становятся существенными эффекты общей теории относительности. Поэтому неочевидно, что пульсарная аналогия может быть во всем полезна. Во всяком случае, она не работает в отношении самого механизма торможения [Punsly, 2001]. Действительно, как мы видели, в магнитосфере радиопульсаров торможение нейтронной звезды обусловлено пондеромоторным действием поверхностных токов, замыкающих электрические токи, текущие в магнитосфере. Формально поверхностные токи можно ввести и на поверхности горизонта (или «растянутого горизонта», как это делается в рамках мембранной парадигмы):

$$\mathbf{J}_{\mathrm{H}} = \frac{I}{2\pi\varpi}\mathbf{e}_{\hat{\theta}}. \tag{3.60}$$

Отличие от поверхности нейтронной звезды здесь состоит лишь в том, что в определение скачка тангенциального магнитного поля входит конечная «регуляризованная» величина $B_{\mathrm{H}} = \alpha B_{\hat{\varphi}}$ (подробнее см. [Торн, Прайс, Макдональд, 1988]). В результате условие на горизонте приобретает вид

$$\mathbf{J}_{\mathrm{H}} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}_{\mathrm{H}}, \tag{3.61}$$

где $E_{\mathrm{H}} = \alpha E_{\hat{\theta}}$, а коэффициент пропорциональности соответствует универсальному сопротивлению $\mathcal{R} = 4\pi/c = 377$ Ом. Это и есть одно из основных соотношений мембранной парадигмы.

Однако горизонт не является физически выделенной поверхностью, не говоря уже о том, что он не связан причинно с внешним пространством [Punsly, Coroniti, 1990a]. Поэтому подобные токи не способны приводить к торможению черной дыры. Действительно, вблизи поверхности горизонта никакие азимутальные токи течь не могут. Во-первых, как мы видели, гравитационное поле здесь оказывается настолько сильным, что частицы (в системе отсчета ZAMO) могут двигаться лишь в радиальном направлении. Во-вторых, для замыкания тока реальным зарядам и не нужно растекаться по поверхности горизонта (см. рис. 3.1). Гравитационное поле само искажает картину силовых линий таким образом, что внешнему наблюдателю будет казаться, что заряд находится вблизи центра черной дыры. Соответственно, не может возникнуть и сила Ампера, $\mathbf{J}_{\mathrm{s}} \times \mathbf{B}$, связанная с пересечением зарядами магнитных силовых линий (движение же зарядов изображения по поверхности горизонта никакой работы не производит).

На самом деле, как будет показано в следующей главе, тормозящий момент действует в области генерации плазмы над поверхностью горизонта событий. Энерговыделение же обусловлено отрицательной энергией, падающей на поверхность горизонта черной дыры. Иными словами, механизм Блендфорда–Знайека фактически является электромагнитной реализацией эффекта Пенроуза [Takahashi et al., 1990]. Поэтому вращающаяся черная дыра, как и вращающаяся нейтронная звезда, может работать как униполярный индуктор, эффективно передавая энергию вращения во внешние области магнитосферы (рис. 3.5).

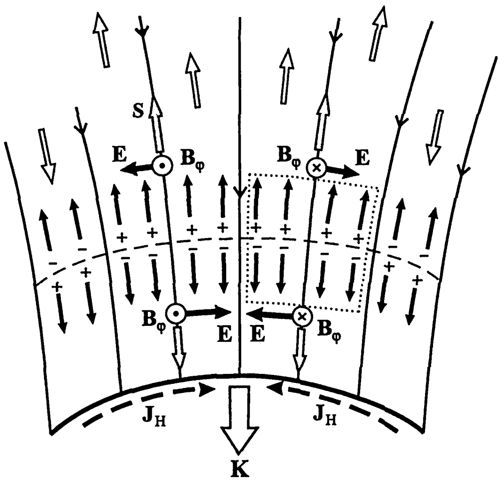


Рис. 3.5. Механизм торможения Блендфорда–Знайека, обусловленный продольными токами (контурные стрелки), текущими в магнитосфере черной дыры. Он связан с гравитомагнитной силой $\mathcal{L}_\beta \mathbf{B}$, создающей ЭДС индукции вдоль любого контура, лежащего в полоидальной плоскости (пунктир). Также показаны область генерации плазмы (штриховая линия) и направление движения вторичных частиц

Определим мощность энерговыделения в результате вращения черной дыры. Для этого нам нужно найти поток энергии в области силовых линий, проходящих через горизонт. В бессиловом приближении имеем для потерь энергии

$$W_{\text{tot}} = \int T_{0\beta}\, \mathrm{d}S^\beta = \int E(\Psi)\, \mathrm{d}\Psi = \frac{1}{2\pi} \int \Omega_{\mathrm{F}}(\Psi) I(\Psi)\, \mathrm{d}\Psi, \tag{3.62}$$

а для потерь углового момента

$$K_{\text{tot}} = \int L(\Psi)\, \mathrm{d}\Psi = \frac{1}{2\pi} \int I(\Psi)\, \mathrm{d}\Psi. \tag{3.63}$$

Таким образом, выражения для потока энергии и углового момента в случае метрики Керра выглядят также, как и в плоском пространстве. Именно постоянство величин $E(\Psi)$ и $L(\Psi)$ вдоль магнитных силовых линий обеспечивает выполнение законов сохранения энергии и углового момента; в частности, оно подтверждает существование потока энергии, уходящего от горизонта черной дыры на бесконечность.

Воспользовавшись «условием на горизонте» (3.51), получаем

$$W_{\text{tot}} = \frac{1}{4\pi} \int \Omega_{\text{F}}(\Omega_{\text{H}} - \Omega_{\text{F}}) \sin\theta \frac{r^2 + a^2}{r^2 + a^2\cos^2\theta} \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\theta} \mathrm{d}\Psi. \tag{3.64}$$

Легко проверить, что для предельно быстро вращающейся черной дыры при $B = B_{\text{Ed}}$ (см. (3.4)) потери энергии (3.64) совпадают с эддингтоновской светимостью: $L_{\text{Ed}} = \dot{M}_{\text{Ed}}c^2$.

УПРАЖНЕНИЕ. Покажите, что для $\Omega_{\text{F}} = \text{const}$ и монопольного магнитного поля $B_n = \text{const}$ потери энергии (3.64) имеют вид [Lee, Wijers, Brown, 2000]

$$W_{\text{tot}} = \frac{\Omega_{\text{F}}(\Omega_{\text{H}} - \Omega_{\text{F}})}{\Omega_{\text{H}}^2} \left(\frac{a}{M}\right)^2 B_n^2 M^2 c\, f\left(\frac{a}{r_{\text{g}}}\right), \tag{3.65}$$

где

$$f(h) = \frac{1+h^2}{h^2}\left[\left(h + \frac{1}{h}\right)\operatorname{arctg} h - 1\right], \tag{3.66}$$

так что $f(0) = 2/3$ и $f(1) = \pi - 2$.

Обсудим полученный выше результат с физической точки зрения.

Во-первых, как видно из соотношения (3.64), для точного определения потерь энергии необходимо знать не только структуру магнитного поля вблизи горизонта черной дыры, т. е. функцию магнитного потока $\Psi(r_{\text{g}}, \theta)$, но и угловую скорость $\Omega_{\text{F}}(\Psi)$. Таким образом, в случае магнитосферы черной дыры основной теоретической задачей является нахождение не продольного тока $I(\Psi)$, как это было в случае магнитосферы радиопульсаров, а угловой скорости вращения плазмы $\Omega_{\text{F}}(\Psi)$. Подобная задача не может быть последовательно решена в рамках бессилового приближения. Поэтому, как и в случае радиопульсаров, мы вынуждены отложить решение данного вопроса до следующей главы.

Во-вторых, если нас интересует оценка потерь энергии по порядку величины, то мы можем положить $\Omega_{\text{F}} = \text{const}$ и $\Psi = \pi r_{\text{g}}^2 B_0$. В результате имеем $W_{\text{tot}} \sim W_{\text{BZ}}$, где потери W_{tot} соответствуют условиям $\Omega_{\text{F}} = \Omega_{\text{H}}/2$ и $B_n = \text{const}$:

$$W_{\text{BZ}} \approx 10^{45} \left(\frac{a}{M}\right)^2 \left(\frac{B_0}{10^4\ [\text{Гс}]}\right)^2 \left(\frac{M}{10^9 M_\odot}\right)^2 \text{эрг/с}. \tag{3.67}$$

Таким образом, для быстровращающейся черной дыры теория действительно позволяет объяснить наблюдаемые энергии струйных выбросов из активных галактических ядер [Blandford, Znajek, 1977; Торн, Прайс, Макдональд, 1988].

В-третьих, потери энергии будут положительными лишь при выполнении условия

$$0 < \Omega_{\mathrm{F}} < \Omega_{\mathrm{H}}, \tag{3.68}$$

причем наибольшие потери достигаются при $\Omega_{\mathrm{F}} = \Omega_{\mathrm{H}}/2$. При этом поток энергии вблизи горизонта оказывается направлен от черной дыры, несмотря на то что при выполнении условия (3.68) вектор Пойнтинга $\mathbf{S} = (c/4\pi)[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]$ на горизонте должен быть направлен к черной дыре. Действительно, как показано на рис. 3.5, благодаря зависимости $|\mathbf{E}| \propto (\Omega_{\mathrm{F}} - \omega)$ при $0 < \Omega_{\mathrm{F}} < \Omega_{\mathrm{H}}$ направление электрического поля вблизи горизонта ($\omega \approx \Omega_{\mathrm{H}}$) противоположно направлению электрического поля вдали от черной дыры ($\omega = 0$), тогда как направление тороидального магнитного поля остается неизменным. Однако здесь нет противоречия с законом сохранения энергии, поскольку уравнение (1.231):

$$-\frac{1}{\alpha}(\beta\nabla)\varepsilon = -\frac{1}{\alpha^2}\nabla \cdot (\alpha^2 \mathbf{S}) + H_{ik}T^{ik}, \tag{3.69}$$

помимо собственно закона сохранения $\nabla \cdot \mathbf{S}$, содержит дополнительные слагаемые, обусловленные кривизной пространства. В результате вектор $\mathbf{S}$ вдоль магнитных силовых линий не сохраняется. Постоянный же поток энергии дается инвариантным выражением (3.62).

В-четвертых, магнитное поле B_0 (или, более точно, магнитный поток на горизонте, $\Psi(r_{\mathrm{g}}, \theta)$, входящий в выражение (3.64)) заранее неизвестно и должно определяться из решения уравнения Грэда–Шафранова. В частности, как мы увидим, выталкивание магнитного поля из вращающейся черной дыры, имеющее место в случае вакуумной магнитосферы, может быть скомпенсировано токами, текущими в магнитосфере черной дыры.

Еще раз напомним, что по аналогии с магнитосферой радиопульсаров выражение (3.62) для потерь энергии формально можно записать как результат действия электромагнитных сил на «растянутом горизонте» [Торн, Прайс, Макдональд, 1988]:

$$W_{\mathrm{tot}} = \int [\mathbf{E}_{\mathrm{H}}\mathbf{J}_{\mathrm{H}} - \beta_g (\sigma_{\mathrm{H}}\mathbf{E}_{\mathrm{H}} + \mathbf{J}_{\mathrm{H}} \times \mathbf{B}_{\mathrm{n}})]\, \mathrm{d}S, \tag{3.70}$$

где «поверхностный заряд» σ_{H} и «поверхностный ток» $\mathbf{J}_{\mathrm{H}}$ вновь определяются как

$$\sigma_{\mathrm{H}} = \frac{E_{\mathrm{H}}}{4\pi}; \tag{3.71}$$

$$4\pi \mathbf{J}_{\mathrm{H}} \times \mathbf{n} = B_{\mathrm{H}}\mathbf{e}_{\hat{\varphi}} = \alpha B_{\hat{\varphi}}\mathbf{e}_{\hat{\varphi}}. \tag{3.72}$$

Как уже говорилось, подобную аналогию нельзя воспринимать буквально.

Интересно, что условие (3.68) выделения энергии вращающейся черной дырой может быть сформулировано в виде следующей теоремы [Takahashi et al., 1990]: *поток энергии, проходящий через горизонт событий, будет отрицательным (и значит, черная дыра будет* *терять свою энергию вращения) в том случае, когда внутренняя альфвеновская поверхность находится в пределах эргосферы.*

Действительно, как следует из соотношения (1.210), для $\Omega_{\rm F} = 0$ альфвеновская поверхность совпадает с поверхностью эргосферы. В другом же предельном случае, $\Omega_{\rm F} = \Omega_{\rm H}$, условие $\alpha^2 = (\Omega_F - w)^2\varpi^2$ имеет решение $\alpha = 0$, т. е. альфвеновская поверхность совпадает с горизонтом событий. Поэтому во всей области параметров, где выполнено условие (3.68), альфвеновская поверхность расположена в пределах эргосферы.

Здесь нужно сделать замечание астрофизического характера. Как видно из уравнения (3.67), необходимая мощность энерговыделения на уровне 10^{45} эрг/с, характерная для активных галактических ядер, может быть достигнута лишь при предельных значениях массы черной дыры ($\sim 10^9 M_{\odot}$), предельного магнитного поля в ее окрестности ($\sim B_{\rm Ed}$; см. (3.4)), а также предельной скорости вращения ($a \sim M$). Поэтому в последнее время появились работы, в которых эффективность процесса Блендфорда–Знайека в реальных астрофизических условиях подвергалась сомнению [Ghosh, Abramowicz, 1997; Livio, Ogilvie, Pringle, 1999]. Однако это не значит, что сама электромагнитная модель, о которой идет речь, сталкивается с серьезными трудностями. Дело в том, что эффективно работающая центральная машина может быть связана и со внутренними областями аккреционного диска; в них заведомо существует быстрое вращение с орбитальной скоростью $v_{\varphi} \sim c$, а через поверхность диска могут проходить силовые линии регулярного магнитного поля. В частности, указанный процесс может быть эффективен при аккреции на невращающуюся (шварцшильдовскую) черную дыру.

Еще раз подчеркнем, что регулярное магнитное поле является связующим звеном, позволяющим эффективно отводить энергию и угловой момент от центральной машины в окружающее пространство. Последнее обстоятельство особенно существенно, поскольку в рамках стандартной модели, в которой перенос момента связан с вязкими напряжениями, потери углового момента, необходимые для достаточно большой скорости аккреции, не столь эффективны.

3.3.2. Физическое интермеццо — термодинамика черной дыры. Существует еще одно принципиальное отличие магнитосферы черной дыры от магнитосферы нейтронной звезды. Дело в том, что запасы энергии черной дыры заключены не только в энергии вращения, но и в так называемой неприводимой массе $M_{\rm ir}$, которая пропорциональна площади S поверхности черной дыры:

$$M_{\rm ir} = \left(\frac{S}{16\pi}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\left(r_{\rm g}^2 + a^2\right)^{1/2}. \tag{3.73}$$

Иными словами, у черной дыры имеется еще одна степень свободы, связанная с площадью ее поверхности, и поэтому соотношение $W_{\rm tot} = \Omega_{\rm H} K_{\rm tot}$, эквивалентное условию (2.131) для радиопульсаров, для черных дыр может не выполняться. Поскольку же этот вопрос, тесно связанный с термодинамикой черных дыр, позволяет прояснить процесс потерь энергии и углового момента, представляется целесообразным напомнить основные положения соответствующей теории (подробнее см. [Торн, Прайс, Макдональд, 1988; Frolov, Novikov, 1998]).

Прежде всего, определим площадь поверхности черной дыры:

$$S = 4\pi(r_{\mathrm{g}}^2 + a^2) = 8\pi M(M + \sqrt{M^2 - a^2}). \tag{3.74}$$

Если рассматривать площадь S как функцию массы M и углового момента $J = a/M$, то соотношение для приращений можно записать в виде

$$\delta M = \frac{1}{8\pi} g_{\mathrm{H}} \delta S + \Omega_{\mathrm{H}} \delta J, \tag{3.75}$$

где $g_{\mathrm{H}} = (r_{\mathrm{g}} - M)/2Mr_{\mathrm{g}}$ — так называемая поверхностная гравитация.

Поскольку массу M естественно связать с энергией, уравнение (3.75) можно представить в термодинамической форме:

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = T_{\mathrm{H}} \frac{\mathrm{d}S_{\mathrm{H}}}{\mathrm{d}t} + \Omega_{\mathrm{H}} \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}. \tag{3.76}$$

Здесь $\mathrm{d}\mathcal{E}/\mathrm{d}t = -W_{\mathrm{tot}}$, а $\mathrm{d}J/\mathrm{d}t = -K_{\mathrm{tot}}$, так что изменение массы действительно связано с потерей энергии, определяемой в рассматриваемом здесь бессиловом случае с потоком вектора Пойнтинга. Что же касается «температуры» T_{H} и «энтропии» S_{H} черной дыры, то они задаются как [Гриб, Мамаев, Мостепаненко, 1980; Frolov, Novikov, 1998]

$$T_{\mathrm{H}} = \frac{\hbar}{2\pi} g_{\mathrm{H}}; \tag{3.77}$$

$$S_{\mathrm{H}} = \frac{1}{4\hbar} S. \tag{3.78}$$

При этом коэффициенты выбраны таким образом, чтобы температура T_{H} совпадала с температурой черной дыры, которая описывает излучение, связанное с эффектом Хоукинга.

Сформулированная выше термодинамическая аналогия основывается на важной теореме: *при любых классических процессах* (*аккреция вещества*, *слияние черных дыр и т. п.*) *поверхность черной дыры не может уменьшаться*, *т. е.*

$$\delta S \geqslant 0. \tag{3.79}$$

Как мы видим, эта теорема вполне аналогична второму началу термодинамики, что и является основанием для ее термодинамической интерпретации. Тем не менее мы все же взяли слова *температура* и *энтропия* в кавычки, поскольку, несмотря на большое количество работ, посвященных этой теме, до сих пор остается неясным, действительно ли выражение (3.78) соответствует реальной энтропии черной дыры.

Вопрос об энтропии черной дыры выходит далеко за рамки настоящего повествования. Для нас же здесь важно то, что сам электромагнитный процесс выделения энергии из вращающейся черной дыры не противоречит фундаментальным законам физики. Действительно, как видно из самого определения гравитационного радиуса: $r_{\mathrm{g}} = M + \sqrt{M^2 - a^2}$, при уменьшении угловой скорости вращения Ω_{H} радиус черной дыры увеличивается, так что ее площадь также растет в результате этого процесса.

Более того, термодинамическое соотношение (3.76) позволяет прояснить ключевые свойства передачи энергии от вращающейся черной дыры. Действительно, воспользовавшись определениями (3.62) и (3.63), можно переписать соотношение (3.76) в виде

$$-\int E(\Psi)\,\mathrm{d}\Psi = \frac{1}{2\pi}\int(\Omega_{\mathrm{H}} - \Omega_{\mathrm{F}})I(\Psi)\,\mathrm{d}\Psi - \Omega_{\mathrm{H}}\int L(\Psi)\,\mathrm{d}\Psi. \tag{3.80}$$

Выражение в левой части уравнения (3.80) в точности соответствует потерям энергии, а два слагаемых в правой части — изменению «энтропии» и углового момента [Торн, Прайс, Макдональд, 1988]. Например, при $\Omega_{\mathrm{F}} = 0$ (когда $E = \Omega_{\mathrm{F}} I/2\pi = 0$) потери энергии черной дыры оказываются равными нулю, а уменьшение углового момента полностью компенсируется увеличением площади черной дыры:

$$\delta S_{\mathrm{H}} = -\frac{\Omega_{\mathrm{H}}}{T_{\mathrm{H}}}\,\delta J. \tag{3.81}$$

Подобная ситуация (которая может быть реализована, если однородное магнитное поле вморожено в невращающееся облако вдали от черной дыры) соответствует адиабатическому процессу в термодинамике. Далее, при $\Omega_{\mathrm{F}} = \Omega_{\mathrm{H}}$, т. е. при $I = 0$ (когда как поток энергии E, так и поток момента импульса L равны нулю), не только масса, но и угловой момент черной дыры остаются постоянными. Этот случай соответствует полной коротации в магнитосфере радиопульсаров. Если же $\Omega_{\mathrm{F}} = \Omega_{\mathrm{H}}/2$, то изменения всех величин оказываются сравнимыми между собой.

Подводя итоги, еще раз сформулируем основные свойства электродинамического механизма выделения энергии вращающейся черной дырой, помещенной во внешнее магнитное поле.

1. Процесс Блендфорда–Знайека торможения черной дыры обусловлен действием гравитомагнитной силы в области генерации частиц вне горизонта событий. При этом поток частиц, пересекающий горизонт, переносит отрицательную энергию по направлению к черной дыре. Иными словами, механизм Блендфорда–Знайека является электромагнитной реализацией эффекта Пенроуза. Напомним, что указанный эффект позволяет выделять энергию из вращающейся черной дыры за счет распада частиц в эргосфере, когда одна из вторичных частиц уходит на бесконечность, а вторая (обладающая отрицательной энергией) падает на горизонт событий [Frolov, Novikov, 1998]. Именно такая картина, как мы видели, и реализуется в магнитосфере

черной дыры. Электрические же поля и токи, связанные с частицами, покидающими магнитосферу черной дыры, формируют поток электромагнитной энергии, уходящей на бесконечность. В результате черная дыра, помещенная во внешнее магнитное поле, работает как униполярный индуктор, теряя энергию вращения за счет электрических токов, текущих в ее магнитосфере.

2. Формально можно ввести поверхностные заряды и токи и интерпретировать механизм торможения черной дыры по аналогии с радиопульсарами, т. е. как результат тормозящего момента сил Ампера, действующих на мембрану (см. (3.70)). Однако этот язык не соответствует реальным физическим процессам, происходящим в магнитосфере черной дыры.

3. Технически проблема определения энергетических потерь вращающейся черной дыры связана не столько с вопросом о величине продольного тока, как это было в случае магнитосферы радиопульсаров, сколько с вопросом о величине угловой скорости $\Omega_{\rm F}(\Psi)$ вращения магнитных силовых линий. Действительно, в случае магнитосферы черной дыры угловая скорость $\Omega_{\rm F}(\Psi)$, входящая в выражение (3.64), вообще говоря, никак не связана с угловой скоростью черной дыры $\Omega_{\rm H}$; она сама должна определяться из решения полной задачи. В частности, величина $\Omega_{\rm F}$ должна зависеть от свойств источника плазмы, находящегося между двумя альфвеновскими поверхностями на силовых линиях, проходящих через горизонт черной дыры. Этот важный вывод, следующий из анализа основных свойств уравнения Грэда–Шафранова, связан с появлением дополнительных критических поверхностей, обусловленных эффектами общей теории относительности.

4. Как и в случае магнитосферы радиопульсаров, проблема потерь энергии не может быть последовательно решена в рамках бессилового приближения. Последнее в значительной степени обусловлено тем, что бессиловое уравнение остается эллиптическим вплоть до горизонта черной дыры.

5. В рамках полной МГД-версии (т. е. в случае конечной массы частиц) горизонт находится в гиперболической области уравнения Грэда–Шафранова (см. гл. 4). Поэтому, как и следовало ожидать, физические условия на горизонте не могут влиять на течение во внешних частях магнитосферы.

3.4. Структура магнитосферы черной дыры

3.4.1. Общие свойства. Обсудим основные теоретические результаты, касающиеся структуры магнитосферы вращающейся черной дыры, т. е. области над аккреционным диском, в которой магнитные поля играют определяющую роль. Как уже отмечалось, на сегодняшний день магнитогидродинамическая модель центральной машины представляется наиболее реалистичной. Вместе с тем следует признать, что, несмотря на многочисленные усилия теоретиков в течение последних тридцати лет, до сих пор не удалось построить последовательную модель магнитосферы черной дыры, позволяющую ответить на ключевые вопросы, т. е. определить величину потерь энергии и скорость эжекции вещества как функцию естественных физических параметров, характеризующих центральную машину (таких как масса и скорость вращения черной дыры, а также темп аккреции), и, кроме того, показать возможность эффективной коллимации магнитных силовых линий в направлении оси вращения. Последнее связано главным образом с тем, что подобная задача является в своей основе двумерной. В этом смысле она оказывается существенно сложнее теории дисковой аккреции, в которой задача в некоторых случаях с хорошей точностью может быть сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений или даже к алгебраической задаче.

Прежде всего, как уже подчеркивалось, эффекты общей теории относительности приводят к появлению второго семейства особых поверхностей, соответствующих аккреции плазмы на черную дыру [Phinney, 1983]. Действительно, как непосредственно видно из выражения для полоидальной четырех-скорости плазмы, измеренной локально невращающимися наблюдателями (см. (1.254)):

$$u_{\mathrm{p}}^2 = \frac{(E-\omega L)^2 - \alpha^2 L^2/\varpi^2 - \alpha^2\mu^2}{\alpha^2\mu^2}, \tag{3.82}$$

при приближении к горизонту черной дыры физическая компонента четырех-скорости u_{p} стремится к бесконечности. Поэтому скорость вещества на горизонте ($\alpha = 0$) приближается к скорости света, и следовательно, неизбежно должна превышать скорость любых собственных колебаний.

Необходимо отметить еще несколько особенностей, характерных именно для магнитосфер черных дыр, которые существенно осложняют аналитический подход. Прежде всего, как мы видели, для объяснения энергетики центральной машины необходимо, чтобы угловая скорость вращения была близка к максимальной, так что (в отличие, например, от магнитосферы радиопульсаров) в задаче отсутствует малый параметр $\Omega R/c$. Физически это означает, что внешний световой цилиндр находится вблизи центральной машины и поэтому в задаче, помимо внутренних, неизбежно должны быть учтены и вопросы прохождения внешних особых поверхностей. В частности, магнитное поле уже нельзя считать заданным. Действительно, как мы видели на примере радиопульсаров, электрические токи, текущие в магнитосфере, существенно искажают магнитное поле вблизи светового цилиндра. С другой стороны, у черной дыры отсутствует собственное магнитное поле. Следовательно, при исследовании магнитосферы черной дыры нельзя воспользоваться результатами многочисленных исследований, посвященных аккреции на нейтронные [Ghosh, Lamb, 1979] и молодые [Bardou, Heyvaerts, 1996; Ustyugova et al., 2000; Agapitou, Papaloizou, 2000] звезды, в случае которых поле центральной звезды является определяющим.

В заключение отметим еще одно немаловажное обстоятельство, характерное для аккреции на быстровращающиеся черные дыры, которое, напротив, существенно упрощает рассматриваемую здесь задачу. Как оказывается, гравитомагнитные силы, связанные с эффектом Лензе–Тирринга, приводят к тому, что аккреционный диск вблизи черной дыры располагается в экваториальной плоскости вращающейся черной дыры (так называемый эффект Бардина–Петерсона [Торн, Прайс, Макдональд, 1988]). Это происходит даже в случае, когда на больших расстояниях плоскость диска существенно отклоняется от экваториальной. Поскольку же магнитное поле вблизи горизонта черной дыры должно генерироваться именно в диске, и следовательно, повторять его геометрию, естественно предположить, что и ось симметрии регулярного полоидального магнитного поля должна совпадать с осью вращения черной дыры. В результате (по крайней мере для достаточно холодных дисков) можно считать магнитосферу черной дыры осесимметричной, так что в этом смысле ее структура оказывается проще структуры магнитосферы аккрецирующих нейтронных звезд, где, как хорошо известно, ось магнитного момента может быть направлена под произвольным углом к оси вращения.

3.4.2. Точные решения.

1. *Медленно вращающаяся черная дыра с квазимонопольным магнитным полем* [Blandford, Znajek, 1977]. Первый пример точного решения бессилового уравнения Грэда–Шафранова был построен Р. Блендфордом и Р. Знайеком [Blandford, Znajek, 1977], рассмотревшими в качестве нулевого приближения магнитосферу невращающейся черной дыры с расщепленным (*split*) монопольным полем (рис. 3.6). Подобная геометрия, как уже говорилось, может быть реализована в присутствии тонкого аккреционного диска, в котором протекают необходимые электрические токи. Очевидно, что точным решением уравнения Грэда–Шафранова для невращающейся черной дыры будет монопольное поле $\Psi = \Psi_0(1 \pm \cos\theta)$.

Рассмотрим теперь случай медленно вращающейся черной дыры. Как было сформулировано выше, в случае, когда решение уравнения (3.49) может быть продолжено вплоть до горизонта черной дыры, задача требует лишь одного граничного условия. Например, можно зафиксировать угловую скорость $\Omega_{\rm F}(\Psi)$ или продольный ток $I(\Psi)$. Однако в работе Блендфорда и Знайека фактически рассматривалась обратная задача: значения продольного тока $I(\Psi)$ и угловой скорости $\Omega_{\rm F}(\Psi)$ были определены для конкретной структуры полоидального магнитного поля на бесконечности. Точнее, были найдены такие значения $I(\Psi)$ и $\Omega_{\rm F}(\Psi)$, для которых решение уравнения равновесия остается близким к монопольному. Напомним, что в более полной постановке (т. е. при учете конечной массы частиц) обе эти величины уже не являются свободными и должны находиться из решения задачи.

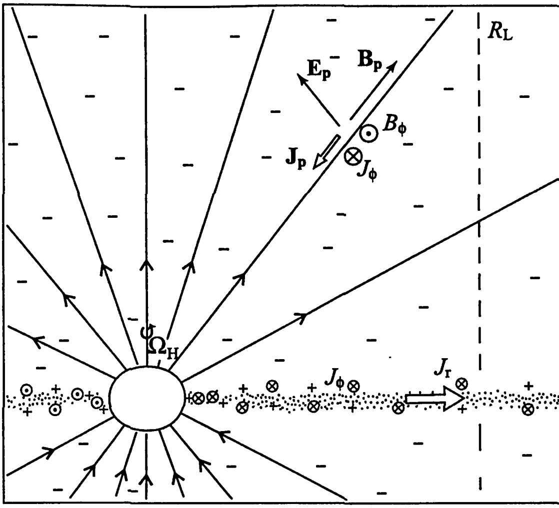


Рис. 3.6. Структура электромагнитных полей в случае квазимонопольного магнитного поля в окрестности медленно вращающейся черной дыры [Blandford, Znajek, 1977]

Итак, вновь будем искать решение уравнения Грэда–Шафранова при $\theta < \pi/2$ в виде

$$\Psi = \Psi_0[1 - \cos\theta + \varepsilon_3^2 f(r,\theta)], \tag{3.83}$$

где $\varepsilon_3 = a/M$. Поскольку в области $r_g(\Omega_H r_g)^2 \ll r - r_g \ll 1/\Omega_H$ уравнение равновесия с точностью до малой величины ε_3^2 совпадает с вакуумным уравнением, задача об определении поправок к вакуумному магнитному полю фактически отделяется от задачи об определении продольного тока I и угловой скорости Ω_F. Действительно, как было показано выше, на больших расстояниях и при выполнении условия $4\pi I(\Psi) = \Omega_F(\Psi)(2\Psi - \Psi^2/\Psi_0)$ (см. (2.224)), которое для монопольного магнитного поля выглядит как

$$4\pi I(\theta) = \Omega_F(\theta)\Psi_0 \sin^2\theta, \tag{3.84}$$

где Ψ_0 — полный магнитный поток в верхней полусфере, монопольное магнитное поле $\Psi = \Psi_0(1 - \cos\theta)$ остается точным решением полного уравнения равновесия (в частности, оно не имеет особенности на световом цилиндре, т. е. при $\varpi_L = c/\Omega$). С другой стороны, если предположить, что и вблизи горизонта магнитное поле близко к монопольному, то можно воспользоваться условием (3.51), которое дает

$$4\pi I(\theta) = [\Omega_H - \Omega_F(\theta)]\Psi_0 \sin^2\theta. \tag{3.85}$$

Комбинируя соотношения (3.84) и (3.85), получаем

$$\Omega_F = \frac{\Omega_H}{2}; \quad I(\Psi) = I_M = \frac{\Omega_F}{4\pi}\left(2\Psi - \frac{\Psi^2}{\Psi_0}\right). \tag{3.86}$$

Таким образом, для обсуждаемой задачи продольный ток автоматически оказывается равным критическому, а угловая скорость Ω_{F} в точности соответствует случаю наиболее эффективного выделения энергии. Еще раз подчеркнем, что в бессиловом приближении величины Ω_{F} и I не фиксируются, а полученные результаты соответствуют лишь одному из бесконечного числа возможных бессиловых решений.

Воспользовавшись соотношениями (3.86), для линеаризованного уравнения Грэда–Шафранова получаем [Blandford, Znajek, 1977]

$$r^2\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(1-\frac{r_{\mathrm{g}}}{r}\right)\frac{\partial f}{\partial r}\right]+\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)=-\frac{1}{2}\frac{r_{\mathrm{g}}}{r}\left(1+\frac{r_{\mathrm{g}}}{r}\right)\sin^2\theta\cos\theta. \tag{3.87}$$

Как мы видим, оно вновь может быть решено с помощью разделения переменных. Однако следует подчеркнуть одно важное отличие между уравнением (3.87) и соответствующими гидродинамическими уравнениями, подробно обсуждавшимися в гл. 1. Дело в том, что линеаризованное уравнение (3.87) имеет особенность на горизонте событий, т. е. при $r = r_{\mathrm{g}}$. Последнее связано с тем, что в используемом здесь методе последовательных приближений в нулевом порядке по величине ε_3^2 внутренняя альфвеновская поверхность совпадает с горизонтом черной дыры. Именно особенность на критической поверхности и приводит к сингулярности уравнения (3.87) при $r = r_{\mathrm{g}}$. В действительности же альфвеновская поверхность $\alpha^2 = (\Omega_{\mathrm{F}}-\omega)^2\varpi^2$ находится вне горизонта событий, где в общем случае и следует сформулировать условие регулярности. Что же касается «условия на горизонте» (3.51), то оно использовано при определении правой части уравнения (3.87). В противном случае здесь появился бы множитель α^{-2}, так что уравнение (3.87) имело бы при $\alpha^2 = 0$ двойную сингулярность.

Действительно, все члены в уравнении Грэда–Шафранова (3.49), имеющие малость порядка ε_3^2 (т. е. слагаемые, пропорциональные Ω_{F}^2 и I^2), содержат сомножитель α^{-2}. Поэтому в общем случае и в правой части линеаризованного уравнения (3.87) должен появиться тот же фактор. Лишь при подстановке в выражение для тока I значения, даваемого условием (3.85), происходит аналитическое сокращение числителя и знаменателя, в результате чего правая часть уравнения (3.87) при $r = r_{\mathrm{g}}$ оказывается конечной.

В итоге решение уравнения (3.87) при $\theta < \pi/2$ может быть записано как

$$\Psi(r,\theta)=\Psi_0\left[1-\cos\theta+\varepsilon_3^2 g_2(r)\sin^2\theta\cos\theta\right], \tag{3.88}$$

причем уравнение на радиальную функцию $g_2(r)$ имеет вид

$$r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\left(1-\frac{r_{\mathrm{g}}}{r}\right)\frac{\mathrm{d}g_2}{\mathrm{d}r}\right]-6g_2=-\frac{1}{2}\frac{r_{\mathrm{g}}}{r}\left(1+\frac{r_{\mathrm{g}}}{r}\right). \tag{3.89}$$

Граничными условиями к уравнению (3.89) будут

1) отсутствие особенности при $r = r_{\mathrm{g}}$ (но не на горизонте!):

$$g_m(r_{\mathrm{g}}) < \infty \quad \text{при} \quad r = r_{\mathrm{g}}; \tag{3.90}$$

2) монопольное поле на бесконечности:

$$g_2 \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty. \tag{3.91}$$

Решение уравнения (3.89) имеет вид [Blandford, Znajek, 1977]

$$g_2(r) = 2\frac{r^2}{r_g^2} - 3\frac{r}{r_g} + \frac{7}{24} + \frac{1}{36}\frac{r_g}{r} + \frac{1}{2}\frac{r^2}{r_g^2}\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(4\frac{r}{r_g} - 3\right)\ln\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{r_g^2}\right)\left(4\frac{r}{r_g} - 3\right)I_1\left(\frac{r}{r_g}\right) - \left[2\frac{r^3}{r_g^3} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{r_g^2} - \frac{3}{2}\frac{r}{r_g} + \frac{1}{2}\frac{r^2}{r_g^2}\ln\left(\frac{r}{r_g}\right)\right] \times \\ \times \left[4 - \frac{r_g}{r} - \frac{1}{6}\frac{r_g^2}{r^2} + \left(4\frac{r}{r_g} - 3\right)\ln\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\right], \tag{3.92}$$

где

$$I_1(x) = \int\limits_x^\infty \frac{dt}{t}\ln\frac{t}{t-1}. \tag{3.93}$$

При этом $g_2(r_g) = (\pi^2/12 - 49/72)$ и $g_2(r) \to r_g/8r$ при $r \to \infty$. Построенное решение является обобщением решения Майкеля [Michel, 1973a] на случай медленно вращающейся черной дыры. Еще раз напомним, что как следствие поставленной задачи оно содержит поток электромагнитной энергии, уходящей от черной дыры.

2. *Медленно вращающаяся черная дыра в параболическом магнитном поле* [Blandford, Znajek, 1977]. В упомянутой работе Блендфорда и Знайека был также рассмотрен и случай, когда в отсутствие вращения потенциал Ψ соответствует «нефизическому решению» (3.41), (3.42) (рис. 3.7; см. также [Ghosh, Abramowicz, 1997]). Как мы видели, при медленном вращении, т. е. при $\Omega_F r_g \ll 1$ (и в плоском пространстве), «нефизическое решение» (2.228) практически совпадает с вакуумным решением (3.41). Поэтому при медленном вращении черной дыры (и при $\theta < \pi/2$) в нулевом приближении функция магнитного потока вновь может быть определена как

$$\Psi_0^{(1)}(r,\theta) = \pi C X(r,\theta), \tag{3.94}$$

где теперь

$$X(r,\theta) = r(1-\cos\theta) + r_g(1+\cos\theta)\left[1 - \ln(1+\cos\theta)\right] - 2r_g(1-\ln 2). \tag{3.95}$$

На больших расстояниях от черной дыры (но малых по сравнению с радиусом светового цилиндра) оно переходит в вакуумное решение:

$$\Psi(r,\theta) = r(1-\cos\theta). \tag{3.96}$$

С другой стороны, при выполнении условия $\Omega_F(X)X \ll 1$ магнитный поток (3.96) остается решением уравнения Грэда–Шафранова и за пределами светового цилиндра (см. гл. 2). В результате мы можем применить процедуру построения решения, описанную в предыдущем

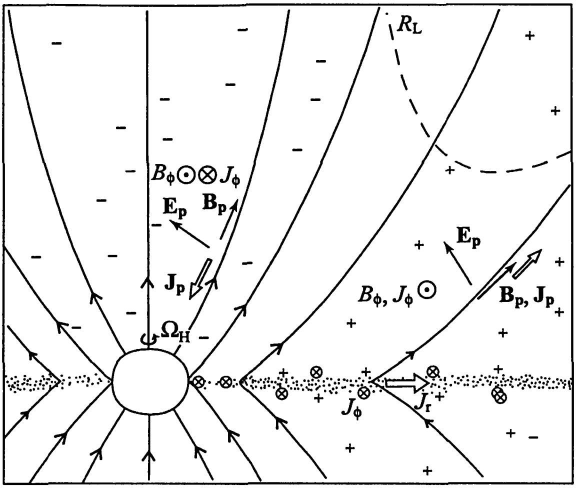


Рис. 3.7. Структура электромагнитных полей в случае параболического магнитного поля в окрестности медленно вращающейся черной дыры [Blandford, Znajek, 1977]

пункте. В частности, при медленном вращении решение снова можно искать в виде малой поправки к вакуумному магнитному полю.

Что же касается продольного электрического тока I и угловой скорости Ω_F, то для их определения опять достаточно воспользоваться алгебраическими соотношениями (3.51) и (2.226). Предполагая, что полоидальное магнитное поле на бесконечности остается в точности таким же, как и в вакуумном случае, для медленного вращения получаем [Blandford, Znajek, 1977]

$$4\pi I(\Psi) = 2\Omega_F(\Psi)\Psi. \tag{3.97}$$

«Условие на горизонте» по-прежнему имеет вид

$$4\pi I(\Psi) = [\Omega_H - \Omega_F(\Psi)] \sin\theta \frac{d\Psi}{d\theta}. \tag{3.98}$$

Снова анализируя систему двух уравнений, (3.97) и (3.98), легко найти вид профиля угловой скорости [Blandford, Znajek, 1977]:

$$\Omega_F(r_g, \theta) = \frac{\Omega_H \sin^2\theta[1 + \ln(1 + \cos\theta)]}{4\ln 2 + \sin^2\theta + [\sin^2\theta - 2(1 + \cos\theta)]\ln(1 + \cos\theta)}. \tag{3.99}$$

Величина угловой скорости меняется здесь от $\Omega_H/2$ при $\Psi = 0$ до $\Omega_H/(4\ln 2 + 1) \approx 0{,}265\Omega_H$ на последней силовой линии ($\Psi = \Psi_*$), проходящей через горизонт черной дыры. При этом

$$\Psi_* = 2\pi C r_g \ln 2. \tag{3.100}$$

Как показано на рис. 3.7, направление продольного тока остается постоянным практически на всех магнитных силовых линиях, проходящих через горизонт черной дыры. Поэтому в рамках рассматриваемой модели замыкание тока также должно происходить через аккреционный диск.

УПРАЖНЕНИЯ.

1. К решению линейного уравнения, каковым и является уравнение Грэда–Шафранова в вакууме, можно добавить любое другое его решение; покажите, что в самом общем виде потенциал X и угловая скорость $\Omega_{\rm F}$ имеют вид

$$X(r,\theta) = r(1-\cos\theta) + r_{\rm g}(1+\cos\theta)\,[1-\ln(1+\cos\theta)] - \\ - 2r_{\rm g}(1-\ln 2) + a_k r_{\rm g}(1-\cos\theta); \qquad (3.101)$$

$$\Omega_{\rm F}(r_{\rm g},\theta) = \frac{\Omega_{\rm H}\sin^2\theta[1+\ln(1+\cos\theta)+a_k]}{4\ln 2+\sin^2\theta+[\sin^2\theta-2(1+\cos\theta)]\ln(1+\cos\theta)+a_k(2-2\cos\theta+\sin^2\theta)}, \qquad (3.102)$$

где a_k — произвольная постоянная.

2. Покажите, что при $a_k = -1$ полный ток в пределах силовых линий, проходящих через черную дыру, равен нулю (рис. 3.8).

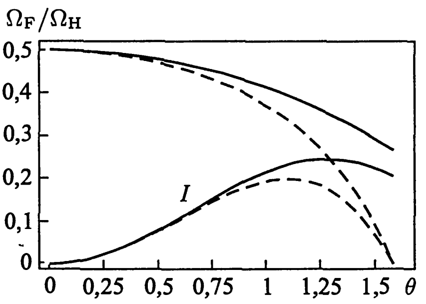


Рис. 3.8. Профили угловой скорости (3.99) и продольного тока (3.97) вблизи поверхности черной дыры для случая параболического магнитного поля. Штриховой линией показано решение (3.101) и (3.102) при $a_k = -1$

3. *Медленно вращающаяся черная дыра, помещенная в центр ограниченного диска* [Beskin, Istomin, Pariev, 1992]. В работе [Beskin, Istomin, Pariev, 1992] (см. также [Бескин, 1997]) в рамках бессилового приближения был исследован более реалистический, чем монопольное магнитное поле, случай, когда черная дыра находится в центре хорошо проводящего диска с внутренним радиусом b (см. рис. 3.2). Здесь также предполагалось, что магнитные силовые линии не проникают в аккреционный диск. Тогда для невращающейся черной дыры потенциал Ψ описывается формулой (3.39). В частности, вблизи черной дыры магнитное поле является однородным:

$$\Psi_v \approx \frac{1}{2}\Psi_0\frac{r^2\sin^2\theta}{b^2}, \qquad (3.103)$$

а на больших расстояниях $(r \gg b)$ по-прежнему остается монопольным.

Вновь рассматривая случай медленного вращения и предполагая, что структура магнитного поля не изменяется при появлении электрических зарядов и токов, заполняющих магнитосферу, можно найти значения угловой скорости $\Omega_{\rm F}(\Psi)$ и продольного тока $I(\Psi)$, удовлетворяющие этому предположению. Единственное изменение здесь состоит в том, что в «граничном условии на горизонте» вместо монопольного следует подставить однородное магнитное поле (3.103). В результате условие (3.51) вместо соотношения (3.85) дает

$$4\pi I(\Psi) = 2\Psi\sqrt{1-\Psi/\Psi_*}[\Omega_{\rm H} - \Omega_{\rm F}(\Psi)], \tag{3.104}$$

где $\Psi_* = 0{,}5\Psi_0 r_{\rm g}^2/b^2$ — магнитный поток, проходящий через поверхность черной дыры. Условие же на больших расстояниях будет по-прежнему определяться соотношением (3.84). Комбинируя (3.84) и (3.104), получаем [Beskin, Istomin, Pariev, 1992] (рис. 3.9)

$$\Omega_{\rm F}(\Psi) = \frac{\sqrt{1-\Psi/\Psi_*}}{1-\Psi/2\Psi_0+\sqrt{1-\Psi/\Psi_*}}\,\Omega_{\rm H}; \tag{3.105}$$

$$4\pi I(\Psi) = 2\Psi(1-\Psi/2\Psi_0)\frac{\sqrt{1-\Psi/\Psi_*}}{1-\Psi/2\Psi_0+\sqrt{1-\Psi/\Psi_*}}\,\Omega_{\rm H}. \tag{3.106}$$

Соотношения (3.105), (3.106) и задают структуру электрических полей и продольных токов в магнитосфере черной дыры. Что же касается возмущения магнитного поля, то для его нахождения потребовалось бы решить уравнение в частных производных, в котором не удается провести разделение переменных. Последнее связано со сложным видом нулевого приближения, не имеющего столь простого вида, как в случае монопольного магнитного поля. Важно, однако, что и в данном случае задача о возмущении магнитных поверхностей отделяется от задачи об определении угловой скорости вращения $\Omega_{\rm F}(\Psi)$ и продольного тока $I(\Psi)$.

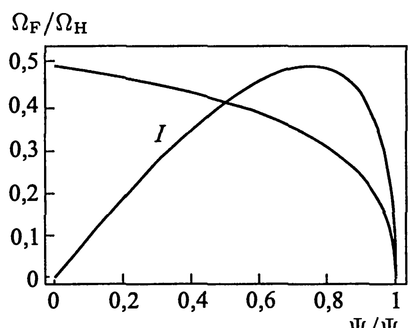


Рис. 3.9. Профили угловой скорости (3.105) и продольного тока (3.106) в зависимости от потенциала Ψ для случая $r_{\rm g}/b \ll 1$

Мы видим, что для рассматриваемого здесь случая $I(\Psi_*) = 0$. Следовательно, в построенной выше модели в пределах магнитных силовых линий, проходящих через горизонт черной дыры, неизбежно возникает обратный ток, а полный ток, текущий в области $\Psi < \Psi_*$, автоматически равен нулю. Условие же $\Omega_{\rm F}(\Psi_*) = 0$ показывает, что в данной области будет равен нулю и полный электрический заряд. Далее, как видно из рис. 3.10, область продольного тока образует «струйный выброс» с угловым раствором

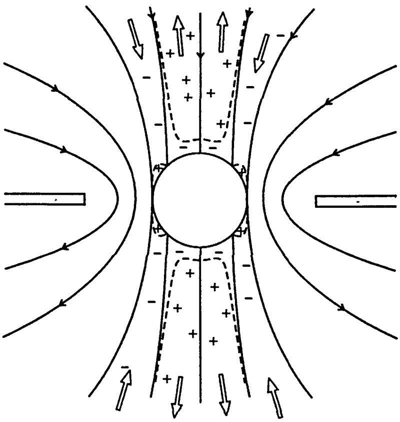


Рис. 3.10. Структура магнитосферы и форма поверхности $\rho_{\rm GJ} = 0$ (штриховая линия) в случае магнитосферы черной дыры, помещенной в центр ограниченного диска

$\theta_j = \arccos(1 - \Psi_*/\Psi_0) \approx r_{\rm g}/b$. Энергия $W = (1/2\pi)\int \Omega_{\rm F}(\Psi)I(\Psi){\rm d}\Psi$, переносимая электромагнитным полем в пределах «струйного выброса», близка к максимально возможной ($W_{\rm tot} = 0{,}489\,W_{\rm BZ}$), поскольку угловая скорость (3.105) близка к $\Omega_{\rm H}/2$. Кроме того, на рис. 3.10 приведена форма поверхности $\rho_{\rm GJ} = 0$, вблизи которой, как было показано выше, возможно эффективное рождение плазмы. Указанная поверхность всегда расположена между внутренней и внешней альфвеновскими поверхностями, что и требуется для эффективного заполнения плазмой магнитосферы черной дыры.

3.4.3. Модели магнитосферы. Таким образом, в настоящее время для магнитосферы черной дыры аналитические решения бессилового уравнения удалось получить только для нескольких модельных случаев. Например, до сих пор не построены решения с нулевым продольным током. С другой стороны, ряд численных решений [Fendt, Geiner, 2001; Komissarov, 2001; Uzdensky, 2004; Komissarov, 2004b] позволяет сформулировать некоторые общие свойства магнитосферы черной дыры. Важно подчеркнуть тот факт, что для сильнозамагниченных течений (когда плотность энергии электромагнитного поля существенно превышает плотность энергии частиц) структура магнитосферы должна быть близка к бессиловой. В частности, если продольный ток заметно меньше критического, то и при учете массы частиц в магнитосфере будут возникать световые поверхности, за пределами которых применение метода уравнения Грэда–Шафранова становится невозможным. Поэтому бессиловые решения позволяют судить и о более общем случае, соответствующем полной версии уравнения Грэда–Шафранова.

Подчеркнем, что при обсуждении конкретных астрофизических объектов существенность роли эффектов общей теории относительности не всегда является очевидной. Например, есть указания на то, что струйные выбросы в молодых звездных объектах связаны не с центральной вращающейся звездой, а с аккреционным диском [Pelletier, Pudritz, 1992]. Если механизм образования джетов в активных галактических ядрах имеет ту же природу, что и в молодых звездах, то не исключено, что черная дыра играет лишь пассивную роль в процессе образования выбросов, а эффекты ОТО не являются принципиально важными для понимания природы их образования.

Вместе с тем эффекты ОТО, по-видимому, все же вносят заметный вклад в определение физических условий во многих компактных объектах. Прежде всего, на это указывают жесткие спектры и аннигиляционные линии в галактических рентгеновских источниках, являющихся кандидатами в черные дыры солнечных масс [Сюняев и др., 1991]. Указанные свойства никогда не наблюдаются у рентгеновских источников, про которые достоверно известно, что в них происходит аккреция не на черную дыру, а на нейтронную звезду. Сюда можно отнести также и сверхсветовые скорости деталей в квазарах [Бегельман, Блендфорд, Рис, 1987], которые, возможно, связаны с потоком релятивистской электронно-позитронной плазмы, эжектируемой наряду со слаборелятивистским струйным выбросом [Sol, Pelletier, Asséo, 1989; Henri, Pelletier, 1991; Rees, 1997]. Все это говорит в пользу существования дополнительного механизма рождения и ускорения частиц, в котором эффекты общей теории относительности могут играть определяющую роль [Okamoto, 1992; Hirotani, Tomimatsu, 1994; Horiuchi, Mestel, Okamoto, 1995].

Перейдем теперь собственно к обсуждению двумерной структуры магнитосферы черной дыры. К сожалению, мы еще очень далеки от построения последовательной теории даже в бессиловом приближении. В настоящее время можно сформулировать лишь самые общие свойства магнитосферы черной дыры. Например, ясно, что ключевую роль здесь должна играть топология полоидального магнитного поля, поскольку, как уже говорилось, именно вдоль полоидального магнитного поля происходят истечение частиц и транспортировка электромагнитной энергии. Однако в этом вопросе до сих пор нет полной ясности. На сегодняшний день обсуждаются самые различные варианты, в которых структура магнитного поля существенно различается. Наиболее простая геометрия возникает в случае, когда изначально имелось квазиоднородное внешнее магнитное поле (см. рис. 3.2). Можно предположить, что и при усилении поля в аккреционном диске его геометрия в целом сохраниться, так что все силовые линии магнитного поля будут уходить на бесконечность. В результате плазма сможет свободно истекать за пределы магнитосферы. Именно такую структуру и имели точные решения, рассмотренные в предыдущем пункте.

С другой стороны, очевидно, что если магнитное поле генерируется в аккреционном диске, может существовать другое семейство силовых линий, проходящих через горизонт черной дыры, но не уходящих на бесконечность, а пересекающих аккреционный диск вблизи черной дыры (рис. 3.11). В частности, эти силовые линии уже не будут проходить через внешние особые поверхности. Подобная ситуация активно исследовалась в численных расчетах, посвященных аккреции на нейтронные [Ghosh, Lamb, 1979; Bardou, Heyvaerts, 1996] и молодые [Ustyugova et al., 2000; Fendt, Elstner, 2000] звезды. В последнее время указанная геометрия все чаще обсуждается и для случая магнитосфер вращающихся черных дыр, поскольку при генерации магнитного поля в диске она также представляется естественной [Fendt, Geiner, 2001]. Здесь, однако, возникает множество вопросов, связанных с замкнутыми силовыми линиями, соединяющими различные части аккреционного диска либо аккреционный диск с горизонтом черной дыры [Fendt, 1997; Tomimatsu, Takahashi, 2001; Li, 2003; van Putten, Levinson, 2003] или центральной звезды [Bardou, Heyvaerts, 1996]. В результате полная задача о строении магнитосферы вращающейся черной дыры должна строиться с учетом обеих групп магнитных силовых линий, свойства которых, как мы видели, существенно отличаются друг от друга.

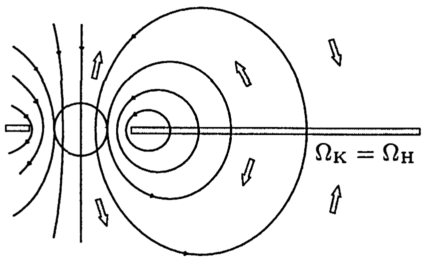


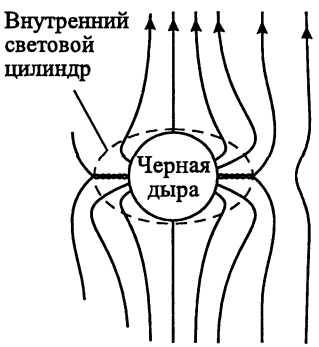
Рис. 3.11. Взаимодействие черной дыры и аккреционного диска за счет силовых линий магнитного поля (контурные стрелки — поток энергии электромагнитного поля)

Действительно, рассмотрим, например, магнитную силовую линию, проходящую как через горизонт черной дыры, так и через аккреционный диск (рис. 3.11). Понятно, что для хорошо проводящего диска угловая скорость Ω_F оказывается близка к кеплеровской скорости Ω_K в области пересечения силовой линии и диска; ЭДС возникает лишь за счет малого рассогласования угловых скоростей Ω_F и Ω_K. В результате, если диск вращается с угловой скоростью, превышающей угловую скорость вращения черной дыры, поток энергии электромагнитного поля (вектора Пойнтинга) всегда направлен от диска к черной дыре. В этом случае угловая скорость вращения черной дыры увеличивается.

Однако если черная дыра вращается достаточно быстро, то для силовых линий, проходящих через аккреционный диск в тех местах, где кеплеровская скорость достаточно мала, становится возможным выполнение условия $\Omega_F < \Omega_H$. Вдоль таких магнитных силовых линий энергия вращения черной дыры будет передаваться от нее к аккреционному диску [Li, 2003]. Последнее, в свою очередь, должно приводить к дополнительному выделению энергии, которое в принципе может быть зарегистрировано. Подобный механизм нагрева аккреционного диска привлекался при обсуждении чрезвычайно широкой линии железа в яркой сейфертовской галактике MCG–6–30–15 [Wilms et al., 2001].

Сделаем еще несколько замечаний, касающихся структуры магнитосферы черной дыры. Прежде всего, ясно, что для нулевых продольных токов решение не может быть продолжено за пределы не только внешнего (как это было в магнитосфере нейтронной звезды), но и внутреннего светового цилиндра. В результате вблизи черной дыры должна возникнуть область, в которой электрическое поле будет превышать магнитное (см., например, [Komissarov, 2003]). К сожалению, при учете эффектов ОТО разделение переменных в уравнении Грэда–Шафранова невозможно; поэтому методы, обсуждавшиеся выше, здесь неприменимы.

Далее, при быстром вращении решение Уолда (3.29) для вакуумной магнитосферы ведет к выталкиванию магнитного поля в эргосферу [Торн, Прайс, Макдональд, 1988], что могло бы привести к дополнительному фактору $1-a^2/M^2$ и в выражении (3.67). В случае же магнитосферы черной дыры, заполненной плазмой, естественно предположить, что все силовые линии магнитного поля, пересекающие внутренний световой цилиндр, $\alpha^2 = (\Omega_{\rm F} - \omega)^2\varpi^2$, в итоге пересекут и горизонт черной дыры (рис. 3.12, *а*); поэтому выделение энергии для предельно вращающейся черной дыры по порядку величины совпадет с выражением (3.64). Здесь имеется полная аналогия с магнитосферой радиопульсаров, когда силовые линии, выходящие за пределы светового цилиндра, не пересекают экваториальную плоскость, а уходят на бесконечность (рис. 3.12, *б*). Структура магнитного поля, показанная на рис. 3.12, *а*, была недавно получена численно [Komissarov, 2005].



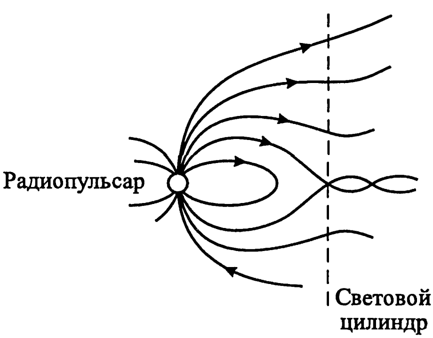


Рис. 3.12. Структура магнитосферы: а) быстровращающейся черной дыры; б) радиопульсаров

Наконец, отметим еще одно существенное обстоятельство. Как уже подчеркивалось, уравнение Грэда–Шафранова справедливо вплоть до горизонта черной дыры лишь при условии, что вплоть до горизонта электрическое поле остается меньше магнитного. С другой стороны, согласно соотношению (3.51) на самом горизонте электрическое поле сравнивается с магнитным. Поэтому условие применимости бессилового подхода вплоть до горизонта черной дыры можно сформулировать как [Beskin, Kuznetsova, 2000a]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(B^2 - E^2)\Big|_{r_{\mathrm{g}}} > 0. \tag{3.107}$$

Используя определения электрического и магнитного полей, условие (3.107) можно переписать в виде [Hirotani et al., 1992]

$$-2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}P - 4\frac{a^2}{\rho_{\mathrm{g}}^2}\sin\theta\cos\theta\, P + 2\frac{\partial P}{\partial\theta} - 2\left(1 - \frac{M}{r_{\mathrm{g}}}\right)P^2 + \\ + \frac{r_{\mathrm{g}}}{(\Omega_{\mathrm{H}} - \Omega_{\mathrm{F}})^2\varpi_{\mathrm{g}}^2}\left(\frac{\partial\alpha^2}{\partial r}\right)_{r_{\mathrm{g}}} - 2\frac{r_{\mathrm{g}}}{\Omega_{\mathrm{H}} - \Omega_{\mathrm{F}}}\left(\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)_{r_{\mathrm{g}}} - 2\frac{r_{\mathrm{g}}}{\varpi_{\mathrm{g}}}\left(\frac{\partial\varpi}{\partial r}\right)_{r_{\mathrm{g}}} + 2\frac{r_{\mathrm{g}}^2}{\rho_{\mathrm{g}}^2} > 0, \tag{3.108}$$

где параметр

$$P = -r_{\mathrm{g}}\frac{(\partial\Psi/\partial r)_{r_{\mathrm{g}}}}{(\partial\Psi/\partial\theta)_{r_{\mathrm{g}}}} \tag{3.109}$$

зависит от структуры магнитного поля вблизи горизонта. Следовательно, условие (3.108) способно существенно ограничить структуру магнитного поля вблизи горизонта черной дыры. Как показано на рис. 3.13, однородное магнитное поле $\Psi(r,\theta) \approx r^2\sin^2\theta$ не является решением бессилового уравнения вблизи горизонта у экваториальной плоскости, тогда как монопольное (радиальное) магнитное поле может иметь место для любой угловой скорости вращения. В некотором смысле этот результат можно рассматривать как подтверждение картины, показанной на рис. 3.12, где силовые линии внешнего однородного магнитного поля поворачиваются по направлению к горизонту черной дыры.

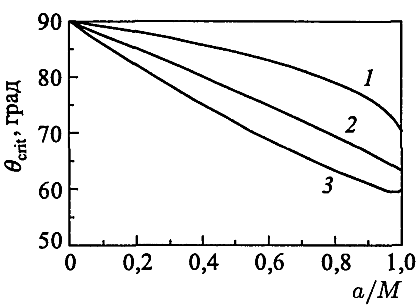


Рис. 3.13. Угол на поверхности черной дыры, в пределах которого однородное магнитное поле может быть решением уравнения Грэда–Шафранова вблизи ее горизонта, для $\Omega_{\mathrm{F}} = 0{,}8\Omega_{\mathrm{H}}$ (*1*); $\Omega_{\mathrm{F}} = 0{,}5\Omega_{\mathrm{H}}$ (*2*); $\Omega_{\mathrm{F}} = 0{,}2\Omega_{\mathrm{H}}$ (*3*) [Hirotani et al., 1992]

С другой стороны, не надо забывать, что при учете конечной массы частиц вблизи горизонта черной дыры, как и в гидродинамическом случае, неизбежно возникает гиперболическая область полного уравнения Грэда–Шафранова, которая принципиально не может быть описана в рамках бессилового приближения. Поэтому не имеет смысла более детально анализировать поведение решения бессилового уравнения (3.49) вблизи горизонта. Более того, легко показать, что попытка описать структуру магнитного поля в рамках бессилового приближения может привести к неверному результату. Соответствующий пример будет представлен в следующей главе.

3.5. Заключение

Подводя итоги, приходится признать, что все рассмотренные выше примеры, конечно же, являются слишком упрощенными. Однако, к сожалению, на сегодняшний день это единственные точные решения, описывающие внутренние области магнитосферы вращающейся черной дыры. Тем не менее полученные результаты способны выделить несколько ключевых положений, позволяющих судить об основных свойствах центральной машины.

Прежде всего, как мы видели, во всех случаях, когда силовые линии уходят на бесконечность, угловая скорость вращения $\Omega_{\rm F}$ оказывается близка к половине угловой скорости вращения черной дыры. Это значит, что эффективность выделения энергии вращающейся черной дырой близка к максимальной. Поскольку же, как показали работы, посвященные анализу вековой эволюции аккрецирующих черных дыр [Moderski, Sikora, 1996; Moderski, Sikora, Lasota, 1998; Wang et al., 2002], их угловая скорость вращения действительно может быть близка к предельной ($a \sim M$), можно сделать вывод о том, что процесс Блендфорда–Знайека способен играть заметную роль в механизме выделения энергии центральной машины.

С другой стороны, рассмотренные выше примеры соответствуют простейшей топологии магнитного поля, при которой отсутствуют силовые линии, соединяющие горизонт событий черной дыры и аккреционный диск (тор и т. п.). Однако при наличии именно таких силовых линий появляются новые интересные возможности.

Наконец, еще раз напомним, что приведенные решения отвечают бессиловому приближению, в котором продольный ток I является фактически свободной величиной. Поэтому и здесь в рамках бессиловой постановки задачи величину тока приходилось выбирать из условия баланса внешней нагрузки и «поверхностной проводимости горизонта» [Торн, Прайс, Макдональд, 1988; Li, 1995]. В следующей главе мы увидим, как эта проблема решается в рамках полной версии уравнения Грэда–Шафранова, учитывающей конечность массы частиц.

ГЛАВА 4

ПОЛНАЯ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ВЕРСИЯ — УСКОРЕНИЕ ЧАСТИЦ И ОБРАЗОВАНИЕ СТРУЙНЫХ ВЫБРОСОВ

4.1. Астрофизическое введение — коллимация и ускорение частиц

Проблемы, связанные со струйными выбросами и ускорением частиц (внутренняя структура джетов, их устойчивость, взаимодействие с областями выделения энергии), столь многообразны, что для их освещения потребовалось бы написание отдельного обзора (см., например, [Krolik, 1999b; Celotti, Blandford, 1999; Sauty, Tsinganos, Trussoni, 2002] и ссылки в них). Поэтому мы ограничимся лишь теми вопросами, которые могут быть рассмотрены в рамках обсуждаемого здесь метода уравнения Грэда–Шафранова.

4.1.1. Радиопульсары. Вопрос о пульсарном ветре уже много лет остается открытым. Иными словами, до сих пор не удалось построить последовательную модель, описывающую на едином языке перенос энергии от поверхности нейтронной звезды до бесконечности и включающую в себя эффективное ускорение частиц (т. е. описывающую практически полную перекачку энергии электромагнитного поля в энергию истекающей плазмы), не говоря уже об объяснении струйных выбросов, наблюдаемых у радиопульсаров Crab и Vela [Weisskopf et al., 2000; Helfand, Gotthelf, Halper, 2001].

Действительно, как было показано в гл. 2, даже в том случае, когда энерговыделение полностью связано с токовыми потерями, в пределах светового цилиндра основная часть энергии должна переноситься электромагнитным полем, а частицы могут вносить лишь небольшой вклад ($\sigma \sim 10^4 \div 10^6$). Наблюдения же показывают, что на больших расстояниях от нейтронной звезды основная часть энергии переносится релятивистскими частицами. Так, например, анализ излучения Крабовидной туманности в области ударной волны (находящейся в районе взаимодействия пульсарного ветра с остатком сверхновой на расстоянии $\sim 10^{17}$ см от пульсара) однозначно указывает на то, что параметр намагниченности составляет здесь всего $\sigma \approx 10^{-3}$ [Kennel, Coroniti, 1984ab]. Поэтому в асимптотически далекой области поток вектора Пойнтинга должен быть полностью перекачен в поток истекающей плазмы.

Однако, по-видимому, подобная трансформация происходит уже на гораздо меньших расстояниях, сравнимых со световым цилиндром. Свидетельством этого стало обнаружение переменного оптического излучения от компаньонов в некоторых тесных двойных системах, содержащих радиопульсары [Djorgovsky, Evans, 1988]. Такое оптическое излучение, периодичность которого в точности совпадает с орбитальным периодом двойной системы, естественно связать с нагревом части звезды-компаньона, обращенной к радиопульсару. Как оказалось, энергия, переизлучаемая компаньоном, практически совпадает с полной энергией, излучаемой радиопульсаром в соответствующий телесный угол. Ясно, что данный факт невозможно объяснить ни на основе модели магнитодипольного излучения, ни для случая сильно замагниченного течения с преобладанием электромагнитного потока энергии, поскольку коэффициент трансформации низкочастотной волны не может быть близок к единице. Лишь если значительная часть энергии связана с потоком релятивистских частиц, нагрев поверхности звезды окажется достаточно эффективным. Поэтому σ-проблема — вопрос о перекачке энергии от электромагнитного поля к частицам в пульсарном ветре — является одной из ключевых проблем современной астрофизики.

Если в семидесятые годы основное внимание уделялось движению релятивистских частиц в интенсивной электромагнитной волне вращающегося магнитного диполя [Max, Perkins, 1971; Asséo, Kennel, Pellat, 1978], то начиная с восьмидесятых, когда стало ясно, что частицы должны играть определяющую роль в пульсарном ветре, главным направлением стал магнитогидродинамический подход [Ardavan, 1976; Okamoto, 1978; Li, Chiueh, Begelman, 1992; Begelman, Li, 1994; Bogovalov, 1997a]. Напомним, что одновременно указанный подход обсуждался в связи с проблемой образования струйных выбросов из активных галактических ядер [Phinney, 1983; Blandford, Znajek, 1977; Macdonald, Thorne, 1982; Camenzind, 1986; Бегельман, Блендфорд, Рис, 1987] и молодых звезд (YSO) [Mestel, 1968; Heyvaerts, Norman, 1989; Sakurai, 1990; Pelletier, Pudritz, 1992; Shu et al., 1994]. Фактически речь шла о возможности построения полного решения, т. е. о расширении решений, полученных в бессиловом приближении для внутренних областей магнитосферы, на область пульсарного ветра.

Дело в том, что, как уже говорилось, бессиловое приближение, в рамках которого были получены первые результаты, сталкивается с определенными трудностями. Прежде всего, в рамках этого приближения нельзя определить долю энергии, переносимой релятивистскими частицами. Кроме того, поскольку в бессиловом приближении электрический ток $I(\Psi)$ на магнитных силовых линиях постоянен, нет никакой надежды последовательно исследовать вопрос о замыкании тока.

Что же касается магнитогидродинамического подхода, то в его рамках достаточно просто описываются как трансформация энергии от электромагнитного поля к частицам, так и вся структура магнитного поля. Кроме того, поскольку электрический ток I уже не должен быть постоянен на магнитных силовых линиях, можно исследовать и вопрос о замыкании тока. К сожалению, как мы увидим, это не относится к угловой скорости $\Omega_{\rm F}(\Psi)$ вращения плазмы, которая по-прежнему остается постоянной на магнитных поверхностях. Наконец, что чрезвычайно важно, в рамках полного магнитогидродинамического уравнения сама величина электрического тока, циркулирующего в магнитосфере, уже не является свободным параметром, а определяется из критических условий на особых поверхностях [Богова-лов, 1992; Бескин, 1997]. Иными словами, одна из основных стоящих перед теорией задач — построение токовой системы и как следствие определение потерь энергии — может быть поставлена математически строго.

Интересно, что первые результаты в рамках МГД-подхода были получены еще в конце шестидесятых годов [Michel, 1969; Goldreich, Julian, 1970]. Именно тогда Майкелем был введен ключевой релятивистский параметр — параметр намагниченности σ (см. (2.79)):

$$\sigma = \frac{e\Omega\Psi_{\rm tot}}{4\lambda m_{\rm e}c^3}, \tag{4.1}$$

определяющий отношение потока электромагнитной энергии к потоку энергии частиц у поверхности звезды. Здесь $\Psi_{\rm tot}$ — полный магнитный поток в источнике. Мы уже использовали этот параметр в гл. 2 при определении условия применимости бессилового предела ($\sigma \to \infty$).

Как уже говорилось, в работе Майкеля для простоты рассматривался случай монопольного магнитного поля. Поэтому следует быть осторожным при определении величины σ для конкретных астрофизических объектов. В частности, для радиопульсаров

$$\Psi_{\rm tot} = \pi B_0 R_0^2 \approx \pi B_0 R^2 \frac{\Omega R}{c}, \tag{4.2}$$

что соответствует магнитному потоку лишь в области открытых силовых линий. В результате получаем

$$\sigma = \frac{eB_0\Omega^2 R^3}{4\lambda m_{\rm e}c^4}. \tag{4.3}$$

Вспомним, что для характерных параметров радиопульсаров ($P \sim 1$ с; $B_0 \sim 10^{12}$ Гс) величина $\sigma \sim 10^4 \div 10^5$ и лишь для самых быстрых из них ($P \sim 0{,}1$ с; $B_0 \sim 10^{13}$ Гс) она достигает значений порядка $10^6 \div 10^8$. Большая величина σ как раз показывает, что основной вклад в поток энергии во внутренних областях магнитосферы вносит поток электромагнитного поля.

Как будет показано ниже, существует очень простая связь между параметром σ и энергией частиц $\gamma m_{\rm e}c^2$ на быстрой магнитозвуковой поверхности [Michel, 1969]:

$$\gamma \approx \sigma^{1/3}. \tag{4.4}$$

Это означает, что и здесь отношение потока энергии частиц к потоку энергии электромагнитного поля:

$$\frac{W_{\rm par}}{W_{\rm em}} \approx \sigma^{-2/3}, \tag{4.5}$$

должно быть много меньше единицы. Наконец, мы увидим, что критическое значение тока, при котором выполнено условие гладкого прохождения быстрой магнитозвуковой поверхности, снова должно быть близко к гольдрайховскому:

$$j_{\text{crit}} \approx \rho_{\text{GJ}} c. \tag{4.6}$$

При продольных же токах, отличающихся от критического, структура течения остается близкой к бессиловому случаю. В частности, при $j_{\|} < j_{\text{crit}}$ световая поверхность $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$ находится на конечном расстоянии от нейтронной звезды.

Как уже говорилось, начиная с работы Майкеля общепризнанной стала следующая точка зрения: считалось, что быстрая магнитозвуковая поверхность должна располагаться на бесконечности. Этот результат был неоднократно воспроизведен и в дальнейшем [Kennel, Fujimura, Okamoto, 1983; Li, Begelman, Chiueh, 1992; Lery et al., 1999]. Однако оказалось, что он справедлив лишь в предположении о заданном полоидальном магнитном поле. Ниже на примере точного решения будет продемонстрировано, что в самосогласованном случае, когда полоидальное магнитное поле не предполагается заданным, а само способно изменяться за счет токов, текущих в магнитосфере, быстрая магнитозвуковая поверхность должна находиться на конечном расстоянии от компактного объекта.

К сожалению, ни одна из магнитогидродинамических моделей не позволила построить разумную модель пульсарного ветра. Все попытки найти самосогласованное решение, содержащее эффективное ускорение частиц, не увенчались успехом. Напомним, что этот вывод относится именно к релятивистскому случаю; для нерелятивистских же течений, напротив, эффективность ускорения должна быть велика [Michel, 1969]. Таким образом, возникло явное противоречие между необходимостью эффективного ускорения частиц, следующей из наблюдений, и отсутствием такого ускорения в «гладких» магнитогидродинамических течениях, в которых электрический ток определяется из критических условий на особых поверхностях, а световая поверхность располагается на бесконечности. Неудивительно поэтому, что в настоящее время достаточно активно обсуждаются различные модели, в которых в той или иной степени предлагается выйти за рамки «классической» схемы.

Прежде всего, к эффективному ускорению частиц может привести уже упоминавшееся свойство релятивистских течений: при малых электрических токах световая поверхность $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$ будет располагаться на конечном расстоянии, а при $i_0 \ll 1$ — вблизи светового цилиндра. Поэтому если взаимодействие областей замкнутых и разомкнутых силовых линий действительно приводит к ограничению продольного тока i_0 (или же существуют какие-либо иные причины, фиксирующие величину $i_0 < 1$ в области генерации плазмы), то следует ожидать появления световой поверхности и эффективного ускорения частиц [Beskin, Gurevich, Istomin, 1993; Chiueh, Li, Begelman, 1998].

Эффективное ускорение может быть связано и с процессами перезамыкания в пульсарном ветре [Michel, 1982; Coroniti, 1990; Lyubarsky, Kirk, 2001; Kirk, Skjaeraasen, 2003]. Однако эта модель до сих пор не позволила объяснить эффективного ускорения частиц на расстояниях, сравнимых со световым цилиндром.

Таким образом, несмотря на понимание важности проблемы пульсарного ветра и ускорения частиц, а также наличие большого числа работ, посвященных данной теме, сколь-либо удовлетворительной модели в настоящее время не существует. Как уже подчеркивалось, одна из основных причин этого связана с невозможностью сформулировать достаточно простые уравнения, описывающие поведение релятивистской плазмы в случае, когда плотность ее энергии сравнима с плотностью энергии электромагнитного поля. Поэтому до сих пор нельзя сказать практически ничего определенного ни об энергетическом спектре частиц, покидающих магнитосферу, ни об их излучении. Ясно лишь, что уже на небольших расстояниях от светового цилиндра частицы должны переносить значительную долю энергии по сравнению с полным ее потоком.

В заключение настоящего пункта следует упомянуть о существовании большого количества работ, посвященных взаимодействию пульсарного ветра с остатком сверхновой (см., например, [Kennel, Coroniti, 1984ab; Gallant, Arons, 1993; Боговалов, Хангулян, 2002, 2003]) и проблеме образования струйных выбросов, наблюдаемых у молодых пульсаров Crab и Vela [Komissarov, Lyubarsky, 2003]. Однако эти процессы происходят на расстояниях порядка 10^{17} см, т. е. на много порядков превышающих радиус светового цилиндра. Поэтому указанные работы уже нельзя в полной мере отнести к теории пульсарного ветра.

4.1.2. Активные галактические ядра. Вопросы коллимации и ускорения частиц в активных галактических ядрах являются ключом к пониманию процессов, происходящих в их центральной машине. К сожалению, угловое разрешение современных приемников не позволяет непосредственно наблюдать течение плазмы на масштабах порядка $10^{13} \div 10^{14}$ см, сравнимых с размером черной дыры. Поэтому мы вынуждены судить об активности галактических ядер лишь по косвенным проявлениям, анализируя процессы, происходящие на гораздо больших масштабах.

Напомним, что диффузионные области радиоизлучения вблизи активных галактик, впервые обнаруженные более сорока лет назад, были ассоциированы со струйными выбросами плазмы (джетами), истекающими из их ядер [Бегельман, Блендфорд, Рис, 1987]. Именно джеты поставляют в эти области вещество и энергию, черпаемые из активного ядра. Наблюдения показывают, что джеты могут быть ускорены и сколлимированы очень близко к центральному объекту. Например, в случае ближайшей к нам активной галактики M87 формирование струйного выброса происходит внутри области размером порядка $60r_{\rm g}$ [Junor, Biretta, Livio, 1999].

Вещество джетов из активных галактических ядер обладает высокими энергиями: лоренц-фактор джета как целого достигает как минимум нескольких единиц. Например, в галактике M87 это движение наблюдается непосредственно, причем лоренц-фактор истекающего вещества $\gamma \approx 6$ [Junor, Biretta, 1995]. Во многих случаях вещество сохраняет релятивистские скорости вплоть до огромных расстояний от ядра, прежде чем заметно затормозится при взаимодействии с межгалактическим веществом. Другим удивительным свойством джетов является высокая степень их коллимации: угол расхождения составляет всего несколько градусов. Отдельный класс представляют собой радиоспокойные ядра. Их джеты хуже сколлимированы и движутся с субрелятивистскими скоростями (до $\sim 0{,}1c$). Они наблюдаются как непосредственно в радиодиапазоне, так и косвенно по широким линиям поглощения, видимым в оптической и УФ частях спектра у 10% источников.

К сожалению, наблюдения не позволяют пока получить надежные оценки потока энергии и массы в джетах из активных ядер, величины магнитного поля как вблизи черной дыры, так и в самом джете, а также определить состав струйных выбросов. Спектр джетов (в отличие, например, от спектров галактических джетов) не демонстрирует никаких спектральных особенностей движущейся материи, т. е. не наблюдаются ни атомарные (ионные) линии, ни линия аннигиляции электрон-позитронных пар. Существуют косвенные аргументы как в пользу [Reynolds et al., 1996b; Hirotani et al., 1999], так и против [Sikora, Madersky, 2000] лидирующей роли электрон-позитронных пар, поэтому пока нельзя сказать, какой именно из механизмов перекачки энергии в джет реализуется в действительности. Возможно, энергия ультрарелятивистской сердцевины джета, наблюдаемой на высоких радиочастотах и в гамма-диапазоне, черпается из вращательной энергии черной дыры, а коллимация происходит за счет умеренно релятивистского «внешнего» джета, ускоренного внутренними частями диска [Sol, Pelletier, Asséo, 1989]; при этом внешний джет коллимируется течениями (ветром) из внешних частей диска.

Видимое сверхсветовое движение, вспышки в гамма-диапазоне и переменность радиоизлучения от джета на временных масштабах порядка суток указывают не только на релятивистские скорости, но и на возмущения в джете, характер и природа которых пока не ясны. Вероятно, эти возмущения появились в процессе распространения джета. Однако не исключено, что они являются отражением возмущений, возникших в центральной машине. Также возможно, что эти возмущения являются ударными волнами, на которых и происходит ускорение частиц. Во всяком случае, изображения джетов с высоким разрешением демонстрируют, что джет не однороден по длине, а состоит из ярких пятен, чередующихся со слабоизлучающими областями.

Исследования очень компактных радиоисточников, осуществляемые с помощью наземных интерферометров со сверхдлинными базами (межконтинентальной системы VLBI и американского телескопа VLBA), а в последние годы и космического интерферометра (VSOP, Япония), позволяющих достигать на коротких волнах угловых разрешений порядка 10^{-4} угловых секунд, также показывают, что из активных ядер со скважностью в месяцы выбрасываются отдельные компактные радиокомпоненты, которые «гаснут» за несколько лет. Эти радиокомпоненты движутся по винтообразным траекториям, удаляясь от ядра в довольно узком конусе (с раствором сначала в несколько десятков градусов, а затем — в несколько градусов) с наблюдаемыми скоростями, превышающими скорость света.

Активные ядра могут быть грубо разделены на классы в зависимости от темпа аккреции и углового момента черной дыры. Дело в том, что сверхкритическая аккреция приводит к возникновению сильного ветра и аккреционного диска с высокой степенью ионизации. Поэтому у подобных систем не должно быть спектральных особенностей в рентгеновском излучении диска, а очень мощное излучение должно подавлять образование коллимированного джета. Можно даже предположить, что тип галактики формируется в зависимости от параметров центральной черной дыры и возникающих в результате аккреции течений. Например, если в результате начального этапа эволюции сформировалась очень массивная черная дыра ($M \sim 10^8 M_\odot$) и на нее продолжается сверхкритическая аккреция, то возникающее неколлимированное истечение способно приостановить образование диска. В итоге формируется радиоспокойная эллиптическая галактика. И наоборот, джет возникает в системах с аккрецией порядка критической, если черная дыра обладает достаточным угловым моментом. Истечения и джеты могут эффективно образовываться в системах с низкими темпами аккреции, хотя светимость этих источников за счет аккреции невелика.

С другой стороны, сильная анизотропия выбросов и их односторонность приводят к выводу о заметном влиянии угла выброса на наблюдаемую картину, относящуюся к околоядерным областям. Эта идея, оформленная в виде «унифицированной схемы», была применена к объяснению всего разнообразия типов активных ядер [Urry, Padovani, 1995]. Например, при угле выброса $\vartheta > 45°$ наблюдаемый радиоисточник считается радиогалактикой, при $10° < \vartheta < 45°$ это уже радиоквазар, а при $\vartheta < 10°$ — объект типа BL Lacertae, не содержащий линий поглощения. Правда, в последние годы накапливается все больше фактов, говорящих о недостаточности унифицируемой схемы для объяснения различий в свойствах активных ядер разных типов. К примеру, она не может объяснить различий в типах квазизвездных источников и лацертид, которые, казалось бы, не должны зависеть от ориентации оси выброса из ядер. Игнорирует эта схема и возможность эволюционного изменения свойств активных ядер.

Если говорить о физической пророде активных галактических ядер, то здесь было предложено несколько перечисляемых далее механизмов ускорения частиц и коллимации джетов. Однако пока не существует однозначного ответа на вопрос о том, какие из них реализуются. Возможно, в разных типах источников реализуются различные механизмы или, наоборот, все они присутствуют в источнике одновременно.

Газодинамическое ускорение. Ускорение и коллимация джета могут быть связаны с существованием внешней среды с высоким давлением, падающим с удалением от центра [Blandford, Rees, 1974; Fabian, Rees, 1995; Sauty, Tsinganos, 1994; Tsinganos et al., 1996]. Для этого необходимо, чтобы давление в джете было меньше, чем давление горячей внешней среды, которое, в принципе, можно оценить из наблюдений в рентгеновском диапазоне [Feretti et al., 1995]. Указанный механизм, возможно, объясняет, как формируются слабые джеты в источниках в нашей Галактике или в некоторых сейфертовских галактиках. С другой стороны, наблюдаемое давление горячего вещества вокруг самых мощных джетов из активных ядер галактик недостаточно велико; поэтому должен существовать альтернативный механизм удержания плазмы [Celotti, Blandford, 1999].

Ускорение излучением. Поскольку плотность фотонов вблизи центрального источника может быть очень велика, был предложен механизм ускорения вещества в струйном выбросе за счет давления излучения [Proga, Stone, Kallman, 2000; O'Dell, 1981; Cheng, O'Dell, 1981]. В рамках этой модели предполагается, что внутренние части диска могут работать как сопло, направляя потоки вещества, ускоряемые фотонным давлением. Однако и здесь возникают некоторые сложности. Например, отсутствует корреляция между мощностью джета и светимостью источника — многие источники с очень мощными джетами имеют слабую светимость [Ghisellini et al., 1990]. Другая сложность заключается в том, что начиная с достаточно малых энергий частиц ($\gamma \approx 3$), поле излучения гораздо эффективнее тормозит частицы, чем ускоряет их [Königl, Kartje, 1994]. Последнее противоречит наблюдениям «сверхсветовых» источников, в которых энергия частиц плазмы гораздо больше. К тому же, если джет сформировался в системе с тонким аккреционным диском, излучение которого более или менее изотропно, то для коллимации вещества джета нужно привлекать дополнительные механизмы. Модификация данной модели — с образованием воронки в толстом диске аккрецирующего вещества — способна объяснить начальную коллимацию джета, однако имеются указания на то, что подобная структура неустойчива [Ghisellini et al., 1990; Ghisellini, Bodo, Trussoni, 1992].

Магнитогидродинамический механизм. Как уже говорилось, сейчас большинство теоретиков склоняется к магнитогидродинамической модели образования струйных выбросов [Blandford, 2002]. Иными словами, предполагается, что, как и вблизи радиопульсаров, основная роль в передаче энергии от центральной машины к активным областям принадлежит потоку электромагнитного поля — вектору Пойнтинга. Магнитогидродинамическая модель была успешно использована для описания многих процессов в активных ядрах, в частности в связи с проблемой происхождения и стабильности джетов, а также для объяснения энергетики процессов вблизи центральной черной дыры. Магнитное поле при этом является естественным связующим звеном между диском и джетом. Именно поэтому очень важен вопрос о происхождении и структуре магнитного поля в центральной машине активных ядер.

В самом простом виде картина выглядит следующим образом. Полоидальное магнитное поле, генерируемое в диске, связывает вращающуюся центральную машину (диск и черную дыру) с бесконечностью. Таким образом, истечение плазмы и поток энергии происходят вдоль линий магнитного поля. Дифференциальное вращение диска и инертность газа приводят к тому, что линии поля закручиваются, возникает его тороидальная компонента и давление поля, связанное с этой компонентой, может сколлимировать газ. Как показали расчеты, подобный процесс действительно может приводить к коллимации и переработке определенной части потока электромагнитной энергии (потока Пойнтинга) в кинетическую энергию частиц [Heyvaerts, Norman, 1989; Pelletier, Pudritz, 1992]. Однако и в этой модели до сих пор остается еще много нерешенных вопросов. В частности, как мы увидим, эффективность коллимации становится тем меньше, чем больше энергия истекающей плазмы; поэтому в релятивистском случае эффективность коллимации (и ускорения) оказывается невысокой.

Таким образом, и в рамках электродинамической модели механизм коллимации струйных выбросов остается неясным. В частности, до сих пор не получен ответ на один из принципиальных вопросов: являются ли струйные выбросы сильнозамагниченными (и значит, электрический ток, определяющий основное энерговыделение системы, действительно течет вдоль струйных выбросов и замыкается в области горячих пятен) или же замыкание электрического тока происходит на парсековых масштабах, а наблюдаемые струйные выбросы уже содержат лишь ускоренные частицы. Ниже мы постараемся сформулировать основные модельно независимые результаты, полученные в рамках этого подхода.

4.1.3. Молодые звезды. Молодые звезды были косвенно обнаружены в начале пятидесятых годов, когда Г. Хербиг и Г. Аро [Herbig, 1950; Haro, 1950] открыли новый класс протяженных диффузных образований, существующих обычно парами и, как стало ясно позже, связанных тонкими струйными течениями с молодыми быстровращающимися звездами [Lada, 1985]. Возникновение таких струйных выбросов естественно было связать со стремлением звезды наиболее эффективно отдать свой угловой момент, который мешает ее образованию. Здесь отчетливо прослеживается аналогия с ситуацией, возникшей при открытии активных галактических ядер, когда вначале был обнаружен целый ряд разнородных источников (квазары, сейфертовские и радиогалактики) и лишь затем стало ясно, что активность всех этих объектов имеет единую природу. Более того, подобие наблюдаемых свойств наводит на мысль о том, что и физический механизм формирования направленных течений у молодых звезд может быть подобен механизму формирования струйных выбросов в активных ядрах. И это несмотря на существенное отличие физических условий вблизи молодой звезды (масса — порядка $3 \div 10 M_\odot$, полное энерговыделение — порядка $10^{31} \div 10^{36}$ эрг/с) от условий в центре активных галактических ядер. Одним из главных отличий в данном случае является нерелятивистский характер течения в струйных выбросах из молодых звезд.

На сегодняшний день известно уже более двухсот пятидесяти объектов Хербига–Аро [Сурдин, 2001]. Они представляют собой яркие конденсации размером в несколько угловых секунд (линейный размер — порядка $500 \div 1000$ а. е.), обычно окруженные яркой диффузной оболочкой. Их спектры главным образом состоят из эмиссионных линий водорода и некоторых других элементов с небольшой энергией возбуждения. Основным же источником возбуждения, по-видимому, служит ударная волна, распространяющаяся со скоростью $40 \div 200$ км/с в газе с плотностью $\sim 10^2$ см$^{-3}$ [Reipurth, Bally, 2001].

Как и в случае радиогалактик, источником активности объектов Хербига–Аро являются струйные выбросы, хорошо прослеживающиеся, например, в запрещенных линиях [Lada, 1985; Reipurth, Bally, 2001]. У 60% объектов видны оба джета, в остальных случаях удаленный от нас выброс закрыт аккреционным диском. Протяженность оптических джетов составляет $0{,}01 \div 2$ пк, скорость движения достигает 600 км/с. Плотность газа в джетах оценивается как $10 \div 100$ см$^{-3}$, а темп истечения равен $10^{-10} \div 10^{-6} M_\odot$/г. При этом степень коллимации джетов (отношение наблюдаемой длины к ширине) может достигать тридцати. Полный же угол раскрытия джетов составляет $5 \div 10°$. Кроме сильно вытянутых джетов, вблизи молодых звезд наблюдаются также молекулярные потоки, степень коллимации которых значительно меньше. Их размеры составляют $0{,}04 \div 4$ пк, а скорость движения газа не превышает $5 \div 100$ км/с. Здесь необходимо подчеркнуть, что указанная скорость существенно больше скорости звука в их молекулярном веществе, имеющем температуру лишь $10 \div 90°$ К. При этом полная масса выброшенного газа оценивается в $0{,}1 \div 200 \, M_\odot$, а полная кинетическая энергия, заключенная в молекулярных потоках, может достигать $10^{43} \div 10^{47}$ эрг.

Вопрос о физической природе возникновения струйных выбросов еще очень далек от своего решения. Ясно лишь, что энергии центральной звезды всегда достаточно для ускорения истекающих потоков вещества; сам же механизм трансформации энергии до сих пор не определен. Подчеркнем, что в отличие от релятивистских галактических объектов (например, микроквазаров), у которых формирование струйных выбросов связано со сверхкритической аккрецией, светимость молодых звезд никогда не приближается к эддингтоновскому пределу. С другой стороны, ключевую роль в образовании струйных выбросов, безусловно, играют именно аккреционные диски, существование которых у данного класса объектов не вызывает сомнения.

На это указывает прямая корреляция между мощностью потока газа и массой диска, оцениваемой по его светимости.

Параметры аккреционных дисков молодых звезд могут быть весьма разнообразны. Например, их массы заключены в пределах от 0,1 до $600M_\odot$, а радиусы — от 10 а. е. до 1 пк. Важно, что в отличие от дисков, окружающих релятивистские объекты (нейтронные звезды и черные дыры), температура газа в них составляет лишь $20 \div 100°$ К. В результате, как и в случае активных галактических ядер, ни сила светового давления, ни давление газа не могут объяснить высокие скорости, наблюдаемые в струйных выбросах [Сурдин, 2001]. Поэтому для объяснения образования джетов и ускорения частиц были вновь привлечены модели, в которых ключевую роль играло магнитное поле, осуществляющее эффективное взаимодействие между аккреционным диском и струйным выбросом. Поскольку же реальная структура магнитного поля вблизи молодой звезды в настоящее время неизвестна, то и здесь предлагались как модели, в которых основную роль играет магнитное поле самой звезды [Shu et al., 1994], так и модели, в которых определяющим является магнитное поле диска [Pudritz, Norman, 1986; Pelletier, Pudritz, 1992; Uchida, Shibata, 1994]. Таким образом, нам опять приходится сталкиваться с теми же проблемами относительно структуры первичного магнитного поля, что и при исследовании магнитосферы черной дыры.

4.1.4. Микроквазары и космологические гамма-всплески. Говоря о космических компактных объектах, обладающих струйными выбросами, нельзя не упомянуть о микроквазарах и источниках космологических гамма-всплесков.

Микроквазары представляют собой галактические объекты, у которых формирование джетов связано со сверхкритической аккрецией на компактный релятивистский объект (нейтронную звезду или черную дыру). Это очень немногочисленный класс, включающий в себя лишь около десяти источников [Fender, 2004], причем только половина из них обладает хорошо заметными струйными выбросами, в которых скорость частиц является релятивистской ($v > 0{,}9c$). Характерный продольный размер струйных выбросов составляет обычно 0,1 пк, а угол раствора не превышает нескольких градусов. Общая же энергетика оценивается в 10^{37} эрг/с [Mirabel, Rodriguez, 1994; Fender, 2004]. Благодаря релятивистскому движению у некоторых источников наблюдается эффект сверхсветового движения, причем из-за относительной близости этих объектов их видимая угловая скорость оказывается на несколько порядков больше, чем у джетов, наблюдаемых в активных галактических ядрах.

Исторически первым обнаруженным объектом данного класса является знаменитый источник SS433 [Spencer, 1979], в котором, однако, скорость истечения газа в струйных выбросах составляет лишь $0{,}26c$. Такая скорость легко может быть объяснена давлением излучения, связанного с сильно нагретыми внутренними областями аккреционного диска. Первый микроквазар с релятивистскими струйными выбросами был открыт лишь в 1994 г. [Mirabel, Rodriguez, 1994]. Поскольку же появление околосветовых скоростей за счет радиационного или газового давления является проблематичным, не исключено, что для их объяснения вновь необходимо привлечь электродинамическую модель, подобную той, которая рассматривается для объяснения образования и коллимации джетов в активных галактических ядрах [Blandford, 2002; Sauty, Tsinganos, Trussoni, 2002]. В пользу указанной модели говорит и тот факт, что, за исключением объекта SS433, у микроквазаров не наблюдается эмиссионных линий, что косвенно указывает на электронно-позитронный состав вещества в струйных выбросах [Fender, 2004].

Что же касается источников *космологических гамма-всплесков*, то здесь имеются лишь косвенные, хотя и достаточно надежные аргументы в пользу существования у них струйных выбросов, причем связанных именно с релятивистскими сильнозамагниченными течениями, о которых пойдет речь в настоящей главе. Обнаружение оптического послесвечения (*afterglow*) [Akerlof et al., 1999], как и послесвечения в других энергетических диапазонах, позволившего по красному смещению определить расстояния до этих объектов, наложило очень серьезные ограничения на их энергетику [Постнов, 1999]. Если считать, что излучение в гамма-диапазоне происходит изотропно, то для расстояний порядка 100 Мпк, характерных для подобных источников, приходится предположить, что их полная светимость достигает 10^{54} эрг. Однако в настоящее время процессы с таким огромным энерговыделением нам неизвестны. С другой стороны, малая продолжительность всплеска (~ 10 с) ограничивает размер излучающей области, что, в свою очередь, приводит к невозможности объяснить наблюдаемые спектры гамма-излучения, поскольку оптическая толщина в источнике оказывается слишком велика [Ruderman, 1975; Schmidt, 1978].

Если предположить, что излучение происходит в узкий конус, $\vartheta \sim 1°$, то излучаемая энергия может быть понижена до 10^{51} эрг, что по порядку величины уже близко к энергии, выделяющейся во время взрывов сверхновых. В таком случае характерный лоренц-фактор частиц, с которыми связано наблюдаемое излучение, должен быть порядка ϑ^{-1}, т. е. составлять $\sim 100 \div 300$. В результате удается снять и проблему компактности источника, так как оцениваемый размер излучающей области тоже увеличивается в $100 \div 300$ раз. С другой стороны, ультрарелятивистский характер течения накладывает ограничение на состав частиц в струйном выбросе, поскольку существование протонов с такой энергией противоречило бы полному энерговыделению гамма-всплеска. Поэтому вклад протонов должен составлять лишь 10^{-5} от полного числа частиц, так что речь может идти именно об электронно-позитронных джетах. В пользу существования струйного течения говорит и характерный излом во временной зависимости интенсивности излучения, когда спустя примерно несколько дней после всплеска показатель степени α в зависимости $W_{\text{tot}} \propto t^{-\alpha}$ меняется от $\alpha \approx 1{,}1$ до $\alpha \approx 2{,}0$. Этот эффект связывают с прекращением релятивистского сжатия конуса излучения при движении частиц строго на наблюдателя.

Если же говорить о самой природе центральной машины, приводящей к образованию сильнозамагниченных струйных выбросов, то здесь обычно обсуждается либо столкновение двух нейтронных звезд [Блинников и др., 1984; Eichler et al., 1989] или нейтронной звезды и черной дыры [Paczyński, 1991], либо коллапс массивного ядра необычной сверхновой [Woosley, 1993; Paczyński, 1998]. Однако в большинстве моделей в итоге все равно образуется быстровращающаяся черная дыра с массой порядка массы Солнца, теряющая свою энергию вращения за счет процесса Блендфорда–Знайека [Paczyński, 1991; Mésźaros, Rees, 1997; Katz, 1997; Lee, Wijers, Brown, 2000; van Putten, Levinson, 2003]. Действительно, именно этот процесс позволяет с легкостью объяснить как малое количество барионов, заполняющих струйные выбросы, так и большие лоренц-факторы частиц в струйном выбросе. Иными словами, модель вновь строится по той же схеме, что и модель, обсуждавшаяся в связи с активностью галактических ядер. В частности, ключевыми здесь по-прежнему являются процессы генерации магнитного поля в плазме, окружающей черную дыру, взаимодействие черной дыры и аккреционного диска, связанных силовыми линиями магнитного поля, а также процесс генерации частиц в магнитосфере. При этом для объяснения наблюдаемого энерговыделения необходимо предположить, что магнитное поле вблизи черной дыры достигает $10^{14} \div 10^{15}$ Гс. Считается, что генерация подобного поля возможна для таких нестационарных процессов, каковыми являются коллапс ядра и столкновение нейтронных звезд [Usov, 1992; Thompson, Duncan, 1995].

4.2. Основные уравнения

4.2.1. Физическое интермеццо — магнитогидродинамические волны. Прежде чем сформулировать ключевые уравнения, относящиеся к полной версии уравнения Грэда–Шафранова, необходимо напомнить основные свойства магнитогидродинамических волн, способных распространяться в замагниченной плазме. Действительно, как было продемонстрировано в гл. 1, структура гидродинамического уравнения Грэда–Шафранова существенно зависит от положения звуковой поверхности, связанной с обычным звуком — единственным возмущением, которое может распространяться в незамагниченной среде. В присутствии же магнитного поля, когда количество различных видов возмущений увеличивается, становится существенно более сложной и сама структура уравнения Грэда–Шафранова. Здесь мы для простоты рассмотрим лишь нерелятивистский случай; соответствующие общие формулы будут приведены ниже.

В случае идеальной одножидкостной магнитной гидродинамики мы имеем дело с восемью неизвестными — двумя термодинамическими функциями и двумя векторами: скоростью $\mathbf{v}$ и магнитным полем $\mathbf{B}$. Все остальные характеристики, например электрическое поле $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}/c$ и плотность заряда $\rho_e = \nabla \cdot \mathbf{E}/4\pi$, могут быть выражены через эти величины.

Вместе с тем при исследовании волновых процессов фактически фигурирует лишь семь независимых переменных. Действительно, рассмотрим волну, распространяющуюся вдоль оси z под углом θ к внешнему магнитному полю $\mathbf{B}^{(0)}$. Соответствующим выбором системы координат всегда можно добиться того, чтобы внешнее постоянное магнитное поле лежало в плоскости xz ($B_y^{(0)} = 0$), а невозмущенная скорость среды равнялась нулю ($\mathbf{v}^{(0)} = 0$). По-прежнему будем рассматривать малые возмущения в виде

$$\rho = \rho^{(0)} + \rho' \exp(-i\omega t + ikz); \tag{4.7}$$

$$s = s^{(0)} + s' \exp(-i\omega t + ikz); \tag{4.8}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' \exp(-i\omega t + ikz); \tag{4.9}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^{(0)} + \mathbf{b} \exp(-i\omega t + ikz) \tag{4.10}$$

и т. д., т. е. считать, что все возмущенные величины зависят лишь от времени t и координаты z как $\exp(-i\omega t + ikz)$, где k — скалярный волновой вектор (индекс «0» в дальнейшем опускается). В результате из уравнения Максвелла $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ получаем условие $kb_z = 0$. Последнее и означает, что продольное возмущение магнитного поля не имеет волнового характера и может быть устранено соответствующим выбором системы координат.

Остальные семь уравнений, т. е.

— уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_z'}{\partial z} = 0; \tag{4.11}$$

— уравнение энергии:

$$\frac{\partial s'}{\partial t} = 0; \tag{4.12}$$

— три компоненты уравнения движения:

$$\frac{\partial v_x'}{\partial t} - \frac{B_z}{4\pi\rho}\frac{\partial b_x}{\partial z} = 0; \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial v_y'}{\partial t} - \frac{B_z}{4\pi\rho}\frac{\partial b_y}{\partial z} = 0; \tag{4.14}$$

$$\frac{\partial v_z'}{\partial t} + \frac{(\partial P/\partial \rho)_s}{\rho}\frac{\partial \rho'}{\partial z} + \frac{(\partial P/\partial s)_\rho}{\rho}\frac{\partial s'}{\partial z} + \frac{B_x}{4\pi\rho}\frac{\partial b_x}{\partial z} = 0; \tag{4.15}$$

— две компоненты уравнения Максвелла $c\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$:

$$\frac{\partial b_x}{\partial t} - B_z \frac{\partial v_x'}{\partial z} + B_x \frac{\partial v_z'}{\partial z} = 0; \tag{4.16}$$

$$\frac{\partial b_y}{\partial t} - B_z \frac{\partial v_y'}{\partial z} = 0, \tag{4.17}$$

в которых мы использовали условия $\mathbf{v}^{(0)} = 0$ и $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}/c$, можно переписать в виде одного матричного уравнения [Ахиезер и др., 1974]:

$$\frac{\partial d_i}{\partial t} + A_{ik}\frac{\partial d_k}{\partial z} = 0. \tag{4.18}$$

Здесь вектор d_i и матрица коэффициентов A_{ik} имеют вид

$$d_i = \begin{pmatrix} \rho' \\ s' \\ v'_x \\ v'_y \\ v'_z \\ b_x \\ b_y \end{pmatrix}; \quad A_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -B_z/4\pi\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -B_z/4\pi\rho \\ P_\rho/\rho & P_s/\rho & 0 & 0 & 0 & B_x/4\pi\rho & 0 \\ 0 & 0 & -B_z & 0 & B_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B_z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.19}$$

где $P_\rho = (\partial P/\partial \rho)_s$ и $P_s = (\partial P/\partial s)_\rho$.

УПРАЖНЕНИЕ. Объясните, почему трехмерное уравнение $c\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$ в рассматриваемом здесь случае приводит лишь к двум уравнениям на возмущенные величины, входящие в d_i.

Подставляя в (4.18) волновую зависимость $\exp(-i\omega t + ikz)$, получаем

$$V d_i = A_{ik} d_k, \tag{4.20}$$

где по определению $V = \omega/k$ — фазовая скорость распространения волн. В итоге дисперсионное уравнение, определяющее дисперсию $\omega = \omega(k, \theta)$ и поляризацию нормальных волн, принимает вид

$$\det(A_{ik} - V I_{ik}) = 0, \tag{4.21}$$

где I_{ik} — единичная матрица. Анализируя уравнение (4.21), легко показать, что в замагниченной плазме могут распространяться четыре различных типа возмущения $V_{(i)}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Такими нормальными волнами являются

— быстрая и медленная магнитогидродинамические волны

$$V^2_{(1,2)} = \frac{1}{2}\left(V_\mathrm{A}^2 + c_\mathrm{s}^2\right) \pm \frac{1}{2}\left[\left(V_\mathrm{A}^2 + c_\mathrm{s}^2\right)^2 - 4V_\mathrm{A}^2 c_\mathrm{s}^2 \cos^2\theta\right]^{1/2}; \tag{4.22}$$

— альфвеновская волна

$$V_{(3)} = V_\mathrm{A}\cos\theta; \quad \omega_{(3)} = \pm\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}}{\sqrt{4\pi\rho}}; \tag{4.23}$$

— энтропийная волна

$$V_{(4)} = 0. \tag{4.24}$$

Здесь

$$V_\mathrm{A} = \frac{B}{\sqrt{4\pi\rho}} \tag{4.25}$$

есть так называемая альфвеновская скорость, а величина $c_s^2 = (\partial P/\partial\rho)_s$ по-прежнему соответствует скорости звука. Как мы видим, три первые нормальные волны в рассматриваемом случае оказываются двукратно вырожденными, поскольку при $\mathbf{v}^{(0)} = 0$ свойства двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях, являются тождественными. В общем же случае имеется семь различных значений для фазовых скоростей:

$$v_{(1,2,\ldots,7)} = v^{(0)} \pm V_{(1,2,3,4)}. \tag{4.26}$$

Свойства нормальных волн удобно продемонстрировать на фазовой и групповой полярах, представляющих собой зависимость фазовой ($V_{(i)}$) и групповой ($\partial\omega/\partial\mathbf{k}$) скоростей от угла θ между внешним магнитным полем $\mathbf{B}$ и волновым вектором $\mathbf{k}$ (рис. 4.1). Мы видим, что быстрая магнитогидродинамическая волна ($i = 1$) является обобщением обычной звуковой волны на случай ненулевого внешнего магнитно-

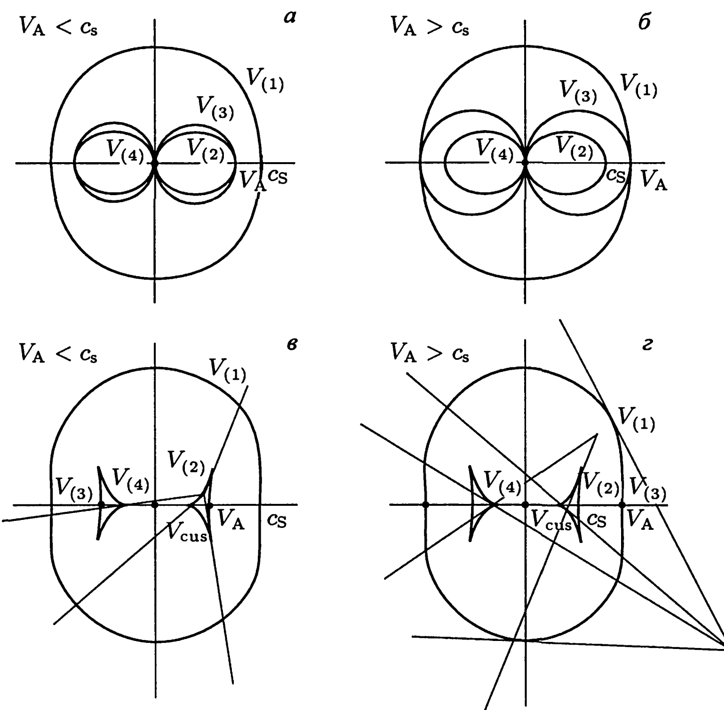


Рис. 4.1. Фазовые (*а*, *б*) и групповые (*в*, *г*) поляры магнитогидродинамических волн для слабых (*а*, *в*) и сильных (*б*, *г*) магнитных полей. Показаны также конусы Маха, число которых зависит от соотношения между скоростью возмущающего тела и собственными скоростями возмущения среды. Магнитное поле направлено вдоль горизонтальной оси

го поля. На всех полярах она пересекает оси в точках с координатами

$$V_{(1)}(\theta = 0, \pi) = \max(V_{\mathrm{A}}, c_{\mathrm{s}})\,; \tag{4.27}$$

$$V_{(1)}(\theta = \pi/2, 3\pi/2) = \sqrt{V_{\mathrm{A}}^2 + c_{\mathrm{s}}^2}. \tag{4.28}$$

Поэтому для малых магнитных полей ($V_{\mathrm{A}} \ll c_{\mathrm{s}}$) ее свойства практически не отличаются от свойств обычного звука. Однако во внешнем магнитном поле, помимо быстрой, возникает и медленная магнитозвуковая волна ($i = 2$), свойства которой оказываются гораздо более нетривиальными. Это особенно хорошо видно на групповой поляре, имеющей вид ласточкиного хвоста и характеризующейся не только внешней точкой пересечения с осью абсцисс:

$$V_{(2)}(\theta = 0, \pi) = \min(V_{\mathrm{A}}, c_{\mathrm{s}})\,, \tag{4.29}$$

но и так называемой касповой скоростью

$$V_{\mathrm{cus}} = \frac{V_{\mathrm{A}} c_{\mathrm{s}}}{\sqrt{V_{\mathrm{A}}^2 + c_{\mathrm{s}}^2}}, \tag{4.30}$$

соответствующей наименьшей скорости распространения подобной волны. Как в быстрой, так и в медленной волне возмущения затрагивают и плотность, и скорость вещества; поэтому их обычно трудно возбудить по отдельности. Отметим также, что при нулевой температуре медленная волна отсутствует.

Свойства альфвеновских волн ($i = 3$) близки к свойствам обычной струны, чью роль здесь играет внешнее магнитное поле. Как следует непосредственно из соотношения (4.23), групповая скорость альфвеновских волн:

$$\mathbf{v}_{\mathrm{gr}} = \pm\frac{\mathbf{B}}{\sqrt{4\pi\rho}}, \tag{4.31}$$

всегда направлена вдоль внешнего магнитного поля. Поэтому на групповых полярах она изображается двумя точками. В такой волне возмущенными оказываются лишь компоненты магнитного поля и скорости, перпендикулярные плоскости, содержащей векторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{k}$, термодинамические же величины не возмущаются. Неудивительно поэтому, что альфвеновская волна существует и при нулевой температуре.

Наконец, энтропийная волна ($i = 4$), в которой происходят колебания лишь плотности и энтропии (температуры) при постоянном давлении, ни скорости, ни магнитного поля не возмущает. В системе покоя плазмы она является стоячей волной ($\omega_{(4)} = 0$).

Упражнения.

1. Покажите, что собственный вектор альфвеновской волны имеет вид $d_i = (0, 0, 0, -1, 0, 0, \sqrt{4\pi\rho})$.

2. Покажите, что при любых углах θ выполняются условия $V_{(2)} \leqslant V_{(3)} \leqslant$ $\leqslant V_{(1)}$; $V_{(3)} \geqslant c_{\mathrm{s}}$, $V_{(2)} \leqslant c_{\mathrm{s}}$.

В дальнейшем для нас будет важно следующее обстоятельство. Как известно, групповые поляры изображают скорость передачи энергии (информации) и поэтому представляют собой фронты возмущений, распространяющиеся от точки, находящейся в центре поляры. В результате, как и в случае обычного звука, касательные к групповой поляре, проведенные из точки, соответствующей собственной скорости возмущающего тела, являются конусами Маха, возникающими при сверхзвуковом движении. Для обычного звука такие касательные можно провести лишь в случае, когда скорость тела превышает скорость c_{s} распространения сигнала. В присутствии же магнитного поля они могут быть проведены при любой, сколь угодно малой скорости тел. Число конусов Маха зависит от скорости возмущающего тела.

Действительно, как показано на рис. 4.1, *г*, при больших скоростях в общем случае имеет место два конуса Маха, один из которых охватывает быструю, а второй — медленную волну. При меньших скоростях, лежащих вне групповой поляры, соответствующей медленной волне, имеется лишь один конус Маха. При скоростях, находящихся в пределах медленной групповой поляры, число конусов вновь становится равным двум (см. рис. 4.1, *в*). Таким образом, мы приходим к неожиданному выводу: для ненулевого магнитного поля не существует минимальной скорости возмущающего тела, при которой конусы Маха отсутствуют.

Следует подчеркнуть, что случай, когда волновой вектор направлен вдоль магнитного поля, является выделенным. Здесь конус Маха (причем только один) существует лишь при достаточно больших скоростях — $V > V_{(1)}$, а также в области $V_{\mathrm{cus}} < V < V_{(2)}$. Для скоростей же, удовлетворяющих условиям $V_{(2)} < V < V_{(1)}$ и $V < V_{\mathrm{cus}}$, конусы Маха вообще отсутствуют. Это свойство понадобится нам при определении структуры уравнения Грэда–Шафранова.

4.2.2. Общий случай релятивистского течения. Рассмотрим полную магнитогидродинамическую версию уравнения Грэда–Шафранова. Последнее означает, что в общем законе сохранения, $\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = 0$, тензор энергии-импульса должен быть записан как сумма гидродинамической и электромагнитной частей. При этом мы сразу готовы записать все уравнения в метрике Керра (см. (1.202)), т.е. в наиболее общей осесимметричной стационарной метрике, поскольку все необходимые величины уже были определены в главах 1 и 3. В частности, выражения для электрического и магнитного полей остаются такими же, как и в бессиловом приближении ($c = 1$):

$$\mathbf{B} = \frac{\nabla\Psi \times \mathbf{e}_{\hat\varphi}}{2\pi\varpi} - \frac{2I}{\alpha\varpi}\mathbf{e}_{\hat\varphi}; \tag{4.32}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\Omega_{\mathrm{F}} - \omega}{2\pi\alpha}\nabla\Psi. \tag{4.33}$$

Важно, что, как было показано выше, для наиболее интересного случая магнитосферы, полностью заполненной плазмой, электрический заряд черной дыры перестает быть свободным параметром, причем его величина оказывается настолько мала, что возмущением метрики Керра можно пренебречь. В случае же плоского пространства соответствующие уравнения получаются с помощью тривиальной замены: $\alpha \to 1$, $\omega \to 0$. Поэтому здесь и далее мы не будем выписывать их отдельно.

Интегралы движения. Для начала покажем, как при осесимметричных стационарных течениях возникают в общем случае пять интегралов движения, постоянных на магнитных поверхностях. Будем по-прежнему считать, что в магнитосфере содержится количество плазмы, достаточное для экранировки продольного электрического поля. Однако теперь вместо соотношения $E_{\parallel} = 0$ можно записать более информативное условие вмороженности:

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0, \tag{4.34}$$

которое фиксирует величину электрического поля, перпендикулярного магнитным силовым линиям. Подставляя выражения для электрического и магнитного полей в уравнение Максвелла (3.11), вновь приходим к заключению о том, что на магнитных поверхностях величина Ω_{F} должна быть постоянна (закон изоротации Ферраро):

$$\Omega_{\mathrm{F}} = \Omega_{\mathrm{F}}(\Psi). \tag{4.35}$$

Далее, благодаря уравнению вмороженности (а также вследствие того, что в стационарном случае электрическое поле $\mathbf{E}$ не имеет тороидальной компоненты) можно заключить, что полоидальная компонента гидродинамической скорости $\mathbf{v}$ (а значит, и четырех-скорости $\mathbf{u}$) должна быть параллельна магнитному полю. Соответствующий коэффициент пропорциональности удобно выбрать в виде

$$\mathbf{u}_{\mathrm{p}} = \frac{\eta}{\alpha n}\mathbf{B}_{\mathrm{p}}, \tag{4.36}$$

где η — некоторая скалярная функция, имеющая смысл отношения потока частиц к магнитному потоку. Вновь воспользовавшись уравнением вмороженности, запишем четырех-скорость вещества $\mathbf{u}$ как

$$\mathbf{u} = \frac{\eta}{\alpha n}\mathbf{B} + \gamma(\Omega_{\mathrm{F}} - \omega)\frac{\varpi}{\alpha}\mathbf{e}_{\hat{\varphi}}, \tag{4.37}$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$ — лоренц-фактор вещества. Согласно соотношению $\nabla \cdot (\eta\mathbf{B}) = 0$, следующему из уравнения непрерывности (1.236), и уравнению Максвелла (3.10) функция η также должна быть постоянна на магнитных поверхностях $\Psi = \mathrm{const}$:

$$\eta = \eta(\Psi). \tag{4.38}$$

Следующие два интеграла движения связаны с осесимметричностью и стационарностью рассматриваемых течений, что приводит к сохранению полного потока энергии E и z-компоненты углового момента L_z:

$$E = E(\Psi) = \frac{\Omega_F I}{2\pi} + \mu\eta(\alpha\gamma + \omega\varpi u_{\hat{\varphi}}); \tag{4.39}$$

$$L = L(\Psi) = \frac{I}{2\pi} + \mu\eta\varpi u_{\hat{\varphi}}. \tag{4.40}$$

Мы видим, что как поток энергии, так и поток импульса состоят из вклада электромагнитного поля и частиц, причем электромагнитный вклад полностью совпадает с бессиловым пределом, а гидродинамический отличается от гидродинамического случая лишь дополнительным множителем $\eta(\Psi)$. Этот множитель возникает за счет различной нормировки в выражениях для потока энергии и импульса. Действительно, выражения (1.240) и (1.241) соответствуют нормировке на единичный поток вещества $\mathrm{d}\Phi$. Потери же энергии $W_{\rm tot}$ и углового момента $K_{\rm tot}$ в общем магнитогидродинамическом случае удобно определить соотношениями

$$W_{\rm tot} = \int\limits_0^{\Psi_{\max}} E(\Psi)\,\mathrm{d}\Psi; \tag{4.41}$$

$$K_{\rm tot} = \int\limits_0^{\Psi_{\max}} L(\Psi)\,\mathrm{d}\Psi, \tag{4.42}$$

т. е. нормировать на единичный магнитный поток. Наконец, в осесимметричном случае условие изэнтропийности дает $s = s(\Psi)$, так что приходящаяся на одну частицу энтропия $s(\Psi)$ является, фактически, пятым интегралом движения.

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Получите выражение (4.37) для гидродинамической четырех-скорости $\mathbf{u}$.
2. Покажите, что

$$\eta(\Psi) = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\Psi}. \tag{4.43}$$

Продемонстрируем, как, зная пять интегралов движения, $\Omega_F(\Psi)$, $\eta(\Psi)$, $s(\Psi)$, $E(\Psi)$ и $L(\Psi)$, а также полоидальное магнитное поле $\mathbf{B}_p$, можно восстановить тороидальное магнитное поле $B_{\hat{\varphi}}$ и все остальные параметры плазмы. Для этого воспользуемся законами сохранения (4.39), (4.40), которые вместе с φ-компонентой уравнения (4.37) дают [Camenzind, 1986]

$$\frac{I}{2\pi} = \frac{\alpha^2 L - (\Omega_F - \omega)\varpi^2(E - \omega L)}{\alpha^2 - (\Omega_F - \omega)^2\varpi^2 - \mathcal{M}^2}; \tag{4.44}$$

$$\gamma = \frac{1}{\alpha\mu\eta}\frac{\alpha^2(E - \Omega_F L) - \mathcal{M}^2(E - \omega L)}{\alpha^2 - (\Omega_F - \omega)^2\varpi^2 - \mathcal{M}^2}; \tag{4.45}$$

$$u_{\hat{\varphi}} = \frac{1}{\varpi\mu\eta}\frac{(E - \Omega_F L)(\Omega_F - \omega)\varpi^2 - L\mathcal{M}^2}{\alpha^2 - (\Omega_F - \omega)^2\varpi^2 - \mathcal{M}^2}, \tag{4.46}$$

где теперь

$$\mathcal{M}^2 = \frac{4\pi\eta^2\mu}{n}. \tag{4.47}$$

Нетрудно заметить, что величина $\mathcal{M}^2$ с точностью до коэффициента α^2 представляет собой квадрат числа Маха полоидальной скорости u_{p} по отношению к полоидальной компоненте альфвеновской скорости

$$u_{\text{Ap}} = \frac{B_{\text{p}}}{\sqrt{4\pi n\mu}}, \tag{4.48}$$

т. е. $\mathcal{M}^2 = \alpha^2 u_{\text{p}}^2/u_{\text{Ap}}^2$. В дальнейшем нам будет удобно пользоваться именно величиной $\mathcal{M}^2$, так как она остается конечной на горизонте черной дыры.

Поскольку релятивистская энтальпия может быть выражена через две другие термодинамические функции, удобно записать ее в виде $\mu = \mu(n, s)$. В итоге определение (4.47) позволяет выразить концентрацию n (а значит, и удельную энтальпию μ) как функцию η, s и $\mathcal{M}^2$. При этом величина $\nabla\mu$ с учетом общего термодинамического соотношения (1.24) и определения (4.47) должна находиться из неявного соотношения [Бескин, Парьев, 1993]

$$\nabla\mu = \frac{c_{\text{s}}^2}{1 - c_{\text{s}}^2}\mu\left[2\frac{\nabla\eta}{\eta} - \frac{\nabla\mathcal{M}^2}{\mathcal{M}^2}\right] + \frac{1}{1 - c_{\text{s}}^2}\left[\frac{1}{n}\left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_n + T\right]\nabla s. \tag{4.49}$$

Последнее означает, что наряду с пятью интегралами движения выражения для I, γ и $u_{\hat{\varphi}}$ зависят лишь от одной дополнительной величины — числа Маха $\mathcal{M}$. Для определения же числа $\mathcal{M}$ следует воспользоваться очевидным соотношением $\gamma^2 - u_{\hat{\varphi}}^2 = u_{\text{p}}^2 + 1$, которое благодаря выражениям (4.45) и (4.46) может быть переписано в виде релятивистского уравнения Бернулли:

$$\frac{K}{\varpi^2 A^2} = \frac{1}{64\pi^4}\frac{\mathcal{M}^4(\nabla\Psi)^2}{\varpi^2} + \alpha^2\eta^2\mu^2, \tag{4.50}$$

где альфвеновский фактор

$$A = \alpha^2 - (\Omega_{\text{F}} - \omega)^2\varpi^2 - \mathcal{M}^2 \tag{4.51}$$

и

$$K = \alpha^2\varpi^2(E - \Omega_{\text{F}}L)^2\left[\alpha^2 - (\Omega_{\text{F}} - \omega)^2\varpi^2 - 2\mathcal{M}^2\right] + \\ + \mathcal{M}^4\left[\varpi^2(E - \omega L)^2 - \alpha^2 L^2\right]. \tag{4.52}$$

Соотношения (4.44)–(4.46) и (4.50) являются алгебраическими связями, позволяющими определить, хотя и в неявной форме, все характеристики течения по известному полоидальному полю $\mathbf{B}_{\text{p}}$ (т. е. по известному потенциалу Ψ) и пяти интегралам движения. Следует подчеркнуть, что для ненулевой температуры они чрезвычайно громоздки, главным образом из-за необходимости разрешать уравнение (4.49).

Для случая же холодной плазмы ($s = 0$, т. е. $\mu = \mathrm{const}$) уравнение Бернулли (4.50) становится алгебраическим уравнением четвертого порядка для величины $\mathcal{M}^2$. Как будет показано ниже, последнее обстоятельство часто позволяет находить аналитические асимптотики. Равенства (4.44)–(4.46) и (4.50) анализировались в бесчисленном количестве работ по различной тематике, начиная от звездного (солнечного) ветра [Weber, Davis, 1967; Mestel, 1968; Sakurai, 1990], где, конечно, использовался их нерелятивистский предел, и кончая релятивистским пульсарным ветром [Michel, 1969; Ardavan, 1976; Okamoto, 1978], а также гидродинамической и МГД-аккрецией вещества на черные дыры [Camenzind, 1986; Punsly, Coroniti, 1990b; Takahashi et al., 1990; Chakrabarti, 1990]. Ниже мы приводим несколько общих утверждений, которые могут быть получены непосредственно из анализа соотношений (4.44)–(4.46).

1. В пределах альфвеновской поверхности ($A \gg 1$) имеем $I \approx 2\pi L$, т. е. ток I на магнитных поверхностях остается постоянным. Следовательно, замыкание тока в пределах альфвеновской поверхности невозможно.

2. В пределах альфвеновской поверхности

$$\gamma \approx \frac{\alpha(E - \Omega_{\mathrm{F}} L)}{\mu\eta} \approx \gamma_{\mathrm{in}}. \tag{4.53}$$

Следовательно, ускорение частиц здесь также невозможно.

3. Тороидальная скорость $v_{\hat{\varphi}} = u_{\hat{\varphi}}/\gamma$ в пределах альфвеновской поверхности имеет вид

$$v_{\hat{\varphi}} \approx \Omega_{\mathrm{F}} \varpi. \tag{4.54}$$

Следовательно, здесь должна происходить полная коротация плазмы.

4. За пределами внешней альфвеновской поверхности

$$\frac{I}{2\pi} = \frac{\Omega_{\mathrm{F}} E}{\Omega_{\mathrm{F}}^2 + \mathcal{M}^2 \varpi^{-2}}. \tag{4.55}$$

Как и следовало ожидать, для сильнозамагниченных течений, при которых в знаменателе можно пренебречь вкладом $\mathcal{M}^2$, ток I попрежнему остается интегралом движения. Поэтому замыкание тока в области применения уравнения Грэда–Шафранова возможно лишь для слабозамагниченной плазмы.

5. Поскольку $L \approx \Omega_{\mathrm{F}} \varpi^2(r_{\mathrm{A}}) E$ (см. числитель соотношения (4.44)), тороидальная скорость за пределами альфвеновской поверхности ведет себя как $v_{\hat{\varphi}} \propto \varpi^{-1}$.

6. Вблизи горизонта физическая компонента тороидальной скорости остается конечной, тогда как лоренц-фактор ведет себя как $\gamma \propto \alpha^{-1}$. В итоге, как и в гидродинамическом случае, при $\alpha \to 0$ радиальная компонента скорости частиц стремится к скорости света, а остальные ее компоненты — к нулю.

Особые поверхности. Алгебраические соотношения (4.44)–(4.46) и (4.50) позволяют найти особые поверхности рассматриваемых МГД-течений, на которых полоидальная скорость среды v_{p} сравнивается с собственными скоростями осесимметричных возбуждений, способных распространяться в плазме. Такими особыми поверхностями являются следующие.

1. *Альфвеновская поверхность*, определяемая из условия равенства нулю знаменателя A (см. (4.51)) в алгебраических соотношениях (4.44)–(4.46):

$$A = 0. \tag{4.56}$$

В бессиловом пределе $\mathcal{M}^2 \to 0$ альфвеновская поверхность совпадает со световым цилиндром. Благодаря определениям (4.47) и (4.56) получаем, что на альфвеновской поверхности должно быть выполнено условие

$$u_{\text{p}}^2 = u_{\text{Ap}}^2 \left[1 - \frac{(\Omega_{\text{F}} - \omega)^2 \varpi^2}{\alpha^2}\right], \tag{4.57}$$

которое в нерелятивистском пределе совпадает, естественно, с условием равенства полоидальной скорости v_{p} и альфвеновской скорости V_{A} (см. (4.23)). Как было показано еще в работе [Weber, Davis, 1967], на плоскости в координатах u^r–r она является точкой более высокого порядка, чем, например, седло или фокус. С другой стороны, оказалось, что через нее проходят все траектории с положительным квадратом энергии E. Последнее означает, что в самих алгебраических соотношениях (4.44)–(4.46) не содержится никакой сингулярности, а условие регулярности (равенство нулю числителей при нулевом знаменателе) задает лишь положение альфвеновской поверхности. Вместе с тем, как выяснится в дальнейшем, само уравнение Грэда–Шафранова имеет на этой поверхности особенность.

2. *Быстрая и медленная магнитозвуковые поверхности* F и S, которые легче всего определить как особенности в выражении для градиента числа Маха $\mathcal{M}$. Действительно, воспользовавшись соотношениями (4.50)–(4.52), которые можно переписать в виде $(\nabla\Psi)^2 = F(\mathcal{M}^2, E, L, \eta, \Omega_{\text{F}}, \mu)$, где

$$F = \frac{64\pi^4}{\mathcal{M}^4}\frac{K}{A^2} - \frac{64\pi^4}{\mathcal{M}^4}\alpha^2\varpi^2\eta^2\mu^2, \tag{4.58}$$

получаем

$$\nabla_k \mathcal{M}^2 = \frac{N_k}{D}, \tag{4.59}$$

где

$$N_k = -\frac{A}{(\nabla\Psi)^2}\nabla^i\Psi \cdot \nabla_i\nabla_k\Psi + \frac{A}{2}\frac{\nabla_k' F}{(\nabla\Psi)^2}. \tag{4.60}$$

Здесь вновь оператор ∇_k' действует на все величины, за исключением $\mathcal{M}^2$. При этом знаменатель D может быть переписан как

$$D = \frac{A}{\mathcal{M}^2} + \frac{\alpha^2}{\mathcal{M}^2}\frac{B_{\hat{\varphi}}^2}{B_{\text{p}}^2} - \frac{1}{u_{\text{p}}^2}\frac{A}{\mathcal{M}^2}\frac{c_{\text{s}}^2}{1 - c_{\text{s}}^2}, \tag{4.61}$$

где $c_s^2 = 1/\mu(\partial P/\partial n)_s$ — скорость звука. Подчеркнем, что при дифференцировании $\nabla'_a F$ в формуле (4.60) следует использовать соотношение (4.49), поскольку выражение (4.58) для F содержит величину μ. Условие равенства нулю знаменателя в выражении (4.59):

$$D = 0, \tag{4.62}$$

и задает быструю и медленную особые поверхности. В самом деле, воспользовавшись определением (4.47), получаем, что $D = 0$ при

$$(u_{\rm p})^2_{1,2} = \frac{1}{2}\left(Wu^2_{\rm Ap} + \frac{c_s^2}{1-c_s^2}\right) \pm \\ \pm \frac{1}{2}\left[\left(Wu^2_{\rm Ap} + \frac{c_s^2}{1-c_s^2}\right)^2 - 4\left(W - \frac{B_{\hat\varphi}^2}{B_{\rm p}^2}\right)\frac{c_s^2}{1-c_s^2}u^2_{\rm Ap}\right]^{1/2}, \tag{4.63}$$

где

$$W = 1 - \frac{(\Omega_{\rm F} - \omega)^2\varpi^2}{\alpha^2} + \frac{B_{\hat\varphi}^2}{B_{\rm p}^2}, \tag{4.64}$$

а $u_{\rm Ap} = B_{\rm p}/\sqrt{4\pi n\mu}$, т. е. по-прежнему определяется через полоидальную компоненту магнитного поля. В нерелятивистском приближении соотношение (4.63) переходит, естественно, в выражение (4.22):

$$(u_{\rm p})^2_{1,2} = \frac{1}{2}\left(u_{\rm a}^2 + c_s^2\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(u_{\rm a}^2 + c_s^2\right)^2 - 4c_s^2u_{\rm a}^2\cos^2\theta}, \tag{4.65}$$

где теперь $u_{\rm a} = B/\sqrt{4\pi\rho}$ (ρ — плотность вещества), а $\cos\theta = B_{\rm p}/B$. Иными словами, особенность имеет место, когда полоидальная скорость среды сравнивается с полоидальной скоростью распространения возмущения. Для холодной плазмы ($c_s = 0$) медленная магнитозвуковая скорость равна нулю [Ахиезер и др., 1974], так что в этом случае медленная магнитозвуковая поверхность вообще отсутствует. Быстрая и медленная поверхности, в отличие от альфвеновской, являются седловыми точками, т. е. трансзвуковые решения существуют лишь при определенной связи между интегралами движения. Они получаются из условий регулярности:

$$N_r = 0; \quad N_\theta = 0, \tag{4.66}$$

при $D = 0$.

Условия регулярности (4.62) и (4.66), как мы уже видели на примере гидродинамических течений, играют ключевую роль в построении аналитических решений уравнения равновесия. Поэтому сформулируем основные свойства знаменателя D, определяющего, в частности, положение быстрой и медленной магнитозвуковых поверхностей:

а) как видно из выражения (4.61), при нулевом тороидальном магнитном поле ($B_{\hat\varphi} = 0$) условие $D = 0$ совпадает с альфвеновским условием $A = 0$. Это свойство непосредственно следует из структуры фазовой поляры, показанной на рис. 4.1. Действительно, как уже подчеркивалось, условие осесимметричности позволяет всем возмущениям распространяться лишь в полоидальной плоскости, а полоидальная скорость вещества, согласно (4.37), параллельна магнитному полю. При распространении же волны вдоль магнитного поля альфвеновская волна совпадает с одной из звуковых поляр. В результате можно сделать важный вывод: на оси вращения, где тороидальное магнитное поле заведомо отсутствует, альфвеновская и одна из звуковых поверхностей должны касаться друг друга;

б) в гидродинамическом пределе $\mathcal{M} \to \infty$ $(\eta \to \infty)$ мы возвращаемся к выражению (1.248): $D = -1 + c_{\rm s}^2/u_{\rm p}^2(1 - c_{\rm s}^2)$, а для малых скоростей — к выражению (1.107): $D = -1 + c_{\rm s}^2/v_{\rm p}^2$;

в) как будет показано в следующем параграфе, $D(r_{\rm g}, \theta) = -1$. Последнее означает, что внешнее пространство $D > 0$ автоматически отделено от горизонта событий гиперболической областью $-1 < D < 0$. Ниже мы рассмотрим это важнейшее свойство более подробно;

г) знаменатель D может быть переписан в виде

$$D = -1 + \frac{\alpha^2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2)}{\mathcal{M}^2 B_{\rm p}^2} - \frac{1}{u_{\rm p}^2}\frac{A}{\mathcal{M}^2}\frac{c_{\rm s}^2}{1 - c_{\rm s}^2}. \tag{4.67}$$

Следовательно, во всяком случае для нулевых температур, течение проходит быструю магнитозвуковую поверхность в области применимости рассматриваемого здесь подхода ($|\mathbf{B}| > |\mathbf{E}|$).

Упражнение. Покажите, что на быстрой магнитозвуковой поверхности условие $|\mathbf{B}| > |\mathbf{E}|$ оказывается выполненным и для ненулевых температур.

3. *Касповая поверхность* C, определяемая из условия $D = -1$. Эта поверхность связана с особенностью, возникающей на групповой поляре как точка возврата для медленной магнитозвуковой волны (см. рис. 4.1). В результате для соответствующей скорости получаем

$$u_{\rm cus,\,p}^2 = u_{\rm Ap}^2 \frac{\left[\alpha^2 - (\Omega_{\rm F} - \omega)^2\varpi^2\right] c_{\rm s}^2}{\left[\alpha^2 - (\Omega_{\rm F} - \omega)^2\varpi^2 + \alpha^2 B_{\hat\varphi}^2/B_{\rm p}^2\right] u_{\rm Ap}^2(1 - c_{\rm s}^2) + \alpha^2 c_{\rm s}^2}. \tag{4.68}$$

В нерелятивистском пределе выражение (4.68) имеет нерелятивистскую асимптотику (4.30). Действительно, касповая особенность распространяется вдоль магнитного поля (см. рис. 4.1). Особенность же в осесимметричном случае, как мы только что видели, наступает при равенстве полоидальных компонент скоростей среды и возмущения, чему и соответствует нерелятивистский предел уравнения (4.68): $u_{\rm cus,p} = u_{\rm a,p}c_{\rm s}/\sqrt{u_{\rm a}^2 + c_{\rm s}^2}$. Существование касповой поверхности в общем случае не приводит к дополнительным условиям регулярности.

4. *Световой цилиндр* $R_{\rm L}$, представляющий собой поверхность, на которой электрическое поле $\mathbf{E}$ сравнивается по величине с полоидальной компонентой магнитного поля $\mathbf{B}_{\rm p}$. Согласно (4.51) и (4.56) вдали от гравитирующих тел он находится на расстоянии $\varpi = R_{\rm L} = 1/\Omega_{\rm F}$ от оси вращения. В случае магнитосферы черной дыры возника-

ет еще один «световой цилиндр», расположенный на поверхности $\alpha = |\Omega_{\rm F} - \Omega_{\rm H}|\varpi_{\rm H}$. На световом цилиндре не существует никаких дополнительных условий регулярности. Отметим также, что поскольку $\mathcal{M}^2 > 0$, альфвеновская сингулярность не совпадает со световым цилиндром. При этом как для внешнего, так и для внутреннего семейства течение сначала пересекает альфвеновскую поверхность и лишь затем световой цилиндр.

5. *Световая поверхность* $S_{\rm L}$, на которой электрическое поле $\mathbf{E}$ сравнивается по величине с магнитным полем $\mathbf{B}$. Подобно предельной линии в обычной гидродинамике световая поверхность определяет естественную границу непрерывного течения.

Таким образом, плазма при своем движении пересекает сначала альфвеновскую поверхность, потом световой цилиндр и лишь затем быструю магнитозвуковую поверхность. Световая же поверхность (если она существует) расположена на еще больших расстояниях. С другой стороны, эффекты общей теории относительности приводят к появлению второго семейства особых поверхностей вблизи горизонта черной дыры. Чрезвычайно важен тот факт, что при условии выделения энергии вращающейся черной дырой внешняя альфвеновская поверхность (через которую проходят все траектории) соответствует значениям $u^r > 0$, т.е. истекающей плазме, а внутренняя — значению $u^r < 0$, т.е. аккреции [Takahashi et al., 1990] (ниже эта теорема будет доказана). Однако это противоречит предположению о постоянстве функции η на силовой линии $\Psi = \mathrm{const}$. Следовательно, течение плазмы в магнитосфере черной дыры (а точнее, на силовых линиях, проходящих через горизонт) не может быть непрерывным; поэтому необходимо ввести в рассмотрение области генерации плазмы, в которых уравнение Грэда–Шафранова не применимо. Очевидно, что сказанное выше не относится к гидродинамическому режиму аккреции, для которого альфвеновская поверхность отсутствует (вопрос о предельном переходе от МГД к гидродинамике подробно обсуждается в работе [Takahashi, 2002]).

Уравнение на полоидальное поле. Перейдем к обсуждению уравнения Грэда–Шафранова — уравнения равновесия магнитных поверхностей. Записав полоидальную компоненту закона сохранения энергии-импульса (для чего, впрочем, необходимо затратить немало усилий, поскольку полное число слагаемых в случае метрики Керра близко к сотне), вновь убеждаемся, что это векторное уравнение равновесия сводится к скалярному уравнению второго порядка, умноженному на $\nabla_k\Psi$. В компактной форме оно может быть записано как [Nitta, Takahashi, Tomimatsu, 1991; Бескин, Парьев, 1993]

$$\frac{1}{\alpha}\nabla_k\left\{\frac{1}{\alpha\varpi^2}[\alpha^2 - (\Omega_{\rm F} - \omega)^2\varpi^2 - \mathcal{M}^2]\nabla^k\Psi\right\} + \frac{\Omega_{\rm F} - \omega}{\alpha^2}(\nabla\Psi)^2\frac{{\rm d}\Omega_{\rm F}}{{\rm d}\Psi} + \\ + \frac{64\pi^4}{\alpha^2\varpi^2}\frac{1}{2\mathcal{M}^2}\frac{\partial\,(G/A)}{\partial\Psi} - 16\pi^3\mu n\frac{1}{\eta}\frac{{\rm d}\eta}{{\rm d}\Psi} - 16\pi^3 nT\frac{{\rm d}s}{{\rm d}\Psi} = 0, \qquad (4.69)$$

где

$$G = \alpha^2\varpi^2(E-\Omega_{\rm F}L)^2 + \alpha^2\mathcal{M}^2L^2 - \mathcal{M}^2\varpi^2(E-\omega L)^2. \qquad (4.70)$$

Раскрывая в (4.69) согласно определениям (4.59) и (4.60) члены $\nabla_k\mathcal{M}^2$, окончательно получаем

$$A\left[\frac{1}{\alpha}\nabla_k\left(\frac{1}{\alpha\varpi^2}\nabla^k\Psi\right) + \frac{1}{\alpha^2\varpi^2(\nabla\Psi)^2}\frac{\nabla^k\Psi\cdot\nabla^i\Psi\cdot\nabla_k\nabla_i\Psi}{D}\right] +$$
$$+\frac{1}{\alpha^2\varpi^2}\nabla_k'A\cdot\nabla^k\Psi - \frac{A}{\alpha^2\varpi^2(\nabla\Psi)^2}\frac{1}{2D}\nabla_k'F\cdot\nabla^k\Psi + \frac{\Omega_{\rm F}-\omega}{\alpha^2}(\nabla\Psi)^2\frac{{\rm d}\Omega_{\rm F}}{{\rm d}\Psi} +$$
$$+\frac{64\pi^4}{\alpha^2\varpi^2}\frac{1}{2\mathcal{M}^2}\frac{\partial(G/A)}{\partial\Psi} - 16\pi^3\mu n\frac{1}{\eta}\frac{{\rm d}\eta}{{\rm d}\Psi} - 16\pi^3 nT\frac{{\rm d}s}{{\rm d}\Psi} = 0, \qquad (4.71)$$

где градиент ∇_k' опять действует на все величины, за исключением $\mathcal{M}^2$, а производная $\partial/\partial\Psi$ — только на интегралы движения. Формула (4.71) и задает в наиболее общем виде уравнение равновесия магнитных поверхностей.

Еще раз напомним, что уравнение (4.71) содержит лишь функцию тока Ψ и пять интегралов движения. Действительно, с помощью уравнения состояния и определений (4.47) и (4.49) термодинамические величины могут быть выражены как функции энтропии $s(\Psi)$, величины $\eta(\Psi)$ и квадрата числа Маха. Сама же величина $\mathcal{M}^2$, согласно уравнению Бернулли (4.50), выражается, хотя и неявно, через градиент $(\nabla\Psi)^2$ и пять интегралов движения. При этом, конечно же, должен быть выбран физический корень уравнения (4.50).

Что же касается собственно уравнения Грэда–Шафранова:

$$r^2\sin^2\theta\cdot\nabla_k\left(\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\nabla^k\Psi\right) + 16\pi^2 I\frac{{\rm d}I}{{\rm d}\Psi} + 16\pi^3 r^2\sin^2\theta\frac{{\rm d}P}{{\rm d}\Psi} = 0, \quad (4.72)$$

т. е. уравнения, описывающего в нерелятивистском случае ($\alpha = 1$; $\omega = 0$) устойчивые статические ($\mathbf{v} = 0$, или $\gamma = 1$) осесимметричные конфигурации, то оно получается из (4.71) в результате предельного перехода $\Omega_{\rm F} \to 0$ (что соответствует бесконечно далекому световому цилиндру, $R_{\rm L} \to \infty$), $L \to 0$ и $\eta \to 0$. Как видно из определений (4.47) и (4.61), здесь также $\mathcal{M}^2 \to 0$, $D^{-1} \to 0$, а $E \to \mu\eta$, причем ток I и энтальпия μ (а следовательно, и любая другая термодинамическая функция) становятся интегралами движения. Гидродинамическая же версия уравнения Грэда–Шафранова, рассмотренная в гл. 1 (см. (1.110)), может быть получена с помощью предельного перехода $\Psi \to 0$, $\eta \to \infty$, при котором, однако, произведение $\eta\Psi \sim \Phi$ остается конечным. Формально указанный предел соответствует замене $\Psi \to \Phi$ и $\eta \to 1$.

Уравнение равновесия (4.71) является уравнением второго порядка, линейным относительно старших производных. Иными словами, оно может быть записано в канонической форме:

$$\mathcal{A}\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + 2\mathcal{B}\frac{\partial^2\Psi}{\partial r\partial\theta} + \mathcal{C}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2} + \mathcal{F} = 0, \tag{4.73}$$

где

$$\mathcal{A} \propto A\left[D + \frac{(\nabla_{\hat r}\Psi)^2}{(\nabla\Psi)^2}\right], \tag{4.74}$$

$$\mathcal{B} \propto A\frac{(\nabla_{\hat r}\Psi)(\nabla_{\hat\theta}\Psi)}{(\nabla\Psi)^2}, \tag{4.75}$$

$$\mathcal{C} \propto A\left[D + \frac{(\nabla_{\hat\theta}\Psi)^2}{(\nabla\Psi)^2}\right], \tag{4.76}$$

а $\mathcal{F}$ не содержит вторых производных Ψ. Нетрудно проверить, что

$$\mathcal{AC} - \mathcal{B}^2 \propto A^2D(D+1). \tag{4.77}$$

Поэтому, как и следовало ожидать, уравнение Грэда–Шафранова меняется от эллиптического к гиперболическому на особых поверхностях, на которых полоидальная скорость вещества сравнивается либо с быстрой или медленной магнитозвуковой скоростью ($D = 0$), либо с касповой скоростью ($D = -1$). На альфвеновской же поверхности ($A = 0$) смены вида уравнения не происходит. Тем не менее она все же является особой поверхностью уравнения равновесия, поскольку на ней должно быть выполнено условие регулярности

$$\frac{1}{\alpha^2\varpi^2}\nabla'_k A\cdot\nabla^k\Psi + \frac{\Omega_{\mathrm{F}} - \omega}{\alpha^2}\frac{\mathrm{d}\Omega_{\mathrm{F}}}{\mathrm{d}\Psi}(\nabla\Psi)^2 + \\ + \frac{64\pi^4}{\alpha^2\varpi^2}\frac{1}{2\mathcal{M}^2}\frac{\partial(G/A)}{\partial\Psi} - 16\pi^3\mu n\frac{1}{\eta}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\Psi} - 16\pi^3 nT\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\Psi} = 0, \tag{4.78}$$

следующее непосредственно из (4.71). Мы уже сталкивались с этой особенностью при обсуждении пульсарного уравнения.

В заключение нужно сказать несколько слов о числе граничных условий. Как мы видим, уравнение равновесия в общем случае содержит пять интегралов движения, которые, вообще говоря, должны определяться из граничных условий. С другой стороны, на особых поверхностях должны выполняться условия регулярности (4.66) и (4.78). Поэтому, по крайней мере для простейших топологий, когда все силовые линии (линии тока) пересекают все s' особых поверхностей, число b граничных условий вновь может быть записано в виде [Бескин, 1997]

$$b = 2 + i - s', \tag{4.79}$$

где i — число интегралов движения. Подчеркнем, что поскольку уравнение равновесия можно переписать как $D + K_1N_r + K_2N_\theta = 0$, соотношения (4.66) задают лишь одно условие регулярности. Второе же условие необходимо для определения положения особой поверхности.

4.2.3. Нерелятивистское течение. Для полноты картины сформулируем основные уравнения для нерелятивистской версии уравнения Грэда–Шафранова, т. е. для нерелятивистских скоростей ($v \ll c$) и ньютоновского гравитационного потенциала ($\varphi_{\mathrm{g}} \ll c^2$). В отличие от релятивистского движения в плоском пространстве, для которого все уравнения могут быть мгновенно получены с помощью очевидного предельного перехода $\alpha \to 1$, $\omega \to 0$, здесь ситуация требует особого рассмотрения, поскольку во всех уравнениях необходимо устранить вклад энергии покоя. В частности, как мы уже видели, в нерелятивистской версии размерность интегралов движения E и L отличается от их размерности в релятивистском случае. Поэтому в настоящей главе мы будем отмечать нерелятивистские величины индексом n. Для нерелятивистского случая мы везде ниже восстанавливаем размерность и рассматриваем лишь физические компоненты векторов.

Прежде всего, запишем соотношения, определяющие электромагнитные поля и скорость среды через интегралы движения:

$$\mathbf{B} = \frac{\nabla\Psi \times \mathbf{e}_\varphi}{2\pi\varpi} - \frac{2I}{\varpi c}\mathbf{e}_\varphi; \tag{4.80}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\Omega_{\mathrm{F}}}{2\pi c}\nabla\Psi; \tag{4.81}$$

$$\mathbf{v} = \frac{\eta_{\mathrm{n}}}{\rho}\mathbf{B} + \Omega_{\mathrm{F}}\varpi\mathbf{e}_\varphi. \tag{4.82}$$

Здесь по-прежнему $\rho = m_{\mathrm{p}}n$ есть плотность среды, а нерелятивистское отношение $\eta_{\mathrm{n}}(\Psi)$ потока вещества к потоку магнитного поля связано с соответствующей релятивистской величиной как

$$\eta_{\mathrm{n}} = m_{\mathrm{p}}c\eta. \tag{4.83}$$

Выражения же для потока энергии и момента импульса (точнее, их плотности потока) примут вид

$$E_{\mathrm{n}}(\Psi) = \frac{\Omega_{\mathrm{F}}I}{2\pi c\eta_{\mathrm{n}}} + \frac{v^2}{2} + w + \varphi_{\mathrm{g}}; \tag{4.84}$$

$$L_{\mathrm{n}}(\Psi) = \frac{I}{2\pi c\eta_{\mathrm{n}}} + v_\varphi r\sin\theta. \tag{4.85}$$

При этом релятивистские и нерелятивистские инварианты связаны соотношениями

$$E = c\eta_{\mathrm{n}} + \frac{\eta_{\mathrm{n}}E_{\mathrm{n}}}{c}; \tag{4.86}$$

$$L = \frac{\eta_{\mathrm{n}}L_{\mathrm{n}}}{c}. \tag{4.87}$$

Здесь, как и в гидродинамическом случае, нерелятивистские интегралы нормируются на единичный поток вещества dΦ. Поэтому полный поток энергии и углового момента должен быть записан следующим образом (ср. (2.92)):

$$W = \int E_{\rm n}(\Psi)\eta_{\rm n}(\Psi)\,{\rm d}\Psi; \tag{4.88}$$

$$K = \int L_{\rm n}(\Psi)\eta_{\rm n}(\Psi)\,{\rm d}\Psi. \tag{4.89}$$

Еще двумя инвариантами опять являются угловая скорость $\Omega_{\rm F}(\Psi)$ и энтропия $s(\Psi)$.

В результате алгебраические соотношения (4.44)–(4.46) для продольного тока и тороидальной скорости принимают вид [Weber, Davis, 1967]

$$\frac{I}{2\pi} = c\eta_{\rm n}\frac{L_{\rm n} - \Omega_{\rm F}\varpi^2}{1-\mathcal{M}^2}; \tag{4.90}$$

$$v_\varphi = \frac{1}{\varpi}\frac{\Omega_{\rm F}\varpi^2 - L_{\rm n}\mathcal{M}^2}{1-\mathcal{M}^2}, \tag{4.91}$$

где теперь

$$\mathcal{M}^2 = \frac{4\pi\eta_{\rm n}^2}{\rho}. \tag{4.92}$$

Величина же $\mathcal{M}^2$, как и в релятивистском случае, определяется из уравнения Бернулли (4.84), которое записывается как

$$\frac{\mathcal{M}^4}{64\pi^4\eta_{\rm n}^2}(\nabla\Psi)^2 = 2\varpi^2(E_{\rm n} - w - \varphi_{\rm g}) - \frac{(\Omega_{\rm F}\varpi^2 - L_{\rm n}\mathcal{M}^2)^2}{(1-\mathcal{M}^2)^2} - 2\varpi^2\Omega_{\rm F}\frac{L_{\rm n} - \Omega_{\rm F}\varpi^2}{1-\mathcal{M}^2}. \tag{4.93}$$

Напомним, что в уравнении (4.93), как и в его релятивистской версии (4.49), удельная энтальпия w должна рассматриваться как функция энтропии s, а также квадрата числа Маха и интеграла $\eta_{\rm n}$. Соответствующая связь задается выражением

$$\nabla w = c_{\rm s}^2\left(2\frac{\nabla\eta_{\rm n}}{\eta_{\rm n}} - \frac{\nabla\mathcal{M}^2}{\mathcal{M}^2}\right) + \left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_n + \frac{T}{m_{\rm p}}\right]\nabla s. \tag{4.94}$$

Соотношения (4.90) и (4.91) позволяют сделать ряд общих выводов.

1. В пределах альфвеновской поверхности $I \approx 2\pi c\eta_{\rm n}L_{\rm n}$, т. е. ток I на магнитных поверхностях остается постоянным. Следовательно, замыкание тока в пределах альфвеновской поверхности невозможно и в нерелятивистском случае.

2. Тороидальная скорость v_φ в пределах альфвеновской поверхности вновь имеет вид

$$v_\varphi \approx \Omega_{\rm F}\varpi. \tag{4.95}$$

Следовательно, и здесь должна происходить полная коротация плазмы.

3. За пределами внешней альфвеновской поверхности

$$\frac{I}{2\pi} = c\eta_{\rm n}\frac{\Omega_{\rm F}\varpi^2}{\mathcal{M}^2}. \tag{4.96}$$

Поэтому замыкание тока в области применения уравнения Грэда–Шафранова возможно лишь при условии сильной коллимации, т.е. при нарушении условия $\mathcal{M}^2 \propto \varpi^2$.

4. Поскольку $L_{\rm n} \approx \Omega_{\rm F}\varpi^2(r_{\rm A})$ (см. числитель соотношения (4.90)), тороидальная скорость за пределами альфвеновской поверхности ведет себя как

$$v_\varphi \approx \frac{\Omega_{\rm F}\varpi_{\rm A}^2}{\varpi}. \tag{4.97}$$

Таким образом, многие черты нерелятивистских течений оказываются близкими к свойствам релятивистских (что же касается отличий, то они будут сформулированы ниже).

Далее, альфвеновский фактор в нерелятивистском случае есть просто $A = 1 - \mathcal{M}^2$. Легко проверить, что эта особенность действительно определяется условием равенства полоидальной скорости вещества и полоидальной компоненты альфвеновской скорости $V_{\rm A}$ (как уже подчеркивалось в гл. 1, в рассматриваемом случае осесимметричного стационарного течения именно равенство полоидальных компонент скорости среды и скорости возмущений приводит к появлению сингулярной поверхности). Действительно, воспользовавшись определениями (4.82) и (4.92), находим

$$\mathcal{M}^2 = \frac{4\pi\rho v_{\rm p}^2}{B_{\rm p}^2}. \tag{4.98}$$

Поэтому особенность $A = 0$ и получила свое название.

Что же касается производной квадрата числа Маха, то она в нерелятивистском пределе по-прежнему может быть представлена в виде

$$\nabla_k\mathcal{M}^2 = \frac{N_k}{D}, \tag{4.99}$$

где

$$N_k = -\frac{1-\mathcal{M}^2}{(\nabla\Psi)^2}\nabla^i\Psi\cdot\nabla_i\nabla_k\Psi + \frac{1-\mathcal{M}^2}{2}\frac{\nabla_k' F_{\rm n}}{(\nabla\Psi)^2}. \tag{4.100}$$

При этом

$$F_{\rm n} = \frac{64\pi^4\eta_{\rm n}^2 K_{\rm n}}{\mathcal{M}^4(1-\mathcal{M}^2)^2}, \tag{4.101}$$

где

$$K_{\rm n} = 2(1-\mathcal{M}^2)^2(E_{\rm n} - w - \varphi_{\rm g})\varpi^2 + (1-2\mathcal{M}^2)\Omega_{\rm F}^2\varpi^4 - \\ - 2(1-2\mathcal{M}^2)\Omega_{\rm F}L_{\rm n}\varpi^2 - \mathcal{M}^4 L_{\rm n}^2. \tag{4.102}$$

Фактор же D выглядит теперь как

$$D = \frac{1-\mathcal{M}^2}{\mathcal{M}^2} + \frac{1}{\mathcal{M}^2}\frac{B_\varphi^2}{B_{\rm p}^2} - \frac{c_{\rm s}^2}{{\rm v}_{\rm p}^2}\frac{1-\mathcal{M}^2}{\mathcal{M}^2}. \tag{4.103}$$

УПРАЖНЕНИЕ. Проверьте, что условие $D = 0$ действительно приводит к выражению (4.22) для скорости быстрой и медленной волн, а условие $D = -1$ — к выражению (4.30) для касповой скорости $V_{\rm cus}$.

Наконец, уравнение Грэда–Шафранова может быть записано в компактной форме [Heyvaerts, Norman, 1989]:

$$\frac{1}{16\pi^3\rho}\nabla_k\left(\frac{1-\mathcal{M}^2}{\varpi^2}\nabla^k\Psi\right)+ \\ +\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{n}}{\mathrm{d}\Psi}+\frac{\Omega_\mathrm{F}\varpi^2-L_\mathrm{n}}{1-\mathcal{M}^2}\frac{\mathrm{d}\Omega_\mathrm{F}}{\mathrm{d}\Psi}+\frac{1}{\varpi^2}\frac{\mathcal{M}^2L_\mathrm{n}-\Omega_\mathrm{F}\varpi^2}{1-\mathcal{M}^2}\frac{\mathrm{d}L_\mathrm{n}}{\mathrm{d}\Psi}+ \\ +\left(2E_\mathrm{n}+\frac{1}{\varpi^2}\frac{\Omega_\mathrm{F}^2\varpi^4-2\Omega_\mathrm{F}L_\mathrm{n}\varpi^2+\mathcal{M}^2L_\mathrm{n}^2}{1-\mathcal{M}^2}\right)\frac{1}{\eta_\mathrm{n}}\frac{\mathrm{d}\eta_\mathrm{n}}{\mathrm{d}\Psi}-\frac{T}{m_\mathrm{p}}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\Psi}=0. \quad (4.104)$$

Как уже отмечалось, впервые полная версия нерелятивистского уравнения, содержащая все пять инвариантов, была сформулирована Л. С. Соловьевым в 1963 г. Будучи мало известным среди астрофизиков, это уравнение в дальнейшем неоднократно переформулировалось заново [Okamoto, 1975; Heinemann, Olbert, 1978; Heyvaerts, 1996]. Поэтому к настоящему времени не сложилось единой системы обозначений и порой бывает очень сложно сравнивать результаты различных работ друг с другом.

4.2.4. Случай анизотропного давления. В заключение приведем общие выражения для уравнения Грэда–Шафранова для среды с анизотропным давлением. Подобный случай может быть реализован, например, в солнечном ветре, когда длина свободного пробега l_ν на много порядков превышает ларморовский радиус r_L, так что в районе земной орбиты $l_\nu/r_\mathrm{L}\sim 10^9$. Для простоты ограничимся лишь нерелятивистским случаем [Beskin, Kuznetsova, 2000b]; полная же релятивистская версия с учетом эффектов общей теории относительности содержится в [Kuznetsova, 2005].

Фактически наша задача опять состоит в преобразовании уравнения движения:

$$\rho(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}=-\nabla_kP_{ik}+\frac{1}{4\pi}[\nabla\times\mathbf{B}]\times\mathbf{B}-\rho\nabla\varphi_\mathrm{g}. \quad (4.105)$$

Согласно работе [Chew, Goldberger, Low, 1956] в случае бесстолкновительной плазмы с анизотропным давлением, имеющим вид

$$P_{ik}=P_s\delta_{ik}+(P_n-P_s)\frac{B_iB_k}{B^2}, \quad (4.106)$$

вместо пятого интеграла — энтропии $s(\Psi)$ — можно ввести два дополнительных инварианта, постоянных на магнитных поверхностях. Это приближение получило название двойного адиабатического, поскольку оно основывается на двух адиабатических инвариантах:

$$s_1(\Psi)=\frac{P_nB^2}{\rho^3}; \quad (4.107)$$

$$s_2(\Psi)=\frac{P_s}{\rho B}. \quad (4.108)$$

Как мы видим, они соответствуют политропному уравнению состояния с $\Gamma_{\parallel} = 3$ и $\Gamma_{\perp} = 1$. В результате, интегрируя тороидальную и продольную (параллельную скорости) компоненты уравнения (4.105), легко получить следующие выражения для энергии и углового момента [Asséo, Beaufils, 1983; Tsikarishvili, Rogava, Tsikauli, 1995]:

$$E_{\mathrm{n}}(\Psi) = \frac{v^2}{2} + \frac{P_s}{\rho} + \frac{3}{2}\,\frac{P_n}{\rho} + \frac{\Omega_{\mathrm{F}} I}{2\pi c \eta_{\mathrm{n}}}\,(1 - \beta_{\mathrm{a}}) + \varphi_{\mathrm{g}}; \tag{4.109}$$

$$L_{\mathrm{n}}(\Psi) = v_{\varphi} r \sin\theta + \frac{I}{2\pi c \eta_{\mathrm{n}}}\,(1 - \beta_{\mathrm{a}}), \tag{4.110}$$

где

$$\beta_{\mathrm{a}} = 4\pi \frac{P_n - P_s}{B^2} \tag{4.111}$$

есть параметр анизотропии. Вместе с угловой скоростью $\Omega_{\mathrm{F}}(\Psi)$ и интегралом $\eta_{\mathrm{n}}(\Psi)$ перечисленные шесть инвариантов определяют все характеристики течения, например [Lovelace et al., 1986; Asséo, Beaufils, 1983]

$$\frac{I}{2\pi} = c\eta_{\mathrm{n}} \frac{L_{\mathrm{n}} - \Omega_{\mathrm{F}} \varpi^2}{1 - \mathcal{M}^2 - \beta_{\mathrm{a}}}; \tag{4.112}$$

$$v_{\varphi} = \frac{1}{\varpi}\,\frac{\Omega_{\mathrm{F}} \varpi^2 (1 - \beta_{\mathrm{a}}) - \mathcal{M}^2 L_{\mathrm{n}}}{1 - \mathcal{M}^2 - \beta_{\mathrm{a}}}. \tag{4.113}$$

Здесь по-прежнему $\mathcal{M}^2 = 4\pi\eta_{\mathrm{n}}^2/\rho$. Следовательно, в случае анизотропного давления условие альфвеновской сингулярности имеет вид

$$A = 1 - \mathcal{M}^2 - \beta_{\mathrm{a}} = 0. \tag{4.114}$$

Необходимо подчеркнуть, что условие (4.112) задает ток I неявным образом, поскольку посредством величины B_{φ}^2, входящей в β_{a}, он содержится и в правой части уравнения (4.112). Тем не менее стандартная процедура определения параметров течения по заданной величине полоидального поля $\mathbf{B}_{\mathrm{p}}$ остается без изменений. Уравнение Бернулли (4.109), которое может быть переписано в виде

$$\frac{\mathcal{M}^4}{64\pi^4 \eta_{\mathrm{n}}^2}(\nabla\Psi)^2 = 2\varpi^2\left(E_{\mathrm{n}} - \frac{P_s}{\rho} - \frac{3}{2}\frac{P_n}{\rho} - \varphi_{\mathrm{g}}\right) - \tag{4.115}$$

$$- \frac{[\Omega_{\mathrm{F}}\varpi^2(1 - \beta_{\mathrm{a}}) - L_{\mathrm{n}}\mathcal{M}^2]^2}{(1 - \mathcal{M}^2 - \beta_{\mathrm{a}})^2} - 2\varpi^2 \Omega_{\mathrm{F}}(1 - \beta_{\mathrm{a}}) \frac{L_{\mathrm{n}} - \Omega_{\mathrm{F}}\varpi^2}{1 - \mathcal{M}^2 - \beta_{\mathrm{a}}}, \tag{4.116}$$

вместе с соотношением (4.112) и определениями (4.107) и (4.108) неявно задает число Маха и параметр анизотропии как функции Ψ (или $\mathbf{B}_{\mathrm{p}}$) и всех шести инвариантов:

$$\mathcal{M}^2 = \mathcal{M}^2[(\nabla\Psi)^2, E_{\mathrm{n}}, L_{\mathrm{n}}, \Omega_{\mathrm{F}}, \eta_{\mathrm{n}}, s_1, s_2]; \tag{4.117}$$

$$\beta_{\mathrm{a}} = \beta_{\mathrm{a}}[(\nabla\Psi)^2, E_{\mathrm{n}}, L_{\mathrm{n}}, \Omega_{\mathrm{F}}, \eta_{\mathrm{n}}, s_1, s_2]. \tag{4.118}$$

В результате с помощью соотношений (4.112), (4.113) можно определить все остальные величины как функции полоидального поля и шести интегралов движения.

Уравнение же для потенциала Ψ вновь может быть получено из неиспользованной еще компоненты уравнения Эйлера, ортогональной полоидальному магнитному полю. В компактном виде оно имеет вид [Beskin, Kuznetsova, 2000b]

$$\nabla_k\left[\frac{1}{\varpi^2}\left(1-\mathcal{M}^2-\beta_{\rm a}\right)\nabla^k\Psi\right]+\frac{64\pi^4}{\varpi^2}\frac{1}{2\mathcal{M}^2}\frac{\partial\,(G/A)}{\partial\Psi}-$$
$$-8\pi^3P_n\frac{1}{s_1}\frac{{\rm d}s_1}{{\rm d}\Psi}-16\pi^3P_s\frac{1}{s_2}\frac{{\rm d}s_2}{{\rm d}\Psi}=0, \qquad (4.119)$$

где

$$\frac{G}{A}=2\varpi^2\eta_{\rm n}^2\left(E_{\rm n}-\frac{P_s}{\rho}-\frac{3}{2}\frac{P_n}{\rho}-\varphi_{\rm g}\right)+$$
$$+\eta_{\rm n}^2\frac{\varpi^4\Omega_{\rm F}^2(1-\beta_{\rm a})-2\varpi^2\Omega_{\rm F}L_{\rm n}(1-\beta_{\rm a})+\mathcal{M}^2L_{\rm n}^2}{1-\mathcal{M}^2-\beta_{\rm a}}. \qquad (4.120)$$

Здесь по-прежнему ∇_k есть ковариантная производная, а оператор $\partial/\partial\Psi$ действует лишь на инварианты $E_{\rm n}(\Psi)$, $L_{\rm n}(\Psi)$, $\Omega_{\rm F}(\Psi)$ и $\eta_{\rm n}(\Psi)$. Благодаря определениям (4.107), (4.108) и соотношениям (4.117), (4.118) это уравнение, как и любое уравнение типа Грэда–Шафранова, содержит только неизвестную функцию магнитного потока $\Psi(r,\theta)$ и шесть интегралов движения. В частности, в статическом случае, $\mathbf{v}=0$, т. е. при $\Omega_{\rm F}\to 0$, $\eta_{\rm n}\to 0$ $(\mathcal{M}^2\to 0)$, но $\eta_{\rm n}L_{\rm n}\to\mathrm{const}$, и при $\varphi_{\rm g}=0$ имеем

$$\nabla_k\left[\frac{1}{\varpi^2}\left(1-\beta_{\rm a}\right)\nabla^k\Psi\right]+\frac{16\pi^2}{\varpi^2}(1-\beta_{\rm a})I\frac{\partial I}{\partial\Psi}+$$
$$+16\pi^3\rho\frac{\rm d}{{\rm d}\Psi}\left(\frac{P_s}{\rho}+\frac{3}{2}\frac{P_n}{\rho}\right)-8\pi^3P_n\frac{1}{s_1}\frac{{\rm d}s_1}{{\rm d}\Psi}-16\pi^3P_s\frac{1}{s_2}\frac{{\rm d}s_2}{{\rm d}\Psi}=0. \qquad (4.121)$$

Уравнение (4.121) является обобщением статического уравнения Грэда–Шафранова (4.72) на случай анизотропного давления. Отметим, что в него входит частная производная $\partial I/\partial\Psi$. Последнее означает, что в выражении (4.112) следует дифференцировать лишь интегралы движения.

Интересно, что соотношения (4.109)–(4.113) остаются справедливыми и для более общего случая [Denton et al., 1994]:

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)\frac{P_nB^2}{\rho^3}=2\mathcal{P}_t\frac{B^2}{\rho^3}; \qquad (4.122)$$

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)\frac{P_s}{\rho B}=-\mathcal{P}_t\frac{1}{\rho B}, \qquad (4.123)$$

где величина $\mathcal{P}_t$ описывает бездиссипативный обмен энергии между продольным и поперечным движением частиц. В указанном приближении имеет место сохранение лишь «полной энтропии» $S = S(\Psi)$, определяемой из условия

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)S = \frac{1}{2}\frac{\rho^3}{B^2}(\mathbf{v}\cdot\nabla)s_1 + \rho B(\mathbf{v}\cdot\nabla)s_2 = 0. \tag{4.124}$$

При этом уравнение Грэда–Шафранова (4.121) приобретает вид

$$\nabla_k\left[\frac{1}{\varpi^2}(1-\mathcal{M}^2-\beta_{\mathrm{a}})\nabla^k\Psi\right] + \frac{32\pi^4}{\varpi^2\mathcal{M}^2}\frac{\partial(G/A)}{\partial\Psi} - 16\pi^3\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\Psi} = 0. \tag{4.125}$$

Вводя эффективное давление $P_{\mathrm{ef}} = P_{\mathrm{ef}}(\Psi)$ как

$$\mathrm{d}P_{\mathrm{ef}} = \rho\,\mathrm{d}\left(\frac{P_s}{\rho} + \frac{3}{2}\frac{P_n}{\rho}\right) - \mathrm{d}S, \tag{4.126}$$

что эквивалентно обычному термодинамическому соотношению $\mathrm{d}P = \rho\mathrm{d}w - \rho T\mathrm{d}s$, для статических конфигураций вместо (4.121) имеем

$$\nabla_k\left[\frac{1}{\varpi^2}(1-\beta_{\mathrm{a}})\nabla^k\Psi\right] + \frac{16\pi^2}{\varpi^2}(1-\beta_{\mathrm{a}})I\frac{\partial I}{\partial\Psi} + 16\pi^3\frac{\mathrm{d}P_{\mathrm{ef}}}{\mathrm{d}\Psi} = 0. \tag{4.127}$$

При $I = 0$ уравнение (4.127) было получено в работе [Nötzel, Schindler, Birn, 1985].

Уравнение (4.119), как и все рассмотренные выше, является уравнением смешанного типа. Используя неявные соотношения, приводящие к выражениям (4.117) и (4.118), можно записать оператор второго порядка в (4.121) в стандартном развернутом виде:

$$A\left[\nabla_k\left(\frac{1}{\varpi^2}\nabla^k\Psi\right) + \frac{\nabla^i\Psi\cdot\nabla^k\Psi\cdot\nabla_i\nabla_k\Psi}{\varpi^2(\nabla\Psi)^2 D}\right] + \cdots = 0. \tag{4.128}$$

Здесь

$$D = \frac{N}{d}, \tag{4.129}$$

где

$$\begin{aligned} N = &\left(1-\mathcal{M}^2-\beta_{\mathrm{a}}+4\pi\frac{4P_n-P_s}{B^2}\frac{B_\varphi^2}{B^2}\right)\left(1-3\frac{P_n}{\rho v_{\mathrm{p}}^2}\right) + \\ &+\frac{B_\varphi^2}{B_{\mathrm{p}}^2}\left(1-\beta_{\mathrm{a}}-4\pi\frac{3P_n-P_s}{B^2}+4\pi\frac{4P_n-P_s}{B^2}\frac{B_\varphi^2}{B^2}\right) - \\ &-\left(\mathcal{M}^2-4\pi\frac{3P_n-P_s}{B^2}\right)\frac{3P_n-P_s}{\rho v_{\mathrm{p}}^2}\frac{B_\varphi^2}{B^2}, \end{aligned} \tag{4.130}$$

$$d = \left(1-3\frac{P_n}{\rho v_{\mathrm{p}}^2}\frac{B_{\mathrm{p}}^2}{B^2}\right)\left(\mathcal{M}^2+4\pi\frac{P_n}{B^2}\right) + \frac{P_s}{\rho v_{\mathrm{p}}^2}\frac{B_{\mathrm{p}}^2}{B^2}\left(\mathcal{M}^2-4\pi\frac{3P_n-P_s}{B^2}\right). \tag{4.131}$$

Форма (4.128) уравнения (4.119) совпадает с канонической формой уравнения Грэда–Шафранова. Следовательно, это уравнение является эллиптическим при $D > 0$ и $D < -1$ и гиперболическим при $-1 < D < 0$. Последнее означает, что условие $D = 0$ должно определять величину скорости быстрой и медленной волн, распространяющихся теперь в среде с анизотропным давлением. Условие же $D = -1$ должно фиксировать касповую скорость. Указанное свойство может быть легко проверено. Действительно, для невращающейся среды ($\Omega_{\mathrm{F}} = 0$; $L_{\mathrm{n}} = 0$), когда согласно (4.112) $B_{\varphi} = 0$, имеем

$$N = (1 - \mathcal{M}^2 - \beta_{\mathrm{a}}) \left(1 - 3\frac{P_n}{\rho v_{\mathrm{p}}^2}\right). \tag{4.132}$$

Используя соотношения (4.130) и (4.131), нетрудно воспроизвести выражения для звуковой, альфвеновской и касповой скоростей в случае среды с анизотропным давлением [Клемоу, Доуэрти, 1996]:

$$c_{\mathrm{s}}^2 = 3\frac{P_n}{\rho}; \tag{4.133}$$

$$V_{\mathrm{A}}^2 = \frac{B^2}{4\pi\rho} - \frac{P_n - P_s}{\rho}; \tag{4.134}$$

$$V_{\mathrm{cus}}^2 = \left(3\frac{P_n}{\rho}\frac{B^2}{4\pi\rho} + 6\frac{P_n P_s}{\rho^2} - \frac{P_s^2}{\rho^2}\right)\left(\frac{B^2}{4\pi\rho} + 2\frac{P_s}{\rho}\right)^{-1}. \tag{4.135}$$

Напомним, что условие $V_{\mathrm{A}}^2 < 0$ соответствует шланговой, а условие $V_{\mathrm{cus}}^2 < 0$ — зеркальной неустойчивости.

4.3. Общие свойства

4.3.1. Некоторые полезные соотношения. Прежде чем переходить к последовательному анализу точных решений уравнения Грэда–Шафранова, постараемся сформулировать некоторые общие свойства сильнозамагниченных течений. Для начала приведем несколько общих соотношений, которые будут широко использоваться в дальнейшем.

Прежде всего, введем ряд новых обозначений. Как мы видели, во многих выражениях возникает следующая комбинация инвариантов: $e' = E - \Omega_{\mathrm{F}} L$. Воспользовавшись определениями (4.39) и (4.40), получаем

$$e' = \mu\eta\left[\alpha\gamma - (\Omega_{\mathrm{F}} - \omega)\varpi u_{\hat{\varphi}}\right]. \tag{4.136}$$

Иными словами, величина e' соответствует вкладу частиц. Очевидно, что для оценки можно положить

$$e' \approx \mu\eta\gamma_{\mathrm{inj}}, \tag{4.137}$$

где γ_{inj} — характерный лоренц-фактор частиц в области генерации плазмы.

Далее, естественно обезразмерить квадрат числа Маха, использовав выражение, возникающее в знаменателях соотношений (4.44)–(4.46):

$$q = \frac{\mathcal{M}^2}{(\Omega_{\rm F} - \omega)^2 \varpi^2}. \tag{4.138}$$

Действительно, поскольку в пределе $r \to \infty$ для квазисферических течений $\mathcal{M}^2 \propto 1/n \propto r^2$, то даже для течения, близкого к бессиловому (т. е. для течения, у которого вблизи компактного объекта $\mathcal{M}^2 \ll 1$), на больших расстояниях величина $\mathcal{M}^2$ становится много больше единицы. Параметр же q для сильнозамагниченного течения остается малым во всем пространстве. Следует, однако, сразу подчеркнуть, что определение (4.138) оказывается неудобным около оси вращения, где $\varpi \to 0$, а также в районе линии $\Omega_{\rm F} = \omega$.

Наконец, в дальнейшем неоднократно появится безразмерная величина

$$\Sigma_{\rm r}^2 = \frac{(\Omega_{\rm F} - \omega)^4 \varpi^2 (\nabla\Psi)^2}{64\pi^4 E^2}. \tag{4.139}$$

Она несет информацию о структуре полоидального магнитного поля на больших расстояниях от центрального объекта. Действительно, при движении вдоль магнитной силовой линии на больших расстояниях от центрального источника ($\omega = 0$) зависимость $\Sigma_{\rm r}^2$ от радиуса r содержится лишь в факторе $\varpi^2(\nabla\Psi)^2$, который определяется характером расхождения силовых линий. С другой стороны, параметр $\Sigma_{\rm r}^2$ зависит от отношения $E/\Omega_{\rm F} \approx L$, и следовательно, его величина может дать информацию о продольном токе, текущем в магнитосфере. В частности, легко показать, что для монопольного решения Майкеля $\Sigma_{\rm r}^2 = 1$.

Продемонстрируем теперь, как с помощью введенных выше величин можно определить ряд ключевых параметров, характеризующих течение замагниченной плазмы. Прежде всего, воспользуемся выражением (4.45) для лоренц-фактора частиц. Вдали от альфвеновской поверхности ($r \gg r_{\rm A}$) оно может быть переписано в виде

$$\gamma = \frac{q}{1+q}\frac{E}{\mu\eta}. \tag{4.140}$$

Однако $\gamma\mu\eta$ есть ни что иное как плотность потока энергии, заключенной в частицах. Поэтому в асимптотике величина q фактически представляет собой отношение потока энергии частиц к потоку энергии электромагнитного поля:

$$q = \frac{W_{\rm par}}{W_{\rm em}}. \tag{4.141}$$

Как видно из соотношения (4.140), максимальное значение лоренц-фактора частиц определяется отношением $E/\mu\eta$, которое для нерелятивистских температур ($\mu \approx m_{\rm p}$) задается значениями инвариантов E и η.

Упражнения.

1. Прямой подстановкой условия $nu_{\rm p} = \eta B_{\rm p}$ и асимптотических соотношений $|\mathbf{E}| \approx B_{\varphi} \approx \Omega_{\rm F}\varpi B_{\rm p}$ в определение $\mathcal{M}^2 = 4\pi\mu\eta^2/n$ покажите, что величина q действительно является отношением потока энергии частиц к потоку энергии электромагнитного поля.

2. Покажите, что по порядку величины

$$\gamma_{\rm max} = \frac{E}{\mu\eta} = \sigma, \tag{4.142}$$

где σ — уже введенный выше параметр замагниченности (см. (2.79)). Иными словами, величина σ имеет смысл максимально возможного значения γ.

Далее, рассмотрим асимптотику релятивистского уравнения Бернулли ($\gamma^2 - \mathbf{u}^2 = 1$; см. (4.50)). На расстояниях ϖ от оси вращения, значительно превышающих радиус светового цилиндра $R_{\rm L}$, оно имеет вид

$$\frac{\mathcal{M}^4 E^2}{\mu^2\eta^2 A^2} - \frac{\mathcal{M}^4(\nabla\Psi)^2}{64\pi^4\mu^2\eta^2\varpi^2} = 1. \tag{4.143}$$

Соотношение (4.143) приводит к двум важным выводам. Прежде всего, воспользуемся тем фактом, что для ультрарелятивистского течения справедливо условие $\mathbf{u}^2 \approx \gamma^2$. Сравнивая выражение (4.143) с определением $\Sigma_{\rm r}$ (4.139), находим

$$\gamma \approx \Sigma_{\rm r}\left(\frac{E}{\mu\eta}\right) q. \tag{4.144}$$

Отсюда сразу следует, что полная трансформация энергии электромагнитного поля в энергию частиц ($\gamma \to E/\mu\eta$; $q \to \infty$) возможна лишь в случае, когда выполнено условие $\Sigma_{\rm r} \to 0$. Иными словами, существует вполне определенная связь между структурой полоидального магнитного поля и энергией частиц на бесконечности. Ниже данный вопрос будет рассмотрен более подробно. С другой стороны, для сильнозамагниченных течений, $q \ll 1$ (и в асимптотической области $r \gg r_{\rm f}$, где $r_{\rm f}$ — радиус быстрой магнитозвуковой поверхности), получаем

$$\Sigma_{\rm r} \approx \frac{1}{1+q}, \tag{4.145}$$

т. е. в этом случае параметр $\Sigma_{\rm r}$ должен быть близок к единице.

Соотношение (4.143) позволяет сделать еще одно важное утверждение. Действительно, воспользовавшись определениями (3.13) и (3.43) электрического и магнитного полей, его можно переписать в виде

$$\left(B_{\hat\varphi}^2 - |\mathbf{E}|^2\right)\frac{n^2}{\eta^2}\Omega_{\rm F}^2\varpi^2 = 1. \tag{4.146}$$

Следовательно, для релятивистских течений должно быть выполнено условие

$$B_{\varphi}^2 - |\mathbf{E}|^2 \approx \frac{B_{\hat\varphi}^2}{\gamma^2}. \tag{4.147}$$

С другой стороны, вблизи горизонта черной дыры ($\alpha^2 \to 0$) асимптотика уравнения Бернулли выглядит как

$$\frac{\mathcal{M}^2(E-\omega L)^2}{\alpha^2\mu^2\eta^2 A^2} - \frac{1}{64\pi^4}\,\frac{\mathcal{M}^2(\nabla\Psi)^2}{\alpha^2\mu^2\eta^2\varpi^2} = 1. \tag{4.148}$$

В результате, вновь воспользовавшись определениями (3.13) и (3.43), получаем

$$B_{\hat\varphi}^2 - |\mathbf{E}|^2 \approx \left[\frac{(e')^2}{(\Omega_{\rm F}-\omega)^2\varpi^2\mu^2\eta^2} + 1\right]\frac{B_{\hat\varphi}^2}{\gamma^2}. \tag{4.149}$$

При этом, благодаря соотношению $e'/\mu\eta \sim \gamma_{\rm inj}$ (см. (4.137)), первое слагаемое в квадратных скобках оказывается много больше единицы.

На первый взгляд, условие применимости рассматриваемого здесь подхода, $|\mathbf{B}| > |\mathbf{E}|$, в обоих случаях оказывается автоматически выполненным. Однако это не означает, что при учете конечной массы частиц течение всегда можно продолжить до бесконечности (или же до горизонта событий). Дело в том, что для существования решения необходимо, чтобы физический корень алгебраического уравнения Бернулли мог быть продолжен в асимптотическую область. Последнее имеет место не при любом выборе интегралов движения. С подобным поведением мы уже сталкивались при анализе гидродинамического течения. Как было показано на рис. 1.1, для достаточно больших темпов аккреции ($\Phi > \Phi_{\rm crit}$) траекторию нельзя продолжить в область малых расстояний от гравитирующего центра. При этом особенность возникает не в самой величине скорости (энергии), а в ее производной. Соответственно, при достаточно малых токах решение бессилового уравнения ограничивается световой поверхностью, находящейся на конечном расстоянии от компактного объекта.

Отметим, что соотношение (4.147) имеет простой физический смысл. Записав выражение для дрейфовой скорости в виде

$$U_{\rm dr}^2 \approx \frac{\mathbf{E}^2}{B_\varphi^2} \approx \left(1 - \frac{B_\varphi^2 - \mathbf{E}^2}{B_\varphi^2}\right) \approx \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right), \tag{4.150}$$

приходим к заключению, что при условии (4.147) она полностью определяет энергию частиц. При этом сама дрейфовая скорость оказывается направленной практически вдоль полоидального магнитного поля, поскольку на больших расстояниях тороидальная компонента магнитного поля существенно превышает его полоидальную компоненту. Следовательно, здесь можно сделать еще один важный вывод: *для релятивистских течений за пределами внешней альфвеновской поверхности основным движением частиц становится дрейфовое движение вдоль полоидального магнитного поля в скрещенных электрических и магнитных полях.*

С другой стороны, соотношение (4.149) показывает, что вблизи горизонта черной дыры энергия частиц не определяется полностью их дрейфовым движением. Действительно, вблизи горизонта (где плотность энергии электромагнитного поля недостаточна для искажения метрики Керра) основную роль в определении энергии частиц должны играть силы гравитации [Punsly, 2001].

4.3.2. Альфвеновская поверхность. Перейдем к обсуждению общих свойств замагниченных течений. Прежде всего, достаточно общие выводы могут быть сделаны из анализа критических условий на особых поверхностях. Для начала рассмотрим вопрос о направлении движения частиц на альфвеновской поверхности. Поскольку, как было показано выше, заключение о том, что частицы могут пересекать альфвеновскую поверхность лишь в одном направлении, приводит к важнейшему следствию о необходимости генерации плазмы в магнитосфере черной дыры, представляется целесообразным остановиться на этом вопросе более подробно.

Итак, докажем справедливость следующей теоремы. *Частицы могут пересекать альфвеновскую поверхность лишь в одном направлении. В случае, когда центральный источник теряет свою энергию вращения, пересечение внешней альфвеновской поверхности возможно только по направлению от компактного объекта, а внутренней (которая существует лишь в магнитосфере черной дыры) — только по направлению к горизонту событий.*

Для доказательства воспользуемся выражением (4.45) для лоренц-фактора частиц, которое вдали от внешней альфвеновской поверхности, $r \gg r_{\rm A}$ (или же вблизи горизонта, $\alpha^2 \to 0$), можно записать как

$$\gamma = \frac{1}{\alpha\mu}\frac{\mathcal{M}^2}{(\Omega_{\rm F}-\omega)^2\varpi^2+\mathcal{M}^2}\frac{E-\omega L}{\eta}. \tag{4.151}$$

Понятно, что знак величины γ положителен. Следовательно, условие существования решения может быть записано в виде

$$\mathrm{sign}(E-\omega L) = \mathrm{sign}\,\eta. \tag{4.152}$$

Рассмотрим сначала внешнюю альфвеновскую поверхность ($\omega \approx 0$). Предположим, что радиальное магнитное поле положительно ($B_r > 0$). Тогда из определения $\mathrm{d}\Psi = \mathbf{B}\,\mathrm{d}\mathbf{S}$ следует, что $\Psi > 0$. С другой стороны, положительность потерь энергии $W_{\rm tot} = \int E(\Psi)\,\mathrm{d}\Psi$ показывает, что должно быть выполнено условие $E(\Psi) > 0$. Согласно (4.152) получаем $\eta > 0$. Воспользовавшись теперь определением $\alpha n\mathbf{u}_{\rm p} = \eta\mathbf{B}_{\rm p}$ (см. (4.37)), окончательно приходим к условию

$$u_r\left(r_{\rm A}^{\rm (ext)}\right) > 0. \tag{4.153}$$

Аналогичные рассуждения могут быть проведены и для внутренней альфвеновской поверхности. Действительно, в этом случае для $B_r > 0$, $\Psi > 0$ и при положительности потока энергии ($0 < \Omega_{\rm F} < \Omega_{\rm H}$; см. (3.68)) должно быть выполнено условие $E \approx \Omega_{\rm F}L < \Omega_{\rm H}L$, т. е. $E - \Omega_{\rm H}L < 0$. Поэтому вблизи горизонта $\eta < 0$, т. е.

$$u_r(r_{\rm A}^{\rm (int)}) < 0. \tag{4.154}$$

Упражнение. Покажите, что при $B_r < 0$ условия (4.153) и (4.154) не меняются.

Здесь, впрочем, правильнее было бы посмотреть на условие (4.154) с другой стороны. Действительно, если не предполагать наличия в пределах внутренней альфвеновской поверхности дополнительного источника плазмы, генерирующего поток частиц по направлению от черной дыры, то вблизи горизонта течение может быть направлено только к горизонту событий. В результате для такого класса течений (и при условии $B_r > 0$) должно выполняться неравенство $\eta < 0$. Отсюда следует, что магнитогидродинамическое течение можно продолжить до горизонта лишь в случае, когда выполнено условие

$$E - \Omega_{\mathrm{H}} L < 0. \tag{4.155}$$

Например, невозможным оказывается течение с $E > 0$ на невращающуюся черную дыру. Для сильнозамагниченного течения ($E \approx \Omega_{\mathrm{F}} L$) условие (4.155) совпадает с условием (3.68) положительности потерь энергии.

Казалось бы, рассмотренное выше доказательство не имеет отношения к свойствам альфвеновской сингулярности. Однако в действительности это не так. Соотношение (4.152) фиксирует знак величины γ при раскрытии по правилу Лопиталя особенности типа $0/0$ в выражениях (4.44)–(4.46). Поэтому именно условие на альфвеновской поверхности ограничивает класс возможных течений.

С другой стороны, как уже отмечалось, наличие особенности на альфвеновской поверхности в алгебраических выражениях (4.44)–(4.46) не вызывает появление дополнительных критических условий подобно тому, как это имело место на звуковых поверхностях, а лишь задает положение самой альфвеновской поверхности. Действительно, воспользовавшись числителем соотношения (4.44), получаем

$$\varpi_{\mathrm{A}}^2 = \frac{\alpha_{\mathrm{A}}^2 L}{(\Omega_{\mathrm{F}} - \omega_{\mathrm{A}})(E - \omega_{\mathrm{A}} L)}. \tag{4.156}$$

В частности, для внешней альфвеновской поверхности ($\omega = 0$; $\alpha^2 = 1$) имеем

$$\varpi_{\mathrm{A}}^2 = \frac{L}{\Omega_{\mathrm{F}} E}, \tag{4.157}$$

что в бессиловом пределе ($E = \Omega_{\mathrm{F}} L$), как и следовало ожидать, приводит к выражению $\varpi_{\mathrm{A}} = R_{\mathrm{L}} = c/\Omega_{\mathrm{F}}$ для радиуса светового цилиндра. Наконец, для нерелятивистского течения

$$\varpi_{\mathrm{A}}^2 = \frac{L_{\mathrm{n}}}{\Omega_{\mathrm{F}}}. \tag{4.158}$$

Подчеркнем, что поскольку инварианты сами являются функциями магнитного потока Ψ, в общем случае положение альфвеновской поверхности может быть найдено только после решения уравнения Грэда–Шафранова.

Что же касается внутренней альфвеновской поверхности, то здесь удобно определить величину $\alpha_{\rm A}$. В результате для случая $\alpha_{\rm A}^2 \ll 1$ имеем

$$\alpha_{\rm A}^2 \approx \frac{(\Omega_{\rm H} - \Omega_{\rm F})(\Omega_{\rm H} L - E)\varpi_{\rm g}^2}{L}, \qquad (4.159)$$

где $\varpi_{\rm g}$ соответствует величине ϖ на горизонте событий. В итоге все траектории, для которых выполнены условия (4.153) и (4.154), могут свободно пересечь альфвеновскую поверхность. Последнее связано с тем фактом, что альфвеновская поверхность является особенностью более высокого порядка, чем простейшая особенность типа седла (см. рис. 4.6).

4.3.3. Быстрая магнитозвуковая поверхность — релятивистский случай. Рассмотрим свойства релятивистского течения вблизи внешней быстрой магнитозвуковой поверхности. Если предположить, что она находится на расстояниях, существенно превышающих радиус альфвеновской поверхности, то величина D может быть переписана в виде

$$D = -1 + \frac{B_{\varphi}^2 - \mathbf{E}^2}{\mathcal{M}^2 B_{\rm p}^2} + \frac{1}{\mathcal{M}^2}. \qquad (4.160)$$

Здесь мы пренебрегли вкладом, обусловленным конечной температурой, который, как будет показано ниже, на больших расстояниях становится несущественным. Воспользовавшись соотношениями (4.140) и (4.147), а также оценкой $B_{\hat\varphi} \approx |\mathbf{E}| \approx \Omega_{\rm F}\varpi B_{\rm p}$, следующей из определения электромагнитных полей, получаем

$$D = -1 + \frac{1}{\gamma^3}\frac{E}{\mu\eta} + \frac{1}{\gamma\Omega_{\rm F}^2\varpi^2}\frac{E}{\mu\eta}. \qquad (4.161)$$

Здесь при определении третьего слагаемого, $1/\mathcal{M}^2$, мы вновь воспользовались оценкой $\gamma = q(E/\mu\eta)$. Таким образом, уже из приведенных выше простейших оценок следует, что при определенных условиях (когда можно пренебречь третьим слагаемым в выражении (4.161)) лоренц-фактор частиц в районе быстрой магнитозвуковой поверхности имеет универсальное значение [Michel, 1969]:

$$\gamma(r_{\rm f}) \approx \left(\frac{E}{\mu\eta}\right)^{1/3} \sim \sigma^{1/3}. \qquad (4.162)$$

В общем же случае для определения величины $\gamma_{\rm f} = \gamma(r_{\rm f})$ требуется провести более детальное исследование уравнения Бернулли.

Поскольку выводы, которые могут быть сделаны в результате подобного анализа, являются достаточно общими, имеет смысл уже здесь рассмотреть этот вопрос более подробно. Прежде всего, запишем уравнение Бернулли (4.47) в виде

$$q^4 + 2q^3 + \left[1 - \frac{(E-\omega L)^2}{\Sigma_{\rm r}^2 E^2} - 2\frac{\alpha^2}{(\Omega_{\rm F}-\omega)^2\varpi^2} + \frac{\alpha^2 L^2}{\Sigma_{\rm r}^2 E^2 \varpi^2}\right] q^2 + \\ + \alpha^2 \frac{\mu^2\eta^2}{\Sigma_{\rm r}^2 E^2} + \frac{\alpha^2}{\Sigma_{\rm r}^2(\Omega_{\rm F}-\omega)^2\varpi^2}\left(\frac{e'}{E}\right)^2 = 0. \qquad (4.163)$$

Везде, где можно, мы пренебрегли слагаемыми порядка $\alpha^2/(\Omega_{\rm F}-\omega)^2\varpi^2$ по сравнению с единицей. Для внешней быстрой магнитозвуковой поверхности подобное предположение заведомо выполнено на расстояниях, существенно превышающих радиус светового цилиндра. Малость же величины $\alpha^2(r_{\rm f})/(\Omega_{\rm F}-\omega_{\rm f})^2\varpi_{\rm f}^2$ для случая внутренней поверхности будет доказана ниже. Кроме того, в уравнении (4.163) не выписаны члены, пропорциональные первой степени q, которые также оказываются малыми. Наконец, при выводе уравнения (4.163) мы вновь пренебрегли вкладом, связанным с конечной температурой.

Как уже подчеркивалось, уравнение (4.163) определяет величину q (т. е. $\mathcal{M}^2$) как функцию интегралов движения и полоидального магнитного поля (функцию потока Ψ). При этом структура магнитного поля входит сюда лишь через параметр $\Sigma_{\rm r}^2$. В частности, уравнение (4.163) содержит и решение (4.144), которое получается в пределе $q \gg \sigma^{-2/3}$.

Рассмотрим внешнюю быструю магнитозвуковую поверхность. Ясно, что нас в первую очередь будут интересовать сильнозамагниченные течения, для которых, как мы видели, следует ожидать значений $\gamma_{\rm f} \sim \sigma^{1/3}$, т. е. $q \sim \sigma^{-2/3} \ll 1$, по крайней мере до быстрой магнитозвуковой поверхности. В этом случае в уравнении (4.163) можно пренебречь слагаемым q^4, в результате чего оно примет вид

$$q^3+\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{\Sigma_{\rm r}^2}-\left(2-\frac{1}{\Sigma_{\rm r}^2}\right)\frac{1}{\Omega_{\rm F}^2\varpi^2}\right]q^2+\frac{1}{2\Sigma_{\rm r}^2}\left(\frac{\mu\eta}{E}\right)^2+\frac{1}{2\Sigma_{\rm r}^2}\frac{1}{\Omega_{\rm F}^2\varpi^2}\left(\frac{e'}{E}\right)^2=0. \tag{4.164}$$

Здесь мы использовали соотношение $E \approx \Omega_{\rm F}L$, справедливое для сильнозамагниченных течений.

Прежде всего, чрезвычайно важный вывод может быть получен из самого определения величин q и $\Sigma_{\rm r}$. Действительно, разрешив уравнение (4.164) относительно $\Sigma_{\rm r}^2$:

$$\Sigma_{\rm r}^2=\left[1-\frac{L^2}{\varpi^2E^2}-\frac{1}{\Omega_{\rm F}^2\varpi^2}\left(\frac{e'}{E}\right)^2q^{-2}-\left(\frac{\mu\eta}{E}\right)^2q^{-2}\right]\left(1-\frac{2}{\Omega_{\rm F}^2\varpi^2}+2q\right)^{-1} \tag{4.165}$$

(это соотношение обобщает (4.145)), легко показать, что вблизи быстрой магнитозвуковой поверхности величина $\Sigma_{\rm r}$ должна быть близка к единице. Следовательно, угловой момент $L \approx E/\Omega_{\rm F}$, фиксирующий значение продольного электрического тока, должен иметь вполне определенную величину: $L \approx L_{\rm crit}$, где

$$L_{\rm crit} \approx \frac{\Omega_{\rm F}\varpi|\nabla\Psi|}{8\pi^2}. \tag{4.166}$$

Поскольку же $\varpi|\nabla\Psi| \approx \Psi$, продольный ток $I_{\rm crit}=2\pi L_{\rm crit}$ оказывается по порядку величины близок к гольдрайховскому току $I_{\rm GJ}=\Omega_{\rm F}\Psi/2\pi$.

Иными словами, мы в полном соответствии с соотношением (1.63) приходим к важнейшему заключению: гладкое прохождение быстрой магнитозвуковой поверхности возможно лишь при определенной величине продольного тока, который для релятивистских течений должен быть близок к гольдрайховскому. Подчеркнем, что этот вывод является естественным развитием заключения, сделанного на основе анализа бессиловых течений. Действительно, как мы видели, для малых токов течение нельзя продолжить за пределы световой поверхности, а при достаточно больших токах оно остается дозвуковым вплоть до бесконечности. В обоих случаях бессиловое течение (а значит, и сильнозамагниченное течение, в котором не пренебрегается массой частиц) не может пересечь быструю магнитозвуковую поверхность. Это становится возможным лишь при умеренных продольных токах ($I \approx I_{\mathrm{GJ}}$).

Упражнение. Проверьте, что для сильнозамагниченных течений ($\sigma \gg 1$; $\gamma_{\mathrm{inj}} \ll \sigma$) поправки к единице в числителе и знаменателе выражения (4.165) действительно оказываются малыми.

На первый взгляд, сделанный выше вывод является слишком жестким и по меньшей мере неожиданным. Однако легко показать, что для трансзвуковых течений условие $\Sigma_{\mathrm{r}} \approx 1$ при $r \sim r_{\mathrm{f}}$ действительно должно быть выполнено. Задав угловую скорость Ω_{F} (а значит, и примерное положение альфвеновской поверхности r_{A}), постараемся поставить граничные условия на поверхности $r \gg r_{\mathrm{A}}$, т. е. в области, где справедливы условия, необходимые для получения уравнения (4.164). Очевидно, что физически разумные (т. е. действительные положительные) корни уравнения (4.164) существуют лишь в случае, когда стоящий в квадратных скобках коэффициент перед q^2 положителен. Однако это заведомо невозможно при

$$\Sigma_{\mathrm{r}}^2 > \frac{1 - 2/x_r^2}{1 - 1/x_r^2} \tag{4.167}$$

($x_r = \Omega_{\mathrm{F}}\varpi$). Столь большие значения Σ_{r} соответствуют малым продольным токам, при которых, как мы видели на примере радиопульсаров, решение нельзя продолжить на большие расстояния от светового цилиндра. Что же касается области параметров $\Sigma_{\mathrm{r}} \ll 1$ (т. е. больших продольных токов), то они реализуются лишь для дозвуковых течений. Вопрос о том, может ли течение с $\Sigma_{\mathrm{r}} \approx 1$ удовлетворять еще и уравнению Грэда–Шафранова, требует, безусловно, дополнительного исследования.

Перейдем теперь к более детальному анализу кубического уравнения (4.164). Воспользуемся тем фактом, что быстрая магнитозвуковая поверхность соответствует пересечению в одной точке двух корней уравнения (4.164). С другой стороны, уравнение (4.164) имеет три действительных корня лишь при условии $Q \leqslant 0$, где Q — дискриминант кубического уравнения, при $r \approx r_\mathrm{f}$ равный

$$Q = \left[\frac{\mu^2\eta^2}{\Sigma_\mathrm{r}^2 E^2} + \frac{1}{\Sigma_\mathrm{r}^2\Omega_\mathrm{F}^2\varpi^2}\left(\frac{e'}{E}\right)^2\right]^2 - \frac{1}{27}\left[\frac{\mu^2\eta^2}{\Sigma_\mathrm{r}^2 E^2} + \frac{1}{\Sigma_\mathrm{r}^2\Omega_\mathrm{F}^2\varpi^2}\left(\frac{e'}{E}\right)^2\right] \times$$
$$\times \left[\frac{1}{\Sigma_\mathrm{r}^2} - 1 + \left(2 - \frac{1}{\Sigma_\mathrm{r}^2}\right)\frac{1}{\Omega_\mathrm{F}^2 r^2 \sin^2\theta}\right]^3. \qquad (4.168)$$

Поэтому условия регулярности решения вблизи быстрой магнитозвуковой поверхности $r = r_\mathrm{f}$ можно записать как

$$Q = 0; \quad \frac{\partial Q}{\partial r} = 0; \quad \frac{\partial Q}{\partial \theta} = 0. \qquad (4.169)$$

В самом деле, как показано на рис. 4.2, равенство нулю величины Q для кривых *1* соответствует совпадению двух из трех корней в точке остановки, так что эти решения не могут быть продолжены в область $Q > 0$. При параметрах, отвечающих кривым *3*, корни кубического уравнения вообще не пересекаются. Только кривые *2*, для которых выполнены условия (4.169), пересекаются в седловой точке, соответствующей быстрой магнитозвуковой поверхности.

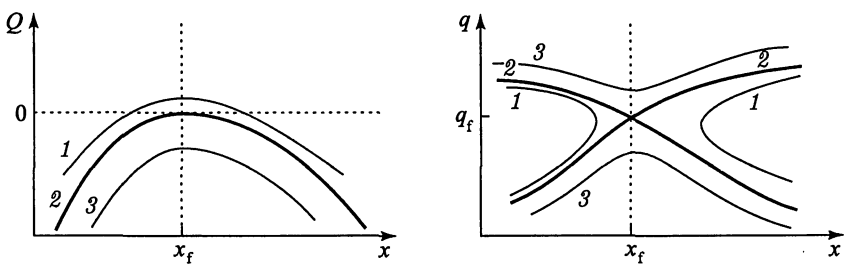


Рис. 4.2. Движение корней кубического уравнения вблизи особой точки типа седла

УПРАЖНЕНИЕ. Проверьте, что условия (4.169) в точности совпадают с условиями регулярности $D = 0$ (см. (4.62)), $N_r = 0$ и $N_\theta = 0$ (см. (4.66)).

В результате соотношения $Q = 0$ и $\partial Q/\partial r = 0$ при условии $\Sigma_\mathrm{r} \approx 1$ могут быть записаны в виде

$$\frac{1}{x_\mathrm{f}^2} + \frac{1}{\Sigma_\mathrm{f}^2} - 1 \approx 3q_\mathrm{f}; \qquad (4.170)$$
$$\frac{1}{x_\mathrm{f}^2} + \frac{x\Sigma_\mathrm{f}'}{\Sigma_\mathrm{f}^3} \approx q_\mathrm{f}, \qquad (4.171)$$

где индексы f отвечают значениям на быстрой магнитозвуковой поверхности. При выводе соотношений (4.170) и (4.171) мы воспользовались точным выражением для величины q в момент совпадения корней:

$$q_{\rm f} = \left[\left(\frac{\mu\eta}{E}\right)^2 + \frac{1}{\Omega_{\rm F}^2\varpi^2}\left(\frac{e'}{E}\right)^2\right]^{1/3}. \tag{4.172}$$

Поскольку же, как видно из (4.165), производная $\Sigma'_{\rm f}$ по порядку величины может быть оценена как

$$x_r\Sigma'_{\rm f} \sim 1 - \Sigma_{\rm f}^2, \tag{4.173}$$

где по-прежнему $x_r = \Omega_{\rm F}\varpi$, мы приходим к соотношению

$$x_{\rm f} \approx q_{\rm f}^{-1/2}. \tag{4.174}$$

Таким образом, помимо энергии частиц, критические условия на быстрой магнитозвуковой поверхности позволяют определить и ее положение.

В итоге в случае, когда в выражении (4.172) лидирующим является второе слагаемое, для лоренц-фактора частиц и радиуса быстрой магнитозвуковой поверхности окончательно получаем

$$r_{\rm f} \approx R_{\rm L}\left(\frac{E}{e'}\right)^{1/2}; \tag{4.175}$$

$$\gamma(r_{\rm f}) \approx \frac{e'}{\mu\eta} = \gamma_{\rm inj}. \tag{4.176}$$

Соответственно, $q_{\rm f} \approx e'/E$. Если же лидирующим членом в (4.172) является первое слагаемое, в согласии с оценкой (4.162) имеем

$$r_{\rm f} \approx R_{\rm L}\left(\frac{E}{\mu\eta}\right)^{1/3}; \tag{4.177}$$

$$\gamma(r_{\rm f}) \approx \left(\frac{E}{\mu\eta}\right)^{1/3} \sim \sigma^{1/3}, \tag{4.178}$$

а $q_{\rm f} \approx (\mu\eta/E)^{2/3}$. Напомним, что точная угловая зависимость $r_{\rm f}$ от θ может быть определена лишь после задания конкретного вида функций $E(\Psi)$, $\eta(\Psi)$ и решения уравнения Грэда–Шафранова. Подчеркнем также, что все соотношения здесь получены в предположении $\Omega_{\rm F}\varpi \gg 1$; поэтому вблизи оси вращения требуется более детальное рассмотрение.

Кроме того, можно сделать еще один важный вывод: для сильнозамагниченных течений ($\sigma \gg 1$; $\gamma_{\rm inj} \ll \sigma^{1/3}$) энергия частиц в районе быстрой магнитозвуковой поверхности составляет лишь малую часть от максимально возможной энергии ($\gamma \approx \sigma$). Действительно, условие $\gamma_{\rm f} \sim \sigma^{1/3}$ показывает, что отношение потока энергии частиц к потоку энергии электромагнитного поля есть

$$\frac{W_{\rm par}}{W_{\rm em}} \sim \max\left(\sigma^{-2/3}, \frac{\gamma_{\rm inj}}{\sigma}\right). \tag{4.179}$$

Следовательно, в релятивистском случае существенная трансформация потока энергии электромагнитного поля в энергию частиц возможна только за пределами быстрой магнитозвуковой поверхности.

Таким образом, выше была доказана следующая теорема. *В релятивистском случае в районе внешней быстрой магнитозвуковой поверхности энергия частиц достигает значений* $\gamma = \max((E/\mu\eta)^{1/3}, \gamma_{\mathrm{inj}})$. *В результате для сильнозамагниченных течений* ($\gamma_{\mathrm{inj}} \ll \sigma^{1/3}$) *доля энергии, переносимая частицами, составляет лишь малую часть* ($\sim \sigma^{-2/3}$) *на фоне потока электромагнитной энергии. При этом гладкое прохождение быстрой магнитозвуковой поверхности возможно только при выполнении условия* $\Sigma_{\mathrm{r}}(r_{\mathrm{f}}) \approx 1$, *что соответствует гольдрайховскому продольному току, текущему в магнитосфере.*

Впервые оценка (4.178) для энергии частиц на быстрой магнитозвуковой поверхности была получена в работе Майкеля [Michel, 1969]. Однако в ней содержалось утверждение о том, что лоренц-фактор $\gamma \sim \sigma^{1/3}$ достигается лишь на бесконечном расстоянии от центрального тела. Впоследствии это утверждение было воспроизведено во многих работах (см., например, [Okamoto, 1978; Kennel, Fujimura, Okamoto, 1983; Li, Begelman, Chiueh, 1992; Lery et al., 1998]) и рассматривалось как общее свойство сильнозамагниченных течений. В действительности же вывод о том, что быстрая магнитозвуковая поверхность должна находиться на бесконечности, основан на несамосогласованном выборе структуры полоидального магнитного поля. Дело в том, что во всех упомянутых выше работах в качестве полоидального поля использовалось монопольное решение Майкеля, которое не является точным при ненулевой массе частиц. Как видно из соотношений (4.170) и (4.171), указанная система действительно не имеет решений при конечных значениях x_{f} для случая монопольного решения Майкеля ($\Sigma_{\mathrm{r}} = 1$; $\Sigma_{\mathrm{r}}' = 0$). Если же самосогласованно учесть отличие полоидального магнитного поля от монопольного, то, как мы видели, быстрая магнитозвуковая поверхность перемещается на конечное расстояние от центрального тела.

Наконец, отметим, что два предельных случая, $\gamma_{\mathrm{inj}} \ll \sigma^{1/3}$ и $\gamma_{\mathrm{inj}} \gg \sigma^{1/3}$, соответствуют условиям быстрого и медленного вращения центрального тела [Bogovalov, 2001]. Действительно, равенство $\gamma_{\mathrm{inj}} = \sigma^{1/3}$ может быть записано в виде $\Omega_{\mathrm{F}} = \Omega_{\mathrm{crit}}$, где

$$\Omega_{\mathrm{crit}} = 2\pi \left(\frac{\mu\eta\gamma_{\mathrm{inj}}^3}{\Psi_0} \right)^{1/2}, \tag{4.180}$$

так что при быстром вращении ($\Omega_{\mathrm{F}} \gg \Omega_{\mathrm{crit}}$) энергия частиц существенно увеличивается по мере приближения к быстрой магнитозвуковой поверхности, а для медленно вращающихся источников ($\Omega_{\mathrm{F}} \ll \Omega_{\mathrm{crit}}$) она остается практически неизменной. Например, для радиопульсаров ($\Psi_0 \approx \pi R^2(\Omega R/c)B_0$; $n_{\mathrm{e}} = \lambda n_{\mathrm{GJ}}$) выражение для критического периода ($P_{\rm crit} = 2\pi/\Omega_{\rm crit}$) имеет вид

$$P_{\rm crit} = \pi\frac{R}{c}\left[\frac{2}{\lambda\gamma_{\rm inj}^3}\frac{\omega_B R}{c}\right]^{1/2} \sim 10^{-3}\lambda_4^{-1}\gamma_3^{3/2}B_{12}^{1/2}\ [\text{с}] \qquad (4.181)$$

(напомним, что выражение для гольдрайховской плотности записано в лабораторной системе, тогда как в определении $n\mathbf{u} = \eta\mathbf{B}_{\rm p}$ стоит концентрация n в сопутствующей системе координат). Как уже подчеркивалось, за исключением нескольких молодых нейтронных звезд (Crab, Vela), все остальные радиопульсары следует отнести к медленно вращающимся источникам.

Что же касается внутренней быстрой магнитозвуковой поверхности, то для нее может быть доказана следующая теорема. *На внутренней быстрой магнитозвуковой поверхности энергия частиц лишь координатным фактором α отличается от энергии частиц на больших расстояниях от черной дыры: $\gamma_{\rm f} \approx \gamma_{\rm inj}/\alpha(r_{\rm f})$. Это означает, что никакого дополнительного электромагнитного ускорения частиц вблизи горизонта не происходит.*

Действительно, лидирующие члены уравнения (4.163) вблизи внутренней быстрой магнитозвуковой поверхности имеют вид

$$q^3 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(E-\omega L)^2}{\Sigma_{\rm r}^2 E^2} - 2\frac{\alpha^2}{(\Omega_{\rm F}-\omega)^2\varpi^2} + \frac{\alpha^2 L^2}{\Sigma_{\rm r}^2 E^2\varpi^2}\right)q^2 + \\ + \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{\Sigma_{\rm r}^2(\Omega_{\rm F}-\omega)^2\varpi^2}\left(\frac{e'}{E}\right)^2 = 0. \qquad (4.182)$$

В данном случае, как мы видим, всегда можно пренебречь предпоследним членом в уравнении (4.163), который вблизи горизонта в $\gamma_{\rm inj}^2/\Omega_{\rm F}^2\varpi_{\rm g}^2 \gg 1$ раз меньше, чем слагаемое, пропорциональное $(e'/E)^2$ (сравните с (4.149)). В итоге анализ уравнения (4.182) проводится точно так же, как и для внешней быстрой магнитозвуковой поверхности в случае медленного вращения. Прежде всего, выражение (4.165) для $\Sigma_{\rm r}^2$ переписывается теперь как

$$\Sigma_{\rm r}^2 = \left[\frac{(E-\omega L)^2}{E^2} - \frac{\alpha^2 L^2}{\varpi^2 E^2} - \frac{\alpha^2}{(\Omega_{\rm F}-\omega)^2\varpi^2}\left(\frac{e'}{E}\right)^2 q^{-2}\right] \times \\ \times \left(1 - 2\frac{\alpha^2}{(\Omega_{\rm F}-\omega)^2\varpi^2} + 2q\right)^{-1}. \qquad (4.183)$$

Как и вблизи внешней быстрой магнитозвуковой поверхности, все поправки к первым слагаемым в числителе и знаменателе оказываются много меньше единицы, в результате чего можно положить

$$\Sigma_{\rm r}^2 \approx \frac{(E-\Omega_{\rm H}L)^2}{E^2}. \qquad (4.184)$$

Здесь также использовано условие близости внутренней быстрой магнитозвуковой поверхности к горизонту событий.

Далее, дискриминант уравнения (4.182) принимает вид

$$Q = \left[\frac{\alpha^2}{\Sigma_{\rm r}^2(\Omega_{\rm F}-\omega)^2\varpi^2}\left(\frac{e'}{E}\right)^2\right]^2 - \frac{\alpha^2}{27\Sigma_{\rm r}^2(\Omega_{\rm F}-\omega)^2\varpi^2}\left(\frac{e'}{E}\right)^2 \times$$
$$\times\left[\frac{(E-\omega L)^2}{\Sigma_{\rm r}^2 E^2} - 1 + 2\frac{\alpha^2}{(\Omega_{\rm F}-\omega)^2\varpi^2} - \frac{\alpha^2}{\Sigma_{\rm r}^2}\frac{L^2}{\varpi^2 E^2}\right]^3, \quad (4.185)$$

что приводит к следующим выражениям [Hirotani et al., 1992; Beskin, Kuznetsova, 2000a]:

$$q(r_{\rm f}) \approx \frac{1}{\Sigma_{\rm r}}\left(\frac{e'}{E}\right); \quad (4.186)$$

$$\alpha_{\rm f}^2 = \alpha^2(r_{\rm f}) \approx \frac{(\Omega_{\rm H}-\Omega_{\rm F})^2\varpi_{\rm g}^2}{\Sigma_{\rm r}}\left(\frac{e'}{E}\right); \quad (4.187)$$

$$\gamma(r_{\rm f}) \approx \frac{\gamma_{\rm inj}}{\alpha_{\rm f}}. \quad (4.188)$$

Нужно обратить особое внимание на последнее соотношение. Итак, лоренц-фактор частиц на внутренней быстрой магнитозвуковой поверхности, $\gamma_{\rm f} = \gamma(r_{\rm f})$, действительно лишь координатным фактором $\alpha_{\rm f}$ отличается от лоренц-фактора в области инжекции. Последнее и означает, что фактически никакого дополнительного электромагнитного ускорения в районе горизонта черной дыры не происходит [Punsly, 2001]. Отличие же в величинах γ связано с ускорением частиц сильным гравитационным полем черной дыры.

Кроме того, мы видим, что при углах θ, не слишком близких к нулю, быстрая магнитозвуковая поверхность располагается гораздо ближе к горизонту, чем альфвеновская поверхность:

$$\alpha_{\rm f}^2 \approx \alpha^2(r_{\rm A})\frac{\gamma_{\rm inj}}{\sigma}, \quad (4.189)$$

откуда $\alpha^2(r_{\rm f}) \ll \alpha^2(r_{\rm A})$, где величина

$$\alpha^2(r_{\rm A}) \approx (\Omega_{\rm H}-\Omega_{\rm F})^2\varpi_{\rm g}^2 \quad (4.190)$$

для рассматриваемого здесь случая сильнозамагниченного течения соответствует положению альфвеновской поверхности. При этом, как следует из соотношения (4.187), вблизи быстрой поверхности отношение

$$\frac{\alpha_{\rm f}^2}{(\Omega_{\rm F}-\omega)^2\varpi^2} \approx \frac{e'}{E} \quad (4.191)$$

действительно оказывается малым по сравнению с единицей, что и оправдывает отбрасывание соответствующих членов в общем уравнении (4.163).

Наконец, сравнивая решение (4.184) с определением (4.139) (а также положив $E \approx \Omega_{\rm F} L$, что справедливо для сильно замагниченных течений), мы немедленно приходим к соотношению

$$L \approx \frac{\Omega_{\rm H} - \Omega_{\rm F}}{8\pi^2} \sin\theta \, \frac{{\rm d}\Psi}{{\rm d}\theta}, \tag{4.192}$$

которое, как легко проверить, фактически совпадает с «граничным условием на горизонте». Ниже будет показано, что подобное совпадение не является случайным.

4.3.4. Быстрая магнитозвуковая поверхность — нерелятивистский случай. Перейдем к анализу нерелятивистского течения. Понятно, что в этом случае речь может идти только о внешней быстрой магнитозвуковой поверхности. Здесь справедлива следующая теорема. *В нерелятивистском пределе гладкое пересечение быстрой магнитозвуковой поверхности возможно лишь в том случае, когда энергия частиц на ней составляет порядка одной трети от полных потерь энергии. Иными словами, трансзвуковое нерелятивистское течение не может быть сильно замагниченным.*

Прежде всего, покажем, при каких условиях возникает соотношение $W_{\rm par} = W_{\rm tot}/3$. Рассмотрим нерелятивистское уравнение Бернулли (4.93) в предположении, что быстрая магнитозвуковая поверхность находится на расстояниях, существенно превышающих радиус альфвеновской поверхности. В этом случае $\mathcal{M}^2 \gg 1$, так что уравнение (4.93) может быть приближенно переписано как

$$\frac{1}{2}\, \frac{\mathcal{M}^4}{64\pi^4\eta_{\rm n}^2\varpi^2}\, (\nabla\Psi)^2 + \frac{\Omega_{\rm F}^2\varpi^2}{\mathcal{M}^2} = E_{\rm n}. \tag{4.193}$$

Первое слагаемое в левой части (4.193) соответствует кинетической энергии частиц, $v_{\rm p}^2/2$ (тороидальная скорость спадает с расстоянием как r^{-1} и при $r_{\rm f} \gg r_{\rm A}$ может быть отброшена), а второе представляет собой асимптотическое выражение для потока вектора Пойнтинга. Естественно, мы пренебрегли вкладом энтальпии и гравитационного потенциала, тоже спадающих на больших расстояниях. В результате уравнение (4.93) приобретает вид

$$q^3 - 2\frac{v_{\rm in}^2}{\Sigma_{\rm r}^2 E_{\rm n}}\, q + 2\frac{v_{\rm in}^4}{\Sigma_{\rm r}^2 E_{\rm n}^2} = 0, \tag{4.194}$$

где теперь

$$\Sigma_{\rm n}^4 = \frac{\Omega_{\rm F}^4\varpi^2(\nabla\Psi)^2}{64\pi^4 v_{\rm in}^2\eta_{\rm n}^2 E_{\rm n}^2}, \tag{4.195}$$

величина q задается соотношением

$$q = \frac{v_{\rm in}^2}{\Omega_{\rm F}^2\varpi^2}\mathcal{M}^2, \tag{4.196}$$

а нормировочный множитель $v_{\rm in} = {\rm const}$ по порядку величины (с точностью до отброшенных тепловых членов) совпадает со скоростью инжекции плазмы в источнике. Первое слагаемое в (4.194) опять соответствует вкладу потока частиц, последнее — потоку электромагнитного поля, а взятое с обратным знаком второе слагаемое — полному потоку энергии E.

Воспользовавшись теперь выражением для дискриминанта кубического уравнения (4.194):

$$Q_{\rm n} = -\frac{8}{27}\frac{v_{\rm in}^6}{E_{\rm n}^3\Sigma_{\rm n}^6} + \frac{v_{\rm in}^8}{E_{\rm n}^4\Sigma_{\rm n}^4}, \tag{4.197}$$

а также условием регулярности $Q_{\rm n} = 0$ в быстрой магнитозвуковой точке, для $\Sigma_{\rm f}^2 = \Sigma_{\rm n}^2(r_{\rm f})$ получаем

$$\Sigma_{\rm f}^2 = \frac{8}{27}\frac{E_{\rm n}}{v_{\rm in}^2}. \tag{4.198}$$

В результате имеем

$$q(r_{\rm f}) = \frac{3}{2}\frac{v_{\rm in}^2}{E_{\rm n}}. \tag{4.199}$$

Сравнивая соответствующие члены уравнения (4.194) и соотношения (4.198), (4.199), мы и приходим к условию $W_{\rm par} = W_{\rm tot}/3$.

Как специально подчеркивалось, условие $W_{\rm par} = W_{\rm tot}/3$ имело бы место, лишь если бы быстрая магнитозвуковая поверхность лежала на расстояниях, намного превышающих радиус альфвеновской поверхности. В действительности же, как легко проверить, решение (4.199) отвечает условию $\mathcal{M}_{\rm f}^2 \sim 1$. В результате в нерелятивистском случае радиус $r_{\rm f}$ быстрой магнитозвуковой поверхности всегда близок к радиусу $r_{\rm A}$ альфвеновской поверхности (точнее, отношение $r_{\rm f}/r_{\rm A}$ не превышает нескольких единиц). Поэтому в данном случае необходимо анализировать полное уравнение Бернулли:

$$\frac{\mathcal{M}^4\Sigma_{\rm n}^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{x_{\rm n}^2}{v_{\rm in}^4}\left(\frac{v_{\rm in}^2}{E_n}\right)^2\frac{(v_{\rm in}^2x_{\rm n}^2 - \mathcal{M}^2\Omega_{\rm F}L)^2}{(1-\mathcal{M}^2)^2} + \frac{x_{\rm n}^4}{v_{\rm in}^2}\left(\frac{v_{\rm in}^2}{E_n}\right)^2\frac{\Omega_{\rm F}L - x_{\rm n}^2v_{\rm in}^2}{1-\mathcal{M}^2} = x_{\rm n}^4\frac{v_{\rm in}^2}{E_{\rm n}}, \tag{4.200}$$

где первые два слагаемые соответствуют потоку частиц, третье — потоку электромагнитного поля, а в правой части стоит полный поток энергии. Здесь мы для простоты вернулись к переменной $\mathcal{M}^2$, а $x_{\rm n} = \Omega_{\rm F}\varpi/v_{\rm in}$.

Анализ показывает, что для случая быстрого вращения оценки (4.198), (4.199) остаются справедливыми и для полного уравнения (4.200). При этом быстрому вращению соответствует условие $E_{\rm n} \gg v_{\rm in}^2$, когда вблизи источника течение является сильнозамагниченным, т. е. вклад потока электромагнитной энергии (вектора Пойнтинга) велик по сравнению с потоком частиц. Тогда по порядку величины

$$\Sigma_{\rm f}^2 \approx \frac{E_{\rm n}}{v_{\rm in}^2}; \tag{4.201}$$

$$x_{\rm f}^2 \approx \frac{E_{\rm n}}{v_{\rm in}^2}; \tag{4.202}$$

$$\mathcal{M}_{\rm f}^2 \approx 1 \tag{4.203}$$

(третье условие как раз и означает близость альфвеновской и быстрой магнитозвуковой поверхностей). Соотношение же (4.202) приобретает вид

$$r_{\rm f}^2 \approx \frac{E_{\rm n}}{\Omega_{\rm F}^2}. \qquad (4.204)$$

Естественно, что поскольку для быстрого вращения можно положить $E_{\rm n} \approx \Omega_{\rm F} L_{\rm n}$, оценка (4.204) оказывается близка к оценке (4.158) для радиуса альфвеновской поверхности.

Сравнивая теперь решение (4.198) с определением (4.195) и вновь полагая $\varpi(\nabla\Psi) \approx \Psi_0$, получаем

$$E_{\rm n} \approx \frac{\Omega_{\rm F}^{4/3}\Psi_0^{2/3}}{4\pi^{4/3}\eta_{\rm n}^{2/3}}. \qquad (4.205)$$

Условие (4.205) позволяет оценить предельную угловую скорость $\Omega_{\rm crit}$, разделяющую области быстрого и медленного вращения. Действительно, полагая в (4.205) $E_{\rm n} = v_{\rm in}^2/2$, находим

$$\Omega_{\rm crit} = \left(\frac{v_{\rm in}^3\eta_{\rm n}}{\Psi_0}\right)^{1/2} = \frac{v_{\rm in}}{R_{\rm in}}\left(\frac{4\pi\rho_{\rm in}v_{\rm in}^2}{B_{\rm in}^2}\right)^{1/2}. \qquad (4.206)$$

Здесь и далее $\Psi_0 \approx \pi R_{\rm in}^2 B_{\rm in}$ и $\eta_{\rm in} \approx \rho_{\rm in} v_{\rm in}/B_{\rm in}$, где индексы «in» соответствуют значениям величин в источнике. В результате выражение для радиуса быстрой магнитозвуковой поверхности можно записать в виде

$$r_{\rm f}^2 \approx R_{\rm in}^2 \frac{B_{\rm in}^2}{4\pi\rho_{\rm in}v_{\rm in}^2}\left(\frac{\Omega_{\rm F}}{\Omega_{\rm crit}}\right)^{-2/3}. \qquad (4.207)$$

Оценивая продольный ток как $I \approx 2\pi c\eta_{\rm n}E_{\rm n}/\Omega_{\rm F}$, приходим к неожиданному заключению. Оказывается, безразмерный ток $i_0 = I/I_{\rm GJ}$ должен быть много больше единицы:

$$i_0 \approx \frac{c}{v_{\rm in}}\left(\frac{\Omega_{\rm F}}{\Omega_{\rm crit}}\right)^{-2/3} \approx \left(\frac{c^2}{E_{\rm n}}\right)^{1/2}. \qquad (4.208)$$

Таким образом, в нерелятивистском случае для гладкого прохождения быстрой магнитозвуковой поверхности продольный ток должен существенно превышать гольдрайховский. При переходе же к релятивистскому случаю ($E_{\rm n} \to c^2$), как видно из второго равенства в формуле (4.208), продольный ток приближается к гольдрайховскому току.

Наконец, сравнивая соответствующие члены в уравнении (4.200), выясняем, что во всей области параметров $\Omega_{\rm F} \gg \Omega_{\rm crit}$ энергия частиц в районе быстрой магнитозвуковой поверхности должна быть сравнима с полной энергией $E_{\rm n}$. Иными словами, в нерелятивистском случае трансзвуковое сильнозамагниченное течение действительно не реализуется. Даже если у основания течения поток вектора Пойнтинга существенно превышает поток энергии частиц, гладкое прохождение через быструю магнитозвуковую поверхность становится возможным лишь тогда, когда вблизи этой поверхности происходит их существенное ускорение.

Что же касается малых угловых скоростей вращения ($\Omega_\mathrm{F} \ll \Omega_\mathrm{crit}$), то здесь в уравнении (4.200) можно пренебречь вторым и третьим слагаемыми. В результате имеем

$$\Sigma_\mathrm{f}^2 \approx 2x_\mathrm{f}^4; \tag{4.209}$$

$$r_\mathrm{f}^2 \approx \frac{\Psi_0}{\eta_\mathrm{n}}. \tag{4.210}$$

Отсюда

$$r_\mathrm{f}^2 \approx R_\mathrm{in}^2 \frac{B_\mathrm{in}^2}{4\pi\rho_\mathrm{in}v_\mathrm{in}^2}; \tag{4.211}$$

$$i_0 \approx \frac{c}{v_\mathrm{in}}. \tag{4.212}$$

Таким образом, в этом случае поток энергии частиц с самого начала практически совпадает с полным потоком энергии, текущим вдоль открытых силовых линий магнитного поля.

Необходимо отметить, что полученные выше выражения имеют смысл только при выполнении условия $r_\mathrm{f} \gg R_\mathrm{in}$. В противном случае критические поверхности должны находиться в непосредственной близости от компактного объекта, так что заметное ускорение частиц будет отсутствовать. Согласно (4.207) условие $r_\mathrm{f} \gg R_\mathrm{in}$ выполняется лишь при достаточно малых угловых скоростях: $\Omega_\mathrm{F} \ll \Omega_2$, где

$$\Omega_2 = \frac{B_\mathrm{in}^2}{4\pi\rho_\mathrm{in}v_\mathrm{in}^2} \cdot \frac{v_\mathrm{in}}{R_\mathrm{in}}. \tag{4.213}$$

Поэтому здесь удобно ввести нерелятивистский параметр $\mu_\mathrm{l} = \Omega_\mathrm{F}/\Omega_2$:

$$\mu_\mathrm{l} = \frac{4\pi\rho_\mathrm{in}v_\mathrm{in}\Omega_\mathrm{F}R_\mathrm{in}}{B_\mathrm{in}^2}, \tag{4.214}$$

иногда называемый «нагруженностью» потока [Anderson et al., 2005]. В результате при $\mu_\mathrm{l} \ll 1$ радиус r_f быстрой магнитозвуковой поверхности и скорость частиц $v \approx \sqrt{2E_\mathrm{n}/3}$ (которая фактически оказывается близка к предельной скорости v_∞) можно записать в виде [Spruit, 1996]

$$r_\mathrm{f} \approx \mu_\mathrm{l}^{-1/3} R_\mathrm{in}; \tag{4.215}$$

$$v_\infty \approx \mu_\mathrm{l}^{-1/3} \Omega_\mathrm{F} R_\mathrm{in}. \tag{4.216}$$

Соответственно, при $\mu_\mathrm{l} \gg 1$ имеем просто $r_\mathrm{f} \approx R_\mathrm{in}$ и $v_\infty \approx \Omega_\mathrm{F} R_\mathrm{in}$.

Таким образом, эффективное ускорение вещества может осуществляться лишь в интервале угловых скоростей $\Omega_\mathrm{crit} \ll \Omega_\mathrm{F} \ll \Omega_2$. Понятно, что это возможно только при выполнении неравенства $\Omega_\mathrm{crit} \ll \Omega_2$, которое, как легко проверить, соответствует условию

$$\frac{B_\mathrm{in}^2}{4\pi\rho_\mathrm{in}v_\mathrm{in}^2} \gg 1. \tag{4.217}$$

Действительно, поскольку при нарушении неравенства (4.217) плотность энергии истекающей плазмы превышала бы плотность электромагнитного поля, электромагнитное ускорение частиц не могло бы иметь места.

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Покажите, что критерий медленного вращения, $\Omega_\mathrm{F} \ll \Omega_\mathrm{crit}$, соответствует условию $\omega_\mathrm{n} \ll 1$, а критерий быстрого вращения, $\Omega_\mathrm{F} \gg \Omega_\mathrm{crit}$, — условию $\omega_\mathrm{n} \approx 1$, где (см., например, [Lery et al., 1998])

$$\omega_\mathrm{n} = \frac{\Omega_\mathrm{F} r_\mathrm{A}}{v_\mathrm{A}(r_\mathrm{A})}. \tag{4.218}$$

2. Покажите, что при условии квазимонопольного истечения, $\rho v r^2 \approx \approx \mathrm{const}$, величина $r_\mathrm{f} \approx r_\mathrm{A}$ (см. (4.207)) может быть получена непосредственно из определения $\mathcal{M}(r_\mathrm{A}) = 1$.

3. Покажите, что если ввести параметр намагниченности как

$$\sigma = \frac{\Omega^2 \Psi_0}{8\pi^2 c^3 \eta_\mathrm{n}} = \frac{v_\mathrm{in}}{c}\left(\frac{\Omega R_\mathrm{in}}{c}\right)^2 \frac{B_\mathrm{in}^2}{8\pi \rho_\mathrm{in} v_\mathrm{in}^2}, \tag{4.219}$$

то

а) для нерелятивистского случая $\sigma \ll 1$;

б) выражение (4.208) для тока i_0 может быть записано в компактном виде:

$$i_0 = \sigma^{-1/3}; \tag{4.220}$$

в) параметр μ_l имеет вид

$$\mu_\mathrm{l} = \left(\frac{\Omega_\mathrm{F} R_\mathrm{in}}{c}\right)^3 \sigma^{-1}. \tag{4.221}$$

Отметим, что условие эффективного ускорения частиц вблизи особых поверхностей ($W_\mathrm{par} \approx W_\mathrm{tot}$ при $r \approx r_\mathrm{f}$) может быть получено из простейшей оценки величины тороидальной скорости: $v_\varphi(r_\mathrm{f}) \approx \Omega_\mathrm{F} r_\mathrm{f}$ (см. (4.95)). Действительно, для сильнозамагниченных течений естественно положить $E_\mathrm{n} \approx \Omega_\mathrm{F} I / 2\pi c \eta_\mathrm{n}$, что для $I \approx i_0 I_\mathrm{GJ}$ немедленно приводит к значению $E_\mathrm{n} \approx \Omega_\mathrm{F}^2 r_\mathrm{f}^2$. Более того, легко показать, что полоидальная скорость v_p вблизи особых поверхностей тоже оказывается порядка $\Omega_\mathrm{F} r_\mathrm{f}$. Таким образом, становится понятной и природа ускорения частиц в сильнозамагниченном нерелятивистском ветре. Фактически магнитное поле играет роль пращи, обеспечивая постоянную угловую скорость вращения плазмы. В результате скорость частиц линейно увеличивается с удалением от оси вращения: $v_\varphi \approx \Omega_\mathrm{F} \varpi$. Однако подобное ускорение прекращается на расстояниях $\varpi \sim r_\mathrm{f}$, поскольку здесь течение переходит на другую асимптотику: $v_\varphi \approx \Omega_\mathrm{F} \varpi_\mathrm{A}^2 / \varpi$ (см. (4.97)). В указанной области энергия частиц в основном обусловлена полоидальной компонентой их скорости.

Наконец, напомним, что именно вблизи быстрой магнитозвуковой поверхности может происходить перестройка структуры характеристических поверхностей, которая была подробно описана нами для случая гидродинамических течений. Особый интерес здесь представляет, безусловно, момент потери аналитичности, когда при медленном изменении параметров течения в районе нестандартной особой точки должна появиться ударная волна. Ниже мы на конкретном примере продемонстрируем, что подобный эффект, по-видимому, действительно имеет место для сильнозамагниченного ветра.

4.3.5. Поведение решения на больших расстояниях. Поведение решения уравнения Грэда–Шафранова в асимптотически далекой области ($r \gg r_{\rm f}$) уже много лет находится в центре внимания, поскольку с ним связаны проблемы замыкания тока и формирования струйных выбросов, наблюдающихся у самого широкого класса астрофизических объектов. Ниже мы еще раз вернемся к этому вопросу при подробном обсуждении точных решений для замагниченного ветра. Здесь же сформулируем несколько общих утверждений, касающихся коллимации и ускорения частиц.

Сразу отметим, что необходимо различать физическую и математическую бесконечность. Как мы увидим, во многих случаях коллимация магнитных силовых линий выражена чрезвычайно слабо, так что формально заметная коллимация имеет место экспоненциально далеко по сравнению с характерными масштабами задачи — радиусом светового цилиндра $R_{\rm L}$ или радиусом быстрой магнитозвуковой поверхности $r_{\rm f}$. Понятно, что в реальных условиях существенное изменение свойств течения наступает гораздо раньше за счет взаимодействия ветра со внешней средой, обладающей конечной плотностью вещества и конечным магнитным полем. Например, для характерных параметров пульсарного ветра ($B_{\varphi}(R_{\rm L}) \approx B_{\rm p}(R_{\rm L}) \sim 1$ Гс; $R_{\rm L} \sim 10^{10}$ см) и межзвездной среды ($B_{\rm ext} \sim 10^{-6}$ Гс) такое изменение должно иметь место по крайней мере на расстояниях, на которых тороидальное магнитное поле ветра сравнивается со внешним полем межзвездной среды. Соответствующий масштаб:

$$R_{\rm t} \sim R_{\rm L} \frac{B_{\rm L}}{B_{\rm ext}} \sim 10^{16} \text{ см}, \tag{4.222}$$

сравним с поперечным размером струйных выбросов из молодых пульсаров. Однако не исключено, что заметное искажение квазимонопольного ветра будет происходить и на гораздо меньших масштабах, когда со внешним магнитным полем сравняется полоидальная компонента магнитного поля ветра, т. е. уже на расстояниях

$$R_{\rm t}' \sim R_{\rm L} \left(\frac{B_{\rm L}}{B_{\rm ext}} \right)^{1/2} \sim 10^{13} \text{ см}, \tag{4.223}$$

что для характерных расстояний до радиопульсаров порядка 1 кпк соответствует пределу разрешающей способности современных телескопов. Таким образом, в реальных условиях нужно осторожно относиться к общим результатам, касающимся асимптотического поведения решения при $r \to \infty$.

Постараемся сформулировать некоторые общие свойства, которыми должно обладать замагниченное течение на больших расстояниях от центрального объекта. Понятно, что нас в первую очередь будут интересовать трансзвуковые течения, т. е. течения, являющиеся на больших расстояниях сверхзвуковыми. Поэтому асимптотическое условие может быть записано в виде

$$\varpi \gg r_{\mathrm{f}}. \tag{4.224}$$

Кроме того, мы, безусловно, будем предполагать, что решение можно продолжить до бесконечности. Для этого, как мы видели, продольный электрический ток должен быть достаточно велик.

Прежде всего, покажем, что для $\Gamma > 1$ на больших расстояниях можно пренебречь вкладом градиента давления, т. е. считать, что истекающая плазма является холодной. Этот вывод легко сделать, основываясь на уравнении Грэда–Шафранова или уравнении Бернулли. Действительно, анализируя, например, нерелятивистские выражения (4.93) и (4.104), мы видим, что как энтальпия $w = c_{\mathrm{s}}^2/(\Gamma - 1) \propto n^{\Gamma-1}$ в (4.93), так и температура $T = k(s)n^{\Gamma-1}$ в (4.104) уменьшаются по мере удаления от компактного источника, поскольку для любого расходящегося потока при $r \to \infty$ концентрация $n \to 0$. Поэтому по сравнению с полной энергией E и ее производной $\mathrm{d}E/\mathrm{d}\Psi$ вклад конечной температуры (энтальпии, энтропии) на больших расстояниях оказывается пренебрежимо мал.

Упражнения.

1. Покажите, что для $\Gamma > 1$ вкладом, связанным с конечной температурой, можно пренебречь и в релятивистском случае, причем как на больших расстояниях (т. е. при $r \gg r_{\mathrm{f}}$), так и вблизи горизонта черной дыры ($\alpha^2 \ll \alpha_{\mathrm{f}}^2$).
2. Покажите, что для цилиндрических струйных выбросов тепловые эффекты могут оказаться существенными.

Анализируя лидирующие члены в уравнении Грэда–Шафранова (4.71), можно показать [Heyvaerts, Norman, 1989; Боговалов, 1998; Okamoto, 1999], что на больших расстояниях это уравнение (которое, напомним, получается из условия равновесия магнитных поверхностей) представляет собой баланс объемной центрифугальной силы

$$\mathcal{F}_{\mathrm{c}} = \frac{nmc^2\gamma + S/c}{R_{\mathrm{c}}} \tag{4.225}$$

(где R_{c} — радиус магнитной силовой линии в полоидальной плоскости) и объемной электромагнитной силы

$$\mathcal{F}_{\mathrm{em}} = \rho_{\mathrm{e}}\mathbf{E} + \nabla\left(\frac{B_{\varphi}^2}{8\pi}\right). \tag{4.226}$$

В числителе выражения (4.225), помимо очевидного слагаемого, связанного с частицами, возникает и слагаемое, обусловленное потоком электромагнитной энергии (вектора Пойнтинга, $S \approx (c/4\pi)E_\theta B_\varphi$). Дело в том, что поток электромагнитной энергии, как и истекающее вещество, распространяется вдоль искривленных магнитных поверхностей. Следовательно, нужна дополнительная сила, постоянно разворачивающая вектор $\mathbf{S}$ вдоль траектории частиц. В нерелятивистском случае она обеспечивается силой Ампера, связанной с продольным электрическим током. В релятивистском же случае необходимо учитывать и силу $\rho_e\mathbf{E}$, связанную с электрическим полем.

В итоге в нерелятивистском случае уравнение баланса сил можно записать в виде [Okamoto, 1999]

$$\frac{\rho v_\parallel^2}{R_c} = \frac{1}{c} j_\parallel B_\varphi. \tag{4.227}$$

В релятивистском случае, воспользовавшись общим асимптотическим выражением (4.147), для слабозамагниченного истечения находим

$$\frac{\mu n u^2}{R_c} \sim \frac{1}{c\gamma^2} j_\parallel B_\varphi \tag{4.228}$$

(более точное выражение будет получено ниже). Для сильно же замагниченного течения, когда основная энергия переносится вектором Пойнтинга, снова воспользовавшись общим соотношением (4.147), имеем

$$\frac{|\mathbf{E}|B_\varphi}{4\pi R_c} \approx \frac{j_\parallel B_\varphi}{c\gamma^2}. \tag{4.229}$$

Поскольку на больших расстояниях $|\mathbf{E}| \approx B_\varphi$, а $(4\pi/c)j_\parallel = \partial B_\varphi/\partial\varpi \sim$ $\sim B_\varphi/\varpi$, соотношение (4.229) может быть переписано в компактной форме [Beskin, Zakamska, Sol, 2004]:

$$\gamma^2 \approx \frac{R_c}{\varpi}. \tag{4.230}$$

Соотношения (4.228)–(4.230) позволяют сделать ряд достаточно общих выводов.

1. Знак радиуса кривизны зависит от направления продольного тока $j_\parallel$. Поэтому если в магнитосфере течет объемный обратный ток, то вблизи оси следует ожидать коллимацию, а вблизи экватора — деколлимацию магнитных поверхностей [Okamoto, 1999].

2. В релятивистском случае ($\gamma \gg 1$) радиус кривизны магнитных поверхностей R_c оказывается гораздо больше текущего радиуса r. Следовательно, для ультрарелятивистского истечения коллимация (деколлимация) магнитных поверхностей должна быть сильно подавлена.

3. В нерелятивистском случае ($\gamma = 1$) радиус кривизны R_c сравним с радиусом r. Следовательно, уже в районе быстрой магнитозвуковой поверхности должна иметь место заметная коллимация (деколлимация) магнитных поверхностей.

Еще раз напомним, что эти выводы справедливы лишь для не слишком больших расстояний от компактного объекта (т. е. физической бесконечности), а также для области, лежащей вдали от оси вращения ($\theta \sim 1$).

Вопрос о поведении решения на истинной (математической) бесконечности требует отдельного рассмотрения. Дело в том, что на больших расстояниях правые части уравнений (4.227) и (4.228) спадают как r^{-3}, а числители в левых частях — как r^{-2}. В результате радиус кривизны магнитных поверхностей R_{c} должен увеличиваться как r. Этот вывод прямо следует и из соотношения (4.230), поскольку лоренц-фактор частиц ограничен сверху значением σ. Однако подобное поведение не может быть реализовано в математической бесконечности [Heyvaerts, Norman, 2003b], поэтому при $r \to \infty$ лидирующими оказываются лишь правые части уравнений (4.227) и (4.228). В частности, для

$$j_{\|} = 0. \tag{4.231}$$

Последнее означает, что на больших расстояниях практически весь истекающий продольный ток сосредоточен вблизи оси вращения.

Упражнение. Покажите, что на математической бесконечности невозможна деколлимация магнитных поверхностей [Heyvaerts, Norman, 1989].

С другой стороны, как видно из соотношения (4.230), для ультрарелятивистского случая радиус кривизны магнитных поверхностей R_{c} существенно превышает радиус r. Поэтому течение с хорошей точностью должно быть радиальным. Ниже будет показано, что сильное отличие от радиального течения (т. е. переход от физической к математической бесконечности) может иметь место лишь экспоненциально далеко от компактного объекта.

Тем не менее анализ релятивистских уравнений позволяет получить важную дополнительную информацию. Предполагая, что на математической бесконечности ($r \to \infty$)

1) в уравнениях Бернулли и Грэда–Шафранова можно пренебречь радиальными производными (что и означает отбрасывание левой части в соотношениях (4.227) и (4.228));

2) квадрат числа Маха пропорционален r^2, так что отношение $\mathcal{M}^2/r^2$ не зависит от r,

сводим задачу к одномерному случаю, в котором, как уже отмечалось, уравнение Грэда–Шафранова может быть проинтегрировано [Heyvaerts, Norman, 1989]. Действительно, для конических магнитных поверхностей $\Psi = \Psi(\theta)$ в асимптотически далекой области $r \to \infty$ уравнение Грэда–Шафранова (4.71) для $\mu = \mathrm{const}$ переписывается как

$$-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\frac{\Omega_{\mathrm{F}}^2\sin^2\theta + m^2(\theta)}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\theta}\right] + \left(\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\theta}\right)^2\Omega_{\mathrm{F}}\frac{\mathrm{d}\Omega_{\mathrm{F}}}{\mathrm{d}\Psi} +$$
$$+ 32\pi^4\frac{\partial}{\partial\Psi}\left(\frac{E^2}{\Omega_{\mathrm{F}}^2\sin^2\theta + m^2(\theta)}\right) - \frac{32\pi^4}{m^2(\theta)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Psi}(\mu^2\eta^2) = 0, \tag{4.232}$$

где величина $m^2(\theta) = \mathcal{M}^2/r^2$ не зависит от радиуса r; здесь $c = 1$. Напомним, что здесь производная $\partial/\partial\Psi$ действует лишь на интегралы движения. Домножая теперь уравнение (4.232) на $(\Omega_{\mathrm{F}}^2 \sin^2\theta + m^2(\theta))(\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}\theta)$ и воспользовавшись асимптотикой релятивистского уравнения Бернулли (см. (4.50)):

$$\frac{(\Omega_{\mathrm{F}}^2 \sin^2\theta + m^2(\theta))^2}{64\pi^4 r^4 \sin^2\theta}\left(\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = E^2 - \frac{\mu^2\eta^2}{m^4(\theta)}(\Omega_{\mathrm{F}}^2 \sin^2\theta + m^2(\theta))^2, \quad (4.233)$$

после элементарных, хотя и громоздких преобразований получаем [Heyvaerts, Norman, 1989]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{q^2\Omega_{\mathrm{F}}^2}{\mu^2\eta^2}\right) = 0, \quad (4.234)$$

где по-прежнему $q = \mathcal{M}^2/\Omega_{\mathrm{F}}^2\varpi^2$. В частности, при $\eta = \mathrm{const}$, $\Omega_{\mathrm{F}} = \mathrm{const}$ имеем просто

$$q = \mathrm{const}. \quad (4.235)$$

Сразу подчеркнем, что соотношение (4.234) имеет универсальный характер, т. е. справедливо как для релятивистского, так и для нерелятивисткого случаев. Действительно, воспользовавшись асимптотикой нерелятивистского выражения (4.90) для тока, $I \approx 2\pi c\eta_{\mathrm{n}}\Omega_{\mathrm{F}}\varpi^2/\mathcal{M}^2$, немедленно приходим к заключению о том, что на больших расстояниях выполненяется условие $I \approx \mathrm{const}$. Последнее и означает, что плотность продольного тока $j_{\parallel}$ должна исчезать на конических поверхностях. Иными словами, мы вновь возвращаемся к соотношению (4.231), полученному в пренебрежении центрифугальной силой ($R_{\mathrm{c}} \to \infty$).

Упражнение. Покажите, что в релятивистском случае условие (4.234) приводит к соотношению $I/\gamma \approx \mathrm{const}$, уточняющему выражение (4.228).

В результате с учетом соотношения (4.234) уравнение (4.232) может быть легко проинтегрировано. Например, при условии $\Omega_{\mathrm{F}} = \mathrm{const}$ и $\eta = \mathrm{const}$, т. е. при $q = \mathrm{const}$, его решение имеет вид

$$\Psi(r \to \infty, \theta) = \Psi_0\left[1 - \sqrt{1 + \frac{\gamma_{\mathrm{in}}}{\sigma}\frac{(1+\cos\theta)^p - (1-\cos\theta)^p}{(1+\cos\theta)^p + (1-\cos\theta)^p}}\right], \quad (4.236)$$

где показатель степени

$$p = \frac{\sqrt{1 + \gamma_{\mathrm{in}}/\sigma}}{1 + q}. \quad (4.237)$$

Здесь использовались следующие предположения:

а) угловой момент был выбран в виде

$$L(\Psi) = \frac{\mu\eta}{\Omega_{\mathrm{F}}}\sigma\left(2\frac{\Psi}{\Psi_0} - \frac{\Psi^2}{\Psi_0^2}\right), \quad (4.238)$$

что соответствует вакуумному решению Майкеля (см. (2.220));

б) интеграл Бернулли был выбран в виде

$$E(\Psi) = \mu\eta\gamma_{\text{in}} + \mu\eta\sigma\left(2\frac{\Psi}{\Psi_0} - \frac{\Psi^2}{\Psi_0^2}\right), \tag{4.239}$$

где первое слагаемое отвечает вкладу частиц, а второе — вкладу электромагнитного поля. При этом величина γ_{in} считалась постоянной (ниже мы обсудим эту форму записи интеграла Бернулли более подробно);

в) было использовано граничное условие $\Psi(\pi/2) = \Psi_0$.

Характерный ход потенциала $\Psi(\theta)$ показан на рис. 4.3.

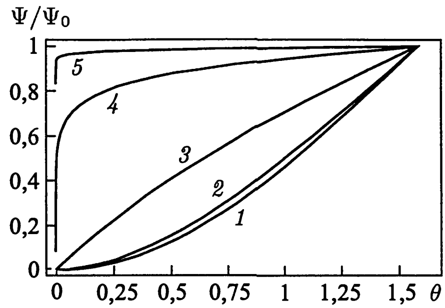


Рис. 4.3. Поведение потенциала (4.236) в асимптотически далекой области для $q = 0{,}01$ (*1*); $0{,}1$ (*2*); 1 (*3*); 10 (*4*); 100 (*5*)

Анализ точного решения (4.236) приводит к ряду важных заключений, подтверждающих сделанные ранее выводы.

1. При учете массы частиц ($\sigma < \infty$) невозможно удовлетворить граничному условию $\Psi(0) = 0$. Следовательно, вблизи оси вращения течение должно отличаться от радиального.

2. Если на больших расстояниях энергия переносится электромагнитным полем (т. е. $W_{\text{em}} \gg W_{\text{par}}$), так что $q \ll 1$, то течение должно оставаться практически радиальным: $\Psi \approx \Psi_0(1 - \cos\theta)$.

3. Если бы на больших расстояниях произошла практически полная передача энергии от электромагнитного поля к частицам ($q \gg 1$), то имела бы место сильная коллимация магнитных поверхностей к оси вращения.

Еще раз напомним, что решение (4.236) позволяет лишь проследить связь между структурой магнитного поля и эффективностью ускорения частиц. В действительности же величина q изначально нам неизвестна, и ее значение должно быть найдено вместе с решением полной задачи.

Упражнения.

1. Воспользовавшись определением (4.351) для нерелятивистского интеграла Бернулли:

$$E_{\text{n}} = \frac{v_{\text{in}}^2}{2} + i_0\sigma c^2\left(2\frac{\Psi}{\Psi_0} - \frac{\Psi^2}{\Psi_0^2}\right), \tag{4.240}$$

и соотношением (4.358), необходимым для нахождения величины $q = \mathcal{M}^2/\Omega_{\text{F}}^2\varpi^2$, покажите, что в нерелятивистском случае при $\Omega_{\text{F}} = \text{const}$, $\eta = \text{const}$ (т. е. при $q = \text{const}$) функция магнитного потока в асимптотически далекой области имеет вид

$$\Psi = \Psi_0\left[1 - A_1 \sin\left(A_2 \ln\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right)\right], \tag{4.241}$$

где

$$A_1 = 1 + \frac{v_{\rm in}^2/c^2 - 2q^{-1}}{2i_0\sigma}; \tag{4.242}$$

$$A_2 = \sqrt{\frac{i_0}{2\sigma q^2}}. \tag{4.243}$$

2. Покажите, что для сверхзвукового течения ($\mathcal{M}_0^2 > 1$) всегда выполнены условия $A_1 > 1$ и $A_2 \ll 1$, так что область продольного тока и в нерелятивистском случае заключена в узком интервале $\theta^2 < e^{1/A_2}$ вблизи оси вращения.

4.3.6. Поведение решения вблизи горизонта событий. Рассмотрим вопрос о поведении решения уравнения Грэда–Шафранова вблизи горизонта вращающейся черной дыры. Как было показано в гидродинамическом случае, для физически разумных трансзвуковых течений радиальная скорость вещества на горизонте не должна быть равна нулю. Следовательно, концентрация n на горизонте (напомним, что она определяется в сопутствующей системе координат) является конечной, поэтому число Маха отлично от нуля: $\mathcal{M}^2(r_{\rm g}) \neq 0$. В результате знаменатель $D(r_{\rm g}, \theta)$, как легко проверить, можно переписать в виде ($c = 1$)

$$D(r_{\rm g}, \theta) = -1 + \frac{\alpha^2}{\mathcal{M}^2 B_{\rm p}^2}(B_{\hat\varphi}^2 - E_{\hat\theta}^2). \tag{4.244}$$

Здесь мы отбросили все слагаемые, заведомо стремящиеся к нулю при $\alpha^2 \to 0$. С другой стороны, если в алгебраическом уравнении Бернулли (4.50) положить α^2 равным нулю, то при условии $\mathcal{M}^2(r_{\rm g}) \neq 0$ на горизонте должно выполняться соотношение

$$\frac{(E - \Omega_{\rm H}L)^2}{\left[(\Omega_{\rm F} - \Omega_{\rm H})^2\varpi^2 + \mathcal{M}^2\right]^2} = \frac{1}{64\pi^4\rho^2\varpi^2}\left(\frac{{\rm d}\Psi}{{\rm d}\theta}\right)^2. \tag{4.245}$$

Благодаря определениям (4.32) и (4.33) оно может быть переписано в виде $|B_{\hat\varphi}(r_{\rm g})| = |E_{\hat\theta}(r_{\rm g})|$. Этот результат находится в полном соответствии с основным положением «мембранной парадигмы», согласно которой опорный наблюдатель должен зарегистрировать лишь φ-компоненту магнитного поля и θ-компоненту электрического поля (расходящиеся как $1/\alpha$) [Торн, Прайс, Макдональд, 1988]. В итоге второе слагаемое в выражении (4.244) должно стремиться к нулю при $\alpha^2 \to 0$, поэтому на горизонте оказывается справедливым условие

$$D(r_{\rm g}, \theta) = -1. \tag{4.246}$$

Последнее означает, что для случая $\mathcal{M}^2(r_{\rm g}) \neq 0$ уравнение (4.71) вблизи горизонта черной дыры является гиперболическим. Поэтому, как и следовало ожидать, полное уравнение Грэда–Шафранова (4.71) не требует граничного условия на горизонте. Действительно, никакой сигнал по определению не может распространяться от горизонта во внешние области магнитосферы [Punsly, Coroniti, 1990b].

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Покажите, что вблизи горизонта $D = -1 + \alpha^2\mathcal{K}$, где

$$\mathcal{K} = \frac{(E-\Omega_{\rm F}L)^2}{(E-\Omega_{\rm H}L)^2}\frac{A^2}{\mathcal{M}^6} + \frac{\mu^2\eta^2A^2}{(E-\Omega_{\rm H}L)^2\mathcal{M}^6(1-c_{\rm s}^2)}\left[\varpi^2(\Omega_{\rm F}-\Omega_{\rm H})^2 + \mathcal{M}^2c_{\rm s}^2\right] > 0. \tag{4.247}$$

Таким образом, вблизи горизонта $D > -1$, что как раз и соответствует гиперболической области уравнения Грэда–Шафранова.

2. Покажите, что оценка положения внутренней быстрой магнитозвуковой поверхности $\alpha_{\rm f}^2 \approx 1/\mathcal{K}$, получаемая из условия $D = 0$, совпадает с выражением (4.187).

Таким образом, в общем магнитогидродинамическом случае, т. е. при учете конечной массы частиц, над горизонтом черной дыры находится гиперболическая область общего уравнения (4.71), благодаря чему это уравнение не требует здесь никаких дополнительных граничных условий. В частности, согласно (4.246) даже в пределе $\mathcal{M}^2 \to 0$ на горизонте должно быть выполнено равенство $D = -1$. С другой стороны, как мы видели, бессиловое уравнение (3.49) остается эллиптическим вплоть до самого горизонта. Поэтому необходимо остановиться на вопросе о предельном переходе к случаю бессиловой магнитосферы более подробно [Бескин, 1997].

Рассмотрим предел условий регулярности (4.62), (4.66) на быстрой магнитозвуковой поверхности при $\mathcal{M}^2 \to 0$. Как видно из соотношения (4.61), само положение этой поверхности при $\mathcal{M}^2 \to 0$ стремится к горизонту черной дыры. С другой стороны, вся сингулярность в величине D содержится в факторе $1/\mathcal{M}^2$. Величины же $N_a' = N_a/A$ в бессиловом пределе остаются конечными на горизонте. Поэтому в качестве предела условий регулярности (4.66) естественно рассмотреть значения N_a' при $\mathcal{M}^2 = 0$ и $r = r_{\rm g}$.

Условие $N_\theta'(r_{\rm g}) = 0$ может быть переписано следующим образом:

$$\frac{\rm d}{{\rm d}\theta}\left[64\pi^4\frac{(E-\Omega_{\rm H}L)^2}{(\Omega_{\rm F}-\Omega_{\rm H})^4\varpi^2} - \frac{1}{\rho^2(r_{\rm g})}\left(\frac{{\rm d}\Psi}{{\rm d}\theta}\right)^2\right] = 0. \tag{4.248}$$

Как легко видеть, оно совпадает с «граничным условием на горизонте» (4.245). Нетрудно проверить, что к условию (4.245) приводит и равенство $\mathcal{M}^2D(r_{\rm g}) = 0$. Наконец, условие $N_r'(r_{\rm g}) = 0$ после элементарных, хотя и громоздких преобразований может быть сведено к виду

$$r_{\rm g}\frac{\partial}{\partial r}\left[(\nabla\Psi)^2 - \frac{16\pi^2I^2}{(\Omega_{\rm F}-\omega)^2\varpi^2}\right]_{r_{\rm g}} + \frac{2\xi + (\Omega_{\rm H}-\Omega_{\rm F})\varpi[\xi^2 + 1/(\alpha\gamma)^2]}{(\Omega_{\rm H}-\Omega_{\rm F})\varpi\rho^2}\left(\frac{{\rm d}\Psi}{{\rm d}\theta}\right)^2 = 0, \tag{4.249}$$

где

$$\xi = \left(\frac{u_{\hat\varphi}}{\alpha\gamma}\right)_{r=r_{\rm g}}, \tag{4.250}$$

а все величины берутся на горизонте черной дыры.

Помимо «бессиловых» величин $I(\Psi)$ и $\Omega_{\rm F}(\Psi)$, условие (4.249) содержит параметры плазмы γ и $u_{\hat{\varphi}}$, причем для релятивистской плазмы ($\alpha\gamma \gg 1$) — лишь их отношение ξ (см. (4.250)). При этом, поскольку $(\partial/\partial r)(\nabla\Psi)^2 \sim \Psi_0^2/r_{\rm g}^3$, имеем

$$u_{\hat{\varphi}}(r_{\rm g}) \sim \alpha\gamma\Omega_{\rm H}\varpi_g, \tag{4.251}$$

что полностью согласуется с общими уравнениями (4.45), (4.46).

Здесь мы подошли к одному из ключевых мест, позволяющих пролить свет на различие между бессиловым приближением и полной магнитогидродинамической версией уравнения Грэда–Шафранова. Действительно, как легко видеть, уравнение Бернулли (4.245) при $\alpha^2 = 0$ в бессиловом пределе $\mathcal{M}^2 = 0$, $E = \Omega_{\rm F} L$ совпадает с «граничным условием на горизонте» (3.51). В итоге появившееся в полной версии дополнительное соотношение энергии автоматически обеспечивает регулярность решения при $\alpha^2 \to 0$ (конечно же, при условии, что течение не ограничено световой поверхностью, расположенной за пределами горизонта событий). Для доказательства удобно воспользоваться уравнением (4.69). В результате в пределе $\alpha^2 \to 0$ уравнение Грэда–Шафранова принимает вид

$$\frac{1}{\alpha}\nabla_k\left[\frac{1}{\varpi^2\alpha}A\nabla^k\Psi\right] + \frac{\Omega_{\rm F}-\Omega_{\rm H}}{\alpha^2}(\nabla\Psi)^2\frac{{\rm d}\Omega_{\rm F}}{{\rm d}\Psi} - \frac{32\pi^4}{\alpha^2}\frac{\partial}{\partial\Psi}\left[\frac{(E-\Omega_{\rm H}L)^2}{A}\right] = 0. \tag{4.252}$$

Предполагая теперь, что решение регулярно на горизонте, т. е. отбрасывая слагаемые вида $\alpha\partial\Psi/\partial r$ и $\alpha^2\partial^2\Psi/\partial r^2$, и умножая (4.252) на $2A({\rm d}\Psi/{\rm d}\theta)/\sin^2\theta$, получаем

$$2A\varpi^2(\Omega_{\rm F}-\Omega_{\rm H})\frac{{\rm d}\Omega_{\rm F}}{{\rm d}\theta}\left[\frac{1}{\varpi^2\rho^2}\left(\frac{{\rm d}\Psi}{{\rm d}\theta}\right)^2 - \frac{64\pi^4(E-\Omega_{\rm H}L)^2}{A^2}\right] + {}$$
$$+ \frac{\rm d}{{\rm d}\theta}\left[\frac{A^2}{\varpi^2\rho^2}\left(\frac{{\rm d}\Psi}{{\rm d}\theta}\right)^2 - 64\pi^4(E-\Omega_{\rm H}L)^2\right] = 0. \tag{4.253}$$

Ясно, что соотношение (4.253) будет автоматически выполнено, если справедливо условие (4.245). С другой стороны, если будет выполнено «условие на горизонте», вытекающее из уравнения Бернулли, то и сингулярные слагаемые $\alpha\partial\Psi/\partial r$ и $\alpha^2\partial^2\Psi/\partial r^2$ в уравнении Грэда–Шафранова при $\alpha^2 \to 0$ окажутся равными нулю. Последнее и означает, что решение регулярно на горизонте событий.

Теперь становится понятным появление в бессиловом приближении дополнительного «граничного условия на горизонте». Оно является рудиментом критического условия на быстрой магнитозвуковой поверхности при ее стремлении к горизонту черной дыры. Следовательно, это условие фактически формулируется на поверхности, причинно связанной с внешним пространством. Таким образом, бессиловое приближение в действительности не имеет внутреннего противоречия, обусловленного необходимостью привлечения дополнительного граничного условия в причинно не связанной области.

В частности, рудиментом критического условия на быстрой магнитозвуковой поверхности является и условие регулярности (3.56) вблизи полюсов черной дыры. Для доказательства вспомним, что для сильно замагниченного течения ($V_{\rm A} \gg c_{\rm s}$) вблизи оси вращения (где $B_{\hat\varphi} \to 0$) быстрая магнитозвуковая и альфвеновская поверхности совпадают друг с другом. Важно, что для конечной массы частиц эти поверхности пересекают ось вращения при $\alpha^2 = \mathcal{M}^2 > 0$, т. е. над горизонтом черной дыры (рис. 4.4). В результате при конечной массе частиц критическое условие на быстрой магнитозвуковой поверхности вблизи оси вращения может быть получено из анализа числителя в алгебраическом соотношении (4.46) (в общем случае, как уже подчеркивалось, особенности в алгебраических соотношениях (4.44)–(4.46) не приводят к появлению дополнительных ограничений на параметры течения). Поскольку же вблизи оси энергия E задается лишь вкладом частиц, из (4.46) получаем

$$L \approx \frac{\omega(r_{\rm f},0) - \Omega_{\rm F}(0)}{\mathcal{M}^2(r_{\rm f},0)}\,(r_{\rm f}^2 + a^2)(\alpha\gamma)\mu|\eta|\theta^2. \tag{4.254}$$

Воспользовавшись теперь определениями $\alpha n u_{\rm p} = \eta B_{\rm p}$ и $\mathcal{M}^2 = 4\pi\mu\eta^2/n$, а также соотношением $\Psi \approx \pi B_{\rm p}(r_{\rm f}^2 + a^2)\theta^2$, справедливым вблизи оси вращения, окончательно находим

$$L \approx \frac{1}{4\pi^2}\frac{\gamma}{u_{\rm p}}[\omega(r_{\rm f},0) - \Omega_{\rm F}(0)]\,\Psi. \tag{4.255}$$

В бессиловом пределе ($r_{\rm f} \to r_{\rm g}$; $u_{\rm p} \to \gamma$) условие (4.255) переходит, естественно, в соотношение (3.56), обеспечивающее регулярность бессилового решения у горизонта вблизи оси вращения.

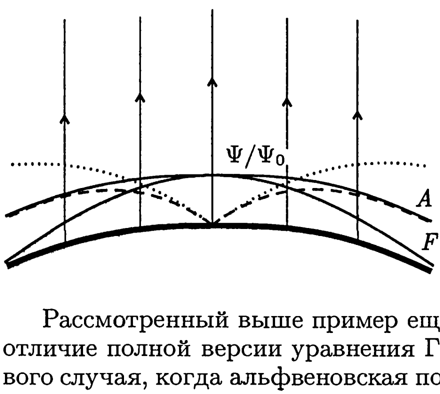


Рис. 4.4. Положение альфвеновской (A) и быстрой магнитозвуковой (F) поверхностей вблизи полюсов черной дыры. Штриховой линией показана альфвеновская поверхность в бессиловом приближении, а пунктиром — поверхность эргосферы

Рассмотренный выше пример еще раз подчеркивает существенное отличие полной версии уравнения Грэда–Шафранова от его бессилового случая, когда альфвеновская поверхность $\alpha^2 = (\omega - \Omega_{\rm F})^2\varpi^2$ пересекает горизонт событий при $\theta = 0$, что и приводит к возникновению нетривиальных решений $\Psi(\theta) \propto \theta^q$ с $q \neq 2$. При конечной же массе частиц «условие на горизонте» (4.245) при $\theta \to 0$ имеет совсем другое поведение:

$$\frac{E(0)}{\mathcal{M}^2}(r_{\rm g}^2 + a^2)\theta = \frac{1}{8\pi^2}\frac{{\rm d}\Psi}{{\rm d}\theta}. \tag{4.256}$$

Поскольку вблизи оси, где $u_{\hat{\varphi}} \to 0$ и $I \to 0$, энергия $E(0)$ определяется лишь вкладом частиц, получаем условие

$$2\pi B_{\rm p}(r_{\rm g}^2 + a^2)\,\theta = \frac{{\rm d}\Psi}{{\rm d}\theta}, \tag{4.257}$$

которое тождественно выполнено благодаря определению (3.13) (при выводе соотношения (4.257) мы вновь воспользовались определениями $\alpha n u_{\rm p} = \eta B_{\rm p}$ и $\mathcal{M}^2$, а также соотношением $\Psi \approx \pi B_{\rm p}(r^2 + a^2)\theta^2$, справедливым вблизи оси вращения). Этот вывод еще раз подтверждает общее заключение: при конечной массе частиц уравнение Грэда–Шафранова не имеет особенности на горизонте.

Здесь можно отметить еще одно небезынтересное обстоятельство. Как видно из рис. 4.4, при учете ненулевой массы частиц альфвеновская поверхность вблизи оси вращения находится вне пределов эргосферы, которая, согласно определению (1.210), пересекает горизонт при $\theta = 0$. Тем самым формально нарушаются условия теоремы, сформулированной в предыдущей главе и утверждающей, что выделение энергии вращающейся черной дырой возможно лишь в случае, когда альфвеновская поверхность находится в пределах эргосферы. На самом же деле теорема сформулирована для непрерывных течений, а ее условия нарушаются в области генерации плазмы. В результате по разные стороны от области генерации благодаря разному знаку величины η поток энергии частиц будет положительным как для истекающей плазмы, так и для вещества, падающего на черную дыру. В частности, вблизи оси вращения, где весь поток энергии связан только с частицами, положительный поток, уходящий от черной дыры, существует вместе с положительным же потоком, распространяющимся по направлению к черной дыре. Источником энергии на указанных силовых линиях, приводящим как к увеличению энергии черной дыры, так и к передаче энергии на бесконечность, является источник фотонов, создающий плазму.

Наконец, на отмеченное выше свойство, состоящее в том, что как уравнение Грэда–Шафранова, так и уравнение Бернулли приводят к одному и тому же «условию на горизонте», можно посмотреть с еще одной стороны. Как мы видели, «условие на горизонте» получается из уравнения Грэда–Шафранова (4.71) при отбрасывании всех членов, не имеющих вблизи горизонта расходимости α^{-2}. Однако поскольку та же асимптотика получается и из уравнения Бернулли (без которого уравнение Грэда–Шафранова не является замкнутым), все слагаемые порядка α^{-2} могут быть аналитически устранены. В результате в самом общем виде уравнение Грэда–Шафранова вблизи горизонта имеет вид

$$\frac{\Sigma^2}{\rho^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + \frac{D+1}{\alpha^2}\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2} + \mathcal{G} = 0, \tag{4.258}$$

где величина $\mathcal{G}$ не содержит вторых производных Ψ. Поскольку же всегда $D+1 \propto \alpha^2$, полное уравнение (4.71) (как и рассмотренные выше гидродинамические уравнения) в переменных r, θ является регулярным, т. е. не содержит в пределе $\alpha^2 \to 0$ никаких расходящихся коэффициентов перед старшими производными. Отсюда следует, что структуры решений уравнения Грэда–Шафранова вблизи горизонта и на больших расстояниях существенно отличаются друг от друга. Действительно, несмотря на то что при $\sigma \to \infty$ быстрая магнитозвуковая поверхность стремится к бесконечности, для любой конечной величины σ за ее пределами всегда имеется, образно говоря, бесконечно много пространства, где возможна коллимация магнитных силовых линий. Поэтому угловые зависимости $\Psi(\theta)$ на бесконечности и в районе звуковой поверхности могут значительно отличаться друг от друга. Вблизи же черной дыры никаких малых параметров перед старшими производными не возникает; в результате при стремлении звуковой поверхности к горизонту событий между этими поверхностями существенная перестройка структуры магнитного поля оказывается невозможной. Именно по этой причине предел критического условия на быстрой магнитозвуковой поверхности при $r_\mathrm{f} \to r_\mathrm{g}$ и «условие на горизонте» эквивалентны друг другу.

4.3.7. Анализ алгебраических соотношений. Как уже неоднократно подчеркивалось, замечательное свойство метода уравнения Грэда–Шафранова состоит в том, что при заданной полоидальной структуре течения и при заданных интегралах движения все остальные характеристики (энергию частиц, тороидальное магнитное поле, термодинамические функции) можно найти из анализа системы неявных алгебраических уравнений. Именно благодаря простоте данному направлению было посвящено чрезвычайно большое количество работ по различной тематике, начиная с нерелятивистского звездного (солнечного) ветра [Weber, Davis, 1967; Cao, Spruit, 1994; Paatz, Camenzind, 1996; Breitmoser, Camenzind, 2000] и релятивистского пульсарного ветра [Okamoto, 1978; Kennel, Fujimura, Okamoto, 1983] и кончая чисто гидродинамической [Abramowicz, Zurek, 1981; Abramowicz, Kato, 1989; Chakrabarti, 1990] и магнитогидродинамической [Takahashi et al., 1990; Daigne, Drenkhahn, 2002] аккрецией на черные дыры. В их подавляющем большинстве структура полоидального магнитного поля (гидродинамического течения) предполагалась радиальной, хотя рассматривались и некоторые другие случаи. Ниже мы на ряде примеров постараемся кратко сформулировать основные результаты, полученные в рамках указанного подхода.

1. *Гидродинамическая аккреция на черную дыру* [Abramowicz, Zurek, 1981; Chakrabarti, 1990]. В качестве первого примера рассмотрим случай гидродинамической аккреции вещества с ненулевым угловым моментом. Вновь будем считать угловой момент настолько малым, что он не способен препятствовать аккреции вещества на черную дыру. Соответствующее решение можно получить из анализа гид-

родинамического уравнения Бернулли (1.250). Как уже отмечалось, в подавляющем большинстве работ анализировалось движение нерелятивистских частиц в модельном потенциале Пачинского–Вииты: $\varphi_{\rm g} = -GM/(r - r_{\rm g})$ (см. (1.7)). При этом обычно предполагалось радиальное движение аккрецирующего вещества: $\Phi = \Phi(\theta)$. Поскольку нас в данном случае будет интересовать лишь качественное поведение течения, ограничимся обсуждением именно таких модельных решений, тем более что они с хорошей точностью воспроизводят все основные характеристики аккреции вещества с угловым моментом на черную дыру.

Как видно из рис. 4.5, появление ненулевого углового момента импульса у аккрецирующего вещества существенно меняет всю топологию фазового портрета. Вместо одной седловой точки, показанной на рис. 1.1, для достаточно больших моментов импульса фазовый портрет может содержать две седловые точки, а также один центр. При этом аналитическое решение, рассмотренное в гл. 1, оказывается эквивалентным верхней кривой, проходящей через правую седловую точку.

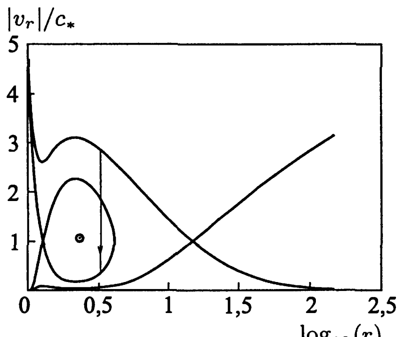


Рис. 4.5. Структура гидродинамической аккреции вещества с ненулевым угловым моментом на черную дыру [Das, Pendharkar, Mitra, 2003]

На первый взгляд, верхняя кривая и должна соответствовать истинному решению задачи. Однако, как показал анализ [Kovalenko, Eremin, 1998; Das, Pendharkar, Mitra, 2003], такое решение не всегда оказывается устойчивым. Поэтому даже в идеальном (бездиссипативном) случае течение при определенных условиях переходит на нижнюю кривую. Понятно, что подобный переход может иметь место лишь при наличии ударной волны. В результате энтропия $s(\Phi)$ аккрецирующего вещества на нижней кривой отличается от энтропии вещества на больших растояниях. Этот пример еще раз демонстрирует, насколько важна проверка полученных решений на устойчивость (которая, напомним, может быть последовательно осуществлена только вне рамок рассматриваемого здесь подхода).

2. *Нерелятивистский звездный (солнечный) ветер* [Weber, Davis, 1967]. Работа Вебера и Дэвиса [Weber, Davis, 1967] явилась первой, в которой алгебраическое уравнение Бернулли было подробно проанализировано для конкретной задачи истечения сильнозамагниченного звездного ветра. При этом рассматривалась лишь экваториальная область, что соответствовало предположению о радиальности течения. Как показано на рис. 4.6, при движении от поверхности звезды до

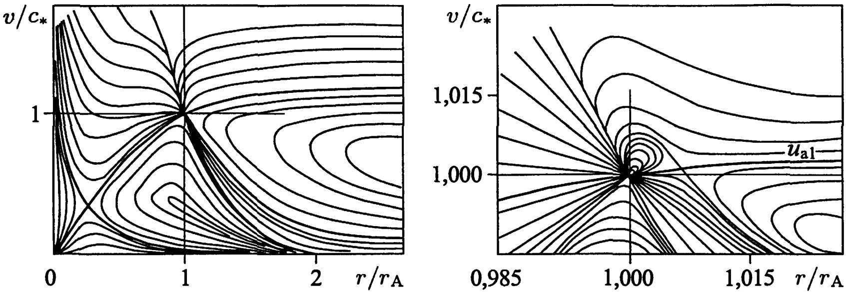


Рис. 4.6. Структура нерелятивистского замагниченного ветра в экваториальной плоскости [Weber, Davis, 1967]

бесконечности течение последовательно пересекает медленную, альфвеновскую и быструю поверхность. Хорошо видно, что быстрая и медленная магнитозвуковые поверхности являются X-точками, а альфвеновская, как уже специально подчеркивалось, соответствует особенности более высокого порядка.

3. *Истечение холодной релятивистской плазмы из магнитосферы радиопульсара* [Okamoto, 1978]. Случай истечения холодной релятивистской плазмы соответствует задаче об ускорении частиц в пульсарном ветре. Как показано на рис. 4.7, в предположении о монопольном полоидальном поле (которое и было рассмотрено в [Okamoto, 1978]) холодная плазма действительно достигает быстрой магнитозвуковой поверхности лишь на бесконечности. Здесь также хорошо видно, что нефизического решения (верхняя кривая) на малых расстояниях от нейтронной звезды не существует, а альфвеновская поверхность находится в пределах светового цилиндра.

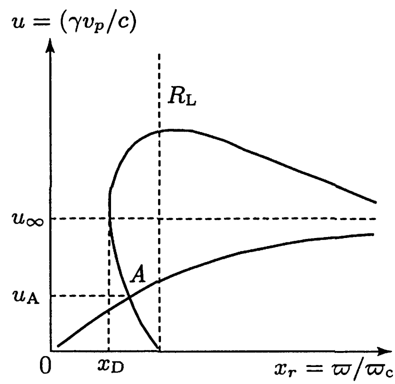


Рис. 4.7. Структура холодного релятивистского ветра [Okamoto, 1978]

4. *Магнитогидродинамическая аккреция на черную дыру* [Takahashi et al., 1990]. Случай сильнозамагниченного радиального течения холодной ($T = 0$) плазмы впервые рассмотрен в работе [Takahashi et al., 1990] (рис. 4.8). Здесь прежде всего следует обратить внимание на невозможность единого течения из бесконечности к горизонту черной дыры. Как уже подчеркивалось, плазма может пересекать внешнюю альфвеновскую поверхность лишь с положительной радиальной скоростью, а внутреннюю — лишь с отрицательной. Именно поэтому и возникает необходимость генера-

ции плазмы в магнитосфере черной дыры. Сама же альфвеновская поверхность не накладывает никаких ограничений на параметры течения, поскольку через нее проходят все траектории с положительной энергией ($E > 0$). Далее, на рис. 4.8 хорошо видно, что, как и в гидродинамическом случае, помимо физически выделенной трансзвуковой аккреции, имеется бесконечно много нефизических дозвуковых течений с нулевой радиальной скоростью на горизонте событий. Позже в работе [Takahashi, 2002] был также рассмотрен и случай ненулевой температуры.

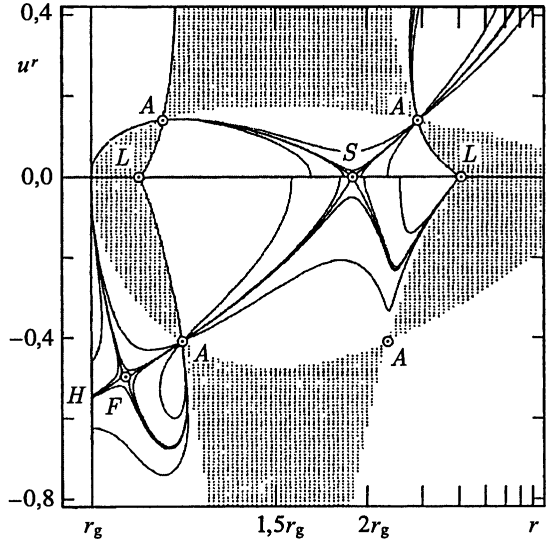


Рис. 4.8. Структура замагниченной аккреции холодного газа на черную дыру вблизи экваториальной плоскости [Takahashi et al., 1990]. Заштрихованная область соответствует нефизическим решениям с отрицательной энергией. Эффекты ОТО приводят к появлению второго семейства особых поверхностей для областей, в которых скорость течения направлена к горизонту черной дыры

Таким образом, анализ алгебраических уравнений действительно дает возможность определить основные характеристики осесимметричных стационарных течений. Вместе с тем необходимо еще раз подчеркнуть, что он не всегда позволяет ответить на все вопросы, а в некоторых случаях может привести и к неверным результатам.

Как уже отмечалось, алгебраическое уравнение Бернулли не имеет особенности на альфвеновской поверхности, тогда как для уравнения Грэда–Шафранова альфвеновская поверхность является сингулярной. Обычно критическое условие на альфвеновской поверхности используется в качестве дополнительного граничного условия на функцию $\Psi(r, \theta)$ магнитного потока.

Неудачный выбор полоидального магнитного поля может существенно изменить ключевые результаты, касающиеся структуры течения. Например, выбор монопольного полоидального поля приводит к неверному выводу о том, что для холодной плазмы быстрая магнитозвуковая поверхность должна находиться на бесконечности.

4.4. Точные решения

Перейдем к обсуждению известных точных аналитических решений, описывающих течение замагниченной плазмы в окрестности компактных астрофизических объектов. Еще раз подчеркнем, что нашей задачей является не построение работоспособных моделей, а выяснение некоторых общих свойств течений, которые могут быть получены с помощью анализа точных аналитических решений.

4.4.1. Цилиндрические струйные выбросы — бессиловое приближение. Вопрос о механизме формирования струйных выбросов является ключевым при исследовании строения магнитосферы компактных астрофизических объектов. Действительно, струйные выбросы наблюдаются у большинства компактных источников, начиная с активных галактических ядер, квазаров и радиогалактик и кончая аккрецирующими нейтронными звездами, черными дырами солнечных масс и молодыми звездными объектами. Более того, как уже отмечалось, в последнее время струйные выбросы были обнаружены и у молодых радиопульсаров. Столь широкий класс объектов, обладающих струйными выбросами, показывает, что механизм их образования достаточно универсален. Во всяком случае, он не должен зависеть от того, является течение релятивистским или нет.

В большинстве работ, посвященных магнитогидродинамической модели подобных объектов [Blandford, Payne, 1982; Heyvaerts, Norman, 1989; Pelletier, Pudritz, 1992; Sulkanen, Lovelace, 1990; Li, Chiueh, Begelman, 1992; Sauty, Tsinganos, 1994], формирование струйных выбросов связывалось с притяжением продольных токов, текущих в магнитосфере, а основное внимание уделялось собственной коллимации в том смысле, что влияние внешней среды предполагалось несущественным. Однако, как будет показано ниже, такая ситуация возможна лишь при ненулевом полном токе I, текущем в пределах струйного выброса [Nitta, 1997], так что встает вопрос о его замыкании во внешних частях магнитосферы. С другой стороны, как мы увидим, величина продольного тока должна быть ограничена условием регулярности на быстрой магнитозвуковой поверхности, что далеко не всегда приводит к достаточно большим продольным токам, которые необходимы для коллимации.

Вместе с тем совершенно очевидно, что вопрос о коллимации нельзя решать в отрыве от внешних условий (см., например, [Appl, Camenzind, 1992, 1993]). В частности, это ясно уже в случае магнитосферы компактного объекта с монопольным магнитным полем, поскольку при любом сколь угодно малом внешнем регулярном магнитном поле монопольное решение (при котором магнитное поле спадает как r^{-2}) не может быть продолжено до бесконечности. Более того, как хорошо видно на примере движущихся космических тел, таких как спутники Юпитера [Железняков, 1977] или искусственные спутники Земли [Альперт, Гуревич, Питаевский, 1964; Гуревич, Крылов, Федоров, 1975], а также радиопульсаров [Tsygan, 1997], внешнее магнитное поле может служить эффективным передаточным звеном, порой определяющим общие энергетические потери системы.

Безусловно, вопрос о существовании внешнего регулярного магнитного поля в окрестности компактных объектов является в значительной степени дискуссионным. Как известно, в нашей Галактике регулярное магнитное поле, т. е. поле, постоянное на масштабах, сравнимых с размерами Галактики, составляет

$$B_{\text{ext}} \sim 10^{-6}\ \text{Гс} \tag{4.259}$$

и практически совпадает с хаотической компонентой магнитного поля, меняющейся уже на масштабах нескольких парсек [Марочник, Сучков, 1984]. Однако если предположить, что коллимация действительно обусловлена просто наличием внешнего магнитного поля, становится возможным оценить поперечный размер струйных выбросов r_{j}. Действительно, считая, что полоидальное магнитное поле в джете близко к внешнему магнитному полю (4.259), из условия сохранения магнитного потока получаем

$$r_{\text{j}} \sim R\left(\frac{B_{\text{in}}}{B_{\text{ext}}}\right)^{1/2}, \tag{4.260}$$

где R и B_{in} — радиус и магнитное поле компактного объекта соответственно. Так, для активных галактических ядер ($B_{\text{in}} \sim 10^4$ Гс; $R \sim 10^{13}$ см) находим

$$r_{\text{j}} \sim 1\ \text{пк}, \tag{4.261}$$

что в точности соответствует наблюдаемым поперечным размерам струйных выбросов [Бегельман, Блендфорд, Рис, 1987]. Для молодых же звездных объектов ($B_{\text{in}} \sim 10^2$ Гс; $R \sim 10^{10}$ см) [Lada, 1985] имеем $r_{\text{j}} \sim 10^{16}$ см, что также соответствует наблюдениям. Можно ожидать, что подобная картина сохранится и в случае внешней среды с давлением $P \sim B^2/8\pi$. Поэтому вопрос о внутренней структуре одномерного струйного выброса, погруженного во внешнее однородное магнитное поле, тоже следует включить в наше рассмотрение.

Итак, рассмотрим одномерный релятивистский цилиндрический струйный выброс, в котором как полоидальное магнитное поле, так и полоидальная скорость вещества направлены по оси z. Иными словами, здесь мы не будем обсуждать саму проблему коллимации, а остановимся лишь на вопросе о внутренней структуре реально наблюдаемых одномерных струйных выбросов. В этом случае полоидальное магнитное поле должно выглядеть как

$$B_z(\varpi) = \frac{1}{2\pi\varpi}\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\varpi}, \tag{4.262}$$

где функция магнитного потока Ψ зависит теперь только от одной координаты — ϖ. Соответственно, тороидальную компоненту магнитного поля и электрическое поле удобно записать в виде

$$B_\varphi(\varpi) = -\frac{2I}{\varpi c}; \tag{4.263}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\Omega_\mathrm{F}}{2\pi c}\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\varpi}\mathbf{e}_\varpi, \tag{4.264}$$

где $I(\varpi_0)$ — полный ток в пределах $\varpi < \varpi_0$.

Сразу отметим несколько особенностей, которые будут использованы при исследовании структуры релятивистских струйных выбросов, характерных для активных галактических ядер и радиопульсаров. Прежде всего, для активных ядер и пульсаров поперечный размер джетов r_j оказывается значительно больше радиуса светового цилиндра $R_\mathrm{L} = c/\Omega$. Действительно, как видно из соотношения (3.67), эффективность центральной машины может быть высока лишь для достаточно большого параметра вращения, $a/M \sim \Omega_\mathrm{F} r_\mathrm{g}/c$. Например, радиус светового цилиндра для силовых линий, проходящих через горизонт черной дыры (не говоря уже о силовых линиях, проходящих через внутренние области аккреционного диска), должен быть сравним с радиусом черной дыры. Последнее означает, что при исследовании внутренней структуры джетов соответствующие уравнения нужно выписывать в полной релятивистской форме. С другой стороны, вдали от компактного объекта в них можно пренебречь гравитационными силами. Наконец, ниже мы для простоты рассмотрим случай холодной плазмы ($\mu = \mathrm{const}$), что, как уже было показано, справедливо на больших расстояниях от компактных объектов.

Прежде всего, обсудим структуру релятивистских струйных выбросов в бессиловом приближении. Как уже подчеркивалось, замечательное свойство уравнения Грэда–Шафранова состоит в том, что в одномерном случае оно может быть проинтегрировано. Например, для цилиндрического решения в плоском пространстве, в котором все величины зависят лишь от координаты ϖ, решение бессилового уравнения (2.96) принимает вид [Istomin, Pariev, 1994]

$$\Omega_\mathrm{F}^2(\Psi)\varpi^4 B_z^2 c^{-2} = \varpi^2 B_\varphi^2 + \int\limits_0^\varpi x^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(B_z)^2 \mathrm{d}x. \tag{4.265}$$

В частности, как легко проверить, однородное магнитное поле, $B_z = \mathrm{const}$, будет решением нелинейного уравнения (2.96) при любых значениях интегралов движения $\Omega_\mathrm{F}(\Psi)$ и $I(\Psi)$, удовлетворяющих условию

$$4\pi I(\Psi) = 2\Omega_\mathrm{F}(\Psi)\Psi. \tag{4.266}$$

Отметим, что при малых Ψ соотношение (4.266) полностью совпадает с соотношением (2.224), полученным для конических течений.

Упражнения.

1. Покажите, что соотношение, подобное (4.266), может быть получено и для конических решений $\Psi = \Psi(\theta)$, но лишь на больших расстояниях от компактного объекта ($r \gg R_{\rm L}$). Оно имеет вид [Ingraham, 1973; Michel, 1974]

$$4\pi I(\theta) = \Omega_{\rm F}(\theta)\sin\theta\,\frac{{\rm d}\Psi}{{\rm d}\theta}. \tag{4.267}$$

2. Покажите, что как для цилиндрических, так и для конических течений на больших расстояниях от оси вращения выполняется условие $E_\theta = B_\varphi$.

Таким образом, в одномерном случае задание любых двух из трех величин, $B_z(\varpi)$, $\Omega_{\rm F}(\Psi)$ и $I(\Psi)$, полностью определяет решение уравнения равновесия. Однако здесь необходимо иметь в виду, что прямая задача (т. е. определение полоидального магнитного поля по заданным величинам $B_\varphi(\varpi)$ и $\Omega_{\rm F}(\varpi)$) не всегда имеет решение. Действительно, при $B_\varphi = 0$ и $\Omega_{\rm F} = {\rm const}$ получаем

$$B_z(\varpi) = B_z(0)\left(1 - \frac{\Omega_{\rm F}^2\varpi^2}{c^2}\right)^{-1}, \tag{4.268}$$

т. е. решение не может быть продолжено за пределы светового цилиндра. С другой стороны, при заданном магнитном поле $B_z(\varpi)$ всегда можно найти значения $B_\varphi(\varpi)$ и $\Omega_{\rm F}(\varpi)$, для которых это поле будет решением уравнения равновесия. В последнем случае, однако, величина продольного тока должна быть близка к гольдрайховскому току $I_{\rm M}$.

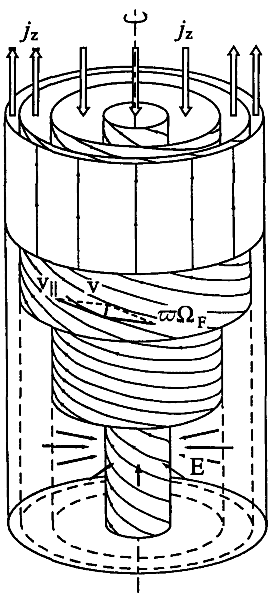


Рис. 4.9. Структура цилиндрического сильнозамагниченного струйного выброса [Istomin, Pariev, 1994]

Уже из анализа бессиловых уравнений может быть сделано несколько важных выводов, которые останутся справедливыми и в общем случае, т. е. при учете конечной массы частиц (рис. 4.9).

1. Ключевое свойство релятивистских течений связано с тем, что поперечный размер реальных джетов $r_{\rm j}$ на три-пять порядков превышает радиус светового цилиндра $R_{\rm L}$. В результате на большом расстоянии от центральной машины основная часть магнитных силовых линий должна находиться далеко за пределами светового цилиндра. Согласно же соотношению

$$\frac{B_\varphi}{B_{\rm p}} = \frac{\Omega_{\rm F}\varpi}{c}, \tag{4.269}$$

следующему из определения компонент магнитного поля при $I \approx I_{\mathrm{GJ}}$, тороидальное магнитное поле будет на те же три-пять порядков превышать полоидальное. Следовательно, магнитное поле должно иметь сильно выраженную спиральную структуру. Соответственно, электрическое поле также окажется на три-пять порядков больше, чем полоидальное магнитное поле.

2. Основной поток энергии в струйных выбросах сосредоточен не в центральной, а в периферийной части течения. Дело в том, что как электрическое, так и тороидальное магнитное поле обращаются в нуль на оси вращения. Соответственно, здесь исчезает и поток вектора Пойнтинга. Поэтому сильнозамагниченные течения должны иметь вид полого цилиндра.

3. По той же причине в периферийных областях оказывается наибольшей и энергия частиц. Действительно, как уже было показано, за пределами светового цилиндра основным движением заряженных частиц является дрейфовое движение в скрещенных электрическом и магнитном полях. Переписав дрейфовую скорость в виде

$$U_{\mathrm{dr}}^2 = c^2\frac{|\mathbf{E}|^2}{|\mathbf{B}|^2} = c^2\left(\frac{B_\varphi^2}{|\mathbf{E}|^2} + \frac{B_z^2}{|\mathbf{E}|^2}\right)^{-1} \tag{4.270}$$

и воспользовавшись оценками (4.269) и $E_\theta \approx B_\varphi$, приходим к заключению, что лоренц-фактор частиц, $\gamma = 1/\sqrt{1 - U_{\mathrm{dr}}^2/c^2}$, может быть записан в универсальной форме:

$$\gamma \approx \frac{\Omega_{\mathrm{F}}\varpi}{c}. \tag{4.271}$$

Естественно, как будет показано ниже, эффекты конечной массы частиц ограничивают рост их энергии на больших расстояниях от оси вращения. Тем не менее увеличение энергии с удалением от оси вращения — общее свойство сильнозамагниченных течений.

4. Нужно отметить еще одно важное обстоятельство, особенно существенное при анализе излучения струйных выбросов. Оно касается нетривиального характера движения частиц. Дело в том, что в струйном выбросе не только тороидальное магнитное поле B_φ (см. (4.269)), но и электрическое поле $\mathbf{E}$, направленное от оси вращения или к ней, должно существенно превышать полоидальное магнитное поле B_{p}. Поэтому дрейфовое движение частиц оказывается направленным практически вдоль полоидального магнитного поля. Последнее означает, что движение частиц может и не иметь спирального характера. Следовательно, необходимо быть осторожным при использовании стандартных синхротронных формул для оценки величины магнитного поля и времени жизни релятивистских частиц.

5. Наконец, соотношение (4.266) показывает, что однородное продольное магнитное поле может являться решением уравнения Грэда–Шафранова и при нулевом полном продольном электрическом токе, текущем вдоль струйного выброса. Действительно, согласно (4.266),

если угловая скорость $\Omega_{\mathrm{F}}(\Psi)$ стремится к нулю на границе джета $(\Psi = \Psi_0)$, то полный ток $I(\Psi_0)$ также должен быть равен нулю. Как мы видели, аналогичная ситуация имела место и для однородного магнитного поля вблизи горизонта черной дыры. Однако на границе струйного выброса продольное магнитное поле не обращается в нуль. Поэтому для устойчивости подобных конфигураций необходимо предположить, что за пределами струйного выброса существуют либо постоянное магнитное поле, либо среда с конечным давлением.

Переформулируем последнее утверждение в виде еще одной важной теоремы: *стационарный цилиндрический струйный выброс, содержащий конечный магнитный поток* Ψ_0, *может иметь место либо при ненулевом полном продольном электрическом токе* $(I(\Psi_0) \neq 0)$, *либо при наличии внешней среды с ненулевым давлением.*

Мы специально сформулировали приведенные выше утверждения еще до детального обсуждения полной магнитогидродинамической версии, подчеркивая, что в рамках рассматриваемой гипотезы о сильнозамагниченном течении в струйных выбросах они действительно являются универсальными и модельно независимыми.

4.4.2. Цилиндрические релятивистские струйные выбросы. Перейдем к более подробному рассмотрению структуры одномерного струйного выброса, при котором учитывается конечная масса частиц. В данном случае к определениям для магнитного (см. (4.262), (4.263)) и электрического (см. (4.264)) полей нужно добавить выражение для четырех-скорости вещества:

$$\mathbf{u} = \frac{\eta}{n}\mathbf{B} + \gamma\frac{\Omega_{\mathrm{F}}\varpi}{c}\,\mathbf{e}_{\varphi}. \tag{4.272}$$

При этом, согласно (1.63), в случае холодной плазмы на цилиндрических магнитных поверхностях $\Psi = \mathrm{const}$ необходимо ввести четыре интеграла движения, которые следует рассматривать именно как функции магнитного потока Ψ. К ним относятся, прежде всего, величины $\Omega_{\mathrm{F}}(\Psi)$ и $\eta(\Psi)$, входящие в определения (4.264) и (4.272), а также потоки момента импульса $(L(\Psi) = I/2\pi + \mu\eta\varpi u_{\hat{\varphi}})$ и энергии $(E(\Psi) = \Omega_{\mathrm{F}} I/2\pi + \gamma\mu\eta)$.

Подчеркнем, что в полной постановке задачи конкретный вид интегралов движения должен определяться из граничных условий в компактном источнике, а также из критических условий на особых поверхностях. При этом сама возможность использования интегралов движения, полученных при анализе внутренних областей магнитосферы, не является очевидной. Действительно, как мы увидим, для холодной плазмы течение за пределами быстрой магнитозвуковой поверхности полностью задается четырьмя граничными условиями на поверхности вращающегося тела. Формирование же одномерного потока может произойти за счет взаимодействия с внешней средой, приводящего (см., например, [Ландау, Лифшиц, 1986]) к появлению возмущений или ударных волн, распространяющихся от «острых углов» и других нерегулярностей. Поэтому в указанных областях, в которых условия применимости идеальной гидродинамики, безусловно, окажутся нарушенными, возможно существенное перераспределение энергии E и углового момента L, не говоря уже о том, что часть их может быть вообще потеряна за счет излучения. Тем не менее ниже мы для простоты будем считать, что интегралы движения $E(\Psi)$ и $L(\Psi)$ как функции потока Ψ остаются в точности такими же, как и во внутренних областях магнитосферы.

В результате вдали от гравитирующих тел уравнение Грэда–Шафранова (2.96) для холодной плазмы ($\mu = \text{const}$) запишется в виде [Бескин, Малышкин, 2000]

$$\frac{1}{\varpi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varpi}\left(\frac{A}{\varpi}\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\varpi}\right)+\Omega_{\mathrm{F}}(\nabla\Psi)^2\frac{\mathrm{d}\Omega_{\mathrm{F}}}{\mathrm{d}\Psi}+\frac{64\pi^4}{\varpi^2}\frac{1}{2\mathcal{M}^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Psi}\left(\frac{G}{A}\right)-\frac{32\pi^4}{\mathcal{M}^2}\frac{\mathrm{d}(\mu^2\eta^2)}{\mathrm{d}\Psi}=0, \tag{4.273}$$

где по-прежнему

$$G = \varpi^2(e')^2 + \mathcal{M}^2L^2 - \mathcal{M}^2\varpi^2E^2, \tag{4.274}$$

$$A = 1 - \Omega_{\mathrm{F}}^2\varpi^2 - \mathcal{M}^2, \tag{4.275}$$

$$e'(\Psi) = E(\Psi) - \Omega_{\mathrm{F}}(\Psi)L(\Psi), \tag{4.276}$$

а производная $\mathrm{d}/\mathrm{d}\Psi$ действует лишь на интегралы движения. Остальные параметры джета должны определяться из алгебраических соотношений (4.44)–(4.46), которые вдали от гравитирующих тел примут вид

$$\frac{I}{2\pi} = \frac{L - \Omega_{\mathrm{F}}\varpi^2E}{1 - \Omega_{\mathrm{F}}^2\varpi^2 - \mathcal{M}^2}, \tag{4.277}$$

$$\gamma = \frac{1}{\mu\eta}\frac{(E - \Omega_{\mathrm{F}}L) - \mathcal{M}^2E}{1 - \Omega_{\mathrm{F}}^2\varpi^2 - \mathcal{M}^2}, \tag{4.278}$$

$$u_{\hat{\varphi}} = \frac{1}{\varpi\mu\eta}\frac{(E - \Omega_{\mathrm{F}}L)\Omega_{\mathrm{F}}\varpi^2 - L\mathcal{M}^2}{1 - \Omega_{\mathrm{F}}^2\varpi^2 - \mathcal{M}^2}. \tag{4.279}$$

Здесь и ниже мы для простоты снова полагаем $c = 1$.

В рассматриваемом нами одномерном случае уравнение второго порядка (4.273) удобно сразу свести к системе двух уравнений первого порядка для величин $\Psi(\varpi)$ и $\mathcal{M}^2(\varpi)$. Умножая (4.273) на $2A(\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}\varpi)$, получаем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varpi}\left[\frac{A^2}{\varpi^2}\left(\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\varpi}\right)^2\right]+A\left(\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\varpi}\right)^2\frac{\mathrm{d}\Omega_{\mathrm{F}}^2}{\mathrm{d}\varpi}+\frac{64\pi^4A}{\varpi^2\mathcal{M}^2}\frac{\mathrm{d}'\,(G/A)}{\mathrm{d}\varpi}-\frac{64\pi^4A}{\mathcal{M}^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varpi}(\mu^2\eta^2)=0, \tag{4.280}$$

где производная $\mathrm{d}'/\mathrm{d}\varpi$ опять действует лишь на интегралы движения. Воспользуемся теперь явным видом уравнения Бернулли (4.50), которое с учетом определения интегралов движения $E(\Psi)$ и $L(\Psi)$ может быть записано в виде

$$A^2\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x_r}\right)^2 = \frac{(e')^2}{\mu^2\eta^2}\frac{x_r^2(A - \mathcal{M}^2)}{\mathcal{M}^4} + \frac{x_r^2E^2}{\mu^2\eta^2} - \frac{\Omega_{\mathrm{F}}^2(0)L^2}{\mu^2\eta^2} - \frac{x_r^2A^2}{\mathcal{M}^4}. \tag{4.281}$$

Здесь мы ввели безразмерные переменные

$$x_r = \Omega_{\rm F}(0)\varpi, \tag{4.282}$$

$$y = \sigma\,\frac{\Psi}{\Psi_0}, \tag{4.283}$$

где параметр замагниченности σ вновь задается соотношением (4.2) при $\Omega_{\rm F} = \Omega_{\rm F}(0)$. Подставляя правую часть (4.281) в первое слагаемое (4.280) и проведя элементарное дифференцирование, находим [Бескин, 1997]

$$\left[\frac{(e')^2}{\mu^2\eta^2} + \frac{\Omega_{\rm F}^2}{\Omega_{\rm F}^2(0)}x_r^2 - 1\right]\frac{{\rm d}\mathcal{M}^2}{{\rm d}x_r} = \frac{\mathcal{M}^6}{x_r^3 A}\frac{\Omega_{\rm F}^2(0)L^2}{\mu^2\eta^2} - \frac{x_r\mathcal{M}^2}{A}\frac{\Omega_{\rm F}^2}{\Omega_{\rm F}^2(0)}\left[\frac{(e')^2}{\mu^2\eta^2} - 2A\right] +$$
$$+ \frac{\mathcal{M}^2}{2}\frac{{\rm d}y}{{\rm d}x_r}\left[\frac{1}{\mu^2\eta^2}\frac{{\rm d}(e')^2}{{\rm d}y} + \frac{x_r^2}{\Omega_{\rm F}^2(0)}\frac{{\rm d}\Omega_{\rm F}^2}{{\rm d}y} - 2\left(1 - \frac{\Omega_{\rm F}^2}{\Omega_{\rm F}^2(0)}x_r^2\right)\frac{1}{\eta}\frac{{\rm d}\eta}{{\rm d}y}\right]. \tag{4.284}$$

Вторым уравнением будет уравнение Бернулли (4.281), которое теперь нужно рассматривать как уравнение на производную ${\rm d}y/{\rm d}x_r$. Система (4.281), (4.284) и позволяет построить общее решение для цилиндрического релятивистского струйного выброса с нулевой температурой.

Подчеркнем одно важное преимущество системы уравнений первого порядка (4.281), (4.284) по сравнению с исходным уравнением второго порядка (4.273). Как уже говорилось, релятивистское уравнение (4.273), являющееся по своей сути уравнением баланса сил, содержит электромагнитную силу

$$\mathbf{F}_{\rm em} = \rho_{\rm e}\mathbf{E} + \mathbf{j}\times\mathbf{B}, \tag{4.285}$$

в которой на больших расстояниях от оси вращения ($\varpi \gg R_{\rm L}$) электрический и магнитный вклады практически компенсируют друг друга. Поэтому при анализе (4.273) приходится удерживать все члены более высокого порядка малости ($\sim\gamma^{-2}$). В уравнении же (4.284) величины нулевого порядка, $\rho_{\rm e}\mathbf{E}$ и $\mathbf{j}\times\mathbf{B}$, аналитически устранены с помощью уравнения Бернулли, так что все его члены имеют одинаковый порядок малости. Наконец, важным обстоятельством является и то, что точное уравнение (4.284) не имеет особенности вблизи оси вращения. Иными словами, его решение не содержит δ-образного тока, $I \propto \delta(\varpi)$, текущего вдоль оси струйного выброса, на необходимость введения которого указывалось в ряде работ (см. [Heyvaerts, Norman, 1989; Lyubarskii, 1997]).

Необходимо сделать ряд общих замечаний, касающихся постановки задачи для цилиндрических течений. Прежде всего, в рассматриваемом нами одномерном случае полоидальная скорость плазмы всегда направлена параллельно особым поверхностям. В результате отсутствие особенности означает здесь отсутствие тангенциального разрыва, а не ударной волны. Далее, для цилиндрических течений кривизна R_c^{-1} магнитных поверхностей всегда равна нулю. Следовательно, тождественно равен нулю и один из лидирующих членов в выражениях (4.227) и (4.228). Поэтому, как мы увидим, для цилиндрических течений баланс сил становится возможным лишь при учете вклада силы $j_\varphi B_p$, пренебрежимо малой для конических течений.

Наконец, цилиндрическое течение является одномерным. Последнее означает, что мы изначально накладываем дополнительное условие автомодельности, которое существенно ограничивает класс возможных решений. В частности, как уже подчеркивалось, мы ограничиваем и класс возможных возмущений, что немедленно изменяет всю структуру особых поверхностей. В результате одномерное уравнение (4.273) вообще не имеет особенности на быстрой магнитозвуковой поверхности. Действительно, как легко проверить, в самом общем случае, когда функция потока Ψ зависит только от координаты x_1, коэффициент при старшей производной $\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x_1^2$ в уравнении Грэда–Шафранова равен $D+1$. Поэтому особенность возникает не на быстрой магнитозвуковой, а на касповой поверхности. Следовательно, для холодной плазмы, когда касповая поверхность отсутствует, уравнение Грэда–Шафранова может иметь особенность лишь на альфвеновской поверхности. В итоге для сверхальфвеновских течений ($i=4$; $s'=0$) уравнение (4.273) требует шести граничных условий.

Например, для струйного выброса, погруженного во внешнюю среду, в качестве граничных условий могут служить, прежде всего, величина внешнего однородного магнитного поля:

$$B_z(r_\mathrm{j}) = B_\mathrm{ext}, \tag{4.286}$$

и условие регулярности на магнитной оси ($\varpi \to 0$):

$$\Psi(\varpi) \to C\varpi^2. \tag{4.287}$$

Кроме того, необходимо задать все четыре интеграла: Ω_F, E, L и η. Что же касается остальных величин, характеризующих течение, таких как поперечный размер струйного выброса r_j и энергия истекающей плазмы, то они должны быть найдены как решение поставленной выше задачи. Именно решение задачи дает и ответ на вопрос о том, является ли течение в струйном выбросе сверхзвуковым. Если же мы рассматриваем изолированный струйный выброс, то вместо граничного условия (4.286) следует выбрать условие спадания всех полей при $\varpi \to \infty$.

Понятно, что в каждом конкретном случае структура течения определяется выбором интегралов движения. Вместе с тем многие ключевые свойства, как оказалось, могут быть поняты из анализа поведения решения вблизи оси вращения, где интегралы движения записываются в достаточно универсальной форме. Поэтому мы начнем анализ именно с рассмотрения поведения решения во внутренних областях струйного выброса ($\Psi \ll \Psi_0$).

Прежде всего, подчеркнем, что подобный анализ не может быть выполнен в рамках бессилового приближения. Дело в том, что на оси вращения как электрическое, так и тороидальное магнитное поле в точности равны нулю. В результате равен нулю и поток вектора Пойнтинга, а все потери энергии здесь связаны с потоком частиц. При этом, как непосредственно следует из соотношения (4.45), энергия частиц вдали от гравитирующих тел вообще остается постоянной. Таким образом, интеграл Бернулли следует записать в виде

$$E(\Psi) = \gamma_{\rm in}\mu\eta(\Psi) + \Omega_{\rm F}(\Psi)L(\Psi), \tag{4.288}$$

уже использовавшемся при определении поведения решения (4.236) на больших расстояниях. Именно учет того факта, что $E(0) = \gamma_{\rm in}\mu\eta \neq 0$, как мы увидим, и определяет основные свойства течений вблизи оси вращения.

В дальнейшем для простоты будем полагать, что вблизи оси

$$\gamma_{\rm in} = {\rm const}\,. \tag{4.289}$$

Подчеркнем, что величина $\gamma_{\rm in}$, входящая в выражение (4.288), имеет смысл лоренц-фактора инжекции в области компактного объекта и не совпадает с лоренц-фактором частиц во всем струйном выбросе. Таким образом, мы видим, что вклад электромагнитного поля становится определяющим лишь при $\Psi > \Psi_{\rm in}$, где

$$\Psi_{\rm in} = \frac{\gamma_{\rm in}}{\sigma}\Psi_0. \tag{4.290}$$

При значениях же $\Psi < \Psi_{\rm in}$ основная энергия переносится релятивистскими частицами, причем лоренц-фактор остается постоянным и равным первоначальной величине $\gamma_{\rm in}$.

Далее, угловой момент L, связанный с продольным током I вблизи компактного источника ($I \approx 2\pi L$), естественно нормировать на гольдрайховский ток, который необходим для гладкого прохождения критических поверхностей в окрестности компактного объекта. Что же касается величин $\Omega_{\rm F}(\Psi)$ и $\eta(\Psi)$, то вблизи оси вращения их естественно выбрать постоянными. В результате интегралы движения при $\Psi \ll \Psi_0$ с достаточной точностью могут быть записаны в виде

$$L(\Psi) = \frac{\Omega_{\rm F}}{4\pi^2}\Psi; \tag{4.291}$$

$$\Omega_{\rm F}(\Psi) = \Omega = {\rm const}; \tag{4.292}$$

$$\eta(\Psi) = \eta_0 = {\rm const}\,. \tag{4.293}$$

Воспользовавшись определением (4.283), легко убедиться, что во внутренних областях струйного выброса ($\Psi \ll \Psi_0$) выполняется соотношение $\Omega_{\rm F}L/\mu\eta_0 = 2y$. Поэтому интеграл Бернулли приобретает вид

$$E(y) = \mu\eta_0(\gamma_{\rm in} + 2y), \tag{4.294}$$

а уравнения (4.281) и (4.284) переписываются как

$$(1 - x_r^2 - \mathcal{M}^2)^2 \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x_r}\right)^2 = \frac{\gamma_{\mathrm{in}}^2 x_r^2}{\mathcal{M}^4}(1 - x_r^2 - 2\mathcal{M}^2) + \\ + x_r^2(\gamma_{\mathrm{in}} + 2y)^2 - 4y^2 - \frac{x_r^2}{\mathcal{M}^4}\left(1 - x_r^2 - \mathcal{M}^2\right)^2; \quad (4.295)$$

$$(\gamma_{\mathrm{in}}^2 + x_r^2 - 1)\frac{\mathrm{d}\mathcal{M}^2}{\mathrm{d}x_r} = 2x_r\mathcal{M}^2 - \frac{\gamma_{\mathrm{in}}^2 x_r \mathcal{M}^2}{1 - x_r^2 - \mathcal{M}^2} + \frac{4y^2\mathcal{M}^6}{x_r^3(1 - x_r^2 - \mathcal{M}^2)}. \quad (4.296)$$

Система уравнений (4.295), (4.296), описывающая внутреннюю структуру центральных областей струйных выбросов, допускает аналитическое решение. Прямой подстановкой можно проверить, что при $x_r \ll \gamma_{\mathrm{in}}$ мы имеем следующую асимптотику:

$$\mathcal{M}^2(x_r) = \mathcal{M}_0^2 = \mathrm{const}; \quad (4.297)$$

$$y(x_r) = \frac{\gamma_{\mathrm{in}}}{2\mathcal{M}_0^2}x_r^2, \quad (4.298)$$

которая соответствует постоянному магнитному полю:

$$B_z = B_z(0) = \frac{4\pi\gamma_{\mathrm{in}}\mu\eta_0}{\mathcal{M}_0^2} = \frac{\gamma_{\mathrm{in}}}{\sigma\mathcal{M}_0^2}B(R_{\mathrm{L}}) = \mathrm{const}, \quad (4.299)$$

где $B(R_{\mathrm{L}}) = \Psi_0/2\pi R_{\mathrm{L}}^2$. Здесь мы, конечно, предполагаем $\gamma_{\mathrm{in}} \gg 1$, что характерно для струйных выбросов из активных галактических ядер и радиопульсаров. Плотность же тока $j_{\parallel}$ согласно определению (4.291) также оказывается постоянной и равной гольдрайховскому току:

$$j_{\parallel} = \frac{\Omega_{\mathrm{F}} B_z}{2\pi}. \quad (4.300)$$

Таким образом, уравнения (4.295) и (4.296) действительно не имеют особенности вблизи оси вращения.

Что же касается структуры течения за пределами внутреннего масштаба $\varpi_{\mathrm{c}} = \gamma_{\mathrm{in}} R_{\mathrm{L}}$, то здесь решение уравнений (4.295) и (4.296) существенно зависит от соотношения между величинами γ_{in} и $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}(0)$.

1. *Струйное течение* ($\mathcal{M}_0^2 > \gamma_{\mathrm{in}}^2$). При $\mathcal{M}_0^2 > \gamma_{\mathrm{in}}^2$, когда согласно (4.299) магнитное поле на оси достаточно мало, полный магнитный поток в пределах внутреннего масштаба ϖ_{c},

$$\Psi(\gamma_{\mathrm{in}} R_{\mathrm{L}}) \approx \pi\gamma_{\mathrm{in}}^2 R_{\mathrm{L}}^2 B_z(0), \quad (4.301)$$

может быть записан в виде

$$\Psi(\gamma_{\mathrm{in}} R_{\mathrm{L}}) \approx \frac{\gamma_{\mathrm{in}}^2}{\mathcal{M}_0^2}\Psi_{\mathrm{in}}. \quad (4.302)$$

Здесь магнитный поток Ψ_{in}, при котором поток вектора Пойнтинга сравнивается с потоком энергии частиц, вновь определяется соотношением (4.290). Напомним, что на оси вращения альфвеновская поверхность совпадает с быстрой магнитозвуковой, поэтому условие $\mathcal{M}^2 > 1$ означает, что течение является сверхзвуковым.

Итак, при выполнении условия $\mathcal{M}_0^2 > \gamma_{\rm in}^2$ полный магнитный поток $\Psi(\varpi_{\rm c})$ в пределах внутреннего масштаба $\varpi_{\rm c}$ оказывается меньше $\Psi_{\rm in}$, так что и за пределами этой области основной вклад в величину $E(\Psi)$ будут по-прежнему вносить частицы, а вкладом электромагнитного поля можно пренебречь. В результате на больших по сравнению со внутренним масштабом $\varpi_{\rm c}$ расстояниях ($\varpi \gg \gamma_{\rm in} R_{\rm L}$) решение уравнений (4.295), (4.296) дает квадратичный рост величины $\mathcal{M}^2$ и степенное спадание магнитного поля [Chiueh, Li, Begelman, 1991; Eichler, 1993; Боговалов, 1995]:

$$\mathcal{M}^2(x_r) = \mathcal{M}_0^2 \frac{x_r^2}{\gamma_{\rm in}^2} \gg x_r^2; \tag{4.303}$$

$$B_z(x_r) = B_z(0) \frac{\gamma_{\rm in}^2}{x_r^2}. \tag{4.304}$$

Интересно отметить, что зависимость (4.303) в точности соответствует сохранению инварианта

$$H = \frac{\mu\eta\Omega_{\rm F} x_r^2}{\mathcal{M}^2}, \tag{4.305}$$

следующего из соотношения (4.234), которое, напомним, было получено в предположении $\varpi \gg R_{\rm L}$. Таким образом, анализ цилиндрического течения показывает, что нарушение условия $H = \text{const}$ происходит на масштабе $\gamma_{\rm in} R_{\rm L}$, совпадающем с внутренним масштабом $\varpi_{\rm c}$. При этом сама величина $\mathcal{M}^2$ вблизи оси вращения остается конечной.

Построенное выше течение внешне напоминает струйный выброс с характерным поперечным размером $r_{\rm j} = \gamma_{\rm in} R_{\rm L}$. Однако оно содержит лишь малую часть полного магнитного потока, поэтому не может претендовать на описание реальных струйных выбросов (не говоря уже о том, что сам масштаб $\varpi_{\rm c}$ оказывается значительно меньше поперечных размеров наблюдаемых джетов). Кроме того, согласно (4.304) в рамках описываемой модели магнитный поток очень медленно (логарифмически) возрастает с увеличением расстояния от оси вращения:

$$\Psi(x_r) \propto \ln(x_r/\gamma_{\rm in}). \tag{4.306}$$

Подобное поведение магнитного поля, в свою очередь, показывает, что переходное значение потока, $\Psi = \Psi_{\rm in}$, достигается экспоненциально далеко от оси вращения, т.е. при $r_{\rm j} \sim R_{\rm L} \exp(\Psi_0/\Psi_{\rm in})$, где полоидальное магнитное поле должно быть экспоненциально мало. Соответственно, плотность энергии магнитного поля при $\varpi \sim r_{\rm j}$ тоже должна быть мала. Такая конфигурация не может существовать при наличии внешней среды с конечным давлением P, независимо от того, осуществляется ли оно магнитным полем или плазмой. Поэтому струйное решение не может иметь места при наличии внешней среды с конечным давлением. С другой стороны, как будет показано ниже, оно представляет несомненный интерес при анализе моделей замагниченных течений, построенных без учета внешней среды.

Упражнение. Покажите, что для струйного течения при $\varpi \gg \varpi_c$
а) электрическое и тороидальное магнитное поле имеют вид

$$|\mathbf{E}| \approx B_z(0)\,\frac{\gamma_{\rm in}^2}{x_r}; \tag{4.307}$$

$$B_\varphi \approx B_z(0)\,\frac{\gamma_{\rm in}^2}{x_r}; \tag{4.308}$$

б) лоренц-фактор частиц практически не зависит от расстояния до оси вращения: $\gamma(x_r) \approx \gamma_{\rm in}$.

2. *Однородное течение* $(\mathcal{M}_0^2 < \gamma_{\rm in}^2)$. Рассматривая задачу о строении струйного выброса, погруженного в среду с конечным давлением (например, с постоянным внешним магнитным полем), приходим к заключению, что значение числа Маха на оси вращения должно быть ограничено сверху:

$$\mathcal{M}^2(0) < \mathcal{M}^2_{\rm max} = \gamma_{\rm in}^2. \tag{4.309}$$

Тогда согласно (4.299) магнитное поле на оси вращения не может быть меньше величины

$$B_{\rm min} = \frac{1}{\sigma\gamma_{\rm in}}B(R_{\rm L}). \tag{4.310}$$

В результате, как легко проверить, решение уравнений (4.295) и (4.296) при $\gamma_{\rm in}R_{\rm L} \ll \varpi \ll r_{\rm j}$ дает постоянное магнитное поле (4.299) и за пределами масштаба $\varpi_{\rm c}$, что соответствует решению

$$y(x_r) = \frac{\gamma_{\rm in}}{2\mathcal{M}_0^2}x_r^2. \tag{4.311}$$

При этом имеет место лишь линейный рост квадрата числа Маха:

$$\mathcal{M}^2(x_r) = \mathcal{M}_0^2\frac{x_r}{\gamma_{\rm in}} \ll x_r^2. \tag{4.312}$$

Упражнение. Покажите, что для однородного течения при $\varpi \gg \varpi_{\rm c}$
а) электрическое и тороидальное магнитное поле имеют вид

$$|\mathbf{E}| = B_z(0)x_r; \tag{4.313}$$

$$B_\varphi = B_z(0)x_r; \tag{4.314}$$

б) лоренц-фактор частиц линейно растет с удалением от оси вращения: $\gamma(x_r) \approx x_r$.

Отметим, что отсутствие спадающего решения $B_z \propto \varpi^{-2}$ связано с первым слагаемым в правой части уравнения (4.284), пропорциональным L^2. Это слагаемое, существенно изменяющее характер решения, по-видимому, было пропущено во многих работах, посвященных струйным выбросам. Последнее неудивительно при анализе уравнения второго порядка (4.273), в котором соответствующее слагаемое является малым. С другой стороны, на больших расстояниях от оси вращения ($\varpi \gg \gamma_{\rm in}R_{\rm L}$) уравнение (4.284) может быть переписано в виде

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varpi}\left(\frac{\mu\eta\Omega_{\mathrm{F}}\varpi^2}{\mathcal{M}^2}\right) + \frac{\Omega_{\mathrm{F}}\mathcal{M}^2}{\mu\eta\varpi^3(\Omega_{\mathrm{F}}\varpi^2 + \mathcal{M}^2)}L^2 = 0, \tag{4.315}$$

где оба слагаемых имеют одинаковый порядок малости. Пренебрегая слагаемым, пропорциональным L^2, опять приходим к сохранению величины H (см. (4.305)). В частности, для $\Omega_{\mathrm{F}} = \mathrm{const}$ и $\eta = \mathrm{const}$ имеем $\mathcal{M}^2 \propto x_r^2$. Однако, как мы видим, в цилиндрической геометрии для релятивистских струйных выбросов сохранение величины H в общем случае не имеет места. Точнее, второе слагаемое в уравнении (4.315) оказывается существенным для всех моделей с почти постоянной плотностью продольного электрического тока в центральной части струйного выброса, когда инвариант $L(\Psi)$ при $\Psi < \Psi_0$ линейно растет с ростом магнитного потока Ψ.

УПРАЖНЕНИЕ. Покажите, что первое слагаемое в уравнении (4.315) соответствует силе Ампера $\rho_{\mathrm{e}}|\mathbf{E}| + j_{\parallel}B_{\varphi}$, а второе — силе Ампера $j_{\varphi}B_{\mathrm{p}}$.

В итоге однородное решение может быть сшито с внешней средой с помощью граничного условия (4.286). При этом, естественно, полная структура течения будет существенно зависеть от выбора интегралов движения. Ниже мы рассмотрим один простой пример такого течения, а здесь отметим еще два достаточно общих свойства, характерных для данного класса решений.

Во-первых, как уже подчеркивалось выше, струйный выброс может обладать нулевым продольным электрическим током. Это имеет место, если на границе струйного выброса, где продольное движение вещества отсутствует, интегралы движения обращаются в нуль:

$$\Omega_{\mathrm{F}}(\Psi_0) = 0; \quad \eta(\Psi_0) = 0. \tag{4.316}$$

Здесь Ψ_0 — по-прежнему конечный суммарный магнитный поток, сосредоточенный в джете. Указанный случай соответствует отсутствию тангенциальных разрывов на границе струйного выброса. При этом согласно (4.277) полный электрический ток в пределах джета автоматически оказывается равным нулю.

Во-вторых, легко проверить, что в рассматриваемом нами релятивистском случае для оценки с хорошей точностью можно положить $\gamma = u_z$. Тогда на больших расстояниях от оси вращения, т. е. при $x_r \gg \gamma_{\mathrm{in}}$ ($\varpi \gg \gamma_{\mathrm{in}}R_{\mathrm{L}}$), а также при условии $\mathcal{M}^2 \ll x_r^2$ уравнение (4.281) приобретает следующий общий вид:

$$\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\varpi} = \frac{8\pi^2 E(\Psi)}{\varpi\Omega_{\mathrm{F}}^2(\Psi)}, \tag{4.317}$$

или, что то же самое,

$$B_z(\varpi) = \frac{4\pi E(\Psi)}{\varpi^2\Omega_{\mathrm{F}}^2(\Psi)}. \tag{4.318}$$

Уравнение (4.317) вообще не содержит величины $\mathcal{M}^2$ и поэтому может быть независимо проинтегрировано. Действительно, оно совпадает с асимптотикой бессилового уравнения, которое и получается из (4.281) предельным переходом $\mathcal{M}^2 \to 0$. Полагая в (4.318) $B_z(r_{\rm j}) = B_{\rm ext}$, находим выражение для размера струйного выброса:

$$r_{\rm j}^2 = \lim_{\Psi \to \Psi_0} \frac{4\pi E(\Psi)}{\Omega_{\rm F}^2(\Psi) B_{\rm ext}}. \tag{4.319}$$

Следовательно, его поперечный размер определяется пределом отношения $E(\Psi)/\Omega_{\rm F}^2(\Psi)$ при $\Psi \to \Psi_0$. Однако поскольку для сильнозамагниченных течений $E(\Psi) \propto \Omega_{\rm F}^2$, оценка величины $r_{\rm j}$ фактически совпадает с выражением (4.260).

В качестве примера рассмотрим задачу о внутренней структуре релятивистского струйного выброса, погруженного во внешнее однородное магнитное поле $B_{\rm ext}$, параллельное оси джета [Бескин, Малышкин, 2000]. При этом мы воспользуемся интегралами движения $\Omega_{\rm F}(\Psi)$, $L(\Psi) = I(\Psi)/2\pi$ и $E(\Psi) = \Omega_{\rm F}(\Psi)L(\Psi)$ (см. (3.105), (3.106)), полученными для бессиловой магнитосферы черной дыры. Сразу отметим, что они удовлетворяют условиям (4.316), и следовательно, могут быть непосредственно использованы при исследовании структуры струйного выброса, обладающего нулевым полным электрическим током. В результате с учетом вклада частиц, что необходимо вблизи оси вращения, с точностью до членов $\sim \sigma^{-1}$ находим

$$\Omega_{\rm F}(\Psi) = \frac{2\sqrt{1 - \Psi/\Psi_0}}{1 + \sqrt{1 - \Psi/\Psi_0}}\, \Omega_{\rm F}(0); \tag{4.320}$$

$$L(\Psi) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{\sqrt{1 - \Psi/\Psi_0}}{1 + \sqrt{1 - \Psi/\Psi_0}}\, \Omega_{\rm F}(0)\Psi; \tag{4.321}$$

$$E(\Psi) = \gamma_{\rm in}\mu\eta + \Omega_{\rm F}(\Psi)L(\Psi). \tag{4.322}$$

В частности, для значений $E(\Psi)$ и $\Omega_{\rm F}(\Psi)$, заданных формулами (4.320)–(4.322), имеем

$$\lim_{\Psi \to \Psi_0} \frac{E(\Psi)}{\Omega_{\rm F}^2(\Psi)} = \frac{1}{4\pi^2}\Psi_0, \tag{4.323}$$

так что предел (4.319) действительно существует. В итоге получаем

$$r_{\rm j} = \left(\frac{\Psi_0}{\pi B_{\rm ext}}\right)^{1/2}, \tag{4.324}$$

что, естественно, совпадает с оценкой (4.260). При этом согласно (4.283) и (4.311) поперечный размер струйного выброса может быть записан и в виде

$$r_{\rm j} = \left(\frac{\sigma \mathcal{M}_0^2}{\gamma_{\rm in}}\right)^{1/2} R_{\rm L}, \tag{4.325}$$

эквивалентном (4.324). Более того, как легко проверить, для инвариантов (4.320)–(4.322) постоянное магнитное поле $B_z = B(0)$ оказывается точным решением уравнения (4.317) и во всем струйном выбросе вплоть до самой границы джета $\varpi = r_{\rm j}$. Поэтому здесь можно положить $B(0) = B_{\rm ext}$. Отсюда согласно (4.299) получаем

$$\mathcal{M}_0^2 = \frac{\gamma_{\rm in}}{\sigma}\frac{B(R_{\rm L})}{B_{\rm ext}}. \tag{4.326}$$

С помощью соотношения (4.326) через внешнее магнитное поле могут быть выражены и все остальные параметры струйного выброса. Еще раз напомним, что здесь внешнее поле должно превышать величину $B_{\rm min}$, задаваемую соотношением (4.310).

Для того чтобы найти распределение энергии в джете и лоренц-фактор частиц, удобно вновь воспользоваться величиной

$$q(x_r) = \frac{\mathcal{M}^2}{x_r^2}, \tag{4.327}$$

которая, как мы видели, на больших расстояниях от оси вращения представляет собой отношение потока энергии, переносимой частицами, к потоку энергии электромагнитного поля. В результате для $x_r \gg \gamma_{\rm in}$ из соотношения (4.312) имеем

$$\frac{W_{\rm par}}{W_{\rm tot}} \approx \frac{\mathcal{M}_0^2}{\gamma_{\rm in}}\, x_r^{-1} \ll 1, \tag{4.328}$$

а из формул (4.140) и (4.327) для лоренц-фактора частиц получаем

$$\gamma(x_r) = x_r, \tag{4.329}$$

что в точности соответствует общей оценке (4.271), которая, напомним, отвечает дрейфовому движению в скрещенных полях. Наконец, выражение (4.279) для четырех-вектора скорости $u_{\hat\varphi}$ при $x_r \gg \gamma_{\rm in}$ приводит к следующему выражению для тороидальной скорости $v_\varphi = u_{\hat\varphi}/\gamma$:

$$v_\varphi(x_r) = \frac{1}{x_r}. \tag{4.330}$$

Таким образом, благодаря выражению (4.327) мы приходим к важнейшему выводу. Оказывается, что вдали от светового цилиндра

$$q \ll 1. \tag{4.331}$$

Следовательно, согласно (4.141) при $B_{\rm ext} > B_{\rm min}$ вклад частиц в общий баланс потока энергии является незначительным. Так, при $B_{\rm ext} \sim B_{\rm min}$ для $r \sim r_{\rm j}$ имеем

$$\frac{W_{\rm par}}{W_{\rm tot}} \sim \left(\frac{\gamma_{\rm in}}{\sigma}\right)^{1/2} \tag{4.332}$$

и $\gamma = (\gamma_{\rm in}\sigma)^{1/2}$. В общем же случае получаем

$$\frac{W_{\rm par}}{W_{\rm tot}} \sim \frac{1}{\sigma}\left[\frac{B(R_{\rm L})}{B_{\rm ext}}\right]^{1/2}. \tag{4.333}$$

При этом мы приходим к достаточно нетривиальному заключению: в одномерном струйном выбросе доля энергии, переносимая частицами, определяется параметрами внешней среды. Однако так и должно быть. Действительно, величина внешнего поля B_{ext} (внешнего давления P) определяет поперечный размер струйного выброса, который, как и в нерелятивистском случае, задает радиус «пращи», фиксирующий максимальную энергию частиц.

Что же касается более слабых внешних магнитных полей ($B_{\text{ext}} < < B_{\text{min}}$), то здесь структура самых внутренних областей в целом имеет вид струйного течения. Однако поскольку внешнее поле B_{ext} в реальных условиях не является экспоненциально малым, квадратичное спадание продольного поля, $B_z \propto \varpi^{-2}$ (см. (4.304)), фактически никогда не будет реализовано. Как было показано выше, это может иметь место лишь в случае, когда квадрат числа Маха ($\mathcal{M}_0^2$) на оси вращения не превышает существенно величину γ_{in}^2. Отсюда следует, что *релятивистские струйные выбросы, находящиеся в среде с конечным давлением, не могут иметь на оси вращения магнитные поля, существенно меньшие* B_{min} (см. (4.310)).

Анализируя теперь уравнение (4.296), которое в интересующей нас области параметров можно записать в виде

$$x_r^2\frac{\mathrm{d}\mathcal{M}^2}{\mathrm{d}x_r} = 2x_r\mathcal{M}^2 - \frac{4y^2\mathcal{M}^6}{x_r^3(x_r^2+\mathcal{M}^2)}, \tag{4.334}$$

легко показать, что струйное течение $B_z \propto \varpi^{-2}$, $\mathcal{M}^2 \propto \varpi^2$ бывает нарушено лишь при условии, что последнее ~~слагаемое~~ (как и в случае однородного течения) по порядку величины близкó к остальным его членам. Это становится возможным при произвольных степенных зависимостях

$$\mathcal{M}^2 \propto x_r^{\alpha}, \tag{4.335}$$

$$y \propto x_r^{\beta}, \tag{4.336}$$

если соответствующие показатели степени удовлетворяют равенству

$$\alpha + \beta = 3. \tag{4.337}$$

Результаты численного расчета [Бескин, Нохрина, 2005] показывают, что с уменьшением внешнего магнитного поля величина α постепенно растет, а величина β, напротив, уменьшается. При этом если для $B_{\text{ext}} \sim B_{\text{min}}$ мы имеем $\alpha \approx 1$ и $\beta \approx 2$, то для более слабых внешних магнитных полей, $B_{\text{ext}} \sim B_{\text{eq}}$, где

$$B_{\text{eq}} = \frac{1}{\sigma^2}\,B(R_{\text{L}}), \tag{4.338}$$

реализуется уже квадратичный рост числа $\mathcal{M}^2$ ($\alpha \approx 2$). С другой стороны, согласно определению (4.140) для $B_{\text{ext}} > B_{\text{eq}}$ лоренц-фактор частиц по-прежнему описывается универсальной асимптотикой $\gamma = x_r$, поэтому соотношение (4.333) оказывается справедливым и в этой области внешних магнитных полей. Наконец, при $B_{\rm ext} < B_{\rm eq}$ (т. е. при $\alpha \approx 2$) вклад частиц в поток энергии становится определяющим во всем объеме струйного выброса. Следовательно, при достаточно малых внешних магнитных полях в одномерных релятивистских струйных выбросах может иметь место полная трансформация потока энергии электромагнитного поля в поток энергии частиц.

Упражнения.

1. Покажите, что при $B_{\rm ext} \sim B_{\rm eq}$ продольное магнитное поле в джете ведет себя как $B_z \propto x_r^{-1}$.

2. Получите выражение (4.338) для предельного магнитного поля $B_{\rm eq}$.

3. Покажите, что поперечный размер струйного выброса в области внешних магнитных полей $B_{\rm eq} < B_{\rm ext} < B_{\rm min}$ по-прежнему задается выражением

$$r_{\rm j} \sim \left(\frac{\Psi_0}{\pi B_{\rm ext}}\right)^{1/2}. \tag{4.339}$$

В качестве примера на рисунках 4.10, *а*, *б* приведены зависимости числа Маха и потока энергии, сосредоточенного в частицах $(\gamma\mu\eta)$, для параметров $\mathcal{M}_0^2 = 16$, $\gamma_{\rm in} = 8$ и $\sigma = 1000$, полученные в результате численного интегрирования уравнений (4.281), (4.284) для интегралов

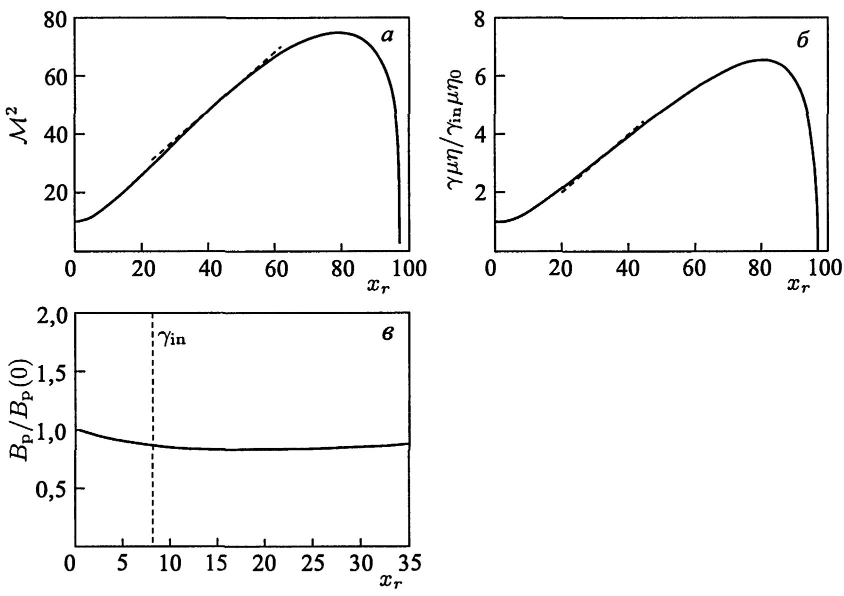


Рис. 4.10. Зависимости числа Маха (*а*), потока энергии, сосредоточенного в частицах (*б*), и полоидального магнитного поля (*в*) для параметров $\mathcal{M}_0^2 = 16$, $\gamma_{\rm in} = 8$, $\sigma = 1000$. Штриховыми линиями отмечено поведение этих величин, следующее из аналитических асимптотик [Бескин, Малышкин, 2000]

движения (4.320)–(4.322) и при условии $B_{\rm ext} > B_{\rm min}$ [Бескин, Малышкин, 2000]. Штриховыми линиями отмечено поведение этих величин, следующее из аналитических асимптотик (4.312), (4.329). Как мы видим, при достаточно малых значениях x_r, когда интегралы движения (4.320)–(4.322) близки к (4.291)–(4.293), аналитические выражения совпадают с точными значениями. С другой стороны, при $\Psi = \Psi_0$, т. е. на краю джета, как и следовало ожидать, величины $\gamma\mu\eta$ и $\mathcal{M}^2$ равны нулю. На рис. 4.10, *в* показана зависимость полоидального магнитного поля $x_r^{-1}{\rm d}y/{\rm d}x_r$ для внутренних частей джета ($\Psi < \Psi_0$). Из графика видно, что при $x_r > \gamma_{\rm in}$ магнитное поле остается практически постоянным, что согласуется с аналитическими оценками (4.299) и (4.311). Конечно, в общем случае структура полоидального магнитного поля определяется конкретным выбором интегралов $E(\Psi)$ и $L(\Psi)$.

В заключение интересно сравнить энергетику частиц в струйном выбросе с предельной энергией, приобретаемой ими при истечении из магнитосферы компактного объекта с монопольным магнитным полем. Как будет показано ниже, при квазимонопольном истечении релятивистской плазмы лоренц-фактор частиц за пределами быстрой магнитозвуковой поверхности ($r > \sigma^{1/3}R_{\rm L}$) при отсутствии внешней среды может быть записан как

$$\gamma(y) = y^{1/3}, \quad y > \gamma_{\rm in}^3; \tag{4.340}$$

$$\gamma(y) = \gamma_{\rm in}, \quad y < \gamma_{\rm in}^3, \tag{4.341}$$

где y определяется формулой (4.283). С другой стороны, соотношения (4.311) и (4.329) для струйного выброса дают

$$\gamma(y) = \left(\frac{\mathcal{M}_0^2}{\gamma_{\rm in}}\right)^{1/2} y^{1/2}, \quad y > \frac{\gamma_{\rm in}^3}{\mathcal{M}_0^2}; \tag{4.342}$$

$$\gamma(y) = \gamma_{\rm in}, \quad y < \frac{\gamma_{\rm in}^3}{\mathcal{M}_0^2}. \tag{4.343}$$

Как показано на рис. 4.11, *а*, при $\mathcal{M}_0^2 > 1$, т. е. при $B_{\rm min} < B_{\rm ext} < B_{\rm crit}$, где

$$B_{\rm crit} = \frac{\gamma_{\rm in}}{\sigma} B(R_{\rm L}), \tag{4.344}$$

лоренц-фактор (4.342) частиц в джете всегда больше лоренц-фактора, приобретаемого ими при истечении из магнитосферы с монопольным магнитным полем, но, конечно же, всегда меньше предельного лоренц-фактора

$$\gamma_{\rm in} = 2y, \tag{4.345}$$

соответствующего полной трансформации энергии электромагнитного поля в энергию частиц. Это значит, что при $B_{\rm ext} < B_{\rm crit}$ в процессе коллимации, связанном со взаимодействием истекающей плазмы с внешней средой, должно осуществляться дополнительное ускорение

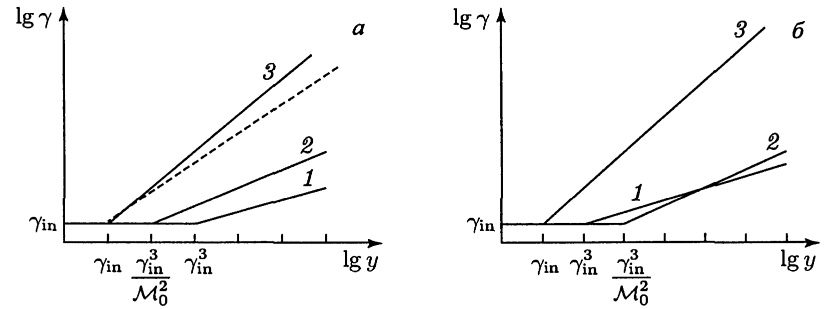


Рис. 4.11. Зависимость лоренц-фактора частиц от магнитного потока для монопольного поля ($\gamma \sim y^{1/3}$; *1*), одномерного джета ($\gamma \sim (\mathcal{M}_0^2/\gamma_{\rm in})^{1/2} \times$ $\times\, y^{1/2}$; *2*) и в случае полной трансформации энергии электромагнитного поля в энергию частиц ($\gamma \sim 2y$; *3*) при $\mathcal{M}_0^2 > 1$ ($B_{\min} < B_{\rm ext} < B_{\rm crit}$) (*а*) и $\mathcal{M}_0^2 < 1$ ($B_{\rm ext} > B_{\rm crit}$) (*б*). Пересечение прямых определяет положение быстрой магнитозвуковой поверхности [Бескин, Малышкин, 2000]. Штриховой линией показано поведение лоренц-фактора при $B_{\rm eq} < B_{\rm ext} < B_{\min}$

частиц. Если же $B_{\rm ext} > B_{\rm crit}$, то во внутренних областях струйного выброса при

$$\varpi < \frac{\gamma_{\rm in}}{\mathcal{M}_0^2} R_{\rm L} \tag{4.346}$$

энергия частиц на данной силовой линии оказывается даже меньше значений, полученных для монопольного магнитного поля (рис. 4.11, *б*).

Последний результат нетрудно объяснить. Действительно, для рассматриваемых нами интегралов движения (4.291)–(4.293) фактор D, равенство нулю которого определяет положение быстрой МГД-поверхности, в случае холодной плазмы может быть переписан в виде

$$\mathcal{M}^2 D \equiv A + \frac{B_\varphi^2}{B_{\rm p}^2} = A + \frac{4x_r^2 y^2 \mathcal{M}^4}{4y^2\mathcal{M}^4 - 2x_r^2\mathcal{M}^2 - x_r^4}. \tag{4.347}$$

Легко показать, что для значений y и $\mathcal{M}^2$, заданных формулами (4.311), (4.312), выражение (4.347) становится отрицательным при

$$\mathcal{M}^2 > 1, \tag{4.348}$$

т. е. как раз при значениях x_r, соответствующих (4.346). Следовательно, для достаточно больших внешних магнитных полей ($B_{\rm ext} > B_{\rm crit}$; см. (4.344)), при которых $\mathcal{M}_0^2 < 1$, во внутренних областях струйного выброса, $\varpi < r_{\rm s}$, где

$$r_{\rm s} \approx \sigma \left[\frac{B_{\rm ext}}{B(R_{\rm L})}\right] R_{\rm L}, \tag{4.349}$$

неизбежно возникает область с дозвуковым течением. Появление же области с дозвуковым течением вдали от компактного объекта возможно либо при наличии ударной волны, либо в результате сильного искажения магнитного поля в пределах быстрой магнитозвуковой поверхности, расположенной в окрестности компактного объекта. В обоих случаях возмущение магнитного поля приводит к уменьшению энергии частиц.

4.4.3. Цилиндрические нерелятивистские струйные выбросы. Рассмотрим нерелятивистское течение, имеющее место в струйных выбросах из молодых звезд. В общем случае ненулевой температуры уравнение (4.284) имеет вид [Lery et al., 1999]

$$\begin{aligned}
&\left[2(E_{\rm n} - \Omega_{\rm F} L_{\rm n}) - 2w + \Omega_{\rm F}^2 \varpi^2 - (1-\mathcal{M}^2)c_{\rm s}^2\right] \frac{{\rm d}\mathcal{M}^2}{{\rm d}\varpi} = \\
&\qquad = \frac{\mathcal{M}^6}{1-\mathcal{M}^2}\frac{L_{\rm n}^2}{\varpi^3} - \frac{\Omega_{\rm F}^2\varpi}{1-\mathcal{M}^2}\mathcal{M}^2(2\mathcal{M}^2-1) + \\
&\qquad + \mathcal{M}^2\frac{{\rm d}\Psi}{{\rm d}\varpi}\frac{\rm d}{{\rm d}\Psi}(E_{\rm n} - \Omega_{\rm F}L_{\rm n}) + \mathcal{M}^2\varpi^2\Omega_{\rm F}\frac{{\rm d}\Psi}{{\rm d}\varpi}\frac{{\rm d}\Omega_{\rm F}}{{\rm d}\Psi} + \\
&\qquad + \mathcal{M}^2\frac{{\rm d}\Psi}{{\rm d}\varpi}\left[2(E_{\rm n} - \Omega_{\rm F}L_{\rm n}) - 2w + \Omega_{\rm F}^2\varpi^2 - 2(1-\mathcal{M}^2)c_s^2\right]\frac{1}{\eta_{\rm n}}\frac{{\rm d}\eta_{\rm n}}{{\rm d}\Psi} - \\
&\qquad - \mathcal{M}^2\left[(1-\mathcal{M}^2)\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_\rho + \frac{T}{m_{\rm p}}\right]\frac{{\rm d}\Psi}{{\rm d}\varpi}\frac{{\rm d}s}{{\rm d}\Psi}.
\end{aligned} \tag{4.350}$$

При этом в центральной части джета ($\Psi \ll \Psi_0$) интегралы движения могут быть записаны как

$$E_{\rm n}(\Psi) \approx \frac{v_{\rm in}^2}{2} + i_0\frac{\Omega_0^2}{4\pi^2 c\eta_0}\Psi; \tag{4.351}$$

$$L(\Psi) \approx i_0\frac{\Omega_0}{4\pi^2 c\eta_0}\Psi, \tag{4.352}$$

где величина $v_{\rm in}$ имеет тот же смысл, что и $\gamma_{\rm in}$ для релятивистских течений. В результате переходное значение магнитного потока $\Psi_{\rm in}$, при котором поток вектора Пойнтинга начинает превышать поток энергии частиц дается выражением

$$\Psi_{\rm in} = 2\pi^2\frac{v_{\rm in}^2 c\eta_0}{i_0\Omega_0^2}. \tag{4.353}$$

Еще раз подчеркнем, что величина $v_{\rm in}$ имеет здесь смысл характерной константы, а не реальной скорости инжекции в источнике, тогда как величина i_0 фиксирует угловой момент L, а не реальный ток в струйном выбросе. В случае же, если угловой момент согласован с критическим условием на быстрой магнитозвуковой поверхности, значение i_0 должно определяться соотношением (4.208).

УПРАЖНЕНИЕ. Покажите, что уравнение (4.350) имеет особенность на касповой поверхности, т. е. при $D = -1$.

В результате уравнение (4.350) и нерелятивистское уравнение Бернулли (4.93) при $\Psi < \Psi_0$ примут вид

$$\left(\frac{v_{\rm in}^2}{c^2} + x_r^2\right)\frac{{\rm d}\mathcal{M}^2}{{\rm d}x_r} = 2x_r\mathcal{M}^2 + \frac{4i_0^2y^2\mathcal{M}^6}{x_r^3(1-\mathcal{M}^2)} - \frac{x_r\mathcal{M}^2}{(1-\mathcal{M}^2)}; \qquad (4.354)$$

$$\mathcal{M}^4\left(\frac{{\rm d}y}{{\rm d}x_r}\right)^2 = \frac{v_{\rm in}^2}{c^2}x_r^2 + 4i_0x_r^2y - \frac{(x_r^2 - 2i_0y\mathcal{M}^2)^2}{(1-\mathcal{M}^2)^2} - 2x_r^2\frac{2i_0y - x_r^2}{1-\mathcal{M}^2}, \qquad (4.355)$$

где по-прежнему $x_r = \Omega_0\varpi/c$, $y = \sigma\Psi/\Psi_0$, а σ задается соотношением (4.219). Здесь мы для простоты вновь ограничились случаем холодной плазмы. Как мы видим, уравнения (4.354), (4.355) содержат внутренний масштаб $x_r = v_{\rm in}/c$ ($\varpi = v_{\rm in}/\Omega_0$).

Подчеркнем, что как уравнения (4.354) и (4.355), так и все другие уравнения, относящиеся к нерелятивистскому движению, не должны содержать скорость света c. Однако использование релятивистской нормировки x_r позволяет записать их в гораздо более компактном виде по сравнению с нерелятивистскими выражениями. Поэтому в дальнейшем мы будем использовать релятивистскую нормировку (восстановив при этом для нерелятивистских течений скорость света c), а все основные соотношения дублировать и в нерелятивистской форме.

Рассмотрим теперь более подробно случай сверхальфвеновского течения ($\mathcal{M}^2(0) > 1$). Поскольку, как уже отмечалось, вблизи оси вращения альфвеновская поверхность должна совпадать с быстрой магнитозвуковой, то и в этом случае течение вблизи оси вращения будет сверхзвуковым. В результате уравнения (4.354), (4.355) приобретают вид

$$\left(\frac{v_{\rm in}^2}{c^2} + x_r^2\right)\frac{{\rm d}\mathcal{M}^2}{{\rm d}x_r} = 2x_r\mathcal{M}^2 - \frac{4i_0^2y^2\mathcal{M}^4}{x_r^3}; \qquad (4.356)$$

$$\mathcal{M}^4\left(\frac{{\rm d}y}{{\rm d}x_r}\right)^2 = \frac{v_{\rm in}^2}{c^2}x_r^2 + 4i_0x_r^2y - 4i_0^2y^2 - 2\frac{x_r^4}{\mathcal{M}^2}. \qquad (4.357)$$

Легко проверить, что при выполнении условия $i_0 < c/v_{\rm in}$, имеющего место для сильнозамагниченного течения ($\Omega_{\rm F} > \Omega_{\rm crit}$; см. (4.180)), последнее слагаемое в (4.356) может быть отброшено. Отсюда

$$\mathcal{M}^2(\varpi) = \mathcal{M}_0^2\left(1 + \frac{\varpi^2}{\varpi_c^2}\right), \qquad (4.358)$$

где

$$\varpi_{\rm c} = \frac{v_{\rm in}}{\Omega_0}. \qquad (4.359)$$

При выполнении же условия

$$i_0 \ll \mathcal{M}_0^2\frac{c}{v_{\rm in}} \qquad (4.360)$$

(согласно (4.208) всегда справедливого для быстрого вращения, $\Omega_{\rm F} > \Omega_{\rm crit}$) можно пренебречь и последним слагаемым в уравнении (4.357). В итоге имеем

$$\frac{1}{x_r}\frac{{\rm d}y}{{\rm d}x_r} = \frac{v_{\rm in}}{c\mathcal{M}^2(x_r)}, \tag{4.361}$$

что вновь соответствует струйному решению (4.304) [Eichler, 1993; Боговалов, 1995]:

$$B_z(\varpi) = \frac{B_z(0)}{1+\varpi^2/\varpi_{\rm c}^2}. \tag{4.362}$$

Таким образом, и в нерелятивистском случае магнитный поток должен логарифмически медленно расти с удалением от оси вращения: $\Psi(\varpi) \propto \ln\varpi$. В результате на больших расстояниях от оси вращения ($\varpi \gg \varpi_{\rm c}$) мы опять получаем $\mathcal{M}^2 \propto \varpi^2$, что отвечает сохранению инварианта H (см. (4.305)). С другой стороны, рассматриваемое здесь решение не имеет особенности на оси вращения. В частности, $I(\varpi) \to 0$ при $\varpi \to 0$.

Далее, используя определения (4.263) и (4.264), при $\varpi > \varpi_c$ находим

$$B_\varphi = -\frac{v_{\rm in}}{\Omega_0\varpi}B_0; \tag{4.363}$$

$$E_\varpi = -\frac{v_{\rm in}^2}{c\Omega_0\varpi}B_0, \tag{4.364}$$

так что электрическое поле всегда оказывается меньше магнитного. Наконец, согласно (4.272) компоненты скорости можно записать в виде

$$v_{\rm p} = v_{\rm in}; \tag{4.365}$$

$$v_\varphi \ll v_{\rm in}. \tag{4.366}$$

В результате, как и следовало ожидать, поток энергии вблизи оси вращения будет полностью определяться потоком частиц:

$$\frac{W_{\rm par}}{W_{\rm tot}} \sim 1. \tag{4.367}$$

Действительно, для сверхальфвеновского течения ($\mathcal{M}_0^2 > 1$) и разумных значений $i_0 < c/v_{\rm in}$, согласованных с условиями регулярности на критических поверхностях, заключенный в пределах внутреннего масштаба магнитный поток $\Psi(\varpi_{\rm c})$ для струйного решения всегда меньше величины $\Psi_{\rm in}$:

$$\frac{\Psi(\varpi_c)}{\Psi_{\rm in}} \approx \frac{1}{\mathcal{M}_0^2}\,\frac{v_{\rm in}i_0}{c} \ll 1. \tag{4.368}$$

Таким образом, в нерелятивистском случае одномерное стационарное цилиндрическое течение вблизи оси вращения неизбежно должно иметь струйный характер. Однородное же решение для нерелятивистских сверхзвуковых течений вообще не может быть реализовано.

УПРАЖНЕНИЕ. Покажите, что для дозвукового нерелятивистского течения вблизи оси вращения (т. е. для $\mathcal{M}^2 \ll 1$)

а) квадрат числа Маха линейно растет с расстоянием от оси, а полоидальное магнитное поле B_z остается постоянным независимо от выбора интегралов движения:

$$\mathcal{M}^2(x_r) \approx \mathcal{M}_0^2 \left(1 + \frac{c}{v_{\rm in}} x_r\right); \tag{4.369}$$

$$y(x_r) \approx \frac{1}{2} \frac{v_{\rm in}}{c\mathcal{M}_0^2} x_r^2 \tag{4.370}$$

(данный вывод связан с тем фактом, что плотность энергии полоидального магнитного поля оказывается больше как всех остальных полей, так и плотности энергии частиц);

б) скорость вещества увеличивается с удалением от оси вращения:

$$v_{\rm p} = \sqrt{v_{\rm in}^2 + \Omega_{\rm F}^2 \varpi^2}; \tag{4.371}$$

$$v_\varphi = \Omega_{\rm F} \varpi; \tag{4.372}$$

в) минимальное внешнее магнитное поле, при котором может быть реализован дозвуковой режим, есть $B_1 = \sigma^{-2/3} B(R_{\rm L})$, или

$$B_1 = \left(\frac{4\pi\rho_{\rm in} v_{\rm in}^2}{B_{\rm in}^2}\right)^{2/3} \left(\frac{\Omega_0 R_{\rm in}}{v_{\rm in}}\right)^{2/3} B_{\rm in}. \tag{4.373}$$

Сформулируем основные выводы, которые могут быть сделаны на основе проведенного выше анализа точных решений уравнения Грэда–Шафранова для одномерных цилиндрических течений.

1. В случае нерелятивистских сверхзвуковых стационарных течений вблизи оси вращения всегда возникает струйная область с повышенной величиной продольного магнитного поля. В ней, однако, заключена лишь малая часть полного магнитного потока.

2. В случае релятивистских течений структура джета существенно зависит от давления внешней среды. Для струйных выбросов, погруженных в среду с достаточно большим внешним давлением, продольное магнитное поле слабо зависит от расстояния до оси вращения, так что течение не имеет струйного характера. Однако если влиянием внешней среды можно пренебречь, то релятивистское течение также должно иметь струйную структуру.

3. Доля энергии, переносимая частицами, $W_{\rm par}/W_{\rm tot}$, в значительной степени определяется параметрами внешней среды. Так, например, в релятивистском случае для значений $\sigma \gg \sigma_{\rm crit}$, где

$$\sigma_{\rm crit} = \left[\frac{B(R_{\rm L})}{B_{\rm ext}}\right]^{1/2}, \tag{4.374}$$

переносимая частицами энергия составляет лишь малую часть от потока энергии $W_{\rm em}$, переносимой электромагнитным полем. Следовательно, струйный выброс остается сильнозамагниченным ($W_{\rm par} \ll W_{\rm tot}$) только при достаточно больших величинах параметра σ. Если же параметр замагниченности не превышает σ_{crit}, то в струйном выбросе заметную часть энергии будут переносить частицы. Последнее означает, что в процессе коллимации джета значительная часть энергии должна быть передана от электромагнитного поля к частицам плазмы. Интересно, что как для активных галактических ядер, так и для быстрых радиопульсаров значение σ_{crit} оказывается примерно одинаковым:

$$\sigma_{\text{crit}} \approx 10^5 \div 10^6. \tag{4.375}$$

4. При достаточно больших внешних магнитных полях центральная часть струйного выброса должна быть дозвуковой.

5. Важным результатом является и утверждение о том, что при учете внешнего регулярного магнитного поля уравнения магнитной гидродинамики позволяют построить самосогласованную модель струйного выброса, в котором полный продольный электрический ток $I(\Psi_0)$ равен нулю.

Таким образом, общие соотношения позволяют сделать прямые предсказания, справедливость которых может быть проверена с помощью наблюдений. Как мы видели, они фактически зависят лишь от трех величин: параметра замагниченности σ, лоренц-фактора в области генерации γ_{in} (скорости v_{in}) и внешнего магнитного поля B_{ext}. Отметим, что полученные выше результаты применимы как к электронно-позитроным [Wardle et al., 1998], так и к электронно-протонным [Sikora, Madersky, 2000] струйным выбросам. При этом для электронно-позитронных джетов из активных галактических ядер ($B_{\text{in}} \sim 10^4$ Гс; $R_{\text{in}} \sim 10^{14}$ см) основная неопределенность содержится в величине параметра намагниченности.

Действительно, величина параметра намагниченности зависит от эффективности рождения пар в магнитосфере черной дыры, которая, в свою очередь, определяется плотностью жестких гамма-квантов. Если плотность жестких гамма-квантов с энергиями $\mathcal{E}_\gamma > 1$ МэВ вблизи черной дыры достаточно велика, то рождение частиц происходит за счет прямого столкновения фотонов: $\gamma + \gamma \to e^+ + e^-$ [Swensson, 1984]. Последнее приводит к резкому увеличению параметра множественности: $\lambda = n/n_{\text{GJ}} \sim 10^{10} \div 10^{12}$, где $n_{\text{GJ}} \approx \Omega B/2\pi ce$ — характерная плотность частиц, необходимая для экранирования продольного электрического поля. В результате получаем

$$\sigma \sim 10 \div 10^3; \quad \gamma_{\text{in}} \sim 3 \div 10. \tag{4.376}$$

При этом характерные магнитные поля — $B_{\text{min}} \sim 1$ Гс и $B_{\text{eq}} \sim 10^{-3}$ Гс — существенно превышают магнитные поля в межзвездной среде.

Для малых плотностей гамма-квантов, когда рождение электронно-позитронной плазмы, как было показано выше, может иметь место лишь в областях с ненулевым продольным электрическим полем, эквивалентных внешнему зазору в магнитосфере радиопульсаров, множественность рождения частиц оказывается незначительной:

$\lambda \sim 10 \div 100$. В этом случае

$$\sigma \sim 10^{11} \div 10^{13}; \quad \gamma_{\text{in}} \sim 10. \tag{4.377}$$

Здесь даже величина $B_{\text{min}} \sim 10^{-8}$ Гс является слишком малой по сравнению с внешним магнитным полем.

Наконец, для быстрых радиопульсаров типа Краб и Вела ($B_{\text{in}} \sim \sim 10^{13}$ Гс; радиус полярной шапки $R_{\text{in}} \sim 10^5$ см; $\lambda = n/n_{\text{GJ}} \sim 10^4$), у которых наблюдаются струйные выбросы, имеем [Боговалов, 1998]

$$\sigma \sim 10^6 \div 10^7; \quad \gamma_{\text{in}} \sim 10^2 \div 10^3, \tag{4.378}$$

так что $B_{\text{in}} \sim 10^{-3}$ Гс и $B_{\text{eq}} \sim 10^{-7}$ Гс. В результате у источников с большими значениями σ ($\sim 10^{12}$) частицы в джете переносят долю энергии, малую по сравнению с потоком электромагнитного поля, так что течение в пределах струйного выброса слабо отличается от бессилового. В этом случае внешнее магнитное поле ($B_{\text{ext}} \sim 10^{-6}$ Гс) превышает критическое ($B_{\text{crit}} \sim 10^{-7}$ Гс). Согласно (4.299) и (4.344) во внутренних областях таких джетов должна существовать дозвуковая область. У источников с параметром намагниченности $\sigma \sim 100$ в процессе коллимации струйного выброса значительная часть энергии передается частицам плазмы, а дозвуковая область вблизи оси вращения не формируется. Что же касается быстрых радиопульсаров, то для них $B_{\text{ext}} \ll B_{\text{crit}}$, так что дозвуковая область в центральных областях джетов также не достигается. При этом оценка (4.374) показывает, что с частицами должна быть связана заметная часть полной энергии, содержащейся в струйном выбросе.

Наконец, как мы видели, однородное магнитное поле, совпадающее с магнитным полем внешней среды, может быть решением и для внутренних областей джета. Следовательно, естественным образом находит свое объяснение величина поперечного размера струйных выбросов из активных галактических ядер. Одновременно благодаря малой трансформации энергии электромагнитного поля в энергию частиц можно объяснить и передачу энергии от компактного объекта в области энерговыделения. Вместе с тем продолжение МГД-решения в область струйного выброса требует чрезвычайно высоких энергий частиц ($\sim 10^4$ МэВ), которые в настоящее время не зарегистрированы. Впрочем, для последовательного обсуждения вопроса об энергии истекающей плазмы необходим корректный учет взаимодействия частиц с окружающей средой (например, с фоновым излучением), которое может привести к существенному изменению их энергии.

4.4.4. Радиальный замагниченный ветер. Исследуем еще один характерный случай, когда истечение плазмы происходит с поверхности вращающегося шара с монопольным магнитным полем. Как уже говорилось, эта модель вполне может рассматриваться как первое приближение для внешних областей магнитосферы черной дыры, находящейся в центре активного галактического ядра. Кроме того, она интересна и при описании пульсарного ветра, поскольку за пределами светового цилиндра структура магнитных силовых линий также может быть близка к монопольной. Не исключено, что подобная геометрия магнитного поля имеет место и вблизи молодых звезд. Ниже мы подробно обсудим основные свойства точных решений, полученных при анализе указанного круга задач.

1. *Истечение холодной релятивистской плазмы с поверхности медленно вращающегося шара* [Боговалов, 1992]. Впервые точное решение задачи о радиальном истечении вещества в рамках метода уравнения Грэда–Шафранова было получено С. В. Боговаловым (1992 г.) для случая холодной релятивистской электронно-позитронной плазмы (и в пренебрежении силами гравитации). Дело в том, что при отсутствии вращения (т. е. при $\Omega_{\rm F} = 0$, $L = 0$) монопольное магнитное поле $\Psi = \Psi_0(1 - \cos\theta)$ вновь является решением уравнения Грэда–Шафранова, поскольку движущаяся радиально плазма (которая к тому же при $\Omega_{\rm F} = 0$ должна быть электронейтральной) не возмущает радиальное магнитное поле. Поэтому монопольное магнитное поле действительно может быть выбрано в качестве точного нулевого приближения.

Согласно общему выражению $b = 2 + i - s'$ (см. (1.63)) для холодной плазмы уравнение Грэда–Шафранова требует четырех граничных условий на поверхности $r = R$ (четыре интеграла движения, две критические поверхности). Такими четырьмя граничными условиями могут быть угловая скорость $\Omega_{\rm F}$, лоренц-фактор γ и концентрация n плазмы, а также функция магнитного потока $\Psi(R, \theta)$. Для невращающегося шара их естественно выбрать в виде

$$\Omega_{\rm F}(R, \theta) = 0; \tag{4.379}$$

$$\gamma(R, \theta) = \gamma_{\rm in} = {\rm const}; \tag{4.380}$$

$$n(R, \theta) = n_{\rm in} = {\rm const}; \tag{4.381}$$

$$\Psi(R, \theta) = \Psi_0(1 - \cos\theta). \tag{4.382}$$

Напомним, что величина n есть концентрация в сопутствующей системе координат. Она связана с концентрацией в лабораторной системе соотношением $n^{(\text{лаб})} = n/\gamma_{\rm in}$. На расстоянии

$$r_a = R\frac{B_{\rm p}}{\sqrt{4\pi n_{\rm in} u_{\rm in}^2 m_e c^2}} \tag{4.383}$$

(где $u_{\rm in} = \sqrt{\gamma_{\rm in}^2 - 1}$, а $B_{\rm p} = \Psi_0/2\pi R^2$ — магнитное поле на поверхности шара) течение плазмы гладко пересекает альфвеновскую и совпадающую с ней при $I = 0$ быструю магнитозвуковую поверхности. Это выражение непосредственно следует из уравнения Бернулли (4.50), в котором нужно положить $\Omega_{\rm F} = 0$ и $L = 0$ (кроме того, его можно получить и из соотношения $\mathcal{M}^2 = 1$).

Допустим теперь, что тело начинает вращаться с малой угловой скоростью Ω, так что параметр

$$\varepsilon_{\rm b} = \frac{\Omega r_a}{v_{\rm in}} \tag{4.384}$$

(где $v_{\rm in} = c\sqrt{1-\gamma_{\rm in}^{-2}}$) остается много меньше единицы. Тогда благодаря высокой проводимости шара (еще одно дополнительное предположение) мы можем положить $\Omega_{\rm F} = \Omega$.

Отметим одно чрезвычайно важное обстоятельство, касающееся определения величины продольного тока I (или интеграла L). Дело в том, что при учете конечной массы частиц, когда, помимо альфвеновской, плазма должна пересечь еще и быструю магнитозвуковую поверхность, продольный ток I уже не является свободной функцией. Он должен определяться из условия гладкого прохождения через особые поверхности. Действительно, при ненулевом вращении, когда сразу два параметра, $\Omega_{\rm F}(\Psi)$ и $L(\Psi)$, оказываются отличными от нуля, их отношение, вообще говоря, может быть произвольным. Соответственно, произвольным оказывается и положение альфвеновской поверхности (4.157):

$$r_{\rm A}^2 = \frac{L}{\Omega_{\rm F} E \sin^2\theta}, \tag{4.385}$$

где теперь $E = \gamma_{\rm in}\mu\eta = {\rm const}$.

Однако для малых величин $\varepsilon_{\rm b}$ гладкий переход с дозвуковой на сверхзвуковую ветвь возможен лишь в случае, когда положение альфвеновской поверхности (4.385) в нулевом порядке по малой величине $\varepsilon_{\rm b}$ совпадает с положением быстрой магнитозвуковой поверхности (4.383) (рис. 4.12). В результате имеем

$$L(\theta) = \frac{\Omega_{\rm F}}{8\pi^2}\Psi_0\sin^2\theta, \tag{4.386}$$

поэтому продольный ток I здесь совпадает с Майкелевским током $I_{\rm M}$ (см. (2.220)). Неудивительно, что при таком токе практически отсутствует коллимация магнитных поверхностей вдоль оси вращения (см. ниже).

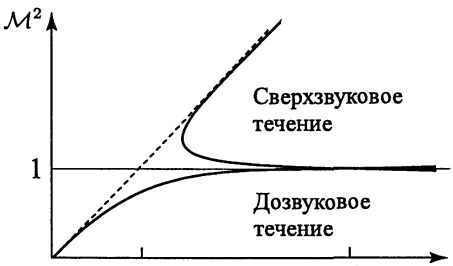


Рис. 4.12. Ход корней релятивистского уравнения Бернулли (4.50) вблизи особых поверхностей. Пунктиром показана зависимость $\mathcal{M}^2(r)$ при отсутствии вращения, а сплошной линией — при $\Omega_{\rm F} \neq 0$. Трансзвуковой режим аккреции имеет место, когда радиус альфвеновской поверхности $r_{\rm A}$ близок к r_a

В итоге решение уравнения Грэда–Шафранова по-прежнему можно искать в форме $\Psi(r,\theta) = \Psi_0[1-\cos\theta + \varepsilon_{\rm b}^2 f(x,\theta)]$, причем линеаризованное уравнение принимает вид

$$\varepsilon_{\rm b}^2(x^2-1)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\varepsilon_{\rm b}^2 x\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\varepsilon_{\rm b}^2}{x^2}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) = \frac{2}{\gamma_{\rm in}^2}\left(\frac{\Omega r_a}{v_{\rm in}}\right)^2\sin^2\theta\cos\theta, \tag{4.387}$$

где $x = r/r_a$. Подчеркнем, что при выводе уравнения (4.387) было использовано соотношение (4.386). В противном случае его правая часть имела бы дополнительную особенность при $x = 1$. Кроме того, нами вновь учитывался тот факт, что возмущение монопольного магнитного поля остается малым и поэтому величина $L(\Psi)$, которая сама рассматривается здесь как малое возмущение, может быть переписана как $L(\theta)$.

Уравнение (4.387) обладает теми же свойствами, что и уравнения для гидродинамических течений.

1. Оно линейно.
2. Угловой оператор совпадает с оператором $\hat{\mathcal{L}}_\theta$ (см. (1.115)).
3. Решение уравнения (4.387) может быть разложено по собственным функциям оператора $\hat{\mathcal{L}}_\theta$.

Поэтому решение (4.387) можно записать в виде

$$\Psi(r,\theta) = \Psi_0[1 - \cos\theta + \varepsilon_{\mathrm{b}}^2 g_2(x)\sin^2\theta\cos\theta], \tag{4.388}$$

где радиальная функция $g_2(x)$ должна определяться из уравнения

$$(x^2-1)\frac{\mathrm{d}^2 g_2}{\mathrm{d}x^2} + 2x\frac{\mathrm{d}g_2}{\mathrm{d}x} + \frac{6}{x^2}g_2 = \frac{2}{\gamma_{\mathrm{in}}^2}. \tag{4.389}$$

Подчеркнем, что сингулярность при $x = 1$ в уравнении (4.389) соответствует не альфвеновской особенности (которая уже была использована при получении соотношения (4.386)), а особенности на быстрой магнитозвуковой поверхности. Таким образом, несмотря на то что в нулевом приближении эти поверхности совпадают, они дают не одно, а два критических условия. Поскольку же рассматриваемый здесь пример является вырожденным, мы можем использовать эти два критических условия независимо друг от друга: условие на альфвеновской поверхности будет определять величину $L(\Psi)$, а условие на быстрой магнитозвуковой поверхности — структуру полоидального магнитного поля. В общем случае подобное разделение не имеет места, поэтому правильнее говорить, что все критические условия на особых поверхностях вместе определяют продольный ток и структуру полоидального поля.

Вернемся к обсуждению свойств уравнения (4.389). Оно является частным случаем уравнения

$$(x^2-1)\frac{\mathrm{d}^2 g_m}{\mathrm{d}x^2} + 2x\frac{\mathrm{d}g_m}{\mathrm{d}x} + \frac{m(m+1)}{x^2}g_m = a_m \tag{4.390}$$

при $m = 2$. Граничными условиями к нему по-прежнему будут

1) условие на поверхности шара, $g_m(R/r_a) = 0$;
2) отсутствие особенности при $x = 1$.

В результате общее решение уравнения (4.390) запишется в виде [Боговалов, 1992]

$$g_m(t) = -a_m C_1(t)\mathcal{P}_m(t) + a_m C_2(t)\mathcal{Q}_m(t), \tag{4.391}$$

где $t = 1/x$,

$$C_1(t) = \frac{\mathcal{Q}_m(r_a/R)}{\mathcal{P}_m(r_a/R)} \int\limits_1^{r_a/R} \frac{\mathcal{P}_m(y)}{y^2}\,\mathrm{d}y + \int\limits_{r_a/R}^{t} \frac{\mathcal{Q}_m(y)}{y^2}\,\mathrm{d}y, \tag{4.392}$$

$$C_2(t) = \int\limits_1^t \frac{\mathcal{P}_m(y)}{y^2}\,\mathrm{d}y, \tag{4.393}$$

а $\mathcal{P}_m(t)$ и $\mathcal{Q}_m(t)$ — полиномы Лежандра первого и второго рода соответственно. Эти выражения и решают поставленную задачу.

Как и в большинстве гидродинамических задач, рассмотренных в гл. 1, асимптотика решения при $r \to \infty$ полностью определяется неоднородным решением уравнения (4.387), т. е. не зависит от граничных условий. Этот замечательный факт связан с тем, что фундаментальные решения однородного уравнения

$$(x^2 - 1)\frac{\mathrm{d}^2 g_m}{\mathrm{d}x^2} + 2x\frac{\mathrm{d}g_m}{\mathrm{d}x} + \frac{m(m+1)}{x^2}g_m = 0, \tag{4.394}$$

$g_m^{(1)}(x) = c_1$ и $g_m^{(2)}(x) = c_2 x^{-1}$, ограничены при $x \to \infty$, тогда как неоднородное решение при увеличении x растет. В результате на расстояниях $r \gg r_a$ имеем

$$\Psi(r,\theta) = \Psi_0\left[1 - \cos\theta + 2\varepsilon_\mathrm{b}^2\frac{1}{\gamma_\mathrm{in}^2}\ln\left(\frac{r}{r_a}\right)\sin^2\theta\cos\theta + \ldots\right]. \tag{4.395}$$

Таким образом, хотя магнитные силовые линии и имеют тенденцию к коллимации вдоль оси вращения (поправка $\delta\Psi > 0$ при $\theta < \pi/2$), данный процесс происходит чрезвычайно медленно, так что даже в районе светового цилиндра, который в рассматриваемой задаче находится значительно дальше по сравнению с особыми поверхностями ($R_\mathrm{L} \approx \varepsilon_\mathrm{b}^{-1} r_a$; см. (4.383)), возмущение монопольного магнитного поля $\sim \varepsilon_\mathrm{b}^2 \ln(1/\varepsilon_\mathrm{b})$ оказывается много меньше единицы. Что же касается энергии частиц, то в рассматриваемой задаче она практически не изменяется по сравнению с начальной энергией $\gamma_\mathrm{in} m_\mathrm{p} c^2$.

Упражнение. Покажите, что в первом приближении по величине ε_b^2 движение является радиальным: $v_\varphi = 0$.

2. *Истечение холодной релятивистской плазмы с учетом неоднородности и дифференциального вращения* [Beskin, Okamoto, 2000]. Полученные выше результаты легко обобщаются на случай дифференциального вращения, а также на случай неоднородного истечения [Beskin, Okamoto, 2000]. Здесь четыре граничных условия удобно представить в следующем виде:

$$u(R,\theta) = u_\mathrm{in} q_1(\theta); \tag{4.396}$$

$$n(R,\theta) = n_\mathrm{in} q_2(\theta); \tag{4.397}$$

$$\Omega_\mathrm{F}(R,\theta) = \Omega\omega(\theta); \tag{4.398}$$

$$\Psi(R,\theta) = \Psi_0(1 - \cos\theta), \tag{4.399}$$

где функции $q_1(\theta) \sim 1$ и $q_2(\theta) \sim 1$ описывают неоднородности в начальном распределении четырех-скорости и концентрации, а функция $\omega(\theta) \sim 1$ — дифференциальное вращение, которое, например, может быть связано с дифференциальным вращением диска (рис. 4.13).

В итоге при нулевом вращении положение альфвеновской и быстрой магнитозвуковой поверхностей задается как

$$r_{\rm A}^2(\theta) = \frac{r_a^2}{q_1^2(\theta)q_2(\theta)}, \qquad (4.400)$$

где r_a по-прежнему определяется соотношением (4.383). Условие же регулярности на альфвеновской поверхности приводит к следующему выражению для углового момента:

$$L(\theta) = \frac{1}{c}\Omega_{\rm F}(\theta)E_0(\theta)r_{\rm A}^2(\theta)\sin^2\theta, \qquad (4.401)$$

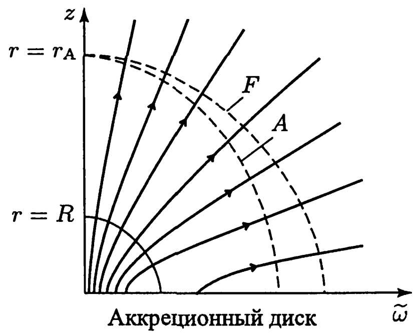


Рис. 4.13. Дифференциальное вращение диска вблизи компактного объекта приводит к угловой зависимости $\Omega_{\rm F}(\theta)$. Граничные условия могут быть заданы на поверхности сферы $r = R$, где полоидальное магнитное поле уже близко к монопольному [Beskin, Okamoto, 2000]

где величина $E_0(\theta) = \gamma(\theta)\mu\eta(\theta)$ легко может быть определена из граничных условий (4.396)–(4.399). Тогда продольный ток I принимает вид

$$I(r,\theta) = \frac{2\pi}{c}\Omega_{\rm F}(\theta)E_0(\theta)r_{\rm A}^2(\theta)\sin^2\theta. \qquad (4.402)$$

Напомним, что благодаря малому возмущению монопольного магнитного поля эти выражения справедливы при любом радиусе r.

Последнее соотношение показывает, что при учете дифференциального вращения, как и в задаче для цилиндрических струйных выбросов, варьируя профиль угловой скорости $\Omega_{\rm F}(\theta)$, можно смоделировать любой профиль продольного тока. В частности, если $\Omega_{\rm F}$ обращается в нуль на какой-нибудь магнитной поверхности $\theta = \theta_0$, то согласно (4.402) полный электрический ток, текущий в области $\theta < \theta_0$, равен нулю.

Что же касается линеаризованного уравнения для функции $f(r,\theta)$, то оно теперь имеет вид

$$q_1^2(\theta)q_2(\theta)\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\sin\theta}{x^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) =$$
$$= \frac{1}{\gamma_{\rm in}^2}\frac{\omega(\theta)\sin\theta}{q_1(\theta)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\frac{\omega(\theta)\sin^2\theta}{q_1(\theta)}\right], \qquad (4.403)$$

где по-прежнему $x = r/r_a$, а $\gamma_{\rm in}^2 = 1 + u_{\rm in}^2$. Как мы видим, разделение переменных здесь возможно лишь при условии $q_1^2(\theta)q_2(\theta) = \mathrm{const}$.

В частности, при $q_1 = q_2 = 1$ точное решение вновь может быть записано в виде

$$f(r,\theta) = \sum_m g_m(r) Q_m(\theta), \tag{4.404}$$

где радиальные функции $g_m(r)$ должны находиться из уравнения (4.390), в котором коэффициенты a_m определяются как

$$\sum_m a_m Q_m(\theta) = \frac{1}{2\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\omega^2 \sin^4\theta). \tag{4.405}$$

С другой стороны, асимптотическое поведение решения уравнения (4.403) вновь не зависит от граничных условий и может быть получено в самом общем виде непосредственно из анализа лидирующих членов. Оно имеет вид

$$f(x,\theta) = \frac{\ln x}{2\sin\theta q_1^2(\theta) q_2(\theta)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\frac{\omega^2\sin^4\theta}{u_{\mathrm{in}}^2(\theta)}\right]. \tag{4.406}$$

Упражнения.

1. Воспользовавшись соотношением (4.402), покажите, что выражение (4.406) может быть переписано как

$$f(x,\theta) = \frac{\ln x}{2I_{\mathrm{A}}^2 \sin\theta q_1^2(\theta) q_2(\theta)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\frac{I^2}{\gamma_{\mathrm{in}}^2(\theta)}\right], \tag{4.407}$$

где $I_{\mathrm{A}} = 2\pi c\eta_{\mathrm{in}} r_a^2 \Omega$.

2. Покажите, что в случае малого возмущения монопольного магнитного поля радиус кривизны магнитных поверхностей может быть записан в виде (см., например, [Begelman, Li, 1994])

$$\frac{1}{R_{\mathrm{c}}} = \frac{\varepsilon^2}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) \tag{4.408}$$

и поэтому асимптотику уравнения (4.403) при $r \to \infty$ можно переписать как

$$\frac{\mu n u^2}{R_{\mathrm{c}}} \sim \frac{1}{2\pi r^3 c^2 \sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{I^2}{\gamma^2}\right). \tag{4.409}$$

В частности, при $\gamma_{\mathrm{in}} = \mathrm{const}$ мы возвращаемся к соотношению (4.228).

3. *Истечение холодной нерелятивистской плазмы с поверхности медленно вращающегося шара* [Beskin, Okamoto, 2000]. Приведем основные соотношения для задачи о нерелятивистском истечении замагниченной плазмы с поверхности медленно вращающегося тела. В этом случае четыре граничных условия будут иметь вид

$$v_{\mathrm{p}}(R,\theta) = v_{\mathrm{in}} q_1(\theta); \tag{4.410}$$
$$\rho(R,\theta) = \rho_{\mathrm{in}} q_2(\theta); \tag{4.411}$$
$$\Omega_{\mathrm{F}}(R,\theta) = \Omega\omega(\theta); \tag{4.412}$$
$$\Psi(R,\theta) = \Psi_0(1-\cos\theta). \tag{4.413}$$

В результате радиус альфвеновской и быстрой магнитозвуковой поверхностей при нулевом вращении запишется как

$$r_{\rm A}^2(\theta) = \frac{r_a^2}{q_1^2(\theta)q_2(\theta)}, \tag{4.414}$$

где

$$r_a^2 = R^2 \frac{B_0^2}{4\pi \rho_{\rm in} v_{\rm in}^2}. \tag{4.415}$$

Условие на альфвеновской поверхности дает следующие выражения для углового момента $L_{\rm n}$ и тока I:

$$L_{\rm n}(r,\theta) = \frac{\Omega_{\rm F}(\theta) r_a^2 \sin^2\theta}{q_1^2(\theta)q_2(\theta)}; \tag{4.416}$$

$$I(r,\theta) = 2\pi c \frac{v_{\rm in}\rho_{\rm in} r_a^2}{B_0} \frac{\Omega_{\rm F}(\theta)\sin^2\theta}{q_1(\theta)}. \tag{4.417}$$

Линеаризованное уравнение для функции $f(r,\theta)$ будет выглядеть как

$$q_1^2(\theta)q_2(\theta)\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\sin\theta}{x^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) =$$
$$= \frac{\omega(\theta)\sin\theta}{q_1(\theta)}\frac{\rm d}{{\rm d}\theta}\left[\frac{\omega(\theta)\sin^2\theta}{q_1(\theta)}\right], \tag{4.418}$$

где по-прежнему $x = r/r_a$. При $q_1 = q_2 = 1$ решение этого уравнения вновь может быть найдено с помощью описанной выше процедуры; нужно лишь в соотношении (4.403) положить $\gamma_{\rm in} = 1$. В асимптотически же далекой области ($r \gg r_a$) оно имеет вид

$$f(x,\theta) = \frac{\ln x}{2I_{\rm A}^2 \sin\theta q_1^2(\theta)q_2(\theta)}\frac{{\rm d}I^2}{{\rm d}\theta}. \tag{4.419}$$

Как и следовало ожидать, здесь нерелятивистское уравнение Грэда–Шафранова можно переписать в физически ясной форме: $\rho v^2/R_{\rm c} = j_{\parallel}B_{\varphi}/c$ (см. (4.227)).

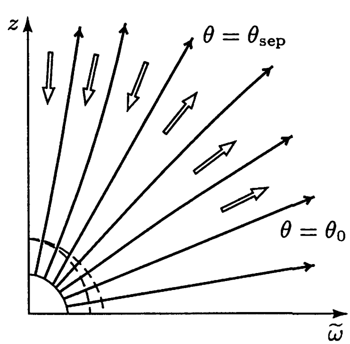


Рис. 4.14. Структура магнитных поверхностей при существовании объемного замыкающего тока (нерелятивистский случай) [Beskin, Okamoto, 2000].

Таким образом, мы приходим к выводу о том, что в нерелятивистском пределе вблизи оси вращения ($\theta < \theta_{\rm sep}$) должна иметь место коллимация магнитных поверхностей ($R_{\rm c} > 0$ при $j_{\parallel} > 0$), а в области объемного замыкающего тока ($\theta_{\rm sep} < \theta < \theta_0$) следует ожидать деколлимации магнитных силовых линий ($R_{\rm c} < 0$ при $j_{\parallel} < 0$) (рис. 4.14). При этом сам профиль продольного тока может быть совершенно произвольным. В релятивистском же случае знак радиуса кривизны R_c определяет уже не ток I, а отношение I/γ. Еще раз подчеркнем, что подобной картины не наблюдается в математической бесконечности, когда возмущение монопольного магнитного поля $\varepsilon_b^2 f$ становится порядка единицы.

УПРАЖНЕНИЕ. Покажите, что для однородного истечения ($q_1 = q_2 = 1$) тороидальное магнитное и электрическое поля имеют вид [Parker, 1958]

$$B_\varphi = -\frac{\Omega_F R}{v_{in}} \frac{R}{r} B_0 \sin\theta; \tag{4.420}$$

$$E_\theta = -\frac{\Omega_F R}{c} \frac{R}{r} B_0 \sin\theta, \tag{4.421}$$

так что в нерелятивистском случае электрическое поле всегда много меньше магнитного.

4. *Истечение холодной релятивистской плазмы с поверхности быстро вращающегося шара* [Beskin, Kuznetsova, Rafikov, 1998]. Рассмотрим задачу об истечении холодной релятивистской плазмы с поверхности быстро вращающегося тела [Beskin, Kuznetsova, Rafikov, 1998]. В данном случае возможность аналитического исследования связана с тем, что в качестве нулевого приближения здесь можно воспользоваться монопольным решением Майкеля [Michel, 1973a], которое является точным в бессиловом приближении при условии специального выбора продольного тока $I_M(\theta)$ (см. (2.220)) и угловой скорости вращения Ω_F. Иными словами, рассмотрим малые поправки, связанные с конечностью массы частиц. При этом параметр замагниченности будет считаться много больше единицы: $\sigma \gg 1$.

Согласно (1.63) задача опять требует четырех граничных условий, в качестве которых можно выбрать монопольное условие $\Psi(R,\theta) = \Psi_0(1-\cos\theta)$ при $\theta < \pi/2$ и значения еще трех физических величин на поверхности тела. Для простоты опять рассмотрим случай

$$\Omega_F(R,\theta) = \Omega_F = \text{const}; \tag{4.422}$$

$$\gamma(R,\theta) = \gamma_{in} = \text{const}; \tag{4.423}$$

$$n(R,\theta) = n_{in} = \text{const}. \tag{4.424}$$

Вводя малые возмущения к бессиловым значениям интегралов $L_0 = I_M/2\pi$ и $E_0 = \Omega_F L_0$ как

$$E(\Psi) = E_0(\Psi) + b(\Psi); \tag{4.425}$$

$$L(\Psi) = L_0(\Psi) + l(\Psi), \tag{4.426}$$

получаем

$$\eta = \frac{n_{in} u_{in}}{B_p}; \tag{4.427}$$

$$e' = E - \Omega_F L = b - \Omega_F l = \frac{B_p}{4\pi}\mathcal{M}^2(R) = \gamma_{in}\mu\eta, \tag{4.428}$$

причем интегралы движения η, $\Omega_{\rm F}$, и e' будут здесь постоянны во всем пространстве. В соотношении (4.428) $\mathcal{M}^2(R)$ — квадрат числа Маха на поверхности звезды, а $B_{\rm p} = \Psi_0/2\pi R^2$ — радиальное магнитное поле на поверхности. Напомним, что согласно (2.220) величина E_0 представима в виде $E_0 = E_{\rm A}\sin^2\theta$, где $E_{\rm A} = \sigma\mu\eta$. Кроме того, благодаря условию $\sigma \gg 1$ имеем $e'/E \ll 1$. Наконец, согласно (4.428) можно записать

$$b(\Psi) = e' + \Omega_{\rm F} l(\Psi). \tag{4.429}$$

Что же касается величины $l(\Psi)$ (которая при малых возмущениях монопольного поля по-прежнему может рассматриваться как функция угла θ, т. е. $l = l(\theta)$), то она должна определяться из условия регулярности на быстрой магнитозвуковой поверхности.

Вновь будем искать решение уравнения (4.71) в виде $\Psi(r,\theta) = \Psi_0 \times \times [1 - \cos\theta + \varepsilon f(r,\theta)]$, где $\varepsilon \sim \gamma_{\rm in}\sigma^{-1} \ll 1$. Подставляя это разложение в (4.71), с необходимой точностью получаем [Beskin, Kuznetsova, Rafikov, 1998] ($c = 1$)

$$\begin{aligned}
&\varepsilon A\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \varepsilon A\frac{D+1}{Dr^2}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) - 2\varepsilon\Omega_{\rm F}^2 r\sin^2\theta\frac{\partial f}{\partial r} - \\
&\quad - 2\varepsilon\Omega_{\rm F}^2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial f}{\partial\theta} + 2\varepsilon\Omega_{\rm F}^2(3\cos^2\theta - 1)f + \frac{8\pi^2\Omega_{\rm F}}{\Psi_0}\frac{1}{\sin\theta}\frac{{\rm d}}{{\rm d}\theta}(l\sin^2\theta) - \\
&\quad - 2\varepsilon\frac{A}{Dr^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\theta} + 2\varepsilon\frac{A}{Dr^2}\frac{1+\cos^2\theta}{\sin^2\theta}f - \frac{64\pi^4 A}{D\mathcal{M}^4}\frac{1}{\Omega_{\rm F}^2}\left(\frac{e'}{\Psi_0}\right)^2\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} + \\
&\quad + \frac{2A(1-\mathcal{M}^2)}{D}\frac{1}{\Omega_{\rm F}^2 r^4}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{16\pi^2 A}{D}\frac{e'}{\Psi_0}\frac{1}{\Omega_{\rm F}^2 r^2}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} - \\
&\quad - \frac{8\pi^2 A}{D}\frac{1}{\Omega_{\rm F} r^2}\frac{\sin\theta}{\Psi_0}\frac{{\rm d}}{{\rm d}\theta}\left(\frac{l}{\sin^2\theta}\right) - \frac{A}{D}\frac{1}{\Omega_{\rm F}^2 r^4}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} + \\
&\quad + \frac{2\mathcal{M}^2}{A}\Omega_{\rm F}^2\sin^2\theta\cos\theta - \frac{16\pi^2}{A}\frac{e'}{\Psi_0}\Omega_{\rm F}^2 r^2\sin^2\theta\cos\theta = 0.
\end{aligned} \tag{4.430}$$

Ясно, что в пределе $e' \to 0$, $\mathcal{M}^2 \to 0$, $D \to \infty$ выражение (4.430) переходит в бессиловое уравнение (2.234). К сожалению, в отличие от течений, рассмотренных выше, эта задача не может быть решена аналитически, поскольку здесь невозможно провести разделение переменных. В частности, нам удастся сформулировать лишь ограничения на функцию $l(\theta)$.

По той же причине лишь приблизительно можно определить и положение быстрой магнитозвуковой поверхности. Воспользовавшись общими соотношениями (4.175) и (4.177), а также явной зависимостью E_0 от θ, для $\gamma_{\rm in} \ll \sigma^{1/3}$ получаем

$$r_{\rm f}(\theta) \approx R_{\rm L}\sigma^{1/3}\sin^{-1/3}\theta \tag{4.431}$$

при $\theta > \sigma^{-1/2}$ и

$$r_{\rm f} \approx R_{\rm L}(\sigma/\gamma_{\rm in})^{1/2} \tag{4.432}$$

вблизи оси вращения. Для энергии плазмы на звуковой поверхности согласно (4.178) находим

$$\gamma(r_{\mathrm{f}}, \theta) = \left(\frac{E}{\mu\eta}\right)^{1/3} = \sigma^{1/3}\sin^{2/3}\theta. \tag{4.433}$$

Соответствующие положения альфвеновской и быстрой магнитозвуковой поверхностей показаны на рис. 4.15.

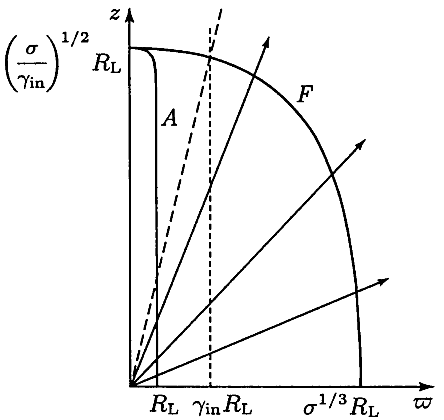


Рис. 4.15. Положение альфвеновской (A) и быстрой магнитозвуковой (F) поверхностей в случае $\gamma_{\mathrm{in}} \ll \sigma^{1/3}$ [Beskin, Kuznetsova, Rafikov, 1998]. Штриховой линией показана силовая линия $\Psi = \Psi_{\mathrm{in}}$, разделяющая области сильно- ($W_{\mathrm{par}} \ll W_{\mathrm{em}}$) и слабозамагниченного ($W_{\mathrm{par}} \gg W_{\mathrm{em}}$) течения

УПРАЖНЕНИЕ. Покажите, что для другого предельного случая, $\gamma_{\mathrm{in}} \gg \sigma^{1/3}$, быстрая магнитозвуковая поверхность имеет сферическую форму, а энергия частиц совпадает с начальной энергией [Боговалов, 1998]:

$$r_{\mathrm{f}} \approx \left(\frac{\sigma}{\gamma_{\mathrm{in}}}\right)^{1/2} R_{\mathrm{L}}; \tag{4.434}$$

$$\gamma_{\mathrm{f}} \approx \gamma_{\mathrm{in}}. \tag{4.435}$$

Перейдем к определению структуры магнитного поля. Для этого необходимо найти физический корень $\mathcal{M}^2(r)$ уравнения третьего порядка (4.164). Здесь удобно вновь воспользоваться величиной $q = \mathcal{M}^2/\Omega_{\mathrm{F}}^2\varpi^2$ (см. (4.138)), а также ввести новую переменную $\xi = 1 - \Sigma_{\mathrm{r}}^2$. В нашем случае она равна

$$\xi = 2\frac{e' + \Omega_{\mathrm{F}} l}{E} - \frac{2\varepsilon}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\theta} + 4\varepsilon\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} f. \tag{4.436}$$

Как легко проверить, $\xi = 0$ для бессилового решения Майкеля и остается много меньше единицы при $\sigma^{-1} \ll 1$. Подчеркнем, что именно зависимость ξ от εf позволяет анализировать задачу самосогласованно. В результате уравнение (4.164) может быть переписано в виде

$$q^3 - \frac{1}{2}\left(\xi + \frac{1}{\Omega_{\mathrm{F}}^2 r^2 \sin^2\theta}\right) q^2 + \frac{\mu^2\eta^2}{2E^2} + \frac{(e')^2}{2\Omega_{\mathrm{F}}^2 r^2 \sin^2\theta E^2} = 0. \tag{4.437}$$

Прежде всего, рассмотрим внутреннюю область вблизи оси вращения ($r\sin\theta < \gamma_{\rm in}R_{\rm L}$; $r < r_{\rm f}$). Физический корень уравнения (4.437) (т. е. корень, соответствующий дозвуковому течению, $D > 0$) в ней равен

$$q = \frac{e'}{E}, \tag{4.438}$$

т. е. не зависит от радиуса r. Следовательно, в этой области ускорения частиц не происходит (рис. 4.16):

$$\gamma(r,\theta) = \gamma_{\rm in}. \tag{4.439}$$

В частности, как мы видели, при $\sigma < \gamma_{\rm in}^3$ энергия частиц остается постоянной вплоть до быстрой магнитозвуковой поверхности.

В промежуточной области, $\gamma_{\rm in}R_{\rm L} < r\sin\theta$, $r < r_{\rm f}$, которая существует при $\sigma > \gamma_{\rm in}^3$, физический корень $D > 0$ алгебраического уравнения (4.437) имеет вид

$$q = \frac{\mu\eta}{E}\Omega_{\rm F} r\sin\theta. \tag{4.440}$$

В результате имеем

$$\gamma(r,\theta) = \Omega_{\rm F} r\sin\theta, \tag{4.441}$$

$$\mathcal{M}^2(r,\theta) = \sigma^{-1}\Omega_{\rm F}^3 r^3\sin\theta, \tag{4.442}$$

и $D = \mathcal{M}^{-2}$. Таким образом, здесь должен иметь место линейный рост энергии частиц. Подчеркнем, что в этой области все физические характеристики течения вообще не зависят от ξ, и следовательно, от возмущения поля $\varepsilon f(r,\theta)$. В частности, вновь появившаяся универсальная зависимость (4.441) по-прежнему определяется дрейфовым движением частиц в скрещенных полях. Поэтому здесь для нахождения основных параметров течения не нужно знать точного решения уравнения равновесия (4.430).

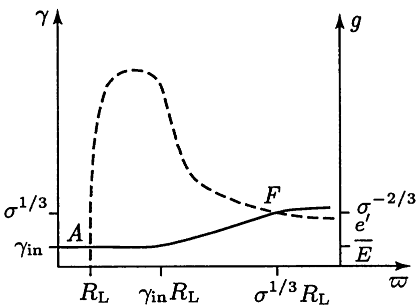


Рис. 4.16. Изменение энергии частиц вдоль силовых линий квазимонопольного магнитного поля для случая $\gamma_{\rm in} \ll \sigma^{1/3}$ при $\theta \approx \pi/2$. Штриховой линией показано нефизическое решение [Beskin, Kuznetsova, Rafikov, 1998]

Далее, условия $Q = 0$ и $\partial Q/\partial r = 0$ на быстрой магнитозвуковой поверхности, соответствующие условиям $D = 0$ и $N_r = 0$, перепишутся в виде

$$\xi(r_{\rm f},\theta) + \frac{1}{\Omega_{\rm F}^2 r_{\rm f}^2\sin^2\theta} = 3\left(\frac{\mu\eta}{E}\right)^{2/3}; \tag{4.443}$$

$$r_{\rm f}\left(\frac{\partial\xi}{\partial r}\right)_{r=r_{\rm f}} - \frac{2}{\Omega_{\rm F}^2 r_{\rm f}^2\sin^2\theta} = 0. \tag{4.444}$$

В итоге, полагая, что $r_{\rm f}\left(\partial\xi/\partial r\right)_{r=r_{\rm f}} \approx \xi$, приходим к следующему заключению. Соотношения (4.443) и (4.444), помимо уже полученного выше выражения для радиуса звуковой поверхности $r_{\rm f}$, приводят к еще одному важнейшему условию:

$$\xi(r_{\rm f}) \approx \sigma^{-2/3}. \tag{4.445}$$

Что же касается третьего условия, $\partial Q/\partial\theta = 0$, то в рассматриваемом приближении оно фактически сводится к (4.444) и не содержит никакой новой информации.

Сравнивая решение (2.235) с условием регулярности (4.445) на быстрой магнитозвуковой поверхности, а также воспользовавшись явным видом (4.436) функции ξ, можно получить важное ограничение на величину возмущения продольного тока, соблюдение которого необходимо для гладкого прохождения быстрой магнитозвуковой поверхности:

$$l/L_0 \sim \sigma^{-4/3}. \tag{4.446}$$

Следовательно, для существования трансзвукового течения продольный ток должен практически совпадать с бессиловым током $I_{\rm M}$. Тем самым подтверждается наш выбор в качестве нулевого приближения тока $I = 2\pi L_0(\Psi)$. Наконец, сравнивая соотношения (4.445) и (4.446) с выражением (4.436), находим

$$\varepsilon f(r_{\rm f}) \sim \sigma^{-2/3}. \tag{4.447}$$

Таким образом, возмущение монопольного магнитного поля остается малым по крайней мере вплоть до быстрой магнитозвуковой поверхности ($r = r_{\rm f}$). В результате оказывается оправданным и наше предположение о возможности исследовать эту задачу в рамках теории возмущений.

Что же касается асимптотической области $r \gg r_{\rm f}$, то в ней физический корень уравнения (4.437), отвечающий сверхзвуковому течению ($D < 0$), есть

$$q = \frac{\xi}{2}\left(1 - 4\frac{\mu^2\eta^2}{\xi^3 E^2}\right). \tag{4.448}$$

Как легко проверить, соответствующее значение энергии частиц, $\gamma = q(E/\mu\eta)$, здесь также совпадает с лоренц-фактором $\gamma = (1-U_{\rm dr}^2)^{-1/2}$, определяемым дрейфовой скоростью $U_{\rm dr} = |\mathbf{E}|/|\mathbf{B}| \approx |\mathbf{E}|/B_\varphi$. С другой стороны, уравнение Грэда–Шафранова (4.430) может быть переписано в простой форме:

$$\varepsilon r^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + 2\varepsilon r\frac{\partial f}{\partial r} - \sin\theta\frac{D+1}{D}\frac{\partial q}{\partial\theta} = 0, \tag{4.449}$$

где q задается выражением (4.448), причем

$$D + 1 = 8\frac{\mu^2\eta^2}{E^2\xi^3} \ll 1. \tag{4.450}$$

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Если предположить, что течение является точно радиальным ($\partial/\partial r = 0$), то уравнение (4.449) примет вид $\mathrm{d}q/\mathrm{d}\theta = 0$, что как раз и соответствует найденному ранее интегралу (4.234) [Heyvaerts, Norman, 1989]. Однако это соотношение, как было показано выше, бывает справедливым лишь в математической бесконечности, где действительно можно пренебречь радиальными производными. В области же физической бесконечности учет радиальных производных оказывается совершенно необходимым. В результате согласно (4.449) в асимптотически далекой области ($r \gg r_{\mathrm{f}}$) возмущение магнитного поля εf принимает вид [Tomimatsu, 1994]

$$\varepsilon f(r,\theta) = \sigma^{-2/3} a(\theta) \ln^{1/3}\left(\frac{r}{r_{\mathrm{f}}}\right), \tag{4.451}$$

где $a(\theta) \sim 1$. Иными словами, для сильнозамагниченного течения коллимация оказывается еще более слабой, чем для случая $W_{\mathrm{par}} \gg W_{\mathrm{em}}$, когда, как мы видели, $\varepsilon f \propto \ln(r/r_{\mathrm{f}})$. Соответственно, благодаря (4.140) и (4.448) за пределами быстрой магнитозвуковой поверхности практически перестает расти и энергия частиц:

$$\gamma(r \gg r_{\mathrm{f}}) \approx \sigma^{1/3} \ln^{1/3}\left(\frac{r}{r_{\mathrm{f}}}\right) \sin^{2/3}\theta. \tag{4.452}$$

Упражнения.

1. Покажите, что уравнение (4.449) в точности соответствует условию $\mathcal{F}_{\mathrm{c}} = \mathcal{F}_{\mathrm{em}}$, где электромагнитная сила $\mathcal{F}_{\mathrm{em}}$ задается правой частью соотношения (4.409), а в выражении для центрифугальной силы основную роль теперь должен играть поток вектора Пойнтинга S: $\mathcal{F}_{\mathrm{c}} = S/(cR_{\mathrm{c}})$.
2. Покажите, что магнитная силовая линия, проходящая через точку пересечения быстрой магнитозвуковой поверхности и цилиндра $\varpi = \gamma_{\mathrm{in}} R_{\mathrm{L}}$, соответствует силовой линии $\Psi = \Psi_{\mathrm{in}}$ (см. (4.290)), разделяющей области сильнозамагниченного ($W_{\mathrm{par}} \ll W_{\mathrm{em}}$) и слабозамагниченного ($W_{\mathrm{par}} \gg W_{\mathrm{em}}$) течения (см. рис. 4.15).
3. Покажите, что в области $\Psi < \Psi_{\mathrm{in}}$ при $r \gg r_{\mathrm{f}}$ рост возмущения монопольного магнитного поля соответствует слабозамагниченному течению ($\varepsilon f \propto \ln(r/r_{\mathrm{f}})$) [Lyubarsky, Eichler, 2001].

Таким образом, выше был приведен еще один пример решения для случая, когда условия регулярности на особых поверхностях ограничивают величину продольного тока, в результате чего за пределами быстрой магнитозвуковой поверхности как коллимация, так и ускорение частиц становятся неэффективными. Кроме того, было показано, что полученное еще Майкелем [Michel, 1969] выражение для энергии частиц на бесконечности, $\gamma \sim \sigma^{1/3}$, в рамках рассматриваемой модели остается справедливым.

5. *Истечение холодной релятивистской плазмы в параболическом магнитном поле* [Бескин, Нохрина, 2005]. Рассмотренный выше пример часто используется как аргумент против самой возможности эф-

фективного ускорения частиц в замагниченном релятивистском ветре. Однако, как мы видели, в цилиндрических струйных выбросах поток энергии частиц может приближаться к потоку энергии электромагнитного поля. Поэтому интересно проанализировать структуру сильнозамагниченного течения, беря в качестве нулевого приближения решение бессилового уравнения Грэда–Шафранова с параболической структурой магнитного поля (2.228). Тогда уже в нулевом приближении магнитные поверхности оказываются сколлимированы в сторону оси вращения и основным становится вопрос об ускорении частиц. С другой стороны, в отличие от предыдущей задачи полный магнитный поток здесь равен бесконечности. При этом, как мы увидим, на больших расстояниях течение фактически является одномерным, т. е. близким по своей структуре к цилиндрическим струйным выбросам, погруженным во внешнее однородное магнитное поле (см. п. 4.4.2).

Напомним, что в параболическом поле угловая скорость $\Omega_{\rm F}$ не может быть постоянной на всех магнитных поверхностях, поскольку величина $\Omega_{\rm F}(\Psi)$ задается угловой скоростью вращения диска (см. рис. 3.7). Ниже для простоты анализа обсуждается только область вблизи оси вращения, в которой функцию $\Omega_{\rm F}$ можно считать постоянной. В этом случае параметр замагниченности σ естественно определить через магнитный поток Ψ_0, заключенный на экваторе в пределах светового цилиндра ($R_{\rm L} = c/\Omega_{\rm F}$), что приводит к выражению

$$\sigma = \frac{C\Omega_{\rm F}}{4\pi\mu\eta}. \tag{4.453}$$

В остальном же построение решения полностью эквивалентно задаче об истечении релятивистской плазмы в монопольном магнитном поле. Поэтому мы не будем подробно останавливаться на деталях расчета, а приведем лишь сводку основных результатов для случая $\gamma_{\rm in} \ll \sigma^{1/3}$.

Прежде всего, рассмотрим область дозвукового течения, $r < r_{\rm f}$. Будем искать функцию магнитного потока с поправкой, связанной с учетом конечной массы частиц, в виде $\Psi(X,Y) = \Psi^{(0)}(X) + \varepsilon f(X,Y)$, где $\Psi^{(0)}(X)$ — бессиловое решение (2.228), $\varepsilon f(X,Y)$ — искомая малая поправка и введены ортогональные координаты $X = \Omega_{\rm F} r(1-\cos\theta)$ и $Y = \Omega_{\rm F} r(1+\cos\theta)$. В этом случае условие $\Psi < \Psi_0$ (где, как мы предполагаем, $\Omega_{\rm F} = {\rm const}$) запишется как $X \approx \Omega_{\rm F} r\theta^2/2 < 1$. Линеаризуя уравнение Грэда–Шафранова, получаем следующее уравнение для функции $\varepsilon f(X,Y)$ [Бескин, Нохрина, 2005]:

$$\varepsilon X\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} + \varepsilon\frac{\partial f}{\partial X} - \varepsilon\frac{f}{X} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial Y}\left(Y\frac{\partial f}{\partial Y}\right) + \pi C\left(X\frac{\partial q}{\partial X} + 2q\right) = 0, \tag{4.454}$$

где величина q по-прежнему задается соотношением (4.138). Важнейшим следствием уравнения (4.454) является тот факт, что в рассматриваемой области — $X < 1$ ($\Omega_{\rm F} = {\rm const}$) и $Y \gg X$ ($\theta \ll 1$) — член $\varepsilon\partial/\partial Y(Y\partial f/\partial Y)$, связанный с кривизной магнитных поверхностей, становится несущественным и им можно пренебречь. Последнее и означает, что структура параболического струйного выброса близка к одномерным цилиндрическим струйным выбросам. Изменяется лишь «внешнее» однородное магнитное поле. Найдя из уравнения Бернулли (4.437) величину q:

$$q = \frac{1}{2\sigma}\left(\frac{Y}{X}\right)^{1/2}, \tag{4.455}$$

и подставив ее в (4.454), для поправки к функции магнитного потока при $r < r_{\rm f}$ получаем

$$\varepsilon f(X,Y) = \frac{\pi\mathcal{C}}{\sigma} X^{1/2}Y^{1/2}. \tag{4.456}$$

Определим теперь положение быстрой магнитозвуковой поверхности ($r = r_{\rm f}$) и лоренц-фактор частиц ($\gamma_{\rm f} = \gamma(r_{\rm f})$). Вновь воспользуемся уравнением Бернулли (4.437). В результате в непосредственной близости от оси вращения (т. е. при $\theta < \gamma_{\rm in}^2/\sigma$), где поток энергии частиц всегда больше потока энергии электромагнитного поля, получаем

$$r_{\rm f} \approx \frac{\sigma}{\gamma_{\rm in}} R_{\rm L}; \tag{4.457}$$

$$\gamma_{\rm f} \approx \gamma_{\rm in}. \tag{4.458}$$

В обратном случае ($\theta \gg \gamma_{\rm in}^2/\sigma$) имеем

$$r_{\rm f} \approx \left(\frac{\sigma}{\theta}\right)^{1/2} R_{\rm L}; \tag{4.459}$$

$$\gamma_{\rm f} \approx \sigma^{1/2}\theta^{1/2}. \tag{4.460}$$

Отметим, что на внешней границе рассматриваемой области, $X = 1$ ($r \approx \sigma^{2/3}R_{\rm L}$; $\theta \approx \sigma^{-1/3}$), лоренц-фактор частиц на звуковой поверхности в точности равен $\sigma^{1/3}$.

Оценивая относительную роль поправки $\varepsilon f(X,Y)$ к функции магнитного потока $\Psi_0 \approx \pi\mathcal{C}X$ на быстрой магнитозвуковой поверхности, находим, что

$$\frac{\varepsilon f}{\Psi_0} \approx \frac{1}{\sigma\theta} \ll 1 \tag{4.461}$$

при $\theta > \gamma_{\rm in}^2/\sigma$. Таким образом, наше предположение о малости поправки к функции магнитного потока вплоть до быстрой магнитозвуковой поверхности получает свое подтверждение. Более того, беря теперь в качестве внешнего поля $B_{\rm ext}$ полоидальное поле бессилового параболического решения $B = \mathcal{C}/2r$, легко убедиться, что выражение (4.349) для положения быстрой магнитозвуковой поверхности для цилиндрического струйного выброса в точности совпадает с (4.459). Следовательно, по крайней мере до расстояний $r < (\sigma/\gamma_{\rm in})R_{\rm L}$ полоидальное магнитное поле близко к бессиловому. В силу же малости угла θ в интересующей нас области, $X < 1$, полоидальное магнитное поле здесь будет практически постоянным: $B_z \approx {\rm const}$.

УПРАЖНЕНИЕ. Покажите, что, как и для монопольного магнитного поля:

а) при $r < r_{\mathrm{f}}$ лоренц-фактор частиц определяется универсальной зависимостью $\gamma \approx x_r$;

б) при $y > \gamma_{\mathrm{in}}^3$ на быстрой магнитозвуковой поверхности $\gamma \approx y^{1/3}$;

в) поперечный размер струйного выброса определяется соотношением (4.301);

г) при $r < r_{\mathrm{f}}$ выражение (4.461) в точности сшивается с асимптотическим выражением (4.456).

Естественно предположить, что и вне быстрой магнитозвуковой поверхности течение остается одномерным и для сверхзвуковой области применимы результаты, полученные выше для цилиндрического течения. Иными словами, до расстояния $r \sim r_1$, где

$$r_1 = \gamma_{\mathrm{in}}\sigma R_{\mathrm{L}}, \tag{4.462}$$

полоидальное поле в области $X < 1$ при $r = \mathrm{const}$ можно считать постоянным, а при $r_1 < r < r_{\mathrm{eq}}$, где

$$r_{\mathrm{eq}} = \sigma^2 R_{\mathrm{L}}, \tag{4.463}$$

поле $B_z(r, \theta)$ имеет струйную структуру. Магнитное же поле на оси вращения при $r > r_1$ мало отличается от величины B_{min} (см. (4.310)). При этом во всей области $r > r_{\mathrm{f}}$ вклад потока энергии частиц растет с удалением от экваториальной плоскости:

$$\frac{W_{\mathrm{par}}}{W_{\mathrm{tot}}} \approx \left(\frac{r}{r_{\mathrm{eq}}}\right)^{1/2}. \tag{4.464}$$

Наконец, при $r > r_{\mathrm{eq}}$ поток энергии частиц оказывается сравнимым с потоком энергии электромагнитного поля. Таким образом, в параболическом магнитном поле возможна полная трансформация потока энергии электромагнитного поля в поток энергии частиц. Отметим, что на самóй быстрой магнитозвуковой поверхности может произойти заметное изменение структуры течения, так что при $r \gg r_{\mathrm{f}}$ возмущение бессилового параболического поля перестает быть малым, хотя и не становится существенно больше магнитного поля нулевого приближения (см. рис. 4.10, *в*).

В заключение еще раз повторим наиболее общие выводы, которые могут быть сделаны на основе анализа полученных выше точных решений.

1. При учете конечной массы частиц продольный ток I (точнее, угловой момент $L(\Psi)$) уже не является свободным параметром, а находится из условия гладкого прохождения всех критических поверхностей. При этом продольный ток вблизи звуковой поверхности оказывается близок к гольдрайховскому.

2. Близость продольного тока I к характерному току I_{M} означает, что величина I должна быть близка к минимально возможному току I_{min}, при котором в рамках бессилового приближения быстрая

магнитозвуковая поверхность уходит на бесконечность. Следовательно, при анализе сильно замагниченных течений можно воспользоваться гораздо более простой бессиловой версией уравнения Грэда–Шафранова, а величину тока определять из условия

$$I = I_{\min} \tag{4.465}$$

(конечно, при этом невозможно описать области, находящиеся за пределами быстрой магнитозвуковой поверхности). Условие же (4.465) может быть записано как «граничное условие на бесконечности»: $E_\theta(r \to \infty) = B_\varphi(r \to \infty)$, т. е. как [Okamoto, 2001]

$$4\pi I = \Omega_{\rm F} \sin\theta \, \frac{{\rm d}\Psi}{{\rm d}\theta}, \tag{4.466}$$

что эквивалентно «граничному условию на горизонте».

3. Ускорение частиц тесно связано со структурой магнитного поля. Эффективное ускорение становится возможным лишь для сильно сколлимированных течений. Для квазимонопольного истечения поток энергии частиц всегда много меньше потока энергии электромагнитного поля.

4.4.5. Магнитосфера черной дыры. Обсудим теперь основные результаты, которые могут быть получены при анализе полной версии уравнения Грэда–Шафранова, описывающей структуру магнитосферы вращающейся черной дыры. Здесь нас снова будут в первую очередь интересовать не проблемы построения работоспособной модели магнитосферы (краткий обзор, посвященный этой теме, был дан в гл. 3), а самые общие свойства течений. Поэтому необходимо сразу сформулировать основные вопросы, на которые мы постараемся ответить при анализе точных решений уравнения Грэда–Шафранова.

Прежде всего, напомним, что проблема энергетических потерь вращающейся черной дыры связана не столько с вопросом о величине продольного тока, как это было в случае магнитосферы радиопульсаров, сколько с вопросом о величине угловой скорости вращения магнитных силовых линий $\Omega_{\rm F}(\Psi)$. Действительно, в случае магнитосферы черной дыры угловая скорость $\Omega_{\rm F}(\Psi)$, входящая в выражение (2.30), вообще говоря, никак не связана с угловой скоростью черной дыры $\Omega_{\rm H}$, а сама определяется из решения полной задачи. Ниже будет показано, что при учете конечной массы частиц количества критических поверхностей достаточно для нахождения не только продольного тока I, но и угловой скорости $\Omega_{\rm F}$. Далее, точные решения позволяют проследить поведение решения вблизи черной дыры и тем самым подтвердить наш вывод об отсутствии особенности на горизонте событий. Наконец, ответив на вопрос о том, где для полного определения структуры течения должны быть поставлены граничные условия, можно сделать вывод и о механизме торможения вращающейся черной дыры.

В настоящее время имеется лишь два аналитических решения задачи о двумерной структуре магнитосферы черной дыры. Ниже мы подробно обсудим их основные свойства, которые несмотря на существенное упрощение задачи позволяют прояснить многие ключевые черты реальных течений.

1. *Медленно вращающаяся черная дыра с квазимонопольным магнитным полем* [Beskin, Kuznetsova, 2000a]. Рассмотрим черную дыру с монопольным магнитным полем (рис. 4.17). Ясно, что при отсутствии вращения монопольное поле $\Psi = \Psi_0(1 \pm \cos\theta)$ является точным решением и полной версии уравнения Грэда–Шафранова, поскольку радиальное движение плазмы (которая при $\Omega_F = 0$ вновь будет незаряженной) никак не сможет возмутить структуру магнитных поверхностей. Пусть для простоты плотность энергии магнитного поля много больше плотности энергии плазмы:

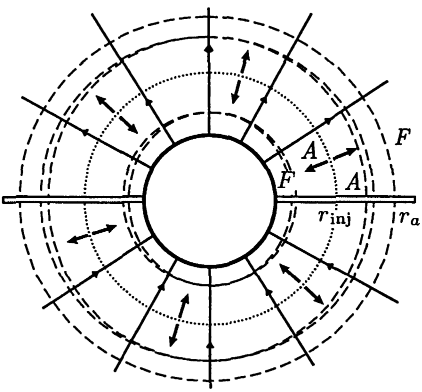


Рис. 4.17. Структура особых поверхностей (штриховые линии) и области генерации плазмы (пунктир) для черной дыры, погруженной в монопольное магнитное поле

$$\frac{\mathcal{E}_{\rm par}}{\mathcal{E}_{\rm B}} \ll 1, \tag{4.467}$$

а скорость вращения черной дыры столь мала, что основной поток энергии связан не с потоком вектора Пойнтинга, а с потоком частиц:

$$\frac{W_{\rm par}}{W_{\rm em}} \gg 1. \tag{4.468}$$

Иными словами, здесь обсуждается не обобщение бессилового решения Блендфорда–Знаека на случай конечной массы частиц, а обобщение решения Боговалова (1992 г.) для аккреции/эжекции на черную дыру. Кроме того, вновь будем считать плазму холодной (температура $T = 0$, т. е. $\mu = m_{\rm p} = \mathrm{const}$).

Далее, предположим, что даже при отсутствии вращения черной дыры в магнитосфере происходит рождение плазмы, так что в ней формируются два потока частиц, один из которых уходит на бесконечность, а другой движется в сторону горизонта событий. При такой постановке задачи имеет место несомненная несамосогласованность. Действительно, рассматриваемое ниже решение не имеет физически осмысленного предельного перехода при $\Omega_{\rm H} \to 0$, поскольку обсуждавшийся в предыдущей главе механизм генерации плазмы может эффективно работать только в присутствии продольного электрического поля, которое, в свою очередь, может возникнуть лишь благодаря вращению черной дыры. Тем не менее, как мы видели, для начала генерации плазмы вблизи поверхности $\rho_{\rm GJ} = 0$ достаточно относительно медленного вращения, поэтому рождение частиц происходит и при параметре $\varepsilon_3 = a/M \ll 1$. Положение указанной поверхности не зависит от скорости вращения черной дыры (например, согласно (3.59), $r_{\text{inj}} = 2^{1/3} r_{\text{g}}$ при $\Omega_{\text{F}} = \Omega_{\text{H}}/2$). Этим и оправдывается возможность вновь рассмотреть решение как малую поправку к монопольному магнитному полю ($\Psi = \Psi_0(1 \pm \cos\theta)$). Что же касается области рождения плазмы ($\rho_{\text{GJ}} \approx 0$), которую мы будем считать бесконечно тонкой поверхностью, то ее положение само должно определяться из решения полной задачи. Значение $r_{\text{inj}} = 2^{1/3} r_{\text{g}}$ может быть выбрано в качестве нулевого приближения.

Остановимся детально на вопросе о том, какое количество граничных условий требуется сформулировать, чтобы полностью определить все параметры течения. Необходимо помнить, что рассматриваемая задача в действительности содержит две области, в которых интегралы движения отличаются друг от друга. Это видно хотя бы из анализа величины η, входящей в определение $\alpha n \mathbf{u}_{\text{p}} = \eta \mathbf{B}_{\text{p}}$, которая должна иметь разные знаки для истекающих и аккрецирующих частиц. В результате согласно общей формуле (1.63): $b = 2 + i - s' = 4$ (четыре интеграла движения, две особые поверхности), справедливой для холодной плазмы, для каждой из областей на поверхности $\rho_{\text{GJ}} = 0$ нужно задать четыре функции. Поэтому полная задача требует восьми граничных условий.

Ясно, что четыре из них: концентрации n_{inj} и лоренц-факторы γ_{inj} для истекающей и аккрецирующей плазмы, могут быть выбраны точно так же, как и в задаче об истечении холодной плазмы с поверхности вращающегося шара. Для простоты рассмотрим постоянные значения концентраций и лоренц-факторов частиц:

$$n^{\pm}_{\text{inj}} = n_{\text{inj}} = \text{const}; \tag{4.469}$$

$$\gamma^{\pm}_{\text{inj}} = \gamma_{\text{inj}} = \text{const}. \tag{4.470}$$

Эти четыре величины определяют четыре интеграла движения, по два для истекающей и аккрецирующей плазмы:

$$E^{(\text{out})} = \alpha_{\text{inj}}\, \mu\, \eta_{\text{inj}}\, \gamma_{\text{inj}}; \tag{4.471}$$

$$E^{(\text{in})} = -\alpha_{\text{inj}}\, \mu\, \eta_{\text{inj}}\, \gamma_{\text{inj}}; \tag{4.472}$$

$$\eta^{(\text{out})} = \eta_{\text{inj}} = \frac{\alpha_{\text{inj}}\, n_{\text{inj}} \sqrt{\gamma^2_{\text{inj}} - 1}}{B_{\text{inj}}}; \tag{4.473}$$

$$\eta^{(\text{in})} = -\eta_{\text{inj}} = -\frac{\alpha_{\text{inj}}\, n_{\text{inj}} \sqrt{\gamma^2_{\text{inj}} - 1}}{B_{\text{inj}}}, \tag{4.474}$$

где $B_{\text{inj}} = \Psi_0/(2\pi r^2_{\text{inj}})$, а $\mu = \text{const}$ для холодной плазмы. В дальнейшем мы иногда будем опускать индекс «(out)». Как мы видим, в случае, когда основной поток энергии связан с частицами (см. (4.468)), интегралы энергии $E^{(\text{in})}$ и $E^{(\text{out})}$ имеют разные знаки для внешних и внутренних областей магнитосферы. Отметим, что здесь наша постановка задачи отличается от работы [Hirotani et al., 1992], в которой предполагалось, что в области генерации плазмы скорость частиц близка к нулю.

Что же касается еще двух пар величин, то в данном случае в качестве граничных условий нельзя выбрать угловую скорость $\Omega_{\mathrm{F}}(r_{\mathrm{inj}})$ и магнитный поток $\Psi(r_{\mathrm{inj}})$, поскольку они сами должны быть найдены из решения задачи. С другой стороны, в качестве граничных условий можно задать следующие соотношения и величины:

— условие непрерывности магнитного потока в области генерации плазмы,

$$\Psi(r_{\mathrm{inj}} - 0) = \Psi(r_{\mathrm{inj}} + 0); \tag{4.475}$$

— поверхностный электрический ток $\mathbf{J}_{\mathrm{s}}$, текущий вдоль области генерации частиц,

$$\mathbf{J}(r_{\mathrm{inj}}) = \mathbf{J}_{\mathrm{s}}. \tag{4.476}$$

Две компоненты этого вектора задают еще два граничных условия;

— падение электрического потенциала V_{crit} вдоль магнитных силовых линий в области рождения частиц (он должен определяться из конкретного механизма генерации плазмы),

$$V_{\mathrm{crit}} = V(r_{\mathrm{inj}} + 0) - V(r_{\mathrm{inj}} - 0). \tag{4.477}$$

Как мы увидим, соотношения (4.469), (4.470) и (4.475)–(4.477) действительно полностью определяют решение поставленной задачи.

В результате при отсутствии вращения, когда $E = \mathrm{const}$, $\eta = \mathrm{const}$ и $\Omega_{\mathrm{F}} = L = 0$, альфвеновская и быстрая магнитозвуковая поверхности (имеющие, очевидно, сферическую форму) совпадают друг с другом. В дальнейшем мы будем обозначать величины, соответствующие сферически-симметричному решению, индексами «0». Использовав уравнение Бернулли

$$\frac{1}{64\pi^4}\frac{\mathcal{M}^4(\nabla\Psi)^2}{\varpi^2} = E_0^2 - \alpha^2\mu^2\eta_0^2, \tag{4.478}$$

можно получить следующие выражения для положения внешних ($\mathcal{M}^2 = 1$) и внутренних ($\mathcal{M}^2 = \alpha^2$) поверхностей:

$$r_a^{(\mathrm{out})} = r_{\mathrm{f}}^{(\mathrm{out})} = \left(\frac{\Psi_0}{8\pi^2}\frac{1}{\sqrt{E_0^2 - \mu^2\eta_0^2}}\right)^{1/2}; \tag{4.479}$$

$$\alpha_a^{(\mathrm{in})} = \alpha_{\mathrm{f}}^{(\mathrm{in})} = \left(\frac{8\pi^2 r_{\mathrm{g}}^2}{\Psi_0}|E_0|\right)^{1/2}. \tag{4.480}$$

Здесь мы воспользовались дополнительным предположением, $\gamma_{\mathrm{inj}} \gg 1$, а также соотношением (4.467), благодаря которым внешние особые поверхности находятся на больших расстояниях от черной дыры, а внутренние, напротив, вблизи горизонта событий:

$$r_{\mathrm{f}}^{(\mathrm{out})} \gg r_{\mathrm{g}}, \tag{4.481}$$

$$\alpha_{\mathrm{f}}^{(\mathrm{in})} \ll 1. \tag{4.482}$$

Заметим, что в соотношении (4.480) стоит модуль интеграла Бернулли E_0, поскольку, как уже подчеркивалось, для течения, направленного к черной дыре, величина η оказывается отрицательной.

Снова воспользуемся уже обсуждавшимся фактом: для медленно вращающегося тела с монопольным магнитным полем задача об определении интегралов движения может быть решена независимо от задачи о структуре магнитных поверхностей. Действительно, как и в рассмотренном выше примере, при ненулевом вращении, когда сразу два параметра, $\Omega_{\rm F}(\Psi)$ и $L(\Psi)$, оказываются отличными от нуля, их отношение вновь является произвольным. В итоге произвольным оказывается и положение альфвеновской поверхности $\alpha_{\rm A}$ (см. (4.159)). При этом ход корней для внешней альфвеновской поверхности полностью эквивалентен случаю истечения, показанному на рис. 4.12, тогда как для внутренней поверхности соответствующие кривые имеют вид, показанный на рис. 4.18. Для возможности существования трансзвукового течения опять необходимо предположить, что положение альфвеновской поверхности, определяемое из числителей соотношения (4.44), совпадает с выражениями (4.479) и (4.480).

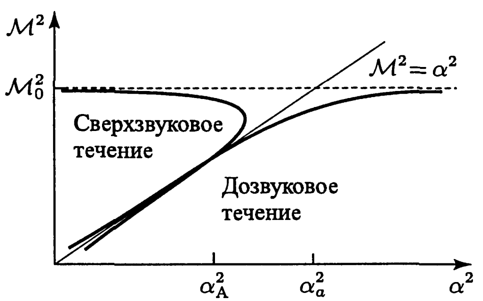


Рис. 4.18. Ход корней релятивистского уравнения Бернулли (4.50) вблизи внутренних особых поверхностей. Пунктиром показана зависимость $\mathcal{M}^2(\alpha)$ для нулевого вращения, а сплошной линией — для $\Omega_{\rm F} \neq 0$. Трансзвуковой режим аккреции имеет место, когда положение альфвеновской поверхности $\alpha_{\rm A}$ близко к α_a

В результате, сравнивая соотношения (4.157) и (4.159) с выражениями (4.479) и (4.480), получаем следующие значения инвариантов $L^{\rm (in)}$ и $L^{\rm (out)}$:

$$L^{\rm (out)} = \frac{\Omega_{\rm F}^{\rm (out)} - \omega_{\rm A}^{\rm (out)}}{8\pi^2} \frac{E_0}{\sqrt{E_0^2 - \mu^2\eta_0^2}} \Psi_0 \sin^2\theta; \tag{4.483}$$

$$L^{\rm (in)} = -\frac{\Omega_{\rm F}^{\rm (in)} - \omega_{\rm A}^{\rm (in)}}{8\pi^2} \Psi_0 \sin^2\theta. \tag{4.484}$$

В частности, если внешние поверхности находятся вдали от черной дыры, а внутренние — вблизи горизонта событий, имеем просто

$$L^{\rm (out)} = \frac{\Omega_{\rm F}^{\rm (out)}}{8\pi^2} \frac{E_0}{\sqrt{E_0^2 - \mu^2\eta_0^2}} \Psi_0 \sin^2\theta; \tag{4.485}$$

$$L^{\rm (in)} = \frac{\Omega_{\rm H} - \Omega_{\rm F}^{\rm (in)}}{8\pi^2} \Psi_0 \sin^2\theta. \tag{4.486}$$

Перейдем теперь к анализу свойств решения уравнения Грэда–Шафранова. Для медленного вращения решение вновь можно искать в виде $\Psi = \Psi_0[1 - \cos\theta + \varepsilon_3^2 f(r,\theta)]$, где по-прежнему $\varepsilon_3 = a/M$, а Ψ_0 — полный магнитный поток, проходящий через черную дыру. После линеаризации уравнения (4.69) получаем

$$\varepsilon_3^2\alpha_0^2\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(\alpha_0^2 - \mathcal{M}_0^2\right)\frac{\partial f}{\partial r}\right] + \frac{\varepsilon_3^2}{r^2}\alpha_0^2\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) +$$
$$+ \frac{\alpha_0^2}{(\alpha_0^2 - \mathcal{M}_0^2)^2}\frac{E_0^2}{E_0^2 - \alpha_0^2\mu^2\eta_0^2}\left[(2\alpha_0^2 - \mathcal{M}_0^2)(\Omega_{\rm F} - \omega_{\rm A})^2 - \mathcal{M}_0^2(\Omega_{\rm F} - \omega)^2\right] \times$$
$$\times \sin^2\theta\cos\theta + 2\left[\frac{\mathcal{M}_0^4}{(\alpha_0^2 - \mathcal{M}_0^2)^2}\frac{E_0^2}{E_0^2 - \alpha_0^2\mu^2\eta_0^2} - 1\right](\Omega_{\rm F} - \omega)^2\sin^2\theta\cos\theta -$$
$$- 2\,\mathrm{sign}\,\eta_0\frac{\alpha_0^2\mathcal{M}_0^2}{(\alpha_0^2 - \mathcal{M}_0^2)^2}\frac{E_0^2}{E_0^2 - \alpha_0^2\mu^2\eta_0^2}(\Omega_{\rm F} - \omega)(\Omega_{\rm F} - \omega_{\rm A})\sin^2\theta\cos\theta -$$
$$- \alpha_0^2\frac{a^2 r_{\rm g}}{r^5}\left(\frac{\mu^2\eta_0^2}{E_0^2 - \alpha_0^2\mu^2\eta_0^2} + 2\right)\sin^2\theta\cos\theta + \alpha_0^2\frac{a^2}{r^4}\mathcal{M}_0^2\sin^2\theta\cos\theta = 0, \tag{4.487}$$

где величины $\alpha_0(r)$, $\mathcal{M}_0(r)$ и E_0 относятся к случаю нулевого вращения. Что же касается величин ω, то с необходимой точностью их также можно считать зависящими лишь от радиальной координаты r. Кроме того, как мы увидим, выполняется условие $\Omega_{\rm F} \approx \mathrm{const}$. Поэтому в уравнении (4.487) пренебрегается слагаемыми, содержащими $\mathrm{d}\Omega_{\rm F}/\mathrm{d}\theta$.

Подчеркнем, что, во-первых, при получении уравнения (4.487) использовались выражения (4.483) и (4.484) для углового момента $L(\Psi)$. В противном случае оно имело бы сингулярность на альфвеновских поверхностях. Во-вторых, не надо забывать, что уравнения, описывающие истекающую и аккрецирующую плазмы, отличаются друг от друга. В них стоят разные значения угловой скорости Лензе–Тирринга на альфвеновской поверхности ($\omega_{\rm A}$), интегралов η_0 и, что особенно важно, интегралов $\Omega_{\rm F}$. При этом если значения $\omega_{\rm A}$ и η_0 определяются непосредственно из граничных условий (4.469) и (4.470), то для нахождения интегралов $\Omega_{\rm F}$ уже нужно воспользоваться неявными условиями (4.475)–(4.477). Указанная процедура будет выполнена чуть ниже.

Во всех же других смыслах уравнение (4.487) полностью эквивалентно уравнениям, рассматривавшимся в гл. 1.

1. Оно линейно.
2. Его угловой оператор совпадает с оператором $\hat{\mathcal{L}}_\theta$ (см. (1.115)).
3. Поскольку все члены уравнения содержат малый параметр $\varepsilon_3^2 \approx \Omega_{\rm H}^2 r_{\rm g}^2$, функции $\alpha_0(r)$, $\mathcal{M}_0(r)$ и т. д. могут быть взяты из нулевого приближения, а угловая скорость Лензе–Тирринга — в виде $\omega = \Omega_{\rm H}(r_{\rm g}/r)^3$.

4. Поскольку для сферически-симметричного течения функции $\alpha_0(r)$, $\mathcal{M}_0(r)$ и т. д. не зависят от θ, решение уравнения (4.487) может быть разложено по собственным функциям оператора $\hat{\mathcal{L}}_\theta$.

В частности, по этой причине можно пренебречь и возмущением положения критических поверхностей. Подчеркнем, что здесь особенности $\alpha_0^2 = \mathcal{M}_0^2$ соответстуют критическим условиям на быстрых магнитозвуковых поверхностях, которые мы еще не использовали при построении решения. Поэтому, как и раньше, несмотря на то, что в нулевом приближении положения двух сингулярных поверхностей совпадают, они дают не одно, а два критических условия.

Наконец, необходимо особенно подчеркнуть, что уравнение (4.487) не имеет особенности на горизонте событий ($\alpha^2 = 0$). Действительно, все входящие в него коэффициенты пропорциональны α_0^2, так что после сокращения на данный фактор уравнение (4.487) оказывается регулярным вблизи поверхности $r = r_\mathrm{g}$. Это важнейшее свойство, с которым мы уже сталкивались при анализе гидродинамических течений, является следствием отмеченного выше общего поведения уравнения Грэда–Шафранова (4.71) вблизи горизонта событий.

После подстановки функции возмущения в виде

$$f(r,\theta) = g_2(r)\sin^2\theta\cos\theta \tag{4.488}$$

получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение на радиальную функцию $g_2(r)$:

$$\begin{aligned}
r_\mathrm{g}^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\left(\alpha_0^2 - \mathcal{M}_0^2\right)\frac{\mathrm{d}g_2(r)}{\mathrm{d}r}\right] - 6\alpha_0^2\left(\frac{r_\mathrm{g}}{r}\right)^2 g_2(r) + {}\\
+\frac{1}{4}\,\frac{1}{(\alpha_0^2-\mathcal{M}_0^2)^2}\,\frac{E_0^2}{E_0^2-\alpha_0^2\mu^2\eta_0^2}\left[(2\alpha_0^2-\mathcal{M}_0^2)\frac{(\Omega_\mathrm{F}-\omega_\mathrm{A})^2}{\Omega_\mathrm{H}^2} - \mathcal{M}_0^2\frac{(\Omega_\mathrm{F}-\omega)^2}{\Omega_\mathrm{H}^2}\right] + {}\\
+\frac{1}{2}\,\frac{(\alpha_0^2-\mathcal{M}_0^2)^2\mu^2\eta_0^2 + E_0^2(2\mathcal{M}^2-\alpha_0^2)}{(\alpha_0^2-\mathcal{M}_0^2)^2(E_0^2-\alpha_0^2\mu^2\eta_0^2)}\,\frac{(\Omega_\mathrm{F}-\omega)^2}{\Omega_\mathrm{H}^2} - {}\\
-\frac{1}{2}\,\mathrm{sign}\,\eta_0\,\frac{\mathcal{M}_0^2}{(\alpha_0^2-\mathcal{M}_0^2)^2}\,\frac{E_0^2}{E_0^2-\alpha_0^2\mu^2\eta_0^2}\,\frac{(\Omega_\mathrm{F}-\omega)(\Omega_\mathrm{F}-\omega_\mathrm{A})}{\Omega_\mathrm{H}^2} - {}\\
-\frac{1}{4}\left(\frac{r_\mathrm{g}}{r}\right)^5\left(\frac{\mu^2\eta_0^2}{E_0^2-\alpha_0^2\mu^2\eta_0^2}+2\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{r_\mathrm{g}}{r}\right)^4\mathcal{M}_0^2 = 0.
\end{aligned} \tag{4.489}$$

При этом граничные условия (4.475)–(4.477) в области генерации плазмы, $r = r_\mathrm{inj}$, теперь имеют вид

$$g_2(r_\mathrm{inj}-0) = g_2(r_\mathrm{inj}+0); \tag{4.490}$$

$$\frac{\mathrm{d}g_2}{\mathrm{d}r}(r_\mathrm{inj}-0) = \frac{\mathrm{d}g_2}{\mathrm{d}r}(r_\mathrm{inj}+0) + \Delta j; \tag{4.491}$$

$$I(r_\mathrm{inj}-0) = I(r_\mathrm{inj}+0) + \Delta I; \tag{4.492}$$

$$\Omega_\mathrm{F}^{(\mathrm{out})} = \Omega_\mathrm{F}^{(\mathrm{in})} + \Delta\Omega_\mathrm{F}. \tag{4.493}$$

Здесь значения Δj и ΔI представляют собой две компоненты тока $\mathbf{J}$ (см. (4.476)), текущего в области генерации плазмы. Как уже подчеркивалось, они должны определяться конкретным механизмом рождения частиц. Величина же $\Delta\Omega_{\rm F}$ связана с падением потенциала в области генерации плазмы соотношением

$$\Delta\Omega_{\rm F} \approx \Omega_{\rm H}\frac{V_{\rm crit}}{V_{\rm max}}, \tag{4.494}$$

где $V_{\rm max} \approx \psi_{\rm max}$ — максимально возможное падение потенциала вблизи поверхности черной дыры. Наконец, как и во всех рассмотренных выше случаях, для нахождения решения необходимо воспользоваться условиями регулярности на быстрых магнитозвуковых поверхностях, $\alpha_0^2 = \mathcal{M}_0^2$.

В итоге решение уравнения (4.489) может быть легко построено по аналогии с решениями обыкновенных дифференциальных уравнений, подробно проанализированных ранее. Однако поскольку такие свойства течения, как структура электрических токов и энергетические потери, в рассматриваемой здесь квазимонопольной геометрии определяются независимо от задачи о структуре полоидального поля, мы ограничимся лишь перечислением основных свойств этого решения.

Прежде всего, отсутствие особенности при $\alpha^2 = 0$ означает, что при $\varepsilon_3 \ll 1$ возмущение монопольного магнитного поля остается малым вплоть до горизонта событий:

$$\varepsilon_3^2 f(r_{\rm g}, \theta) \sim \varepsilon_3^2 \ll 1. \tag{4.495}$$

С другой стороны, на больших расстояниях $(r \gg r_{\rm a}^{\rm (out)})$ уравнение (4.487) в точности совпадает с уравнением (4.387), описывающим истечение холодной плазмы с поверхности вращающегося шара. Поэтому здесь вновь можно воспользоваться асимптотикой (4.395), не зависящей от граничных условий:

$$\varepsilon_3^2 f(r, \theta) = 2\left(\frac{\Omega_{\rm F} r_a}{v_{\rm inj}}\right)^2 \frac{1}{\gamma_{\rm inj}^2} \ln\left(\frac{r}{r_a}\right) \sin^2\theta \cos\theta. \tag{4.496}$$

Наконец, важнейший результат состоит в том, что в рассматриваемом случае наряду с продольным током I (точнее, угловым моментом $L(\Psi)$) угловая скорость $\Omega_{\rm F}$ также не является свободным параметром, а должна определяться из решения задачи. Тем самым оказывается фиксирована и величина полного энерговыделения.

Действительно, используя выражения для углового момента (4.483), (4.484) и граничные условия (4.492), (4.493), получаем

$$\Omega_{\rm F} = \frac{\omega_{\rm A}^{\rm (in)} + \omega_{\rm A}^{\rm (out)} + \Delta\Omega_{\rm F} - \varepsilon^2(2\omega_{\rm inj} + \Delta\Omega_{\rm F})}{2(1-\varepsilon^2)} + \frac{2\pi(\alpha_{\rm inj}^2 - \mathcal{M}_{\rm inj}^2)\Delta I}{\alpha_{\rm inj}^2 \Psi_0 (1-\varepsilon^2)\sin^2\theta}, \tag{4.497}$$

где

$$\varepsilon^2 = \frac{8\pi^2 r_{\rm inj}^2 E_0}{\alpha_{\rm inj}^2 \Psi_0}, \tag{4.498}$$

так что $\varepsilon \sim \mathcal{E}_{\rm par}/\mathcal{E}_{\rm B}$. Таким образом, при условии $\varepsilon_3 \ll 1$ имеем $\omega_{\rm A}^{(\rm out)} \ll \Omega_{\rm H}$ и $\omega_{\rm A}^{(\rm in)} \approx \Omega_{\rm H}$, откуда

$$\Omega_{\rm F}^{(\rm out)} = \frac{1}{2}\left[\Omega_{\rm H} + \Delta\Omega_{\rm F} + \frac{4\pi(\alpha_{\rm inj}^2 - \mathcal{M}_{\rm inj}^2)\Delta I}{\alpha_{\rm inj}^2 \Psi_0 \sin^2\theta}\right]; \tag{4.499}$$

$$L = \frac{\Omega_{\rm F}}{8\pi^2}\Psi_0 \sin^2\theta. \tag{4.500}$$

В частности, при $\Delta I \ll I_{\rm GJ} \approx \Omega_{\rm F}\Psi_0/2\pi$ и $\Delta\Omega_{\rm F} \ll \Omega_{\rm H}$ имеем просто

$$\Omega_{\rm F} = \frac{\Omega_{\rm H}}{2}. \tag{4.501}$$

Следовательно, согласно (4.287)

$$W_{\rm em} = \frac{1}{24}\left(\frac{a}{M}\right)^2 B_{\rm n}^2 r_{\rm g}^2 c. \tag{4.502}$$

Итак, последовательный анализ уравнения Грэда–Шафранова действительно показал, что его решение полностью определяется физическими граничными условиями в области генерации плазмы и никак не связано со свойствами течения вблизи горизонта событий. Кроме того, наличие дополнительных критических поверхностей фиксирует не только продольный ток, но и угловую скорость $\Omega_{\rm F}$, которая при разумных предположениях, $\Delta I \ll I_{\rm GJ}$ и $\Delta\Omega_{\rm F} \ll \Omega_{\rm H}$, оказывается близкой к $\Omega_{\rm H}/2$. Соответственно, и ток I (см. (4.500)) будет близок к майкелевскому току $I_{\rm M}$. Еще раз напомним, что в бессиловом решении Блендфорда–Знайека, в котором отсутствовали быстрые магнитозвуковые поверхности, решение $\Omega_{\rm F} = \Omega_{\rm H}/2$ зависело от дополнительной гипотезы о монопольном магнитном поле на больших расстояниях от черной дыры.

2. *Медленно вращающаяся черная дыра, окруженная вращающейся оболочкой.* Пусть теперь магнитные силовые линии не уходят на бесконечность, а вморожены во вращающуюся с угловой скоростью $\Omega_{\rm d}$ сферическую оболочку, которая благодаря своей высокой проводимости и определяет угловую скорость $\Omega_{\rm F}$ (рис. 4.19). Таким образом, мы постараемся смоделировать случай, когда магнитные силовые линии пересекают как горизонт событий, так и поверхность аккреционного диска. Вместе с тем для простоты будем считать, что дифференциальное вращение оболочки отсутствует: $\Omega_{\rm d} = {\rm const}$. Очевидно, что при наличии сферической оболочки внешних особых поверхностей не существует.

Ясно, что при медленном вращении черной дыры и внешней оболочки, $\Omega_{\rm H} r_{\rm g}/c \ll 1$ и $\Omega_{\rm d} r_{\rm d}/c \ll 1$, задача решается точно так же, как и в рассмотренном выше примере (при этом $\Omega_{\rm H}$ и $\Omega_{\rm F} = \Omega_{\rm d}$ являются

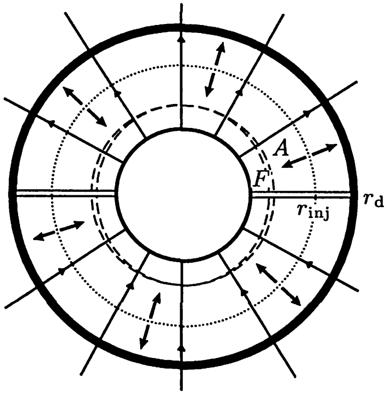


Рис. 4.19. Структура особых поверхностей (штриховые линии) и области генерации плазмы (пунктир) для черной дыры, погруженной в монопольное магнитное поле, при наличии взаимодействия с удаленным аккреционным диском, который моделируется сферой с радиусом $r = r_d$. Плазма, рождающаяся вблизи поверхности $r = r_{inj}$, течет по направлению как к черной дыре, так и ко внешней оболочке

теперь двумя независимыми величинами). В частности, линеаризованное уравнение будет фактически совпадать с уравнением (4.487). В результате остаются справедливыми выводы как об отсутствии особенности на горизонте черной дыры, так и о возможности отделить задачу о структуре магнитного поля (определении возмущения εf) от задачи об определении величины углового момента $L(\Psi)$. С другой стороны, рассматриваемое здесь течение оказывается чрезвычайно поучительным именно с точки зрения постановки задачи и определения токов, текущих в магнитосфере. Поэтому мы ограничимся исследованием лишь этого последнего вопроса и не будем подробно обсуждать само решение уравнения Грэда–Шафранова.

Прежде всего, рассмотрим течение, при котором угловая скорость черной дыры меньше угловой скорости оболочки:

$$\Omega_H < \Omega_d. \tag{4.503}$$

Этот случай полностью эквивалентен задаче Боговалова. В ней, однако, истечение с поверхности $r = r_d$, на которой задаются граничные условия, происходит не во внешние, а во внутренние области магнитосферы $(r < r_d)$, поэтому энергия передается от оболочки к черной дыре.

Упражнение. Покажите, что при условии $\Omega_H < \Omega_d$ плотность электрического заряда не меняет знак во всей области $r_g < r < r_d$, так что нет необходимости рассматривать две области с различными значениями η.

В результате для нулевой температуры задача снова требует четырех граничных условий, в качестве которых опять можно выбрать концентрацию и лоренц-фактор частиц, а также угловую скорость оболочки и магнитный поток на ее поверхности:

$$n(r_d, \theta) = n_{inj}; \tag{4.504}$$
$$\gamma(r_d, \theta) = \gamma_{inj}; \tag{4.505}$$
$$\Omega_F = \Omega_d; \tag{4.506}$$
$$\Psi(r_d, \theta) = \Psi_0(1 - \cos\theta). \tag{4.507}$$

Соотношения (4.504)–(4.507) сразу определяют интегралы движения E и η, а также положение внутренних особых поверхностей в случае медленного вращения:

$$E_0 = -\alpha_{\rm inj}\,\mu\,\eta_{\rm inj}\,\gamma_{\rm inj}\,; \tag{4.508}$$

$$\eta_{\rm (inj)} = -\frac{\alpha_{\rm inj}\,n_{\rm inj}\sqrt{\gamma_{\rm inj}^2 - 1}}{B_{\rm inj}}; \tag{4.509}$$

$$\alpha_a^{\rm (in)} = \alpha_{\rm f}^{\rm (in)} = \left(\frac{8\pi^2 r_{\rm g}^2}{\Psi_0}|E_0|\right)^{1/2}, \tag{4.510}$$

где $\alpha_{\rm inj} = \alpha(r_{\rm d})$, $B_{\rm inj} = B(r_{\rm d})$. Вновь сравнивая положения альфвеновской и быстрой магнитозвуковой поверхностей, можно найти угловой момент L, необходимый для их гладкого пересечения:

$$L^{\rm (in)} = -\frac{\Omega_{\rm F} - \Omega_{\rm H}}{8\pi^2}\,\Psi_0 \sin^2\theta. \tag{4.511}$$

Итак, при $\Omega_{\rm H} \ll \Omega_{\rm d}$ электрический ток, текущий в магнитосфере, равен гольдрайховскому. Отрицательное значение величины L показывает, что в процессе аккреции угловой момент оболочки передается черной дыре. Поэтому со временем угловая скорость вращения черной дыры увеличивается, а угловая скорость оболочки уменьшается. Выше мы неявно предполагали, что течение в районе оболочки является дозвуковым ($\alpha_{\rm inj} > \alpha_{\rm f}$). Если же граничные условия на поверхности оболочки соответствуют сверхзвуковому течению, при котором особые поверхности отсутствуют, то величина углового момента может быть произвольной.

Упражнения.

1. Определив направление электрических токов, текущих в сферической оболочке, покажите, что ее торможение вновь связано с моментом сил Ампера.

2. Проанализируйте случай, когда оболочка и черная дыра вращаются в разные стороны.

Если же угловая скорость оболочки $\Omega_{\rm d}$ удовлетворяет условию (3.68), $0 < \Omega_{\rm d} < \Omega_{\rm H}$, то ситуация оказывается более сложной. Прежде всего, при выполнении этого условия поток энергии будет направлен от черной дыры к оболочке. Следовательно, она должна поглощать энергию, в результате чего, помимо ускорения вращения, еще и нагреваться. Вряд ли подобная ситуация реализуется у стационарных источников, поскольку сильный нагрев может привести к разрушению оболочки (которая, напомним, моделирует внутренние области аккреционного диска). Однако она может представлять интерес для быстропеременных объектов (микроквазаров, гамма-всплесков).

Далее, очевидно, что постановка задачи зависит от того, существует ли между оболочкой и горизонтом черной дыры поверхность нулевой гольдрайховской плотности заряда, $\rho_{\rm GJ} = 0$, на которой должно происходить рождение плазмы. Действительно, если радиус оболочки r_{d} близок к радиусу черной дыры, то во всей области $r_{\mathrm{g}} < r < r_{\mathrm{d}}$ имеет место лишь течение плазмы по направлению к черной дыре. Поэтому для построения решения вновь достаточно сформулировать четыре граничных условия на поверхности $r = r_{\mathrm{d}}$. В результате задача опять оказывается эквивалентной задаче Боговалова. Анализ критических условий (который проводится точно так же, как и в предыдущем случае) показывает, что угловой момент L здесь по-прежнему будет определяться соотношением (4.511). Однако теперь величина L является положительной, а потоки энергии и углового момента направлены от черной дыры ко внешней оболочке.

Если же оболочка удалена от черной дыры на большое расстояние, то имеются две области течения (см. рис. 4.19). При этом особые поверхности (альфвеновская и быстрая магнитозвуковая) существуют лишь в области аккреции. Поэтому в указанной области необходимо сформулировать $b = 2 + 4 - 2 = 4$ граничных условия, тогда как в области истечения нужно задать $b = 2 + 4 - 0 = 6$ величин. В итоге полная задача требует десяти граничных условий. Восемь из них по-прежнему должны быть заданы в области рождения частиц. Ими вновь могут быть концентрации $n^{\pm}_{\mathrm{inj}}$ (см. (4.469)) и лоренц-факторы $\gamma^{\pm}_{\mathrm{inj}}$ (см. (4.470)) рождающейся плазмы, а также четыре условия (4.475)–(4.477), определяющие непрерывность магнитного потока, падение напряжения и поверхностный ток в области рождения частиц. Остальными же двумя условиями являются величина угловой скорости Ω_{d} и магнитный поток $\Psi(r_{\mathrm{d}}, \theta)$ на поверхности оболочки. Как мы видим, здесь не нужно задавать параметры плазмы, поскольку она не вытекает, а втекает на поверхность оболочки.

В итоге при малых значениях падения потенциала в области рождения частиц ($\Delta\Omega_{\mathrm{F}} \ll \Omega_{\mathrm{H}}$) и при отсутствии поверхностного тока ($\Delta I = 0$) угловая скорость Ω_{F} определяется скоростью вращения оболочки:

$$\Omega_{\mathrm{F}} = \Omega_{\mathrm{d}}. \tag{4.512}$$

Угловой же момент по-прежнему задается соотношением (4.511). При этом для случая $\Omega_{\mathrm{d}} \ll \Omega_{\mathrm{H}}$ продольный ток $I = 2\pi L$ оказывается существенно больше гольдрайховского, определяемого величиной угловой скорости $\Omega_{\mathrm{F}} = \Omega_{\mathrm{d}}$:

$$I = \frac{\Omega_{\mathrm{H}}}{\Omega_{\mathrm{F}}} I_{\mathrm{GJ}}. \tag{4.513}$$

Рассмотренный выше пример, конечно же, является слишком упрощенным, поскольку в действительности угловая скорость вращения внешних частей диска существенно меньше, чем внутренних, и кроме того, сам диск находится в экваториальной плоскости. С другой стороны, очевидно, что соотношение (4.513) модельно независимо, поскольку для его вывода требуется лишь постоянство угловой скорости $\Omega_{\rm F} = \Omega_{\rm d}$ вдоль магнитной силовой линии и «граничное условие на горизонте». Однако если последнее утверждение справедливо, то легко показать, что внешние области диска не могут быть связаны магнитными силовыми линиями с горизонтом событий [Uzdensky, 2005]. Действительно, при выполнении условия $I \gg I_{\rm GJ}$ магнитные поверхности должны быть сколлимированы в пределах световой поверхности (точнее, в пределах расстояния $\varpi = (I_{\rm GJ}/I)R_{\rm L}$ от оси вращения) (см. гл. 2). Иными словами, при выполнении условия (4.513) магнитные силовые линии искривляются в сторону оси вращения, а не в сторону аккреционного диска. Таким образом, наше начальное предположение о том, что горизонт черной дыры связан с аккреционным диском магнитной силовой линией (и поэтому ее угловая скорость $\Omega_{\rm F}$ определяется скоростью вращения диска), оказывается неверным. В результате можно сделать следующий вывод: по крайней мере часть магнитных поверхностей, пересекающих горизонт событий вблизи оси вращения, размыкается и уходит на бесконечность.

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Покажите, что при постоянной угловой скорости оболочки область генерации плазмы представляет собой сферу радиусом

$$r_{\rm inj} = \left(\frac{\Omega_{\rm H}}{\Omega_{\rm d}}\right)^{1/3} r_{\rm g}. \tag{4.514}$$

2. Покажите, что сформулированных выше десяти граничных условий действительно достаточно для того, чтобы найти не только величину продольного тока, но и возмущение магнитных поверхностей $\varepsilon f(r,\theta)$, определяемое из линеаризованного уравнения Грэда–Шафранова (4.487).

Подводя итоги, можно сформулировать ряд выводов, которые имеют общий характер и не должны зависеть от конкретной модели.

1. Полная магнитогидродинамическая версия уравнения Грэда–Шафранова не имеет особенности на горизонте событий. Благодаря общей форме (4.258) это уравнение регулярно при $\alpha^2 \to 0$, в чем и состоит важное отличие горизонта от бесконечно удаленной области, которая является особой точкой уравнения.

2. Горизонт находится в гиперболической области уравнения Грэда–Шафранова, так что оно не требует здесь никаких дополнительных граничных условий, которые могли бы повлиять на структуру решения во внешнем пространстве. В результате решение задачи полностью определяется граничными условиями в области генерации плазмы, причинно связанной со всем пространством.

3. Механизм торможения вращающейся черной дыры связан с дальнодействием гравитомагнитных сил, которые, действуя на область генерации плазмы и внутренние особые поверхности, формируют поток отрицательной энергии, падающий на поверхность черной дыры. Иными словами, механизм Блендфорда–Знайека является электромагнитной реализацией эффекта Пенроуза [Takahashi et al., 1990].

4.5. Другие методы исследования

4.5.1. Автомодельные решения. Как уже говорилось, замечательное свойство уравнения Грэда–Шафранова состоит в том, что оно имеет достаточно широкий класс автомодельных решений. Фактически мы уже сталкивались с ними при анализе конических и цилиндрических течений. Неудивительно поэтому, что изучению свойств автомодельных решений, сводящемуся к анализу обыкновенных дифференциальных уравнений, посвящено значительное количество работ [Blandford, Payne, 1982; Lovelace, Wang, Sulkanen, 1987; Tsinganos, Sauty, 1992; Contopoulos, Lovelace, 1994; Sauty, Tsinganos, 1994; Tsinganos et al., 1996; Ostriker, 1997; Sauty, Tsinganos, Trussoni, 1999; Vlahakis, Königl, 2003]. Было бы неправильно пройти мимо этого важного направления исследований. Тем не менее имеет смысл сразу сформулировать основные ограничения, которые неизбежно возникают при попытке описать реальные двумерные течения в рамках автомодельного подхода [Heyvaerts, 1996].

1. Прежде всего, в рамках автомодельных решений невозможно исследовать прямую задачу, поскольку они имеют место лишь для вполне определенного класса автомодельных же граничных условий.

2. В рамках указанного подхода невозможно последовательно описать течение вещества вблизи самогó компактного объекта, поскольку автомодельные решения (за исключением специального случая, рассматриваемого ниже) не содержат никаких внутренних масштабов, каковыми являются радиус звезды R или же радиус черной дыры $r_{\rm g}$.

3. По этой же причине автомодельные решения не могут последовательно описать и струйные выбросы, которые также имеют несомненный линейный масштаб — характерный поперечный размер r_j.

4. Струйные выбросы нельзя описать и по другой причине: все реальные джеты содержат конечный магнитный поток ($\Psi_0 < \infty$), тогда как полный магнитный поток в автомодельных решениях обычно равен бесконечности.

5. Наконец, в рамках автомодельного подхода невозможно исследовать объемное замыкание электрического тока, поскольку автомодельность требует постоянства знака плотности тока $j_{\parallel}$ во всем пространстве. В результате приходится постулировать, что обратный ток течет либо вдоль оси вращения, либо в экваториальной плоскости.

Вместе с тем в некоторых случаях анализ автомодельных решений оказывается полезен. Например, это касается решений, где, как и в конических течениях, необходимо ввести цилиндрический поток вблизи оси вращения, в пределах которого и будет содержаться основной продольный электрический ток. В подобном случае структура течения на периферии струйного выброса может иметь автомодельный вид. Иными словами, наибольший интерес представляют автомодельные решения, у которых расходимость всех величин имеет место именно вблизи оси вращения.

В качестве примера рассмотрим классическое решение, полученное Блендфордом и Пейном для холодного нерелятивистского истечения плазмы с поверхности тонкого кеплеровского аккреционного диска [Blandford, Payne, 1982]. Основой при построении автомодельного решения здесь является степенная зависимость кеплеровской угловой скорости вращения от радиуса:

$$\Omega_{\rm K} \propto r^{-3/2}, \tag{4.515}$$

которая задается степенной же зависимостью гравитационного потенциала ($\varphi_{\rm g} \propto r^{-1}$). В результате при определенном выборе величины β в автомодельной подстановке

$$\Psi(r,\theta) = r^{1/\beta}\Theta(\theta) \tag{4.516}$$

можно достигнуть того, что все члены как в уравнении Грэда–Шафранова, так и в уравнении Бернулли будут зависеть от радиуса лишь степенным образом с одинаковыми показателями степени $\beta_{\rm GS}$ и $\beta_{\rm B}$. Понятно, что это возможно только в случае, если

— квадрат числа Маха, входящий повсеместно в комбинации $1 - \mathcal{M}^2$, вообще не зависит от радиуса r;

— все четыре инварианта, $E_{\rm n}(\Psi)$, $L_{\rm n}(\Psi)$, $\Omega_{\rm F}(\Psi)$ и $\eta_{\rm n}(\Psi)$, также степенным образом зависят от магнитного потока Ψ.

В итоге после сокращения на факторы r^{1/β_i} уравнения Грэда–Шафранова и Бернулли будут зависеть лишь от функции $\Theta(\theta)$, ее первых и вторых производных. Поэтому решение можно строить точно так же, как и в случае цилиндрических течений.

Анализируя теперь уравнение Бернулли (4.93), сразу приходим к заключению, что в дополнение к соотношению (4.515) остальные три интеграла должны иметь в экваториальной плоскости следующие зависимости от координаты r:

$$E_{\rm n} \propto r^{-1}; \tag{4.517}$$

$$L_{\rm n} \propto r^{1/2}; \tag{4.518}$$

$$\eta_{\rm n} \propto r^{1/\beta-3/2}. \tag{4.519}$$

Последнее соотношение показывает, что плотность $\rho = 4\pi\eta_{\rm n}^2/\mathcal{M}^2$ зависит от радиуса как $r^{2/\beta-3}$, в результате чего уравнение Грэда–Шафранова (4.104) также имеет автомодельный вид. Поскольку же угловая скорость плазмы $\Omega_{\rm F}$ должна

— быть интегралом движения (т. е. функцией лишь магнитного потока Ψ),

— совпадать с кеплеровской угловой скоростью на поверхности диска,

ее можно определить как

$$\Omega_{\rm F}(\Psi) = \Omega_0\Psi^{-3\beta/2}, \tag{4.520}$$

где Ω_0 — постоянная. Соответственно, имеем

$$E_{\rm n}(\Psi) = E_0\Psi^{-\beta}; \qquad (4.521)$$

$$L_{\rm n}(\Psi) = L_0\Psi^{\beta/2}; \qquad (4.522)$$

$$\eta_{\rm n}(\Psi) = \eta_0\Psi^{1-3\beta/2}. \qquad (4.523)$$

Как мы видим, вся свобода в автомодельном моделировании сводится к выбору постоянных $\Omega_0, \ldots, \eta_0$ и β. В частности, в работе Блендфорда и Пейна рассматривался случай $\beta = 4/3$, так что

$$\Psi(r,\theta) = r^{3/4}\Theta(\theta) \qquad (4.524)$$

и $B \propto r^{-5/4}$. При этом магнитный поток $\Psi(r)$ при $r \to \infty$ расходится.

В итоге, как и в общем случае, уравнение Бернулли может быть использовано для определения зависимости $\mathcal{M}^2$ от θ (вообще говоря, неявной), причем величина $\mathcal{M}^2$ оказывается функцией первой производной $\mathrm{d}\Theta(\theta)/\mathrm{d}\theta$, самой функции $\Theta(\theta)$ и угла θ. Подставляя полученное выражение в компактную форму уравнения Грэда–Шафранова, содержащую как вторые производные Θ по θ, так и первые производные $\mathcal{M}^2$ по θ, находим искомое автомодельное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для функции $\Theta(\theta)$. При этом, как показано на рис. 4.20, все особые поверхности (в том числе быстрая магнитозвуковая, $n = 1$, и сингулярная, $t = 1$) имеют коническую форму ($\theta = \mathrm{const}$).

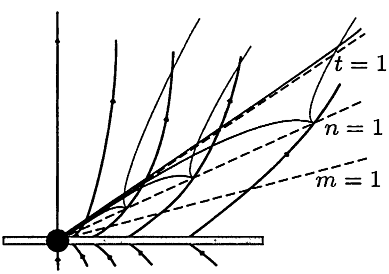


Рис. 4.20. Автомодельное решение уравнения Грэда–Шафранова. Силовые линии наклонены к лучам $\theta = \mathrm{const}$ под постоянным углом. Тонкие линии показывают поведение характеристических поверхностей

Если теперь в качестве независимой переменной θ и неизвестной функции $\Theta(\theta)$ выбрать координату $z = r_0\chi$ и функцию $\xi(\chi)$, задающую форму силовой линии согласно автомодельной подстановке [Blandford, Payne, 1982]:

$$z = r_0\chi, \qquad (4.525)$$

$$\varpi = r_0\xi(\chi) \qquad (4.526)$$

(здесь параметр r_0 имеет смысл радиуса, на котором данная силовая линия пересекает экватор, так что $\xi(0) = 1$), то уравнение Грэда–Шафранова примет вид

$$G(\chi,\xi,\xi')\cdot\xi'' + H(\chi,\xi,\xi') = 0, \qquad (4.527)$$

где

$$G(\chi,\xi,\xi') = \xi f^2 T(m-1)^2(t-1)J^{-1}S^{-2} \qquad (4.528)$$

и

$$H(\chi,\xi,\xi') = (m-1)^2[\xi T + (n-m-1)f^2 J]T + \\ + m(m-1)[(t-1)\xi T S - \xi f^2(\chi+\xi\xi')(\xi\xi' - \xi\xi' S^3 - \chi S^3)] + \\ + (m-1)[m\xi^2(\xi T - m f^2 J) - 5/4\,(n-1)\xi T^2] + 2m^2(\xi^2-\lambda)(m f^2 J - \xi T). \tag{4.529}$$

Здесь $\xi' = \mathrm{d}\xi/\mathrm{d}\chi$, $\xi'' = \mathrm{d}\xi^2/\mathrm{d}\chi^2$, а кроме того, введены обозначения $S = (\chi^2+\xi^2)^{-1/2}$, $T = \xi^2 + 2S - 3$, $J = \xi - \chi\xi'$, $m = \varkappa\xi f J$, $n = \varkappa\xi J \times \times [1+(\xi')^2]/T$ и $t = \varkappa\xi f^3 J^3 S^2/T$. При этом величины $\varkappa$ и λ представляют собой безразмерные постоянные задачи:

$$\varkappa = 8\pi^2\eta_0(GM)^{1/2}\Theta_0^{-1}\frac{[1+(\xi_0')^2]^{1/2}}{[9/16\,\Theta_0^2 + (\Theta_0')^2]^{1/2}}; \tag{4.530}$$

$$\lambda = \frac{L_0\Theta_0^{2/3}}{(GM)^{1/2}}, \tag{4.531}$$

где $\Theta_0 = \Theta(\pi/2)$ и $\Theta_0' = \mathrm{d}\Theta/\mathrm{d}\theta$ при $\theta = \pi/2$. Наконец, функция $f = f(\chi)$, определяющая согласно соотношению

$$(v_\varpi, v_z) = [\xi' f(\chi), f(\chi)]\left(\frac{GM}{r_0}\right)^{1/2} \tag{4.532}$$

полоидальную скорость вещества, может быть найдена из алгебраического уравнения

$$T - f^2 U = \left[\frac{(\lambda-\xi^2)m}{(1-m)\xi}\right]^2. \tag{4.533}$$

Упражнения.

1. Покажите, что в рассматриваемом здесь автомодельном решении величина f в (4.532) действительно является функцией лишь координаты χ.

2. Покажите, что величина $m = \varkappa\xi f J$ есть ни что иное как квадрат числа Маха по отношению к альфвеновской скорости ($m = \mathcal{M}^2$), величина $n = \varkappa\xi J[1+(\xi')^2]/T$ — квадрат числа Маха по отношению к скорости быстрой магнитозвуковой волны $V_{(2)}$ (см. (4.22)), а величина $t = \varkappa\xi f^3 J^3 S^2/T$ определяется отношением θ-компоненты скорости к скорости быстрой магнитозвуковой волны:

$$m = 4\pi\rho v_\mathrm{p}^2/B_\mathrm{p}^2; \tag{4.534}$$

$$n = 4\pi\rho v_\mathrm{p}^2/B^2; \tag{4.535}$$

$$t = 4\pi\rho v_\theta^2/B^2. \tag{4.536}$$

3. Покажите, что стоящая в квадратных скобках в выражении (4.533) величина всегда положительна, причем критическое условие ($\lambda = \xi^2$ при $m = 1$) в точности соответствует условию (4.158) на альфвеновской поверхности.

Таким образом, даже в простейшем случае автомодельное уравнение оказывается чрезвычайно громоздким. Поэтому мы не будем продолжать анализ его решений. Тем не менее некоторые общие свойства уравнения (4.527) стоят того, чтобы поговорить о них более подробно.

1. Автомодельное уравнение (4.527) имеет особенность на альфвеновской поверхности ($m = 1$). Это неудивительно, поскольку все версии уравнения Грэда–Шафранова, в том числе и для цилиндрической геометрии, имели на этой поверхности особенность. Отметим, что величина G содержит фактор $(1-m)^2$, т. е. при пересечении альфвеновской поверхности уравнение Грэда–Шафранова остается эллиптическим.

2. На первый взгляд, неожиданным является отсутствие особенности на быстрой магнитозвуковой поверхности, $n = 1$, и ее появление на поверхности $t = 1$ (которую иногда называют модифицированной быстрой магнитозвуковой поверхностью). Однако нетрудно понять, что для автомодельных течений как раз такая ситуация и должна иметь место. Действительно, как уже отмечалось, постулируя определенную симметрию задачи (осесимметричность, одномерность), мы тем самым фиксируем и возможное направление движения возмущений. Поскольку же автомодельные уравнения фактически зависят лишь от угла θ, неудивительно, что особенность присутствует на поверхности, где именно θ-компонента скорости вещества сравнивается со скоростью быстрой магнитозвуковой волны [Blandford, Payne, 1982]. Подчеркнем, что подобное перемещение особенности является хорошо известным свойством автомодельных решений, неоднократно обсуждавшимся в литературе [Мизес, 1961; Bogovalov, 1997a; Vlahakis et al., 2000].

3. На вопрос о смещении сингулярной поверхности можно посмотреть и с другой стороны. Поскольку в нерелятивистском случае знаменатель D в (4.103) для нулевой температуры $T = 0$ может быть записан как $D = -1 + B^2/(\mathcal{M}^2 B_{\rm p}^2)$, легко показать, что коэффициент $\mathcal{C}$ (см. (4.76)) в уравнении (4.73) представим в виде

$$\mathcal{C} = \frac{1}{\mathcal{M}^2 B_{\rm p}^2}\left(B^2 - \mathcal{M}^2 B_\theta^2\right). \tag{4.537}$$

Поскольку же $v_\theta/v_{\rm p} = B_\theta/B_{\rm p}$, условие $t = 1$ в точности совпадает с условием $\mathcal{C} = 0$. В результате согласно общему уравнению (1.124) для характеристических поверхностей при $t = 1$ имеем $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}r = 0$. Следовательно, особая поверхность $t = 1$ совпадает с одной из характеристических поверхностей, которая оказывается еще и перпендикулярной к направлению изменения координаты θ (см. рис. 4.20). Поэтому неудивительно, что сингулярность в автомодельных уравнениях появляется именно на этой поверхности.

4. Отметим, наконец, что в автомодельном случае сингулярная поверхность $t = 1$ фактически совпадает с сепаратрисной характеристикой. Действительно, как показывает рис. 4.20, все характеристики

данного семейства, находящиеся между поверхностями $t = 1$ и $n = 1$, пересекают быструю магнитозвуковую поверхность, тогда как характеристики, находящиеся выше прямой $t = 1$, уходят на бесконечность. Последнее дало повод считать рассмотренный пример подтверждением того, что именно сепаратрисная характеристика, а не звуковая поверхность, является истинной особенностью в уравнении Грэда–Шафранова [Bogovalov, 1996; Tsinganos et al., 1996]. Однако неочевидно, что это утверждение, безусловно верное для автомодельных решений, может быть перенесено и на общий случай осесимметричных течений.

Таким образом, приведенный пример действительно показывает, что уравнение Грэда–Шафранова имеет достаточно широкий класс автомодельных решений. Неудивительно поэтому, что подобный подход в дальнейшем рассматривался во многих работах [Contopoulos, Lovelace, 1994; Vlahakis et al., 2000; Vlahakis, Königl, 2003]. Его обобщение на релятивистский случай было сделано в работе [Li, Chiueh, Begelman, 1992]. Поскольку в ней пренебрегается гравитационным полем, автомодельная зависимость магнитного потока Ψ от радиуса r определяется тем, что альфвеновский множитель $A = 1 - \Omega_{\mathrm{F}}^2\varpi^2 - \mathcal{M}^2$ содержит еще и слагаемое $\Omega_{\mathrm{F}}^2\varpi^2$, которое, как и прежде, не должно зависеть от радиуса r. Поэтому в рамках данного подхода удается описать лишь течения, у которых в районе экватора угловая скорость обратно пропорциональна радиусу:

$$\Omega_{\mathrm{F}} \propto r^{-1} \tag{4.538}$$

(этот пример, на наш взгляд, особенно отчетливо демонстрирует ограниченность автомодельных решений). В итоге, как нетрудно показать, в релятивистском случае автомодельное решение имеет место только при следующих степенных зависимостях интегралов движения от величины магнитного потока Ψ:

$$\Omega_{\mathrm{F}}(\Psi) = \Omega_0 \Psi^{-\beta'}; \tag{4.539}$$

$$E_{\mathrm{n}}(\Psi) = E_0 \Psi^{1-2\beta'}; \tag{4.540}$$

$$L_{\mathrm{n}}(\Psi) = L_0 \Psi^{1-\beta'}; \tag{4.541}$$

$$\eta_{\mathrm{n}}(\Psi) = \eta_0 \Psi^{1-2\beta'}, \tag{4.542}$$

а сам поток может быть записан как

$$\Psi(r, \theta) = r^{1/\beta'}\Theta(\theta). \tag{4.543}$$

Уравнение же Грэда–Шафранова снова имеет вид (4.527), причем коэффициент $G(\xi, \xi')$ вновь обращается в нуль как на альфвеновской, так и на модифицированной быстрой магнитозвуковой поверхности [Li, Chiueh, Begelman, 1992].

Наконец, нельзя не упомянуть о еще одном семействе автомодельных решений, впервые рассмотренном в работе [Low, Tsinganos, 1986].

Оно основывается на подстановке

$$\Psi(r,\theta) = R(r)\sin^2\theta \tag{4.544}$$

и на гипотезе о существовании решений, в которых плотность зависит только от радиуса r:

$$\rho = \rho(r). \tag{4.545}$$

Здесь необходимо также предположить, что интегралы движения E и L линейно зависят от Ψ:

$$E(\Psi) = E^{(0)} + E_0\Psi, \tag{4.546}$$

$$L(\Psi) = L_0\Psi, \tag{4.547}$$

а интегралы Ω_{F} и η вообще являются постоянными (подобный выбор более естественен при рассмотрении течений вблизи сферических, а не дисковых объектов). Тогда лишь от координаты r будет зависеть и величина $\mathcal{M}^2 = 4\pi\eta^2/\rho$ (и поэтому альфвеновская поверхность окажется сферической).

В результате, как нетрудно проверить, уравнение Грэда–Шафранова (4.104) действительно не содержит координаты θ. Что же касается уравнения Бернулли (4.93), то оно, к сожалению, приобретает вид

$$G_1(R, R', E_0, L_0, \Omega_{\mathrm{F}}, \eta, \mathcal{M}^2) + G_2(R, R', E_0, L_0, \Omega_{\mathrm{F}}, \eta, \mathcal{M}^2)\sin^2\theta = 0 \tag{4.548}$$

(где $R' = \mathrm{d}R/\mathrm{d}r$) и поэтому распадается на два уравнения:

$$G_1(R, R', E_0, L_0, \Omega_{\mathrm{F}}, \eta, \mathcal{M}^2) = 0; \tag{4.549}$$

$$G_2(R, R', E_0, L_0, \Omega_{\mathrm{F}}, \eta, \mathcal{M}^2) = 0. \tag{4.550}$$

В итоге в общем случае стандартная процедура определения $\mathcal{M}^2$ через интегралы движения и функцию $R(r)$ становится невозможной. Согласование может быть достигнуто, лишь если в объеме происходит выделение или поглощение энергии, которое к тому же имеет специальный автомодельный вид. Этому классу решений также было посвящено значительное количество работ [Tsinganos, Sauty, 1992; Sauty, Tsinganos, 1994; Tsinganos et al., 1996; Sauty, Tsinganos, Trussoni, 1999].

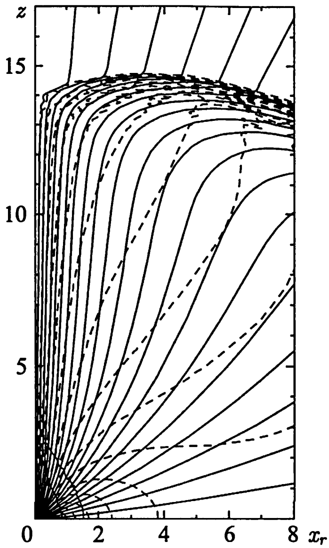
4.5.2. Результаты численного расчета. В заключение необходимо сказать хотя бы несколько слов о работах, посвященных численному анализу процессов, происходящих как при аккреции вещества на компактные объекты, так и при истечении и формировании струйных выбросов. К настоящему времени накоплен достаточно большой объем данных, найденных в результате численного решения полной системы магнитогидродинамических уравнений, касающихся, в частности, и стационарных решений, найденных в рамках задачи установления. Однако полностью охватить весь этот пласт вряд ли представляется возможным. Так, например, существует значительное количество работ, посвященных процессу образования, внутренней структуре и устойчивости струйных выбросов [Ouyed, Pudritz, 1997; Lucek, Bell, 1997; Hardee et al., 1998; Nishikawa et al., 1998; Hardee, 2003], которые практически невозможно сравнить с предсказаниями обсуждаемой здесь аналитической теории. В работах [Kudoh, Matsumoto, Shibata, 1998; Koide, Shibata, Kudoh, 1999; Koide et al., 2000; Semenov et al., 2002] исследовался принципиально нестационарный режим магнитогидродинамической аккреции газа на черные дыры. Понятно, что этот случай также не может быть описан с помощью стационарных уравнений. Далее, в работах [Toropin et al, 1999; Toropina et al., 2001, 2003; Romanova et al., 2003] изучалась аккреция на нейтронную звезду с сильным дипольным магнитным полем, тоже далекая от стационарной. Наконец, в последнее время проведено большое количество трехмерных магнитогидродинамических расчетов, в которых течение предполагается сильно турбулентным и поэтому положение особых поверхностей нельзя определить с достаточной степенью надежности [Balbus, Hawley, 1998; Igumenshchev, Abramowicz, Narayan, 2000; de Villiers, Hawley, 2002; Krolik, Hawley, 2002]. Здесь мы рассмотрим лишь работы, имеющие непосредственное отношение к аналитическим результатам, полученным в рамках метода уравнения Грэда–Шафранова. При этом, как уже подчеркивалось, нас будут интересовать именно общие свойства течений, а не возможность объяснить реальные наблюдения.

Прежде всего, напомним результаты, касающиеся чисто гидродинамических течений. Как было показано, аналитическое решение (1.149), соответствующее аккреции Бонди–Хойла, находится в прекрасном согласии с результатами численных расчетов [Hunt, 1979; Shima et al., 1985; Petrich et al., 1989]. Далее, вывод о формировании дисков при аккреции вещества с угловым моментом и при трансзвуковой эжекции с поверхности вращающихся звезд также не является новым. Здесь наши аналитические решения лишь подтвердили хорошо известные результаты, полученные ранее численными методами [Lammers, Cassinelli, 1999]. Что же касается структуры тонкого аккреционного диска вблизи горизонта черной дыры, то в этом случае провести сравнение, к сожалению, не представляется возможным, поскольку все работы по численному моделированию (в том числе и для трехмерных течений, выполненные в последние несколько лет: [Papaloizou, Szuszkiewicz, 1994; Igumenshchev, Beloborodov, 1997; Krolik, Hawley, 2002; Daigne, Font, 2004]) касаются исключительно толстых дисков, для которых обсуждавшиеся выше эффекты (сильное сжатие течения до звуковой поверхности, формирование сопла) не должны иметь места.

Перейдем к обсуждению результатов, полученных в численных экспериментах для МГД-течений, анализировавшихся в рамках задачи установления. Здесь «атомом водорода» вновь является задача о структуре магнитосферы вращающегося тела с монопольным магнитным полем. Прежде всего, был получен важный результат, проясняющий ограниченность стационарных решений при исследовании процесса замыкания тока [Bogovalov, Tsinganos, 1999] (см. также [Komissarov, 2004b]). При этом задача ставилась следующим образом. Пусть имеется невращающийся шар с монопольным магнитным полем, который в момент времени $t = 0$ начинает вращаться с угловой скоростью Ω. В итоге от шара со скоростью c начинает распространяться волна включения, так что за ее пределами магнитное поле остается монопольным, а электрические токи отсутствуют, тогда как в пределах волны включения (и это очень важно) решение быстро выходит на стационарный трансзвуковой режим, полностью согласующийся с решением (4.406). Тем самым подтверждается предположение о стационарном решении, в котором продольные токи текут практически вдоль магнитных поверхностей. Что же касается замыкания тока, то оно происходит в волне включения, где течение является существенно нестационарным (рис. 4.21). Таким образом, в рамках стационарного приближения действительно можно считать замыкание электрического тока происходящим на бесконечности, как это обычно и предполагается. Подчеркнем, что в данном вопросе трансзвуковые течения существенно отличаются от дозвуковых, при которых величина циркулирующего электрического тока фактически определяется проводимостью границы области, занятой плазмой (см., например, [Рафиков, Гуревич, Зыбин, 1999]).

В качестве следующего результата можно отметить подтверждение отсутствия сколь-либо заметной коллимации для ультрарелятивистских течений (рис. 4.22) [Bogovalov, 2001] и ее присутствия для нерелятивистского случая (рис. 4.23) [Sakurai, 1985]. Кроме того, проверены и гораздо более тонкие предсказания теории. Например, для релятивистских течений продемонстрированы дополнительное ускорение (в точности до величин $\gamma = \sigma^{1/3}$) в пределах быстрой магнитозвуковой поверхности и очень медленный, близкий к закону $\gamma \propto (\ln r)^{1/3}$, рост энергии частиц на расстояниях $r \gg r_{\mathrm{f}}$ (рис. 4.24). Подчеркнем, что на этом рисунке приведены результаты, соответствующие значению $\sigma = 10$, когда в задаче фактически отсутствует большой параметр $\sigma^{1/3}/\gamma_{\mathrm{in}}$. С другой стороны, хорошо видно, что в нерелятивистском случае альфвеновская и быстрая магнитозвуковая поверхности находятся примерно на одном расстоянии от источника магнитного поля.

В работе [Bogovalov, Tsinganos, 1999] для нерелятивистских течений были продемонстрированы деколлимация в области объемного замыкающего тока и выход на асимптотику $j_{\|} = 0$ на больших расстояниях от компактного объекта. При этом область с объемным замыкающим током моделировалась так же, как и в рассмотренном выше аналитическом примере, т. е. за счет зависимости угловой скорости Ω_{F} от магнитного потока Ψ. Действительно, на малых расстояниях от быстрой магнитозвуковой поверхности имеют место как коллимация, так и деколлимация магнитного поля (рис. 4.25). Однако «природа не терпит пустоты», поэтому на бóльших расстояниях расхождение маг-



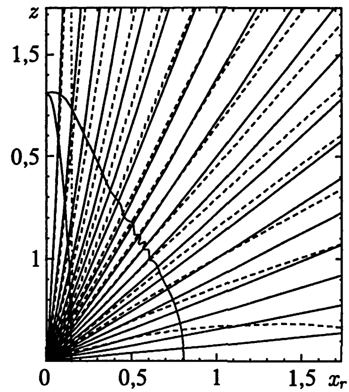
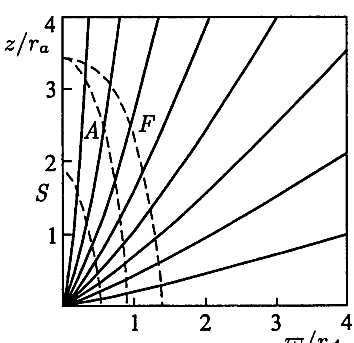


Рис. 4.21. Замыкание электрического тока в волне включения, распространяющейся со скоростью c от компактного объекта [Bogovalov, Tsinganos, 1999]

Рис. 4.22. Структура магнитных поверхностей для ультрарелятивистского истечения холодной плазмы из вращающегося тела, обладающего монопольным магнитным полем [Bogovalov, 2001]. Вблизи оси вращения быстрая магнитозвуковая поверхность совпадает с альфвеновской



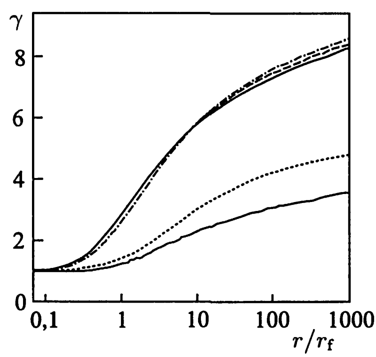


Рис. 4.23. Структура особых поверхностей для нерелятивистского истечения плазмы из вращающегося тела, обладающего монопольным магнитным полем [Sakurai, 1985]

Рис. 4.24. Рост энергии частиц с расстоянием r для ультрарелятивистского истечения вдоль квазимонопольного магнитного поля [Bogovalov, 2001]. Различные кривые соответствуют разным магнитным поверхностям. Шкала по оси r — логарифмическая, а по оси γ — линейная, так что рост энергии частиц при $r \gg r_{\rm f}$ оказывается чрезвычайно медленным нитных силовых линий сменяется коллимацией даже для магнитных поверхностей, которые вначале отклонялись от оси вращения. Последнее становится возможным благодаря тому, что при учете конечной массы частиц электрический ток не является больше интегралом движения, что приводит к возможности перераспределения продольного тока по области открытых силовых линий.

В итоге на больших расстояниях (точнее, на математической бесконечности) в полном согласии с теоретическими выводами истекающий ток концентрируется вблизи оси вращения, а замыкающий — вблизи экваториальной плоскости. Из рис. 4.26 хорошо видно, что продольный ток $I(\Psi)$ в области полной коллимации выходит на постоянное значение по крайней мере на существенной части открытых силовых линий (его дальнейший рост, как полагают авторы работы [Bogovalov, Tsinganos, 1999], связан с ограниченностью области счета, не позволяющей достигнуть асимптотических величин). Как показывает рис. 4.27, тоже взятый из работы [Bogovalov, Tsinganos, 1999], вблизи оси вращения с хорошей точностью справедливы зависимости $B_{\rm p} \propto \varpi^{-2}$ (см. (4.304)) и $B_{\varphi} \propto \varpi^{-1}$ (см.(4.308)) для полоидального и тороидального магнитных полей, а также имеет место логарифмический рост $\Psi(\varpi) \propto \ln \varpi$ (см. (4.306)) для магнитного потока.

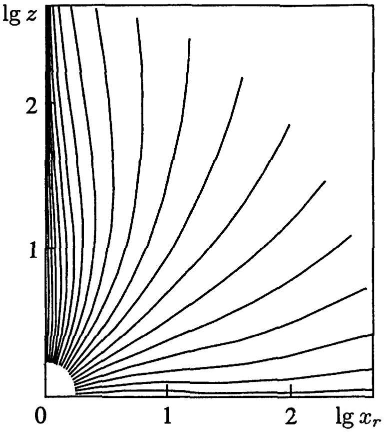
Наконец, в численном эксперименте, осуществленном в работе [Bogovalov, 1996], по-видимому, наблюдался эффект потери аналитичности вблизи нестандартной особой точки. В указанной работе вновь исследовалась задача об истечении холодного релятивистского газа с поверхности тела с монопольным магнитным полем. Оказалось, что при медленном увеличении скорости вращения Ω при достижении параметром $\varepsilon_a = \Omega r_{\rm A}/c$ значений порядка единицы в районе пересечения быстрой магнитозвуковой поверхности с экватором (а именно здесь и должна находиться нестандартная особая точка) внезапно появляется ударная волна (рис. 4.28). Подробное исследование, проведенное в работе [Бескин, Кузнецова, 1998], показало, что при $\varepsilon_a \ll 1$ выражение для логарифмической производной концентрации $\eta_1 = (r_*/n_*)({\rm d}n/{\rm d}r)_*$ имеет вид

$$\eta_1 = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\,\varepsilon_a^2 - \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{2}{9}\,\varepsilon_a^2}. \tag{4.551}$$

В частности, при $\varepsilon_a = 0$ получаем просто $\eta_1 = -2$, что как раз и отвечает зависимости $n \propto r^{-2}$, справедливой для невозмущенного монопольного истечения. Выражение же для $D_1 = r_*({\rm d}D/{\rm d}r)_*$ теперь выглядит как

$$D_1^2 = \frac{4}{9} - \frac{2}{9}\,\varepsilon_a^2. \tag{4.552}$$

К сожалению, при $\varepsilon_a \sim 1$ величины η_1 и D_1 начинают зависеть и от других параметров, аналитически связать которые с величиной ε_a не представляется возможным. Тем не менее общая тенденция уменьшения величины D_1^2 при приближении ε_a к единице позволяет надеяться, что подобная интерпретация соответствует действительности.



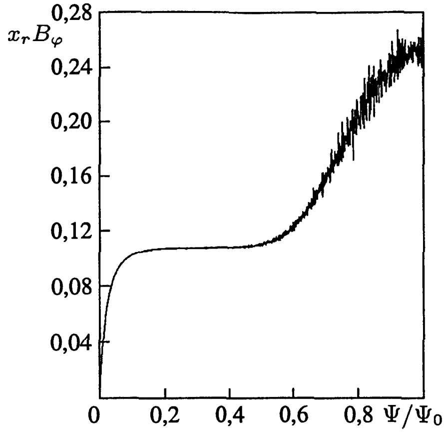
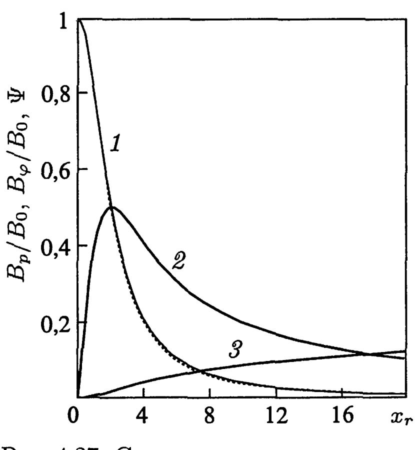


Рис. 4.25. Структура магнитных поверхностей для нерелятивистского истечения плазмы в монопольном магнитном поле [Bogovalov, Tsinganos, 1999]

Рис. 4.26. Профиль продольного тока на больших расстояниях от компактного объекта для нерелятивистского истечения плазмы [Bogovalov, Tsinganos, 1999]. Область истекающего тока соответствует быстрому росту интегрального тока $I \propto x_r B_\varphi$ вблизи оси вращения, а область $j_\| = 0$ — постоянному значению I



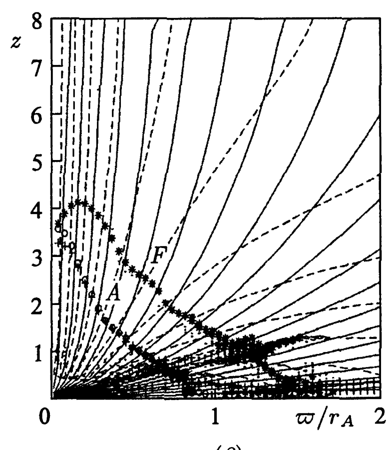


Рис. 4.27. Структура полоидального (*1*) и тороидального (*2*) магнитного поля, а также магнитного потока Ψ (*3*) вблизи оси вращения на больших расстояниях от компактного объекта [Bogovalov, Tsinganos, 1999]

Рис. 4.28. Появление ударной волны вблизи нестандартной особой точки для квазимонопольного истечения холодного газа [Bogovalov, 1996]. Особенность в решении связана с тем, что положение быстрой магнитозвуковой поверхности (звездочки) при $\varepsilon_a > 1$ не имеет регулярной структуры

В заключение отметим, что в последнее время различными научными группами были выполнены новые исследования, посвященные структуре центральной машины. Обычно в таких расчетах начальное регулярное магнитное поле предполагалось заданным, например однородным или близким к монопольному. В большинстве работ рассматривалось нерелятивистское приближение и задача сводилась к доказательству того, что вращение диска, в который вморожены силовые линии магнитного поля, действительно приводит к образованию струйного выброса с сильным тороидальным магнитным полем, уносящим энергию и угловой момент за счет потока электромагнитной энергии [Ustyugova et al., 1995; Ustyugova et al., 2000].

С другой стороны, в некоторых работах [Koide et al., 2000; Koide, 2003] эффекты общей теории относительности учитывались точно, поскольку в них использовалась метрика Керра (метрика вращающейся черной дыры). Соответственно, самосогласованным образом описывалось и движение плазмы. Поэтому удалось смоделировать как область аккреционного диска, в которой основная энергия заключена в аккрецирующем веществе, так и область вне его, где плотность энергии магнитного поля становится определяющей. Важным свойством рассматриваемых моделей являлся достаточно последовательный учет внешней среды, безусловно, играющей заметную роль в процессе образования джетов. В результате было продемонстрировано, каким образом вращение аккрецирующего вещества приводит к образованию струйного выброса, переносящего энергию во внешние области магнитосферы. В частности, была найдена структура текущих в магнитосфере продольных токов. Еще раз напомним, что в последнем случае рассматривалась принципиально нестационарная задача.

4.6. Заключение

Таким образом, имеющиеся точные решения уравнения Грэда–Шафранова позволили получить достаточно важную информацию о свойствах сильнозамагниченных течений в окрестности компактных объектов. В частности, для простейшей геометрии удалось, хотя и на самом предварительном уровне, показать возможность эффективного выделения энергии вращающейся черной дырой. При этом главным элементом явилось существование регулярного полоидального магнитного поля, вдоль которого и происходят перенос энергии и отвод углового момента. Как уже отмечалось, к рассмотренному классу моделей относится и многочисленное семейство автомодельных решений [Blandford, Payne, 1982; Lovelace, Wang, Sulkanen, 1987; Tsinganos, Sauty, 1992; Sauty, Tsinganos, 1994; Sauty, Tsinganos, Trussoni, 1999]; однако ограниченность данного подхода не позволяет ответить на все вопросы, возникающие при построении работоспособных моделей компактных объектов.

Все рассмотренные выше примеры, конечно же, являются слишком упрощенными. К сожалению, на сегодняшний день это единственные точные аналитические решения, хоть в какой-то степени описывающие магнитосферу реальных компактных объектов. Несмотря на то что до сих пор совершенно открытым остается, например, вопрос о взаимодействии аккреционного диска и вращающейся черной дыры, полученные решения дают возможность выделить несколько ключевых положений, позволяющих судить об основных свойствах центральной машины.

Во-первых, во всех случаях, когда удалось достаточно надежно определить угловую скорость вращения Ω_{F} (при условии, что силовые линии уходят на бесконечность), она оказалась близка к половине угловой скорости вращения черной дыры. Следовательно, эффективность выделения энергии вращающейся черной дырой действительно близка к максимальной. Поскольку же, как показали работы, посвященные вековой эволюции аккрецирующих черных дыр [Moderski, Sikora, 1996; Moderski, Sikora, Lasota, 1998], их угловая скорость вращения на самом деле может быть близка к предельной ($a \sim M$), можно сделать вывод о том, что выделение энергии за счет процесса Блендфорда–Знайека способно играть заметную роль в механизме выделения энергии центральной машиной.

Во-вторых, нашли свое подтверждение сформулированные выше утверждения об отсутствии сильной коллимации для ультрарелятивистских течений и ее присутствии для нерелятивистских.

Наконец, необходимо подчеркнуть, что в то время как ведутся поиски механизмов, обеспечивающих стационарный режим истечения, есть указания на то, что в некоторых объектах этот процесс вовсе не является стационарным. Например, в GRS1915+105 аккреция чередуется с эжекцией [Fender, 2004], хотя в его излучении имеется и постоянная компонента. С учетом соответствующих временных масштабов мы, возможно, имеем дело с локальными неустойчивостями джета, а не с переменностью во взаимодействии джета с диском, тем более что прямой связи с переменностью излучения диска не обнаружено.

В связи с последним обстоятельством нельзя вновь не отметить работы по численному моделированию центральной машины [Kudoh, Matsumoto, Shibata, 1998; Koide et al., 2000; Koide, Shibata, Kudoh, 1999; Koide, 2003]. Преимущество подобного подхода заключается в том, что здесь мы не ограничены осесимметричными стационарными конфигурациями. Необходимо, правда, подчеркнуть, что основная неопределенность как численных, так и аналитических методов связана с отсутствием последовательной модели генерации магнитного поля в аккрецирующем веществе. Поэтому большинство имеющихся работ по численному моделированию в значительной степени носит предварительный характер.

Что же касается наблюдений, то, как уже говорилось, чувствительность современных телескопов, а также большая удаленность активных галактических ядер не позволяют разрешить внутреннюю структуру не только центральной машины, но и парсековых джетов. Поэтому мы до сих пор практически ничего не знаем ни о течении вещества вблизи центральной машины, ни о магнитных полях в области формирования джетов. Лишь недавно появилось сообщение [Junor, Biretta, Livio, 1999], согласно которому течение вещества в непосредственной близости от центральной машины имеет гораздо больший угол раствора, чем в струйном выбросе. Если это действительно так, то модель с квазимонопольным магнитным полем приобретает и наблюдательное подтверждение. В работе [Lobanov, Hardee, Eilek, 2003], в которой все же удалось разрешить внутреннюю структуру джета, было показано, что он на самом деле имеет вид полого цилиндра, а в работах [Gabuzda et al., 1992; Zhang et al., 2004] утверждается, что струйные выбросы обладают сильным тороидальным магнитным полем. Однако все перечисленные работы можно рассматривать лишь как сугубо предварительные, поэтому требуется приложить еще немало усилий для доказательства того, что реально существующие джеты действительно соответствуют сильнозамагниченным течениям, рассматривавшимся в настоящей главе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, нами было показано, что метод уравнения Грэда–Шафранова является достаточно мощным инструментом, позволяющим в некоторых случаях формулировать и решать прямые задачи магнитной гидродинамики, относящиеся к самому широкому классу течений. Тем самым была продемонстрирована его эффективность при исследовании конкретных астрофизических объектов.

Вместе с тем метод уравнения Грэда–Шафранова оказывается в значительной степени тупиковым направлением. Прежде всего, его нельзя обобщить на случай, когда диссипативные процессы (вязкость, теплопроводность, излучение плазмы и ее взаимодействие с излучением, кинетические эффекты и т. д.) начинают играть заметную роль. Дело в том, что в самом подходе заложено существование интегралов движения. Нарушение этого предположения мгновенно приводит к невозможности в общем случае свести полную систему уравнений к одному уравнению второго порядка. Поэтому последовательно подключить диссипативные процессы удалось пока только в исключительных случаях [Li, Begelman, Chiueh, 1992; Beskin, Rafikov, 2000; Солдаткин, Чугунов, 2003; Beskin, Zakamska, Sol, 2004] (так, например, для сферически-симметричной гидродинамической аккреции на черную дыру удалось описать движение вещества с учетом его взаимодействия с собственным излучением [Thorne, Flammang, Zytkov, 1981; Nobili, Turolla, Zampieri, 1991]). По той же причине практически невозможно обобщение на случай неосесимметричных и нестационарных течений, а значит, и исследование полученных решений на устойчивость. Поэтому и здесь можно отметить лишь несколько работ, в которых все же удалось продвинуться в данном направлении [Park, Vishniac, 1989, 1990; Lynden-Bell, 1996; Istomin, Pariev, 1996; Timokhin, Bisnovatyi-Kogan, Spruit, 1999; Bogovalov, 2001].

Как мы видели, возможность решать прямые задачи напрямую связана с наличием точного аналитического решения уравнения Грэда–Шафранова для сферически-симметричных течений. В этом смысле астрофизическая ситуация оказалась проще других прикладных задач, поскольку элементарное сферически-симметричное течение во многих случаях достаточно хорошо описывает реальное положение вещей. В общем же случае, когда точное решение неизвестно, прямая задача поставлена и решена быть не может. Поэтому в численных расчетах обычно рассматривается временная задача установления, которая в самой своей постановке отличается от метода уравнения Грэда–Шафранова.

Тем не менее можно надеяться, что сформулированные выше результаты имеют вполне определенный интерес. Прежде всего, в рамках достаточно простых модельных задач удается описать все основные черты трансзвуковых течений вблизи реальных компактных объектов. Это позволяет получить достаточно простые аналитические выражения практически для всех ключевых величин, характеризующих такие течения. Далее, многие результаты, полученные в рамках модельных решений (отсутствие собственной коллимации при истечении замагниченного релятивистского ветра, связь между током и потенциалом в магнитосфере радиопульсаров, рождение вторичной плазмы в магнитосфере черной дыры), по-видимому, качественно правильно описывают реальные процессы, тем более что многочисленные другие решения, например формирование диска при трансзвуковой гидродинамической аккреции и эжекции, подтвердили ранее известные результаты. Наконец, точные аналитические решения могут служить хорошей проверкой и при различных численных расчетах.

В заключение перечислим ряд вопросов, которые, на наш взгляд, еще не были достаточно подробно исследованы в рамках метода уравнения Грэда–Шафранова.

1. Прежде всего, необходимо отметить проблему сепаратрисной характеристики. Очевидно, что как раз эта поверхность и разделяет две причинно несвязанные области пространства. Более того, как мы видели, автомодельные течения имеют на ней особенности. Поэтому возникло предположение, что истинная особенность в уравнении Грэда–Шафранова лежит именно на сепаратрисной характеристике [Bogovalov, 1994; Tsinganos et al., 1996]. В таком случае вся процедура решения должна быть пересмотрена. Вместе с тем необходимо подчеркнуть, что независимо от того, на звуковой или сепаратрисной поверхности находится истинная особенность уравнения Грэда–Шафранова, ее положение заранее не известно, поэтому соответствующее критическое условие не позволяет конструктивно определить связь между физическими величинами на произвольно выбранной границе. Что же касается модельных задач, для которых были получены точные аналитические решения, то они, к сожалению, не могут служить аргументом в данном вопросе, поскольку в рассматриваемом здесь приближении, $\varepsilon \ll 1$, особые и сепаратрисные поверхности совпадают друг с другом.

2. Далее, совершенно не исследованной остается проблема касповой поверхности. Полное уравнение Грэда–Шафранова не имеет на ней такой же особенности, как на быстрой и медленной магнитозвуковых поверхностях, однако его тип здесь также меняется от эллиптического к гиперболическому. Более того, как было показано выше, в одномерном цилиндрическом случае особенность присутствует именно на касповой, а не на звуковых поверхностях. По-видимому, указанная особенность связана с предполагаемой одномерностью задачи (подобно тому, как в автомодельных решениях особенность смещается из звуковой точки на сепаратрисную характеристику), однако полной ясности в данном вопросе до сих пор нет.

3. Еще одним практически неисследованным направлением, в котором рассмотренный выше метод мог бы быть успешно применен, является вопрос о двумерной структуре течений, имеющих ударные волны. Действительно, хорошо известные соотношения для ударных

волн могут быть легко переписаны на языке основных терминов уравнения Грэда–Шафранова, поскольку законы сохранения потока вещества, энергии и поперечного импульса для них записываются просто в виде

$$\{\Psi\} = 0; \quad \{E\} = 0; \quad \{L\} = 0.$$

Что же касается скачка энтропии (а также положения самой поверхности), то он должен находиться как решение задачи. В настоящее время исследования в данной области только начинаются, хотя уже получены первые важные результаты как для случая аккреции на черную дыру [Takahashi et al., 1994], так и для взаимодействия пульсарного ветра с остатком сверхновой [Боговалов, Хангулян, 2002, 2003].

4. Наконец, ждут своего подробного исследования и течения с анизотропным давлением. В настоящее время здесь также получены лишь самые предварительные результаты [Marsch et al., 1982; Hu, Esser, Habbal, 1997; Krasheninnikov, Catto, 2000].

Хотелось бы надеяться, что представленное в монографии подробное изложение метода уравнения Грэда–Шафранова поможет продвинуться в решении как вышеперечисленных, так и других задач, стоящих перед современной астрофизикой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Альбер Я. И., Кротова З. Н., Эйдман В. Я. // 1975. Астрофизика. Т. 11. С. 283.

Альвен Г., Фельтхаммар К.-Г. Космическая электродинамика. — М.: Мир, 1967.

Альперт Я. Л., Гуревич А. В., Питаевский Л. П. Искусственные спутники в разреженной плазме. — М.: Наука, 1964.

Ахиезер А. И., Ахиезер И. А., Половин Р. В. и др. Электродинамика плазмы. — М.: Наука, 1974.

Бегельман М. К., Блендфорд Р. Д., Рис М. Дж. Физика внегалактических источников радиоизлучения / Под ред. Р. Д. Дагкесаманского. — М.: Мир, 1987.

Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика. — М.: Наука, 1989.

Бескин В. С. // 1982. Астрофизика. Т. 18. С. 439.

Бескин В. С. // 1990. Письма АЖ. Т. 16. С. 665.

Бескин В. С. // 1997. УФН. Т. 167. С. 689.

Бескин В. С. // 1999. УФН. Т. 169. С. 1169.

Бескин В. С., Гуревич А. В., Истомин Я. Н. // 1983. ЖЭТФ. Т. 85. С. 401.

Бескин В. С., Истомин Я. Н., Парьев В. И. // 1992. АЖ. Т. 69. С. 1258.

Бескин В. С., Компанеец Р. Ю., Чеховской А. Д. // 2002. Письма АЖ. Т. 28. С. 616.

Бескин В. С., Кузнецова И. В. // 1998. ЖЭТФ. Т. 113. С. 771.

Бескин В. С., Малышкин Л. М. // 1996. Письма АЖ. Т. 22. С. 532.

Бескин В. С., Малышкин Л. М. // 2000. Письма АЖ. Т. 26. С. 253.

Бескин В. С., Нохрина Е. Е. // 2004. Письма АЖ. Т. 30. С. 754.

Бескин В. С., Нохрина Е. Е. // 2005. astro-ph: 0506333 (в печати).

Бескин В. С., Парьев В. И. // 1993. УФН. Т. 163. С. 95.

Бескин В. С., Пидопрыгора Ю. Н. // 1995. ЖЭТФ. Т. 107. С. 1025.

Бескин В. С., Пидопрыгора Ю. Н. // 2000. АЖ. Т. 75. С. 82.

Бисноватый-Коган Г. С. Физические вопросы теории звездной эволюции. — М.: Наука, 1989.

Бисноватый-Коган Г. С., Каждан Я. М., Клыпин А. А. и др. // 1979. АЖ. Т. 56. С. 359.

Блинников С. И., Новиков И. Д., Переводчикова Т. В., Полнарев А. Г. // 1984. Письма АЖ. Т. 10. С. 177.

Боговалов С. В. // 1990. Письма АЖ. Т. 16. С. 844.

Боговалов С. В. // 1992. Письма АЖ. Т. 18. С. 832.

Боговалов С. В. // 1995. Письма АЖ. Т. 21. С. 633.

Боговалов С. В. // 1998. Письма АЖ. Т. 24. С. 381.

Боговалов С. В., Хангулян Д. В. // 2002. Письма АЖ. Т. 28. С. 425.

Боговалов С. В., Хангулян Д. В. // 2003. Письма АЖ. Т. 29. С. 563.
Брагинский С. И. // Вопросы Теории Плазмы / Под ред. М. А. Леонтовича. — М.: Атомиздат. 1963. Т. 1. С. 183.

Велихов Е. П. // 1959. ЖЭТФ. Т. 36. С. 1398.

Гинзбург В. Л. // 1964. ДАН Астрономия. Т. 156. С. 43.
Гинзбург В. Л. // 1969. УФН. Т. 103. С. 393.
Гинзбург В. Л., Железняков В. В., Зайцев В. В. // 1969. УФН. Т. 98. С. 201.
Гинзбург В. Л., Киржниц Д. А. // 1964. ЖЭТФ. Т. 47. С. 2006.
Гинзбург В. Л., Усов В. В. // 1972. Письма ЖЭТФ. Т. 15. С. 28.
Гриб А. А., Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М. Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях. — М.: Атомиздат, 1980.
Гудерлей К. Г. Теория околозвуковых течений. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1960.
Гуревич А. В., Димант Я. С., Зыбин К. П. // 1993. ЖЭТФ. Т. 104. С. 2265.
Гуревич А. В., Зыбин К. П. // 1995. УФН. Т. 165. С. 723.
Гуревич А. В., Зыбин К. П., Сирота В. А. // 1997. УФН. Т. 167. С. 913.
Гуревич А. В., Истомин Я. Н. // 1985. ЖЭТФ. Т. 89. С. 3.
Гуревич А. В., Крылов А. Л., Федоров Е. Н. // 1975. ЖЭТФ. Т. 75. С. 2132.

Докучаев В. И. // 1991. УФН. Т. 161. С. 1.
Долгинов А. З., Гнедин Ю. Н., Силантьев Н. А. Распространиние и поляризация излучения в космической среде. — М.: Наука, 1979.

Железняков В. В. Электромагнитные волны в космической плазме (генерация и распространение). — М.: Наука, 1977.

Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. // 1966. АЖ. Т. 43. С. 758.
Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Релятивистская астрофизика. — М.: Наука, 1967a.
Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. // 1967b. АЖ. Т. 44. С. 663.

Ильясов Ю. П., Копейкин С. М., Родин А. Е. // 1998. Письма АЖ. Т. 24. С. 275.

Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме. — М.: Наука, 1988.
Кадомцев Б. Б., Кудрявцев В. С. // 1971. Письма ЖЭТФ. Т. 13. С. 9.
Кардашев Н. С. // 1964. АЖ. Т. 41. С. 807.
Кардашев Н. С., Митрофанов И. Г., Новиков И. Д. // 1984. АЖ. Т. 61. С. 1113.
Киржниц Д. А., Юдин С. Н. // 1995. УФН. Т. 165. С. 1335.
Клемоу Ф., Доуэрти Дж. Электродинамика частиц и плазмы. — М.: Мир, 1996.

Козленков А. А., Митрофанов И. Г. // 1986. ЖЭТФ. Т. 91. С. 1978.
Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. — М.: Наука, 1984.

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. — М.: Наука, 1973a.
Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. — М.: Наука, 1973b.
Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. — М.: Наука, 1986.
Либерман М. А., Йоханссон Б. // 1995. УФН. Т. 165. С. 121.
Липунов В. М. Астрофизика нейтронных звезд. — М.: Наука, 1987.
Любарский Ю. Э. // 1990. Письма АЖ. Т. 16. С. 34.

Марочник Л. С., Сучков А. А. Галактика. — М.: Наука, 1984.
Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1961.
Митрофанов И. Г., Позаненко А. С. // 1987. ЖЭТФ. Т. 93. С. 1951.
Михалас Д. Звездные атмосферы. — М.: Мир, 1982.
Муслимов А. Г., Цыган А. И. // 1990. АЖ. Т. 67. С. 263.

Новиков И. Д., Фролов В. П. Физика черных дыр. — М.: Наука, 1986.

Пальшин В. Д., Цыган А. И. Препринт ФТИ им. А. Ф. Иоффе № 1718 (1998).
Полнарев А. Г., Хлопов М. Ю. // 1985. УФН. Т. 145. С. 369.
Постнов К. А. // 1999. УФН. Т. 169. С. 545.

Рафиков Р. Р., Гуревич А. В., Зыбин К. П. // 1999. ЖЭТФ. Т. 115. С. 542.
Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д., Шукуров А. М. Магнитные поля галактик. — М: Наука, 1988.

Сажин М. В. // 1978. АЖ. Т. 55. С. 65.
Седракян Д. М., Шахабасян К. М. // 1991. УФН. Т. 161. С. 3.
Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. — М.: Наука, 1970.
Солдаткин А. О., Чугунов Ю. В. // 2003. Физика Плазмы. Т. 29. С. 72.
Соловьев Л. С. // Вопросы Теории Плазмы / Под. ред. М. А. Леонтовича. — М.: Атомиздат. 1963. Т. 3. С. 245.
Сурдин В. Г. Рождение звезд. — М.: УРСС, 2001.
Сюняев Р. А., Арефьев В. А., Бороздин К. Н. и др. // 1991. Письма АЖ. Т. 17. С. 975.

Тассуль Ж.-Л. Теория вращающихся звезд. — М.: Мир, 1982.
Тейлор Дж. // 1993. УФН. Т. 163. С. 757.
Торн К., Прайс Р., Макдональд Д. Черные дыры. Мембранный подход. — М.: Мир, 1988.

Франкль Ф. И. Избранные труды по газовой динамике. — М.: Наука, 1973.

Черепащук А. М. // 1988. Итоги Науки и Техники, серия Астрономия. Т. 38. С. 60.
Черепащук А. М. // 2003. УФН. Т. 173. С. 345.

Шакура Н. И. // 1972. АЖ. Т. 49. С. 921.
Шапиро С., Тъюколски С. Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1985.
Шафранов В. Д. // 1957. ЖЭТФ. Т. 33. С. 710.
Шацкий А. А. // 2003. Письма АЖ. Т. 29. С. 184.
Шварцман В. Ф. // 1970. АЖ. Т. 47. С. 660.

Яковлев Д. Г., Левенфиш К. П., Шибанов Ю. А. // 1999. УФН. Т. 169. С. 825.

Abramowicz M. A., Chen X., Kato S., Lasota J.-P., Regev O. // 1995. ApJ. V. 438. L37.
Abramowicz M. A., Czerny B., Lasota J.-P., Szuszkiewicz E. // 1988. ApJ. V. 332. P. 646.
Abramowicz M. A., Kato S. // 1989. ApJ. V. 336. P. 304.
Abramowicz M. A., Kluźniak W., Lasota J. -P. // 2002. A&A. V. 396. L31.
Abramowicz M. A., Lanza A., Percival M. J. // 1997. ApJ. V. 479. P. 179.
Abramowicz M. A., Lasota J.-P., Igumenshchev I. V. // 2000. MNRAS. V. 314. P. 775.
Abramowicz M. A., Zurek W. // 1981. ApJ. V. 246. P. 314.
Abrassart A., Czerny B. // 2000. A&A. V. 356. P. 475.
Adler S. L. // 1971. Ann. Phys. V. 67. P. 599.
Agapitou V., Papaloizou C. B. // 2000. MNRAS. V. 317. P. 273.
Akerlof C., Balsano R., Barthelemy S. et al. // 1999. Nature. V. 398. P. 400.
Allen M. P., Horvath J. E. // 1997. ApJ. V. 488. P. 409.
Anderson J. M., Li Zh.-Yu., Krasnopolsky R., Blandford R. // 2005. ApJ. V. 630. P. 945.
Anderson M. // 1989. MNRAS. V. 239. P. 19.
Appl S., Camenzind M. // 1992. A&A. V. 256. P. 354.
Appl S., Camenzind M. // 1993. A&A. V. 274. P. 699.
Ardavan H. // 1976. ApJ. V. 204. P. 889.
Ardavan H. // 1979. MNRAS. V. 189. P. 397.
Arons J. // 1981. ApJ. V. 248. P. 1099.
Arons J. in Neutron Stars and Pulsars. / Eds. N. Shibazaki, N. Kawai, S. Shibata, T. Kifune. Tokyo: Universal Academy Press, Inc., 1998. P. 339.
Arons J., Scharlemann E. T. // 1979. ApJ. V. 231. P. 854.
Arlt R., Rüdiger G. // 2001. A&A. V. 374. P. 1035.
Artemova I. V., Bisnovatyi-Kogan G. S., Igumenshchev I. V., Novikov I. D. // 2001. ApJ. V. 549. P. 1050.
Asséo E., Beaufils D. // 1983. Astrophys. Space Sci. V. 89. P. 133.

Asséo E., Kennel F. C., Pellat R. // 1978. A&A. V. 65. P. 401.
Asséo E., Khechinashvili D. // 2002. MNRAS. V. 334. P. 743.

Baade W., Zwicky F. // 1934. Proc. Nat. Acad. Sci. V. 20. P. 254.
Balbus S. A., Hawley J. F. // 1991. ApJ. V. 376. P. 214.
Balbus S. A., Hawley J. F. // 1998. Rev. Mod. Phys. V. 70. P. 1.
Bardeen J. M., Petterson J. A. // 1975. ApJ. V. 195. L65.
Bardou A., Heyvaerts J. // 1996. A&A. V. 307. P. 1009.
Baring M. G., Harding A. K. // 1997. ApJ. V. 482. P. 372.
Baring M. G., Harding A. K. // 1998. ApJ. V. 507. L55.
Baykal A., Alpar A. M., Boynton P. E., Deeter J. E. // 1999. MNRAS. V. 306. P. 207.
Baym G., Pethick C. // 1979. ARA&A. V. 17. P. 415.
Becker P. A., Subramanian P., Kazanas D. // 2001. ApJ. V. 552. P. 209.
Beckert T. // 2000. ApJ. V. 539. P. 223.
Begelman M., Chiueh T. // 1988. ApJ. V. 332. P. 872.
Begelman M. C., Li Zh.-Yu. // 1994. ApJ. V. 426. P. 269.
Begelman M., Rees M. J. // 1978. MNRAS. V. 185. P. 847.
Beloborodov A. M. // 1998. MNRAS. V. 297. P. 739.
Berezinsky V. S., Dokuchaev V. I. // 2001. Astropart. Phys. V. 15. P. 87.
Beskin V. S., Gurevich A. V., Istomin Ya. N. // 1984. Astrophys. Space Sci. V. 102. P. 301.
Beskin V. S., Gurevich A. V., Istomin Ya. N. // 1988. Astrophys. Space Sci. V. 146. P. 205.
Beskin V. S., Gurevich A. V., Istomin Ya. N. Physics of the Pulsar Magnetosphere. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
Beskin V. S., Istomin Ya. N., Pariev V. I. in Extragalactic Radio Sources — From Beams to Jets / Eds. J. Roland, H. Sol, G. Pelletier. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. P. 45.
Beskin V. S., Kuznetsova I. V. // 2000a. Nuovo Cimento B. V. 115. P. 795.
Beskin V. S., Kuznetsova I. V. // 2000b. ApJ. V. 541. P. 257.
Beskin V. S., Kuznetsova I. V., Rafikov R. R. // 1998. MNRAS. V. 299. P. 341.
Beskin V. S., Malyshkin L. M. // 1998. MNRAS. V. 298. P. 847.
Beskin V. S., Rafikov R. R. // 2000. MNRAS. V. 313. P. 433.
Beskin V. S., Okamoto I. // 2000. MNRAS. V. 313. P. 445.
Beskin V. S., Tchekhovskoy // 2005. A&A. V. 433. P. 619.
Beskin V. S., Zakamska N. L., Sol H. // 2004. MNRAS. V. 347. P. 587.
Bialynicka-Birula Z., Bialynicka-Birula I. // 1970. Phys. Rev. D. V. 2. P. 2341.
Bisnovatyi-Kogan G. S., Blinnikov S. I. // 1980. MNRAS. V. 191. P. 711.
Bisnovatyi-Kogan G. S., Lovelace R. V. E. // 1997. ApJ. V. 486. L43.
Bisnovatyi-Kogan G. S., Lovelace R. V. E. // 2001. New Astron. Rev. V. 45. P. 663.
Bjorkman J. E., Cassinelli J. P. // 1993. ApJ. V. 409. P. 429.

Blackman E. G. // 1999. MNRAS. V. 302. P. 723.
Blandford R. D. // 1975. MNRAS. V. 170. P. 551.
Blandford R. D. // 1976. MNRAS. V. 176. P. 468.
Blandford R. D. in Active Galactic Nuclei / Eds. R. Blandford, H. Netzer, L. Woltjer. Berlin: Springer, 1992. P. 1.
Blandford R. D. in Lighthouses of the Universe: The Most Luminous Celestial Objects and Their Use for Cosmology. Proceedings of the MPA/ESO/, 2002. P. 381.
Blandford R. D., *Begelman M. C.* // 1999. MNRAS. V. 303. L1.
Blandford R. D., *Payne D. G.* // 1982. MNRAS. V. 199. P. 883.
Blandford R. D., *Rees M. J.* // 1974. MNRAS. V. 169. P. 395.
Blandford R. D., *Romani R. W.* // 1988. MNRAS. V. 234. 57P.
Blandford R. D., *Znajek R. L.* // 1977. MNRAS. V. 179. P. 433.
Bogovalov S. V. // 1994. MNRAS. V. 270. P. 721.
Bogovalov S. V. // 1996. MNRAS. V. 280. P. 39.
Bogovalov S. V. // 1997a. A&A. V. 323. P. 634.
Bogovalov S. V. // 1997b. A&A. V. 327. P. 662.
Bogovalov S. V. // 1999. A&A. V. 349. P. 1017.
Bogovalov S. V. // 2001. A&A. V. 367. P. 159.
Bogovalov S. V., *Tsinganos K.* // 1999. MNRAS. V. 305. P. 211.
Bondi H. // 1952. MNRAS. V. 112. P. 195.
Bondi H., *Hoyle F.* // 1944. MNRAS. V. 104. P. 272.
Brandenburg A. // 1996. ApJ. V. 465. L115.
Brandenburg A., *Sokoloff D. D.* // 2002. Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. V. 96. P. 319.
Brandenburg A., *Nordlund A.*, *Stein R. F.*, *Torkelsson U.* // 1995. ApJ. V. 446. P. 741.
Breitmoser E., *Camenzind M.* // 2000. A&A. V. 361. P. 207.
Brown J. C., *Taylor A. R.* // 2001. ApJ. V. 563. L31.

Cao X., *Spruit H. C.* // 1994. A&A. V. 287. P. 80.
Camenzind M. // 1986. A&A. V. 162. P. 32.
Campbell C. G. // 1999. MNRAS. V. 310. P. 1175.
Campbell C. G., *Papaloizou J. C. B.*, *Agapitou V.* // 1998. MNRAS. V. 300. P. 315.
Celotti A., *Blandford R. D.* // In Proc. ESO Workshop on Black Holes in Binaries and Galactic Nuclei / Eds. L. Kaper, E. P. J. van den Heuvel, P. A. Woudt. Berlin: Springer-Verlag, 1999. P. 206.
Celotti A., *Fabian A. C.*, *Rees M. J.* // 1992. MNRAS. V. 255. P. 419.
Celotti A., *Rees M. J.* // 1999. MNRAS. V. 305. L41.
Chakrabarti S. K. Theory of Transonic Astrophysical Flows. Singapore: World Scientific, 1990.
Chen H. H., *Ruderman M. A.*, *Sutherland P. G.* // 1974. ApJ. V. 191. P. 473.
Chen K., *Ruderman M. A.*, *Zhu T.* // 1998. ApJ. V. 493. P. 397.

Chen X., Abramowicz M. A., Lasota J.-P. // 1997. ApJ. V. 476. P. 61.
Chen X., Abramowicz M. A., Lasota J.-P., Narayan R., Yi I. // 1995. ApJ. V. 443. L61.
Cheng A. Y. S., O'Dell S. L. // 1981. ApJ. V. 251. L49.
Cheng K. S., Ho C., Ruderman M. A. // 1986. ApJ. V. 300. P. 500.
Cheng K. S., Ruderman M. A., Zhang L. // 2000. ApJ. V. 537. P. 964.
Chew G. F., Goldberger M. L., Low F. E. // 1956. Proc. Roy. Soc. V. 236. P. 112.
Chiang J., Romani R. W. // 1994. ApJ. V. 436. P. 754.
Chistyakov M. V., Kuznetsov A. V., Mikheev N. V. // 1998. Phys. Lett. B. V. 434. P. 67.
Chiueh T., Li Zh.-Yu., Begelman M. C. // 1991. ApJ. V. 377. P. 462.
Chiueh T., Li Zh.-Yu., Begelman M. C. // 1998. ApJ. V. 505. P. 835.
Colgate S. // 1967. ApJ. V. 150. P. 163.
Contopoulos I., Kazanas D., Fendt C. // 1999. ApJ. V. 511. P. 35.
Contopoulos J., Lovelace R. V. E. // 1994. ApJ. V. 429. P. 139.
Coroniti F. V. // 1990. ApJ. V. 349. P. 538.

Daigne F., Drenkhahn G. // 2002. A&A. V. 381. P. 1066.
Daigne F., Font J. A. // 2004. MNRAS. V. 349. P. 841.
Das T. K., Pendharkar J. K., Mitra S. // 2003. ApJ. V. 592. P. 1078.
Daugherty J. K., Harding A. K. // 1982. ApJ. V. 252. P. 337.
Daugherty J. K., Harding A. K. // 1983. ApJ. V. 273. P. 761.
Davis L., Goldstein M. // 1970. ApJ. V. 159. L81.
Denton R. E., Anderson B. J., Gary S. P., Fuselier S. A. // 1994. J. Geophys. Res. V. 99. P. 11225.
Deutsch A. J. // 1955. Ann. d'Astrophys. V. 18. P. 1.
de Villiers J.-P., Hawley J. F. // 2002. ApJ. V. 577. P. 866.
DiMatteo T., Fabian A. // 1997. MNRAS. V. 286. L50.
DiMatteo T., Fabian A., Rees M. J., Carilli C. L., Ivison R. J. // 1999. MNRAS. V. 305. P. 492.
Djorgovsky S., Evans C. R. // 1988. ApJ. V. 335. L61.
Dokuchaev V. I. // 1991. MNRAS. V. 251. P. 564.

Eichler D. // 1993. ApJ. V. 419. P. 111.
Eichler D., Livio M., Piran T., Schramm D. N. // 1989. Nature. V. 340. P. 126.
Endean V. G. // 1993. MNRAS. V. 204. P. 1067.
Evans C. R., Kochanek C. S. // 1989. ApJ. V. 346. L13.

Faber S. M., Tremaine S., Ajhar E. A. et al. // 1997. AJ. V. 114. P. 1771.
Fabian A. C., Rees M. J. // 1995. MNRAS. V. 277. L55.
Fawley W. M., Arons J., Scharlemann E. T. // 1977. ApJ. V. 217. P. 227.
Fender R. P. in Compact Stellar X-ray Sources / Eds. W. H. G. Lewin, M. van den Klis. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

Fendt C. // 1997. A&A. V. 319. P. 1025.
Fendt C., Camenzind M., Appl S. // 1995. A&A. V. 300. P. 791.
Fendt C., Elstner D. // 2000. A&A. V. 363. P. 208.
Fendt C., Geiner J. // 2001. A&A. V. 369. P. 308.
Feretti L., Fanti R., Parma P., Massaglia S., Trussoni E., Brinkmann W. // 1995. A&A. V. 298. P. 699.
Ferraro V. C. A. // 1937. MNRAS. V. 97. P. 458.
Ferreira J., Pelletier G. // 1993a. A&A. V. 276. P. 625.
Ferreira J., Pelletier G. // 1993b. A&A. V. 276. P. 637.
Ferreira J., Pelletier G. // 1995. A&A. V. 295. P. 807.
Fitzpatrick R., Mestel L. // 1988. MNRAS. V. 232. P. 277.
Flowers E., Lee J.-F., Ruderman M. A., Sutherland P. G., Hillebrandt W., Müller E. // 1977. ApJ. V. 215. P. 291.
Frolov V. P., Novikov I. D. Black Hole Physics. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998.
Frolov V. P., Khokhlov A. M., Novikov I. D., Pethick C. J. // 1994. ApJ. V. 432. P. 680.

Gabuzda D., Cawthorne T., Roberts D., Wardle J. // 1992. ApJ. V. 338. P. 40.
Galeev A. A., Rosner R., Vaiana G. S. // 1979. ApJ. V. 229. P. 318.
Gallant Y. A., Arons J. // 1993. ApJ. V. 435. P. 230.
Gammie C. F., Popham R. // 1998a. ApJ. V. 498. P. 313.
Gammie C. F., Popham R. // 1998b. ApJ. V. 504. P. 419.
Garcia M. R., McClintock J. E., Narayan R. et al. // 2001. ApJ. V. 553. L47.
Ghisellini G., Bodo G., Trussoni E. // 1992. ApJ. V. 401. P. 87.
Ghisellini G., Bodo G., Trussoni E., Rees M. J. // 1990. ApJ. V. 362. L1.
Giacconi R., Gursky H., Kellog E., Schreier E., Tananbaum H. // 1971. ApJ. V. 167. L67.
Gil Ya., Melikidze G. // 2002. ApJ. V. 577. P. 909.
Ghosh P. // 2000. MNRAS. V. 315. P. 89.
Ghosh P., Abramowicz M. A. // 1997. MNRAS. V. 292. P. 887.
Ghosh P., Lamb F. // 1979. ApJ. V. 232. P. 259.
Gold T. // 1968. Nature. V. 218. P. 731.
Goldreich P., Julian W.H. // 1969. ApJ. V. 157. P. 869.
Goldreich P., Julian W.H. // 1970. ApJ. V. 160. P. 971.
Goodwin S. P., Mestel J., Mestel L., Wright G. A. E. // 2004. MNRAS. V. 349. P. 213.
Grad H. // 1960. Rev. Mod. Phys. V. 32. P. 830.
Gruzinov A. // 1998. ApJ. V. 501. P. 787.
Guilbert P. W., Rees M. J. // 1988. MNRAS. V. 233. P. 475.

Haardt F., Marashi L. // 1991. ApJ. V. 380. L51.
Haardt F., Marashi L. // 1993. ApJ. V. 413. V. 507.

Haardt F., *Marashi L.*, *Ghisellini G.* // 1994. ApJ. V. 432. L95.
Haehnelt M., *Kauffmann G.* // 2000. MNRAS. V. 311. P. 576.
Haehnelt M., *Rees M. J.* // 1993. MNRAS. V. 263. P. 168.
Halpern J. P., *Marshall H. L.* // 1996. ApJ. V. 464. P. 760.
Hardee P. E. // 2003. ApJ. V. 597. P. 798.
Hardee P. E., *Rosen A.*, *Hughes P. A.*, *Duncan G.* // 1998. ApJ. V. 500. P. 599.
Haro G. // 1950. AJ. V. 55. P. 72.
Hawking S. W. // 1971. MNRAS. V. 152. P. 75.
Hawking S. W. // 1989. Phys. Lett. B. V. 231. P. 237.
Hawking S. W., *Moss I. G.*, *Stewart J. M.* // 1982. Phys. Rev. D. V. 26. P. 2681.
Hawley J. F., *Gammie C. F.*, *Balbus S. A.* // 1995. ApJ. V. 440. P. 742.
Hawley J. F., *Smarr L. L.*, *Wilson J. R.* // 1984. ApJ. V. 277. P. 296.
Heinemann M., *Olbert S.* // 1978. J. Geophys. Res. V. 83. P. 2457.
Helfand D. J., *Gotthelf E. V.*, *Halpern J. P.* // 2001. ApJ. V. 556. P. 380.
Henri G., *Pelletier G.* // 1991. ApJ. V. 383. L7.
Henriksen R. N., *Norton J. A.* // 1975. ApJ. V. 201. P. 719.
Herbig G. H. // 1950. ApJ. V. 111. P. 11.
Herrnstein J., *Greenhill L.*, *Moran J.*, *Diamond P. J.*, *Inoue M.*, *Nakai N.*, *Miyoshi M.* // 1998. Ap. J. V. 497. L69.
Hester J. J., *Scowen P. A.*, *Sankrit R. et al.* // 1995. ApJ. V. 448. P. 240.
Hewish A., *Bell S. J.*, *Pilkington J. D. et al.*// 1968. Nature. V. 217. P. 708.
Heyvaerts J. in Plasma Astrophysics / Eds. C. Chiuderi, G. Einaudi. Springer: Berlin, 1996. P. 31.
Heyvaerts J., *Norman J.* // 1989. ApJ. V. 347. P. 1055.
Heyvaerts J., *Norman J.* // 2003a. ApJ. V. 596. P. 1240.
Heyvaerts J., *Norman J.* // 2003b. ApJ. V. 596. P. 1256.
Heyvaerts J., *Norman J.* // 2003c. ApJ. V. 596. P. 1270.
Hillebrandt W., *Müller E.* // 1976. ApJ. V. 207. P. 589.
Hirotani K., *Iguchi S.*, *Kimura M.*, *Wajima K.* // 1999. Publ. Astron. Soc. Japan. V. 51. P. 263.
Hirotani K., *Okamoto I.* // 1998. ApJ. V. 497. P. 563.
Hirotani K., *Shibata S.* // 2001. MNRAS. V. 325. P. 1228.
Hirotani K., *Takahashi M.*, *Nitta S.*, *Tomimatsu A.* // 1992. ApJ. V. 386. P. 455.
Hirotani K., *Tomimatsu A.* // 1994. Publ. Astron. Soc. Japan. V. 46. P. 643.
Holloway N. J. // 1977. MNRAS. V. 181. P. 9.
Horiuchi S., *Mestel L.*, *Okamoto I.* // 1995. MNRAS. V. 275. P. 1160.
Hoshino M., *Arons J.*, *Gallant Y. A.*, *Langdon A.B.* // 1992. ApJ. V. 390. P. 454.
Hunt R. // 1979. MNRAS. V. 198. P. 83.
Hu Y. Q., *Esser R.*, *Habbal S. R.* // 1997. J. Geophys. Res. V. 102. P. 14661.

Ichimaru S. // 1977. ApJ. V. 214. P. 840.

Igumenshchev I. V., Abramowicz M. A., Narayan R. // 2000. ApJ. V. 537. L27.

Igumenshchev I. V., Abramowicz M. A., Novikov I. D. // 1998. MNRAS. V. 298. P. 1069.

Igumenshchev I. V., Beloborodov A. M. // 1997. MNRAS. V. 284. P. 767.

Igumenshchev I. V., Chen X., Abramowicz M. A. // 1996. MNRAS. V. 278. P. 236.

Ingraham R. // 1973. ApJ. V. 186. P. 625.

Istomin Ya. N. // In Proc. Third Sakharov Conference on Physics / Eds. A. Semikhatov, V. Zaikin, M. Vasiliev. World Scientific: Singapore, 2003. P. 335.

Istomin Ya. N., Pariev V. I. // 1994. MNRAS. V. 267. P. 629.

Istomin Ya. N., Pariev V. I. // 1996. MNRAS. V. 281. P. 1.

Iwasawa K., Fabian A. C., Brandt W. N. et al. // 1998. MNRAS. V. 295. L20.

Johnston S., Galloway D. // 1998. MNRAS. V. 298. P. 625.

Johnston S., Koribalski B., Weisberg J. M., Wilson W. // 1999. MNRAS. V. 322. P. 715.

Jones P. B. // 1985. MNRAS. V. 196. P. 503.

Jones P. B. // 1986. MNRAS. V. 218. P. 477.

Junor W., Biretta J. A. // 1995. AJ. V. 109. P. 500.

Junor W., Biretta J. A., Livio M. // 1999. Nature. V. 401. P. 891.

Kaburaki O. // 2000. ApJ. V. 531. P. 210.

Kato S., Fukui J. // 1980. Proc. Nat. Acad. Sci. V. 32. P. 377.

Katz J.I. // 1997. ApJ. V. 490. P. 633.

Kennel C. F., Coroniti F. V. // 1984a. ApJ. V. 283. P. 694.

Kennel C. F., Coroniti F. V. // 1984b. ApJ. V. 283. P. 710.

Kennel C. F., Fujimura F. S., Okamoto I. // 1983. Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. V. 26. P. 147.

Khanna R. // 1998. MNRAS. V. 294. P. 673.

Khanna R., Camenzind M. // 1994. ApJ. V. 435. L129.

Khanna R., Camenzind M. // 1996a. A&A. V. 307. P. 665.

Khanna R., Camenzind M. // 1996b. A&A. V. 313. P. 1028.

Khokhlov A., Novikov I. D., Pethick C. J. // 1993. ApJ. V. 418. P. 163.

Khlopov M. Yu., Konoplich R. V., Rubin S. G., Sakharov A. S. // 1999. Phys. Atom. Nucl. V. 62. P. 1593.

Kirk J. G., *Skjaeraasen O.* // 2003. ApJ. V. 591. P. 366.

Kley W., Papaloizou J. C. B. // 1997. MNRAS. V. 285. P. 239.

Koide S. // 2003. Phys. Rev. D. V. 67. P. 104010.

Koide S., Meier D. L., Shibata K., Kudoh T. // 2000. ApJ. V. 536. P. 668.

Koide S., Shibata K., Kudoh T. // 1999. ApJ. V. 522. P. 727.

Komissarov S. S. // 1994. MNRAS. V. 269. P. 394.

Komissarov S. S. // 2001. MNRAS. V. 326. P. 41.
Komissarov S. S. in Proc. Third Sakharov Conference on Physics / Eds. A. Semikhatov, V. Zaikin, M. Vasiliev. World Scientific: Singapore 2003. P. 392.
Komissarov S. S. // 2004a. MNRAS. V. 350. P. 427.
Komissarov S. S. // 2004b. MNRAS. V. 326. P. 1431.
Komissarov S. S. // 2005. MNRAS. V. 359. P. 801.
Komissarov S. S., Lyubarsky Yu. E. // 2003. MNRAS. V. 344. L93.
Königl A. // 1989. ApJ. V. 342. P. 208.
Königl A., Kartje J. F. // 1994. ApJ. V. 434. P. 446.
Kormendy J., Richstone D. // 1995. ARA&A. V. 33. P. 581.
Kouveliotou C., Dieters S., Strohmayer T., et al. // 1998. Nature. V. 393. P. 235.
Kovalenko I. G., Eremin M. A. // 1998. MNRAS. V. 298. P. 861.
Krasheninnikov S. I., Catto P. J. // 2000. Phys. Plasma. V. 7. P. 626.
Krause-Polstorff J., Michel F. C. // 1984. MNRAS. V. 213. P. 43.
Krause-Polstorff J., Michel F. C. // 1985. A&A. V. 144. P. 72.
Krolik J. // 1999b. ApJ. V. 515. L73.
Krolik J. Active galactic nuclei: from the central black hole to the galactic environment. Princeton: Princeton University Press, 1999b.
Krolik J. H., Hawley J. F. // 2002. ApJ. V. 573. P. 754.
Kudoh T., Matsumoto R., Shibata K. // 1998. ApJ. V. 508. P. 186.
Kuncic Z., Celotti A., Rees M. J. // 1997. MNRAS. V. 284. P. 717.
Kuznetsov O. A., Lovelace R. V. E., Romanova M. M., Chechetkin V. M. // 1999. ApJ. V. 514. P. 691.
Kuznetsova I. V. // 2005. ApJ. V. 618. P. 432.

Lada C. J. // 1985. ARA&A. V. 23. P. 267.
Lammers H. J. G. L. M., Cassinelli J. P. Introduction to stellar wind. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
Lasota J.-P., Abramowicz M. A., Chen X., Krolik J., Narayan R., Yi I. // 1996. ApJ. V. 462. P. 142.
Lacy J. H., Townes C. H., Hollenbach D. J. // 1982. ApJ. V. 262. L120.
Landau L. D. // 1932. Phys. Zeit. Sow. V. 1. P. 271.
Lee H. K., Lee C. H., van Putten M. H. P. M. // 2001. MNRAS. V. 324. P. 781.
Lee H. K. Park J. // 2004. Phys. Rev. D. V. 70. P. 063001.
Lee H. K., Wijers R. A. M. J., Brown G. E. // 2000. Phys. Rep. V. 325. P. 83.
Leer L., Axford W. I. // 1972. Sol. Phys. V. 23. P. 238.
Lery T., Heyvaerts J., Appl S., Norman C.A. // 1998. A&A. V. 337. P. 603.
Lery T., Heyvaerts J., Appl S., Norman C.A. // 1999. A&A. V. 347. P. 1055.
Li L.-X. // 2003. Phys. Rev. D. V. 67. P. 044007.

Li Zh.-Yu. // 1995. ApJ. V. 444. P. 848.
Li Zh.-Yu. // 1996. ApJ. V. 465. P. 855.
Li Zh.-Yu., Begelman M. C., Chiueh T. // 1992. ApJ. V. 384. P. 567.
Li Zh.-Yu., Chiueh T., Begelman M. C. // 1992. ApJ. V. 394. P. 459.
Liang E. P. T. // 1977. ApJ. V. 211. L67.
Linet B. // 1976. J. Phys. A. V. 9. P. 1081.
Livio M., Ogilvie G. I., Pringle J. E. // 1999. ApJ. V. 512. P. 100.
Lobanov A., Hardee P., Eilek J. // 2003. New Astron. Rev. V. 47. P. 629.
Lovelace R. V. E. // 1976. Nature. V. 262. P. 649.
Lovelace R. V. E., Mehanian C., Mobarry C. M., Sulkanen M. E. // 1986. ApJ. Suppl. V. 62. P. 1.
Lovelace R. V. E., Romanova M. M., Bisnovatyi-Kogan G. S. // 1995. MNRAS. V. 275. P. 224.
Lovelace R. V. E., Wang J. C. L., Sulkanen M. E. // 1987. ApJ. V. 315. P. 504.
Low B. C., Tsinganos K. // 1986. ApJ. V. 302. P. 163.
Lubow S. H., Papaloizou J. C. B., Pringle J. E. // 1994. MNRAS. V. 267. P. 235.
Lucek S. G., Bell A. R. // 1997. MNRAS. V. 290. P. 327.
Lynden-Bell D. // 1969. Nature. V. 223. P. 690.
Lynden-Bell D. // 1996. MNRAS. V. 279. P. 389.
Lyne A. G., Graham-Smith F. Pulsar Astronomy. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
Lyubarskii Yu. E. Physics of Pulsars. Singapore: Harwood Acad. Publ., 1995.
Lyubarskii Yu. E. // 1996. A&A. V. 311. P. 172.
Lyubarskii Yu. E. // 1997. MNRAS. V. 285. P. 604.
Lyubarsky Yu. E., Eichler D. // 2001. ApJ. V. 562. P. 494.
Lyubarsky Yu. E., Kirk J. G. // 2001. ApJ. V. 547. P. 437.
Lyutikov M., Blandford R. D., Machabeli G. Z. // 1999. MNRAS. V. 305. P. 338.

Macdonald D. // 1984. MNRAS. V. 211. P. 313.
Macdonald D., Thorne K. S. // 1982. MNRAS. V. 198. P. 345.
Mahadevan R. // 1997. ApJ. V. 477. P. 585.
Mahadevan R. // 1998. Nature. V. 394. P. 651.
Markwardt C. B., Ögelman H. // 1995. Nature. V. 375. P. 40.
Marsch E., Schwenn R., Rosenbauer H., Muehlhaeuser K.-H., Pilipp W., Neubauer F. M. // 1982. J. Geophys. Res. V. 87. P. 52.
Max C., Perkins F. // 1971. Phys. Rev. Lett. V. 27. P. 1342.
Medvedev M. V., Narayan R. // 2000. ApJ. V. 541. P. 579.
Melatos A. // 1997. MNRAS. V. 288. P. 1049.
Melrose D. // 1978. ApJ. V. 225. P. 557.
Mestel L. // 1968. MNRAS. V. 138. P. 359.

Mestel L. // 1971. Nature Phys. Sci. V. 233. P. 149.
Mestel L. // 1973. Astrophys. Space Sci. V. 24. P. 289.
Mestel L. Stellar magnetism. Oxford: Clarendon Press, 1999.
Mestel L., Panagi P., Shibata S. // 1999. MNRAS. V. 309. P. 388.
Mestel L., Shibata S. // 1994. MNRAS. V. 271. P. 621.
Mestel L., Wang Y.-M. // 1979. MNRAS. V. 188. P. 799.
Mestel L., Wang Y.-M. // 1982. MNRAS. V. 198. P. 405.
Mészaros P., Rees M. J. // 1997. ApJ. V. 482. L29.
Michel F. C. // 1969. ApJ. V. 158. P. 727.
Michel F. C. // 1972. Astrophys. Space Sci. V. 15. P. 153.
Michel F. C. // 1973a. ApJ. V. 180. P. 207.
Michel F. C. // 1973b. ApJ. V. 180. L133.
Michel F. C. // 1974. ApJ. V. 187. P. 585.
Michel F. C. // 1982. Rev. Mod. Phys. V. 54. P. 1.
Michel F. C. Theory of Neutron Star Magnetosphere. Chicago: The University of Chicago Press, 1991.
Mirabel I. F., Rodriguez L. F., Cordier B. et al. // 1992. Nature. V. 358. P. 215.
Mirabel I. F., Rodriguez L. F. // 1994. Nature. V. 371. P. 46.
Moderski R., Sikora M. // 1996. MNRAS. V. 283. P. 854.
Moderski R., Sikora M., Lasota J.-P. // 1998. MNRAS. V. 301. P. 142.
Moss I. G. // 1994. Phys. Rev. D. V. 50. P. 676.
Müller E. // 1984. A&A. V. 130. P. 145.
Mushotzky R. F., Done C., Pounds K. A. // 1993. ARA&A. V. 31. P. 717.
Muslimov A. G., Harding A. K. // 1997. ApJ. V. 485. P. 735.
Muslimov A. G., Harding A. K. // 1998. ApJ. V. 508. P. 328.
Muslimov A. G., Harding A.K. // 2002. ApJ. V. 568. P. 862.
Muslimov A. G., Tsygan A. I. // 1992. MNRAS. V. 255. P. 61.

Narayan R. // 1992. ApJ. V. 394. P. 261.
Narayan R., Kato S., Honma F. // 1997. ApJ. V. 479. P. 49.
Narayan R., Loeb A., Kumar P. // 1994. ApJ. V. 431. P. 359.
Narayan R., Mahadevan R., Grindlay J. E., Popham R. G., Gammie C. // 1998. ApJ. V. 492. P. 554.
Narayan R., Mahadevan R., Quataert E. in The Theory of Black Hole Accretion Disks / Eds. M. A. Abramowicz et al. Cambridge: Cambridge Univtrsity Press, 1998.
Narayan R., Yi I. // 1994. ApJ. V. 428. L13.
Narayan R., Yi I. // 1995a. ApJ. V. 444. P. 231.
Narayan R., Yi I. // 1995b. ApJ. V. 452. P. 710.
Neuhauser D., Koonin S. E., Langanke K. // 1987. Phys. Rev. A. V. 36. P. 4163.
Neuhauser D., Langanke K., Koonin S. E. // 1986. Phys. Rev. A. V. 33. P. 2084.
Niemeyer J. C., Jedamzik K. // 1999. Phys. Rev. D. V. 59. P. 124013.

Nishikawa K.-I., Koide S., Sakai J.-I., Christodoulou D. M., Sol H., Mutel R. L. // 1998. ApJ. V. 498. P. 166.
Nitta S. // 1997. MNRAS. V. 284. P. 899.
Nitta S., Takahashi M., Tomimatsu A. // 1991. Phys. Rev. D. V. 44. P. 2295.
Nobili L., Turolla R., Zampieri L. // 1991. ApJ. V. 383. P. 250.
Nötzel A., Schindler K., Birn J. // 1985. J. Geophys. Res. V. 90. P. 8293.
Novikov I. D., Thorne K. S. in Astrophysics of black holes. / Eds. C. DeWitt, B. DeWitt, New York:Gordon and Breach, 1973. P. 343.
Nowak M. A., Wagoner R. V. // 1992. ApJ. V. 393. P. 697.
Nowak M. A., Wagoner R. V. // 1993. ApJ. V. 418. P. 187.
Nowak M. A., Wagoner R. V., Begelman M. C., Lehr D. A. // 1997. ApJ. V. 477. L91.

O'Dell S. L. // 1981. ApJ. V. 243. L147.
Ogilvie G. I. // 1997. MNRAS. V. 288. P. 63.
Ogilvie G. I. // 1999. MNRAS. V. 306. L9.
Ogilvie G. I., Livio M. // 1998. ApJ. V. 499. P. 329.
Ogura J., Kojima Y. // 2003. Prog. Theor. Phys. V. 109. P. 619.
Okamoto I. // 1974. MNRAS. V. 167. P. 457.
Okamoto I. // 1975. MNRAS. V. 173. P. 357.
Okamoto I. // 1978. MNRAS. V. 185. P. 69.
Okamoto I. // 1992. MNRAS. V. 254. P. 192.
Okamoto I. // 1999. MNRAS. V. 307. P. 253.
Okamoto I. // 2001. MNRAS. V. 318. P. 250.
Ostriker E. C. // 1997. ApJ. V. 486. P. 291.
Ouyed R., Pudritz R. // 1997. ApJ. V. 482. P. 712.
Owocki S. P., Cranmer S. R., Blondin J. M. // 1994. ApJ. V. 424. P. 887.

Paatz G., Camenzind M. // 1996. A&A. V. 313. P. 591.
Pacini F. // 1967. Nature. V. 221. P. 567.
Paczyński B. // 1991. Acta Astron. V. 41. P. 257.
Paczyński B. // 1998. ApJ. V. 499. L45.
Paczyński B., Bisnovatyi-Kogan G. S. // 1981. Acta Astron. V. 31. P. 283.
Paczyński B., Wiita P. J. // 1980. A&A. V. 88. P. 23.
Papadakis I. E., Lawrence A. // 1993. Nature. V. 361. P. 233.
Papadakis I. E., Lawrence A. // 1995. MNRAS. V. 272. P. 161.
Papaloizou J., Szuszkiewicz E. // 1994. MNRAS. V. 268. P. 29.
Pariev V. I. // 1996. MNRAS. V. 283. P. 1264.
Park S. J., Vishniac E. T. // 1989. ApJ. V. 337. P. 78.
Park S. J., Vishniac E. T. // 1990. ApJ. V. 347. P. 684.
Parker E.N. // 1958. ApJ. V. 128. P. 664.
Pavlov G. G., Zavlin V. E., Sanwal D. // In 270 WE-Heraeus Seminar on Neutron Stars, Pulsars and Supernova Remnants / Eds. W. Becker, H. Lesch, J. Trümper. 2002. P. 273.

Peitz J., *Appl S.* // 1997. MNRAS. V. 286. P. 681.
Peitz J., *Appl S.* // 1998. MNRAS. V. 296. P. 231.
Petri J., *Heyvaerts J.*, *Bonazzola S.* // 2002. A&A. V. 384. P. 414.
Perez C. A., *Silbergleit A. S.*, *Wagoner R. V.*, *Lehr D. E.* // 1997. ApJ. V. 476. P. 589.
Phinney E. S. in Astrophysical Jets / Eds. A. Ferrari, A. G. Pacholczyk. Dodrecht: D. Reidel, 1983. P. 201.
Pelletier G., *Pudritz R. E.* // 1992. ApJ. V. 394. P. 117.
Petrich L. I., *Shapiro S.*, *Stark R. F.*, *Teukolsky S.* // 1989. ApJ. V. 336. P. 313.
Petrich L. I., *Shapiro S. L.*, *Teukolsky S. A.* // 1988. Phys. Rev. Lett. V. 60. P. 1781.
Pneuman G. W., *Kopp R. A.* // 1971. Solar Phys. V. 18. P. 258.
Polnarev A. G., *Zembowicz R.* // 1991. Phys. Rev. D. V. 43. P. 1106.
Proga D., *Stone J. M.*, *Kallman T. R.* // 2000. ApJ. V. 543. P. 686.
Pudritz R. E., *Norman C. A.* // 1986. ApJ. V. 301. P. 571.
Punsly B. Black hole gravitohydromagnetics. Berlin: Springer, 2001.
Punsly B., *Coroniti F. V.* // 1990a. ApJ. V. 350. P. 518.
Punsly B., *Coroniti F. V.* // 1990b. ApJ. V. 354. P. 583.

Quataert E. // 1998. ApJ. V. 500. P. 978.
Quataert E., *Gruzinov A. V.* // 1999. ApJ. V. 520. P. 248.
Quinlan G., *Shapiro S.* // 1990. ApJ. V.356. P. 483.

Radhakrishnan V., *Cocke D. J.* // 1969. Astrophys. Lett. V. 3. P. 225.
Rankin J. // 1983. ApJ. V. 274. P. 333.
Rankin J. // 1990. ApJ. V. 352. P. 247.
Rees M. J. // 1984. ARA&A. V. 22. P. 471.
Rees M. J. // 1988. Nature. V. 333. P. 523.
Rees M. J. // 1993. Proc. Nat. Acad. Sci. V. 90. P. 4840.
Rees M. J. // 1997. Rev. Mod. Astron. V. 10. P. 179.
Rees M. J., *Gunn J. E.* // 1974. MNRAS. V. 167. P. 1.
Reipurth B., *Bally J.* // 2001. ARA&A. V. 39. P. 403.
Renzini A., *Greggio L.*, *di Serego-Alighieri et al.* // 1995. Nature. V. 378. P. 39.
Reynolds C. S., *DiMatteo T.*, *Fabian A. C.*, *Hwang U.*, *Canizares C.* // 1996a. MNRAS. V. 283. L111.
Reynolds C. S., *Fabian A. C.*, *Celotti A.*, *Rees M. J.* // 1996b. MNRAS. V. 283. P. 873.
Riffert H., *Herold H.* // 1995. ApJ. V. 450. P. 508.
Romanova M. M., *Toropina O. D.*, *Toropin Yu. M.*, *Lovelace R. V. E.* // 2003. ApJ. V. 588. P. 400.
Romanova M. M., *Ustyugova G. V.*, *Koldoba A. V.*, *Lovelace R. V. E.* // 2002. ApJ. V. 578. P. 420.
Rubin S. G., *Khlopov M. Yu.*, *Sakharov A. S.* // 2000. Grav. Cosmol. V. S6. P. 1.

Ruderman M. A. // 1975. Ann. NY Acad. Sci. V. 202. P. 164.
Ruderman M. A., Sutherland P. G. // 1975. ApJ. V. 196. P. 51.
Ruffert M., Arnett D. // 1994. ApJ. V. 427. P. 351.
Ruffini R., Salmonson J. D., Wilson J. R., Xue S.-S. // 1999. A&A. V. 350. P. 334.

Sakurai T. // 1985. A&A. V. 152. P. 121.
Sakurai T. // 1990. Computer Phys. Rep. V. 12. P. 247.
Salpeter E. E., Lai D. // 1997. ApJ. V. 491. P. 270.
Sanders R. // 1970. ApJ. V. 162. P. 791.
Sauty C., Tsinganos K. // 1994. A&A. V. 287. P. 893.
Sauty C., Tsinganos K., Trussoni E. // 1999. A&A. V. 348. P. 327.
Sauty C., Tsinganos K., Trussoni E. in Relativistic Flows in Astrophysics / Eds. A. W. Guthmann, M. Georganopoulos, A. Marcowith, K. Manolakou. Berlin: Springer-Verlag, 2002. P. 41.
Scharlemann E. T., Fawley W. M., Arons J. // 1978. ApJ. V. 222. P. 297.
Scharlemann E. T., Wagoner R. V. // 1973. ApJ. V. 182. P. 951.
Schmidt W. K. H. // 1978. Nature. V. 271. P. 525.
Semenov V. S., Dyadechkin S. A., Ivanov I. B., Biernat H. K. // 2002. Phys. Scripta. V. 65. P. 13.
Shabad A. E., Usov V. V. // 1984. Astrophys. Space Sci. V. 102. P. 327.
Shabad A. E., Usov V. V. // 1985. Astrophys. Space Sci. V. 117. P. 309.
Shabad A. E., Usov V. V. // 1986. Astrophys. Space Sci. V. 128. P. 377.
Shakura N. I., Sunyaev R. A. // 1973. A&A. V. 24. P. 337.
Shalybkov D., Rüdiger G. // 2000. MNRAS. V. 315. P. 762.
Shaviv N. J., Heyl J. S., Lithwick Y. // 1999. MNRAS. V. 306. P. 333.
Shibata S. // 1994. MNRAS. V. 269. P. 191.
Shibata S. // 1997. MNRAS. V. 287. P. 262.
Shibata S., Miyazaki J., Takahara F. // 1998. MNRAS. V. 295. P. 53.
Shima E., Takuya M., Hedenori T., Keisuke S. // 1985. MNRAS. V. 217. P. 367.
Shu F. N., Najita J., Ruden S. P., Lizano S. // 1994. ApJ. V. 429. P. 797.
Shukre C. S., Radhakrishnan V. // 1982. ApJ. 258. P. 121.
Sikora M., Madersky G. // 2000. ApJ. V. 534. P. 109.
Smith I. A., Michel F. C., Thacker P. D. // 2001. MNRAS. V. 322. P. 209.
Sol H., Pelletier G., Asséo E. // 1989. MNRAS. V. 237. P. 411.
Spencer R. E. // 1979. Nature. V. 282. P. 483.
Spitkovsky A., Arons J. in Neutron Stars and Supernova Remnants / Eds. P. O. Slane, B. M. Gaensler. ASP Conference Series 270, San Francisco, 2003. P. 81.
Spitzer L. in Galactic Nuclei / Ed. D. O'Connel. Dordrecht:North Holland, 1971. P. 443.
Spitzer L., Saslaw W. C. // 1966. ApJ. V. 143. P. 400.
Spruit H. C. // 1996. in Evolutionary Processes in Binary Stars, NATO ASI Series C., V. 477. P. 249.

Stone J. M., Pringle J. E. // 2001. MNRAS. V. 322. P. 461.
Stone J. M., Hawley J. F., Gammie C. F., Balbus S. A. // 1996. ApJ. V. 463. P. 656.
Sturrock P. A. // 1971. ApJ. V. 164. P. 529.
Sulkanen M. E., Lovelace R. V. E. // 1990. ApJ. V. 350. P. 732.
Swensson R. // 1984. MNRAS. V. 209. P. 175.

Tagliaferri G., Bao G., Israel G. L., Stella L., Treves A. // 1996. ApJ. V. 465. P. 181.
Takahashi M. // 2002. ApJ. V. 570. P. 264.
Takahashi M., Nitta S., Tatematsu Ya., Tomimatsu A. // 1990. ApJ. V. 363. P. 206.
Takahashi M., Rilett D., Fukumura K., Tsuruta S. // 1994. ApJ. V. 572. P. 950.
Taylor J.H., Stinebring D. R. // 1986. ARA&A. V. 24. P. 285.
Taylor J. H., Weisberg J. M. // 1989. ApJ. V. 345. P. 434.
Thompson C., Duncan R. C. // 1993. ApJ. V. 408. P. 194.
Thompson C., Duncan R. C. // 1995. MNRAS. V. 275. P. 255.
Thorne K. S., Flammang R. A., Zytkov A. N. // 1981. MNRAS. V. 194. P. 475.
Thorne K. S., Macdonald D. // 1982. MNRAS. V. 198. P. 339.
Timokhin A. N., Bisnovatyi-Kogan G. S., Spruit H. C. // 1999. MNRAS. V. 316. P. 734.
Tomimatsu A. // 1994. Proc. Astron. Soc. Japan. V. 46. P. 123.
Tomimatsu A. // 2000. ApJ. V. 528. P. 972.
Tomimatsu A., Takahashi M. // 2001. ApJ. V. 552. P. 710.
Toropin Yu. M., Toropina O. D., Saveliev V. V., Romanova M. M., Chechetkin V. M., Lovelace R. V. E. // 1999. ApJ. V. 517. P. 906.
Toropina O. D., Romanova M. M., Toropin Yu. M., Lovelace R. V. E. // 2001. ApJ. V. 561. P. 964.
Toropina O. D., Romanova M. M., Toropin Yu. M., Lovelace R. V. E. // 2003. ApJ. V. 593. P. 472.
Tsikarishvili E. G., Rogava A. D., Tsikauri D. G. // 1995. ApJ. V. 439. P. 822.
Tsinganos K., Sauty C. // 1992. A&A. V. 255. P. 405.
Tsinganos K., Sauty C., Surlantzis G., Trussoni E., Contopoulos J. // 1996. MNRAS. V. 283. P. 811.
Tsygan A.I. // 1997. MNRAS. V. 292. P. 317.

Uchida Y., Shibata K. // 1984. Pub. Astron. Soc. Japan. V. 36. P. 105.
Urry C. M., Padovani P. // 1995. Pub. Astron. Soc. Pacific. V. 107. P. 803.
Usov V. V. // 1992. Nature. V. 357. P. 472.
Usov V. V., Melrose D. B. // 1996. ApJ. V. 464. P. 306.
Ustyugova G. V., Koldoba A. V., Romanova M. M., Chechetkin V. M., Lovelace R. // 1995. ApJ.V. 439. L39.

Ustyugova G. V., Lovelace R. V. E., Romanova M. M., Li H., Colgate S. A. // 2000. ApJ. V. 541. L21.
Uzdensky D. A. // 2003. ApJ. V. 598. P. 446.
Uzdensky D. A. // 2004. ApJ. V. 603. P. 652.
Uzdensky D. A. // 2005. ApJ. V. 620. P. 889.

Vlahakis N., Königl A. // 2003. ApJ. V. 596. P. 1080.
Vlahakis N., Tsinganos K., Sauty C., Trussoni E. // 2000. MNRAS. V. 318. P. 417.
van Putten M. H. P. M., Levinson A. // 2003. ApJ. V. 584. P. 937.
von Rekowski B., Brandenburg A., Dobler W., Shukurov A. // 2003. A&A. V. 398. P. 825.

Wald R.M. // 1974. Phys. Rev. D. V. 10. P. 1680.
Wampler E. G., Scargle J. D., Miller J. S. // 1969. ApJ. V. 157. P. 1.
Wang D.-X., Lei W.-H., Xiao K., Ma R.-Y. // 2002. ApJ. V. 580. P. 358.
Wardle J. F. C., Homan D. C., Ojha R., Roberts D. H. // 1998. Nature. V. 395. P. 457.
Wardle M., Königl A. // 1993. ApJ. V. 410. P. 218.
Weber E. J., Davis L. Jr. // 1967. ApJ. V. 148. P. 217.
Weise J. I., Melrose D. B. // 2002. MNRAS. V. 329. P. 115.
Weisskopf M. C., Hester J. J., Tennant A. F. et al. // 2000. ApJ. V. 536, L81.
Wilms J., Reynolds C. S., Begelman M. C. et al. // 2001. MNRAS. V. 328. L27.

Xu R. X., Qiao G. J. // 2001. ApJ. V. 561. L109.

Woosley S. E. // 1993. ApJ. V. 405. P. 273.

Zavlin V. E., Pavlov G. G. // In 270 WE-Heraeus Seminar on Neutron Stars, Pulsars and Supernova Remnants / Eds. W. Becker, H. Lesch, J. Trümper. 2002. P. 263.
Zhang H. Y., Gabuzda D. C., Nan R. D., Jin C. J. // 2004. A&A. V. 415. P. 477.
Zhang L., Cheng K. S. // 1997. ApJ. V. 487. P. 370.
Ziegler U., Rüdiger G. // 2000. A&A. V. 356. P. 1141.
Znajek R. L. // 1977. MNRAS. V. 179. P. 457.

Учебное издание

БЕСКИН Василий Семенович

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В АСТРОФИЗИКЕ

Редактор *О.А. Константинова*
Оригинал-макет: *А.А. Пярнпуу*
Оформление переплета: *А.Ю. Алехина*

Подписано в печать 21.10.05. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 24. Уч.-изд. л. 27,0. Тираж 200 экз. Заказ № 5580

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
http://www.fml.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ФГУП Издательство «Известия»
Управления делами Президента РФ
127994, ГСП-4, г. Москва, К-6, Пушкинская пл., 5
Контактный телефон: 200-36-36, 200-30-20
E-mail: izd/izv@ru.net

ISBN 5-9221-0646-5

9 785922 106467