П. В. Блиох
А. А. Минаков

ГРАВИТАЦИОННЫЕ ЛИНЗЫ

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
РАДИОАСТРОНОМИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

П. В. Блиох
А. А. Минаков

ГРАВИТАЦИОННЫЕ ЛИНЗЫ

КИЕВ НАУКОВА ДУМКА 1989

УДК 523.163

Гравитационные линзы / Блиох П. В., Минаков А. А.; Отв. ред. Литвиненко Л. Н.; АН УССР. Радиоастрономический ин-т.— Киев : Наук думка, 1989.— 240 с.— ISBN 5-12-000834-8.

Монография представляет собой первую в мировой литературе обобщенную работу, посвященную гравитационным линзам. На основе теории распространения электромагнитных волн в полях тяготения небесных тел с единой точки зрения рассмотрены гравитационные линзы разных типов (звезды, галактики, черные дыры), статистика гравитационных линз и способы их физического (лабораторного) и численного моделирования. Обсуждены результаты наблюдений гравитационных линз и их роль в астрономии.

Для специалистов, работающих в области космической физики, для студентов и аспирантов физических, астрономических и радиофизических специальностей вузов.

Ил. 92. Табл. 4. Библиогр.: 228—236 (235 назв.).

Ответственный редактор *Л. Н. Литвиненко*

Утверждено к печати ученым советом
Радиоастрономического института АН УССР

Редакция физико-математической литературы

Редактор *В. П. Егорова*

Б $\frac{1605040000\text{-}486}{М221(04)\text{-}89}$ 243-89

ISBN 5-12-000834-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

И звезда с звездою говорит...
М. Ю. Лермонтов

Мы находимся в преддверии новой эпохи в астрофизике, когда сведения о далеких галактиках будут получены путем исследования влияния их гравитации на свет, идущий от более далеких объсктов.

Т. Редже. Этюды о Вселенной

ПРЕДИСЛОВИЕ

В этой книге 235 литературных ссылок. В 149 из них встречаются слова «гравитационная линза», «гравитационная фокусировка», «линза-галактика» и т. д. Такие словосочетания появились только в начале XX в., и, чтобы представить, себе как нарастал темп соответствующих публикаций, мы предлагаем читателю взглянуть на гистограмму (рис. 0.1), в которой все известные нам работы распределены по десятилетиям. Видно, что примерно $^2/_3$ работ о гравитационных линзах (ГЛ), вышедших в свет почти за 70 лет, приходится на период 1979—1988 гг. Чем объяснить такую неравномерность? Что произошло на рубеже 70—80-х годов? Ответ таков: в 1979 г. была обнаружена первая ГЛ.

Внешне она проявила себя более чем скромно — в виде двух слабых голубоватых звездочек в созвездии Большой Медведицы. Их сфотографировали еще в 1950 г. (невооруженным глазом они не видны), но спектры были получены только в 1979 г. Именно эти спектры и привели специалистов к предположению, что обнаружена ГЛ, и хотя на фотографии видны две звезды, в действительности существует только одна, т. е. двойное изображение — кажущееся, своего рода «космический мираж». О миражах, наблюдающихся в морях и пустынях, знает каждый. Известно, что они возникают довольно часто. «Космические миражи» — явление очень редкое и до 1979 г. никогда не наблюдалось. Открытие ГЛ произвело настоящую сенсацию среди астрономов. Немедленно начались целенаправленные поиски других линз, которые и были вскоре обнаружены. К моменту написания этой монографии уже известно девять объектов с проявлениями линзового эффекта сил тяготения.

Однако почему столь живо отреагировало астрономическое сообщество на открытие ГЛ? Ведь в том, что они должны существовать, никто не сомневался, потому что искривление лучей света в поле тяжести, предсказанное Эйнштейном, было экспериментально подтверждено еще в 1919 г. Эддингтоном, а это явление и составляет физическую основу действия ГЛ.

Дело в том, что обнаружить проявления линзового эффекта не так-то просто. Открытие 1979 г. было подготовлено непрерывным совершенствованием техники наблюдений, благодаря чему границы видимой части Вселенной все время расширялись. Но чем дальше расположен наблюдаемый источник, тем вероятнее, что на пути к Земле его излучение подвергнется действию сил тяготения более близких небесных тел. Более того, в действительности астрономы имеют возможность смотреть в глубины Вселенной только сквозь пронизывающие все пространство гравитационные поля звезд, галактик, скоплений галактик и, возможно, еще не

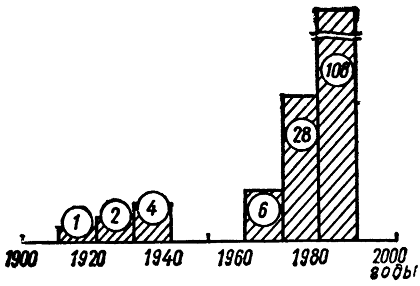


Рис. 0.1. Гистограмма

открытых космических объектов. По мере совершенствования астрономических инструментов и расширения диапазона длин волн, на которых ведутся наблюдения, необходимость учета гравитационной фокусировки (или дефокусировки) становится все более необходимой.

Но это еще не все. История развития науки и техники показывает, что вновь открытое явление по мере его изучения само постепенно превращается в «инструмент», с помощью которого делаются новые открытия. В данном случае можно сказать, что мы имеем дело с гигантскими «телескопами», созданными самой природой, и будет очень досадно, если мы не сумеем ими воспользоваться. Не меньший интерес представляет изучение и самих «линз», потому что значительная (а скорее всего, даже бóльшая) часть материи во Вселенной находится в ненаблюдаемой форме, поскольку она не излучает электромагнитные волны. Однако гравитационные поля, создаваемые «скрытой массой», могут быть обнаружены и исследованы по тем изменениям, которые претерпевает излучение далеких источников, проходя сквозь «линзу».

В данной монографии сделана попытка представить многочисленные теоретические исследования и результаты наблюдений гравитационных линз. Последовательность глав в какой-то мере соответствует истории изучения и открытия ГЛ. Сначала излагаются физические основы преломления электромагнитных волн в гравитационных полях (гл. 1), затем рассматриваются геометрическая оптика (гл. 2) и волновая теория (гл. 3) гравитационных линз. Далее мы переходим к статистическому анализу, в котором учитываются случайные факторы (гл 4), и, наконец, обсуждаем результаты наблюдений и возможные астрофизические приложения, связанные с ними (гл. 5). Научные интересы авторов нашли отражение в более подробном изложении теоретических вопросов в гл. 2—4. Мы старались представить материал таким образом, чтобы читатель, даже не будучи знакомым с ранее опубликованными работами, смог читать эту книгу достаточно легко.

Мы хотим поблагодарить наших коллег, в первую очередь Л. Н. Литвиненко, В. М. Конторовича и О. А. Третьякова за внимание к данной работе, Н. Л. Костенко и Т. В. Зубкову за помощь в оформлении материала. Выражаем бсльшую признательность И. Г. Дымниковой за ознакомление с рукописью и обсуждение ряда вопросов.

Глава 1

ВЛИЯНИЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТА

§ 1.1. Физические основы действия гравитационной линзы (ГЛ)

Эффект ГЛ основан на преломлении световых лучей в поле тяготения. Гравитационные поля создают все небесные тела, но для того, чтобы искривление лучей стало заметным, масса тела должна быть достаточно велика. Например, все планеты Солнечной системы, включая и гигантский Юпитер, оказываются с этой точки зрения недостаточно массивными. Однако такие объекты, как Солнце и звезды, уже создают заметную фокусировку излучения, распространяющегося сквозь их гравитационные поля. Звездные скопления, целые галактики и даже скопления галактик также образуют ГЛ.

Не останавливаясь пока на вопросе о том, как были открыты ГЛ и каково их значение в астрофизических исследованиях, рассмотрим схематический рисунок, поясняющий принцип действия гравитационной фокусировки, и сравним ГЛ с работой обычной (собирающей) линзы (ОЛ). На рис. 1.1, *а* показан поток первоначально параллельных лучей, распространяющихся сквозь сферически симметричное поле тяготения с потенциалом $\Phi(r)$. В дальнейшем мы убедимся, что под действием гравитации лучи искривляются и вместо прямых линий возникает семейство гипербол. Вдали от небесного тела гиперболы быстро сливаются со своими асимптотами. Лучи снова не отличаются от прямых линий, но их параллельность нарушается: они становятся сходящимися. Аналогичным образом преобразуется поток лучей и в ОЛ (рис. 1.1, *б*), что и послужило поводом для введения термина «гравитационная линза».

Важнейшей характеристикой линзы является зависимость угла преломления луча от его прицельного параметра p, которым называется то наименьшее расстояние до центра линзы, на котором прошел бы луч, если бы он не преломлялся. В ОЛ угол преломления пропорционален прицельному параметру:

$$\Theta_0 \simeq \frac{p}{F}, \qquad (1.1)$$

где F — фокусное расстояние линзы (для простоты рассматриваются малые углы преломления). В ГЛ зависимость от p обратная:

$$\Theta_g \simeq \frac{F_g}{p}. \qquad (1.2)$$

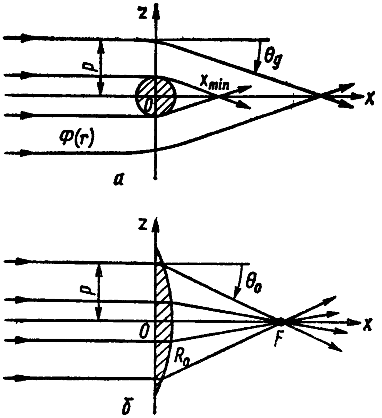


Рис. 1.1. Преломление лучей света в поле тяготения небесного тела (*а*) и в обычной собирательной линзе (*б*)

Здесь мы также ограничиваемся пока только малыми углами, или, что то же, слабыми гравитационными полями. Обратную пропорциональность p легко понять, если учесть, что чем дальше от массивного тела проходит луч света, тем слабее влияет на него сила притяжения.

Различные зависимости углов преломления Θ_0 и Θ_g от p приводят к совершенно иным оптическим свойствам сравниваемых линз. В частности, в ГЛ преломленные лучи не сходятся в одной точке, а пересекаются на бесконечной полуоси, начиная с некоторого минимального расстояния $x_{\min}$ от линзы. Иными словами, вместо определенного фокального расстояния F гравитационная линза имеет фокальную полуось $x \geqslant x_{\min}$. Правда, следует оговориться, что граничное расстояние $x_{\min}$ характерно только для непрозрачных линз, каковыми являются для света Солнце и звезды. Если же излучение может распространяться и через внутренние области гравитирующего объекта (например, сквозь галактику), то внутренние лучи преломляются уже по закону, отличающемуся от закона обратной пропорциональности (1.2), и образуют область фокусировки иного вида. Пока что мы рассматриваем непрозрачные небесные тела, а при численных оценках будем ориентироваться на гравитационное поле Солнца.

Параметры F и F_g, которые входят в законы преломления лучей (1.1) и (1.2), можно оценить из соображений размерности. Начнем с обыкновенной линзы, ограниченной плоскостью и сферической поверхностью. Радиус кривизны $R_0^{(k)}$ является единственным параметром, характеризующим форму линзы и имеющим размерность длины, т. е. ту же размерность, что и F. Следовательно, $F \sim R_0^{(k)}$. Учтем также, что линза преломляет лучи тем сильнее, чем больше отличие ее коэффициента преломления n от 1. Таким образом, $F \simeq R_0^{(k)} (n - 1)^{-1}$. Это и есть тот результат, который можно получить из соображений размерности. Точный расчет приводит в данном случае к той же формуле, т. е. численный коэффициент в оценочном соотношении оказался равным единице.

Попробуем проделать такую же процедуру для ГЛ. Параметра, имеющего размерность длины, здесь непосредственно нет. Однако известно, что гравитационное поле, создаваемое небесным телом, пропорционально его массе M [г] и гравитационной постоянной G, которая имеет размерность $\text{г}^{-1} \cdot \text{см}^3 \cdot \text{с}^{-2}$. Из этих двух параметров нельзя образовать величину с размерностью длины, но если учесть, что в формулу может войти такая фундаментальная постоянная, как скорость света c [см · с$^{-1}$], то легко угадать требуемое сочетание: F_g [см] $\sim M$ [г] · G [г$^{-1}$ · см^3 · с$^{-2}$]/c^2 [см^2 · с$^{-2}$]. Стоящая в правой части величина носит название гравитационного радиуса тела r_g. Точнее, гравитационный радиус определяется соотношением

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}, \qquad (1.3)$$

а коэффициент пропорциональности в выражении для Θ_g равен $2r_g$, т. е. точная формула такова:

$$\Theta_g = 2r_g/p. \qquad (1.4)$$

Мы выведем ее строго несколько позже, а пока подробнее остановимся на понятии «гравитационный радиус».

Рассмотрим тело, имеющее массу M и характерный размер R. Сила тяготения стремится сблизить отдельные части тела друг с другом, стянуть в точку весь его объем. Если этому препятствуют силы иной природы, например упругости материала, катастрофического сжатия не происходит, однако за счет гравитации тело приобретает определенную потенциальную энергию U_G. Ее легко оценить, вспомнив, что энергия взаимодействия двух элементов массы dm_1 и dm_2, находящихся друг от друга на расстоянии $r_{1,2}$, равна $Gdm_1dm_2/r_{1,2}$. Интегрируя это выражение по всему объему, получаем $U_G \sim GM^2/R$. В то же время из теории относительности известно, что полная энергия покоя массы M равна Mc^2. Спрашивается, какими должны быть размеры тела, чтобы его полная энергия была равна гравитационной? Приравняв Mc^2 и U_G, получим $R \sim GM/c^2$, т. е. уже знакомое нам определение гравитационного радиуса.

Теперь рассмотрим, казалось бы, не связанный с полученной оценкой, вопрос о скорости ускользания (второй космической скорости) частицы с поверхности небесного тела. Частица массы m, брошенная «вверх», с начальной скоростью v_0 может преодолеть силу притяжения, если ее кинетическая энергия $mv_0^2/2$ станет равной потенциальной энергии в поле тяготения GMm/R или превысит ее. Из условия равенства указанных величин следует: $v_0 = \sqrt{2GM/R}$. Масса m самой частицы из окончательного результата выпадает. Когда радиус тела R совпадает с его гравитационным радиусом r_g, скорость ускользания достигает скорости света: $v_0 = c$. Мы получаем, таким образом, еще одно определение r_g: в том случае, когда размеры тела равны гравитационному радиусу, скорость ускользания с его поверхности равна скорости света. Если же размеры тела меньше гравитационного радиуса, то вторая космическая скорость должна превышать скорость света, а это невозможно. Следовательно, даже свет не сможет преодолеть силы тяготения, и небесное тело с размерами $R < r_g$ станет невидимым. Такие объекты получили название черных дыр. Они также могут действовать как ГЛ, но с весьма своеобразными свойствами. О них пойдет речь далее, а пока отметим один интересный факт из истории науки: впервые о черных дырах было сказано в конце XVIII в.! Приведенный выше расчет скорости ускользания, выполненный Лапласом (1749—1827), позволил ему предсказать следующее: «Светящаяся звезда с плотностью, равной плотности Земли, и диаметром в 250 раз больше диаметра Солнца не дает ни одному световому лучу достичь нас из-за своего тяготения; поэтому возможно, что самые яркие небесные тела во Вселенной оказываются по этой причине невидимыми» [1].

Сейчас ясно, что рассуждения Лапласа (как и приведенные выше «расчеты» значения r_g) не имеют доказательной силы, так как они основываются на законе всемирного тяготения в форме, предложенной Ньютоном (1642—1727): $f_Н = GmM/r^2$. Но в 1915 г. Эйнштейн (1879—1955) показал, что теория Ньютона применима только для слабых гравитационных полей, в которых падающие тела разгоняются до скоростей, много меньших скорости света [2]. Правильная же формула для силы тяготения, свободная от указанного ограничения, имеет, по Эйнштейну, следующий вид: $f_Э = GmM/r^2\sqrt{1 - r_g/r}$. Поэтому в общей теории относительности r_g определяется как радиус сферы, на которой сила тяготения, создаваемая сферической невращающейся массой, целиком лежащей внутри этой сферы, стремится к бесконечности [2]. Видно, что $f_Э$ совпадает с $f_Н$ при $r \gg r_g$. Это означает, что в случаях, когда размеры тела значительно превышают его гравитационный радиус, создаваемые им гравитационные поля являются слабыми, и в не очень точных расчетах можно использовать теорию Ньютона. Таково, например, поле тяготения Солнца, не говоря уже о планетах. Действительно, радиус Солнца $R_\odot = 7 \cdot 10^5$ км, его гравитационный радиус $r_g = 2{,}96$ км, а отношение $r_g/R_\odot = 4{,}2 \times \times 10^{-6}$; для Земли $r_g = 0{,}886$ см и $r_g/R = 1{,}4 \cdot 10^{-9}$; для Луны $r_g = 0{,}01$ см и $r_g/R = 5{,}9 \cdot 10^{-11}$. Следовательно, рассматривая конкретную задачу искривления лучей в поле тяготения Солнца, можно попытаться использовать формулы Ньютона.

§ 1.2. Расчет искривления светового луча по теории Ньютона

Преломление луча света в поле тяготения легко рассчитать по формулам классической механики, если представить себе свет как поток частиц и считать, что они также подчиняются закону всемирного тяготения, как и обычные частицы. Рассмотрим уравнение движения такой «световой частицы» в центральном поле тяготения $md\mathbf{v}/dt = \mathbf{f}$ [3]. Прямоугольная система координат ориентируется так, чтобы невозмущенная траектория луча была параллельна оси x (рис. 1.2). Если исходная кинетическая энергия частицы $mv_0^2/2$ значительно превосходит ее максимальную по абсолютному значению потенциальную энергию $GmM/r_{min} \simeq GMm/p$, то отклонения от равномерного прямо-

[1] Цит. по [1].

[2] Кинетическая энергия частицы, движущейся со скоростью v, близкой к c, равна не $mv^2/2$, а $mc^2/\sqrt{1 - v^2/c^2} - mc^2$. Таким образом, точное значение r_g было получено Лапласом в каком-то смысле случайно, поскольку он использовал формулы классической механики вне области их применимости.

линейного движения очень малы. Соответствующее неравенство при $v_0 = c$ имеет вид $p \gg 2GM/c^2 = r_g$, т. е. траектория не должна приближаться к центру тяготения. Поскольку размеры всех небесных тел, исключая черные дыры, значительно превышают их гравитационные радиусы, условие $p \gg r_g$ всегда выполняется. Согласно рис. 1.2 угол преломления можно определить через отношение компонентов скорости v_z/v_x в конце траектории: $\operatorname{tg}\Theta_g = -\Delta v_z/(v_0 + \Delta v_x)$, где v_0 — начальное значение скорости, а Δv_x и Δv_z — приращения скоростей v_x и v_z. Ограничиваясь величинами первого порядка малости по $\Delta v_{x,z}/c$, получаем[3]

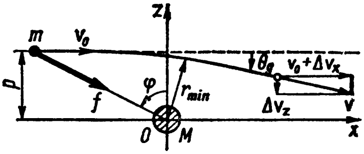


Рис. 1.2. Траектория частицы в поле тяготения небесного тела

$$\Theta_g \simeq -\Delta v_z/c. \tag{1.5}$$

Для вычисления Δv_z спроектируем уравнение движения на ось z: $m dv_z/dt = -f \cos \varphi = -fp/r$, где $f = GmM/r^2$ и $r^2 = p^2 + x^2$. Интегрируя его по t от 0 до ∞, находим

$$\Delta v_z = -pGM \int_0^\infty \frac{dt}{r^3(t)}. \tag{1.6}$$

Использовав соотношение $dt = dx/v_x \simeq dx/c$, где $x = p \operatorname{tg} \varphi$, перейдем к интегрированию по φ, что и приводит к искомому результату: $\Delta v_z = -2GM/pc$. Подставив это выражение в (1.5), получим

$$\Theta_g = r_g/p. \tag{1.7}$$

Мы вывели, таким образом, закон обратной пропорциональности Θ_g и p и подтвердили оценки, полученные из соображений размерности. Однако найденная формула дает вдвое меньшее значение Θ_g по сравнению с (1.4). Это, казалось бы, не очень существенное отличие (оптические свойства ГЛ оно не затрагивает) в действительности имеет принципиальное значение, так как отражает ограниченные возможности классической механики.

Интересно оценить значение Θ_g для какой-нибудь конкретной ситуации, например для луча света, проходящего вблизи края диска Солнца. Входящие в расчетную формулу (1.7) величины таковы: прицельный параметр p равен радиусу Солнца $R_\odot = 7 \cdot 10^5$ км, а гравитационный радиус Солнца $r_g = 2{,}96$ км. Отсюда находим угол преломления

$$\Theta_{g\odot} = 4{,}22 \cdot 10^{-6} \text{ рад} = 0{,}87''. \tag{1.8}$$

Мы рассчитали $\Theta_{g\odot}$, основываясь на теории Ньютона, но мог ли он сам получить приведенное выше значение 0,87″? Что касается формулы (1.7) для Θ_g, положительный ответ не вызывает сомне-

---

[3] Угол Θ_g будем считать положительным, если луч искривляется в сторону притягивающего тела, т. е. при $\Delta v_z < 0$.

ния. Действительно, уже в первом издании «Начал» (1687) показано, что в центральном поле тяготения ($f \sim r^{-2}$) траектории движения всех тел представляют собой одно из конических сечений. В частности, частица, путь которой начинается с конечной скоростью из бесконечности, движется по гиперболе с фокусом в центре притяжения. Угол между асимптотами гиперболы (это и есть интересующий нас угол преломления луча) связан с эксцентриситетом гиперболы $e_г$ соотношением $\mathrm{ctg}\,(\Theta_g/2) = \sqrt{e_г^2 - 1}$ [3]. Эксцентриситет зависит от начальной скорости частицы v_0 и момента импульса mv_0p следующим образом: $e_г^2 - 1 = v_0^2\,(mv_0p)^2/(GMm)^2$. Для малых углов преломления, $\Theta_g \simeq 2/\sqrt{e_г^2 - 1} = 2GM/v_0^2p$, и при $v_0 = c$ мы приходим к формуле (1.7).

Далее необходимо выяснить, мог ли Ньютон применить законы движения материальных тел к «световым частицам», допускал ли он их притяжение к массивным телам? Известно, что ньютоновская модель света очень сложна. Чего стоит, например, такое определение («Оптика», 1704): «Под лучами света я разумею его мельчайшие части, как в их последовательном чередовании вдоль тех же линий, так и одновременно существующие по различным линиям»[4]. Здесь можно усмотреть корпускулярный характер теории, суть которой заключается в том, что свет состоит из мельчайших частиц, вылетающих из источника света по всем направлениям. Далее Ньютон, подчеркивая, что корпускулы летят прямолинейно, задает вопрос: «Не действуют ли тела на свет на расстоянии и не изгибают ли этим действием его лучей; и не будет ли (при прочих равных условиях) это действие сильнее всего на наименьшем расстоянии?» Как будто бы формулировка вопроса не оставляет сомнения в том, что Ньютон размышлял о преломлении света в поле тяготения. Но мы воздержимся от столь категоричного утверждения, так как приведенное выше высказывание относится к опытам по дифракции света вблизи резкого края непрозрачных экранов. Вполне возможно, что гравитационное воздействие здесь совсем и не подразумевалось. В то же время следует заметить: заключительная часть первой книги «Начал» посвящена движению весьма малых частиц под действием сил притяжения к большим телам. Там же говорится об аналогии между траекториями этих частиц и световыми лучами.

Таким образом, предположение о том, что Ньютон мог сформулировать задачу о преломлении света в поле тяготения Солнца, представляется весьма правдоподобным, а на основании известных ему теорем формула для угла отклонения могла быть получена. Остается выяснить, были ли известны Ньютону численные значения тех величин, которые входят в выражение для $\Theta_{g\odot}$, а именно G, $M_\odot$, $R_\odot$, c.

Гравитационная постоянная G была определена путем непосредственного измерения силы взаимного притяжения двух тел с известными массами. Такой опыт впервые осуществил Кавендиш в 1798 г.

[4] Здесь и далее высказывания Ньютона цит. по [4].

с помощью крутильных весов, но Ньютона к тому времени уже не было в живых. Все же не будем спешить с отрицательным выводом. В формулу для $\Theta_{g\odot}$ величина G входит только в виде произведения $GM_\odot$, которое можно определить исходя из астрономических наблюдений. Действительно, основные законы движения планет, открытые эмпирически Кеплером (1571—1630), являются следствием ньютоновской динамики. В частности, из равенства силы притяжения планеты к Солнцу $GM_\odot m/r^2$ (m — масса планеты, r — радиус ее орбиты) и центробежной силы $(2\pi/T)^2 rm$ (T — период обращения планеты) вытекает третий закон Кеплера: $T^2 = 4\pi^2 r^3/GM_\odot$. Коэффициент пропорциональности между квадратом периода обращения и кубом радиуса орбиты как раз и содержит искомое произведение $GM_\odot$. Периоды обращения и относительные гелиоцентрические расстояния планет находят путем математической обработки данных наблюдений. Параметры орбит удалось установить с достаточно высокой точностью еще до того, как были созданы оптические инструменты. Например, относительные радиусы планетных орбит, найденные Коперником (1473—1543), отличаются от современных данных не более чем на 0,1—1 %, а период обращения Земли был определен Тихо Браге (1546—1601) с точностью до 1 с. Но для нахождения $GM_\odot$ надо знать не относительные, а абсолютные расстояния, что стало возможным значительно позже. Первым астрономом, который определил расстояние от Земли до Солнца с погрешностью менее 10 %, был Кассини (1625—1712). Эти измерения он выполнил в 1672 г., таким образом, истинные размеры Солнечной системы, а также радиус Солнца стали известны еще при жизни Ньютона, т. е. значение $GM_\odot$ и радиус Солнца $R_\odot$ он должен был знать. А как обстояло дело со скоростью света? Здесь снова решающую роль сыграли астрономические наблюдения, причем первые определения c оказались их побочным результатом. Исследуя движения спутников Юпитера, Кассини заметил, что время обращения ближайшего спутника Ио как будто бы зависит от расстояния между Землей и Юпитером, и высказал предположение, что это связано с конечной скоростью распространения света. Обнаруженное явление было исследовано Ремером (1644—1710), который пришел к выводу, что скорость света действительно является конечной и несколько превышает 200 000 км/с. По современным представлениям «аномалии» в скорости обращения спутника Юпитера объясняются очень просто. Здесь наблюдается не что иное, как эффект Доплера (1803—1853). Вследствие движения Земли и Юпитера по своим орбитам частота обращения спутника $\omega_{\text{Ио}}$, измеренная наземным наблюдателем, изменяется в пределах $\omega_{\text{Ио}} \pm \Delta\omega$, где $\Delta\omega = \omega_{\text{Ио}} v_\otimes / c$ ($v_\otimes$ — максимальная скорость движения Земли относительно Юпитера). В отличие от современных астрофизических приложений эффекта Доплера в наблюдениях Ремера значение c было неизвестно. Его-то он и определил [5], предвосхитив более чем на полтора века

[5] Более поздние оценки, выполненные на основе сохранившихся данных наблюдений Ремера, дали значение $c = 214\ 000$ км/с. Сам же Ремер в своем первом сообщении был осторожен и конкретного значения скорости света не привел.

открытие Доплера. Результаты Ремера встретили сильное противодействие в Парижской академии, где он в то время работал. Однако когда в 1677 г. его расчеты были опубликованы в «Философских трудах» Лондонского королевского общества, Ньютон воспринял их положительно.

Итак, все необходимые данные могли оказаться в распоряжении Ньютона в 1677 г.— это и есть то время, когда появилась принципиальная возможность рассчитать угол преломления луча света, проходящего вблизи края диска Солнца. Возможно, указанный срок следует продлить еще на 10 лет (1687 г.— год опубликования «Начал» с формулами для траекторий частиц, движущихся в центральном поле тяготения) или даже до 1704 г. (год публикации «Оптики»), но такое «уточнение» ничего, разумеется, не меняет, поскольку в литературном наследии Ньютона расчета $\Theta_{g\odot}$ нет. Если бы соответствующие вычисления и были им проделаны, все равно значение $\Theta_{g\odot} = 0{,}87''$ в то время не допускало никакой возможности экспериментальной проверки [6]. Поэтому весь расчет оказался бы лишь еще одним примером применения известных законов движения.

Так или иначе, но формула (1.8) появилась только через сто с лишним лет, в 1801 г., в статье немецкого астронома Зольднера (1776—1884) [5]. И в то время она не вызвала большого интереса, тем более что как раз в начале XIX в. корпускулярная теория света уступила место волновой оптике и само понятие «траектория световой частицы» как будто бы потеряло смысл. Прошло еще 100 лет и снова возник вопрос о расчете (а потом и измерениях) угла $\Theta_{g\odot}$, причем оказалось, что здесь затрагиваются самые основы физики.

§ 1.3. Искривление светового луча под действием силы тяжести в общей теории относительности

В процессе создания общей теории относительности (ОТО) выяснилось, что искривление светового луча вблизи края диска Солнца играет чрезвычайно важную роль. Этот эффект наряду с красным смещением (изменение частоты в поле тяготения) и вращением перигелия Меркурия дал возможность опытной проверки выводов ОТО и вошел в ее экспериментальную основу.

Принцип относительности был сформулирован Эйнштейном первоначально в 1905 г. для неускоренных систем отсчета, движущихся относительно друг друга с произвольной, но постоянной скоростью [6]. В 1907 г. этот принцип был обобщен на системы отсчета, движущиеся относительно друг друга с ускорением [7], что позволило установить влияние гравитационного поля на разнообразные физические явления. Суть рассуждений Эйнштейна была очень проста и заключалась в следующем. Рассмотрим две системы отсчета *I* и *II*,

[6] Интересно отметить одно курьезное совпадение. Значение $\Theta_{g\odot} = 0{,}87''$ соответствует значению $c = 300\,000$ км/с. Если же использовать данные Ремера, то получится $1{,}73''$, что практически не отличается от результата согласно общей теории относительности.

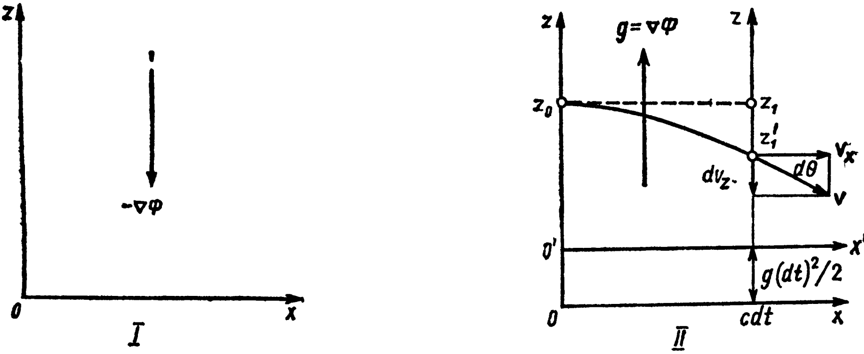


Рис. 1.3. Покоящаяся система отсчета в однородном гравитационном поле (*I*) и система отсчета, движущаяся с постоянным ускорением (*II*)

одна из которых (*I*) покоится, но находится в однородном поле тяжести $-\nabla\Phi = \text{const}$ (Φ — потенциал тяготения), а вторая (*II*) движется с постоянным ускорением $g = \nabla\Phi$ (рис. 1.3). В равноускоренной системе *II* все тела ускоряются одинаково, так же, как и в гравитационном поле (система *I*) [7]. Отсюда делается утверждение о полной эквивалентности обеих систем, что позволяет «заменить однородное поле тяжести равномерно ускоренной системой отсчета, которая до известной степени поддается теоретическому анализу» [7]. В частности, не представляет труда рассчитать в системе *II* искривление светового луча. На рис. 1.3 показан луч света, выходящий из точки z_0 параллельно оси x (ось z ориентирована вдоль вектора $\nabla\Phi$). Его траектория в неподвижной системе координат отмечена прямой штриховой линией z_0z_1. За некоторое время dt свет проходит вдоль оси x расстояние $dx = cdt$, а система координат смещается вследствие ускорения вдоль оси z на величину $dz = gdt^2/2$. Поэтому в ускоренной системе отсчета луч света попадет в точку z_1', и направление его несколько изменится — луч искривится. Поскольку dx зависит от dt линейно, а dt — квадратично, легко убедиться, что траектория луча представляет собой отрезок параболы [8]. При малых углах преломления $d\Theta \simeq -dv_z/v_x$ (угол $d\Theta$ по-прежнему считается положительным, если луч изгибается в ту сторону, куда направлено поле тяготения $-\nabla\Phi$).

---

[7] Так проявляет себя фундаментальный эмпирический закон равенства инертной и тяжелой масс, возведенный Эйнштейном в ранг принципа. Он был по существу продемонстрирован еще Галилеем (1564—1642), показавшим, что все тела в пустоте падают с одинаковым ускорением, и проверен с относительно высокой точностью (примерно 10^{-3}) Ньютоном. В опытах венгерского физика Этвеша (1896) точность измерений была доведена до $5 \cdot 10^{-9}$, американский физик Дикке в 1959—1963 гг. снизил погрешность до $3 \cdot 10^{-11}$, наконец, советские физики В. Б. Брагинский и В. И. Панов достигли точности 10^{-12} (1971).

[8] Луч света распространяется по гиперболе в центрально-симметричном поле тяготения. Здесь же рассматривается однородное поле.

Изменения скорости $\mathbf{v}$ определяются уравнениями $dv_x/dt = 0$, $dv_y/dt = 0$, $dv_z/dt = -g$, откуда, учитывая начальные значения скоростей $v_{x0} = c$, $v_{y0} = v_{z0} = 0$, получим $v_x = c$, $v_y = 0$, $dv_z = -gdt$. Второе равенство показывает, что луч света не выходит из плоскости $y = 0$, а первое и третье дают возможность рассчитать $d\Theta \simeq gdt/c = gdx/c^2$. Отсюда следует формула для определения угла преломления, приходящегося на единицу длины луча: $d\Theta/dx = g/c^2 = c^{-2}\,d\Phi/dz$. Учитывая, что преломление вызывается нормальной к лучу составляющей гравитационного поля, полученный результат легко обобщить на произвольную ориентацию луча относительно $\nabla\Phi$. В результате получаем

$$\frac{d\Theta}{ds} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial N} = \frac{\sin\nu}{c^2}\frac{d\Phi}{dz}, \tag{1.9}$$

где производная от Φ берется по нормали к лучу, причем нормаль ориентирована так, чтобы искривление луча происходило в сторону возрастания силы тяжести; ν — угол между направлением луча $\mathbf{e}_s$ и вектором $\nabla\Phi$, расстояние S отсчитывается вдоль луча.

Преломление световых лучей можно трактовать как следствие того, что скорость света в гравитационном поле зависит от Φ. Для того чтобы найти эту зависимость, рассмотрим плоскослоистую среду с коэффициентом преломления $n_g(z)$ и используем закон Снеллиуса [8], который позволяет рассчитать траекторию луча: $n_g \sin\nu = \mathrm{const}$. Дифференцируя это выражение, получаем $\frac{dn_g}{dz}\sin\nu + n_g\cos\nu\frac{d\nu}{dz} = 0$. Поскольку $\cos\nu\frac{d\nu}{dz} = \frac{d\nu}{ds}$ (рис. 1.4), а $\nu = \nu_0 + \Theta$,

$$\frac{d\Theta}{ds} = -\frac{\sin\nu}{n_g}\frac{dn_g}{dz}. \tag{1.10}$$

Из сравнения формул (1.9) и (1.10) следует, что $\frac{d(\ln n_g)}{dz} = -\frac{1}{c^2}\frac{d\Phi}{dz}$ и $n_g = \mathrm{const}\exp\{-\Phi^2/c^2\}$. Учитывая, что при $\Phi = 0$ $n_g = 1$, окончательно находим

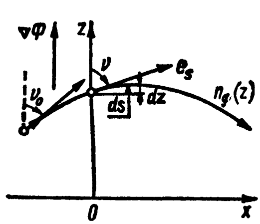
$$n_g \simeq 1 - \frac{\Phi}{c^2}, \quad |\Phi|/c^2 \ll 1, \tag{1.11}$$

что соответствует скорости света

$$c_g = \frac{c}{n_g} \simeq c\left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right). \tag{1.12}$$

Поскольку $\Phi < 0$, эффективный коэффициент преломления всегда больше единицы, а кажущаяся скорость света в поле тяготения меньше, чем в свободном пространстве.

Численные оценки эффекта для земных условий привели Эйнштейна к выводу, что «нет никаких перспектив на сравнение результатов теории с опытом» [7]. Однако спустя некоторое время, в 1911 г., он снова возвращается к вопросу о преломлении света, «так как нас не удовлетворяет прежнее изложение... кроме того, мы теперь еще раз убедились в том, что один из наиболее важных выводов ... поддается



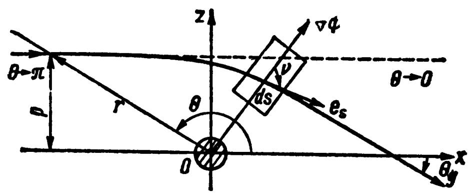


Рис. 1.4. Преломление луча в однородном поле тяготения, которому соответствует плоскослоистая среда с коэффициентом преломления n_g (z)

Рис. 1.5. Преломление луча в центральном поле тяготения (прямоугольником выделен элемент траектории ds, в пределах которого гравитационное поле можно считать однородным)

экспериментальной проверке. Оказывается, что лучи, проходящие вблизи Солнца, согласно излагаемой далее теории, испытывают под влиянием поля тяжести Солнца отклонение, вследствие чего должно произойти кажущееся увеличение углового расстояния между оказавшейся вблизи Солнца неподвижной звездой и самим Солнцем почти на одну угловую секунду» [9]. В этой же работе впервые предложен оригинальный эксперимент: угол отклонения луча может быть определен по смещению звезды, расположенной вблизи Солнца, в момент полного солнечного затмения.

Расчет Θ_g с помощью формулы (1.9) производится следующим образом. Рассматривается небольшой участок траектории луча ds, в пределах которого гравитационное поле можно считать однородным. Для этого участка справедливо соотношение (1.9), а результирующее отклонение Θ_g находится путем интегрирования $d\Theta/ds$ по всему лучу (рис. 1.5). При этом интегрировать надо по невозмущенному лучу, т. е. по прямой, параллельной оси x, так как учет кривизны луча привел бы к поправке более высокого порядка малости по $|\Phi|/c^2 \ll \ll 1$. Таким образом, получается

$$\Theta_g = \frac{1}{C^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\,dx.$$

Далее рассматривается центрально-симметричное поле тяготения $\Phi = -\frac{GM}{r}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \sin\theta\,\frac{d\Phi}{dr}$, $\frac{d\Phi}{dr} = GM/r^2$ и производится замена переменной интегрирования $x = p\operatorname{ctg}\theta$, $dx = -p d\theta/\sin^2\theta$. Учитывая также, что $r = p/\sin\theta$, окончательно получаем

$$\Theta_g = \frac{GM}{c^2 p}\int\limits_0^{\pi}\sin\theta d\theta = \frac{2GM}{c^2 p} = \frac{r_g}{p}, \qquad (1.13)$$

что в точности совпадает с (1.7), и для скользящего вблизи диска Солнца луча ($p = R_\odot$) находим $\Theta_{g\odot} = 0{,}87''$. Мы получили старый результат, но в отличие от предыдущего параграфа расчет был чисто кинематический. Никаких предположений о силах, действующих на «световые частицы», нам не потребовалось. Из хода рассуждений ясно, что погонное преломление (1.9) характеризует любое возмущение, которое в свободном от гравитационных полей пространстве распространяется прямолинейно со скоростью c. В частности, формула (1.9) в равной степени применима не только к электромагнитным, но и к гравитационным волнам или к потоку нейтрино.

Нет сомнения, что Эйнштейн не знал о работе Зольднера 1801 г., так как, получив почти то же значение $\Theta_{g\odot}$, он ничего не говорит о своем предшественнике [9]. Но вопрос о приоритете в определении указанного числа мог иметь определенную остроту лишь в течение четырех лет, потому что в 1915 г. появилась новая работа Эйнштейна [10], в которой было установлено, что найденное ранее значение $\Theta_{g\odot}$ является заниженным ровно в два раза. Это означает, что многократно выведенная нами формула для угла отклонения на самом деле ошибочная. Для того чтобы понять, в чем несостоятельность приведенных выше рассуждений и как получить правильный результат, нам придется несколько глубже ознакомиться с ОТО.

Прежде всего напомним, что в теории относительности обычное трехмерное пространство и время объединяются в единое четырехмерное пространство-время. В специальной, или частной, теории относительности (СТО), в инерциальных системах отсчета квадрат четырехмерного расстояния (интервал) между двумя близкими событиями записывается в виде

$$ds^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = (cdt)^2 - dl^2, \tag{1.14}$$

где t — время, x, y, z — обычные прямоугольные координаты, $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Если события происходят в одной точке пространства ($dx = dy = dz = 0$), то $ds^2 = c^2dt^2 > 0$. Для одновременных событий ($dt = 0$) $ds^2 = -dl^2 < 0$. В общем случае события могут происходить в разные моменты времени и в разных точках пространства. При этом интервал называется времениподобным, если $ds^2 > 0$, и пространственноподобным, если $ds^2 < 0$. Для сигнала, распространяющегося со скоростью v, $dl = vdt$ и $ds^2 = (c^2 - v^2)\,dt^2$. Отсюда следует, что для света

$$ds^2 = 0.$$

Нулевой интервал называют иногда светоподобным, или изотропным [12].

В неинерциальной системе отсчета квадрат интервала представляется квадратичной формой общего вида

$$ds^2 = g_{ik}dx^idx^k \tag{1.15}$$

($x^0 = ct$, $x^{1,2,3} = x$, y, z; по повторяющимся индексам i, k производится суммирование). Формула (1.14) получается из (1.15) при $g_{00} = 1$, g_{11}-g_{22}-$g_{33} = -1$, $g_{ik} = 0$ ($i \neq k$). Коэффициенты g_{ik} определяют геометрические свойства (метрику) пространства-времени.

[9] У Эйнштейна приведено значение 0,83″, а у Зольднера — значение 0,84″, но точный расчет по их формулам с современными значениями констант должен был бы дать результат 0,87″. О работе Зольднера 1801 г. напомнил в 1921 г. Ленард, который воспроизвел ее содержание, выступая против теории Эйнштейна [11].

Например, с коэффициентом g_{00} связана скорость течения времени, которая в разных точках пространства может быть различной (мы рассматриваем только статические поля, в которых g_{ik} есть функции пространственных координат x, y, z и не зависят от t). Аналогичным образом пространственные единичные интервалы (масштабы) могут оказаться разными не только в различных точках пространства, но и по разным направлениям. Трехмерное пространство, обладающее таким свойством, будет неевклидовым, или, что то же, искривленным. Теоремы привычной евклидовой геометрии в нем, вообще, нарушаются. В частности, отношение длины окружности к ее радиусу может быть не равным 2π.

Выше показано, что влияние однородного гравитационного поля на физические процессы эквивалентно переходу к неинерциальной (в нашем примере — равноускоренной) системе координат. Поэтому в гравитационном поле выражение для ds^2 также имеет вид (1.15), и набор коэффициентов g_{ik} (метрический тензор) полностью описывает поле тяготения.

Значения g_{ik} зависят от распределения масс, а движение материальных тел, в свою очередь,— от создаваемых ими гравитационных полей, т. е. от тех же g_{ik}. Уравнения, из которых находят g_{ik}, оказываются нелинейными и достаточно сложными. Для слабых гравитационных полей из этих уравнений вытекают ньютоновские законы движения и уравнение Пуассона для скалярного потенциала тяготения Φ. Связь между компонентами метрического тензора и распределением массы-энергии была установлена Эйнштейном в 1915 г. [13], поэтому основные уравнения ОТО носят в настоящее время его имя. Они имеют следующий вид:

$$\tilde{R}_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik}\tilde{R} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}, \qquad (1.16)$$

где $\tilde{R}_{ik}$ — тензор Риччи, компоненты которого выражаются через компоненты g_{ik} и их первые и вторые производные по координатам, $\tilde{R} = \tilde{R}_{ik}g^{ik}$ — так называемая скалярная кривизна, T_{ik} — тензор энергии-импульса материи, создающей гравитационное поле. Компоненты тензора T_{ik} зависят от распределения гравитирующих масс и их движения. Имеется обширная литература, посвященная уравнениям Эйнштейна, и в этой работе нет необходимости их детально рассматривать. В данном случае нам требуется только понять, почему будто бы правильные расчеты угла преломления в действительности оказались ошибочными. Для этого достаточно рассмотреть вид тензора g_{ik} в интересующем нас сферически симметричном поле тяготения В пустоте (вне гравитирующей массы) выражение для квадрата интервала определяется как [14]

$$ds^2 = (1 - r_g/r)\, c^2dt^2 - \frac{dr^2}{1 - r_g/r} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \qquad (1\ 17)$$

Входящие сюда коэффициенты g_{ik} образуют так называемую метрику Шварцшильда, получившего точное решение уравнений Эйнштейна в 1916 г. Условие совпадения при $r \to \infty$ величин r, θ, φ в (1.17) с обычными сферическими координатами не нарушается, если ввести другую радиальную переменную $r^* = f(r)$, которая также совпадает с евклидовым расстоянием на бесконечности. Например, в результате преобразования $r = r^*(1 + r_g/4r^*)^2$ квадрат интервала приобретает следующий вид [14]:

$$ds^2 = \frac{(1 - r_g/4r^*)^2}{(1 + r_g/4r^*)^2} c^2dt^2 - \\ - \left(1 + \frac{r_g}{4r^*}\right)^4 [dr^{*2} + r^{*2}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]. \quad (1.18)$$

Координаты r^*, θ, φ называют изотропными сферическими координатами. Можно ввести также изотропные декартовы координаты $x^* = r^* \cos\ \theta$, $y^* = r^* \sin\ \theta \cos\varphi$, $z^* = r^* \sin\ \theta \sin\ \varphi$. При этом ds^2 в (1.18) преобразуется к виду

$$ds^2 = \frac{(1 - r_g/4r^*)^2}{(1 + r_g/4r^*)^2} c^2dt^2 - \left(1 + \frac{r_g}{4r^*}\right)^4 (dx^{*2} + dy^{*2} + dz^{*2}). \quad (1.19)$$

На больших расстояниях ($r^* \gg r_g$), учитывая, что $r^* \simeq r$, приближенно имеем

$$ds^2 = (1 - r_g/r)\, c^2dt^2 - (1 + r_g/r)(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Зависимость коэффициентов g_{ik} от величины $1 - r_g/r$ в слабых полях легко пояснить, не обращаясь к уравнениям (1.16). Суть рассуждений, с которыми можно подробнее ознакомиться в работе [15], сводится к следующему. Для сравнения пространственных и временных масштабов в точках с разными потенциалами тяготения снова обратимся к рис. 1.3. Наблюдатель в ускоренной системе координат, переместившись вдоль z (или вдоль r в сферически симметричном поле) на расстояние, соответствующее небольшой разности потенциалов $|\Phi| \ll c^2$, приобретет скорость $v = \sqrt{2|\Phi|}$, вследствие чего его пространственно-временные масштабы изменятся. В соответствии с преобразованием Лоренца новые величины dt_Φ и dr_Φ будут равны: $dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$ и $dr/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, а поперечные координаты не изменятся. Записав квадрат интервала в окрестности рассматриваемой точки в виде

$$ds^2 = c^2dt_\Phi^2 - dr_\Phi^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (1.20)$$

и подставив сюда приведенные выше значения dt_Φ и dr_Φ, а также учтя, что $\Phi = -GM/r$, получим формулу (1.17). Согласно принципу эквивалентности рассмотренное выражение будет справедливо и в неподвижной системе координат, но находящейся в поле тяготения. В нашем пояснении мы воспользовались кроме принципа эквивалентности локальной применимостью специальной теории относительности (преобразования Лоренца) и считали гравитационное поле слабым (формула Ньютона для v справедлива только при $v \ll c$). В действительности решение Шварцшильда (1.17) свободно от этих ограничений и применимо в сколь угодно сильных полях.

Величины r, θ, φ на больших расстояниях ($r_g/r \to 0$) имеют смысл обычных сферических координат, однако на конечных расстояниях это не так. В сказанном легко убедиться, если заметить, то хотя длина окружности с центром в начале координат равна согласно (1.17) $2\pi r$, однако расстояние от центральной точки до окружности отнюдь не равно r. Действительно, расстояние $\Delta r_{1,2}$ между двумя точками r_1 и r_2 на одном и том же радиусе определяется формулой $\Delta r_{1,2} = \int\limits_{r_1}^{r_2} dr/\sqrt{1 - r_g/r}$, т. е. отличается от $r_2 - r_1$. В слабых полях тяготения

$$\Delta r_{1,2} \simeq r_2 - r_1 + \frac{r_g}{2} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Видно, что $\Delta r_{1,2}$ всегда больше $r_2 - r_1$ и зависит от отношения r_2/r_1. На очень больших расстояниях, когда при фиксированной разности $r_2 - r_1$ отношение r_2/r_1 стремится к единице, обычная метрика восстанавливается. Искривление пространства, которое описывается пространственной частью метрики (1.17)

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - r_g/r} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \tag{1.21}$$

можно представить достаточно наглядно, рассмотрев геометрические соотношения на «плоскости», проходящей через центр поля [14]. С этой целью положим в (1.21) $\theta = \pi/2$ и запишем выражение для двумерного расстояния:

$$dl^2 = dr^2/(1 - r_g/r) + r^2 d\varphi^2. \tag{1.22}$$

Покажем теперь, что существует некоторая поверхность вращения $z = \zeta(r)$, на которой реализуется в точности такая же метрика (рис. 1.6). Действительно, элемент длины на поверхности вращения может быть определен как

$$dl^2 = dr^2 + dz^2 + r^2 d\varphi^2 = dr^2 \left[1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right] + r^2 d\varphi^2. \tag{1.23}$$

Приравняв правые части (1.22) и (1.23), найдем

$$1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1},$$

откуда

$$\zeta(r) = 2\sqrt{r_g (r - r_g)}. \tag{1.24}$$

В точке $r = r_g$ функция $\zeta(r)$ имеет особенность (точку ветвления), но при рассмотрении слабых полей это не должно нас беспокоить.

Изменение пространственной метрики приводит к дополнительному искривлению светового луча, что можно пояснить следующим образом. Рассмотрим линию, соединяющую точки A и B на найденной поверхности (1.24) по кратчайшему пути. На обычной плоскости кратчайшему пути соответствует прямая (см. рис. 1.6, *б*), а на поверхности вращения — некоторая кривая (геодезическая линия). На рис. 1.6, *а* эта линия показана и на «плоскости» $\theta = \pi/2$. Видно, что она искривляется в ту же сторону, что и световой луч, за счет притяжения к

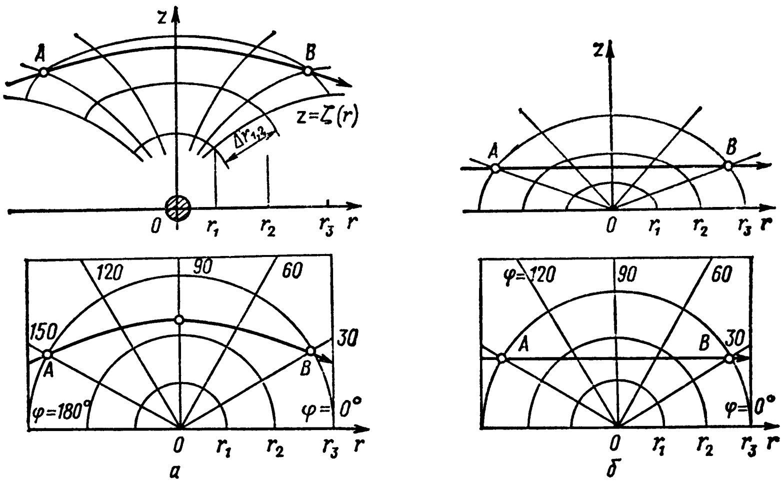


Рис. 1.6. Поверхность вращения $z = \zeta(r)$, которая имеет ту же метрику, что и «плоскость» $z = 0$ в поле тяготения (*а*), и та же поверхность (она вырождается в плоскость) в отсутствие гравитационного поля (*б*)

центру тяготения. Однако кривую AB не следует отождествлять со световым лучом, так как от координаты r зависит не только пространственная метрика, но и ход времени, определяемый коэффициентом $g_{00} = 1 - r_g/r$ в (1.17). В соответствии с принципом Ферма луч света распространяется по тому пути, вдоль которого время прохождения оказывается минимальным. Кривая же AB на рис. 1.6, *а* соответствует кратчайшему расстоянию. Оказывается, оба фактора (искривление пространства и изменение хода времени) действуют в одном и том же направлении и вызывают равные по величине эффекты. Это приводит к удвоению угла преломления по сравнению с тем значением, которое мы нашли, не учитывая искривления пространства. В этом легко убедиться, рассчитав скорость света c_g при различных значениях r. Положив в (1.17) θ, $\varphi = \text{const}$ и приравняв квадрат интервала ds^2 нулю, найдем

$$c_g = \frac{dr}{dt} = c\sqrt{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} = c\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) =$$

$$= c\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right). \qquad (1.25)$$

Мы специально записали подкоренное выражение в виде двух одинаковых множителей: один из них связан с изменением хода времени (в теории Ньютона учитывается только этот эффект), а другой — с искривлением пространства. Коэффициент преломления, соответствующий формуле (1.25),

$$n_g = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)^{-1} \simeq 1 - \frac{2\Phi}{c^2}. \qquad (1.26)$$

Сравнение этого выражения с (1.11) показывает, что отличие n_g от единицы за счет искривления пространства возрастает в два раза.

Здесь уместно снова подчеркнуть, что речь идет об эффективном показателе преломления и соответствующей ему скорости света c_g. Вообще, эти величины не имеют непосредственного физического смысла, в чем легко убедиться, рассмотрев мысленно эксперимент по определению скорости света в малой окрестности какой-либо точки с гравитационным потенциалом Ф. Если размеры измерительной установки достаточно малы, то можно считать $\Phi = \text{const}$. При этом коэффициенты g_{ik} являются постоянными величинами и их можно включить в пространственные и временные координаты, выбрав соответствующим образом масштабы. После этого квадрат интервала (1.15) записывается в форме, аналогичной (1.20):

$$ds^2 = c^2 dt_\Phi^2 - dl_\Phi^2. \tag{1.27}$$

Скорость света в собственных пространственно-временных координатах t_Φ и l_Φ равна всегда скорости света в вакууме c, что непосредственно следует из (1.27), если положить $ds = 0$ и определить dl_Φ/dt_Φ. Если подобный эксперимент произвести в «настоящей» среде с коэффициентом преломления n, то результат окажется, разумеется, иным: скорость света будет равна c/n.

Может возникнуть вопрос: если скорость света в точке с любым гравитационным потенциалом равна c, то как же происходит преломление луча? Ответ заключается в следующем: хотя скорость света и одинакова в разных точках, но пространственно-временные масштабы зависят от поля тяготения. Изменение масштабов и вызывает искривление луча. Этот эффект можно трактовать и иным способом, сохраняя масштабы, но считая, что скорость света соответствующим образом меняется, т. е. заменяя c на c_g.

Зная метрики g_{ik}, можно сразу записать основное уравнение геометрической оптики — уравнение эйконала, из которого определяется траектория луча. Оно имеет вид [16]

$$g^{ik} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^k} = 0, \tag{1.28}$$

где величины g^{ik} образуют контравариантный метрический тензор, обратный ковариантному тензору g_{ik}:

$$g_{ik} g^{kl} = \delta_i^l = \begin{cases} 0, & i \neq l; \\ 1, & i = l. \end{cases}$$

Выделяя в (1.28) временные и пространственные производные, получаем для слабых гравитационных полей

$$\frac{n_g^2}{c^2} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \right)^2 - (\nabla \mathcal{H})^2 = 0, \tag{1.29}$$

где $n_g(r)$ определяется по формуле (1.26). Таким образом, уравнение эйконала также подтверждает, что распространение света в гравитационном поле (в искривленном пространстве-времени) может рассматриваться как распространение света в обычном евклидовом пространстве, но заполненном некоторой «средой» с коэффициентом преломления n_g [16]. При этом формула (1.26) остается в силе и в отсутствие сферической симметрии, лишь бы выполнялось условие $|\Phi|/c^2 \ll 1$.

Точное решение Шварцшильда (1.17) позволяет исследовать ГЛ, создаваемые сильными полями тяготения, например черными дырами. Однако оно имеет существенное ограничение, связанное с тем, что в нем не допускается вращения гравитирующей массы. В то же время реальные ГЛ как правило создаются вращающимися объектами. Приближенное решение уравнений поля для вращающейся массы впервые было получено Лензе и Тиррингом в 1918 г. Точное же решение удалось найти Керру лишь в 1963 г. Метрика Керра определяется формулой [14]

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g r}{\rho^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta^2} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 -$$
$$-\left(r^2 + \rho_\Omega^2 + \frac{r_g r \rho_\Omega^2}{\rho^2} \sin^2\theta\right) \sin^2\theta d\varphi^2 + \frac{2 r_g r \rho_\Omega}{\rho^2} \sin^2\theta c d\varphi dt, \quad (1.30)$$

где введены следующие обозначения: $\rho^2 = r^2 + \rho_\Omega^2 \cos^2\theta$, $\Delta^2 = r^2 - r_g r + \rho_\Omega^2$, $\rho_\Omega = L/Mc$ — так называемый параметр Керра, имеющий размерность длины. Координаты r, θ, φ совпадают на бесконечности с обычными сферическими координатами, полярная ось которых ориентирована вдоль вектора момента импульса $\mathbf{L}$. Легко убедиться, что с точностью до членов первого порядка малости по $\rho_\Omega/r \ll 1$ (это справедливо вдали от вращающейся массы) метрика (1.30) отличается от метрики Шварцшильда (1.17) только членом

$$g_{\varphi t} c d\varphi dt \simeq \frac{2 r_g \rho_\Omega}{r} \sin^2\theta c d\varphi dt.$$

В декартовой же системе координат вдали от вращающегося тела отличие метрики Керра от (1.19) заключается в появлении слагаемых с $g_{0\alpha}$ ($\alpha = x, y, z$), из которых можно образовать трехмерный вектор с компонентами $\Gamma_\alpha = -g_{0\alpha}$ [14]:

$$\mathbf{\Gamma} = \frac{r_g \rho_\Omega}{r^2} \left[\frac{\mathbf{r}}{r}, \frac{\mathbf{L}}{L}\right]. \quad (1.31)$$

Введение эффективного показателя преломления для ГЛ, создаваемой вращающейся массой, связано с определенными трудностями, так как заранее ясно, что эффективная среда должна быть движущейся и анизотропной. Движение среды должно возникать в связи с увлечением окружающего пространства-времени во вращение вместе с вращающимся телом (эффект Лензе — Тирринга[10]), а анизотропия появляется вследствие существования выделенного направления — оси вращения гравитирующей массы.

Анализ законов распространения света в поле тяготения вращающейся массы базируется на уравнениях Максвелла, записанных для пространства-времени с произвольной метрикой. В четырехмерной

[10] Этот эффект возникает только в ОТО. В механике Ньютона он полностью отсутствует.

форме в отсутствие зарядов и токов эти уравнения имеют вид [14]

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g}\, F^{ik}) = 0,$$

где F_{ik} и F^{ik} — соответственно ковариантный и контравариантный тензоры электромагнитного поля, $g = \det \| g_{ik} \|$ — определитель метрического тензора (в реальном пространстве-времени $g < 0$).

Введя трехмерные векторные поля по схеме $F_{ik} \to (\mathbf{E}, \mathbf{B})$, $\sqrt{-g} \times F^{ik} \mapsto (-\mathbf{D}, \mathbf{H})$, можно получить систему уравнений, совпадающую с уравнениями Максвелла в некоторой среде [17—19]:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0. \end{aligned} \qquad (1.32)$$

Связь между «индукциями» **D** и **B** и напряженностями полей **E** и **H** следующая:

$$D_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta - [\mathbf{\Gamma}, \mathbf{H}]_\alpha, \quad B_\alpha = \mu_{\alpha\beta} H_\beta + [\mathbf{\Gamma}, \mathbf{E}]_\alpha. \qquad (1.33)$$

Здесь

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\beta} = -\sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}/g_{00}, \quad \Gamma_\alpha = -g_{0\alpha}/g_{00},$$

α, β — индексы пространственных координат. Путем пространственного поворота системы координат метрический тензор g^{ik} всегда можно преобразовать к виду, когда из недиагональных членов отличны от нуля только компоненты g^{01}, g^{02}, g^{03}. При этом для слабого поля тяготения, создаваемого медленно вращающимся телом ($v/c \ll 1$, где v — линейная скорость произвольной точки вращающегося тела), показатель преломления «среды», описываемой материальными уравнениями (1.33) [18]

$$n_g \simeq \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) + \mathbf{e}_s \mathbf{\Gamma}, \qquad (1.34)$$

где $\mathbf{e}_s$ — единичный вектор, направленный в каждой точке вдоль луча света, а вектор $\mathbf{\Gamma}$ определяется согласно (1.31). Дополнительное по сравнению с (1.26) слагаемое учитывает упомянутое выше увлечение во вращение окружающего пространства-времени. Благодаря ему возникает своеобразная анизотропия среды, так как коэффициент преломления теперь зависит от направления распространения света. Аналогичный эффект наблюдается и в «настоящей» движущейся среде, характеризуемой параметрами ε и μ. В инерциальной системе отсчета, относительно которой среда движется поступательно со скоростью $\mathbf{u}$, эффективный показатель преломления

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu} - \frac{\varepsilon\mu - 1}{c} \mathbf{e}_s \mathbf{u}. \qquad (1.35)$$

Видно, что формулы (1.34) и (1.35) имеют одинаковую структуру. Для того чтобы сопоставить их друг с другом, необходимо положить коэффициент преломления неподвижной среды $\sqrt{\varepsilon\mu}$ равным, как и раньше, $1 - 2\Phi/c^2$ и считать, что скорость увлечения $\mathbf{u} = -c^3\mathbf{\Gamma}/4\Phi$. Для сферически симметричного поля тяготения $\mathbf{u} = c\mathbf{\Gamma}r/2r_g$. Можно ввести также угловую скорость увлечения $\mathbf{\Omega}_{\text{увл}}$ с помощью соотношения $\mathbf{u} = [\mathbf{\Omega}_{\text{увл}}, \mathbf{r}]$, где

$$\mathbf{\Omega}_{\text{увл}} = \frac{G\mathbf{L}}{c^2 r^2 r_g}.$$

Параллельность векторов $\mathbf{\Omega}_{\text{увл}}$ и $\mathbf{L}$ свидетельствует о том, что «среда» вращается в ту же сторону, что и гравитирующее тело. Для однородного шара массой M, вращающегося, как целое с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$, $L = \frac{2}{5} MR^2\Omega$ и

$$\Omega_{\text{увл}} = \frac{1}{5}\frac{R^2}{r^2}\Omega.$$

Следует обратить внимание на дифференциальное вращение «среды». Чем больше расстояние r от центра тяготения, тем меньше скорость увлечения. При этом угловая скорость убывает так же, как сила притяжения: пропорционально r^{-2}. Линейная скорость u у самой границы вращающегося шара вблизи его экватора равна $\frac{1}{5}\Omega R$.

Дополнительное слагаемое в (1.34) очень мало, даже по сравнению с членом $2\Phi/c^2$ $(\mathbf{e}_s\mathbf{\Gamma}/(2\Phi/c^2) \sim \Omega R^2/cr \ll 1)$, и соответственно малы связанные с ним эффекты (вращение плоскости поляризации электромагнитной волны, связанное с кручением луча, и некоторые другие явления, о которых речь пойдет ниже). Например, для Солнца $\Omega R/c \sim 10^{-5}$, и поэтому при определении угла отклонения в гравитационном поле Солнца можно в первом приближении пользоваться формулой (1.26), т. е. не учитывать вращения.

Таким образом, формулы, справедливые в слабых гравитационных полях медленно вращающихся тел, имеют вид

$$\frac{d\Theta}{ds} = 2c^{-2}\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial r}, \tag{1.36}$$

$$\Theta_g = \frac{2r_g}{p}. \tag{1.37}$$

Если луч света проходит вблизи поверхности Солнца, имеем

$$\Theta_{g\odot} = 2r_g/R_\odot = 8{,}44 \cdot 10^{-6}\ \text{рад} = 1{,}75''. \tag{1.38}$$

Этот результат был впервые получен Эйнштейном в 1915 г. [10] и несколько позже, в 1916 г., рассмотрен им же более подробно [20]. Таким образом, к указанному времени имелось два значения угла $\Theta_{g\odot}$. Одно из них [5] (0,87″), полученное ранее, соответствовало теории тяготения Ньютона, а второе (1,75″) вытекало из ОТО. В этих условиях небывало возрастала роль эксперимента: «Было бы крайне желательным, чтобы астрономы заинтересовались поставленным здесь вопросом, даже и в том случае, если бы предыдущие рассуждения казались недостаточно обоснованными или фантастическими. В самом деле, независимо от всякой теории, возникает вопрос: можно ли вообще современными средствами установить влияние гравитационных полей на распространение света» [9]. К этому необходимо добавить, что в описываемое время делались и иные попытки построения теории тяготения. В частности, теория Нордстрема была, как считал сам Эйнштейн, «...более проста и с точки зрения первоначальной теории относительности более очевидна» [21], так как в ней сохранилось фундаментальное предположение о неизменности скорости света. «Выбор между двумя теориями должен быть сделан на основе сравнения с опытом, поскольку согласно теории Эйнштейна — Гроссмана [11], в противоположность теории Нордстрема, гравитационное поле должно приводить к искривлению световых лучей. Поскольку единственным гравитационным полем, которое может дать наблюдаемое в опыте искривление света, является гравитационное поле Солнца, предпринимается тщательная подготовка к солнечному затмению в августе 1914 г.: фотоснимки неподвижных звезд, близких к краю солнечного диска, должны установить, действительно ли существует искривление световых лучей» [21].

§ 1.4. Эксперименты, подтверждающие влияние гравитационного поля Солнца на распространение света и радиоволн

Первая попытка проверить предсказанное в 1911 г. Эйнштейном преломление лучей света вблизи края диска Солнца была предпринята немецким астрономом Финлей — Флейндлихом. Он изучил все имевшиеся в его распоряжении фотографические снимки полных солнечных затмений и постарался обнаружить смещения звезд, оказавшихся во время затмения недалеко от Солнца. Успеха он не добился. Очередное затмение должно было произойти в 1914 г., причем с благоприятными. условиями видимости на территории России. Сюда и направилась экспедиция немецких ученых, но началась война, участники экспедиции были интернированы, наблюдения не состоялись. Если бы измерения были проведены и смещения звезд удалось обнаружить, то результаты опровергли бы теорию Эйнштейна, так как расчеты того времени приводили к значению $\Theta_{g\odot} = 0{,}87''$. В 1915 г. был получен новый результат $1{,}75''$, и значение будущих экспериментов еще более возросло. По существу на их основании предстояло сделать выбор между теорией тяготения Ньютона и новой теорией Эйнштейна. Война нарушила научные контакты, и результаты работ по ОТО не были доступны для физиков враждебной стороны. Тем не менее в 1916 г. голландский астроном де Ситтер (Голландия была нейтральной страной) отправил работу Эйнштейна в Англию своему коллеге Эддингтону. Статья с объяснениями ОТО произвела на Эдингтона большое впечатление, и он вместе с королевским астроно-

---

[11] Речь идет о незавершенной ОТО.

мом Дайсоном начал готовить две экспедиции специально для наблюдения смещения звезд во время полного солнечного затмения 1919 г.

Прежде чем рассказать подробнее о полученных результатах, остановимся немного на методике измерений, чтобы стали понятны те трудности, которые предстояло преодолеть [22].

Звезду вблизи края Солнца нельзя наблюдать даже во время полного затмения вследствие яркой внутренней солнечной короны. В лучшем случае удается сфотографировать звезду на расстоянии примерно одного радиуса Солнца от края, что дает отклонение 0,9″, а в линейной мере при фокусном расстоянии объектива телескопа $F \simeq 6$ м — около 25 мкм. Каталожные данные положения звезд недостаточно точны, чтобы можно было, сверяясь с ними, заметить такое малое смещение. Поэтому приходится фотографировать те же звезды, когда Солнце уходит далеко от них, а это лучше всего сделать с интервалом полгода до или после затмения. Снимок сравнения обычно делают, помещая фотопластинку стеклянной стороной к объективу, чтобы потом можно было сложить сравниваемые пластинки слой к слою. Однако за несколько месяцев состояние инструмента, в частности в результате влияния температуры окружающей среды, может измениться, что приведет к различным масштабам снимков. Если снимок охватывает поле звезд $3° \times 3°$, то, считая допустимой погрешностью за счет изменения масштаба величину 0,05″, требуется сохранить через полгода расстояние от объектива до фотопластинки с точностью до нескольких десятков микрон.

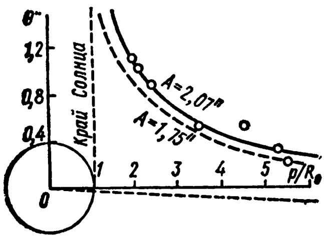
При совмещении центров двух сравниваемых снимков масштабная погрешность будет возрастать по мере удаления от Солнца. Поэтому наблюдаемые угловые смещения сравнивают с предполагаемой аналитической зависимостью такого вида:

$$\Theta(p) = \frac{A}{p} + Bp.$$

Вообще, определению подлежит только постоянная A, характеризующая преломление световых лучей. Однако вследствие изменения масштаба приходится находить и вторую константу B, вес которой в измеряемой величине $\Theta(p)$ возрастает по мере удаления от Солнца.

Затмение 29 мая 1919 г. должно было быть особенно благоприятным для измерений, поскольку Солнце в это время оказывалось вблизи звездного скопления Гиад, где имеется много ярких звезд. Английские астрономы организовали две экспедиции. Одна из них отправилась в Собриль на север Бразилии, а вторая — на остров Принсипи в Гвинейском заливе у берегов Африки. Наблюдениям на острове Принсипи немного помешала облачность [12], но изображения звезд на фотоснимке удалось все же получить. Найденное значение A оказалось равным $1{,}65'' \pm 0{,}45''$. Больший успех выпал на долю экспедиции в Бразилии. Здесь были сделаны снимки с помощью телескопа с фокусным расстоянием 5,8 м. Снимок сравнения был получен спустя два месяца после затмения. Отчетливо зафиксировано семь звезд от 4,5 до 6 звезд-

[12] В официальном отчете Эддингтон писал: «... с 10 мая не было дождей, за исключением утра в день затмения Солнца» (цит. по [23]).



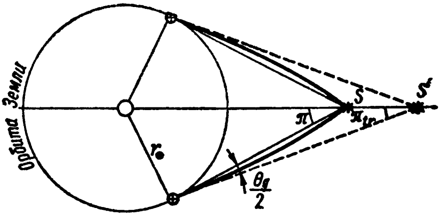


Рис. 1.7. Смещение положений звезд во время солнечного затмения 29 мая 1919 г. (штриховая прямая — масштабная поправка)

Рис. 1.8. Кажущееся изменение параллакса звезды вследствие гравитационного искривления лучей (S — наблюдаемая звезда, S' — кажущееся положение звезды)

ных величин, из которых ближайшая была на расстоянии приблизительно $2R_\odot$ от центра тяготения (рис. 1.7)[13]. После обработки результатов по методу наименьших квадратов получено $A = 1{,}98'' \pm 0{,}18''$. В 1937 г. вычисления еще раз перепроверили и получили следующие результаты: $A = 1{,}95'' \pm 0{,}09''$ (без масштабной поправки), $A = 2{,}07'' \pm 0{,}13''$ (с учетом масштабной поправки).

Таким образом, было доказано существование эффекта искривления световых лучей и его соответствие результатам ОТО. После этих наблюдений теория относительности привлекла внимание широкой публики и стала знаменитой [24].

В дальнейшем подобного рода наблюдения проводились неоднократно, и к концу 60-х годов накопилось уже около 380 изображений звезд во время полных солнечных затмений [25]. Отличия от расчетного значения $\Theta_{g\odot} = 1{,}75''$ составляют в среднем 20%, что и является, по-видимому, предельной точностью затменных наземных оптических измерений.

К сожалению, затмения Солнца бывают не так часто, а продолжительность их очень мала. Естественно, возникает мысль: нельзя ли обнаружить гравитационное искривление лучей света каким-нибудь иным способом? С таким вопросом еще в 1913 г. Эйнштейн обратился в письме к известному американскому астроному Хейлу. Ответ был отрицательным, и долгие годы казалось, что никаких иных данных наблюдений не существует. Однако в 1968 г. советские ученые Л. Я. Арифов и Р. К. Кадыев обратили внимание на одну особенность годичных звездных параллаксов, которая будто бы могла рассматриваться как дополнительный аргумент в пользу ОТО [26, 27].

Напомним, что годичным параллаксом π называют угол, под которым со звезды виден радиус (точнее — большая полуось) земной орбиты. На рис. 1.8 показана обычная схема, поясняющая изменение направления на звезду в течение шести месяцев за счет параллакса, и влияние на этот эффект гравитационного искривления лучей. Действие гравитационного поля Солнца приводит к тому, что найденный по угловым измерениям годичный параллакс (он носит название

[13] Рис. 1.7. взят из обзора А. А. Михайлова [22], где наряду с затмением 1919 г. описаны результаты наблюдений еще пяти затмений вплоть до 1952 г.

тригонометрического параллакса π_{tr}) окажется меньше истинного π на величину $\Theta_g/2$ [14]:

$$\pi_{tr} = \pi - \Theta_g/2, \qquad (1.39)$$

где $\Theta_g \simeq 2r_g/r_{\otimes}$ ($r_{\otimes}$ — радиус земной орбиты, эклиптическая широта звезды считается близкой к 90°). Поскольку удаление звезды в парсеках равно $1/\pi$, то способ определения межзвездных расстояний по ее тригонометрическому параллаксу дает, вообще, завышенный результат (см. рис. 1.8). Прежде всего ставится вопрос: существенна ли возникающая при этом ошибка? Обычная точность определения параллакса характеризуется вероятной ошибкой $\pm$ 0,008″, и лишь отдельные лучшие определения имеют вероятную ошибку $\pm$ (0,002″—0,003″) [28]. В то же время угол Θ_g для прицельного параметра, равного радиусу земной орбиты, составляет 0,008″, т. е. погрешность $\Theta_g/2$ лежит в большинстве случаев в пределах вероятной ошибки. Однако в ближайшее время предполагается осуществить очень точные астрометрические измерения на специальном астрономическом спутнике «Гиппаркос» [15]. С его помощью погрешность в определении параллаксов снизится до 0,001″ и учет гравитационного искривления лучей в Солнечной системе станет совершенно необходимым.

Суть предложения Л. Я. Арифова и Р. К. Кадыева заключается в следующем: пользуясь формулой (1.39), можно найти угол Θ_g, если каким-нибудь независимым путем найти расстояние до звезды, затем сравнить истинный параллакс звезды π с наблюдаемым π_{tr}. В качестве независимого способа предлагается фотометрический метод определения расстояний, основанный на том, что видимый блеск одинаковых светил может служить мерой их удаления. Таким образом, используя особенности спектров звезд, определяют, в частности, спектральные параллаксы π_{sp}, которые, казалось бы, никак не связаны с гравитационным искривлением лучей. На самом деле косвенная связь здесь все же существует, так как шкала расстояний, соответствующих π_{sp}, совмещается со шкалой расстояний, определяемых по π_{tr} с помощью тех сравнительно близких звезд, для которых удается реализовать оба метода,

Упомянутые авторы выбрали из каталожных данных 135 звезд, для которых π_{sp} и π_{tr} определены с одинаковой точностью. Отождествляя π_{sp} с истинным параллаксом π, они рассчитали среднюю разность $\pi - \pi_{tr}$, которая оказалась близкой к 0,004″, что согласно (1.39) соответствует данным ОТО. Однако столь точное совпадение представляется нам по ряду причин скорее случайным, чем правильным. Во-первых, отождествление π_{sp} и π является спорным ввиду того совмещения шкал π_{sp} и π_{tr}, которое отмечалось выше. Далее,

[14] Мы придерживаемся старых обозначений: Θ_g — угол между двумя асимптотами гиперболы. Параллакс изменяется на половину этого угла.

[15] Хотя название спутника удачно сочетается с именем Гиппарха — древнегреческого астронома, составившего один из первых звездных каталогов, однако оно расшифровывается так: HIPPARCOS — High Precision Parallax Collecting Satellite.

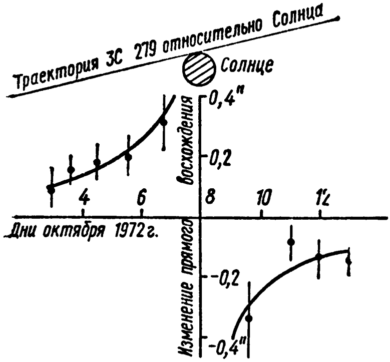
значение разности $\pi_{sp} - \pi_{tr}$ лежит в пределах вероятной ошибки, и ее достоверность, таким образом, невелика. И, наконец, выборка из 135 звезд очень мала (всего к настоящему времени (1985 г.) выполнено более 20 000 определений π_{tr} для $\sim$15 000 звезд).

Мы также не можем согласиться с тем, что формула (1.39) объясняет наблюдаемые иногда отрицательные параллаксы $\pi_{tr} < 0$. Например, в Общем каталоге тригонометрических параллаксов звезд 1952 г. из 5 822 параллаксов 715 звезд имеют $\pi_{tr} < 0$. Дело в том, что с уменьшением параллакса увеличивается его относительная ошибка, что, в свою очередь, повышает вероятность появления отрицательных значений. При ошибке, равной самой измеряемой величине, 16 % всех определений могут оказаться отрицательными. Еще одной возможной причиной появления отрицательных π_{tr} может стать случайное включение в число опорных звезд [16] одной-двух близких звезд [28].

Заметный скачок в повышении точности измерений угла Θ_g произошел в связи с развитием радиоастрономии и радиолокационной техники. Первые успешные измерения гравитационного отклонения радиоволн сантиметрового диапазона были выполнены в 1969 г. и с тех пор производились неоднократно. Для этой цели нередко используют квазар 3*C* 279, который 8 октября каждого года проходит вблизи солнечного диска. Этот источник удобен еще и тем, что в 10° от него расположен квазар 3*C* 273, который используется в качестве реперного. Измерение угла между указанными источниками во время приближения 3*C* 279 к Солнцу дает возможность измерить гравитационное искривление радиолуча. Для иллюстрации первичных экспериментальных данных на рис. 1.9 показано, как изменяется прямое восхождение источника 3*C* 279 в период «затмения» его Солнцем [29]. Преимущество радионаблюдений по сравнению с оптическими заключается не только в том, что их можно выполнять регулярно, не дожидаясь солнечного затмения, но и в значительно большей точности угловых измерений. Последнее обстоятельство связано с развитием сети радиоинтерферометров, базы которых в настоящее время достигли уже межконтинентальных расстояний, а точности измерения углов в сантиметровом диапазоне приближаются к 0,0001″. В первых экспериментах 1969—1970 гг. на базах 2—20 км и длинах волн $\lambda \sim$ $\sim$ 6—12 см гравитационное отклонение было измерено с точностью примерно 15 %, в 1974 г. база возросла до 800 км, а погрешность снизилась до 6 % [30]. К началу 80-х годов данные ОТО были подтверждены с точностью 0,5 % измеряемой величины 1,75″ [31].

В 1964 г. И. Шапиро был предложен эксперимент, в котором используется эффект той же самой природы, что и искривление лучей, но техника измерений совершенно иная [25, 27]. Идея новой методики сводится к следующему. Дополнительный коэффициент преломления, связанный с гравитацией, можно определить, измерив время про-

[16] Наземные наблюдения не позволяют произвести абсолютные угловые измерения с требуемой точностью. Тригонометрические параллаксы определяют по видимым смещениям сравнительно близких звезд на фоне более удаленных светил, которые и называются опорными.



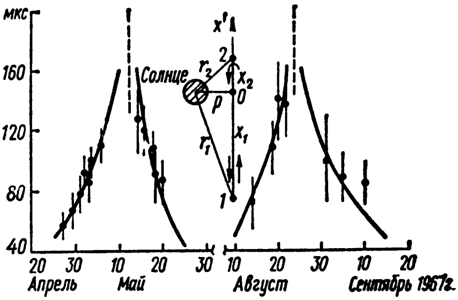


Рис. 1.9. Изменение прямого восхождения квазара 3С 279 за счет гравитационного поля Солнца (сплошные кривые — расчет по ОТО)

Рис. 1.10. Схема измерений (*1* — Земля, *2* — Меркурий) и избыточная задержка сигнала при радиолокации Меркурия (сплошные кривые — расчет по ОТО)

хождения радиосигнала между пунктами, расположенными по разные стороны от Солнца. Эксперимент стал возможным только в 60-х годах, когда удалось осуществить радиолокацию Венеры и Меркурия и с высокой точностью измерить время прохождения импульса на трассе Земля — лоцируемая планета. Схема измерений и их результаты представлены на рис. 1.10, взятом из [32]. Время радиолокационной задержки сигнала, посланного с Земли (точка *1*) и отраженного от Меркурия (точка *2*),

$$t = \frac{2}{c}\int\limits_{-x_1}^{x_2} n_g(x)\,dx.$$

Время задержки следует определять не по фазовой скорости $v_ф = c/n_д$, а по групповой: $v_{гр} = d\omega/dk$ (k — волновое число). Однако введенный выше коэффициент преломления не зависит от частоты, и поэтому $v_{гр} \equiv v_ф$. Здесь снова проявляется отличие от «настоящей» среды, в которой скорость света изменяется вследствие возникновения вторичных волн, порождаемых движущимися зарядами. В силу инерции носителей заряда их влияние зависит от частоты волны, и в общем случае $v_ф \neq v_{гр}$. Полное отсутствие дисперсии также указывает на условность эффективного (можно сказать — фиктивного!) коэффициента преломления, описывающего влияние гравитационного поля. Используя формулу (1.26), которая в сферически симметричном поле приобретает вид

$$n_g(r) = 1 + \frac{r_g}{r},$$

представим t в виде суммы $t_0 + \delta t$, где $t_0 = 2\,(x_1 + x_2)/c$ — время радиолокационного запаздывания в свободном пространстве, а

$$\delta t = \frac{2r_g}{c}\int\limits_{-x_1}^{x_2} \frac{dx}{r(x)} \qquad (1.40)$$

есть дополнительное запаздывание, связанное с влиянием поля тяготения Солнца. Гравитационные поля Земли и Меркурия дают очень малый вклад в δt, и их можно не учитывать. Обратим еще раз внимание на то, что дополнительная задержка сигнала, проходящего вблизи Солнца, так же, как и преломление луча, возникает только потому, что все измерения производятся в масштабах наземного наблюдателя. Если на каждом небольшом участке траектории луча определять скорость в собственных пространственно-временных координатах, то не возникает никакой дополнительной задержки и ошибок в определении направления луча.

Если радиолокация осуществляется в то время, когда планеты располагаются вблизи дальнего соединения (Солнце попадает между ними), то можно считать $p \ll x_1, x_2$. Вычисление δt в указанных условиях приводит к следующей формуле:

$$\delta t \simeq \frac{2r_g}{c} \ln \frac{4x_1x_2}{p^2} . \tag{1.41}$$

Положив для оценки ожидаемой величины $x_1 \sim x_2 \sim 10^8$ км, $p \sim \sim R_\odot = 7 \cdot 10^5$ км, $r_g \sim 3$ км, получим $\delta t \sim 200$ мкс. В то же время основное время запаздывания $t_0 \sim 10^3$ с, т. е. $\delta t/t_0 \sim 10^{-7}$. Для современных радиотехнических устройств такая точность вполне допустима, но реализовать ее не очень просто. Основная трудность станет понятной, если сопоставить с рассчитанным значением δt расстояние $\delta r = c\delta t \sim 60$ км. С такой точностью надо знать координаты передатчика и отражателя, чего нельзя достичь хотя бы вследствие неопределенности в положении «точки» отражения. Практически во время эксперимента, измеряя время задержки при разных положениях планет, не только определяют δt, но и уточняют значения x_1, x_2. Так, например, в первых опытах конца 60-х годов по локации Венеры и Меркурия с помощью ЭВМ учитывалось 300 начальных траекторных данных, 400 радарных и 6000 оптических измерений. Точность расчетов была порядка 10^{-10}, а наиболее точных измерений — порядка $5 \cdot 10^{-9}$ (погрешность определения δt около 10 мкс). Укажем также радиотехнические параметры используемой установки. Передатчик, стабилизированный водородным мазером, работал на частоте $f = 7{,}84$ ГГц ($\lambda = 3{,}8$ см) фактически в непрерывном режиме (длительность импульса достигала 30 мин). Излучаемая мощность была равна 300 кВт, а мощность отраженного сигнала составляла порядка 10^{-21} Вт [27]. Если в первых экспериментах точность измерений приближалась к 20 %, то к концу 60-х годов она составляла примерно 5 %. Дальнейшее увеличение точности было достигнуто благодаря использованию активных ретрансляторов на космических аппаратах «Маринер» и «Викинг», выведенных на орбиты спутников Марса. В экспериментах с «Маринером-9» погрешность не превышала 2 %, а с орбитальным модулем «Викинга» — 0,2 % [25]. Это, по-видимому, наивысшая точность, которую удалось достичь к началу 80-х годов при проверке формул ОТО в гравитационном поле Солнца.

В заключение отметим любопытную особенность экспериментов с определением времени запаздывания по сравнению с наблюдениями искривлений лучей света. Выше было показано, что преломление луча, рассчитанное в рамках ньютоновской механики, происходит в том же направлении, что и в ОТО, но различается по величине в два раза. Что касается времени запаздывания, то расчет скорости «световых частиц» с помощью классических уравнений движения приводит к эффекту другого знака: «частица» за счет притяжения Солнца пролетает по трассе, указанной на рис. 1.10 при $x_1 \simeq x_2$, быстрее, чем в свободном пространстве!

Глава 2

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА ГРАВИТАЦИОННЫХ ЛИНЗ

§ 2.1. Сферически симметричная ГЛ с непрозрачным ядром, коэффициент усиления

Начнем с рассмотрения ГЛ, которые возникают в поле тяготения непрозрачных небесных тел (Солнце, звезды). В этом случае излучение фокусируется только внешними гравитационными полями и для сферически симметричного распределения масс потенциал $\Phi(r)$ определяется точно так же, как и для точечной массы:

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r}, \quad r \geqslant R$$

(M — полная масса небесного тела радиуса R). Подставив это выражение в формулу (1.26) для эффективного показателя преломления, получим

$$n_g = 1 + \frac{r_g}{r}. \tag{2.1}$$

Эта формула служит основой для построения геометрической оптики ГЛ. Введя эффективный показатель преломления, можно забыть о гравитационных полях, изменении хода времени и неевклидовости метрики, а просто рассматривать пространство вокруг небесного тела как преломляющую среду и использовать обычную геометрическую оптику.

Траектории лучей легко определяются с помощью закона Снеллиуса для сферически-слоистых сред

$$n_g(r)\, r \sin \nu(r) = \mathrm{const} \tag{2.2}$$

(ν, как и ранее, — угол между радиус-вектором $\mathbf{r}$ и касательной к лучу $\mathbf{e}_s$). Известно, что траектории лучей, распространяющихся в сферически-слоистой среде, лежат в плоскостях, проходящих через источник и центр симметрии среды (центр ГЛ). Поэтому достаточно рассмотреть траекторию луча в одной из таких меридиональных плоскостей. В точке, где луч подходит ближе всего к притягивающему центру, $r = r_{\min}$, $\nu = \pi/2$. Поэтому правая часть в (2.2) равна $n_g(r_{\min})\, r_{\min}$. Эту величину в дальнейшем для краткости будем обозначать $n_{gm} r_m$. Для кривой, заданной в полярных координатах r и θ, наклон касательной к радиус-вектору находят по формуле

$$\sin \nu = \frac{r(\theta)}{\sqrt{r^2(\theta) + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}}. \tag{2.3}$$

Подставив это выражение в (2.2), получим связь между r и θ, т. е. уравнение луча

$$\theta = n_{gm} r_m \int_{r_m}^{r} \frac{dr}{r\sqrt{n_g^2(r)\, r^2 - n_{gm}^2 r_m^2}}. \tag{2.4}$$

Полярный угол θ отсчитывается от того направления, где $r = r_m$. Далее необходимо использовать формулу (2.1) и выполнить интегрирование в (2.4). При этом будем удерживать только линейные по r_g/r_m члены, рассматривая по-прежнему слабые поля. В дальнейшем значения, пропорциональные $(r_g/r_m)^2$, отбрасываются без специальных оговорок. После интегрирования (2.4) уравнение луча приобретает вид [16]

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{n_{gm} r_m}\left(\cos\theta + \frac{r_g}{n_{gm} r_m}\right), \tag{2.5}$$

что соответствует гиперболической траектории (рис. 2.1, *а*). Направления асимптот гиперболы можно найти, если перейти в (2.5) к пределу $r \to \infty$:

$$\cos\theta = -\frac{r_g}{n_{gm} r_m}. \tag{2.6}$$

Уравнение (2.6) имеет два корня:

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{r_g}{n_{gm} r_m}, \quad \theta_2 = -\frac{\pi}{2} - \frac{r_g}{n_{gm} r_m}.$$

Следовательно, угол между асимптотами $\theta_1 - \theta_2 = \pi + 2r_g/n_{gm}r_m$. Отличие этого значения от π представляет собой угол преломления $\Theta_g = 2r_g/n_{gm}r_m$. Для того чтобы сравнить полученный результат с найденным ранее выражением $\Theta_g = 2r_g/p$, необходимо определить прицельный параметр луча, заданного уравнением (2.5). Он равен длине перпендикуляра, опущенного из центра на асимптоту восходящего участка гиперболы, и вычисляется по формуле

$$p = \left(\frac{r^2}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}}\right)_{r\to\infty}$$

Производя необходимые расчеты с помощью (2.5), находим $p = n_{gm} r_m$. Таким образом, как и должно быть, $\Theta_g = 2r_g/p$. Замечая, что $n_{gm} r_m = (1 + r_g/r_m) r_m = r_m + r_g$, получаем еще одно полезное соотношение: $p = r_m + r_g$. Поскольку $p \gg r_g$, можно считать $p \approx r_m$, т. е. прицельный параметр и минимальное расстояние от луча до центра притяжения почти равны друг другу.

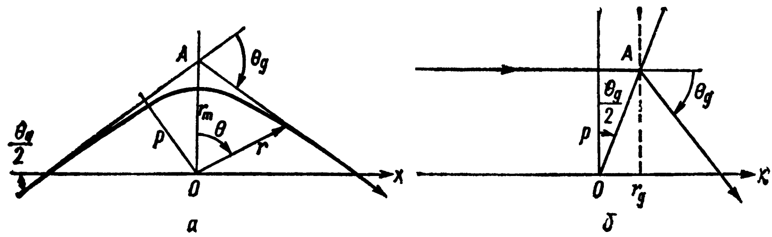


Рис. 2.1. Замена истинной траектории луча (*а*) ее прямолинейными асимптотами (*б*)

Во всех проявлениях гравитационной фокусировки источник излучения и наблюдатель находятся на очень больших расстояниях от небесного тела, создающего ГЛ. Поэтому при геометрических расчетах можно заменить гиперболу (2.5) ее асимптотами. Иными словами, можно считать, что луч распространяется по прямой линии до точки A, потом преломляется на угол Θ_g и снова идет по прямой.

В дальнейшем будем рассматривать падающий на ГЛ поток параллельных лучей. Для их описания целесообразно ориентировать ось x параллельно падающим лучам, т. е. развернуть всю картину по часовой стрелке на угол $\Theta_g/2$. Тогда точка пересечения асимптот сместится вдоль оси x на величину $p \operatorname{tg} (\Theta_g/2) \approx p \frac{\Theta_g}{2} = r_g$ (рис. 2.1, *б*). Поскольку это смещение не зависит от p, все падающие лучи преломляются на плоскости $x = r_g$. Однако столь малое смещение можно, разумеется, не учитывать и, описывая ход лучей в ГЛ, совмещать плоскость преломления с центром линзы (рис. 2.2, *а*). Для учета всей совокупности лучей введем в рассмотрение векторный прицельный параметр $\mathbf{p}$ и векторный угол преломления $\boldsymbol{\Theta}_g (\mathbf{p})$, отсчитываемые в плоскости ГЛ. Так как траектории лучей лежат в меридиональных плоскостях, ясно, что угол $\boldsymbol{\Theta}_g$ ($\mathbf{p}$) всегда направлен к центру ГЛ:

$$\boldsymbol{\Theta}_g (\mathbf{p}) = - \frac{2r_g}{p} \frac{\mathbf{p}}{p}. \qquad (2.7)$$

Аналогичным образом для обычной линзы можно записать

$$\boldsymbol{\Theta}_0 (\mathbf{p}) = - \frac{\mathbf{p}}{F}. \qquad (2.8)$$

Заметим, что рассмотренные ранее скалярные углы Θ_g и Θ_0 соответственно равны модулям векторных углов $\boldsymbol{\Theta}_g$ и $\boldsymbol{\Theta}_0$.

Термин «гравитационная линза» (ГЛ) вызывает ассоциацию с обычной линзой (ОЛ). Однако благодаря разным законам преломления лучей их оптические свойства отличаются друг от друга. Это проявляется прежде всего в аберрационной зависимости, которая каждому значению прицельного параметра p в плоскости апертуры линзы ставит в соответствие отклонение луча ρ от оси симметрии после преломления в линзе. Значение ρ зависит от расстояния до линзы и при малых углах преломления определяется по формулам:

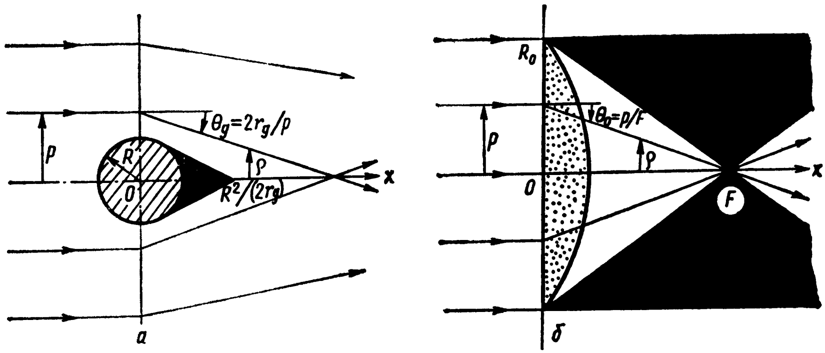


Рис. 2.2. Преломление лучей и области тени в гравитационной (*а*) и обычной (*б*) линзах

для ГЛ

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{p}, x) = \mathbf{p} + x\boldsymbol{\Theta}_g(\mathbf{p}) = \mathbf{p} - \frac{2r_g x}{p^2}\mathbf{p}; \tag{2.9}$$

для ОЛ

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{p}, x) = \mathbf{p} + x\boldsymbol{\Theta}_0(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\left(1 - \frac{x}{F}\right). \tag{2.10}$$

Двумерные векторы $\mathbf{p}$ и $\boldsymbol{\rho}$, лежащие соответственно в плоскости $x = 0$ и плоскости наблюдения, будем описывать полярными координатами $\mathbf{p} = (p, \varphi)$ и $\boldsymbol{\rho} = (\rho, \varphi_\rho)$, где азимутальные углы φ и φ_ρ отсчитываются от оси y.

Из (2.10) следует, что в ОЛ луч пересекает ось x в точке $x = F$ (рис. 2.2, *б*) при любых значениях $\mathbf{p}$. Следовательно, все лучи сходятся в одной точке (фокусе линзы). В ГЛ ситуация совсем иная. Из условия $\rho = 0$ согласно (2.9) следует:

$$x = \frac{p^2}{2r_g}, \tag{2.11}$$

т. е. при изменении p от $p_{\min} = R$ до бесконечности точки пересечения лучей заполняют всю полуось $x \geqslant x_{\min} = R^2/2r_g$. Иными словами, ГЛ вместо определенного фокусного расстояния имеет фокальную полуось. Используя формулы (2.9) и (2.10), следует помнить, что значение p для ОЛ ограничено сверху размерами апертуры линзы R_0 $(0 \leqslant p \leqslant R_0)$, а в ГЛ p может быть сколь угодно большим, но ограничено снизу радиусом фокусирующей звезды R $(R \leqslant p \leqslant \infty)$.

Рассчитаем интенсивность сфокусированного излучения $\mathcal{J}(x, \boldsymbol{\rho})$. Для этого, прежде всего, использовав формулы (2.9) и (2.10), определим прицельные параметры лучей, приходящих в точку наблюдения, смещенную на величину $\boldsymbol{\rho}$ от оси x:

для ГЛ

$$\mathbf{p}_{1,2}(\boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{\rho}\left[\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2r_g x}{\rho^2}}\right]; \tag{2.12}$$

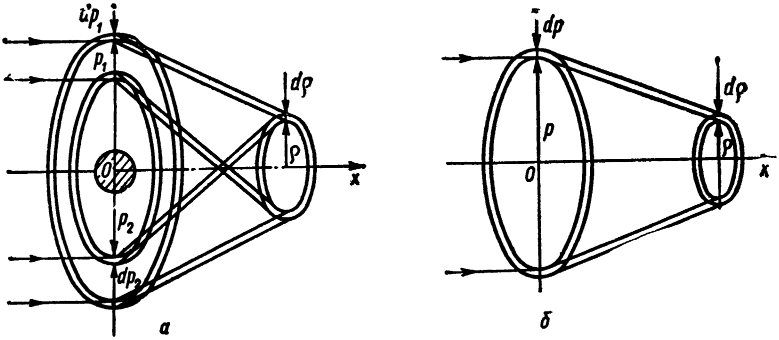


Рис. 2.3. Связь между входными и выходными апертурами в гравитационной (a) и обычной ($б$) линзах

для ОЛ

$$p(\rho) = \frac{\rho}{1 - \frac{x}{F}}. \tag{2.13}$$

В ОЛ имеется взаимно однозначное соответствие между p и ρ (исключая фокальную плоскость $x = F$), а в ГЛ каждому значению ρ соответствуют два параметра p, которые характеризуют лучи, огибающие звезду-линзу с противоположных сторон (рис. 2.3).

Искомая интенсивность $\mathcal{J}(x, \rho)$ определяется из закона сохранения энергии внутри лучевой трубки:

$$\mathcal{J}^{(0)}\Sigma_{вх} = \mathcal{J}(x, \rho)\, 2\pi\rho d\rho, \tag{2.14}$$

где $\mathcal{J}^{(0)}$ — интенсивность падающего излучения, $\Sigma_{вх}$ — площадь входной апертуры, соответствующая кольцу $2\pi\rho d\rho$ в плоскости наблюдения:

$$\Sigma_{вх} = \begin{cases} 2\pi(p_1 dp_1 + p_2 |dp_2|) \quad (\text{для ГЛ}); & (2.15) \\ 2\pi p dp = \dfrac{2\pi\rho d\rho}{\left(1 + \frac{x}{F}\right)^2} \quad (\text{для ОЛ}). & (2.16) \end{cases}$$

Записав закон сохранения энергии в форме (2.14), мы учли осевую симметрию всей совокупности лучей, что исключает зависимость от угловой координаты. С помощью формул (2.12) — (2.16) определяются $\mathcal{J}(x, \rho)$ и энергетический коэффициент усиления линзы $q = \mathcal{J}(x, \rho)/\mathcal{J}^{(0)} = \sum_{i=1}^{2} \frac{p_i}{\rho}\left|\frac{dp_i}{d\rho}\right|$. Произведя необходимые вычисления, получим

$$q(x, \rho) = \begin{cases} \dfrac{l}{\rho} \dfrac{\frac{\rho^2}{2l^2} + 1}{\sqrt{\frac{\rho^2}{4l^2} + 1}} \quad (\text{для ГЛ}); & (2.17) \\ \dfrac{1}{\left(1 - \frac{x}{F}\right)^2} \quad (\text{для ОЛ}). & (2.18) \end{cases}$$

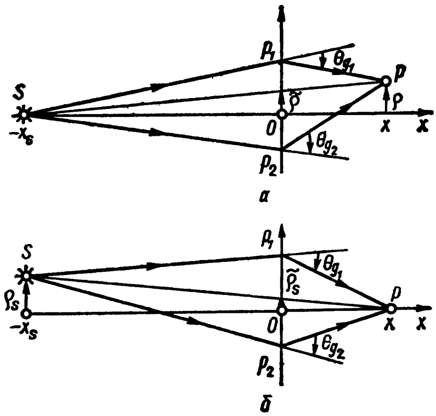


Рис. 2.4. Траектории лучей, идущих от источника, находящегося на конечном расстоянии от ГЛ, при различных ориентациях оси x:

а — ось совмещена с источником S; *б* — ось совмещена с наблюдателем P

Здесь $l = \sqrt{2r_g x}$ — параметр с размерностью длины, играющий важную роль в геометрической оптике ГЛ. Формулы (2.17) и (2.18) справедливы только в освещенной области, которая для ОЛ находится внутри двух конусов, имеющих общую вершину в точке $x = F$, а для ГЛ — вне конуса с вершиной в точке $x = R^2/2r_g$. Если ρ попадает в затененную область (см. рис. 2.2), надо полагать $q = 0$. Выражение (2.17) было впервые получено Эйнштейном в 1936 г. [33] и независимо от него, но несколько позже Г. А. Тиховым [34]. Если же говорить о самых первых публикациях, в которых отмечалась возможность гравитационной фокусировки, то таковыми являются, по-видимому, работы Лоджа (1919) [35] и Эддингтона (1920), [36], хотя расчетов коэффициента усиления авторы не проводили. Кроме того, Лодж возражал против самого термина «линза», а Эддингтон, хотя и указал на возможность появления двух изображений одной звезды, сделал неправильные выводы об уменьшении их яркости.

На заданном расстоянии x коэффициент усиления ОЛ согласно (2.18) не зависит от ρ, т. е. линза создает равномерную интенсивность излучения по всему сечению освещенной области. Только при $x = F$ значение $q \to \infty$ и на оси линзы в фокальной плоскости возникает изображение бесконечно удаленного точечного источника, создающего поток параллельных лучей.

Совсем иная картина характерна для распределения интенсивности излучения после прохождения ГЛ. Из (2.17) следует, что при $\rho \to 0$ всегда $q \to \infty$, т. е. изображение бесконечно удаленной точки может наблюдаться на оси на любом расстоянии от линзы. Можно сказать, что ОЛ перераспределяет интенсивность падающего излучения таким образом, что особенность возникает только в одной точке (фокусе), а в ГЛ «размазана» по всей фокальной полуоси. При этом с удалением от линзы интенсивность не убывает, а возрастает как $\sqrt{x}$. Столь необычное на первый взгляд свойство ГЛ объясняется неограниченным возрастанием радиуса входной апертуры с увеличением x. Более слабая особенность на оси ГЛ по сравнению с фокусом ОЛ приводит к тому, что ГЛ дает менее резкое изображение, зато оно наблюдается в любом сечении x, а не только в фокальной плоскости.

Приведенный в (2.17) коэффициент усиления $q(x, \rho)$ представляет собой сумму слагаемых $q_1 = \frac{p_1}{\rho}\frac{dp_1}{d\rho}$ и $q_2 = \frac{p_2}{\rho}\left|\frac{dp_2}{d\rho}\right|$, которые с учетом (2.12) определяются так:

$$q_{1,2}(x,\rho)=\frac{l}{2\rho}\frac{\rho^2/2l^2+1}{\sqrt{\rho^2/4l^2+1}}\pm\frac{1}{2}. \qquad (2.19)$$

По мере удаления наблюдателя от оси x, как видно из формул (2.12) и (2.19), первый корень p_1 аберрационного уравнения растет по абсолютному значению и все более приближается к значению ρ. При этом соответствующий коэффициент усиления q_1 стремится к единице. Второй же корень p_2, наоборот, все время уменьшается по абсолютному значению, а $q_2\to 0$. Легко показать, что при больших смещениях ($\rho/l\gg 1$) отношение q_1/q_2 приближается к величине ρ^4/l^4.

При некотором смещении наблюдателя $\rho=\rho_R$ уменьшающийся корень p_2 становится равным радиусу звезды-линзы, а при $\rho>\rho_R$ — не должен учитываться вследствие экранирующего действия звезды ($p_2<R$). Для смещений $\rho>\rho_R$ остаются только один корень p_1 и соответствующий ему коэффициент усиления q_1, который согласно (2.19) стремится к единице, т. е. на больших удалениях наблюдателя от оси ГЛ усиления не происходит.

Формулы легко обобщаются на случай, когда точечный источник излучения находится на конечном расстоянии x_s от линзы. Несложное геометрическое построение (рис. 2.4, *а*) показывает, что угол выхода луча из плоскости преломления ($x=0$) в этом случае уменьшается на величину p/x_s. Следовательно, аберрационная зависимость в отличие от (2.9) представится как

$$\rho(\mathrm{p},x)=\mathrm{p}+x\left[\Theta_g(\mathrm{p})+\frac{\mathrm{p}}{x_s}\right].$$

Введем в рассмотрение новые переменные: $\tilde{\rho}=x_s\rho/(x+x_s)$ — спроектированное на плоскость линзы смещение наблюдателя и $\tilde{x}=xx_s/(x+x_s)$ — приведенное расстояние. В этих переменных аберрационное уравнение запишется в форме, совпадающей с уравнением для бесконечно удаленного источника:

$$\tilde{\rho}(\mathrm{p},x)=\mathrm{p}+\tilde{x}\Theta_g(\mathrm{p}). \qquad (2.20)$$

Для угла преломления Θ_g (p), заданного в виде (2.7), корни уравнения (2.20)

$$\mathrm{p}_{1,2}=\tilde{\rho}\left[\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{\tilde{l}^2}{\tilde{\rho}^2}}\right], \qquad (2.21)$$

где $\tilde{l}=\sqrt{2r_g\tilde{x}}$. Коэффициент усиления определяется как отношение сфокусированной интенсивности $\mathcal{J}(x,\rho)$ к той интенсивности, которая была бы в точке наблюдения в отсутствие поля тяготения, т. е. при $r_g=0$:

$$q(x,\rho)=\frac{\mathcal{J}(x,\rho)}{\mathcal{J}(x,\rho)_{r_g=0}}=\frac{(x+x_s)^2}{x_s^2}\sum_{i=1}^{2}\frac{p_i}{\rho}\left|\frac{dp_i}{d\rho}\right|=\sum_{i=1}^{2}\frac{p_i}{\tilde{\rho}}\left|\frac{dp_i}{d\tilde{\rho}}\right|. \qquad (2.22)$$

С учетом (2.21) получим

$$q(x, \rho) = \frac{\tilde{l}}{\tilde{\rho}} \frac{\tilde{\rho}^2/2\tilde{l}^2 + 1}{\sqrt{\tilde{\rho}^2/4\tilde{l}^2 + 1}}. \qquad (2.23)$$

Из сопоставления формул видно, что выражения (2.20) — (2.23) ничем не отличаются от аналогичных им (2.9), (2.12) и (2.17) для бесконечно далекого источника, а при $x_s \to \infty$ просто переходят в них. Это позволяет в дальнейшем при анализе фокусировки излучения источника, находящегося на конечном расстоянии от линзы, пользоваться результатами расчетов для бесконечно далекого источника, произведя во всех формулах формальную замену ρ на $\tilde{\rho}$ и x на $\tilde{x}$.

Обращение q в бесконечность на оси ГЛ (или в фокусе ОЛ) связано с геометрооптическим приближением. Учет любого расхождения лучей позволит получить конечное значение q. В частности, лучи, идущие от источника с угловым размером Ψ_0, не будут пересекаться в одной точке на оси, а заполнят целую область с характерным размером $x\left(1 + \frac{x}{x_s}\right)\Psi_0$. Можно оценить величину $q_{\max}$ на оси, используя формулу (2.23), если учесть, что $\rho_{\min} \simeq x\left(1 + \frac{x}{x_s}\right)\Psi_0$. Тогда на расстояниях, на которых $\tilde{l} \gg \tilde{\rho}_{\min} = x\Psi_0$, получим

$$q_{\max} \simeq \frac{\tilde{l}}{\tilde{\rho}_{\min}} \sim \frac{\tilde{l}}{x\Psi_0}.$$

С ростом x усиление уже не растет, а стремится к некоторому предельному значению, пропорциональному $\sqrt{2r_g x_s}$. Заметим, что приведенная оценка максимального коэффициента усиления всего лишь в два раза меньше точного значения, которое будет получено в следующем параграфе. Расчеты $q_{\max}$ для источника излучения с конечными угловыми размерами впервые выполнены Г. А. Тиховым еще в 1937 г. [34]. Интересно отметить, что в своих работах он привел две серии оценок: одна основана на формуле классической механики ($\Theta_g = r_g/p$), а вторая — на данных ОТО ($\Theta_g = 2r_g/p$). Таким образом, еще в конце 30-х годов в среде астрономов не было полного единодушия относительно реальности искривления пространства-времени в гравитационном поле.

§ 2.2. Деформация изображения источника, наблюдаемого сквозь ГЛ

Полученные нами формулы позволяют рассчитать распределение интенсивности, но не дают непосредственного ответа на вопрос, какую картину увидит наблюдатель, если будет смотреть на источник излучения сквозь ГЛ. Для этого необходимо знать распределение интенсивности в различных точках пространства за ГЛ.

Начнем с простейшего случая, когда точечный источник S, ГЛ и наблюдатель находятся на одной прямой. Картину распределения

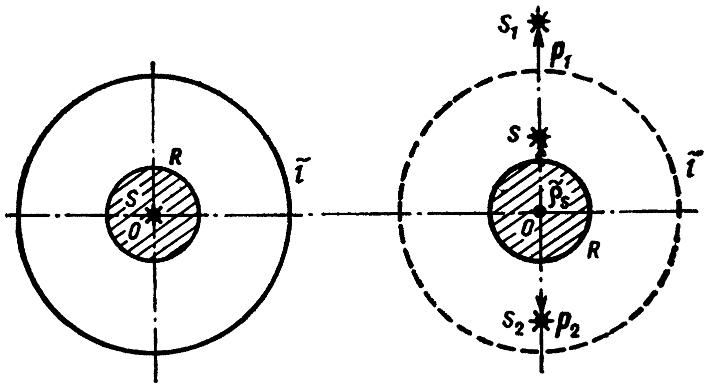


Рис. 2.5. Кольцевое изображение источника, находящегося на оси линза — наблюдатель (*а*), и двойное изображение при смещении источника от оси (*б*)

яркости на небесном своде (изображение источника) будем описывать с помощью полярных координат, начало которых совмещено с центром ГЛ.

Из формулы (2.21) при $\rho = 0$ следует: $p = \tilde{l}$, а зависимость от угла φ исчезает в силу осевой симметрии всей совокупности лучей. Таким образом, в точку наблюдения приходят лучи, идущие по образующим конуса, и точечный источник представляется в виде светящегося кольца радиуса $\tilde{l} = \sqrt{2r_g\tilde{x}}$. Наблюдаемая картина показана на рис. 2.5, *а*. Очевидно, что кольцевое изображение можно обнаружить только в том случае, если его размеры превышают радиус звезды-линзы, т. е. при $\tilde{l} > R$. Отсюда следует, что кольцо появится на расстояниях $x > x_{\min}$, где

$$x_{\min} = \frac{x_s R^2}{2r_g x_s - R^2}. \tag{2.24}$$

Эта формула показывает, что слишком близкие источники, для которых $x_s < R^2/2r_g$, вообще не будут видны (фокальная полуось $x \geqslant x_{\min}$ для них не существует).

Допустим, что источник находится достаточно далеко и рассчитанное по (2.24) расстояние $x_{\min}$ имеет определенное положительное значение. Если наблюдатель перемещается вдоль оси x, удаляясь от линзы, то на расстояниях $x < x_{\min}$ источник не виден, при $x = x_{\min}$ он появится в виде светящегося кольца, вплотную примыкающего к диску фокусирующей звезды. С последующим удалением в область $x > x_{\min}$ кольцо отрывается от ГЛ, и между ними появляется угловой зазор $\delta\psi = (\tilde{l} - R)/x$. Для очень далеких источников ($x_s \gg x$)

$$\delta\psi \approx \sqrt{\frac{2r_g}{x}} - \frac{R}{x}.$$

Легко убедиться, что зазор достигает максимума, равного $r_g/2R$, при $x = 4x_{\min} - 2R^2/r_g$. Положим для оценок, что звезда-линза подобна Солнцу. Тогда $\delta\psi_{\max} \simeq 2{,}1 \cdot 10^{-6}$ рад $= 0{,}44''$. Эта величина находится на пределе разрешающей способности наземных инструментов, но сравнительно легко достижима при наблюдениях из космоса, когда исключаются помехи со стороны земной атмосферы. Однако зазор становится заметным только на вполне определенном удалении от ГЛ. Во всех остальных случаях он будет существенно меньше, и вероятность наблюдения светящегося кольца вокруг звезды-линзы очень мала.

Кроме того, не следует забывать, что мы рассматривали пока только идеально симметричную картину. Если, например, источник будет смещен от оси наблюдатель — линза, видимое изображение станет совсем иным. Этот более общий случай также можно проанализировать с помощью аберрационного уравнения (2.20). Однако при анализе структуры изображения удобнее пользоваться не такой, как на рис. 2.4, *а*, системой координат. В новой системе координат (рис. 2.4, *б*) ось x соединяет центр ГЛ и точку наблюдения, а источник перемещается позади ГЛ. Аберрационное уравнение в этой системе координат легко получить, если в (2.20) вместо смещения наблюдателя ρ ввести смещение источника ρ_s, отсчитываемое в плоскости $x = -x_s$. Замечая, что $\rho = \rho_s x/x_s$, получаем

$$\tilde{\rho}_s = \mathbf{p} + \tilde{x}\Theta_g(\mathbf{p}) = \mathbf{p}(1 - \tilde{l}^2/p^2), \tag{2.25}$$

где $\tilde{\rho}_s - \rho_s x/(x + x_s)$ — спроектированное на плоскость ГЛ смещение источника (см. рис. 2.4, *б*). Корни уравнения (2.25)

$$\mathbf{p}_{1,2} = \tilde{\rho}_s\left[\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \tilde{l}^2/\tilde{\rho}_s^2}\right]. \tag{2.26}$$

Отсюда видно, что при смещении точечного источника на величину $\tilde{\rho}_s$ наблюдаются два точечных изображения с координатами $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$. Эти светящиеся точки будут видны на небосводе на одной прямой со смещением $\tilde{\rho}_s$ по разные стороны от ГЛ, внутри и вне окружности радиуса $\tilde{l}$ (см. рис. 2.5, *б*). Таким образом, возникает фиктивная двойная звезда S_1, S_2. На это обратил внимание еще в 1924 г. известный русский физик О. Д. Хвольсон [37]. Вероятность обнаружить «расщепление» источника несравненно выше, чем увидеть светящееся кольцо, поэтому не удивительно, что ГЛ были обнаружены именно таким образом, но об этом будет подробно рассказано в гл. 5.

Перейдем к рассмотрению протяженных источников. Зная закон преобразования истинных координат $(\tilde{\rho}_s, \varphi_s)$ в наблюдаемые (p_1, φ_1) и (p_2, φ_2), легко определить, как трансформируются в ГЛ изображения источников любого очертания. Пусть граница источника задана уравнением $\tilde{\rho}_s = \tilde{\rho}_s(\varphi)$. Тогда уравнения границ двух изображений получаются с помощью формулы (2.26). Если размеры источника и его смещение от оси x настолько малы, что $\tilde{\rho}_s(\varphi) \ll \tilde{l}$

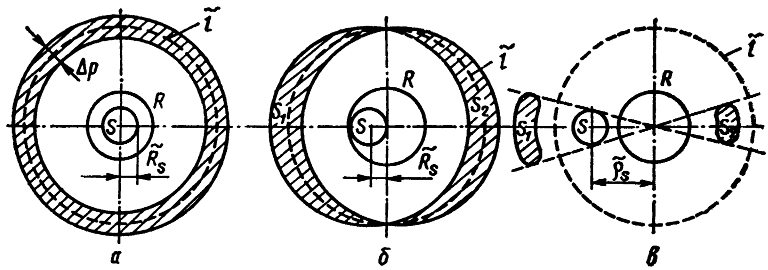


Рис. 2.6. Изображения кругового источника радиуса R_s при различных смещениях его центра от оси линза — наблюдатель

то выражение (2.26) можно упростить:

$$\rho_{1,2}(\varphi) \simeq \tilde{\rho}_s \left[\frac{1}{2} \pm \tilde{l}/\tilde{\rho}_s\right].$$

На основе этого выражения рассмотрим в качестве примера деформацию изображений источника, имеющего форму диска радиуса R_s. На рис. 2.6 показано, что увидит наблюдатель при различных положениях источника относительно ГЛ. Если центр диска точно совпадает с центром ГЛ (рис. 2.6, *а*), то изображение представляет собой уже знакомое нам кольцо, но не бесконечно узкое, а имеющее конечную ширину $\Delta p = p_1 - p_2 \simeq \tilde{R}_s = R_s \frac{\tilde{x}}{x_s}$. Средний же радиус кольца равен $\frac{1}{2}(p_1 + p_2) \simeq \tilde{l}$. При смещении источника на величину своего радиуса (рис. 2.6, *б*) кольцо деформируется в две лунки с соприкасающимися краями, а при смещениях $\tilde{\rho}_s$ бо́льших, чем $\tilde{R}_s$ (рис. 2.6, *в*), возникают два отдельных изображения, напоминающих изогнутые эллипсы.

Если бы ГЛ отсутствовала, то в точку наблюдения приходил бы поток излучения с площади $\Sigma_s = \pi\tilde{R}_s^2$ в плоскости $x = 0$. За счет фокусирующего действия линзы «светящаяся» площадь увеличивается, так как она равна площади Σ видимых изображений, которая всегда больше исходной. Для источника, имеющего равномерное распределение яркости, усиление блеска за счет линзового эффекта равно отношению площадей: $q = \Sigma/\Sigma_s$. Так, для случая, представленного на рис. 2.6, *а*,

$$q \approx \frac{2\pi\tilde{l}\tilde{R}_s}{\pi\tilde{R}_s^2} = 2\frac{\tilde{l}}{\tilde{R}_s} = 2\frac{\tilde{l}}{x\Psi_0}. \tag{2.27}$$

Весьма своеобразно деформируются изображения линейных протяженных излучателей. На рис. 2.7 схематически показано, каким увидит наблюдатель такой источник сквозь ГЛ. Структуру изображения можно представить, не прибегая к каким-либо расчетам, если руководствоваться следующим правилом: каждая точка источника порождает две точки изображения, лежащие на проходящей через

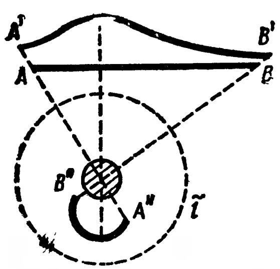
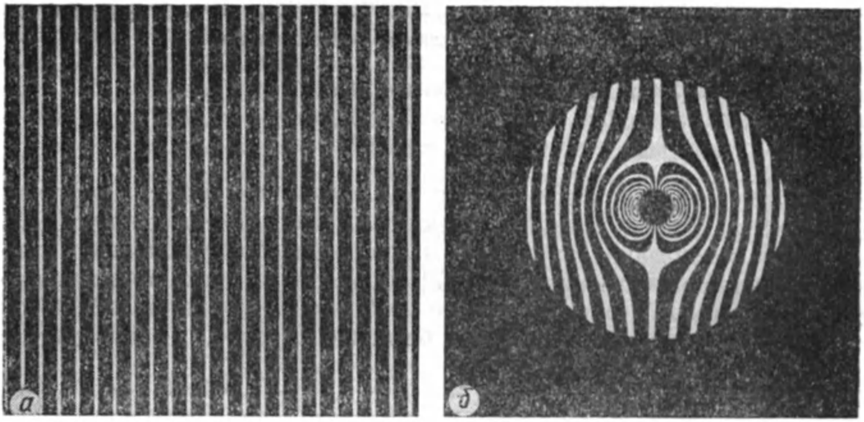


Рис. 2.7. Линейный источник AB, наблюдаемый сквозь ГЛ:
$A'B'$ — прямое изображение; $A''B''$ — инвертированное

Рис. 2.8. Параллельные линии (*а*) и те же линии, наблюдаемые сквозь ГЛ (*б*)



центр ГЛ и источник прямой. Ближайшая к излучателю точка изображения лежит вне окружности радиуса $\tilde{l}$, а более удаленная — внутри нее (см. формулу (2.26)). Кроме того, необходимо помнить, что чем дальше от ГЛ находится излучатель, тем ближе к нему прямое изображение. Обратное же изображение при этом приближается к центру тяготения. Определения «прямое» и «обратное» (или, как еще говорят, «инвертированное») изображения понятны из рис. 2.7: на прямом изображении так же, как и на источнике, точка A' лежит слева от точки B', а на обратном они меняются местами. По этой же причине коническую поверхность, опирающуюся на окружность радиуса $\tilde{l} = \sqrt{2r_g\tilde{x}}$, иногда называют конусом инверсии.

Поскольку инвертированные изображения прямолинейных источников напоминают дуги окружностей, возникло представление о так называемых гравитационных кольцах [38]. В цитированной работе обращено внимание на то, что почти круговые фрагменты изображений возникают при самых разнообразных формах источника, что подтверждается серией фотографий, полученных с помощью модели ГЛ [17]. Некоторые из этих фотографий показаны на рис. 2.8—2.10. Хорошо видно, что даже хаотические структуры преобразуются в ГЛ в своеобразные кольца. Авторы [38] предсказывают открытие «гра-

[17] Вопрос о моделировании ГЛ рассмотрен в § 2.8.

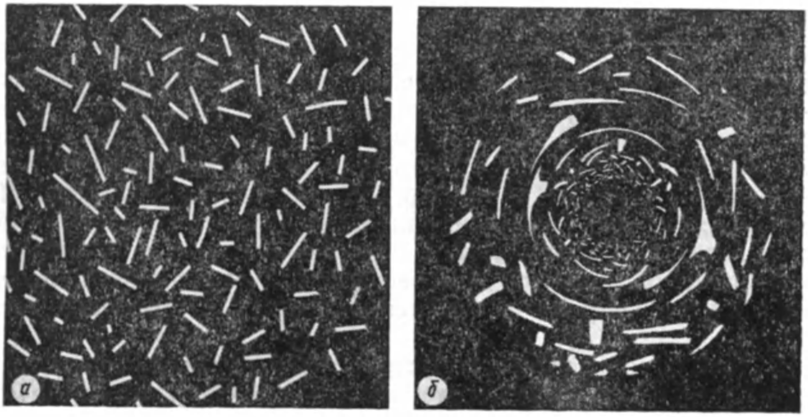


Рис. 2.9. Случайно ориентированные отрезки прямых (*а*) и те же отрезки, наблюдаемые сквозь ГЛ (*б*)

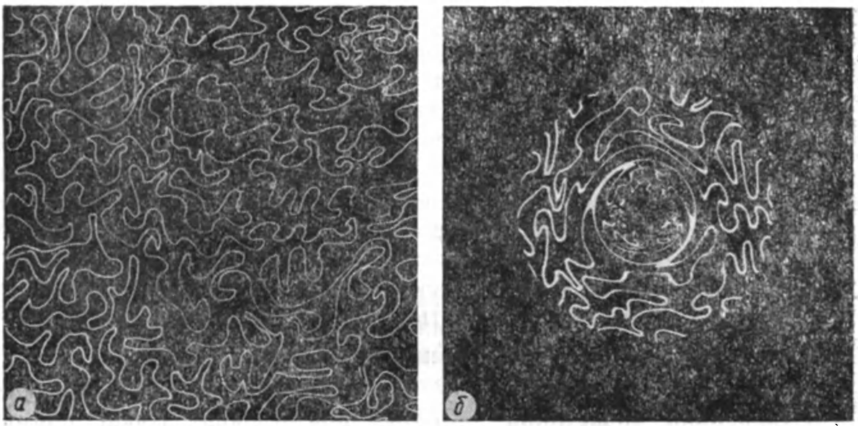


Рис. 2.10. Криволинейная структура (*а*) и та же структура, наблюдаемая сквозь ГЛ (*б*)

витационных колец» в ближайшие годы, после того как войдут в строй такие радиотелескопы, которые будут обладать необходимой разрешающей способностью. В этой связи следует упомянуть недавно обнаруженные светящиеся дуги в скоплениях галактик A 370, A 2218 и Cl 2242—02 [231], которые, как предполагают, являются проявлениями действия ГЛ. Более подробно об этих структурах будет рассказано в § 5.3.

§ 2.3. Прозрачные сферически симметричные ГЛ

Вскоре после опубликования статьи Эйнштейна о линзоподобном действии звезды [33] появилась работа Цвикки [39], который обратил внимание на то, что ГЛ могут создаваться не только компактными небесными телами (звездами), но и протяженными объектами несравненно больших масштабов (звездными скоплениями, галактиками). Особенностью такого рода ГЛ является их прозрачность для электромагнитных волн (света). Чувствуется, что для лучей, проходящих сквозь гравитирующую массу, оптические свойства ГЛ будут иметь больше сходства с ОЛ. Дело обстоит именно так, но прежде чем приступить к расчетам, еще раз напомним, что гравитационные поля способны фокусировать не только электромагнитное излучение. Поэтому понятие «прозрачность», или «непрозрачность» является в действительности условным. Для гравитационных волн и потоков нейтрино Солнце и звезды следует рассматривать как прозрачные тела, хотя в случае нейтрино приходится учитывать и некоторое поглощение.

Сферически симметричное распределение массы $\delta(r)$ создает на расстоянии r от центра поле тяготения $d\Phi/dr = Gm(r)/r^2$, где $m(r) = 4\pi \int\limits_0^r \delta(r) r^2 dr$ — масса вещества внутри сферы радиуса r. Если все вещество ГЛ сосредоточено в пределах сферы $r = R$, то внешние лучи с прицельными параметрами $p < R$ фокусируются точно так же, как и в поле точечной массы $M = m(R)$. Однако лучи, проходящие сквозь внутренние области ($p < R$), уже не распространяются по гиперболам, так как сила тяжести при $r < R$ зависит от r по закону, отличающемуся от r^{-2}. Тем не менее мы могли бы рассчитать траектории и этих лучей, используя формулу (2.2), но в этом нет необходимости, ибо на больших расстояниях от линзы лучи по-прежнему почти совпадают со своими прямолинейными асимптотами. Это означает, что всю геометрическую оптику можно построить и для прозрачных ГЛ, если только знать угол преломления лучей $\Theta_g(p) = -\frac{\Theta_g \mathrm{p}}{p}$ при всех значениях прицельного параметра.

Величина $\Theta_g(p)$ определяется путем интегрирования (1.36) вдоль невозмущенной траектории, которая представляет собой прямую линию с заданным прицельным параметром:

$$\Theta_g(p) = \frac{2}{c^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Phi}{dr} \sin\theta dx. \qquad (2.28)$$

Для дальнейших расчетов формулу (2.28) удобно представить в несколько ином виде. Дело в том, что вместо объемной плотности $\delta(r)$ нередко задается видимая поверхностная плотность $\sigma(p)$ в различных точках небесной сферы (нулевой прицельный параметр $p = 0$ совмещается, как и раньше, с центром ГЛ). Такое описание плотности протяженных объектов более удобно, так как соответствует условиям астрономических наблюдений. Переход от $\delta(r)$ к $\sigma(p)$ осуществляется путем интегрирования по лучу зрения:

$$\sigma(p) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(r) dx = 2 \int\limits_0^{\sqrt{R^2-p^2}} \delta(\sqrt{p^2+x^2}) dx. \qquad (2.29)$$

Здесь учтено, что $\delta(r) = 0$ при $r > R$. Для однородного шара $\delta(r) = \delta_0 = \text{const}$, и поверхностная плотность

$$\sigma(p) = \begin{cases} \sigma_0 \sqrt{1 - p^2/R^2}, & p \leqslant R, \quad \sigma_0 = 2R\delta_0; \\ 0, & p \geqslant R. \end{cases} \tag{2.30}$$

Среди распределений $\sigma(p)$, встречающихся в астрофизической литературе, отметим прежде всего так называемую модель Кинга [40], которая используется для описания эллиптических галактик, шаровых галактических и звездных скоплений. Моделью Кинга называется распределение $\sigma(p)$, равное $\sigma_0\,(1 + p^2/r_c^2)^{-1}$ при $p \leqslant R$ и обращающееся в нуль при $p > R$. Иногда под тем же названием подразумевается и несколько иное распределение [41]:

$$\sigma(p) = \begin{cases} \sigma_0 \left[\dfrac{1}{\sqrt{1 + p^2/r_c^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1 + R^2/r_c^2}} \right]^2, & p \leqslant R; \\ 0, & p > R. \end{cases} \tag{2.31}$$

Модель Кинга двухмасштабная: она характеризуется радиусом центрального ядра r_c и внешней границей сферы R. Безразмерный параметр $\beta = R/r_c$, вообще, велик. Считается, что он лежит в пределах $\beta = 10 \div 1000$. Для спиральных галактик более приемлемой является модель изотермической сферы, характеризуемой однокомпонентным разбросом скоростей σ_v и радиусом ядра r_c. В предельном случае, когда $r_c \to 0$, объемная $\delta(r)$ и поверхностная $\sigma(p)$ плотности соответственно определяются по формулам [42]:

$$\delta(r) = \frac{\sigma_v^2}{2\pi G r^2}; \quad \sigma(p) = \frac{\sigma_v^2}{2Gp}. \tag{2.32}$$

При описании ГЛ еще больших масштабов, а именно скоплений галактик, можно, пренебрегая «мелкими» неоднородностями в виде отдельных галактик, задавать модель ГЛ в виде однородного гравитирующего диска с $\sigma(p) \equiv \sigma_0 = \text{const}$. Легко показать, что поверхностную плотность σ_0 может создать и сферически симметричное распределение массы с объемной плотностью

$$\delta(r) = \frac{\sigma_0}{\pi\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

Для объемных распределений $\delta(r)$, монотонно убывающих с ростом r, функция $\sigma(p)$ также является убывающей. Свойства ГЛ при этом не очень чувствительны к конкретному виду $\sigma(p)$. Как мы убедимся далее, при расчетах, связанных с внутренними лучами в таких ГЛ, достаточно знать поведение $\sigma(p)$ в окрестности максимума, которое можно описывать параболой:

$$\sigma(p) \simeq \sigma_0(1 - p^2/a^2), \quad p \ll R,$$

где a — характерный масштаб изменения $\sigma(p)$.

Что касается внешних лучей, то их свойства вообще не связаны с зависимостью $\sigma(p)$. Они полностью определяются граничным радиусом R и полной массой вещества $M = 2\pi \int\limits_0^R \sigma(p)\, p\,dp$.

Вернемся снова к формуле (2.28). Замечая, что $\sin\theta = p/r = \partial r/\partial p$, переписываем ее следующим образом:

$$\Theta_g(p) = \frac{2}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial p} \Phi\,[r(p, x)]\,dx. \tag{2.33}$$

Далее рассмотрим поток вектора $\nabla\Phi$ через поверхность бесконечно длинного кругового цилиндра радиуса p с осью, проходящей через центр распределения масс. На основании теоремы Гаусса этот поток равен $4\pi m(p)G$, где $m(p) = 2\pi \int_0^p \sigma(p)\,p\,dp$ — масса вещества, находящегося внутри цилиндра. Поскольку на бесконечно удаленных торцах цилиндра $\nabla\Phi \to 0$, необходимо учитывать только поток через боковую поверхность, что приводит к соотношению

$$2\pi p \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\Phi}{\partial p}\,dx = 4\pi m(p)\,G.$$

Отсюда находим $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\Phi}{\partial p}\,dx = 2Gm(p)/p$, и формула (2.33) приобретает компактный вид [43]:

$$\Theta_g(p) = \frac{2r_g(p)}{p}. \tag{2.34}$$

Выражение (2.34) напоминает полученную ранее формулу (1.37), но здесь гравитационный радиус $r_g(p)$ соответствует не полной массе M, а только той ее части, которая сосредоточена внутри цилиндра радиуса p:

$$r_g(p) = \frac{2m(p)\,G}{c^2} = \frac{4\pi G}{c^2} \int_0^p \sigma(p)\,p\,dp. \tag{2.35}$$

Основные свойства функции $\Theta_g(p)$ зависят от вида распределения $\sigma(p)$. Так, для моделей Кинга и однородного шара при малых p имеем $r_g(p) \sim p^2$. Поэтому разложение $\Theta_g(p)$ в окрестности $p = 0$ начнется с линейного по p члена и, кроме того, $\Theta_g'(0) > 0$. Для однородного гравитирующего диска угол $\Theta_g(p)$ пропорционален p для всех прицельных параметров $p \leqslant R$. Модель же изотермической сферы отличается от трех предыдущих тем, что угол отклонения остается величиной постоянной: $\Theta_g(p) \equiv \Theta_g^{(0)} = \text{const}$. В то же время при $p \geqslant R$ имеем $r_g(p) = r_g(R) = \text{const}$ и $\Theta_g(p) \sim p^{-1}$. На рис. 2.11 представлены графики $\Theta_g(p)$, рассчитанные для однородного шара, модели Кинга, изотермической сферы и однородного гравитирующего диска (общая масса гравитирующего тела во всех случаях взята одной и той же). Видно, что приведенные примеры подтверждают проведенный выше качественный анализ. Укажем также аналитические выражения $\Theta_g(p)$ для четырех рассматриваемых моделей.

Для однородного шара [43, 44]

$$\Theta_g(p) = \begin{cases} (2r_g/p)\,[1-(1-p^2/R^2)^{3/2}], & p \leqslant R; \\ 2r_g/p, & p \geqslant R. \end{cases} \tag{2.36}$$

Для модели Кинга [45]

$$\Theta_g(p) = \begin{cases} \dfrac{4\pi G\sigma_0 r_c^2}{c^2 p} F(\beta, p), & p \leqslant R; \\ 2r_g/p, & p \geqslant R, \end{cases} \tag{2.37}$$

где

$$F(\beta, p) = \ln(1 + p^2/r_c^2) + 4(1 - \sqrt{1 + p^2/r_c^2})/\sqrt{1 + \beta^2 + p^2/r_c^2(1 + \beta^2)}.$$

Для изотермической сферы с $\Theta_g^{(0)} = \mathrm{const}$

$$\Theta_g(p) = \begin{cases} 4\pi\sigma_v^2/c^2 \equiv \Theta_g^{(0)}, & p \leqslant R; \\ 2r_g/p, & p \geqslant R. \end{cases} \tag{2.38}$$

Для однородного гравитирующего диска

$$\Theta_g(p) = \begin{cases} p/F, \quad F = c^2/4\pi G\sigma_0, & p \leqslant R; \\ 2r_g/p, & p \geqslant R. \end{cases} \tag{2.39}$$

Заметим, что для внутренних прицельных параметров закон преломления лучей (2.39) тот же, что и в обычной линзе с фокусным расстоянием F.

Перейдем теперь к анализу изображений, наблюдаемых сквозь ГЛ, и расчету их яркости. Начнем с бесконечно удаленного точечного источника, для которого аберрационная зависимость имеет вид, подобный (2.9):

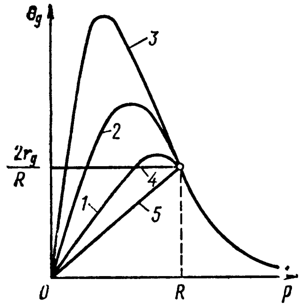
$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{p}, x) = \mathbf{p} + x\Theta_g(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\,[1 - x\Theta_g(p)/p],$$

но с функцией $\Theta_g(p)$, определяемой формулой (2.34). По виду данного уравнения можно сразу сказать, что его корни $\mathbf{p}_i(\boldsymbol{\rho})$ лежат на одной прямой с вектором смещения $\boldsymbol{\rho}$. Поэтому структуру корней достаточно исследовать в одной из меридиональных плоскостей (например, плоскости рисунка). При этом векторное уравнение распадается на два скалярных, одно из которых

$$\rho(p, x) = p - x\Theta_g(p), \tag{2.40}$$

а второе получим, заменив в (2.40) ρ на $-\rho$ Если функцию $\Theta_g(p)$ продолжить нечетным образом в область отрицательных значений p, то можно ограничиться анализом уравнения (2.40), но считать, что p может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Отрицательный корень $p_i < 0$ означает, что данное изображение инвертировано, т. е. лежит с противоположной стороны ГЛ.

Для однородного гравитирующего диска в области $p \leqslant R$ аберрационное уравнение принимает вид, совпадающий с (2.10). Это означает, что такая ГЛ обладает свойствами идеальной собирательной линзы без аберраций (см. § 2.1). Не представляет труда исследовать и ГЛ с $\Theta_g = \mathrm{const}$ (изотермическая сфера), поэтому мы не будем



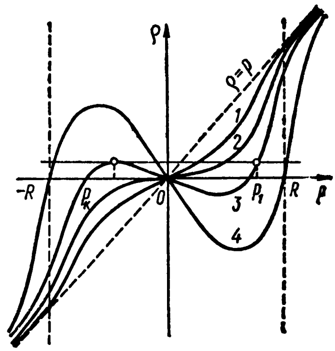


Рис. 2.11. Зависимость угла преломления от прицельного параметра:
1 — однородная сфера; *2* — модель Кинга с $\beta = 10$; *3* — модель Кинга с $\beta = 100$; *4* — изотермическая сфера. *5* — однородный диск

Рис. 2.12. Графическое определение корней аберрационного уравнения (с ростом номера кривой ρ (p) расстояние от наблюдателя до линзы возрастает)

подробно останавливаться и на этой модели. Более сложными фокусирующими свойствами обладают ГЛ, однородный шар и модель Кинга. Характерные графики $\rho(p)$ для этих моделей, построенные для различных дистанций x, показаны на рис. 2.12.

Для ГЛ с поверхностными плотностями $\sigma(p)$, имеющими максимум в точке $p = 0$ (в частности, к таковым относятся модели Кинга и однородного шара), аберрационное уравнение (2.40) при малых p приводится к виду

$$\rho(p, x) \simeq [1 - \Theta_g'(0)\, x]\, p - \frac{1}{6}\Theta_g'''(0)\, xp^3 + \cdots$$

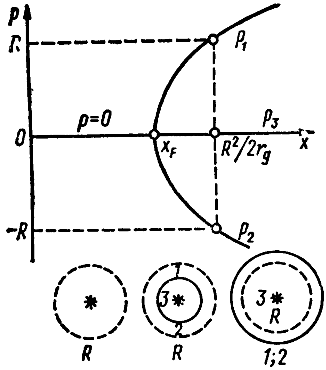
Если далее использовать формулы (2.34) и (2.35), а также представление $\sigma(p)$ в окрестности $p = 0$, то

$$\rho(p, x) \simeq \left(1 - \frac{x}{x_F}\right) p + \frac{x}{2x_F}\frac{p^3}{a^2}, \tag{2.41}$$

где $x_F = 1/\Theta_g(0)$.

При очень малых p слагаемое с p^3 можно не учитывать, а линейный по p член в точности повторяет аберрационную зависимость (2.10), для ОЛ, если положить $F = x_F$. Это означает, что центральные части рассматриваемых моделей прозрачных ГЛ фокусируют лучи так же, как ОЛ с фокусным расстоянием $x_F = 1/\Theta_g'(0)$. Легко показать, что для однородного шара $x_F = R^2/3r_g$, а (для модели Кинга $x_F \simeq c^2/4\pi G\sigma_0$ ($\beta \gg 1$). Наличие кубического члена показывает, что ГЛ обладает аберрацией, приводящей к искажениям, хорошо известным в оптике [8]. Оптические свойства внешней части ГЛ, которая соответствует прицельным параметрам $p \geqslant R$, ничем не отличаются от рассмотренных в предыдущих параграфах.

С помощью графиков рис. 2.12 можно выявить все особенности прозрачных ГЛ. Допустим сначала, что наблюдатель движется вдоль оси x, удаляясь от линзы. Для того чтобы представить себе картину,



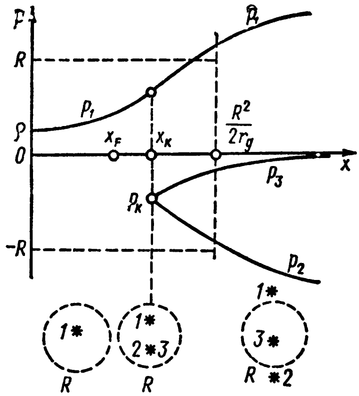


Рис. 2.13. Зависимость корней p_i от расстояния до линзы (наблюдатель находится на оси источник — линза, внизу показаны видимые изображения источника)

Рис. 2.14. Зависимость корней p_i от расстояния до линзы (наблюдатель смещен от оси источник — линза, внизу показаны видимые изображения источника)

возникающую на небосводе, надо положить $\rho = 0$ и решить уравнение (2.40) относительно p. Из графиков рис. 2.12 видно, что прямая $\rho = 0$ пересекает аберрационные кривые для различных значений x не более чем в трех точках. Это означает, что число корней $p_i(x)$ уравнения $\rho(p, x) = 0$ не превышает трех, причем всегда существует корень $p = 0$. Если наблюдатель находится вблизи точки $x = x_F$, то корни аберрационного уравнения (2.40) не очень велики. Поэтому можно использовать упрощенное уравнение (2.41), что приводит к следующим результатам:

$$p_{1,2} = \pm a\sqrt{2(x - x_F)/x} = \pm l(x), \quad p_3 = 0. \tag{2.42}$$

При $x < x_F$ существует только один действительный корень $p = 0$. Ему соответствует светящаяся точка в центре ГЛ (рис. 2.13). При $x = x_F$ этот корень становится тройным, а при $x > x_F$ расщепляется на три простых корня (2.42). Величины p_1 и p_2 отличаются друг от друга только знаками. Учитывая осевую симметрию изображения, ясно, что корням $p_{1,2}$ соответствует одно светящееся кольцо радиуса $l(x)$. С увеличением x радиус $l(x)$ растет и на расстояниях $x > R^2/2r_g$ кольцо выходит за рамки ГЛ, где $l(x)$ определяется уже известным выражением $l(x) = \sqrt{2r_g x}$.

При смещении наблюдателя от оси x светящееся кольцо разрывается на две части, которые стягиваются к точкам p_1 и p_2, лежащим с противоположных сторон ГЛ. Изображение же p_3 несколько смещается относительно своего нулевого значения (рис. 2.14). Положение корней относительно ГЛ является функцией смещения наблюдателя ρ. Для небольших значений ρ корни $p_i(\rho)$ аберрационного уравнения (2.40) можно приближенно определить как

$$p_i(\rho) \simeq p_i(0) + \frac{dp_i(0)}{d\rho}\rho = p_i(0) + \frac{\rho}{1 - x\Theta_g'[p_i(0)]}.$$

С учетом того что $p_3(0) = 0$, а $p_{1,2}(0) = \pm l(x)$, окончательно получим

$$p_{1,2}(\rho) \simeq \pm l(x) + \rho/[1 - x\Theta_g'(l)],$$
$$p_3(\rho) = \rho/(1 - x/x_F). \qquad (2.43)$$

Мы учли, что $1 - x\Theta_g'(l) = 1 - x\,\Theta_g'(-l)$.

Определим теперь яркости наблюдаемых изображений p_1, p_2 и p_3 при нахождении наблюдателя вблизи оси x. Эти яркости, как известно, определяются коэффициентами усиления

$$q_i = \frac{|p_i|}{\rho'}\left|\frac{dp_i}{d\rho}\right|. \qquad (2.44)$$

Согласно выражениям (2.43) получим следующие значения q_i. Для третьего изображения

$$q_3 \simeq 1/(1 - x/x_F)^2. \qquad (2.45)$$

Как и следовало ожидать, яркость центрального изображения оказалась точно такой же, как и в ОЛ. Если $x \neq x_F$, интенсивность на оси остается конечной, а при $x = x_F$ бесконечно возрастает. Суммарная яркость первого и второго изображений определятся так:

$$q_1 + q_2 \simeq \frac{l(x)}{\rho}\,\frac{2}{|1 - x\Theta_g'(l)|}. \qquad (2.46)$$

При $\rho \to 0$ интенсивность бесконечно возрастает пропорционально $1/\rho$. Если теперь использовать соотношение (2.41), то формулу (2.46) можно конкретизировать:

$$q_1 + q_2 \simeq \sqrt{2}\,\frac{ax_F}{\rho\sqrt{x(x - x_F)}}. \qquad (2.47)$$

Это выражение применимо в интервале расстояний $x_F < x \ll R^2/2r_g$. На больших же удалениях, когда $x \geqslant R^2/2r_g$, усиление (2.46) определяется по формуле (2.17), согласно которой при $\rho \to 0$ имеем

$$q_1 + q_2 \simeq \frac{\sqrt{2r_g x}}{\rho}.$$

Таким образом, усиление в окрестности фокальной полуоси $x > x_F$ сначала убывает с ростом x, а потом возрастает пропорционально $\sqrt{x}$. Причина возрастания интенсивности на больших расстояниях была рассмотрена нами в предыдущем параграфе. Поскольку на больших расстояниях $q_1 + q_2 \gg q_3$, центральное пятно труднее обнаружить, чем светящееся кольцо.

С увеличением ρ приближенное представление корней (2.43) становится неприменимым. Для нахождения $p_i(\rho)$ в этом случае необходимо решать аберрационное уравнение (2.40), что в общем случае не удается сделать. Даже упрощенная формула (2.41) приводит к уравнению третьей степени, решения которого являются, как известно, достаточно громоздкими. Однако рис. 2.12 позволяет и в этом случае проанализировать поведение корней $p_i(\rho)$ на разных расстояниях x. Для этого достаточно проследить за точками пересечения прямой, проведенной параллельно оси p на уровне $\rho > 0$, с аберрационными кривыми. Результат такого графического анализа представлен на рис. 2.14, на котором также показаны схематические изображения источника.

Согласно рис. 2.12 на расстояниях $x < x_k$ имеется одна точка пересечения $p_1 > 0$, возрастающая с увеличением x. Наблюдатель видит одну светящуюся точку, смещенную от центра ГЛ. При некотором значении $x = x_k > x_F$ кривая $\rho(p)$ выгибается столь сильно, что соприкасается с секущей прямой в точке $p = p_k < 0$. Это означает, что на расстоянии $x = x_k$ дополнительно к p_1 появляется еще один двойной корень $p_2 = p_3 = p_k < 0$. Поскольку отрицательному значению p соответствуют лучи, огибающие ГЛ с противоположной стороны, при $x = x_k$ возникает вторая светящаяся точка с другой стороны от ГЛ. Коэффициент усиления первого изображения q_1 имеет конечное значение, а второго — бесконечно возрастает в силу того, что $dp/d\rho = (d\rho/dp)^{-1} \to \infty$ (в точке касания функция $\rho(p)$ имеет экстремум). Двойной корень p_k соответствует каустике, на которой в геометрооптическом приближении интенсивность становится бесконечно большой.

Для того чтобы выяснить, как возрастает усиление с приближением наблюдателя к каустике ($\rho \to \rho_k$), аналогично тому, как это сделано для приосевой области, найдем приближенные значения корней p_2 и p_3. Для этого разложим функцию $\rho(p)$ в ряд в окрестности точки максимума $p = p_k$:

$$\rho(p) \simeq \rho_k + \frac{1}{2}\rho''(p_k)(p - p_k)^2.$$

Отсюда легко получить выражения для расщепившихся корней и производных $dp_{2,3}/d\rho$:

$$p_{2,3}(\rho) \simeq p_k \mp \sqrt{\frac{2(\rho - \rho_k)}{\rho''(p_k)}}, \qquad dp_{2,3}/d\rho \simeq \mp [2\rho''(p_k)(\rho - \rho_k)]^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.48}$$

После этого согласно формуле (2.44) для коэффициента усиления вблизи каустики получается формула

$$q_2 + q_3 \simeq \frac{|p_k|}{\rho_k}\sqrt{\frac{2}{\rho''(p_k)(\rho - \rho_k)}}. \tag{2.49}$$

Далее следует помнить, что $\rho''(p_k) < 0$. Поэтому при $\rho < \rho_k$ усиление бесконечно возрастает как $(\rho - \rho_k)^{-\frac{1}{2}}$, а при $\rho > \rho_k$ скачком обращается в нуль, так как действительные корни $p_{2,3}$ исчезают.

В области расстояний $x > x_k$ за счет расщепления двойного корня возникают три светящиеся точки: одна с той же стороны, в которую смещен наблюдатель, а две другие — с противоположной стороны ГЛ. При очень больших значениях x ($x \gg R^2/2r_g$) один из корней асимптотически приближается к $p = 0$, а два других — к $\pm\sqrt{2r_g x}$.

В этой области расстояний можно сопоставить p_l при $\rho \neq 0$ с p_l при $\rho = 0$. Соответствующие ветви кривых на рис. 2.13 и 2.14 обозначены одними и теми же цифрами. Поскольку ρ и $d\rho/dp$ нигде не обращаются в нуль, интенсивность наблюдаемых изображений при $x > x_k$ остается конечной. Каустическая поверхность представляет собой, как известно, огибающую семейства лучей, которые в данном случае являются прямыми линиями $\rho\ (x) = p - x\Theta_g\ (p)$ с параметром p. Для нахождения огибающей необходимо исключить p из системы двух уравнений: $\rho = p - x\Theta_g\ (p)$ и $\partial\rho\ (p,\ x)/\partial p = 0$. В результате получим уравнение каустики

$$\rho_k (x) = p_k (x) - x\Theta_g [p_k (x)], \tag{2.50}$$

где $p_k\ (x)$ — корень уравнения

$$1 - x\Theta_g' (p) = 0. \tag{2.51}$$

При малых значениях разности $x - x_F$ можно использовать приближенную формулу (2.41). В этом случае (2.50) принимает вид

$$\rho_k (x) \simeq a \frac{x}{x_F} \left[\frac{2}{3}\left(1 - \frac{x_F}{x}\right)\right]^{3/2}. \tag{2.52}$$

Напомним, что семейство лучей обладает осевой симметрией. Поэтому выражение (2.52) описывает коническую поверхность вращения. Сечение этой поверхности произвольной плоскостью, проходящей через ось ГЛ, показано на рис. 2.15. На этом же рисунке показана фокальная полуось $x > x_F$. У ГЛ с непрозрачным ядром каустика отсутствует, а фокальная полуось начинается в точке $x = R^2/2r_g$. При больших расстояниях $x\ (x \gg R^2/2r_g)$ корень $p_k\ (x)$ уравнения (2.51) стремится к некоторому постоянному значению $p_k^{(0)}$, которое, как легко показать, определяется из равенства $\Theta_g'\ (p) = 0$. Образующая каустического конуса (2.50) при этом асимптотически приближается к прямой

$$\rho_k (x) \simeq p_k^{(0)} - x\Theta_g [p_k^{(0)}]. \tag{2.53}$$

Для однородного шара уравнение каустики может быть записано в явном виде:

$$\rho_k (x) = p_k (x) - \frac{2r_g x}{p_k (x)} \left[1 - \left(1 - \frac{p_k^2 (x)}{R^2}\right)^{3/2}\right]. \tag{2.54}$$

В окрестности $x = x_F$, когда справедливо разложение (2.41), $p_k \simeq$ $\simeq -a \sqrt{\frac{2}{3} (1 - x_F/x)}$ и приведенное выше выражение переходит в формулу (2.52). Если же $x \to \infty$, то корень $p_k^{(0)}$ согласно (2.36) равен $-\left(\frac{3}{4}\right)^{1/4} R$. В результате получается следующая формула для асимптотики каустики:

$$\rho_k (x) \simeq -0{,}93R + 2{,}04 \frac{r_g}{R} x. \tag{2.55}$$

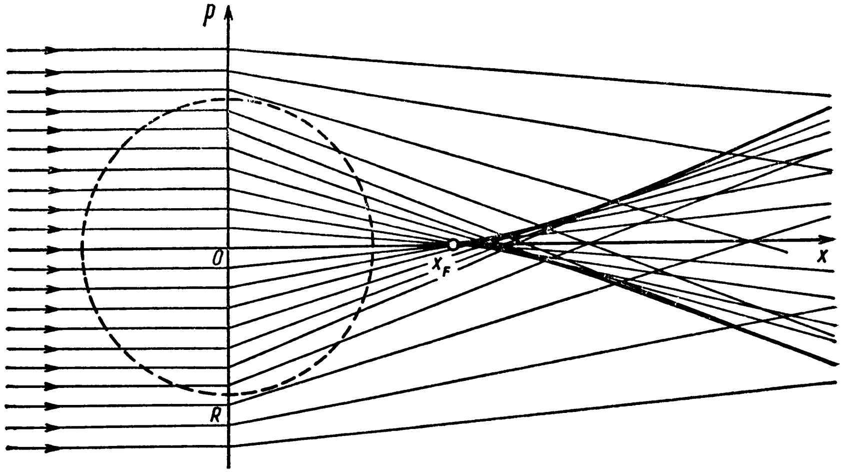


Рис. 2.15. Образование каустики и фокальной полуоси $x > x_F$ в прозрачной ГЛ

Перейдем теперь к рассмотрению точечного излучателя, находящегося на конечном расстоянии x_s от ГЛ. Как показано в § 2.1, геометрооптические свойства линзы в этом случае легко анализируются на основе уже рассмотренных выражений для бесконечно далекого источника. Необходимо только во всех формулах произвести формальную замену смещения наблюдателя ρ на $\tilde{\rho} = \rho x_s/(x + x_s)$ и удаления от линзы x на $\tilde{x} = x x_s/(x + x_s)$. В этом случае при исследовании аберрационного уравнения

$$\tilde{\rho} = p - \tilde{x}\Theta_g(p) \tag{2.56}$$

мы можем использовать и все рассмотренные ранее рисунки для бесконечно далекого источника (с соответствующей заменой ρ на $\tilde{\rho}$ и x на $\tilde{x}$).

В качестве примера рассмотрим аберрационную зависимость (2.41). При малых значениях p для точечного источника, находящегося на конечном расстоянии от ГЛ, это приближенное уравнение принимает вид

$$\tilde{\rho} = p\left(1 - \frac{\tilde{x}}{x_F}\right) + \frac{\tilde{x}}{2x_F}\frac{p^3}{a^2}. \tag{2.57}$$

Картина, представляющаяся находящемуся на оси ГЛ наблюдателю, характеризуется корнями p_i уравнения (2.57) при $\rho = 0$ ($\tilde{\rho} = 0$). Эти корни определяются по ранее полученной формуле (2.42). В отличие от случая бесконечно удаленного источника расщепление корней происходит уже не в точке $x = x_F$, а в точке $x = x^*$, определяемой из условия $x = x_F$:

$$x^* = \frac{x_s x_F}{x_s - x_F}. \tag{2.58}$$

При малых значениях p, пренебрегая в (2.57) слагаемым с p^3, получаем коэффициент усиления центрального изображения ГЛ:

$$q_3 \simeq 1/(1 - \tilde{x}/x_F)^2. \tag{2.59}$$

Когда $x = x^*$ ($\tilde{x} = x_F$), интенсивность на оси бесконечно возрастает. Здесь возникает изображение точечного источника. Расстояния от линзы до источника и от линзы до его изображения связаны соотношением, вытекающим из (2.58) и хорошо известным в оптике ОЛ:

$$\frac{1}{x^*} + \frac{1}{x_s} = \frac{1}{x_F}. \tag{2.60}$$

В области расстояний $x > x^*$ наряду с центральной точкой возникает светящееся кольцо, радиус которого по мере возрастания стремится к величине $\sqrt{2r_g\tilde{x}}$. Совершенно иначе обстоит дело, когда $x_s < x_F$, т. е. источник находится ближе к линзе, чем ее фокусное расстояние. В этом случае $\tilde{x}$ будет всегда меньше x_F и функция $\rho(p)$ (2.57) является возрастающей при любых значениях x. Серия кривых $\rho(p)$, построенных для разных дистанций x, представлена на рис. 2.12. Видно, что секущая прямая, проведенная на любом уровне ρ, пересекает кривую (*1*), соответствующую $\tilde{x} < x_F$, только в одной точке. Таким образом, аберрационное уравнение (2.56) имеет один действительный корень p_1, знак которого совпадает со знаком ρ. Следовательно, наблюдатель будет видеть только одну светящуюся точку, причем создаваемая ею интенсивность всегда оказывается конечной. Последнее утверждение вытекает из формулы (2.59) при $\tilde{x} < x_F$. Отсутствие особенностей в этом случае объясняется очень просто: на ГЛ падает поток лучей, расходящихся столь сильно, что они остаются расходящимися и после преломления в поле тяготения. Пользуясь терминологией, принятой в оптике ОЛ, можно сказать, что ГЛ при $x_s < x_F$ создает мнимое изображение, расположенное вместе с источником по одну сторону от линзы.

В заключение этого параграфа приведем формулы, рассчитанные по изложенной выше схеме, для модели ГЛ — изотермическая сфера Так, анализ аберрационного уравнения $\tilde{\rho} = p + \tilde{x}\Theta_g^{(0)}$ показывает, что у данной ГЛ, в отличие от моделей Кинга и однородного шара, отсутствуют фокус и каустика, а имеющаяся фокальная полуось при $r_c \to 0$ начинается прямо из центра ГЛ ($x > 0$, $p = 0$). Наблюдатель, находящийся на фокальной полуоси, увидит кольцевое изображение точечного источника. Радиус кольца $\tilde{l}(x) = \tilde{x}\Theta_g^{(0)}$. При смещении наблюдателя от оси x кольцо разрывается на две части, которые стягиваются к двум точкам:

$$p_{1,2}(\rho) = \pm \tilde{l}(x) + \tilde{\rho}.$$

Изображение p_2 наблюдается только для смещений $\tilde{\rho} \leqslant \tilde{l}$. При $\tilde{\rho} > \tilde{l}$ это изображение исчезает, а остается только одно первое изображение p_1. Для двух изображений имеем

$$q_1 = 1 + \tilde{l}(x)/\tilde{\rho}, \quad q_2 = -1 + \tilde{l}(x)/\tilde{\rho}, \quad (\tilde{\rho} \leqslant \tilde{l}).$$

Суммарный коэффициент усиления

$$q = q_1 + q_2 = 2\frac{\tilde{l}(x)}{\tilde{\rho}},$$

а отношение

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{1 + \dfrac{\tilde{l}(x)}{\tilde{\rho}}}{-1 + \dfrac{\tilde{l}(x)}{\tilde{\rho}}}.$$

§ 2.4. Влияние плазменной короны звезды на гравитационную фокусировку

Известно, что Солнце и звезды окружены достаточно протяженными газовыми оболочками. Внешний слой оболочки звезды, так называемая корона, может повлиять на оптические свойства ГЛ, если дополнительное преломление лучей в атмосфере звезды станет соизмеримым с гравитационным отклонением.

При рассмотрении этого эффекта прежде всего возникает вопрос о коэффициенте преломления вещества, находящегося в поле тяготения. Очевидно, что формула (1.26), определяющая n_g, уже неприменима, так как она была выведена для вакуума. Если же гравитационное поле действует в среде, то справедлива мультипликативная формула [46]

$$n^* = n_g n, \tag{2.61}$$

где n^* — эффективный коэффициент преломления, учитывающий совместное влияние поля тяготения и среды, n_g — коэффициент преломления для гравитационного поля в вакууме, n — «истинный» показатель преломления среды, определяемый, например, путем локальных измерений скорости света[18].

Поскольку n_g мало отличается от единицы, можно считать, что и $n = 1 + \alpha$, где $|\alpha| \ll 1$. В противном случае влияние гравитационного поля стало бы слабозаметным. Для такой среды в первом приближении по α и Φ/c^2 формула (2.61) переписывается так: $n^* \simeq 1 -$

[18] Напомним, что гравитационное поле не влияет на локальные значения c (см. § 1.3).

$-2\Phi/c^2 + \alpha$, или, рассматривая сферически симметричные объекты,

$$n^* \approx 1 + \frac{r_g}{r} + \alpha(r). \qquad (2.62)$$

Это соотношение показывает, что оптические свойства ГЛ не изменятся под влиянием короны только в том частном случае, когда плотность атмосферы звезды убывает с увеличением расстояния таким образом, что $\alpha(r) \sim r^{-1}$. В действительности плотность атмосферы резко уменьшается по мере удаления от поверхности звезды и фокусировка излучения с учетом влияния газовой оболочки происходит несколько иначе, чем в ГЛ без короны. Дальнейший анализ покажет, что структура видимых изображений существенно зависит от того, что собой представляет звезда, образующая ядро ГЛ. Дело в том, что атмосфера холодных звезд состоит в основном из нейтральных частиц (степень ионизации порядка 10^{-3}), а газ в короне Солнца и горячих звезд практически полностью ионизирован, т. е. представляет собой электронно-ионную плазму. В первом случае $\alpha > 0$, дополнительное преломление лучей происходит в ту же сторону, что и гравитационное, и результаты предыдущего анализа остаются в силе. Конечно, меняются рассчитанные ранее параметры ГЛ, например, расстояние $x_{\min}$, где начинается фокальная полуось, сокращается, но та картина, которая представляется наблюдателю, смотрящему на источник сквозь ГЛ, в основном сохраняется. Иное дело плазма, имеющая для высокочастотных электромагнитных волн коэффициент преломления меньше единицы, а следовательно, $\alpha < 0$. Отрицательная добавка к n^* приводит к своеобразным оптическим явлениям, связанным с отклонением лучей в противоположном направлении от центра притяжения.

Для дальнейших расчетов необходимо конкретизировать $\alpha(r)$, или, что то же, написать формулу для коэффициента преломления плазмы. Он зависит от многих факторов, но прежде всего от соотношения между частотой фокусируемой волны ω и частотами $\omega_p = (4\pi e^2 N_e/m_e)^{1/2}$ и $\omega_B = eB/m_e c$, которые характеризуют плазму (ω_p — плазменная частота, ω_B — гирочастота, e, N_e, m_e — заряд, плотность, масса электронов, B — напряженность магнитного поля звезды). В многокомпонентной плазме число характерных частот, разумеется, возрастает, но, учитывая, что нас интересуют только высокочастотные волны, можно ограничиться электронным компонентом плазмы.

Ориентируясь в численных оценках на значения параметров, характерных для солнечной короны, будем считать ω_p, ω_B порядка 10^8 с$^{-1}$ в непосредственной близости от поверхности Солнца [47]. В то же время при оптических наблюдениях $\omega \sim 10^{14}$ с$^{-1}$, а для СВЧ радиоволн $\omega \geqslant 10^9$ с$^{-1}$. Таким образом, практически всегда при наблюдениях с поверхности Земли $\omega \gg \omega_p$, ω_B и коэффициент преломления плазмы можно определять по формуле [48] [19]

$$n = \sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2} \simeq 1 - \omega_p^2/2\omega^2. \qquad (2.63)$$

[19] С целью упрощения мы пренебрегаем поглощением волны в плазме.

Отсюда следует, что интересующая нас добавка к n^*

$$\alpha(r) = -2\pi e^2 N_e(r)/m_e\omega^2. \tag{2.64}$$

Остается задаться зависимостью $N_e(r)$. Для солнечной короны она нередко определяется по эмпирической формуле Баумбаха — Аллена [47]

$$N_e(r)\,[\text{см}^{-3}] = 10^8[1{,}5\,(R_\odot/r)^6 + 3\,(R_\odot/r)^{16}]. \tag{2.65}$$

Поскольку второе слагаемое дает заметный вклад только в непосредственной близости от поверхности Солнца, мы будем использовать упрощенную одночленную формулу, полагая

$$N_e(r) = N_0(R/r)^h, \tag{2.66}$$

где h составляет несколько единиц.

Вычисление угла преломления в среде с коэффициентом преломления $n^*(r)$ с учетом (2.64) и (2.66) приводит к следующему результату:

$$\Theta_g^*(p) = \frac{2r_g}{p} - \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2\left(\frac{R}{p}\right)^h, \tag{2.67}$$

где λ — длина волны фокусируемого излучения, $\lambda_0 = \left[\frac{\sqrt{\pi}\, m_e c^2 \Gamma(h/2)}{e^2 N_0 \Gamma(h/2 + 1/2)}\right]^{1/2}$, Γ — гамма-функция. Для Солнца $h = 6$, $N_0 = 10^8$ см$^{-3}$ и $\lambda_0 \simeq 2 \times 10^2$ см. В отличие от чисто гравитационной фокусировки появилась зависимость угла отклонения Θ_g^* от λ, характерная для плазмы. Отрицательное значение второго члена в (2.67) показывает, что плазменная корона действует подобно рассеивающей линзе, дефокусируя проходящие сквозь нее лучи.

Поскольку зависимость от p двух слагаемых в (2.67) различна (для короны $h > 1$), для достаточно больших прицельных параметров ГЛ по-прежнему является собирающей, а для малых — рассеивающей. Граничным значением $p = p_0$, при котором $\Theta_g^*(p_0) = 0$, будет

$$p_0 = R\left[\frac{R}{2r_g}\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2\right]^{1/(h-1)}. \tag{2.68}$$

Если окажется, что $p_0 < R$, рассеивающая часть линзы отсутствует.

При анализе фокусирующих свойств линзы аналогично (2.40) будем использовать скалярное аберрационное уравнение. Введя параметр p_0 в формулу (2.67), представим аберрационное уравнение в виде

$$\rho(p, x) = p - \frac{l^2}{p}\left[1 - \left(\frac{p_0}{p}\right)^{h-1}\right], \tag{2.69}$$

где, как и раньше, $l = \sqrt{2r_g x}$. Графики функции $\rho(p)$ для различных расстояний x от ГЛ представлены на рис. 2.16. Сравнив их с кривыми на рис. 2.12, легко убедиться, что при больших значениях p они имеют одинаковый характер, асимптотически приближаясь к прямой $\rho = p$. Однако кривые $\rho(p)$ на рис. 2.16 имеют экстремум при любых расстояниях x в отличие от кривых для прозрачной

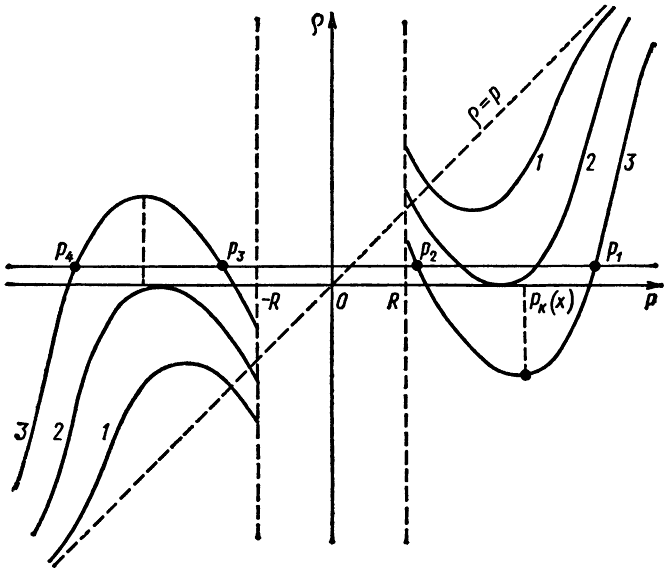


Рис. 2.16. Аберрационные кривые для различных расстояний до линзы и графическое определение корней p_i:
$1 - x < x_k$; $2 - x = x_k$; $3 - x > x_k$

линзы, для которой минимум появляется лишь при достаточно больших значениях x $(x > x_F)$.

В предыдущем параграфе показано, что с экстремумом $\rho(p)$ связано возникновение каустики. Поэтому очень важно, чтобы абсцисса экстремума $p_k(x)$ была больше R. В противном случае та часть кривой, которая содержит $p_k(x)$, должна исключаться из рассмотрения вследствие экранирующего действия диска звезды и плазменная корона не проявит своего специфического влияния. Таким образом, случай $|p_k| < R$ не представляет особого интереса, и в дальнейшем будем считать $|p_k| > R$. Это условие налагает определенные ограничения на λ Положив $|p_k(x)| = R$, определим граничное значение длины волны λ_k, при которой возможно образование каустики. Согласно (2.69) видно, что λ_k зависит от расстояния x до ГЛ. Если точка наблюдения достаточно удалена от ГЛ, то в (2.69) главную роль играет слагаемое с $l^2 = 2r_g x$ и из уравнения $\partial\rho/\partial p = 0$ следует

$$|p_k^{(0)}| \simeq h^{1/(h-1)} p_0. \qquad (2.70)$$

При этом $\lambda_k(x)$ стремится к некоторому минимальному предельному значению

$$\lambda_k(x)|_{x\to\infty} = \lambda_k^{(0)} \simeq \lambda_0 \sqrt{\frac{2r_g}{hR}}. \qquad (2.71)$$

Условие существования каустики за счет плазменной короны звезды-линзы определяется неравенством $\lambda > \lambda_k^{(0)}$. Для Солнца $\lambda_k^{(0)} \simeq 0{,}24$ см. Таким образом, наличие каустики, связанной с плазменной короной,

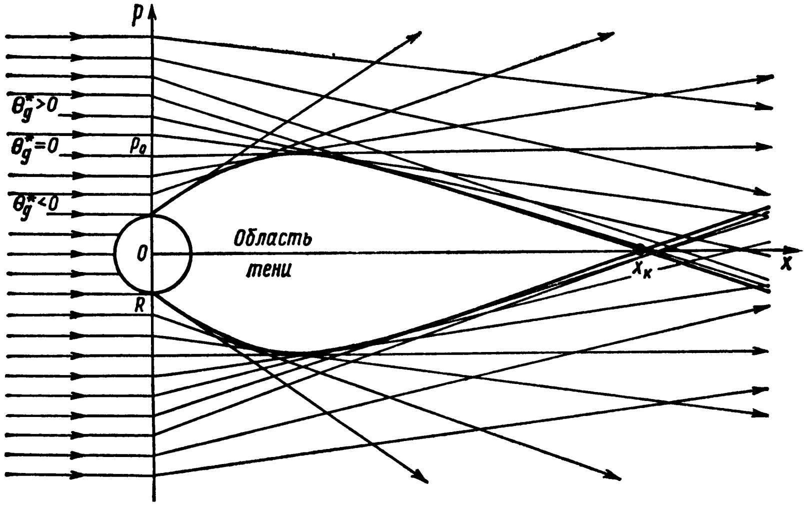


Рис. 2.17. Образование каустики и фокальной полуоси $x > x_k$ в ГЛ с плазменной короной

надо учитывать в радиодиапазоне, начиная с миллиметровых длин волн. Уравнение каустики, которое представляет собой поверхность вращения, может быть рассчитано точно так, как это сделано в предыдущем параграфе. Мы ограничимся здесь схематическим рис. 2.17, который достаточно ясно иллюстрирует особенности преломления лучей в ГЛ с учетом плазменной короны, а также характерную форму каустики. Образующая каустической полости ограничена при малых x лучом с $p = R$, для которого угол преломления наибольший по абсолютному значению среди всех отрицательных значений $\Theta_g^*(p)$. При больших x каустика асимптотически сливается с лучом, которому соответствует максимальное значение $\Theta_g^*(p)$. В точке $x = x_k$ каустика пересекает ось x. Наибольшее удаление области тени от оси симметрии равно p_0. Заметим, что рисунок дает очень приближенное представление о форме каустики в окрестности звезды, так как здесь нельзя заменять лучи их прямолинейными асимптотами. Если бы потребовалось уточнить форму каустики в этой области, следовало бы использовать точные уравнения лучевых траекторий. Например, при достаточно больших длинах волн (для Солнца это диапазон $\lambda \geqslant 1$ м) граница тени охватывает и освещенное полушарие звезды, так как в силу полного внутреннего отражения лучи не доходят до поверхности звезды даже при $p = 0$. На рис. 2.18 показано, как выглядит область тени в длинноволновом диапазоне, а также в двух предельных случаях, когда можно пренебречь гравитацией или влиянием плазменной короны.

Перейдем теперь к анализу изображений источника, наблюдаемого сквозь ГЛ. Представим себе сначала, что наблюдатель перемещается вдоль оси x. В силу аксиальной симметрии всего потока лучей заранее ясно, что можно увидеть только кольцевые изображения. Радиусы

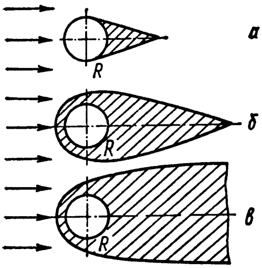


Рис. 2.18. Области тени при учете различных факторов:

а — поле тяготения; *б* — поле тяготения и плазменная корона; *в* — плазменная корона

колец $p_i(0)$ определяются из условия $\rho(p, x) = 0$, т. е. путем нахождения точек пересечения с осью абсцисс той кривой $\rho(p)$ на рис. 2.16, которая соответствует данному расстоянию x от ГЛ. Легко убедиться, что на достаточно больших расстояниях (кривая 3) имеются четыре корня $p_i(0)$, группирующиеся в две различающиеся знаками пары. Так как точка пересечения $\pm p_i$ соответствует одному и тому же кольцу, на больших удалениях от ГЛ наблюдатель увидит два концентрических кольца. По мере приближения наблюдателя к линзе точки пересечения сближаются, и на некотором расстоянии $x = x_k$ кривая $\rho(p)$ касается оси абсцисс. Здесь два кольцевых изображения сливаются в одно — наблюдатель оказывается на каустике (кривая 2). При дальнейшем приближении к звезде точек пересечения нет (кривая 1). Следовательно, при $x < x_k$ источник не виден вовсе: наблюдатель находится в области рефракционной тени.

Наш анализ станет более конкретным и наглядным, если мы зададимся каким-либо значением h, позволяющим получить достаточно простые аналитические соотношения. Положим $h = 3$ и перепишем (2.69) следующим образом:

$$\rho(p, x) = p - \frac{l^2}{p}\left[1 - \left(\frac{p_0}{p}\right)^2\right]. \qquad (2.72)$$

Теперь корни уравнения $\rho(p, x) = 0$ легко определяются как

$$p_i(0) = \pm \frac{l(x)}{\sqrt{2}}[1 \pm \sqrt{1 - 4p_0^2/l^2(x)}]^{1/2}. \qquad (2.73)$$

Можно также получить и формулу для $p_k(x)$ из условия $\partial\rho(\rho, x)/\partial p = 0$:

$$p_k(x) = \pm \frac{l(x)}{\sqrt{2}}[-1 + \sqrt{1 + 12p_0^2/l^2(x)}]^{1/2}. \qquad (2.74)$$

Из (2.73) видно, что действительно существует критическое расстояние x_k, определяемое условием $l^2(x) = 4p_0^2$,

$$x_k = 2p_0^2/r_g, \qquad (2.75)$$

от которого начинается фокальная полуось. Как отмечалось выше, при $x = x_k$ наблюдатель попадает на каустику. При этом $p_1(0) = p_2(0) = p_k(x_k) = \sqrt{2}\, p_0$. Для дистанций $x > x_k$ имеются четыре корня (2.73) и видны два светящихся кольца. По мере роста x радиус одного из них возрастает, стремясь к $l(x)$, т. е. к тому значению, которое соответствует «чистой» гравитации; радиус же второго убывает, приближаясь к p_0, и попадает в область влияния плазмы Схема расщепления корней $p_i(0)$ и структура видимых изображений представлены на рис. 2.19.

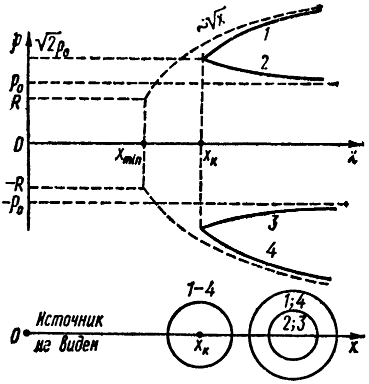


Рис. 2.19. Зависимость корней аберрационного уравнения от расстояния до линзы (кольцевые изображения источника показаны внизу)

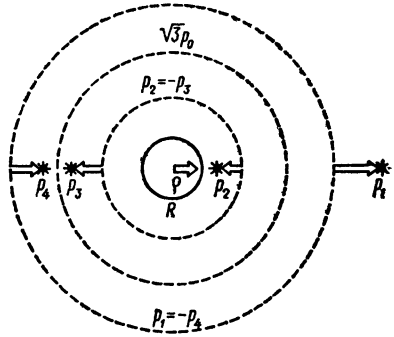


Рис. 2.20. Появление четырех точечных изображений вместо двух кольцевых при смещении наблюдателя от оси источник — линза (равенства $p_2 = -p_3$ и $p_1 = -p_4$ достигаются при $\rho = 0$)

Сравним x_k и $x_{\min}$ ($x_{\min} = R^2/2r_g$ — начало видимости источника при «чистой» гравитации). Из (2.75) следует $x_k = (4p_0^2/R^2)\,x_{\min}$. Далее с помощью (2.68) при $h = 3$ находим $x_k = \frac{2R}{r_g}\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2 x_{\min}$. Видно, что с увеличением длины волны точка появления кольцевых изображений все более удаляется от ГЛ. Так проявляется рассеивающее действие плазменной короны. Учитывая, что $|p_k(x_k)| = \sqrt{2}p_0$, и приравнивая это значение к радиусу звезды R, определяем минимальное расстояние $x_{k\min}$, на котором еще возможно наблюдение слившихся колец:

$$x_{k\,\min} = 2x_{\min},$$

т. е. и в этом случае граница тени отодвигается от ГЛ. Граничное значение длины волны λ_k в точке $x = x_{k\,\min}$ равно $\sqrt{r_g/R}\,\lambda_0$.

Теперь представим, что наблюдатель смещен от оси x на величину ρ. Вопрос о том, что он увидит сквозь ГЛ, решается также с помощью рис. 2.16. Проведя прямую, параллельную оси абсцисс на уровне ρ (для определенности считаем $\rho > 0$), легко убедиться, что действительных корней $p_i(\rho)$ аберрационного уравнения (2.69) может не быть вовсе либо их может быть два или четыре. В последнем случае имеются два положительных и два отрицательных корня. Положительные корни лежат по разные стороны от точки минимума $p_k(x)$: $p_1 > p_k > p_2 > 0$. Они соответствуют двум прямым точечным изображениям источника. Отрицательные корни $p_4 < -p_k < p_3 < 0$ определяют положение двух инвертированных точечных изображений (они расположены по другую сторону от центра ГЛ). Возможны также вырожденные случаи, когда секущая прямая касается кривой $\rho(p)$ в области положительных или отрицательных p, т. е. наблюдатель попадает на одну из ветвей каустики. В первом случае сливаются два прямых изображения p_1 и p_2, а корни p_3 и p_4 отсутствуют (наблюдатель видит одну светящуюся точку), во втором — инвертированные изображения p_3 и p_4, а p_1 и p_2 по-прежнему не равны друг другу (видны три светящиеся точки). Если смещение ρ столь велико, что наименьший по абсолютному значению корень p_i (в нашем примере p_2) становится меньше R, то соответствующее изображение экранируется звездой и исчезает. В этом случае таких точек пересечения на рис. 2.16 не должно быть, так как участки кривых в области $p < R$ не нарисованы. Расположение светящихся точек p_i и их перемещение на небосводе по мере увеличения ρ показаны схематически на рис. 2.20 для $h = 3$ и $x \gg x_k$. При других значениях h число изображений остается тем же, но место слияния корней p_3 и p_4, равное $-\sqrt{3}p_0$, будет иным.

§ 2.5. Гравитационные линзы, не обладающие сферической симметрией

Предположение о сферической симметрии существенно упрощает исследование ГЛ, но в реальных условиях оно практически никогда не выполняется. Ее отсутствие скорее характерно для ГЛ, особенно создаваемых протяженными образованиями (галактиками, звездными скоплениями и т. д.). Заметим, что и компактные объекты (звезды) также не являются идеальными сферами. В последнем случае нарушения симметрии обычно слабые, однако вопрос о том, как они повлияют на выводы предыдущих параграфов, требует специального рассмотрения.

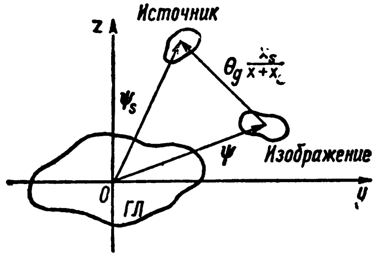
Для сферически симметричной среды траектории лучей всегда лежат в плоскостях, проходящих через источник излучения и центр симметрии среды. В силу этого угол преломления направлен к центру среды и возникает аксиальная симметрия задачи. Это позволяло при анализе фокусировки пользоваться скалярной величиной $\Theta_g(p)$ и рассматривать геометрию лучей в одной единственной плоскости. Для ГЛ, не обладающих сферической симметрией, угол отклонения в общем случае уже не направлен к центру тяготения. Поэтому при исследовании эффекта фокусировки мы должны рассматривать векторную величину $\boldsymbol{\Theta}_g(\mathbf{p})$, которую для небольших углов отклонения можно определить аналогично тому, как это было сделано для скалярного угла по формуле (2.33):

$$\boldsymbol{\Theta}_g(\mathbf{p}) = -\frac{2}{c^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \nabla_{\mathbf{p}}\Phi(\mathbf{p}, x)\,dx. \tag{2.76}$$

Известно, что потенциал тяготения $\Phi(\mathbf{r})$ произвольного распределения массы $\delta(\mathbf{r})$, сосредоточенной внутри объема W, определяется по формуле

$$\Phi(\mathbf{r}) = -G\int\limits_{W} \frac{\delta(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d\mathbf{r}'.$$

Подставляя это выражение в (2.76) и интегрируя по x, получаем формулу, связывающую угол преломления луча $\boldsymbol{\Theta}_g(\mathbf{p})$ с введенной



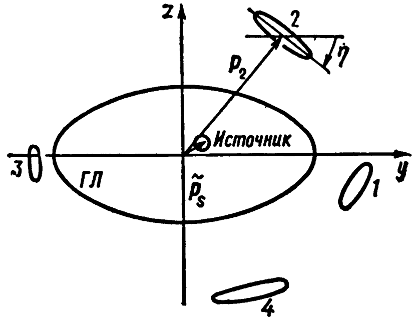


Рис. 2.21. Несимметричная ГЛ, источник и его изображение

Рис. 2.22. Четыре изображения кругового источника в сфероидальной ГЛ

ранее поверхностной плотностью массы $\sigma(\rho)$:

$$\Theta_g(\rho) = -\frac{4G}{c^2}\int\limits_{\Sigma_w} \frac{\rho - \rho'}{(\rho - \rho')^2}\sigma(\rho')\,d\rho'. \qquad (2.77)$$

где Σ_w — проекция объема W на небесную сферу.

Как отмечалось в § 2.2, при анализе структуры изображений, видимых сквозь линзу, удобнее пользоваться системой координат, в которой ось x совмещается не с источником, а с наблюдателем (см. рис. 2.4, *б*). В новой системе координат аберрационное уравнение будет иметь вид, аналогичный (2.25):

$$\tilde{\rho}_s = \rho + \tilde{x}\Theta_g(\rho), \qquad (2.78)$$

но с углом отклонения $\Theta_g(\rho)$, определяемым уже по формулам (2.76) или (2.77). Если обе части уравнения (2.78) поделить на x, можно перейти к угловым координатам ψ на небесной сфере:

$$\psi_s = \psi + \frac{\tilde{x}}{x}\Theta_g(x\psi). \qquad (2.79)$$

Здесь $\psi_s = \rho_s/(x + x_s)$ характеризует невозмущенное положение источника, а $\psi = \rho/x$ — его видимое положение после прохождения луча сквозь ГЛ (рис. 2.21).

Картина видимых сквозь ГЛ изображений определяется путем решения векторного уравнения (2.78) относительно ρ (либо уравнения (2.79) относительно ψ). Каждому действительному корню ρ_j $(\tilde{\rho}_s)$ соответствует свое изображение точечного излучателя, находящегося в точке $\tilde{\rho}_s$. Если конец вектора $\tilde{\rho}_s$ перемещать вдоль границы протяженного источника, то концы векторов ρ_j опишут контуры наблюдаемых изображений. Эти изображения могут быть либо изолированными, либо перекрывать друг друга.

При фокусировке происходит не только сложная деформация видимого изображения, но и перераспределение яркости. Распределение яркости по углам наблюдения характеризуется лучевой интенсивностью $I(\psi)$, которая преобразуется в ГЛ по закону [49]

$$I(\psi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} I_s(\psi_s)\,\delta\{\psi_s-[\psi+(\tilde{x}/x)\,\Theta_g(x\psi)]\}\,d\psi_s, \qquad (2.80)$$

где $I_s(\psi_s)$ — невозмущенное распределение лучевой интенсивности протяженного источника, $\delta\{z\}$ — дельта-функция. Полная интенсивность в точке наблюдения определяется путем интегрирования $I(\psi)$ по всей светящейся площади на небесной сфере. Согласно (2.80) для источника, имеющего равномерное распределение яркости, будет наблюдаться такое же распределение и по всем видимым изображениям. Усиление излучения происходит за счет увеличения наблюдаемых размеров изображений источника по сравнению с невозмущенными. Формулу (2.80) необходимо использовать, когда мы имеем дело с достаточно протяженными источниками со сложным распределением яркости. Однако для источников с малыми угловыми размерами (мы их будем называть точечными) можно произвести некоторые упрощения. Предположим, что при фокусировке наблюдается несколько изолированных компактных изображений «точечного» источника. Обозначим через $\tilde{\mathbf{P}}_s$ положение центра источника на небесной сфере. Из аберрационного уравнения (2.78) найдем положение «центра» j-го изображения $\mathbf{P}_j$:

$$\tilde{\mathbf{P}}_s=\mathbf{P}_j+\tilde{x}\Theta_g(\mathbf{P}_j).$$

Если конец вектора $\delta\tilde{\rho}_s=\tilde{\rho}_s-\tilde{\mathbf{P}}_s$ перемещать вдоль границы источника, то конец вектора $\delta_{\mathrm{p}_j}=\mathrm{p}_j-\mathbf{P}_j$ опишет контуры j-го изображения, которые легко определить, линеаризуя аберрационное уравнение (2.78):

$$\delta\tilde{\rho}_s=\delta\mathrm{p}_j+\tilde{x}\,(\delta\mathrm{p}_j\nabla)\,\Theta_g(\mathbf{P}_j), \qquad (2.81)$$

где $\nabla=\mathbf{e}_y\dfrac{\partial}{\partial y}+\mathbf{e}_z\dfrac{\partial}{\partial z}$, $\mathbf{e}_y$ и $\mathbf{e}_z$ — орты вдоль осей y и z. Линеаризованное уравнение (2.81) позволяет исследовать форму наблюдаемых изображений и рассчитать коэффициент усиления по каждому из них. Для «точечных» источников можно считать распределение яркости по изображениям, равномерным и равным распределению яркости источника. Тогда согласно (2.80) коэффициент усиления j-го изображения определяется как отношение площадей Σ_j (изображения) и Σ_s (источника): $q_j=\Sigma_j/\Sigma_s$. Это отношение на основе формулы (2.81) выражается через якобиан преобразования от переменных p_j к переменным $\tilde{\rho}_s$:

$$q_j=|\partial(y_j,z_j)/\partial(\tilde{y}_s,\tilde{z}_s)|=|\partial(\tilde{y}_s,\tilde{z}_s)/\partial(y_j,z_j)|^{-1}.$$

С учетом аберрационной зависимости (2.78) окончательно получим

$$q_j=\left|\left(1+\tilde{x}\frac{\partial\Theta_{gy}}{\partial y}\right)\left(1+\tilde{x}\frac{\partial\Theta_{gz}}{\partial z}\right)-\tilde{x}^2\left(\frac{\partial\Theta_{gy}}{\partial z}\right)^2\right|^{-1}_{\mathrm{p}=\mathbf{P}_j}. \qquad (2.82)$$

Полный коэффициент усиления равен сумме q_j отдельных изображений:

$$q = \sum_j q_j. \tag{2.83}$$

В качестве примера рассмотрим деформацию изображений компактного источника, имеющего форму диска радиуса $\tilde{R}_s$ (в плоскости ГЛ) и смещенного в точку $\tilde{\mathbf{P}}_s$. С помощью (2.81) найдем уравнение границы j-го изображения, описанной вокруг ее центра $\mathbf{P}_j$:

$$\tilde{R}_s^2 = b_{11}\delta y_j^2 + 2b_{12}\delta y_j \delta z_j + b_{22}\delta z_j^2. \tag{2.84}$$

Здесь

$$\begin{aligned} b_{11} &= [(1 + \tilde{x}\partial\Theta_{gy}/\partial y)^2 + \tilde{x}^2 (\partial\Theta_{gy}/\partial z)^2]_{\mathbf{p}=\mathbf{P}_j}, \\ b_{22} &= [(1 + \tilde{x}\partial\Theta_{gz}/\partial z)^2 + \tilde{x}^2 (\partial\Theta_{gz}/\partial y)^2]_{\mathbf{p}=\mathbf{P}_j}, \\ b_{12} &= \tilde{x}(\partial\Theta_{gy}/\partial z)\,[2 + \tilde{x}(\partial\Theta_{gy}/\partial y + \partial\Theta_{gz}/\partial z)]_{\mathbf{p}=\mathbf{P}_j}. \end{aligned} \tag{2.85}$$

Уравнение (2.84) представляет собой уравнение эллипса, повернутого на угол η, который определяется из соотношения

$$\operatorname{tg} 2\eta = 2b_{12}/(b_{11} - b_{22}). \tag{2.86}$$

Явных выражений для полуосей эллипса $a_э$ и $b_э$ мы выписывать не будем ввиду их громоздкости. Коэффициент усиления j-го изображения определяется как отношение площадей эллипса и круга:

$$q_j = a_э b_э/\tilde{R}_s^2 = |b_{11}b_{22} - b_{12}^2|^{-1/2}, \tag{2.87}$$

что совпадает с расчетом по формуле (2.82). На рис. 2.22 приведена структура наблюдаемых изображений «точечного» источника, имеющего форму диска, для сфероидальной модели ГЛ [50].

Можно несколько упростить вычисления, если вместо векторов ввести в рассмотрение комплексные величины [50], которые мы будем обозначать теми же буквами, но с чертой сверху. Так, например, формула для угла преломления луча в поле тяготения точечной массы

$$\Theta_g(\mathbf{p}) = -\frac{4GM}{c^2}\frac{\mathbf{p}}{p^2}$$

в комплексной форме записывается так:

$$\bar{\Theta}_g(\bar{p}) = -\frac{4GM}{c^2}\frac{\bar{p}}{\bar{p}\bar{p}^*} = -\frac{4GM}{c^2}\frac{1}{\bar{p}^*}, \quad \bar{p} = y + iz$$

(знак * обозначает комплексное сопряжение).

Для произвольного распределения массы вместо (2.77) получим

$$\bar{\Theta}_g(\bar{p}) = -\frac{4G}{c^2}\int_{\Sigma_\omega}\frac{\sigma(y', z')}{(\bar{p} - \bar{p}')^*}\,dy'dz'. \tag{2.88}$$

Входящий в эту формулу интеграл называют комплексной функцией рассеяния [51, 53], которую будем обозначать как

$$\bar{\Theta}(\bar{\rho}) = \int_{\Sigma_w} \frac{\sigma(y', z')}{(\bar{\rho} - \bar{\rho}')} dy'dz'. \tag{2.89}$$

Угол преломления $\bar{\Theta}_g(\bar{\rho})$ и функция рассеяния $\bar{\Theta}(\bar{\rho})$ связаны простым соотношением $\bar{\Theta}_g(\bar{\rho}) = -(4G/c^2)\,\bar{\Theta}^*(\rho)$. Обратный переход к векторным величинам не представляет труда:

$$\Theta_g(\mathbf{p}) = -\frac{4G}{c^2}\{\mathrm{Re}[\bar{\Theta}(\bar{\rho})]\,\mathbf{e}_y - \mathrm{Im}[\bar{\Theta}(\bar{\mathbf{p}})]\,\mathbf{e}_z\}. \tag{2.90}$$

Комплексная функция рассеяния $\bar{\Theta}(\bar{\rho})$ по существу определяет все интересующие нас свойства ГЛ (число изображений источника, их положение, яркость и т. д.). Аберрационное уравнение и коэффициент усиления в комплексной форме имеют вид [51]

$$\bar{\rho}_s = \bar{\rho} - \frac{4G}{c^2}\tilde{x}\bar{\Theta}^*(\bar{\rho}) \tag{2.91}$$

и

$$q = \sum_j [D^2 - |F|^2]^{-1}_{\bar{\rho}=\bar{\mathbf{P}}_j}, \tag{2.92}$$

где

$$D = 1 - \frac{2G}{c^2}\tilde{x}\left(\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial y} + i\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial z}\right), \quad F = \frac{2G}{c^2}\tilde{x}\left(\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial y} - i\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial z}\right).$$

Для перехода от общих формул к конкретным результатам необходимо выбрать достаточно реалистическую модель распределения масс, которая, несмотря на отсутствие сферической симметрии, позволила бы вычислить функцию рассеяния $\bar{\Theta}(\bar{\rho})$. Согласно данным наблюдений для многих галактик характерна сфероидальная симметрия $\delta(\mathbf{r})$, ее мы и выбираем в качестве модели ГЛ. Уравнение поверхности сфероида (эллипсоид вращения) в собственной системе координат имеет вид

$$(z')^2 + (y')^2 + \frac{(x')^2}{1 - e_c^2} = R^2, \tag{2.93}$$

где e_c — эксцентриситет сфероида, R — бо́льшая полуось, $R\sqrt{1 - e_c^2}$ — меньшая полуось (рис. 2.23, *а*). Для удобства направление оси z в системе координат xyz выбрано так, чтобы ось симметрии сфероида x' лежала в плоскости $x0z$. Ориентация сфероида в пространстве при этом характеризуется только одним углом γ $(0 \leqslant \gamma \leqslant \pi)$. Далее предполагается, что плотность массы $\delta(\mathbf{r})$ внутри сфероида обладает такой же симметрией, как и граничная поверхность, т. е. $\delta(a_c) =$ $=$ const на сфероидальной поверхности, описываемой уравнением

$$(z')^2 + (y')^2 + \frac{(x')^2}{1 - e_c^2} = a_c^2, \quad 0 \leqslant a_c \leqslant R.$$

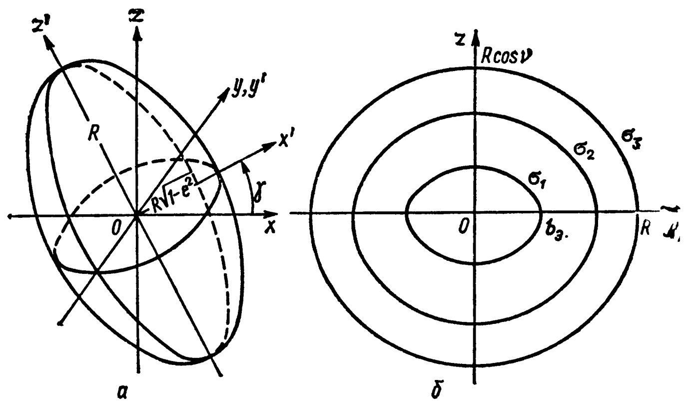


Рис. 2.23. Сфероидальная ГЛ (*а*) и изолинии поверхностной плотности (*б*)

Можно показать, что для данного $\delta(\mathbf{r})$ поверхностная плотность масс $\sigma(\mathbf{p})$ будет иметь эллиптическую симметрию с эксцентриситетом $e_c \sin\gamma$. Проекция граничной поверхности на небесной сфере имеет вид

$$y^2 + \frac{z^2}{\cos^2\nu} = R^2,$$

где $\cos\nu = (1 - e_c^2 \sin^2\gamma)^{1/2}$. Распределение поверхностной плотности задается условием $\sigma(b_э) = \mathrm{const}$ на эллипсе

$$y^2 + \frac{z^2}{\cos^2\nu} = b_э^2, \quad 0 \leqslant b_э \leqslant R \tag{2.94}$$

и $\sigma(b_э) = 0$ при $b_э > R$. Изолинии равной плотности представлены на рис. 2.23, *б*. Связь между объемной и поверхностной плотностями в рассматриваемой модели ГЛ такова [51]:

$$\sigma(b_э) = \frac{2(1-e_c^2)^{1/2}}{\cos\nu} \int_{b_э}^{\infty} \frac{\delta(a_c)\, a_c}{\sqrt{a_c^2 - b_э^2}}\, da_c. \tag{2.95}$$

Заметим, что в случае, когда ось симметрии сфероида x' совпадает с осью x, поверхностная плотность приобретает круговую симметрию ($\cos\nu = 1$) и ГЛ трансформирует изображения точно так же, как и в случае сферически симметричного распределения масс (в малоугловом приближении).

Расчет функции рассеяния с заданной плотностью $\sigma(b_э)$ приводит к следующему результату [51, 53]:

$$\overline{\Theta}(\overline{p}) = 2\pi\cos\nu \int_0^{b_э} \frac{\sigma(b)\, b\, db}{\sqrt{\overline{p}^2 - b^2\sin^2\nu}}, \tag{2.96}$$

где $b_э$ удовлетворяет уравнению (2.94).

Сфероидальная симметрия допускает любую зависимость плотности масс от радиального параметра a_c. В литературе обсуждались две достаточно простые модели: $\delta(a_c) = \text{const}$ (однородный сфероид) и $\delta(a_c) \sim a_c^{-1}$ (плотность убывает к периферии). Первая модель применяется для описания компактных ГЛ (звезды), а вторая — для протяженных образований типа звездных скоплений. Рассмотрим их несколько подробнее, начав с однородного сфероида:

$$\delta(a_c) = \begin{cases} \dfrac{3M}{4\pi(1-e_c^2)^{1/2} R^3}, & a_c \leqslant R; \\ 0 & a_c > R \end{cases} \tag{2.97}$$

(M — полная масса ГЛ).

Функция рассеяния, рассчитанная по формулам (2.95) и (2.96), имеет вид [51]

$$\bar{\Theta}(\bar{p}) = \begin{cases} \dfrac{3M}{4R\sin\nu}\left[\dfrac{2}{\xi} + \left(1 - \dfrac{1}{\xi^2}\right)\ln\dfrac{1+\xi}{1-\xi}\right], & b_э > R; \\ \dfrac{3M}{4R\sin\nu}\left[\dfrac{2}{\xi} - 2\zeta v + \left(1 - \dfrac{1}{\xi^2}\right)\ln\dfrac{(1+\xi)(\zeta - v)}{(1-\varsigma)(\zeta + v)}, \right. & b_э \leqslant R, \end{cases} \tag{2.98}$$

где $\xi = R\sin\nu/\bar{p}$, $v = \sqrt{1 - b_э^2/R^2}$, $\zeta = \cos\nu\,(y + iz/\cos^2\nu)/R\sin\nu$.

Применительно к звездам можно считать, что отклонения от сферической симметрии у таких ГЛ являются слабыми ($e_c \ll 1$) и, кроме того, тело звезды-линзы не пропускает излучения источника. В этом случае $|\xi| \ll 1$ и (2.98) существенно упрощается:

$$\bar{\Theta}(\bar{p}) \simeq \frac{M}{\bar{p}} + \frac{M\rho_e^2}{\bar{p}^3}, \tag{2.99}$$

где параметр $\rho_e = Re_c \sin\gamma/\sqrt{2}$, имеющий размерность длины, характеризует асимметрию ГЛ. Если вернуться к векторным обозначениям, то угол преломления и аберрационное уравнение в декартовой системе координат записываются так:

$$\boldsymbol{\Theta}_g(\mathbf{p}) = -\frac{2r_g}{p^2}\mathbf{p} - \frac{2r_g}{p^3}\rho_e^2(\cos 3\varphi\mathbf{e}_y + \sin 3\varphi\mathbf{e}_z) \tag{2.100}$$

и

$$\tilde{\boldsymbol{\rho}}_s = [(p - \tilde{l}^2/p)\cos\varphi - (\tilde{l}^2\rho_e^2/p^3)\cos 3\varphi]\,\mathbf{e}_y +$$
$$+ [(p - \tilde{l}^2/p)\sin\varphi - (\tilde{l}^2\rho_e^2/p^3)\sin 3\varphi]\,\mathbf{e}_z, \tag{2.101}$$

где по-прежнему $\tilde{l} = \sqrt{2r_g\tilde{x}}$ — радиус светящегося кольца, которое наблюдалось бы для сферически симметричной ГЛ при осевом расположении источника (см. § 2.2). Нахождение корней аберрационного уравнения (2.101), однако, удобнее производить не в декартовой, а в полярной системе координат, в которой это уравнение имеет более

Таблица 2.1. **Координаты изображений при различных положениях источника**

j	Источник					
	в центре ($\tilde\rho_s = 0$)		смещен вдоль оси y ($\tilde\rho_s \neq 0$, $\varphi_s = 0$)		смещен вдоль оси z ($\tilde\rho_s \neq 0$, $\varphi_s = \pi/2$)	
	p_j	φ_j	p_j	φ_j	p_j	φ_j
1	$\tilde l + \rho_e^2/2\tilde l$	0	$\tilde l + \frac{\tilde\rho_s}{2} + \frac{\rho_e^2}{2\tilde l}$	0	$\tilde l + \frac{\rho_e^2}{2\tilde l} - \frac{\tilde\rho_s^2 \tilde l}{2\rho_e^2}$	$-\arcsin \frac{\tilde\rho_s \tilde l}{2\rho_e^2}$
2	$\tilde l - \rho_e^2/2\tilde l$	$\frac{\pi}{2}$	$\tilde l - \frac{\rho_e^2}{2\tilde l} + \frac{\tilde\rho_s^2 \tilde l}{2\rho_e^2}$	$\arccos \frac{\tilde\rho_s \tilde l}{2\rho_e^2}$	$\tilde l + \frac{\tilde\rho_s}{2} - \frac{\rho_e^2}{2\tilde l}$	$\frac{\pi}{2}$
3	$\tilde l + \rho_e^2/2\tilde l$	π	$\tilde l - \frac{\tilde\rho_s}{2} + \frac{\rho_e^2}{2\tilde l}$	π	$\tilde l + \frac{\rho_e^2}{2\tilde l} - \frac{\tilde\rho_s^2 \tilde l}{2\rho_e^2}$	$\arcsin \frac{\tilde\rho_s \tilde l}{2\rho_e^2} + \pi$
4	$\tilde l - \rho_e^2/2\tilde l$	$\frac{3}{2}\pi$	$\tilde l - \frac{\rho_e^2}{2\tilde l} + \frac{\tilde\rho_s^2 \tilde l}{2\rho_e^2}$	$-\arccos \frac{\tilde\rho_s \tilde l}{2\rho_e^2}$	$\tilde l - \frac{\tilde\rho_s}{2} - \frac{\rho_e^2}{2\tilde l}$	$\frac{3}{2}\pi$

простой вид:

$$\tilde\rho_s = \left(p - \frac{\tilde l^2}{p} - \frac{\tilde l^2 \rho_e^2}{p^3}\cos 2\varphi\right)\mathbf{e}_p - \frac{\tilde l^2 \rho_e^2}{p^3}\sin 2\varphi\, \mathbf{e}_\varphi. \qquad (2.102)$$

Здесь $\mathbf{e}_p$ и $\mathbf{e}_\varphi$ — радиальный и азимутальный орты. Умножая правые и левые части (2.102) на $\mathbf{e}_p$ и $\mathbf{e}_\varphi$, получаем систему двух уравнений:

$$\tilde\rho_s \cos(\varphi - \varphi_s) = p - (\tilde l^2/p)\,[1 + (\rho_e^2/p^2)\cos 2\varphi], \qquad (2.103)$$
$$\tilde\rho_s \sin(\varphi - \varphi_s) = (\tilde l^2 \rho_e^2/p^3)\sin 2\varphi.$$

где угол φ_s, как и ранее (см. § 2.2), определяет направление смещения точечного источника. Уравнения (2.103) необходимо решить относительно p и φ, причем среди всех корней p_j следует, учитывая непрозрачность диска ГЛ, рассматривать только те, которые лежат вне Σ_w. Результаты расчета представлены в табл. 2.1, которая охватывает три случая: 1) источник находится на оси линза — наблюдатель ($\tilde\rho_s = 0$, φ_s — произвольно); 2) источник смещен от центра вдоль оси y ($\tilde\rho_s \neq 0$, $\varphi_s = 0$); 3) источник смещен вдоль оси z $\left(\tilde\rho_s \neq 0,\ \varphi_s = \frac{\pi}{2}\right)$. Значения корней p_j приведены с точностью до членов пропорционально e_c^2, а смещение $\tilde\rho_s$ предполагается достаточно малым ($\tilde\rho_s \ll$

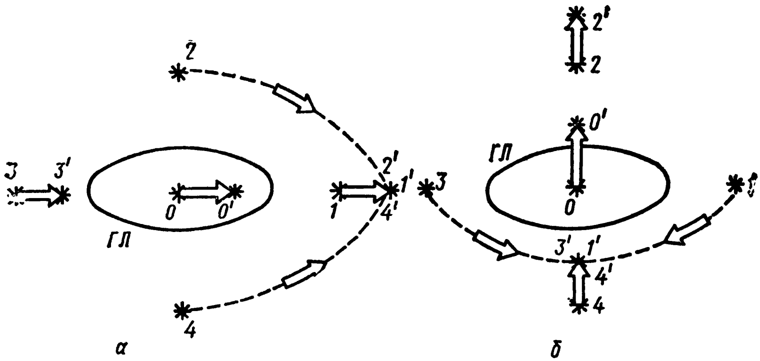


Рис. 2.24. Сдвиг изображений при перемещении источника их точки 0 в 0′ вдоль большой (*а*) и малой (*б*) полуосей эллипса

$\ll \tilde{l}$). Кроме того, на рис. 2.24 показаны структуры изображений для тех же случаев: источник перемещается вдоль осей y (рис. 2.24, *а*) и z (рис. 2.24, *б*). Если бы ГЛ была сферически симметричной ($e_c = 0$), изображение центрального источника ($\tilde{\rho}_s = 0$) представляло бы собой кольцо радиуса $\tilde{l}$. При нарушении симметрии ($e_c \neq 0$) происходит «катастрофа»: вместо плавной деформации сплошного кольцевого изображения возникают четыре светящиеся точки. По мере смещения источника вдоль одной из осей изображения перемещаются по траекториям, показанным на рисунках штриховыми линиями. При перемещениях источника вдоль оси y точки *2* и *4* «догоняют» точку *1* и, наконец, сливаются в одно изображение, когда $\tilde{\rho}_s = 2\rho_e^2/\tilde{l}$. Если $\tilde{\rho}_s > 2\rho_e^2/\tilde{l}$, то наблюдатель будет видеть только два изображения. Аналогичным образом деформируется картина и в том случае, когда источник смещается вдоль оси z. Однако при этом точки *1* и *3* «отстают» от источника и сливаются с точкой *4* опять-таки при $\tilde{\rho}_s = 2\rho_e^2/\tilde{l}$.

Для полного описания свойств ГЛ следует наряду с видимыми изображениями рассчитать еще их яркость. Это можно сделать, используя формулу (2.82), согласно которой с точностью до членов порядка e_c^2 получим

$$q_j = \left| 1 - \tilde{l}^4/p^4 - (6\rho_e^2\tilde{l}^4/p^6)\cos 2\varphi \right|^{-1}_{p=p_j}. \tag{2.104}$$

При центральном расположении источника ($\tilde{\rho}_s = 0$) вследствие разрыва сплошного кольца $\tilde{l}$ на четыре дискретных изображения исчезает особенность на оси линза — наблюдатель, т. е. фокальная полуось больше не существует. Используя данные табл. 2.1, определим коэффициенты усиления четырех изображений при $\tilde{\rho}_s = 0$:

$$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = \tilde{l}^2/4\rho_e^2. \tag{2.105}$$

Суммарный же коэффициент усиления по всем четырем изображениям

$$q = \sum_j q_j = \tilde{l}^2/\rho_e^2. \qquad (2.106)$$

Как отмечалось выше, при некоторых положениях источника возможно слияние его изображений, что является признаком возникновения каустических поверхностей (линий), на которых в приближении геометрической оптики интенсивность будет бесконечно большой. С помощью (2.104) определим геометрическое место точек в плоскости изображений $p = p(\varphi)$, для которых коэффициент усиления становится бесконечно большим ($q \to \infty$). Приравняв нулю знаменатель в (2.104), с точностью до членов порядка e_c^2 получим

$$p(\varphi)|_{q\to\infty} \simeq \tilde{l} + (3\rho_e^2/2\tilde{l})\cos 2\varphi. \qquad (2.107)$$

Слияние изображений происходит на кривой, описываемой уравнением (2.107). Для того чтобы найти уравнение каустики $\tilde{\rho}_s(\varphi_s)$ (геометрическое место точек положений источника, для которых $q \to \infty$), подставим (2.107) в аберрационное уравнение (2.101):

$$\begin{aligned} \tilde{y}_s(\varphi) &\simeq (2\rho_e^2/\tilde{l})\cos^3\varphi, \\ \tilde{z}_s(\varphi) &\simeq -(2\rho_e^2/\tilde{l})\sin^3\varphi. \end{aligned} \qquad (2.108)$$

Кривая, описываемая выражениями (2.108), является не чем иным, как астроидой (криволинейным ромбом). Крайние точки каустики, лежащие на осях y и z ($\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$), были получены нами ранее при рассмотрении смещений источника вдоль осей y и z. На рис. 2.25 слева показан криволинейный ромб, описываемый уравнением (2.108). Заметим, что с удалением источника и наблюдателя от ГЛ (с ростом $\tilde{x}$) форма «каустики» в плоскости изображений (2.107) приближается к кольцу, т. е. к тому виду, который наблюдается для сферически симметричной линзы. Каустика же в плоскости смещений источника стремится при этом к точке $\tilde{y}_s = \tilde{z}_s = 0$. Сфероидальная линза по своему действию все более и более приближается к сферически симметричной.

Учет любого механизма разброса лучей устраняет расходимости коэффициента усиления по мере приближения источника к каустике. Об этом уже говорилось в § 2.1, где был рассмотрен переход от точечного излучателя к источнику с конечными угловыми размерами. С протяженностью источника связан и ответ на такой вопрос: в каких случаях можно не учитывать малых отклонений от сферической симметрии ГЛ? Действительно, скачкообразный переход от сплошного кольца к четырем дискретным изображениям не позволяет сформулировать какие-либо неравенства для определения параметра асимметрии ρ_e. Если же центральный источник имеет определенные размеры, то вместо четырех точек наблюдатель увидит четыре протяженные области, имеющие вид изогнутых эллипсов (рис. 2.26). С увеличением радиуса источника размеры изображений также возрастают, причем

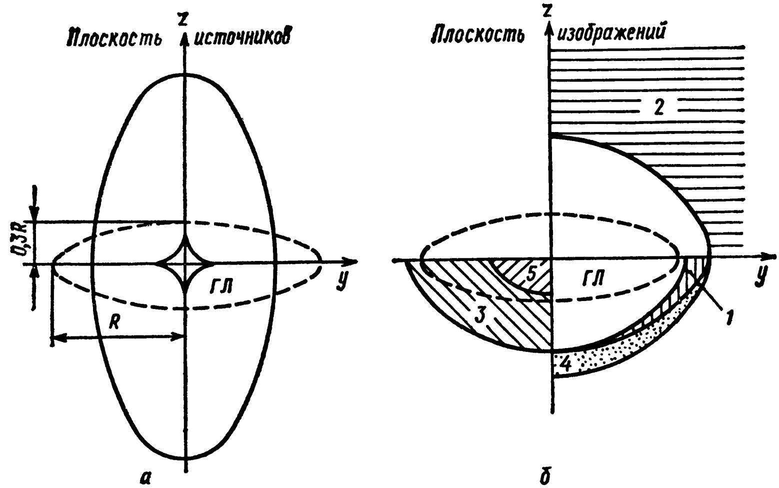


Рис. 2.25. Критические линии в плоскостях источника (*а*) и изображений (*б*), рассчитанные для эллиптической галактики E7

в азимутальном направлении значительно быстрее, чем в радиальном. На основе рис. 2.24 легко показать, что для источника с размерами $\tilde{R}_s = 2\rho_e^2/\tilde{l}$ светящиеся области сольются в одно сплошное кольцо, лишь слегка деформированное в меру нарушения симметрии. Таким образом, мы приходим к следующему выводу. Если нарушения симметрии таковы, что $\rho_e^2 < \tilde{R}_s\tilde{l}/2$, то несферичность ГЛ можно не учитывать. Соответствующие требования к эксцентриситету сфероида записываются так:

$$e_c^2 < \tilde{R}_s\tilde{l}/R^2 \sin^2 \gamma. \tag{2.109}$$

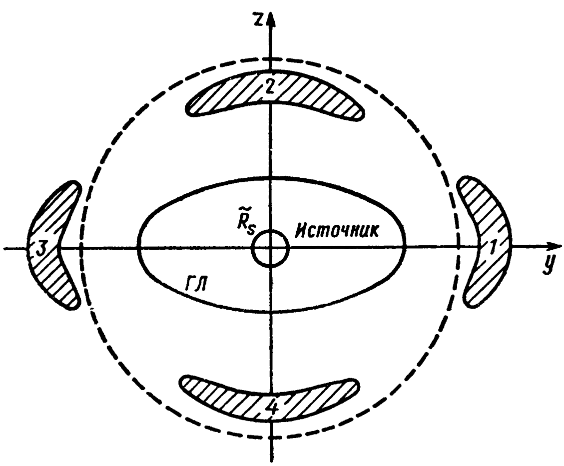


Рис. 2.26. Четыре внешних изображения кругового источника в сфероидальной ГЛ (штриховой линией показано кольцевое изображение точечного источника в сферически симметрнчной ГЛ)

Радиус кольца $\tilde{l}$, как правило, близок к радиусу диска ГЛ, т. е. $\tilde{l} \sim R$, а $\sin^2\gamma$ можно считать примерно равным единице (это усилит требование к малости e_c). С учетом этих замечаний оценка (2.109) приобретает вид $e_c < \sqrt{R_s/R}$.

Перейдем теперь к рассмотрению ГЛ, создаваемых протяженными объектами, не накладывая каких-либо ограничений на степень асимметрии сфероидального распределения. Таковой, например, является модель галактики, предложенная Шмидтом [52], с объемной плотностью, убывающей к периферии по закону

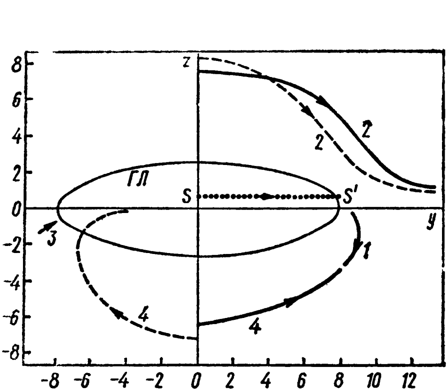
$$\delta(a_c) = \begin{cases} \dfrac{M}{2\pi(1-e_c^2)^{1/2} R^2} \dfrac{1}{a_c}, & a_c \leqslant R; \\ 0, & a_c > R. \end{cases} \tag{2.110}$$

Функция рассеяния, вычисленная для данного распределения массы по формулам (2.95) и (2.96), имеет вид [51]

$$\bar{\Theta}(\bar{p}) = \begin{cases} \dfrac{M}{R\sin\nu}\left[\ln\dfrac{1+\xi}{1-\xi} + \dfrac{1}{\xi}\ln(1-\xi^2)\right], & b_э > R; \\ \dfrac{M}{R\sin\nu}\left\{\ln\dfrac{(1+\xi)(\zeta-v)}{(1-\xi)(\zeta+v)} + \dfrac{1}{\xi}\ln\left[(1-\xi^2)\dfrac{\xi\zeta+v}{\xi\zeta-v}\right] + \right. \\ \left. +\zeta\ln\dfrac{1-v}{1+v}\right\}, & b_э \leqslant R. \end{cases} \tag{2.111}$$

Верхняя формула описывает внешние, а нижняя — внутренние по отношению к ГЛ лучи. Галактика-линза предполагается прозрачной для фокусируемого излучения.

Дальнейший расчет производится по той же схеме, что и в случае малой асимметрии, но получить аналитические решения аберрационного уравнения без малого параметра уже не удается. Приведем поэтому результаты численного счета, проведенного в работах [51, 53] для эллиптической галактики E7, которая рассматривалась в качестве ГЛ. Расстояние от Земли до E7 выбиралось равным примерно 1 000 Мпк, таким же предполагалось и расстояние от ГЛ до источника излучения. Масса галактики $M = 5 \cdot 10^{11} M_\odot$, наибольшая полуось $R = 8$ кпк, а отношение полуосей сфероида $(1 - e_c^2)^{1/2} = 3/10$. Галактика-линза расположена к нам ребром, т. е. $\gamma \simeq \pi/2$. Анализ корней аберрационного уравнения (2.91) показывает, что число видимых изображений может изменяться от пяти до одного в зависимости от положения источника относительно центра ГЛ. На рис. 2.25 представлены области расположения источника, в пределах которых наблюдается различное число изображений. Предполагается, что источник находится в первом квадранте. Если источник расположен в пределах криволинейного ромба, то будет наблюдаться пять изображений, расположенных в соответствующих областях в плоскости изображений. По мере приближения источника к границе ромба изображения *1* и *4* сближаются и, наконец, сливаются на кривой, разделяющей области *1* и *4* в плоскости изображений.



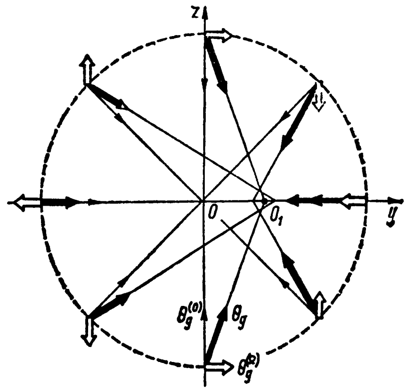


Рис. 2.27. Эллиптическая галактика Е7 в качестве ГЛ:

SS' — траектория источника; *1—4* — траектории изображений (сплошные кривые — сфероидальная ГЛ, штриховые — сферически симметричная ГЛ, единица масштаба равна 1 кпк)

Рис. 2.28. Ориентация векторов $\theta_g^{(0)}$, $\theta_g^{(\Omega)}$ и $\theta_g = \theta_g^{(0)} + \theta_g^{(\Omega)}$ для лучей, имеющих равные по модулю прицельные параметры

Это происходит тогда, когда источник точно попадет на границу ромба. При переходе источника в область, расположенную между эллипсом и ромбом, изображения *1* и *4* исчезают и будут наблюдаться три изображения (*2*, *3* и *5*). Аналогичным образом происходят сближение, слияние и исчезновение изображений *3* и *5* при переходе источника через границу эллипса в плоскости источника. Границы областей, на которых изменяется число изображений за счет слияния их друг с другом, соответствуют каустическим поверхностям. Здесь, как обычно, возникают расходимости коэффициента усиления, связанные с геометрооптическим приближением. На рис. 2.27, взятом из [50], показаны траектории четырех внешних изображений, перемещающихся вследствие движения источника. В отличие от рис. 2.24 кривые уже не являются симметричными, поскольку источник перемещается по прямой, не совпадающей ни с одной из осей симметрии ГЛ. Видно, что при определенном положении источника изображения *1* и *4* сливаются и исчезают. Общее число изображений при этом уменьшается на два.

На основе рассмотренной сфероидальной линзы может быть рассчитана и более сложная модель ГЛ — спиральная галактика, видимая с ребра. Так, в работах [50, 53] такая линза представлена в виде суммы двух компонентов: центральное сферическое ядро и гало в виде сильно сжатого сфероида. В этом случае так же, как и для сфероидальной линзы, в зависимости от положений источника будет наблюдаться от пяти до одного изображения.

Заметим, что рассмотренные выше модели отнюдь не исчерпывают все возможные случаи линзового эффекта. Так как роль ГЛ могут выполнять самые различные космические объекты, возможны и самые разнообразные модели линз. Так, в работе [54] проведено детальное исследование специальных асимметричных ГЛ, состоящих из двух точечных масс. В эту схему укладываются двойные звезды или близкие пары галактик. В работах [55—57] проведен анализ гравитационных эффектов так называемых космических струн, которые могут возникать в результате фазовых переходов в очень ранней Вселенной. Среди возможных моделей рассмотрена и такая экзотическая, как гипотетический нейтринный космический объект, состоящий из вырожденного нейтринного газа [58].

§ 2.6. Вращающаяся ГЛ

Вращение приводит к своеобразной асимметрии ГЛ даже в том случае, когда небесное тело, создающее линзовый эффект, является сферически симметричным. Эффективный показатель преломления с учетом вращения гравитирующей массы определяется по формуле (1.34):

$$n_g(\mathbf{r}) = 1 + r_g/r + \mathbf{e}_s\mathbf{\Gamma}.$$

Угол преломления $\Theta_g(\mathbf{p})$ вычисляется обычным образом и в соответствии с выражением для n_g имеет две составляющие:

$$\Theta_g(\mathbf{p}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \nabla_{\mathbf{p}} n_g(\mathbf{p}, x)\,dx = \Theta_g^{(0)}(\mathbf{p}) + \Theta_g^{(\Omega)}(\mathbf{p}). \qquad (2.112)$$

Мы обозначили через $\Theta_g^{(0)}$ угол преломления без учета вращения (ранее этот угол обозначался просто Θ_g), а через $\Theta_g^{(\Omega)}$ — ту часть полного угла, которая связана с вращением ГЛ. В приближении малых углов интегрирование в (2.112) производится, как и ранее, вдоль невозмущенных траекторий лучей, т. е. по прямым, параллельным оси x. Начало координат y, z на небесной сфере совмещается с центром ГЛ, а ось z ориентируется так, чтобы она совпала по направлению с проекцией момента импульса $\mathbf{L}$ на плоскость $y0z$. Таким образом, составляющими вектора $\mathbf{L}$ на оси координат будут

$$L_x = L\cos\gamma; \quad L_z = L\sin\gamma; \quad L_y = 0$$

(γ — угол между осью вращения звезды и направлением линза — наблюдатель, с которым совмещается ось x).

Расчет дополнительного угла преломления приводит к следующему результату [59—60]:

$$\Theta_g^{(\Omega)}(\mathbf{p}) = -\frac{2r_g\rho_\Omega}{p^2}(\cos 2\varphi\mathbf{e}_y + \sin 2\varphi\mathbf{e}_z), \qquad (2.113)$$

где $\rho_\Omega = L_z/Mc$ — проекция параметра Керра на ось z (см. формулу (1.30)).

Напомним выражение для угла $\Theta_g^{(0)}(\mathbf{p})$, которое в выбранных координатах записывается следующим образом:

$$\Theta_g^{(0)}(\mathbf{p}) = -\frac{2r_g}{p}(\cos\varphi\mathbf{e}_y + \sin\varphi\mathbf{e}_z). \qquad (2.114)$$

Различные зависимости $\Theta_g^{(0)}$ и $\Theta_g^{(\Omega)}$ от φ приводят к тому, что результирующий вектор Θ_g уже не будет направлен к центру ГЛ. Рассмот-

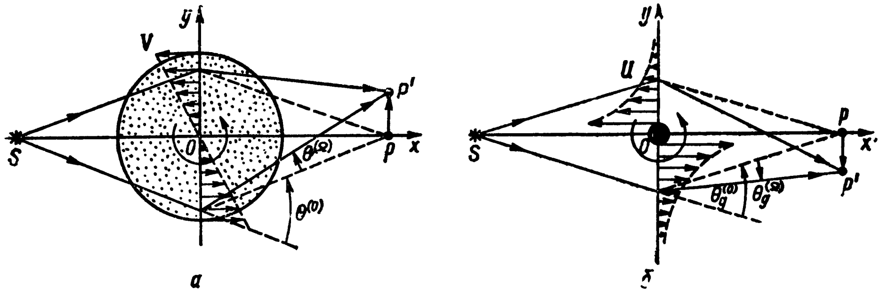


Рис. 2.29. Эффект увеличения во вращающемся диэлектрике (*а*) и в гравитационном поле (*б*)

рим вначале геометрию лучей в системе координат, в которой источник находится на оси x, а наблюдатель перемещается в плоскости наблюдения. Спроектируем на плоскость ГЛ все преломленные лучи и смещения наблюдателя ($\rho \to \tilde{\rho}$). Несложный расчет с учетом малости ρ_Ω/p показывает, что прямая (проекция преломленного луча), проходящая через точку (p, φ) под углом Θ_g (ρ), пересекает ось y в плоскости ГЛ на расстоянии

$$y \simeq \rho_\Omega\left(1 - 2\frac{\rho_\Omega}{p}\cos\varphi\right). \tag{2.115}$$

Совокупность прямых с одинаковым значением p концентрируется в некоторой области с центром в точке $y = \rho_\Omega$ (0_1 на рис. 2.28) и шириной $\Delta y \simeq 4\rho_\Omega^2/p$ вдоль оси y. Нетрудно рассчитать размеры области и вдоль оси z. Точка пересечения двух прямых ($y = \rho_\Omega$ и проходящей через точку (p, φ)) имеет ординату $z \simeq (2\rho_\Omega^2/p)\sin\varphi$, а ширина области

$$\Delta z \simeq 4\rho_\Omega^2/p \simeq \Delta y. \tag{2.116}$$

Из приведенного анализа можно сделать вывод, что для вращающейся ГЛ фокальная полуось размывается в некоторую фокальную область. Центр области в плоскости наблюдения смещается от оси ГЛ в экваториальной плоскости по направлению вращения на величину $\tilde{y} = \rho_\Omega$. Заметим, что согласно (2.115) положение точки 0_1 не зависит от p. Размер фокальной области при заданных расстояниях x и x_s можно оценить, если в (2.116) взять значение p, равное $\tilde{l}$, т. е. той величине, которая была бы в отсутствие вращения. В результате получим

$$\Delta\tilde{y} \simeq \Delta\tilde{z} \simeq 4\rho_\Omega^2/\tilde{l}. \tag{2.117}$$

Прежде чем анализировать структуру фокальной области, рассмотрим более простую задачу о траекториях лучей в экваториальной плоскости $x0y$ (рис. 2.29). Здесь возникает на первый взгляд непонятная ситуация: место пересечения лучей, имеющих одинаковые прицельные параметры, смещается от оси ГЛ в сторону, противоположную направлению вращения, в точку $\tilde{y} = -\rho_\Omega$! Разрешение кажущегося противоречия состоит в том, что дополнительное преломление луча, распространяющегося в движущейся среде, возникает за счет градиента скорости в перпендикулярном к лучу направлении. Но при вращении «настоящей» среды как целого скорость возрастает с удалением от оси, а при вращении «среды», эквивалентной полю тяготения, линейная скорость убывает с увеличением расстояния (дифференциальное вращение). Различные направления поперечных градиентов скорости в сравниваемых случаях и противоположные смещения точек пересечения лучей хорошо видны на рис. 2.29. Теперь становятся понятными и изменения ориентации вектора $\Theta_g^{(\Omega)}$ на рис. 2.28: этот вектор отслеживает направление поперечного градиента скорости $\mathbf{v}$. Схема преломления лучей на рис. 2.28 позволяет представить себе и структуру изображений источника. Допустим, что наблюдатель находится на оси y вне области фокусировки. Тогда он увидит только две светящиеся точки, создаваемые лучами, идущими с направлений $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$. Если же наблюдатель окажется внутри интервала $\Delta\tilde{y}$ в окрестности $\tilde{y} = \rho_\Omega$, он обнаружит еще два точечных изображения с симметричными азимутами $\pm\varphi \neq 0, \pi$, т. е. общее число изображений может быть равно двум или четырем.

Для более подробного анализа картины, наблюдаемой сквозь вращающуюся ГЛ, перейдем к системе координат с неподвижным наблюдателем и перемещающимся источником. В этой системе координат векторное аберрационное уравнение записывается так:

$$\tilde{\boldsymbol{\rho}}_s = \mathbf{p} + \tilde{x}\,[\Theta_g^{(0)}(\mathbf{p}) + \Theta_g^{(\Omega)}(\mathbf{p})]. \tag{2.118}$$

Проектируя (2.118) на оси y и z, получаем систему двух уравнений [60]:

$$\tilde{\rho}_s \cos\varphi_s = \left(p - \frac{\tilde{l}^2}{p}\right)\cos\varphi - \frac{\rho_\Omega \tilde{l}^2}{p^2}\cos 2\varphi, \tag{2.119}$$

$$\tilde{\rho}_s \sin\varphi_s = \left(p - \frac{\tilde{l}^2}{p}\right)\sin\varphi - \frac{\rho_\Omega \tilde{l}^2}{p^2}\sin 2\varphi. \tag{2.120}$$

Для оценки можно положить $L \sim M\Omega R^2$. При этом $\rho_\Omega \sim Rv/c$, где $v = \Omega R$ — периферийная линейная скорость вращающегося тела. Поскольку для обычных звезд всегда $v/c \ll 1$, имеем $\rho_\Omega \ll R \lessapprox \tilde{l}$. Значения прицельных параметров $p < R$ в расчет не принимаются вследствие экранирующего действия звезды-линзы. Что касается значения смещения источника $\tilde{\rho}_s$, то оно может, вообще, быть любым.

Проанализируем систему уравнений (2.119), (2.120), считая, что излучатель перемещается вдоль оси y, т. е. $\varphi_s = 0, \pi$:

$$\tilde{\rho}_s = \left(p - \frac{\tilde{l}^2}{p}\right)\cos\varphi - \frac{\rho_\Omega \tilde{l}^2}{p^2}\cos 2\varphi, \tag{2.121}$$

$$0 = \left(p - \frac{\tilde{l}^2}{p}\right)\sin\varphi - \frac{\rho_\Omega \tilde{l}^2}{p^2}\sin 2\varphi. \tag{2.122}$$

Вообще, в левой части уравнения (2.121) мы должны были бы писать $\pm\tilde{\rho}_s$ («+» при $\varphi_s = 0$ и «—» при $\varphi_s = \pi$), т. е. рассматривать два уравнения. Однако достаточно исследовать одно уравнение (2.121), считая, что $\tilde{\rho}_s$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Уравнение (2.122) удовлетворяется, если: а) $\varphi = 0, \pi$, б) когда $p - \tilde{l}^2/p - (2\rho_\Omega\tilde{l}^2/p^2)\cos\varphi = 0$. Соответственно имеются две группы корней. Начнем с исследования корней группы а). Подстановка $\varphi = 0$ в (2.121) приводит к уравнению третьей степени для p:

$$p^3 - \tilde{\rho}_s p^2 - \tilde{l}^2(p + \rho_\Omega) = 0. \tag{2.123}$$

Уравнение для $\varphi = \pi$ получится путем замены в (2.123) p на $-p$. Поэтому, как и в предыдущих параграфах, считая величину p как положительной, так и отрицательной, можно ограничиться исследованием одного уравнения (2.123). Число изображений группы а) равно числу действительных корней уравнения (2.123), т. е. не может быть больше трех.

Рассмотрим вначале случай, когда источник и наблюдатель находятся на одной оси ($\tilde{\rho}_s = 0$). В этом случае число действительных корней уравнения (2.123) зависит от знака величины $Q = -{}^1/_{27} + (\rho_\Omega/2\tilde{l})^2$. Все три корня являются действительными, если $Q < 0$, т. е. при $\rho_\Omega < 2\tilde{l}/3\sqrt{3}$. Если же $\rho_\Omega > 2\tilde{l}/3\sqrt{3}$, уравнение (2.123) имеет только один действительный корень. Случай, соответствующий равенству $\rho_\Omega = 2\tilde{l}/3\sqrt{3}$, указывает на наличие двойного корня. При этом два изображения из трех сливаются друг с другом. Поясним физический смысл исчезновения одного из изображений. Такая ситуация может возникнуть в случае, когда ротационная добавка $\Theta_g^{(\Omega)}$ будет направлена против $\Theta_g^{(0)}$ и превысит статический угол преломления по абсолютному значению. При этом результирующий вектор Θ_g развернется от центра тяготения и преломленный луч вообще не пересечет оси x (изображение исчезнет). Поскольку векторы $\Theta_g^{(0)}$ и $\Theta_g^{(\Omega)}$ направлены навстречу друг другу только в области отрицательных y (см. рис. 2.28), лучи, идущие в области положительных y, будут по-прежнему пересекать ось x, создавая единственное изображение источника. Формальный анализ аберрационного уравнения (2.123) как будто бы указывает на такую возможность, но реальна ли она? Оценим скорость вращения, необходимую для выполнения неравенства $\rho_\Omega > 2\tilde{l}/3\sqrt{3}$, на примере однородного шара, для которого $L = \frac{2}{5}MR^2\Omega$ и $\rho_\Omega = (2Rv/5c)\sin\gamma$. Сравнивая $\rho_{\Omega\,\max} = \rho_\Omega|_{\gamma=\frac{\pi}{2}} = 2Rv/5c$ с $2\tilde{l}/3\sqrt{3}$, найдем, что требуемое неравенство будет удовлетворено, если $v/c > 5/3\sqrt{3} \simeq 0{,}96$. Такие скорости в принципе допустимы, но они выводят нас далеко за рамки принятого приближения (слабые поля, медленные вращения). Об особенностях

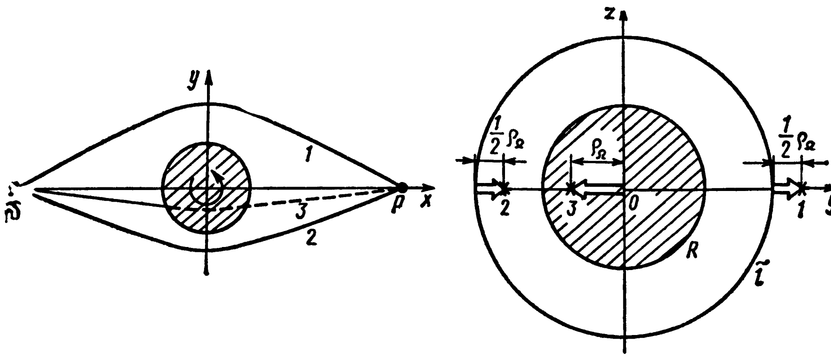


Рис. 2.30. Асимметрия изображений источника, наблюдаемого сквозь вращающуюся ГЛ (изображение *3* экранируется звездой)

лучевых траекторий в сильных полях черных дыр будет сказано далее, а пока вернемся к обычным ГЛ, для которых всегда $\rho_\Omega \ll 2\tilde{l}/3\sqrt{3}$. Уравнение (2.123) имеет при этом три действительных корня, но число видимых изображений тем не менее будет равно двум, так как луч с наименьшим значением экранируется диском звезды. Чтобы убедиться в этом, решим уравнение (2.123) при $\tilde{\rho}_s = 0$ приближенно, находя поправки первого порядка по ρ_Ω к корням нулевого приближения $p_{1,2}^{(0)} = \pm\tilde{l}$, $p_3^{(0)} = 0$. Уточненные значения корней определятся по формулам

$$p_{1,2} \simeq \pm\tilde{l} + \rho_\Omega/2, \quad p_3 \simeq -\rho_\Omega.$$

Но $\rho_\Omega \sim vR/c \ll R$, следовательно, луч с прицельным параметром p_3 должен был бы пройти сквозь диск звезды.

Поскольку минимальное значение $\tilde{l}$ равно $R \gg \rho_\Omega$, поправки к корням p_1 и p_2 немного смещают изображения: одно внутрь кольца, а второе вне его (речь идет о кольцевом изображении, которое возникло бы при $\rho_\Omega = 0$). Несмотря на малость смещений, деформация всей видимой картины происходит «катастрофически» резко: любое сколь угодно медленное вращение приводит к разрыву кольца и стягиванию разорванных дуг в две точки (рис. 2.30). Столь радикальный вывод существенно связан с предположением о точечном источнике излучения. Если источник имеет конечные размеры $\tilde{R}_s$, деформация кольца происходит без всяких катастроф: по мере возрастания ρ_Ω в кольце конечной ширины появляются перемычки, которые постепенно сужаются и, наконец, разрываются. Анализ наблюдаемой структуры изображения при этом аналогичен тому, который был проведен при рассмотрении сфероидальных линз. Здесь мы ограничимся только грубой оценкой ρ_Ω, приводящей к разрыву кольцевого изображения источника с размерами $\tilde{R}_s$ в плоскости ГЛ. Если считать в (2.123) $|p| \simeq \tilde{l}$, то ротационный член играет очень малую роль при $\rho_\Omega \ll \tilde{R}_s$ (кольцевое изображение сохраняется). По мере увеличения ρ_Ω изображение деформируется все сильнее, и при $\rho_\Omega \gg \tilde{R}_s$ кольцо превращается в два светящихся пятна с размерами порядка $\tilde{R}_s$. Таким образом, в качестве критического значения можно принять $\rho_\Omega \simeq \tilde{R}_s$.

Различие корней p_1 и p_2 в решении (2.123) по их абсолютному значению показывает, что лучи, огибающие ГЛ по вращению звезды и в противоположных направлениях, отклоняются на разные углы (см. рис. 2.30). Разность углов преломления очень мала, тем не менее она нарушает симметрию всей картины. Спрашивается, нельзя ли восстановить симметрию, сместив источник от оси x на некоторое значение $\tilde{\rho}_s$? Для ответа на этот вопрос рассмотрим приближенное решение (2.123) при малых значениях $\tilde{\rho}_s$ и ρ_Ω ($|\tilde{\rho}_s|$, $\rho_\Omega \ll \tilde{l}$):

$$p_{1,2} \simeq \pm \tilde{l} + \frac{1}{2}(\tilde{\rho}_s + \rho_\Omega) + \frac{1}{8\tilde{l}}(\tilde{\rho}_s - 3\rho_\Omega)(\tilde{\rho}_s + \rho_\Omega). \qquad (2.124)$$

Видно, что симметричные решения $\pm\tilde{l}$ возникают, если $\tilde{\rho}_s = -\rho_\Omega$ (аналогичный результат был получен при качественном анализе траекторий преломленных лучей на рис. 2.29).

Перейдем теперь к исследованию второй группы корней системы уравнений (2.121) и (2.122). Группа корней б) характеризуется следующими соотношениями:

$$p_{3,4} = \tilde{l}\sqrt{\rho_\Omega/\tilde{\rho}_s}, \quad \varphi_{3,4} = \pm \arccos\left[\frac{\tilde{l}}{2}\sqrt{\frac{\rho_\Omega}{\tilde{\rho}_s}}\left(\frac{1}{\tilde{\rho}_s} - \frac{1}{\rho_\Omega}\right)\right]. \qquad (2.125)$$

Приведенные формулы дают координаты второй пары изображений, общее число которых с учетом ранее найденных $p_{1,2}$ может быть, таким образом, равно четырем. Однако в отличие от $p_{1,2}$, существующих при любых положениях источника $\tilde{\rho}_s$, действительные корни $p_{3,4}$ появляются только на ограниченном интервале значений $\tilde{\rho}_s$. Прежде всего, поскольку $\tilde{\rho}_s$ стоит под знаком радикала, необходимо, чтобы оно было положительным ($\varphi_s = 0$). Далее, из условия $|\cos\varphi| \leqslant 1$ легко определить интервал допустимых значений $\tilde{\rho}_s$[20]:

$$\rho_\Omega(1 - 2\rho_\Omega/\tilde{l}) \leqslant \tilde{\rho}_s \leqslant \rho_\Omega(1 + 2\rho_\Omega/\tilde{l}). \qquad (2.126)$$

При этом если источник находится в точке с минимальным значением $\tilde{\rho}_s = \rho_\Omega(1 - 2\rho_\Omega/\tilde{l})$, то изображения p_3 и p_4 сливаются в точке с координатами $p_3 = p_4 \simeq \tilde{l} + \rho_\Omega/2$, $\varphi_3 = \varphi_4 = 0$, а при $\tilde{\rho}_s = \rho_\Omega(1 +$

---

[20] Существует еще одна полубесконечная область $\tilde{\rho}_s > \tilde{l}^2/4\rho_\Omega \gg \tilde{l}$, где $|\cos\varphi| < 1$, но в этой области $p \ll R$ и соответствующие изображения экранируются ядром ГЛ.

$+ 2\rho_\Omega/\tilde{l}$) слияние происходит с противоположной стороны ГЛ: $p_3 = p_4 \simeq \tilde{l} - \rho_\Omega/2$, $\varphi_3 = \varphi_4 = \pi$. Следовательно, при перемещении источника в интервале (2.126) две светящиеся точки опишут с противоположных сторон ГЛ замкнутое кольцо почти круговой формы с радиусом $p \simeq \tilde{l}$, перемещаясь от точки $\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_4$ $(\varphi_{3,4} = 0)$ к точке $\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_4$ $(\varphi_{3,4} = \pi)$.

Теперь можно представить себе полную картину изображений, которую увидит неподвижный наблюдатель, когда точечный источник перемещается вдоль оси y (разумеется, ту же картину увидит и перемещающийся вдоль оси y наблюдатель при неподвижном точечном источнике). При смещениях источника $\tilde{\rho}_s < \rho_\Omega\left(1 - \frac{2\rho_\Omega}{\tilde{l}}\right)$ видны две светящиеся точки, расположенные на оси y справа $(\varphi_1 = 0)$ и слева $(\varphi_2 = \pi)$ от центра ГЛ. Их координаты для малых смещений $\tilde{\rho}_s$ определяются по формуле (2.124). При попадании источника в точку $\tilde{\rho}_s = \rho_\Omega\,(1 - 2\rho_\Omega/\tilde{l})$ изображение $\mathbf{p}_1$ становится тройным, а при дальнейшем увеличении $\tilde{\rho}_s$ расщепляется на три отдельных изображения — $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_3$ и $\mathbf{p}_4$, причем $\mathbf{p}_1$ остается на оси y, а $\mathbf{p}_3$ и $\mathbf{p}_4$ перемещаются по противоположным от экваториальной плоскости дугам кольца почти круговой формы. Если источник находится внутри интервала смещений $\rho_\Omega\left(1 - 2\,\frac{\rho_\Omega}{\tilde{l}}\right) < \tilde{\rho}_s < \rho_\Omega\left(1 + 2\,\frac{\rho_\Omega}{\tilde{l}}\right)$, наблюдатель видит четыре светящиеся точки. Когда $\tilde{\rho}_s$ достигает значения $\tilde{\rho}_s = \rho_\Omega\left(1 + 2\,\frac{\rho_\Omega}{\tilde{l}}\right)$, снова происходит слияние трех корней, но уже $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$ и $\mathbf{p}_4$, а при $\tilde{\rho}_s > \rho_\Omega\left(1 + 2\,\frac{\rho_\Omega}{\tilde{l}}\right)$ останутся только два изображения (2.124).

Слияние корней указывает на то, что источник при своем движении пересекает каустическую поверхность, на которой коэффициент усиления становится бесконечно большим, т. е. сингулярность возникает и для вращающейся ГЛ. Однако в отличие от невращающейся звезды геометрическое место точек с $q \to \infty$ уже не будет совпадать с осью x, а смещается в окрестность точки $\tilde{y}_s = \rho_\Omega$. Для определения формы каустической поверхности обратимся к формуле (2.82). Коэффициент усиления q бесконечно возрастает при обращении в нуль якобиана преобразования $\partial\,(\tilde{y}_s, \tilde{t}_s)/\partial\,(y, z)$. С учетом формул (2.119) и (2.120) получим уравнение

$$\frac{\partial\,(\tilde{y}_s, \tilde{t}_s)}{\partial\,(y, z)} = 1 - \frac{\tilde{l}^4}{p^4} - 4\,\frac{\tilde{l}^4}{p^5}\,\rho_\Omega\cos\varphi - 4\,\frac{\tilde{l}^4}{p^6}\,\rho_\Omega^2 = 0, \qquad (2.127)$$

решение которого $p\,(\varphi)\,|_{q\to\infty}$ определяет прицельные параметры лучей в плоскости изображений, при которых $q \to \infty$:

$$p\,(\varphi)\,|_{q\to\infty} \simeq \tilde{l} + \rho_\Omega\cos\varphi + \frac{\rho_\Omega^2}{\tilde{l}}\left(1 - \frac{5}{2}\cos^2\varphi\right). \qquad (2.128)$$

Кривая, описываемая (2.128), имеет вид несколько деформированной окружности, смещенной в сторону положительных значений $\tilde{y}$. В линейном по ρ_Ω приближении — это окружность радиуса $\tilde{l}$ с центром в точке $y = \rho_\Omega$. Подставив найденную зависимость $p(\varphi)$ в аберрационные уравнения (2.119) и (2.120), получим выражения, описывающие в параметрической форме каустику в плоскости источника:

$$\tilde{y}_s \simeq \rho_\Omega \left(1 - 2 \frac{\rho_\Omega}{\tilde{l}} \cos^3 \varphi\right), \tag{2.129}$$

$$\tilde{z}_s \simeq 2 \frac{\rho_\Omega}{\tilde{l}} \sin^3 \varphi.$$

Кривая, описываемая выражением (2.129), является астроидой, с которой мы уже встречались при рассмотрении сфероидальной линзы (рис. 2.25). Однако для вращающейся ГЛ центр криволинейного ромба смещен вдоль оси y на величину $\tilde{y}_s = \rho_\Omega$ по направлению вращения (рис. 2.31). Крайние точки астроиды (2.129) совпадают с границами ранее нийденных интервалов $\Delta\tilde{y}$, $\Delta\tilde{z}$, на которых преломленные лучи группировались в окрестности точки $\tilde{y} = \rho_\Omega$ (формула (2.117)).

Зная положение изображений $\mathbf{p}_j(\tilde{\boldsymbol{\rho}}_s)$, легко определить изменение их яркости за счет линзового эффекта. Для этого необходимо использовать формулу (2.82), на основании которой с учетом (2.119) и (2.120) имеем

$$q_j = \left| 1 - \frac{\tilde{l}^4}{p^4} - 4 \frac{\tilde{l}^4}{p^5} \rho_\Omega \cos \varphi - 4 \frac{\tilde{l}^4}{p^6} \rho_\Omega^2 \right|^{-1}_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_j}. \tag{2.130}$$

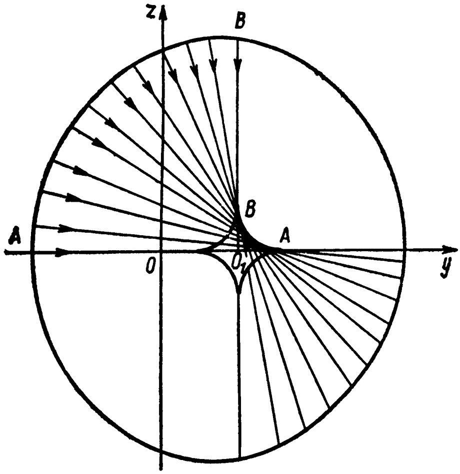
Исследуя структуру изображений источника, перемещающегося вдоль оси y, мы нашли координаты его изображений $\mathbf{p}_j$. Если теперь подставить найденные значения $\mathbf{p}_j(\tilde{\rho}_s)$ в (2.130), можно определить изменения яркости $q_j(\tilde{\boldsymbol{\rho}}_s)$. Для примера рассмотрим случай, когда источник находится точно в центре криволинейного ромба ($\tilde{\rho}_s = \rho_\Omega$, $\varphi_s = 0$). Согласно (2.124) и (2.125) в этом случае будут наблюдаться четыре светящиеся точки с координатами

$$\begin{aligned} &p_1 \simeq \tilde{l} + \rho_\Omega - \rho_\Omega^2/2\tilde{l}, \quad \varphi_1 = 0; \quad p_3 = \tilde{l}, \quad \varphi_3 = \pi/2; \\ &|p_2| \simeq \tilde{l} - \rho_\Omega - \rho_\Omega^2/2\tilde{l}, \quad \varphi_2 = \pi; \quad p_4 = \tilde{l}, \quad \varphi_4 = {}^3/_2)\,\pi. \end{aligned} \tag{2.131}$$

Подставив (2.131) в (2.130), получим

$$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = \frac{\tilde{l}^2}{4\rho_\Omega^2}. \tag{2.132}$$

Сравнивая формулы (2.105) и (2.132), видим, что так же, как и для сфероидальной линзы, при нахождении источника в центре криволинейного ромба яркости четырех изображений равны между собой.



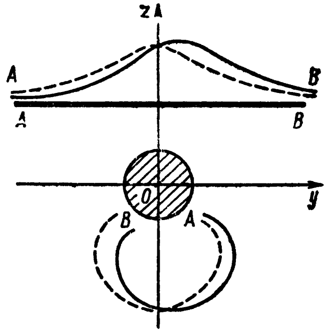


Рис. 2.31. Сечение каустической поверхности, возникающей во вращающейся ГЛ

Рис. 2.32. Линейный источник *AB*, наблюдаемый сквозь вращающуюся ГЛ (штриховые кривые — для неподвижной ГЛ)

Суммарное же увеличение яркости всех четырех изображений в этом случае

$$q = \sum_j q_j = \frac{\tilde{l}^2}{\rho_\Omega^2}. \tag{2.133}$$

Аналитическое исследование системы уравнений (2.119) и (2.120) при произвольном положении источника оказывается достаточно громоздким, поэтому для изучения структуры видимых изображений нередко прибегают к численному счету, задавая конкретные параметры ГЛ [60]. Мы ограничимся здесь только схематической иллюстрацией, поясняющей, как искажается форма протяженного источника при наблюдении его сквозь вращающуюся ГЛ. На рис. 2.32 штриховыми кривыми показано, как был бы виден линейный протяженный источник, ориентированный параллельно оси y, если бы линза не вращалась. Деформацию изображений, связанную с вращением, можно пояснить, если с помощью рис. 2.28 проследить ориентацию дополнительного угла $\Theta_g^{(\Omega)}$. При этом нужно помнить, что дополнительный сдвиг изображения источника происходит в сторону, противоположную вектору $\Theta_g^{(\Omega)}$[21]. Если, например, в области углов $0 < \varphi < \pi/2$ вектор $\Theta_g^{(\Omega)}$ имеет составляющую, направленную к экватору, то изображение деформируется так, что оно удаляется от экватора. Аналогично объясняется деформация видимой картины и в других квадрантах. Смещение прямой *AB* по оси z на рис. 2.32 выбрано насколь-

[21] Это легко понять, если вспомнить, что основная составляющая $\Theta_g^{(0)}$, направленная к центру тяготения, вызывает смещение изображения в направлении от центра.

ко большим, что она лежит вне каустического ромба. Поэтому вторая пара изображений отсутствует.

В работе [60] исследована более сложная задача вращающейся ГЛ, не обладающей сферической симметрией. В этом случае эффект вращения не проявляется столь сильно, так как отсутствие сферической симметрии уже само по себе резко изменяет структуру видимых изображений источника (см. § 2.4). Дополнительная асимметрия, вносимая вращением, проявляется лишь в незначительных смещениях изображений на небесной сфере. Число же изображений, как это показано в [60] на примере вращающегося сфероида, остается неизменным.

Мы рассмотрели траектории преломленных лучей, учитывая только проекцию момента импульса $\mathbf{L}$ на плоскость ГЛ, так как в рассматриваемом приближении угол Θ_g не зависит от L_x. Более точные расчеты [17, 61, 72] показывают, что в действительности эффект вращения проявляется и в том случае, когда невозмущенные траектории лучей параллельны оси вращения (L_g, $L_z = 0$, $L_x \neq 0$). Кроме того, напомним, что формула для статической составляющей $\Theta_g^{(0)} = 2r_g/p$ приближенная. В ней учтены только члены первого порядка по r_g/p. Вообще, квадратичные слагаемые, тоже следовало бы учитывать, поскольку ротационная добавка пропорциональна p^{-2} $\left(\Theta_g^{(\Omega)} \sim \frac{v}{c}\frac{r_g R}{p^2}\right)$. Однако учет квадратичных слагаемых в формуле для $\Theta_g^{(0)}$ не нарушит симметрии ГЛ и приведет лишь к незначительным изменениям $\tilde{l}$ в уравнениях (2.119), (2.120), сохраняя в силе весь последующий анализ. Что касается преломления лучей, первоначально параллельных оси вращения, то соответствующие углы определяются следующими соотношениями [17, 61, 72]:

а) для широтного отклонения (искривления в плоскости, проходящей через ось вращения)

$$\Theta_g \equiv \Theta_g^{(0)} = 2r_g/p$$

(без учета членов порядка r_g^2/p^2);

б) для закручивания луча (смещения плоскости траектории по долготе)

$$\varphi_\Omega = 4GL/c^3p^2 \equiv 2r_g\rho_\Omega/p^2 \sim \Theta_g^{(\Omega)}. \qquad (2.134)$$

Закручивание луча означает, что его траектория уже не является плоской кривой. Если точки излучения и наблюдения находятся достаточно далеко от ГЛ, лучевые траектории в начале и конце пути оказываются почти плоскими, но исходная и конечная соприкасающиеся плоскости не совпадают друг с другом, а пересекаются на оси вращения под углом φ_Ω. Пучок лучей, идущих от источника, располагается на конической поверхности, образующая которой представляет собой траекторию луча при отсутствии вращения (рис. 2.33). Можно сохранить прежнюю аппроксимацию истинных траекторий их прямолинейными асимптотами, идущими от плоскости преломления, но надо представить себе, что два прямолинейных конуса с вершинами в точках излучения и наблюдения поворачиваются относительно друг друга вокруг своей оси (вместе с лучами, идущими по образующим) на угол φ_Ω. В этом проявляется эффект увлечения при данной ориентации лучей.

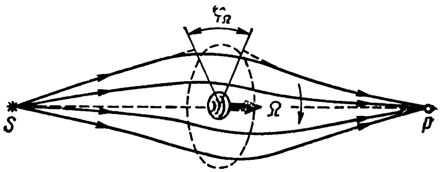


Рис. 2.33. Кручение лучей, распространяющихся вдоль оси вращающейся ГЛ

Закручивание не нарушает осевой симметрии всей совокупности траекторий. Поэтому наблюдатель, находящийся на оси вращения ГЛ, увидит точечный источник, также расположенный на оси вращения, в виде светящегося кольца прежнего радиуса $\tilde{l}$. Это единственная ситуация, при которой вращение ГЛ не влияет на структуру изображения.

С закручиванием луча связан еще один оптический эффект — вращение плоскости поляризации. Изменение поляризации волны, распространяющейся в неоднородной среде, впервые исследовано С. М. Рытовым в 1938 г. [62]. С тех пор к этому вопросу неоднократно возвращались в связи с различными конкретными задачами (см., например, [63] и имеющуюся там библиографию). Этот эффект применительно к распространению электромагнитных волн в гравитационном поле вращающейся массы также обсуждался многими авторами [17, 19, 61—67]. Не останавливаясь подробно на полученных результатах, заметим только, что для обычных звезд поворот плоскости поляризации очень мал. Действительно, эффект обусловлен только закручиванием луча, и его можно оценить углом φ_Ω [22]. Оценка по формуле (2.134) для луча, проходящего вблизи диска Солнца ($r_g \simeq 3 \cdot 10^5$ см, $L \simeq 6 \cdot 10^{48}$ г $\cdot$ см^2 $\cdot$ с$^{-1}$, $p = R = 7 \cdot 10^{10}$ см), дает величину $\varphi_\Omega \sim 6 \cdot 10^{-6}$ угл. с. Для звезд типа белых карликов φ_Ω примерно возрастает до 1″, что все же очень мало. Для лучей в экваториальной плоскости эффект отсутствует вовсе, так как лучи не испытывают кручения. Но и в том случае, когда луч проходит вне экваториальной плоскости перпендикулярно оси вращения, результирующий поворот плоскости поляризации между точками излучения и наблюдения равен нулю, если обе точки расположены на равном расстоянии от ГЛ или удалены от нее столь далеко, что влиянием гравитационного поля в местах их расположения можно пренебречь. Исчезновение эффекта в этом случае объясняется тем, что кручение луча до ГЛ и после нее происходит в противоположных направлениях.

Вращение плоскости поляризации в ГЛ пока не наблюдалось, и трудность его обнаружения заключается не только в том, что необ-

[22] Интересно, что плоскость поляризации лучей, идущих точно вдоль оси вращения, например испускаемого из полюса вращающегося тела, также поворачивается на угол $\frac{3}{2}\varphi_\Omega$ [17] на полубесконечном отрезке оси.

ходимо измерять очень малые величины. Для того чтобы иметь возможность обнаружить этот эффект, необходимо хотя бы в принципе знать с соответствующей точностью начальную поляризацию излучения источника. Ясно, что естественные излучатели для этой цели непригодны, а об искусственных нет смысла говорить до тех пор, пока не станут реальностью межзвездные полеты.

Неопределенность в исходной поляризации волны можно исключить, если измерять разность углов вращения на двух лучах, соответствующих двум изображениям источника. Этот вопрос был рассмотрен авторами [67] в связи с такой интересной задачей: можно ли, наблюдая деформированное изображение естественного излучателя, определить параметры ГЛ (массу гравитирующего тела, значение и ориентацию момента импульса $\mathbf{L}$)? В работе [67] показано, что для этого надо знать расстояния от ГЛ до источника и наблюдателя (их можно определить по красному смещению), относительную задержку сигналов, распространяющихся по разным траекториям (она может быть измерена путем сравнения временных изменений интенсивности изображений). Кроме того, надо произвести чисто астрометрические измерения, определив угловые координаты изображений ψ_i. Если же к перечисленным наблюдениям добавить поляризационные измерения, о которых говорилось выше, то получится полный набор данных, позволяющих определить параметры ГЛ.

Еще одним проявлением эффекта увлечения является изменение гравитационного запаздывания сигналов по сравнению с невращающейся линзой (см. § 1.4). Приведенные ниже формулы можно найти у И. Г. Дымковой в обзоре [61]. Для сигналов, проходящих в экваториальной плоскости, дополнительное «вращательное» запаздывание

$$\delta t_{\perp} = \mp \frac{r_g \rho_\Omega}{|p|\,c}, \tag{2.135}$$

где знак «—» соответствует лучам, идущим в направлении вращения (сигналы при этом ускоряются), а знак «+» — против него (сигналы тормозятся). Согласно формуле (2.124) при смещениях источника $\boldsymbol{\rho}_s = -\boldsymbol{\rho}_\Omega$ возникают симметричные решения $p_{1,2} = \pm\tilde{l}$. В этом случае относительное запаздывание между изображениями p_1 и p_2 равно удвоенному значению (2.135) при $|p| = \tilde{l}$: $\delta t_{\perp} = 2r_g\rho_\Omega/\tilde{l}c$. При распространении сигналов параллельно оси вращения «дополнительное» запаздывание оказывается квадратичным, т. е. пропорциональным ρ_Ω^2/p^2, что в некотором смысле аналогично поперечному эффекту Доплера в СТО:

$$\delta t_{\parallel} = -\frac{r_g}{c}\left(\frac{\rho_\Omega}{p}\right)^2. \tag{2.136}$$

Сравнение с поперечным эффектом Доплера станет понятным, если, положив $\rho_\Omega \sim Rv/c$, $p \sim R$, переписать (2.135) и (2.136) таким образом:

$$|\delta t_{\perp}| \sim \frac{r_g}{c}\left(\frac{v}{c}\right), \quad |\delta t_{\parallel}| \sim \frac{r_g}{c}\left(\frac{v}{c}\right)^2.$$

Отрицательное значение $\delta t_{\parallel}$ показывает, что учет вращения при осевом распространении всегда приводит к ускорению сигнала. Поскольку основная составляющая полного гравитационного запаздывания, определяемая по формуле (1.40), пропорциональна r_g/c, дополнительные слагаемые за счет вращения, содержащие множители v/c или даже $(v/c)^2$, для обычных звезд очень малы. В § 1.5 отмечалось, что значение δt, найденное путем радиолокации Меркурия, оказалось в полном соответствии с расчетным, равным приблизительно 200 мкс. Дополнительная же поправка, обусловленная вращением Солнца, составляет примерно $2 \cdot 10^{-10}$ с [61, 68], что лежит пока за пределами точности измерений.

§ 2.7. Гравитационные линзы, возникающие вокруг черных дыр

Рассматривая ГЛ, создаваемые обычными звездами, мы неоднократно обращали внимание на то, что изображения источника, близкие к центру, могут исчезнуть вследствие экранирующего действия непрозрачного диска звезды. Если источник имеет очень большие угловые размеры (светящийся фон), то ГЛ не меняет его яркости (см. § 2.5), но из всей светящейся области исключается силуэт непрозрачного ядра ГЛ, т. е. круг радиуса R. Спрашивается, как будет видна в таких же условиях ГЛ, создаваемая черной дырой?

Фактически вопрос о видимой «границе» черной дыры представляет основной интерес, коль скоро речь идет об эффекте ГЛ в реальных условиях, т. е. тогда, когда источник и наблюдатель находятся достаточно далеко от притягивающего центра. При больших удалениях изображение формируется в основном слабоискривленными лучами, проходящими повсюду на расстояниях $r \gg r_g$. Поэтому здесь применимо приближение слабого поля, и все расчеты предыдущих параграфов остаются в силе. Однако центральная часть ГЛ, возникающей вокруг черной дыры, искривляет лучи столь сильно, что при некоторых прицельных параметрах они вообще не смогут пройти мимо центра притяжения.

Для обычной звезды критическое значение прицельного параметра практически совпадает с ее радиусом (более точно — незначительно превышает его), поэтому все лучи с $p \leqslant R$ перехватываются непрозрачным ядром ГЛ. Но такое понятие, как «радиус» черной дыры, не имеет смысла, и определить критическое значение p по аналогии с обычной звездой нельзя. Его необходимо рассчитать на основе анализа лучевых траекторий в области расстояний $r \gtrsim r_g$, где приближение слабого поля уже неприменимо.

Сначала выясним, могут ли возникать в сферически симметричном гравитационном поле замкнутые круговые траектории, охватывающие притягивающий центр. В силу оптико-механической аналогии этот вопрос возникает естественным образом, если вспомнить, что в центральном поле притяжения наряду с неограниченными траекториями частиц могут существовать и ограниченные (финитные) траектории, в частности имеющие вид окружности.

Если круговая траектория луча существует, то угол $\nu(r)$ в законе Снеллиуса (2.2) должен быть тождественно равен $\pi/2$ и, следовательно, $rn(r) = \text{const}$. Отсюда вытекает, что круговые орбиты любого радиуса существуют, если

$$n(r) = \frac{\text{const}}{r},$$

т. е. имеет место полная аналогия с кулоновским потенциалом. Для всех остальных функций $n(r)$ радиусы круговых орбит r_0 должны быть определены как корни уравнения $\frac{d}{dr}[rn(r)] = 0$, выражающего условие стационарности $rn(r)$. Попробуем применить наши рассуждения к слабым полям тяготения, для которых $n_g(r) = 1 + r_g/r$. В этом случае $\frac{d}{dr}[rn_g(r)] = 1 \neq 0$ уравнение стационарности не имеет решения и, следовательно, круговые траектории в слабых полях не существуют.

Рассматривая сильные поля, необходимо обратиться к метрике Шварцшильда (1.17) либо к любой другой эквивалентной форме, например (1.18) (пока ограничимся случаем невращающихся черных дыр). Исследуя круговые траектории, положим в (1.17) $dr = d\theta = 0$ и перепишем ds^2 в виде

$$ds^2 = (1 - r_g/r)\,c^2dt^2 - dl^2,$$

где $dl^2 = r^2d\varphi^2$. Далее, полагая, как обычно $ds^2 = 0$, определим $c_g = dl/dt = c(1 - r_g/2)^{1/2}$ и $n_g(r) = (1 - r_g/r)^{-1/2}$. Вычислив корень уравнения $\frac{d}{dr}[r(1 - r_g/2)^{-1/2}] = 0$, найдем

$$r_0 = \frac{3}{2} r_g. \qquad (2.137)$$

Тот же результат можно получить, производя расчеты в изотропных координатах (1.18). При этом $n_g(r^*) = (4r^* + r_g)^3/16r^{*2}(4r^* - r_g)$, а корень $\overset{*}{r_0}$ уравнения $\frac{d}{dr^*}[r^*n_g(r^*)] = 0$ равен $r_g(2 \pm \sqrt{3})/4$. Учитывая связь между r и r^*, снова приходим к формуле (2.137).

Интересно отметить, что найденному значению r_0 можно дать объяснение исходя из чисто механической аналогии. Представим, что материальная частица движется по окружности $r = r_0$, расположенной на поверхности вращения $\zeta = 2[r_g(r - r_g)]^{1/2}$, которая имитирует неевклидовую метрику центрального поля тяготения (см. § 1.3, рис. 1.6). Такое движение возможно при условии, что касательные компоненты силы тяготения и центробежной силы уравновешивают друг друга, а результирующая нормальная составляющая компенсируется реакцией опоры (поверхность вращения, изображенную на рис. 1.6, надо считать абсолютно жесткой). Учитывая, что сила притяжения $\mathbf{f}_G$ действует по образующей, а центробежная сила $\mathbf{f}_\Omega$ — перпендикулярно оси z, запишем условие равновесия в виде $f_\Omega(r_0)\cos\alpha = f_G(r_0)$, где $\cos\alpha = \left[1 + \left(\frac{\partial z}{dr}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$, $f_\Omega = mc^2/r$ (скорость частицы полагаем равной c), $fG = \frac{GMm}{r^2\sqrt{1 - r_g/r}}$. Отсюда находим радиус стационарной орбиты, который оказывается равным тому же самому значению $\frac{3}{2} r_g$.

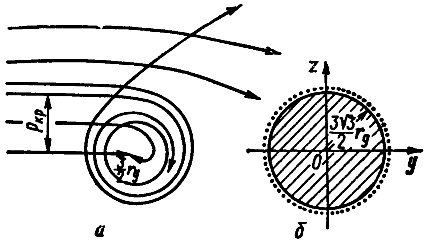


Рис. 2.34. Лучи света (*а*) и вид черной дыры (*б*) ($\rho_{кр} = 3\sqrt{3}r_g/2$ — критический прицельный параметр, точками показан фотонный ореол)

Вопрос об устойчивости круговой траектории луча решается по известному правилу геометрической оптики [63]: орбита будет устойчивой, если она соответствует максимуму функции $rn(r)$, и неустойчивой в случае минимума. Вычисляя вторую производную в точке r_0, легко убедиться, что в рассматриваемом случае мы имеем дело с неустойчивой траекторией. Пользуясь радиофизической терминологией, можно сказать, что вокруг черной дыры на расстоянии $\frac{3}{2}r_g$ возникает антиволноводный канал. Лучи, идущие из бесконечности с критическим значением прицельного параметра луча $\rho_{кр}$, будут многократно огибать притягивающий центр, приближаясь асимптотически по спирали к стационарной орбите. Расчеты показывают [14], что $\rho_{кр} = \frac{3\sqrt{3}}{2} r_g$. С точки зрения экранировки светящегося фона это и есть «радиус» черной дыры. При $\rho < \rho_{кр}$ лучи пересекают стационарную орбиту и в конце концов поглощаются черной дырой. Если $\rho > \rho_{кр}$, траектории лучей становятся инфинитными, причем на бесконечности они имеют, как и в слабых полях, две прямолинейные асимптоты, поскольку на больших расстояниях влияние гравитационного поля становится очень малым. Однако углы преломления малы только при $\rho \gg \rho_{кр}$, а для прицельных параметров, близких к $\rho_{кр}$, углы могут стать достаточно большими, превышая даже 2π. Это означает, что лучевая траектория, прежде чем уйти на бесконечность, сделает один или несколько оборотов вокруг притягивающего центра (рис. 2.34, *а*). Где бы ни был расположен источник излучения, среди бесконечного множества испускаемых им лучей всегда можно найти луч с таким прицельным параметром, который обеспечит угол преломления, необходимый для прохождения луча через точку наблюдения. Следовательно, центральная часть ГЛ, образованной черной дырой, будет представляться наблюдателю на фоне протяженного источника в виде черного диска радиуса $3\sqrt{3}r_g/2$, окруженного светящимся ореолом, который носит название фотонной сферы (рис. 2.34, *б*). Аналогичным образом могут наблюдаться многократные изображения точечного источника, но все они будут очень слабыми по сравнению с основным изображением, которое создается лучом с наименьшим углом преломления. Ослабление кратных изображений объясняется тем, что чем больше угол преломления (особенно если он превышает 2π), тем меньше разброс допустимых значений ρ, или, что то же, меньше угловые размеры изображения.

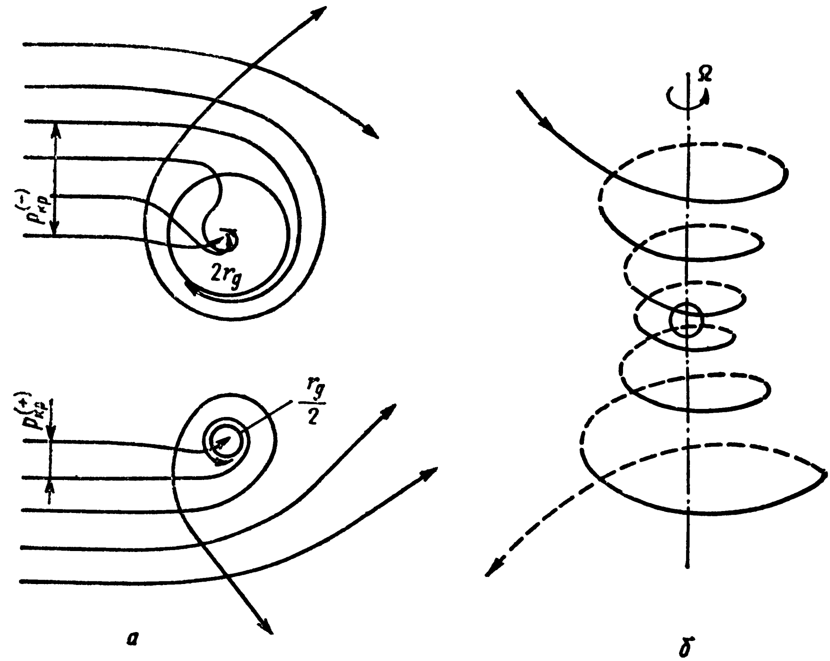


Рис. 2.35. Лучи света в экваториальной плоскости вращающейся черной дыры (*а*) и луч, идущий под углом к оси вращения (*б*)

Перейдем к описанию более сложной ГЛ, возникающей вокруг вращающейся черной дыры [61, 67]. Картина, обрисованная выше, в общих чертах сохраняется: лучи с достаточно большими прицельными параметрами $p \gg p_{кр}$ полностью описываются в приближении слабого поля (см. § 2.6), а при $p \geqslant p_{кр}$ возникают лучевые траектории, многократно огибающие ГЛ. Если $p < p_{кр}$, то все траектории оказываются ограниченными и заканчиваются на горизонте событий черной дыры. Однако вследствии эффекта увлечения значение $p_{кр}$ в отличие от такого для покоящейся черной дыры зависит от взаимной ориентации момента импульса **L** и орбитального момента фотона. Согласно рис. 2.35 лучи с отрицательными значениями проекции орбитального момента на ось вращения (их прицельные параметры будем обозначать $p^{(-)}$) отклоняются сильнее, чем лучи с положительными значениями проекции орбитального момента (прицельные параметры $p^{(+)}$). Вследствие этого лучи, идущие по направлению вращения ГЛ, могут подходить ближе к притягивающему центру, чем лучи, идущие против направления вращения. Сечение захвата, описываемое в угловых переменных двумерным вектором $\mathbf{p}_{кр}(\boldsymbol{\psi})$, оказывается сильнодеформированным и зависящим от угла падения на черную дыру.

Для лучей, идущих в плоскости экватора, критические значения $p_{кр}$ определяются из уравнения [69]

$$\left(p_{кр} + \frac{L}{Mc}\right)^3 - \frac{27}{4} r_g^2 \left(p_{кр} - \frac{L}{Mc}\right) = 0. \qquad (2.138)$$

Если момент импульса $L = 0$, мы получаем прежнее значение $p_{кр} = \frac{3\sqrt{3}}{2} r_g$, а при $L \neq 0$ имеются два разных решения [70]:

а) для лучей, идущих по вращению,

$$p_{кр}^{(+)} = \frac{L}{Mc} + 4r_g \cos^3 \left[\frac{1}{3} \left(\pi - \arccos \frac{2L}{r_g Mc} \right) \right]; \tag{2.139}$$

б) для лучей, идущих против вращения,

$$p_{кр}^{(-)} = \frac{L}{Mc} - 4r_g \cos^3 \left[\frac{1}{3} \arccos \frac{2L}{r_g Mc} \right]. \tag{2.140}$$

Соответственно имеются две нестабильные круговые орбиты, отличающиеся направлением вращения:

$$r_0^{(\pm)} = r_g \left\{ 1 + \cos \left[\frac{2}{3} \arccos \left(\mp \frac{2L}{r_g Mc} \right) \right] \right\}. \tag{2.141}$$

Легко убедиться, что радиус прямой орбиты $r_0^{(+)} < \frac{3}{2} r_g$, а обратной — $r_0^{(-)} > \frac{3}{2} r_g$. При $L = 0$ имеем, как и должно быть, $r_0^{(+)} = r_0^{(-)} = \frac{3}{2} r_g$.

Все захватываемые черной дырой фотоны с $p^{(\pm)} < p_{кр}^{(\pm)}$, прежде чем пересечь горизонт событий, приобретают направление вращения, совпадающее с направлением вращения ГЛ (рис. 2.35). Согласно формулам (2.139) и (2.140) критические прицельные параметры лучей зависят не только от r_g, но и от безразмерного параметра $\tau = 2L/r_g Mc$, который не может превышать 1. Дело в том, что для данного r_g существует предельное значение момента импульса L, при котором линейная скорость экваториальных точек достигает значения c. Черные дыры с $\tau = 1$ называются экстремальными. Реальные астрофизические объекты, представляющие собой вращающие черные дыры, скорее всего имеют значения $\tau \leqslant 1$ (например, в [71] приводится величина $\tau = 0{,}998$). Согласно (2.141) в экваториальной плоскости экстремальной черной дыры существуют две нестабильные круговые орбиты с радиусами $r_0^{(+)} = r_g/2$ (прямое вращение) и $r_0^{(-)} = 2r_g$ (обратное вращение). Соответственно имеются два критических прицельных параметра, определяемых формулами (2.139) и (2.140), согласно которым при $\tau = 1$ имеем

$$p_{кр}^{(+)} = r_g, \quad p_{кр}^{(-)} = -\frac{7}{2} r_g. \tag{2.142}$$

Отрицательный знак $p_{кр}^{(-)}$ показывает, что луч проходит мимо притягивающего центра против направления вращения. Все остальные лучи, перпендикулярные оси вращения, но не лежащие в плоскости экватора, имеют значения $p_{кр}$, лежащие в интервале $r_g \leqslant |p_{кр}| \leqslant \frac{7}{2} r_g$. Сечение гравитационного захвата фотонов приобретает несимметричную форму[23], представленную на рис. 2.36. Форма сечения захвата при произвольных углах падения лучей описана в работе [61].

[23] Деформированная окружность (2.128) по форме несколько напоминает кривую на рис. 2.36, что позволяет проследить переход от слабых гравитационных полей к сильным.

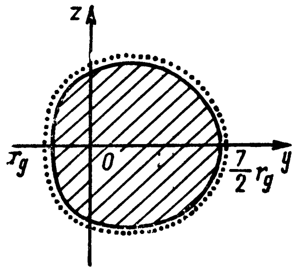


Рис. 2.36. Сечение гравитационного захвата экстремальной черной дыры (точками показан фотонный ореол)

На фоне протяженного источника ГЛ, образованная вращающейся черной дырой, представляется наблюдателю в виде черного пятна неправильной формы (за исключением строго осевой ориентации лучей, когда пятно имеет форму круга). Черное пятно окружено слабосветящимся ореолом, который создается инфинитными лучевыми траекториями с прицельными параметрами, несколько большими $p_{кр}$.

Вследствие несимметричности сечения захвата время распространения сигналов, идущих вблизи области захвата по разные стороны от центра, оказывается различным даже в том случае, когда источник, ГЛ и наблюдатель находятся на одной прямой. Таким образом, возникает относительное запаздывание, которое может стать весьма заметным для лучей, многократно огибающих ГЛ. Относительное запаздывание фотонов, проходящих в экваториальной плоскости с минимальным и максимальным прицельными параметрами, можно оценить по формуле [61, 73]

$$\Delta t \simeq \frac{3}{2} \frac{r_g}{c} \Delta\varphi, \qquad (2.143)$$

где $\Delta\varphi$ — разность углов поворота лучей вокруг притягивающего центра. Сравнивая выражения (1.40) и (2.143), можно убедиться, что, как и следовало ожидать, гравитационное запаздывание сигналов определяется в основном временем распространения света на расстояния порядка r_g. Однако в рассматриваемом случае оно может заметно возрасти за счет многократного огибания центра ГЛ ($\Delta\varphi \gg 2\pi$).

Эффект запаздывания приводит к тому, что в случае переменной интенсивности источника яркость граничной кривой (фотонного ореола) будет меняться неодновременно: по ней побежит «зайчик» из точки с $p_{\min} = p_{кр}^{(+)}$ со скоростью $v = \frac{c}{6} \frac{x + x_s}{x}$ [61] (для экстремальной черной дыры). Возможно, что иногда наблюдаемая быстрая переменность излучения квазаров возникает в результате описанного явления [61].

§ 2.8. Моделирование ГЛ

Расчет структуры изображений, наблюдаемых сквозь ГЛ, не представляет принципиальных трудностей, но, вообще, связан с достаточно трудоемкими вычислениями. В связи с этим возникает вопрос о лабораторном моделировании ГЛ. Хорошая модель, точно воспроизводящая оптику ГЛ, может использоваться как аналоговое устройство, позволяющее получать наглядную картину источников любой формы при произвольном положении наблюдателя. Кроме того, модель ГЛ весьма полезна в учебном процессе при объяснении эффекта искривления лучей в неоднородном гравитационном поле [74]. В связи с возросшим интересом к эффекту ГЛ в последние годы в литературе появились описания различных моделирующих устройств [75—79].

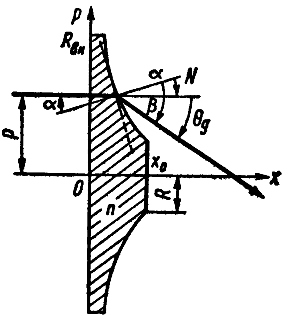


Рис. 2.37. Поперечное сечение модели ГЛ, изготовленной из оргстекла

Разумеется, не может быть и речи о создании в лабораторных условиях таких гравитационных полей, которые могли бы вызвать наблюдаемые искривления лучей. Но для моделирования ГЛ этого и не требуется. Достаточно подобрать оптически неоднородную среду с таким коэффициентом преломления $n(r)$, который воспроизводил бы эффективный коэффициент преломления (см. формулу (2·1)) моделируемого гравитационного поля. В работе [80] описан способ создания сферически-слоистой структуры путем подбора температурного режима металлической сферы, находящейся в газовой среде. Поскольку коэффициент преломления газа зависит от его температуры, нагревая или охлаждая металлическую сферу, можно создать определенное распределение температуры и получить необходимый закон преломления $n(r)$. Недостатком указанной модели является трудность точного воспроизведения требуемого распределения температуры в газе. Более удобно использовать вместо газа прозрачное твердое тело с достаточно сильной температурной зависимостью коэффициента преломления, например оргстекло [81]. С моделью из оргстекла, несомненно, проще работать, чем с газовой средой, но и в этом случае приходится рассчитывать лишь на качественное воспроизведение оптических свойств ГЛ, так как трудно обеспечить с необходимой точностью заданное распределение температуры по всему объему линзы.

Указанные трудности полностью отпадают, если вместо моделирования неоднородной преломляющей среды воспроизвести только требуемый закон преломления лучей $\Theta_g(p)$. Для этого можно использовать линзу из однородного прозрачного материала, подобрав специальным образом форму ее поверхности [76, 82, 83]. По существу, таким образом физически реализуется тот математический прием (введение преломляющей плоскости), который был описан в § 2.1.

Расчет формы линзы, обеспечивающей заданный закон преломления $\Theta_g(p)$, производится следующим образом (рис. 2.37). Одна из поверхностей линзы выбрана для простоты плоской, поэтому падающий луч, идущий параллельно оси x, проходит входную поверхность линзы без преломления. Уравнение преломляющей (выходной) поверхности $x = x_п(p)$ определяется из закона Снеллиуса:

$$n \sin \alpha = \sin \beta,$$

где углы α и β отсчитываются от нормали к поверхности N. Учитывая, что $\beta = \alpha + \Theta_g(p)$ и $\operatorname{tg} \alpha = dx_п/dp$, получаем искомое уравнение

$$x_п(p) = x_0 - \int_0^p \frac{\sin \Theta_g(p')\, dp'}{n - \cos \Theta_g(p')}. \qquad (2.144)$$

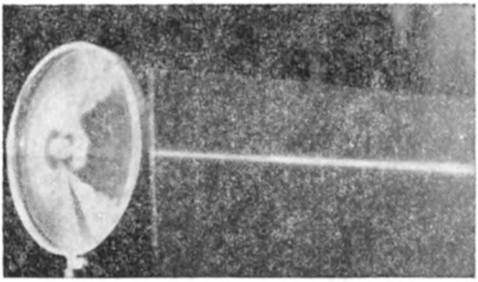


Рис. 2.38. Модель ГЛ в действии (источник света находится слева, на экране видна фокальная полуось)

Здесь x_0 — осевая толщина линзы, которая может иметь любое значение и выбирается только из соображений удобства изготовления модели. Для имитации ГЛ с непрозрачным ядром центральная часть модели-линзы закрывается диском, радиус которого в соответствующем масштабе должен быть равен радиусу звезды-линзы R. Что касается внешнего радиуса модели, то, вообще, чем он больше, тем лучше (реальная ГЛ имеет неограниченную апертуру). Практически достаточно взять внешний радиус в 10—20 раз больше, чем радиус экранирующего диска (при этом влияние внешней границы практически не проявляется). Легко смоделировать и ГЛ, не обладающую осевой симметрией, когда угол преломления Θ_g является функцией не только модуля прицельного параметра p, но и азимутального угла φ. Соотношение (2.144) сохраняет свой вид, но, учитывая, что Θ_g зависит от p и φ, преломляющая поверхность линзы $x = x_п (p, \varphi)$ уже не будет поверхностью вращения. На рис. 2.37 показано осевое сечение модели сферически симметричной ГЛ с непрозрачным ядром. Уравнение выходной поверхности определено путем подстановки в (2.144) $\Theta_g (p) = 2r_g/p$, что с учетом малости углов преломления приводит к следующему результату:

$$x_п (p) = x_0 - \frac{2r_g}{n-1} \ln \frac{p}{R} .$$

Линза, изготовленная из оргстекла с коэффициентом преломления $n \simeq 1{,}5$, имеет следующие размеры: внешний радиус $R_{вн} = 65$ мм, радиус внутреннего диска-экрана $R = 5$ мм, наибольшая толщина $x_0 = 20$ мм, «гравитационный радиус» r_g взят равным 1 мм. Расположив плоский экран вдоль оси симметрии линзы, можно увидеть, как образуется фокальная полуось. Фотография модели ГЛ в действии представлена на рис. 2.38. Пучок света падает слева и, проходя сквозь линзу, концентрируется на фокальной полуоси, которая видна на экране в виде светлой полосы.

Своеобразные оптические характеристики ГЛ, полностью воспроизводимые в описанной модели, наводят на мысль, что, изготовив линзу со специально подобранной зависимостью угла преломления $\Theta (p)$, можно получить оптический прибор, обладающий какими-то полезными свойствами, которых нет у ОЛ. Простейший пример — это использование модели ГЛ с непрозрачным ядром в качестве объектива фотоаппарата. Такой фотоаппарат не требует наводки на резкость, так как объектив не имеет фокусного расстояния. Правда, качество изображения получается намного хуже, чем в ОЛ, и поэтому практическое использование «гравитационного фотоаппарата» вряд ли целесообразно. Тем не менее приведенный пример с необычной дистанционной зависимостью сфокусированного излучения позволяет сформулировать следующую задачу: нельзя ли создать такую линзу, которая позволила бы получить на заданном интервале оптической оси $[x_1, x_2]$ определенное, заранее выбранное распределение интенсивности $\mathcal{J}(x)$? Если иметь в виду не только оптику, но и радиодиапазон, то указанную задачу следует рассматривать, как обобщение известной в радиотехнике задачи синтеза антенны. В обычной постановке она формулируется так: требуется создать антенну (определить и реализовать амплитудно-фазовое распределение поля в раскрыве), обеспечивающую заданную диаграмму направленности. Мы же приходим к такой формулировке: требуется создать линзу (антенну), обеспечивающую заданную зависимость интенсивности излучения от расстояния.

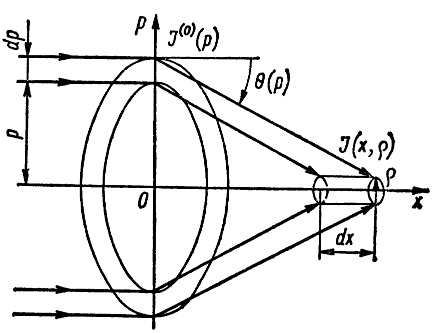


Рис. 2.39. Поток энергии через боковую поверхность цилиндра, расположенного вдоль оси линзовой антенны

Решение этой задачи описано в работах [84, 85] и сводится к следующему. Рассмотрим осесимметричную линзу (антенну) и воспользуемся законом сохранения интенсивности внутри лучевой трубки (рис. 2.39). Однако в отличие от § 2.1 выделенная лучевая трубка опирается не на площадку, перпендикулярную оси линзы (см. рис. 2.3), а на боковую поверхность цилиндра радиуса ρ, длиной dx, расположенного на расстоянии x от выходной апертуры. Учитывая малость углов преломления, закон сохранения интенсивности записывается таким образом:

$$\mathcal{J}^{(0)}(p)\,2\pi p\,|dp| = \mathcal{J}(x, \rho)\,\Theta(p)\,2\pi\rho\,|dx|, \qquad (2.145)$$

где $\mathcal{J}^{(0)}(p)$ — входная интенсивность, а $\mathcal{J}(x, \rho)$ — интенсивность в точке (x, ρ) за линзой. Однако использовать формулу (2.145) для расчета интенсивности на оси нельзя, так как при $\rho \to 0$ $\mathcal{J}(x, \rho) \to \infty$, с чем мы уже сталкивались в предыдущих параграфах. Эта расходимость связана с геометрооптическим приближением, и определенное значение $\mathcal{J}(x, 0)$ можно получить только с учетом дифракции, последовательное описание которой будет дано в следующей главе. Здесь же мы ограничимся приближенными оценками, подобными тем, которые были выполнены в конце § 2.1. Дифракция волн, проходящих через апертуру радиуса p, приводит к размытию лучей в пределах угла дифракции $\psi_d \sim (kp)^{-1}$, где $k = 2\pi/\lambda$ (λ — длина волны падающего на линзу излучения). Поэтому радиус освещенной площадки вблизи оси x не может быть меньше $\rho_{\min} \simeq x\psi_d \sim x/kp$. Положив в (2.145) $\rho = \rho_{\min}$ и учтя, что $\Theta \simeq p/x$, получим для интенсивности на оси $\mathcal{J}(x) \equiv \mathcal{J}(x, \rho_{min})$ следующее соотношение:

$$\mathcal{J}^{(0)}(p)\, kp \left| \frac{dp}{dx} \right| \sim \mathcal{J}(x). \qquad (2.146)$$

Эта формула по существу решает поставленную задачу синтеза антенны с заданной зависимостью $\mathcal{J}(x)$. Допустим, что требуемое распределение интенсивности $\mathcal{J}(x)$ должно быть реализовано на отрезке $[x_1, x_2]$, т. е. правая часть (2.146) является заданной. В левой же части имеются две неизвестные функции — $p(x)$ и $\mathcal{J}^{(0)}(p)$. Используя антенную терминологию, можно сказать, что эти функции определяют фазовое и амплитудное распределение поля в раскрыве. Если не ставить перед собой задачи оптимизации в том или ином смысле амплитудно-фазового распределения, задавшись одной из функций, можно найти вторую. Допустим, выбран закон преломления $\Theta(p)$. Тогда, определив $x(p)$ с помощью соотношения $p(x) = x\Theta(p)$, из уравнения (2.146) легко найти

$$\mathcal{J}^{(0)}(p) \sim \frac{1}{kp} \left| \frac{dx}{dp} \right| \mathcal{J}[x(p)].$$

Если же задаться амплитудным распределением в раскрыве $\mathcal{J}^{(0)}(p)$, то (2.146) следует рассматривать как нелинейное дифференциальное уравнение, которое решается методом разделения переменных. В случае равномерного освещения линзы ($\mathcal{J}^{(0)} = \text{const}$) имеются два решения:

$$p(x) \sim \left[p_1^2 \pm \frac{1}{k\mathcal{J}^{(0)}} \int\limits_{x_1}^{x_2} \mathcal{J}(x')\, dx' \right]^{1/2}. \qquad (2.147)$$

Один из радиусов кольцевого раскрыва $p = p_1$, соответствующий точке $x = x_1$, выбирается из чисто технических соображений, второй же $p = p_2$ рассчитывается по (2.147) при $x = x_2$ и в зависимости от выбранного знака второго слагаемого может быть больше или меньше p_1.

Глава 3

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ГРАВИТАЦИОННЫХ ЛИНЗАХ

Известно, что геометрическая оптика может рассматриваться как предельный случай очень малых длин волн в более общей волновой теории. Безразмерным параметром, характеризующим малость длины волн, является в данном случае отношение λ/R. Во всем диапазоне частот, доступных наземному наблюдателю, эта величина очень мала [24], и, казалось бы, нет необходимости заменять геометрооптическое рассмотрение анализом волновых уравнений. Так оно и есть, если только исключить из рассмотрения те области пространства, где интенсивность сфокусированного излучения бесконечно возрастает (фокус, фокальная полуось, каустики).

В предыдущей главе было показано, что указанные расходимости устраняются, если рассматривать не точечные, а протяженные источники. При этом бесконечно большая интенсивность становится конечной, но оказывается тем большей, чем меньше размеры излучателя. Для того чтобы установить те предельно малые угловые размеры источников, при которых еще можно использовать геометрическую оптику во всей области фокусировки, необходимо учесть дифракцию волн в ГЛ. Кроме того, до сих пор рассматривалось в основном только одно проявление поля тяготения — искривление лучевых траекторий. Для исследования более тонких явлений, связанных с поляризацией волн и фазовыми соотношениями, следует рассматривать векторные поля, основываясь на уравнениях Максвелла.

§ 3.1. Сферически симметричное поле тяготения. Схема решения в строгой постановке

Исходными соотношениями при исследовании дифракции волн в ГЛ являются уравнения Максвелла (1.32), в которых влияние гравитационного поля учтено введением некоторой «среды» с эффективными параметрами $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и $\mu_{\alpha\beta}$ (1.33). Для слабого поля тяготения соответствующим выбором системы координат всегда можно привести величины $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и

[24] Для радиоволн декаметрового диапазона, которые еще могут проникать через ионосферу Земли, отношение λ/R в случае звезды-линзы, подобной Солнцу, составляет примерно 10^{-8}.

$\mu_{\alpha\beta}$ к виду $\varepsilon_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\beta} = n_g(r)\,\delta_{\alpha\beta}$ ($\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера). Вне гравитирующего тела $n_g \simeq 1 + r_g/r$, во внутренних же областях $n_g(r)$ определяется соответствующим распределением масс $\delta(r)$, Заметим, что для сильного поля тяготения, описываемого метрикой Шварцшильда, также возможно сведение $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и $\mu_{\alpha\beta}$ к скалярной функции $n_g(r^*)$, если задазать метрику в изотропных декартовых координатах (1.19). При этом получим [86]

$$n_g(r^*) = \frac{(1 + r_g/4r^*)^3}{1 - r_g/4r^*}. \tag{3.1}$$

Полагая зависимость всех величин от времени пропорциональной $e^{-i\omega t}$, запишем уравнения Максвелла (1.32):

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = ikn_g(r)\,\mathbf{H}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = -ikn_g(r)\,\mathbf{E}, \tag{3.2}$$

где $k = \omega/c$. При рассмотрении сильных полей тяготения в (3.2) и во всех последующих выражениях необходимо вместо r писать r^*.

Общие вопросы электродинамики сферически-слоистых сред описаны во многих книгах (см., например, [8]), поэтому мы будем использовать известные результаты без литературных ссылок. В сферической системе координат r, θ, φ компоненты векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ могут быть выражены через две скалярные функции Π_e и Π_m, называемые электрическим и магнитным потенциалами Дебая[25].

$$\begin{aligned}
E_r &= \frac{1}{n_g}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + n_g\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{n_g}\right)\frac{\partial}{\partial r} + k^2 n_g^2\right](r\Pi_e),\\
E_\theta &= \frac{1}{n_g r}\,\frac{\partial^2 (r\Pi_e)}{\partial\theta\,\partial r} + \frac{ik}{r\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}(r\Pi_m),\\
E_\varphi &= \frac{1}{n_g r\sin\theta}\,\frac{\partial^2 (r\Pi_e)}{\partial\varphi\,\partial r} - \frac{ik}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta}(r\Pi_m),\\
H_r &= \frac{1}{n_g}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + n_g\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{n_g}\right)\frac{\partial}{\partial r} + k^2 n_g^2\right](r\Pi_m),\\
H_\theta &= -\frac{ik}{r\sin\vartheta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}(r\Pi_e) + \frac{1}{n_g r}\,\frac{\partial^2 (r\Pi_m)}{\partial\theta\,\partial r},\\
H_\varphi &= \frac{ik}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta}(r\Pi_e) + \frac{1}{n_g r\sin\theta}\,\frac{\partial^2 (r\Pi_m)}{\partial\varphi\,\partial r}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Потенциалы Π_e и Π_m удовлетворяют одному и тому же волновому уравнению

$$\Delta\Pi - \frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}(\ln n_g)\,\frac{\partial}{\partial r}(r\Pi) + k^2 n_g^2\Pi = 0, \tag{3.4}$$

где Δ — оператор Лапласа. Уравнение (3.4) допускает разделение переменных, и его решение можно представить в виде произведения грех сомножителей, зависящих соответственно от r, θ, φ:

$$\Pi(r, \theta, \varphi) = \mathcal{R}(r)\,Q(\theta)\,\Phi(\varphi). \tag{3.5}$$

[25] Вместо потенциалов Дебая часто рассматриваются соответствующие радиальные векторы Герца $\mathbf{r}\Pi_e$ и $\mathbf{r}\Pi_m$ ($\mathbf{r}$ — радиус-вектор).

Фигурирующие здесь угловые функции хорошо изучены — это так называемые сферические гармоники: $Q(\theta)\,\Phi(\varphi) = Y_{jm}(\theta, \varphi)$, в которых зависимость от угла φ характеризуется множителем $\sin m\varphi$ или $\cos m\varphi$, а $Q(\theta)$ представляет собой присоединенные полиномы Лежандра $P_j^m(\cos\theta)$. Из условия периодичности решения по φ и его конечности в интервале углов $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ следует, что m и j должны быть целыми числами, причем $|m| \leqslant j$. Таким образом, общее решение уравнения (3.4) представляется двойным рядом

$$\Pi = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^{j} \mathcal{R}_j(r)\, P_j^m(\cos\theta)\,[a_{jm}\cos m\varphi + b_{jm}\sin m\varphi]. \qquad (3.6)$$

Радиальные функции $\mathcal{R}_j(r)$ от m не зависят, a_{jm} и b_{jm} — постоянные коэффициенты, определяемые из граничных условий.

Двойная сумма сразу же сводится к однократной, если конкретизировать постановку задачи. В предыдущей главе мы рассматривали вначале преломление потока параллельных лучей в ГЛ. Аналогом этой геометрооптической схемы является дифракция плоской волны. Будем считать, что волна падает на ГЛ вдоль оси x и является линейно поляризованной с отличными от нуля компонентами

$$E_y^{(0)} = H_z^{(0)} = u_0 e^{ikx}. \qquad (3.7)$$

Тогда при $x \to -\infty$ зависимость $\Pi_{e,m}$ от φ задается соотношениями $\Pi_e \sim \cos\varphi$, $\Pi_m \sim \sin\varphi$ (напомним, что полярная ось выбранной системы координат совмещена с осью x, а угол φ отсчитывается от оси y). В силу сферической симметрии среды, которая является одновременно и осевой, зависимость от φ сохраняется во всем пространстве, и, следовательно, в двойной сумме (3.6) останутся только слагаемые с $m = 1$, т. е. решение следует искать в виде

$$\Pi_{e,m} = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{R}_j(r)\, P_j^1(\cos\theta) \begin{cases} a_j \cos\varphi, \\ b_j \sin\varphi. \end{cases} \qquad (3.8)$$

Перейдем теперь к рассмотрению радиальной функции. После подстановки (3.8) в (3.4) получим

$$\frac{d^2\mathcal{R}_j}{dr^2} - \frac{d}{dr}(\ln n_g)\frac{d\mathcal{R}_j}{dr} + \left[k^2 n_g^2 - \frac{j(j+1)}{r^2}\right]\mathcal{R}_j = 0. \qquad (3.9)$$

В действительности вся специфика дифракции волн в сферически симметричной ГЛ заключается только в этом уравнении. Возможности его точного решения очень ограничены. В литературе известно лишь небольшое число конкретных зависимостей $n(r)$, для которых решение (3.9) сводится к некоторым трансцендентным функциям [87, 88]. Трудно рассчитывать, что эффективный показатель преломления в точности совпадет с одним из допускающих точное решение $n(r)$. Правда, важный случай слабого гравитационного поля вне гравитирующей массы ($n_g(r) \simeq 1 + r_g/r$) как раз приводит почти к такому уравнению, которое было исследовано еще в 1928 г. в связи с квантовомеханической задачей о рассеянии частиц в кулоновом поле [89]. Однако при этом предполагалось, что указанная выше зависимость $n_g(r)$ сохраняется во всем пространстве, а второе граничное условие для уравнения

(3.9) формулируется в виде требования конечности $\mathcal{R}_j(r)$ при $r \to 0$. В данном случае дело обстоит не совсем так. Если рассматривается прозрачная ГЛ, то условие $\mathcal{R}_j(0) \neq \infty$ остается в силе, однако зависимость $n_g(r)$ во внутренних областях ГЛ уже отличается от $1 + r_g/r$, которая справедлива только вне гравитирующих масс и при $r \gg r_g$. В то же время если ГЛ непрозрачна, внешнее поле тяготения слабое и можно использовать известное из квантовой механики решение уравнения (3.9), то возникает вопрос о граничных условиях на поверхности звезды. Вообще, не очень понятно, как их сформулировать. Даже само понятие «поверхность звезды» является достаточно условным. Плодотворная идея была высказана и реализована в работах [90, 91], где вместо граничных условий на компоненты полей **E** и **H** сформулировано требование полного поглощения излучения, или, что то же, отсутствия отраженных от поверхности звезды волн.

Схема вычислений сводится к следующему. Введя в рассмотрение новую переменную $v(r)$, определяемую соотношением $dv/dr = n_g/r_g$, уравнение (3.9) можно представить в канонической форме:

$$\frac{d^2\mathcal{R}_j}{dv^2} + k^2 r_g^2 [1 - j(j+1) V(v)] \mathcal{R}_j = 0, \tag{3.10}$$

где $V(v) = 1/k^2 n_g^2 [r(v)] r^2(v)$. Для слабого поля тяготения вне гравитирующей массы ($n_g \simeq 1 + r_g/r$) выражения для $v(r)$ и $V(v)$ имеют следующий вид:

$$v(r) \simeq \frac{r}{r_g} + \ln\frac{r}{r_g}, \quad V(v) \simeq [kr(v)]^{-2}.$$

Приведенные формулы получены из линейного по $r_g/r \ll 1$ приближения в метрике Шварцшильда. Представляет также интерес привести точные значения функций $v(r)$ и $V(v)$, соответствующие этой метрике. Это легко сделать, если в радиальном уравнении (3.9) заменить r на r^*. Тогда переход от (3.9) к (3.10) осуществляется заменой $dv/dr^* = n_g(r^*)/r_g$, где $n_g(r^*)$ определяется согласно (3.1). При этом $V(v) = 1/k^2 n_g^2 r^{*2}$. Проделав несложные выкладки и учтя, что радиальные переменные r и r^* связаны соотношением $r = r^*(1 + r_g/4r^*)^2$ (см. (1.18)), окончательно получим [86]

$$\begin{aligned} v(r) &= \frac{r}{r_g} + \ln\left(\frac{r}{r_g} - 1\right), \\ V(v) &= \frac{r(v) - r_g}{k^2 r^3(v)}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

где $r > r_g$. Заметим, что даже в случае черной дыры существует минимальное значение $r = r_g$, начиная с которого есть смысл рассматривать действие ГЛ. При изменении r на полубесконечном интервале новая переменная v изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. График функции $V(v)$ приведен на рис. 3.1, где для наглядности показаны два масштаба по оси абсцисс: для переменных v и r.

Уравнение (3.10) встречалось в работах многих авторов, рассматривавших электродинамические задачи [90—97], а также скалярные волны [98] в метрике Шварцшильда. Получить точные решения при

$j \neq 0$ не удается, но общие свойства решений хорошо известны в квантовой механике в связи с задачами о прохождении частиц через потенциальный барьер (см., например, [99]).

Функция $j(j+1)V(v)$ играет роль потенциальной энергии в одномерном уравнении Шредингера. Поскольку $V(-\infty) = V(+\infty) = 0$, дискретных энергетических уровней в квантовомеханической задаче не существует, и соответственно отсутствуют запертые моды в электродинамике, т. е. нет решений, которые обращались бы в нуль при бесконечном возрастании v в области как положительных, так и отрицательных значений.

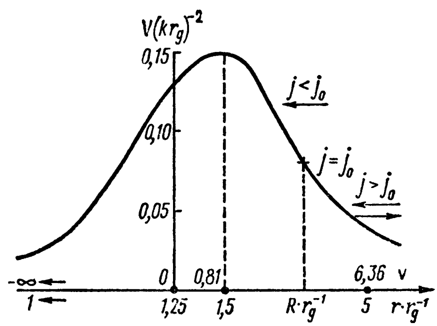


Рис. 3.1. Потенциальный барьер, возникающий вокруг притягивающего центра

Рис. 3.1 наглядно показывает, что вокруг ГЛ, создаваемой точечной массой, возникает потенциальный барьер с максимумом на расстоянии $r = 3r_g/2$ от притягивающего центра. Барьер отделяет внутреннюю область ($r_g < r \leqslant 3r_g/2$) от внешней ($r > 3r_g/2$) и в классической механике является полностью непроницаемым для частиц с энергией, меньшей его максимума. Представлению о непрозрачном барьере соответствует рассмотренная в гл. 2 картина лучевых траекторий. Лучи, проходящие на расстоянии $r_{\min} > 3r_g/2$, в конце концов уходят от притягивающего центра («отражаются» от барьера), а лучи с $r_{\min} < 3r_g/2$ уже не могут выйти наружу («падают» внутрь). Расстояние $r_{\min} = 3r_g/2$ является критическим[26]. На таком удалении существует стационарная круговая траектория светового луча, которая, однако, оказывается неустойчивой. Неустойчивость кольцевой траектории была объяснена в гл. 2, а представление о потенциальном барьере делает этот вывод еще более наглядным, так как указанная орбита соответствует равновесию в точке максимума потенциальной энергии.

В квантовой механике частица может с отличной от нуля вероятностью пройти «сквозь» барьер. Таким же образом волновая теория ГЛ показывает, что электромагнитное излучение проникает в область тени.

Представим общее решение (3.10) в виде

$$\mathcal{R}_j = \mathcal{R}_j^{\text{пад}} + \mathcal{D}_j \mathcal{R}_j^{\text{отр}}, \tag{3.12}$$

где $\mathcal{R}_j^{\text{пад}}$ и $\mathcal{R}_j^{\text{отр}}$ — два линейно независимых решения, которые при $r \to \infty$ соответствуют падающим на ГЛ и отраженным от нее волнам. Асимптотика этих волн при $r \to \infty$, вытекающая непосредственно из (3.10), такова:

$$\mathcal{R}_j^{\text{пад}} \sim e^{-ikr_g v}, \quad \mathcal{R}_j^{\text{отр}} \sim e^{ikr_g v}.$$

[26] Напомним (см. гл. 2), что указанному значению $r_{\min}$ соответствует прицельный параметр луча $\rho_{\text{кр}} = 3\sqrt{3}\, r_g/2$.

Если использовать квазиклассическое приближение, что допустимо, когда барьер обладает малой проницаемостью, то коэффициент отражения $\mathcal{D}_j$ выражается через квадратуру $V(v)$ [99]. Для ГЛ, возникающей вокруг черной дыры, никаких дополнительных граничных условий не требуется, так как волна может отражаться только от рассматриваемого потенциального барьера. Для обычной же звезды радиуса ($R \gg r_g$) волна будет отражаться таким же образом, только в том случае, если она проходит вдали от поверхности звезды, т. е. при $r_{\text{отр}} \gg R$. Если же $r_{\text{отр}} \leqslant R$, то волна достигает поверхности звезды, где необходимо сформулировать граничные условия, например задать коэффициент отражения.

Поскольку каждому значению j в общем решении (3.10) соответствует своя точка отражения, которая в переменных v определяется из условия

$$V(v_{\text{отр}}) = 1/j(j+1),$$

то можно найти предельное значение j_0, для которого точка поворота совпадает с радиусом звезды, для чего необходимо решить уравнение

$$j_0(j_0+1) = V^{-1}[v(R)].$$

Согласно (3.11) для звезды с радиусом $R \gg r_g$ имеем $V[r(R)] \simeq \simeq (kR)^{-2}$ и $j_0 \simeq kR$. При всех $j > j_0$ волна $\mathcal{R}_j(r)$ отражается от потенциального барьера, не доходя до поверхности звезды. Поэтому в данной области значений j надо учитывать как падающую, так и отраженную волны, на амплитуду которых внутренние области звезды почти не влияют, ибо волна до них практически не доходит вследствие экспоненциального затухания под барьером.

Если же $j < j_0$, точка отражения попадает во внутреннюю область $r < R$ и падающая волна полностью поглощается звездой. Это означает, что при $j < j_0$ из двух линейно независимых решений уравнения (3.10) надо сохранить в формуле (3.8) только падающую волну, или, что то же, положить $\mathcal{D}_j = 0$ при $j \leqslant j_0$. В цитированных выше работах [90, 91] указанная процедура осуществляется путем вычитания из бесконечной суммы (3.8) ограниченного числа слагаемых:

$$\Pi = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{R}_j(r) P_j^1(\cos\theta) \begin{cases} a_j \cos\varphi \\ b_j \sin\varphi \end{cases} - \sum_{j=1}^{j_0} \mathcal{R}_j^{\text{отр}}(r) P_j^1(\cos\theta) \begin{cases} a_j \cos\varphi, \\ b_j \sin\varphi. \end{cases}$$

Для решения уравнения (3.10) авторы используют квазиклассическое приближение

$$\mathcal{R}_j(v) = A(v)\, e^{\pm ikr_g S(v)},$$

где $A(v) = [1 - j(j+1)V(v)]^{-1/4}$, $\quad S(v) = \int^{v} [1 - j(j+1)V(v)]^{1/2} dv.$

Данное представление является хорошей аппроксимацией в окрестности черной дыры ($r \to r_g$, $v \to -\infty$) и на больших расстояниях ($r \to \infty$, $v \to \infty$). В обоих случаях $V(v)$ стремится к нулю, и вся информация о поведении поля содержится в фазовых сдвигах падающей и отраженной волн. В окрестности вершины $V(v)$ квазиклассическое приближение неприменимо, но здесь $V(v)$ можно аппроксимировать квадратичной параболой, для которой известно точное решение (3.10).

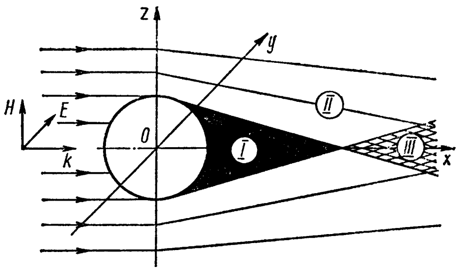


Рис. 3.2. Дифракция плоской волны в ГЛ: *I* — область тени; *II* — область применимости геометрической оптики; *III* — область интерференции

Таким образом, удается достаточно подробно описать волновую оптику ГЛ. При этом все пространство делится естественным образом на три области (рис. 3.2). В области тени (*I*) поле отсутствует (с точностью до значения $\lambda/R \ll 1$). В области применимости геометрической оптики (*II*) на больших расстояниях от звезды прослеживается связь между волновой и лучевой теориями. Основной интерес представляет область интерференции (*III*), в которой геометрооптическое рассмотрение приводило к расходящимся выражениям на фокальной полуоси. Здесь вклад вычитаемой из общего решения (3.8) суммы $\sum_{j=1}^{j_0}$ пренебрежимо мал, так как отражение происходит от потенциального барьера, а не от звезды (в терминах геометрической оптики это означает, что лучи не касаются поверхности гравитирующего тела). Остающаяся бесконечная сумма выражается через вырожденную гипергеометрическую функцию ${}_1F_1$ [100], с помощью которой определяются осевая и поперечная составляющие вектора Пойнтинга **P**:

$$\begin{aligned} P_x &\simeq \frac{ckr_g}{2} u_0^2 |{}_1F_1 [1 - ikr_g;\ 1;\ -ikr(1 - \cos\theta)]|^2, \quad kr_g \gg 1, \\ P_\perp &\simeq -\frac{ckr_g^2}{2r} u_0^2 |{}_1F_1 [1 - ikr_g;\ 1;\ -ikr(1 - \cos\theta)]|^2. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Знак «—» в формуле для $P_\perp$ показывает, что за счет волн, огибающих ГЛ, возникает поток энергии, направленный к фокальной оси, однако его относительное значение на больших расстояниях очень мало ($P_\perp/P_x = r_g/r \ll 1$). При $r \to \infty$ $P_\perp \to 0$, а $P_x \to cu_0^2/4\pi$ и совпадает с потоком энергии плоской волны.

Удается также рассчитать структуру изображений далеких точечных источников с учетом размеров апертуры телескопа. При этом получаются вполне определенные значения интенсивности и на фокальной полуоси, где геометрическая оптика приводила к расходящимся выражениям.

Мы не приводим пока расчетных формул для электромагнитных полей в указанных областях пространства. С ними можно будет ознакомиться в следующем параграфе, где описан более универсальный приближенный способ расчета, так называемый метод фазового экрана, неоднократно применявшийся в задачах о дифракции волн в ГЛ [43, 101—104].

§ 3.2. Приближенный расчет дифракции волн в сферически симметричной ГЛ. Метод фазового экрана

Искривление световых лучей происходит в основном на тех участках траектории, которые проходят вблизи ГЛ. Вдали от гравитирующих масс лучи почти совпадают с прямолинейными асимптотами гипербол. Если источник и наблюдатель достаточно удалены от ГЛ, а только этот случай и представляет интерес для астрономических наблюдений, то можно заменить плавное искривление лучей их резким преломлением вблизи притягивающего центра. Вопрос о том, в каком именно месте следует изменять направление луча, обсуждался в гл. 2. Там было показано, что геометрооптические расчеты существенно упрощаются, если в качестве преломляющей поверхности выбрать плоскость, проходящую через центр ГЛ и перпендикулярную направлению от центра к источнику.

В волновой теории также можно реализовать подобный прием, который приводит к заметным упрощениям. По существу, необходимо повторить ту же схему рассуждений, основываясь однако на волновых представлениях. Дело сводится к следующему. Вместо того чтобы рассматривать дифракцию волн в среде с коэффициентом преломления $n_g(r)$, будем считать, что плоская волна распространяется в вакууме ($n_g = 1$) до некоторой преломляющей поверхности, о которой говорилось выше. Проходя сквозь нее, волна приобретает фазовый сдвиг $\mathscr{H}(\mathbf{p})$, зависящий от прицельного параметра $\mathbf{p}$, а далее снова происходит распространение в вакууме, но поскольку фазовый фронт за поверхностью уже не плоский, возникают дифракционные явления, описываемые с помощью принципа Гюйгенса.

Набег фазы на преломляющей поверхности (следуя общепринятой терминологии, будем называть ее в дальнейшем фазовым экраном) подбирается так, чтобы нормаль к фазовому фронту совпадала с направлением лучевой асимптоты, пересекающей поверхность в данной точке. Тем самым обеспечивается соответствие между потоком падающих лучей (плоская волна) и лучами, преломленными в ГЛ (волна с фазовым фронтом $\mathscr{H}(\mathbf{p})$). Легко убедиться, что указанное условие выполняется, если

$$\nabla\mathscr{H}(\mathbf{p}) \equiv \frac{d\mathscr{H}}{dp}\mathbf{e}_p = -k \operatorname{tg}\Theta_g(p)\,\mathbf{e}_p,$$

где $\Theta_g(p)$ — угол преломления луча в гравитационном поле. В обычном приближении малых углов

$$\nabla\mathscr{H}(\mathbf{p}) = -k\Theta_g(p)\,\mathbf{e}_p = k\boldsymbol{\Theta}_g(\mathbf{p}), \tag{3.14}$$

откуда получим

$$\frac{d\mathscr{H}}{dp} = -k\Theta_g(p). \tag{3.15}$$

Здесь векторный $\boldsymbol{\Theta}_g(\mathbf{p})$ и скалярный $\Theta_g(p)$ углы преломления связаны соотношением $\boldsymbol{\Theta}_g = -\Theta_g\mathbf{e}_p$.

Можно определить $\mathcal{H}(p)$ и несколько иначе, считая, что фазовый сдвиг на экране равен дополнительному набегу фазы, возникающему за счет коэффициента преломления $n_g(r)$:

$$\mathcal{H}(p) = k \int_{-\infty}^{\infty} \{n_g[r(x, p)] - 1\} \, dx, \quad r = \sqrt{x^2 + p^2}. \qquad (3.16)$$

Интеграл берется по невозмущенной траектории луча, представляющей собой прямую с заданным прицельным параметром. Таким упрощением предполагаются малое отличие $n_g(r)$ от 1 и малые углы $\Theta_g(p)$, т. е. гравитационное поле считается слабым. По существу, это условие не является дополнительным ограничением, так как ниже мы убедимся, что применимость метода фазового экрана для ГЛ ограничена малыми углами преломления.

Формулы (3.15) и (3.16) эквивалентны, хотя последняя требует некоторых пояснений. Дело в том, что непосредственное вычисление интеграла во внешнем гравитационном поле ($n_g - 1 \simeq r_g/r$) приводит к расходящему выражению. От бесконечных величин легко избавиться, если рассматривать не $\mathcal{H}(p)$, а $d\mathcal{H}/dp$, т. е. определять фазовый сдвиг на экране с точностью до константы, которая не влияет на результаты наблюдений. Вычисление $d\mathcal{H}/dp$ с помощью (3.16) приводит, как и должно быть, к формуле (3.15). В то же время формула (3.16) дает определенное представление об условиях применимости метода фазового экрана. С этой целью рассмотрим интеграл (3.16) в конечных пределах, т. е. внутри слоя $-X \leqslant x \leqslant X$. Таким образом, получается $d\mathcal{H}/dp = -2kr_gX/p\sqrt{X^2 + p^2}$, что совпадает с (3.15) только при $X \gg p$. В методе фазового экрана преломляющий слой толщины $2X$ заменяется плоскостью $x = 0$. Ясно, что одно из условий допустимости такой замены — малое значение X по сравнению с расстоянием от ГЛ до источника и наблюдателя. Следовательно, должно выполняться двойное неравенство $x \gg X \gg p$. Отсюда вытекает требование малых углов преломления, что и будет всегда предполагаться в дальнейшем.

Поскольку при малых углах $\Theta_g(p)$ эффекты деполяризации оказываются очень слабыми (см. § 3.1), можно не рассматривать всех компонентов электромагнитного поля и, не вводя потенциалов Дебая, исходить непосредственно из векторных уравнений, к тому же существенно упрощенных. Волновое уравнение для **E** получается путем исключения **H** из системы (3.2):

$$\Delta \mathbf{E} + k^2 n_g^2(r) \mathbf{E} + \nabla(\mathbf{E} \nabla \ln n_g) + [\nabla \ln n_g, \operatorname{rot} \mathbf{E}] = 0. \qquad (3.17)$$

Аналогичным образом можно получить такое же уравнение для **H**, если исключить **E** из (3.2). Деполяризация связана только с двумя последними слагаемыми, малые значения которых по сравнению с первыми определяются параметром $\lambda r_g/R^2 \ll 1$ [27], который возникает из оценки $|\nabla \ln n_g| \simeq r_g/r^2$ с учетом того, что наименьшее значение $r = R$.

Отбросив члены, содержащие $\nabla \ln n_g$, и рассмотрев линейно поляризованную волну (3.7), получим скалярное уравнение для двух от-

[27] В оптическом диапазоне для звезд, подобных Солнцу, $\lambda r_g/R^2 \sim 10^{-19}$.

личных от нуля компонентов электромагнитного поля $E_y = H_z = u$:

$$\Delta u + k^2 n_g^2 (r)\, u = 0. \tag{3.18}$$

В дальнейшем мы покажем, что метод фазового экрана позволяет решить уравнение (3.18) и для произвольного распределения гравитирующих масс, когда n_g определяется по формуле (1.26). Однако вначале рассмотрим одну модельную задачу, положив согласно (2.1)

$$n_g (r) = 1 + \frac{r_g}{r},$$

не ограничивая область применимости этой формулы условием $r_g/r \ll \ll 1$. Распространяя указанную зависимость $n_g (r)$ на всю область изменений r от 0 до ∞, мы не можем, вообще рассчитывать на то, что решение (3.18) позволит правильно описать дифрагированное поле во всем пространстве, так как в реальной ГЛ $n_g (r)$ в окрестности r_g определяется совсем другой формулой (см. § 3.1). Но этот пример позволит проследить связь между строгим решением уравнения (3.18) и методом фазового экрана.

Уравнение (3.18) с $n_g (r)$, заданным (2.1) во всем пространстве, было исследовано еще в 1928 г. Гордоном [89]. Решение, удовлетворяющее требованию конечности при $r = 0$, таково:

$$u (r, \theta) = u_0 \Gamma (1 - ikr_g) \exp \{\pi k r_g/2 + ikr \cos \theta\} \times \times {}_1F_1 [ikr_g;\ 1;\ ikr (1 - \cos \theta)], \tag{3.19}$$

где Γ — гамма-функция.

Отсюда следует, что поток энергии, определяемый вектором Пойнтинга, направлен вдоль оси x и

$$P_x \simeq u_0^2 \frac{ckr_g}{2} |{}_1F_1 [ikr_g;\ 1;\ ikr (1 - \cos \theta)]|^2, \quad kr_g \gg 1. \tag{3.20}$$

Сравнив это выражение с формулой (3.13), убеждаемся, что она совпадает с осевой составляющей $\mathbf{P}$ в области фокусировки. Поперечная же составляющая в нашем приближении отсутствует, поскольку она связана с деполяризацией волны.

Совпадение P_x из (3.20) и (3.13) может показаться на первый взгляд довольно неожиданным, так как фактически рассматривались разные уравнения, в чем легко убедиться, сравнив (2.1) с $n_g (r)$ в метрике Шварцшильда (см. § 3 1). Мы объясним это совпадение несколько позже, решив ту же задачу методом фазового экрана (рис 3.3).

Пользуясь принципом Гюйгенса (см., например, [14]), запишем выражение для поля $u (x, \rho)$ в точке наблюдения, удаленной на расстояние x от ГЛ и смещенной на величину ρ от оси:

$$u (x, \rho) = \frac{ku_0}{2\pi i} \int\limits_{\Sigma} \frac{d\mathbf{p}}{r (\mathbf{p}, \rho)} \exp \{i [kr (\mathbf{p}, \rho) + \mathcal{H} (p)]\}. \tag{3.21}$$

Здесь $r (\mathbf{p}, \rho)$ — расстояние от точки наблюдения до текущей точки интегрирования $\mathbf{p}$ на фазовом экране, u_0 — амплитуда падающей волны. Учитывая малость углов преломления и вытекающее отсюда неравенство $x \gg |\mathbf{p} - \boldsymbol{\rho}|$, имеем

$$r(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}) \simeq x + \frac{(\mathbf{p} - \boldsymbol{\rho})^2}{2x}.$$

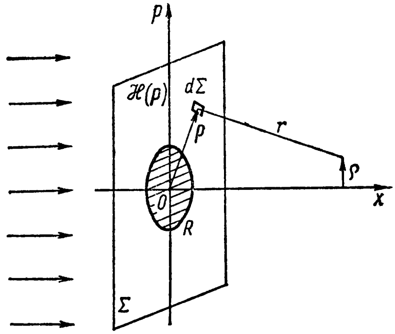


Рис. 3.3. Фазовый экран, учитывающий влияние гравитационного поля вблизи ГЛ на электромагнитную волну

Эту величину следует подставить в выражение для фазы подынтегрального члена в (3.21), а в амплитудном множителе можно ограничиться первым слагаемым, положив $r \simeq x$. Область интегрирования Σ в случае прозрачной ГЛ охватывает всю плоскость $x = 0$, а для непрозрачных линз из нее исключается круг радиусом R с центром в начале координат (как и раньше предполагается, что все излучение, попадающее на звезду, поглощается ею). После указанных упрощений выражение (3.21) принимает вид

$$u(x, \boldsymbol{\rho}) \simeq \frac{ku_0}{2\pi i x} e^{ik(x+\rho^2/2x)} \int\limits_{\Sigma} d\mathbf{p} \exp\left\{ik\left(\frac{p^2}{2x} - \frac{\mathbf{r}\boldsymbol{\rho}}{x}\right) + i\mathscr{H}(p)\right\}. \quad (3.22)$$

Выясним прежде всего, какие области значений $\mathbf{p}$ дают наибольший вклад в интеграл. Учитывая, что длина волны много меньше всех характерных размеров ГЛ, экспонента в (3.22) является быстроосциллирующей функцией. Поэтому основной вклад в интеграл дают те области значений $\mathbf{p}$, которые лежат в окрестности стационарных точек полной фазы $\tilde{\mathscr{H}}(\mathbf{p}) = k(p^2/2x - \mathbf{p}\boldsymbol{\rho}/x) + \mathscr{H}(p)$. Эти точки определяются из решения системы уравнений $\nabla\tilde{\mathscr{H}}(\mathbf{p}) = 0$, принимающих с учетом (3.14) вид

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{p} + x\boldsymbol{\Theta}_g(\mathbf{p}). \quad (3.23)$$

Сравнивая (2.9) и (3.23), видим, что уравнение для нахождения стационарных точек полной фазы $\tilde{\mathscr{H}}(\mathbf{p})$ в точности совпадает с аберрационным уравнением в приближении геометрической оптики, которое из всей совокупности лучей выделяет только лучи, проходящие через точку наблюдения. Если все стационарные точки лежат вне круга $p = R$, экранирующим действием диска непрозрачной ГЛ можно пренебречь. Это позволяет расширить область интегрирования в (3.22) на всю плоскость $x = 0$ (как и для прозрачных ГЛ). В силу осевой симметрии задачи вычисление интеграла (3.22) удобнее производить в полярных координатах p, φ ($d\mathbf{p} = p\,dp\,d\varphi$). Выполнив интегрирование по φ, получим

$$u(x, \rho) \simeq \frac{ku_0}{ix} e^{ik(x+\rho^2/2x)} \int\limits_0^\infty \mathcal{J}_0\left(k\frac{\rho p}{x}\right) \exp\left\{i\left[\frac{kp^2}{2x} + \mathscr{H}(p)\right]\right\} p\,dp, \quad (3.24)$$

где $\mathcal{J}_0$ — функция Бесселя нулевого порядка.

Расширяя область интегрирования для непрозрачных ГЛ до всей плоскости $x = 0$, мы тем самым возвращаемся к условиям модельной задачи, рассмотренной выше. Точное решение уравнения (3.18) со значением $n_g(r)$, заданным формулой (2.1) во всем пространстве, нам известно. Для того чтобы сравнить с ним решение, получаемое методом фазового экрана, надо конкретизировать зависимость $\mathcal{H}(p)$ в (3.24) таким образом, чтобы она также соответствовала (2.1). Воспользуемся тем обстоятельством, что гравитационное поле в окрестности стационарных точек ρ_j является слабым, так как $p_j > R \gg r_g$. Следовательно, здесь справедлива основная формула $\Theta_g(p) = 2r_g/p$ и $\mathcal{H}(p)$ вычисляется по (3.15) как

$$\mathcal{H}(p) = -2kr_g \int\limits_{p_\text{п}}^{p} \frac{dp}{p} = -2kr_g \ln \frac{p}{p_\text{п}}. \qquad (3.25)$$

Нижний предел интегрирования выбирается произвольно, так как интересующие нас энергетические характеристики поля от него не зависят[28]. После подстановки (3.25) в (3.24) интеграл выражается через вырожденную гипергеометрическую функцию ${}_1F_1$:

$$u(x, \rho) \simeq u_0 \exp\{\pi kr_g/2 + ik\,]x + r_g \ln(kp_\text{п}^2/2x)]\} \times$$
$$\times \Gamma(1 - ikr_g)\, {}_1F_1\left[ikr_g;\ 1;\ ik\frac{\rho^2}{?x}\right]. \qquad (3.26)$$

Нам остается сравнить полученный результат с точной формулой (3.19). Учитывая, что $r\cos\theta = x$, замечаем, что множители при ${}_1F_1$ в (3.19) и (3.26) отличаются друг от друга только фазой экспоненты, а аргументы гипергеометрической функции совпадают при малых углах преломления. Действительно, в этом случае $kr(1 - \cos\theta) \simeq \simeq kr\theta^2/2 \simeq k\rho^2/2r \simeq k\rho^2/2x$. Таким образом, в рассмотренной задаче с $n_g = 1 + r_g/r$ метод фазового экрана является хорошим приближением при малых углах преломления. Как отмечалось выше, требование $\Theta_g(p) \ll 1$ по существу не является ограничением для реальных ГЛ, если только речь не идет о черных дырах. Поэтому в дальнейшем все более сложные модели n_g будут исследоваться методом фазового экрана.

Мы сформулировали исходные уравнения и обрисовали схему расчета дифрагированного поля для плоской волны, или, что то же, для бесконечно удаленного источника. Не представляет труда обобщить метод фазового экрана на случай конечного расстояния до излучателя, подобно тому, как это было сделано в гл. 2. В этом случае на линзу падает сферическая волна и в плоскости интегрирования возникает дополнительный фазовый сдвиг $x_s + p^2/2x_s$. Кроме того, учитывая фактор расходимости, надо заменить амплитуду поля на экране u_0 на A/x_s, где A — константа, характеризующая мощность

[28] Напомним, что $\mathcal{H}(p)$ определяется с точностью до константы. По этой же причине мы не включили в (3.19) начальную фазу падающей волны, положив ее равной нулю при $x = 0$.

излучателя. В результате получим

$$u(x,\rho)\simeq\frac{kA}{2\pi i x x_s}e^{ik(x+x_s+\rho^2/2x)}\int\limits_{\Sigma}d\mathbf{p}\exp\left\{ik\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x_s}\right)p^2-\frac{\mathbf{p}\boldsymbol{\rho}}{x}\right]+\right.$$

$$\left.+i\mathscr{H}(p)\right\}.$$

Если перейти к переменным $\tilde{x}=xx_s/(x+x_s)$ и $\tilde{\rho}=\rho x_s/(x+x_s)$, а также ввести обозначение $u_н=A/(x+x_s)$ ($u_н$ — невозмущенная амплитуда поля в точке, удаленной на расстояние $x+x_s$ от источника), то приведенное выражение с точностью до фазового множителя совпадет с (3.22):

$$u(x,\rho)\simeq\frac{ku_н}{2\pi i\tilde{x}}e^{ik(x+x_s+\rho^2/2x)}\int\limits_{\Sigma}d\mathbf{p}\exp\left\{ik\left(\frac{p^2}{2\tilde{x}}-\frac{\mathbf{p}\tilde{\boldsymbol{\rho}}}{\tilde{x}}\right)+i\mathscr{H}(p)\right\}. \quad (3.27)$$

При этом уравнение для нахождения стационарных точек полной фазы $\tilde{\mathscr{H}}(\mathbf{p})$ снова совпадает с аберрационным уравнением (2.20). Коэффициент усиления должен определяться путем сравнения интенсивности дифрагированного поля с той интенсивностью, которая была бы в данной точке, если бы ГЛ отсутствовала, т. е.

$$q(x,\rho)=|u(x,\rho)|^2/|u(x,\rho)|^2_{r_g=0}=|u(x,\rho)|^2/u_н^2.$$

Совпадение исходных формул (3.22) и (3.27) позволяет при исследовании энергетических характеристик дифрагированного поля не рассматривать отдельно две взаимосвязанные задачи дифракции плоской и сферической волн. Переход от формул первой задачи к формулам второй осуществляется заменой x на $\tilde{x}$ и $\boldsymbol{\rho}$ на $\tilde{\boldsymbol{\rho}}$. Результаты, относящиеся к плоской волне, получаются из формул для конечного расстояния предельным переходом $x_s\to\infty$. В последующих двух параграфах для упрощения расчетов рассмотрена задача дифракции плоской волны.

§ 3.3. Гравитационная линза с непрозрачным ядром

Исходным выражением для дифрагированного поля является формула (3.24), которую перепишем с учетом того, что центральная часть ГЛ является непрозрачной:

$$u(x,\rho)\simeq\frac{ku_0}{ix}e^{ik(x+\rho^2/2x)}\int\limits_{R}^{\infty}\mathcal{J}_0\left(k\frac{\rho p}{x}\right)\exp\left\{i\left[k\frac{p^2}{2x}+\mathscr{H}(p)\right]\right\}p\,dp. \quad (3.28)$$

Интегралы такого вида часто встречаются в теории дифракции (см., например, [8]). Их характерной особенностью является наличие быстроосциллирующей функции в подынтегральном выражении. Если длина волны достаточно мала, вклады соседних элементов из области интегрирования фактически уничтожают друг друга (деструктивная интерференция). Исключение составляют лишь окрестности так называемых стационарных точек, где аргумент осциллирующей функции почти не меняется. Значение интеграла определяется поведением подынтегральной функции вблизи указанных точек, что и составляет основу метода стационарной фазы (см, например, [8, 105]), оказывающегося весьма эффективным и в нашем случае.

Нам предстоит рассчитать энергетический коэффициент усиления $q = |u|^2/u_0^2$ при различных положениях наблюдателя относительно ГЛ. Начнем с наиболее интересной области в окрестности фокальной полуоси при $x > x_{min}$, где в приближении геометрической оптики возникали расходящиеся выражения ($q \to \infty$ при $\rho \to 0$). При малых значениях ρ функция Бесселя $\mathcal{J}_0(k\rho p/x)$ в (3.28) меняется медленно по сравнению с экспонентой и стационарная точка p_l определяется путем дифференцирования фазы экспоненты:

$$\frac{d}{dp}\left[k\frac{p^2}{2x} + \mathcal{H}(p)\right] = 0.$$

Решая это уравнение с учетом (3.25), находим

$$p_l = \sqrt{2r_g x} = l. \tag{3.29}$$

Мы снова получили радиус того светящегося кольца, которое видит наблюдатель, находящийся на фокальной полуоси (см. гл. 2). Экранирующее действие звезды не будет сказываться, если точка наблюдения удалена от ГЛ на расстояние $x > x_{\min} = R^2/2r_g$, так как при этом $l(x) > R$. Если к тому же смещение ρ от оси не очень велико ($\rho \ll \ll x/kl$), то оценка интеграла (3.28) по методу стационарной фазы приводит к следующему значению коэффициента усиления:

$$q(x, \rho) \simeq 2\pi k r_g \mathcal{J}_0^2\left(k\frac{l}{x}\rho\right) = 2\pi k r_g \mathcal{J}_0^2\left(\sqrt{\frac{2r_g}{x}}\,k\rho\right). \tag{3.30}$$

На самой оси ($\rho = 0$) значение q достигает максимума:

$$q_{\max} \simeq 2\pi k r_g. \tag{3.31}$$

Численное значение $q_{\max}$, вообще, очень велико. Например, для звезд, подобных Солнцу ($r_g \simeq 3$ км), в оптическом диапазоне ($\lambda \simeq 5\cdot 10^{-5}$ см) получается $q_{\max} \simeq 2\cdot 10^{11}$. Ниже будет показано, что столь большое значение $q_{\max}$ существенно связано с идеализированной постановкой задачи, в которой не учитывались отклонения структуры падающего поля от плоской волны и возможной несферичности ГЛ. Вопрос о роли этих и других факторов требует особого рассмотрения, а пока что обратим внимание на интересную особенность формулы (3.31). Оказывается, учет дифракции волн приводит к независимости коэффициента усиления от расстояния! Наблюдатель, удаляющийся от ГЛ вдоль фокальной полуоси, согласно (3.31) будет фиксировать неизменную интенсивность сфокусированного поля. Этот результат легко понять на основе общей формулы (2.17) для коэффициента усиления, учитывая, что за счет дифракции волн на кольцевой апертуре l возникает «разброс лучей» на угол $\psi_d \sim (kl)^{-1}$. Найдем площадь фокального пятна вблизи оси x: $\Sigma_F \simeq \pi\psi_d^2 x^2$. В то же время площадь входной апертуры ГЛ $\Sigma_{вх} \simeq 2\pi l \Delta l \simeq 2\pi l \psi_d x$. Отсюда $q_{max} = \Sigma_{вх}/\Sigma_F \simeq 4kr_g$, что совпадает с (3.31) с точностью до постоянного множителя. Таким образом, становится понятной независимость q_{max} от расстояния: с увеличением дистанции площади входной апертуры и фокального пятна возрастают по одному и тому же закону пропорцианально x.

Теперь представим, что смещение наблюдателя от оси ГЛ настолько велико, что выполняется неравенство $\rho \gg x/kl$. В этом случае предэкспоненциальный множитель в (3.28) тоже становится быстроосциллирующим, и, определяя точки стационарной фазы, следует воспользоваться асимптотическим представлением функции Бесселя при больших значениях аргумента:

$$\mathcal{J}_0(z) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi z}}\left[e^{-i(z-\pi/4)} + e^{i(z-\pi/4)}\right].$$

Интеграл (3.28) разбивается на сумму двух интегралов с $e^{i\tilde{\mathcal{H}}_1(p)}$ и $e^{i\tilde{\mathcal{H}}_2(p)}$, где

$$\tilde{\mathcal{H}}_{1,2}(p) = \frac{kp^2}{2x} \mp k\frac{\rho p}{x} + \mathcal{H}(p). \tag{3.32}$$

Определяя точки стационарности фаз $\tilde{\mathcal{H}}_{1,2}(p)$, следует учитывать только положительные корни производных $\tilde{\mathcal{H}}'_{1,2}(p) = 0$, что приводит к следующим значениям p_i:

$$p_{1,2} = l\left[\pm \rho/2l + \sqrt{1 + \rho^2/4l^2}\right]. \tag{3.33}$$

Здесь снова легко увидеть соответствие с результатами гл. 2: найденные значения p_1, p_2 совпадают с координатами изображений источника. Если оба корня удовлетворяют условию $p_i > R$ (наблюдатель находится внутри области III (см. рис. 3.2)), непрозрачная часть ГЛ не влияет на дифрагированное поле. В этом случае возникает характерная для двух когерентных источников интерференционная картина и коэффициент усиления определяется по формуле

$$q(x, \rho) \simeq \frac{l}{\rho}\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2/4l^2}}\left[1 + \frac{\rho^2}{2l^2} + \sin(\Delta\tilde{\mathcal{H}})\right], \tag{3.34}$$

где $\Delta\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\mathcal{H}}_1(p) - \tilde{\mathcal{H}}_2(p_2)$.

Сравнивая полученный результат с геометрооптической формулой (2.17), видим, что (3.34) отличается от (2.17) только интерференционным членом $\sin(\Delta\tilde{\mathcal{H}})$. За счет этого слагаемого возникают осцилляции коэффициента усиления, относительная глубина которых уменьшается по мере удаления наблюдателя от оси ГЛ. Зависимость $q(x, \rho)$ от ρ (поперечный разрез интенсивности сфокусированного поля) представлена на рис. 3.4. Для сравнения на этом же рисунке изображен поперечный разрез $q(\rho)$ в фокальной плоскости обычной линзы. Здесь также видны характерные интерференционные осцилляции, но спад огибающей q происходит в ОЛ пропорционально ρ^{-3}, т. е. намного

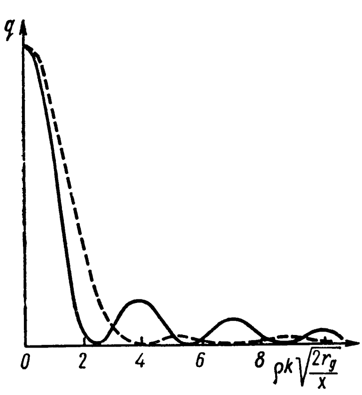


Рис. 3.4. Сравнение поперечного распределения интенсивности вблизи оси ГЛ (сплошная кривая) с таким же распределением в фокальной плоскости ОЛ (штриховая кривая)

быстрее, чем в ГЛ (пропорционально ρ^{-1}). Это объясняет низкое качество изображения, формируемого ГЛ, по сравнению с ОЛ (изображение размывается), хотя напомним, что у ГЛ имеются и свои преимущества: действительное изображение источника возникает на любом расстоянии $x > x_{\min}$, а не только в фокальной плоскости.

По мере удаления наблюдателя от оси внутреннее изображение p_2 все более приближается к краю диска непрозрачного ядра ГЛ. При $p_2 < R$ второе изображение и вместе с ним интерференционная структура поля исчезают. В этом случае наблюдатель попадает в область II (рис. 3.2) и расчет коэффициента усиления приводит к формуле (2.19):

$$q(x,\rho) \simeq \frac{l}{2\rho}\,\frac{1+\rho^2/2l^2}{\sqrt{1+\rho^2/4l^2}} + \frac{1}{2}. \tag{3.35}$$

Приведенные выше простые выражения для коэффициента усиления (3.30), (3.34) и (3.35) справедливы только в том случае, когда точки стационарной фазы достаточно удалены от края непрозрачного ядра. Соответствующие условия в виде некоторых неравенств можно найти в литературе, посвященной методу стационарной фазы.

Известны также результаты для пограничных ситуаций, но формулы при этом получаются, естественно, намного сложнее. Так, в работе [106] приводится следующий результат, справедливый при сколь угодно близком приближении p_2 к R:

$$u_2(x,\rho) \simeq u_0\sqrt{\frac{k}{2\pi\rho x}}\exp\left\{i\left[k(x+\rho^2/2x) + \tilde{\mathcal{H}}_2(p_2) - \frac{3}{4}\pi\right]\right\}\times$$
$$\times\sqrt{\frac{2p_2}{\mathcal{H}_2''(p_2)}}\left[\sqrt{\pi i}\,\Phi\left(\sqrt{\Delta\mathcal{H}_2}\right) - \frac{e^{i\Delta\tilde{\mathcal{H}}_2}}{2i\sqrt{\Delta\mathcal{H}_2}}\right] - \frac{\sqrt{R}\,e^{i\Delta\mathcal{H}_2}}{i\mathcal{H}'(R)}, \tag{3.36}$$

где $\Delta\tilde{\mathcal{H}}_2 = \tilde{\mathcal{H}}_2(R) - \tilde{\mathcal{H}}_2(p_2)$, а $\Phi(z) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{z} e^{i\zeta^2}d\zeta$ — интеграл Френеля (формула (3.36) справедлива при $p_2 \geqslant R$).

§ 3.4. Прозрачные сферически симметричные ГЛ

Применение метода фазового экрана к задаче дифракции волн в прозрачных ГЛ является в известном смысле более последовательным, чем в линзах с непрозрачным ядром. Действительно, вопрос о граничных условиях в прозрачных ГЛ не возникает, и вместе с ним снимается дополнительное условие полного поглощения, которое приводит к ограничению нижнего предела интегрирования в (3.28) значением $p = R$. В прозрачных ГЛ исходная формула записывается так:

$$u(x, \rho) \simeq \frac{ku_0}{ix} e^{ik(x+\rho^2/2x)} \int_0^\infty \mathcal{J}_0\left(k\frac{\rho p}{x}\right) \exp\left\{ik\frac{p^2}{2x} + i\mathcal{H}(p)\right\} p\,dp. \quad (3.37)$$

Формально (3.37) совпадает с выражением (3.24), для которого функция $\mathcal{H}(p)$ определялась по формуле (3.25) для всех p, что и позволило точно вычислить интеграл. Теперь же рассматривается ГЛ, создаваемая непрерывным распределением массы $\delta(r)$, сосредоточенной в пределах сферы радиуса R. Поэтому формула (3.25) применима только при $p \geqslant R$; а что касается меньших прицельных параметров, то проще всего рассчитать $\mathcal{H}(p)$ по формуле (3.15), определив функцию $\Theta_g(p)$ через $\delta(r)$ так, как это сделано в § 2.3. В частности, там было рассмотрено, какими фокусирующими свойствами обладают ГЛ — однородный шар и модель Кинга, для которых при малых p справедливо следующее разложение:

$$\Theta_g(p) \simeq \frac{p}{x_F}\left(1 - \frac{p^2}{2a^2}\right), \quad (3.38)$$

где x_F — фокусное расстояние ГЛ, связанное, как и апертурный параметр a, известным образом с $\delta(r)$. Например, для однородного шара радиуса R параметр $a = \sqrt{2}R$, $x_F = R^2/3r_g$. В тех случаях, когда нам потребуются качественные оценки без численных коэффициентов, можно будет считать $a \sim R$ и $x_F \sim R^2/r_g$.

Из проведенного ранее анализа (см. § 2.3) известно, что для прозрачных ГЛ формулы геометрической оптики приводят к расходящимся выражениям не только на фокальной полуоси, но и на каустической поверхности, имеющей для моделей Кинга и однородного шара вид конуса с вершиной в точке $x = x_F$ (см. рис. 2.15). Нам необходимо сосредоточить внимание именно на этих областях, поскольку везде, кроме них, можно использовать более простые геометрические расчеты.

Начнем с приосевой области, которая характеризуется малыми отклонениями ρ от оси линзы. С учетом медленного изменения $\mathcal{J}_0 \times \left(k\frac{\rho p}{x}\right)$ стационарные точки p_j определяются по фазе экспоненты, т. е. с помощью уравнения $\frac{d}{dp}\left[kp^2/2x + \mathcal{H}(p)\right] = 0$, которое согласно (3.38) записывается так:

$$p\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_F} + \frac{p^2}{2a^2x_F}\right) = 0. \quad (3.39)$$

Как показано в § 2.3, уравнение (3.39) имеет три корня: $p_3 = 0$, $p_{1,2} = \pm a\sqrt{2(x - x_F)/x}$. Нам необходимо учитывать только действительные корни, попадающие в интервал интегрирования. Поэтому при $x < x_F$ имеется один корень $p_3 = 0$, а при $x > x_F$ к нему добавляется еще и

$$p_1 = a\sqrt{\frac{2(x-x_F)}{x}}. \qquad (3.40)$$

В геометрической оптике с корнем p_3 сопоставляется луч, идущий от центральной светящейся точки, а с p_1 — конус лучей от кольца вокруг центра ГЛ. Если точки стационарной фазы достаточно удалены друг от друга, их вклад в интеграл (3.37) определяется независимо друг от друга и $u = \sum_j u_j$, где u_j соответствует p_j. При сближении точек p_1 и p_3 (это происходит при $x \to x_F$) вычисление u производится несколько иначе: в разложении $\mathscr{H}(p)$ в окрестности $p = 0$ следует учитывать не только квадратичные, но и члены более высокого порядка. Поэтому согласно (3.15) и (3.38) получим

$$\mathscr{H}(p) \simeq -\frac{kp^2}{2x_F}\left(1 - \frac{p^2}{4a^2}\right). \qquad (3.41)$$

Подставив это представление $\mathscr{H}(p)$ в (3.37), найдем формулу, справедливую как в фокусе (здесь $p_1 = p_3 = 0$), так и в его окрестности. Сначала исследуем поведение поля на оси ГЛ ($\rho = 0$). В этом случае интеграл (3.37) вычисляется точно:

$$u(x, 0) \simeq \frac{ku_0}{ix} e^{ikx} \int_0^\infty \exp\left\{ik\frac{p^2}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_F} + \frac{p^2}{4a^2x_F}\right)\right\} pdp =$$

$$= u_0 \frac{a\sqrt{2\pi k x_F}}{x} \exp\left\{ik\left[x - \frac{a^2x_F}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_F}\right)^2\right] - i\frac{\pi}{4}\right\} \times$$

$$\times \Phi\left[\sqrt{\frac{kx_F}{2}}\, a\left(\frac{1}{x_F} - \frac{1}{x}\right)\right]. \qquad (3.42)$$

Область применимости (3.42) ограничена только со стороны больших значений x, так как при $x \gg x_F$ значение p_1 становится близким к R и уже нельзя использовать представление (3.38) и вытекающее из него разложение (3.41).

Определяя обычным образом коэффициент усиления $q = |u|^2/u_0^2$, с помощью (3.42) получим

$$q(x, 0) \simeq \frac{2\pi k x_F a^2}{x^2} \left|\Phi\left[a\sqrt{\frac{kx_F}{2}}\left(\frac{1}{x_F} - \frac{1}{x}\right)\right]\right|^2. \qquad (3.43)$$

Рассмотрим прежде всего усиление в самом фокусе. Поскольку $\Phi(0) = 1/2$,

$$q(x_F, 0) \simeq \frac{\pi k a^2}{2x_F}. \qquad (3.44)$$

Сравним эту формулу с коэффициентом усиления q_0 в фокусе ОЛ с круговой апертурой радиуса R_0 [8]:

$$q_0(x_F, 0) = \frac{k^2R_0^4}{4x_F^2}. \qquad (3.45)$$

Если выбрать

$$R_0 = \left(\frac{2\pi a^2 x_F}{k} \right)^{1/4}, \tag{3.46}$$

то формулы (3.44) и (3.45) совпадут друг с другом. Спрашивается, каков физический смысл рассчитанного таким образом значения R_0? Для выяснения этого вопроса обратимся к формуле (3.42). Если учитывать только квадратичный член в показателе экспоненты, то подынтегральная функция будет соответствовать идеальной ОЛ. Но при $x = x_F$ интеграл (3.42) без учета члена с p^4 расходится. В ОЛ расходимость не возникает благодаря конечным размерам апертуры, ограничивающей верхний предел интегрирования величиной $p = R_0$, что и приводит к формуле (3.45). Учет члена четвертого порядка по p также устраняет расходимость, так как за счет этого слагаемого подынтегральная функция начинает быстро осциллировать при больших значениях p. Начало осцилляции определяется условием $kp^4/8a^2x_F \simeq \simeq 1$. Отсюда находим, что эффективная апертура ГЛ $R_{\text{эф}} \simeq (8a^2x_F/k)^{1/4}$. Сравнивая это выражение с (3.46), убеждаемся, что формулы совпадают с точностью до численного коэффициента порядка единицы. Это означает, что поле в фокусе ГЛ можно рассчитывать так же, как и в ОЛ, если ввести понятие эффективной апертуры ГЛ, определяемой по фазе $\tilde{\mathcal{H}}(p)$ следующим образом. Функция $\tilde{\mathcal{H}}(p)$ разлагается в ряд по степеням p в окрестности $p = 0$, и удерживаются квадратичные и первые неисчезающие члены более высокого порядка:

$$\tilde{\mathcal{H}}(p) = \tilde{\mathcal{H}}(0) + \frac{1}{2}\tilde{\mathcal{H}}''(0)\,p^2 + \frac{1}{n!}\tilde{\mathcal{H}}^{(n)}(0)\,p^n + \cdots$$

Линейный по p член отсутствует, так как $\tilde{\mathcal{H}}'(0) = 0$ ($p = 0$ является стационарной точкой фазы $\tilde{\mathcal{H}}(p)$). В фокусе линзы член с p^2 равен нулю, а остаток $\tilde{\mathcal{H}}^{(n)}(0)\,p^n/n!$ как раз и определяет эффективную апертуру линзы, если положить его равным примерно единице. Следовательно,

$$R_{\text{эф}} \simeq (n!/\tilde{\mathcal{H}}^{(n)}(0))^{1/n}. \tag{3.47}$$

В рассмотренном выше случае $n = 4$, однако могут встретиться и иные ситуации. Обращаем внимание на зависимость эффективной апертуры ГЛ от длины волны, что видно из формулы (3.46). Поскольку $R_{\text{эф}}$ соответствует тому поперечному смещению на фазовом экране, при котором существенно меняется фаза экспоненты, эффективную апертуру можно отождествить с первой зоной Френеля, в чем и заключается ее физический смысл.

Заметим, что размеры эффективной апертуры, как правило, очень малы по сравнению с R. Действительно, используя оценочные формулы для a и x_F, имеем

$$R_{\text{эф}} \sim \left(\frac{a^2 x_F}{k} \right)^{1/4} \sim R/(kr_g)^{1/4}.$$

В диапазоне частот, доступном для наземных наблюдений, $kr_g \gg 1$, что и приводит к неравенству $R_{эф} \ll R$. Если же предположить, что с Земли можно регистрировать излучение столь низкой частоты, при которой $kr_g \leqslant 1$, то формальная оценка приводит к значению $R_{эф} \geqslant R$. Но превысить физические размеры ядра ГЛ $R_{эф}$ не может, следовательно, в этом диапазоне частот никакого усиления центральная часть линзы не дает, что, впрочем, прямо следует из формулы (3.44).

Продолжим анализ сфокусированного излучения с помощью асимптотических представлений для $\Phi(z)$ при $|z| \gg 1$ [106]:

$$\Phi(z) \simeq \begin{cases} 1 + e^{iz^2} T(z), & z > 0; \\ e^{iz^2} T(z), & z < 0, \end{cases} \tag{3.48}$$

где $T(z) = (e^{i\pi/4}/2\pi z) \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-i/z^2)^n \Gamma(n + {}^1/_2)$.

Для всех $x < x_F$ аргумент $\Phi(z)$ отрицательный и при достаточном удалении от фокуса, когда $\sqrt{\frac{1}{2} k x_F}\, a \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_F}\right) \gg 1$, поле $u \simeq$ $\simeq u_0 e^{ikx} x_F/(x_F - x)$, а коэффициент усиления

$$q(x, 0) \simeq \frac{x_F^2}{(x_F - x)^2}. \tag{3.49}$$

Если наблюдатель находится за фокусом ($x > x_F$), то аргумент $\Phi(z)$ оказывается положительным и асимптотическое представление $\Phi(z)$ приводит к двухчленному выражению: $u = u_3 + n_1$, где u_3 есть поле, создаваемое центральным пятном,

$$u_3 \simeq u_0 \frac{x_F}{x - x_F} e^{ikx}, \tag{3.50}$$

а u_1 — поле, создаваемое светящимся кольцом,

$$u_1 \simeq a u_0 \frac{\sqrt{2\pi k x_F}}{x} \exp\left\{ik\left[x - \frac{x_F a^2}{2}\left(\frac{1}{x_F} - \frac{1}{x}\right)^2\right] - i\frac{\pi}{4}\right\}. \tag{3.51}$$

Формулу (3.50) можно использовать при сколь угодно больших x, так как она соответствует стационарной точке $p_3 = 0$, которая не зависит от расстояния x. Что касается (3.51), то здесь существует ограничение со стороны больших значений x, поскольку при выводе этой формулы использовалось представление (3.38), справедливое лишь при малых p. Условие $p_1 \ll R$ приводит согласно (3.40) к неравенству $2(x - x_F)/x \ll 1$, т. е. значительные удаления от фокуса не допускаются.

Чтобы избавиться от указанного ограничения, будем считать, что стационарная точка p_1 определена с помощью истинной функции $\Theta_g(p)$, а не по ее разложению вблизи $p = 0$. Графический способ нахождения p_j был представлен на рис. 2.12. Тогда вычисление u_1

методом стационарной фазы дает следующий результат:

$$u_1(x, 0) \simeq u_0 e^{ikx} \left[\frac{2\pi k p_1^2}{x \,|\, 1 - x\Theta_g'(p_1) \,|} \right]^{1/2} \times$$

$$\times \exp \left\{ i \left[\tilde{\mathscr{H}}(p_1) - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn}(1 - x\Theta_g'(p_1)) \right] \right\}. \qquad (3.52)$$

По мере приближения к фокусу, когда $p_1(x)$ определяется соотношением (3.40), формула (3.52) переходит, как и должно быть, в (3.51). На больших расстояниях $x \gg R^2/2r_g$ радиус светящегося кольца превышает радиус звезды ($p_1 \gg R$). Здесь угол преломления определяется по формуле $\Theta_g(p) = 2r_g/p$ и $p_1(x) = \sqrt{2r_g x}$. Подставив эти значения в (3.52), найдем асмптотику u_1 для больших расстояний x:

$$u_1(x, 0) \simeq \sqrt{2\pi k r_g}\, u_0 \exp\{i[kx + \mathscr{H}(l)]\}. \qquad (3.53)$$

Согласно (3.50) поле, создаваемое центральным пятном, убывает при больших значениях x так, как если бы точечный источник находился в точке x_F. При $x - x_F \gg x_F$ поле u_3 становится очень слабым. Этот вывод (полученный из дифракционных формул) следует также из геометрооптического рассмотрения (см. § 2.3).

Поле u_1, создаваемое светящимся кольцом, ведет себя совершенно иначе: согласно (3.53) его амплитуда стремится к постоянной величине. В той области расстояний, где $|u_1| \gg |u_3|$, коэффициент усиления определяется по формуле

$$q(x, 0) \simeq 2\pi k r_g,$$

которая не зависит от распределения массы внутри сферы и совпадает с полученной ранее для ГЛ с непрозрачным ядром. Совпадение коэффициентов усиления становится понятным, если вспомнить, что при $p_1 > R$ светящееся кольцо выходит во внешнюю область ГЛ, а поле центрального изображения u_3 становится, как уже отмечалось, пренебрежимо малым. Выход $q(x)$ на асимптоту $q_\infty = 2\pi k r_g$ происходит с постепенно затухающими осцилляциями. Амплитуда осцилляций $q(x)$ максимальна в окрестности фокуса (рис. 3.5), где они описываются интегралом Френеля в полной формуле (3.42). Для оценки масштаба осцилляций в прифокальной области положим $\frac{1}{x} - \frac{1}{x_F} \simeq \Delta x / x_F^2$ и приравняем к единице аргумент интеграла Френеля. Таким образом, приходим к следующей оценке:

$$\Delta x \simeq \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2x_F^3}{k}} \sim R^2/r_g \sqrt{k r_g}.$$

Для однородного шара $\Delta x \simeq R^2/r_g \sqrt{27 k r_g}$.

Представляет интерес сравнить коэффициент усиления в фокусе q_F с его асимптотическим значением $2\pi k r_g$. Согласно (3.44) и (3.53) имеем

$$\frac{q_F}{q_\infty} = \frac{a^2}{4 x_F r_g}.$$

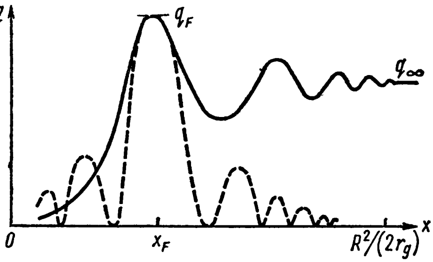


Рис. 3.5. Сравнение распределения интенсивности вдоль оси ГЛ (сплошная кривая) с таким же распределением для ОЛ (штриховая кривая)

Для однородного шара усиление в фокусе всего лишь в 1,5 раза превышает усиление на фокальной полуоси в области $x > R^2/2r_g$. Это означает, что продольная концентрация излучения в фокусе ГЛ выражена несравненно слабее, чем в ОЛ. С точки зрения наблюдений такое небольшое возрастание интенсивности в фокусе вообще не играет роли. Просто можно считать, что у прозрачных ГЛ фокальная полуось начинается в точке x_F, т. е. несколько ближе, чем при наличии непрозрачного ядра. Для однородного шара $x_F = R^2/3r_g$ и расстояние от ГЛ до фокальной полуоси сокращается в 1,5 раза.

Мы подробно проанализировали зависимость дифрагированного поля от расстояния вдоль оси ГЛ. Теперь перейдем к изучению поперечного распределения, причем интерес представляют как малые смещения (они позволяют выделить ту область вблизи оси, где нельзя использовать формулы геометрической оптики), так и большие, при которых наблюдатель попадает в окрестность каустики.

Для малых отклонений от оси стационарные точки фазы экспоненты p_j сохраняют свою роль, но при $\rho \neq 0$ надо учитывать функцию Бесселя в подынтегральном выражении (3.37).

Начнем с области фокуса и его непосредственной окрестности. Здесь стационарные точки сливаются, и в формуле (3.41) для $\mathcal{H}(p)$ необходимо учитывать член, пропорциональный не только p^2, но и p^4. Вычисление интеграла (3.37) приводит к достаточно громоздким выражениям, и мы ограничимся качественными оценками, продемонстрировав одновременно, насколько полезным является понятие эффективной аппертуры, введенное выше. Основой для нашего рассмотрения будет служить геометрооптическая схема, в которой освещенная область представляется в виде двух соосных конусов (с углами раствора $\alpha_0 \sim R_{эф}/x_F$), соприкасающихся вершинами в точке $x = x_F$. Учет дифракции приводит к размыванию краевых лучей на угол порядка $(kR_{эф})^{-1}$, вследствие чего вокруг точки фокуса возникает фокальное пятно конечных размеров. Простое геометрическое построение (рис. 3.6) позволяет получить следующие оценки для продольного Δx_F и поперечного $\Delta\rho_F$ размеров фокального пятна:

$$\Delta\rho_F \sim (k\alpha_0)^{-1}, \quad \Delta x_F \sim (k\alpha_0^2)^{-1}. \tag{3.54}$$

Заметим, что для длиннофокусных линз $\alpha_0 \ll 1$ продольная концентрация излучения оказывается намного слабее поперечной $\Delta x_F \gg \Delta\rho_F$. Из формул (3.54) следует, что характерные размеры фокального пятна связаны друг с другом следующим образом:

$$\Delta\rho_F \sim (\Delta x_F/k)^{1/2}. \tag{3.55}$$

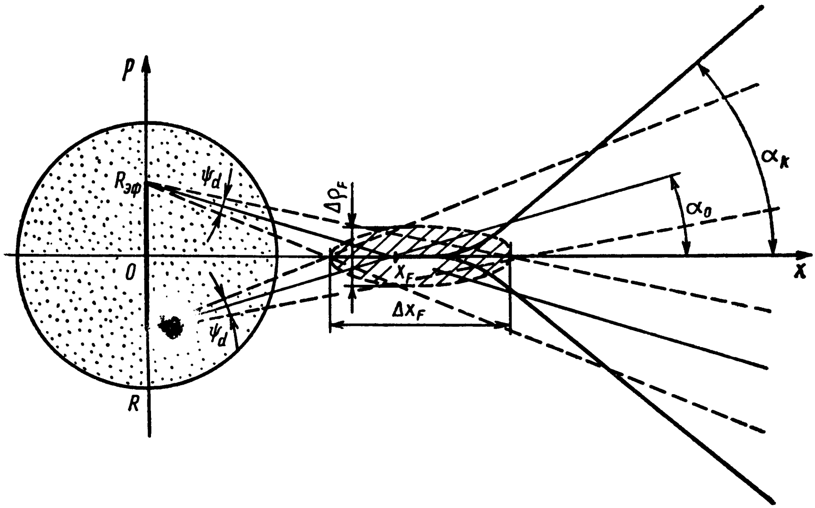


Рис. 3.6. Образование фокального пятна вследствие дифракции волн на краях эффективной апертуры

Но величина Δx_F нами уже была рассчитана. Перепишем ее оценку еще раз, опуская численные коэффициенты:

$$\Delta x_F \sim \sqrt{x_F^3/k}/a \sim R^2/r_g\sqrt{kr_g}. \tag{3.56}$$

Отсюда согласно (3.55) находим

$$\Delta\rho_F \sim (x_F^3/k^3a^2)^{1/4} \sim R/(kr_g)^{3/4}.$$

Проверим правильность наших оценок, определив коэффициент усиления в фокусе ГЛ, как отношение площади эффективной апертуры к поперечному сечению фокального пятна:

$$q_F \sim \frac{R_{эф}^2}{\Delta\rho_F^2} \sim \frac{R^2\,(kr_g)^{-1/2}}{R^2\,(kr_g)^{-3/2}} = kr_g. \tag{3.57}$$

Результат, как и должно быть, совпадает с формулой (3.44), полученной путем точных вычислений. Величину $\Delta\rho_F$ можно было бы определить и с помощью (3.57), не связывая ее с Δx_F.

Перейдем от исследования фокальной области к другим участкам фокальной полуоси. Будем считать, что мы настолько удалились от фокуса, что две стационарные точки можно рассматривать независимо одна от другой зоны Френеля на фазовом экране, описанные вокруг точек ρ_1 и ρ_3, не перекрываются). Довольно просто рассчитать u_3 — поле от центрального пятна. Учитывая малые угловые размеры эффективной области интегрирования вблизи $\rho_3 = 0$, в формуле (3.41) следует оставить только квадратичный член. При $\mathscr{H}(\rho) = -\frac{k\rho^2}{2x_F}$ интеграл (3.37) вычисляется в элементарных функциях:

$$u_3(x, \rho) \simeq u_0 \frac{x_F}{x - x_F} \exp\left\{ik\left[x + \frac{\rho^2}{2(x - x_F)}\right]\right\}. \tag{3.58}$$

Сравнивая полученный результат с формулой (3.50), легко убедиться, что небольшие смещения от оси влияют только на фазу u_3, оставляя неизменной амплитуду поля. То обстоятельство, что амплитуда $u_3(x, \rho)$ не зависит от ρ (пока наблюдатель остается в пределах освещенного конуса), нас не должно удивлять, так как и в ОЛ дело обстоит точно так же. В геометрической оптике переход от освещенной области в тень происходит скачкообразно, а с учетом дифракции волн граница свет — тень размывается. Нет смысла останавливаться на точных расчетах поля в переходной области. Достаточно снова воспользоваться геометрическими построениями (см. рис. 3.6). Учитывая, что размытые границы характеризуются тем же углом дифракции ψ_d, получаем следующую оценку для ширины перехода:

$$\Delta\rho_{\text{п}} \sim x\psi_d \sim x\,(kR_{\text{эф}})^{-1}.$$

Остается выяснить еще один вопрос: как располагается конус света относительно каустики? Несложные оценки показывают, что освещенная область расширяется с ростом x медленнее, чем конус каустики на больших расстояниях от ГЛ (их взаимное положение показано на рис. 3.6). Действительно, наклон образующей конуса каустики α_k согласно (2.53) на больших расстояниях приближается к значению r_g/R, а для конуса света

$$\alpha_0 \sim R_{\text{эф}}/x_F \sim r_g/R\,(kr_g)^{1/4} \ll \alpha_k.$$

Вклад в интеграл от p_1, рассчитанный методом стационарной фазы, определяется следующим выражением:

$$u_1(x, \rho) \simeq u_0 \left[\frac{2\pi k p_1^2}{x\,|1 - x\Theta_g'(p_1)|}\right]^{1/2} \mathcal{J}_0\left(\frac{kp_1}{x}\rho\right) \times$$
$$\times \exp\left\{i\left[k\left(x + \frac{\rho^2}{2x}\right) + \tilde{\mathcal{H}}(p_1)\right] - i\frac{\pi}{2}\left[1 - \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(1 - x\Theta_g'(p_1))\right]\right\}. \tag{3.59}$$

Отсюда можно найти ширину области фокусировки $\Delta\rho$, которая определяется по масштабу изменений функции Бесселя:

$$\Delta\rho \simeq \frac{x}{kp_1}. \tag{3.60}$$

Для выяснения физического смысла этой формулы вспомним, что p_1 представляет собой радиус светящегося кольца на фазовом экране. Характерный угол дифракции волн на этой кольцевой апертуре

$$\psi_d \simeq \frac{1}{kp_1}. \tag{3.61}$$

Умножив найденный угол на расстояние до линзы, получим линейную меру дифракции

$$\Delta\rho_\alpha \simeq x\psi_d \simeq \frac{x}{kp_1}, \tag{3.62}$$

совпадающую с $\Delta\rho$.

В той области расстояний, для которых известны простые аналитические выражения для ρ_1, формула (3.59) упрощается. Для сравнительно небольших удалений наблюдателя от фокуса, когда ρ_1 определяется по формуле (3.40),

$$u_1(x, \rho) \simeq u_0 a \frac{\sqrt{2\pi k x_F}}{x} \mathcal{J}_0\left[\frac{ka}{x}\sqrt{2\left(1-\frac{x_F}{x}\right)}\rho\right] \times$$
$$\times \exp\left\{ik\left[x - \frac{a^2 x_F}{2}\left(\frac{1}{x_F}-\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{\rho^2}{2x}\right] - i\frac{\pi}{4}\right\}. \qquad (3.63)$$

Оценка же размеров области фокусировки согласно (3.60) дает

$$\Delta\rho \simeq x/ka\sqrt{2(1-x_F/x)}. \qquad (3.64)$$

Заметим, что найденное значение $\Delta\rho$ достигает минимума, равного $(^3/_2)^{^3/_2} x_F/ka$ в точке $x = 3x_F/2$. Для однородного шара эта точка совпадает с выходом светящегося кольца за границу ядра ГЛ, или, что то же, с началом фокальной полуоси у линзы с непрозрачным ядром. Вообще же, учитывая оценки $x_F \sim R^2/r_g$ и $a \sim R$, получим

$$\Delta\rho_{\min} \sim R/kr_g \ll R. \qquad (3.65)$$

При $x \geqslant R^2/2r_g$ радиус кольца выходит из внутренней области ГЛ, а $\rho_1 = \sqrt{2r_g x} = l$. В этом случае $1 - x\Theta_g'(l) = 2$, и формулы (3.59) и (3.60) приобретают вид

$$u_1(x, \rho) \simeq u_0\sqrt{2\pi k r_g}\,\mathcal{J}_0\left(\frac{kl}{x}\rho\right)\exp\left\{i\left[k\left(x+\frac{\rho^2}{2x}\right)+\tilde{\mathcal{H}}(l)\right]\right\}, \qquad (3.66)$$

$$\Delta\rho \simeq \frac{x}{kl} = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{x}{2r_g}}. \qquad (3.67)$$

Если в формулах (3.63), (3.66) положить $\rho = 0$, они переходят в ранее выведенные «осевые» формулы (3.51) и (3.53). Кроме того, легко убедиться, что выражения для $\Delta\rho$ (3.64) и (3.67), справедливые на разных расстояниях от ГЛ, смыкаются друг с другом вблизи общей границы областей их применимости Положив $x \simeq R^2/2r_g$, получим вместо (3.64) и (3.67) соответственно $\Delta\rho \simeq \sqrt{3}R^2/4kar_g$ и $\Delta\rho \simeq R/2kr_g$. Вспомнив, что $a \sim R$, убеждаемся в совпадении обоих выражений с точностью до множителя, близкого к единице. Схематическая зависимость $\Delta\rho\,(x)$ представлена на рис. 3.7.

Интересно отметить, что ширина фокальной области вблизи фокуса зависит от длины волны несколько слабее ($\Delta\rho_F \sim k^{-3/4}$), чем вдали от фокуса ($\Delta\rho \sim k^{-1}$). Это означает, что на достаточно коротких волнах ширина фокального пятна может оказаться больше, чем ширина области приосевой концентрации излучения, на некоторых расстояниях не очень далеко от фокуса. На больших удалениях $\Delta\rho$ растет пропорционально $x^{1/2}$ и в конце концов превысит радиус фокального пятна $\Delta\rho_F$. Несмотря на неограниченное возрастание $\Delta\rho \sim x^{1/2}$, приосевая область никогда не дойдет до каустики, так как расстояние до последней увеличивается пропорционально x, т. е. значительно быстрее.

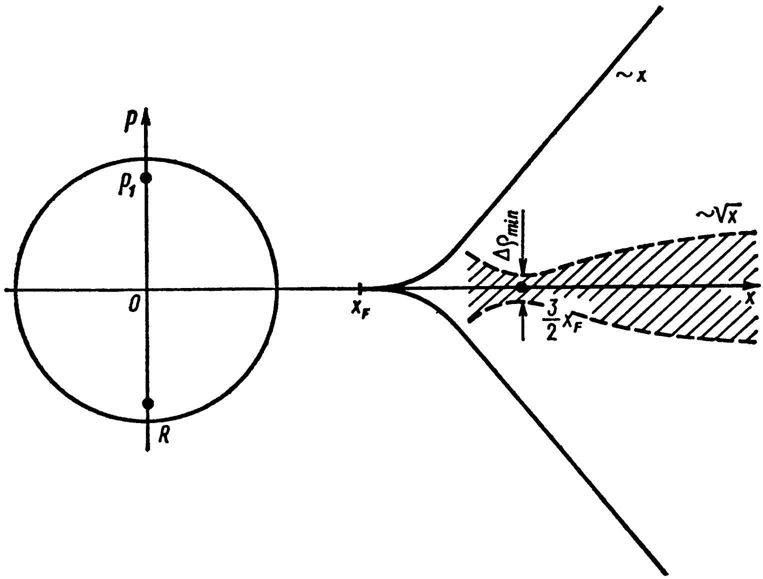


Рис. 3.7. Область фокусировки вблизи фокальной полуоси

Теперь представим себе, что наблюдатель удаляется от оси x вплоть до каустики и даже пересекает ее. Повсюду вне рассчитанной выше области $\Delta\rho(x)$ можно использовать приближение геометрической оптики. Окрестность же каустики должна быть исследована особо. Прежде всего здесь нельзя рассматривать функцию Бесселя в интеграле (3.37) как медленно меняющуюся. Зато можно воспользоваться ее асимптотическим представлением при больших значениях аргумента. Тогда (3.37) распадается на сумму двух достаточно простых интегралов:

$$u(x, \rho) \simeq u_0 \sqrt{\frac{k}{2\pi x\rho}} \exp\left\{i\left[k\left(x + \frac{\rho^2}{2x}\right) - \frac{\pi}{2}\right]\right\} \left(e^{i\frac{\pi}{4}} I_1 + e^{-i\frac{\pi}{4}} I_2\right), \tag{3.68}$$

где

$$I_{1,2} = \int_0^\infty \sqrt{p} \exp\{i\tilde{\mathcal{H}}_{1,2}(p, \rho)\}\, dp, \tag{3.69}$$

$$\tilde{\mathcal{H}}_{1,2}(p, \rho) = k(p^2/2x \mp \rho p/x) + \mathcal{H}(p).$$

Интегралы $I_{1,2}$ вычисляются, как и ранее, методом стационарной фазы. Условие стационарности фазы $\partial\tilde{\mathcal{H}}_{1,2}/\partial p = 0$ приводит к уравнениям

$$\pm\rho = p - x\Theta_g(p), \tag{3.70}$$

решения которых уже исследовались нами в § 2.3. Так, например, уравнение с $+\rho$ (напомним, что $\rho = |\rho| \geqslant 0$) согласно рис. 2.12

имеет только один положительный корень — p_1. Стационарной точке p_1 соответствует

$$u_1(x, \rho) \simeq u_0 \left[\frac{p_1}{\rho \, | 1 - x\Theta_g'(p_1) |} \right]^{1/2} \exp \left\{ i \left[k \left(x + \rho^2/2x \right) + \tilde{\mathcal{H}}_1(p_1) \right] - \right.$$

$$\left. - i \frac{\pi}{4} \left[1 - \operatorname{sgn} \left(1 - x\Theta_g'(p_1) \right) \right] \right\}. \qquad (3.71)$$

Графический анализ уравнения (3.70) для $-\rho$ также можно провести на основе рис. 2.12, однако вследствие изменения знака ρ надо представить себе, что все кривые зеркально отражены относительно оси абсцисс. Свойства корней легко проследить с помощью рис. 2.14. При $\rho > \rho_k$ (индекс k — каустика) действительных корней (3.70) нет. В этом случае наблюдатель видит только одну светящуюся точку p_1, создающую поле $u_1(x, \rho)$, которое описывается формулой (3.71). При $x > x_k$ и $\rho < \rho_k$ имеется два действительных корня — p_2 и p_3. Для смещений $\rho = \rho_k$ оба корня сливаются ($p_2 = p_3 = p_k > 0$). Исследуем поле на каустике и в ее окрестности, разложив функцию $\tilde{\mathcal{H}}_2(p, \rho)$ в ряд по степеням $p - p_k$ и $\rho - \rho_k$:

$$\tilde{\mathcal{H}}_2(p, \rho) = \tilde{\mathcal{H}}_2(p_k, \rho_k) + k \frac{p_k}{x} (\rho - \rho_k) + \frac{k}{x} (p - p_k)(\rho - \rho_k) -$$

$$- \frac{k}{6} \Theta_g''(p_k)(p - p_k)^3 + \cdots \qquad (3.72)$$

Здесь учтено, что $\partial\tilde{\mathcal{H}}_2/\partial p$ и $\partial^2\tilde{\mathcal{H}}_2/\partial p^2$ в точке $p = p_k$ равны нулю. Определяя стационарные точки фазы $\tilde{\mathcal{H}}_2$, из (3.72) находим

$$p_{2,3} \simeq p_k \pm \sqrt{\frac{2(\rho - \rho_k)}{x\Theta_g''(p_k)}}, \qquad (3.73)$$

т. е. мы получили те же значения корней, которые были найдены ранее в приближении геометрической оптики (см. (2.48)). Поскольку $\Theta_g''(p_k) < 0$, в области между осью ГЛ и каустикой ($\rho < \rho_k$) существуют два действительных положительных корня (p_2 и p_3), с которыми следует сопоставить два точечных изображения источника (ветви *2* и *3* кривой $p(x)$ при $x > x_k$ на рис. 2.14). За каустикой ($\rho > \rho_k$) действительных корней нет, и наблюдатель будет видеть только изображение, соответствующее p_1 (ветвь *1* при $x < x_k$ на рис. 2.14). Поле на каустике и в ее окрестности находится путем вычисления интеграла I_2 с помощью представления (3.72) и выражается через функцию Эйри Ai — хорошо известный из оптики результат:

$$u_{2-3}(x, \rho) \simeq 2u_0 \sqrt{\frac{p_k}{\rho}} \left[\frac{k\pi^3}{2x^3 \Theta_g''^2(p_k)} \right]^{1/6} Ai \left[\frac{\rho - \rho_k}{x} \left(\frac{2k^2}{|\Theta_g''(p_k)|} \right)^{1/3} \right] \times$$

$$\times \exp \left\{ i \left[k \left(x + \frac{\rho^2}{2x} \right) + \tilde{\mathcal{H}}_2(p_k, \rho_k) + k \frac{p_k}{x} (\rho - \rho_k) - \frac{3}{4} \pi \right] \right\}. \quad (3.74)$$

Функция Ai описывает интерференционные осцилляции поля в области $\rho < \rho_k$ и экспоненциальное затухание при $\rho > \rho_k$. На самой каустике амплитуда поля

$$|u_{2-3}(x,\rho_k)| \simeq 2u_0 \sqrt{\frac{p_k}{\rho_k}} \left[\frac{k\pi^3}{2x^3\Theta_g''^2(p_k)}\right]^{1/6} Ai(0). \tag{3.75}$$

На больших расстояниях можно получить более конкретные оценки, положив $p_k \sim R$ (это следует из уравнения (2 53) при больших значениях x) и $|\Theta_g''(p_k)| \sim r_g/p_k^3 \sim r_g/R^3$. Таким образом, находим (численные коэффициенты не выписываются)

$$|u_{2-3}(x,\rho_k)| \sim u_0 R^2 (kr_g)^{1/6}/xr_g. \tag{3.76}$$

Однако это еще не все. Необходимо учесть и поле u_1. При больших значениях x и $\rho = \rho_k$ имеем $p_1 \sim \rho_k \sim r_g x/R$, $\Theta_g(p_1) \sim -R^2/x^2 r_g$. Следовательно, $1 - x\Theta_g'(p_1) \sim 1$ и

$$|u_1(x,\rho_k)| \sim u_0 \sqrt{p_1/\rho_k} \sim u_0. \tag{3.77}$$

Последний результат становится понятным, если вспомнить, что поле $u_1(x,\rho)$ соответствует прямому изображению с большим прицельным параметром. В таких условиях гравитационная фокусировка почти не проявляется и поле u_1 стремится к своему невозмущенному значению. Иное дело u_{2-3}, соответствующее инвертированному изображению. Для него прицельные параметры не превышают R, и влияние гравитационного поля сказывается очень сильно (формула (3.76)). Отношение $|u_{2-3}|/|u_1| \sim R^2 (kr_g)^{1/6}/xr_g$ может быть больше или меньше единицы. Если $x \gg R^2 (kr_g)^{1/6}/r_g$, то $|u_{2-3}|/|u_1| \ll 1$, т. е. поле на каустике становится меньше поля прямого изображения. При оценке суммарной интенсивности в этом случае, с одной стороны, поле u_{2-3} можно вообще не учитывать, но слабое изображение источника в направлении $p_{2,3}$, разумеется, остается. С другой стороны, видно, что с укорочением длины волны значение $|u_{2-3}|$ неограниченно возрастает, стремясь к бесконечности, как $k^{1/6}$.

Нам осталось оценить ширину прикаустической области, где нельзя пользоваться формулами геометрической оптики. Проще всего это сделать, определив $\Delta\rho_k = \rho_k - \rho$ из условия равенства единице аргумента Ai в (3.74):

$$\Delta\rho_k \sim x (kr_g)^{1/3}/kR. \tag{3.78}$$

В то же время можно использовать формулу геометрической оптики (2.49), определив в ней $\Delta\rho_k$ так, чтобы результат расчета $|u_{2-3}|$ совпал с (3.76). При этом получится снова (3.78). Подобным же образом можно поступить и в окрестности любых других геометрических сингулярностей. Используя формулы геометрической оптики, можно приближаться к особым точкам (линиям, поверхностям) до таких расстояний, при которых амплитуда поля сравняется со своим дифракционным значением на самой особенности. При дальнейшем приближении к сингулярности амплитуду поля следует считать постоянной. Этот рецепт хорош своей простотой, и на практике его можно использовать, хотя таким образом мы не учитываем интерференционных осцилляций, рассматривая по существу суммарную интенсивность некогерентных источников. Вопрос о том, насколько когерентны поля, создаваемые разными изображениями, будет рассматриваться в следующей главе.

При исследовании структуры прикаустического поля качественные оценки можно получить столь же просто, как и для фокальной области, используя понятие эффективной апертуры. Согласно (3.72) разложение полной фазы $\tilde{\mathcal{H}}(p, \rho)$ при нахождении наблюдателя на каустике ($\rho = \rho_k$) начинается с члена, пропорционального $(p - p_k)^3$, который и определяет структуру эффективной апертуры линзы. Видно, что в окрестности каустики эффективная апертура имеет вид кольца радиуса p_k, ширины

$$\Delta R_{эф} \sim [k\,|\,\Theta_g''(p_k)\,|\,]^{-1/3} \sim R/(kr_g)^{1/3}. \qquad (3.79)$$

Нас не должно смущать, что мы получили структуру, отличающуюся от той, которая была при нахождении наблюдателя в фокусе линзы (напомним, что для фокуса эффективная апертура имела вид круга радиуса $R_{эф} \sim R/(kr_g)^{1/4}$). Понятие эффективной апертуры связано не только с параметрами ГЛ, но и с конкретной областью геометрооптических сингулярностей.

Угол дифракции ψ_d, соответствующий (3.79), примерно равен $1/k\Delta R_{эф}$, линейная мера размывания лучей $\Delta\rho_k \simeq x\psi_d \sim x/k\Delta R_{эф} \sim$ $\sim x\,(kr_g)^{1/3}/kR$, что совпадает с (3.78). Легко оценить и амплитуду поля $|u_{2-3}|$ на каустике. Поскольку площадь входной апертуры $\Sigma_{вх} \simeq$ $\simeq 2\pi p_k \Delta p_k$, а в области фокусировки $\Sigma_F \simeq 2\pi\rho_k\Delta\rho_k$, из закона сохранения энергии имеем $|u_{2-3}|^2/u_0^2 \sim p_k\Delta p_k/\rho_k\Delta\rho_k$. В то же время $\Delta p_k \simeq$ $\simeq \Delta R_{эф}$, $\rho_k \sim r_g x/R$, $p_k \sim R$, и находим

$$|u_{2-3}| \sim u_0 R^2 (kr_g)^{1/6}/xr_g,$$

т. е. мы получили тот же результат, что и в (3.76).

Учитывая разнообразие формул, описывающих дифракцию волн на разных расстояниях от ГЛ и смещениях точки наблюдения от ее оси, представим полученные результаты в виде табл. 3.1.

Наряду с рассмотренными полностью прозрачными ГЛ можно представить себе и более общую ситуацию, когда имеется непрозрачное ядро, окруженное прозрачной оболочкой. В частности, именно так обстоит дело в ГЛ, возникающих вокруг звезд с плазменными коронами, геометрическая оптика которых была рассмотрена в § 2.4. Метод фазового экрана позволяет и в этом случае исследовать структуру дифрагированного поля, следуя изложенной выше схеме вычислений. При этом, однако, должны быть сформулированы некоторые ограничения на длину волны фокусируемого излучения. Дело в том, что при $\lambda > \lambda_0$ (см. (2.67)) граница рефракционной тени отрывается от всей поверхности звезды, включая и ту ее сторону, которая обращена к источнику (см. рис. 2.18) Следовательно, область интегрирования в формуле (3.28) пересекает каустическую поверхность, что не дает возможности задать поле на экране путем введения дополнительной фазы $\mathcal{H}(p)$. Во избежание возникающих при этом трудностей,

Таблица 3.1. **Формулы для описания дифракции волн в ГЛ (без численных коэффициентов)**

Область геометро-оптической сингулярности	Область расстояний от ГЛ x	Продольная протяженность Δx	Поперечное сечение $\Delta\rho$	Коэффициент усиления $\lvert u\rvert^2/u_0^2$	Эффективная апертура
Фокус	$R^2r_g^{-1}$	$R^2r_g^{-1/2}k^{-1/2}$	$Rr_g^{-1/4}k^{-3/4}$	r_gk	Круг радиусом $R(r_gk)^{-1/4}$
Фокальная полуось	$>R^2r_g^{-1}$	∞	$x^{1/2}r_g^{-1/2}k^{-1}$	r_gk	Кольцо радиусом $(xr_g)^{\frac{1}{2}}$ и шириной $x^{1/2}r_g^{-1/2}k^{-1}$
Каустика	$>R^2r_g^{-1}$	∞	$xR^{-1}r_g^{1/3}k^{-2/3}$	$R^4x^{-2}r_g^{-5/3}k^{1/3}$	Кольцо радиусом $\rho_k\lesssim R$ и шириной $R(r_gk)^{-1/3}$

Примечания: 1 Коэффициент усиления указан для той составляющей поля u, которая обращается в бесконечность в приближении геометрической оптики. 2. Формулы для фокальной полуоси и каустики справедливы на больших расстояниях от линзы ($x \gg x_F$).

будем считать, что $\lambda \ll \lambda_0$ и каустика начинается за плоскостью $x=0$. Однако случай очень коротких длин волн не представляет особого интереса, так как при $\lambda<\lambda_k$ (см. (2.71)) каустика вообще не возникает и наличие плазменной короны не приводит к качественным изменениям структуры дифрагированного поля. Таким образом, ниже предполагается выполнение следующих неравенств: $\lambda_0 \gg \lambda > \lambda_k$. Напомним, что оценки для Солнца дают значения $\lambda_0 \simeq 2$ м и $\lambda_k \simeq 0{,}24$ см, т. е. рассматриваемый диапазон достаточно широк.

Схема расчета ГЛ, окруженной плазменной короной, как уже отмечалось, остается прежней, дополнительная фаза $\mathcal{H}(\rho)$ в (3.28) определяется с помощью формулы (3.15) по найденной в § 2.4 зависимости

$$\Theta_g^*(\rho)=\frac{2r_g}{\rho}\left[1-\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{h-1}\right].$$

Опуская вычисления, приведем несколько формул, описывающих поле дифрагированной плоской волны в окрестности областей геометрооптических сингулярностей (фокальная полуось, каустика).

1. Распределение поля вдоль оси ГЛ вблизи вершины каустики $x=x_k$:

$$u(x,0)\simeq 2\pi u_0\left[\frac{2k^2}{\lvert\Theta_g^{*''}(\rho_k)\rvert}\right]^{1/3}\Theta_g^*(\rho_k)\exp\left\{i\left[k\left(x+\frac{\rho_k^2}{2x}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\mathcal{H}(\rho_k)-\frac{\pi}{2}\right]\right\}Ai\left[-(2k^2/\lvert\Theta_g^{*''}(\rho_k)\rvert)^{1/3}\frac{\Theta_g^*(\rho_k)}{x_k}(x-x_k)\right].$$

Здесь p_k — двойной корень аберрационного уравнения (2.69), возникающий в плоскости $x = x_k$. Напомним также, что $p_k(x_k)$ является еще и абсциссой экстремума функции $\rho(p, x_k)$ (см. рис. 2.16). Приведенная формула позволяет рассчитать коэффициент усиления ГЛ в точке пересечения каустикой оси линзы ($x = x_k$). Учитывая, что $Ai(0) = 0{,}355$, имеем

$$q(x_k, 0) \simeq 1{,}42\pi^2 (2k^2/|\Theta_g^{*''}(p_k)|)^{2/3} \Theta_g^{*^2}(p_k).$$

В случае когда наблюдатель, двигаясь вдоль оси, приближается к ГЛ ($x < x_k$), функция Эйри описывает асимптотически экспоненциальное затухание поля:

$$u \sim \exp\left\{-\frac{2}{3}[2k^2\Theta_g^{*^3}(p_k)(x_k - x)^3/x_k^3|\Theta_g^{*''}(p_k)|]^{1/2}\right\}.$$

Дистанциям $x < x_k$ соответствует область рефракционной тени. При удалениях $x > x_k$ функция Эйри имеет осциллирующую асимптотику

$$u \sim \sin\left\{\frac{2}{3}[2k^2\Theta_g^{*^3}(p_k)(x - x_k)^3/x_k^3|\Theta_g^{*''}(p_k)|] + \frac{\pi}{4}\right\}.$$

Осцилляции возникают вследствие интерференции волн, приходящих от двух кольцевых изображений.

2. Поле на фокальной полуоси вдали от точки $x = x_k$. Здесь можно определить $u(x, 0)$ путем суммирования полей, создаваемых двумя кольцевыми изображениями: $u = u_1 + u_2$, где u_1 и u_2 соответствуют стационарным точкам $p_1(0)$ и $p_2(0)$. Заметим, что при определении полей u_1 и u_2 мы можем использовать ранее найденную формулу (3.52) необходимо только заменить угол $\Theta_g(p)$ на $\Theta_g^*(p)$:

$$u_j \simeq u_0 e^{ikx}\left[\frac{2\pi k p_j^2}{x|1 - x\Theta_g^{*'}(p_j)|}\right]^{1/2} \exp\left\{i\left[\tilde{\mathcal{H}}(p_j) - \frac{\pi}{2} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}(1 - x\Theta_g^{*'}(p_j))\right]\right\}.$$

Как было показано в § 2.4, на значительных удалениях от ГЛ ($x \gg x_k$) радиус внешнего кольца p_1 стремится к «чистому» гравитационному значению $\sqrt{2r_g x}$, а радиус внутреннего кольца p_2 — к некоторому постоянному значению p_0. Следовательно, вклад u_2 в результирующее поле с ростом x будет убывать как $x^{-1/2}$, и на больших расстояниях его можно вообще не учитывать. Таким образом, плазменная корона практически не оказывает влияния на поле на фокальной полуоси вдали от ГЛ. Это утверждение вполне согласуется с геометрооптической картиной: лучи, несущие основную энергию, проходят вдали от поверхности звезды-линзы, там, где плотность плазменной короны очень мала.

3. Распределение $u(x, \rho)$ вблизи каустики на близком ($x < x_k$) и далеком ($x > x_k$) расстояниях от ГЛ. При $x < x_k$ основной интерес представляет граница рефракционной тени $\rho = \rho_k(x)$ (см. рис. 2.17). Если каустика настолько удалена от оси линзы, что $k\rho_k R/x \gg 1$ (это означает, что мы не рассматриваем область, примыкающую к x_k), то поле описывается формулой, совпадающей с (3.74):

$$u(x, \rho) \simeq 2u_0 \sqrt{\frac{p_k}{\rho}} \left[\frac{k\pi^3}{2x^3 (\Theta_g^{*''}(p_k))^2} \right]^{1/6} Ai \left[\frac{\rho - \rho_k}{x} \left(\frac{2k^2}{|\Theta_g^{*''}(p_k)|} \right)^{1/3} \right] \times$$

$$\times \exp \left\{ i \left[k \left(x + \frac{\rho^2}{2x} \right) + \tilde{\mathscr{H}}_1 (p_k, \rho_k) - k \frac{p_k}{x} (\rho - \rho_k) - \frac{1}{4} \pi \right] \right\},$$

где $p_k(x)$ — абсцисса экстремума функции $\rho(p, x)$.

Как и в случае 2, этим выражением описывается экспоненциальное затухание поля по мере удаления от каустики в тень ($\rho < \rho_k$) и осцилляции в освещенной области ($\rho > \rho_k$). На самой каустике ($\rho = \rho_k$) поле имеет конечную амплитуду, а коэффициент усиления $q \sim k^{1/6}$.

При $x > x_k$ рефракционной тени нет, а каустика разделяет области с различным числом изображений источника. В приосевой области $\rho \ll \sqrt{x|1 - x\Theta_g^{*'}(p_k)|/k}$, где наблюдаются два кольцевых изображения, поле рассчитывается с помощью формулы (3.59) как

$$u(x, \rho) \simeq u_0 \sum_{j=1}^{2} \left[\frac{2\pi k p_j^2}{x|1 - x\Theta_g^{*'}(p_j)|} \right]^{1/2} \mathscr{I}_0 \left(\frac{kp_j}{x} \rho \right) \times$$

$$\times \exp \left\{ i \left[k (x + \rho^2/2x) + \tilde{\mathscr{H}}(p_j) \right] - i \frac{\pi}{4} \left[2 - \operatorname{sgn} (1 - x\Theta_g^{*'}(p_j)) \right] \right\}.$$

По мере удаления от оси ($x/kR \ll \rho < \rho_k$) каждое кольцевое изображение разрывается на два точечных, и $u = \sum_{j=1}^{4} u_j$, где слагаемые u_j рассчитываются аналогично (3.71) как

$$u_{1,2}(x, \rho) \simeq u_0 \left[\frac{p_{1,2}}{\rho|1 - x\Theta_g^{*'}(p_{1,2})|} \right]^{1/2} \exp \left\{ i \left[k (x + \rho^2/2x) + \tilde{\mathscr{H}}_1 (p_{1,2}) \right] - \right.$$

$$\left. - i \frac{\pi}{4} \left[1 - \operatorname{sgn} (1 - x\Theta_g^{*'}(p_{1,2})) \right] \right\},$$

$$u_{3,4}(x, \rho) \simeq u_0 \left[\frac{p_{3,4}}{\rho|1 - x\Theta_g^{*'}(p_{3,4})|} \right]^{1/2} \exp \left\{ i \left[k (x + \rho^2/2x) + \tilde{\mathscr{H}}_2 (p_{3,4}) \right] - \right.$$

$$\left. - i \frac{\pi}{4} \left[3 - \operatorname{sgn} (1 - x\Theta_g^{*'}(p_{3,4})) \right] \right\}.$$

По мере приближения к каустике два изображения сближаются и, наконец, сливаются при $\rho = \rho_k$. При этом вклад в суммарное поле от сливающейся пары изображений определяется через функцию Эйри подобно приведенной выше формуле для $x < x_k$ и $k\rho_k R/x \gg 1$. Но в отличие от последней функция Эйри будет экспоненциально затухать при $\rho > \rho_k$ и иметь осциллирующий характер в области смещений $\rho < \rho_k$. Если же $\rho \gg \rho_k$, то в рассматриваемой сумме $u = \sum_j u_j$ необходимо учитывать только два слагаемых (u_1 и u_2) из четырех.

В одной из первых работ по дифракции волн в ГЛ [101] обращено внимание на кажущееся нарушение закона сохранения энергии.

Поскольку коэффициент усиления линзы больше единицы во всем пространстве (интерференционные осцилляции не учитываются, т. е. речь идет о средней интенсивности за большие промежутки времени), то полная энергия электромагнитного поля как будто возрастает. Этот парадокс объяснен изменением метрики вблизи фокусирующей звезды: «... поверхность сферы уже не равна $4\pi r^2$, а меньше, что и вызывает увеличение потока». В действительности все обстоит значительно проще. Прежде всего закон сохранения энергии не может нарушаться при строгом расчете полей, коль скоро исходная задача сформулирована в виде системы уравнений Максвелла (3.2), где ε и μ соответствуют пассивной стационарной среде. Но можно дать и наглядное объяснение рассматриваемому парадоксу, если дополнить систему лучей, идущих от источника в сторону ГЛ, лучами, которые направлены в противоположную сторону (рис. 3.8). Поток лучей через полусферу, обращенную к ГЛ, возрастает, а через противоположную — убывает. Полный же поток интенсивности через сферу любого радиуса остается неизменным (разумеется, без учета поглощения в среде и самой линзе). Это легко показать в приближении геометрической оптики на примере «точечной» ГЛ. Совместив начало координат с источником, в полярных координатах r, θ (угол θ отсчитывается от оси x, соединяющей источник и ГЛ) запишем показатель преломления «среды» как

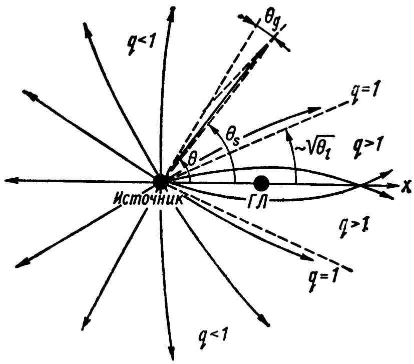


Рис. 3.8. Преломление лучей в широком диапазоне исходных углов θ ($0 \leqslant \theta \leqslant \pi$) (в интервале углов $\theta \lesssim \sqrt{\theta_e}$ коэффициент усиления $q > 1$, вне указанного интервала $q < 1$)

$$n_g(r, \theta) = 1 + \frac{r_g}{\sqrt{r^2 - 2rx_s\cos\theta + x_s^2}}.$$

Предположим, что наблюдатель перемещается вокруг источника по сфере радиуса $R_{\text{сф}} \gg x_s$. Тогда в точку наблюдения, расположенную под невозмущенным углом θ_s, придет луч света, вышедший из источника под углом θ, который определяется из решения аберрационного уравнения $\theta_s = \theta - \Theta_g(\theta)$ (см. рис. 3.8). Для произвольных значений θ ($0 \leqslant \theta \leqslant \pi$) угол гравитационного отклонения $\Theta_g(\theta)$ определяется по формуле, аналогичной (2.76):

$$\Theta_g(\theta) = \int_0^\infty \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}[n_g(r, \theta)]\,dr = \frac{r_g}{x_s}\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}.$$

В результате аберрационное уравнение, справедливое для всех углов на небесной сфере, принимает вид

$$\theta_s = \theta - \frac{r_g}{x_s}\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}.$$

Коэффициент усиления равен отношению телесных углов изображений и источника:

$$q(\theta_s) = \sum_i \frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_s}\left|\frac{d\theta_i}{d\theta_s}\right|.$$

Легко показать, что $q > 1$ лишь в области углов $\theta_s \leqslant \sqrt{\Theta_l} = \sqrt{\frac{2r_g}{x_s}}$, а при $\theta_s \ll \sqrt{\Theta_l}$ определяется уже известными нам из § 2.1 и 2.2 выражениями. С увеличением θ_s значение q становится меньше единицы, и при $\theta_s \gg \sqrt{\Theta_l}$ коэффициент $q \simeq 1 - \frac{r_g}{x_s}$.

§ 3.5. Гравитационные линзы, не обладающие сферической симметрией

Геометрооптическое рассмотрение ГЛ, не обладающих сферической симметрией (см. § 2.5), показало, что даже очень слабые нарушения симметрий могут привести к «катострофическим» изменениям в структуре изображений. Так, например, в сфероидальной линзе при любых сколь угодно малых эксцентриситетах светящееся кольцо, наблюдаемое с оси ГЛ, разрывается на четыре изолированные точки. Этот вывод является следствием идеализации в постановке задачи, когда рассматриваются только точечные излучатели. Если же источник имеет конечные угловые размеры Ψ_0, то «катастрофа» не происходит, изображения деформируются постепенно, тем сильнее, чем сильнее нарушения симметрии.

Учет дифракции волн в каком-то смысле эквивалентен введению конечных угловых размеров источника, так как за счет дифракции появляется разброс лучей от направления распространения волны на угол $\psi_\alpha \sim (kR_{эф})^{-1}$, где $R_{эф}$ — характерный размер эффективной апертуры ГЛ. Аналогичный разброс по направлениям лучей на угол Ψ_0 возникает и для источника с конечными угловыми размерами. Отсюда следует, что подобно тому, как влияние асимметрии ослабляется по мере возрастания Ψ_0, оно также будет уменьшаться с увеличением длины волны, но проследить этот процесс можно, только проведя соответствующие расчеты на основе волновой теории.

Будем по-прежнему пользоваться приближением фазового экрана, однако, учитывая отсутствие сферической симметрии ГЛ, определим дополнительный набег фазы на экране $\mathscr{H}(\mathbf{p})$ по формуле, обобщающей (3.16):

$$\mathscr{H}(\mathbf{p}) = k\int_{-\infty}^{\infty}[n_g(x, \mathbf{p}) - 1]\,dx = -\frac{2k}{c^2}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x, \mathbf{p})\,dx. \tag{3.80}$$

Из сравнения формул (3.80) и (2.76) видно, что векторный угол $\boldsymbol{\Theta}_g(\mathbf{p})$ связан с $\mathscr{H}(\mathbf{p})$ соотношением

$$k\boldsymbol{\Theta}_g(\mathbf{p}) = \nabla\mathscr{H}(\mathbf{p}). \tag{3.81}$$

Исходная формула, описывающая дифракцию волны точечного источника, отстоящего на расстоянии x_s от ГЛ, не отличается по сути от (3.27):

$$u(x,\rho)\simeq\frac{ku_н}{2\pi i\tilde{x}}e^{ik(x+x_s+\rho^2/2x)}\int\limits_{\Sigma}d\mathbf{p}\exp\left\{i\left[k\left(\frac{p^2}{2\tilde{x}}-\frac{\tilde{\rho}\mathbf{p}}{\tilde{x}}\right)+\mathcal{H}(\mathbf{p})\right]\right\}. \quad (3.82)$$

Область интегрирования для прозрачных ГЛ охватывает всю плоскость $x=0$, а для линз с непрозрачным ядром из нее исключается внутренняя часть граничного контура ядра. Как уже отмечалось в § 2.5, при анализе сложных ГЛ удобнее ориентировать ось x так, чтобы она проходила через точку наблюдения. Тогда по определению $\rho\equiv\equiv 0$, а дифрагированное поле зависит от смещения источника от оси ρ_s. Соответствующая формула для $u(x,\rho_s)$ отличается от (3.82) заменой под интегралом $\tilde{\rho}$ на $\tilde{\rho}_s$ (напомним, что $\tilde{\rho}_s=\rho_s x/(x+x_s)$ — проекция смещения источника на плоскость ГЛ) и $\rho^2/2x$ на $\rho_s^2/2x_s$ в предынтегральном множителе:

$$u(x,\rho_s)\simeq\frac{ku_н}{2\pi i\tilde{x}}e^{ik(x+x_s+\rho_s^2/2x_s)}\int\limits_{\Sigma}d\mathbf{p}\exp\left\{i\left[k\left(\frac{p^2}{2\tilde{x}}-\frac{\tilde{\rho}_s\mathbf{p}}{\tilde{x}}\right)+\mathcal{H}(\mathbf{p})\right]\right\}. \quad (3.83)$$

Принимая во внимание малость длины волны по сравнению со всеми характерными масштабами изменения параметров ГЛ, можно, как и ранее, произвести асимптотическую оценку интеграла (3.83) методом стационарной фазы. Стационарные точки полной фазы $\tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{p})=k(p^2/2\tilde{x}-\tilde{\rho}_s\mathbf{p}/\tilde{x})+\mathcal{H}(\mathbf{p})$ определяются с помощью векторного уравнения $\nabla\tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{p})=0$, которое с учетом (3.81) приобретает вид

$$\tilde{\rho}_s=\mathbf{p}+\tilde{x}\Theta_g(\mathbf{p}), \quad (3.84)$$

что совпадает с аберрационным уравнением (2.78), описывающим преломление лучей в геометрической оптике.

Допустим, что при данном положении источника $\tilde{\rho}_s$ уравнение (3.84) имеет N корней $\mathbf{p}_j$, попадающих в область интегрирования Σ. Далее необходимо различать случаи изолированных стационарных точек (в геометрической оптике N отдельных точечных изображений, расположенных вдали от границы области интегрирования) и кратных корней (в геометрической оптике слияние изображений при попадании источника на каустику). Для изолированной регулярной точки $\mathbf{p}_j$ определитель, составленный из вторых производных функции $k^{-1}\tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{p})$,

$$D_j=k^{-1}\left[\frac{\partial^2\tilde{\mathcal{H}}}{\partial y^2}\frac{\partial^2\tilde{\mathcal{H}}}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial^2\tilde{\mathcal{H}}}{\partial y\partial z}\right)^2\right]_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_j}=$$

$$=\left[\left(\frac{1}{\tilde{x}}-\frac{\partial\Theta_{gy}}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{\tilde{x}}-\frac{\partial\Theta_{gz}}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial\Theta_{gy}}{\partial z}\right)^2\right]_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_j}, \quad (3.85)$$

не равен нулю, и интеграл (3.83) имеет асимптотическую оценку [105] $u(x, \rho_s) = \sum_{j=1}^{N} u_j(x, \rho_s)$, где

$$u_j(x, \rho_s) \simeq \frac{u_н}{\sqrt{\tilde{x}^2 |D_j|}} \exp\left\{i\left[k(x + x_s + \rho_s^2/2x_s) + \tilde{\mathscr{H}}(\mathbf{p}_j) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\pi}{2}(1 - \varepsilon_j)\right]\right\}. \qquad (3.86)$$

Здесь $\varepsilon_j = 1$, если $\mathbf{p}_j$ — точка минимума; $\varepsilon_j = -1$, если $\mathbf{p}_j$ — точка максимума; $\varepsilon_j = 0$, если $\mathbf{p}_j$ — седловая точка. Следовательно, поле в точке наблюдения равно суперпозиции полей, создаваемых отдельными стационарными точками, причем эти поля отличаются не только амплитудами, но и фазами.

Коэффициент усиления $q = |u|^2/u_н^2$ выражается через двойную сумму, из которой мы выделим диагональные члены, соответствующие некогерентному сложению интенсивностей парциальных волн, и интерференционную часть.

$$q = q_н + q_и,$$

где

$$q_н = u_н^{-2} \sum_{j=1}^{N} |u_j|^2, \quad q_и = u_н^{-2} \sum\sum_{j \neq m} u_j u_m^*.$$

Используя формулы (3.85) и (3.86), получаем выражение для некогерентной составляющей

$$q_н(x, \rho_s) = \sum_{j=1}^{N} q_j \simeq \sum_{j=1}^{N} \left|\left(1 + \tilde{x}\frac{\partial\Theta_{gy}}{\partial y}\right)\left(1 + \tilde{x}\frac{\partial\Theta_{gz}}{\partial z}\right) - \tilde{x}^2\left(\frac{\partial\Theta_{gy}}{\partial z}\right)^2\right|^{-1}_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_j}. \qquad (3.87)$$

Легко убедиться, что $q_н$ совпадает с тем коэффициентом усиления, который получается в геомегрооптическом расчете (ср. с (2.82)). Однако в волновой теории имеется еще одно слагаемое:

$$q_и(x, \rho_s) \simeq \sum\sum_{j \neq m} [\tilde{x}^4 |D_j||D_m|]^{-1/2} \exp\left\{i\left[\tilde{\mathscr{H}}(\mathbf{p}_j) - \tilde{\mathscr{H}}(\mathbf{p}_m) + \frac{\pi}{2}(\varepsilon_j - \varepsilon_m)\right]\right\}, \qquad (3.88)$$

которое учитывает интерференцию волн. Собственно говоря, мы уже встречались с такой структурой коэффициента усиления, когда рассматривали сферически симметричные ГЛ (см. (3.34)). Теперь убедились, что этот результат не связан с симметрией задачи, а является достаточно общим. Следовательно, в тех областях пространства, в которых геометрооптический расчет приводит к конечным значениям q, дифракцию волн можно учесть, рассматривая интерференцию между отдельными лучами, приходящими в точку наблюдения. Заметим, что за счет случайных фазовых флуктуаций интерференция может разрушиться. Тогда $q_и(x, \rho_s)$ станет очень малым, и вычисление интеграла (3.83) в случае изолированных стационарных точек приводит к точному совпадению с формулами геометрической оптики.

Перейдем теперь к более сложному случаю, когда имеются кратные корни $\mathbf{p}_j$ уравнения (3.84). Наличие кратных корней означает слияние изображений в геометрической оптике. Эта ситуация возникает при таком положении источника, когда наблюдатель попадает на каустику. Если источник при своем движении пересекает каустические координаты, число изображений меняется. С этим явлением мы уже встречались, рассматривая сфероидальную ГЛ, когда в разных точках пространства могло наблюдаться от одного до пяти изображений источника (см. рис. 2.25).

Предположим, что источник пересекает границу, разделяющую области с $N = 3$ и $N = 1$. При переходе границы из области с $N = 3$ в область с $N = 1$ два действительных корня $\mathbf{p}_j$ сливаются и исчезают (точнее, становятся мнимыми). Слияние корней не дает возможности использовать формулу (3.86), так как для кратного корня $D_j = 0$. Поэтому простое выражение, описывающее поле u_j, сохраняется только для одного из трех изображений. Обозначим эту составляющую индексом 1:

$$u_1(x, \rho_s) \simeq$$

$$\simeq \frac{u_{\text{н}}}{\sqrt{\tilde{x}^2 |D_1|}} \exp\left\{i\left[k(x + x_s + \rho_s^2/2x_s) + \tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{p}_1) - \frac{\pi}{2}(1 - \varepsilon_1)\right]\right\}. \quad (3.89)$$

Суммарное поле двух сливающихся изображений u_{2-3} описывается более сложной формулой с функцией Эйри Ai [107]:

$$u_{2-3}(x, \rho_s) \simeq u_{\text{н}} \frac{\sqrt{\pi}}{\tilde{x}} \exp\left\{i\left[k(x + x_s + \rho_s^2/2x_s) + \frac{1}{2}\tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{p}_2) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2}\tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{p}_3) - \frac{\pi}{2}\right]\right\} \times (k\xi^{3/2})^{1/6} Ai(-k^{2/3}\xi)\left[e^{i\frac{\pi}{2}\varepsilon_2}/\sqrt{|D_2|} + e^{i\frac{\pi}{2}\varepsilon_3}/\sqrt{|D_3|}\right], \quad (3.90)$$

где $\xi = (^3/_4)^{2/3}[k^{-1}\tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{p}_2) - k^{-1}\tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{p}_3)]^{2/3}$.

Когда источник находится в области с бо́льшим числом изображений, все три корня $\mathbf{p}_j$ являются действительными. Функция Эйри при этом имеет осциллирующий характер, описывая интерференцию двух волн $u_2 + u_3 = u_{2-3}$. В результирующем поле $u = u_1 + u_{2-3}$ возникает интерференция всех трех составляющих. По мере приближения источника к каустике $\mathbf{p}_2 \to \mathbf{p}_3$ и $\xi \to 0$. Хотя в этом случае $D_{2,3} \to 0$, произведение $\xi^{1/4}|D_{2,3}|^{-1/2}$ стремится к некоторому определенному значению, и никаких расходимостей в (3.90) не возникает. Следовательно, амплитуда поля на каустике оказывается пропорциональной $k^{1/6}$. Когда происходит переход источника через каустику в область с $N = 1$, действительные корни $\mathbf{p}_2$ и $\mathbf{p}_3$ становятся мнимыми. В этой части пространства (область геометрооптической тени) поле u_{2-3} за счет функции Эйри экспоненциально затухает.

В общем случае несимметричных ГЛ могут возникать корни $\mathbf{p}_j$ большей, чем двойная, кратности. Так обстоит дело, если каустика не является гладкой, а имеет «клюв» («клювом» может быть, например, вершина криволинейного ромба на рис. 2.25, разделяющего области с $N = 5$ и $N = 3$). С приближением источника к «клюву» происходит слияние трех изображений. Общая схема рассуждений при оценке поля в этом случае остается в силе, но расчетные формулы еще более усложняются. Рассмотрение этого вопроса можно найти в работе [108], здесь же мы отметим, что максимальная амплитуда поля при попадании источника в область «клюва» зависит от длины волны как $k^{1/4}$, т. е. возрастает с уменьшением длины волны быстрее, чем на гладкой каустике.

Для получения более конкретных результатов перейдем от общего случая к рассмотрению определенной модели несимметричной ГЛ. Прежде всего будем считать, что линза имеет непрозрачное ядро и вся гравитирующая масса с объемной плотностью $\delta(\mathbf{r})$ сосредоточена внутри некоторого объема W. Совместив начало координат с центром масс, разложим потенциал тяготения $\Phi(\mathbf{r})$ в ряд по сферическим гармоникам $Y_{jm}(\theta, \varphi)$ с радиальными функциями $r^{-(j+1)}$ [109]:

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r} +$$

$$+ \sum_{j=2}^{\infty} \frac{4\pi}{2j+1} \sum_{m-j}^{j} r^{-(j+1)} P_j^m(\cos\theta)\,[a_{jm}\cos m\varphi + b_{jm}\sin m\varphi]. \quad (3.91)$$

Коэффициенты разложения a_{jm} и b_{jm} определяются по формулам

$$\begin{Bmatrix} a_{jm} \\ b_{jm} \end{Bmatrix} = -G \int\limits_W \delta(\mathbf{r})\, r^j P_j^m(\cos\theta) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix} d\mathbf{r}. \quad (3.92)$$

Сумма по j в (3.91) начинается с $j = 2$, так как нулевой член выделен в привычном виде $-GM/r$, а член с $j = 1$ отсутствует благодаря совмещению начала координат с центром масс.

Расчет $\mathcal{H}(\mathbf{p})$ по (3.80) с учетом (3.91) приводит к следующему результату [110]:

$$\mathcal{H}(\mathbf{p}) = -2kr_g \ln\frac{p}{p_п} + k\sum_{j=2}^{\infty}\frac{A_j}{p^j}\cos(j\varphi + \varphi_j), \quad (3.93)$$

где амплитуды A_j и фазы φ_j определяются через коэффициенты a_{jj} и b_{jj}. Первый член в (3.93) совпадает с (3.25), а все остальные учитывают нарушение симметрии. Разложение потенциала $\Phi(\mathbf{r})$ по сферическим гармоникам и соответствующее представление фазы $\mathcal{H}(\mathbf{p})$ становятся особенно целесообразными, если нарушения симметрии не очень сильные и в сумме по j можно ограничиться небольшим числом членов.

Заметим прежде всего, что с ростом p дополнительный набег фазы за счет несферичности убывает как p^{-j} и играет все меньшую роль. Это означает, что лучи, проходящие вдали от ГЛ (они характеризуются большими значениями p), возмущаются слабее и соответственно уменьшается влияние отклонений от сферической симметрии. Этот вывод согласуется с тем фактом, что гравитационное поле любого распределения масс, сосредоточенных в ограниченном объеме, на больших расстояниях совпадает со сферически симметричным полем вокруг точечной суммарной массы [14].

В то же время из (3.93) следует, что число членов, которые надо удерживать в сумме $\sum_j$, должно быть тем большее, чем короче длина волны (с ростом k абсолютное значение дополнительной фазы возрастает). В предельном случае, когда $k \to \infty$, надо сохранять всю бесконечную сумму. Стремясь упростить последующие выражения, предположим, что длина волны не очень мала и в бесконечной сумме достаточно удержать только один первый член с $j = 2$. Предельно малая длина волны (обозначим ее через $\lambda_п$), при которой допустимо такое упрощение, определяется равенством

$$\lambda_п = 2\pi \sum_{j=3}^{\infty} A_j p^{-j}.$$

Далее без ограничения общности рассуждений можно положить $\varphi_2 = 0$, что достигается выбором начала отсчета φ (направлением оси y). Таким образом, в диапазоне длин волн $\lambda \gg \lambda_п$ исходная формула (3.83) записывается так:

$$u(x, \rho_s) \simeq \frac{ku_н}{2\pi i\tilde{x}} e^{ik(x+x_s+\rho_s^2/2x_s)} \int_\Sigma d\mathbf{p} \exp\left\{ik\left[\frac{p^2}{2\tilde{x}} - \frac{\boldsymbol{\rho}_s\mathbf{p}}{\tilde{x}} - 2r_g \ln\frac{p}{p_п} + A_2\frac{\cos 2\varphi}{p^2}\right]\right\}. \tag{3.94}$$

Вычисление интеграла (3.94) удобнее проводить в полярных координатах p, φ, в которых векторное уравнение для определения точек стационарности фазы $\tilde{\mathscr{H}}(\mathbf{p})$ сводится к системе двух уравнений:

$$\tilde{\rho}_s \cos(\varphi - \varphi_s) = p - \frac{\tilde{l}^2}{p}\left(1 + \frac{A_2}{r_g p^2}\cos 2\varphi\right), \tag{3.95}$$

$$\tilde{\rho}_s \sin(\varphi - \varphi_s) = \frac{2A_2\tilde{x}}{p^3}\sin 2\varphi.$$

Сравнивая (3.95) с системой уравнений (2.103), с помощью которой определялись координаты изображений в сфероидальной линзе с малым эксцентриситетом, замечаем их полное совпадение. Таким образом, используемое нами упрощение соответствует рассмотрению слабонесферичной линзы. Между коэффициентом A_2 и параметром ρ_e, характеризующим асимметрию ГЛ, существует такая связь:

$$A_2 = r_g \rho_e^2. \tag{3.96}$$

Результаты исследования системы (2.103) нам уже известны (см. табл. 2.1), поэтому воспользуемся ими при рассмотрении (3.95). В частности, для осевого расположения источника ($\tilde{\rho}_s = 0$) имеются четыре стационарные точки $\mathbf{p}_j$, расположенные под углами $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi/2$, $\varphi_3 = \pi$, $\varphi_4 = 3\pi/2$, причем $p_1 = p_3 \neq p_2 = p_4$. Поскольку расстояния от двух пар стационарных точек (ρ_1, ρ_3) и (ρ_2, ρ_4) отличаются друг от друга, между идущими от них волнами возникает интерференция, приводящая к осцилляциям коэффициента усиления (внутри каждой пары колебания складываются синфазно в силу равенства фазовых путей). Эти осцилляции легко проследить, выполнив в (3.94) при $\tilde{\rho}_s = 0$ интегрирование по φ, а остающийся однократный интеграл оценив методом стационарной фазы. При этом для расстояний $\tilde{x} > R^2/2r_g$ справедлива формула

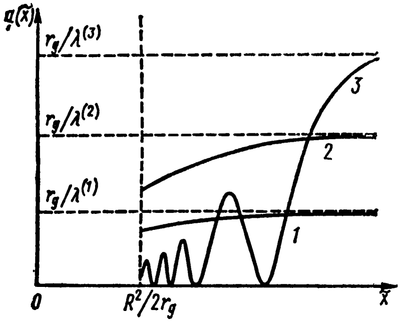
$$q(x,\ 0) \simeq 2\pi k r_g \mathcal{J}_0^2\left(k r_g \frac{\rho_e^2}{\tilde{l}^2}\right). \tag{3.97}$$

Дистанционная зависимость q (x, 0) для разных длин волн представлена на рис. 3.9. Кроме того, формулой (3.97) описывается своеобразная дисперсия коэффициента усиления, которая также является осциллирующей (рис. 3.10). Рассмотрим более подробно рис. 3.9. Поскольку $|\mathcal{J}_0| \leqslant 1$ при любых значениях аргумента, нарушения симметрии ГЛ всегда приводят к уменьшению коэффициента усиления на оси по сравнению со сферически симметричной ГЛ. Только на очень больших расстояниях, когда $k r_g \rho_e^2 \ll \tilde{l}^2$, q (x, 0) стремится к своему невозмущенному значению $2\pi k r_g$. При этом в зависимости от длины волны функция q (x, 0) может быть как гладкой, так и осциллирующей. Из условия равенства единице аргумента функции Бесселя определим граничную длину волны $\lambda_г^{(e)}$:

$$\lambda_г^{(e)} \simeq 2\pi r_g \rho_e^2/\tilde{l}^2 = \pi \rho_e^2/\tilde{x}.$$

Если $\lambda \gg \lambda_г^{(e)}$, то аргумент $\mathcal{J}_0$ при любых значениях $\tilde{x}$ мал и осцилляций не происходит. При $\lambda < \lambda_г^{(e)}$ возникают осцилляции, причем их число на полуоси $\tilde{x} > R^2/2r_g$ является конечным и возрастает с уменьшением длины волны. Напомним, что применимость формулы (3.97) ограничена со стороны коротких волн условием $\lambda \gg \lambda_п$, т. е. распространять эти выводы на очень короткие волны нельзя.

Граничная длина волны $\lambda_г^{(e)}$, которую мы определили несколько формально по началу осцилляций функции Бесселя, допускает простую физическую интерпретацию. Каустическая поверхность, возникающая в сфероидальной линзе, имеет характерный размер поперечного сечения в плоскости ГЛ $\Delta\tilde{\rho}_s \sim \rho_e^2/\tilde{l}$ (см. (2.108)). В то же время угол дифракции на апертуре линзы размером $\tilde{l}$ равен $\psi_d \sim (k\tilde{l})^{-1}$, а соответствующий поперечный размер дифракционного размывания $\Delta\tilde{\rho}_d \sim \tilde{x}/kl$. При $\Delta\tilde{\rho}_d > \Delta\tilde{\rho}_s$ каустика не может себя проявить, асимметрия ГЛ не играет никакой роли, а коэффициент усиления практически совпадает со своим невозмущенным значением. Легко убедиться, что из условия $\Delta\tilde{\rho}_d \sim \Delta\tilde{\rho}_s$ следует $\lambda_г^{(e)} \sim \pi r_g \rho_e^2/\tilde{l}^2$, что совпадает с предыдущей оценкой.



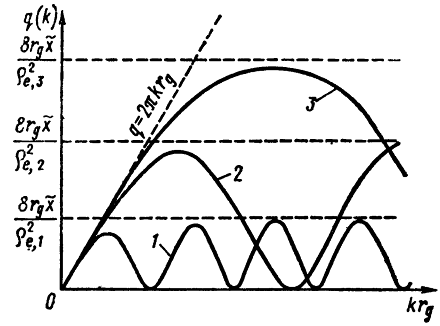


Рис. 3.9. Дистанционная зависимость коэффициента усиления ГЛ на разных длинах волн: $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$

Рис. 3.10. Дисперсионная зависимость коэффициента усиления ГЛ при разных параметрах асимметрии:

$\rho_{e,1} > \rho_{e,2} > \rho_{e,3}$

Перейдем теперь к анализу дисперсионной зависимости $q(k)$ представленной на рис. 3.10. При очень малых значениях k ($\lambda \gg \lambda_г^{(e)}$) $\mathcal{J}_0 \simeq 1$ и коэффициент усиления незначительно отличается от невозмущенного значения $2\pi k r_g$. С уменьшением длины волны коэффициент усиления сферически симметричной ГЛ неограниченно возрастает, а с учетом асимметрии достигает некоторого максимального значения, после которого начинается спад $q(k)$, переходящий в осцилляции с уменьшением q до нуля. Если диапазон длин волн, в котором справедливо наше рассмотрение ($\lambda \gg \lambda_п$), достаточно широк и существует такая область параметров, где агрумент $\mathcal{J}_0$ становится большим, можно воспользоваться асимптотическим представлением $\mathcal{J}_0$. Тогда

$$q(x, 0) \simeq 2\frac{\tilde{l}^2}{\rho^2}\left[1 + \sin\left(\frac{2kr_g\rho_e^2}{\tilde{l}^2}\right)\right]. \tag{3.98}$$

Слагаемое с $\sin(2kr_g\rho_e^2/\tilde{l}^2)$ описывает интерференцию между двумя парами лучей. В каждой паре (изображения *1—3* и *2—4* на рис. 2.24) разность фаз вдоль лучей равна нулю. Этим и объясняется отличие в два раза неинтерферирующей части (3.98) от значения q в геометрической оптике (2.106). Формулой (3.98) описывается область интерференционных осцилляций q, показанных на рис. 3.9 и 3.10. Если бы удалось обнаружить дисперсионные осцилляции q экспериментально, это дало бы возможность оценить степень несферичности ГЛ. Однако для успеха такого эксперимента требуется, как уже отмечалось, когерентность интерферирующих участков фазового экрана. В противном случае складываются не поля, а интенсивности отдельных составляющих и осцилляции исчезают.

Проиллюстрируем полученные результаты численными оценками, рассмотрев в качестве примера звезду-линзу, подобную Солнцу. Известно, что такая ГЛ хорошо аппроксимируется однородным сфероидом с малым эксцентриситетом ($e_c \ll 1$). Расчет внешнего поля тяготения и дальнейшее вычисление амплитуд A_j в (3.93) показывает, что отличными от нуля являются только A_j с четными индексами, причем их связь с эксцентриситетом e_c такова:

$$A_j \sim e_c^j, \quad j = 2, 4, 6, \ldots$$

Интересующий нас коэффициент A_2 можно определить, вообще, без всяких расчетов с помощью (3.96), если учесть, что для данной модели ГЛ согласно (2.99) $\rho_e^2 = \frac{1}{2} e_c^2 R^2 \sin^2 \gamma$. Таким образом, получим

$$A_2 \simeq \frac{1}{2} e_c^2 r_g R^2 \sin^2 \gamma. \tag{3.99}$$

Теперь можно определить верхнюю границу диапазона длин волн, в котором возможны осцилляции q:

$$\lambda_{\text{г}}^{(e)} \simeq \pi e_c^2 r_g \sin^2 \gamma \, (R/\tilde{l})^2.$$

Видно, что с ростом расстояния $\tilde{x}$ за счет уменьшения значения $R/\tilde{l}$ $\lambda_{\text{г}}^{(e)}$ убывает. Отношение $R/\tilde{l}$ характеризует степень удаленности от ГЛ той эффективной области пространства (первой зоны Френеля), которая вносит основной вклад в усиление излучения. Поле тяготения в пределах этой области, по мере ее удаления от ГЛ все больше приближается к сферически симметричному, и $\lambda_{\text{г}}^{(e)}$ убывает. Рассчитаем также коротковолновую границу применимости наших формул $\lambda_{\text{п}}$. Учитывая, что коэффициенты A_j с ростом j убывают пропорционально e_c^j, при $e_c \ll 1$ длину волны $\lambda_{\text{п}}$ можно оценить по первому неисчезающему после $j = 2$ члену. Таковым является коэффициент A_4, вычисление которого для выбранной модели ГЛ приводит к следующей формуле:

$$A_4 = \frac{3}{70} r_g (e_c^2 R^2 \sin^2 \gamma)^2.$$

Соответственно

$$\lambda_{\text{п}} \sim 2\pi A_4/p^4 \simeq \frac{6\pi}{70} r_g e_c^4 \sin^4 \gamma \, (R/\tilde{l})^4.$$

Оценим также максимально возможные размеры поперечного сечения каустики в плоскости ГЛ. Положив в (2.108) $\tilde{l} \sim R$, получим

$$\Delta\tilde{\rho}_s \sim e_c^2 R \sin^2 \gamma.$$

Для Солнца $e_c \simeq 10^{-2}$ [111], $R \simeq 7 \cdot 10^5$ км и $\Delta\tilde{\rho}_s \sim 70$ км. Максимальные значения граничных длин волн, получаемые при $\tilde{l} \sim R$, будут следующими: $\lambda_{\text{г}}^{(e)} \sim 10^2$ см и $\lambda_{\text{п}} \sim 10^{-4}$ см. Таким образом, формулу (3.97) можно использовать не только во всем радиодиапазоне, но и на более коротких волнах. Однако оптический диапазон уже выходит за рамки ее применимости. Для расширения диапазона применимости формул наряду с A_2 в сумме по j надо учитывать еше несколько последующих слагаемых.

§ 3.6. Вращающаяся ГЛ

Мы уже убедились из геометрооптического рассмотрения, что вращение массивного небесного тела, создающего линзовый эффект, приводит к своеобразной асимметрии ГЛ даже в том случае, когда распределение масс является сферически симметричным. Метод фазового экрана позволяет и в этом случае дополнить результаты геометрической оптики дифракционными эффектами.

Дополнительный набег фазы на экране $\mathcal{H}^{(\Omega)}(\mathbf{p})$, связанный с вращением гравитирующей массы, проще всего рассчитать с помощью формулы (2.113) для дополнительного угла преломления $\Theta_g^{(\Omega)}(\mathbf{p})$ и соотношения $\nabla\mathcal{H}^{(\Omega)}(\mathbf{p}) = \Theta_g^{(\Omega)}(\mathbf{p})$, связывающего фазу и векторный угол $\Theta_g^{(\Omega)}(\mathbf{p})$. Вычисление $\mathcal{H}^{(\Omega)}(\mathbf{p})$ приводит к следующему результату:

$$\mathcal{H}^{(\Omega)}(\mathbf{p}) = 2kr_g \frac{\rho_\Omega}{p} \cos\varphi = 2kr_g \frac{\boldsymbol{\rho}_\Omega \mathbf{p}}{p^2}, \tag{3.100}$$

где $\boldsymbol{\rho}_\Omega = \rho_\Omega \mathbf{e}_y$. Исходная формула для расчета дифракционного поля аналогична (3.83) и имеет такой вид:

$$u(x, \boldsymbol{\rho}_s) \simeq \frac{ku_{\text{н}}}{2\pi i\tilde{x}} e^{ik(x+x_s+\rho_s^2/2x_s)} \int\limits_{\Sigma} d\mathbf{p} \exp\left\{ik\left[\frac{p^2}{2\tilde{x}} - \frac{\tilde{\boldsymbol{\rho}}_s\mathbf{p}}{\tilde{x}} - 2r_g\left(\ln\frac{p}{p_\text{п}} - \frac{\boldsymbol{\rho}_\Omega\mathbf{p}}{p^2}\right)\right]\right\}, \tag{3.101}$$

где область интегрирования охватывает всю плоскость $x = 0$, за вычетом центрального круга радиуса R (рассматривается вращающаяся ГЛ с непрозрачным сферическим ядром).

Асимптотическая оценка интеграла (3.101) зависит от структуры корней $\mathbf{p}_l$ уравнения стационарности полной фазы $\tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{p}) = k\left[p^2/2\tilde{x} - \tilde{\boldsymbol{\rho}}_s\mathbf{p}/\tilde{x} - 2r_g\left(\ln\frac{p}{p_\text{п}} - \boldsymbol{\rho}_\Omega\mathbf{p}/p^2\right)\right]$, которое приводит к аберрационному уравнению (2.118). Как было показано в § 2.6, для вращающейся ГЛ структура корней $\mathbf{p}_l$ подобна структуре, характерной для сфероидальной линзы. И в том, и в другом случаях возникает каустика, имеющая вид криволинейного ромба с размерами в плоскости ГЛ $\Delta\tilde{y}_s = \Delta\tilde{z}_s = 2\rho_\Omega^2/\tilde{l}$. Различие заключается лишь в том, что каустика вращающейся ГЛ смещается как целое вдоль оси y по направлению вращения на величину ρ_Ω ($\tilde{y}_s = \rho_\Omega$). В силу этого весь дифракционный анализ, проведенный в § 3.5 для сфероидальной линзы, можно автоматически перенести и на случай вращающейся ГЛ. Однако есть смысл рассмотреть более подробно дифракционную структуру поля в наиболее интересной области вблизи каустики.

Интегрируя выражение (3.101) по углу φ, получим однократный интеграл вида

$$u(x, \rho_s) \simeq \frac{ku_{\text{н}}}{i\tilde{x}} \exp\{ik(x + x_s + \rho_s^2/2x_s)\} \int\limits_R^\infty \mathcal{J}_0\left(k\left|\frac{\tilde{\rho}_s}{\tilde{x}} - \frac{2r_g\rho_\Omega}{p^2}\right|p\right) \times$$

$$\times \exp\left\{ik\left(\frac{p^2}{2\tilde{x}} - 2r_g \ln\frac{p}{p_{\text{п}}}\right)\right\} p\,dp. \qquad (3.102)$$

Для незначительных отклонений источника относительно центра каустики ($\tilde{\rho}_s \sim \rho_\Omega$) и не очень коротких длин волн ($\lambda \gg \lambda_{\text{г}}^{(\Omega)}$, где определение граничной длины волны $\lambda_{\text{г}}^{(\Omega)}$ будет дано ниже) функция Бесселя медленно меняется по сравнению с экспонентой и вычисление интеграла в (3.102) методом стационарной фазы дает следующее выражение для коэффициента усиления [112]:

$$q(x, \rho_s) \simeq 2\pi k r_g \mathcal{J}_0^2 (2kr_g |\tilde{\rho}_s - \rho_\Omega|/\tilde{l}), \qquad (3.103)$$

где $|\tilde{\rho}_s - \rho_\Omega| \ll \sqrt{\pi \tilde{l}}/\sqrt{2kr_g}$ и $\lambda \gg \lambda_{\text{г}}^{(\Omega)}$. Для невращающейся линзы $\rho_\Omega = 0$ и

$$q(x, \rho_s) \simeq 2\pi k r_g \mathcal{J}_0^2 (2kr_g\tilde{\rho}_s/\tilde{l}). \qquad (3.104)$$

Сравнивая формулы (3.103) и (3.104), видим, что они совпадут, если в (3.104) заменить $\tilde{\rho}_s$ на $|\tilde{\rho}_s - \rho_\Omega|$. Это подтверждает тот факт, что у вращающейся ГЛ фокальная полуось деформируется и смещается вдоль направления $\mathbf{e}_y$ на величину $\tilde{y}_s = \rho_\Omega$. Рассматривая структуру изображений в геометрической оптике, мы установили, что кривую $\tilde{y}_s = \rho_\Omega$ можно называть фокальной только условно, так как интенсивность излучения в точке наблюдения при $\lambda \to 0$ остается конечной величиной. Учет дифракции показывает, что определение кривой $\tilde{y}_s = \rho_\Omega$ как фокальной вполне допустимо в диапазоне длин волн $\lambda \gg \lambda_{\text{г}}^{(\Omega)}$. Для того чтобы объяснить смысл граничной длины волны $\lambda_{\text{г}}^{(\Omega)}$, рассмотрим поведение поля в точке наблюдения при $\tilde{\rho}_s = \rho_\Omega$, не накладывая никаких ограничений на длину волны λ (кроме условий применимости метода стационарной фазы $kr_g \gg 1$). В этом случае исходное выражение (3.102) принимает вид

$$u\left(x, \frac{x_s}{\tilde{x}}\rho_\Omega\right) \simeq \frac{ku_{\text{н}}}{i\tilde{x}} \exp\{ik(x + x_s + \rho_s^2/2x_s)\} \int\limits_R^\infty \mathcal{J}_0\left(k\rho_\Omega\left|\frac{p}{\tilde{x}} - \frac{2r_g}{p}\right|\right) \times$$

$$\times \exp\left\{ik\left(\frac{p^2}{2\tilde{x}} - 2r_g \ln\frac{p}{p_{\text{п}}}\right)\right\} p\,dp. \qquad (3.105)$$

Подынтегральное выражение в (3.105) представляет собой произведение двух осциллирующих функций, причем при $kr_g \gg 1$ основной вклад в интеграл дает небольшая область значений p вблизи точки $p = \tilde{l}$. Разложив аргумент функции Бесселя и фазу экспоненты в ряд Тейлора в этой точке, получим следующую оценку:

$$q\left(x, \frac{x_s}{\tilde{x}}\rho_\Omega\right) \simeq \frac{k^2\tilde{l}^2}{\tilde{x}^2}\left|\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_0\left(\frac{2k\rho_\Omega}{\tilde{x}}\Delta p\right) e^{ik\Delta p^2/\tilde{x}} d(\Delta p)\right|^2 = 2\pi k r_g \mathcal{J}_0^2 (k r_g \rho_\Omega^2/\tilde{l}^2). \tag{3.106}$$

Подобное выражение было приведено в § 3.5 для сфероидальной линзы при $\tilde{\rho}_s = 0$ (см. (3.97)). Из условия $kr_g\rho_\Omega^2/\tilde{l}^2 \simeq 1$ определим граничное значение длины волны $\lambda_г^{(\Omega)}$:

$$\lambda_г^{(\Omega)} \simeq 2\pi r_g \rho_\Omega^2/\tilde{l}^2 = \pi\rho_\Omega^2/\tilde{x}. \tag{3.107}$$

На длинах волн $\lambda \gg \lambda_г^{(\Omega)}$ аргумент функции Бесселя мал и значение коэффициента усиления в смещенном фокусе совпадает со своим невозмущенным значением $2\pi k r_g$. Распределение q в перпендикулярном оси x направлении определяется при этом выражением (3.103). Таким образом, для не очень коротких длин волн ($\lambda \gg \lambda_г^{(\Omega)}$) вращение ГЛ проявляется как смещение невозмущенной дифракционной картины в сторону вращения ГЛ на величину $\tilde{y}_s = \rho_\Omega$.

Для коротких длин волн ($\lambda \gg \lambda_г^{(\Omega)}$), воспользовавшись асимптотическим представлением функции Бесселя при больших значениях аргумента, получим

$$q\left(x, \frac{x_s}{\tilde{x}}\rho_\Omega\right) \simeq 2\frac{\tilde{l}^2}{\rho_\Omega^2}\left[1 + \sin\left(2kr_g\frac{\rho_\Omega^2}{\tilde{l}^2}\right)\right]. \tag{3.108}$$

Как и в случае сфероидальной ГЛ, осцилляции коэффициента усиления в точке наблюдения при изменении λ возникают вследствие интерференции волн между двумя парами лучей. Напомним, что при $\tilde{\rho}_s = \rho_\Omega$ в точку наблюдения приходят четыре луча с координатами $p_1 \simeq \tilde{l} + \rho_\Omega$, $\varphi_1 = 0$; $p_2 \simeq \tilde{l} - \rho_\Omega$, $\varphi_2 = \pi$; $p_3 = \tilde{l}$, $\varphi_3 = \pi/2$; $p_4 = \tilde{l}$, $\varphi_4 = 3\pi/2$. Разность набегов фаз вдоль лучей *1—2* и *3—4* равна нулю. В силу этого возникает отличие (в два раза) неинтерферирующей части q в (3.108) от геометрооптического его значения в (2.133), которое учитывает только некогерентную часть коэффициента усиления.

Физический смысл граничной волны $\lambda_г^{(\Omega)}$ станет понятным из рассуждений, аналогичных тем, которые ипользовались при определении $\lambda_г^{(e)}$ в § 3.5. Как отмечалось ранее, геометрическое место точек положений источника, при которых наблюдатель попадает на каустику, занимает небольшую область в плоскости ГЛ с размерами $\Delta\tilde{\rho}_s \sim \rho_\Omega^2/\tilde{l}$. Вследствие дифракционного разброса направлений волн на апертуре линзы размером $\tilde{l}$ ($\psi_d \sim (k\tilde{l})^{-1}$) в плоскости ГЛ возникает неопределенность в положении источника $\Delta\tilde{\rho}_d \sim \tilde{x}/k\tilde{l}$. Понятно, что каустика может быть разрешима только на длинах волн, при которых $\Delta\tilde{\rho}_d \ll \Delta\tilde{\rho}_s$. При $\Delta\tilde{\rho}_d \gg \Delta\tilde{\rho}_s$ структура каустики не разрешается и послед-

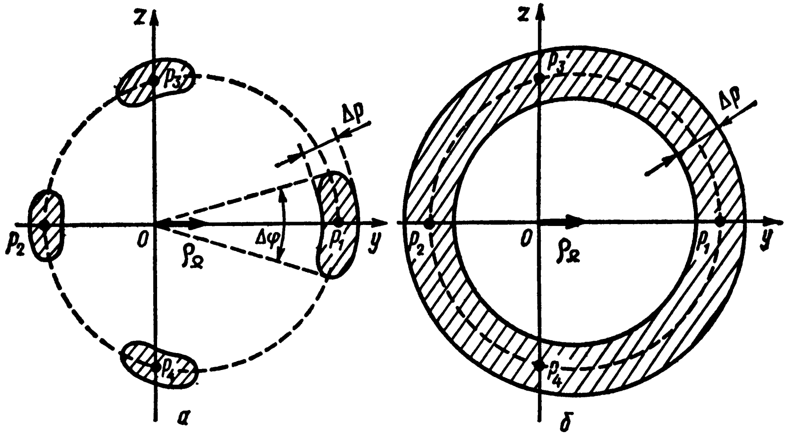


Рис. 3.11. Эффективные апертуры вращающейся ГЛ:
а — $\lambda < \lambda_г^{(\Omega)}$; *б* — $\lambda > \lambda_г^{(\Omega)}$

няя воспринимается как дифракционное пятно радиуса $\Delta\tilde{\rho}_d$, т. е. точно так же, как и для невращающейся линзы. Приравняв значения $\Delta\tilde{\rho}_d$ и $\Delta\tilde{\rho}_s$, найдем граничную длину волны:

$$\lambda_г^{(\Omega)} \sim \pi r_g \rho_\Omega^2/\tilde{l}^2.$$

Полученная оценка вполне согласуется по порядку величины с ранее найденным значением (3.107).

Можно привести еще одну интерпретацию $\lambda_г^{(\Omega)}$. При $\tilde{\rho} = \rho_\Omega$ имеются четыре стационарные точки $\mathbf{p}_j$ полной фазы $\tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{p})$. Разложив $\tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{p})$ в ряд Тейлора в каждой точке $\mathbf{p}_j$ до квадратичных членов включительно, можно определить соответствующие им эффективные апертуры (первые зоны Френеля) Δp_j и $\Delta\varphi_j$ (рис. 3.11, *а*):

$$\Delta p_j \simeq \sqrt{\tilde{x}/k}, \quad \Delta\varphi_j \simeq \sqrt{\tilde{x}/k}/\rho_\Omega.$$

Азимутальные размеры зон Френеля $\Delta\varphi_j$ возрастают с увеличением длины волны значительно быстрее, чем радиальные, и при некотором значении $\lambda = \lambda_г^{(\Omega)}$, когда $\Delta\varphi_j \sim \pi/2$, сливаются друг с другом. В этом случае эффективная апертура линзы представляет собой сплошное кольцо, показанное на рис. 3.11, *б*, и выделить стационарные точки по φ не представляется возможным. Вращение линзы на этих длинах волн уже не сказывается на дифрагированном поле (кроме смещения всей картины как целого на величину $\tilde{y}_s = \rho_\Omega$).

В заключение приведем некоторые численные оценки, выбрав в качестве исходной модели линзу в виде однородного шара, вращающегося как целое с угловой скоростью Ω. В этом случае момент импульса $L = \frac{2}{5} MR^2\Omega$ и согласно (2.113) найдем фокальное смещение

$$\rho_\Omega = \frac{2}{5}\left(\frac{\Omega R}{c}\right) R \sin\gamma.$$

Будем считать $\gamma = \pi/2$. Экваториальные скорости большинства звезд главной последовательности лежат в пределах $\Omega R \leqslant 500$ км · с$^{-1}$. Если положить $\Omega R \sim 100$ км · с$^{-1}$, можно получить следующую оценку:

$$\rho_\Omega \sim 10^{-4} R.$$

Максимально возможные размеры поперечного сечения каустики в плоскости ГЛ найдем, положив в (2.129) $\tilde{l} \simeq R$:

$$\Delta\tilde{\rho}_s \leqslant 2\rho_\Omega^2/R \sim 10^{-8} \cdot R.$$

Для таких скоростей граничное значение длины волны

$$\lambda_\text{г}^{(\Omega)} \simeq \pi\rho_\Omega^2/\tilde{x} \sim 2\pi \cdot 10^{-8} \frac{\tilde{x}_{\min}}{\tilde{x}} r_g.$$

Для Солнца $\Omega R \simeq 2$ км · с$^{-1}$; $\rho_\Omega \simeq 2{,}66 \cdot 10^{-6} R \simeq 1{,}9$ км; $\Delta\tilde{\rho}_s \leqslant$ $\leqslant 1$ см и $\lambda_\text{г}^{(\Omega)}$ (см) $\sim 1{,}3 \cdot 10^{-5} \tilde{x}_{\min}/\tilde{x}$. Из приведенных оценок следует, что вращение звезд-линз, подобных Солнцу, приводит к эффектам, которые практически не наблюдаемы. Однако при рассмотрении более массивных вращающихся объектов, таких, например, как галактики или черные дыры, дело обстоит несколько иначе. Так, в работе [60] рассмотрена модель «точечной» вращающейся ГЛ с массой $M \sim 10^{11} M_\odot$ и моментом импульса $L \sim 10^{76}$ г · см^2 · с$^{-1}$. Для такой линзы смещение $\tilde{y}_s = \rho_\Omega$ уже составляет около 500 пк, а размеры каустической области сравнимы с ρ_Ω.

Глава 4

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ ЛИНЗ

§ 4.1. Стохастический экран со случайными флуктуациями фазы. Принцип Гюйгенса для интенсивности

Статистические задачи, которые ставятся в связи с эффектом гравитационной фокусировки, можно условно разбить на две группы. В первую из них входят вопросы о том, как часто (с какой вероятностью) могут наблюдаться ГЛ в тех или иных космологических схемах и как именно должно проявляться их действие. Этот круг вопросов мы рассмотрим в гл. 5, посвященной наблюдению ГЛ.

В то же время в реальных условиях приходится сталкиваться с такими факторами, которые нельзя учесть в рамках чисто детерминированных моделей ГЛ. Здесь возникает второй класс статистических задач. Например, рассматривая прозрачные линзы, образованные галактиками или скоплениями галактик, мы вводили некоторую объемную плотность массы, которая и определяла свойства ГЛ. При этом не учитывалась дискретная структура гравитирующего объема, в котором находится огромное число звезд. Для учета этой особенности приходится рассматривать случайные отклонения полей тяготения от некоторых средних значений. Кроме того, космическое пространство от источника излучения до ГЛ и далее до наблюдателя также не является однородным. В нем действуют гравитационные поля множества небесных тел, расположенных вдоль трассы распространения волны, не говоря уже о межзвездной (межгалактической) плазме, неоднородности которой нельзя учесть иначе как статистически.

Заметим, что фокусировка флуктуирующих волн хорошо изучена в статистической радиофизике (см., например, [113]), но специфический закон преломления лучей в ГЛ приводит к целому ряду особенностей, которые не позволяют непосредственно использовать известные формулы.

При построении статистической теории ГЛ удобно различать два случая: когда неоднородности сосредоточены внутри ГЛ или в ее непосредственной окрестности (неоднородная линза) и когда неоднородности распределены вдоль трассы (линза в неоднородной среде). Эти две схемы не отличаются друг от друга по сути физических явлений, но имеют определенные особенности в методике расчета.

В частности, первый случай более прост, так как позволяет воспользоваться ранее развитым методом фазового экрана. Этот метод может быть применен и в статистической теории, поскольку условия распространения электромагнитного излучения в космическом пространстве таковы, что случайные неоднородности среды влияют в основном только на фазу волны. На основании формулы (3.80) определим, как и раньше, дополнительную фазу на экране путем интегрирования по невозмущенным лучам. Но, учитывая случайные неоднородности среды, представим $\mathcal{H}$ (р) в виде суммы регулярной $\langle \mathcal{H}(\mathbf{p})\rangle$ и случайной $\delta\mathcal{H}(\mathbf{p})$ составляющих:

$$\mathcal{H}(\mathbf{p}) = \langle \mathcal{H}(\mathbf{p})\rangle + \delta\mathcal{H}(\mathbf{p}). \tag{4.1}$$

Знак $\langle\ \rangle$ означает статистическое усреднение, $\langle \delta\mathcal{H}(\mathbf{p})\rangle = 0$ по определению. Нам понадобится еще выражение для угла преломления лучей на экране $\Theta_g(\mathbf{p}) = k^{-1}\nabla\mathcal{H}(\mathbf{p})$. Здесь также естественным образом выделяются регулярная часть $\langle \Theta_g(\mathbf{p})\rangle = k^{-1}\nabla[\langle \mathcal{H}(\mathbf{p})\rangle]$ и случайная добавка $\delta\Theta_g(\mathbf{p}) = k^{-1}\nabla[\delta\mathcal{H}(\mathbf{p})]$.

Поле в точке наблюдения в соответствии с принципом Гюйгенса определяется по формуле (3.83) и с учетом (4.1) записывается следующим образом:

$$u(x, \rho_s) \simeq \frac{ku_{\text{н}}}{2\pi i\tilde{x}} \exp\{ik(x + x_s + \rho_s^2/2x_s\} \int_{\Sigma} d\mathbf{p} \exp\{i[k(p^2/2\tilde{x} - \\ - \tilde{\rho}_s\mathbf{p}/\tilde{x}) + \langle \mathcal{H}(\mathbf{p})\rangle + \delta\mathcal{H}(\mathbf{p})]\}. \tag{4.2}$$

Среднее поле $\langle u\rangle$ находится путем усреднения случайного фактора $e^{i\delta\mathcal{H}(\mathbf{p})}$ под интегралом. Учитывая, что флуктуации фазы порождаются большим числом неоднородностей, расположенных вдоль трассы распространения, можно считать, что случайная фаза $\delta\mathcal{H}(\mathbf{p})$ распределена по нормальному закону, и

$$\langle e^{i\delta\mathcal{H}(\mathbf{p})}\rangle = e^{-\sigma_H^2/2},$$

где $\sigma_H^2 \equiv \langle \delta\mathcal{H}^2(\mathbf{p})\rangle$ — дисперсия флуктуаций фазы.

Для статистически однородного экрана σ_H^2 не зависит от р, и усредненную экспоненту можно вынести из-под знака интеграла. В результате приходим к следующей формуле:

$$\langle u(x, \rho_s)\rangle = e^{-\sigma_H^2/2} u(x, \rho_s)|_{\delta\mathcal{H}\equiv 0}, \tag{4.3}$$

где $u(x, \rho_s)|_{\delta\mathcal{H}\equiv 0}$ — поле в точке наблюдения в отсутствие флуктуаций. Таким образом, среднее поле отличается от невозмущенного только по амплитуде: оно всегда уменьшается, а при сильных флуктуациях ($\sigma_H^2 \gg 1$) становится экспоненциально малым.

Перейдем к рассмотрению энергетических характеристик. Средняя интенсивность $\langle \mathcal{I}(x, \rho_s)\rangle = \langle u(x, \rho_s)\, u^*(x, \rho_s)\rangle$ согласно (4.2)

$$\langle \mathcal{I}(x, \rho_s)\rangle \simeq \frac{k^2u_{\text{н}}^2}{4\pi^2\tilde{x}^2} \iint d\mathbf{p}'d\mathbf{p}'' \langle \exp\{i[\delta\mathcal{H}(\mathbf{p}') - \delta\mathcal{H}(\mathbf{p}'')]\}\rangle \times \\ \times \exp\{i[\langle \tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{p}')\rangle - \langle \tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{p}'')\rangle]\}. \tag{4.4}$$

Здесь $\langle\tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{p})\rangle = k(p^2/2\tilde{x} - \tilde{\rho}_s\mathbf{p}/\tilde{x}) + \langle\mathcal{H}(\mathbf{p})\rangle$ — регулярная составляющая полной фазы $\mathcal{H}(\mathbf{p})$.

Поскольку разность $\delta\mathcal{H}(\mathbf{p}') - \delta\mathcal{H}(\mathbf{p}'')$ также распределена по нормальному закону, после усреднения под интегралом получим

$$\langle \mathcal{I}(x, \rho_s)\rangle \simeq \frac{k^2 u_{\text{н}}^2}{4\pi^2\tilde{x}^2}\iint_\Sigma d\mathbf{p}'d\mathbf{p}'' \exp \times$$

$$\times \left\{-\frac{1}{2}D_H(\mathbf{p}', \mathbf{p}'') + i\left[\langle\tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{p}')\rangle - \langle\tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{p}'')\rangle\right]\right\}, \tag{4.5}$$

где $D_H(\mathbf{p}', \mathbf{p}'') = \langle[\delta\mathcal{H}(\mathbf{p}') - \delta\mathcal{H}(\mathbf{p}'')]^2\rangle$ — структурная функция флуктуаций фазы на экране.

Если флуктуации фазы являются статистически однородными и изотропными, то $D_H(\mathbf{p}', \mathbf{p}'')$ зависит только от расстояния между точками $\mathbf{p}'$, и $\mathbf{p}''$, т. е. от $|\mathbf{p}' - \mathbf{p}''|$. В этом случае целесообразно перейти в (4.5) к новым переменным интегрирования $\xi = \mathbf{p}' - \mathbf{p}''$ и $\mathbf{p} = \frac{1}{2}\times$ $\times(\mathbf{p}' + \mathbf{p}'')$. Учитывая, что якобиан преобразования $\partial(\mathbf{p}', \mathbf{p}'')/\partial(\mathbf{p}, \xi) = 1$, в новых переменных находим

$$\langle \mathcal{I}(x, \rho_s)\rangle \simeq \frac{k^2 u_{\text{н}}^2}{4\pi^2\tilde{x}^2}\iint d\mathbf{p}d\xi \exp \times$$

$$\times\left\{-\frac{1}{2}D_H(\xi) + i\left[\left\langle\tilde{\mathcal{H}}\left(\mathbf{p}+\frac{\xi}{2}\right)\right\rangle - \left\langle\tilde{\mathcal{H}}\left(\mathbf{p}-\frac{\xi}{2}\right)\right\rangle\right]\right\}. \tag{4.6}$$

Структурная функция $D_H(\xi)$ по определению равна нулю при $\xi = 0$ и возрастает с увеличением ξ. Поэтому в наиболее интересном случае сильных флуктуаций основной вклад в интеграл (4.6) дают малые значения ξ и $D_H(\xi)$ можно разложить в ряд по степеням ξ, ограничиваясь квадратичными членами:

$$D_H(\xi) \simeq k^2\sigma_\theta^2\xi^2, \tag{4.7}$$

где $\sigma_\theta^2 = k^{-2}D_H''(0)/2$ — дисперсия углов преломления лучей на экране. Мнимая часть показателя экспоненты в (4.6) при малых значениях ξ преобразуется к виду

$$\xi\nabla\langle\tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{p})\rangle = \frac{k}{\tilde{x}}[\mathbf{p} + \tilde{x}\langle\Theta_g(\mathbf{p})\rangle - \tilde{\rho}_s]\,\xi.$$

С учетом выполненных преобразований имеем

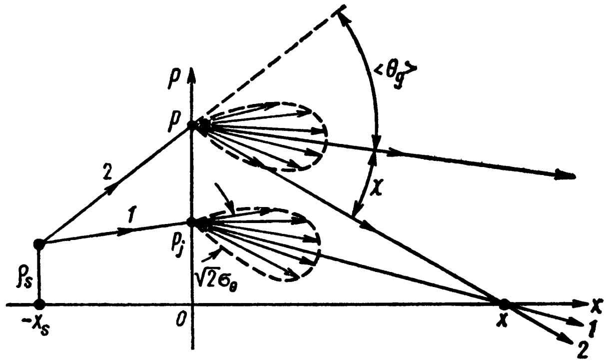
$$\langle \mathcal{I}(x, \rho_s)\rangle \simeq \frac{k^2 u_{\text{н}}^2}{4\pi^2\tilde{x}^2}\int_\Sigma d\mathbf{p}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp\left\{-\frac{1}{2}k^2\sigma_\theta^2\xi^2 + \right.$$

$$\left. + i\frac{k}{\tilde{x}}[\mathbf{p} + \tilde{x}\langle\Theta_g(\mathbf{p})\rangle - \tilde{\rho}_s]\,\xi\right\}. \tag{4.8}$$

Пределы интегрирования по ξ растянуты до бесконечности, что допустимо благодаря быстрому убыванию $\exp\left\{-\frac{1}{2}k^2\sigma_\theta^2\xi^2\right\}$ с ростом ξ,

Рис. 4.1. Рассеяние лучей на статистическом фазовом экране:

1 — луч, попадающий в точку наблюдения за счет регулярной рефракции; *2* — луч, попадающий в точку наблюдения за счет рассеяния



а область интегрирования по $\mathbf{p}$ совпадает с исходной областью Σ, так как при $\xi \simeq 0$ $\mathbf{p} \simeq \mathbf{p}', \mathbf{p}''$. Интеграл по ξ легко вычисляется, что приводит к следующему результату:

$$\langle \mathcal{J}(x, \boldsymbol{\rho}_s)\rangle \simeq \frac{u_{\text{н}}^2}{2\pi\tilde{x}^2\sigma_\theta^2}\int\limits_\Sigma d\mathbf{p}\exp\left\{-\frac{[\mathbf{p}+\tilde{x}\langle\boldsymbol{\Theta}_g(\mathbf{p})\rangle-\tilde{\boldsymbol{\rho}}_s]^2}{2\tilde{x}^2\sigma_\theta^2}\right\}. \tag{4.9}$$

Основной вклад в интеграл дает область в окрестности тех точек $\mathbf{p}_j$, в которых показатель экспоненты обращается в нуль, т. е. $\mathbf{p}_j$ находят из уравнения

$$\tilde{\boldsymbol{\rho}}_s = \mathbf{p} + \tilde{x}\langle\boldsymbol{\Theta}_g(\mathbf{p})\rangle. \tag{4.10}$$

Но это не что иное, как хорошо знакомое нам аберрационное уравнение с регулярной рефракцией $\langle\boldsymbol{\Theta}_g(\mathbf{p})\rangle$ (см. (2.78)). В геометрической оптике оно выделяет дискретные лучи, попадающие в точку наблюдения после преломления на экране. В данном случае «светятся» не отдельные точки $\mathbf{p} = \mathbf{p}_j$, а вся плоскость экрана, но яркость «свечения» убывает экспоненциально по мере удаления от $\mathbf{p}_j$. Основываясь на этой наглядной картине, можно представить подынтегральное выражение в (4.9) в очень компактной форме. Для этого введем угол $\boldsymbol{\chi}$ между лучом, прошедшим через точку $\mathbf{p}$ с углом преломления $\langle\boldsymbol{\Theta}_g(\mathbf{p})\rangle$, и прямой, соединяющей точки наблюдения и интегрирования (рис. 4.1). В приближении малых углов

$$\boldsymbol{\chi}(\mathbf{p}) \simeq \frac{\mathbf{p}-\boldsymbol{\rho}_s}{x_s} + \langle\boldsymbol{\Theta}_g(\mathbf{p})\rangle - \left(-\frac{\mathbf{p}}{x}\right) = \frac{1}{\tilde{x}}[\mathbf{p}+\tilde{x}\langle\boldsymbol{\Theta}_g(\mathbf{p})\rangle - \tilde{\boldsymbol{\rho}}_s]. \tag{4.11}$$

Используя это соотношение, из (4.9) получаем

$$\langle \mathcal{J}(x, \boldsymbol{\rho}_s)\rangle \simeq \frac{u_{\text{н}}^2}{2\pi\tilde{x}^2\sigma_\theta^2}\int\limits_\Sigma d\mathbf{p}\exp\{-\chi^2(\mathbf{p})/2\sigma_\theta^2\}. \tag{4.12}$$

Записанное в таком виде выражение для $\langle\mathcal{J}\rangle$ может рассматриваться как принцип Гюйгенса для интенсивности [114]. Действительно, суть принципа Гюйгенса в его обычной формулировке заключается в том, что поле в точке наблюдения определяется суперпозицией волн, идущих от всех участков области интегрирования с учетом их фазовых сдвигов. Нечто подобное выражает и формула (4.12): средняя интенсивность в данной точке определяется путем суммирования интенсивностей лучей, приходящих от различных точек экрана, но фазовый множитель заменяется экспоненциальным фактором $\exp\{-\chi^2/2\sigma_\theta^2\}$, учитывающим угловой разброс лучей на экране (см. рис. 4.1).

На основании формулы (4.12) легко представить и угловое распределение интенсивности в точке наблюдения. Оно характеризуется подынтегральной функцией в (4.12). Изображения представляют собой светящиеся пятна с характерным угловым размером $\sqrt{2}\sigma_\theta$ с максимумом интенсивности в тех точках ρ_j, где $\chi = 0$. Но протяженные изображения встречались нам и ранее при рассмотрении источников с определенными угловыми размерами. Естествен вопрос: можно ли подобрать такое угловое распределение яркости источника, чтобы интегральная интенсивность в точке наблюдения описывалась формулой (4.9) в ГЛ без флуктуаций?

Согласно (2.80) лучевая интенсивность в точке наблюдения определяется по формуле

$$I(x, \psi) = \int d\psi_s I_s(\psi_s)\, \delta\left[\psi_s - \left(\psi + \frac{\tilde{x}}{x}\Theta_g(x\psi)\right)\right], \qquad (4.13)$$

где $I_s(\psi_s)$ — угловое распределение яркости протяженного источника. Рассмотрим далее гауссово распределение яркости с центром в точке Ψ_s и угловым размером Ψ_0:

$$I_s(\psi_s) = \frac{u_н^2}{2\pi\Psi_0^2}\exp\{-(\psi_s - \Psi_s)^2/2\Psi_0^2\}.$$

Подставляя это выражение в (4.13), получаем

$$I(x, \psi) = \frac{u_н^2}{2\pi\Psi_0^2}\exp\left\{-\left[\Psi_s - \left(\psi + \frac{\tilde{x}}{x}\Theta_g(x\psi)\right)\right]^2/2\Psi_0^2\right\}. \qquad (4.14)$$

Интегрируя $I(x, \psi)$ по всем углам и учитывая, что $\rho = x\psi$, $\tilde{\rho}_s = x\Psi_s$, получаем интегральную интенсивность

$$\mathcal{I}(x, \rho_s) = \frac{u_н^2}{2\pi\tilde{x}^2\Psi_0^2}\int_\Sigma d\rho \exp\{-[\rho + \tilde{x}\Theta_g(\rho) - \tilde{\rho}_s]^2/2\tilde{x}^2\Psi_0^2. \qquad (4.15)$$

Сравнивая формулы (4.9) и (4.15), легко установить, когда интегральная интенсивность, создаваемая гауссовым источником в ГЛ без флуктуаций, совпадает со средней интенсивностью в линзе с сильными флуктуациями. Для этого необходимо, чтобы угловой размер источника Ψ_0 и угол разброса лучей на статистическом фазовом экране σ_θ были связаны соотношением

$$\Psi_0 = \sigma_\theta\tilde{x}/x = \sigma_\theta x_s/(x + x_s).$$

Заметим, что Ψ_0 и σ_θ совпадают только для бесконечно удаленного источника. При конечных расстояниях возникает множитель $\tilde{x}/x$, учитывающий расходимость лучей от источника до экрана [115].

Приведенные выше формулы записаны в системе координат, в которой ось x проходит от центра ГЛ через точку наблюдения. При этом поперечное смещение источника характеризуется вектором $\boldsymbol{\rho}_s$. Нередко используется и другая система координат с осью x, проходящей через источник. В этом случае $\boldsymbol{\rho}_s \equiv 0$, а положение наблюдателя определяется вектором $\boldsymbol{\rho}$. Переход к этой системе координат осуществляется простой заменой в (4.9) $\tilde{\boldsymbol{\rho}}_s$ на $\tilde{\boldsymbol{\rho}}$ (см. также § 2.2). Нетрудно обобщить полученные результаты на случай анизотропного поля флуктуации фазы на экране. Опуская вычисления, приведем окончательный ответ:

$$\langle \mathcal{I}(x, \boldsymbol{\rho}_s) \rangle \simeq \frac{u_н^2}{2\pi \tilde{x}^2 \sqrt{\sigma_{\theta y}^2 \sigma_{\theta z}^2 - \sigma_{\theta y z}^4}} \int_\Sigma d\mathbf{p} \exp \{-[2\tilde{x}^2 (\sigma_{\theta y}^2 \sigma_{\theta z}^2 - \sigma_{\theta yz}^4)]^{-1} \times$$

$$\times [\sigma_{\theta y}^2 F_y^2(\mathbf{p}) + \sigma_{\theta z}^2 F_z^2(\mathbf{p}) - 2\sigma_{\theta yz}^2 F_y(\mathbf{p}) F_z(\mathbf{p})]\}, \tag{4.16}$$

где $\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \mathbf{p} + \tilde{x} \langle \boldsymbol{\Theta}_g(\mathbf{p}) \rangle - \tilde{\boldsymbol{\rho}}_s$, а $\sigma_{\theta y}^2 = \dfrac{1}{2k^2} \dfrac{\partial^2 D_H(0, 0)}{\partial \xi_y^2}$,

$$\sigma_{\theta z}^2 = \frac{1}{2k^2} \frac{\partial^2 D_H(0, 0)}{\partial \xi_z^2}, \quad \sigma_{\theta yz}^2 = \frac{1}{2k^2} \frac{\partial^2 D_H(0, 0)}{\partial \xi_y \partial \xi_z}.$$

В заключение необходимо сделать несколько замечаний относительно условий применимости формулы (4.9) и ее последующих модификаций Прежде всего обратим внимание на то, что, начав в (4.2) с волновой теории, мы пришли к результату, который соответствует геометрической оптике. Действительно, в (4.9) длина волны вообще не входит, и, кроме того, мы убедились, что то же выражение получается и путем геометрооптического расчета интенсивности, создаваемой протяженным источником. Спрашивается, почему в окончательной формуле исчезли интерференционные эффекты?

Дело заключается в том, что формула (4.9) верна только асимптотически при $\sigma_H^2 \to \infty$, когда возрастание фазовых флуктуаций приводит к полному нарушению интерференции волн от отдельных участков экрана, что характерно для геометрической оптики. Однако существует еще когерентная часть полного поля $\langle u \rangle$, которая согласно (4.3) стремится к нулю при $\sigma_H^2 \to \infty$, но имеет определенное значение при всех конечных значениях σ_H^2. Если выделить регулярную составляющую, представив u в виде $u = \langle u \rangle + \delta u$, где $\langle \delta u \rangle = 0$, то $\langle \mathcal{I} \rangle \equiv \langle u u^* \rangle = |\langle u \rangle|^2 + \langle |\delta u|^2 \rangle \equiv \langle \mathcal{I}_{ког} \rangle + \langle \mathcal{I}_{неког} \rangle$. Формула (4.9) описывает только $\langle \mathcal{I}_{неког} \rangle$, в чем легко убедиться, замечая, что при $\sigma_H^2 \to \infty$ имеем $\langle \mathcal{I}_{ког} \rangle \to \infty$ 0 и $\langle \mathcal{I} \rangle = \langle \mathcal{I}_{неког} \rangle$. Суммируя (4.3) и (4.12), можно записать интерполяционную формулу, приближенно справедливую при любых конечных σ_H^2:

$$\langle \mathcal{I}(x, \rho_s)\rangle \simeq \frac{u_{\text{н}}^2}{4\pi^2\tilde{x}^2}\left\{k^2\left|\int\limits_{\Sigma} d\rho e^{i\langle\tilde{\mathscr{H}}(\rho)\rangle}\right|^2 e^{-\sigma_H^2} + \frac{2\pi}{\sigma_\theta^2}\int\limits_{\Sigma} d\rho e^{-\chi^2(\rho)/2\sigma_\theta^2}\right\}. \quad (4.17)$$

(эта формула не совсем точная, так как второй член равен $\langle \mathcal{I}_{\text{неког}}\rangle$ только при $\sigma_H^2 \to \infty$).

Вопрос о том, можно ли пренебречь первым слагаемым, зависит от длины волны и размеров апертуры линзы. Покажем это на простейшем примере линзы без аберраций, считая, что наблюдатель находится в точке фокуса, где интенсивность максимальна. Учитывая, что в фокусе $\langle \mathscr{H}(\rho)\rangle = 0$ и $\chi = 0$, интегралы в (4.17) оказываются равными просто площади апертуры πR_0^2 и

$$\langle \mathcal{I}_F\rangle \simeq \frac{u_{\text{н}}^2}{4\pi^2\tilde{x}^2}\left[k^2\pi^2R_0^4e^{-\sigma_{\text{н}}^2} + 2\pi^2R_0^2/\sigma_\theta^2\right].$$

Отсюда следует, что $\langle \mathcal{I}_{\text{ког}}\rangle/\langle \mathcal{I}_{\text{неког}}\rangle \simeq \frac{1}{2}k^2R_0^2\sigma_\theta^2e^{-\sigma_H^2}$. Таким образом, когерентную составляющую можно не учитывать, если

$$e^{\sigma_H^2} \gg k^2R_0^2\sigma_\theta^2 = (\sigma_\theta/\psi_d)^2 \quad (4.18)$$

($\psi_d = (kR_0)^{-1}$ — угол дифракции волн на апертуре линзы).

Задавшись какой-либо моделью фазовых флуктуаций, можно проанализировать, как зависит это неравенство от длины волны. Пусть случайные неоднородности коэффициента преломления характеризуются дисперсией σ_n^2 и некоторым масштабом L. Тогда $\sigma_H^2 \sim k^2\sigma_n^2L\Delta x$, где Δx — длина луча в неоднородной среде. Далее из оценки $D_H''(0) \sim \sigma_H^2/L^2 \sim k^2\sigma_n^2\Delta x/L$ следует, что $\sigma_\theta^2 \sim \sigma_n^2\Delta x/L$. Таким образом (4.18) приобретает вид

$$e^{\sigma_H^2}/\sigma_H^2 \gg (R_0/L)^2.$$

При достаточно больших σ_H^2 и фиксированном значении R_0/L это неравенство всегда выполняется. Если неоднородности коэффициента преломления порождаются нерегулярными гравитационными полями, то σ_n^2 не зависит от длины волны, а $\sigma_H^2 \sim k^2$. Следовательно, в этом случае неравенство (4.18) выполняется тем лучше, чем короче длина волны. Если же неоднородности связаны с вариациями электронной концентрации в межзвездной плазме, то $\sigma_n^2 \sim k^{-4}$, а $\sigma_H^2 \sim k^{-2}$. Это означает, что (4.18) будет заведомо выполнено, когда длина волны станет достаточно большой.

Поскольку в реальных условиях одновременно существуют неоднородности обоих типов, можно утверждать, что в достаточно коротковолновом, как и в очень длинноволновом, диапазоне некогерентная составляющая сфокусированного излучения преобладает. Существуют ли такие длины волн, на которых основную роль играет когерентная составляющая и рассеянием можно пренебречь, зависит от параметров конкретных ГЛ — длины трассы, размеров эффективной апертуры и статистических характеристик среды.

В случае фиксированного значения σ_H^2 выполнение неравенства (4.18) связано с размером эффективной апертуры ГЛ $R_{эф}$. При достаточно большом значении $R_{эф}$ неравенство (4.18) нарушается, и когерентная составляющая сфокусированной волны играет главную роль.

§ 4.2. Гравитационные линзы со случайными неоднородностями

Следуя ранее развитой схеме, нам предстоит проанализировать структуру изображений точечного источника, наблюдаемого сквозь ГЛ, и рассчитать сфокусированное излучение (коэффициент усиления) в различных точках пространства. Будем считать, что неравенство (4.18) выполняется, т. е. флуктуации фазы достаточно велики. В противном случае ответ дается немедленно, поскольку в сумме $\langle \mathcal{J} \rangle = |\langle u \rangle|^2 + \langle |\delta u|^2 \rangle$ достаточно учесть только когерентную составляющую $|\langle u \rangle|^2 = e^{-\sigma_H^2} \mathcal{J}|_{\delta\mathscr{H}=0}$ (см. (4.3)). Что касается невозмущенной интенсивности $\mathcal{J}|_{\delta\mathscr{H}=0}$, то она была исследована в предыдущих главах. Очевидно, в этом случае флуктуации вообще не влияют на структуру изображений, а коэффициент усиления уменьшается в $e^{\sigma_H^2}$ раз.

Таким образом, исходным соотношением для решения поставленной задачи является формула (4.9), которую мы запишем в той системе координат, в которой ось x проходит через источник излучения и центр ГЛ, а наблюдатель находится в точке (x, ρ):

$$\langle \mathcal{J}(x, \rho) \rangle \simeq \frac{u_н^2}{2\pi \tilde{x}^2 \sigma_\theta^2} \int_\Sigma d\mathbf{p} \exp\left\{ -\frac{|\mathbf{p} + \tilde{x}\langle \Theta_g(\mathbf{p}) \rangle - \tilde{\rho}|^2}{2\tilde{x}^2 \sigma_\theta^2} \right\}. \qquad (4.19)$$

Исключение когерентной составляющей $|\langle u \rangle|^2$ из $\langle \mathcal{J} \rangle$ означает, что флуктуации фазы полностью разрушают интерференцию волн, идущих от отдельных участков фазового экрана. Но такая же ситуация характерна и для геометрической оптики, когда фаза волны вообще не учитывается. Поэтому можно ожидать, что результаты расчетов с помощью (4.19) должны определенным образом смыкаться с формулами геометрической оптики. Ниже мы убедимся, что так оно и есть, исключая те области пространства, в которых геометрическая оптика приводит к расходящимся выражениям (фокусы, каустики). В этих областях геометрическая оптика отказывает, а статистическая теория приводит к вполне определенным значениям $\langle \mathcal{J} \rangle$.

Начнем с анализа структуры изображений. Поскольку подынтегральное выражение в (4.19) характеризует распределение яркости по экрану, задача фактически уже решена. Наиболее яркие точки определяются теми значениями $\mathbf{p}$, для которых обращается в нуль показатель экспоненты. Но условие

$$\mathbf{p} + \tilde{x}\langle \Theta_g(\mathbf{p}) \rangle - \tilde{\rho} = 0 \qquad (4.20)$$

совпадает с исследованным ранее аберрационным уравнением. Поэтому наиболее яркие точки на экране расположены в тех местах, где находились точечные изображения источника в ГЛ без флуктуаций. Однако в данном случае каждая из указанных точек окружена светящимся ореолом, эффективный радиус которого легко определить, раскладывая показатель экспоненты в ряд по степеням $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_j$, где $\mathbf{p}_j$ — один из корней уравнения (4.20). Считая, что допустимые значения $|\Delta p|$ определяются из условия равенства показателя степени экспоненты единице, находим

$$|\Delta \mathbf{p}_{эф} + \tilde{x}(\Delta \mathbf{p}_{эф}\nabla)\langle \Theta_g(\mathbf{p}_j)\rangle| \simeq \sqrt{2}\tilde{x}\sigma_\theta. \tag{4.21}$$

Оценка значения второго слагаемого для $\langle \Theta_g(\mathbf{p})\rangle = 2r_g/p$ показывает, что оно приблизительно равно $\Delta p_{эф}\tilde{l}^2/p^2$. Поскольку можно считать $p_j \sim \tilde{l}$, оба члена в левой части (4.21) оказываются одного порядка и, следовательно,

$$\Delta p_{эф} \sim \tilde{x}\sigma_\theta.$$

Как и следовало ожидать, эффективный радиус светящегося ореола определяется углом разброса лучей на фазовом экране.

Картина, наблюдаемая сквозь ГЛ, зависит от расположения корней $\mathbf{p}_j$ аберрационного уравнения (4.20). Если расстояние между какой-либо парой корней превышает $\Delta p_{эф}$, то соответствующие изображения можно считать изолированными и эти элементы структуры фактически совпадают с рассчитанными в гл. 2. Если же некоторые корни сближаются на расстояние, меньшее $\Delta p_{эф}$, то изображения сливаются. При этом общая картина, наблюдаемая сквозь ГЛ, меняется: ее тонкая структура замывается, но наиболее изолированные детали сохраняются.

Перейдем к расчету среднего коэффициента усиления ГЛ. Он определяется, как и ранее, через $\langle \mathcal{I}\rangle$ следующим образом:

$$\langle q(x, \boldsymbol{\rho})\rangle = \langle \mathcal{I}(x, \boldsymbol{\rho})\rangle / \langle \mathcal{I}(x, \boldsymbol{\rho})\rangle|_{r_g=0}.$$

Средняя интенсивность в случае, когда нет гравитационного поля $\langle \mathcal{I}\rangle|_{r_g=0}$, определяется с помощью формулы (4.19), если положить в ней $\langle \Theta_g\rangle \equiv 0$. Произведя интегрирование по всей плоскости $x = 0$, находим, что $\langle \mathcal{I}\rangle|_{r_g=0} = u_н^2$ не зависит от σ_θ и совпадает с интенсивностью излучения в свободном пространстве. Этот результат показывает, что в отсутствие регулярной рефракции уменьшение яркости какой-либо точки экрана за счет случайного разброса лучей компенсируется дополнительным излучением, приходящим от соседних участков.

В общем случае, не конкретизируя $\langle \Theta_g(\mathbf{p})\rangle$, вычислить интеграл в (4.19) нельзя, но его можно оценить методом Лапласа, если корни уравнения (4.20) являются изолированными в указанном выше смысле. Для N изолированных изображений полный коэффициент усиления $\langle q\rangle \simeq \sum_{j=1}^{N} \langle q_j\rangle$. Коэффициент усиления $\langle q_j\rangle$ определяется значениями парциальной интенсивности $\langle \mathcal{J}_j(x, \rho)\rangle$, которую находим путем разложения показателя экспоненты в (4.19) в ряд по степеням $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_j$ в окрестности $\mathbf{p}_j$ (см. (2.81)). Выполняя интегрирование по $\Delta\mathbf{p}$ в бесконечных пределах, получаем

$$\langle q_j(x, \rho)\rangle \simeq \left| \left[1 + \tilde{x}\frac{\partial\langle\Theta_{gy}\rangle}{\partial y}\right]\left[1 + \tilde{x}\frac{\partial\langle\Theta_{gz}\rangle}{\partial z}\right] - \tilde{x}^2\left[\frac{\partial\langle\Theta_{gy}\rangle}{\partial z}\right]^2\right|^{-1}_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_j}. \tag{4.22}$$

Это выражение в точности совпадает с геометрооптической формулой (2.82) и, как и должно быть, не зависит от σ_θ. Последнее объясняется тем, что интеграл в бесконечных пределах по $\Delta\mathbf{p}$ в окрестности $\mathbf{p}_j$ учитывает всю интенсивность излучения, приходящего в точку наблюдения от размытого пятна j-го изображения. Полученная таким образом интенсивность совпадает с той, которая создавалась точечным изображением в геометрической оптике, поскольку на экране происходит только перераспределение яркости по углам с сохранением полной энергии излучения.

Когда расстояние между некоторыми корнями $\mathbf{p}_j$ приближается к $\tilde{x}\sigma_\theta$ и тем более когда корни сливаются, формула (4.22) уже неприменима. Дальнейшее продвижение связано с определенными предположениями относительно свойств функции $\langle\Theta_g(\mathbf{p})\rangle$. В частности, достаточно конкретные результаты можно получить, если считать, что ГЛ обладает сферической симметрией и $\langle\Theta_g(\mathbf{p})\rangle = -\langle\Theta_g(p)\rangle\frac{\mathbf{p}}{p}$. Записав интеграл (4.19) в полярных координатах, выполним интегрирование по углу между $\mathbf{p}$ и $\boldsymbol{\rho}$, после чего останется однократный интеграл по p:

$$\langle q(x, \rho)\rangle \simeq \frac{e^{-\tilde{\rho}^2/2\tilde{x}^2\sigma_\theta^2}}{\tilde{x}^2\sigma_\theta^2}\int_0^\infty I_0\left[\frac{|F(p)|\,\tilde{\rho}}{\tilde{x}^2\sigma_\theta^2}\right] e^{-\frac{F^2(p)}{2\tilde{x}^2\sigma_\theta^2}}\, p\,dp, \tag{4.23}$$

где $F(p) = p - \tilde{x}\langle\Theta_g(p)\rangle$, а $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Далее рассматриваются те же модели ГЛ, которые были исследованы в предыдущих главах: линза с непрозрачным ядром (звезда), прозрачная линза (галактика) и линза с плазменной оболочкой (звезда с короной).

Гравитационная линза с непрозрачным ядром. В этом случае $F(p) = p - \tilde{l}^2/p$ ($\tilde{l}^2 = 2r_g\tilde{x}$), а нижний предел в (4.23) надо считать равным радиусу звезды R. Для наблюдателя, находящегося на оси ГЛ ($\tilde{\rho} = 0$), имеем

$$\langle q(x, 0)\rangle \simeq \frac{1}{\tilde{x}^2\sigma_\theta^2}\int_R^\infty \exp\left\{-\left(p - \frac{\tilde{l}^2}{p}\right)^2/2\tilde{x}^2\sigma_\theta^2\right\} p\,dp. \tag{4.24}$$

Основной вклад в интеграл дает окрестность точки $p = \tilde{l}$, соответствующая радиусу светящегося кольца, о котором неоднократно говорилось в предыдущих главах. Если эта точка не попадает в пределы интегрирования ($\tilde{l} < R$), то коэффициент усиления будет мал и по мере приближения к ГЛ быстро спадает. При $\tilde{x} \ll R^2/2r_g$, когда $\tilde{l} \ll R$,

$$\langle q(x, 0)\rangle|_{\tilde{x} \ll R^2/2r_g} \simeq e^{-\frac{R^2}{2\tilde{x}^2\sigma_\theta^2}}. \tag{4.25}$$

Это соотношение показывает, что геометрооптическая граница освещенной области $\tilde{x} = R^2/2r_g$ размывается за счет флуктуаций угла рефракции. С углублением в область тени ($\tilde{x}$ уменьшается) интенсивность экспоненциально падает.

Когда наблюдатель находится в освещенной области $\tilde{x} > R^2/2r_g$, точка $p = \tilde{l}$ попадает в область интегрирования, а при достаточном удалении $\tilde{l}$ от R ($\tilde{l} - R \gg \tilde{x}\sigma_\theta$) можно оценить интеграл (4.25), положив нижний предел равным нулю. После этого интеграл вычисляется точно и

$$\langle q(x, 0)\rangle \simeq \eta e^{\eta} K_1(\eta), \tag{4.26}$$

где $K_1(\eta)$ — функция Макдональда первого порядка, а $\eta = \tilde{l}^2/\tilde{x}^2\sigma_\theta^2 = 2r_g/\tilde{x}\sigma_\theta^2$. Если точка наблюдения не слишком удалена от ГЛ ($\tilde{x} \ll r_g/\sigma_\theta^2$, $\eta \gg 1$), то, воспользовавшись асимптотикой $K_1(\eta)$ при больших η, получим

$$\langle q(x, 0)\rangle|_{\eta \gg 1} \simeq \sqrt{\frac{\pi r_g}{\tilde{x}}}\,\frac{1}{\sigma_\theta}. \tag{4.27}$$

Если сравнить это выражение с формулой (2.27) для коэффициента усиления яркости протяженного источника в линзе без флуктуаций, то легко убедиться, что обе формулы совпадают с точностью до коэффициента, близкого к единице при $\sigma_\theta \simeq R_s/\tilde{x}$. Этот результат не является неожиданным, так как вытекает из формул предыдущего параграфа. В другом предельном случае ($\tilde{x} \gg r_g/\sigma_\theta^2$, $\eta \ll 1$) используется представление $K_1(\eta)$ в окрестности нуля ($\eta \to 0$), и коэффициент усиления приближается к единице:

$$\langle q(x, 0)\rangle|_{\eta \ll 1} \simeq 1. \tag{4.28}$$

Совокупность формул (4.25) — (4.28) позволяет представить всю дистанционную зависимость $\langle q(x, 0)\rangle$ (рис. 4.2, *а*). Оценку максимального значения $\langle q\rangle_{\max}$ можно получить с помощью (4.27), положив в ней $\tilde{x} \simeq \tilde{x}_{\min} = R^2/2r_g$. Таким образом, находим

$$\langle q(x, 0)\rangle_{\max} \sim r_g/R\sigma_\theta.$$

Отсюда следует, что при достаточно больших углах рассеяния, когда

$$\sigma_\theta \geqslant r_g/R, \tag{4.29}$$

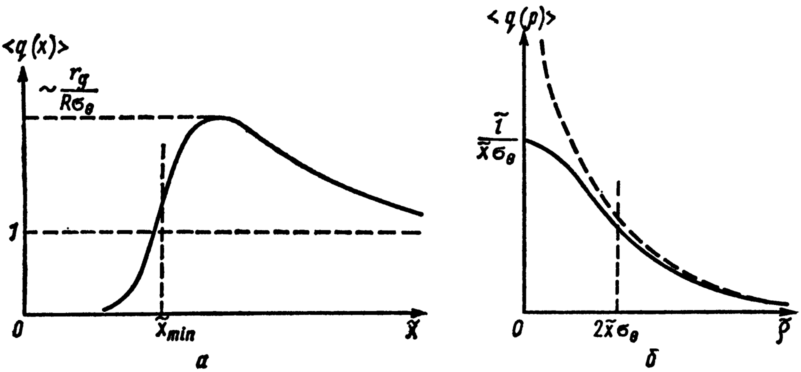


Рис. 4.2. Зависимость коэффициента усиления на оси ГЛ от расстояния (*а*) и от поперечного смещения (*б*)

ГЛ не способна сфокусировать проходящее сквозь нее излучение. Физический смысл этого неравенства легко понять, если вспомнить, что r_g/R соответствует максимальному углу отклонения луча за счет регулярной рефракции в ГЛ. Если случайный разброс направлений лучей σ_θ окажется одного порядка или превысит регулярную рефракцию, фокусировка станет невозможной.

Для того чтобы выяснить, выполняется ли неравенство (4.29) в реальных ГЛ, надо установить природу флуктуаций углов рефракции и оценить σ_θ. Флуктуации могут возникнуть за счет неоднородностей газовой (плазменной) оболочки звезды, но в этом случае необходимо учитывать и регулярную дополнительную рефракцию, т. е. исследовать (4.23) с иной функцией $F(p)$. Такие расчеты будут проведены несколько позже, а здесь мы остановимся на тех изменениях угла преломления, которые связаны со случайными нарушениями сферической симметрии ГЛ.

Ограничимся для простоты учетом квадрупольных составляющих гравитационного потенциала, что позволит использовать результаты, относящиеся к сфероидальной линзе. Коэффициент усиления на оси сфероидальной линзы определяется формулой (2.106):

$$q \simeq \tilde{l}^2/\rho_e^2,$$

где $\rho_e = Re_c \sin\gamma/\sqrt{2}$ — параметр сфероидальности, а γ — угол между осью вращения сфероида и осью x. Наблюдатель, находящийся на оси ГЛ, видит четыре точечных изображения на расстояниях $p_j \sim \tilde{l}$ от центра. Угловые координаты этих изображений будем считать случайными величинами, поскольку они зависят от ориентации проекции оси сфероида на плоскость (y, z).

Статистический ансамбль случайно ориентированных сфероидов может рассматриваться как сферически симметричная ГЛ с флуктуациями угла рефракции. Для оценки значения σ_θ, соответствующего такой модели, потребуем, чтобы коэффициент усиления $\langle q\rangle$, рассчитанный по формуле (4.27), совпал с приведенным выше значением:

$$\sqrt{\frac{\pi r_g}{\tilde{x}}}\frac{1}{\sigma_\theta}=\frac{\tilde{l}^2}{\rho_e^2}.$$

Отсюда находим $\sigma_\theta=\sqrt{\pi/2}\rho_e^2/\tilde{l}\tilde{x}$. Наибольшее значение σ_θ соответствует наименьшему расстоянию $\tilde{x}_{\min}=R^2\,2r_g$, т. е. $\sigma_\theta\sim e_c^2 r_g/R$ ($\sin\gamma$ считается близким к единице). Отсюда следует, что в сфероидальных линзах с малым эксцентриситетом ($e_c^2\ll 1$) неравенство (4.29) заведомо не выполняется и существенного снижения усиления за счет случайной ориентации сфероида не произойдет.

Найденную выше оценку σ_θ легко получить и непосредственно из выражения для угла рефракции в сфероидальной ГЛ (см. § 2.4). Действительно, второе слагаемое в формуле (2.100) представляет собой не что иное, как дополнительный угол преломления $\delta\Theta_g$, связанный с квадрупольным моментом гравитационного потенциала:

$$\delta\Theta_g(\mathbf{p})=-\frac{2r_g\rho_e^2}{p^3}(\cos 3\varphi\mathbf{e}_y+\sin 3\varphi\mathbf{e}_z).$$

Напомним, что оси y, z в плоскости ГЛ ориентированы в соответствии с направлением проекций оси вращения сфероида на эту плосксcть. Поэтому для статистического ансамбля сфероидов с разной ориентацией угол φ, а вместе с ним и $\delta\Theta_g(\mathbf{p})$ следует рассматривать как случайные величины. Однако $\langle[\delta\Theta_g]^2\rangle=4r_g^2\rho_e^4/p^6$ уже от φ не зависит, и при фиксированном γ

$$\sigma_\theta=\sqrt{\langle[\delta\Theta_g]^2\rangle}=2r_g\frac{\rho_e^2}{p^3}.$$

Можно рассматривать γ также как случайную величину, что приведет к замене ρ_e^2 на $\sqrt{\langle\rho_e^4\rangle}$. Это не меняет дальнейших оценок, но надо помнить, что среди допустимых значений γ не должно быть $\gamma=0$, иначе четыре отдельные точки сольются в сплошное кольцо, а такую трансформацию изображений уже нельзя описывать малыми флуктуациями угла рефракции.

Найденное таким образом значение σ_θ оказалось зависящим от прицельного параметра луча p. Это обстоятельство не приводит к дополнительным трудностям при вычислении интеграла (4.24), поскольку максимум экспоненты все равно определяется тем же уравнением $F(p)=0$ и в данном случае соответствует $p\simeq\tilde{l}$. В этой точке и следует брать значение $\sigma_\theta(p)$. Для оценки σ_θ по максимуму положим $p\simeq\tilde{l}\simeq R$, что приведет к полученному ранее соотношению $\sigma_\theta\sim$ $\sim e_c^2 r_g/R$.

Представляет интерес сравнить дистанционную зависимость коэффициента усиления для трех расчетных моделей ГЛ:

а) геометрической оптики, для которой коэффициент усиления изменяется как $\tilde{l}/x\Psi_0$ (см. § 2.2);

б) волновой теории, для которой коэффициент усиления не зависит от расстояния (см. § 3.3);

в) статистической теории, для которой средний коэффициент усиления пропорционален $\tilde{l}/x\sigma_\theta$ (см. формулу (4.27)).

Казалось бы, в зависимости от способа расчета q получаются совершенно разные результаты, чего, разумеется, быть не должно. Противоречие снимается, если вспомнить, что в перечисленных выше методиках учитывались разные факторы, приводящие к конечным значениям q на оси. В то же время все три способа расчета можно свести к одной схеме, если определять коэффициент усиления через отношение площадей входной апертуры $\Sigma_{вх} \simeq 2\pi \tilde{l}\Delta p$ и фокального пятна $\Sigma_F \simeq \pi\rho_{min}^2$, где ρ_{min} — эффективный радиус освещенного участка с центром на оси ГЛ. В геометрической оптике значения Δp и ρ_{min} связаны соотношением $\Delta p \sim \frac{\tilde{x}}{x}\rho_{min}$. И мы приходим к известной уже нам оценке (см. § 2.1) $q_{max} \simeq \left(\frac{x}{\tilde{x}}\right)^2 \Sigma_{вх}/\Sigma_F \sim \tilde{l}/\tilde{\rho}_{min}$, где $\tilde{\rho}_{min} = \rho_{min}\tilde{x}/x$ — проекция смещения ρ_{min} на плоскость ГЛ. Для источника с конечными угловыми размерами $\Psi_0\tilde{\rho}_{min} \sim x\Psi_0$ и $q_{геом} \simeq \left(\frac{x}{\tilde{x}}\right)^2 \Sigma_{вх}/\Sigma_F \sim \tilde{l}/x\Psi_0$. Если же рассеяние лучей происходит в плоскости ГЛ, то в формуле $q_{max} \sim \tilde{l}/\tilde{\rho}_{min}$ необходимо положить $\tilde{\rho}_{min} \sim x\sigma_\theta$ и мы получим статистическую оценку $\langle q_{стат}\rangle \sim \tilde{l}/\tilde{x}\sigma_\theta$ (заметим, что здесь снова появляется связь $\tilde{x}\sigma_\theta = x\Psi_0$, полученная в § 4.1). В волновой теории сохраняется формула $q \sim \tilde{l}/\tilde{x}\sigma_\theta$, но σ_θ заменяется на $\Psi_d \sim (k\tilde{l})^{-1}$, что дает $q_{волн} \sim \frac{r_g}{\lambda}$, и зависимость q от x исчезает.

В реальных ГЛ происходят одновременно и дифракция волн, и их случайные флуктуации. Кроме того, источники всегда имеют конечные угловые размеры. Мы убедились, что учет любого из этих факторов позволяет получить конечное значение q на оси ГЛ (напомним, что в геометрической оптике с точечным излучателем $q \to \infty$ как $1/\rho$). Можно получить и более общие формулы, учитывающие одновременно все указанные явления, но в каждом конкретном случае, когда известны параметры ГЛ, положение и размеры источника, в этом нет необходимости. Достаточно сравнить между собой три угла: Ψ_0, ψ_d и σ_θ. Если один из них существенно превосходит два других, то соответствующий механизм ограничения q является определяющим и только его достаточно учесть при расчете. Если же все три угла окажутся приблизительно одинаковыми (вероятность такого совпадения крайне мала), то рассмотрение любого механизма приведет к одним и тем же оценкам q. Очень важно, что с удалением от ГЛ углы Ψ_0, ψ_d и σ_θ меняются по-разному: первый убывает (как $1/x$), второй стремится к константе (пропорциональной $1/\sqrt{x_s}$), а последний остается неизменным (если рассеяние лучей происходит на всей трассе, а не только в окрестности ГЛ, то σ_θ даже возрастает). Следовательно, на достаточно больших расстояниях значение σ_θ всегда превосходит Ψ_0 и ψ_d и средний коэффициент усиления можно оценивать по формулам (4.27), (4.28). Предельное удаление от ГЛ, при котором еще возможно усиление,

$$\tilde{x}_{\max} \simeq r_g/\sigma_\theta^2. \qquad (4.30)$$

Отсутствие усиления ($\langle q\rangle \sim 1$) не означает, разумеется, что вообще исчезает эффект ГЛ, потому что деформация изображений (появление новых изображений) все же остается.

Перейдем к рассмотрению зависимости коэффициента усиления $\langle q(x, \rho)\rangle$ от поперечного смещения наблюдателя ρ. Будем считать, что $\tilde{x} \gg \tilde{x}_{\min}$, т. е. речь идет об освещенной области. В этом случае основной вклад в (4.23) дает небольшая область вблизи корня уравнения $F(p) = 0$, т. е. $p \simeq \tilde{l}$. Раскладывая показатель экспоненты в ряд по степеням $\Delta p = p - \tilde{l}$ и растягивая пределы интегрирования по Δp до бесконечности, приходим к следующей формуле:

$$\langle q(x, \rho)\rangle \simeq \sqrt{\frac{\pi r_g}{\tilde{x}}}\,\frac{1}{\sigma_\theta}\,e^{-\frac{\tilde{\rho}^2}{4\tilde{x}^2\sigma_\theta^2}}\,I_0\left(\frac{\tilde{\rho}^2}{4\tilde{x}^2\sigma_\theta^2}\right). \qquad (4.31)$$

При $\rho = 0$ получаем уже известный результат (4.27), а при $\rho \gg 2x\sigma_\theta$, используя асимптотику $I_0(z)$ для больших значений z, имеем

$$\langle q(x, \rho)\rangle \simeq \tilde{l}/\tilde{\rho},$$

что совпадает с геометрооптическим расчетом (2.23) при $\tilde{\rho} \ll \tilde{l}$. Таким образом, флуктуации ограничивают бесконечный рост усиления на фокальной полуоси, но не влияют на фокусировку излучения вдали от оси на расстояниях $\rho \gg \rho_{\min}$. Зависимость $\langle q(x, \rho)\rangle$ от ρ представлена на рис. 4.2, *б*. Эффективная ширина фокального пятна согласно (4.31) равна $2x\sigma_\theta$, что отмечалось и ранее при качественных оценках $\langle q\rangle$ на оси ГЛ.

Прозрачная гравитационная линза. Геометрическая оптика прозрачной ГЛ рассматривалась в § 2.3, где были получены формулы для угла рефракции $\Theta_g(p)$, совпадающего в данном случае с $\langle\Theta_g(p)\rangle$. Учитывая (2.57), нам предстоит исследовать исходный интеграл (4.23) с

$$F(p) \simeq p\left(1 - \frac{\tilde{x}}{x_F}\right) + \frac{\tilde{x}p^3}{2x_F a^2}. \qquad (4.32)$$

(Обозначения те же, что и в § 2.3: x_F — фокусное расстояние, a — характерный масштаб изменения $\sigma(p)$).

Общую картину зависимости $\langle q(x, \rho)\rangle$ от x и ρ легко представить на основе полученных ранее результатов. Коэффициент усиления имеет максимальное значение в точке $\tilde{x} = x_F$, куда проектируется изображение источника (для бесконечно удаленного источника эта точка совпадает с фокусом ГЛ), и остается достаточно большим на всей полуоси $\tilde{x} > x_F$. При поперечных смещениях усиление ГЛ, вообще, падает, но при пересечении каустической поверхности $\rho = \rho_k(x)$ снова возрастает.

Начнем с поперечного распределения $\langle q \rangle$ в фокальной плоскости $\tilde{x} = x_F$. В этом случае $F(p) \simeq p^3/2a^2$, и вычисление (4.23) приводит к следующему результату:

$$\langle q(x, \rho)\rangle |_{\tilde{x}=x_F} \simeq \frac{e^{-\tilde{\rho}^2/2x_F^2\sigma_\theta^2}}{x_F^2\sigma_\theta^2} \int_0^\infty I_0\left(\frac{\tilde{\rho} p^3}{2a^2 x_F^2 \sigma_\theta^2}\right) e^{-p^6/8a^4 x_F^2 \sigma_\theta^2} p\,dp =$$

$$= \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{a^4}{x_F^4\sigma_\theta^4}\right)^{1/6} e^{-\tilde{\rho}^2/2x_F^2\sigma_\theta^2} {}_1F_1\left(\frac{1}{3};\ 1;\ \frac{\tilde{\rho}^2}{2x_F^2\sigma_\theta^2}\right). \tag{4.33}$$

В самом фокусе ($\rho = 0$) значение $\langle q \rangle$ достигает максимума:

$$\langle q(x, 0)\rangle |_{\tilde{x}=x_F} \simeq \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{a^4}{x_F^4\sigma_\theta^4}\right)^{1/6}. \tag{4.34}$$

По мере возрастания ρ коэффициент усиления $\langle q \rangle$ убывает. При достаточно больших смещениях, когда $\tilde{\rho} \gg x_F\sigma_\theta$, можно использовать асимптотику гипергеометрической функции

$${}_1F_1\left(\frac{1}{3};\ 1;\ z\right)_{z\to\infty} \simeq \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} e^z z^{-2/3}.$$

В результате получаем

$$\langle q(x, \rho)\rangle |_{\tilde{x}=x_F} \simeq \frac{2^{2/3}}{3}\left(\frac{a}{\tilde{\rho}}\right)^{4/3}. \tag{4.35}$$

Эта формула, как легко показать, совпадает с геометрооптическим расчетом.

Исследуя дифракцию волн в ГЛ, мы ввели понятие эффективной апертуры, которое позволило получить все необходимые оценки коэффициента усиления, не вычисляя дифракционного интеграла. Аналогичную процедуру можно выполнить и в статистических расчетах, основываясь на свойствах подынтегрального выражения в (4.33). Радиус эффективной апертуры определяется тем значением p, при котором показатель экспоненты близок к единице:

$$R_{\text{эф}} \sim (a^2 x_F \sigma_\theta)^{1/3}. \tag{4.36}$$

Оценим с помощью (4.36) коэффициент усиления в фокусе ГЛ как отношение площадей входной апертуры $\Sigma_{\text{вх}} \simeq \pi R_{\text{эф}}^2$ и фокального пятна $\Sigma_F \simeq \pi \rho_F^2$, а именно: $\langle q(x, 0)\rangle \simeq \left(\frac{x}{\tilde{x}}\right)^2 \Sigma_{\text{вх}}/\Sigma_F \sim R_{\text{эф}}^2/\tilde{\rho}_F^2$. Учитывая, что $\tilde{\rho}_F \sim x_F\sigma_\theta$, получаем

$$\langle q(x, 0)\rangle |_{\tilde{x}=x_F} \sim \left(\frac{a^4}{x_F^4\sigma_\theta^4}\right)^{1/6}, \tag{4.37}$$

что хорошо согласуется с точным выражением (4.34). С увеличением угла рассеяния коэффициент усиления уменьшается и при $\sigma_\theta \sim a/x_F$ оказывается близким к единице. Поскольку в точке $x = x_F$ концентрация излучения является максимальной, можно сказать, что при $\sigma_\theta \gtrsim a/x_F$ усиления интенсивности в прозрачной ГЛ не происходит. Используя параметры a и x_F для модели ГЛ в виде однородного шара (см. § 2.3), легко убедиться, что усиление отсутствует, если $\sigma_\theta \gtrsim r_g/R_G$ (R_G — радиус галактики), т. е. предельный угол рассеяния в прозрачной ГЛ тот же, что и в линзе с непрозрачным ядром (см. (4.29)).

Вопрос о том, насколько существенно это ограничение можно решить, оценив σ_θ для той же галактики-линзы. При этом придется в отдельности рассматривать лучи, проходящие сквозь галактику, и лучи, идущие вне ее. Начнем с лучей первого типа. Они испытывают случайную рефракцию за счет преломления в гравитационных полях отдельных звезд, мимо которых проходит луч, и за счет рассеяния на неоднородностях межзвездной плазмы. Поскольку эти процессы являются независимыми, суммарная дисперсия σ_θ^2 складывается из «звездной» составляющей $\sigma_{\theta s}^2$ и плазменной $\sigma_{\theta p}^2$. Дисперсия $\sigma_{\theta s}^2$ происходит за счет рассеяния на дискретных центрах, поэтому здесь возникает глубокая аналогия с задачей многократного рассеяния частиц на ядрах атомов в веществе (см. например, [116]). Мы используем здесь схему расчета, приведенного в работе [116]. Разброс лучей за счет отклонения в гравитационных полях отдельных звезд представляет собой совокупность большого числа независимых случайных процессов. Интересующую нас дисперсию можно представить в виде $\sigma_{\theta s}^2 \simeq \langle\Theta_1^2\rangle N$, где $\langle\Theta_1^2\rangle$ — средний квадрат угла отклонения при единичном акте рассеяния, а $N = \Delta x/L_s$ — число «столкновений» луча со звездами (Δx — длина трассы внутри галактики, L_s — среднее расстояние между звездами). Замечая, что полное сечение рассеяния $\Sigma_п$, плотность звезд δ_s и расстояние между ними L_s связаны соотношением $L_s \simeq 1/\delta_s\Sigma_п$, перепишем формулу для $\sigma_{\theta s}^2$ следующим образом:

$$\sigma_{\theta s}^2 \simeq \delta_s \Sigma_п \Delta x \langle\Theta_1^2\rangle.$$

Для расчета $\langle\Theta_1^2\rangle$ введем дифференциальный поперечник рассеяния $d\Sigma$ в телесный угол $d\Omega$. По определению $d\Sigma = p\,dp\,d\varphi = p\left|\frac{dp}{d\theta}\right| d\theta\, d\varphi = p\left|\frac{dp}{d\theta}\right| \frac{d\Omega}{\sin\theta}$, где $p = 2r_{gs}/\theta$ — прицельный параметр луча, соответствующий отклонению на угол θ (p определяется относительно данной звезды). Для малых углов рассеяния получаем

$$\frac{d\Sigma}{d\Omega} \simeq \frac{4r_{gs}^2}{\theta^4}, \tag{4.38}$$

что совпадает с известной формулой Резерфорда. Среднее значение

$$\langle\Theta_1^2\rangle = \frac{1}{\Sigma_п}\left\langle\int \theta^2 d\Sigma\right\rangle = \frac{1}{\Sigma_п}\int \theta^2 \frac{d\Sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{8\pi\langle r_{gs}^2\rangle}{\Sigma_п} \ln\frac{\theta_{max}}{\theta_{min}}$$

($\langle r_{gs}^2\rangle$ — средний квадрат гравитационного радиуса звезды). Подставляя это выражение в формулу для $\sigma_{\theta s}^2$ и считая $\theta_{max}/\theta_{min} = p_{min}/p_{max} \simeq \langle R\rangle/L_s$, окончательно получаем

$$\sigma_{\theta s}^2 \simeq 8\pi \langle r_{gs}^2\rangle \delta_s \Delta x \ln \frac{L_s}{\langle R\rangle}, \qquad (4.39)$$

или с учетом зависимости Δx от p

$$\sigma_{\theta s}^2 \simeq 16\pi \langle r_{gs}^2\rangle \delta_s \sqrt{R_G^2 - p^2} \ln \frac{L_s}{\langle R\rangle}.$$

Выразим δ_s через полное число звезд $N_G \left(\delta_s = \frac{3N_G}{4\pi R_G^3}\right)$ и оценим максимальное значение $\sigma_{\theta s}^2$, соответствующее $p = 0$:

$$\sigma_{\theta s\, max}^2 \simeq 12 N_G \ln \frac{L_s}{\langle R\rangle} \langle r_{gs}^2\rangle / R_G^2. \qquad (4.40)$$

Взяв для оценок $N_G \sim 10^{12}$, $L_s \sim 10^{14}$ км, $\langle R\rangle \sim 10^6$ км, $\langle r_{gs}^2\rangle \sim 1$ км^2, $R_G \sim 10^{18}$ км, получим $\sigma_{\theta s\, max}^2 \sim 10^{-22}$. Сравнение найденной величины с предельным значением $\sigma_{\theta пред}^2 \sim (r_g/R_G)^2$ приводит к следующему результату:

$$\left(\frac{\sigma_{\theta s\, max}}{\sigma_{\theta пред}}\right)^2 \sim 12 N_G\, r_g^{-2} < r_{gs}^2 > \ln \frac{L_s}{\langle R\rangle} = \frac{12 \ln (L_s/R)}{N} \sim 2 \cdot 10^{-10},$$

т. е. рассеяние на гравитационных полях отдельных звезд в галактике не будет существенно снижать средний коэффициент усиления. Однако в отдельных реализациях случайного процесса, когда луч зрения проходит в непосредственной близости от какой-либо звезды, ее влияние может стать весьма заметным. В этом случае коэффициент усиления должен вычисляться для конкретной конфигурации звездного поля без статистического усреднения. Некоторые результаты подобных расчетов приводятся в следующем параграфе.

Перейдем к оценке влияния плазменных неоднородностей. В отличие от рассеяния на отдельных центрах, здесь мы имеем дело со случайной рефракцией в плавно неоднородной среде. Эта задача хорошо изучена в радиофизике, и нам остается только воспользоваться известными результатами (см., например, [113]). Заметим, что качественная оценка $\sigma_{\theta p}^2$ через рассеяние на отдельных неоднородностях показателя преломления не отличается от исходной формулы для $\sigma_{\theta s}^2$, т. е. $\sigma_{\theta p}^2 \sim \langle\Theta_1^2\rangle N$. Если неоднородности плазмы характеризуются одним масштабом L_p, то $\sigma_{\theta p}^2 \sim \sigma_n^2 \Delta x/L_p$ (см. § 4.1). Точные формулы, полученные для разных спектров флуктуаций показателя преломления, таковы [113]:

$$\sigma_{\theta p}^2 = \begin{cases} \sqrt{2\pi}\,\sigma_n^2 \Delta x/L_p, \\ 1{,}64\sigma_n^2 \Delta x/(l_p L_p^2)^{1/3}. \end{cases} \qquad (4.41)$$

Первая формула соответствует гауссову спектру с масштабом L_p, а вторая — степенному, в котором имеются два масштаба: l_p — внутренний и L_p — внешний. Учитывая, что в межзвездной среде флуктуации коэффициента преломления возникают за счет изменения электронной концентрации N_e, имеем $\sigma_n^2 \simeq 2 \cdot 10^{-27} \langle \delta N_e^2 \rangle \lambda^4$ [см]. Сравним $\sigma_{\theta p}^2$ с $\sigma_{\theta\text{пред}}^2$, рассматривая для простоты гауссов спектр

$$\sigma_{\theta p}/\sigma_{\theta\text{пред}} \simeq 10^{-13} (\langle \delta N_e^2 \rangle R_G^3 / L_p r_g^2)^{1/2} \lambda^2 \text{ [см]}.$$

Очень важно, что в отличие от рассеяния на неоднородностях гравитационного поля результат сравнения $\sigma_{\theta p}$ и $\sigma_{\theta\text{пред}}$ зависит от длины волны. Полагая $\sigma_{\theta p}/\sigma_{\theta\text{пред}} \sim 1$, находим критическую длину волны:

$$\lambda_{\text{крит}}^2 \text{ [см]} \sim 10^{13} (r_g^2 L_p / R_G^3 \langle \delta N_e^2 \rangle)^{1/2}. \tag{4.42}$$

Численная оценка $\lambda_{\text{крит}}$ может быть указана только весьма приблизительно, ввиду широкого диапазона значений L_p и $\langle \delta N_e^2 \rangle$ [117], не говоря уже о размерах галактик. Полагая $\sqrt{\langle \delta N_e^2 \rangle} \sim N_e \sim 1 \text{ см}^{-3}$, $L_p \sim 10^{12}$ см, $r_g \sim 10^{17}$ см, $R_G \sim 10^{23}$ см, получаем

$$\lambda_{\text{крит}} \sim 30 \text{ см}.$$

Это означает, что рассеяние на плазменных неоднородностях может повлиять заметным образом на средний коэффициент усиления галактики-линзы в длинноволновой части диапазона частот, используемого в радиоастрономии. В оптике плазменные неоднородности себя не проявляют.

Перейдем к анализу случайной рефракции лучей, проходящих вне галактики-линзы. Заранее ясно, что для таких прицельных параметров ($p \geqslant R_G$) значение $\sigma_{\theta s}^2$ будет заведомо меньше рассчитанного выше, а $\sigma_{\theta p}^2$ вообще отсутствует. Тем не менее непосредственная оценка $\sigma_{\theta s}^2$ все же представляет интерес. При этом мы воспользуемся иной методикой, и сравнение формул при $p \simeq R_G$, где должны получиться близкие результаты для «внутреннего» и «внешнего» рассеяний $\sigma_{\theta s}^2$, послужит дополнительной проверкой правильности расчетов.

Потенциал гравитационного поля, создаваемого всеми звездами галактики,

$$\Phi(\mathbf{r}) = -G \sum_{j=1}^{N_G} \frac{M_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}, \tag{4.43}$$

где M_j — масса, а $\mathbf{r}_j$ — координаты отдельной звезды относительно центра галактики.

Вдали от границы галактики при $r \gg R_G$ можно разложить $\Phi(\mathbf{r})$ по степеням $r_j/r \ll 1$, после чего эффективный коэффициент преломления

$$n_g(\mathbf{r}) \simeq 1 + \frac{r_g}{r} + \sum_{j=1}^{N_G} r_{gj} \frac{\mathbf{r}_j \mathbf{r}}{r^3} \equiv \langle n_g(r) \rangle + \delta n_g(\mathbf{r}).$$

Здесь r_g — гравитационный радиус галактики, а r_{gj} — гравитационный радиус отдельной звезды.

Рассматривая координаты звезд $\mathbf{r}_j$ как случайные величины, рассчитаем флуктуационную составляющую фазы на экране, интегрируя $\delta n_g(\mathbf{r})$, как обычно, по прямым лучам:

$$\delta\mathcal{H}(\mathbf{p}) \simeq 2k\sum_{j=1}^{N_G} r_{gj}\frac{\mathbf{p}_j\mathbf{p}}{p^2}.$$

Прицельные параметры $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}_j$ определены относительно центра галактики. Это выражение позволяет определить структурную функцию флуктуаций фазы на экране $D_H(\mathbf{p}', \mathbf{p}'')$ и рассчитать согласно (4.7) интересующую нас дисперсию σ_θ^2:

$$D_H(\mathbf{p}', \mathbf{p}'') = \langle[\delta\mathcal{H}(\mathbf{p}') - \delta\mathcal{H}(\mathbf{p}'')]^2\rangle = 4k^2\left\langle\left[\sum_{j=1}^{N_G}\mathbf{p}_j\left(\frac{\mathbf{p}'}{p'^2} - \frac{\mathbf{p}''}{p''^2}\right)r_{gj}\right]^2\right\rangle.$$

Введя суммарные $\mathbf{p} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}' + \mathbf{p}'')$ и разностные $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}''$ координаты, упростим выражение, стоящее под знаком суммы: $\frac{\mathbf{p}'}{p'^2} - \frac{\mathbf{p}''}{p''^2} \simeq \simeq \frac{\boldsymbol{\xi}}{p^2}$. Далее будем считать, что координаты звезд и их гравитационные радиусы — независимые величины, причем распределение звезд является равномерным. Учитывая, что $\langle\mathbf{p}_j\mathbf{p}_k\rangle = 0$, если $j \neq k$, получаем

$$D_H(\mathbf{p}, \boldsymbol{\xi}) \simeq \frac{4k^2}{p^4} N_G\langle r_{gs}^2\rangle\langle(\boldsymbol{\xi}\mathbf{p}_j^2)\rangle.$$

Для равномерного распределения звезд имеем $\langle(\boldsymbol{\xi}\mathbf{p}_j)^2\rangle = \frac{1}{W_G}\int_{W_G} d\mathbf{r}_j \times (\boldsymbol{\xi}\mathbf{p}_j)^2 = \frac{1}{5}\xi^2R_G^2\left(W_G = \frac{4}{3}\pi R_G^3 \text{ — объем галактики}\right)$ и окончательно получаем $D_H(\mathbf{p}, \boldsymbol{\xi}) \simeq \frac{4}{5}k^2N_GR_G^2\langle r_{gs}^2\rangle\frac{\xi^2}{p^4}$. Отсюда следует, что

$$\sigma_\theta^2 \simeq \frac{4}{5}\langle r_{gs}^2\rangle N_G\frac{R_G^2}{p^4}. \qquad (4.44)$$

Обратим внимание на очень быстрое (как p^4) убывание рассеяния с возрастанием прицельного параметра луча. Эта закономерность вполне понятна, поскольку гравитационное поле любого распределения масс, сосредоточенного в ограниченном объеме, стремится на больших расстояниях к сферически симметричному. Сравним σ_θ^2 с найденным ранее значением $\sigma_{\theta s}^2$ для внутренних лучей. Опуская числовые и логарифмический множители, имеем $\sigma_\theta^2/\sigma_{\theta s}^2 \sim R_G^4/p^4$. Видно, что при $p \gg R_G$ $\sigma_\theta^2 \ll \sigma_{\theta s}^2$, а на границе галактики ($p \sim R_G$), найденные разными способами дисперсии, оказываются одного порядка. Мы убедились, что можно считать $\sigma_\theta \ll \sigma_{\theta\text{пред}}$, поэтому концентрация излучения в окрестности фокуса остается весьма значительной. Размеры фокальной области определяются путем простых геометрических построений

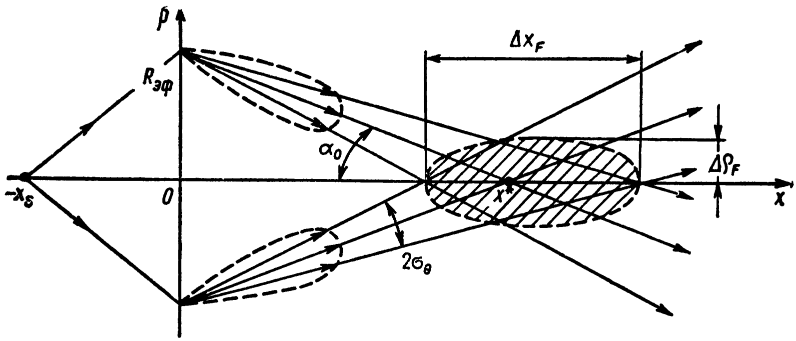


Рис. 4.3. Эффективная апертура ГЛ и область фокусировки

с помощью лучей, идущих от краев эффективной апертуры с углом рассеяния σ_θ (рис. 4.3). Поперечные размеры фокальной области $\Delta\rho_F \sim x^*\sigma_\theta$ нам уже известны, а продольные Δx_F примерно равны $x^{*2}\sigma_\theta/R_{эф}$. Если ввести эффективный угол апертуры $\alpha_0 = R_{эф}/x^*$, то выражения для $\Delta\rho_F$, Δx_F приобретают вид, аналогичный дифракционным формулам (3.54):

$$\Delta\rho_F \sim R_{эф}\sigma_\theta/\alpha_0, \quad \Delta_{x_F} \sim R_{эф}\sigma_\theta/\alpha_0^2. \tag{4.45}$$

При замене σ_θ углом дифракции $\psi_d \sim (kR_{эф})^{-1}$ формулы (4.45) совпадают с (3.54).

Перейдем к анализу $\langle q(x, \rho)\rangle$ вдали от фокуса, когда $x - x^* \gg \Delta x_F$. При небольших смещениях ρ основной вклад в интеграл (4.23) дают небольшие области p вблизи корней уравнения $F(p) = 0$. Это уравнение с $F(p)$ из (4.32) исследовано в § 2.3, где показано, что оно имеет два положительных корня: $p_{1,2} = \tilde{l}$ и $p_3 = 0$ (нумерация корней та же, что и в § 2.3). Проще всего оценивается вклад корня p_3, так как при близких к нулю значениях p можно отбросить слагаемое с p^3 в (4.32). В результате получается то же выражение, что и в геометрической оптике (см. (2.45)):

$$\langle q_3(x, \rho)\rangle \simeq \frac{1}{(1 - \tilde{x}/x_F)^2}. \tag{4.46}$$

Несколько сложнее обстоит дело с корнем $p_{1,2}$. Здесь необходимо разложить $F(p)$ по степеням $(p - \tilde{l})$:

$$F(p) \simeq [1 - \tilde{x}\langle\Theta_g'(\tilde{l})\rangle](p - \tilde{l}). \tag{4.47}$$

Подставляя это выражение в (4.23) и интегрируя в бесконечных пределах, для небольших ρ получаем

$$\langle q_{1-2}(x, \rho)\rangle \simeq \frac{\sqrt{2\pi}\tilde{l}e^{-\tilde{\rho}^2/4\tilde{x}^2\sigma_\theta^2}}{\tilde{x}\sigma_\theta|1 - \tilde{x}\langle\Theta_g'(\tilde{l})\rangle|} I_0[\tilde{\rho}^2/4\tilde{x}^2\sigma_\theta^2]. \tag{4.48}$$

На оси ГЛ ($\rho = 0$) коэффициент усиления максимален:

$$\langle q_{1-2}(x, 0)\rangle \simeq \frac{\sqrt{2\pi}}{\tilde{x}\sigma_\theta} \frac{\tilde{l}}{|1-\tilde{x}\langle\Theta_g'(\tilde{l})\rangle|}. \tag{4.49}$$

Поперечные размеры области фокусировки можно определить, считая показатель экспоненты в (4.48) близким к единице, что дает для радиуса фокального пятна уже известную оценку $\Delta\rho_F \sim x\sigma_\theta$ ($\Delta\tilde{\rho}_F \sim \tilde{x}\sigma_\theta$). При значительных удалениях от оси, когда $\rho \gg \Delta\rho_F$, используя асимптотику $I_0(z)|_{z\to\infty} \simeq (2\pi z)^{-1/2} e^z$, находим

$$\langle q_{1-2}(x, \rho)\rangle|_{\rho\gg\Delta\rho_F} \simeq \frac{2\tilde{l}}{\tilde{\rho}|1-\tilde{x}\langle\Theta_g'(\tilde{l})\rangle|}. \tag{4.50}$$

Зависимость от σ_θ исчезает, и результат совпадает с формулой геометрической оптики (2.46). Если точка наблюдения настолько удаляется от ГЛ, что кольцевое изображение $p = \tilde{l}$ выходит за рамки сосредоточения гравитирующих масс ($\tilde{l} > R$), то $\langle\Theta_g'(\tilde{l})\rangle = -2r_g/\tilde{l}^2$, и (4.50) переходит в $\langle q\rangle$ для непрозрачной ГЛ:

$$\langle q_{1-2}(x, \rho)\rangle \simeq \tilde{l}/\tilde{\rho}.$$

Оценка предельно допустимого угла рассеяния, при котором $\langle q_{1-2}(x, 0)\rangle$ становится близким к единице (усиления не происходит), согласно (4.49) при указанном значении $\langle\Theta_g'(\tilde{l})\rangle$ дает

$$\sigma_\theta \sim \tilde{l}/\tilde{x} \sim \sqrt{r_g/\tilde{x}}.$$

При $\tilde{x}_{\min} \sim R^2/r_g$ получаем, как и раньше, $\sigma_\theta \sim r_g/R$. Суммарный коэффициент усиления $\langle q(x, \rho)\rangle = \langle q_{1-2}(x, \rho)\rangle + \langle q_3(x, \rho)\rangle$ на больших расстояниях определяется в основном величиной $\langle q_{1-2}\rangle$, так как согласно (4.46) и (4.49) при $\tilde{x} \gg x_F$ значение $\langle q_3\rangle \sim \tilde{x}^{-2}$, а $\langle q_{1-2}\rangle \sim \tilde{x}^{-1/2}$.

Рассматривая $\langle q_{1-2}(x, \rho)\rangle$ при больших удалениях от оси, мы не учли пока возможности попадания точки наблюдения на каустическую поверхность $\rho = \rho_k(x)$. Эта сравнительно узкая область значений ρ должна быть исследована особо. Она существует не только в прозрачных ГЛ, но и в линзах с непрозрачным ядром, окруженных плазменной оболочкой (см. § 2.4). На этом последнем примере мы и рассмотрим особенности $\langle q\rangle$ в окрестности каустики.

Непрозрачная гравитационная линза с плазменной оболочкой. Функция $F(p)$, входящая в формулу (4.23), для ГЛ с плазменной оболочкой определяется согласно (2.69) соотношением:

$$F(p) = p - \frac{\tilde{l}^2}{p}\left[1 - \left(\frac{p_0}{p}\right)^{h-1}\right] \tag{4.51}$$

(обозначения те же, что и в § 2.4). Эту функцию следует подставить в (4.23) и, кроме того, заменить нижний предел интегрирования на R.

Начнем, как обычно, с осевого распределения $\langle q(x, 0)\rangle$, когда наблюдаются два концентрических кольцевых изображения с радиусами $\rho_{1,2}(x)$. В § 2.4 показано, что с увеличением $\tilde{x}$ радиус внешнего кольца ρ_1 увеличивается, стремясь к «чисто» гравитационному значению $\tilde{l}(x) = \sqrt{2r_g\tilde{x}}$, а ρ_2 убывает, приближаясь к некоторому постоянному значению ρ_0. Если расстояние до ГЛ столь велико, что радиусы колец заметно отличаются друг от друга ($\rho_1 - \rho_2 \gg \tilde{x}\sigma_\theta$), то $\rho_{1,2}$ можно рассматривать как изолированные корни уравнения $F(\rho) = 0$. В этом случае $\langle q(x, 0)\rangle \simeq \sum\limits_{j=1}^{2} \langle q_j(x, 0)\rangle$, где $\langle q_j(x, 0)\rangle$ определяется по формуле (4.49) с заменой $\tilde{l}$ на ρ_j. На больших расстояниях от ГЛ, когда $\rho_2 \simeq \rho_0 = \text{const}$, значение $\langle q_2(x, 0)\rangle$ убывает как $\tilde{x}^{-2}$. И им можно пренебречь по сравнению со значением $\langle q_1(x, 0)\rangle$, которое определяется так же, как в ГЛ с непрозрачным ядром без плазменной оболочки (см. (4.27), (4.28)).

Теперь посмотрим, что произойдет при поперечном смещении наблюдателя от оси ГЛ. Пока смещение ρ не очень велико и не доходит до каустики, $\langle q_j(x, \rho)\rangle$ можно рассчитать по ранее полученной формуле (4.50), заменяя $\tilde{l}$ на ρ_j. Но столь простая схема характерна лишь для достаточно больших расстояний, на которых каустика сильно удалена от оси ГЛ (см. рис. 2.17). Если же точка наблюдения близка к $\tilde{x} = x_k$, где каустика пересекает ось x, корни $\rho_{1,2}$ уже нельзя рассматривать как изолированные. В самой же точке $\tilde{x} = x_k$ два кольцевых изображения сливаются, а уравнение $F(\rho) = 0$ имеет двойной корень $\rho_1 = \rho_2 = \rho_k$. Кратный корень ρ_k — одновременно точка экстремума $F(\rho)$, поэтому в его окрестности $F(\rho) \simeq \frac{1}{2}F''(\rho_k) \times$ $\times (\rho - \rho_k)^2$. Подставляя это выражение в (4.23) и считая длину волны такой, что $\rho_k - R \gg x_k\sigma_\theta$, можно оценить интеграл, растянув пределы интегрирования до бесконечности. В результате получим

$$\langle q(x, \rho)\rangle|_{\tilde{x}=x_k} \simeq \sqrt{\frac{2\rho_k^2}{F''(\rho_k)}}\,\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)(\sqrt{2}x_k\sigma_\theta)^{-3/2}e^{-\rho^2/2x_k^2\sigma_\theta^2} \times$$
$$\times\, {}_1F_1\left(\frac{1}{4};\ 1;\ \frac{\rho^2}{2x_k^2\sigma_\theta^2}\right). \qquad (4.52)$$

Это выражение напоминает формулу (4.33), так как и в том и в другом случаях рассматривается поперечное распределение $\langle q(x, \rho)\rangle$ в той плоскости, где каустика пересекает ось x. Некоторые отличия связаны с разными геометрическими характеристиками каустических поверхностей.

Коэффициент усиления достигает максимума на оси ГЛ, где

$$\langle q(x, 0)\rangle|_{\tilde{x}=x_k} \simeq \sqrt{\frac{2\rho_k^2}{F''(\rho_k)}}\,\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)(\sqrt{2}x_k\sigma_\theta)^{-3/2}.$$

По мере удаления от оси $\langle q \rangle$ убывает и на расстояниях $\tilde{\rho} \gg x_k \sigma_\theta$, где можно воспользоваться асимптотикой ${}_1F_1$, переходит в

$$\langle q(x, \rho) \rangle |_{\tilde{x}=x_k} \simeq \sqrt{\frac{2}{F''(p_k)}}\, p_k \tilde{\rho}^{-3/2}.$$

Эта формула совпадает с геометрооптическим значением q.

Если координата точки наблюдения $\tilde{x}$ удалена от x_k в ту или иную сторону, каустическая поверхность проходит на больших расстояниях $\tilde{\rho}$ от оси (см. рис. 2.17). В этом случае можно использовать асимптотическое представление $I_0(z) \simeq e^z/\sqrt{2\pi z}$, преобразовав (4.23) к виду

$$\langle q(x, \rho) \rangle \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi \tilde{\rho} \tilde{x} \sigma_\theta}} \int_R^\infty \frac{p}{\sqrt{|F(p)|}} \exp\left\{-\frac{[|F(p)| - \tilde{\rho}]^2}{2x^2\sigma_\theta^2}\right\} dp. \quad (4.53)$$

Основной вклад в интеграл дают значения p, лежащие вблизи корней уравнения

$$|F(p)| - \tilde{\rho} = 0, \quad (4.54)$$

которое является еще одной формой записи аберрационного уравнения ГЛ. Если уравнение (4.54) имеет N изолированных корней p_j, т. е. точка наблюдения удалена от каустики, то, как обычно, $\langle q \rangle = \sum_{j=1}^{N} \langle q_j \rangle$, где

$$\langle q_j(x, \rho) \rangle \simeq \frac{p_j}{\tilde{\rho}} \left| 1 - \tilde{x} \langle \Theta_g'(p_j) \rangle \right|^{-1}.$$

Если же точка наблюдения попадает на каустику, происходит слияние двух корней, и для оценки вклада в $\langle q \rangle$ от сблизившейся пары необходимо разложить $|F(p)| - \tilde{\rho}$ в двойной ряд Тейлора по степеням $\Delta p = p - p_k$ и $\Delta\tilde{\rho} = \tilde{\rho} - \tilde{p}_k$:

$$|F(p)| - \tilde{\rho} \simeq \pm \frac{1}{2} |F''(p_k)| \Delta p^2 - \Delta\tilde{\rho}. \quad (4.55)$$

Знак «+» соответствует $F(p_k) > 0$, знак «—» — противоположному неравенству: $F(p_k) < 0$. В первом случае функция $|F(p)|$ имеет минимум в точке P_k, во втором — максимум, что иллюстрируется рис. 4.4. Какой из рассматриваемых вариантов реализуется, зависит от положения наблюдателя относительно точки $\tilde{x} = x_k$: при $\tilde{x} < x_k$ реализуется первый вариант, а при $\tilde{x} > x_k$ — второй. Заметим, что при $\tilde{x} < x_k$ (рис. 4.4, *а*) каустическая поверхность отделяет область наблюдения двух изображений (свет) от области, где изображения в приближении геометрической оптики отсутствуют (тень). Если же $\tilde{x} > x_k$ (рис. 4.4, *б*), то при переходе через каустику число изображений уменьшается от четырех (свет) до двух (тень). Подставляя (4.55)

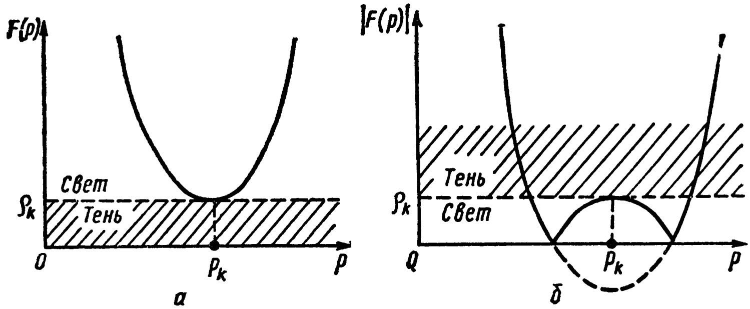


Рис. 4.4. Положение каустики ρ_k и переход тень — свет на разных расстояниях от ГЛ:
а — $x < x_k$; *б* — $x > x_k$

в (4.53) и интегрируя по Δp в бесконечных пределах, получаем

$$\langle q(x,\rho)\rangle|_{\tilde\rho\sim\tilde\rho_k} \simeq \frac{p_k}{\tilde\rho_k}\,\frac{e^{-\Delta\tilde\rho^2/4\tilde x^2\sigma_\theta^2}}{\sqrt{|F''(p_k)|\,x\sigma_\theta}}\,D_{-1/2}\left(\mp\frac{\Delta\tilde\rho}{x\sigma_\theta}\right), \tag{4.56}$$

где $D_{-1/2}(z)$ — функция параболического цилиндра. На самой каустике ($\Delta\tilde\rho = 0$)

$$\langle q(x,\rho)\rangle|_{\tilde\rho=\tilde\rho_k} \simeq \frac{p_k}{\tilde\rho_k 2^{1/4}\Gamma(3/4)}\sqrt{\frac{\pi}{x\tilde\sigma_\theta\,|F''(p_k)|}}. \tag{4.57}$$

При удалении от каустики в освещенную область на расстояния $|\Delta\tilde\rho| \gg \tilde x\sigma_\theta$ следует использовать асимптотику $D_{-1/2}(-z)|_{z\gg1} \simeq \simeq \sqrt{2/z}e^{z^2/4}$, что приводит к следующему упрощению формулы (4.56):

$$\langle q(x,\rho)\rangle|_{\text{свет}} \simeq \frac{p_k}{\tilde\rho_k}\sqrt{\frac{2}{|F''(p_k)\,\Delta\tilde\rho|}}. \tag{4.58}$$

Результат совпадает с геометрооптическим расчетом (2.49). Если же наблюдатель смещается в область «тени», то, учитывая иную асимптотику $D_{-1/2}(z)|_{z\gg1} \simeq \sqrt{1/z}e^{-z^2/4}$, получаем

$$\langle q(x,\rho)\rangle|_{\text{тень}} \simeq \frac{p_k}{\tilde\rho_k}\,\frac{1}{\sqrt{|F''(p_k)\,\Delta\tilde\rho|}}\,e^{-\Delta\tilde\rho^2/2\tilde x^2\sigma_\theta^2}. \tag{4.59}$$

Геометрооптического аналога этой формулы не существует. Она показывает, как «затягивается» усредненная интенсивность в область «тени» за счет флуктуаций угла рефракции.

Анализ подынтегрального выражения в (4.53) позволяет определить эффективную апертуру ГЛ в окрестности каустики. Она имеет форму кольца радиуса p_k и ширины

$$\Delta p_{\text{эф}} \sim (x\sigma_\theta/|F''(p_k)|)^{1/2}.$$

Если учесть, что эффективная ширина прикаустической области $\Delta\tilde{\rho}_k \sim \tilde{x}\sigma_\theta$, то легко оценить коэффициент усиления на каустике следующим образом:

$$\langle q\rangle\,|_{\text{кауст}} \simeq \left(\frac{x}{\tilde{x}}\right)^2 \frac{\Sigma_{\text{вх}}}{\Sigma_{\text{кауст}}} \simeq \frac{2\pi p_k \Delta p_k}{2\pi\tilde{\rho}_k\Delta\tilde{\rho}_k} \sim \frac{p_k}{\tilde{\rho}_k\,(\tilde{x}\sigma_\theta\,|\,F''(p_k)\,|\,)^{1/2}}.$$

Это выражение хорошо согласуется с точной формулой (4.57).

Формулы (4.57) — (4.59) можно также использовать и при расчете $\langle q\rangle$ в окрестности каустики, возникающей в прозрачных ГЛ (см. § 2.3). Сами формулы при этом не меняются, но величину $F''(p_k)$ исходя из (4.32) необходимо определять как

$$F''(p_k) = 3\tilde{x}p_k/x_F a^2.$$

Проведенный анализ позволяет сделать следующие выводы. Во всех точках пространства, удаленных от областей геометрооптических сингулярностей, можно при расчете $\langle q\rangle$ использовать обычные формулы геометрической оптики (угол рассеяния σ_θ, характерный для статистики ГЛ, в эти формулы не войдет). Если же точка наблюдения приближается к фокусу, фокальной полуоси или каустике, то формулы геометрической оптики непосредственно неприменимы. Тем не менее их можно использовать, считая, что удаление от места сингулярности в поперечном направлении $\Delta\tilde{\rho} \sim \tilde{x}\sigma_\theta$ (предполагается, что угол σ_θ намного превосходит угол дифракции ψ_d), и учитывая в каждом конкретном случае размеры и форму эффективной апертуры ГЛ.

В заключение необходимо оценить величину σ_θ, связанную со случайной рефракцией в самой плазменной короне звезды-линзы. Оценочная формула совпадает с той, которая использовалась при анализе рассеяния на неоднородностях межзвездной плазмы:

$$\sigma_\theta^2 \simeq 5\cdot 10^{-27}\,\langle\delta N_e^2\rangle\,\frac{\Delta x}{L_p}\,\lambda^4\ \text{[см]}.$$

Однако входящие в нее параметры имеют иное численное значение. Ориентируясь на данные, относящиеся к солнечной короне на расстояниях $(1 \div 2)\,R_\odot$, можно положить $\Delta x \sim 10^{12}$ см, $\sqrt{\langle\delta N_e^2\rangle} \sim$ $\sim 10^4$ см$^{-3}$, $L_p \sim 10^8_{\text{см}}$, что дает $\sigma_\theta \sim 10^{-7}\lambda^2$ [см].

Рассеяние радиоволн в солнечной короне исследовано экспериментально в широком диапазоне длин волн. Согласно данным наблюдений на прицельных параметрах $(2 \div 3)\,R_\odot$ угол рассеяния составляет примерно $(10 \div 30)'$ на волне $\lambda = 5{,}8$ м. Наша оценка приводит примерно к тем же значениям. Как показывают измерения, по мере удаления от диска Солнца угол рассеяния убывает почти по квадратичному закону пропорционально $(R_\odot/p)^2$, т. е. значительно быстрее, чем угол $\Theta_g(p) = 2r_g/p$. Это означает, что на больших расстояниях от ГЛ случайная рефракция становится меньше регулярной и коэффициент усиления существенно не снижается. Из условия $\sigma_\theta \sim r_g/R_\odot$ можно определить критическую длину волны, ниже которой фокусирующие свойства ГЛ сохраняются и на предельно близких расстояниях. Поскольку $r_g/R_\odot \sim 10^{-6}$, получаем $\lambda_{\text{крит}} \sim$ ~ 3 см. Имеющиеся в настоящее время данные о солнечной короне [117] (спектр размеров неоднородностей, их анизотропия, скорость перемещения) позволяют выполнить расчеты значительно точнее, чем наши качественные оценки. Однако такое уточнение будет иметь практическое значение только тогда, когда появится реальная возможность использовать Солнце в качестве ГЛ. Но это произойдет не раньше, чем появятся космические аппараты, способные проводить измерения на расстоянии порядка 10^{11} км от Земли (напомним, что для Солнца $x_{\min} \simeq 8 \cdot 10^{10}$ км).

§ 4.3. Гравитационная линза в случайно-неоднородной среде

Случайные неоднородности коэффициента преломления могут быть распределены вдоль всей трассы от источника до наблюдателя, а не сосредоточены только в самой ГЛ. Возникает вопрос: можно ли при этом использовать формулы предыдущих параграфов, т. е. приближение статистического фазового экрана, приписав последнему соответствующую всей трассе дисперсию углов преломления σ_θ^2? Вообще, так делать нельзя, но при некоторой перенормировке величины σ_θ^2 концепцию фазового экрана удается все же сохранить.

Для выяснения особенностей ГЛ, расположенной в случайно-неоднородной среде, будем считать, что регулярная рефракция учитывается по-прежнему методом фазового экрана (это допустимо, так как область действия регулярного поля тяготения ГЛ мала по сравнению с расстоянием до источника и наблюдателя), а случайные неоднородности описываются введением добавки $\delta n(\mathbf{r})$ в коэффициент преломления среды:

$$n(\mathbf{r}) \simeq 1 + \delta n(\mathbf{r})$$

(малые отличия регулярной части $\langle n(\mathbf{r})\rangle$ от единицы вне ГЛ не учитываются). Поле в точке наблюдения представляется, как и раньше, в виде интеграла по плоскости фазового экрана $x = 0$ с помощью обобщенного принципа Гюйгенса [118], в котором учитывается влияние $\delta n(\mathbf{r})$ на распространение волны от источника до наблюдателя. Рассматривая общий случай, когда от оси x смещены как источник, так и наблюдатель, получаем

$$u(x, \rho) \simeq \frac{ku_{\text{н}}}{2\pi i\tilde{x}} \exp\{ik(x + x_s + \rho^2/2x + \rho_s^2/2x_s)\} \times$$
$$\times \int\limits_{\Sigma} d\mathbf{p} \exp\left\{i\left[k\left(\frac{p^2}{2\tilde{x}} - \frac{\tilde{\rho} + \tilde{\rho}_s}{\tilde{x}}\mathbf{p}\right) + \langle\mathcal{H}(\mathbf{p})\rangle + \delta\mathcal{H}(\mathbf{p}, \rho)\right]\right\}. \quad (4.60)$$

Здесь $\langle\mathcal{H}(\mathbf{p})\rangle$ характеризует регулярную рефракцию в ГЛ, а $\delta\mathcal{H}(\mathbf{p}, \rho)$ складывается из двух частей: флуктуаций фазы от источника до экрана и от экрана до точки наблюдения:

$$\delta\mathcal{H}(\mathbf{p}, \rho) \simeq k\left[\int\limits_{(-x_s,\rho_s)}^{(0,\mathbf{p})} \delta n(s)\,ds + \int\limits_{(0,\mathbf{p})}^{(x,\rho)} \delta n(s)\,ds\right] \tag{4.61}$$

(интегрирование производится по прямым линиям).

Если бы, следуя старой схеме, мы определили интенсивность $\langle \mathcal{J}(x, \rho)\rangle = \langle u(x, \rho)\, u^*(x, \rho)\rangle$, то после усреднения под интегралом появился бы множитель $\exp\left\{\frac{1}{2} D_H(\mathbf{p}', \mathbf{p}'', \rho)\right\}$, в котором структурная функция флуктуаций фазы D_H зависит не только от координат точек интегрирования на экране, но и от координат источника и наблюдателя. Дополнительная зависимость никаких принципиальных трудностей не вызывает, и все формулы предыдущих параграфов для $\langle \mathcal{J}\rangle$ остаются в силе.

Итак, $\langle \mathcal{J}\rangle$ может рассчитываться уже известным образом, но отличия возникнут, как только мы перейдем к рассмотрению лучевой интенсивности, или, что то же, к анализу изображений, наблюдаемых сквозь ГЛ. Здесь нам потребуется более общая квадратичная характеристика поля — функция взаимной когерентности для поперечного разноса $\Gamma_\perp(x;\ \rho_1, \rho_2)$, определяемая следующим образом:

$$\Gamma_\perp(x;\ \rho_1, \rho_2) \equiv \langle u(x, \rho_1)\, u^*(x, \rho_2)\rangle.$$

Обычно вводят суммарные $\rho = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)$ и разностные $\xi = \rho_1 - \rho_2$ координаты, в которых и рассматривается функция $\Gamma_\perp$:

$$\Gamma_\perp(x;\ \rho, \xi) \equiv \left\langle u\left(x, \rho + \frac{\xi}{2}\right) u^*\left(x, \rho - \frac{\xi}{2}\right)\right\rangle. \tag{4.62}$$

Очевидно, средняя интегральная интенсивность $\langle \mathcal{J}(x, \rho)\rangle$ совпадает с $\Gamma_\perp(x;\ \rho, \xi)$, если в последней положить $\xi = 0$. В то же время $\Gamma_\perp$ позволяет рассчитать и среднюю лучевую интенсивность в точке наблюдения, которая определяется как Фурье-преобразование от $\Gamma_\perp$ по разностной переменной ξ [113]:

$$\langle I(x;\ \rho, \psi)\rangle = \frac{k^2}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Gamma_\perp(x;\ \rho, \xi)\, e^{ik\psi\xi} d\xi, \tag{4.63}$$

где ψ характеризует направление луча, приходящего в точку (x, ρ). Легко убедиться, что, проинтегрировав $\langle I(x;\ \rho, \psi)\rangle$ по всем углам ψ, мы снова получим $\langle \mathcal{J}(x, \rho)\rangle$.

Для того чтобы выяснить отличия в $\langle I\rangle$ между приближением фазового экрана и распределенными вдоль трассы неоднородностями, рассмотрим следующий простой пример. Представим, что регулярная рефракция отсутствует, т. е. $\langle \mathcal{H}(\mathbf{p})\rangle \equiv 0$, а дисперсия σ_θ^2 одна и та же в двух случаях, представленных на рис. 4.5. В первой схеме случайный разброс лучей возникает в очень тонком слое, которому и соответствует статистический фазовый экран (рис. 4.5, *а*), во второй — случайная рефракция происходит вдоль всей трассы (рис. 4.5, *б*). Сравним поля, функции взаимной когерентности, интегральные и

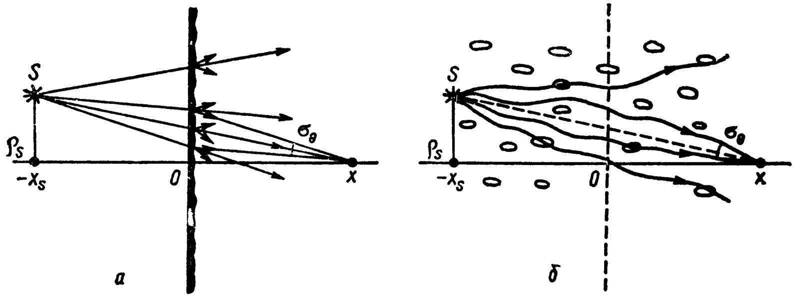


Рис. 4.5. Рассеяние лучей на статистическом фазовом экране (*а*) и в случайно неоднородной среде (*б*)

лучевые интенсивности в точке наблюдения, находящейся на оси x ($\rho = 0$), для двух указанных моделей.

Фазовый экран. Поле в точке наблюдения определяется по формуле (4.60), в которой надо положить $\langle \mathcal{H}(\mathbf{p}) \rangle = 0$ и $\rho = 0$. Рассматривая, как и раньше, случай сильных фазовых флуктуаций, представим интенсивность $\langle \mathcal{I} \rangle$ подобно (4.9) в виде следующего интеграла по экрану:

$$\langle \mathcal{I}(x, 0) \rangle = \frac{u_{\text{н}}^2}{2\pi x^2 \sigma_\theta^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{p} \exp\left\{ -\frac{\left(\mathbf{p} - \frac{\tilde{x}}{x_s} \boldsymbol{\rho}_s\right)^2}{2x^2\sigma_\theta^2} \right\}. \qquad (4.64)$$

В данном случае интеграл может быть взят точно, что дает очевидный результат $\langle \mathcal{I} \rangle = u_{\text{н}}^2$, но нам понадобится в дальнейшем выражение для $\langle \mathcal{I} \rangle$ в форме (4.64). Аналогичным образом вычисляется и функция взаимной когерентности:

$$\Gamma_\perp(x;\ 0, \boldsymbol{\xi}) \simeq u_{\text{н}}^2 \exp\left\{ -\frac{k^2}{2}\left(\frac{\tilde{x}}{x}\right)^2 \sigma_\theta^2 \xi^2 - ik \frac{\boldsymbol{\rho}_s \boldsymbol{\xi}}{x + x_s} \right\}. \qquad (4.65)$$

Далее с помощью (4.63) определяем лучевую интенсивность:

$$\langle I(x;\ 0, \boldsymbol{\psi}) \rangle \simeq \frac{u_{\text{н}}^2}{2\pi (\tilde{x}/x)^2 \sigma_\theta^2} \exp\left\{ -\frac{\left(\boldsymbol{\psi} - \frac{\boldsymbol{\rho}_s}{x + x_s}\right)^2}{2(\tilde{x}/x)^2 \sigma_\theta^2} \right\}. \qquad (4.66)$$

Найденная таким образом лучевая интенсивность $\langle I(x;\ \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\psi}) \rangle$ совпадает с подынтегральной функцией в (4.64), если положить $\mathbf{p} \simeq x\boldsymbol{\psi}$ и перейти от интегрирования по $\mathbf{p}$ к интегрированию по $\boldsymbol{\psi}$. Таким образом, имея выражение для $\langle \mathcal{I} \rangle$ в виде интеграла по экрану, можно найти лучевую интенсивность по подынтегральной функции, не вычисляя функции взаимной когерентности. Именно так мы и поступали, анализируя структуру изображений в начале § 4.2. Формула (4.66) описывает картину, которую можно было бы представить в данном простом случае и без всяких расчетов: экран светится наиболее ярко в точке $\rho = \rho_s \frac{x}{x + x_s}$, т. е. в том месте, где он пересекается прямым лучом, идущим от источника к наблюдателю. Вокруг центра свечения имеется ореол, характерный размер которого (порядка $\tilde{x}\sigma_\theta$) зависит от положения экрана на трассе. Заметим, что мы получили то же соотношение, которое связывает угловые размеры источника Ψ_0 и σ_θ (см. (4.15)).

Случайно-неоднородная среда. Поле в точке наблюдения определяется непосредственно из формулы

$$u(x, \rho) \simeq u_н \exp\left\{i\left[k\left(x + x_s + \frac{(\rho - \rho_s)^2}{2(x + x_s)}\right) + \delta\mathcal{H}(\rho)\right]\right\}. \quad (4.67)$$

Отсюда следуют выражения для $\Gamma_\perp$, интегральной и лучевой интенсивностей:

$$\Gamma_\perp(x;\ 0, \zeta) \simeq u_н^2 \exp\left\{-\frac{k^2}{2}\sigma_\theta^2\zeta^2 - ik\frac{\rho_s\xi}{x + x_s}\right\}, \quad (4.68)$$

$$\langle\mathcal{I}(x, 0)\rangle \equiv \Gamma_\perp(x;\ 0, 0) \simeq u_н^2,$$

$$\langle I(x;\ 0, \psi)\rangle \simeq \frac{u_н^2}{2\pi\sigma_\theta^2}\exp\left\{-\frac{\left(\psi - \frac{\rho_s}{x + x_s}\right)^2}{2\sigma_\theta^2}\right\}. \quad (4.69)$$

Для того чтобы произвести сравнения с предыдущей моделью, введем воображаемый фазовый экран и используем принцип Гюйгенса, согласно которому

$$u(x, 0) \simeq \frac{ku_н}{2\pi i x x_s} e^{ik(x + x_s + \rho_s^2/2x_s)} \int_{-\infty}^{\infty} dp \exp\left\{i\left[k\left(\frac{p^2}{2\tilde{x}} - \frac{p\rho_s}{x_s}\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \delta\mathcal{H}(p, \rho, x, x_s)\right]\right\}. \quad (4.70)$$

Далее находим

$$\langle\mathcal{I}(x, 0)\rangle \simeq \frac{u_н^2}{2\pi\tilde{x}^2\sigma_\theta^2}\int_{-\infty}^{\infty} dp \exp\left\{-\frac{\left(p - \frac{\tilde{x}}{x_s}\rho_s\right)^2}{2\tilde{x}^2\sigma_\theta^2}\right\}. \quad (4.71)$$

Если выполнить интегрирование в (4.71), получится тот же результат $\langle\mathcal{I}\rangle = u_н^2$. Легко также убедиться, что расчеты $\Gamma_\perp$ и $\langle I\rangle$ с помощью (4.70) совпадают, как и должно быть, с теми выражениями, которые приведены выше. В рассматриваемом примере (отсутствие регулярной рефракции) можно и не вводить воображаемый фазовый экран, так как проще исходить из формулы (4.67). В более сложном случае фазовый экран приходится вводить для учета регулярной рефракции в ГЛ, что приведет к формуле, подобной (4.71) (см. (4.9)). Но подынтегральное выражение в (4.71) не описывает углового распределения интенсивности, в отличие от того, как это получалось в предыдущей модели. Действительно, хотя формулы (4.64) и (4.71) совпадают,

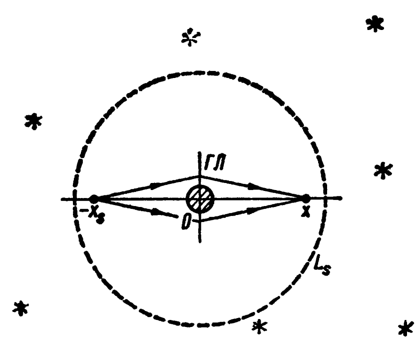


Рис. 4.6. Гравитационная линза в окружении окрестных звезд

формулы для лучевых интенсивностей (4.66) и (4.69) оказываются разными.

Поэтому, если мы хотим получить правильное выражение для лучевой интенсивности в неоднородной среде, исходя из подынтегральной функции в принципе Гюйгенса для интенсивности, то в подынтегральном выражении надо заменить σ_θ^2 на $\sigma_\theta^2\,(x/\tilde{x})^2 = \sigma_\theta^2\left(\frac{x + x_s}{x_s}\right)^2$. Это правило можно распространить и на фазовый экран с регулярной рефракцией, т. е. на ГЛ в случайно-неоднородной среде, хотя рассматривать приведенный пример в качестве строгого доказательства, разумеется, нельзя. Заметим, что указанная перенормировка σ_θ^2 не имеет большого значения на практике, так как погрешности в расчете σ_θ^2, как правило, значительно превышают поправочный множитель $(x + x_s)/x_s$. Поэтому анализ структуры изображений в ГЛ, расположенной в случайно-неоднородной среде, можно производить упрощенным способом, не вычисляя $\Gamma_\perp$, а исходя только из принципа Гюйгенса для интенсивностей.

Нам остается рассмотреть вопрос о вычислении σ_θ^2. Так же, как и раньше, следует учесть в отдельности влияние плазменных неоднородностей межзвездной среды и гравитационных полей окрестных звезд. Что касается той части σ_θ^2, которая связана с плазмой ($\sigma_{\theta p}^2$), то формулы (4.41) остаются в силе, за исключением численного коэффициента, который необходимо уменьшить в три раза [113]. Эта перенормировка связана только с тем, что формулы (4.41) выведены для плоской волны, а мы рассматриваем в данном случае сферическую волну Приближение плоской волны приемлемо, когда случайные неоднородности сосредоточены в ограниченном объеме ГЛ, а когда они распределены вдоль всей трассы, такое упрощение уже не допускается.

Случайная рефракция в гравитационных полях окрестных звезд ($\sigma_{\theta s}^2$) рассчитывается несколько иначе, хотя исходное выражение для потенциала $\Phi(\mathbf{r}) = -G\sum_{j=1}^{N_G}\frac{M_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}$ остается в силе. Отличия связаны с тем, что в предыдущем параграфе $\Phi(\mathbf{r})$ можно было разложить по степеням r_j/r (рассматривались лучи, проходящие вдали от области сосредоточения гравитирующих масс), а в нашем случае соотношение обратное: $r/r_j \ll 1$ (мы рассматриваем случай, когда вся трасса расположена внутри галактики, вдали от ее границ). Выделив из общего числа звезд ту, которая играет роль ГЛ (рис. 4.6), представим коэффициент преломления среды, связанный с гравитационными полями всех звезд, кроме ГЛ, в виде

$$n_g(\mathbf{r}) \simeq 1 + \sum_{j=1}^{N_G-1} \left[\frac{r_{gj}}{r_j} + r_{gj} \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}_j}{r_j^3} \right].$$

Слагаемое $\sum_j (r_{gj}/r_j)$ по порядку величины равно r_g/R_G, что намного меньше единицы (величины r_g, R_G относятся ко всей галактике) и, что самое главное, не зависит от $\mathbf{r}$. Следовательно, оно создает постоянный фон, приводящий к небольшим отличиям $\langle n_g(\mathbf{r}) \rangle$ от единицы, которым мы будем пренебрегать[29]. Таким образом, флуктуационная добавка $\delta n_g(\mathbf{r}) \simeq \sum_j r_{gj} (\mathbf{r}\mathbf{r}_j/r_j^3)$, а случайная разность фаз $\delta\mathcal{H}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho})$ согласно (4.61) определяется как

$$\delta\mathcal{H}(\mathbf{p}, \xi, \zeta) \simeq \frac{k}{2} \sum_{j=1}^{N_G-1} r_{gj} \frac{\mathbf{p}_j}{r_j^3} [(x + x_s)\xi + x\zeta], \qquad (4.72)$$

где ξ и ζ — разностные переменные: $\zeta = \rho_1 - \rho_2$, $\xi = \mathbf{p}' - \mathbf{p}''$. Считая массы звезд и их координаты независимыми случайными величинами, находим следующее выражение для структурной функции фазы:

$$D_H(\xi, \zeta) \simeq \frac{k^2}{4} N_G \langle r_{gs}^2 \rangle \left\langle \left[\frac{(x + x_s)\xi\mathbf{p}_j - x\zeta\mathbf{p}_j}{r_j^3} \right]^2 \right\rangle. \qquad (4.73)$$

Результат усреднения величины, стоящий в квадратных скобках, зависит, вообще, от того, в каком месте галактики (ближе к центру, или к периферии) расположена трасса источник — ГЛ — наблюдатель. Мы будем считать для простоты, что она находится в окрестности центра и все звезды расположены вне сферы радиуса L_s вокруг звезды-линзы (см. рис. 4.6). Тогда формулу (4.73) можно представить в виде

$$D_H(\xi, \zeta) \simeq k^2 \sigma_{\theta s}^2 \left(\xi + \frac{x}{x + x_s} \zeta \right)^2, \qquad (4.74)$$

где $\sigma_{\theta s}^2 = \frac{\pi}{3} \langle r_{gs}^2 \rangle \frac{\delta_s}{L_s} (x + x_s)^2$ — дисперсия углов гравитационного рассеяния ($\delta_s = 3N_G/4\pi R_G^3$ — средняя плотность звезд в галактике). Видно, что $\sigma_{\theta s}^2$ зависит только от одной геометрической характеристики L_s. Поэтому можно предполагать, что при таких отклонениях ГЛ от центра галактики, при которых расстояния до границы значительно превышают L_s, формула (4.74) также применима. Численные оценки показывают, что значение $\sigma_{\theta s}^2$ очень мало. Действительно, полагая $\langle r_{gs}^2 \rangle \sim 1$ км^2, $L_s \sim 10^{14}$ км, $x + x_s \sim 10^{14}$ км, $\delta_s \sim 10^{-2}$ пк$^{-3}$, получаем $\sigma_{\theta s} \sim 10^{-14}$.

---

[29] Отличие $\langle n_g(\mathbf{r}) \rangle$ от единицы играет основную роль, при фокусировке излучения всей галактикой в целом, но в данном случае речь идет всего лишь о межзвездных расстояниях.

§ 4.4. Численное моделирование. Микролинзы в линзах-галактиках

Приведенные выше статистические оценки позволяют рассчитать средний коэффициент усиления ГЛ и усредненную структуру изображений источника. Однако в астрономических наблюдениях приходится иметь дело не со статистическими средними, а с отдельными реализациями случайного процесса. Возникает вопрос: в какой мере сопоставимы расчетные и экспериментальные данные? Такое сопоставление допустимо, если стандартное отклонение наблюдаемой величины мало́ по сравнению с ее средним значением. По-видимому, это условие во многих случаях выполняется. Наглядную картину такой ситуации при описании структуры изображений можно представить следующим образом.

Усредненное изображение точечного источника, наблюдаемого сквозь случайно-неоднородную ГЛ, образует размытое пятно, центр которого совпадает с невозмущенным изображением. а угловой размер характеризуется углом рассеяния σ_θ. Если же рассматривать отдельные реализации ГЛ (например, какое-то случайное положение звезд в галактике), то всякий раз будет наблюдаться множество точечных изображений, которые с наибольшей вероятностью группируются в пределах указанного выше пятна. Коэффициент усиления каждого микроизображения меняется от одной реализации к другой самым причудливым образом, но суммарный (по всем изображениям в данной реализации) коэффициент усиления мало отличается от рассчитанного выше $\langle q \rangle$.

Тем не менее заранее нельзя сказать, не выпадают ли из результатов, полученных путем аналитических вычислений статистических характеристик, какие-то особенности, которые могут быть обнаружены при наблюдениях. В частности, рассматривая линзу-галактику (далее будем называть ее макролинзой) в виде сглаженного непрерывного распределения массы (§ 2.3, 2.5), мы получили идеализированную картину наблюдаемых изображений источника. Однако вскоре после открытия первой ГЛ в 1979 г. [119] стало ясно, что для интерпретации наблюдений необходимо наряду с макролинзой учесть действие и так называемых микролинз.

Под микролинзами подразумеваются отдельные звезды (или звездные скопления небольшого радиуса) внутри галактики. До тех пор пока они не попадают на луч зрения, их влияние допустимо учитывать, усредняя соответствующие возмущения по всему объему макролинзы, как и делалось выше. Но небольшое число микролинз в непосредственной близости от макроизображения может привести отнюдь не к малым изменениям в наблюдаемой картине.

Впервые на роль микролинз было указано, по-видимому, в работе [120]. С тех пор микрофокусировка остается в поле зрения многих авторов [121—130], которым удалось объяснить ряд особенностей наблюдаемых ГЛ и предсказать еще необнаруженные эффекты.

Понятно, что нет никаких возможностей произвести аналитические расчеты преломления лучей в полях огромного числа звезд, даже если считать известными их координаты в галактике. О возникающих при этом трудностях говорит сложность вычислений для ГЛ, состоящей всего лишь из двух звезд [54]. В такого ряда задачах главная роль принадлежит численным расчетам с помощью быстродействующих ЭВМ [126, 128, 131].

Схема вычислений достаточно проста. Используя приближение геометрической оптики, можно определить траектории лучей путем решения уравнения (2.78). Угол преломления Θ_g (p) представляется в виде суммы двух слагаемых: $\Theta_g(\mathbf{p}) = \Theta_g^{(G)} + \Theta_g^{(s)}$ (где индекс G относится к гравитационному полю вещества, распределенного по всей галактике (макролинза), а s — к звездам или компактным скоплениям (микролинзы)).

Угол $\Theta_g^{(G)}$ может быть выражен через поверхностную плотность массы $\sigma^{(G)}(\mathbf{p})$ (см. (2.34) и (2.77)), а $\Theta_g^{(s)} = 2\sum\limits_{j=1}^{N_G} r_{gj}\dfrac{\mathbf{p}_j - \mathbf{p}}{|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}|^2}$ (N_G — число звезд в галактике, $\mathbf{p}_j$, r_{gj} — координаты микролинз и их гравитационные радиусы).

Задавая параметры макролинзы, т. е. вектор-функцию $\Theta_g^{(G)}(\mathbf{p})$ и случайное распределение микролинз, характеризуемое величинами r_{gj}, $\mathbf{p}_j$, можно численно определить все параметры ГЛ[30], которые ранее рассчитывались аналитически.

Прежде чем описать полученные таким образом результаты, покажем, что даже одна единственная микролинза может существенно повлиять на работу макролинзы-галактики. Упростим задачу, считая, что макролинза хорошо описывается сферически симметричной моделью (например, моделью Кинга), характеризуемой поверхностной плотностью $\sigma^{(G)}(p)$. Далее предположим, что прямо в центр ($p = 0$) проектируется звезда-микролинза. Из проведенного в § 2.3 анализа структуры изображений, создаваемых одной макролинзой (без звезды), ясно, что микролинза может повлиять на фокусировку только в том случае, если она окажется вблизи одного из макроизображений. С наибольшей вероятностью им является «внутреннее» изображение p_3, которое при малых смещениях источника всегда расположено вблизи центра ГЛ. В § 2.3 показано, что при анализе свойств этого изображения для угла $\Theta_g^{(G)}$ (p) можно использовать приближенную формулу

$$\Theta_g^{(G)}(\mathbf{p}) = -\frac{\mathbf{p}}{x_F}, \tag{4.75}$$

справедливую при малых значениях p. Центральная часть прозрачной ГЛ действует точно так же, как и обычная линза с фокусным расстоянием

$$x_F = \frac{c^2}{4\pi G\sigma_0^{(G)}}, \tag{4.76}$$

[30] Более строго, параметры ГЛ зависят и от продольных координат x_j звезд внутри ГЛ. Используемое выше выражение для угла справедливо при пренебрежении эффектом «перекрытия» одних звезд другими, а это возможно в том случае, когда средняя поверхностная плотность звезд не очень велика.

где $\sigma_0^{(G)} = \mathrm{const}$ — поверхностная плотность массы центральной части макролинзы.

Если бы мы в качестве модели макролинзы выбрали однородный гравитирующий диск (см. § 2.3), то зависимость (4.75) оставалась бы справедливой для всех внутренних прицельных параметров $0 \leqslant p \leqslant R_G$. При неограниченном увеличении радиуса диска ($R_G \to \infty$) все лучи становятся внутренними и, казалось бы, формулы (4.75), (4.76) можно использовать при любых прицельных параметрах. Таким образом, осуществляется предельный переход от диска конечных размеров к бесконечному плоскому слою с сохранением его фокусирующих свойств. Это утверждение встречается во многих публикациях и уже закрепилось в литературе, тем не менее оно оказывается неверным. Ошибка заключается в том, что все приведенные выше формулы для углов преломления справедливы на достаточно больших расстояниях от ГЛ, когда траектории лучей сливаются с их прямолинейными асимптотами. Для бесконечного же слоя любые конечные расстояния x оказываются малыми, а источник и наблюдатель расположены внутри гравитационного поля, которое на бесконечности не убывает. В таких условиях об асимптотах лучей не может быть и речи, поскольку сами траектории являются не гиперболами, а параболами (см. § 1.3). Следовательно, бесконечно протяженный плоский слой не может играть роль ГЛ, а формулы (4.75), (4.76) справедливы при дополнительном ограничении на радиус диска $R \ll x$.

Интересно заметить, что гравитирующая плоскость обладает свойствами рефракционного волновода: траектории лучей образуют семейство парабол, сосредоточенных в слое конечной толщины вдоль плоскости.

Вторая составляющая угла преломления $\boldsymbol{\Theta}_g^{(s)}$ определяется обычной формулой для точечной ГЛ:

$$\boldsymbol{\Theta}_g^{(s)}(\mathbf{p}) = -\frac{2r_{gs}}{p^2}\mathbf{p}. \tag{4.77}$$

Подставив найденное суммарное значение $\boldsymbol{\Theta}_g(\mathbf{p})$ в аберрационное уравнение (2.78), получим

$$\tilde{\boldsymbol{\rho}}_s = \mathbf{p} + \tilde{x}\boldsymbol{\Theta}_g(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\left[1 - \tilde{x}\left(\frac{2r_{gs}}{p^2} + \frac{1}{x_F}\right)\right]. \tag{4.78}$$

Решая (4.78) относительно $\mathbf{p}$, находим координаты двух изображений в плоскости ГЛ:

$$\mathbf{p}_{1,2}(\boldsymbol{\rho}_s) = \frac{\tilde{\boldsymbol{\rho}}_s}{(1 - \tilde{x}/x_F)}\left[\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2r_{gs}\tilde{x}\,(1 - \tilde{x}/x_F)}{\tilde{\rho}_s^2}}\right]. \tag{4.79}$$

Эта формула обобщает полученные ранее соотношения (2.12), (2.13) и указывает на одну неожиданную возможность, которая отсутствует, если рассматривать в отдельности галактику ($r_{gs} = 0$) или звезду ($x_F = \infty$). Дело в том, что при достаточно малых значениях x_F подкоренное выражение может стать отрицательным, тогда уравнение (4.78) не будет иметь действительных решений. Это означает, что в точку наблюдения лучи не попадают, изображение источника исчезает [122], а коэффициент усиления ГЛ становится равным нулю. Такая ситуация возможна только тогда, когда $1 - \tilde{x}/x_F < 0$. Отсюда вытекает условие на поверхностную плотность массы:

$$\sigma_0^{(G)} > \frac{c^2}{4\pi G\tilde{x}}.$$

Величина, стоящая в правой части этого неравенства, называется критической плотностью

$$\sigma_{\text{кр}}^{(G)} = \frac{c^2}{4\pi G\tilde{x}}. \tag{4.80}$$

Заметим, что согласно (4.76) условие $\sigma_0^{(G)} = \sigma_{\text{кр}}^{(G)}$ эквивалентно равенству $\tilde{x} = x_F$, или с учетом определения $\tilde{x} = \dfrac{xx_s}{x + x_s}$ такому условию:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x_s} = \frac{1}{x_F}.$$

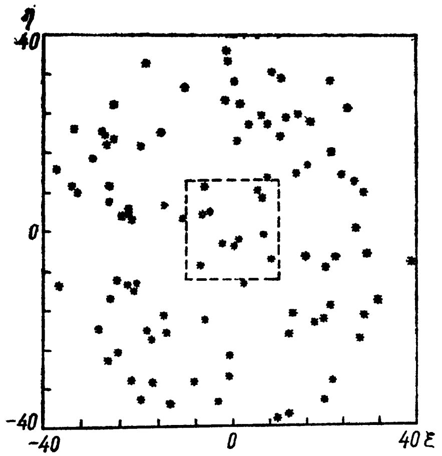
Следовательно, при критической плотности вещества изображение источника проектируется в точку расположения наблюдателя. Если $\sigma_0^{(G)} < \sigma_{\text{кр}}^{(G)}$, свойства комбинации макролинза плюс микролинза мало отличаются от обычной точечной ГЛ. В частности, при $\rho_s = 0$ (источник находится точно за звездой) возникает знакомое нам кольцевое изображение, но несколько большего радиуса:

$$\tilde{l}^* = \frac{\tilde{l}}{\sqrt{1 - \tilde{x}/x_F}}, \quad \tilde{l} = \sqrt{2r_{gs}\tilde{x}}. \tag{4.81}$$

Если же $\sigma_0^{(G)} > \sigma_{\text{кр}}^{(G)}$, свойства ГЛ радикально меняются. При некоторых положениях источника, когда $\tilde{\rho} < 2\tilde{l}\,(\tilde{x}/x_F - 1)^{1/2}$, он становится невидимым, а при $\tilde{\rho}_s > 2\tilde{l}\,(\tilde{x}/x_F - 1)^{1/2}$ наблюдаются два изображения по одну сторону от центра. Граничная окружность $\tilde{\rho}_s = 2\tilde{l}\,(\tilde{x}/x_F - 1)^{1/2}$ соответствует двойному корню уравнения (4.78) и представляет собой каустическую кривую в плоскости источника. На этой кривой коэффициент усиления q, рассчитанный по формуле (2.82), бесконечно возрастает.

Если источник перемещается по некоторой траектории, пересекающей критическую кривую, коэффициент усиления меняется от конечных значений (при больших $\tilde{\rho}_s$) к бесконечности (на каустике), а внутри кривой обращается в нуль.

Может показаться, что возникает противоречие с выводами § 2.1, где было показано, что коэффициент усиления $q > 1$ на всей плоскости наблюдения, или, что то же, при любом положении источника. Однако в § 2.1 рассматривалась точечная ГЛ, здесь же идет речь о более сложной комбинированной системе. Ослабление интенсивности при некоторых положениях источника компенсируется ее возрастанием



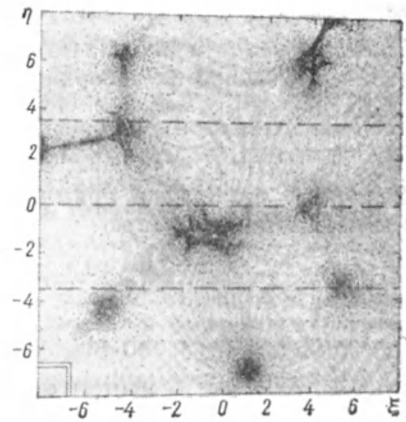
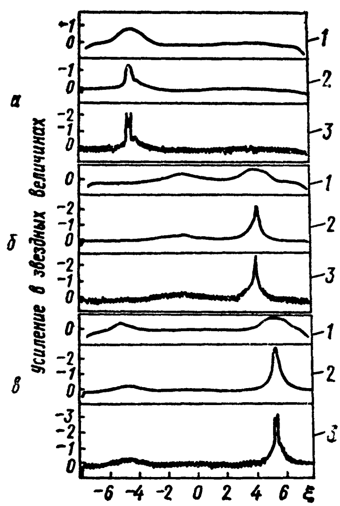


Рис. 4.7. Случайное расположение 100 звезд в плоскости ГЛ (штриховым квадратом выделена центральная часть, в пределах которой перемещается проекция источника при расчетах; масштаб в единицах $\tilde{l}^*$)

Рис. 4.8. Интенсивность в точке наблюдения в зависимости от положения источника при $\sigma = 0{,}1$ (квадрат в нижнем левом углу соответствует сглаженному распределению массы в ГЛ, когда микролинзы отсутствуют)



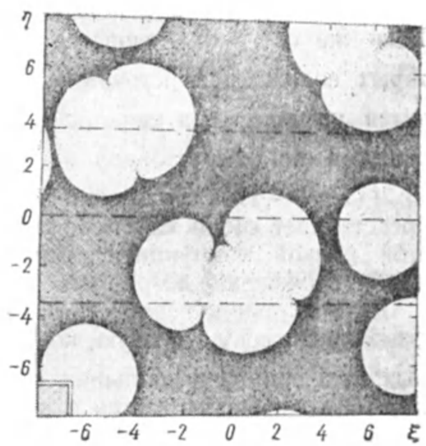


Рис. 4.9. Изменения интенсивности при перемещении источников разных размеров вдоль штриховых прямых, показанных на рис. 4.8:

$\sigma = 0{,}1$; *а, б* и *в* — верхняя, средняя и нижняя трассы соответственно (радиусы источников в единицах $\tilde{l}^*$: 0,9 (*1*); 0,1 (*2*); 0,01 (*3*)

Рис. 4.10. То же, что и на рис. 4.8, $\sigma = -0{,}1$

в других местах таким образом, что в целом поток излучения, проинтегрированный по всем положениям источника или по плоскости наблюдения, сохраняется. Точнее: интегральный поток через плоскость наблюдения несколько возрастает, а сохраняется поток через любую замкнутую поверхность, охватывающую источник.

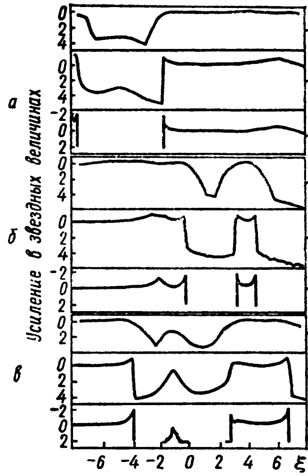


Рис. 4.11. То же, что и на рис. 4.9, $\sigma = -0,1$ (траектории перемещения источника показаны на рис. 4.10)

Локальные ослабления интенсивности возникают и при наличии большого числа микролинз в макролинзе, что хорошо прослеживается в численном моделировании (см. рис. 4.7—4.11, взятые из работы [128]). Авторы в [128] рассчитали траектории лучей, проходящих через поле случайно расположенных 100 звезд (рис. 4.7) на фоне непрерывного распределения гравитирующей массы в модели макролинзы — однородный гравитирующий диск. Поверхностные плотности распределенной массы галактики и массы, сосредоточенной в звездах, нормируются на критическую плотность (4.80) и характеризуются безразмерными величинами $\sigma_G = \sigma^{(G)}/\sigma^{(G)}_{кр}$ и $\sigma_s = \sigma^{(s)}/\sigma^{(G)}_{кр}$. В окончательные формулы входит некоторая комбинация этих величин

$$\sigma = \frac{\sigma_s}{1 - \sigma_G},$$

которая и является основным параметром при вычислениях. Рис. 4.8 соответствует докритической плотности $\sigma^{(G)}$ и такой плотности звезд $\sigma^{(s)}$, при которой $\sigma = 0,1$. С помощью ЭВМ были прослежены траектории большого числа лучей (до $2,5 \cdot 10^7$). Густота точек пересечения лучей с плоскостью рисунка наглядно характеризует коэффициент усиления ГЛ. Кроме того, коэффициент усиления вычислялся по формуле, подобной (2.82), и рассчитывались кривые изменения усиления в зависимости от положения источника (рис. 4.9). Рис. 4.10 и 4.11 соответствуют сверхкритической плотности $\sigma^{(G)}$. Параметр σ в этом случае оказывается отрицательным ($\sigma = -0,1$). Хорошо заметны «провалы» коэффициента усиления в тех случаях, когда источник попадает внутрь критической кривой. Бесконечные значения усиления на границах устраняются благодаря тому, что рассматривается источник конечных размеров. Видно, что с увеличением радиуса источника скачки коэффициента усиления все более сглаживаются. Координаты по осям y и z даны в безразмерных величинах: $\xi = y/\tilde{l}^*$ и $\eta = z/\tilde{l}^*$ (при $\sigma_0^{(G)} > \sigma_{кр}^{(G)}$ величина $(1 - \tilde{x}/x_F)^{1/2}$ заменяется на $|1 - \tilde{x}/x_F|^{1/2}$). Коэффициент усиления выражен в звездных величинах m по отношению к интенсивности $\mathcal{J}_G$, создаваемой макролинзой без микролинз: $\delta m = -2,5 \lg (\mathcal{J}/\mathcal{J}_G)$.

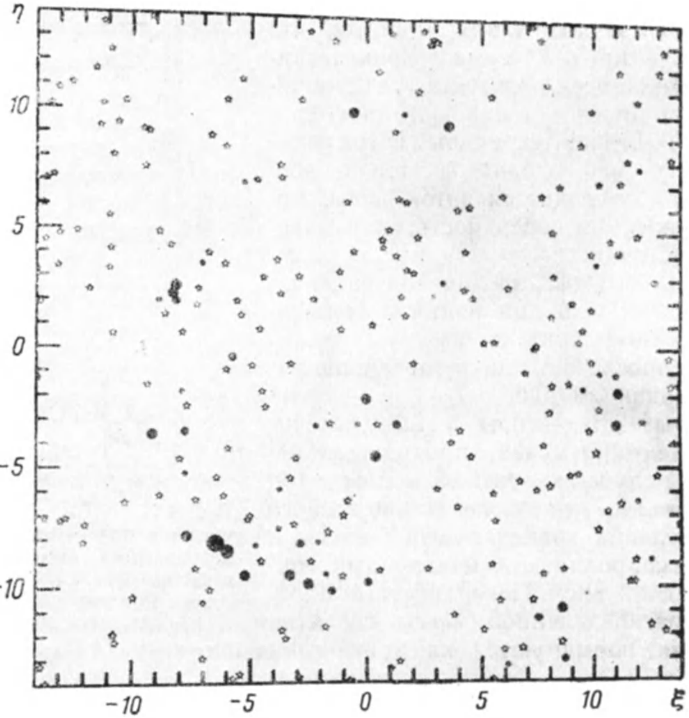
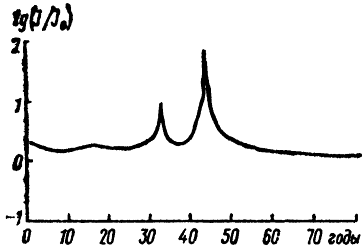


Рис. 4.12. Микроизображения (черные кружочки) для одной из реализаций случайного распределения звезд (масштаб по осям в единицах $\tilde{l}^*$)

От кривых, характеризующих пространственные изменения усиления, легко перейти к временной зависимости интенсивности в точке наблюдения, т. е. экспериментально измеряемой величине. Для этого необходимо знать относительную скорость перемещения луча в плоскости ГЛ. Вопрос о том, какие именно движения играют основную роль во временных флуктуациях, подробно проанализирован в работе [128]. В ней рассмотрена только одна реализация случайного распределения звезд, но большое количество графиков и диаграмм (их в статье свыше 50) позволяет проследить изменения структуры изображений и коэффициента усиления при различных сочетаниях параметров макро- и микролинз, а также при разных размерах источника.

Для определения статистических характеристик ГЛ необходимо рассматривать не одно, а множество случайных распределений микролинз. Такие расчеты выполнены в [126], где взято пуассоновское распределение координат одинаковых по массе звезд в плоскости ГЛ. Соотношение распределенной массы галактики и массы звезд по-прежнему характеризуется безразмерным параметром σ, который принимает одно из 10 значений в интервале [—10, 10]. Число звезд



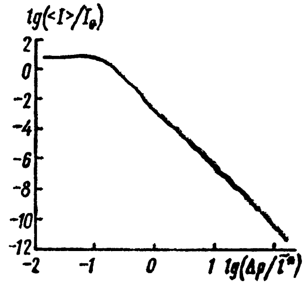


Рис. 4.13. Вариации светимости точечного источника, сфокусированного слоем случайно расположенных звезд с $M = 0{,}5M_\odot$ каждая и $\sigma = 0{,}4$ (все расстояния соответствуют самой близкой из обнаруженных ГЛ)

Рис. 4.14. Средняя поверхностная яркость рассеянного излучения точечного источника на различных расстояниях от центра светящегося ореола (масса случайно расположенных звезд порядка $1M_\odot$ каждая, $\sigma = 0{,}01$

для различных сочетаний параметров несколько менялось, но всегда было достаточно большим (примерно 200), а число реализаций — около 50 000. Кроме того, в расчетах учитывалось движение звезд, что позволило проследить изменения наблюдаемой интенсивности источника во времени.

На рис. 4.12, взятом из работы [126], показаны микроизображения для одной из реализаций случайного распределения звезд. Положения микролинз отмечены звездочками. Если бы микролинз не было, то наблюдалось бы одно изображение источника в центре квадрата. Видно, что микролинзы расщепляют макроизображение на множество компонентов, самые яркие из которых указаны черными кружками (чем ярче изображение, тем больше диаметр кружка). Перепад яркости очень велик, и самые маленькие кружки соответствуют интенсивности, примерно в 100 раз меньшей, чем большие. Число изображений близко к числу звезд, но многие из них столь слабые, что на рис. 4.12 не отмечены вовсе. Линейный масштаб по осям y и z выражен в тех же единицах длины $\tilde{l}^*$, о которых речь шла выше. Для звезд с массой порядка $M_\odot$ на космологических расстояниях этой единице длины соответствует угол $1'' \cdot 10^{-6}$. Современная техника не позволяет разрешить столь близкие изображения, и действие микролинз обнаруживается по их влиянию на полную интенсивность в точке наблюдения. На рис. 4.13 [126] показана одна из расчетных кривых, построенная для гауссова распределения скоростей звезд со среднеквадратичным значением $v_\perp \sim 200$ км/с ($v_\perp$ — составляющая скорости, перпендикулярная лучу зрения). Если определить характерный промежуток времени изменения интенсивности Δt как отношение $\tilde{l}^*/v_\perp$, то для звезды с $M \sim 0{,}5M_\odot$ и наиболее близкой из известных ГЛ [132] получим $\Delta t \sim 16$ лет ($\tilde{x} \sim 3{,}6 \cdot 10^{26}$ см при $H_0 = 100$ км $\cdot$ с$^{-1}$ Мпк$^{-1}$, $v_\perp \sim 200$ км $\cdot$ с$^{-1}$, $\sigma_G = 0$). Из рис. 4.13 видно, что наряду с медленными изменениями в масштабе десятков лет, могут наблюдаться и кратковременные вспышки интенсивности. Этот вопрос рассмотрен также в работе [128], где возможная скорость изменения интенсивности для типичного квазара оценивается примерно в одну звездную величину в неделю.

Статистические характеристики представлены в работе [126] в виде гистограмм интенсивности для различных значений σ и кривых, показывающих изменение средней поверхностной яркости в зависимости от расстояния до макроизображения. Одна из таких кривых показана на рис. 4.14, где по горизонтальной оси в логарифмическом масштабе отложено безразмерное расстояние (в тех же единицах $\tilde{l}^*$), а по вертикальной — $\log (\langle I \rangle / I_G)$. Видно, что основная интенсивность сосредоточена в пределах круга радиуса $\tilde{l}^*$ (или угла порядка $1'' \cdot 10^{-6}$). Этот результат можно сравнить с оценками § 4.2 для угловых размеров того пятна, в которое трансформируется усредненное изображение точечного источника за счет рассеяния на гравитационных полях отдельных звезд. Согласно формуле (4.40) характерный угловой размер изображения примерно 10^{-11} рад, или $2'' \cdot 10^{-6}$, что хорошо согласуется с результатами численных расчетов.

Глава 5

НАБЛЮДЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ ЛИНЗ

§ 5.1. Вероятность обнаружения линзового эффекта

Число обнаруженных ГЛ пока что не очень велико, но нужно помнить, что история их наблюдений только начинается. После открытия первой ГЛ в 1979 г. начались целенаправленные поиски эффектов гравитационной фокусировки, и сразу же были обнаружены новые ГЛ. Установился довольно высокий темп их открытия — примерно по одной линзе в год. К настоящему времени (1987 г.) известно уже девять объектов, интерпретируемых как источники, изображения которых деформированы (расщеплены) гравитационными полями галактик, лежащих на том же луче зрения, но гораздо ближе к Земле.

С момента открытия ГЛ число посвященных им публикаций стало быстро расти, причем центр тяжести теоретических исследований постепенно переместился от изучения общих свойств гравитационной фокусировки к анализу результатов наблюдений и их астрофизическим приложениям. В этой связи возникает задача о вероятности обнаружения ГЛ в рамках определенных космологических моделей.

В самой общей постановке задача о наблюдении эффектов гравитационной фокусировки может быть сформулирована следующим образом. Излучение далеких источников доходит до нас сквозь гравитационные поля более близких объектов. Чем дальше расположены излучатели, тем с большей вероятностью их наблюдаемые характеристики отличаются от истинных. Спрашивается, как изменился бы видимый с Земли образ Вселенной (Метагалактики), если бы электромагнитные волны не испытывали влияния гравитационных полей? Или, что то же, как учесть влияние гравитационных полей на проходящее сквозь них излучение, чтобы восстановить истинные параметры источников?

Во всех обнаруженных пока ГЛ наблюдаются весьма удаленные объекты, как правило,— квазары. Поэтому сразу же возникает вопрос о космологических моделях, в рамках которых будут проводиться расчеты. Следуя работе Я. Б. Зельдовича [133], остановимся на фридмановских моделях изотропной однородной Вселенной, которые отличаются друг от друга средней плотностью вещества: $\Omega = \delta/\delta_k$ ($\delta_k = 3H_0^2/8\pi G$ — критическая плотность, $H_0 \sim 100$ км $\times$ $\times$ с$^{-1}$ · Мпк$^{-1}$ — постоянная Хаббла). Вообще, предположение о строго однородном распределении материи исключает возможность существования ГЛ (а заодно и Солнца, и Земли, и наблюдателя!). Однако, как ни парадоксально прозвучит следующее утверждение, но линзовый эффект может наблюдаться и без ГЛ! Он будет проявляться в своеобразной зависимости углового размера предмета от расстояния. Пока речь идет о сравнительно небольших расстояниях x, на которых искривление пространства веществом, заполняющим Вселенную, еще не проявляется, угол Ψ и линейные размеры предмета L связаны обычным соотношением:

$$\Psi \simeq L/x. \tag{5.1}$$

На космологических расстояниях удаление объекта характеризуется его красным смещением $Z = (\lambda - \lambda_0)/\lambda_0$, где λ_0 и λ — длины волн излучения, испускаемого источником и измеренного наблюдателем. При малых Z имеют место соотношения $x \simeq Zc/H_0$ и $\Psi \simeq LH_0/cZ$. Обратное значение Ψ в этой области расстояний просто пропорционально Z:

$$\Psi^{-1}(Z) \simeq \frac{c}{LH_0} Z. \tag{5.2}$$

По мере возрастания Z линейная связь (5.2) переходит в более сложную зависимость

$$\Psi^{-1}(Z) = \frac{c}{H_0 L} f(Z), \tag{5.3}$$

и соотношение (5.2) уже не выполняется.

Но изменение угловых размеров предмета можно рассматривать как проявление линзового эффекта, обусловленного действием гравитационного поля вещества, заполняющего Вселенную. Таким образом, к ранее рассмотренным ГЛ (звезды, галактики, скопления галактик) добавляется еще одна линза — вся Вселенная в целом!

Конкретный вид функции $f(Z)$ в (5.3) зависит от относительной средней плотности материи Ω. В цитируемой работе [133], а также в книге [135] приводятся вычисления $f(Z)$ для почти «пустой» Вселенной ($\Omega \to 0$), для критической плотности ($\Omega = 1$) и еще для одной ситуации, о которой будет сказано ниже [31]. Результаты расчетов таковы [32]:

$$f_1(Z) = \frac{Z(2+Z)}{2(1+Z)^2} \quad (\Omega \to 0), \tag{5.4}$$

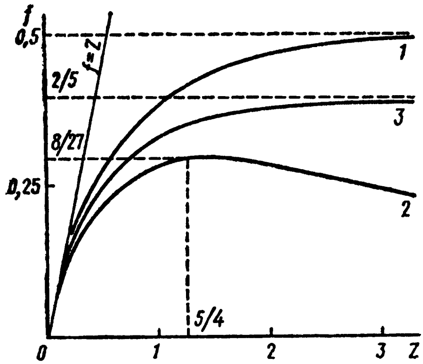
$$f_2(Z) = \frac{[2(1+Z)^{1/2} - 1]}{(1+Z)^{3/2}} \quad (\Omega = 1). \tag{5.5}$$

На рис. 5.1 приведены графики $f_1(Z)$ и $f_2(Z)$. Видно, что $f_1(Z)$ монотонно возрастает, приближаясь асимптотически к $1/2$. Совсем иначе

---

[31] Случаи $\Omega > 1$ и $\Omega < 1$ были рассмотрены позже в работе В. М. Дашевского и Я. Б. Зельдовича [136].

[32] Обращаем внимание, что в работе [133] используется иное определение красного смещения, а именно: $\Delta = (\lambda - \lambda_0)/\lambda$. Поэтому при сравнении приведенных здесь и далее формул с теми, которые получены в работе [133], надо учесть, что $\Delta = Z/(1 + Z)$, а $Z = \Delta/(1 - \Delta)$.



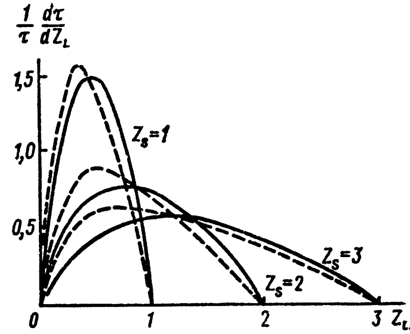


Рис. 5.1. Зависимость обратной угловой ширины источника от красного смещения для разных космологических моделей:

1 — «пустая» Вселенная ($\Omega \to 0$); *2* — средняя плотность равна критической ($\Omega = 1$); *3* — $\Omega = 1$, но в световом конусе от источника к наблюдателю $\Omega = 0$.

Рис. 5.2. Зависимость дифференциальной оптической толщи от красного смещения ГЛ при разных красных смещениях источника (сплошные кривые — $\Omega = 0$, штриховые — $\Omega = 1$ с «пустым» световым конусом)

ведет себя $f_2(Z)$: эта функция достигает максимума при $Z = {}^5/_4$. Но максимум $f(Z)$ соответствует минимуму $\Psi(Z)$. Поэтому с ростом Z угловые размеры объекта сначала уменьшаются, а достигнув минимума, снова начинают возрастать!

В принципе можно было бы определить среднюю плотность вещества во Вселенной, если бы удалось измерить $\Psi(Z)$ для объектов с известными линейными размерами. В качестве стандартной длины, в частности, предлагалось взять оптический размер ярчайшей из эллиптических галактик [64].

Однако распределение вещества в Метагалактике нельзя считать однородным, учитывая, что оно сконцентрировано в основном в звездах, скапливающихся в галактики. Особую роль играет вещество внутри узкого конуса лучей, идущих от источника к наблюдателю. Если в этот конус попадает одна или несколько галактик, то мы имеем дело с ГЛ, рассмотренными в предыдущих главах. Но и «пустой» конус тоже, оказывается, представляет собой своеобразную ГЛ! На это впервые было обращено внимание Я. Б. Зельдовичем [133], а возникновение линзового эффекта легко понять, если представить себе, что «пустота» появляется за счет введения в световой конус отрицательной массы. Отрицательная масса отклоняет световые лучи наружу, что приводит к уменьшению $\Psi(Z)$ по сравнению с однородной Вселенной с $\Omega = 1$. При этом $\Psi(Z)$ все же будет больше, чем в полностью «пустой» Вселенной, что и подтверждается расчетами. Согласно [133] $\Omega = 1$, («пустой» конус):

$$f_3(Z) = \frac{2}{5}\left[1 - (1+Z)^{-5/2}\right] \qquad (5.6)$$

Видно, что $f_3(Z)$ монотонно возрастает, приближаясь при $Z \to \infty$ к горизонтальной асимптоте на уровне ${}^2/_5$ (рис. 5.1).

Если в световой конус попадает вещество, сконцентрированное в компактных объектах, рассчитать $\Psi(Z)$ в общем виде нельзя. Следуя работе Тернера, Острикера и Готта [42], мы рассмотрим три вида «обычных» ГЛ, попадающих в световой конус: а) «точечная» линза, б) линза-галактика, в) скопление галактик.

«Точечная» линза. Выше мы не раз убеждались, какое важное значение имеет при описании оптических свойств ГЛ параметр $\tilde{l}$. Его роль сохраняется и в данном случае. Сохраняется также и формула, выведенная в § 2.1:

$$\tilde{l}^2 = 2r_g\tilde{x}(Z_L, Z_s). \tag{5.7}$$

Записав ее в таком виде, мы подчеркиваем, что приведенное расстояние $\tilde{x}$ должно быть выражено через красные смещения линзы Z_L и источника Z_s.

При измерениях внегалактических расстояний пользуются различными мерами удаления (все они выражаются через Z), включая аффинное расстояние $x^{(a)}$, расстояние в сопутствующей системе координат $x^{(c)}$, фотометрическое расстояние $x^{(F)}$ и угловое расстояние $x^{(e)}$. Дифференциал расстояния, выраженный через время прохождения света, записывается в виде $cdt\,(Z)$. Мы будем уточнять смысл обозначения $\tilde{x}$ в (5.7) только в тех случаях, когда требуется указать явную зависимость от Z. Так, например, используя аффинные расстояния, следует писать [42]

$$\tilde{l}^2 = 2r_g(1+Z_L)\frac{x_L^{(a)}\left(x_s^{(a)} - x_L^{(a)}\right)}{x_s^{(a)}}. \tag{5.8}$$

Связь между $x^{(a)}$ и Z зависит от выбора космологической модели. В частности, при $\Omega \to 0$ и $\Omega = 1$ функция $x^{(a)}$ отличается от приведенных выше функций $f_1(Z)$ и $f_3(Z)$ только множителем c/H_0.

Основные проявления линзового эффекта сводятся к изменению яркости источника и умножению изображений. Расчетные формулы для полного коэффициента усиления q, отношения яркостей изображений q_1/q_2 и угла расщепления $\Delta\Psi$ были получены в § 2.1. Здесь мы перепишем их, введя безразмерный прицельный параметр $\alpha = \tilde{\rho}_s/\tilde{l}$, где $\tilde{\rho}_s$ — прицельный параметр невозмущенного луча, или, что то же, спроектированное на плоскость ГЛ смещение источника (см. (2.25)).

Соответствующий $\tilde{\rho}_s$ угол Ψ_s определяется через угловое расстояние до линзы: $\Psi_s = \tilde{\rho}_s/x_L^{(e)} = \alpha\tilde{l}/x_L^{(e)}$. В зависимости от космологической модели $x_L^{(e)} = (c/H_0)\,f_i(Z)$.

Таким образом, получаются следующие соотношения:

$$q = \frac{\alpha^2+2}{\alpha(\alpha^2+4)^{1/2}}, \tag{5.9}$$

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{(\alpha^2+2)+\alpha(\alpha^2+4)^{1/2}}{(\alpha^2+2)-\alpha(\alpha^2+4)^{1/2}}, \tag{5.10}$$

$$\Delta\Psi = \Psi_s(\alpha^2+4)^{1/2}/\alpha. \tag{5.11}$$

Для прицельного параметра, равного $\tilde{l}\,(\alpha = 1)$, имеем $q = 1{,}342$, что соответствует $\Delta m = 0{,}32$; $q_1/q_2 = 6{,}854$, что соответствует $\Delta m = 2{,}1$ (Δm — усиление яркости в звездных величинах); $\Delta\Psi = 2{,}236\,\Psi_s$. При больших значениях α имеем $q \simeq 1 + 2/\alpha^4$ и $q_1/q_2 \simeq \alpha^4$, т. е. усиление полной яркости двух изображений практически не происходит, причем один из компонентов (ближайший к невозмущенному лучу) сохраняет почти ту же интенсивность, а яркость второго (более удаленного) очень быстро убывает. Иными словами, при $\alpha \gg 1$ линзовый эффект не проявляется. Это дает возможность грубо определить сечение рассеяния $\Sigma_п$ «точечной» линзы как круг радиуса $\tilde{l}$, положив $\Sigma_п \equiv \pi\tilde{l}^2$. При введении такого определения считается, что линзовый эффект отсутствует, если усиление яркости не превышает $\Delta m \simeq 0{,}3$. Согласно (5.8) значение $\Sigma_п$ достигает максимума, когда ГЛ находится примерно на половине расстояния от наблюдателя до источника. В крайних точках ($x_L^{(a)} = 0$, $x_L^{(a)} = x_s^{(a)}$) $\Sigma_п$ обращается в нуль. Усредненные по кругу радиуса $\tilde{l}$ характеристики ГЛ таковы: $\bar{q} = 2{,}236$; $\overline{q_1/q_2} = 4{,}030$; $\overline{\Delta\Psi} = 2{,}12\,\Psi_s$. Далее, в работе [42] рассчитывается дифференциальная вероятность $d\tau$ того, что линзовый эффект будет обнаружен на интервале dZ_L красных смещений ГЛ. Очевидно, $d\tau = \delta_s(Z_L)\,\Sigma_п \frac{cdt}{dz_L}\,dZ_L$, где $\delta_s(Z_L)$ — плотность звезд при $Z = Z_L$. Путем интегрирования $d\tau$ по лучу зрения от нуля до Z_s определяется полная вероятность τ, или полная оптическая толща от источника до наблюдателя. На рис. 5.2, взятом из [42], показана дифференциальная оптическая глубина $\frac{1}{\tau}\frac{d\tau}{dz_L}$ для источников с разными красными смещениями ($Z_s = 1,\ 2,\ 3$) и для различных космологических моделей ($\Omega = 0$, $\Omega = 1$ с «пустым» световым конусом). При малых значениях Z_s вероятность обнаружения достигает максимума, когда $Z_L \simeq Z_s/2$. При обычных для квазаров $Z_s \simeq 2$ дифференциальная оптическая толща имеет наибольшее значение, когда $Z_L = 0{,}73$ ($\Omega = 0$) и $Z_L = 0{,}48$ ($\Omega = 1$).

Перейдем к оценке угла расщепления изображений. Усредняя (5.11) по α, легко определить $\overline{\Delta\Psi}$ для разных значений Z_L и Z_s. Далее, действуя на полученное выражение оператором $\frac{1}{\tau}\int d\tau$, можно рассчитать вероятность обнаружения данного $\overline{\Delta\Psi}$ (или среднеквадратичного значения $\sqrt{\overline{\Delta\Psi^2}}$) при наблюдении линзового эффекта. При этом естественной мерой расщепления оказывается угол $\Psi_0 = (r_g/R_0)^{1/2}$, где $R_0 = c/H_0 \simeq 3 \cdot 10^3$ Мпк — общий масштабный фактор. Угол Ψ_0, вообще, очень мал. Даже если представить, что роль «точечной» ГЛ играет не отдельная звезда, а шаровое звездное скопление с массой $M \sim 10^5\,M_\odot$, то $\Psi_0 \sim 10^{-9}$ рад $\simeq 2'' \cdot 10^{-4}$. Не приводя полных формул для $\sqrt{\overline{\Delta\Psi^2}}$, которые можно найти в цитируемой работе [42]. Укажем только, что для малых Z_s расщепление возрастает как $Z_s^{-1/2}$, а при $Z_s \to \infty$ падает (см. рис. 5.3, *а*).

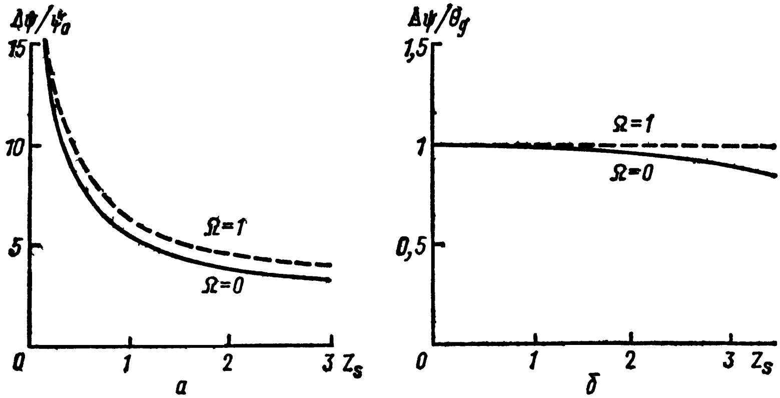


Рис. 5.3. Угол расщепления изображений при наблюдении источников с красным смещением Z_s сквозь «точечную» (*а*) и прозрачную (*б*) ГЛ

Линза-галактика. В отличие от «точечной» линзы в данном случае приходится делать определенные предположения относительно распределения массы в самой ГЛ. Так же, как в работе [42], мы ограничимся моделью изотермической сферы, которая считается наиболее приемлемой для спиральных галактик (см. § 2.3). Если считать, что радиус ядра $r_c \to 0$, то поверхностная плотность массы

$$\sigma(p) = \sigma_v^2/2Gp. \qquad (5.12)$$

Таким образом, выбранная модель характеризуется одним параметром — дисперсией скорости σ_v^2. В § 2.3 было показано, что изотермическая сфера в качестве ГЛ обладает характерной особенностью: угол преломления $\Theta_g = 4\pi\sigma_v^2/c^2$ не зависит от прицельного параметра (для лучей, проходящих сквозь галактику). Радиус кольца, наблюдаемого при осевом расположении источника, и его угловой размер соответственно будут: $\tilde{l} = \Theta_g \tilde{x}(Z_s, Z_L)$ и $\Psi_l = \tilde{l}/x_L^{(e)}$. Используя прежний безразмерный параметр $\alpha = \tilde{\rho}_s/\tilde{l}$ и соответствующий угол $\Psi_s = \tilde{\rho}_s/x_L^{(e)}$, получаем (см. § 2.3)

$$q = 2/\alpha, \quad \frac{q_1}{q_2} = \frac{1+\alpha}{1-\alpha}, \quad \Delta\Psi = 2\Psi_l. \qquad (5.13)$$

Напомним, что два изображения возникают только при $\tilde{\rho}_s < \tilde{l}$ ($\alpha < 1$), но если это условие выполнено, то $\Delta\Psi$ не зависит от прицельного параметра. Усредненное по кругу $\pi\tilde{l}^2$ усиление яркости $\bar{q} = 4$ несколько превышает среднее усиление «точечной» линзы, что же касается углов расщепления изображений, то их соотношение зависит от конкретных значений r_g и σ_v^2. Зависимость дифференциальной оптической толщи $\frac{1}{\tau}\frac{d\tau}{dz_L}$ в общих чертах повторяет ту же зависимость для «точечной» линзы (см. рис. 5.2). Полная оптическая толща τ возрастает с удалением источника сначала очень быстро ($\tau \sim Z_s^3$ при $Z_s \ll 1$), а затем приближается к насыщению на уровне τ_{max}, зависящем от σ_v^2 и Ω.

По наиболее оптимистическим оценкам, приведенным в работе [42], квазары с очень большими Z_s могут наблюдаться сквозь ГЛ с вероятностью до 0,04. Для наиболее характерных значений $Z_s \simeq 2$ вероятность линзового эффекта существенно уменьшается. Максимум дифференциальной оптической толщи (ему соответствует такое удаление ГЛ, при котором вероятность гравитационной фокусировки квазаров с данным Z_s оказывается наибольшей) приходится на $Z_L \leqslant 1$ даже при $Z_s \gg 1$. Это означает, что наиболее вероятной оказывается ситуация, когда ГЛ находится значительно ближе, чем источник излучения. Следовательно, линза-галактика с большой вероятностью может быть обнаружена в оптическом диапазоне (если, конечно, она не будет замаскирована более сильным излучением квазара).

Наиболее характерным отличием в проявлениях линзового эффекта «точечных» и галактических изотермических линз является усредненный по всем положениям ГЛ вдоль луча зрения угол расщепления изображений $\Delta\Psi$. Соответствующие кривые, взятые из работы [42], представлены на рис. 5.3 для двух космологических моделей ($\Omega = 0$, $\Omega = 1$). Характерной особенностью изотермических линз является очень слабая зависимость $\Delta\Psi$ от Z_s. Грубо говоря, $\Delta\Psi \simeq \Theta_g \equiv 4\pi\sigma_v^2/c^2$ не зависит от Z_s и определяется только параметром σ_v^2, характеризующим ГЛ. Для $\sigma_v^2 \simeq 300$ км $\cdot$ с$^{-1}$ угол расщепления изображений будет приблизительно равен $12 \cdot 10^{-6}$ рад $\simeq 2{,}7''$.

Однородный гравитирующий слой. Таким образом нередко моделируется скопление галактик. В § 4.2 было показано, что однородный диск фокусирует излучение подобно обычной собирательной линзе, если поверхностная плотность массы превышает некоторое критическое значение $\sigma_{кр} = c^2/4\pi G\tilde{x}$. Используя то же выражение для $\tilde{x}$, что и в (5.8), имеем

$$\sigma_{кр} = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{x_s^{(a)}}{(1+Z_L)\, x_L^{(a)} (x_s^{(a)} - x_L^{(a)})}. \tag{5.14}$$

Если выразить все, входящие в (5.14), величины через Z_s и Z_L, то получатся следующие формулы [42]:

$$\sigma_{кр} = \frac{cH_0}{2\pi G} \frac{(1+Z_L)^3\,[(1+Z_s)^2 - 1]}{[(1+Z_s)^2 - (1+Z_L)^2]\,[(1+Z_L)^2 - 1]}, \quad (\Omega = 0);$$

$$\sigma_{кр} = \frac{5cH_0}{8\pi G} \frac{(1+Z_L)^4\,[(1+Z_s)^{5/2} - 1]}{[(1+Z_s)^{5/2} - (1+Z_L)^{5/2}]\,[(1+Z_L)^{5/2} - 1]},$$

($\Omega = 1$, пустой конус).

Для скоплений галактик чаще всего $\sigma < \sigma_{кр}$, и сам по себе однородный гравитирующий слой не обеспечивает полной фокусировки излучения, однако в совокупности с галактикой-линзой несколько усиливает действие ГЛ. Можно показать [42], что угол расщепления изображений и коэффициент усиления ГЛ возрастают соответственно в $(1 - \sigma/\sigma_{кр})^{-1}$ и $(1 - \sigma/\sigma_{кр})^{-2}$ раз. При этом поперечник рассеяния относительно линзового эффекта с образованием множественных изображений не меняется. Численные значения дополнительного множителя оцениваются, примерно как 2,6 для углового расщепления и как 7 для усиления яркости.

Если предположить, что приведенные выше модели ГЛ охватывают все возможности наблюдения линзового эффекта, можно рассчитать дифференциальную вероятность $d\mathcal{P}(\Delta\Psi, Z_L, Z_s)$ того, что возникнут множественные изображения квазара с красным смещением Z_s в интервале углов расщепления $d(\Delta\Psi$ под действием ГЛ в интервале красных смещений $d(Z_L)$. Интегрируя найденную вероятность по $\Delta\Psi$ или по Z_L и суммируя по всем известным Z_s, определим вероятность обнаружения ГЛ с заданным Z_L или $\Delta\Psi$. Если исключить как маловероятные «точечные» ГЛ, то

$$d\mathcal{P}(\Delta\Psi, Z_L; Z_s) = \Sigma(\Delta\Psi)[\delta_s(Z_L, \Delta\Psi) + \delta_E(Z_L, \Delta\Psi) + \\ + \delta_c(Z_L, \Delta\Psi) B(Z_L, \Delta\Psi)]\, cdt(Z). \tag{5.15}$$

Здесь $\Sigma(\Delta\Psi)$ — поперечник сечения с расщеплением изображения на угол $\Delta\Psi$, $cdt(Z)$ — толщина слоя dZ на расстоянии с данным Z, $\delta_{s,E}$ — плотности спиральных и эллиптических галактик, δ_c — плотность скопления галактик. Множитель $B(Z_L, \Delta\Psi)$ учитывает влияние однородного гравитирующего слоя и может быть взят в виде $(1 - \sigma/\sigma_{кр})^{-2}$. Не останавливаясь на подробностях выбора численных оценок в формуле (5.15), заметим только, что для получения данных, которые можно будет сравнивать с результатами наблюдений, необходимо учесть порог чувствительности инструментов и их угловую разрешающую способность $\Delta\Psi_{пред}$. Так, например, наблюдаемое угловое распределение $\mathcal{P}^*(\Delta\Psi)$ во всех множественных изображениях квазаров отличается от истинного $\mathcal{P}(\Delta\Psi)$ и может быть представлено в виде

$$\mathcal{P}^*(\Delta\Psi) = S(\Delta\Psi)\,\mathcal{P}(\Delta\Psi), \tag{5.16}$$

где $S(\Delta\Psi)$ — функция угловой селекции, определяющая ту часть наблюдаемых квазаров, для которых угловое расщепление $\Delta\Psi \leqslant \Delta\Psi_{пред}$. Установить вид функции $S(\Delta\Psi)$ не очень просто, так как 2 000 квазаров исследуются многими наблюдателями на разных инструментах по разным методикам. В работе [42] наряду с полной совокупностью наблюдений (2000 квазаров) рассматриваются отдельные выборки для радиоизображений (750 квазаров), получаемых с помощью VLA[33], и оптических данных (2000 квазаров), отличающихся худшей разрешающей способностью.

От вероятности обнаружения легко перейти к ожидаемому числу квазаров с расщепленными в ГЛ изображениями. По оценкам авторов

[33] VLA — Very Large Array — большая антенная решетка. Один из крупнейших радиотелескопов, состоящий из 27 параболических антенн диаметром 25 м, расположенных в виде буквы «Y». Наибольший размер «Y» равен 21 км.

работы [42], это число для различных космологических моделей и типов ГЛ колеблется от $\bar{N} \sim 10$ до $\bar{N} \sim 0{,}1$. Наглядное представление об ожидаемом числе квазаров с данным углом расщепления $\Delta\Psi$ дает рис. 5.4. Среднее значение $\Delta\bar{\Psi}$ составляет для полной выборки примерно 3,61″, для радиоквазаров 2,81″ и оптических 4,76″.

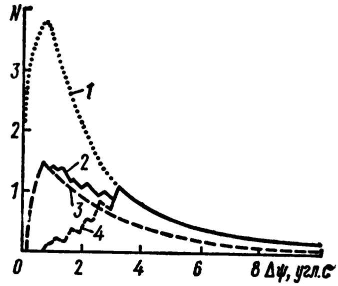


Рис. 5.4. Влияние разрешающей способности инструментов на ожидаемое значение угла расщепления изображений:

1 — идеальный инструмент; *2* — оптика + радио; *3* — радио (*VLA*); *4* — оптика

Укажем еще наиболее вероятное удаление ГЛ. Оно характеризуется значением $Z_L \sim 0{,}5$, причем в большинстве случаев следует ожидать $Z_L < 1$. Острота максимума возрастает с увеличением угла расщепления, так как большие значения $\Delta\Psi$ требуют расположения ГЛ на вполне определенных расстояниях.

Подводя итоги выполненного анализа, авторы работы [42] приходят к следующим выводам относительно будущих наблюдений.

1. Систематический обзор с помощью VLA или космического телескопа может дать от 0,1 до 1 % множественных изображений среди всех квазаров (или других объектов с большими значениями Z_s) с характерным углом расщепления примерно 1″.

2. Большие угловые расщепления (более 4″) почти всегда будут связаны с богатыми скоплениями галактик с $Z_L < 1$ (как правило, между 0,2 и 0,8). Скопления можно будет обнаружить почти всегда, в противном случае это будет указывать на существование какого-то нового класса массивных объектов.

3. Если окажется, что характерные значения $\Delta\Psi$ слабо зависят от Z_s, то большинство ГЛ представляют собой изотермические галактики.

4. Если существуют сверхскопления галактик с поверхностной плотностью массы $\sigma > \sigma_{кр}$, они сами по себе (не за счет отдельных галактик) могут действовать как ГЛ с очень большим расщеплением изображений: $\Delta\Psi \sim 30 \div 60''$.

Последний вывод, вообще, ошибочный, так как действительно однородный гравитирующий диск не вызывает расщепления изображений. При $\sigma > \sigma_{кр}$ остается одно, но инвертированное изображение (см. (2.13)). Если же учесть «точечные» ГЛ в гравитирующем слое, то при $\sigma \sim \sigma_{кр}$ проявления линзового эффекта, как это было показано в § 4.4, могут быть самыми разнообразными.

Еще одно замечание следует сделать относительно численных значений вероятности обнаружения ГЛ. Как показано в более поздней статье [137], приведенные выше значения N предполагаемого числа ГЛ являются несколько заниженными. Дело в том, что вследствие искривления лучей в гравитационных полях компактных объектов направления на далекие источники не являются полностью случайными (на них влияет расположение ГЛ). Истинно случайными (не зависящими от ГЛ) будут положения источников на сфере $Z = Z_s$.

Учет этого обстоятельства позволяет рассчитать самосогласованную вероятность обнаружения линзового эффекта. Что касается космологической модели, в рамках которой проводятся вычисления, то она также несколько отличается от моделей, принятых в работе [42]: предполагается, что часть вещества распределена однородно по всей Вселенной и только остающаяся доля сосредоточена в компактных объектах [34]. Расчеты авторов работы [137] для «точечных» линз одинаковой массы и «точечных» источников показывают, что возрастание самосогласованной вероятности обнаружения линзового эффекта $\Delta\mathcal{P}/\mathcal{P}$ становится заметным только при достаточно больших значениях Z_s (при $Z_s \simeq 2$ $\Delta\mathcal{P}/\mathcal{P} \simeq 50$ %, а при $Z_s \simeq 3$ $\Delta\mathcal{P}/\mathcal{P} \simeq 80$ %).

Те же соображения, которые лежат в основе самосогласованных расчетов, приводят к заключению, что в принципе должно наблюдаться возрастание кажущейся плотности квазаров в окрестности ярких галактик [124]. К сожалению, из-за случайных отклонений в поверхностной плотности квазаров этот эффект нельзя обнаружить на одной галактике. По оценкам авторов, для обеспечения статистической достоверности требуется ансамбль примерно из $10^{4,5}$ галактик.

§ 5.2. Признаки действия ГЛ и общие сведения об обнаруженных объектах

Увеличение блеска источника и появление множественных изображений могут рассматриваться как основные признаки действия ГЛ. Поскольку вероятность более или менее точного совмещения источника, линзы и наблюдателя на одной прямой возрастает с увеличением Z_s (вблизи луча зрения появляются все новые и новые гравитирующие объекты), не удивительно, что линзовый эффект был обнаружен среди самых удаленных источников — квазаров.

Квазары — это мощные внегалактические источники электромагнитного излучения, имеющие на фотографиях звездообразный вид. Отсюда и их название: «квазар» — квазизвездный объект. Открытие квазаров произошло в 1960 г., когда радиоисточник 3С 48 («радиозвезда») [35] был отождествлен с оптическим объектом 16-й звездной величины. Особенностью квазаров является большое красное смещение. Спектральные линии смещаются так далеко (у 3С48 с $Z \simeq 1{,}37$ — на 37 %), что прошло почти три года, пока удалось их расшифровать. В настоящее время известно уже свыше 2 000 таких компактных источников с Z от 0,1 до 3,8, хотя крайние значения Z встречаются очень редко [164].

Квазары — самые мощные излучатели во Вселенной. Многие из них превышают светимость ярких галактик в 100—1 000 раз. В то же время размеры их, оцениваемые по времени переменности, не превосходят 1 пк. Механизм генерации очень большой мощности в малом объеме пока достоверно не известен, хотя эта проблема занимает

[34] Это предположение использовалось в связи с линзовым эффектом и в более ранних работах [138, 139].

[35] Обозначение 3С 48 расшифровывается так: объект № 48 в 3-м Кембриджском каталоге радиоисточников.

астрофизиков уже около трех десятков лет. Возможно, что здесь мы встречаемся с генерацией излучения за счет падения вещества на массивную черную дыру с $M \sim$ $\sim 10^6 \div 10^{10}\ M_\odot$ [164].

Оригинальную гипотезу, представляющую для нас особый интерес, выдвинули вскоре после открытия квазаров супруги Барнотти [140]. Они предположили, что квазары — это обычные галактики, но их кажущаяся светимость сильно возросла за счет линзового эффекта боле близких объектов, в основном также галактик. Гипотеза гравитационной фокусировки долгое время воспринималась иронически астрономическим сообществом, хотя Барнотти продолжали ее активно пропагандировать: в период между 1965 и 1981 г. ими было опубликовано до 40 работ [142].

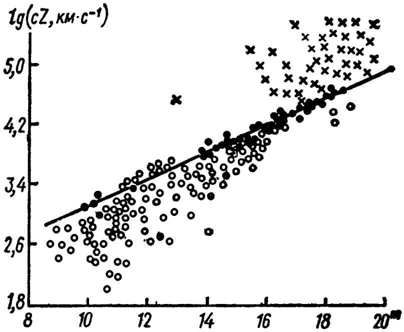


Рис. 5.5. Диаграмма Хаббла $Z = f(m)$ (прямая линия соответствует закону Хаббла); по вертикальной оси в логарифмическом масштабе отложена величина cZ, которая при $Z \leqslant 1$ равна скорости удаления объекта:
○ — галактики, ● — ярчайшие галактики, × — квазары

В работе, посвященной ГЛ, очень заманчиво принять эту гипотезу, но попробуем сначала сделать некоторые численные оценки. Прежде всего напомним, что усиление блеска источника конечных угловых размеров Ψ_0 не может превосходить некоторого предельного значения q_{max} (см. § 2.1). Если ГЛ представляет собой изотермическую галактику, то согласно (5.13) $q_{max} \simeq 2/\alpha_{min}$, где $\alpha_{min} = \rho_{s\,min}/\tilde{l} \simeq$ $\simeq \tilde{R}_s/\tilde{l}$, а R_s — характерный размер квазара, который мы выберем равным примерно 1 пк.

Принимая для определенности $Z_s = 1$, а $Z_L = 0{,}5$ (в соответствии с рис. 5.2 при таком положении линзы вероятность возникновения линзового эффекта максимальна), находим при $H_0 =$ $= 100$ км · с$^{-1}$ Мпк$^{-1}$ и $\Omega \to 0$ значения $x_s^{(a)} = 1{,}1 \cdot 10^3$ Мпк и $x_L^{(a)} = 8{,}3 \cdot 10^2$ Мпк. Далее вычисляется $\tilde{x} = (1 + Z_L)\, x_L^{(a)}\, (x_s^{(a)} -$ $- x_L^{(a)})/x_s^{(a)} \simeq 300$ Мпк (см. (5.7) и (5.8)) и для $\sigma_v \simeq 300$ км · с$^{-1}$ угол $\Theta_g \simeq 10^{-5}$ рад. Эти данные позволяют определить $\tilde{l} \simeq \tilde{x}\Theta_g \simeq$ $\simeq 3$ кпк, а затем $\alpha_{min} \simeq 3 \cdot 10^{-4}$. Отсюда $q_{max} \simeq 10^4$, что соответствует усилению блеска источника на $10\,m$. Такое усиление блеска само по себе столь велико, что как будто бы легко объясняет сдвиг квазаров влево от ярчайших галактик на диаграмме Хаббла, что иллюстрируется рис. 5.5, взятым из [134]. Однако реализация q_{max} требует совпадения центра источника с осью наблюдатель — линза в пределах размеров квазара R_s, что возможно только с очень малой вероятностью, которую грубо можно оценить сверху следующим образом.

Будем считать, что все галактики в шаре $Z \leqslant Z_s$ могут привести к указанному выше усилению блеска, число же галактик N примем равным приблизительно 10^9 (столько галактик может быть зарегистрировано самыми мощными наземными телескопами). Тогда на сфере $Z = Z_s$ возникает N круговых площадок радиуса R_s, в одну из которых должен попасть центр источника, чтобы его блеск заметно усилился. Их общая площадь $N\pi R_s^2 \simeq 3 \cdot 10^9$ пк^2, а площадь всей сферы $4\pi\ [x_s^{(a)}]^2 \simeq 10^{19}$ пк^2. Отсюда следует максимальная оценка вероятности усиления блеска источника не менее чем на $10\,m$: $\mathcal{P}_{10m} \simeq \simeq 3 \cdot 10^{-10}$.

Конечно, требование усиления на $10m$ слишком жесткое. Судя по рис. 5 5, можно было бы ограничиться и значением порядка $2{,}5m$ (усиление интенсивности в 10 раз), что сразу же повышает вероятность в 10^6 раз, поскольку допустимое значение α увеличивается в 10^3 раз, а площадь отдельного круга усиления — пропорционально α^2. Таким образом, $\mathcal{P}_{2,5m} \simeq 10^{-4}$, что, вообще, не так уж мало. Однако полученное число может оказаться сильно завышенным, поскольку мы не учли снижения вероятности линзового эффекта для очень близких ($Z_L \ll 1$) и очень далеких ($Z_L \sim Z_s$) галактик (см. рис. 5.2) [36], не говоря уже о том, что в пределы сферы $Z = Z_s$ включены все видимые галактики. Тем не менее мы убедились, что конечные размеры источника могут сыграть свою ограничительную роль лишь тогда, когда речь идет об очень большом усилении ($\Delta m \simeq 10$). Если же Δm существенно меньше, то основное снижение усиления происходит за счет отклонения от оси наблюдатель — линза, а не вследствие конечных размеров излучателя. В частности, этим оправдываются расчеты предыдущего параграфа, в которых источник рассматривался как «точечный», но критерием возникновения линзового эффекта считалось усиление блеска на $\Delta m \simeq 0{,}3$.

Против гипотезы Барнотти, кроме малой вероятности ее реализации, свидетельствуют еще два факта. Прежде всего характерные времена переменности квазаров t_s — месяцы и даже недели — указывают на малые размеры источника $R_s \sim ct_s \leqslant 1$ пк, т. е. наблюдаемое излучение не может исходить из всей галактики в целом. Можно, конечно, возразить против этого довода, связав быструю переменность с действием микролинз. Однако быстрые флуктуации светимости вследствие влияния отдельных звезд в галактике-линзе возможны только, если размеры источника очень малы [149] (см. также § 4.4), т. е. и это предположение приводит нас к выводу об особой природе квазаров. Далее, если бы большая светимость квазаров объяснялась только действием ГЛ, то каждый источник был бы виден на фоне какой-нибудь галактики. В действительности такое сочетание не наблюдается, точнее, встречается достаточно редко, и именно эти случаи как раз и интерпретируются как ГЛ.

Если сформулировать гипотезу Барнотти более осторожно, а

---

[36] Расчеты с учетом изменения вероятности линзового эффекта и плотности галактик в зависимости от Z_L приведены в работе [137].

именно гравитационные поля близлежащих галактик влияют на кажущийся блеск квазаров, что должно учитываться при исследовании статистики источников, то с таким утверждением вполне можно согласиться. Соответствующие расчеты выполнены в работах [124, 141], к которым мы еще вернемся, рассматривая астрофизические приложения ГЛ.

Обратимся к другому проявлению гравитационной фокусировки — умножению изображений. Очень важно, что в отличие от усиления блеска оно обнаруживается не статистически, а на отдельных источниках. Однако возникает вопрос, как узнать, являются ли два или более близкорасположенных квазара расщепленными изображениями одного источника? Прежде всего заметим, что среднее угловое расстояние между известными к настоящему времени квазарами составляет 4—5°. Поэтому, когда обнаруживаются два или более квазара с существенно меньшим угловым разносом, этот факт может рассматриваться как возможное проявление действия ГЛ. Но наиболее характерным признаком расщепления изображения является совпадение спектров близкорасположенных источников. Именно эта особенность, обнаруженная пока в немногих случаях, и привела к заключению об открытии ГЛ.

Очень заманчиво сформулировать более четкий критерий эффекта ГЛ, а именно когерентность двух и более изображений [209]. Если множественные изображения возникают в ГЛ от одного источника, они должны быть когерентными, если же источники действительно разные, когерентность отсутствует. Однако этот критерий приемлем лишь для точечного источника и в отсутствие случайных неоднородностей в среде и в самой ГЛ. Если даже пренебречь последними факторами, то за счет конечных размеров квазара когерентность будет обнаруживаться только при очень узкой полосе пропускания приемника Δf.

Соответствующие расчеты выполнены в работе [210], где для полосы частот получена формула $\Delta f = cx_s/4\pi R_s x \Delta\Psi$ и сделана оценка для квазара 0957 + 561 при $R_s \simeq 10^{15}$ см. Оказалось, что $\Delta f \simeq$ $\simeq 0{,}07$ Гц, т. е. изображения компонентов A и B будут практически восприниматься как некогерентные, даже если они порождены одним источником. Пока что (1987 г.) обнаружено только девять объектов, в которых проявляется действие ГЛ. В семи случаях источниками излучения являются квазары, а в двух — галактики. Их некоторые характеристики представлены в табл. 5.1. Обозначения источников расшифровываются следующим образом. Например, QSO 0957 + 561 A, B — Quasi-stellar object (квазизвездный объект): 0957 + 561 — экваториальные координаты , (0957 — прямое восхождение 09 ч 57 мин, + 561 — северное склонение 5°61′), A, B — два компонента изображения. Дополнительные обозначения: PG (Palomar Green) — каталог Паломарской обсерватории, MG (MIT — Green-Bank) — каталог обсерватории Грин-Бэнк.

Таблица 5.1. Источники, у которых обнаружен эффект ГЛ

Наблюдаемый объект	Кем и когда обнаружен	Радиоизлучение	Красное смещение Z	Угол расщепления изображений	Гравитационная линза
Квазар QSO 0957 + 561	Уолшом и др. весной 1979 г.	Есть	1,41	5,7″	Эллиптическая галактика с $Z_L = 0{,}39$ и $m = 18{,}5$, расположенная вблизи центра скопления галактик
Квазар PG 1115 + 08	Вейманом и др. весной 1980 г.	Нет	1,72	1,77″ 2,28″	Предварительные данные: две галактики, одна из которых имеет $m = 19{,}8$
Квазар QSO 2345 + 007	Видманом и др. осенью 1981 г.	« »	2,15	7,3″	Не обнаружена; предполагаемое $Z_L = 0{,}4 \div 0{,}7$
Квазар MG 2016 + 112	Лоуренсом и др. осенью 1983 г.	Есть	3,27	3,4″	Предварительные данные: две эллиптические галактики с $Z_L = 0{,}8$ и $Z_L = 1{,}0$
Квазар QSO 1635 + 267	Джорговским и др. летом 1983 г.	Нет	1,96	3,8″	Не обнаружена; предполагаемое $Z_L = -1{,}118$
Квазар QSO 2237 + 0305	Хачра и др. осенью 1984 г.	« »	1,7	—	Спиральная галактика с $Z_L = 0{,}04$ и $m = 15$
Квазар QSO 1146 + 111	Тернером и др. весной 1986 г.	« »	1,01	157″	Не обнаружена; возможные: варианты скопление галактик, сверхмассивная черная дыра, космическая струна
Радиогалактика 3C 324	Ле-Февр весной 1987 г.	Есть	1,206	1,1″	Спиральная галактика с $Z_L = 0{,}845$
Скопление галактик А 370	Сукай и др. осенью 1985 г.	Нет	0,59	—	Скопление галактик с $Z_L = 0{,}374$

§ 5.3. Результаты наблюдений сфокусированных источников и ГЛ

Перейдем к описанию отдельных объектов, которые интерпретируются как изображения источников, видимые сквозь ГЛ.

1. Квазар QSO 0957 + 561*A*, *B*. Этот квазар оказался первым источником, в котором проявила себя гравитационная фокусировка. Как и многие астрономические открытия, ГЛ была обнаружена достаточно неожиданно, хотя в существовании линзового эффекта сомнений не было уже несколько десятков лет.

В начале 1979 г. английские астрономы Уолш, Карсвелл и их американский коллега Вейман проводили наблюдения по отождествлению дискретных радиоисточников с оптическими звездообразными объектами. Один из источников 0957 + 561 находился в созвездии Большой Медведицы, и в этом же месте на фотопластинках, полученных еще в 1950 г., были видны две почти одинаковые звездочки на расстоянии около 6″ друг от друга. С помощью 2,1-метрового телескопа Национальной обсерватории Китт-Пик (США) в марте — апреле 1979 г. удалось получить спектры этих объектов, имеющих блеск примерно 17^m.

Если в подобной паре один из спектров обладает признаками, присущими квазару, то именно с ним связывается радиоизлучение. Второй же компонент чаще всего представляет собой слабую звезду из нашей Галактики. Случайное совмещение квазара и звезды на небесной сфере в пределах нескольких угловых секунд наблюдается не так уж редко. В данном же случае оба источника оказались квазарами. Как будто бы ничего особенного не произошло: вместо одного квазара обнаружили сразу два. Но удивительным образом спектры компонентов *A*, *B* с большой точностью повторили друг друга и характеризовались одним и тем же красным смещением $Z \simeq 1{,}4$.

Никогда ранее не обнаруживались столь близко расположенные квазары, да еще и с идентичными спектрами. Обнаружившие их астрономы сделали смелое предположение о том, что в действительности два «близнеца» являются изображениями одного источника, излучение которого приходит к Земле сквозь ГЛ-галактику [119]. Открытие ГЛ произвело сенсацию в среде астрономов, и к настоящему времени опубликовано большое число работ, посвященных квазару 0957 + + 561*A*, *B*.

Структура источника в оптическом диапазоне. Два компонента *A* и *B* видны как два голубых звездообразных объекта на расстоянии 5,7″ друг от друга. В красной части спектра они имеют одинаковый блеск ($17{,}0^m$), а в голубой — изображение *A* на $0{,}3^m$ ярче, чем *B*. Красные смещения, определяемые по эмиссионным линиям спектра, почти совпадают: $Z_{\text{изл}} = 1{,}4054$ (*A*), $Z_{\text{изл}} = 1{,}4047$ (*B*). Линии поглощения характеризуются несколько меньшими *Z*, но также весьма близкими друг к другу: $Z_{\text{погл}} = 1{,}3905$ (*A*), $Z_{\text{погл}} = 1{,}3908$ (*B*).

---

[37] Многозеркальный телескоп Смитсоновской обсерватории (США) имеет шесть зеркал диаметром 1,8 м каждое.

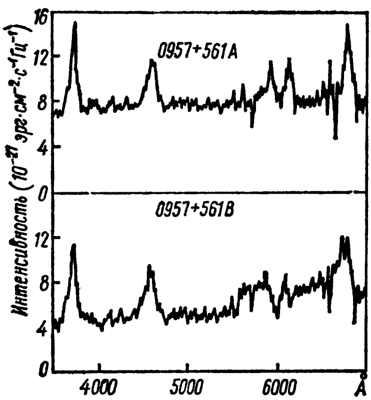


Рис. 5.6. Спектры компонентов 0957 + 561A, B

Дальнейшие наблюдения на многозеркальном [37] [143], 2,7-метровом [144] и 5-метровом [145] телескопах подтвердили сходство оптических спектров даже в мелких деталях, что иллюстрируется рис. 5.6, взятым из обзора Уолша [146]. Спектральные исследования были продолжены с целью расширения диапазона в сторону как инфракрасного [147, 148], так и ультрафиолетового [145] участков спектра. В области УФ обнаружилась новая система линий поглощения с $Z_{погл} = 1,1249$.

Весьма примечательно небольшое различие в космологических скоростях, соответствующих линиям поглощения двух компонентов. Оно составляет единицы — десятки километров в секунду. Чтобы почувствовать, насколько мало это различие скоростей $\Delta v_{погл}$, заметим, что сама скорость $v_{погл}$, соответствующая $Z_{погл} \simeq 1,4$, превышает 200 000 км/с. Такое точное совпадение спектральных линий является сильным аргументом в пользу гипотезы ГЛ. Действительно, малое значение $\Delta v_{погл}$ указывает на то, что поглощение излучения, идущего от A и B, происходит скорее всего в одном и том же облаке. Далее, небольшое отличие $Z_{погл}$ от $Z_{изл}$ (оно соответствует разности скоростей примерно 2270 км · с$^{-1}$ [146]) указывает на то, что поглощающее облако находится недалеко от источника. Если считать, что компоненты A и B — два разных источника, удаленных от Земли на расстояние с $Z = 1,4$ и отстоящих друг от друга на угол $\Delta\Psi = 6''$, то размеры поглощающего облака должны быть очень большими (десятки килопарсек). Можно, конечно, представить, что поглощение происходит в разных облаках, но маловероятно, чтобы разность скоростей между облаками, разнесенными на расстояния в десятки килопарсек составляла всего лишь около 10 км/с.

Если же два изображения A и B принадлежат одному источнику, т. е. справедлива гипотеза ГЛ, то все противоречия относительно свойств поглощающего облака автоматически снимаются. В этом случае можно представить, что поглощение происходит в газе, выброшенном самим квазаром. В УФ части спектра относительная скорость газа, соответствующая разности $Z_{изл} - Z_{погл}$, должна составлять $\sim 37\,500$ км/с [145].

Таким образом, гипотеза ГЛ является очень привлекательной, но видна ли вблизи «близнецов» сама линза?

Поиски линзы и ее обнаружение. Попытки обнаружить ГЛ, вызывающую расщепление изображения квазара, начались сразу же после первой публикации Уолша и др. [119]. В оптических наблюдениях на 4-метровом телескопе было замечено слабое дополнительное излучение из области, находящейся между компонентами A и B [149].

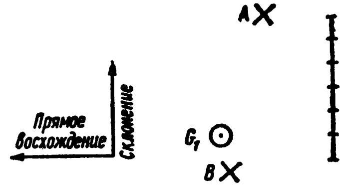


Рис. 5.7. Расположение изображений 0957 + 561*A*, *B* и галактики линзы G_1 (кольцо вокруг G_1 соответствует размерам ядра галактики; единица шкалы равна 1″)

Источник этого излучения имел блеск $23{,}9^m$. В то же время авторы [144], сравнивая результаты расчета с данными спектрометрических наблюдений, пришли к выводу, что ГЛ может представлять собой гигантскую линзовидную галактику с красным смещением $Z \simeq$ $\simeq 0{,}39$. В ноябре 1979 г. в условиях хорошей видимости галактика-линза была обнаружена сразу двумя группами наблюдателей: на 2,2-метровом телескопе Мауна-Кеа (Гавайские острова) [150] и 5-метровом телескопе Хейла (США) [151]. Оказалось, что центр галактики расположен на удалении примерно 1″ от *B* в сторону *A* (галактика-линза обозначена буквой G_1 на рис. 5.7) и имеет блеск $18{,}5^m$. Галактика имеет эллиптическую форму с эллиптичностью $0{,}13 \pm 0{,}01$ и является самым ярким компонентом целого скопления галактик. Последующие наблюдения [152] выявили в исследуемой окрестности 180 объектов, из которых 146 галактик, 32 звезды и два изображения квазара. Центр яркости скопления галактик удален на 23″ в западном направлении от компонентов *A* и *B*.

Стоктону [150] удалось разрешить ядро галактики-линзы, которое находится в пределах круга радиусом $0{,}24'' \pm 0{,}09''$ внутри компонента G_1. Однако остается сомнение относительно природы этого яркого образования. Возможно, радиус ядра значительно больше, а яркий компактный объект внутри G_1 представляет собой третье изображение квазара (напомним (см. § 2.3), что в прозрачной ГЛ должно наблюдаться, кроме внешних, еще и внутреннее изображение).

Красное смещение G_1, как и ожидалось, оказалось примерно равным 0,39, а предполагаемая масса — порядка $10^{12}\ M_\odot$. Дальнейшее уточнение структуры ГЛ связано с радионаблюдениями квазара.

Наблюдения в радиодиапазоне. Радиокарты. Радиоастрономические наблюдения начались сразу после открытия «близнецов», причем в них использовались самые крупные современные радиотелескопы, среди которых *Y*-образный инструмент VLA (Нью-Мексико, США), параболоиды диаметром 100 м (Эффельсберг, ФРГ), 76 м (Джодрелл-Бэнк, Англия), 64 м (Мадрид, Испания), 43 м (Грин-Бэнк, США), 25 м (Онсала, Швеция) и др.

Первые же измерения на частотах 1612 и 1667 МГц [153] с разрешением 0,2″ показали, что структура радиоисточника 0957 + 561 более сложная, чем в оптике, и не похожа на структуры известных радиоисточников. На рис. 5.8, взятом из [154], представлена радиокарта 0957 + 561, полученная с помощью VLA на волне $\lambda = 6$ см с угловым разрешением 0,3″. Оказалось, что радиоисточники *A* и *B* совпадают с соответствующими оптическими изображениями. Однако, кроме них, обнаружились и дополнительные компоненты, обозначенные на рис. 5.8 *C*, *D*, *E* и *Jet*. Измерения на том же радиотелескопе на волнах $\lambda = 2$; 6; 18; 20 см [155] подтвердили совпадение спек-

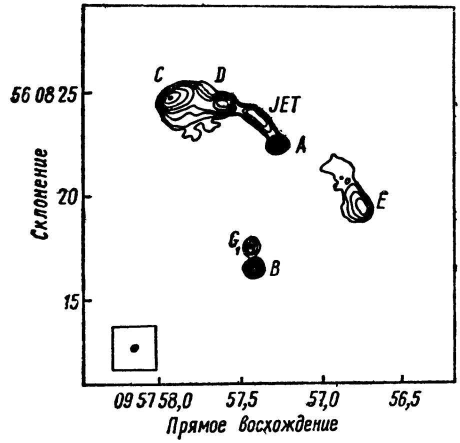


Рис. 5.8. Радиокарта 0957 + 561, полученная с помощью *VLA* на $\lambda = 6$ см (сечение радиолуча 0,40″ × 0,35″ по половине мощности показано в квадрате слева внизу)

тров компонентов *A* и *B* в радиодиапазоне, однако вблизи *A* были выявлены дополнительные выбросы, отсутствующие вблизи *B*. В галактике *D*, проектирующейся на квазар, обнаружен точечный радиоисточник вблизи ее центра. На основе общей картины было рассмотрено несколько моделей распределения масс в ГЛ, которые согласуются с наблюдениями. Наиболее вероятный вариант предполагает наличие невидимой массы в скоплении галактик.

Уточнение модели линзы. Попытки построения модели ГЛ начались еще до ее обнаружения. В работе [153], исходя из примерного равенства потоков от двух изображений и предположения о том, что мы имеем дело с «точечной линзой, было определено предполагаемое место расположения ГЛ: где-то вблизи средней точки отрезка, соединяющего *A* и *B*. Однако это предположение не подтвердилось, и модель «точечной» линзы отпала. Обнаруженная позже галактика-линза (объект G_1 на рис. 5.8) расположена резко асимметрично относительно *A* и *B*, что требует дополнительного объяснения примерного равенства усилений q_1 и q_2. Согласно работе [151], этому условию не противоречит распределение массы в ГЛ, описываемой моделью Кинга (см. § 2.3). Однако в дальнейшем [152] те же авторы пришли к выводу, что объяснить таким образом всю структуру изображений не удастся и необходимо учитывать гравитационное поле всего скопления галактик, включая массу невидимого межгалактического вещества.

Дайер и Редер [156] рассматривали модель ГЛ в виде двух сферических образований: ближайшей к лучу зрения галактики и скопления галактик в целом. В то же время в работах [157, 158] отмечается, что радиоструктура 0957 + 561 хорошо объясняется не упомянутой выше моделью [152], а ГЛ в виде эллиптической галактики, находящейся вблизи центра скопления галактик. Предполагаемая авторами [157, 158] модель характеризуется следующими параметрами: радиус ядра галактики 3 кпк, радиус скопления 170 кпк, дисперсия скоростей в ядре галактики 287 км · с$^{-1}$, а в скоплении — 1010 км · с$^{-1}$. Эллиптичность ядра галактики-линзы 0,6, а всего скопления — 0,8.

В связи с тем что все авторы единодушны в том, что в случае 0957+ + 561 мы имеем дело с прозрачной ГЛ, возникает вопрос о третьем изображении (см. § 2.3).

Третье изображение. Радиоинтерферометрические наблюдения. В моделях [152, 157, 158] наряду с компонентами *A* и *B* должно наблюдаться третье (внутреннее) изображение, расположенное между ядром галактики-линзы и компонентом B. Долгое время его не удавалось обнаружить. Авторы [152] объясняли это тем, что оно маскируется собственным излучением ядра ГЛ. Причиной его ненаблюдаемости могло послужить также влияние «микролинз» [129], о чем рассказывалось в § 4.4.

Так или иначе, но поиск третьего изображения где-то в области между B и G_1 на рис. 5.8 требовал инструментов с более высокой разрешающей способностью, чем достигаемой на VLA. Наивысшую разрешающую способность обеспечивают в настоящее время межконтинентальные радиоинтерферометры VLBI [38] (РСДБ). Предельное разрешение РСДБ, достигнутое на волне $\lambda = 1{,}35$ см, составляет около $0{,}0001''$. Во время наблюдений 1981—1983 гг. [159], кроме уже известных деталей радиокарты, вблизи ядра галактики G_1 была отмечена область слабого излучения с потоком $(0{,}6 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-3}$ Ян[39] протяженностью $0{,}002''$. Возможно, этот источник и представляет собой третье изображение квазара. Наблюдения 0957 + 561 с помощью трехэлементного радиоинтерферометра [160] на волне $\lambda = 13$ см с разрешением примерно $0{,}001''$ показали, что третье изображение находится, как и должно быть, между B и центром G_1, к северу на удалении $1''$ от B. Интерферометр, на котором были получены эти данные, включал в себя радиотелескопы в Голдстоуне (США), Эффельсберге (ФРГ) и Мадриде (Испания).

Запаздывание изменений яркости компонентов расщепленного изображения. В результате расщепления изображения квазара должно появиться временное запаздывание Δt прохождения сигналов на трассах, ведущих к различным изображениям ГЛ. Этот эффект следует рассматривать как важнейшее подтверждение самой гипотезы гравитационной фокусировки.

Если бы были точно известны параметры ГЛ для 0957 + 561, то рассчитать Δt не представило бы труда. Но, к сожалению, такими данными мы не располагаем, и приходится ориентироваться на те самые модели, о которых было сказано выше, смирившись с возникающей при этом неопределенностью в значениях Δt. Так, оказывается, что в рамках модели двух сферических образований [156] основная погрешность связана с неточным значением координат центра скопления. Смещение центра в пределах $20''$ вызывает изменения Δt от 0,0265 до 0,325 г. Расчеты, основанные на других моделях ГЛ, приводят к еще бо́льшим временам запаздывания. В работе [157] оценивают $\Delta t \simeq 1{,}2$ г, а в [152] получено значение $\Delta t \simeq 5$ лет.

Из этих оценок следует, что обнаружить запаздывание в изменениях блеска компонентов A и B можно только путем непрерывных наблюдений в течение нескольких лет. Такие трудоемкие исследования начались вскоре после открытия «близнецов». Первые ре-

[38] VLBI — Very Large Base Interferometer — радиоинтерферометр со сверхдлинной базой. В настоящее время существует глобальная сеть интерферометров, включающая радиотелескопы СССР, ФРГ, Великобритании, Швеции, США, Австралии и других стран.

[39] Ян (Янский) — внесистемная единица спектральной плотности потока излучения (1 Ян = 10^{-26} Вт · м$^{-2}$ · Гц$^{-1}$).

зультаты измерений в 1980—1981 гг. [162] показали, что блеск северного изображения (A) за время наблюдений почти не изменялся, в то время как поток от южного компонента (B) быстро менялся. Отсюда следовало, что Δt должно быть больше 2,7 лет. Еще более длительные измерения с 1979 по 1982 г. [161] подтвердили предыдущие данные в различных областях оптического спектра. Дальнейшие измерения в 1983—1984 гг. [163] показали, что увеличение блеска A на $0{,}2^m$ в 1982 г. повторилось в компоненте B в 1983 г. Кросс-корреляционный анализ изменений блеска приводит к значениям $\Delta t \simeq \simeq 1{,}03 \pm 0{,}1$ г. Этот результат, разумеется, не снижает важности дальнейших наблюдений, которые должны проводиться еще более длительное время, чтобы исключить случайные флуктуации блеска за счет влияния «микролинз» в линзе-галактике (см. § 4.4).

2. Квазар QSO PG 1115 + 0,8*A*, *B*, *C*. Примерно через год после обнаружения двойного квазара 0957+ 561*A*, *B* в мае 1980 г. был найден второй кандидат в ГЛ [165]. Им оказался квазар PG 1115 + + 08, впервые обнаруженный в Паломарской обсерватории (США) как объект с избыточным ультрафиолетовым излучением. С помощью 45-сантиметрового телескопа, установленного на спутнике IUE (International Ultraviolet Explorer), к началу 1980 г. были получены спектры шести квазаров, среди них и PG 1115 + 08 [166]. Оказалось, что, в голубой части спектра квазар PG 1115 + 08 имеет блеск $15{,}84^m$, а его красное смещение $Z_{изл} = 1{,}722$ [167]. В мае 1980 г. в условиях хорошей видимости с помощью 2,3-метрового телескопа Стюардской обсерватории Вейман с сотрудниками в дополнение к известному уже яркому компоненту обнаружил в пределах $2''$ еще два, блеск которых был примерно на $2{,}5^m$ слабее первого [165]. Самый яркий компонент «тройки» обозначили буквой A, более слабый и ближайший к A — буквой B и оставшийся — C. Все три компонента имели идентичные спектры и одинаковые красные смещения $Z_{изл} = 1{,}722$. Вейман с соавторами предположил, что ими, возможно, наблюдается проявление линзового эффекта и три компонента A, B и C являются изображениями одного и того же квазара. Дальнейшие оптические наблюдения «тройного» источника [168—170] подтвердили идентичность спектров трех компонентов. При этом были уточнены их звездные величины и взаимное положение. Так, согласно измерениям [168] в красной части спектра компоненты A, B, C имели блеск $16{,}30^m$ (A); $18{,}64^m$ (B) и $18{,}17^m$ (C). B отстоит от A на $1{,}77''$, а компонент C отстоит от A на $2{,}28''$. Уточненное значение красного смещения $Z_{изл}$ оказалось 1,725 [169]. Путем спекл-интерферометрических наблюдений на многозеркальном телескопе [171] удалось разрешить компонент A на два объекта, отстоящих друг от друга на $0{,}54''$. Структура изображений «тройного» квазара схематически показана на рис. 5.9, взятом из обзора [146].

В результате наблюдений PG 1115 + 08 A, B, C были отмечены некоторые особенности, отличающие его от 0957 + 561*A*, *B*. Так, компоненты A, B, C удалены друг от друга на значительно меньшие расстояния (приблизительно $2''$) и имеют большие отношения потоков A/C и A/B, что делает весьма серьезной проблему «загрязнения» спек-

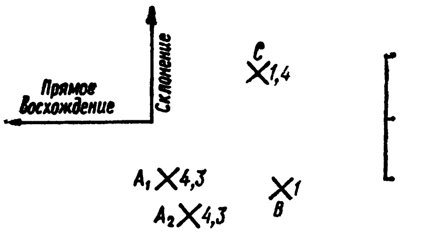


Рис. 5.9. Структура изображений PG 1115 + 08 (единица шкалы равна 1″, числа указывают блеск компонентов в относительных величинах)

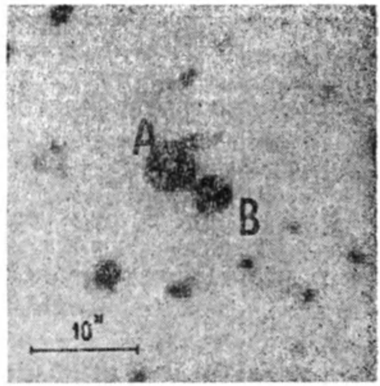


Рис. 5.10. ПЗС-изображение источника 2345 + 007

тров более слабых компонентов C и, особенно, B спектром компонента A. При анализе спектров поглощения [169] была отмечена довольно странная особенность, затрудняющая трактовку «тройного» квазара как проявление линзового эффекта. Так, среди обнаруженных в диапазоне 3260 Å $\leqslant \lambda \leqslant$ 4900 Å 21 линии поглощения некоторые имели $Z_{\text{погл}} > Z_{\text{изл}} = 1{,}725$. Причем линии поглощения группировались в 11 систем с одинаковыми значениями $Z_{\text{погл}}$, и количество линий увеличивалось с увеличением $Z_{\text{погл}}$. В дополнение ко всему объект 1115 + + 08 не обнаруживается при помощи VLA в радиодиапазоне до уровней потока $1{,}5 \cdot 10^{-3}$ Ян, что не позволяет (как в случае 0957 + 561) выявить тонкую радиоструктуру изображений.

Сразу же после высказанного в работе [165] предположения о том, что наблюдаются три изображения одного источника, были предприняты попытки обнаружения самой ГЛ, ответственной за умножение изображений далекого квазара. В результате поиска фокусирующей галактики в пределах 5″ от наблюдаемых компонентов ни одного объекта ярче 21^m не было выявлено [172]. Отсюда следовал вывод, что если фокусирующая галактика существует, то она должна быть либо слабее 21^m, либо находиться в пределах 1″ от одного из компонентов. Юнг с соавторами [168] для объяснения видимой структуры изображений предположил, что линзовый эффект создается массивной спиральной галактикой с $Z = 0{,}8$, расположенной между тремя компонентами, но ближе к A и B. Согласно этой модели должно было бы наблюдаться пять изображений далекого источника. Однако попытки обнаружить предполагаемую ГЛ вплоть до звездных величин $21{,}5^m$ ни к чему не привели. Следует заметить, что впоследствии удалось выявить пятое изображение квазара [173]. Наконец, в последующих наблюдениях обнаружено несколько объектов, возможно, ответственных за линзовый эффект. Так, в работе [174] появилось сообщение о том, что с помощью телевизионной техники вблизи компонента B удалось выявить объект, имеющий в красной части спектра блеск $19{,}8 \pm 0{,}3^m$. В условиях очень хорошей видимости на обсерватории Мауна-Кеа между двумя составляющими компонента A была обнаружена галактика. Кроме того, вблизи 1115 + 08 найдены еще две галактики с красными смещениями $0{,}306 \pm 0{,}02$ и $0{,}304 \pm 0{,}005$. Предполагается, что вместе с центральной галактикой они составляют небольшую группу галактик [175]. Однако для окончательного ответа на вопрос о том, что же в действительности представляет из себя гравитационная линза, необходимы дальнейшие наблюдения «тройного» квазара.

Сильным аргументом в пользу линзового эффекта явилось обнаружение временных задержек между изменениями блеска трех компонентов. Фотометрия проводилась с 1981 по 1985 г. с помощью 1,5-метрового телескопа. Достигнутая точность измерения блеска в $0{,}02^m$ позволила установить переменность источников с амплитудой $0{,}3^m$. Измеренные времена задержек в изменениях блеска между компонентами $\Delta t\,(A - B)$ и $\Delta t\,(A - C)$ составляют менее месяца. Такой характер переменности компонентов является сильным подтверждением реальности ГЛ и может быть использован при уточнении ее параметров [176].

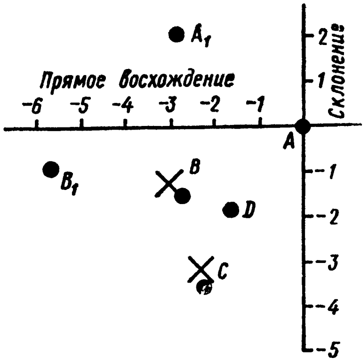
3. Квазар QSO 2345 + 007 *A, B*. Третий кандидат в ГЛ, квазар QSO 2345 + 007, открыт в августе — октябре 1981 г. [177]. Наблюдения, проводившиеся вначале на 3,6-метровом телескопе на горе Мауна-Кеа (Гавайские острова), были в дальнейшем продолжены на 4-метровом телескопе обсерватории Китт-Пик (США). Оказалось, что источник 2345 + 007 имеет двойную структуру: два голубых звездообразных объекта, отстоящих друг от друга на 7, 3″ с красными смещениями $Z_1 = 2{,}152 \pm 0{,}005$ и $Z_2 = 2{,}147 \pm 0{,}005$. Более яркий компонент со звездной величиной $19{,}5^m$ обозначили буквой *A*, второй, более слабый (21^m),— буквой *B*. Равенство красных смещений и идентичность спектров свидетельствовали о том, что QSO 2345 + + 007 *A*, *B* может быть включен в число объектов, в которых наблюдается линзовый эффект. Дальнейшие оптические наблюдения на многозеркальном телескопе подтвердили идентичность спектров компонентов, что явилось аргументом в пользу гипотезы ГЛ [178]. Однако саму линзу, ответственную за раздвоение изображения, обнаружить не удалось. Глубокое фотометрирование, проводившееся в течение 1984—1985 гг. на 4-метровом телескопе обсерватории Китт Пик [179], с помощью приборов с зарядовой связью (ПЗС) не позволило обнаружить галактику-линзу вплоть до предельных для данного телескопа звездных величин 26^m. В то же время данные наблюдений дают основание предполагать, что наиболее вероятное красное смещение объекта, играющего роль ГЛ, лежит в пределах $Z_L \simeq 0{,}4 \div \div 0{,}7$. На рис. 5.10 представлено ПЗС-изображение 2345 + 007, взятое из [179].

Большую роль в поиске галактики-линзы играет моделирование ГЛ, с помощью которого оцениваются возможные параметры линзы. К числу таких исследований относится работа [180], в которой обсуждаются возможности реализации модели Кинга и двойной последовательной фокусировки. Показано, что в рамках первой модели большое угловое расстояние (7,3″) между изображениями можно получить лишь в случае, когда ГЛ расположена близко к наблюдателю ($Z_L \leqslant \leqslant 0{,}14$). Вторая модель предполагает наличие двух линз-галактик, расположенных одна за другой вблизи луча, идущего от источника к наблюдателю. Для того чтобы выяснить, какая из рассмотренных моделей соответствует действительности, предлагается некоторый проверочный тест. Две возможности удастся различить по времени запаздывания в изменениях блеска двух изображений.

4. Квазар MG 2016 + 112 *A*, *B*, *C*. В октябре 1983 г. Лоуренс с соавторами с помощью 5-метрового телескопа Маунт-Паломарской обсерватории (США) провел оптическое отождествление «тройного» радиоисточника MG 2016 + 112 *A*, *B*, *C*. В результате исследований радиокомпоненты *A* и *B* были отождествлены с оптическими звездообразными объектами, имеющими в красной части спектра блеск примерно $22{,}5^m$ и отстоящими друг от друга на $3{,}4''$. Вблизи компонента *C* выявлен более красный протяженный объект со звездной величиной 23^m. Оказалось, что в диапазоне длин волн $4400 Å \leqslant \lambda \leqslant \leqslant 8400$ Å компоненты *A* и *B* имеют идентичные спектры излучения и одинаковые красные смещения $Z_{изл} \simeq 3{,}2733 \pm 0{,}0014$. С учетом морфологии цвета и видимой звездной величины определено красное смещение протяженного объекта вблизи $C: Z \simeq 0{,}80 \pm 0{,}15$. Было высказано предположение, что, по-видимому, компонент *C* является гигантской эллиптической галактикой. Равенство красных смещений компонентов *A* и *B* и идентичность их спектров позволили авторам [181] сделать вывод, что множественные изображения MG 2016 + 111 могут быть связаны с эффектом фокусировки.

Для объяснения наблюдаемой структуры источника Нарасима с соавторами предложил две модели ГЛ [182]. Согласно первой, линза представляет собой скопление галактик с яркой галактикой, совпадающей с компонентом *C*. Такая линза должна создавать тройное изображение (*A*, *B*, *D*), причем компонент *D* расположен далеко от *A* и *B* и является по сравнению с ними более слабым. Во второй модели линзовый эффект создают две эллиптические галактики с различными красными смещениями, одна из которых совпадает с *C*. Как отмечают авторы, для окончательного выбора необходимо провести длительные наблюдения тройного квазара и измерить временные задержки изменений светимости между компонентами.

Дальнейшие наблюдения, проведенные в мае — июне 1984 г. [183] при помощи телескопа Хейла и на радиотелескопе VLA на длине волны $\lambda = 6$ см, позволили уточнить структуру тройного радиоисточника. Важнейшим результатом явилось обнаружение еще одной гигантской эллиптической галактики, которую обозначили буквой *D*. Ее красное смещение точно определить не удалось, однако, как и для *C*, была получена оценка $Z \sim 0{,}8$. Кроме того, было зарегистрировано существенное ослабление компонента *B* в оптическом диапазоне по сравнению с предыдущими измерениями (в радиодиапазоне оба компонента *A* и *B* остались неизменными). Схема расположения компонентов MG 2016 + 112 показана на рис. 5.11. Дальнейшие исследования обнаруженной галактики *D* были продолжены на 5-метровом телескопе [184]. При помощи более чувствительного спек-



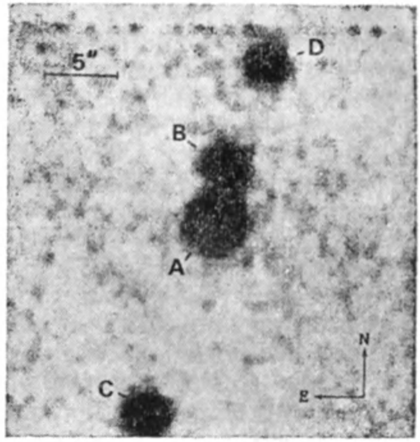


Рис. 5.11. Структура источника *MG* 2016 + 112 (● — оптика, × — радио, единица шкалы равна 1")

Рис. 5.12. ПЗС-изображение источника 1635 + 267 (объекты *C* и *D* — галактические звезды)

трографа измеренное красное смещение MG 2016 + 112 *D* оказалось равным $Z = 1{,}010 \pm 0{,}005$. В дополнение к найденным уже компонентам *A*, *B*, *C*, *D* замечены еще A_1 и B_1, удаленные от *A* и *B* на 3".

Обнаружение второй эллиптической галактики *D* показывает, что роль гравитационной линзы могут выполнять две гигантские эллиптические галактики — *C* и *D*. Однако и в этом случае окончательный ответ на вопрос о структуре ГЛ требует более детального исследования оптической и радиоструктур MG 2016 + 112.

5. Квазар QSO 1635 + 267 *A*, *B*. В результате наблюдений, проведенных в июне — июле 1983 г. на 3-метровом телескопе Ликкской обсерватории, а затем в октябре на 4-метровом телескопе обсерватории Китт-Пик была обнаружена и исследована пара квазаров 1635 + + 267 *A*, *B*, имеющих практически одно и то же красное смещение $Z_{изл} = 1{,}961 \pm 0{,}003$ [185]. Путем корреляционной обработки отличия в красных смещениях компонентов определены как $(3{,}2 \pm \pm 8{,}5) \cdot 10^{-4}$, что соответствует отличиям в скоростях всего лишь $(33 \pm \pm 86)$ км $\cdot$ с$^{-1}$. Более яркий компонент пары, имеющий звездную величину $19{,}15^m$, обозначен буквой *A*, второй компонент, имеющий звездную величину $20{,}75^m$,— буквой *B*. Расстояние между компонентами *A* и *B* примерно равно 3,8" (рис. 5.12).

Малое отличие в красных смещениях компонентов и подобие их спектров дали основание авторам работы [185] предположить, что компоненты *A* и *B* представляют собой два изображения одного квазара, образовавшиеся в результате линзового эффекта. Непосредственные наблюдения не позволили обнаружить ГЛ вплоть до величин $23{,}5^m$, однако ее существование вытекает из анализа спектра поглощения яркого компонента *A*. Так, судя по линиям поглощения Mg II 2799, красное смещение линзы Z_L предполагается равным 1,118.

6. Квазар QSO 2237 + 0305. В сентябре 1984 г. с помощью реф-

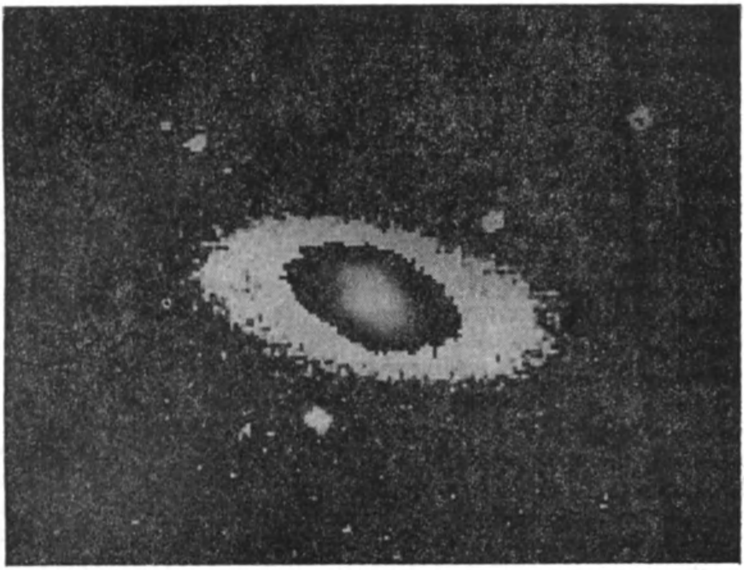


Рис. 5.13. ПЗС-изображение источника 2237 + 0305 (квазар расположен в центре спиральной галактики)

лектора Уипплской обсерватории (США) проводились исследования спиральной галактики 2237 + 0305, имеющей блеск примерно 15^m. Спектральные наблюдения в диапазоне длин волн 4600 Å $\leqslant \lambda \leqslant$ $\leqslant$ 7300 Å, а затем в диапазоне 3200 Å $\leqslant \lambda \leqslant$ 7400 Å позволили определить красное смещение галактики: $Z = 0{,}0394$ [132]. Но самым удивительным оказалось то, что на расстоянии всего лишь 0,3″ от центра спиральной галактики расположен квазар с красным смещением $Z = 1{,}695$. ПЗС-изображение наблюдаемой картины представлено на рис. 5.13 из [132]. В радиодиапазоне на волне $\lambda = 6$ см с помощью VLA этот источник (спиральная галактика + квазар) не наблюдается вплоть до значения потока 0,5 мЯн. Анализируя полученные данные, астрофизики высказали предположение, что обнаруженный квазар является изображением далекого объекта, который виден прямо через ГЛ — спиральную галактику с $Z \simeq 0{,}04$. В последующих исследованиях [186, 187] возможность эффекта гравитационной фокусировки также не исключалась, хотя в работе [187] обращается внимание на очень малую вероятность точного совпадения квазара и галактики на одном луче зрения и высказывается альтернативная гипотеза «локального» квазара. Согласно этой гипотезе, вокруг квазаров с красным смещением Z могут быть расположены туманности с меньшим значением Z. Такие туманности были обнаружены у квазаров с малыми Z, но поиск туманностей вокруг квазаров с большими Z пока не проводился.

7. Квазар QSO 1146 + 111 ***B, C.*** В марте 1986 г. американские астрофизики Тернер, Берк и Шмидт [188] провели наблюдения пары квазаров 1146 + 111 B, C в целях проверки гипотезы ГЛ. На 4-метровом телескопе обсерватории Китт-Пик в диапазоне длин волн 4600 Å $\leqslant \lambda \leqslant$7800 Å с разрешением 15 Å были получены спектры компонентов B и C. Обнаружилось совпадение спектров в наиболее заметных особенностях столь же хорошее, сколь и в ранее открытых ГЛ. Сходство спектров и очень близкие красные смещения ($Z_{\text{изл}} \simeq 1{,}012$) компонентов подкрепили высказанную ранее гипотезу о том, что в наблюдаемой паре объектов проявляется эффект ГЛ. Необычность двойного изображения заключается в очень большом угловом расщеплении, примерно равном 157″, что более чем в 20 раз превышает известные ранее случаи. Для того чтобы возникло расщепление изображений 157″, ГЛ должна быть очень массивной. Она, в частности, может представлять собой богатое скопление галактик, которое, однако, пока не обнаружено. Другие, более экзотические, возможности — это сверхмассивная черная дыра с массой порядка $10^{15}\ M_{\odot}$ либо космическая струна [189]. Если ГЛ действительно представляет собой черную дыру, то, согласно [190], ее можно обнаружить по темному пятну диаметром не более 0,1″ в реликтовом фоне. Возникновение этого пятна связано с поглощением фотонов, пролетающих достаточно близко от ГЛ (см. § 2.7). Единственным инструментом, способным в настоящее время зарегистрировать этот эффект, является радиотелескоп VLA.

Отличительным признаком линзового эффекта на космических струнах является двойное изображение с угловым разделением порядка 1′ и равными яркостями. В работе [189] высказывается предположение, что именно такими изображениями оказываются пара квазаров 1146 + 111 B, C. Оба компонента (B и C) этого объекта наряду с идентичными спектрами и равными красными смещениями имеют примерно одинаковые яркости (отношение яркостей компонентов равно 1,02). Космическая струна, обеспечивающая появление таких изображений, должна иметь погонную плотность массы более чем $4{,}0 \cdot 10^{23}$ г $\cdot$ см$^{-3}$. Подтверждением гипотезы космической струны послужило бы обнаружение сдвига температуры реликтового фона вблизи этого объекта.

Через месяц после первого сообщения, в апреле 1983 г., на 3,6-метровом телескопе были проведены тщательные исследования спектров компонентов B и C в более широком диапазоне длин волн (5600 Å $\leqslant$ $\leqslant \lambda \leqslant$ 9300 Å) [191]. Оказалось, что в длинноволновой области спектры компонентов существенно различаются, что свидетельствует не в пользу гипотезы ГЛ. Однако, как отмечается в работе [192], обнаруженные различия спектров еще не опровергают полностью эффекта фокусировки, так как из-за временной задержки спектры компонентов могут различаться вследствие эволюции самого источника.

Еще одним аргументом против гипотезы ГЛ явились проведенные в марте — апреле 1986 г. измерения микроволнового фонового излучения (МФИ). Эти измерения важны по следующей причине. Если изображения B и C действительно образовались в результате гравитационного действия скопления галактик, то вследствие эффекта Зельдовича — Сюняева [135] должны наблюдаться флуктуации МФИ на

Таблица 5.2. **Расчетные параметры компактных ГЛ, расположенных в пределах гало нашей Галактики**

Наблюдаемые источники	Результаты измерений		Результаты расчета	
	Угол между изображениями (угл. с)	Отношение интенсивностей	Масса ГЛ 10^6 $M_\odot$	Расстояние до ГЛ (кпк)
2237 + 030	1,2	1,1	2,5	50
2016 + 112	3,4	1,6	8	30
1635 + 267	3,8	4,0	10	20
0957 + 561	6,15	1,3	25	20
2345 + 007	7,17	4,0	30	20

уровне порядка 10^{-3} [193]. Эти флуктуации можно зарегистрировать современными средствами наблюдений, что и попытались сделать в процессе упомянутых измерений [194] с помощью антенны диаметром 7 м и шириной диаграммы направленности (на длине волны $\lambda = 3$ мм), равной примерно 105″. В результате наблюдений флуктуаций МФИ на уровне 10^{-3} не обнаружено. Следовательно, этот эксперимент не подтверждает гипотезу ГЛ, но свидетельствует в пользу того, что *B* и *C* являются различными физическими объектами.

Таким образом, пока еще не совсем ясно, является ли пара квазаров 1146 + 111 *B*, *C* еще одним проявлением ГЛ или здесь мы встречаемся с двумя близкими по спектрам и красным смещениям излучателями. Заметим, что возможность существования компактных ГЛ — черных дыр — обсуждалась в литературе не только в связи с источником 1146 + 111 *B*, *C*. Падманабан и Читре [195] обратили внимание на то, что в тех случаях, когда в ГЛ наблюдается только два изображения, их важнейшие параметры — угловое расстояние и отношение интенсивностей — легко объяснить, предположив, что ГЛ служит черная дыра, расположенная в пределах гало нашей Галактики. Действительно, с помощью формул § 2.1 можно выразить измеряемые величины $\Delta\Psi$ и q_1/q_2 через массу M «точечной» ГЛ, ее отдаление x от наблюдателя и прицельный параметр источника ρ_s. Не представляет труда решить и обратную задачу, определяя M и x, через $\Delta\Psi$ и q_1/q_2. Результаты расчета для некоторых ГЛ с двумя изображениями приведены в табл. 5.2.

По данным расчета видно, что массивные черные дыры с массой несколько миллионов $M_\odot$ могут воспроизводить наблюдаемую картину, но будут расположены не на космологических расстояниях, а в пределах нашей Галактики. Эта гипотеза найдет свое подкрепление в будущем, если число ГЛ с двойными изображениями будет возрастать. Наиболее важным аргументом «за» или «против» высказанной в работе [195] гипотезы является надежное измерение времени задержки Δt изменений яркости изображений. Для ГЛ — черной дыры — в пределах нашей Галактики значение Δt ничтожно мало (минуты) по сравнению с тем, которое характерно для удаленных галактик-линз (месяцы, годы).

8. **Радиогалактика 3C 324.** Во всех описанных выше ГЛ источниками излучения служили квазары. Однако в 1986 г. было высказано

предположение, что эффект ГЛ должен наблюдаться также на радиогалактиках [40] и избыток светимости (до 5 m) некоторых из них, возможно, объясняется скорее гравитационной фокусировкой, чем эволюцией [141]. Среди 13 таких объектов особо отмечаются 4 радиогалактики: 3С 13, 3С 324, 3С 266 и 3С 238, отличающиеся тем, что для всех них удается указать возможные кандидаты в ГЛ (галактики и скопления галактик). Согласно расчетам в результате действия ГЛ первые два источника не только должны приобрести «сверхсветимость», но и образовать множественные изображения.

Дальнейшие наблюдения подтвердили этот эффект для радиогалактики 3С 324 [226]. Ее характерной особенностью, которая и послужила поводом для заключения о действии ГЛ, является наличие двух серий спектральных линий в оптике. Одна из них соответствует $Z = 1{,}206$, а вторая — $Z = 0{,}845$. Четкого пространственного разделения изображений источника, как это наблюдалось во всех предыдущих случаях с квазарами, здесь не происходит. Тем не менее фотографии, полученные с помощью 3,6-метрового телескопа обсерватории Мауна-Кеа в условиях очень хорошей видимости, свидетельствуют о сложной структуре, состоящей из нескольких компонентов [226]. Три, а возможно, и четыре компонента, частично перекрывающих друг друга, расположены в пределах нескольких угловых секунд.

Картина поразительно меняется на фотографиях, сделанных с помощью интерференционных фильтров в узких спектральных окнах (рис. 5.14). На длине волны $\lambda = 5139$ Å (линия ионизированного углерода с учетом красного смещения $Z = 1{,}206$) компонент А виден слабее, чем B и C. Если же перейти к волне $\lambda = 6840$ Å (линия ионизированного кислорода с учетом красного смещения $Z = 0{,}845$), то будет виден только компонент A, а B и C исчезают. Такая особенность 3С 324 свидетельствует о том, что в узком лучевом конусе совмещаются два источника, находящихся на разных удалениях, и, следовательно, наблюдается линзовый эффект. Более близкий источник (компонент A) представляет собой галактику (возможно спиральную), которая играет роль ГЛ. Дальний источник (также галактика) предстает, благодаря линзовому эффекту, в виде расщепленных, частично перекрывающихся, изображений B, C и более слабого D. Фотографии на рис. 5.14 наглядно иллюстрируют возможность дистанционной селекции источников за счет разных красных смещений путем наблюдений в узких спектральных интервалах.

9. Скопление галактик А 370. В этом скоплении эффект гравитационного линзирования проявляется не так, как в описанных выше ГЛ. Здесь наблюдается дугообразная структура, очень напоминающая детали тех кольцевых изображений, которые рассматривались ранее (см. рис. 2.6 и 2.9).

Впервые гигантская светящаяся дуга была открыта в сентябре 1985 г. группой сотрудников Тулузской обсерватории в скоплении галактик А 370 на 3,6-метровом телескопе на Гавайских островах

[40] Выделение особого класса радиогалактик в известной мере является условным, так как практически все галактики излучают в радиодиапазоне, хотя с сильно отличающимися интенсивностями.

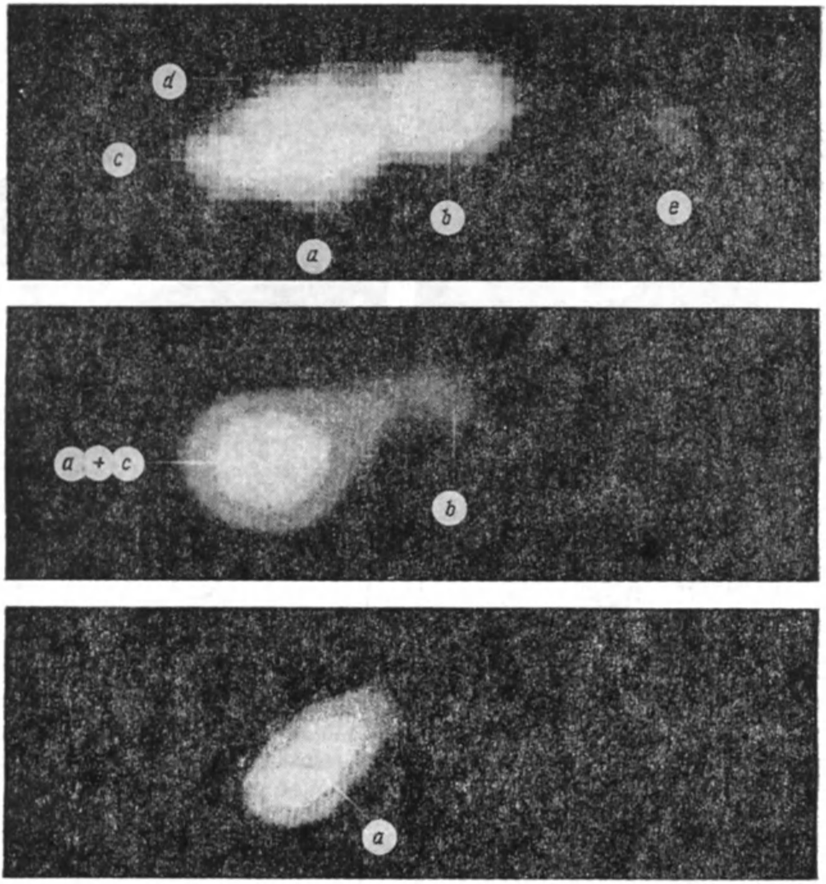


Рис. 5.14. ПЗС-изображение 3С 324:

сверху — снимок в красном свете, посредине — снимок в линии ионизированного углерода с $Z = 1{,}206$ ($\lambda = 5139$ Å); снизу — снимок в линии ионизированного кислорода с $Z = 0{,}845$ ($\lambda = 6840$ Å): *a* — галактика-линза; *b*, *c*, *d* — множественные изображения фокусируемой галактики; *e* — возможно, галактика, соседняя с 3С 324

[230]. В дальнейшем подобные структуры были обнаружены и в других скоплениях, а именно в А 2218 и Cl 2242-02 [231, 232]. Если предположить, что дугообразные объекты принадлежат скоплениям, то, исходя из принятых оценок расстояний, их линейные размеры должны превышать 100 кпк при сравнительно небольшой (до 10 кпк) ширине (рис. 5.15). Предложен ряд объяснений природы этих объектов. Возможно, например, что дуги возникли в результате мощного взрыва, а их свечение создается молодыми звездами, рождение которых инициировано ударной волной в межгалактической среде. Высказывалось также предположение, что здесь наблюдается «световое эхо» [233, 234] — рассеяние в межгалактической среде импульса излучения квазара, расположенного за скоплением, и, наконец, гипотеза

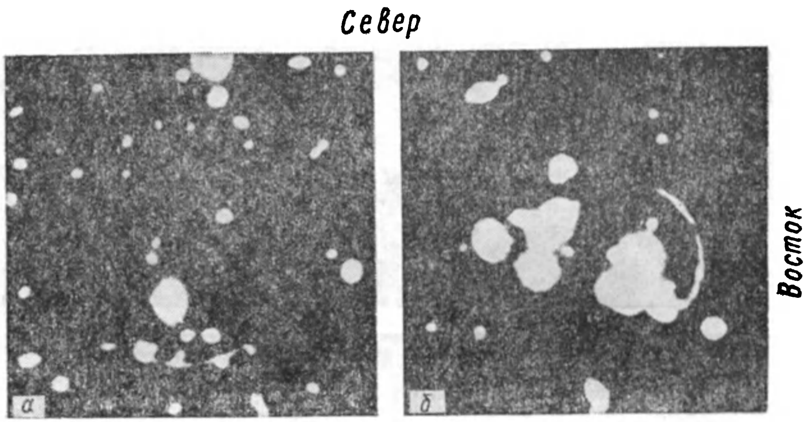
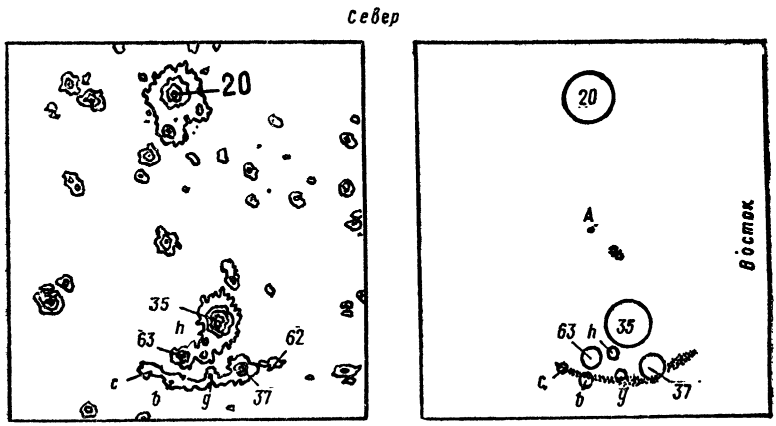


Рис. 5.15. Гигантские дуги в скоплениях А-370 (*а*) и Cl 2242-02 (*б*). Фотография взята из [231].



а б

Рис. 5.16. ПЗС-изображение скопления галактик А-370 (*а*) и схема численного моделирования (*б*). Основная масса в скоплении $2{,}8 \cdot 10^{14}\ M_{\odot}$ сосредоточена в точке *А*; радиусы кружков пропорциональны соответствующим массам; вблизи точки *А* показано невозмущенное изображение источника, а внизу (точками) — расчетное. Рисунок взят из [232].

ГЛ. Наиболее подробно исследован объект в А 370, на котором мы и сосредоточим внимание.

Гипотеза ГЛ высказана Пашинским [231] и, согласно исследованиям, проведенным Сукай с соавторами [232], представляется наиболее правдоподобной. Она подкрепляется как спектральными данными, так и результатами численного моделирования. Дуга, охватывающая (если считать ее дугой окружности) примерно 60°, имеет неоднородную структуру с небольшим разрывом и расширением на восточном конце (рис. 5.16, *а*). Спектры восточной детали и остальной части дуги совпадают, их красное смещение $Z = 0{,}59$, в то время как основные объекты в A 370 имеют $Z = 0{,}374$. Следовательно, дуга не принадлежит скоплению, а находится за ним, т. е. сквозь гравитационные поля галактик скопления и межгалактическую среду наблюдается какой-то более удаленный источник. В спектре дуги отсутствуют сильные эмиссионные линии, характерные для излучения квазаров, что свидетельствует не в пользу гипотезы «светового эха» от импульса квазара. В то же время численная реконструкция изображения в модели ГЛ, соответствующей основным членам скопления A 370 (рис. 5.16, *б*), совпадает с наблюдаемой картиной и является сильным аргументом в пользу гравитационного линзирования. При построении изображений предполагалось, что в соответствии со спектральными характеристиками дуги фокусируемый источник представляет собой спиральную галактику. Что касается самой ГЛ, то в расчете была принята довольно сложная модель распределения масс, создающих фокусирующее гравитационное поле. Основная масса скопления примерно (2—3) 10^{14} $M_\odot$ распределена равномерно в центральной области A 370 в пределах круга радиусом 25″. Если бы не было иных гравитирующих объектов, то, как известно, наблюдалось бы три изображения источника: две дуги и одно центральное. Однако наличие двух гигантских эллиптических галактик (объекты *20* и *35* на рис. 5.16) и еще нескольких галактик меньшей массы (в расчете учитывалось девять элементов) существенно меняет всю картину. Южная дуга (именно она наблюдается на фото) становится неоднородной, а в ее восточной части возникает разрыв, о котором упоминалось выше. Вторая же, северная, дуга попадает на то место, где расположена эллиптическая галактика с $M \sim 3 \cdot 10^{12} M_\odot$ (объект *20* на рис. 5.16). Поэтому ее изображение сильно деформируется и ослабляется. Расчеты показывают, что и центральное изображение также будет ослаблено. Все эти особенности хорошо согласуются с результатами наблюдений, что свидетельствует в пользу гипотезы ГЛ.

Заметим, что слабые центральные изображения видны и в других скоплениях, где обнаружены гигантские дуги. Очень важные аргументы, которые позволили бы сделать окончательный выбор между гипотезами «световое эхо» и ГЛ, связаны с поляризационными измерениями. К сожалению, к моменту написания книги они еще не были проведены.

§ 5.4. Астрофизические приложения эффекта гравитационной фокусировки

В предыдущих главах основное внимание уделялось расчету видимых изображений источника при заданном распределении масс в ГЛ и известным геометрическим характеристикам. С точки зрения приложений бóльший интерес представляет решение обратной задачи об определении тех или иных астрофизических характеристик, включая и параметры космологической модели, по наблюдениям эффектов гравитационной фокусировки. К сожалению, ограниченные возможности наблюдений (в космологических масштабах мы имеем дело с данными, относящимися к одной точке, одному направлению и одному моменту времени) не позволяют сформулировать обратную задачу в строгой постановке. По существу в нашем распоряжении остается единственная возможность, задаваясь априори теми или иными моделями ГЛ и источников с неизвестными параметрами, вычислять последние на основе решенных в гл. 2 и 4 прямых задач. Успех в этом случае зависит во многом от интуиции автора, но если учитывать огромный опыт, накопленный астрофизиками к настоящему времени, то дополнительные возможности, которые возникают при наблюдениях ГЛ, оказываются не столь уж малыми.

Еще задолго до открытия первой ГЛ было показано, что, измеряя время задержки Δt в изменениях интенсивности разных изображений одного и того же источника, *можно определить постоянную Хаббла* H_0 [196, 197]. Дальнейшее развитие теории показало, что Δt складывается из двух частей: $\Delta t = \Delta t_L + \Delta t_{\text{ор}}$ [198]. Первая часть чисто геометрическая. Она определяется разностью длины лучей, формирующих разные изображения. Второе слагаемое возникает потому, что гравитационные потенциалы вдоль каждой трассы, вообще, отличаются друг от друга (этот эффект был рассмотрен нами в § 1.4 в связи с радиолокационными экспериментами в пределах Солнечной системы). Обе составляющие Δt оказываются одного порядка, и ни одним из них пренебрегать нельзя. В численном примере, который приведен в работе [198] для массы ГЛ $3{,}6 \cdot 10^{12}\ M_{\odot}$, $\Delta t_L \simeq 2{,}4$ г, $\Delta t_{\Phi} \simeq 2{,}2$ г.

В настоящее время в литературе используются три способа расчета Δt: метод волнового фронта [199], интегрирование вдоль луча с разделением геометрической и гравитационной составляющих и введение вспомогательной скалярной функции, которая фактически совпадает с использовавшейся ранее фазовой задержкой в плоскости ГЛ (см. § 3.2). В работе [200] показана эквивалентность всех трех способов не только по окончательным результатам расчета Δt, но и в том смысле, что все они допускают учет космологической модели с помощью некоторого множителя

$$T = \frac{x_L^{(e)} x_s^{(e)}}{x_{Ls}^{(e)}} \frac{Z_s - Z_L}{Z_s Z_L} (1 + Z_L)$$

($x_L^{(e)}$, $x_s^{(e)}$, $x_{Ls}^{(e)}$ — угловые расстояния в единицах c/H_0 от наблюдателя до линзы, от наблюдателя до источника и между линзой и источником). С учетом T интересующая нас величина Δt, точнее $H_0 \Delta t$, определяется как

$$H_0 \Delta t = T f_{\Delta t}, \tag{5.17}$$

где $f_{\Delta t}$ вычисляется одним из указанных выше способов. Наиболее просто это сделать путем интегрирования по траекториям [200]. Основная погрешность в расчете Δt связана с неопределенностью в выборе модели ГЛ и распределения материи вдоль трассы. Для квазара 0957 + 561 имеется оценка погрешности около 20 % [201], а само значение H_0, согласно [202], оценивается сверху таким образом:

$$H_0 \leqslant 200\ [\text{км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпк}^{-1}]/\Delta t\ [\text{год}].$$

Поскольку, по литературным данным, результаты наблюдений дают $\Delta t \sim 1{,}6$ г, найденное с помощью эффекта ГЛ значение $H_0 \leqslant 75$ км $\times$ $\times$ с$^{-1}$ · Мпк$^{-1}$.

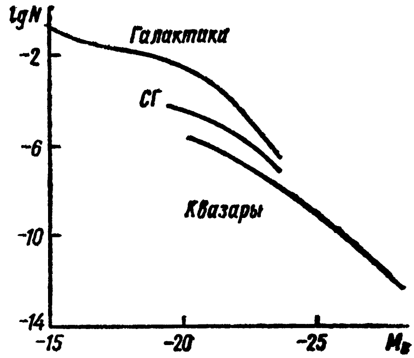


Рис. 5.17. Зависимость пространственной концентрации N от абсолютной звездной величины M_B для галактик, сейфертовских галактик (СГ) и квазаров

Близкая по сути, но несколько иная по форме обратная задача рассмотрена в работе [203]. Вместо того чтобы вычислять H_0 по измеренным значениям Δt, авторы, полагая значение H_0 известным, рассчитывают красное смещение источника Z_s. Сравнивая найденное таким образом значение Z_s с тем, которое получается из оптических спектров, можно сделать выводы о космологической или иной природе красного смещения квазаров. Исходными данными наблюдений являются Δt, $\Delta\Psi$ и q_1/q_2. Кроме того, надо знать красное смещение линзы Z_L и ее массу. Считая, что в случае 0957 + 561 масса ГЛ составляет примерно 10^{12} $M_\odot$, получают удовлетворительное совпадение значений Z_s, найденных двумя способами.

Важнейшей характеристикой эволюции источников является функция светимости, характеризующая связь числа источников с их светимостью (с абсолютной звездной величиной M_B). Кривые $\lg N = f(M_B)$ для галактик и квазаров отличаются друг от друга тем, что число квазаров уменьшается с ростом светимости более плавно (рис. 5.17). Большая яркость квазаров по сравнению с галактиками видна также на диаграмме Хаббла (рис. 5.5). Вскоре после открытия ГЛ было высказано предположение, что *расширение функции светимости квазаров* может оказаться кажущимся эффектом, связанным с фокусировкой излучения в гравитационных полях более близких галактик [204—207]. Фактически возродилась старая идея Барнотти [140], но в ее статистическом аспекте, когда обычные и Сейфертовские галактики вместе с квазарами рассматриваются как результат эволюции одного класса объектов, а фокусировка излучения ранних источников более поздними (близкими) приводит к кажущемуся возрастанию светимости. В работе [205] на основе этой гипотезы делается ряд заключений, допускающих экспериментальную проверку. Изображения многих квазаров при достаточном угловом разрешении телескопов (не хуже 0,2″) и большом динамическом диапазоне детекторов должны расщепиться на ряд компонентов. Яркие квазары с малыми значениями Z_s должны иметь слабую туманную корону (фокусирующий объект). В частности, если 3С 273 связан с ГЛ, то угловые размеры светящейся туманности оцениваются в 10″, а ее светимость примерно на $9m$ меньше, чем светимость центральной области в пределах 1″. Первые расчеты [204] были не вполне корректными, так как в них предполагалось, что светимость далеких квазаров за счет гравитационной фокусировки может только возрастать. Однако в определенных ситуациях возможно и ослабление потока излучения в ГЛ (см. § 4.4). Более точные вычисления с учетом сохранения средней светимости квазаров выполнены в работе [206], где получены несколько отличные от проведенных в [204] окончательные численные оценки. Подробный анализ возрастания яркости квазаров, наблюдаемых вблизи галактик с меньшими значениями Z, проведен в статье [124], где учтено влияние гравитационного поля не только всей галактики в целом, но и отдельных звезд. Рассчитаны изменения функции светимости, которая описывается интегродифференциальным уравнением переноса. По оценкам авторов [124], наибольшие изменения следует ожидать в окрестности $m \simeq 23$. Поскольку возрастание яркости квазаров вуалируется случайными отклонениями, которые не связаны с эффектом ГЛ, статистически достоверные результаты можно получить только на очень большом числе (порядка $10^{4,5}$) ассоциаций квазар — галактика.

Гравитационная фокусировка не только влияет на функцию светимости квазаров, но и приводит к *корреляции положения квазаров с более близкими галактиками и скоплениями галактик*. В работе [205] указывается, что вблизи источников, смещенных на диаграмме Хаббла больше чем на $-4m$ от Сейфертовских галактик, следует искать галактики-линзы с $Z_L \sim 0{,}5Z_s/(1 + Z_s)$. В связи с этим отметим, что астрономические наблюдения указывают на часто встречающееся сочетание квазаров с большими значениями Z_s и галактик с существенно меньшими Z_L. Такие совпадения можно объяснить, если предположить, что галактики имеют массивное гало [208]. Статистический анализ ассоциаций некоторых квазаров (рассматривалась выборка из 112 оптически переменных объектов с $Z_s > 0{,}1$ и галактик с $m < 15{,}7$) показал, что имеется некоторое превышение числа ассоциаций квазар — галактика с угловым расстоянием меньше 5′ по сравнению со случайным распределением квазаров [211]. Этот результат интерпретируется как проявление действия ГЛ, образуемых отдельными звездами в гало галактик. В более поздней работе [214] показано, что эффект становится слабее, если учесть влияние гравитационного поля галактики в целом. Высказывалась и другая крайняя точка зрения, согласно которой большинство скоплений квазаров с $Z_s \gtrsim 2$ представляют собой множественные изображения одного источника [212], но согласно работе [213] она оказывается несостоятельной, так как у скоплений квазаров наблюдается большой разброс в красных смещениях.

Еще одно проявление гравитационной фокусировки — это *искажение формы далеких протяженных источников*. В § 2.2 было показано, каким образом линейные образования превращаются ГЛ в кольцеобразные структуры. Если бы удалось надежно обнаружить этот эффект, а также некоторые специфические искажения форм эллиптических галактик, то, по данным наблюдений, возможно, удалось бы сделать оценку однородности распределения вещества во Вселенной [215, 216]. Наряду с пространственными изменениями формы источников *ГЛ меняют также их светимость, во времени*. Особенно резкие изменения $\mathcal{J}(t)$ связаны с действием микролинз (§ 4.4). Попытка объяснить таким образом быструю переменность некоторых лацертидов [41] сделана в работе [217]. Подробный анализ, связывающий наблюдаемую активность галактических ядер с действием ГЛ, приведен в статье [218].

Исследование структуры изображений (§ 2.2) показывает, что в тех случаях, когда источник пересекает критическую область (каустику), его изображение в картинной плоскости ГЛ резко меняется. Эти изменения будут восприниматься наблюдателем как очень быстрое движение. Никаких релятивистских ограничений на скорость этих кажущихся перемещений естественно не существует, в частности, *могут наблюдаться сверхсветовые скорости*. Сверхсветовое расширение структур в ядрах квазаров и радиогалактик было обнаружено в 1969—1971 гг., а его традиционное объяснение заключается в том, что кажущаяся скорость выброса, происходящего под углом φ к лучу зрения, определяется по формуле $v_{\text{каж}} = v \sin \varphi / \left(1 - \frac{v}{c} \cos \varphi\right)$. Для релятивистских выбросов ($v \simeq c$) и малых φ значение $v_{\text{каж}}$ может во много раз превосходить c [134]. Возможная связь сверхсветовых скоростей с ГЛ отмечалась в работах [219, 220], а в обзоре [221] обсуждалось пять альтернативных объяснений этого явления, включая и гравитационную фокусировку. Конкретные оценки для одного из самых ярких квазаров 3С 273 ($m = 12{,}7$, $Z = 0{,}158$) приведены в работе [225], где отмечается, что, приняв гипотезу ГЛ, можно объяснить целый ряд необычных свойств 3С 273. К ним относятся: высокая светимость, сверхсветовое движение со скоростью около 10 c компонента 3С 273 B, различие в позиционных углах примерно на 20° между изображениями струи в оптике и радио, смещение на 0,5″ изображения квазара от центра окружающей его туманности. Авторы [225] рассматривают несколько моделей ГЛ: сферическую, сфероидальную и спиральную галактики. Вероятность расположения галактики-линзы где-то на полпути до квазара, что необходимо для объяснения сверхсветового движения, примерно совпадает с вероятностью выброса с релятивистской скоростью под определенным углом к лучу зрения.

В обширном потоке литературы, посвященной астрофизическим приложениям ГЛ, просматривается иногда стремление, встретившись с необычным явлением, привлечь для его объяснения гравитационную фокусировку. В то же время делаются предположения о том, что *некоторые экзотические объекты, существование которых предсказывается теорией, возможно, обнаружат себя в качестве своеобразных ГЛ*. Толчком к этому послужило, в частности, открытие двойного квазара QSO 1146 + 111 B, C с расщеплением 157″. Необычно большой угол между изображениями свидетельствует об огромной массе ГЛ (если здесь действительно наблюдаются два изображения одного источника). В качестве линзы может действовать черная дыра

[41] Немногочисленная группа галактик с активными ядрами. Названы по объекту BL Lacertae (BL Ящерицы). Их основной признак — переменность блеска, достигающая в оптике 4—5m.

либо космическая струна, линейное образование с колоссальной погонной плотностью массы, превосходящей 10^{19} г · см$^{-1}$ [224]. О противоречиях в такой трактовке уже упоминалось в конце § 5.3, а подробный анализ специфических свойств ГЛ, образованных космическими струнами, можно найти в работах [55—57, 224]. Оценки вероятности линзирования струнами и статистика угловых расстояний между изображениями удаленных точечных источников рассчитаны в работе Л. И. Гурвица [235].

Интересные эффекты возникают в том случае, когда излучение источника фокусируется его собственным гравитационным полем. Действие самогравитации становится заметным, если излучающая область находится в достаточно сильном гравитационном поле, т. е. радиус светящейся поверхности тела R не очень сильно превышает его гравитационный радиус r_g. Для Солнца, например, отношение r_g/R весьма мало (примерно $4 \cdot 10^{-6}$), но для нейтронной звезды оно возрастает на много порядков (до 0,5), и самофокусировку излучения следует учитывать. Анализ лучевых траекторий показывает, что за счет преломления в собственном поле тяжести становится видимой значительная часть обратной стороны нейтронной звезды [15]. В «чистом» виде этот эффект вряд ли можно наблюдать, так как все нейтронные звезды-пульсары настолько далеки от нас, что воспринимаются любыми инструментами как точечные. Однако самогравитация должна проявить себя в виде специфических искажений формы импульса пульсара. Профиль интенсивности излучения, исходящего из полярной шапки пульсара, несколько сглаживается, а в некоторых случаях может появиться второй пик в противофазе с основным [222]. Не менее своеобразно влияет самогравитация и на излучение, исходящее из внутренних областей массивного прозрачного объекта. В работах [58, 223] рассмотрен эффект ГЛ в гипотетическом космическом объекте, состоящем из вырожденного нейтринного газа. Показано, что существуют направления, в которых яркость излучателя возрастает за счет самофокусировки в сотни раз. Кроме того, должно наблюдаться большое красное смещение некосмологического происхождения. Таким образом, авторы предлагают объяснение двух основных свойств квазаров: высокой светимости и большого красного смещения. Численные оценки в цитированных статьях даны для массы объекта в пределах $(10^{10}—10^{15})\,M_\odot$ и массы покоя нейтрино (10—30) эВ.

В последнее время в литературе появились сообщения об открытии кольцевых изображений (их называют «Кольцами Эйнштейна»), которые определенно связываются с действием ГЛ. Первое кольцо (объект *MG* 1131+0456) было обнаружено с помощью радиотелескопа *VLA* в созвездии Льва в 1988 г. Наблюдаемый здесь объект — типичный радиоисточник, являющийся выбросом из ядра, вид которого искажен вплоть до раздвоения гравитационным полем более близкой эллиптической галактики. Само же кольцо является изображением выброса, вытянутого позади галактического центра. Каким образом почти прямолинейный объект превращается в кольцевой, хорошо видно на рис. 2,8.

О втором «Кольце Эйнштейна» (объект MG 1654+1346) стало известно в начале 1989 г. Здесь наблюдается далекий квазар с двумя радиовыбросами. Один из выбросов совпал с высокой точностью с галактикой — линзой, что и привело к возникновению кольца. Второй выброс находится достаточно далеко ($\sim 7''$) от ГЛ, и его изображение почти не искажается. Надежно были установлены красные смещения квазара ($Z_S = 1{,}74$) и галактики ($Z_L = 0{,}254$), т. е. расстояния до источника и линзы. После этого, зная диаметр кольца не составило труда рассчитать массу галактики — линзы. Она оказалась равной порядка $3 \cdot 10^{11} M_{\odot}$. По-видимому, это первый случай определения массы галактики непосредственно по ее полному гравитационному полю. Особенно важно, что реализованный здесь способ является независимым относительно традиционного расчета массы на основании измерений скорости вращения галактики на разных расстояниях от центра.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Трудно предвидеть влияние новых открытий на развитие науки и техники даже в ближайшие годы, не говоря уже об отдаленной перспективе. Но все же, чего можно ожидать от ГЛ? Конечно, их значение заключается не в экспериментальной проверке ОТО. В слабых полях она уже проверена с несравненно большей точностью, чем это возможно (пока) с помощью ГЛ. Главное — это получение с их помощью ценной астрономической информации. Здесь нам хотелось бы привести слова академика Я. Б. Зельдовича [229]: «За последние 10 лет стало ясно, что более половины массы любого достаточно большого объема во Вселенной находится в некоторой ненаблюдаемой форме, так как она не излучает электромагнитные волны и не взаимодействует с ними. Эта масса ощущается только благодаря производимому ею гравитационному притяжению. Однако пока не существует никаких детекторов (типа применяемых в ядерной физике), которые могли бы зарегистрировать эту «скрытую массу», или «темную материю»». Не исключено, что линзовый эффект окажется наиболее подходящим «инструментом», пригодным для изучения «скрытой массы». Весьма определенно высказывается на этот счет известный физик-теоретик Редже: «Мы находимся в преддверии новой эпохи в астрофизике, когда сведения о далеких галактиках будут получены путем исследования влияния их гравитации на свет, идущий от еще более далеких объектов» [228].

Вторая половина XX в. оказалась весьма плодотворной для астрономии. Среди таких замечательных объектов, как квазары и пульсары, ГЛ занимают вполне достойное место. В 1989 г. исполнилось десять лет с момента обнаружения первой линзы. Знаменательно, что интерес к этому явления за истекшее десятилетие отнюдь не уменьшился.

Более того, темп публикаций, как теоретических, так и результатов наблюдений все время возрастает. Разработана специальная методика целенаправленного поиска ГЛ с помощью самых совершенных оптических инструментов и радиоизмерений. Фактически ГЛ уже начали работать как гигантские «телескопы», созданные самой природой. Они позволили выявить такие детали далеких источников, которые без ГЛ не были бы видны с Земли.

Кроме того, удалось оценить постоянную Хаббла и надежно измерить массу галактики — линзы. Очень важно, что способы, которые здесь реализованы, являются независимыми от традиционных методов и открывают новые пути в астрофизических исследованиях.

Действительно ли окажутся ГЛ столь мощным «инструментом», покажет будущее, но нет сомнения, что по мере совершенствования техники наблюдений будут обнаруживаться все более тонкие проявления гравитационной фокусировки. Некоторые из них здесь описаны, но еще не наблюдались (например, разнообразные структуры каустических поверхностей).

Мы надеемся, что теория ГЛ, которая составляет основное содержание данной книги, найдет применение не только для интерпретации уже установленных фактов, но и поможет в постановке будущих наблюдений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новиков И. Д.* Черные дыры во Вселенной.— М. : Знание, 1977.— 64 с.
2. *Физический* энциклопедический словарь / Редкол.: А. М. Прохоров (гл. ред.) и др.— М. : Сов. энцикл., 1984.— 944 с.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика.— М. : Наука, 1973.— 208 с.
4. *Марио Льоцци.* История физики.— М. : Мир, 1970.— 464 с.
5. *Zoldner J.* Ueber die ablenkung eines lichtstrahls von feiner geradlinigen bewegung, durch die attraktion eines weltkorpers, an welchem er nahe vorbei gent / Berlin. Astron. Jahrbuch für 1804.— Berlin, 1804.— S. 161.
6. *Эйнштейн А.* К электродинамике движущихся тел // Собр. науч. тр.: В 4 т.— М., 1965.— Т. 1.— С. 7—35.
7. *Эйнштейн А.* О принципе относительности и его следствиях // Там же.— С. 65—114.
8. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики.— М. : Наука, 1970.— 855 с.
9. *Эйнштейн А.* О влиянии силы тяжести на распространение света // Собр. науч. тр.: В 4 т.— М., 1965.— Т. 1.— С. 165—174.
10. *Эйнштейн А.* Объяснение движения перигелия Меркурия в общей теории относительности // Там же.— С. 439—447.
11. *Stanley L. J.* A forgotten bicentenary : Johann Georg Soldner // Sky and Telesc.— 1978.— 55, N 6.— P. 460—461.
12. *Тейлор Э., Уилер Дж.* Физика пространства — времени.— М. : Мир, 1971.— 319 с.
13. *Эйнштейн А.* Уравнение гравитационного поля // Собр. науч. тр.: В 4 т.— М., 1965.— Т.1.— С. 448—451.
14. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля.— М. : Наука, 1973.— 504 с.
15. *Владимиров Ю. С., Мицкевич Н. В., Хорски Я.* Пространство, время, гравитация.— М. : Наука, 1984.— 205 с.
16. *Фок В. А.* Теория пространства, времени и тяготения.— М. : ГИТТЛ, 1955.— 504 с.
17. *Скроцкий Г. В.* О влиянии силы тяжести на распространение света // Докл. АН СССР.— 1957.— 114, № 1.— С. 73—76.
18. *Волков А. М., Изместьев А. А., Скроцкий Г. В.* Распространение электромагнитных волн в римановом пространстве // Журн. эксперим. и теорет. физики.— 1970.— 59, вып. 10.— С. 1254—1261.
19. *Plebansky J.* Electromagnetic waves in gravitational fields // Phys. Rev.— 1960.— 118, N 5.— P. 1396—1408.
20. *Эйнштейн А.* Основы общей теории относительности // Собр. науч. тр. : В 4 т.— М., 1965.— Т. 1.— С. 452—504.
21. *Эйнштейн А.* К теории тяготения // Там же.— С. 317—318.
22. *Михайлов А. А.* О наблюдении эффекта Эйнштейна // Астрон. журн.— 1956.— 33, № 6.— С. 912—927.
23. *Хофман Б.* Альберт Эйнштейн творец и бунтарь.— М. : Прогресс, 1983.— 216 с.
24. *Гинзбург В. Л.* Об экспериментальной проверке ОТО // Успехи физ. наук.— 1979.— 128, № 3.— С. 435—458.

25. *Руденко В. Н.* Релятивистские эксперименты в гравитационном поле // Там же.— 1978.— **126**, № 3.— С. 361—401.
26. *Арифов Л. Я., Кадыев Р. К.* Релятивистская теория годичных параллаксов // Астрон. журн.— 1968.— **45**, № 5.— С. 1114—1121.
27. *Брагинский В. Б., Руденко В. Н.* Релятивистские гравитационные эксперименты // Успехи физ. наук.— 1970.— **100**, № 3.— С. 395—424.
28. *Куликовский П. Г.* Звездная астрономия.— М. : Наука, 1985.— 272 с.
29. *Riled J. M.* A measurement of the gravitational deflection of radio waves by the Sun during 1972 Oct.// Month. Not. Roy. Astron. Soc.— 1973.— **161**, N 3.— P. 11P—14P.
30. *Solar* gravitational deflection of radio waves measurement by very-long-baseline interferometry / Counselman C. C., Kent S. M., Knight C. A. et al.// Phys. Rev. Lett.— 1974.— **33**, N 27.— P. 1621—1623.
31. *Брагинский В. Б., Полнарев А. Г.* Удивительная гравитация.— М. : Наука, 1985.— 160 с.
32. *Fourth* test of general relativity : preliminary results / Shapiro I. I., Pettengill G. H., Ash M. E. et al.// Phys. Rev. Lett.— 1968.— **20**, N 22.— P. 1265—1269.
33. *Эйнштейн А.* Линзоподобное действие звезды при отклонении света в гравитационном поле // Собр. науч. тр.: В 4 т.— М., 1965.— Т. 2.— С. 436—437.
34. *Тихов Г. А.* Об отклонении световых лучей в поле тяготения звезд // Осн. тр.: В 5 т.— Алма-Ата, 1957.— Т. 3.— С. 203—225.
35. *Lodge O.* Gravitation and light // Nature.— 1919.— **104**, N 2614.— P. 354.
36. *Eddington A.* Space, time, and gravitation.— New York : Cambridge Univ. Press, 1920.— 308 p.
37. *Chwolson O.* Über eine mogliche form fiktiver doppelsterne // Astron. Nachr.— 1924.— **221**, N 5300.— P. 329—330.
38. *Saslaw W. C., Narasimha D., Chitre S. M.* The gravitational lens as an astronomical diagnostic // Astrophys. J.— 1985.— **292**, N 2, pt. 1.— P. 348—356.
39. *Zwicky F.* Morphological astronomy.— Berlin : Springer, 1957.— 299 P.
40. *King I.* The structure of star clusters. I.An empirical density law // Astron. J.— 1962.— **67**, N 8.— P. 471—485.
41. *Холопов П. Н.* Звездные скопления.— М. : Наука, 1981.— 480 с.
42. *Turner E., Ostriker J., Gott J. III.* The statistic of gravitational lenses : the distributions of image angular separation and lens redshifts // Astrophys. J.— 1984.— **284**, N 1, pt 1.— P. 1—22.
43. *Ohanian H. C.* On the focusing of gravitational radiation // Int. J. Theor. Phys.— 1974.— **9**, N 6.— P. 425—437.
44. *Clark E.* The uniform transparent gravitational lens // Month Not. Roy. Astron. Soc.— 1972.— **158**, N 2.— P. 233—243.
45. *Effects* of spherically-symmetric gravitational lenses produced by galaxies and clusters / Yakovlev D. G., Mitrofanov I. G., Levshakov S. A., Varshalovich D. A.// Astrophys. and Space Sci.— 1983.— **91**, N 1.— P. 133—155.
46. *Волков А. М., Скроцкий Г. В.* Некоторые явления, возникающие в зоне захвата кольцевого лазера // Оптика и спектроскопия.— 1970.— **29**, вып. 5.— С. 965.— 969.
47. *Железняков В. В.* Электромагнитные волны в космической плазме.— М. : Наука, 1977.— 432 с.
48. *Гинзбург В. Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме.— М. : Наука, 1967.— 684 с.
49. *Минаков А. А.* Влияние случайных неоднородностей среды на наблюдаемые через гравитационную линзу изображения протяженного радиоисточника // Тез. докл. XV Всесоюз. конф. по галактич. и внегалактич. радиоастрономии.— Харьков, 1983.— С. 70—71.
50. *Bourassa R. R., Kantowski R., Norton T. D.* The spheroidal gravitational lens // Astrophys. J.— 1973.— **185**, N 3, pt 1.— P. 747—756.
51. *Bourassa R. R., Kantowski R.* The theory of transparent gravitational lenses // Ibid.— 1975.— **195**, N 1, pt 1.— P. 13—21.
52. *Schmidt M.* In galactic structure.— Chicago : Univ. Press, 1965.— 513 p.
53. *Bray I.* Spheroidal gravitational lenses // Month. Not. Roy. Astron. Soc.— 1984.— **208**, N 3.— P. 511—516.

54. *Schneider P., Weiß A.* The two-point-mass lens: detailed investigation of special asymmetryc gravitational lens // Astron, and Astrophys.— 1986.— **164**, N 2.— P. 237—259.
55. *Gott J. III.* Gravitational lensing effect of vacuum strings: Exact solution // Astrophys. J.— 1985.— **288**, N 2, pt 1.— P. 422—427.
56. *Aryal M., Everett A. E.* Gravitational effects of global strings // Phys. Rev. D.— 1986.— **33**, N 2.— P. 333—337.
57. *Vilenkin A.* Cosmic strings as gravitational lenses // Astrophys. J.— 1984.— **282**, N 2, pt 2.— P. 51—53.
58. *Chongming Xu., Xuejun Wu.* Gravitational effects of neutrino astronomical objects // Astron. and Astrophys.— 1983.— **120**, N 1.— P. 15—20.
59. *Ibanez J., Martin J.* Gravitational scattering of spinning particles: Linear approximation // Phys. Rev. D.— 1982.— **26**, N 2.— P. 384—389.
60. *Ibanez J.* Gravitational lenses with angular momentum // Astron. and Astrophys.— 1983.— **124**, N 2.— P. 175—180.
61. *Дымникова И. Г.* Движение частиц и фотонов в гравитационном поле вращающегося тела // Успехи физ. наук.— 1986.— **148**, № 3.— С. 393—432.
62. *Рытов С. М.* О переходе от волновой к геометрической оптике // Докл. АН СССР.— 1938.— **18**, № 2.— С. 263.
63. *Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И.* Геометрическая оптика неоднородных сред.— М.: Наука, 1980.— 304 с.
64. *Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.* Гравитация: В 3 т.— М.: Мир, 1982.— Т. 2.
65. *Mashhoon B.* Influence of gravitation on the propagation of electromagnetic radiation // Phys. Rev. D.— 1975.— **11**, N 10.— P. 2679—2684.
66. *Pineault S., Roeder R. C.* Applications of geometrical optics to the Kerr metric. I. Analytical results // Astrophys. J.— 1977.— **212**, N 2, pt 1.— P. 541—549.
67. *Мицкевич Н. В., Ульдин А. В.* Эффект гравитационной линзы в поле Керра / Ун-т дружбы народов.— М., 1983.— 9 с.— Деп. в ВИНИТИ 18.05.83, № 2654-83.
68. *Kostyukovich N. N., Mityanock V. V.* Equatorial geodesic motion of test particles in the Kerr and first Tomimatsu-Sato metrics // Acta phys. pol. B.— 1979.— **10**, N 4.— P. 279—293.
69. *Godfrey Brendan B.* Mach's principle, the Kerr metric, and blackhole physics // Phys. Rev. D.— 1970.— **1**, 10.— P. 2721—2725.
70. *Зельдович Я. Б., Новиков И. Д.* Теория тяготения и эволюция звезд.— М.: Наука, 1971.— 484 с.
71. *Торн К.* Поиски черных дыр // Успехи физ. наук.— 1976.— **118**, вып. 3.— С. 453—471.
72. *Dymnikova I. G.* Scattering of particles and photons and time dielay of signals in the Kerr metric.— Препр. № 795 / АН СССР. ОЛ ФТИ им. А. Ф. Иоффе.— Ленинград, 1982.— 27 с.
73. *Дымникова И. Г.* Эффект относительного запаздывания лучей, фокусируемых вращающимся массивным телом // Журн. эксперим. и теорет. физики.— 1984.— **86**, вып. 2.— С. 385—389.
74. *А. с. 1054830 СССР, МКИ⁴ G 09B 23/06.* Устройство для моделирования преломления электромагнитных волн в неоднородных сферически-слоистых средах / П. В. Блиох, А. А. Минаков // Открытия. Изобретения.— 1983.— № 42.— С. 192.
75. *Petrov A. Z.* On the models of gravitational fields // Gen. Relativ. and Gravitation.— 1972.— **3**, N 4.— P. 377—390.
76. *Минаков А. А.* Фокусировка электромагнитных волн в слабых гравитационных полях: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Л., 1980.— 20 с.
77. *Dyer C. C., Roeder R. C.* Simulating the transparent gravitational lens // J. Roy. Astron. Soc. Can.— 1981.— **75**, N 5.— P. 227—236.
78. *Icke V.* Construction of gravitational lens // Amer. J. Phys.— 1980.— **48**, N 10.— P. 883—886.
79. *Higbie J.* Galactic lens // Ibid.— 1983.— **51**, N 9.— P. 860—861.
80. *Мировицкий Д. И., Черкунова Г. П.* Об оптическом моделировании радиопросвечивания атмосфер планет // Тез. докл. XII Всесоюз. конф. по распространению радиоволн.— М., 1978.— Ч. 1.— С. 250—251.
81. *Майер В. В.* Простые опыты по криволинейному распространению света.— М.: Наука, 1984.— 127 с.

82. *Егоров Г. С., Степанов Н. С.* Моделирование «гравитационной линзы» в лекционной демонстрации // Успехи физ. наук.— 1982.— **138**, вып. 1.— С. 147—149.
83. *Блиох П. В., Минаков А. А.* Гравитационные линзы // Природа.— 1982.— № 11.— С. 59—69.
84. *Блиох П. В., Минаков А. А.* Гравитационная линза.— Препр. № 7 (739) / АН СССР. Ин-т радиоэлектроники.— М., 1984.— 34 с.
85. *Минаков А. А.* Синтез антенны с круглым раскрывом с заданным распределением интенсивности вдоль оси в ближней зоне // Радиотехника и электрон.— 1985.— **30**, № 4.— С. 653—657.
86. *Mashhoon B.* Scattering of electromagnetic radiation a black hole // Phys. Rev. D.— 1973.— 7, N 10.— P. 2807—2814.
87. *Манжаловский В. П.* К интегрированию некоторых однородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами.— Харьков : Изд-во ХГУ, 1959.— 35 с.
88. *Scharaf A. L.* Exact solutions for fields of electric type in spherically stratifield isotropic media // Proc. Cambridge Phil. Soc.— 1969.— **66**, N 1.— P. 119—127.
89. *Мотт Н., Месси Г.* Теория атомных столкновений.— М. : Изд-во иностр. лит., 1951.— 448 с.
90. *Herlt E., Stephani H.* Diffraction of a plane electromagnetic wave at a Schwarzschild black hole // Int. J. Theor. Phys.— 1975.— **12**, N 2.— P. 81—93.
91. *Herlt E., Stephani H.* Wave optics of the spherical gravitational lens. Part I: Diffraction of a plane electromagnetic wave by a large star // Ibid.— 1976.— **15**, N 1.— P. 45—65.
92. *Mo Tse Chin, Papas C. H.* Electromagnetic field and wave propagation in gravitation // Phys. Rev. D.— 1971.— **3**, N 8.— P. 1708—1712.
93. *Price R. H.* Nonspherical perturbations of relativistic gravitational collapse // Ibid.— 1972.— **5**, N 10.— P. 2439—2454.
94. *Gravitational* synchrotron radiation in the Schwarzchild geometry / Misner C. W., Breuer R. A., Brill D. R. et al.// Phys. Rev. Lett.— 1972.— **28**, N 15.— P 998—1000.
95. *Vector* and tensor radiation from Schwarzschild relativistic circular geodesics/ Breuer R. A., Ruffini R., Tiomno J., Vishveshwara C. V.// Phys. Rev. D.— 1973.— 7, N 4.— P. 1002—1007.
96. *Ruffini R., Tiomno J., Vishveshwara C. V.* Electromagnetic field of a particle moving in a spherically symmetric black-hole background // Lett. Nuovo cim.—1972.— **3**, N 5.— P. 211—215.
97. *Stephani H., Herlt E.* Electromagnetic test fields around a Schwarzschild singularity // Int. J. Theor. Phys.— 1973.— **8**, N 4.— P. 243—246.
98. *Matzner R. A.* Scattering of massles scalar waves by a Schwarzschild «singularity» // J. Math. Phys.— 1968.— **9**, N 1.— P. 163—170.
99. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория.— М. : Наука, 1974.— 752 с.
100. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М. : Наука, 1971.— 1108 с.
101 *Бялко А. В.* Фокусировка излучения гравитационным полем // Астрон. журн.— 1969.— **46**, вып. 5.— С. 998—1002.
102. *Bliokh P., Minakov A.* Diffraction of light and lens effect of the stellar gravitational field // Astrophys. and Space Sci.— 1975.— **34**, N 2.— P. L7—L9.
103. *Benson J. R., Cook J. H.* High-intensification regions of gravitational lenses // Astrophys. J.— 1979.— **227**, N 2, pt1.— P. 360—363.
104. *Блиох П. В., Минаков А. А.* О возможности наблюдения гравитационной фокусировки в радиодиапазоне // Изв. вузов. Сер. Радиофизика.— 1978.— **21**, № 6.— С. 802—810.
105. *Федорюк М. В.* Метод стационарной фазы для многомерных интегралов // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1982.— **2**, № 1.— С. 145—150.
106. *Анютин А. П., Боровиков В. А.* Равномерные асимптотики интегралов от быстроосциллирующих функций с особенностями внеэкспоненциального множителя.— Препр. № 42 (414) / АН СССР. Ин-т радиоэлектроники.— М., 1984.—53 с.

107. *Федорюк М. В.* Метод стационарной фазы. Близкие седловые точки в многомерном случае // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1964.— **4**, № 4,— С. 671—682.
108. *Pearcey T.* Structure of an electromagnetic field in the neighbourhood of a cusp of a caustic // Philos. Mag.— 1964.— **37**, N 3.— P. 311—317.
109. *Сретенский Л. Н.* Теория ньютоновского потенциала.— М. : Гостехиздат, 1946.— 318 с.
110. *Минаков А. А.* О коротковолновой границе гравитационной фокусировки в связи с несферичностью поля тяготения звезды // Астрон. журн.— 1978.— **55**, вып. 5.— С. 966—971.
111. *Dicke R.* The Solar oblateness and the gravitational quadrupole moment // Astrophys. J.— 1970.— **159**, N 1, pt 1.— P. 1—24.
112. *Минаков А. А.* Влияние вращения звезды на гравитационную фокусировку электромагнитного излучения // Изв. вузов. Сер. Радиофизика.— 1981.— **24**, № :3.— С. 383—384.
113. *Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И.* Введение в статистическую радиофизику.— М. : Наука, 1978.— Ч. 2.
114. *Блиох П. В., Синицын В. Г., Фукс И. М.* Рефракция и рассеяние в солнечной короне при затменных наблюдениях космических источников // Астрон. журн.— 1969.— **46**, вып. 2.— С. 348—358.
115. *Ерухимов Л. М.* Влияние условий распространения радиоволн в межзвездной среде на сигналы внеземных цивилизаций // Проблема поиска жизни во Вселенной.— М., 1986.— С. 144—151.
116. *Мигдал А. Б.* Качественные методы в квантовой теории.— М. : Наука, 1975.— 336 с.
117. *Гершман Б. Н., Ерухимов Л. М., Яшин Ю. Я.* Волновые явления в ионосфере и космической плазме.— М. : Наука, 1984.— 392 с.
118. *Исимару А.* Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах.— Мир, 1981.— Т. 2.
119. *Walsh D., Carswell R., Weymann R.* 0957+561 A, B: twin quasistellar objects or gravitational lens? // Nature.—1979.—**279**, N 5712.— P. 381.
120. *Chang K., Refsdal S.* Flux variations of QSO 0957 + 561 A, B and image splitting by stars near the light path // Ibid.— **282**, :N 5739.— P. 561—564.
121. *Gott J. R. III.* Are heavy halos mode of low mass stars? A gravitational lens test / Astrophys. J.— 1981.— **243**, N 1, pt. 1.— P. 140—146.
122. *Chang K., Refsdal S.* Star disturbances in gravitational lens galaxie // Astron. and Astrophys.— 1984.— **132**, N 1.— P. 168—176.
123. *Young P.* Q0957 + 561: Effects of random stars on the gravitational lens // Astrophys. J.— 1981.— **244**, N 3, pt 1.— P. 756—767.
124. *Vietri M., Ostriker J. P.* The statistics of gravitational lenses: apparent changes in the luminosity function of distant sources due to passage of light through a single galaxy // Ibid.— 1983.— **267**, N 2, pt 1.— P. 488—511.
125. *Vietri M.* The statistics of gravitational lenses. II. Apparent evolution in the quasars luminosity function // Ibid.— 1985.— **293**, N 2, pt 1.— P. 343—355.
126. *Paczynski B.* Gravitational microlensing at large optical depth // Ibid.— 1986.— **301**, N 2, pt 1.— P. 503—516.
127. *Katz N., Balbus S., Paczynski B.* Random scattering approach to gravitational microlensing // Ibid.— 1986.— **306**, N 1, pt 1.— P. 2—8.
128. *Kayser R., Refsdal S., Stabell R.* Astrophysical applications of gravitational micro-lensing // Astron. and Astrophys.— 1986.— **166**, N 1/2.— P. 36—52.
129. *Subramanian K., Chitre S. M., Narasimha D.* Minilensing of multiply images quasars : Flux variations and vanishing of images // Astrophys. J.— 1985.— **289**, N 1, pt. 1.— P. 37—51.
130. *Schneider P., Weiß A.* A gravitational lens origin for AGN — variability? Consequences of microlensing // Astron. Astrophys.— 1987.— **171**, N 1/2.— P. 49—65.
131. *Schramm T., Kayser R.* A simple imaging procedure for gravitational lenses // Ibid.— **174**, N 1/2.— P. 361—364.
132. *Huchra J., Gorenstein M.* 2273 + 0305 : A new and unusual gravitational lens // Astron. J.— 1985.— **90**, N 5.— P. 691—696.
133. *Зельдович Я. Б.* Наблюдения во Вселенной, однородной в среднем // Астрон. журн.— 1964.— **41**, вып. 1.— С. 19—24.

134. *Физика* космоса : Мален. энцикл. / Редкол. : Р. А. Сюняев (гл. ред.) и др.— М. : Сов. энцикл.— 1986.— 783 с.
135. *Зельдович Я. Б., Новиков И. Д.* Строение и эволюция Вселенной.— М. : Наука, 1975.— 736 с.
136. *Дашевский В. М., Зельдович Я. Б.* Распространение света в неоднородной неплоской Вселенной. II // Астрон. журн.— 1964.— **41**, вып. 6.— С. 1071—1074.
137. *Ehlers J., Schneider P.* Self-consistent probabilities for gravitational lensing in inhomogeneous universes // Astron. Astrophys.— 1986.— **168**, N 1/2.— P. 57—61.
138. *Дашевский В. М., Слыш В. И.* К вопросу о распространении света в неоднородной Вселенной // Астрон. журн.— 1965.— **42**, вып. 4.— С. 863—864.
139. *Dyer C. C., Roeder R. C.* Distance-redshift relations for Universes with some intergalactic medium // Astrophys. J.— 1973.— **180**, N 1, pt 2.— P. L31—L34.
140. *Barnothy J. M.* Quasars and the gravitational image intensifier // Astron. J.— 1965.— **70**, N 9.— P. 666.
141. *Hammer F., Nottale L., Le Fevre O.* Overluminosity of distant radiogalaxies: Evolution or gravitational amplification?// Astron. and Astrophys.— 1986.— **169**, N 1/2 — P. L1—L3.
142. *Robinson L. J.* Keepers of gravitational lenses // Sky and Telescope.— 1983.— **66**, N 5.— P. 388—389.
143. *Multiple-mirror* telescope observations of the twin QSOs 0957 + 561A, B / Weymann R., Chaffee F., Davis J. et al.// Astrophys. J.— 1979.— **233**, N 2, pt 2.— P. L43—L46.
144. *Wills B., Wills D.* Spectrophotometry of the double QSO, 0957 + 561 // Ibid.— 1980.— **238**, N 1, pt 1.— P. 1—9.
145. *The origin* of a new absorption system discovered in both components of the double QSO Q0957 + 561 / Young P., Sargent W. L. W., Boksenberg A., Oke J. B.// Ibid.— 1981.— **249**, N 2, pt 1.— P. 415—421.
146. *Walsh D.* Observations of gravitational lenses : Quasars and Gravitational Lenses / 24th Liege astrophys. colloq. Inst. d'Astrophys, June 1983.— P. 106—124.
147. *IR observations* of the double quasar 0957 + 561 A, B and the intervening galaxy / Soifer B. T., Neugebauer G., Matthews K. et al.// Nature.— 1980.— **285**, N 5760.— P. 91—93.
148. *The IR* spectrum of the double QSO / Lebofsky M. J., Ricke G. H., Walsh D., Weymann R. J.// Ibid.— N 5764.— P. 385—386.
149. *Adams M. T., Boroson T. A.* Direct imaging of the twin QSOs 0957 + 561 A, B: the gravitational lens interpretation // Ibid.— 1979.— **282**, N 5735.— P. 183—185.
150. *Stockton A.* The lens galaxy of the twin QSO 0957 + 561 // Astrophys. J.— 1980.— **242**, N 3, pt. 2.— P. L141—L144.
151. *The double* quasar Q0957 + 561 A, B: a gravitational lens image formed by a galaxy at $z = 0{,}39$ / Young P., Gunn J. E., Kristian J. et al.// Ibid.— **241**, N 2, pt 1.— P. 507—520.
152. *Q 0957 + 561:* Detailed models of the gravitational lens effect / Young P., Gunn J. E., Kristian J. et al.// Ibid.— 1981.— **244**, N 3, pt 1.— P. 736—755.
153. *Radio* studies of the double QSO, 0957 + 561 A, B / Pooley G. G., Browne I. W. A., Daintree E. J. et al.// Nature.— 1979.— **280**, N 5722. — P. 461—464.
154. *The multiple* images of the quasar 0957 + 561 / Roberts D. H., Greenfield P. E., Hewitt J. N. et al.// Astrophys. J.— 1985.— **293**, N 2, pt 1.— P. 356—369.
155. *Greenfield P. E., Roberts D. H., Burke B. F.* The gravitationally lensed quasar 0957 + 561: VLA observations and mass models // Ibid.— P. 370—386.
156. *Dyer C. C., Roeder R. C.* A range of time delays for the double quasar 0957 + 561 A, B / Ibid.— 1980.— **241**, N 3, pt 2.— P. 133—136.
157. *Subramanian K., Narasimha D., Chitre S. M.* Gravitational lenses and VLBI structures // VLBI and compact radio sources symp. N 110 Int. Astron. Union, Bologna, June 27 — July 1 1983.— Dordrecht etc., 1984.— P. 249—250.— Discuss.— P. 451.
158. *Narasimha D., Subramanian K., Chitre S. M.* Gravitational lens model of the double QSO 0957 + 561 A, B incorporating VLBI features // Month. Not. Roy. Astron. Soc.— 1984.— **210**, N 1.— P. 79—88.
159. *VLBI* observations of the gravitational-lens images of Q 0957 + 561 / Gorenstein M. V., Shapiro I. I., Cohen N. L. et al.// VLBI and compact radio sources

symp. N 110 Int. Astron. Union. Bologna, June 27 — July 1, 1983.— Dordrecht etc., 1984.— P. 243—246.— Discuss.— P. 450.
160. *The milli-arcsecond* images of Q 0957 + 561 / Gorenstein M. V., Shapiro I. I., Rogers A. E. E. et al.// Astrophys. J.— 1984.— **287**, N 2, pt. 1.— P. 538—548.
161. *Schild R. E., Weekes T.* CCD brightness monitoring of the twin QSO 0957 + 561 // Ibid.— 1984.— **277**, N 2, pt 1.— P. 481—484.
162. *Keel W. C.* The nature of the light variations in the double QSO Q0957 + 561 // Ibid.— 1982.— **255**, N 1, pt 1.— P. 20—24.
163. *Schild R. E., Cholfin B.* CCD camera brightness monitoring of Q 0957 + 561 A, B // Ibid.— 1986.— **300**, N 1, pt 1.— P. 209—215.
164. *Trimble V., Woltjer L.* Quasars at 25 // Science.— 1986.— **234**, N 4773.— P. 155—161.
165. *The triple* QSO PG 1115 + 08: another probable gravitational lens / Weymann R. J., Angel J. R. P., Green R. F. et al.// Nature.— 1980.— **285**, N 5767.— P. 641—643.
166. Observations of quasars with the international ultraviolet explorer satellite / Green R. F., Pier J. R., Schmidt M. et al.// Astrophys. J.— 1980.— **239**, N 2, pt 1.— P. 483—494.
167. *Schmidt M., Green R. F.* Quasar evolution derived from the Palomar bright quasar survey and other complete quasar surveys // Ibid.— 1983.— **269**, N 2, pt 1.— P. 352—374.
168. *The triple* quasar Q 1115 + 0.80 A, B, C : A quintuple gravitational lens / Young P., Deverill R. S., Gunn J. E., Westphal J. A.// Ibid.— 1981.— **244**, N 3, pt 1.— P. 723—735.
169. *Young P., Sargent W. L. W., Boksenberg A.* A high — resolution study of the absorption spectra of three QSOs: Evidence for cosmological evolution in the lyman — alpha lines // Ibid.— 1982.— **252**, N 1, pt 1.— P. 10—31.
170. *Weymann R. J., Foltz C. B.* Common lyman — alpha absorption lines in the triple QSO PG 1115 + 08 // Ibid.— 1983.— **272**, N 1, pt 2.— P. 1—4.
171. *Speckle* interferometry observations of the triple QSO PG 1115 + 08 / Hege E. K., Hubbard E. N., Strittmatter P. A., Worden S. P.// Ibid.— 1981.— **248**, N 1, pt 2.— P. 1—3.
172. *Morphology* of the triple QSO PG 1115 + 08 / Hege E. K., Angel J. R. P., Weymann R. J., Hubbard E. N.// Nature.— 1980.— **287**, N 5781.— P. 416—417.
173. *Foy R., Bonneau D., Blazit A.* The multiple QSO PG 1115 + 08 : A fifth component?// Astron. Astrophys.— 1985.— **149**, N 1.— P. L13—L16.
174. *Schaklan S. B., Hege E. K.* Detection of the lensing galaxy in PG 1115 + 08 // Astrophys. J.— 1986.— **303**, N 2, pt 1.— P. 605—613.
175. *Henry J. P., Heasley J. N.* High resolution imaging from Mauna Kea: the triple quasar in 0,3-ares seeing // Nature.— 1986.— **321**, N 6066.— P. 138—142.
176. *La variabilite* du mirage gravitationnel P. G. 1115 + 080 / Vanderriest C., Wlerick G., Lelievre G. et al.// Astron. Astrophys.— 1986.— **158**, N 1/2.— P. L5—L8.
177. *Discovery* of a third gravitational lens / Weedman D. W., Weymann R. J., Green R. F., Heckman T. M.// Astrophys. J.— 1982.— **255**, N 1, pt 2.— P. 5—9.
178. *Improved* lower limits on lyman-alpha forest cloud dimensions and additional evidence supporting the gravitational lens nature of 2345 + 007 A, B / Foltz C. B., Weymann R. J., Roser H. J., Chaffee F. H.// Ibid.— 1984.— **281**, N 1, pt 2.— P. 1—4.
179. *Deep* CCD images of 2345 + 007: Lensing by dark matter / Tyson J. A., Seitzer P., Weymann R. J., Foltz C.// Astron. J.— 1986.— **91**, N 6.— 1274—1278.
180. *Subramanian K., Chitre S. M.* The quasar Q 2345 + 007 A, B: A case for the double gravitatinal lens? // Astrophys. J.— 1984.— **276**, N 2, pt 1.— P. 440—448.
181. *Discovery* of a new gravitational lens system / Lawrence C. R., Schneider D. P., Schmidt M. et al.// Science.— 1984.— **223**, N 4631.— P. 46—49.
182. *Narasimha D., Subramanian K., Chitre S. M.* Gravitational lens models for the triple radio source MG 2016 + 112 // Astrophys. J.— 1984.— **283**, N 2, pt 1.— P. 512—514.
183. *Deep* optical and radio observations of the gravitational lens system 2016 +

+ 112 / Schneider D. P., Lawrence C. R., Schmidt M. et al.// Ibid.— 1985.— **294**, N 1, pt 1.— P. 66—69.
184. *The third* image, the redshift of the lens, and new components of the gravitational lens 2016 + 112 / Schneider D. P., Gunn J. E., Turner E. L. et al.// Astron. J.— 1986.— **91**, N 5.— P. 991—997.
185. *Djorgovski S., Spinrad H.* Discovering of a new gravitational lens // Astrophys. J.— 1984.— **282**, N 1, pt 2.— P. 1—4.
186. *Edmunds M. G.* An extraordinary gravitational lens and the redshift debate // Nature.— 1985.— **316**, N 6024.— P. 102.
187. *Burbidge G.* A comment of the discovery of the QSO and related galaxy 2237 + + 0305 // Astron. J.— 1985.— **90**, N 8.— P. 1399.
188. *An apparent* gravitational lens with an image separation of 2.6 arc min / Turner E. L., Schneider D. P., Burke B. F. et al.// Nature.— 1986.— **321**, N 6066.— P. 142—144.
189. *Gott J. R. III.* Is QSO 1146 + 111 B, C due to lensing by a cosmic string? // Ibid.— N 6068.— P. 420—421.
190. *Paczynski B.* Is there a black hole in the sky? // Ibid.— P. 419—420.
191. *Shaver P. A., Gristiani S.* Test of the gravitational lens hypothesis for the quasar pair 1146 + 111 B, C // Ibid.— N 6070.— P. 585—586.
192. *Disappointment* over double quasar // Ibid. N 6068.— P. 377.
193. *Ostriker J. P., Vishniac E. T.* Effect of gravitational lenses on the microwave background, and 1146 + 111 B, C // Ibid.— 1986.— **322**, N 6082.— P. 622.
194. *Observations* of the cosmic background radiation near the double quasar 1146 + + 111 B, C / Stark A. A., Dragovan M., Wilson R. W., Gott J. R., III // Ibid.— P. 805.
195. *Padmanabhan T., Chitre S. M.* Is gravitational lensing a local phenomenon caused by Pop III objects? // Astroophus. Lett.— 1987.— **25**, N 4.— P. 255—261.
196. *Refsdal S.* On the possibility of determining Hubble's parameter and the masses of galaxies from the gravitational lens effect // Month. Not. Roy. Astron. Soc.— 1964.— **128**, N 4.— P. 307—310.
197. *Refsdal S.* On the possibility of testing cosmological theories from the gravitational lens effect // Month. Not. Roy. Astron. Soc.— 1966.— **132**, N 1.— P. 101—111.
198. *Cooke J. H., Kantowski R.* Time delays for multiply imaged quasars // Astrophys. J.— 1975.— **195**, N 1, pt 2.— P. 11—14.
199. *Kayser R., Refsdal S.* The difference in light travel time between gravitational lens images. I. Generalization of the wave front method to arbitrary deflectors and inhomogeneous universes // Astron. Astrophys.— 1983.— **128**, N 1.— P. 156—161.
200. *Kayser R.* Gravitational lenses : model fitting, time delay and Hubble parameter // Ibid.— 1986.— **157**, N 1.— P. 204—206.
201. *Falco E. E., Gorenstein M. V., Shapiro I. I.* Can we measure Ho with VLBI observations of gravitational images?// The impact VLBI astrophys and geophys. symp. N 129 IAU, Cambridge, Mass. May10—15 1987: Progr. and abstr.— Mass., 1987.— P. 11—16.
202 *Borgeest U., Refsdal S.* The Hubble parameter: an upper limit from QSO 0957 + + 561 A, B // Astron. Astrophys.— 1984.— **141**, N 2.— P. 318—322.
203. *Suffern K.* Gravitational lenses and QSO redshifts // Proc. Astron. Soc.Austral.— 1980.— **4**, N 1.— P. 76—77.
204. *Turner E. L.* The effect of undetected gravitational lenses on statistical measures of quasar evolution // Astrophys. J.— 1980.— 242, N 3, pt 2.— P. 135—139.
205. *Tyson J. A.* Gravitational lensing and the relation between QSO and galaxy magnitude-number counts // Ibid.— 1981.— **248**, N 3, pt 2.— P. 89—93.
206. *Avni Y.* On gravitational lenses and the cosmological evolution of quasars // Ibid.— P. 95—99.
207. *Peacock J. A.* Gravitational lenses and cosmological evolution // Month. Not. Roy. Astron. Soc.— 1982.— **199**, N 3.— P. 987—1006.
208. *Canizares C.* Gravitational lensing and the association of distant quasars with foreground galaxies // Nature.— 1981.— **291**, N 5817.— P. 620—624.
209. *Мицкевич Н. В.* О критериях наблюдения эффекта ГЛ // Астрон. журн.— 1980.— **57**, вып. 6.— С. 1339—1340.

210. *Манджос А. В.* О степени взаимной когерентности изображений, формируемых гравитационной линзой // Письма в Астрон. журн.— 1981.— 7, № 7.— С. 387—389.
211. *Roland B., Jean-Luc N.* Optical variability of QSOs and gravitational lenses in galactic haloes // Nature.— 1983.— **301**, N 5899.— P. 400—402.
212. *Paczynski B., Gorski K.* Another possible case of a gravitational lens // Astrophys. J.— 1981.— **248**, N 3. pt 2.— P. 101—104.
213. *Alcock C.* Gravitational lenses // Nature.— 1982.— **295**, N 5847.— P. 284.
214. *Zuiderwijk E. J.* The gravitational lens effect and the surface density of quasars near foreground galaxies // Month. Not. Roy. Astron. Soc.— 1985.— **215**, N 4.— P. 639—657.
215. *Blandford R. D., Jaroszynski M.* Gravitational distortion of the images of distant radio sources in an inhomogeneous universe // Astrophys. J.— 1981.— **246**, N 1, pt 1.— P. 1—12.
216. *Webster R. L.* Gravitational lensing and galaxy shape // Month. Not. Roy. Astron. Soc.— 1985.— **213**, N 4.— P. 871—888.
217. *Ostriker J. P., Vietri M.* Are some BL Lac objects artefacts of gravitational lensing? // Nature.— 1985.— **318**, N 6045.— P. 446—448.
218. *Setti G., Zamorani G.* Can all quasars be gravitationally lensed Seyfert's nuclei? // Astron. Astrophys.— 1983.— **118**, N 1.— P. L1—L2.
219. *Barnothy J. M.* Superluminal velocities of compact radio sources. A gravitational lens effect // Extragalactic Radio Sources. Symp. N 97 IAU, Allbuquerque, 1981.— Dordrecht etc., 1982.— P. 463—464.
220. *Ульдин А. В.* К модели безаберрационной ГЛ // Ун-т дружбы народов.— М., 1982.— 41 с.— Деп. в ВИНИТИ 15.07.82, № 3814—82.
221. *Scheuer P. A.* Explanations of superluminal motion // VLBI and compact radio sources. symp. N110 IAU, Bologna, 1983.— Dordrecht etc., 1984.— P. 197—205.— Discuss.— P. 443—444.
222. *Pechenick K. R., Ftaclas C., Cohen J. M.* Hot spots on neutron stars: the near-field gravitational lens // Astrophys. J.— 1983.— **274**, N 2, pt 1.— P. 846—857.
223. *Xu Chong-ming, Wu Xue-jun, Xiang Shou-ping.* Gravitational lens effect of degenerate neutrino celestial bodies // Chin. Astron. and Astrophys.— 1983.— **7**, N 4.— P. 298—302.
224. *Davis P.* Relics of creation // Sky and Telescope.— 1985.— **69**, N 2.— P. 112—115.
225. *3C273 :* a gravitationally lensed quasar? / Chitre S. M., Narasimha D., Narlikar J. V., Subramanian K.// Astron. Astrophys.— 1984.— **139**, N 2.— P. 289—295.
226. *Is 3C324* the first gravitationally lensed giant galaxy? / Le Fevre O., Hammer F., Nottale L., Mathez C.// Nature.— 1987.— **326**, N 6110.— P. 268—269.
227. *Subramanian K., Rees M. J., Chitre S. M.* Gravitational lensing by dark galactic haloes // Month. Not. Roy. Astron. Soc.— 1987.— **224**, N 2.— P. 283—298.
228. *Редже Т.* Этюды о Вселенной.— М. : Мир, 1985.— 190 с.
229. *Зельдович Я. Б.* О возможности спонтанного рождения Вселенной // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Сер. Астрономия. 1987.— **32**.— С. 5—15.
230. *A blue* ring-like structure in the center of the A370 cluster of galaxies / Soucail G., Fort B., Mellier Y., Picat J. P.// Astron. Astrophys.— 1987.— **172**, N 1/2.— P. L14—L16.
231. *Paczynski B.* Giant luminous arcs discovered in two clusters of galaxies // Nature.— 1987.— **325**, N 6105.— P. 572—573.
232. *Further* data on the blue ring-like structure in A370 / Soucail G., Mellier Y., Fort B. et al.// Astron. Astrophys.— 1987.— **184**, N 1/2.— P. L9—L9.
233. *Katz J. I.* Arcs, light echoes, and supergalaxies // Ibid.— 1987.— **182**, N 1.— P. L19—L20.
234. *Milgrom M.* The light-echo model for luminous arcs // Ibid.— P. L21—L24.
235. *Gurvits L. I.* Cosmological strings and the statistics of gravitational lenses.— Препр./ АН СССР. Ин-т косм. исслед.— М., 1987.— 17 с.

Научное издание

Блиох Павел Викторович
Минаков Анатолий Алексеевич

ГРАВИТАЦИОННЫЕ ЛИНЗЫ

Художественный редактор *И. П. Антонюк*
Технические редакторы *В. А. Краснова, И. А. Ратнер*
Корректоры *Л. Н. Регета, Е. С. Мирзамухамедова*

ИБ № 9962

Сдано в набор 20.03.89. Подп в печ. 29.08.89. БФ 08294. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бум. тип. № 1. Лит. гарн. Выс. печ. Усл. печ. л. 15,0. Усл. кр.-отт 15,0. Уч.-изд. л. 16,77. Тираж 1000 экз. Заказ 8254 Цена 3 р. 70 к.

Издательство «Наукова думка». 252601 Киев, ул. Репина, 3.

Отпечатано с матриц Головного предприятия республиканского производственного объединения «Полиграфкнига», 252057, Киев, ул. Довженко, 3 в областной книжной типографии. 290000, Львов, ул. Стефаника, 11.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКОВА ДУМКА» в 1990 г. ВЫПУСТИТ В СВЕТ КНИГИ:

Методы расчета в гидродинамических задачах космической техники и технологии/В. Г. Бабский, Н. Д. Копачевский, А. Д. Мышкис и др.— 40 л.— 8 р. 70 к.

В монографии исследуются равновесные поверхности жидкости, их устойчивость и ветвление при полной невесомости и при наличии линейных (негравитационных) ускорений или вращения космического аппарата. Основное внимание уделено осесимметричным и цилиндрическим поверхностям, изучению соответствующих плоских кривых-образующих.

Исследованы качественные свойства решений дифференциального уравнения равновесных кривых-образующих, описаны методы расчета, рассчитаны и построены их графики, приведены таблицы значений характерных параметров„ номограммы для графического нахождения равновесных кривых поверхностей, реализующихся в конкретном сосуде при конкретных условиях. Изложены два метода исследования устойчивости равновесия на основе принципа минимума потенциальной энергии. Построены границы областей устойчивости равновесия жидкости в сосудах простейших форм, а также для задач космической технологии по очистке материалов и выращиванию монокристаллов, универсальные номограммы и устойчивости.

Для специалистов в области гидромеханики, прикладной математики, механики космического полета, космических технологий, а также аспирантов и студентов вузов.

Рябов Б. П., Герасимова Н. Н. **Декаметровое спорадическое радиоизлучение Юпитера.**— 20 л.— 4 р. 30 к.

В монографии рассматриваются современные методы и технические средства радиоастрономических наблюдений декаметрового спорадического излучения планеты Юпитер. Проанализированы результаты многолетних исследований этого феномена; дано систематическое изложение современного состояния теории генерации декаметрового излучения Юпитера.

Для специалистов в области радиофизики и радиоастрономии, аспирантов и студентов вузов соответствующих специальностей.

Строение, физика и эволюция областей звездообразования / И. Г. Колесник, В. И. Ворошилов, В. И. Кузнецов и др.— 20 л.— 4 р. 30 к.

В монографии представлены результаты исследований областей звездообразования в созвездиях Кассиопеи и Единорога, обсуждаются пространственное распределение звезд и облаков в ассоциациях, их эволюционное состояние и возможные механизмы, вызвавшие звездообразование. Проведен сравнительный анализ свойств известных областей звездообразования. Освещен обширный цикл теоретических исследований по физике межзвездных облаков, особенностям образования массивных звезд, эволюции гигантских молекулярных облаков.
Для специалистов, занимающихся изучением межзвездной среды, студентов вузов.

Космическая наука и техника: Респ. межвед. сб. науч. тр. Вып. 5.— 10 л.— 2 р.

В сборнике приводятся результаты исследований по космическому приборостроению, астродинамике, управлению движением космических аппаратов и дистанционному зондированию Земли из космоса.
Для научных и инженерно-технических работников, занятых в области исследования космического пространства.

Электромагнитные явления СВЧ диапазона в неоднородных проводящих структурах / П. П. Белецкий, В. М. Светличный, Д. Д. Халамейда, В. М. Яковенко.— 20 л.— 4 р. 30 к.

В монографии рассматриваются колебательные и волновые электромагнитные процессы в полупроводниках, контактные явления на границе металл—полупроводник, фотопроводимость и фототермомагнитный эффект в варизонных кристаллах и слоистых периодических композициях. Теоретически исследованы поверхностные и объемные магнитоплазменные волны в полупроводниках, неустойчивость плазменных колебаний, возникающая под действием постоянного электрического поля в неоднородных структурах. Уделено внимание экспериментальным исследованиям и практическим приложениям перспективных для твердотельной СВЧ электроники соединений.
Для специалистов в области физики полупроводников, твердотельной СВЧ электроники и физики плазмы, аспирантов и студентов вузов.

Предварительные заказы на эти книги принимают магазины книготоргов, «Книга — почтой» и «Академкнига».

Просим пользоваться услугами магазинов — опорных пунктов издательства: Дома книги — магазина № 200 (340048 Донецк 48, ул. Артема, 147 а), магазина «Книжковий світ» (310003 Харьков 3, пл. Советской Украины, 2/2), магазина научно-технической книги № 19 (290006 Львов 6, пл. Рынок, 10), магазина «Техническая книга» (270001 Одесса 1, ул. Ленина, 17) и магазина издательства «Наукова думка» (252001 Киев 1, ул. Кирова, 4).

Магазины в Киеве и Львове высылают книги иногородним заказчикам наложенным платежом.