ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Ульяновский государственный технический университет

С. П. Бортников

НАУЧНЫЙ АППАРАТ НАДЕЖНОСТИ

Методические указания
к лабораторным работам по дисциплине
«Основы теории надежности и диагностика»

Ульяновск 2006

УДК 629.113.004
ББК 39.3я7
Б 82

Рецензент: доктор технических наук заведующий кафедрой «Автомобили» И. С. Антонов.

Одобрено секцией методических пособий научно-методического совета университета.

Бортников С. П.

Б 82 Научный аппарат надежности: методические указания к лабораторным работам по дисциплине «Основы теории надежности и диагностика» / С. П. Бортников. – Ульяновск: УлГТУ, 2006. – 17 с.

Указания написаны в соответствии с типовой и рабочими программами дисциплины «Основы теории надежности и диагностика».

Предназначены для подготовки и выполнения лабораторных работ, а также могут быть полезны при выполнении курсового и дипломного проектов студентами всех форм обучения направления 653300 «Эксплуатация наземного транспорта и транспортного оборудования» специальности 190601 «Автомобили и автомобильное хозяйство».

УДК 629.113.004
ББК 39.3я7

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель настоящей работы – помочь студентам в приобретении навыков в решении задач по теории вероятностей и математической статистики. В начале каждого раздела приводится необходимый теоретический материал, после чего рассматривается несколько типовых примеров.

В теории вероятностей рассматриваются случайные величины с заданным распределением или случайные эксперименты, свойства которых целиком известны. Предмет теории вероятностей — свойства и взаимосвязи этих величин (распределений).

Математическая (или теоретическая) статистика опирается на методы и понятия теории вероятностей, но решает в каком-то смысле обратные задачи.

Часто эксперимент представляет собой черный ящик, выдающий лишь некие результаты, по которым требуется сделать вывод о свойствах самого эксперимента. Наблюдатель имеет набор числовых (или их можно сделать числовыми) результатов, полученных повторением одного и того же случайного эксперимента в одинаковых условиях.

При этом возникают, например, следующие вопросы:

- Если мы наблюдаем одну случайную величину — как по набору ее значений в нескольких опытах сделать как можно более точный вывод о ее распределении?

- Если мы наблюдаем одновременно проявление двух (или более) признаков, т.е. имеем набор значений нескольких случайных величин — что можно сказать об их зависимости? Есть она или нет? А если есть, то какова эта зависимость?

Часто бывает возможно высказать некие предположения о распределении, спрятанном в «черном ящике», или о его свойствах. В этом случае по опытным данным требуется подтвердить или опровергнуть эти предположения («гипотезы»). При этом надо помнить, что ответ «да» или «нет» может быть дан лишь с определенной степенью достоверности, и чем дольше мы можем продолжать эксперимент, тем точнее могут быть выводы.

Наиболее благоприятной для исследования оказывается ситуация, когда можно уверенно утверждать о некоторых свойствах наблюдаемого эксперимента — например, о наличии функциональной зависимости между наблюдаемыми величинами, о нормальности распределения, о его симметричности, о наличии у распределения плотности или о его дискретном характере, и т.д.

Итак, о (математической) статистике имеет смысл вспоминать, если

- имеется случайный эксперимент, свойства которого частично или полностью неизвестны,
- мы умеем воспроизводить этот эксперимент в одних и тех же условиях некоторое (а лучше — какое угодно) число раз.

Примером такой серии экспериментов может служить социологический опрос, набор экономических показателей или, наконец, последовательность гербов и решек при тысячекратном подбрасывании монеты.

1. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1.1. Основные понятия

Математическое ожидание и дисперсия функций случайных величин

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины η, связанной с заданной одномерной случайной величиной ξ функциональной зависимостью $\eta = g(\xi)$, определяются по формулам

$$\mathrm{M}\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dF_\xi(x),$$

$$\mathrm{D}\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[g(x) - \mathrm{M}\eta\right]^2 dF_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(x)\, dF_\xi(x) - (\mathrm{M}\eta)^2 .$$

В случае, если ξ – дискретная случайная величина, принимающая значения x_i с вероятностями p_i, $\sum_i p_i = 1$, то указанные формулы принимают вид

$$\mathrm{M}\eta = \sum_i g(x_i)\, p_i \, , \ \mathrm{D}\eta = \sum_i g^2(x_i)\, p_i - (\mathrm{M}\eta)^2 .$$

Если ξ – абсолютно непрерывная случайная величина с плотностью вероятности $p(x)$, то

$$\mathrm{M}\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, p(x)\, dx, \ \mathrm{D}\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(x)\, p(x)\, dx - (\mathrm{M}\eta)^2 .$$

Если $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ – многомерная случайная величина, то для $M\eta$, $D\eta$ в дискретном случае имеют место формулы

$$M\eta = \sum_{i_1, \ldots, i_n} g\left(x_{1i_1}, \ldots, x_{ni_n}\right) p\left(\xi_1 = x_{1i_1}, \ldots, \xi_n = x_{ni_n}\right),$$

$$D\eta = \sum_{i_1, \ldots, i_n} g^2\left(x_{1i_1}, \ldots, x_{ni_n}\right) p\left(\xi_1 = x_{1i_1}, \ldots, \xi_n = x_{ni_n}\right) - (M\eta)^2,$$

а в абсолютно непрерывном случае

$$M\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, \ldots, x_n) p(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n,$$

$$D\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(x_1, \ldots, x_n) p(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n - (M\eta)^2,$$

где $p(x_1, \ldots, x_n)$ – плотность вероятности системы случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

1.2. Примеры

Пример 1. Число элементов электронной машины, выходящих из строя за некоторый промежуток времени, подчинено закону Пуассона с параметром a. Длительность ремонта машины зависит от числа m вышедших из строя элементов и определяется формулой $t_m = T\left(1 - e^{-\gamma m}\right)$. Определить математическое ожидание ущерба, причинённого простоем машины, если ущерб пропорционален квадрату длительности ремонта: $S_m = kt_m^2$.

Решение. В данной задаче встречаются три случайные величины:

1) ξ – число элементов электронной машины, выходящих из строя за некоторый промежуток времени (случайная величина ξ распределена по закону Пуассона с параметром a);

2) η – длительность ремонта машины (случайная величина η связана со случайной величиной ξ формулой $\eta = T\left(1 - e^{-\gamma\xi}\right)$);

3) ζ – величина ущерба, причинённого простоем машины, связанная

со случайной величиной η формулой $\varsigma = k\eta^2$.

Случайная величина ζ есть функция от ξ следующего вида:

$$\varsigma = kT^2\left(1-e^{-\gamma\xi}\right)^2 = kT^2\left(1-2e^{-\gamma\xi}+e^{-2\gamma\xi}\right).$$

Имеем:

$$\mathrm{M}\varsigma = kT^2\sum_{m=0}^{\infty}\left(1-2e^{-\gamma m}+e^{-2\gamma m}\right)\cdot\frac{a^m}{m!}e^{-a} =$$

$$= kT^2\left(e^{-a}e^{a}-2e^{-a}\sum_{m=0}^{\infty}\left(ae^{-\gamma}\right)^m\cdot\frac{1}{m!}+e^{-a}\sum_{m=0}^{\infty}\left(ae^{-2\gamma}\right)^m\cdot\frac{1}{m!}\right)=$$

$$= kT^2\left(1-2e^{-a\left(1-e^{-\gamma}\right)}+e^{-a\left(1-e^{-2\gamma}\right)}\right).$$

Пример 2. Случайная величина ξ имеет ряд распределения

$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π
1/4	1/4	1/4	1/4

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = cos\xi$.

Решение.

$$\mathrm{M}\eta = \sum_{i=1}^{4}p_i\,cos\,x_i = \frac{1}{4}\left(cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+cos\,0+cos\frac{\pi}{2}+cos\,\pi\right)=0,$$

$$\mathrm{D}\eta = \mathrm{M}\left(\eta^2\right)-\left(\mathrm{M}\eta\right)^2 = \frac{1}{4}\left(cos^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)+cos^2\,0+cos^2\frac{\pi}{2}+cos^2\,\pi\right)=\frac{1}{2}.$$

Пример 3. Пусть случайная величина τ – время безотказной работы детали – распределена по показательному закону с параметром λ. Деталь заменяется в любом случае по истечении времени T. Вычислить среднее время работы детали.

Решение. Время работы детали есть случайная величина $\xi = g(\tau)$, где

$$g(x)=\begin{cases} x, & x \le \mathrm{T}, \\ \mathrm{T}, & x > \mathrm{T}. \end{cases}$$

Случайная величина τ имеет плотность вероятности $p(x)=\lambda e^{-\lambda x}$, если $x \ge 0$, и $p(x)=0$, если $x<0$. Поэтому

$$\mathrm{M}\xi=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)p(x)dx=\int\limits_{0}^{\mathrm{T}} x\lambda e^{-\lambda x}dx+\mathrm{T}\int\limits_{\mathrm{T}}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=$$

$$=\lambda\left(-\frac{x}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{\mathrm{T}}+\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^{\mathrm{T}} e^{-\lambda x}dx\right)-\mathrm{T}e^{-\lambda x}\Big|_{\mathrm{T}}^{+\infty}=$$

$$-\mathrm{T}e^{-\lambda \mathrm{T}}-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{\mathrm{T}}+\mathrm{T}e^{-\lambda\mathrm{T}}=\frac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda\mathrm{T}}\right).$$

Пример 4. Найти математическое ожидание и дисперсию модуля случайной величины ξ, распределённой по нормальному закону с параметрами a и σ^2.

Решение. Плотность вероятности случайной величины ξ

$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Поэтому

$$\mathrm{M}(|\xi|)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|x|p(x)dx=-\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0} xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx+\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Сделав в каждом интеграле замену переменной $t=\dfrac{x-a}{\sigma}$, получим:

$$\mathrm{M}(|\xi|)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{-\frac{a}{\sigma}}(a+\sigma t)e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\frac{a}{\sigma}}^{+\infty}(a+\sigma t)e^{-\frac{t^2}{2}}dt=$$

$$=-\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0}e^{-\frac{t^2}{2}}dt-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0}te^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\frac{a}{\sigma}}^{0}e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\frac{a}{\sigma}}^{0}te^{-\frac{t^2}{2}}dt+$$

$$+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{a}{\sigma}}^{0}e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{a}{\sigma}}^{0}te^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}dt=$$

$$=\frac{2a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{a}{\sigma}}^{0}e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{a}{\sigma}}^{0}te^{-\frac{t^2}{2}}dt=$$

$$=\frac{2a}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{a}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{a}{\sigma}}^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}dt=2a\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)-\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\Bigg|_{-\frac{a}{\sigma}}^{+\infty}=$$

$$=2a\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}},$$

где $\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{z}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – функция Лапласа.

Для нахождения дисперсии найдём $\mathrm{M}\left(|\xi|^2\right)=\mathrm{M}\left(\xi^2\right)$. Имеем:

$$\mathrm{M}\left(\xi^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Заменив под знаком интеграла x^2 на $\left((x-a)+a\right)^2=(x-a)^2+2a(x-a)+a^2$, разобьём интеграл на три:

$$\mathrm{M}\left(\xi^2\right)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx+\frac{2a}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx+$$

$$\frac{a^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

К первому интегралу применим формулу интегрирования по частям, положив $u=x-a$ и $dv=(x-a)e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx$, второй интеграл равен нулю (это становится очевидным после замены $x-a=t$), а третье слагаемое равно

a^2, поскольку $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = 1$ как интеграл от плотности вероятности нормального закона распределения. Поэтому

$$M\left(\xi^2\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left(-\sigma^2(x-a)e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} + \sigma^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx\right) + a^2 = \sigma^2 + a^2.$$

Тогда

$$D\xi = M\left(\xi^2\right) - \left(M\xi\right)^2 = \sigma^2 + a^2 - \left(2a\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}\right).$$

1.3. Задания

Задание 1. Случайная величина ξ имеет ряд распределения

$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π
1/4	1/4	1/4	1/4

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины

Задание 2. Пусть случайная величина τ – время безотказной работы детали – распределена по показательному закону с параметром λ. Деталь заменяется в любом случае по истечении времени T. Вычислить среднее время работы детали.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

2.1. Основные понятия

Основные понятия выборочного метода

Пусть $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$— случайная величина, наблюдаемая в случайном эксперименте. Предполагается, что вероятностное пространство задано (и не будет нас интересовать).

Будем считать, что проведя n раз этот эксперимент в одинаковых условиях, мы получили числа $X_1, X_2, \dots, X_n$ — значения этой случайной величины в первом, втором, и т.д. экспериментах. Случайная величина ξ имеет некоторое распределение $\mathcal{F}$, которое нам частично или полностью неизвестно.

Рассмотрим подробнее набор $X = (X_1, \dots, X_n)$, называемый выборкой.

В серии уже произведенных экспериментов выборка — это набор чисел. Но если эту серию экспериментов повторить еще раз, то вместо этого набора мы получим новый набор чисел. Вместо числа X_1 появится другое число — одно из значений случайной величины ξ. То есть X_1 (и X_2, и X_3, и т.д.) — переменная величина, которая может принимать те же значения, что и случайная величина ξ, и так же часто (с теми же вероятностями). Поэтому до опыта X_1 — случайная величина, одинаково распределенная с ξ, а после опыта — число, которое мы наблюдаем в данном первом эксперименте, т.е. одно из возможных значений случайной величины X_1.

Выборка $X = (X_1, \dots, X_n)$ объема n — это набор из n независимых и одинаково распределенных случайных величин («копий ξ»), имеющих, как и ξ, распределение $\mathcal{F}$.

Что значит «по выборке сделать вывод о распределении»? Распределение характеризуется функцией распределения, плотностью или таблицей, набором числовых характеристик — $E\xi$, $D\xi$, $E\xi^k$ и т.д. По выборке нужно уметь строить приближения для всех этих характеристик.

Выборочное распределение

Рассмотрим реализацию выборки на одном элементарном исходе ω_0 — набор чисел $X_1 = X_1(\omega_0)$, …, $X_n = X_n(\omega_0)$. На подходящем вероятностном пространстве введем случайную величину ξ^*, принимающую значения X_1, …, X_n с вероятностями по $1/n$ (если какие-то из значений совпали, сложим вероятности соответствующее число раз). Таблица распределения вероятностей и функция распределения случайной величины ξ^* выглядят так:

ξ^*	X_1	$\dots$	X_n
p	$1/n$	$\dots$	$1/n$

$$F_n^*(y) = \sum_{X_i<y} \frac{1}{n} = \frac{\text{количество } X_i \in (-\infty, y)}{n}.$$

Распределение величины ξ^* называют эмпирическим или выборочным распределением. Вычислим математическое ожидание и дисперсию величины ξ^* и введем обозначения для этих величин:

$$E\xi^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} X_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}, \quad D\xi^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}(X_i - E\xi^*)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = S^2.$$

Точно так же вычислим и момент порядка k

$$E(\xi^*)^k = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} X_i^k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k = \overline{X^k}.$$

В общем случае обозначим через $\overline{g(X)}$ величину

$$E\,g(\xi^*) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i) = \overline{g(X)}.$$

Если при построении всех введенных нами характеристик считать выборку $X_1, \ldots, X_n$ набором случайных величин, то и сами эти характеристики — $F_n^*(y)$, $\overline{X}$, S^2, $\overline{X^k}$, $\overline{g(X)}$ — станут величинами случайными. Эти характеристики выборочного распределения используют для оценки (приближения) соответствующих неизвестных характеристик истинного распределения.

Причина использования характеристик распределения ξ^* для оценки характеристик истинного распределения ξ (или X_1) — в близости этих распределений при больших n

Рассмотрим, для примера, n подбрасываний правильного кубика. Пусть $X_i \in \{1, \ldots, 6\}$ — количество очков, выпавших при i-м броске, $i = 1, \ldots, n$. Предположим, что единица в выборке встретится n_1 раз, двойка — n_2 раз и т.д. Тогда случайная величина ξ^* будет принимать значения $1, \ldots, 6$ с вероятностями $\frac{n_1}{n}, \ldots, \frac{n_6}{n}$ соответственно. Но эти пропорции с ростом n приближаются к $1/6$ согласно закону больших чисел. То есть распределение величины ξ^* в некотором смысле сближается с истинным распределением числа очков, выпадающих при подбрасывании правильного кубика.

Мы не станем уточнять, что имеется в виду под близостью выборочного и истинного распределений. В следующих параграфах мы подробнее познакомимся с каждой из введенных выше характеристик и исследуем ее свойства, в том числе ее поведение с ростом объема выборки.

Эмпирическая функция распределения, гистограмма

Поскольку неизвестное распределение $\mathcal{F}$ можно описать, например, его функцией распределения $F(y) = P(X_1 < y)$, построим по выборке «оценку» для этой функции.

Определение 1.

Эмпирической функцией распределения, построенной по выборке $X = (X_1, \ldots, X_n)$ объема n, называется случайная функция $F_n^* : \mathbb{R} \times \Omega \to [0, 1]$, при каждом $y \in \mathbb{R}$ равная

$$F_n^*(y) = \frac{\text{количество } X_i \in (-\infty, y)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I(X_i < y).$$

Напоминание: Случайная функция

$$I(X_i < y) = \begin{cases} 1, & \text{если } X_i < y, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

называется индикатором события $\{X_i < y\}$. При каждом y это — случайная величина, имеющая распределение Бернулли с параметром $p = P(X_i < y) = F(y)$.

Иначе говоря, при любом y значение $F(y)$, равное истинной вероятности случайной величине X_1 быть меньше y, оценивается долей элементов выборки, меньших y.

Если элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ упорядочить по возрастанию (на каждом элементарном исходе), получится новый набор случайных величин, называемый вариационным рядом:

$$X_{(1)} \leqslant X_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant X_{(n-1)} \leqslant X_{(n)}.$$

Здесь

$$X_{(1)} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}, \quad X_{(n)} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

Элемент $X_{(k)}$, $k = 1, \ldots, n$, называется k-м членом вариационного ряда или k-й порядковой статистикой.

Другой характеристикой распределения является таблица (для дискретных распределений) или плотность (для абсолютно непрерывных).

Эмпирическим, или выборочным аналогом таблицы или плотности является так называемая гистограмма.

Гистограмма строится по группированным данным. Предполагаемую область значений случайной величины ξ(или область выборочных данных) делят независимо от выборки на некоторое количество интервалов (не обязательно одинаковых). Пусть $A_1, \ldots, A_k$— интервалы на прямой, называемые интервалами группировки. Обозначим для $j = 1, \ldots, k$ через ν_j число элементов выборки, попавших в интервал A_j:

$$\nu_j = \{\text{число } X_i \in A_j\} = \sum_{i=1}^{n} I(X_i \in A_j), \quad \text{здесь} \quad \sum_{j=1}^{k} \nu_j = n. \tag{1}$$

На каждом из интервалов A_j строят прямоугольник, площадь которого пропорциональна ν_j. Общая площадь всех прямоугольников должна равняться единице. Пусть l_j— длина интервала A_j. Высота f_j прямоугольника над A_j равна

$$f_j = \frac{\nu_j}{n l_j}.$$

Полученная фигура называется гистограммой.

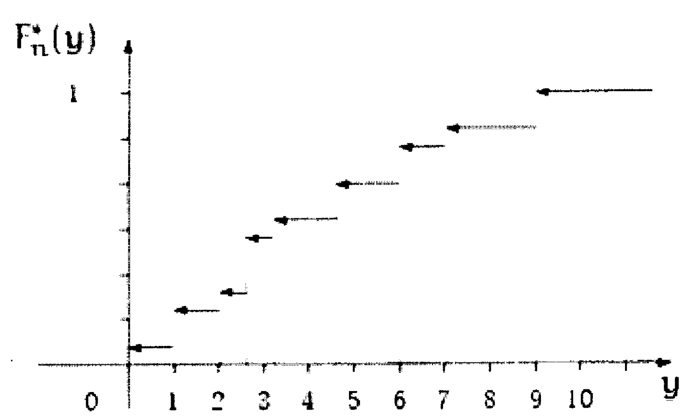
2.2. Примеры

Пример 1.

Выборка: $X = (0; 2; 1; 2{,}6; 3{,}1; 4{,}6; 1; 4{,}6; 6; 2{,}6; 6; 7; 9; 9; 2{,}6)$.

Вариационный ряд: $(0; 1; 1; 2; 2{,}6; 2{,}6; 2{,}6; 3{,}1; 4{,}6; 4{,}6; 6; 6; 7; 9; 9)$.

Рис. 1. Пример 1



Эмпирическая функция распределения имеет скачки в точках выборки, величина скачка в точке X_i равна m/n, где m— количество элементов выборки, совпадающих с X_i.

Можно построить эмпирическую функцию распределения по вариационному ряду:

$$F_n^*(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \leqslant X_{(1)}, \\ \frac{k}{n}, & \text{если } X_{(k)} < y \leqslant X_{(k+1)}, \\ 1 & \text{при } y > X_{(n)}. \end{cases}$$

Пример 2.

Имеется вариационный ряд (см. пример 1):

$(0; 1; 1; 2; 2{,}6; 2{,}6; 2{,}6; 3{,}1; 4{,}6;\ 4{,}6; 6; 6; 7; 9; 9)$.

Разобьем отрезок $[0, 10]$ на 4 равных отрезка. В отрезок $A_1 = [0; 2{,}5)$ попали 4 элемента выборки, в $A_2 = [2{,}5; 5)$ — 6, в $A_3 = [5; 7{,}5)$ — 3, и в отрезок $A_4 = [7{,}5; 10]$ попали 2 элемента выборки. Строим гистограмму (рис. 2). На рис. 3 — тоже гистограмма для той же выборки, но при разбиении области на 5 равных отрезков.

Рис. 2. Пример 2

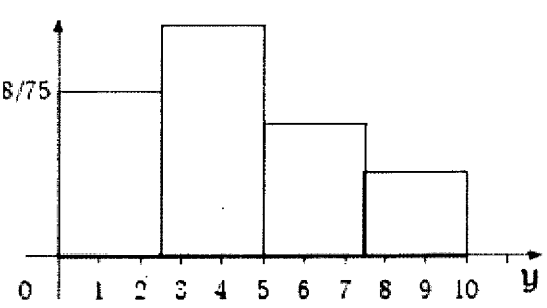
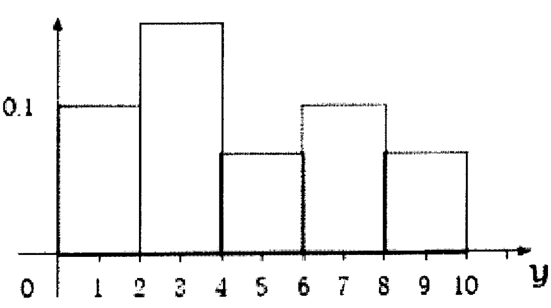


Рис. 3. Пример 2



2.3. Задания

Задание 1.
Построить эмпирическую функцию распределения для выборки, представленной в таблице 1 Приложения.

Задание 2.
Построить гистограммы для выборки, представленной в таблице 1 Приложения, при разбиении области на 5 и 8 равных отрезков

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1

Долговечность насоса на стенде

№ п/п	Время, час	№ п/п	Время, час
1	10,5	2	10,8
3	10,8	4	11,2
5	11,2	6	10,9
7	10,9	8	10,4
9	10,4	10	10,6
11	10,6	12	10,7
13	10,9	14	11,0
15	11,0	16	10,3
17	10,3	18	10,8
19	10,8	20	10,6
21	10,6	22	11,3
23	11,3	24	10,5
25	10,5	26	10,7
27	10,7	28	10,8
29	10,8	30	10,9
31	10,9	32	10,8
33	10,8	34	10,7
35	10,7	36	10,9
37	10,9	38	11,0
39	11,0	40	9,8
41	10,5	42	11,8

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Александровская, Л. Н. Теоретические основы испытаний и экспериментальная обработка сложных технических систем : Учеб. пособие для студ. вузов / Л. Н. Александровская. – М. : Логос, 2003. – 735 с. : ил. – (Учебник 21 века).

2. Большев, Л. Н. Таблицы математической статистики / Л. Н. Большев, Н. В. Смирнов. – М. : Наука, 1965.

3. Боровков, А. А. Математическая статистика / А. А. Боровков. – М. : Наука, 1984.

4. Животкевич, И. Н. Надежность технических изделий / И. Н. Животкевич, А. П. Смирнов ; ИнИС ВВТ. – М. : Олита, 2003. – 437 с. : ил.

5. Коршунов, Д. А. Сборник задач и упражнений по математической статистике / Д. А. Коршунов, Н. И. Чернова. – Новосибирск : Изд-во института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2001.

6. Надежность в технике : Сб. – М. : Изд-во стандартов, 2002. – 271 с. : ил. – (Гос. стандарты).

7. Орлов, П. И. Конструирование должно быть активным! / П. И. Орлов. – М. : Машиностроение, 2003. – 24 с. – (Приложение к журналу «Справочник. Инженерный журнал»).

8. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения / В. Феллер. – Т. 2. – М. : Мир, 1984.

9. Ярлыков, Н. Е. Повышение эффективности контроля надежности / Н. Е. Ярлыков. – М. : Радио и связь, 2003. – 151 с. : ил.

Учебное издание

БОРТНИКОВ Сергей Петрович

Научный аппарат надежности

Методические указания

Редактор *Т. Е. Хашина*

Подписано в печать 05.08.2006. Формат 60×84/16.
Бумага офсетная. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 1,00.
Уч.-изд. л. 0,73. Тираж 100 экз. Заказ 932 .
Ульяновский государственный технический университет
432027, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32.
Типография УлГТУ, 432027, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32.

Для заметок