

В.А. БРУМБЕРГ



**АНАЛИТИЧЕСКИЕ
АЛГОРИТМЫ
НЕБЕСНОЙ
МЕХАНИКИ**

В. А. Брумберг

АНАЛИТИЧЕСКИЕ
АЛГОРИТМЫ
НЕБЕСНОЙ
МЕХАНИКИ



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1980

22.62

Б 89

УДК 521.1

Б р у м б е р г В. А. Аналитические алгоритмы небесной механики.— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980, 208 стр.

Книга посвящена проблеме алгоритмизации аналитической небесной механики. В ней освещаются современные аналитические и полуаналитические методы решения типовых задач небесной механики, главным образом с точки зрения их постановки на ЭВМ. Излагаемые в книге алгоритмы, публиковавшиеся до сих пор по большей части лишь в журнальной литературе, охватывают такие задачи небесной механики, как разложение пертурбационной функции и правых частей уравнений движения в спутниковом и планетном случаях, построение краткосрочных теорий движения небесных тел, разделение быстрых и медленных переменных в элементах и координатах, построение общей теории движения больших планет, малых планет и Луны.

Книга рассчитана на специалистов по небесной механике и механике космического полета, а также на аспирантов и студентов старших курсов соответствующего профиля.

Табл. 14, илл. 3, библи. 102.

Б $\frac{20603-016}{053(02)-80}$ 192-80. 1705030000

© Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической
литературы, 1980

Оглавление

Предисловие	5
В в е д е н и е. Современные задачи и методы небесной механики	9
Г л а в а 1. Пуассоновский процессор	17
§ 1. Ряды Пуассона	17
§ 2. Операции над рядами Пуассона	22
§ 3. Размещение рядов Пуассона в памяти ЭВМ	28
Г л а в а 2. Кеплеровский процессор	35
§ 1. Кеплеровский процессор в замкнутой форме	35
§ 2. Кеплеровский процессор в форме рядов Пуассона	40
§ 3. Кеплеровский процессор в форме рядов Тейлора	49
§ 4. Функции от координат двух тел	53
Г л а в а 3. Квазиполиномиальные системы в задачах небесной механики	56
§ 1. Задача N больших планет в полиномиальной форме	56
§ 2. Уравнения движения в переменных Кустаанхеймо—Штифеля	58
§ 3. Ганзеновские координаты и параметры Эйлера	63
Г л а в а 4. Алгоритмы решения полиномиальных систем	68
§ 1. Тейлоровские разложения	68
§ 2. Нормализация и тригонометрические разложения	71
Г л а в а 5. Рекуррентный алгоритм для аналитического или численного определения пертурбационной функции и ее производных в спутниковых задачах	77
§ 1. Разложение по сферическим функциям	77
§ 2. Рекуррентное определение шаровых функций	80
§ 3. Пертурбационная функция и ее производные	85

Глава 6. Алгоритмы разложения пертурбационной функции в планетных задачах	90
§ 1. Структура разложения	90
§ 2. Алгоритмы разложения	93
Глава 7. Некоторые итерационные схемы теории возмущений	103
§ 1. Итерационные варианты классических методов определения возмущений в прямоугольных координатах	103
§ 2. Итерационное построение промежуточных орбит в теории движения больших планет в прямоугольных координатах	112
§ 3. Итерации в задаче двух тел	120
Глава 8. Разделение переменных в элементах	124
§ 1. Метод Крылова—Боголюбова	124
§ 2. Метод Цейделя	128
§ 3. Метод Цейделя как «координатный» метод	132
§ 4. Метод Колмогорова — Арнольда	136
Глава 9. Разделение переменных в прямоугольных координатах	143
§ 1. Приводимость уравнений в вариациях задачи двух тел	143
§ 2. Возмущенная задача двух тел	149
§ 3. Метод решения	155
§ 4. Задача движения N планет	161
Глава 10. Общая форма представления координат больших планет, малых планет и Луны	164
§ 1. Движение больших планет	164
§ 2. Движение малой планеты	170
§ 3. Движение Луны	188
Литература	196
Предметный указатель	204

Предисловие

В данной книге рассматриваются аналитические и полуаналитические методы решения типовых задач небесной механики, главным образом с точки зрения их постановки на ЭВМ. Вопросы математического обоснования методов (сходимость, область применимости и т. п.) совершенно не затрагиваются. Таким образом, речь идет, по существу, об аналитических и полуаналитических алгоритмах небесной механики. Вместе с тем в книге не приводится чисто программная реализация этих алгоритмов. Чтобы не увеличивать объем книги, нам казалось более важным указать достаточно общие алгоритмы небесной механики, с помощью которых любому специалисту нетрудно составить свою реализацию того или иного алгоритма, оптимальную для имеющейся в его распоряжении ЭВМ с конкретным математическим обеспечением. Всюду, где это возможно, приводятся ссылки на опубликованные программы.

В книге рассматриваются алгоритмы типовых задач, встречающихся в небесной механике, вне их детальных применений к движению конкретных небесных тел. Часть этих алгоритмов, публиковавшихся до сих пор в журнальной литературе, связана с именами таких известных современных небесных механиков, как Брукке, Депри, Джакалия, Джеффрис, Мюзен, Шапрон и др. Значительная часть алгоритмов принадлежит автору. Книга, естественно, не может заменить универсальный курс по небесной механике типа руководств Г. Н. Дубошина или монографии М. Ф. Субботина и должна рассматриваться как введение в новую область небесной механики, которую кратко можно характеризовать термином «алгоритмизация аналитической небесной механики». Автор надеется, что книга принесет пользу специалистам по небесной механике и астродинамике в их практической работе.

Книга состоит из введения и десяти глав.

Во введении дается общая краткая характеристика современных задач и методов небесной механики.

В первой главе описывается структура рядов Пуассона и их модификаций, указываются алгоритмы таких сложных операций с этими рядами, как возведение ряда в дробную и отрицательную степень, обращение рядов, подстановка ряда в ряд и т. д., а также приводятся различные способы размещения рядов в памяти ЭВМ, включая случай очень большого числа полиномиальных переменных в ряде Пуассона. Вторая глава посвящена кеплеровскому процессору, причем рассматриваются три наиболее употребительные формы решения задачи — в виде конечных выражений, в виде тригонометрических рядов и в виде тейлоровских разложений по степеням времени.

В третьей главе приводятся различные преобразования уравнений небесной механики к квазиполиномиальной форме, целесообразной при их решении с помощью ЭВМ. К таким преобразованиям относятся: приведение уравнений задачи N тел к полиномиальной системе, запись уравнений возмущенной задачи двух тел в переменных Кустаанхеймо—Штифеля, использование параметров Эйлера в возмущенной задаче двух тел в ганзеновских координатах и в задаче вращательного движения небесных тел.

Автономные полиномиальные системы, т. е. системы дифференциальных уравнений с полиномиальными правыми частями, не зависящими от времени, играют особую роль в небесной механике. Поэтому в следующей, четвертой главе излагаются методы решения таких систем в двух основных формах — в виде тейлоровских разложений или их обобщений и в виде тригонометрических рядов с помощью нормализации Биркгофа.

В пятой и шестой главах, занимающих центральное положение в книге, излагаются алгоритмы разложения пертурбационной функции и правых частей уравнений движения в спутниковом и планетном случаях. Предпочтение отдается рекуррентным алгоритмам, но приводятся также формулы для вычисления общих членов разложений. Здесь же фигурируют специальные функции, типичные для небесной механики, например, функции наклона

Каула, коэффициенты Лапласа и их различные обобщения.

В седьмой главе освещаются методы построения краткосрочных теорий движения небесных тел, главным образом путем итераций. В качестве иллюстрации рассматривается определение квазипериодических промежуточных орбит в задаче движения больших планет и представление решения задачи двух тел в виде степенных рядов по переменным типа Лапласа.

Построению долгосрочных теорий движения, основанных на разделении быстрых и медленных переменных, посвящены две следующие главы. В восьмой главе формулируются алгоритмы разделения переменных в элементах, причем рассматриваются как методы линейного типа (методы Цейделя и Крылова—Боголюбова), так и методы с ускоренной сходимостью (методы Колмогорова и Арнольда). В девятой главе разделение быстрых и медленных переменных осуществляется в прямоугольных координатах путем приведения уравнений в вариациях задачи двух тел к жордановой форме с последующим применением нормализующего преобразования типа Биркгофа.

В последней, десятой главе освещаются возможности использования методики девятой главы для построения теорий движения Луны, малых планет и больших планет.

Каждая из глав в значительной степени не зависит от остальных. Поэтому в отдельных главах встречаются иногда разные обозначения для одних и тех же величин. Это обусловлено чисто локальными удобствами тех или иных формулировок внутри данной главы. В основном обозначения имеют общепринятый в небесно-механической литературе смысл. Отметим лишь употребление символа Кронекера

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j \end{cases}$$

и повсеместное использование обобщенных факториалов $(\alpha)_k$, определяемых при любом вещественном α и натуральном k соотношениями

$$(\alpha)_k = \alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + k - 1), \quad (\alpha)_0 = 1,$$

Полезно также иметь в виду соотношения

$$(\alpha)_k = (-1)^k (1 - \alpha - k)_k, \quad (\alpha)_k = (\alpha)_l (\alpha + l)_{k-l},$$

$$(2\alpha)_{2k} = 2^{2k} (\alpha)_k \left(\alpha + \frac{1}{2} \right)_k$$

и связь с биномиальными коэффициентами

$$C_\alpha^k \equiv \binom{\alpha}{k} = (-1)^k \frac{(-\alpha)_k}{(1)_k}.$$

В. А. Брумберг

Современные задачи и методы небесной механики

Небесная механика — наука о движении небесных тел — является одной из древнейших наук. Период расцвета небесной механики относится к 18—19 векам, когда были получены основные результаты классической небесной механики, не потерявшие своего значения и в наши дни. В первой половине 20 века небесная механика находилась в относительном застое. Даже создание общей теории относительности не вызвало в небесной механике должного резонанса. Многие специалисты по небесной механике увидели в общей теории относительности лишь дополнение к классической теории возмущений. Между тем, роль общей теории относительности для небесной механики отнюдь не определяется малыми релятивистскими поправками к ньютоновским теориям движения небесных тел. Общая теория относительности, объясняющая явление тяготения и раскрывающая свойства пространства — времени, в котором происходит движение небесных тел и распространение лучей света, служит физической основой небесной механики.

Новый бурный этап развития небесной механики, продолжающийся и в настоящее время, начался во второй половине 20 века. Главное стимулирующее влияние на развитие небесной механики этого периода оказывают космические исследования, электронно-вычислительная техника, появление новых возможностей наблюдений и достижения математики. Прогресс коснулся почти всех областей небесной механики. В связи с этим представляется целесообразным дать краткую характеристику основных частей небесной механики.

Небесную механику часто рассматривают или только как раздел астрономии или только как раздел прикладной математики. Однако в небесной механике выделяются четыре компонента, которым можно дать следующие условные названия: физика движения, математика движения, вычисление движения, астрономия движения. Эти

четыре компоненты определяют основные направления исследований в небесной механике.

Задача первого направления состоит в изучении физической природы всех сил, под действием которых происходит движение небесных тел. К этому направлению относятся работы по теории тяготения, а также исследования в области «слабых» эффектов, как правило, негравитационного происхождения, типа сопротивления среды, светового давления, солнечного ветра и т. д. Целью этого направления является составление дифференциальных уравнений, описывающих движение небесных тел с нужной степенью точности.

Исследование дифференциальных уравнений движения небесных тел и отыскание формы их решения служит основной задачей второго направления. К этому направлению принадлежат работы по качественной и аналитической небесной механике, вскрывающие основные, характерные свойства решений: их устойчивость, асимптотическое поведение, периодичность или квазипериодичность, наличие особенностей и т. п. В рамках этого направления та или иная конкретная задача считается исчерпанной, если известна общая качественная картина движения и форма представления решения.

Однако для небесной механики не менее важное значение имеют количественные характеристики движения. Вопросы фактического построения конкретных решений в буквенном или численном виде со всей необходимой точностью составляют содержание третьего направления, в котором сочетаются специфические алгоритмы небесной механики и общие методы прикладной математики. Цель этого направления заключается в возможно более полном развитии алгоритмов решения задач небесной механики.

Решение практических задач небесной механики заканчивается применением к движению реальных небесных тел — естественных или искусственных. Фундаментальную роль здесь играет проблема определения параметров движения по результатам наблюдений. Цель этого четвертого направления небесной механики состоит в расчете движения конкретных небесных тел и представлении полученных результатов в наиболее удобной форме.

Рассмотрим теперь наиболее актуальные на сегодняшний день задачи небесной механики.

Среди задач, относящихся к физике движения, важнейшими являются задачи, связанные с уточнением гравитационной теории. Наряду с общей теорией относительности существует целый ряд конкурирующих с ней теорий, большая часть которых описывается в рамках так называемого параметризованного постньютоновского формализма. Наиболее радикальные расхождения между этими теориями проявляются в выводах, относящихся к космологическим масштабам и космогоническим временам, но именно задачи небесной механики, базирующиеся на высокоточном наблюдательном материале, позволяют сделать обоснованный выбор между конкурирующими теориями. На сегодняшний день данные наблюдений (лазерная локация Луны, радиолокация космических аппаратов и т. д.) со все возрастающей точностью свидетельствуют в пользу общей теории относительности. Тем не менее, все еще не прекращаются попытки найти в движении тел Солнечной системы следы возможной переменности гравитационной постоянной, нарушения принципа эквивалентности и т. п. В этой связи разработка небесно-механических экспериментов (типа известного проекта запуска двух спутников Земли, движущихся навстречу друг другу по практически одной и той же полярной орбите), одной из целей которых является уточнение гравитационной теории, имеет важное значение.

В релятивистской небесной механике, основанной на общей теории относительности, обращают на себя внимание две проблемы. Первая проблема, начатая трудами Эйнштейна, Инфельда и Фока, заключается в выводе уравнений движения задачи многих тел. Уравнения поступательного движения здесь известны лишь приближенно, и для решения ряда вопросов (эволюция движения, строгий учет гравитационного излучения и т. п.) требуется найти другие пути получения уравнений. Уравнения вращательного движения нуждаются в еще более серьезном обосновании. Вторая проблема связана с сопоставлением расчетных характеристик движения с наблюдаемыми величинами. В общей теории относительности, в отличие от ньютоновской теории, на расчетную картину движения накладывается влияние координатных условий. Поэтому для корректного сопоставления с наблюдениями необходимо иметь описание процедуры наблюдений в той

же системе координат, которая используется для вывода динамических эффектов. Такое описание разработано далеко не для всех типов задач релятивистской небесной механики.

Среди математических проблем небесной механики наиболее актуальны сейчас исследования в двух областях. Первая область — это продолжение и применение результатов Колмогорова, Арнольда и Мозера относительно существования почти-периодических решений динамических систем. Вторая область охватывает вопросы регуляризации и стабилизации уравнений небесной механики, в частности, развитие регуляризации Кустаанхеймо — Штифеля, которая сводит кеплеровское движение в трехмерном пространстве к задаче гармонического осциллятора в четырехмерном пространстве. Оба эти направления имеют не только теоретическое, но и практическое значение, так как используемые здесь методы являются конструктивными. Кроме того, задачи качественной небесной механики служат прекрасным материалом для апробации новейших разделов математики, таких, например, как символическая динамика, теория катастроф и т. д.

Появление ЭВМ отразилось наиболее радикальным образом на задачах третьего направления в небесной механике, относящегося к вычислению движения. Прежде всего, надо отметить интенсивное развитие численно-аналитических методов решения задач небесной механики на ЭВМ. В качестве примера достаточно указать на построение периодических и почти-периодических решений в типовых задачах (Рябов, 1974; Лика, Рябов, 1974; Рябов, Толмачева, 1975), поиск на ЭВМ первых интегралов движения в модельных задачах (Абалакин и др., 1976, часть 10, §§ 2.11, 2.12), численно-аналитическое исследование эволюции и прогнозирование движения в спутниковых задачах (Лидов, 1978).

Одной из важнейших задач этого направления является проведение буквенных операций на ЭВМ. Эта задача необходима для дальнейшего совершенствования аналитических решений уравнений небесной механики. Специфика буквенных операций в небесной механике состоит в том, что они производятся над сравнительно узким классом объектов — главным образом над рядами Пуассона, но количество членов в этих рядах может достигать

многих сотен и тысяч. Поэтому в небесной механике используются специализированные системы для операций над рядами Пуассона, так называемые пуассоновские процессоры. Для удобства использования пуассоновский процессор может быть снабжен входным языком, где ряды Пуассона, полиномиальные и тригонометрические переменные являются объектами языка. Запись алгоритма решения задачи на таком языке максимально приближена к естественной математической записи. Работа по усовершенствованию пуассоновских процессоров ведется во многих центрах по небесной механике. Данная книга и посвящена в основном вопросам использования пуассоновских процессоров для аналитического решения задач небесной механики. Добавим еще, что для целей релятивистской небесной механики создаются специализированные тензорные процессоры, позволяющие проводить на ЭВМ операции над тензорами общей теории относительности.

Однако наиболее общей задачей третьего направления является создание специализированной системы программного обеспечения по небесной механике, включающей в себя банки данных и пакеты прикладных программ по всем основным разделам небесной механики. Аналогичные системы существуют или создаются в различных областях прикладной математики и физики. Система подобного типа для задач астродинамики разработана и успешно применяется в Европейском центре космических операций (Roth, 1977; Janin, 1978).

Создание такой системы по небесной механике будет способствовать решению наиболее важных в практическом отношении задач четвертого направления, связанных с построением более современных теорий движения естественных и искусственных небесных тел. Все возрастающая точность наблюдений, особенно в связи с появлением новых возможностей наблюдений (радионаблюдения, лазерная локация, радиоинтерферометрия), требует непрерывного уточнения существующих теорий. В первую очередь это относится к теориям движения больших планет, Луны, спутников Юпитера и Сатурна, искусственных спутников Земли. За последние годы усилиями многих специалистов проведена большая работа в этом отношении и можно надеяться, что в недалеком будущем классические теории

конца 19 — начала 20 века будут полностью заменены более совершенными теориями. Задача расчета движения искусственных спутников Земли, и вообще задачи астродинамики потребовали значительной модификации классических методов с целью их применения к движению в случае больших эксцентриситетов и наклонов или в резонансных случаях (движение комет и ряда малых планет и естественных спутников относится к этому же типу, но для классической небесной механики этот тип движения представлял очень большую трудность при исследовании).

Особое значение в современной небесной механике имеют задачи звездной динамики. Эти задачи открывают для небесной механики иное, качественно новое поле деятельности. Прежде всего, сама звездно-динамическая задача N материальных точек с ее большим значением N и отсутствием преобладающей массы (в отличие от случая Солнечной системы) исключает возможность применения классической теории возмущений и требует нового подхода. Даже численное интегрирование в этой задаче сопряжено с большими трудностями из-за частых тесных сближений и во всяком случае не пригодно на интервале, существенно превышающем время релаксации. Кроме того, для звездной динамики важную роль играют отклонения структуры тел от сферической, необходимо также исследовать поступательно-вращательное движение N твердых тел. В еще более сложном случае приходится рассматривать жидкие тела, при сближении которых существенное значение приобретают приливные эффекты (приводящие при определенных условиях к захвату тел). Изучение всех этих задач методами небесной механики лишь начинается и основные результаты здесь еще впереди.

Остановимся в заключение на современных тенденциях в методах небесной механики.

Во-первых, современные методы стали логически проще и в то же время более общими, чем классические методы. Стремление к экономии вычислений, неизбежно лежавшее в основе всех классических методов, диктовало необходимость проведения многочисленных преобразований переменных, не вызываемых физической сущностью задачи. Сейчас благодаря использованию ЭВМ стало возможным очистить методы небесной механики от преобразований

подобного типа и сделать их более четкими в идейном отношении. Точно так же теперь нет большого смысла учитывать все специфические особенности конкретной задачи, а целесообразно развивать методы, рассчитанные на широкий круг исследуемых задач. Даже внешняя форма представления окончательных результатов претерпевает существенные изменения. Страницы бесконечных формул прежних работ по небесной механике заменяются лаконичным описанием методики и указанием на готовность предоставить полученные результаты на магнитной ленте, длинные эфемериды больших планет и Луны, публикуемые в астрономических ежегодниках, постепенно уступают свое место более компактному представлению в виде коэффициентов рядов по полиномам Чебышева.

Во-вторых, в современной небесной механике наряду с традиционной техникой разложения в ряды по степеням малых параметров все чаще начинают применяться итерационные методы. Конечно, итерационные методы, как правило, менее экономичны по общему количеству вычислений и объему памяти, необходимой для хранения промежуточных результатов. К тому же они требуют повышенной точности вычислений по сравнению с методами, основанными на разложениях в ряды. Тем не менее, эти недостатки искупаются лаконичностью их формулировки и удобством для программирования. При этом наряду с линейными итерациями пикаровского типа в современной небесной механике употребляются квадратичные ньютоновские итерации, позволяющие достичь заданной точности за меньшее количество итераций (правда, ценой усложнения проведения одного шага итерационного процесса).

И, в-третьих, надо отметить все более широкое использование систем проведения буквенных операций на ЭВМ. Наиболее трудоемкие операции, с которыми приходится сталкиваться при построении аналитических и полуаналитических теорий движения, теперь перекладываются на средства специализированного программного обеспечения, в первую очередь на пуассоновские и кеплеровские процессоры. Таким образом, в современной аналитической небесной механике речь идет не только о применении ЭВМ для вычислений по готовым аналитическим

формулам, разработанным вручную, но и о машинном выводе самих формул, описывающих теорию движения того или иного небесного тела и реализующих тот или иной метод. При этом помимо разработки чисто аналитических теорий сейчас аналитические методы все чаще применяются для построения в буквенной форме добавок к некоторому приближенному номинальному решению, соответствующему конкретным числовым начальным условиям и конкретным числовым значениям параметров задачи. Это сохраняет преимущества аналитической формы решения и в то же время существенно уменьшает количество членов в результирующих рядах. Примерами подобных теорий могут служить теория спутников Сатурна Энцелада и Дионы, разработанная Джеффрисом и Рисом (Jefferys, Ries, 1975) и теория четырех внешних больших планет, построенная Симоном и Бретаньоном (Simon, Bretagnon, 1975, 1978).

Все эти тенденции находят свое отражение и в рассматриваемых в книге алгоритмах.

Пуассоновский процессор

§ 1. Ряды Пуассона

Основными объектами операций в небесной механике являются ряды Пуассона. Они возникают при построении аналитических теорий движения небесных тел или, что сейчас получает все большее распространение, при отыскании в буквенной форме поправок к некоторому приближенному номинальному решению, соответствующему определенным числовым начальным условиям и числовым значениям параметров задачи. Ряды Пуассона представляют собой ряды из степенных и тригонометрических членов вида

$$S = \sum S_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n} x_1^{i_1} \dots x_m^{i_m} \frac{\cos}{\sin} (j_1 y_1 + \dots + j_n y_n). \quad (1)$$

Здесь $x = (x_1, \dots, x_m)$ — степенные переменные, $y = (y_1, \dots, y_n)$ — тригонометрические. Суммирование в (1) производится по всем целочисленным (положительным и отрицательным) значениям мульти-индексов $i = (i_1, \dots, i_m)$ и $j = (j_1, \dots, j_n)$. Иногда бывает целесообразно рассматривать ряды Пуассона в экспоненциальной форме

$$S = \sum S_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n} x_1^{i_1} \dots x_m^{i_m} \exp \sqrt{-1} (j_1 y_1 + \dots + j_n y_n). \quad (2)$$

Сложение, вычитание и умножение двух рядов Пуассона, а также дифференцирование и интегрирование ряда Пуассона по любой из переменных снова приводит к ряду Пуассона (исключение составляет лишь интегрирование по тригонометрической переменной, присутствующей не во всех членах ряда). Это делает ряды Пуассона очень удобными объектами при проведении формальных аналитических операций.

Коэффициенты S_i^j рядов (1) представляются при вычислениях на ЭВМ вещественными числами, рациональными числами или числами двойной точности. В случае рядов (2) эти типы коэффициентов должны комбинироваться в сочетании с комплексной формой (хотя во многих задачах достаточно ограничиться рассмотрением рядов с чисто вещественными или чисто мнимыми коэффициентами).

Наряду с рядами Пуассона (1) в небесной механике часто встречаются ряды, у которых тригонометрические переменные являются линейными функциями аргумента t , а коэффициенты — полиномами относительно t :

$$y_k = \omega_k t + y_k^{(0)}, \quad S_i^j = S_i^j(t). \quad (3)$$

Сложение, вычитание и умножение этих рядов аналогичны соответствующим операциям над рядами Пуассона. Но при дифференцировании или интегрировании этих рядов по аргументу t в качестве множителя или делителя войдет величина

$$(j\omega) = j_1\omega_1 + \dots + j_n\omega_n.$$

Если частоты $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ являются числовыми компонентами, то форма ряда сохраняется. Если же величины $(j\omega)$ требуется оставить в буквенном виде, то исходная форма ряда нарушается и возникают так называемые эшелонированные ряды. В таких рядах каждый член характеризуется не только степенным мономом $(x)^i$ и тригонометрическим аргументом (jy) , но и набором величин $(k\omega)$.

Более сложным случаем является тот, когда частоты ω зависят от степенных переменных x . Если степенные переменные x являются малыми параметрами и частоты ω представляют собой ряды по степеням x , то множители и делители $(j\omega)$ комбинируются с мономами $(x)^i$ и поэтому форма ряда Пуассона (1) сохраняется. Если же разложение обратных величин делителей $(j\omega)$ по степеням x оказывается невозможным, то возникает более сложная по сравнению с (1) форма ряда — тригонометрический ряд с n угловыми переменными y , коэффициентами которого служат рациональные функции от их метрических переменных x . Ряды такого типа встречаются, например, в тео-

рии движения Луны (Вес et al., 1973), где разложения обратных величин делителей ($j\omega$) по степеням x не очень целесообразны из-за их медленной сходимости.

Все же ряды с рациональными функциями не столь типичны для небесной механики, как ряды Пуассона (1). Поэтому всюду в дальнейшем будут рассматриваться лишь ряды Пуассона в форме (1) или (2) с возможной модификацией (3), когда эта модификация не нарушает формы ряда.

Системы операций над рядами Пуассона на ЭВМ получили в небесной механике название пуассоновских процессоров. В литературе можно найти описание ряда пуассоновских процессоров, хорошо зарекомендовавших себя при решении практических задач. Достаточно назвать такие процессоры, как MAO (Rom, 1970), ESP (Rom, 1971), TRIGMAN (Jefferys, 1970, 1972), CAMAL (Barton et al., 1970a, b), SPASM (Cherniack, 1973), процессор Брукке (Broucke, Carthwaite, 1969), процессор Дазенброка (Dasenbrock, 1973) и ряд других. Некоторые из них позволяют оперировать с более широким классом объектов, чем ряды Пуассона. Например, в процессоре ESP рассматриваются эшелонированные ряды, в процессорах CAMAL и SPASM введены операции над рациональными функциями и т. д.

Перечисленные выше процессоры предназначены в первую очередь для использования на машинах серии IBM или CDC. Отметим теперь несколько подробнее пуассоновские процессоры для ЭВМ БЭСМ-6.

1. Система АМС (Брумберг, Исакович, 1974).

Система АМС (Algebraic Manipulation by Computer), представляющая собой модификацию процессора Дазенброка, рассчитана на операции с рядами (1) с рациональными коэффициентами и не более, чем с 8-ю степенными и 8-ю тригонометрическими переменными. Степенные и тригонометрические индексы хранятся в упакованном виде. Оперативная память распределяется динамически по методу ординарной цепи. Система снабжена входным языком PS—FORTRAN (POISSON SERIES] FORTRAN), расширяющим возможности обычного языка FORTRAN за счет включения в него новых объектов (степенные переменные, тригонометрические переменные и ряды Пуассона) и операций над ними (Бабаев, 1976а, б).

2. Система АЛИТА (Васильева, 1975).

Система АЛИТА (Алгебра ИТА) предназначена для операций с рядами Пуассона в экспоненциальной форме (2). Ее основные отличия от предшествующей системы: использование двойной цепи (первичную цепь образуют степенные элементы рядов, а чисто экспоненциальный ряд при степенном элементе составляет вторичную цепь), употребление коэффициентов в вещественной (а не в рациональной) форме, запоминание степенных индексов с помощью табличной нумерации степенных наборов (см. § 3).

3. Система POLY (Евдокимова, 1977).

Система рассчитана на частные случаи рядов Пуассона. Ее основное назначение — операции над полиномами с большим числом переменных. Оперативная память распределяется динамически-последовательным способом. Небольшая модификация делает эту систему пригодной для операций с полиномиально-экспоненциальными рядами, в которых коэффициенты и экспоненциальные переменные описываются выражениями (3).

Детальный обзор пуассоновских процессоров и их применений дан В. И. Скрипниченко (Евдокимова и др., 1975). В качестве наиболее характерных приложений пуассоновских процессоров более позднего времени отметим разработку теории движения спутников Сатурна с помощью системы TRIGMAN (Jefferys, Ries, 1975), применение процессора Брукке в аналитической теории галлеевых спутников Юпитера (Lieske, 1977), построение высокоточной аналитической теории движения искусственных спутников Земли с помощью процессора Дазенброка (Alfriend et al., 1977a, b), разработку новой аналитической теории движения Луны с помощью процессора типа ESP (Henrard, 1978).

Пуассоновские процессоры непрерывно совершенствуются и становятся все более эффективными. Важнейшей тенденцией их развития является повышение их универсальности. Универсальность пуассоновских процессоров означает их максимально возможную независимость от типа конкретной ЭВМ, от конкретного вида ряда Пуассона (например, в форме (1) или (2) с учетом модификации (3)), от того или иного способа размещения рядов в памяти ЭВМ. Количество степенных и тригонометрических переменных, границы изменения их индексов, степень по-

линомов $S_i^j(t)$ в модификации (3), арифметическая структура коэффициентов — все эти характеристики являются в универсальных пуассоновских процессорах произвольными и определяются лишь конкретной задачей. Такая универсальность пуассоновских процессоров обеспечивается иерархическим принципом их написания, основанным на идеях структурного программирования. Самый нижний уровень подпрограмм пуассоновских процессоров составляют подпрограммы, реализующие операции над коэффициентами членов и их индексами. Более высокий уровень занимают подпрограммы операций над отдельными членами рядов. На еще более высоком уровне находятся подпрограммы, с помощью которых осуществляются основные операции над рядами Пуассона — сложение, умножение, дифференцирование, интегрирование и т. п. Наконец, самый высокий уровень отводится подпрограммам, реализующим сложные аналитические операции над рядами Пуассона. Именно возможность производить такие операции делает пуассоновские процессоры эффективным средством при построении решений уравнений небесной механики в буквенной форме.

Может возникнуть естественный вопрос — зачем нужны специализированные системы для задач небесной механики, если существуют общематематические языки и системы для обработки символьной информации (в работе (Гердт и др., 1978) дается обзор подобных средств, имеющих в ОИЯИ в Дубне). Действительно, отдельные задачи небесной механики были успешно решены с помощью таких языков. Отметим, в частности, построение в буквенном виде тейлоровских разложений в задаче двух тел на языке FORMAC (Sconzo et al., 1965; LeSchack, Sconzo, 1968), вывод короткопериодических лунно-солнечных возмущений в теории движения ИСЗ на языке APL (Fisher, 1972), построение функций наклона на языке SYMBAL (Campbell, 1972), реализацию тензорных операций для целей релятивистской небесной механики на языке АНАЛИТИК-74 (Tarasevich, 1977), применение системы MACSYMA для операций с рядами Пуассона (Fateman, 1974). Система MACSYMA (Mathlab Group, 1977) заслуживает особого внимания, поскольку в настоящее время по своим функциональным возможностям она является наиболее развитой системой общего назначения. Однако, именно

в силу универсального характера подобных языков и систем их использование для решения больших задач небесной механики, где фигурируют длинные ряды Пуассона, оказывается менее эффективным по сравнению с такими специализированными системами, как пуассоновские процессоры. Поэтому параллельно с развитием языков обработки общематематической символической информации происходит развитие специализированных систем. Несомненно также, что широкое внедрение универсальных языков программирования высокого уровня таких, как ALGOL-68, PASCAL, PL/1 существенно облегчит создание специализированных систем типа пуассоновских процессоров и повысит их эффективность.

§ 2. Операции над рядами Пуассона

Перечислим теперь важнейшие из операций высшего уровня и дадим условные названия соответствующим подпрограммам.

1. Биномиальное разложение. Если A — некоторый ряд Пуассона, то часто бывает необходимым найти биномиальное разложение $(1 + A)^r$ и взять в этом разложении члены, начиная с A^k и кончая членом A^l включительно. В итоге получим ряд Пуассона

$$B = \sum_{s=k}^l \frac{(-1)^s (-r)_s}{(1)_s} A^s, \quad (4)$$

обозначаемый как

$$B = E_k^l (1 + A)^r. \quad (5)$$

Символ E должен напоминать о подпрограмме EXPAND, реализующей это разложение. Полное биномиальное разложение получается, очевидно, при $k = 0$, $l = \infty$. При $l = \infty$ суммирование в (4) идет до первого исчезающего члена. В этом случае индекс l в (5) будем просто опускать.

Заметим, что все операции с рядами в пуассоновских процессорах имеют формальный характер. Малость члена ряда определяется, как правило, аналитической характеристикой — порядком члена. Этот порядок рассчитывается по формуле

$$N = \sum_{r=1}^m p_r i_r, \quad (6)$$

где p_r — веса степенных переменных x_r , а i_r — соответствующие индексы. Даже в случае чисто тригонометрических рядов иногда бывает целесообразно ввести фиктивную степенную переменную, характеризующую аналитический порядок малости членов ряда. Кроме этой аналитической характеристики, малость члена ряда может определяться численной величиной его коэффициентов. Но может случиться, что коэффициенты членов ряда не убывают, хотя численная оценка членов, основанная на знании численной оценки переменных x , указывает на малость этих членов. В этом случае переменные x целесообразно подвергнуть нормализации

$$x_r = \varepsilon_r x'_r, \quad (7)$$

где ε_r — численные коэффициенты, имеющие порядок малости соответствующих переменных x_r , а x'_r — новые переменные порядка 1. В таком случае прежний коэффициент члена со степенными индексами i_r умножается на

$$\varepsilon_1^{i_1} \dots \varepsilon_m^{i_m}$$

и становится малым.

Эти критерии малости и определяют, в частности, практическую границу суммирования в (5) при $l = \infty$.

2. Тейлоровское разложение. Пусть $A(z)$ — некоторый ряд Пуассона, где z — совокупность его степенных и тригонометрических переменных x и y . Всем или некоторым из переменных z_r ($r = 1, 2, \dots, q$; $q = m + n$) придадим приращения δz_r в виде рядов Пуассона относительно z и, считая эти ряды малыми, найдем тейлоровское разложение $A(z + \delta z)$. Отрезок этого разложения, охватывающий члены с суммарным порядком от k до l включительно по отношению к приращениям δz_r , даст новый ряд Пуассона, обозначаемый в виде

$$B(z) = T_k^l A(z + \delta z). \quad (8)$$

Очевидно, что

$$B(z) = \sum_{s=k}^l \sum_{(s)} \frac{1}{r_1! \dots r_q!} \frac{\partial^{r_1+\dots+r_q} A(z)}{\partial z_1^{r_1} \dots \partial z_q^{r_q}} (\delta z_1)^{r_1} \dots (\delta z_q)^{r_q}, \quad (9)$$

где внутреннее суммирование распространяется на все целые неотрицательные значения $r_1, \dots, r_q$, связанные

условием

$$r_1 + \dots + r_q = s. \quad (10)$$

Тейлоровское разложение осуществляется в пуассоновском процессоре подпрограммой TAYLOR, и оператор T в (8) напоминает об этом. При $l = \infty$, как и в биномиальном разложении, суммирование в (9) происходит до первого значения s с нулевым вкладом в общую сумму. Верхний индекс в операторе T_k^l в этом случае опускается.

3. Обращение рядов. Во многих аналитических методах небесной механики встает задача об обращении преобразования

$$u = v + P(v), \quad (11)$$

где u , v , P — векторы некоторой размерности, причем компоненты $P(v)$ представляют собой ряды Пуассона. Преобразование (11) считается близким к тождественному. Это может быть в случае, когда ряды $P(v)$ пропорциональны некоторому малому параметру. Часто встречается и случай, когда v — степенные переменные, являющиеся малыми, и ряды $P(v)$ начинаются с членов не ниже второй степени относительно этих переменных. В этом случае обращение преобразования (11) легко осуществляется посредством итераций. Действительно, обратное преобразование можно искать в виде

$$v = u + Q(u), \quad (12)$$

и искомые ряды Пуассона $Q(u)$ находятся из уравнения

$$Q(u) = -P(u + Q) \quad (13)$$

посредством итераций пикаровского типа

$$Q^{(n+1)} = -P(u + Q^{(n)}), \quad n = 1, 2, \dots \quad (14)$$

с начальным значением

$$Q^{(1)}(u) = -P(u). \quad (15)$$

Для разложения правой части (14) используется подпрограмма TAYLOR. Подпрограмму, осуществляющую процесс построения обратного преобразования (12), назовем INVERS.

Задачу обращения преобразования (11) можно рассматривать как частный случай обобщенной теоремы Лагранжа о неявных функциях. Сравнительно недавно был

опубликован удобный алгоритм рекуррентного построения рядов, дающих решение проблемы Лагранжа (Feagin, Gottlieb, 1971). Вводя малый параметр ε , перепишем (11) в виде

$$u = v + \varepsilon P(v). \quad (16)$$

Если обращение (16) искать в виде

$$v = u + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n Q^{(n)}(u), \quad (17)$$

то после несложных преобразований из результатов указанной работы следует

$$Q^{(n+1)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\partial Q^{(n+1-k)}}{\partial u} Q^{(k)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (18)$$

с начальным значением

$$Q^{(1)}(u) = -P(u). \quad (19)$$

В покомпонентной записи соотношение (18) может быть переписано в виде

$$Q_i^{(n+1)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^q \frac{\partial Q_i^{(n+1-k)}}{\partial u_j} Q_j^{(k)}, \quad (i = 1, 2, \dots, q), \quad (20)$$

где q обозначает размерность векторов u и v . Это соотношение дает еще одну возможность реализации обращения рядов средствами пуассоновского процессора.

4. Возведение рядов в дробную отрицательную степень. В приложении к конкретным задачам операция возведения ряда Пуассона в дробную отрицательную степень является одной из наиболее употребительных. Подпрограмма, реализующая эту операцию и называемая в дальнейшем RAISE, дает по заданному ряду Пуассона A либо ряд

$$C = A^{-1/M}, \quad (21)$$

либо ряд

$$C = A^{-M/2}, \quad (22)$$

где M — натуральное число. При этом предполагается, что известно исходное приближенное значение B для результирующего ряда C .

Как и в случае подпрограммы INVERS, в основе подпрограммы RAISE лежит обычно или представление в форме биномиального ряда, или итерационный процесс

$$C_{k+1} = C_k + \delta C_{k+1}, \quad C_1 = B, \quad k = 1, 2, \dots \quad (23)$$

Рассмотрим сначала задачу (21) (Broucke, 1971a). Если через E обозначить ряд

$$E = 1 - B^M A, \quad (24)$$

который при хорошем исходном приближении B является малым, то, очевидно,

$$C = B (1 - E)^{-1/M}, \quad (25)$$

и подпрограмма EXPAND позволяет получить C . При итерационном решении подстановка (23) в (21) дает с точностью до членов первой степени по δC_{k+1}

$$(C_k^M + M C_k^{M-1} \delta C_{k+1}) A = 1,$$

и с той же степенью точности

$$\delta C_{k+1} = \frac{1}{M} C_k (1 - C_k^M A). \quad (26)$$

Соотношения (23), (26) описывают итерационный процесс ньютоновского типа. Этот процесс может быть использован и в сочетании с биномиальным разложением для уточнения значения C , полученного по (25).

В случае задачи (22) приходится делать различие между четным и нечетным значениями M . Для нечетного значения M биномиальное решение, эквивалентное (24), (25), дает

$$E = 1 - B^2 A^M, \quad C = B (1 - E)^{-1/2}, \quad M = 1, 3, 5, \dots, \quad (27)$$

а в случае четного значения M

$$E = 1 - B A^{M/2}, \quad C = B (1 - E)^{-1}, \quad M = 2, 4, 6, \dots \quad (28)$$

В итерационном решении подстановка (23) в (22) дает

$$(C_k^2 + 2 C_k \delta C_{k+1}) A^M = 1,$$

откуда

$$\delta C_{k+1} = \frac{1}{2} C_k (1 - C_k^2 A^M), \quad M = 1, 3, 5, \dots \quad (29)$$

или

$$\delta C_{k+1} = C_k (1 - C_k A^{M/2}), \quad M = 2, 4, 6, \dots \quad (30)$$

Здесь также можно комбинировать биномиальное разложение и итерационный процесс. Например, для получения ряда

$$D = (1 - E)^{-1}, \quad (31)$$

фигурирующего в (28), можно вместо биномиального разложения использовать итерационный процесс, вытекающий из (30) и рекомендованный, в частности, Джеффрисом (Jefferys, 1970):

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= 1 + E, \\ D_2 &= D_1(1 + E^2), \\ D_3 &= D_2(1 + E^4), \\ &\dots\dots\dots \\ D_{k+1} &= D_k(1 + E^{2^k}), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

5. Линейная замена переменных. Пусть S — ряд Пуассона в общей форме (1). Часто бывает необходимо произвести в нем линейную замену степенных и тригонометрических переменных

$$x_i = \sum_{r=1}^m A_{ir} u_r, \quad y_j = \sum_{s=1}^n B_{js} v_s, \quad (33)$$

где $A = \|A_{ir}\|$, $B = \|B_{js}\|$ — числовые матрицы, причем элементы матрицы B — целые числа. В результате ряд S будет представлен рядом Пуассона со степенными переменными u и тригонометрическими переменными v . Алгоритм подпрограммы SUBST, реализующей эту операцию, основан на почленном преобразовании ряда S к новым переменным.

5. **Вычисление рядов.** Подпрограмма EVALUE, в которой производится полное или частичное суммирование ряда Пуассона (т. е. подстановка числовых значений всех или части буквенных переменных), имеет исключительно важное значение для эффективного практического использования построенных аналитических решений. Нередко буквенные ряды Пуассона в задачах небесной механики насчитывают много тысяч членов и организация вычислений с помощью таких рядов вырастает в серьезную проблему. Однозначного окончательного решения, удовлетворительного как по расходу памяти, так и по быстрдействию, пока указать нельзя. В каждом пуассоновском

процессоре эта проблема решается по-своему. Например, в системе TRIGMAN задача сводится к суммированию чисто степенных рядов, так как синусы и косинусы комбинаций переменных заменяются произведениями степеней синусов и косинусов по каждой переменной в отдельности (Shelus, Jefferys, 1975). В недавней работе (Coffee, Deprit, 1978) кратный ряд Фурье преобразуется в надлежащим образом упорядоченный и дополненный файл из целочисленных векторов, отображающих тригонометрические аргументы, и соответствующих числовых коэффициентов. При последовательном прохождении файла синус и косинус любого аргумента вычисляются с помощью теоремы сложения по исходным значениям синусов и косинусов каждой из тригонометрических переменных.

Перечисленные операции не исчерпывают всех операций высшего уровня пуассоновских процессоров. Однако описанные подпрограммы являются основными и по ним можно без труда составлять новые типы подпрограмм сложных операций с рядами Пуассона.

Операции трех низших уровней не имеют непосредственного отношения к аналитическим методам небесной механики и поэтому здесь на них можно не останавливаться. Зато организация хранения рядов в памяти ЭВМ важна, так как от нее зависят количественные и качественные характеристики класса задач, решение которых возможно с помощью того или иного пуассоновского процессора.

§ 3. Размещение рядов Пуассона в памяти ЭВМ

Методы размещения информации в памяти ЭВМ детально изложены в первом томе руководства Кнута (Кнут, 1976). При расположении рядов Пуассона в памяти ЭВМ используются обычно самые простые информационные структуры — массивы или списки. В обоих случаях вся доступная память ЭВМ распределяется динамически. Значение переменной, представляющей собой название ряда, непосредственно указывает адрес паспорта ряда в этой памяти. Паспорт ряда содержит общие сведения о ряде — прежде всего, его длину и адрес первого члена ряда, характеристики для осуществления динамического обмена рядами между оперативной и внешней памятью и т.п. В случае представления ряда в виде массива члены ряда

записываются последовательно, друг за другом. В случае же списочной структуры в информацию о каждом члене ряда входит ссылка, указывающая адрес следующего члена (или две ссылки в случае двойной цепи). Информация об одном члене занимает обычно несколько машинных слов, составляющих один узел памяти. Узел содержит закодированные значения мультииндексов, коэффициент S_i^j , имя тригонометрической функции и в случае списочной структуры — ссылки на следующие члены ряда Пуассона. Паспорт ряда занимает один или несколько узлов. В универсальных пуассоновских процессорах длина узла устанавливается автоматически по исходным данным о типе рассматриваемых рядов Пуассона.

Обе формы представления — в виде массивов и в виде списков — имеют свои достоинства и недостатки. Все же в последних процессорах предпочтение отдается списочным структурам, а сравнительно недавно для повышения эффективности операции умножения рядов стали применяться и древовидные структуры (Fateman, 1974).

Остановимся в заключение на частном, но имеющем важное значение вопросе кодировки индексов. Обычно индексы упаковываются в одно или несколько машинных слов в зависимости от их количества, диапазона их изменения и длины машинного слова. При очень большом числе индексов упаковка может оказаться слишком неэкономной. Альтернативой является нумерация всех допустимых комбинаций индексов.

Рассмотрим сначала случай m полиномиальных индексов $i_1, \dots, i_m$, каждый из которых может принимать лишь неотрицательные значения от 0 до некоторого числа K . В задачах небесной механики типичным является случай, когда полиномиальные переменные представляют собой малые параметры и можно ограничиться в рядах членами, суммарный порядок которых не превышает K . Таким образом, допустимыми являются все те комбинации индексов, значения которых не отрицательны и удовлетворяют уравнению

$$i_1 + i_2 + \dots + i_m = k, \quad k = 0, 1, \dots, K. \quad (34)$$

Число решений этого уравнения с правой частью k будет

$$L(m, k) = \frac{(m)_k}{(1)_k} = \frac{(k+1)_{m-1}}{(1)_{m-1}}, \quad (35)$$

а общее число решений всех уравнений (34) составит

$$M(m, K) = \sum_{k=0}^K L(m, k) = L(m+1, K) = \frac{(K+1)_m}{(1)_m}. \quad (36)$$

При обычной упаковке под каждый индекс i_r ($r = 1, 2, \dots, m$) требуется отвести количество бит, необходимое для записи числа K . При нумерации индексов расход памяти минимален. Нумерация бывает особенно удобна, когда число $M(m, K)$ меньше максимального целого числа, представимого одним машинным словом. Перенумеруем все допустимые комбинации индексов в порядке возрастания суммы, а внутри группы с одинаковой суммой — в порядке возрастания целого числа, разряды которого состоят из значений $i_1, i_2, \dots, i_m$. Однозначное соответствие между порядковым номером комбинации и фактическими значениями индексов определяется тогда формулой (Брумберг, 1974)

$$N(i_1, \dots, i_m) = L\left(m+1, \sum_{r=1}^m i_r\right) - \sum_{q=1}^{m-1} L\left(m+1-q, \sum_{r=q+1}^m i_r - 1\right). \quad (37)$$

Этот номер N , принимающий значения от 1 до $M(m, K)$, заменяет обычную упаковку индексов.

Для ускорения вычислений по этой формуле необходимые значения $L(n, k)$, $n = 2, 3, \dots, m+1$, $k = -1, 0, \dots, K$ вычисляются заранее и табулируются. Элементы матрицы $L(n, k)$ проще всего находить по рекуррентной формуле

$$L(n, k) = L(n, k-1) + L(n-1, k), \quad (38)$$

$$n = 3, \dots, m+1, \quad k = 0, \dots, K,$$

приняв в качестве начальных значений элементы первого столбца

$$L(n, -1) = 0, \quad n = 2, \dots, m+1$$

и первой строки

$$L(2, k) = k+1, \quad k = -1, 0, \dots, K.$$

Вычисление по формуле (37) номера N заданной комбинации индексов $i_1, \dots, i_m$ не представляет затруднений. Решение обратной задачи — нахождение комбинации значений $i_1, \dots, i_m$ по заданному номеру N — несколько более сложно. Эта задача может быть решена путем последовательного дихотомического поиска числа N среди элементов строк матрицы $L(n, k)$, начиная с последней строки. На первом шаге этого алгоритма по заданному номеру N отыскивается число k такое, что

$$L(m+1, k-1) < N < L(m+1, k). \quad (39)$$

Тогда

$$\sum_{r=1}^m i_r = k.$$

Если окажется, что

$$N = L(m+1, k),$$

то процесс заканчивается и

$$i_1 = k, \quad i_2 = \dots = i_m = 0.$$

В общем случае полагаем далее

$$N_1 = L(m+1, k) - N$$

и находим число k_1 такое, что

$$L(m, k_1-1) < N_1 < L(m, k_1). \quad (40)$$

Тогда

$$\sum_{r=2}^m i_r = k_1.$$

Если окажется, что

$$N_1 = L(m, k_1),$$

то процесс заканчивается и

$$i_1 = k - k_1 - 1, \quad i_2 = 1 + k_1, \quad i_3 = \dots = i_m = 0.$$

В общем случае продолжаем процесс, т. е. по числу

$$N_s = N_{s-1} - L(m+2-s, k_{s-1}-1)$$

находим число k_s такое, что

$$L(m+1-s, k_s-1) < N_s < L(m+1-s, k_s). \quad (41)$$

Тогда

$$\sum_{r=s+1}^m i_r = k_s.$$

Если окажется, что

$$N_s = L(m + 1 - s, k_s),$$

то процесс заканчивается, причем

$$i_{s+1} = 1 + k_s, \quad i_{s+2} = \dots = i_m = 0,$$

$$i_s = k_{s-1} - k_s - 1,$$

$$i_{s-1} = k_{s-2} - k_{s-1}, \quad \dots, \quad i_1 = k - k_1.$$

Процесс повторяется для значений $s = 2, 3, \dots, m - 1$, и самое позднее для значения $s = m - 1$ он заканчивается. Все поиски (39) — (41) проводятся путем дихотомии.

Приведем пример, иллюстрирующий этот алгоритм. Пусть $m = 4$, $K = 2$. Допустимые комбинации индексов идут в следующем порядке:

N	i_1	i_2	i_3	i_4	N	i_1	i_2	i_3	i_4
1	0	0	0	0	9	0	1	0	1
2	0	0	0	1	10	0	1	1	0
3	0	0	1	0	11	0	2	0	0
4	0	1	0	0	12	1	0	0	1
5	1	0	0	0	13	1	0	1	0
6	0	0	0	2	14	1	1	0	0
7	0	0	1	1	15	2	0	0	0
8	0	0	2	0					

Матрица $L(n, k)$ состоит в этом случае из следующих элементов:

$k \backslash n$	—1	0	1	2
2	0	1	2	3
3	0	1	3	6
4	0	1	4	10
5	0	1	5	15

Пусть $N = 12$. Ищем место N среди элементов последней строки и находим, что $k = 2$, $N_1 = 3$. Переходим к третьей строке и получаем, что $k_1 = 1$, $N_2 = 2$. Отыскивая место N_2 среди элементов второй строки, находим, что $k_2 = 1$, $N_3 = 1$. N_3 содержится среди элементов первой строки в столбце со значением $k_3 = 0$. Таким образом,

$$i_4 = 1, \quad i_3 = 0, \quad i_2 = 0, \quad i_1 = 1.$$

В случае тригонометрических индексов нумерация осуществляется более сложным образом. Пусть каждый из тригонометрических индексов j_r ($r = 1, 2, \dots, n$) меняется в пределах от $-J$ до $+J$. В задачах небесной механики часто встречаются такие ряды, у которых число J само по себе может быть достаточно большим, однако сумма индексов

$$j_1 + j_2 + \dots + j_n = k \quad (42)$$

представляет собой достаточно малое по абсолютной величине число и можно считать, что k пробегает значения

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm K, \quad 0 < K < J. \quad (43)$$

Поэтому общее число допустимых комбинаций будет гораздо меньше, чем в случае независимого изменения каждого из индексов (как это предполагается в методе упаковки).

Обозначим число возможных комбинаций индексов с фиксированной суммой k при ограничении

$$-J \leq j_r \leq J \quad (44)$$

через $L(n, k, J)$. Очевидно, что

$$L(n, -k, J) = L(n, k, J).$$

Суммарное число всех возможных комбинаций, составляющих решение уравнений (42) с условиями (43) и (44), будет

$$M(n, K, J) = \sum_{k=0}^K (2 - \delta_{k0}) L(n, k, J). \quad (45)$$

Числа $L(n, k, J)$ вычисляются по рекуррентной формуле

$$L(n, k, J) = \sum_{r=1}^{2J+1} L(n-1, k+J+1-r, J), \quad (46)$$

с начальным значением

$$L(2, k, J) = 2J - |k| + 1. \quad (47)$$

Для нумерации комбинаций значений индексов целесообразно перейти к неотрицательным величинам

$$j_r^* = j_r + J, \quad 0 \leq j_r^* \leq 2J,$$

и располагать комбинации по группам с одинаковым значением k в порядке $k = 0, k = \pm 1, k = \pm 2, \dots$, а внутри группы — в порядке возрастания целых чисел, рядами которых являются $j_1^*, j_2^*, \dots, j_n^*$. Начальный член группы с суммой k имеет значения

$$j_1^* = \dots = j_{n-m-1}^* = 0, \quad j_{n-m}^* = l, \quad j_{n-m+1}^* = \dots = j_n^* = 2J,$$

где m и l такие числа, что

$$k + nJ = 2Jm + l, \quad 0 \leq l < 2J.$$

Все допустимые комбинации индексов можно таким образом перенумеровать и установить однозначное соответствие между номером комбинации и значениями индексов. Однако это соответствие описывается значительно более сложной формулой, чем (37), и ее практическое использование сопряжено с известными трудностями. Поэтому для кодировки тригонометрических индексов способ нумерации, как правило, не употребляется.

Если ряды, встречающиеся при решении конкретной задачи, достаточно плотные (т. е. не содержат слишком много нулевых коэффициентов среди членов с допустимыми комбинациями индексов), то можно вообще отказаться от хранения индексов и восстанавливать их значения лишь на основе места соответствующего члена в массиве коэффициентов. Это место определяется в соответствии с формулой нумерации типа (37). Необходимость в решении обратной задачи — нахождении значений индексов по номеру члена в массиве коэффициентов — здесь отпадает, так как достаточно лишь уметь по заданной комбинации индексов находить следующую за ней. Этот табличный метод размещения рядов широко практиковался в работах специалистов Бюро долгот (Франция). Однако в этом методе распределение памяти является статическим, ряды предполагаются имеющими одну и ту же структуру, так что он менее универсален, чем динамические методы, отмеченные выше.

Кеплеровский процессор

§ 1. Кеплеровский процессор в замкнутой форме

Под кеплеровским процессором понимается система подпрограмм, реализующих операции над функциями от координат в невозмущенной задаче двух тел. Как правило, при этом имеется в виду лишь случай эллиптического движения, наиболее важный для практических приложений. Кеплеровский процессор строится на основе пуассоновского процессора или какого-либо общего языка обработки символьной информации и может служить примером применения этих средств программного обеспечения к выводу формул кеплеровского движения.

Хорошо известно, что решение задачи двух тел может быть получено в трех основных формах: 1) в виде конечных выражений с применением истинной или эксцентрической аномалий; 2) в виде тригонометрических рядов по кратным средней аномалии; 3) в виде рядов по степеням времени. Последняя форма пригодна лишь на некотором конечном интервале времени. В зависимости от того, какая из этих форм выбрана в качестве основы, будем говорить о кеплеровском процессоре соответственно в замкнутой форме, в форме рядов Пуассона и в форме рядов Тейлора. Начнем с первой из этих форм.

В основу кеплеровского процессора в замкнутой форме можно положить выражения

$$\mathbf{r} = r (\mathbf{l} \cos u + \mathbf{m} \sin u), \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} [-\mathbf{l} (\sin u + e \sin \omega) + \mathbf{m} (\cos u + e \cos \omega)]. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{r}$ и $\dot{\mathbf{r}}$ — относительные координаты и компоненты скорости в задаче двух тел, r и u — полярные координаты в плоскости орбиты — радиус-вектор и аргумент широты, ω — аргумент перицентра. Положение плоскости орбиты относительно основной координатной плоскости характе-

ризуется наклоном i и долготой восходящего узла Ω или тройкой ортогональных единичных векторов $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{k}$:

$$\mathbf{l} = \begin{pmatrix} \cos \Omega \\ \sin \Omega \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{m} = \begin{pmatrix} -\cos i \sin \Omega \\ \cos i \cos \Omega \\ \sin i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} \sin i \sin \Omega \\ -\sin i \cos \Omega \\ \cos i \end{pmatrix}.$$

Переходя от u к истинной аномалии v

$$u = v + \omega,$$

имеем

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}, \quad (3)$$

$$\mathbf{r} = r(\mathbf{P} \cos v + \mathbf{Q} \sin v), \quad (4)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{na}{\sqrt{1 - e^2}} [-\mathbf{P} \sin v + \mathbf{Q} (\cos v + e)], \quad (5)$$

где ортогональные единичные векторы $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ получаются поворотом векторов $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$ в плоскости орбиты на угол ω :

$$\mathbf{P} = \mathbf{l} \cos \omega + \mathbf{m} \sin \omega, \quad \mathbf{Q} = -\mathbf{l} \sin \omega + \mathbf{m} \cos \omega.$$

Переход к эксцентрической аномалии E осуществляется с помощью соотношений

$$r = a(1 - e \cos E), \quad (6)$$

$$r \cos v = a(\cos E - e), \quad (7)$$

$$r \sin v = a\sqrt{1 - e^2} \sin E. \quad (8)$$

Во всех этих формулах a , e , n означают соответственно большую полуось, эксцентриситет и среднее движение, причем

$$n^2 a^3 = fm,$$

где f — гравитационная постоянная, а m — сумма масс обоих тел. Связь со временем задается уравнением Кеплера

$$E - e \sin E = M, \quad (9)$$

где M — средняя аномалия

$$M = \mathfrak{M} + n(t - t_0), \quad (10)$$

а $\mathfrak{M}$ — средняя аномалия в эпоху t_0 .

Типичной операцией кеплеровского процессора в замкнутой форме является, например, нахождение частных производных от координат и компонентов скорости по той или иной системе элементов или по начальным значениям координат и скоростей. Однако соответствующие алгоритмы машинных вычислений фактически повторяют известные алгоритмы ручных вычислений и на них можно не останавливаться. Более интересной является задача интегрирования типа

$$G = \int F dM, \quad (11)$$

где

$$F = \sum A(r, \dot{r}) \frac{\cos}{\sin} (jv + kE), \quad (12)$$

причем $A(r, \dot{r})$ представляет собой полином, содержащий положительные и отрицательные степени своих аргументов, а его коэффициенты в свою очередь могут быть степенными функциями от e и $\eta = \sqrt{1 - e^2}$. Суммирование в (12) распространяется на конечный ряд значений j и k . Подобная задача возникает при определении возмущений в замкнутой форме без использования разложений в ряды. Например, в движении ИСЗ, возмущения, обусловленные сжатием Земли, могут быть найдены в виде конечных выражений от истинной аномалии v , главные лунно-солнечные возмущения — в виде конечных выражений от эксцентрической аномалии E и средней долготы возмущающего тела, а при совместном учете этих факторов при построении теории второго порядка появятся члены общего вида (12), содержащие v , и E .

Излагаемый ниже алгоритм решения задачи (11), (12) принадлежит Джеффрису (Jefferys, 1971). Этот алгоритм состоит из нескольких этапов.

1. Прежде всего, если j и k одновременно отличны от нуля, то по формулам косинуса и синуса суммы углов разделяем аргументы jv и kE .

2. Используя выражения

$$\cos v = \frac{1}{e} \left[(1 - e^2) \frac{a}{r} - 1 \right], \quad \sin v = \frac{\eta}{e} \frac{\dot{r}}{na}, \quad (13)$$

$$\cos E = \frac{1}{e} \left(1 - \frac{r}{a} \right), \quad \sin E = \frac{1}{e} \frac{r}{a} \frac{\dot{r}}{na}, \quad (14)$$

по рекуррентным формулам

$$\cos nx = 2 \cos x \cos (n-1)x - \cos (n-2)x, \quad (15)$$

$$\sin nx = 2 \cos x \sin (n-1)x - \sin (n-2)x, \quad (16)$$

$$n = 2, 3, \dots$$

находим необходимые значения тригонометрических функций от jv и kE в виде функций от полиномиальных переменных r , $\dot{r}$, e и η . В результате этого этапа F станет многочленом относительно r и $\dot{r}$, причем отрицательные степени $\dot{r}$ больше не должны встречаться (в противном случае интеграл (11) будет несобственным). Для упрощения операций можно полагать $a = 1$, $n = 1$, восстановив из соображений размерности эти параметры лишь в окончательном выражении (11).

3. Все степени $\dot{r}$, кроме первой степени, исключаются из F путем применения соотношения

$$\frac{\dot{r}^2}{n^2 a^2} = -1 + 2 \frac{a}{r} - (1 - e^2) \frac{a^2}{r^2}.$$

После этого подынтегральная функция F примет вид

$$F = A(r) + B(r) \frac{\dot{r}}{na}, \quad (17)$$

где $A(r)$, $B(r)$ — многочлены от положительных и отрицательных степеней r с коэффициентами — степенными функциями от e и η .

4. Полином $A(r)$ подразделяется на две части. К одной части относятся все члены со степенями, меньшими -1 , к другой — члены со степенями, большими или равными -1 . Таким образом, $A(r)$ преобразуется к виду

$$A(r) = \frac{a^2}{r^2} P_1\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{a}{r} P_2(r), \quad (18)$$

где P_1 и P_2 — полиномы, содержащие лишь неотрицательные степени своих аргументов.

5. В полиноме P_1 функция $1/r$ заменяется в соответствии с (3):

$$\frac{a}{r} = \frac{1}{\eta^2} (1 + e \cos v),$$

а аргумент r в P_2 заменяется в соответствии с (6). Получившиеся полиномы по степеням косинусов преобразуются

к тригонометрическим полиномам $B_1(v)$ и $B_2(E)$, содержащим косинусы кратных соответствующих аргументов. В результате $A(r)$ запишется в виде

$$A(r) = \frac{a^2}{r^2} B_1(v) + \frac{a}{r} B_2(E). \quad (19)$$

6. В невозмущенном кеплеровском движении имеем

$$dM = ndt = \frac{r}{a} dE = \frac{1}{\eta} \frac{r^2}{a^2} dv. \quad (20)$$

Поэтому, комбинируя (17) и (20), получаем для интеграла (11) выражение

$$G = \frac{1}{a} \int B(r) dr + \frac{1}{\eta} \int B_1(v) dv + \int B_2(E) dE. \quad (21)$$

Все три интеграла в этом выражении вычисляются элементарно. Однако помимо степенных функций от r и синусов, кратных v и E , здесь могут возникнуть логарифмический член $\ln r$ (если $B(r)$ содержит член $1/r$), и вековые члены, пропорциональные v или E (если $B_1(v)$ или $B_2(E)$ содержат постоянные члены). Появление логарифмического члена нарушает вид функции (12) и свидетельствует о том, что дальнейшее интегрирование в замкнутой форме выражений с участием G , вообще говоря, невозможно. Вековые члены обычно отделяются от периодических. Но при этом во многих методах небесной механики речь идет о вековых членах относительно средней аномалии M . В этом отношении вековой член, пропорциональный E , не вызывает осложнений, так как в силу уравнения Кеплера он может быть заменен вековым членом по M и периодическим членом по E . Член же, пропорциональный v , может быть заменен лишь выражением

$$v = M + f, \quad (22)$$

где функция f , носящая название уравнения центра, не выражается в замкнутом виде. В этом случае дальнейшее интегрирование в замкнутом виде, вообще говоря, также невозможно, и приходится либо менять метод решения задачи, либо вводить новые трансцендентные функции, связанные с интегралами от степеней величины f .

За исключением этих особенностей выражение (21) сводится к частному случаю формы (12). В зависимости от

целей дальнейшего использования этого выражения в нем можно, как на втором этапе, заменить тригонометрические функции от v и E на степенные функции от r и $\dot{r}$ или, наоборот, как на пятом этапе, исключить вообще степенные функции от r .

7. В завершение алгоритма для упрощения полученного выражения целесообразно использовать связь

$$e^2 + \eta^2 = 1.$$

С этой целью можно, например, вынести в G в качестве сомножителей максимальные отрицательные степени e и η , а в оставшейся части, содержащей лишь положительные степени e и η , произвести поочередно замены $e^2 = 1 - \eta^2$ и $\eta^2 = 1 - e^2$ и выбрать наиболее компактную форму.

Этот алгоритм был реализован Джеффрисом с помощью пуассоновского процессора TRIGMAN. В Институте теоретической астрономии АН СССР (Ленинград) и в Институте кибернетики АН УССР (Киев) Н. Н. Васильев и В. А. Щербов реализовали несколько модифицированную версию этого алгоритма на языке АНАЛИТИК ЭВМ МИР-2 и МИР-3.

§ 2. Кеплеровский процессор в форме рядов Пуассона

Задача кеплеровского процессора в форме рядов Пуассона состоит в машинном выводе классических разложений функций от координат эллиптического движения. Как правило, все эти разложения имеются в настоящее время в виде таблиц (например, Jarnagin, 1965), однако для решения задач на ЭВМ необходимы подпрограммы получения типичных разложений. Совокупность таких подпрограмм составляет содержание кеплеровского процессора в форме рядов Пуассона.

Один из вариантов кеплеровского процессора и его применение описаны Брукке (Broucke, 1970, 1974a). Ниже приводится вариант, основанный на работе Брумберга и Исакович (1975). Основными подпрограммами в этом варианте являются следующие четыре подпрограммы:

CENTER (F , N , E , M) — подпрограмма разложения уравнения центра f , определяемого по (22), в ряд Пуассона F типа $1 + 1$ с одной полиномиальной переменной

E , совпадающей с эксцентриситетом e , и одной тригонометрической переменной M , имеющей смысл средней аномалии. В разложении по эксцентриситету сохраняются члены до степени N включительно. Алгоритм основан на дифференциальном уравнении (20)

$$\frac{dv}{dM} = \frac{(1 + e \cos v)^2}{(1 - e^2)^{3/2}}$$

и сводится к проведению итераций по формуле

$$f_k = \int \{(1 - e^2)^{-3/2} [1 + e \cos (M + f_{k-1})]^2 - 1\} dM, \quad (23)$$

$$f_0 = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Структура формулы (23) показывает, что итерационный процесс состоит в использовании таких подпрограмм пуассоновского процессора, как TAYLOR (разложение величины $\cos (M + f_{k-1})$ по приращению аргумента), EXPAND (применение бинома Ньютона) и INTEG (интегрирование по тригонометрической переменной M). Каждый шаг интегрального процесса повышает точность определения величины f на один порядок по e , и f_k является точным приближением f в пределах членов до степени e^k включительно. При вычислении подынтегрального выражения в (23) все операции надо производить лишь в пределах этой точности, так как члены со степенями выше, чем e^k , в этом выражении ошибочны и влекут за собой соответствующие ошибки в f_k (например, появление вековых членов относительно M). Подобное обстоятельство следует всегда иметь в виду при использовании итерационных процессов для определения рядов Пуассона. В особенности необходимо соблюдать осторожность в случае численного задания полиномиальных переменных. Например, если эксцентриситет e в (23) задан численно, то для получения верного результата для f в виде тригонометрического ряда по M надо приписать коэффициенту e аналитический порядок малости 1, а коэффициенту e^2 — аналитический порядок малости 2 и производить все операции с учетом этого аналитического порядка малости.

KEPLER (G, N, E, M) — разложение решения уравнения Кеплера в ряд Пуассона $1 + 1$ с прежними значениями E, M и N . Непосредственно разлагаемой величиной является разность g между эксцентрической и средней

аномалиями, и алгоритм состоит в проведении итераций по формуле

$$\begin{aligned} g_k &= e \sin (M + g_{k-1}), \\ g_0 &= 0, k = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь также используется подпрограмма TAYLOR пуассоновского процессора (разложение величины $\sin (M + g_{k-1})$ по приращению аргумента). В результате получается ряд G , представляющий функцию g .

HANSEN ($A, B, C, D, P, Q, N, IS, E, M$) — получение следующих рядов Пуассона типа $1 + 1$:

$$A \equiv \left(\frac{r}{a}\right)^p \cos qw = A_0^{p,q} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{p,q} \cos kM, \quad (25)$$

$$B \equiv \left(\frac{r}{a}\right)^p \sin qw = \sum_{k=1}^{\infty} B_k^{p,q} \sin kM, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} C = A_0^{p,q} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (A_k^{p,q} + B_k^{p,q}) \cos kM + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (A_k^{p,q} - B_k^{p,q}) \sin kM \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Исходные параметры E, M, N имеют прежний смысл эксцентриситета, средней аномалии и максимальной степени разложения по эксцентриситету соответственно. Параметры P, Q — это целочисленные индексы p, q , фигурирующие в левых частях (25), (26). Параметр IS указывает, какое значение имеет заданный ряд D . Если $IS = 1$, то D представляет собой разложение уравнения центра, получаемое предварительно с помощью подпрограммы CENTER. В этом случае величина w в (25), (26) имеет смысл истинной аномалии. Если же $IS = 2$, то D является разложением разности g , получаемым с помощью подпрограммы KEPLER, и величина w в этом случае имеет смысл эксцентрической аномалии. При $IS = 1$ радиус-вектор выражается через истинную аномалию, при $IS = 2$ — через эксцентрическую, т. е. в обоих случаях — через $\cos w$. Алгоритм вычислений сводится к применению подпрограммы TAYLOR (разложение величин $\cos w, \cos qw, \sin qw$ в ряд по приращению D , где $D = w - M$) и под-

программы EXPAND (для нахождения величины $(r/a)^p$ по биному Ньютона). По рядам A , B с помощью подпрограммы CHANGE, осуществляющей в тригонометрических членах ряда Пуассона взаимную замену символов $\sin$ и $\cos$, легко находится ряд C .

В варианте с $IS = 1$ коэффициенты ряда C дают разложения коэффициентов Ганзена. Действительно, коэффициенты Ганзена $X_k^{p,q}(e)$ определяются разложением

$$\left(\frac{r}{a}\right)^p \exp \sqrt{-1} qv = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^{p,q}(e) \exp \sqrt{-1} kM \quad (28)$$

и сопоставление с (25), (26) показывает, что

$$X_0^{p,q} = A_0^{p,q}, \quad X_k^{p,q} = \frac{1}{2}(A_k^{p,q} + B_k^{p,q}), \quad X_{-k}^{p,q} = \frac{1}{2}(A_k^{p,q} - B_k^{p,q}). \quad (29)$$

Степенные разложения коэффициентов Ганзена имеют своими коэффициентами операторы Ньюкома

$$X_k^{p,q}(e) = \sum_{s=0}^{\infty} P_{k-q}^{|k-q|+2s}(p, q) e^{|k-q|+2s}, \quad (30)$$

так что определение рядов C позволяет найти числовые значения этих операторов.

Коэффициенты Ганзена являются примером специальных функций, типичных для задач небесной механики. Теория этих функций детально разработана, в том числе и с вычислительной точки зрения. Особенность кеплеровского процессора состоит в том, что разложения этих функций строятся в нем лишь на основе самих элементарных формул задачи двух тел.

Вариант $IS = 2$ приводит к разложениям, коэффициентами которых являются функции Бесселя. Например,

$$A_0^{0,q} = -\frac{1}{2} e \delta_{q,1}, \quad A_k^{0,q} = \frac{q}{k} [J_{k-q}(ke) - J_{k+q}(ke)],$$

$$B_k^{0,q} = \frac{q}{k} [J_{k-q}(ke) + J_{k+q}(ke)]$$

и

$$A_0^{-1,0} = 1, \quad A_k^{-1,0} = 2J_k(ke).$$

В последние годы было найдено несколько интересных разложений, связанных с функциями от скорости V эллиптического движения (Broucke, 1974b; Jurp, 1975). Так как

$$\left(\frac{V}{na}\right)^2 = \frac{1 + 2e \cos v + e^2}{1 - e^2}, \quad (31)$$

то эти разложения легко могут быть получены с помощью подпрограмм CENTER, TAYLOR и EXPAND.

COORD (X, Z, P, N, IS, PV, TV) — разложение прямоугольных координат задачи двух тел в ряды Пуассона типа $3 + 3$, если $IS = 1$, и типа $2 + 3$, если $IS = 2$. Массив тригонометрических переменных TV в обоих случаях имеет такой смысл:

$$TV(1) = \Omega, \quad TV(2) = \omega, \quad TV(3) = M. \quad (32)$$

Массив полиномиальных переменных PV состоит в случае $IS = 1$ из элементов

$$PV(1) = e, \quad PV(2) = \sin \frac{i}{2}, \quad PV(3) = \cos \frac{i}{2}, \quad (33)$$

а в случае $IS = 2$ — из элементов

$$PV(1) = e, \quad PV(2) = \sin i. \quad (34)$$

В первом случае разложение ведется лишь по эксцентриситету вплоть до членов степени N включительно, а величины $\sin(i/2)$, $\cos(i/2)$ учитываются строго. Во втором случае разложение ведется по обоим параметрам e и $\sin i$ вплоть до членов суммарной степени N включительно. Результатом подпрограммы являются ряды X и Z для первой и третьей компонент вектора

$$\left(\frac{r}{a}\right)^p \frac{r}{a} = \left(\frac{r}{a}\right)^{p+1} \left(\mathbf{P} \cos v + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \omega} \sin v\right). \quad (35)$$

Значение индекса p при обращении к подпрограмме определяется параметром P . Вектор $\mathbf{P}$ в соответствии с (4) имеет компоненты

$$P_1 = \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i,$$

$$P_3 = \sin \omega \sin i,$$

причем в варианте с $IS = 1$ здесь надо перейти к $\sin(i/2)$,

$\cos(i/2)$, а в варианте с $IS = 2$ — разложить $\cos i$ по степеням $\sin i$.

Алгоритм вычислений по формуле (35) чрезвычайно прост и сводится к применению подпрограмм CENTER и HANSEN. Окончательные ряды в случае $IS = 1$ имеют следующую структуру:

$$xr^p/a^{p+1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^{p+1,1}(e) \left[\cos^2 \frac{i}{2} \cos(\Omega + \omega + kM) + \sin^2 \frac{i}{2} \cos(\Omega - \omega - kM) \right], \quad (36)$$

$$zr^p/a^{p+1} = \sin i \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^{p+1,1}(e) \sin(\omega + kM). \quad (37)$$

Разложение для второй компоненты вектора (35), т. е. для величины yr^p/a^{p+1} , получается из ряда для первой компоненты путем применения подпрограммы CHANGE. Однако при этом важен порядок следования тригонометрических аргументов — переменная Ω должна предшествовать ω и M так, чтобы сумма индексов в любом тригонометрическом члене для x и y при аргументах Ω , $\pi (= \omega + \Omega)$ и $\lambda (= M + \pi)$ была бы равна единице.

Подпрограммы CENTER, KEPLER, HANSEN и COORD обеспечивают получение всех классических разложений. Кроме них, бывают полезны две подпрограммы для разложения по комплексным или вещественным переменным типа Лапласа.

TRIPOLE (A, PV, TV, CPV) — преобразование ряда A из тригонометрической формы $2 + 3$, даваемой предшествующей подпрограммой при $IS = 2$, в полиномиальную форму $4 + 0$ относительно комплексно-сопряженных переменных:

$$\begin{aligned} CPV(1) &= K, & CPV(2) &= \bar{K}, & CPV(3) &= L, \\ & & CPV(4) &= \bar{L}, \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$K = e \exp \sqrt{-1} M, \quad L = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \sin i \exp \sqrt{-1} (M + \omega). \quad (39)$$

Первоначальные полиномиальные и тригонометрические переменные ряда A задаются массивами PV и TV

со значениями (34) и (32). Преобразование ряда определяется соответствием

$$e^{i_1} (\sin i)^{i_2} \exp \sqrt{-1} (k_1 \Omega + k_2 \omega + k_3 M) \rightarrow \\ \rightarrow C^* K^{j_1} \bar{K}^{j_2} L^{j_3} \bar{L}^{j_4}. \quad (40)$$

По свойству Даламбера степенные и тригонометрические индексы для любого члена разложений функций эллиптического движения удовлетворяют соотношениям

$$i_1 = |k_3 - k_2| + 2s, \quad i_2 = |k_2 - k_1| + 2r, \\ s, r \geq 0.$$

Поэтому непосредственная подстановка выражений (39) в левую часть (40) дает

$$e^{i_1} (\sin i)^{i_2} \exp \sqrt{-1} (k_1 \Omega + k_2 \omega + k_3 M) = \\ = C K^{j_1} \bar{K}^{j_2} L^{j_3} \bar{L}^{j_4} \exp \sqrt{-1} k_1 \lambda, \quad (41)$$

где λ — средняя долгота, а

$$C = 4^r \cdot 2^{|k_1 - k_2|} \cdot (-1)^{\max\{0, k_1 - k_2\}} (\sqrt{-1})^{|k_1 - k_2|}$$

и

$$j_1 = s + \max\{0, k_3 - k_2\}, \quad j_2 = s + \max\{0, k_2 - k_3\}, \\ j_3 = r + \max\{0, k_2 - k_1\}, \quad j_4 = r + \max\{0, k_1 - k_2\}.$$

Вещественный множитель C^* выбирается равным C при четном значении разности $k_1 - k_2$, а при нечетном значении этой разности $C^* = C/(2\sqrt{-1})$. Поэтому

$$C^* = 4^{r+E} \left(\frac{|k_1 - k_2|}{2} \right) \cdot (-1)^{\max\{0, k_1 - k_2\} + E} \left(\frac{|k_1 - k_2|}{2} \right). \quad (42)$$

Если первоначально ряд A представлял собой ряд Пуассона $2 + 3$ для величины xr^p/a^{p+1} , то после обращения к TRIPOD ряд A перейдет в ряд $4 + 0$ для функции $(x + \sqrt{-1}y)r^p / (a^{p+1} \exp \sqrt{-1}\lambda)$. В этом случае, как видно из (36), всегда $k_1 = 1$, $k_2 = \pm 1$. Если же ряд A первоначально совпадал с пуассоновским разложением $2 + 3$ функции zr^p/a^{p+1} , то после обращения к TRIPOD ряд A будет представлять собой ту часть ряда $4 + 0$ функции zr^p/a^{p+1} , которая пропорциональна L и не содержит $\bar{L}$. В этом случае, как показывает (37), $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, $r = 0$ и поэтому $j_3 = 1$, $j_4 = 0$. Чтобы получить весь ряд $4 + 0$

для функции zr^p/a^{p+1} , надо найти ряд, сопряженный с A , и сложить оба эти ряда.

Не представляет труда вывести выражения общих членов рядов, получаемых с помощью TRIPOD. Действительно, если в (36), (37) подставить разложения (30) для коэффициентов Ганзена, а $\sin^2(i/2)$ и $\cos^2(i/2)$ заменить их разложениями по степеням $\sin^2 i$

$$\sin^2 \frac{i}{2} = \frac{1}{4} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{r-1}}{(2)_{r-1}} (\sin i)^{2r},$$

то в результате получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^{p+1}} (x + \sqrt{-1} y) r^p \exp(-\sqrt{-1} \lambda) = \\ = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{E\left(\frac{m}{2}\right)} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{2s, m}\right) \left\{ \left[P_{2s-m}^m - \right. \right. \\ \left. - \sum_{r=1}^{\infty} 4^{r-1} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{r-1}}{(2)_{r-1}} (P_{2s-m}^m L^r \bar{L}^r + P_{m-2s}^m L^{r-1} \bar{L}^{r+1}) \right] K^s \bar{K}^{m-s} + \\ \left. + \left[P_{m-2s}^m - \sum_{r=1}^{\infty} 4^{r-1} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{r-1}}{(2)_{r-1}} (P_{m-2s}^m L^r \bar{L}^r + \right. \right. \\ \left. \left. + P_{2s-m}^m L^{r-1} \bar{L}^{r+1}) \right] K^{m-s} \bar{K}^s \right\}, \quad (43) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^{p+1}} z r^p = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{E\left(\frac{m}{2}\right)} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{2s, m}\right) [(P_{2s-m}^m K^s \bar{K}^{m-s} + \\ + P_{m-2s}^m K^{m-s} \bar{K}^s) L + (P_{m-2s}^m K^s \bar{K}^{m-s} + P_{2s-m}^m K^{m-s} \bar{K}^s) \bar{L}]. \quad (44) \end{aligned}$$

Аргументы $(p+1, 1)$ у операторов Ньюкома P опущены.

Полиномиальное разложение координат задачи двух тел по степеням четырех переменных (38) здесь получается из тригонометрического разложения (36), (37). Алгоритм непосредственного получения полиномиального разло-

жения координат задачи двух тел по переменным типа (38) будет описан в главе 7.

Из разложения $4 + 0$ по переменным $K, \bar{K}, L, \bar{L}$ легко получается разложение $4 + 1$ относительно четырех вещественных переменных

$$k = e \cos \pi, l = e \sin \pi, \xi = \sin i \cos \Omega, \eta = \sin i \sin \Omega \quad (45)$$

и одной тригонометрической переменной λ . Этот переход осуществляется подпрограммой

REPOLY ($A, REA, IMA, CPV, RPV, LAMBDA, N$).

Здесь A — ряд $4 + 0$ для функции

$$(x + \sqrt{-1} y)r^p / (a^{p+1} \exp \sqrt{-1} \lambda) \text{ или } zr^p / a^{p+1}.$$

В первом случае $N = 1$, во втором — $N = 0$, CPV — массив комплексно-сопряженных полиномиальных переменных (38), RPV — массив вещественных полиномиальных переменных (45), $LAMBDA$ — тригонометрическая переменная λ . REA и IMA — выраженные в переменных (45) и вещественная и мнимая части ряда A , умноженного на $\exp \sqrt{-1} N \lambda$. В случае $N = 1$ $REA = xr^p / a^{p+1}$, $IMA = yr^p / a^{p+1}$, а в случае $N = 0$ $REA = zr^p / a^{p+1}$, $IMA = 0$.

Алгоритм основан на соотношениях

$$K = (k - l') \exp \sqrt{-1} \lambda, \quad \bar{K} = (k + l') \exp (-\sqrt{-1} \lambda),$$

$$L = \frac{1}{2} (-\xi' - \eta) \exp \sqrt{-1} \lambda,$$

$$\bar{L} = \frac{1}{2} (\xi' - \eta) \exp (-\sqrt{-1} \lambda),$$

где временно обозначено $l' = \sqrt{-1} l$, $\xi' = \sqrt{-1} \xi$.

Поэтому каждый член ряда A , будучи умноженным на $\exp \sqrt{-1} N \lambda$, преобразуется по закону:

$$\begin{aligned} & A_{pqr} K^p \bar{K}^q L^r \bar{L}^s \exp \sqrt{-1} N \lambda = \\ & = A_{pqrs} (k - l')^p (k + l')^q \left(-\frac{1}{2} \xi' - \frac{1}{2} \eta \right)^r \left(\frac{1}{2} \xi' - \frac{1}{2} \eta \right)^s \times \\ & \quad \times \exp \sqrt{-1} (p - q + r - s + N) \lambda = \\ & = \left(\sum_j B_{ij2j3j4} k^{j1} l'^{j2} \xi'^{j3} \eta^{j4} \right) \exp \sqrt{-1} (p - q + r - s + N) \lambda. \quad (46) \end{aligned}$$

В этом выражении остается перейти к l и ξ и разделить вещественную и мнимую части. Для этого достаточно исследовать функцию $MOD(j_2 + j_3, 4)$ и в зависимости от ее значения отнести к REA и IMA следующие члены:

$MOD(j_2 + j_3, 4)$	REA	IMA
0	$B \cos D$	$B \sin D$
1	$-B \sin D$	$B \cos D$
2	$-B \cos D$	$-B \sin D$
3	$B \sin D$	$-B \cos D$

Через D здесь обозначен тригонометрический аргумент члена, стоящего в правой части (46), через B — его коэффициент. Завершается алгоритм приведением подобных членов в рядах REA и IMA .

Таковы основные подпрограммы кеплеровского процессора в форме рядов Пуассона.

§ 3. Кеплеровский процессор в форме рядов Тейлора

Разложения координат в задаче двух тел в ряды по степеням времени менее употребительны, чем две другие формы решения. Тем не менее, эти разложения находят практическое применение при определении орбит из наблюдений, а также в различных задачах астродинамики, когда речь идет о представлении движения на сравнительно коротком интервале времени. Употребляются они и в теоретических исследованиях, основанных на рядах Тейлора и их модификациях. Рассмотрим здесь две разновидности тейлоровских разложений в задаче двух тел. Первый тип тейлоровских разложений основан на представлении

$$\mathbf{r}(\tau) = \mathbf{r}_0 F(\tau) + \dot{\mathbf{r}}_0 G(\tau), \quad (47)$$

где $\tau = \sqrt{fm}(t - t_0)$, $\mathbf{r}_0$, $\dot{\mathbf{r}}_0$ — начальные координаты и компоненты скорости, причем здесь и далее в этом разделе точка означает дифференцирование по τ . Для всех трех типов кеплеровского движения, за исключением лишь

вырожденного случая прямолинейного движения, $F(\tau)$ и $G(\tau)$ являются голоморфными функциями τ :

$$F(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{\tau^n}{(1)_n}, \quad G(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \frac{\tau^n}{(1)_n}, \quad (48)$$

причем

$$f_0 = 1, \quad g_0 = 0, \quad f_1 = 0, \quad g_1 = 1. \quad (49)$$

При универсальной трактовке всех трех типов кеплеровского движения важную роль играют локальные инварианты

$$\mu = \frac{1}{r^3}, \quad \sigma = \frac{1}{r^2} r \dot{r}, \quad \varepsilon = \frac{1}{r^2} \left(\dot{r}^2 - \frac{1}{r} \right), \quad (50)$$

удовлетворяющие уравнениям

$$\dot{\mu} = -3\mu\sigma, \quad \dot{\sigma} = \varepsilon - 2\sigma^2, \quad \dot{\varepsilon} = -\sigma(\mu + 2\varepsilon). \quad (51)$$

Коэффициенты f_n и g_n представляют собой полиномы с целочисленными коэффициентами относительно локальных инвариантов (50), вычисленных на начальный момент времени. Проще всего они определяются из рекуррентных соотношений

$$\left. \begin{aligned} f_n &= \dot{f}_{n-1} - \mu g_{n-1}, \\ g_n &= \dot{f}_{n-1} + g_{n-1}, \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

с начальными условиями (49), причем при дифференцировании полиномов f_n , g_n от μ , σ , ε надо исключить производные от инвариантов с помощью (51). Первые коэффициенты имеют значения:

$$\begin{aligned} f_2 &= -\mu, & g_2 &= 0, \\ f_3 &= 3\sigma\mu, & g_3 &= -\mu, \\ f_4 &= -15\sigma^2\mu + 3\varepsilon\mu + \mu^2, & g_4 &= 6\sigma\mu, \\ f_5 &= 105\sigma^3\mu - \sigma(45\varepsilon\mu + 15\mu^2), & g_5 &= -45\sigma^2\mu + \\ & & & + 9\varepsilon\mu + \mu^2, \\ \dots, & & & \dots \end{aligned}$$

Алгоритм, основанный на рекуррентных соотношениях (52), был реализован на языке FORMAC (Sconzo et al., 1965) и позволил получить коэффициенты рядов (48) вплоть до членов 27 степени. Эта работа была одним из первых применений в небесной механике систем символьных операций. Вопросы теории практического использования

локальных инвариантов освещены в первом томе курса Штумпфа (Stumpff, 1959). Заметим еще, что Штумпфом был предложен алгоритм для нахождения общих членов рядов (48) без использования рекуррентных соотношений (52), но соответствующие формулы имеют слишком громоздкую структуру (Stumpff, 1943—1947).

Приведем теперь другой алгоритм построения тейловских разложений в задаче двух тел (Брумберг, 1963). Рассмотрим снова эллиптическую задачу двух тел и для решения (4), переписанного в форме

$$r = a (PX + QY),$$

$$X = \cos E - e, \quad Y = \sqrt{1 - e^2} \sin E,$$

будем искать представление орбитальных координат X , Y в виде рядов Тейлора по степеням средней аномалии M :

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} a_k M^{2k}, \quad Y = \sum_{k=0}^{\infty} b_k M^{2k+1}. \quad (53)$$

Конечно, это представление менее универсально, чем (47), (48), однако коэффициенты a_k , b_k являются функциями только от эксцентриситета и поэтому имеют более простую структуру. Функции X , Y удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\left. \begin{aligned} (1 - e^2 - eX) \frac{dX}{dM} &= - \frac{Y}{\sqrt{1 - e^2}}, \\ (1 - e^2 - eX) \frac{dY}{dM} &= \sqrt{1 - e^2} (e + X), \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

и подстановка в эти уравнения разложений (53) приводит к рекуррентным соотношениям

$$\left. \begin{aligned} (2k + 1) (1 - e) b_k &= e \sum_{j=1}^k (2j - 1) b_{j-1} a_{k-j+1} + \sqrt{1 - e^2} a_k, \\ (k + 1) (1 - e) a_{k+1} &= e \sum_{j=1}^k j a_j a_{k-j+1} - \frac{b_k}{2 \sqrt{1 - e^2}} \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

$$(k = 1, 2, \dots)$$

с начальными значениями

$$a_0 = 1 - e, \quad b_0 = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}, \quad a_1 = -\frac{1}{2(1-e)^2}. \quad (56)$$

Из (55) нетрудно установить общую структуру коэффициентов a_k , b_k , а именно:

$$a_k = \frac{(-1)^k \tilde{a}_k}{(1)_{2k} (1-e)^{3k-1}}, \quad b_k = \frac{(-1)^k \sqrt{1-e^2} \tilde{b}_k}{(1)_{2k+1} (1-e)^{3k+1}}, \quad (57)$$

где $\tilde{a}_k$, $\tilde{b}_k$ ($k = 1, 2, \dots$) — полиномы от e степени $k - 1$ с целочисленными положительными коэффициентами

$$\tilde{a}_k = \sum_{j=0}^{k-1} a_j^{(k)} e^j, \quad \tilde{b}_k = \sum_{j=0}^{k-1} b_j^{(k)} e^j. \quad (58)$$

Полиномы $\tilde{a}_k$, $\tilde{b}_k$ проще всего вычисляются из рекуррентных соотношений

$$\left. \begin{aligned} \tilde{a}_k &= -e \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(-2k+1)_{2j-1}}{(1)_{2j-1}} \tilde{a}_j \tilde{a}_{k-j} + \tilde{b}_{k-1}, \\ \tilde{b}_k &= e \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(-2k)_{2j}}{(1)_{2j}} \tilde{b}_j \tilde{a}_{k-j} + \tilde{a}_k. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Первые несколько полиномов, вычисленные по этим формулам, будут

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1 &= 1, & \tilde{b}_1 &= 1, \\ \tilde{a}_2 &= 1 + 3e, & \tilde{b}_2 &= 1 + 9e, \\ \tilde{a}_3 &= 1 + 24e + 45e^2, & \tilde{b}_3 &= 1 + 54e + 225e^2, \\ \tilde{a}_4 &= 1 + 117e + 1107e^2 + 1575e^3, & \tilde{b}_4 &= 1 + 243e + 4131e^2 + 11025e^3, \\ &\dots, & &\dots \end{aligned}$$

Для коэффициентов полиномов (58) можно вывести общие выражения:

$$\left. \begin{aligned} a_j^{(k+1)} &= \sum_{i=0}^j (i+1) \frac{(-3k-2)_{j-i}}{2^i (1)_{j-i}} d_{ik}, \\ b_j^{(k)} &= \sum_{i=0}^j \frac{(-3k-1)_{j-i}}{2^i (1)_{j-i}} d_{ik}, \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

где

$$d_{ik} = \sum_{s=0}^{E\left(\frac{i}{2}\right)} \frac{(-1)^s (i+1-2s)^{i+2k+1}}{(1)_s (1)_{i+1-s}}. \quad (61)$$

Однако при фактических вычислениях целесообразнее пользоваться не этими выражениями, а рекуррентными соотношениями (59).

§ 4. Функции от координат двух тел

Все изложенные выше алгоритмы относились к функциям, зависящим лишь от координат одного тела. Строго говоря, разложения, связанные с функциями от координат двух тел, движущихся по кеплеровским орбитам, выходят за рамки кеплеровского процессора и рассматриваются в теории возмущений. Тем не менее, некоторые из этих разложений настолько тесно примыкают к проблематике кеплеровского процессора, что соответствующие подпрограммы уместно включить в состав кеплеровского процессора. По существу, речь идет о двух следующих подпрограммах.

COSIN (X, N, PV, TV, IS) — разложение косинуса угла между направлениями из центрального тела на движущиеся тела. Эта подпрограмма включается в состав кеплеровского процессора в форме рядов Пуассона. В основе алгоритма лежит элементарная формула

$$\cos H = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'}, \quad (62)$$

причем величины x/r , z/r находятся с помощью подпрограммы COORD, а разложение y/r следует из x/r путем применения подпрограммы CHANGE. Если тип разложения штрихованных и нештрихованных величин совпадает, то ряды для штрихованных величин получаются из соответствующих рядов для нештрихованных величин с помощью подпрограммы перенаименования переменных пуассоновского процессора. В списке формальных параметров подпрограммы X — это идентификатор ряда для $\cos H$, N — максимальный учитываемый порядок членов по отношению к параметрам разложения, PV и TV —

массивы полиномиальных и тригонометрических переменных соответственно, IS — характеристика типа разложения. Тригонометрическими переменными служат следующие шесть величин:

$$TV = (\Omega, \Omega', \omega, \omega', M, M').$$

В зависимости от значения IS массив полиномиальных переменных состоит из следующих величин:

$$IS = 1, \quad PV = (e, e', \sin i, \sin i');$$

$$IS = 2, \quad PV = \left(e, e', \sin i, \sin \frac{i'}{2}, \cos \frac{i'}{2}\right);$$

$$IS = 3, \quad PV = \left(e, e', \sin \frac{i}{2}, \cos \frac{i}{2}, \sin i'\right);$$

$$IS = 4, \quad PV = \left(e, e', \sin \frac{i}{2}, \cos \frac{i}{2}, \sin \frac{i'}{2}, \cos \frac{i'}{2}\right).$$

Тригонометрические функции половинных углов учитываются строго, а $e, e', \sin i, \sin i'$ служат параметрами разложения.

При разложении пертурбационной функции, степеней взаимного расстояния и других функций, встречающихся в правых частях уравнений движения, требуются ряды для полиномов Лежандра $P_n(\cos H)$, полиномов Гегенбауэра $C_n^{k/2}(\cos H)$ и функций $\cos nH$ и $\sin nH$. По известному разложению $\cos H$ разложения всех этих величин получаются с помощью подпрограммы

$$\text{GBAUER}(X, P1, P2, P3, N, K).$$

В основе алгоритма лежит рекуррентное соотношение для полиномов Гегенбауэра

$$C_n^{k/2}(x) = \frac{2n+k-2}{n} x C_{n-1}^{k/2}(x) - \frac{n+k-2}{n} C_{n-2}^{k/2}(x), \quad (63)$$

а также рекуррентные соотношения (15), (16) для $\cos nx$ и $\sin nx$. В списке параметров подпрограммы X — ряд для аргумента x полиномов Гегенбауэра или ряд для $\cos x$ в случае функций $\cos nx, \sin nx$, N, K — целочисленные индексы n и k ($k = 1$ для полиномов Лежандра и $k = 2$ для функций $\cos nx, \sin nx$), $P1$ — ряд разлагаемой функции с индексом $n - 2$, $P2$ — ряд разлагаемой функции с индексом $n - 1$, $P3$ — результирующий ряд

для функции с индексом n . Начальными значениями при $n = 2$ в случае полиномов Гегенбауэра $C_n^{k/2}(x)$ служат

$$P1 = 1, \quad P2 = kx.$$

При разложении $\cos nx$ начальные значения будут

$$P1 = 1, \quad P2 = \cos x,$$

а в случае $\sin nx$ —

$$P1 = 0, \quad P2 = \sin x.$$

Эта подпрограмма, естественно, может быть использована при любой форме задания аргумента X .

Простейшим примером применения этих двух подпрограмм является задача разложения пертурбационной функции притяжения третьего тела в спутниковом случае. Разложение пертурбационной функции по степеням отношения больших полуосей имеет вид

$$R = \frac{fm'a^2}{a'^3} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{a'} \right)^{n-2} R_n, \quad (64)$$

где

$$R_n = \left(\frac{r}{a} \right)^n \left(\frac{a'}{r'} \right)^{n+1} P_n(\cos H). \quad (65)$$

Поэтому разложение R_n легко получается в одной из четырех форм, указанных в подпрограмме COSIN.

Другие способы разложения пертурбационной функции и различные применения кеплеровского процессора встретятся в дальнейшем.

Квазиполиномиальные системы в задачах небесной механики

§ 1. Задача N больших планет в полиномиальной форме

Численное или аналитическое изучение систем дифференциальных уравнений, как правило, значительно облегчается, если правые части уравнений являются полиномами относительно неизвестных функций (полиномиальные системы). Такие системы естественным путем возникают в небесной механике при отыскании решений, близких к известному частному решению, при исследовании долгосрочной эволюции планетных орбит в случае малых эксцентриситетов и наклонов (вековая система) и т. п. Более того, дифференциальные уравнения небесной механики в типичных случаях могут быть приведены к полиномиальным системам за счет введения дополнительных неизвестных. Рассмотрение подобных типичных примеров начнем с задачи гелиоцентрического движения N планет.

В гелиоцентрических прямоугольных координатах движение N планет описывается системой

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -f(m_0 + m_i) \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} + \sum_{j=1}^N {}^{(i)}f m_j \left(\frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{r_{ij}^3} - \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} \right), \quad (1)$$

$$(i = 1, 2, \dots, N)$$

где все обозначения имеют общепринятый смысл. Для численного интегрирования этой системы широко используется метод Тейлора — Стеффенсена. В этом методе координаты планет представляются в виде конечных отрезков ряда Тейлора по степеням времени, а коэффициенты рядов определяются из рекуррентных соотношений, получающихся в результате подстановки рядов в систему (1). Однако предварительно эта система приводится к такой форме, когда в правых и левых частях

уравнений стоят члены не выше второй степени относительно неизвестных функций и их производных. Это достигается путем введения в качестве дополнительных неизвестных функций расстояний r_i , r_{ij} и величин

$$s_i = r_i^{-3}, \quad s_{ij} = r_{ij}^{-3}. \quad (2)$$

В результате система (1) может быть записана в виде

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{r}_i', \quad (3)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_i' = -f(m_0 + m_i) s_i \mathbf{r}_i + \sum_{j=1}^N {}^{(i)} f m_j [(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) s_{ij} - \mathbf{r}_j s_j], \quad (4)$$

$$r_i \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i', \quad (5)$$

$$r_i \dot{s}_i = -3 s_i \dot{r}_i, \quad (6)$$

$$r_{ij} \dot{\mathbf{r}}_{ij} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)(\mathbf{r}_i' - \mathbf{r}_j'), \quad (7)$$

$$r_{ij} \dot{s}_{ij} = -3 s_{ij} \dot{r}_{ij}. \quad (8)$$

Таким образом, первоначальная система (1), эквивалентная системе из $6N$ уравнений первого порядка, заменяется системой (3) — (8), состоящей из $6N$ уравнений (3), (4), $2N$ уравнений (5), (6) и $N(N-1)$ уравнений (7), (8). Общий порядок системы равен $N(N+7)$. В такой форме эта система интегрировалась методом Тейлора — Стеффенсена, например, в работе (Broucke, 1971b).

Система (1) может быть приведена также и к полиномиальной системе. Для этого достаточно ввести дополнительные неизвестные

$$u_i = r_i^{-1}, \quad u_{ij} = r_{ij}^{-1}. \quad (9)$$

Тогда система (1) перепишется в виде

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{r}_i', \quad (10)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_i' = -f(m_0 + m_i) u_i^3 \mathbf{r}_i + \sum_{j=1}^N {}^{(i)} f m_j [(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) u_{ij}^3 - \mathbf{r}_j u_j^3], \quad (11)$$

$$\ddot{u}_i = -u_i^3 \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i', \quad (12)$$

$$\dot{u}_{ij} = -u_{ij}^3 (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)(\mathbf{r}_j' - \mathbf{r}_i'), \quad (13)$$

и заменится на $6N$ уравнений (10), (11), N уравнений (12) и $N(N-1)/2$ уравнений (13) при общем порядке системы $N(N+13)/2$. Максимальная степень полиномов в правых частях (10) — (13) равна пяти. Уравнения (10) — (13)

менее удобны при использовании метода Стеффенсена, но к ним может быть применен излагаемый в дальнейшем общий алгоритм решения полиномиальных систем с помощью рядов Тейлора.

§ 2. Уравнения движения в переменных Кустаанхеймо — Штифеля

Введение в небесную механику переменных Кустаанхеймо — Штифеля (KS-переменных) привело к разработке ряда численных и аналитических методов, составляющих содержание новой области небесной механики, известной под названием линейной и регулярной небесной механики (Штифель, Шейфеле, 1975). KS-переменные примечательны в трех отношениях, поскольку они: 1) обеспечивают пространственную регуляризацию уравнений движения, 2) позволяют выработать единый подход ко всем трем типам кеплеровского движения и 3) приводят уравнения движения задачи двух тел к линейному виду. Для нас здесь особенно важным является последнее свойство. Если в качестве неизвестных применять отклонения KS-переменных от их кеплеровских значений, то правые части уравнений движения станут голоморфными функциями этих неизвестных и к полученным полиномиальным системам можно будет легко применить методы теории возмущений. Справедливости ради надо отметить, что сведение уравнений задачи двух тел к уравнениям линейного осциллятора и построение на этой основе теории возмущенного движения применялось и в классической небесной механике (достаточно вспомнить уравнения Клеро — Лапласа и их использование Адамсом для построения теории движения Луны), однако только с появлением KS-переменных стало возможным реализовать эту идею в полной мере.

Рассмотрим стандартные уравнения возмущенной задачи двух тел,

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{r^3} x = -\frac{\partial R}{\partial x} + F, \quad (14)$$

где в правых частях для удобства отдельно выделены потенциальные и непотенциальные возмущающие силы. KS-переменные представляют собой компоненты четырех-

мерного вектора $\mathbf{u}$ параметрического пространства, связанного с трехмерным вектором $\mathbf{x}$ физического пространства KS-преобразованием

$$\mathbf{x} = L(\mathbf{u}) \mathbf{u}, \quad (15)$$

где

$$L(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

В силу (15)

$$r = |\mathbf{x}| = |\mathbf{u}|^2. \quad (17)$$

KS-преобразование сопровождается введением вместо физического времени t фиктивного времени s

$$\frac{dt}{ds} = r. \quad (18)$$

Поэтому

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{2}{r} L(\mathbf{u}) \frac{d\mathbf{u}}{ds} \quad (19)$$

и, в частности,

$$|\dot{\mathbf{x}}|^2 = \frac{4}{r} \left| \frac{d\mathbf{u}}{ds} \right|^2. \quad (20)$$

В формулах типа (15), (19), где фигурируют векторы разной размерности, всегда считается, что трехмерные векторы дополнены до четырехмерных путем добавления четвертой нулевой компоненты. Поэтому из (19) видно, что KS-переменные удовлетворяют следующей неголономной связи:

$$u_4 \frac{du_1}{ds} - u_3 \frac{du_2}{ds} + u_2 \frac{du_3}{ds} - u_1 \frac{du_4}{ds} = 0. \quad (21)$$

Так как

$$L^T(\mathbf{u}) \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial \mathbf{u}}, \quad (22)$$

где T — символ операции транспонирования, то уравнения движения (14), записанные в KS-переменных $\mathbf{u}$ и отнесенные к фиктивному времени s , примут вид

$$\frac{d^2 \mathbf{u}}{ds^2} + \frac{1}{2} h_K \mathbf{u} = \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \left(\frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial \mathbf{u}} + L^T(\mathbf{u}) \mathbf{F} \right). \quad (23)$$

Здесь h_K представляет собой взятую с противоположным знаком энергию кеплеровского движения

$$h_K = \frac{\mu}{r} - \frac{1}{2} |\dot{x}|^2. \quad (24)$$

В кеплеровском движении эта величина постоянна, а в возмущенной задаче ее изменение описывается уравнением

$$\frac{dh_K}{ds} = - \left(\frac{\partial R}{\partial \mathbf{u}} + 2L^T(\mathbf{u}) \mathbf{F} \right) \frac{d\mathbf{u}}{ds}. \quad (25)$$

В силу (20) соотношение (24) может быть переписано в виде

$$h_K |\mathbf{u}|^2 + 2 \left| \frac{d\mathbf{u}}{ds} \right|^2 = \mu. \quad (26)$$

Редуцированная к уравнениям первого порядка система 10 уравнений (23), (25) и (18) с двумя связями (21) и (26) полностью эквивалентна шести уравнениям первого порядка исходной системы (14). Вместо уравнения (25) можно использовать соотношение (26) и понизить тем самым общий порядок системы до 9. Такая система употреблялась, в частности, Росслером (Stiefel et al., 1966) в планетной задаче трех тел.

В ряде случаев вместо h_K целесообразнее использовать величину

$$h = h_K + R. \quad (27)$$

Уравнения (23) и (25) заменяются при этом соответственно следующими уравнениями:

$$\frac{d^2 \mathbf{u}}{ds^2} + \frac{1}{2} h \mathbf{u} = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (|\mathbf{u}|^2 R) + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 L^T(\mathbf{u}) \mathbf{F}, \quad (28)$$

$$\frac{dh}{ds} = |\mathbf{u}|^2 \frac{\partial R}{\partial t} - 2 \frac{d\mathbf{u}}{ds} (L^T(\mathbf{u}) \mathbf{F}). \quad (29)$$

В случае консервативных потенциальных возмущений, когда $\mathbf{F} = 0$ и $\frac{\partial R}{\partial t} = 0$, величина h представляет собой константу интеграла энергии и, таким образом, частота гармонического осциллятора в левой части уравнения (28) является постоянной величиной. В общем случае уравнения (28) отличаются от уравнений (23) тем, что согласно (27) в них фигурирует сама возмущающая функция R ,

а не только ее производные. В соответствии с исходными уравнениями (14), возмущающая функция R определена с точностью до аддитивной постоянной (даже с точностью до произвольной аддитивной функции t , не содержащей координат x) и этим можно воспользоваться для выбора некеплеровской промежуточной орбиты.

Как следствие уравнений (23), отметим еще уравнение для радиуса-вектора

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + 2h_K r = \mu + r \left(\frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial u} + L^T(u) F \right) u. \quad (30)$$

Это уравнение не связано с переходом к KS-переменным и его правую часть можно представить в функции от старых переменных:

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + 2h_K r = \mu + r \left(\frac{\partial R}{\partial x} + F \right) x. \quad (31)$$

Обращение KS-преобразования происходит по одной из следующих систем соотношений:

$$u_1^2 + u_4^2 = \frac{1}{2}(r + x_1), \quad u_2 = \frac{x_2 u_1 + x_3 u_4}{r + x_1}, \quad u_3 = \frac{x_3 x_1 - x_2 u_4}{r + x_1}, \quad (32)$$

или

$$u_2^2 + u_3^2 = \frac{1}{2}(r - x_1), \quad u_1 = \frac{x_2 u_2 + x_3 u_3}{r - x_1}, \quad u_4 = \frac{x_3 u_2 - x_2 u_3}{r - x_1}. \quad (33)$$

Первую систему целесообразно использовать при $x_1 \geq 0$, вторую — при $x_1 \leq 0$. Одна из компонент u , естественно, выбирается произвольно. Обращение (19) дает

$$\frac{du}{ds} = \frac{1}{2} L^T(u) \dot{x}. \quad (34)$$

Соотношения (32) — (34) служат для определения начальных условий u , $\frac{du}{ds}$ по начальным условиям x , $\dot{x}$.

Фиктивное время s целесообразно использовать при универсальной трактовке всех трех типов кеплеровского движения. Если же невозмущенное движение является эллиптическим и возмущения не настолько велики, чтобы изменить тип движения, то в качестве независимой пере-

менной выгоднее принять величину E , вводимую соотношением

$$\frac{dt}{dE} = \frac{r}{\sqrt{2(h_K + \gamma R)}}. \quad (35)$$

Здесь γ — числовой множитель, принимающий значения 0 или 1. При $\gamma = 0$ величина E совпадает с обычной эксцентрической аномалией, значение же $\gamma = 1$ приводит к так называемой обобщенной эксцентрической аномалии, широко употребляемой в указанной выше книге Штифеля и Шейфеле. Уравнения (23) и (28) перейдут при этом в следующие:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dE^2} + \frac{1}{4} u = & \frac{1}{2(h_K + \gamma R)} \left\{ \frac{1}{2} \gamma R u + r \left(\frac{1}{4} \frac{\partial R}{\partial u} + \right. \right. \\ & + \left. \frac{1}{2} L^T(u) \mathbf{F} \right) + \left[\left((1 - \gamma) \frac{\partial R}{\partial u} + 2L^T(u) \mathbf{F} \right) \frac{du}{dE} - \right. \\ & \left. \left. - \gamma \frac{r}{\sqrt{2(h_K + \gamma R)}} \frac{\partial R}{\partial t} \right] \frac{du}{dE} \right\}. \end{aligned} \quad (36)$$

В соответствии с (26) имеем

$$h_K + \gamma R = \frac{\mu + \gamma r R}{r + 4 \left| \frac{du}{dE} \right|^2}, \quad (37)$$

причем изменение этой величины описывается уравнением

$$\begin{aligned} \frac{d(h_K + \gamma R)}{dE} = & - \left[(1 - \gamma) \frac{\partial R}{\partial u} + 2L^T(u) \mathbf{F} \right] \frac{du}{dE} + \\ & + \gamma \frac{r}{\sqrt{2(h_K + \gamma R)}} \frac{\partial R}{\partial t}. \end{aligned} \quad (38)$$

Заметим еще, что поскольку величина h_K связана с большой полуосью a соотношением

$$h_K = \frac{\mu}{2a}, \quad (39)$$

то из (25) следует

$$\frac{da}{dE} = \frac{2a^2}{\mu} \left(\frac{\partial R}{\partial u} + 2L^T(u) \mathbf{F} \right) \frac{du}{dE}. \quad (40)$$

Особенностью уравнений (36) является постоянство частоты гармонического осциллятора в левой части. При

$\gamma = 1$, как и в случае уравнений (28), открываются интересные возможности, связанные с тем, что в уравнения (36) входит непосредственно возмущающая функция R .

В книге Штифеля и Шейфеле вводятся разнообразные системы элементов, связанных с уравнениями (35), (36). Однако рассмотрение этих уравнений в «координатной» форме также представляют несомненный интерес. При этом речь может идти о применении как методов классического типа, приводящих к методическим вековым членам, так и методов типа Гильдена, рассчитанных на большие интервалы времени.

§ 3. Ганзеновские координаты и параметры Эйлера

В классических методах небесной механики переход от одной прямоугольной системы координат к другой описывается с помощью углов Эйлера. Это приводит к появлению в правых частях дифференциальных уравнений тригонометрических функций от этих углов, на вычисление которых в больших задачах затрачивается много времени. Правые части дифференциальных уравнений небесной механики принимают симметричную форму, приближающуюся к полиномиальной, и становятся более удобными для вычислений, если вместо трех углов Эйлера вводятся четыре параметра Эйлера, которые можно рассматривать как компоненты единичного четырехмерного вектора.

Такая модификация классических методов была начата Мюзеном (например, Musen, 1963) и постепенно приобретает все большую популярность. В этом разделе будет описано применение параметров Эйлера к выводу уравнений возмущенного движения в ганзеновских координатах.

Рассмотрим две прямоугольные системы координат x_1, x_2, x_3 и x'_1, x'_2, x'_3 , взаимная ориентация которых зада-

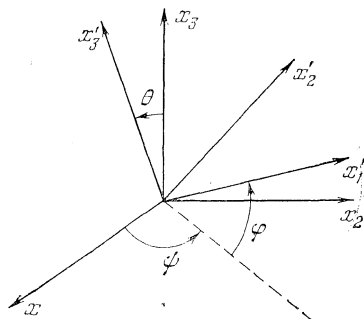


Рис. 1. Углы Эйлера.

ется обычными углами Эйлера ψ , φ , θ (рис. 1). Переход от одной системы к другой описывается уравнениями

$$x = \Lambda x' \quad (41)$$

и

$$x' = \Lambda^T x, \quad (42)$$

где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - & -\sin \varphi \cos \psi - & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \varphi \sin \psi \cos \theta & -\cos \varphi \sin \psi \cos \theta & \\ \cos \varphi \sin \psi + & -\sin \varphi \sin \psi + & -\cos \psi \sin \theta \\ +\sin \varphi \cos \psi \cos \theta & +\cos \varphi \cos \psi \cos \theta & \\ \sin \varphi \sin \theta & \cos \varphi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (43)$$

а Λ^T — транспонированная матрица. Параметры Эйлера u_α ($\alpha = 1, \dots, 4$) вводятся соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi - \varphi}{2}, & u_3 &= \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi + \varphi}{2}, \\ u_2 &= \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi - \varphi}{2}, & u_4 &= \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi + \varphi}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Ясно, что $|u| = 1$, где u — четырехмерный вектор с компонентами u_α . Компоненты матрицы (43) являются простыми квадратичными функциями параметров Эйлера:

$$\Lambda(u) = \begin{pmatrix} u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 + u_4^2 & 2(u_1 u_2 - u_3 u_4) & 2(u_1 u_3 + u_2 u_4), \\ 2(u_1 u_2 + u_3 u_4) & -u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 + u_4^2 & 2(-u_1 u_4 + u_2 u_3), \\ 2(u_1 u_3 - u_2 u_4) & 2(u_1 u_4 + u_2 u_3) & -u_1^2 - u_2^2 + u_3^2 + u_4^2. \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Рассмотрим далее снова уравнения (14) возмущенной задачи двух тел и в качестве системы x'_1, x'_2, x'_3 примем систему ганзеновских координат X, Y, Z , обладающих тем свойством, что в этих координатах во все время движения

$$Z = \dot{Z} = 0. \quad (46)$$

Формулы перехода (41), (42) принято в этом случае записывать в виде

$$x = X\alpha + Y\beta + Z\gamma \quad (47)$$

и

$$X = \alpha x, \quad Y = \beta x, \quad Z = \gamma x, \quad (48)$$

где α , β , γ — это соответственно первый, второй и третий столбцы матрицы Λ .

При преобразовании (47), (46) система уравнений (14) перейдет в систему четвертого порядка

$$\left. \begin{aligned} \ddot{X} + \frac{\mu}{r^3} X &= \frac{\partial R}{\partial X} + \alpha F, \\ \ddot{Y} + \frac{\mu}{r^3} Y &= \frac{\partial R}{\partial Y} + \beta F, \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

описывающую движение в ганзеновской плоскости, и систему третьего порядка для углов Эйлера, описывающую движение самой этой плоскости. Используя общепринятые обозначения

$$\psi = \Omega, \quad \varphi = -\sigma, \quad \theta = i, \quad (50)$$

имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{di}{dt} &= c^{-1} \left[-\frac{1}{\sin i} \left(\frac{\partial R}{\partial \Omega} + \cos i \frac{\partial R}{\partial \sigma} \right) + \right. \\ &\quad \left. + (X \cos \sigma + Y \sin \sigma) \gamma F \right], \\ \sin i \frac{d\Omega}{dt} &= c^{-1} \left[\frac{\partial R}{\partial i} + (Y \cos \sigma - X \sin \sigma) \gamma F \right], \\ \frac{d\sigma}{dt} &= \cos i \frac{d\Omega}{dt}, \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

где

$$c = X\dot{Y} - Y\dot{X}. \quad (52)$$

В уравнениях (49), (51) пертурбационную функцию R от координат x , y , z и времени t нужно теперь рассматривать как функцию от X , Y , i , Ω , σ и t .

Переходя далее к параметрам Эйлера u_α , определяемым по (44) и (50), вместо системы (51) получаем следующую систему четвертого порядка:

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_1 &= \frac{1}{4} G \left[- (u_3^2 + u_4^2) \frac{\partial R}{\partial u_2} + (u_2 u_3 - u_1 u_4) \frac{\partial R}{\partial u_3} + \right. \\ &\quad \left. + (u_2 u_4 + u_1 u_3) \frac{\partial R}{\partial u_4} + 2(u_4 X - u_3 Y) \gamma F \right], \\ \dot{u}_2 &= \frac{1}{4} G \left[(u_3^2 + u_4^2) \frac{\partial R}{\partial u_1} - (u_2 u_4 + u_1 u_3) \frac{\partial R}{\partial u_3} + \right. \\ &\quad \left. + (u_2 u_3 - u_1 u_4) \frac{\partial R}{\partial u_4} + 2(u_3 X + u_4 Y) \gamma F \right], \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_3 &= \frac{1}{4} G \left[(u_1 u_4 - u_2 u_3) \frac{\partial R}{\partial u_1} + (u_2 u_4 + u_1 u_3) \frac{\partial R}{\partial u_2} - \right. \\ &\quad \left. - (u_1^2 + u_2^2) \frac{\partial R}{\partial u_4} + 2(-u_2 X + u_1 Y) \gamma F \right], \\ \dot{u}_4 &= \frac{1}{4} G \left[-(u_2 u_4 + u_1 u_3) \frac{\partial R}{\partial u_1} + (u_1 u_4 - u_2 u_3) \frac{\partial R}{\partial u_2} + \right. \\ &\quad \left. + (u_1^2 + u_2^2) \frac{\partial R}{\partial u_3} + 2(-u_1 X - u_2 Y) \gamma F \right]. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Здесь обозначено $G = c^{-1}$. Изменение этой величины со временем описывается уравнением

$$\dot{G} = G^2 \left[Y \left(\frac{\partial R}{\partial X} + \alpha F \right) - X \left(\frac{\partial R}{\partial Y} + \beta F \right) \right], \quad (54)$$

причем члены, содержащие производные от R , можно представить в таком виде:

$$Y \frac{\partial R}{\partial X} - X \frac{\partial R}{\partial Y} = \frac{1}{2} \left(-u_2 \frac{\partial R}{\partial u_1} + u_1 \frac{\partial R}{\partial u_2} - u_4 \frac{\partial R}{\partial u_3} + u_3 \frac{\partial R}{\partial u_4} \right). \quad (55)$$

В уравнениях (49) и (53) R надо теперь рассматривать как функцию от X, Y, u_1, u_2, u_3, u_4 и t . Еще раз отметим, что векторы α, β, γ , фигурирующие в правых частях (49), (53) и (54), представляют собой столбцы матрицы (45).

Уравнения, аналогичные (53), были другим способом выведены Денри (Deprit, 1976).

В зависимости от специфики конкретной задачи системы уравнений (49) для описания движения в ганзеновской плоскости можно подвергнуть дальнейшим преобразованиям. В частности, левые части этих уравнений легко привести к линейному виду переходом к параболическим координатам Леви-Чивита и введением новой независимой переменной типа эксцентрической аномалии (плоский случай KS-преобразования, рассмотренного выше). Окончательное приведение уравнений (49), (53) и (54) к полиномиальной форме зависит от конкретного вида R и F .

Отметим еще, что параметры Эйлера целесообразно применять и в задачах, связанных с вращением тела вокруг его центра масс. Известные кинематические уравнения Эйлера

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ \omega_2 &= \dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ \omega_3 &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}, \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

связывающие компоненты угловой скорости ω вращения тела с углами Эйлера ψ , φ , θ , определяющими положение главных осей инерции тела, при преобразовании (44) принимают вид

$$\dot{u} = \frac{1}{2} \Omega(\omega) u, \quad (57)$$

где

$$\Omega(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 & \omega_3 \\ -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (58)$$

При этом упрощается и запись момента сил M , действующего на тело. Действительно, в функции от углов Эйлера при наличии силовой функции U компоненты M_1 , M_2 , M_3 определяются соотношениями

$$M_1 = \left(\frac{\partial U}{\partial \psi} - \cos \theta \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} + \cos \varphi \frac{\partial U}{\partial \theta},$$

$$M_2 = \left(\frac{\partial U}{\partial \psi} - \cos \theta \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} - \sin \varphi \frac{\partial U}{\partial \theta},$$

$$M_3 = \frac{\partial U}{\partial \varphi},$$

а в функции от параметров Эйлера — соотношениями

$$M_1 = \frac{1}{2} \left(u_4 \frac{\partial U}{\partial u_1} + u_3 \frac{\partial U}{\partial u_2} - u_2 \frac{\partial U}{\partial u_3} - u_1 \frac{\partial U}{\partial u_4} \right),$$

$$M_2 = \frac{1}{2} \left(-u_3 \frac{\partial U}{\partial u_1} + u_4 \frac{\partial U}{\partial u_2} + u_1 \frac{\partial U}{\partial u_3} - u_2 \frac{\partial U}{\partial u_4} \right),$$

$$M_3 = \frac{1}{2} \left(u_2 \frac{\partial U}{\partial u_1} - u_1 \frac{\partial U}{\partial u_2} + u_4 \frac{\partial U}{\partial u_3} - u_3 \frac{\partial U}{\partial u_4} \right).$$

Алгоритмы решения полиномиальных систем

§ 1. Тейлоровские разложения

В большинстве встречающихся на практике случаев решение полиномиальных систем ищется либо в форме рядов Тейлора по степеням независимой переменной, либо в чисто тригонометрической форме относительно некоторых линейных функций независимой переменной. Рассмотрим сначала первую форму решения. Пусть $x_1(t), \dots, x_N(t)$ — функции, удовлетворяющие полиномиальной дифференциальной системе

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x), \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (1)$$

где $F_i(x)$ — степенные ряды с постоянными коэффициентами

$$F_i(x) = \sum_{j=0}^J \sum F_{j_1 \dots j_N}^{(i)} x_1^{j_1} \dots x_N^{j_N}. \quad (2)$$

Внутренняя сумма без указания пределов распространяется на все неотрицательные значения $j_1, \dots, j_N$, удовлетворяющие условию

$$j_1 + \dots + j_N = j. \quad (3)$$

Требуется по заданным начальным условиям $x_0^{(i)} = x_i(0)$ найти решение системы (1) в виде конечных отрезков рядов Тейлора

$$x_i = \sum_{k=0}^M x_k^{(i)} t^k. \quad (4)$$

Параметрами задачи являются: N — число уравнений, J — максимальная степень полиномов $F_i(x)$, MAX — суммарное количество членов во всех полиномах $F_i(x)$, M — максимальная степень искомых отрезков рядов Тейлора. Очень часто для решения этой задачи исполь-

зуется методика Стеффенсена определения коэффициентов $x_k^{(i)}$ из рекуррентных соотношений. Однако реализация методики Стеффенсена существенно связана с конкретным видом правых частей уравнений (1). Излагаемый здесь алгоритм не зависит от конкретного вида правых частей и в этом смысле является универсальным. При решении той или иной конкретной системы (1) этот алгоритм может уступать методике Стеффенсена в смысле расхода машинного времени. Тем не менее, универсальность и простота использования алгоритма делают его очень удобным при решении уравнений (1) с различными правыми частями.

Алгоритм состоит в прямолинейной подстановке в правые части (2) решения (4), найденного с точностью до членов степени $k - 1$ относительно t ($k = 1, 2, \dots, M$) включительно. Эта подстановка осуществляется с помощью систем подпрограмм для действий с полиномами. В результате находятся коэффициенты $F_{k-1}^{(i)}$ при членах степени $k - 1$ тейлоровских разложений по времени t правых частей $F_i(x)$. После этого определяются члены степени k в решении (4):

$$kx_k^{(i)} = F_{k-1}^{(i)}, \quad (5)$$

и процесс повторяется до достижения максимальной степени $k = M$.

Для обеспечения универсальной и в то же время компактной записи правых частей (2) в памяти ЭВМ целесообразно ввести нумерацию комбинаций индексов $j_1, \dots, j_N$ в суммарно-лексикографическом порядке и хранить не сами индексы в упакованном виде, а соответствующий им номер. Решение прямой и обратной задачи соответствия между порядковым номером комбинации и фактическими значениями индексов было приведено в § 3 главы 1. Напомним, что этот способ особенно эффективен, когда общее число всех допустимых комбинаций, равное $(J + 1)_N / (1)_N$, меньше максимального целого числа, представимого в машине. В этом случае правые части системы (1) могут быть полностью заданы тремя следующими массивами:

КOUNT(I), $I = 1, \dots, N$ — массив указателей числа членов в правых частях

Z(L), $L = 1, \dots, \text{MAX}$ — массив коэффициентов $F_{j_1 \dots j_N}^{(i)}$. Коэффициенты последовательно записываются

друг за другом сначала для полинома $F_1(x)$, затем для $F_2(x)$ и т. д.

$\text{IEX}(L)$, $L = 1, \dots, \text{MAX}$ — массив номеров комбинаций значений индексов $j_1, \dots, j_N$. Элементы $Z(L)$ и $\text{IEX}(L)$ с одинаковыми значениями L относятся к одному и тому же члену и определяют соответственно его коэффициенты и набор индексов $j_1, \dots, j_N$. Массив $\text{IEX}(L)$ заполняется автоматически с помощью описанной в § 3 главы 1 функции нумерации.

Начальные условия системы (1) и получаемые результаты могут быть описаны в массиве $X(K, I)$, $K = 1, \dots, M+1$, $I = 1, \dots, N$, где элемент $X(K, I)$ соответствует коэффициенту $x_{K-1}^{(I)}$. Значения $X(1, I)$, $I = 1, \dots, N$, являются исходными заданными значениями рядов (4) при $t = 0$. В процессе вычислений последовательно определяются остальные элементы массива X , т. е. коэффициенты рядов (4). Сам процесс вычислений может быть организован различными способами. В простейшем варианте один за другим просматриваются элементы массива $\text{IEX}(L)$, $L = 1, \dots, \text{MAX}$, расширяваются хранящиеся в них номера и в выражение $x_1^{j_1} \dots x_N^{j_N}$ подставляются отрезки рядов (4), содержащие первые k членов (в начале $k = 1$). Полученный коэффициент при t^{k-1} умножается на соответствующий коэффициент из массива $Z(L)$, $L = 1, \dots, \text{MAX}$ и результаты суммируются для всех членов одного и того же полинома $F_i(x)$ (границы элементов массивов Z и IEX разных полиномов определяются элементами массива COUNT). По формуле (5) находятся члены степени t^k в рядах (4), и процесс повторяется. Для организации подстановки рядов (4) в полиномы (2) можно использовать и более эффективные по быстродействию алгоритмы. Можно, например, осуществить эту подстановку с помощью схемы Горнера для полиномов от нескольких переменных, предварительно располагая члены полиномов $F_i(x)$ в нужном порядке.

Получение тейлоровских разложений не всегда является конечной целью при решении системы (1). По этим разложениям, например, можно легко найти более компактные разложения по полиномам Чебышева (Ландош, 1961; Ланс, 1962) или с помощью различных методов суммирования построить ряды полиномов с более широкой областью сходимости.

§ 2. Нормализация и тригонометрические разложения

Рассмотрим теперь задачу решения вековых полиномиальных систем в тригонометрической форме. Обычно такие системы записываются в гамильтоновой форме, а само построение нормализующего преобразования Биркгофа осуществляется в настоящее время методами Хори или Депри. Соответствующие вычислительные алгоритмы можно найти, например, в работах (Deprit et al., 1969; Маркеев, Сокольский, 1976, 1978). Здесь мы рассмотрим алгоритм решения вековой системы, основанный непосредственно на преобразовании Биркгофа и не предполагающий гамильтоновой формы системы.

Запишем вековую систему в той форме, которую ей можно придать в общей теории движения больших планет:

$$\dot{\alpha} = \sqrt{-1} \mathcal{N} [A\alpha + \Phi(\alpha, \bar{\alpha})]. \quad (6)$$

Эта форма типична для большинства задач небесной механики. Здесь $\alpha, \bar{\alpha}$ — комплексно-сопряженные векторные переменные, компоненты которых $\alpha_1, \dots, \alpha_N, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_N$ — элементы типа Лапласа, $\mathcal{N}$ — диагональная матрица средних движений $n_1, \dots, n_N$, A — вещественная квадратная матрица, $\Phi(\alpha, \bar{\alpha})$ — N -мерные вектор-функции, разлагающиеся в ряды по степеням $\alpha, \bar{\alpha}$, содержащие, вообще говоря, лишь формы нечетных степеней относительно этих переменных и начинающиеся с членов третьей степени. Коэффициенты этих рядов — вещественные числа. Матрица $\mathcal{N}$ выделена явно, чтобы в A и Φ оперировать с безразмерными величинами. Наряду с уравнениями (6) в вековую систему входит сопряженное уравнение для $\bar{\alpha}$, так что общий порядок системы равен $2N$. В общей планетной теории N — четное число (удвоенное число планет) и переменные $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ распадаются на две группы (эксцентрисические и облические переменные), связанные между собой лишь нелинейными членами уравнений (6). Матрица A имеет поэтому блочно-диагональную структуру, что также типично для уравнений небесной механики. Однако это обстоятельство не используется явно в излагаемом ниже алгоритме.

Пусть c_j и S_j ($j = 1, \dots, N$) — собственные числа и собственные векторы матрицы $\mathcal{N}A$. В типичном для небес-

ной механики случае они являются вещественными величинами. Числа c_j будем предполагать несоизмеримыми между собой (нерезонансный случай), но одно из них может быть равно нулю (нулевая частота для облических переменных). В силу определяющего соотношения

$$\mathcal{N}AS_{.j} = c_j S_{.j} \quad (7)$$

имеем

$$S^{-1}\mathcal{N}AS = c, \quad (8)$$

где c — диагональная матрица собственных чисел $c_1, \dots, c_N$, а $S = \|S_{ij}\|$, причем S_{ij} означает i — компоненту вектора $S_{.j}$.

Первый этап алгоритма состоит в проведении в правых частях $\Phi(\alpha, \bar{\alpha})$ линейной замены переменных

$$\alpha = Sx. \quad (9)$$

Здесь, конечно, целесообразно использовать блочно-диагональную структуру матрицы S , так как это позволяет проводить операции с полиномами от меньшего числа переменных. В результате замены (9) уравнение (6) примет вид

$$\dot{x} = \sqrt{-1} [cx + \mathcal{N}R_1(x, \bar{x})], \quad (10)$$

где

$$R_1 = \mathcal{N}^{-1}S^{-1}\mathcal{N}\Phi. \quad (11)$$

Построение рядов функций $R_1(x, \bar{x})$ на основе рядов функций $\Phi(\alpha, \bar{\alpha})$ является наиболее трудоемкой операцией всего алгоритма.

Добавим к (10) сопряженное уравнение и запишем получившуюся вековую систему в виде одного уравнения

$$\dot{X} = \sqrt{-1} [PX + \mathcal{N}R(X)]. \quad (12)$$

Здесь положено

$$X = \begin{pmatrix} x \\ \bar{x} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

причем, очевидно, $R_2 = -\bar{R}_1$. Диагональную матрицу $\mathcal{N}$ порядка N надо рассматривать в (12) как блочный множитель для векторов и матриц, составленных из блоков порядка N .

Нормализация Биркгофа состоит в построении формальных степенных рядов

$$X = Y + \Gamma(Y), \quad (14)$$

приводящих систему (12) к системе

$$\dot{Y} = \sqrt{-1} [PY + \mathcal{N}F(Y)] \quad (15)$$

с такими степенными рядами F в правых частях, которые допускают интегрирование этой системы в элементарных функциях. Подобно (13) здесь введены обозначения:

$$Y = \begin{pmatrix} u \\ \bar{u} \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где u — N -вектор новых переменных, Γ_1 и F_1 — N -векторные функции, голоморфные относительно переменных u и $\bar{u}$, а $\Gamma_2 = \bar{\Gamma}_1$ и $F_2 = -\bar{F}_1$. Правые части систем (12) и (15) связаны соотношением

$$\mathcal{N}F = (E + \Gamma_Y)^{-1}(\mathcal{N}R + P\Gamma - \Gamma_Y PY), \quad (17)$$

где Γ_Y означает матрицу Якоби, составленную из производных от компонент Γ по переменным Y . Уравнение (17) служит для определения Γ и F . В силу соотношения

$$(E + \Gamma_Y)^{-1} = E - (E + \Gamma_Y)^{-1} \Gamma_Y \quad (18)$$

это уравнение может быть переписано в виде

$$\mathcal{N}F = P\Gamma - \Gamma_Y PY + \mathcal{N}U, \quad (19)$$

где вектор U , составленный, как в (16), из двух N -векторов U_1 и U_2 ($U_2 = -\bar{U}_1$), определяется соотношением

$$\mathcal{N}U = (E + \Gamma_Y)^{-1}[\mathcal{N}R + \Gamma_Y (\Gamma_Y PY - P\Gamma)]. \quad (20)$$

Разделим U на две части:

$$U = U^* + U', \quad (21)$$

отнеся к U' все те члены, которые позволяют проинтегрировать без вековых членов уравнение в частных производных

$$\Gamma_Y PY - P\Gamma = \mathcal{N}U'. \quad (22)$$

В силу такого разделения U на две части соотношение (20) принимает вид

$$U = R - \mathcal{N}^{-1} \Gamma_Y \mathcal{N}U^*, \quad (23)$$

а правая часть F уравнения (15) согласно (19) станет

$$F = U^*. \quad (24)$$

Соотношения (21) — (23) позволяют проводить процесс нормализации Биркгофа посредством итераций. Действительно, допустим, что U и Γ определены с точностью до членов степени m относительно Y ($m = 2, 3, \dots$). Тогда формула (23) позволяет найти в U члены $m + 1$ степени. Эти члены разбиваются в соответствии с (24) на две группы и затем интегрированием уравнения (22) находятся члены $m + 1$ степени в Γ . В вековой системе общей планетной теории фигурируют лишь члены нечетных степеней, и каждый шаг итерационного процесса повышает точность определения U и Γ на две степени. В начале итераций для членов наинизшей степени имеем просто $U = R$.

Приведем теперь формулы для фактических вычислений. Наиболее сложной здесь является операция подстановки в степенные ряды $R_1(x, \bar{x})$ рядов

$$x = u + \Gamma_1(u, \bar{u}) \quad (25)$$

с точностью до членов некоторой степени и определение членов на одну или две степени выше. Далее находятся поправочные члены от членов низших степеней в U и Γ :

$$U_1 = R_1 - \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{\partial \Gamma_1}{\partial u} \mathcal{N} U_1^* - \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \bar{u}} \mathcal{N} \bar{U}_1^* \right). \quad (26)$$

Тем самым все компоненты U_{1i} ($i = 1, \dots, N$) вектора U_1 определяются в виде степенных рядов

$$U_{1i} = \sum U_{pq}^{(1i)} \prod_{j=1}^N u_j^{p_j} \bar{u}_j^{q_j}, \quad (27)$$

где p, q — мультииндексы с компонентами p_j, q_j ($j = 1, \dots, N$) соответственно. В функции U_{1i} выделим и отнесем к U_{1i}^* все те члены, для которых

$$p_j = q_j + \delta_{ij}. \quad (28)$$

Тогда

$$U_{1i}^* = u_i \sum^* U_{pq}^{(1i)} \prod_{j=1}^N (u_j \bar{u}_j)^{q_j}, \quad (29)$$

где звездочка при сумме означает суммирование лишь по критическим значениям (28). Далее уравнение

$$\frac{\partial \Gamma_1}{\partial u} cu - \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \bar{u}} c\bar{u} - c\Gamma_1 = \mathcal{N}U'_1 \quad (30)$$

по известным коэффициентам $U_{pq}^{(1i)}$ разложения U_{1i} позволяет найти коэффициенты $\Gamma_{pq}^{(1i)}$ степенного разложения Γ_{1i} :

$$\Gamma_{pq}^{(1i)} = n_i U_{pq}^{(1i)} / \left[\sum_{j=1}^N (p_j - q_j - \delta_{ij}) c_j \right]. \quad (31)$$

Поскольку в правой части (29) нет критических членов с показателями (28) и собственные значения c_j несоизмеримы, то все знаменатели в (31) отличны от нуля. Для вековой системы общей планетной теории во всех членах правых частей всегда выполняется условие

$$\sum_{j=1}^N (p_j - q_j) = 1, \quad (32)$$

и поэтому, несмотря на наличие одного нулевого собственного числа, знаменатели в (31) могут обратиться в нуль лишь при соотношениях (28), т. е. только для критических членов.

Таким образом, данный итерационный алгоритм позволяет построить формальные ряды типа (27) для U_{1i} и Γ_{1i} с любой степенью точности. Для решения этой задачи необходимо иметь процессор для действий с кратными степенными рядами с подпрограммами линейной подстановки типа (9) и тейлоровской подстановки типа (25). Если число N достаточно велико, то упаковку индексов членов рядов снова целесообразно заменить нумерацией.

Завершение процесса нормализации не вызывает затруднений. В силу (15), (24) и (29) результирующие уравнения для переменных u_i имеют вид

$$\dot{u}_i = \sqrt{-1} u_i \left[c_i + n_i \sum^* U_{pq}^{(1i)} \prod_{j=1}^N (u_j \bar{u}_j)^{q_j} \right]. \quad (33)$$

В комбинации с сопряженными уравнениями отсюда вытекает, что

$$u_i \bar{u}_i = \text{const}, \quad (34)$$

и, следовательно, уравнения (33) сводятся к линейным уравнениям

$$\dot{u}_i = \sqrt{-1} (c_i + \delta c_i) u_i, \quad (35)$$

где δc_i — вещественные постоянные. Решение уравнений (35) дает

$$u_i = \xi_i \exp \sqrt{-1} \omega_i, \quad (36)$$

где ω_i — линейные функции t

$$\omega_i = (c_i + \delta c_i) t + \tau_i, \quad (37)$$

а ξ_i и τ_i — произвольные вещественные постоянные. Поправки к собственным числам поэтому будут

$$\delta c_i = n_i \sum^* U_{pq}^{(1i)} \prod_{j=1}^N \xi_j^{2qj}. \quad (38)$$

Напомним еще раз, что звездочка указывает здесь на суммирование по критическим значениям (28).

Рекуррентный алгоритм для аналитического или численного определения пертурбационной функции и ее производных в спутниковых задачах

§ 1. Разложение по сферическим функциям

Основные возмущения в спутниковых задачах обусловлены влиянием несферичности центрального тела и гравитационным действием третьего тела. В обоих случаях разложение соответствующей пертурбационной функции в ряд по сферическим функциям может быть записано в форме

$$R = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^k R_{kj}. \quad (1)$$

В случае возмущений от несферичности центрального тела выражение для R_{kj} имеет вид

$$R_{kj} = fm_0 \frac{r_0^k}{r^{k+1}} (C_{kj} \cos j\lambda' + S_{kj} \sin j\lambda') P_{kj}(\sin \beta'), \quad (2)$$

где m_0 — масса центрального тела, r_0 — его средний экваториальный радиус, C_{kj} , S_{kj} — численные коэффициенты,

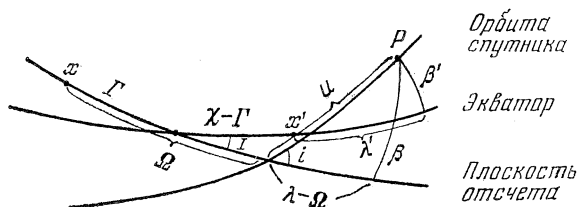


Рис. 2. Системы координат и орбита спутника.

характеризующие гравитационную структуру центрального тела, r , λ' , β' — сферические координаты спутника P в системе координат, жестко связанной с вращающимся центральным телом. Прямое восхождение λ' отсчитывается в плоскости экватора центрального тела от некоторой подвижной оси x' , а β' представляет собой склонение спутника относительно этой плоскости (рис. 2). Если начало си-

системы координат совпадает с центром тяжести центрального тела, то суммирование по k в разложении (1) начинается со значения $k = 2$.

В случае возмущений от гравитационного действия третьего тела P' стандартное разложение по полиномам Лежандра обратной величины расстояния между P и P' с последующим использованием формулы сложения для полиномов Лежандра приводит к выражению

$$R_{kj} = fm' (2 - \delta_{j0}) \frac{(1)_{k-j}}{(1)_{k+j}} \frac{r^k}{r'^{k+1}} P_{kj}(\sin \beta) \times \\ \times P_{kj}(\sin \beta') \cos j(\lambda - \lambda'). \quad (3)$$

Здесь m' — масса возмущающего тела P' , а r , λ , β и r' , λ' , β' — сферические координаты P и P' соответственно

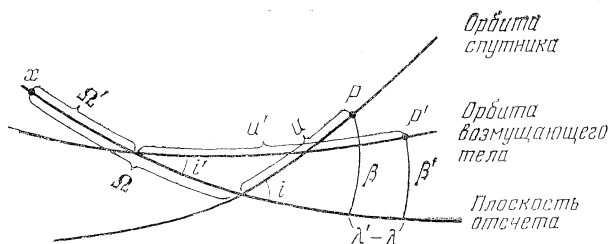


Рис. 3. Орбиты спутника и возмущающего тела.

в некоторой неподвижной системе координат (рис. 3). Суммирование по k в разложении (1) начинается в этом случае со значения $k = 2$.

Величина f , фигурирующая в (2) и (3), означает гравитационную постоянную.

В обоих случаях суммирование по k в разложении (1) ведется на практике вплоть до некоторого фиксированного значения K . В случае (2) значение K обуславливается быстротой убывания абсолютных величин коэффициентов C_{kj} , S_{kj} с ростом k , в случае (3) — малостью отношения r/r' . В обоих случаях K выбирается с учетом типа орбиты спутника и требуемой точности вычислений.

В формулах (2)–(3) фигурируют присоединенные функции Лежандра $P_{kj}(t)$. В небесно-механических приложениях, где t — вещественный аргумент из интервала

$(-1, 1)$, они определяются с помощью полиномов Лежандра $P_k(t)$ посредством соотношения

$$P_{kj}(t) = (1 - t^2)^{j/2} \frac{d^j P_k(t)}{dt^j}, \quad 0 \leq j \leq k. \quad (4)$$

Переходя теперь к прямоугольным координатам

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \lambda \cos \beta, \\ y &= r \sin \lambda \cos \beta, \\ z &= r \sin \beta, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

определим при $0 \leq j \leq k$ следующие шаровые функции:

$$X_{kj} = r^k P_{kj}(\sin \beta) \exp \sqrt{-1} j \lambda, \quad (6)$$

$$Y_{kj} = r^{k-1} P_{kj}(\sin \beta) \exp \sqrt{-1} j \lambda. \quad (7)$$

Очевидно, что

$$X_{kj} = r^{2k+1} Y_{kj}. \quad (8)$$

Функции X_{kj} представляют собой однородные многочлены степени k относительно переменных x , $\sqrt{-1} y$ и z .

Разделяя в (6) и (7) вещественные и мнимые части, положим

$$X_{kj} = W_{kj} + \sqrt{-1} Z_{kj}, \quad (9)$$

$$Y_{kj} = U_{kj} + \sqrt{-1} V_{kj}. \quad (10)$$

Тогда выражения (2) и (3) перейдут соответственно в

$$R_{kj} = f m_0 r_0^k (C_{kj} U'_{kj} + S_{kj} V'_{kj}), \quad (11)$$

$$R_{kj} = f m' (2 - \delta_{j0}) \frac{(4)_{k-j}}{(4)_{k+j}} (W_{kj} U'_{kj} + Z_{kj} V'_{kj}), \quad (12)$$

причем штрих означает, что соответствующие функции относятся к переменным x' , y' , z' .

Выражения (11), (12) показывают, что задача об аналитическом или численном определении пертурбационной функции и ее производных сводится к нахождению шаровых функций (6), (7) и их производных. Известны явные аналитические выражения (6), (7) в функции от прямоугольных координат x , y , z или различных систем орбитальных элементов. Однако не всегда вычисление по этим

аналитическим выражениям достаточно эффективно. Кроме того, изменение основной плоскости отсчета или системы элементов приводит к сложным преобразованиям таких выражений. Излагаемый ниже рекуррентный алгоритм позволяет эффективно находить функции (6), (7) численно или в виде аналитических разложений при любом выборе плоскости отсчета и системы используемых переменных. Этот алгоритм описан Каннингемом (Cunningham, 1970) в применении к численному определению возмущений от несферичности центрального тела. Позднее Джакалия (Giacaglia, 1975) предложил использовать его и для вычисления возмущений от третьего тела, а также указал на целесообразность применения этого алгоритма для нахождения аналитических разложений. Дрожинер (Droźnyer, 1977a) развил аналогичный алгоритм непосредственно для нахождения ускорения в движении искусственных спутников Земли, обусловленного несферичностью фигуры Земли, и реализовал его в программе на языке ФОРТРАН (Droźnyer, 1977b).

§ 2. Рекуррентное определение шаровых функций

Для отрицательных значений второго индекса определения (4), (6), (7) дополняются следующим образом:

$$P_{k, -j}(t) = (-1)^j \frac{(1)_{k-j}}{(1)_{k+j}} P_{kj}(t), \quad (13)$$

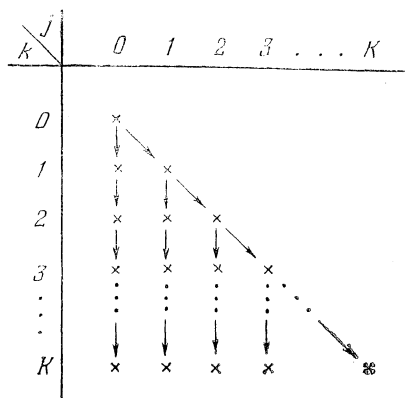
$$\Lambda_{k, -j}(t) = (-1)^j \frac{(1)_{k-j}}{(1)_{k+j}} \bar{X}_{kj}, \quad (14)$$

$$Y_{k, -j}(t) = (-1)^j \frac{(1)_{k-j}}{(1)_{k+j}} \bar{Y}_{kj}, \quad (15)$$

где черта означает комплексное сопряжение. Кроме того, в используемых ниже рекуррентных формулах при $j > k$ надо положить

$$P_{kj}(t) = 0, \quad X_{kj} = 0, \quad Y_{kj} = 0 \quad (j > k). \quad (16)$$

Запишем индексы k, j в виде треугольной таблицы:



Функции (6), (7) определяются независимо друг от друга по однотипным рекуррентным формулам диагонального и вертикального направления, как указано стрелками. На основе лишь одного предшествующего значения по диагональным формулам последовательно находятся секториальные функции X_{kk}, Y_{kk} ($k = 1, 2, \dots$). Начальные данные этого процесса:

$$X_{00} = 1, \quad Y_{00} = \frac{1}{r}. \quad (17)$$

Вертикальные формулы позволяют для каждого фиксированного j определить на основе двух предшествующих значений (в частном случае при $k = j + 1$ на основе одного значения) все последующие тессеральные функции ($k = j + 1, j + 2, \dots$).

Диагональные формулы следуют из соотношения

$$P_{k+1,j}(t) = (2k+1)(1-t^2)^{1/2} P_{k,j-1}(t) + P_{k-1,j}(t).$$

Используя (6), находим

$$X_{k+1,k+1} = (2k+1) r^{k+1} \cos \beta P_{kk}(\sin \beta) \exp \sqrt{-1} (k+1) \lambda$$

или

$$X_{k+1,k+1} = (2k+1) (x + \sqrt{-1} y) X_{kk}. \quad (18)$$

Отсюда в силу (8)

$$Y_{k+1,k+1} = (2k+1) \frac{x + \sqrt{-1} y}{r^2} Y_{kk}. \quad (19)$$

Вертикальные формулы выводятся проще всего из следующего рекуррентного соотношения для функций Лежандра:

$$(k - j + 1) P_{k+1, j}(t) = (2k + 1) t P_{kj}(t) - (k + j) P_{k-1, j}(t).$$

По (6) имеем

$$(k - j + 1) X_{k+1, j} = r^{k+1} [(2k + 1) \sin \beta P_{kj}(\sin \beta) - (k + j) P_{k-1, j}(\sin \beta)] \exp \sqrt{-1} j \lambda$$

или

$$(k - j + 1) X_{k+1, j} = (2k + 1) z X_{kj} - (k + j) r^2 X_{k-1, j}. \quad (20)$$

Поэтому в силу (8)

$$(k - j + 1) Y_{k+1, j} = (2k + 1) \frac{z}{r^2} Y_{kj} - \frac{k + j}{r^2} Y_{k-1, j}. \quad (21)$$

Для вещественных функций W_{kj} , Z_{kj} вертикальные соотношения будут иметь вид (20), а диагональные станут

$$\begin{pmatrix} W_{k+1, k+1} \\ Z_{k+1, k+1} \end{pmatrix} = (2k + 1) \left[x \begin{pmatrix} W_{kk} \\ Z_{kk} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -Z_{kk} \\ W_{kk} \end{pmatrix} \right] \quad (22)$$

с начальными условиями

$$W_{00} = 1, \quad Z_{00} = 0. \quad (23)$$

Точно так же для вещественных функций U_{kj} , V_{kj} вертикальные соотношения сохраняют вид (21), а диагональные станут

$$\begin{pmatrix} U_{k+1, k+1} \\ V_{k+1, k+1} \end{pmatrix} = \frac{2k + 1}{r^2} \left[x \begin{pmatrix} U_{kk} \\ V_{kk} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -V_{kk} \\ U_{kk} \end{pmatrix} \right] \quad (24)$$

с начальными условиями

$$U_{00} = \frac{1}{r}, \quad V_{00} = 0. \quad (25)$$

При численных расчетах коэффициенты формул (18)–(24), (22), (24) являются числами. При аналитических выкладках они представляют собой те или иные разложения, получаемые, например, с помощью подпрограмм кепплеровского процессора. В любом случае эти формулы позволяют эффективно определить функции (6), (7) в нужном виде.

Что же касается производных от этих функций по координатам x , y , z , то их можно вычислить либо по анало-

гичным рекуррентным формулам (так, например, это осуществляется в указанных выше работах Дрожинера), либо с помощью самих дифференцируемых функций. Это в последнем случае требует лишь дополнительного определения функций (6), (7) для значений $k = K + 1$, $j = 0, 1, \dots, K + 1$. Действительно, известное представление

$$Y_{kj} = \frac{(-1)^k}{(1)_{k-j}} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial y} \right)^j \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{k-j} \frac{1}{r}.$$

дает

$$Y_{k+1, j} = - \frac{1}{k-j+1} \frac{\partial}{\partial z} Y_{kj}, \quad (26)$$

$$Y_{k+1, j+1} = - \left(\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial y} \right) Y_{kj}. \quad (27)$$

Поскольку в силу уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{r} = - \left(\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{1}{r},$$

то

$$\begin{aligned} Y_{k+1, j-1} &= \frac{(-1)^k}{(1)_{k-j+2}} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial y} \right)^j \times \\ &\quad \times \left(\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{k-j} \frac{1}{r} \end{aligned}$$

или

$$Y_{k+1, j-1} = \frac{1}{(k-j+2)(k-j+1)} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial y} \right) Y_{kj}. \quad (28)$$

Разрешая (26) — (28) в явном виде относительно производных, находим

$$\frac{\partial}{\partial x} Y_{kj} = - \frac{1}{2} Y_{k+1, j+1} + \frac{1}{2} (k-j+2)(k-j+1) Y_{k+1, j-1} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} Y_{kj} &= \frac{\sqrt{-1}}{2} Y_{k+1, j+1} + \\ &\quad + \frac{\sqrt{-1}}{2} (k-j+2)(k-j+1) Y_{k+1, j-1}, \quad (30) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} Y_{kj} = - (k-j+1) Y_{k+1, j}. \quad (31)$$

В силу (8) отсюда легко вывести выражения для производных от функций X_{kj} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} X_{kj} = & -\frac{1}{2r^2} X_{k+1, j+1} + \\ & + \frac{1}{2r^2} (k-j+2)(k-j+1) X_{k+1, j-1} + (2k+1) \frac{x}{r^2} X_{kj}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} X_{kj} = & \frac{\sqrt{-1}}{2r^2} X_{k+1, j+1} + \\ & + \frac{\sqrt{-1}}{2r^2} (k-j+2)(k-j+1) X_{k+1, j-1} + (2k+1) \frac{y}{r^2} X_{kj}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} X_{kj} = -\frac{k-j+1}{r^2} X_{k+1, j} + (2k+1) \frac{z}{r^2} X_{kj}. \quad (34)$$

При $j=0$ в соответствии с (14), (15) в правых частях (29), (30) и (32), (33) имеем

$$(k+2)(k+1) Y_{k+1, -1} = -\bar{Y}_{k+1, 1},$$

$$(k+2)(k+1) X_{k+1, -1} = -\bar{X}_{k+1, 1}.$$

В вещественных переменных соотношения (29) — (30) переписутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} U_{kj} \\ V_{kj} \end{pmatrix} = & -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} U_{k+1, j+1} \\ V_{k+1, j+1} \end{pmatrix} + \\ & + \frac{1}{2} (k-j+2)(k-j+1) \begin{pmatrix} U_{k+1, j-1} \\ V_{k+1, j-1} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} U_{kj} \\ V_{kj} \end{pmatrix} = & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -V_{k+1, j+1} \\ U_{k+1, j+1} \end{pmatrix} + \\ & + \frac{1}{2} (k-j+2)(k-j+1) \begin{pmatrix} -V_{k+1, j-1} \\ U_{k+1, j-1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (36)$$

с заменой при $j=0$

$$(k+2)(k+1) U_{k+1, -1} = -U_{k+1, 1},$$

$$(k+2)(k+1) V_{k+1, -1} = V_{k+1, 1}.$$

Аналогично переписываются в вещественной форме и соотношения (32) — (33):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{W_{kj}}{Z_{kj}} \right) = & -\frac{1}{2r^2} \left(\frac{W_{k+1, j+1}}{Z_{k+1, j+1}} \right) + \\ & + \frac{1}{2r^2} (k-j+2)(k-j+1) \left(\frac{W_{k+1, j-1}}{Z_{k+1, j-1}} \right) + (2k+1) \frac{x}{r^2} \left(\frac{W_{kj}}{Z_{kj}} \right), \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{W_{kj}}{Z_{kj}} \right) = & \frac{1}{2r^2} \left(\frac{-Z_{k+1, j+1}}{W_{k+1, j+1}} \right) + \\ & + \frac{1}{2r^2} (k-j+2)(k-j+1) \left(\frac{-Z_{k+1, j-1}}{W_{k+1, j-1}} \right) + (2k+1) \frac{y}{r^2} \left(\frac{W_{kj}}{Z_{kj}} \right) \end{aligned} \quad (38)$$

с заменой при $j=0$

$$(k+2)(k+1)W_{k+1, -1} = -W_{k+1, 1},$$

$$(k+2)(k+1)Z_{k+1, -1} = Z_{k+1, 1}.$$

Производные по координате z сохраняют прежний вид (31) для функций U_{kj} , V_{kj} и (34) для функций W_{kj} , Z_{kj} .

§ 3. Пертурбационная функция и ее производные

Рассмотрим движение спутника в неподвижной планетосцентрической системе координат x, y, z с произвольной плоскостью отсчета xy . Уравнения движения запишутся в виде

$$\ddot{x} = -fm_0 \frac{x}{r^3} + \frac{\partial R_0}{\partial x} + \frac{\partial R'}{\partial x} \quad (39)$$

и аналогично для y, z . Здесь R_0 — пертурбационная функция, обусловленная несферичностью центрального тела и определяемая по (1), (2), а R' — пертурбационная функция, обусловленная притяжением третьего тела и определяемая по (1), (3).

Остановимся сначала на функции R_0 . Согласно представлению (11) изложенный выше рекуррентный алгоритм должен быть записан в системе координат x', y', z' , жестко связанной с вращающимся центральным телом. Переход от x', y', z' к x, y, z задается матрицей J , являющейся

функцией углов Эйлера $\Gamma, \chi - \Gamma, I$ (рис. 2), а именно:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (40)$$

$$J = \begin{pmatrix} \cos(\chi - \Gamma) & \sin(\chi - \Gamma) & 0 \\ -\sin(\chi - \Gamma) & \cos(\chi - \Gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos I & \sin I \\ 0 & -\sin I & \cos I \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} \cos \Gamma & \sin \Gamma & 0 \\ -\sin \Gamma & \cos \Gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Поэтому

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial R_0}{\partial x} \\ \frac{\partial R_0}{\partial y} \\ \frac{\partial R_0}{\partial z} \end{pmatrix} = J^T \begin{pmatrix} \frac{\partial R_0}{\partial x'} \\ \frac{\partial R_0}{\partial y'} \\ \frac{\partial R_0}{\partial z'} \end{pmatrix}, \quad (42)$$

где J^T — транспонированная матрица. При численном интегрировании уравнений (39) по заданным координатам x, y, z вычисляются по (40) координаты x', y', z' , по их значениям строится рекуррентный алгоритм (24) и (21), далее по (35), (36) и (31) находятся производные от R_0 по x', y', z' , и, наконец, соотношения (42) дают соответствующие члены в правых частях уравнений (39).

При построении аналитической теории координаты x, y, z обычно представляются в замкнутом виде относительно r, u, i, Ω (u — аргумент широты) или в виде рядов в функции от $a, e, i, \omega, \Omega, M$ (M — средняя аномалия). Эти выражения строятся кеплеровским процессором. Далее с помощью пуассоновского процессора легко получить коэффициенты рекуррентных формул (24) и (21), а затем и сами значения U'_{kj}, V'_{kj} . Результирующие выражения, приводимые здесь для контроля, имеют вид (Brumberg et al., 1971):

$$U'_{kj} = \sum_{l=-k}^k \sum_{s=0}^k (-1)^{E\left(\frac{k-j}{2}\right) + E\left(\frac{k-l}{2}\right) + \max\{0, j-l\}} \cdot r^{-k-1} \times \\ \times A_{kjl}(I) F_{kl s}(i) \times \\ \times \cos \left[(k-2s)u + l(\Omega - \Gamma) - j(\chi - \Gamma) - \nabla_{kj} \frac{\pi}{2} \right] \quad (43)$$

в первом случае и

$$U'_{kj} = \sum_{l=-k}^k \sum_{s=0}^k \sum_{q=-\infty}^{\infty} (-1)^{E\left(\frac{k-j}{2}\right) + E\left(\frac{k-l}{2}\right) + \max\{0, j-l\}} \times \\ \times a^{-k-1} A_{kjl}(I) F_{kls}(i) X_{k-2s+q}^{-k-1, k-2s}(e) \cos \left[(k-2s+q)M + \right. \\ \left. + (k-2s)\omega + l(\Omega - \Gamma) - j(\chi - \Gamma) - \nabla_{kj} \frac{\pi}{2} \right] \quad (44)$$

во втором случае. Соответствующие значения V'_{kj} ($j \neq 0$) получаются заменой символа $\cos$ на $\sin$. В этих формулах $\nabla_{kj} = \text{mod}(k-j, 2)$, $A_{kjl}(I)$ — обобщенные функции наклона

$$A_{kjl}(I) = \frac{(1)_{k-l}}{(1)_{k-j}} \frac{(-k-i)_{\max\{0, j-l\}} (-k+i)_{\max\{0, l-j\}}}{(1)_{|j-l|}} \times \\ \times \left(\sin \frac{I}{2} \right)^{|j-l|} \left(\cos \frac{I}{2} \right)^{|j+l|} F\left(\frac{1}{2} |j-l| + \frac{1}{2} |j+l| - k, \right. \\ \left. 1+k + \frac{1}{2} |j-l| + \frac{1}{2} |j+l|, \quad 1+|j-l|, \quad \sin^2 \frac{I}{2} \right), \quad (45)$$

$F_{kjl}(i)$ — функции наклона Каула

$$F_{kjl}(i) = \\ = (-1)^{E\left(\frac{k-j}{2}\right) + \max\{0, k-j-2l\}} \frac{2^{k-2l} \left(\frac{1}{2}\right)_{k-l}}{(1)_l} A_{k, j, k-2l}(i), \quad (46)$$

$X_k^{n,m}(e)$ — коэффициенты Ганзена. В тригонометрические аргументы Ω и Γ входят лишь в виде разности. При $I=0$, т. е. при выборе плоскости экватора в качестве основной, $A_{kjl}(0) = \delta_{jl}$, аргумент Γ исчезает, а Ω и χ входят лишь в виде разности.

Функции наклона представляют собой класс специальных функций, имеющих важное значение для небесной механики. Эти функции проще коэффициентов Ганзена, так как в силу (45) они всегда выражаются через элементарные функции и гипергеометрические полиномы

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_s (\beta)_s}{(\gamma)_s (1)_s} x^s$$

(для целого отрицательного α , как в (45), это выражение содержит $(-\alpha+1)$ членов). Поэтому для этих функций

существуют простые рекуррентные соотношения, а также целый ряд полезных преобразований, основанных на теории гипергеометрических функций.

В случае использования не кеплеровских элементов, а, скажем, элементов типа Лапласа, явный вид разложений (43), (44) значительно усложнится. В то же время это практически не скажется на получении этих функций по рекуррентному алгоритму, достаточно лишь будет найти с помощью кеплеровского процессора соответствующие выражения координат x, y, z .

Разложение, эквивалентное (44), но имеющее несколько иную форму, получено также в работе (Balmino, Boderies, 1978). В работе (Бабаев, Красинский, 1978) выведено более общее разложение потенциала несферического тела в канонических переменных Андуайе. В этом разложении добавлены по сравнению с (44) одна степенная и одна тригонометрическая переменные, характеризующие положение экватора вращения тела относительно экватора фигуры.

Перейдем теперь к функции R' . В представлении (12) функции W_{kj}, Z_{kj} от координат x, y, z спутника отделены от функций U'_{kj}, V'_{kj} от координат x', y', z' третьего тела. При численном интегрировании уравнений (39) рекуррентный алгоритм (22), (20) с последующим применением (37), (38) и (34) даст необходимые производные от W_{kj}, Z_{kj} по x, y, z , а рекуррентный алгоритм (24), (21), записанный в координатах x', y', z' , даст функции U'_{kj}, V'_{kj} . При аналитическом определении функций W_{kj}, Z_{kj} координаты x, y, z снова можно рассматривать в виде замкнутых выражений от r, u, i, Ω или в виде рядов в функции от $a, e, i, \omega, \Omega, M$. В первом случае в результате рекуррентного алгоритма приходим к выражению

$$W_{kj} = r^k \sum_{l=0}^k F_{kjl}(i) \cos \left[(k-2l)u + j\Omega - \nabla_{kj} \frac{\pi}{2} \right], \quad (47)$$

во втором случае — к выражению

$$W_{kj} = a^k \sum_{l=0}^k \sum_{q=-\infty}^{\infty} F_{kjl}(i) X_{k-2l+q}^{k, k-2l}(e) \times \\ \times \cos \left[(k-2l+q)M + (k-2l)\omega + j\Omega - \nabla_{kj} \frac{\pi}{2} \right]. \quad (48)$$

Эти выражения следуют с учетом (8) из (43), (44) при $I = 0$, $\chi = 0$. Функции Z_{kj} ($j \neq 0$) получаются отсюда при замене символа $\cos$ на $\sin$. Если возмущающее тело предполагается движущимся по эллиптической орбите, то его координаты можно выразить по формулам эллиптического движения и в результате рекуррентный алгоритм даст выражения, аналогичные (47) и (48):

$$U'_{kj} = \frac{1}{r'^{k+1}} \sum_{l'=0}^k F_{kjl'}(i') \cos \left[(k-2l') u' + j\Omega' - \nabla_{kj} \frac{\pi}{2} \right] \quad (49)$$

и

$$U'_{kj} = \frac{1}{a'^{k+1}} \sum_{l'=0}^k \sum_{q=-\infty}^{\infty} F_{kjl'}(i') X_{k-2l'+q}^{-k-1, k-2l'}(e') \times \\ \times \cos \left[(k-2l'+q') M' + (k-2l') \omega' + j\Omega' - \nabla_{kj} \frac{\pi}{2} \right]. \quad (50)$$

Функции V'_{kj} снова получаются при замене $\cos$ на $\sin$. В суммарном выражении (12) Ω и Ω' будут входить лишь в виде разности.

Преимущества рекуррентного алгоритма становятся особенно ощутимыми, если движение тела нельзя считать эллиптическим. В частности, это имеет место в теории движения искусственных спутников Луны и далеких искусственных спутников Земли, когда приходится прибегать к полной аналитической теории движения Луны. В этих случаях координаты x' , y' , z' и коэффициенты рекуррентных формул (24), (21) надо выразить с помощью соответствующей аналитической теории, после чего пуассоновский процессор даст величины U'_{kj} , V'_{kj} в функции от параметров теории.

До сих пор речь шла об уравнениях движения (39) в прямоугольных координатах. Если надо численно интегрировать уравнения в элементах, то и в этом случае целесообразно использование рекуррентного алгоритма для вычисления правых частей. Для перехода от производных от R_0 , R' по прямоугольным координатам к производным по элементам надо лишь иметь матрицу Якоби преобразования от координат к элементам.

Алгоритмы разложения пертурбационной функции в планетных задачах

§ 1. Структура разложения

Основная трудность разложения пертурбационной функции в планетных задачах состоит в том, что отношение больших полуосей орбит рассматриваемых тел может достигать значительной величины (порядка 0,7). Поэтому разложения по степеням этого отношения, столь эффективные в спутниковых задачах, здесь в непосредственной форме непригодны. Они приводятся ниже с целью характеристики общей структуры разложений.

Поскольку разложение косвенного члена пертурбационной функции не вызывает никаких затруднений, остановимся лишь на разложении обратной величины взаимного расстояния Δ между планетами. Во многих методах определения планетных возмущений наряду с Δ^{-1} фигурируют величины Δ^{-3} , Δ^{-5} и т. д. Учитывая это, будем рассматривать разложения величины Δ^{-n} для произвольного натурального n .

При исследовании функции

$$\Delta = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos H)^{1/2} \quad (1)$$

выберем для определенности случай $r < r'$. Тогда стандартное разложение по полиномам Гегенбауэра дает:

$$\Delta^{-n} = r'^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r'}\right)^k C_k^{n/2}(\cos H). \quad (2)$$

Разложение полинома Гегенбауэра в функции от аргументов широты u, u' , долгот узлов Ω, Ω' и наклонов i, i' может быть записано в виде

$$\begin{aligned} C_k^{n/2}(\cos H) = & \sum_{l=0}^k \sum_{l'=0}^k \sum_{j=0}^k (2 - \delta_{j0}) C_{k-l-l', l'-l, j}^{(k, n/2)}(i, i') \times \\ & \times \cos[(l - 2l)u - (k - 2l')u' + j(\Omega - \Omega')]. \quad (3) \end{aligned}$$

Коэффициенты $C_{pqj}^{(k, n/2)}(i, i')$ очень просто выражаются в случае полиномов Лежандра, когда $n = 1$:

$$C_{pqj}^{(k, 1/2)}(i, i') = \frac{(1)_{k-j}}{(1)_{k+j}} F_{k, j, \frac{k-p-q}{2}}(i) F_{k, j, \frac{k-p+q}{2}}(i'), \quad (4)$$

где $F_{kjl}(i)$ — функция наклона Каула (формула (46) гл. 5). Представление полинома Гегенбауэра в виде линейной комбинации полиномов Лежандра (Sack, 1964)

$$C_k^{n/2}(x) = \sum_{r=0}^{E\left(\frac{k}{2}\right)} (2k - 4r + 1) \frac{\left(\frac{n}{2}\right)_{k-r} \left(\frac{n-1}{2}\right)_r}{\left(\frac{3}{2}\right)_{k-r} (1)_r} C_{k-2r}^{1/2}(x) \quad (5)$$

позволяет выразить коэффициенты разложения (3) в виде суммы произведений функций наклона Каула:

$$C_{k-l-l', l'-l, j}^{(k, n/2)}(i, i') = \sum_{r=0}^{r^*} (2k - 4r + 1) \frac{\left(\frac{n}{2}\right)_{k-r} \left(\frac{n-1}{2}\right)_r}{\left(\frac{3}{2}\right)_{k-r} (1)_r} \times \\ \times \frac{(1)_{k-2r-j}}{(1)_{k-2r+j}} F_{k-2r, j, l-r}(i) F_{k-2r, j, l'-r}(i'), \quad (6)$$

где суммирование производится до первого исчезающего члена. Поэтому предельное значение $r = r^*$ определяется выражением

$$r^* = \min \left\{ E\left(\frac{k-j}{2}\right), E\left(\frac{k-|k-l-l'|-|l-l'|}{2}\right) \right\}. \quad (7)$$

Поскольку функция наклона $F_{kjl}(i)$ содержит в качестве множителя величину

$$\left(\sin \frac{i}{2}\right)^{|k-j-2l|} \left(\cos \frac{i}{2}\right)^{|k+j-2l|},$$

то в формуле (6) можно вынести за знак суммы общий множитель

$$\left(\sin \frac{i}{2}\right)^{|k-j-2l|} \left(\cos \frac{i}{2}\right)^{|k+j-2l|} \left(\sin \frac{i'}{2}\right)^{|k-j-2l'|} \left(\cos \frac{i'}{2}\right)^{|k+j-2l'|},$$

а под знаком суммы останутся числовой коэффициент и произведение двух гипергеометрических полиномов. Недостатком формулы (6) является суммирование величин

одного порядка. Вместо (6) можно дать для коэффициентов $C_{pqj}^{(k, n/2)}(i, i')$ выражения другого типа, однако для рассматриваемых ниже алгоритмов это не имеет значения.

Подстановка (3) в (2) с последующим разложением по средним аномалиям M, M' приводит к ряду

$$\Delta^{-n} = a'^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^k \sum_{l'=0}^k \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{q'=-\infty}^{\infty} (2 - \delta_{j0}) \left(\frac{a}{a'}\right)^k \times \\ \times X_{k-2l+q}^{k, k-2l}(e) X_{k-2l'+q'}^{-n-k, k-2l'}(e') C_{k-l-l', l'-l, j}^{(k, n/2)}(i, i') \times \\ \times \cos[(k-2l+q)M - (k-2l'+q')M' + (k-2l)\omega - \\ - (k-2l')\omega' + j(\Omega - \Omega')], \quad (8)$$

где e, e' — эксцентриситеты орбит, ω, ω' — аргументы перигелиев, а $X_k^{n, m}(e)$ — коэффициенты Ганзена. После изменения порядка суммирования отсюда следует тригонометрическое разложение

$$\Delta^{-n} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{q'=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{s'=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (\Delta^{-n})_{qq's's'j} \times \\ \times \cos[qM + q'M' + s\omega + s'\omega' + j(\Omega - \Omega')] \quad (9)$$

с коэффициентами

$$(\Delta^{-n})_{qq's's'j} = a'^{-n} (2 - \delta_{j0}) \sum_{\substack{m=0 \\ k=l_c+2m}}^{\infty} \left(\frac{a}{a'}\right)^k \times \\ \times X_q^{k, s}(e) X_{q'}^{-n-k, s'}(e') C_{s-s', \frac{s+s'}{2}, j}^{(k, n/2)}(i, i'), \quad (10)$$

где

$$k_0 = \max\{|s|, |s'|\} + 2 \max\left\{0, E\left(\frac{j - \max\{|s|, |s'|\} + 1}{2}\right)\right\}$$

В планетных задачах коэффициенты Ганзена и функции наклона, стоящие в (10), можно разложить по степеням $e, e', \sin \frac{i}{2}, \sin \frac{i'}{2}$, и тогда коэффициенты (10) представятся пятиаргументными степенными рядами. В настоящее время употребляются два способа для преодоления медленной сходимости этих рядов по отношению к параметру $\alpha = a/a'$. Первый способ состоит в том, что суммирование по α делается внутренним за счет вынесения целых функ-

ций от индекса k за знак суммы с заменой k на оператор $D = \alpha \frac{d}{d\alpha}$. Таким путем Г. А. Красинский (1973а) получил аналитическое разложение величины Δ^{-1} , быстро сходящееся в планетных задачах. В этом разложении фигурируют обобщенные гипергеометрические функции от α , заменяющие собой коэффициенты Лапласа классических разложений, которые были основаны на употреблении элементов взаимной ориентации орбит планет. Заметим, что аналогичный прием был использован Г. А. Красинским (1973б) и в задаче о вычислении возмущений от несферичности Земли в движении близких искусственных спутников, когда отношение экваториального радиуса Земли к большой полуоси орбиты спутника близко к единице. Второй способ заключается в том, что сначала коэффициенты (10) представляются в форме четырехаргументного степенного ряда

$$(\Delta^{-n})_{qq'ss'j} = a'^{-n} \sum F_{k_1 k_2 k_3 k_4}^{(n)}(\alpha) e^{k_1} e'^{k_2} \left(\sin \frac{i}{2}\right)^{k_3} \left(\sin \frac{i'}{2}\right)^{k_4}, \quad (11)$$

где в свою очередь коэффициенты $F(\alpha)$ являются рядами по степеням α^2 , начинающимися с членов определенной степени относительно α (явная зависимость от индексов q, q', s, s', j в правой части (11) опущена). Как было показано Шапроном (Chapront, 1970), этот ряд допускает представление

$$F_{k_1 k_2 k_3 k_4}^{(n)}(\alpha) = \frac{1}{(1 - \alpha^2)^{n-1+k_1+k_2+k_3+k_4}} G_{k_1 k_2 k_3 k_4}^{(n)}(\alpha), \quad (12)$$

причем ряд $G(\alpha)$ имеет ту же структуру, что и $F(\alpha)$, но обладает гораздо более быстрой сходимостью.

Установив общий вид разложения (9), обратимся теперь к некоторым практическим алгоритмам построения этого разложения на ЭВМ.

§ 2. Алгоритмы разложения

Простейший алгоритм получения разложения (9) без каких-либо предварительных аналитических выкладок состоит в построении с помощью кеплеровского процессора ряда Пуассона для величины

$$\frac{\Delta^2}{a'^2} = \frac{r'^2}{a'^2} - 2\alpha \frac{r}{a} \frac{r'}{a'} \cos H + \alpha^2 \frac{r^2}{a^2} \quad (13)$$

и затем в возведении этого ряда с помощью пуассоновского процессора в отрицательную степень $(-n/2)$. В качестве начального приближения для величины $(a'/\Delta)^n$ можно принять или единицу, или ряд для функции $(a'/r')^n$, или, наконец, разложение $(a'/\Delta)^n$ для случая круговых орбит. Этот алгоритм применялся, в частности, в работе (Broucke, Smith, 1971).

Такое же представление $(a'/\Delta)^n$ в виде ряда Пуассона получится, если исходить из начальной формулы (2). Полиномы Гегенбауэра $C_k^{n/2}(\cos H)$ строятся в форме рядов Пуассона с помощью кеплеровского процессора, а затем умножаются на ряды функций $(r/a)^k$, $(a'/r')^{n+k}$. В обоих этих случаях получается разложение (8) с очень медленной сходимостью относительно параметра α .

Если за исходное разложение принять ряд Фурье

$$\Delta^{-n} = r'^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{k0}\right) b_n^{(k)} \left(\frac{r}{r'}\right) \cos kH \quad (14)$$

с коэффициентами Лапласа

$$\frac{1}{2} b_n^{(k)}(x) = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)_k}{(1)_k} x^k F\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + k, 1 + k, x^2\right), \quad (15)$$

то можно построить разложение (9) в виде эшелонированного ряда с выделением в коэффициентах полюсов $(1 - \alpha^2)^{-1}$. С этой целью в работе (Abu-El-Ata, Chapront, 1975) в коэффициентах (14) была произведена замена

$$x^2 = \alpha^2 (1 + y), \quad (16)$$

где

$$x = \frac{r}{r'}, \quad \alpha = \frac{a}{a'}, \quad y = \left(\frac{r}{a} \frac{a'}{r'}\right)^2 - 1. \quad (17)$$

Очевидно, что функция y имеет порядок эксцентриситетов e и e' .

Подстановка (16) в (15) с последующим разложением гипергеометрической функции дает

$$\begin{aligned} F\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + k, 1 + k, x^2\right) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{n}{2}\right)_m \left(\frac{n}{2} + k\right)_m}{(1 + k)_m (1)_m} y^m \times \\ &\times \alpha^{2m} F\left(\frac{n}{2} + m, \frac{n}{2} + k + m, 1 + k + m, \alpha^2\right). \end{aligned}$$

Применяя, далее, преобразование Эйлера

$$F\left(\frac{n}{2} + m, \frac{n}{2} + k + m, 1 + k + m, \alpha^2\right) = \\ = \frac{1}{(1 - \alpha^2)^{n-1+m}} F\left(1 - \frac{n}{2}, 1 + k - \frac{n}{2}, 1 + k + m, \alpha^2\right),$$

получаем

$$\Delta^{-n} = a'^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} (2 - \delta_{k0}) \left(\frac{r}{a}\right)^k \left(\frac{a'}{r'}\right)^{n+k} \cos kH \times \\ \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{n}{2}\right)_m \left(\frac{n}{2}\right)_{k+m}}{(1)_m (1)_{k+m}} y^m \frac{\alpha^{k+2m}}{(1 - \alpha^2)^{n-1+m}} \times \\ \times F\left(1 - \frac{n}{2}, 1 + k - \frac{n}{2}, 1 + k + m, \alpha^2\right) \quad (18)$$

Разлагая функции $(r/a)^k$, $(a'/r')^{n+k}$, $\cos kH$ и y^m с помощью кеплеровского процессора, приходим к разложению (9), где в коэффициентах вынесен полюс, соответствующий степени n и минимальному порядку малости данного коэффициента относительно эксцентриситетов.

Интересный алгоритм был недавно предложен в работе (Hori, Yuasa, 1978). Этот алгоритм, обобщающий алгоритм Брауна и Шука (Brown, Shook, 1933) на случай произвольной плоскости отсчета, годится и для планетных орбит типа Нептуна и Плутона, т. е. для орбит, пересекающихся в проекции. Для таких орбит важно с самого начала учитывать фактические значения наклонов. Поэтому целесообразно ввести величину

$$\Delta_0^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' (cc' - ss')^2 \cos(w - w'),$$

где $c = \cos(i/2)$, $s = \sin(i/2)$, $w = u + \Omega$ — истинная долгота в орбите, а соответствующие штрихованные величины относятся ко второй планете. Тогда

$$\Delta^2 = \Delta_0^2 - 2rr' \{c^2 s'^2 \cos(w + w' - 2\Omega') + \\ + s^2 c'^2 \cos(w + w' - 2\Omega) + s^2 s'^2 \cos(w - w' - 2\Omega + \\ + 2\Omega') + 2csc's' [\cos(w - w' - \Omega + \Omega') - \cos(w + \\ + w' - \Omega - \Omega')]\} + (2csc's' - s^2 s'^2) \cos(w - w').$$

Отношение $(\Delta^2 - \Delta_0^2)/\Delta_0^2$ всегда по абсолютной величине меньше единицы (за исключением лишь случая фак-

тического пересечения орбит), так что величина Δ^{-n} может быть разложена в ряд по степеням этого отношения

$$\Delta^{-n} = \Delta_0^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{n}{2}\right)_k}{(1)_k} \left(\frac{\Delta^2 - \Delta_0^2}{\Delta_0^2}\right)^k.$$

Величина $(\Delta^2 - \Delta_0^2)$ раскладывается в ряд Пуассона средними кеплеровского процессора, а разложение нечетных отрицательных степеней величины Δ_0 может быть осуществлено классическими методами.

Все указанные выше алгоритмы позволяют, если в этом есть необходимость, строить разложения, строгие относительно наклонов орбит планет. Для этого достаточно выбрать в кеплеровском процессоре такой вариант разложения величины $\cos H$, в котором строго учитываются тригонометрические функции от наклонов орбит планет. Однако, в планетных задачах при малых эксцентриситетах и наклонах бывает выгодно с самого начала использовать разложения по степеням этих параметров. Среди алгоритмов, рассчитанных на случай малых эксцентриситетов и наклонов, отметим алгоритм из работы (Abu-El-Ata, Chapront, 1975), приводящий к коэффициентам вида (11), (12). Ниже будет приведен другой алгоритм (Brumberg, 1970), приводящий к тому же типу разложения. Этот алгоритм, возможно, требует больше машинного времени, но он более универсален, так как оставляет свободу выбора тех или иных эксцентрических и облических переменных.

Вместо прямоугольных координат x, y, z введем безразмерные переменные p, q, w , представляющие собой поправки к круговому движению с большой полуосью a и средней долготой λ :

$$\left. \begin{aligned} x + \sqrt{-1} y &= a(1-p) \exp \sqrt{-1} \lambda, \\ x - \sqrt{-1} y &= a(1-q) \exp(-\sqrt{-1} \lambda), \\ z &= aw. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Комплексно-сопряженные переменные p, q имеют порядок малости эксцентриситета e , а вещественная переменная w — порядок малости наклона i . Аналогичные переменные со штрихом относятся ко второй планете.

Найдем прежде всего разложения произвольной степени обратной величины радиуса-вектора. Так как

$$r^2 = a^2 [(1-p)(1-q) + w^2], \quad (20)$$

то последовательным применением бинома Ньютона получаем

$$\left(\frac{a}{r}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{klm}^{(n)} p^k q^l w^{2m}, \quad (21)$$

где

$$\alpha_{klm}^{(n)} = (-1)^m \frac{\left(\frac{n}{2}\right)_m \left(\frac{n}{2} + m\right)_k \left(\frac{n}{2} + m\right)_l}{(1)_m (1)_k (1)_l}. \quad (22)$$

Квадрат взаимного расстояния между двумя планетами в новых переменных примет вид

$$\frac{\Delta^2}{a'^2} = [1 - p' - \alpha(1-p)\zeta][1 - q' - \alpha(1-q)\zeta^{-1}] + (w' - \alpha w)^2, \quad (23)$$

где по-прежнему $\alpha = a/a' < 1$, а

$$\zeta = \exp \sqrt{-1} (\lambda - \lambda'). \quad (24)$$

Применение бинома Ньютона дает

$$\begin{aligned} \left(\frac{a'}{\Delta}\right)^n &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{n}{2}\right)_m}{(1)_m} (1 - \alpha\zeta - p' + \alpha p\zeta)^{-\frac{n}{2}-m} \times \\ &\times (1 - \alpha\zeta^{-1} - q' + \alpha q\zeta^{-1})^{-\frac{n}{2}-m} (w' - \alpha w)^{2m}. \end{aligned} \quad (25)$$

Первое встречающееся здесь возведение в степень осуществляется следующим образом:

$$\begin{aligned} (1 - \alpha\zeta - p' + \alpha p\zeta)^{-\frac{n}{2}-m} &= \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{n}{2} + m\right)_k}{(1)_k} (1 - \alpha\zeta)^{-\frac{n}{2}-m-k} (\alpha p\zeta - p')^k = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^k \frac{(-1)^k \left(\frac{n}{2} + m\right)_k (-k)_r}{(1)_k (1)_r} (1 - \alpha \zeta)^{-\frac{n}{2} - m - k} \alpha^{k-r} p^{k-r} p'^r \zeta^{k-r} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{n}{2} + m\right)_{k+r} (1+r)_k}{(1)_{k+r} (1)_k} (1 - \alpha \zeta)^{-\frac{n}{2} - m - k - r} \times \\
&\quad \times \alpha^k p^k p'^r \zeta^k.
\end{aligned}$$

Чтобы получить последнее выражение, надо в предыдущем выражении изменить порядок суммирования, а затем заменить k на $k + r$ и преобразовать факториальный коэффициент. Второй множитель в (25) получается из первого комплексным сопряжением. Третий сомножитель раскрывается без труда:

$$\begin{aligned}
(w' - \alpha w)^{2m} &= \sum_{t=0}^{2m} \frac{(-2m)_t}{(1)_t} \alpha^{2m-t} w^{2m-t} w'^t = \\
&= \sum_{t=-m}^m (-1)^{m+t} \frac{(1+m-t)_{m+t}}{(1)_{m+t}} \alpha^{m-t} w^{m-t} w'^{m+t}.
\end{aligned}$$

Вводя теперь функцию

$$\gamma(n, x, y, v, \alpha, \zeta) = \alpha^n (1 - \alpha \zeta^{-1})^x (1 - \alpha \zeta)^y (-\zeta)^v \quad (26)$$

и подставляя в (25) полученные промежуточные результаты, находим

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a'}{\Delta}\right)^n &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{t=-m}^m \beta_{klrsmt}^{(n)}(\alpha, \zeta) \times \\
&\quad \times p^k q^l p'^r q'^s w^{m-t} w'^{m+t}, \quad (27)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
&\beta_{klrsmt}^{(n)}(\alpha, \zeta) = \\
&= C_{klrsmt}^{(n)} \gamma\left(k + l + m - t, -\frac{n}{2} - m - l - s, -\frac{n}{2} - m - \right. \\
&\quad \left. - k - r, k - l, \alpha, \zeta\right) \quad (28)
\end{aligned}$$

с числовым коэффициентом

$$\begin{aligned}
&C_{klrsmt}^{(n)} = \\
&= (-1)^t \frac{\left(\frac{n}{2}\right)_m \left(\frac{n}{2} + m\right)_{k+r} \left(\frac{n}{2} + m\right)_{l+s} (1+r)_k (1+s)_l (1+m-t)_{m+t}}{(1)_m (1)_{k+r} (1)_{l+s} (1)_k (1)_l (1)_{m+t}}. \quad (29)
\end{aligned}$$

Функции p, w, p', w' не зависят от больших полуосей, и их разложения по тем или иным элементам могут быть получены с помощью кеплеровского процессора. Общий член в разложении (27) имеет порядок малости $k + l + r + s$ относительно эксцентриситетов и $2m$ — относительно наклонов. Зависимость от α в этом разложении обусловлена только функцией (26). Разложение этой функции в экспоненциальный ряд по ζ имеет вид

$$\begin{aligned} \gamma(n, x, y, v, \alpha, \zeta) &= \\ &= \sum_{\sigma=0}^{\infty} \sum_{\rho=0}^{\infty} (-1)^v \frac{(-x)_{\rho} (-y)_{\sigma}}{(1)_{\rho} (1)_{\sigma}} \alpha^{n+\sigma+\rho} \zeta^{v+\sigma-\rho} = \\ &= \sum_{\rho=0}^{\infty} \sum_{\sigma=v-\rho}^{\infty} (-1)^v \frac{(-x)_{\rho} (-y)_{\sigma+\rho-v}}{(1)_{\rho} (1)_{\sigma+\rho-v}} \alpha^{n+2\rho+\sigma-v} \zeta^{\sigma} = \\ &= \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} \sum_{\rho=0}^{\infty} (-1)^v \frac{(-x)_{\rho+\max\{0, v-\sigma\}} (-y)_{\rho+\max\{0, \sigma-v\}}}{(1)_{\rho+\max\{0, v-\sigma\}} (1)_{\rho+\max\{0, \sigma-v\}}} \times \\ &\quad \times \alpha^{2\rho+n+|\sigma-v|} \zeta^{\sigma}. \end{aligned}$$

При выводе этого разложения сначала индекс σ был заменен на $\sigma + \rho - v$, затем изменен порядок суммирования

$$\sum_{\rho=0}^{\infty} \sum_{\sigma=v-\rho}^{\infty} = \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} \sum_{\rho=\max\{0, v-\sigma\}}^{\infty}$$

и, наконец, индекс ρ был заменен на $\rho + \max\{0, v - \sigma\}$. Поэтому окончательно

$$\gamma(n, x, y, v, \alpha, \zeta) = \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} \gamma_{\sigma}(n, x, y, v, \alpha) \zeta^{\sigma}, \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_{\sigma}(n, x, y, v, \alpha) &= (-1)^v \frac{(-x)_{\max\{0, v-\sigma\}} (-y)_{\max\{0, \sigma-v\}}}{(1)_{|\sigma-v|}} \times \\ &\quad \times \alpha^{|\sigma-v|+n} F(-x + \max\{0, v - \sigma\}, -y + \max\{0, \sigma - v\}, \\ &\quad 1 + |\sigma - v|, \alpha^2). \end{aligned} \quad (31)$$

Применение преобразования Эйлера позволяет переписать (31) в виде

$$\begin{aligned} \gamma_\sigma(n, x, y, v, \alpha) = & \\ = (-1)^v \frac{(-x)_{\max\{0, v-\sigma\}} (-y)_{\max\{0, \sigma-v\}}}{(1)_{|\sigma-v|}} \frac{\alpha^{|\sigma-v|+n}}{(1-\alpha^2)^{-x-y-1}} \times & \\ \times F(1+x+\max\{0, \sigma-v\}, 1+y+\max\{0, v-\sigma\}, & \\ 1+|\sigma-v|, \alpha^2). \end{aligned} \quad (32)$$

В применении к (28) показатель полюса равен

$$-x - y - 1 = n - 1 + k + r + l + s + 2m, \quad (33)$$

что согласуется с закономерностью (41), (42). Использование (30), (32) позволяет эффективно находить коэффициенты (28) даже при больших α .

До сих пор предполагалось, что $a < a'$. В случае $a > a'$ перемена ролей штрихованных и нештрихованных переменных приводит (27) к виду

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{\Delta}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{t=-m}^m \beta_{rsklm(-t)}^{(n)} \left(\frac{a'}{a}, \zeta^{-1}\right) \times \\ \times p^k q^l p'^r q'^s w^{m-t} w'^{m+t}. \end{aligned} \quad (34)$$

Однако для функций (26) и числовых коэффициентов (29) справедливы соотношения

$$\gamma(n, x, y, v, \alpha, \zeta^{-1}) = \gamma(n, y, x, -v, \alpha, \zeta),$$

$$C_{rsklm(-t)}^{(n)} = C_{klrsmt}^{(n)}, \quad C_{lksrmt}^{(n)} = C_{k,rsmt}^{(n)}$$

и поэтому

$$\begin{aligned} \beta_{rsklm(-t)}^{(n)} \left(\frac{a'}{a}, \zeta^{-1}\right) &= \beta_{srllkm(-t)}^{(n)} \left(\frac{a'}{a}, \zeta\right) = \\ &= C_{klrsmt}^{(n)} \gamma\left(r+s+m+t, -\frac{n}{2}-m-k-r, \right. \\ &\quad \left.-\frac{n}{2}-m-l-s, s-r, \frac{a'}{a}, \zeta\right). \end{aligned} \quad (35)$$

Таким образом, разложения (27) и (34) имеют одинаковые числовые коэффициенты (29) и отличаются лишь значениями параметров функции (26).

Применим теперь полученные результаты к разложению силовой функции задачи гелиоцентрического движения N планет. В гелиоцентрических координатах x_i, y_i, z_i ($i = 1, 2, \dots, N$) имеем

$$U_i = \frac{f(m_0 + m_i)}{r_i} + \sum_{j=1}^N {}^{(i)}f_{mj} \left(\frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j}{r_j^3} \right), \quad (36)$$

откуда в новых переменных p_i, q_i, w_i следует

$$U_i = n_i^2 a_i^2 \left\{ \frac{a_i}{r_i} + \mu \sum_{j=1}^N {}^{(i)}\kappa_{ij} \left[\frac{a_i}{\Delta_{ij}} - \frac{1}{2} a_i a_j \frac{(1-p_i)(1-q_j)\zeta_{ij} + (1-q_i)(1-p_j)\zeta_{ij}^{-1} + 2w_i w_j}{r_j^3} \right] \right\}. \quad (37)$$

Здесь обозначено

$$n_i^2 a_i^3 = f(m_0 + m_i),$$

$$\mu \kappa_{ij} = \frac{m_j}{m_0 + m_i},$$

$$\zeta_{ij} = \exp \sqrt{-1} (\lambda_i - \lambda_j).$$

Подстановка разложений (21), (27) и (34) приводит к выражению

$$U_i = n_i^2 a_i^2 \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{klm} p_i^k q_i^l w_i^{2m} + \right. \\ \left. + \mu \sum_{j=1}^N {}^{(i)}\kappa_{ij} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{t=-m}^m B_{klrsm}^{(ij)} p_i^k q_i^l p_j^r q_j^s w_i^{m-t} w_j^{m+t} \right\}. \quad (38)$$

Здесь A_{klm} — числовые коэффициенты

$$A_{klm} = \alpha_{klm}^{(1)}, \quad (39)$$

а коэффициенты $B_{klrsm}^{(ij)}$ — функции от больших полуосей

и разности средних долгот планет:

$$B_{klrsmt}^{(ij)} = \left\{ \frac{a_i}{a_j} \beta_{klrsmt}^{(1)} \left(\frac{a_i}{a_j}, \zeta_{ij} \right) \right\} - \left\{ \beta_{sr l k m(-t)}^{(1)} \left(\frac{a_j}{a_i}, \zeta_{ij} \right) \right\} - \\ - \left(\frac{a_i}{a_j} \right)^2 \alpha_{rsm}^{(1)} \left[\left(m + r + \frac{1}{2} \right) (\delta_{k,0} - \delta_{k,1}) \delta_{l,0} \delta_{t,m} \zeta_{ij} + \right. \\ \left. + \left(m + s + \frac{1}{2} \right) (\delta_{l,0} - \delta_{l,1}) \delta_{k,0} \delta_{t,m} \zeta_{ij}^{-1} - 2m \delta_{k,0} \delta_{l,0} \delta_{t,m-1} \right]. \quad (40)$$

Здесь в главном члене надо пользоваться верхним выражением при $a_i < a_j$ и нижним — при $a_i > a_j$. При выводе выражения косвенного члена было использовано соотношение

$$(r+1) \alpha_{r+1,s,m}^{(1)} = \left(m + r + \frac{1}{2} \right) \alpha_{rsm}^{(1)}.$$

Из разложения (38) с помощью средств пуассоновского и кеплеровского процессора легко получаются использующиеся в современных работах разложения по тем или иным системам элементов, в частности, разложение Дюрье (Duriez, 1977), развитое им при построении общей планетной теории в эллиптических переменных.

Разумеется, отмеченные здесь алгоритмы не исчерпывают всего разнообразия методов разложения планетной пертурбационной функции, предложенных в последние годы. Детальный анализ этих методов содержится в обзоре (Евдокимова и др., 1975).

Некоторые итерационные схемы теории возмущений

§ 1. Итерационные варианты классических методов определения возмущений в прямоугольных координатах

В этом параграфе приводятся разработанные Брукке (Broucke, 1969) итерационные варианты классических методов определения возмущений в прямоугольных координатах. Эти методы не претендуют на построение долгосрочных теорий движения и поэтому в них не предусматривается разделение коротко- и долгопериодических возмущений или устранение вековых членов. Однако эти методы, особенно в их итерационной формулировке, очень удобны для быстрого построения краткосрочных теорий, рассчитанных на представление движения на сравнительно коротком интервале времени (не более нескольких десятков оборотов вокруг центрального тела), но с высокой степенью точности.

В гелиоцентрической системе координат уравнения возмущенного движения тела массы m запишутся в виде

$$\ddot{x} = -\mu \frac{x}{r^3} + X. \quad (1)$$

Пусть ξ — вектор координат невозмущенного кеплеровского движения, описываемого уравнениями

$$\ddot{\xi} = -\mu \frac{\xi}{\rho^3}. \quad (2)$$

В (1) и (2) приняты обозначения

$$\mu = f(1 + m), \quad r = |x|, \quad \rho = |\xi|.$$

Полагая

$$x = \xi + s, \quad (3)$$

имеем для определения вектора поправок s следующее уравнение:

$$\ddot{s} = -\mu \left(\frac{x}{r^3} - \frac{\xi}{\rho^3} \right) + X. \quad (4)$$

Это уравнение может быть заменено эквивалентным уравнением

$$\ddot{\mathbf{s}} + S\mathbf{s} = -\mu \left(\frac{\mathbf{x}}{r^3} - \frac{\xi}{\rho^3} \right) + S(\mathbf{x} - \xi) + \mathbf{X}, \quad (5)$$

где $S = S(t)$ — некоторая квадратная матрица, зависящая только от t и определяемая ниже.

Для решения уравнения (5) применяется итерационный процесс Пикара. Если известно некоторое приближенное значение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, то правая часть (5) становится заданной функцией времени $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t)$. Вектор $\mathbf{s}$ находится тогда путем решения линейного неоднородного уравнения

$$\ddot{\mathbf{s}} + S\mathbf{s} = \mathbf{Q}(t), \quad (6)$$

после чего формула (3) даст новое, более точное значение $\mathbf{x}$. В качестве первого приближения обычно принимается кеплеровское движение $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \xi$. Но можно также за $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ брать итоговые ряды долгосрочной аналитической теории движения тела m . В этом случае рассматриваемые итерационные методы выступают как средство уточнения аналитической теории на некотором ограниченном интервале времени.

Сходимость итерационного процесса Пикара в применении к уравнению (5) гарантируется, как правило, выполнением условия Липшица в типичных задачах небесной механики. Однако скорость сходимости процесса существенно зависит как от величины возмущающего ускорения $\mathbf{X}$, так и от выбора матрицы S . В зависимости от выбора матрицы S Брукке рассматривает четыре, наиболее естественных метода. В трех вариантах матрица S выбирается такой, что решение уравнения (6) без правой части может быть записано в виде

$$\mathbf{s} = \mathbf{K}_1 q_1 + \mathbf{K}_2 q_2, \quad (7)$$

где $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$ — векторные константы, а q_1, q_2 — частные линейно-независимые решения однородного уравнения, причем

$$q_1 \dot{q}_2 - q_2 \dot{q}_1 = 1. \quad (8)$$

По методу вариации произвольных постоянных решение неоднородного уравнения (6) также может быть представлено в форме (7), если в качестве $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$ принять

функции времени, удовлетворяющие уравнениям

$$\dot{K}_1 = -q_2 Q, \quad \dot{K}_2 = q_1 Q. \quad (9)$$

Поэтому, если через $Q^{(m)}$ обозначить результаты подстановки в правую часть уравнения (5) приближенного значения $x^{(m)}(t)$, то общее решение уравнения (6) на m -шаге итерационного процесса запишется в виде

$$s^{(m)} = C_1^{(m)} q_1 + C_2^{(m)} q_2 - q_1 \int_0^t q_2 Q^{(m)} dt + q_2 \int_0^t q_1 Q^{(m)} dt, \quad (10)$$

где $C_1^{(m)}, C_2^{(m)}$ — произвольные постоянные, определяемые из условий конкретной задачи. Более точное значение $x^{(m+1)}(t)$ в соответствии с (3) будет

$$x^{(m+1)} = \xi + s^{(m)}. \quad (11)$$

В первом методе выбирается

$$S = 0, \quad (I)$$

что приводит к значениям

$$q_1 = 1, \quad q_2 = t. \quad (12)$$

Два интеграла в формуле (10) могут быть объединены в этом случае в один двойной:

$$-\int_0^t t Q^{(m)} dt + t \int_0^t Q^{(m)} dt = \int_0^t \int_0^t Q^{(m)} dt dt. \quad (13)$$

Этот метод является наиболее простым из рассматриваемых здесь методов. Во втором методе

$$S = n^2 I, \quad (II)$$

где I — единичная матрица, а n — среднее движение тела m . Поэтому, если через λ обозначить среднюю долготу тела

$$\lambda = nt + \varepsilon,$$

то

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \cos \lambda, \quad q_2 = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \lambda. \quad (14)$$

В третьем методе S снова имеет диагональную структуру, но является функцией времени

$$S = \frac{\mu}{\rho^3} I. \quad (III)$$

В этом случае

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} (\cos E - e), \quad q_2 = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin E, \quad (15)$$

где e — эксцентриситет, а E — эксцентрическая аномалия кеплеровского движения, удовлетворяющая соотношению

$$\dot{E} = \frac{n}{1 - e \cos E}. \quad (16)$$

В этом методе кеплеровское решение ξ также выражается через q_1, q_2 :

$$\xi = \sqrt{n} a (A_1 q_1 + \sqrt{1 - e^2} A_2 q_2), \quad (17)$$

где a — большая полуось орбиты, а A_1, A_2 — единичные ортогональные векторы.

Метод III, очевидно, представляет собой итерационный вариант классических методов Энке и Хилла.

В методе II и III два интеграла в формуле (10) могут быть записаны в форме одного интеграла с помощью известного приема Ганзена:

$$-q_1 \int_0^t q_2 Q^{(m)} dt + q_2 \int_0^t q_1 Q^{(m)} dt = \int_0^t (\tilde{q}_2 q_1 - \tilde{q}_1 q_2) Q^{(m)} dt. \quad (18)$$

В методе II

$$\tilde{q}_2 q_1 - \tilde{q}_1 q_2 = \frac{1}{n} \sin(\tilde{\lambda} - \lambda),$$

а в методе III

$$\tilde{q}_1 q_2 - \tilde{q}_2 q_1 = \frac{1}{n} [\sin(\tilde{E} - E) - e(\sin \tilde{E} - \sin E)].$$

Величина, отмеченная тильдой, считается постоянной при интегрировании, а после интегрирования становится прежней функцией t .

В четвертом методе Брукке, являющемся модификацией известного метода Брауэра, матрица S полагается равной

$$S = \mu \operatorname{grad} \left(\frac{\xi}{\rho^3} \right) \quad (IV)$$

или в покомпонентной записи

$$S = \|S_{ij}\|, \quad S_{ij} = \mu \left(\frac{\delta_{ij}}{\rho^3} - 3 \frac{\xi_i \xi_j}{\rho^5} \right).$$

При таком выборе S уравнение (6) без правой части соответствует уравнениям в вариациях для системы (2). Поэтому, если через $c_1, \dots, c_6$ обозначить произвольные постоянные общего решения системы (2):

$$\xi = \xi(t, c_1, \dots, c_6), \quad \dot{\xi} = \dot{\xi}(t; c_1, \dots, c_6), \quad (19)$$

то общее решение уравнений в вариациях будет

$$s = \sum_{\alpha=1}^6 K_{\alpha} \frac{\partial \xi}{\partial c_{\alpha}}. \quad (20)$$

Это выражение даст решение неоднородного уравнения (6), если функции $K_{\alpha}(t)$ подчинить условиям

$$\sum_{\alpha=1}^6 \dot{K}_{\alpha} \frac{\partial \xi}{\partial c_{\alpha}} = 0, \quad \sum_{\alpha=1}^6 \dot{K}_{\alpha} \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial c_{\alpha}} = Q, \quad (21)$$

откуда следует

$$\dot{K}_{\alpha} = \frac{\partial c_{\alpha}}{\partial \dot{\xi}} Q. \quad (22)$$

Таким образом, итерационная формула (10) заменяется в методе IV следующей:

$$s^{(m)} = \sum_{\alpha=1}^6 \frac{\partial \xi}{\partial c_{\alpha}} \left(C_{\alpha}^{(m)} + \int_0^t \frac{\partial c_{\alpha}}{\partial \dot{\xi}} Q^{(m)} dt \right). \quad (23)$$

В конкретных реализациях метода Брауэра эта формула встречается в самых разнообразных формах в зависимости от выбора параметров c_{α} (те или иные элементы или начальные координаты и скорости), независимой переменной (время t , эксцентрисическая или истинная аномалия), произвольных постоянных $C_{\alpha}^{(m)}$ и способа выражения производных $\frac{\partial c_{\alpha}}{\partial \dot{\xi}}$ из уравнений (19). Сходимость итераций в методе (IV) является наилучшей по сравнению с методами (I) — (III). Однако в методе (IV) соответственно больше и время выполнения одной итерации, так что в конечном итоге все методы (I) — (IV) оказываются приблизительно равными.

Практические применения методов (I) — (IV) существенно облегчаются при наличии системы подпрограмм для

операций над рядами определенного вида. Кроме того, в методах (III) — (IV) целесообразно использование кеплеровского процессора. Обычно краткосрочные теории движения небесных тел строятся с помощью рядов следующих типов:

- 1) ряды полиномов Чебышева по времени t ;
- 2) полиномиально-тригонометрические ряды по t ;
- 3) ряды смешанного вида по кратностям истинной или эксцентрической аномалии.

Наиболее компактные теории получаются с помощью рядов полиномов Чебышева. Традиционные астрономические эфемериды сейчас все чаще заменяются рядами полиномов Чебышева. Возникающие при этом задачи и методы их решения описаны в работах (Deprit et al., 1975; Deprit et al., 1978). Итерационное построение рядов полиномов Чебышева для задачи (1) проще всего производить методом (I). Связанные с этим операции над полиномами Чебышева не вызывают никаких затруднений (Broucke, 1973; Stumpff, 1974, § 248). Аналогичный алгоритм был развит Шапроном (Chapront, 1977) в задаче представления движения больших планет в кеплеровских элементах. Шапрон записывает уравнения движения больших планет в элементах

$$\dot{X} = F(X),$$

где X и F — векторы, преобразует рассматриваемый интервал времени $t_0 \leq t \leq t_1$ к интервалу $-1 \leq x \leq 1$ путем замены независимой переменной

$$t = \frac{t_1 - t_0}{2} x + \frac{t_1 + t_0}{2},$$

разлагает правую часть в ряд по полиномам Чебышева, а затем интегрированием этого ряда получает искомую функцию X . Далее процесс повторяется, пока не будет достигнута необходимая точность. Произвольные постоянные, появляющиеся при интегрировании рядов полиномов Чебышева, определяются по начальным значениям вектора X .

Отметим еще раз, что ряды полиномов Чебышева можно строить и без итераций, если привести уравнения движения планет к полиномиальной форме и искать решение в форме тейлоровских разложений с их последующим свертыванием в чебышевские разложения (§ 1 главы 4).

Эффективное вычисление функций, задаваемых рядами полиномов Чебышева достигается за счет известного алгоритма Кленшоу. Действительно, если

$$f(x) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(x)$$

— заданное разложение функции $f(x)$ в ряд по функциям $T_n(x)$, определяемых рекуррентными соотношениями

$$T_{n+2} + \alpha_{n+1} T_{n+1} + \beta_n T_n = 0, \quad (n \geq 0),$$

$$T_1 + \alpha_0 T_0 = 0,$$

то с помощью рекуррентной последовательности

$$b_{N+2} = b_{N+1} = 0,$$

$$b_n = a_n - \alpha_n b_{n+1} - \beta_n b_{n+2}$$

$$(n = N, N-1, \dots, 1, 0)$$

получаем

$$f(x) = b_0 T_0.$$

Для полиномов Чебышева

$$\alpha_n = -(2 - \delta_{n,0})x, \quad \beta_n = 1, \quad T_0 = 1,$$

причем производная $f'(x)$ чебышевского разложения также может быть вычислена по аналогичному алгоритму (Deprit et al., 1978).

Кроме рядов полиномов Чебышева очень распространенной является также полиномиально-тригонометрическая форма представления решения задачи (I). Наиболее простой путь получения подобного решения состоит в применении методов (II) или (III) с использованием кеплеровского процессора в форме рядов.

Использование в методах (III) или (IV) в качестве независимой переменной не времени, а истинной или эксцентрической аномалии уменьшает, как правило, число членов в результирующих рядах. Однако это повышает трудоемкость соответствующих операций. Наиболее сложной является операция интегрирования типа

$$I = \int F(\lambda) G(\lambda') dt, \quad (24)$$

где F и G — неявные функции от средних долгот $\lambda (= nt + \epsilon)$ и $\lambda' (= n't + \epsilon')$ возмущаемого и возмущающего те-

ла соответственно. В спутниковом случае, когда средние движения n и n' удовлетворяют неравенству $n' \ll n$, целесообразно интегрирование по частям

$$I = \frac{1}{n} F^{(-1)}(\lambda) G(\lambda') - \frac{n'}{n} \int F^{(-1)}(\lambda) G^{(1)}(\lambda') dt, \quad (25)$$

где

$$F^{(-1)}(\lambda) = \int F(\lambda) d\lambda, \quad G^{(1)}(\lambda') = \frac{dG(\lambda')}{d\lambda'}.$$

Продолжая этот процесс, имеем

$$I = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \left(\frac{n'}{n}\right)^{k-1} F^{(-k)}(\lambda) G^{(k-1)}(\lambda') + \\ + (-1)^m \left(\frac{n'}{n}\right)^m \int F^{(-m)}(\lambda) G^{(m)}(\lambda') dt, \quad (26)$$

где

$$F^{(-k)}(\lambda) = \int F^{(-k+1)}(\lambda) d\lambda, \quad G^{(k)}(\lambda') = \frac{dG^{(k-1)}(\lambda')}{d\lambda'}, \\ k = 1, 2, \dots, m.$$

При достаточно большом m последний член в формуле (26) будет давать пренебрежимо малый вклад, так что интеграл I выразится в конечном виде. Для вычисления интегралов $F^{(-k)}(\lambda)$ потребуется кеплеровский процессор в замкнутой форме, так как $F(\lambda)$ обычно задается явно посредством истинной или эксцентрической аномалии. Алгоритм (24) — (26) был с успехом применен А. В. Егоровой (1960) в задаче об определении лунно-солнечных возмущений в движении ИСЗ.

В планетных задачах, когда отношение n'/n нельзя считать малым, приходится использовать другую методику. Пусть, например, требуется вычислить интеграл типа

$$I = \int f(s, s') ds, \quad (27)$$

где s, s' — истинные или эксцентрические аномалии возмущаемого и возмущающего тела соответственно. Функция $f(s, s')$ обычно допускает представление в виде двойного ряда Фурье по s и s' , однако это не помогает интегрированию, так как s' достаточно сложно выражается через s . Эта трудность может быть преодолена с помощью искус-

ного приема, принадлежащего Ганзену. Пусть M , M' — средние аномалии тел, M_0 , M'_0 — их начальные значения. Тождество

$$M' = \frac{n'}{n} s + M'_0 - \frac{n'}{n} M_0 - \frac{n'}{n} (s - M) \quad (28)$$

путем введения новой переменной

$$s_1 = M' + \frac{n'}{n} (s - M) \quad (29)$$

и константы

$$c = M'_0 - \frac{n'}{n} M_0 \quad (30)$$

записывается в виде

$$s_1 = \frac{n'}{n} s + c. \quad (31)$$

При фиксированном s значение s' однозначно определяет соответствующее значение s_1 . Поэтому функцию $f(s, s')$ можно рассматривать как некоторую функцию $g(s, s_1)$, разложимую в двойной ряд Фурье по s и s_1 . Однако в силу (31) s_1 является линейной функцией от s , так что вычисление интеграла I осуществляется теперь без труда (разумеется, при отсутствии соизмеримости между n и n'). В классическом варианте метода Ганзена в качестве s и s' выбираются эксцентрические аномалии E и E' соответственно и тогда формулы (29) — (31) принимают вид

$$E_1 = E' - e' \sin E' + \frac{n'}{n} e \sin E, \quad (32)$$

$$c = E'_0 - e' \sin E'_0 - \frac{n'}{n} (E_0 - e \sin E_0), \quad (33)$$

$$E_1 = \frac{n'}{n} E + c. \quad (34)$$

Все фигурирующие здесь элементы имеют постоянные кеплеровские значения.

Эту же методику можно применять и для определения возмущений, вызываемых тессеральными гармониками потенциала Земли в движении ИСЗ. Величина s' в этом случае просто совпадает с физическим временем t .

Разложение функции $f(s, s')$ в двойной ряд Фурье по s, s_1 производится либо численно с помощью гармонического анализа, либо аналитически с использованием рядов бесселевых функций.

§ 2. Итерационное построение промежуточных орбит в теории движения больших планет в прямоугольных координатах

В качестве примера применения итерационной методики рассмотрим задачу движения N планет. Решение этой задачи будем искать методом типа (II), но во вращающихся координатах. Исходные уравнения в прямоугольных гелиоцентрических координатах $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) имеют вид

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial U_i}{\partial \mathbf{r}_i} \quad (35)$$

с силовой функцией

$$U_i = \frac{f(1+m_i)}{r_i} + \sum_{j=1}^N {}^{(i)}f m_j \left(\frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j}{r_j^3} \right). \quad (36)$$

Вместо координат x_i, y_i, z_i введем, как и в предыдущей главе, безразмерные величины — комплексные переменные p_i и вещественные переменные w_i , характеризующие собой отклонения реальных движений планет от плоских круговых движений с радиусами a_i и средними движениями n_i . Тогда

$$\left. \begin{aligned} x_i + \sqrt{-1} y_i &= a_i (1 - p_i) \exp \sqrt{-1} \lambda_i, \\ z_i &= a_i w_i, \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

где λ_i — средние долготы планет

$$\lambda_i = n_i t + \varepsilon_i, \quad (38)$$

а n_i и a_i связаны между собой по третьему закону Кеплера

$$n_i^2 a_i^3 = f(1+m_i). \quad (39)$$

Выделяя в правых частях (35) члены, линейные по p_i, w_i и обозначая $q_i = \bar{p}_i$ (черта сверху — символ комплекс-

по-сопряженной величины), получаем уравнения

$$\left. \begin{aligned} \ddot{p}_i + 2\sqrt{-1}n_i\dot{p}_i - \frac{3}{2}n_i^2(p_i + q_i) &= n_i^2P_i, \\ \ddot{w}_i + n_i^2w_i &= n_i^2W_i \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

с правыми частями

$$P_i = -1 - \frac{1}{2}p_i - \frac{3}{2}q_i + \frac{2}{n_i^2a_i^2} \frac{\partial U_i}{\partial q_i}, \quad (41)$$

$$W_i = w_i + \frac{1}{n_i^2a_i^2} \frac{\partial U_i}{\partial w_i}. \quad (42)$$

В задаче о движении больших планет правые части (41), (42) являются малыми более высокого порядка, чем сами отклонения p_i , w_i , так как их невозмущенные части содержат члены не ниже второй степени относительно p_i , w_i , а возмущенные части пропорциональны малому параметру μ , имеющему порядок отношения масс планет к массе Солнца ($\mu = 0,001$). Поэтому (40) можно решать итерационными методами типа Пикара.

Опуская временно индекс i и полагая в (40) $P = W = 0$, получаем однородную систему с общим решением

$$p = A \exp \sqrt{-1}\lambda - 3\bar{A} \exp(-\sqrt{-1}\lambda) + \sqrt{-1}n(B + 3Ct) - 2C, \quad (43)$$

$$w = D \exp \sqrt{-1}\lambda + \bar{D} \exp(-\sqrt{-1}\lambda), \quad (44)$$

$$\dot{p} = \sqrt{-1}n[A \exp \sqrt{-1}\lambda + 3\bar{A} \exp(-\sqrt{-1}\lambda) + 3C], \quad (45)$$

$$\dot{w} = \sqrt{-1}n[D \exp \sqrt{-1}\lambda - \bar{D} \exp(-\sqrt{-1}\lambda)]. \quad (46)$$

Здесь B , C — вещественные, а A , D — комплексные постоянные. По методу вариации произвольных постоянных частное решение неоднородной системы $P \neq 0$, $W \neq 0$ получится из (43), (44), если за A , B , C , D принять следующие функции времени:

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{-1}n \int (3\bar{P} - P) \exp(-\sqrt{-1}\lambda) dt, \quad (47)$$

$$B = - \int \left[P + \bar{P} + \frac{3}{2}\sqrt{-1}n(P - \bar{P})t \right] dt, \quad (48)$$

$$C = \frac{1}{2}\sqrt{-1}n \int (P - \bar{P}) dt, \quad (49)$$

$$D = - \frac{1}{2}\sqrt{-1}n \int W \exp(-\sqrt{-1}\lambda) dt. \quad (50)$$

В общем случае решение уравнений (40) для p_i , w_i имеет форму полиномиально-экспоненциальных рядов типа

$$S = \sum S_k(t) \exp \sqrt{-1} (k\lambda), \quad (51)$$

где k — мульти-индекс $k = (k_1, k_2, \dots, k_N)$, λ — вектор с составляющими $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$, а $(k\lambda) = k_1\lambda_1 + \dots + k_N\lambda_N$. $S_k(t)$ — полиномы от t с комплексными коэффициентами. Появление этих полиномов обусловлено вековым изменением перигелиев и узлов планетных орбит. При взятии квадратуры (49) к C необходимо добавить константу, равную $2P^*/3$, где P^* — постоянная (не зависящая от времени) часть P . Такой выбор устраняет появление в (43) фиктивных вековых членов, не связанных с физической сущностью проблемы. Этот выбор возможен при условии, когда P^* — вещественная постоянная, что автоматически выполняется в задачах небесной механики.

Восстанавливая теперь индекс i и полагая

$$P_i = P_i^* + P_i', \quad (52)$$

где P_i^* — постоянная часть P_i , запишем окончательные формулы для итерационного определения p_i , w_i в виде

$$\begin{aligned} p_i = \sqrt{-1} n_i \left[\frac{3}{4} \exp(-\sqrt{-1} \lambda_i) \int (3P_i' - \bar{P}_i') \exp \sqrt{-1} \lambda_i dt + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \exp \sqrt{-1} \lambda_i \int (3\bar{P}_i' - P_i') \exp(-\sqrt{-1} \lambda_i) dt - 2 \int P_i' dt \right] - \\ - \frac{3}{2} n_i^2 \iint (P_i' - \bar{P}_i') dt dt - \frac{1}{3} P_i^* + \bar{p}_i, \quad (53) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_i = \frac{1}{2} \sqrt{-1} n_i [\exp(-\sqrt{-1} \lambda_i) \int W_i \exp \sqrt{-1} \lambda_i dt - \\ - \exp \sqrt{-1} \lambda_i \int W_i \exp(-\sqrt{-1} \lambda_i) dt] + \tilde{w}_i. \quad (54) \end{aligned}$$

В случае необходимости производные $\dot{p}_i$, $\dot{w}_i$ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \dot{p}_i = n_i^2 \left[\frac{3}{4} \exp(-\sqrt{-1} \lambda_i) \int (3P_i' - \bar{P}_i') \exp \sqrt{-1} \lambda_i dt - \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \exp \sqrt{-1} \lambda_i \int (3\bar{P}_i' - P_i') \exp(-\sqrt{-1} \lambda_i) dt - \right. \\ \left. - \frac{3}{2} \int (P_i' - \bar{P}_i') dt \right] + \dot{\bar{p}}_i, \quad (55) \end{aligned}$$

$$\dot{w}_i = \frac{1}{2} n_i^2 \left[\exp(-\sqrt{-1}\lambda_i) \int W_i \exp \sqrt{-1}\lambda_i dt + \right. \\ \left. + \exp \sqrt{-1}\lambda_i \int W_i \exp(-\sqrt{-1}\lambda_i) dt \right] + \dot{\tilde{w}}_i. \quad (56)$$

Условие

$$P_i^* = \bar{P}_i^*$$

может служить контрольным соотношением на каждом шаге итерационного процесса.

Функции $\bar{p}_i$, $\tilde{w}_i$, $\dot{\bar{p}}_i$, $\dot{\tilde{w}}_i$ в правых частях (53) — (56) представляют собой добавки за счет общего решения (43) — (46) однородной системы, причем в этих добавках постоянные C_i во избежание появления фиктивных вековых членов надо положить равными нулю, постоянные B_i также можно опустить, а постоянные A_i и D_i вместе с величинами n_i , ε_i дают полный набор $6N$ вещественных постоянных, характеризующих начальные условия в задаче движения N планет. Из сопоставления с решением в кеплеровских элементах следует, что в качестве первоначальной оценки постоянных A_i , D_i можно принять функции

$$A = -\frac{1}{2} e \exp(-\sqrt{-1}\pi), \quad D = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \sin i \exp(-\sqrt{-1}\Omega),$$

где e , i , π , Ω — это эксцентриситет, наклон, долгота перигелия и долгота узла рассматриваемой планеты.

При наличии системы подпрограмм для действий с рядами типа (51) проведение итераций по формулам (53), (54) не вызывает никаких трудностей. Однако, как и в каждом итерационном процессе особенное внимание должно быть уделено максимально точному вычислению правых частей. Поэтому на этом вопросе целесообразно остановиться подробнее.

В соответствии с (41), (42) и (36), (37) имеем

$$P_i = -1 - \frac{1}{2} p_i - \frac{3}{2} q_i + (1 - p_i) \left(\frac{a_i}{r_i} \right)^3 + \mu \sum_{j=1}^N {}^{(i)} P_{ij}, \quad (57)$$

$$W_i = w_i - w_i \left(\frac{a_i}{r_i} \right)^3 + \mu \sum_{j=1}^N {}^{(i)} W_{ij}, \quad (58)$$

где

$$P_{ij} = \kappa_{ij} \left\{ \left(\frac{a_i}{a_{ij}} \right)^2 \left[\frac{a_i}{a_{ij}} (1 - p_i) - \frac{a_j}{a_{ij}} (1 - p_j) \zeta_{ij}^{-1} \right] \left(\frac{a_{ij}}{\Delta_{ij}} \right)^3 + \right. \\ \left. + \zeta_{ij}^{-1} \left(\frac{a_i}{a_j} \right)^2 (1 - p_j) \left(\frac{a_j}{r_j} \right)^3 \right\}, \quad (59)$$

$$W_{ij} = -\kappa_{ij} \left\{ \left(\frac{a_i}{a_{ij}} \right)^2 \left(\frac{a_i}{a_{ij}} w_i - \frac{a_j}{a_{ij}} w_j \right) \left(\frac{a_{ij}}{\Delta_{ij}} \right)^3 + \left(\frac{a_i}{a_j} \right)^2 w_j \left(\frac{a_j}{r_j} \right)^3 \right\}. \quad (60)$$

Здесь положено

$$\mu \kappa_{ij} = \frac{m_j}{1 + m_i}, \\ \zeta_{ij} = \exp \sqrt{-1} (\lambda_i - \lambda_j), \\ a_{ij} = \max \{a_i, a_j\}.$$

Величины a_{ij} введены для того, чтобы по возможности сделать безразмерные множители в (59), (60) меньшими единицы.

Во избежание потери точности в формулах (57), (58) следует прежде всего преобразовать кеплеровские члены. Переписывая формулу

$$\left(\frac{r_i}{a_i} \right)^2 = (1 - p_i)(1 - q_i) + w_i^2$$

в виде

$$\left(\frac{r_i}{a_i} \right)^2 = 1 - S_i,$$

$$S_i = p_i + q_i - (p_i q_i + w_i^2), \quad (61)$$

находим для любого натурального n

$$\left(\frac{a_i}{r_i} \right)^n = 1 + V_i^{(n)}, \quad (62)$$

где

$$V_i^{(n)} = \frac{n}{2} S_i + T_i^{(n)} \quad (63)$$

и

$$T_i^{(n)} = (1 - S_i)^{-n/2} - 1 - \frac{n}{2} S_i = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\left(\frac{n}{2} \right)_k}{(1)_k} (S_i)^k. \quad (64)$$

Поэтому формулы для фактического вычисления правых частей P_i , W_i принимают вид

$$P_i = -\frac{3}{2}(p_i q_i + w_i^2) - p_i V_i^{(3)} + T_i^{(3)} + \mu \sum_{j=1}^N {}^{(i)}P_{ij}, \quad (65)$$

$$W_i = -w_i V_i^{(3)} + \mu \sum_{j=1}^N {}^{(i)}W_{ij}. \quad (66)$$

При вычислении P_{ij} , W_{ij} основная трудность состоит в нахождении разложения величины $(a_{ij}/\Delta_{ij})^3$ по заданному разложению величины

$$\left(\frac{\Delta_{ij}}{a_{ij}}\right)^2 = \left[\frac{a_i}{a_{ij}}(1-p_i) - \frac{a_j}{a_{ij}}(1-p_j)\zeta_{ij}^{-1}\right] \left[\frac{a_i}{a_{ij}}(1-q_i) - \frac{a_j}{a_{ij}}(1-q_j)\zeta_{ij}\right] + \left(\frac{a_i}{a_{ij}}w_i - \frac{a_j}{a_{ij}}w_j\right)^2.$$

Представляя это выражение в виде

$$\left(\frac{\Delta_{ij}}{a_{ij}}\right)^2 = \left(\frac{\Delta_{ij}^{(0)}}{a_{ij}}\right)^2 (1 - U_{ij}), \quad (67)$$

находим для любого натурального n

$$\left(\frac{a_{ij}}{\Delta_{ij}}\right)^n = \left(\frac{a_{ij}}{\Delta_{ij}^{(0)}}\right)^n (1 + V_{ij}^{(n)}), \quad (68)$$

где

$$V_{ij}^{(n)} = (1 - U_{ij})^{-n/2} - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n}{2}\right)_k}{(1)_k} (U_{ij})^k. \quad (69)$$

Величина $\Delta_{ij}^{(0)}$ должна быть выбрана так, чтобы обеспечить малость U_{ij} по сравнению с единицей и чтобы разложения произвольных отрицательных степеней этой величины находились элементарным путем. В типичном планетном случае этим условиям удовлетворяет выбор величины $\Delta_{ij}^{(0)}$, соответствующей плоским круговым движениям планет:

$$\left(\frac{\Delta_{ij}^{(0)}}{a_{ij}}\right)^2 = \left(\frac{a_i}{a_{ij}} - \frac{a_j}{a_{ij}}\zeta_{ij}^{-1}\right) \left(\frac{a_i}{a_{ij}} - \frac{a_j}{a_{ij}}\zeta_{ij}\right). \quad (70)$$

С помощью функции $\gamma(n, x, y, v, \alpha, \zeta)$, определяемой формулой (26) главы 6, имеем

$$\left(\frac{a_{ij}}{\Delta_{ij}^{(0)}}\right)^n = \gamma\left(0, -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}, 0, \frac{\min\{a_i, a_j\}}{\max\{a_i, a_j\}}, \zeta_{ij}\right), \quad (71)$$

так что коэффициенты этого разложения в экспоненциальный ряд по ζ_{ij} непосредственно вычисляются по (31) или (32) главы 6. Выражение (71) является лишь модифицированной формой записи классического разложения величины $(\Delta_{ij}^{(0)})^{-n}$ с помощью коэффициентов Лапласа. Выбор (70) влечет за собой значение

$$\begin{aligned} U_{ij} = & \left(\frac{a_{ij}}{\Delta_{ij}^{(0)}}\right)^2 \left\{ \left(\frac{a_j}{a_{ij}} - \frac{a_i}{a_{ij}} \zeta_{ij}^{-1}\right) \left(\frac{a_j}{a_{ij}} p_j - \frac{a_i}{a_{ij}} p_i \zeta_{ij}\right) + \right. \\ & + \left(\frac{a_j}{a_{ij}} - \frac{a_i}{a_{ij}} \zeta_{ij}\right) \left(\frac{a_j}{a_{ij}} q_j - \frac{a_i}{a_{ij}} q_i \zeta_{ij}^{-1}\right) - \\ & - \left[\left(\frac{a_j}{a_{ij}} p_j - \frac{a_i}{a_{ij}} p_i \zeta_{ij}\right) \left(\frac{a_j}{a_{ij}} q_j - \frac{a_i}{a_{ij}} q_i \zeta_{ij}^{-1}\right) + \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{a_j}{a_{ij}} w_j - \frac{a_i}{a_{ij}} w_i\right)^2 \right] \right\}. \quad (72) \end{aligned}$$

Таким образом, применение разложений (62) и (68), (71) при соответствующих значениях n полностью решает вопрос о вычислении (57), (58) в типичном планетном случае.

В случае $r_i \ll r_j$ (в конкретном приложении к большим планетам в случае $r_i/r_j < 0,1$) в выражениях (57), (58) целесообразно произвести преобразование Энке. В этом случае $a_{ij} = a_j$ и в качестве $\Delta_{ij}^{(0)}$ можно принять

$$\Delta_{ij}^{(0)} = r_j. \quad (73)$$

Тогда

$$\begin{aligned} U_{ij} = & \left\{ \frac{a_i}{a_j} [(1-p_i)(1-q_i) \zeta_{ij} + (1-p_j)(1-q_i) \zeta_{ij}^{-1} + 2w_i w_j] - \right. \\ & \left. - \left(\frac{a_i}{a_j}\right)^2 \left(\frac{r_i}{a_i}\right)^2 \right\} \left(\frac{a_j}{r_j}\right)^2. \quad (74) \end{aligned}$$

Выражения (57), (58) заменяются при этом следующими:

$$P_{ij} = \kappa_{ij} \left(\frac{a_i}{a_j} \right)^2 \left(\frac{a_j}{r_j} \right)^3 \left\{ \frac{a_i}{a_j} (1 - p_i) + \right. \\ \left. + \left[\frac{a_i}{a_j} (1 - p_i) - (1 - p_j) \xi_{ij}^{-1} \right] V_{ij}^{(3)} \right\}, \quad (75)$$

$$W_{ij} = -\kappa_{ij} \left(\frac{a_i}{a_j} \right)^2 \left(\frac{a_j}{r_j} \right)^3 \left[\frac{a_i}{a_j} w_i + \left(\frac{a_i}{a_j} w_i - w_j \right) V_{ij}^{(3)} \right]. \quad (76)$$

Таким образом и в этом случае вычисление правых частей по формулам (75), (76) с использованием (62), (69) и (74) производится без потери точности.

Остановимся теперь на применениях итерационного алгоритма (53), (54).

Если начать процесс со значений $p_i^{(0)} = \tilde{p}_i = 0$, $w_i^{(0)} = \tilde{w}_i = 0$, то и после завершения итераций будем иметь $w_i = 0$, а величины p_i представятся чисто экспоненциальными рядами относительно разностей средних долгот планет (ряды (51) с числовыми вещественными коэффициентами S_k и с условием $k_1 + \dots + k_N = 0$ в каждом члене). Это решение, соответствующее плоским квазипериодическим движениям планет, строилось в работах (Brumberg, 1970; Брумберг, Евдокимова, Скрипниченко, 1975) двумя различными методами, отличающимися между собой лишь способом вычисления правых частей (разложение в степенные ряды и итерационная методика). В обоих случаях результирующие ряды для p_i строились почленно путем применения к (40) метода неопределенных коэффициентов. Использование (53) полностью исключает операции с отдельными членами рядов и повышает эффективность итерационного процесса.

Кроме того, итерации по формулам (53), (54) позволяют уточнить числовые ряды общей планетной теории (Brumberg, Chapront, 1973; Brumberg, Evdokimova, Skripnichenko, 1978). Эти ряды имеют вид (51) и получают-ся в результате подстановки в буквенные ряды Пуассона общей планетной теории численных значений элементов орбит. Неизбежное пренебрежение членами высокого порядка относительно возмущающих масс, членами высоких степеней относительно эксцентриситетов и наклонов, а также неизбежно заниженные границы допустимых зна-

чений экспоненциальных индексов обуславливают методические погрешности рядов. Итерации (53), (54) приводят к более точным значениям этих рядов.

§ 3. Итерации в задаче двух тел

В качестве еще одного приложения итерационного процесса (53), (54) отметим построение буквенных разложений координат задачи двух тел по степеням переменных типа Лапласа. В главе 2 подобные разложения (43), (44) строились путем преобразования тригонометрических разложений. Опуская ненужный теперь индекс i , запишем искомые разложения в виде

$$p = \sum p_{pqrs} a^p \bar{a}^q b^r \bar{b}^s, \quad (77)$$

$$w = \sum w_{pqrs} a^p \bar{a}^q b^r \bar{b}^s, \quad (78)$$

где

$$a = \alpha \exp \sqrt{-1} \lambda, \quad b = \beta \exp \sqrt{-1} \lambda, \quad (79)$$

α, β — элементы типа Лапласа. Суммирование в (77), (78) производится по всем неотрицательным значениям индексов p, q, r, s , сумма которых больше или равна единице. При итерационном построении рядов (77), (78) по алгоритму (53), (54) нужно лишь воспользоваться следующими формулами интегрирования:

$$\int a^p \bar{a}^q b^r \bar{b}^s dt = \frac{1}{\sqrt{-1}n(p-q+r-s)} a^p \bar{a}^q b^r \bar{b}^s, \quad p-q+r-s \neq 0,$$

$$\iint a^p \bar{a}^q b^r \bar{b}^s dt dt = \frac{-1}{n^2(p-q+r-s)^2} a^p \bar{a}^q b^r \bar{b}^s, \quad p-q+r-s \neq 0,$$

$$\int a^p \bar{a}^q b^r \bar{b}^s \exp \sqrt{-1} \lambda dt = \frac{1}{\sqrt{-1}n(p-q+r-s+1)} \times \\ \times a^p \bar{a}^q b^r \bar{b}^s \exp \sqrt{-1} \lambda, \quad p-q+r-s+1 \neq 0.$$

Приведем результаты первых шагов этого алгоритма. По начальным значениям

$$p^{(1)} = \tilde{p} = -\frac{1}{2}a + \frac{3}{2}\bar{a}, \quad w^{(1)} = \tilde{w} = b + \bar{b}$$

по формулам (64) — (66) вычисляем значения правых частей на порядок точнее:

$$P^{(1)} = \frac{15}{4} a^2 - \frac{3}{2} a\bar{a} + \frac{3}{4} \bar{a}^2 - \frac{3}{2} (b^2 + 2b\bar{b} + \bar{b}^2),$$

$$W^{(2)} = -\frac{3}{2} (ab + \bar{a}b + a\bar{b} + \bar{a}\bar{b}).$$

В результате интегрирования получаем координаты p , w с учетом членов второй степени. Эти члены второй степени будут:

$$p^{(2)} = -\frac{3}{8} a^2 + \frac{1}{2} a\bar{a} - \frac{1}{8} \bar{a}^2 + b\bar{b} + \bar{b}^2,$$

$$w^{(2)} = \frac{1}{2} ab - \frac{3}{2} \bar{a}b - \frac{3}{2} a\bar{b} + \frac{1}{2} \bar{a}\bar{b}.$$

Продолжая, находим

$$p^{(3)} = \frac{89}{16} a^3 - \frac{27}{16} a^2\bar{a} - \frac{9}{16} a\bar{a}^2 + \frac{11}{16} \bar{a}^3 - \frac{3}{4} ab^2 +$$

$$+ \frac{3}{4} a\bar{b}^2 + \frac{9}{4} \bar{a}b^2 - \frac{9}{4} \bar{a}\bar{b}^2,$$

$$W^{(3)} = -3a^2b - 3\bar{a}^2\bar{b}.$$

Отсюда

$$p^{(3)} = -\frac{1}{3} a^3 + \frac{9}{8} a\bar{a}^2 - \frac{1}{24} \bar{a}^3 - \frac{3}{2} a\bar{b}^2 + \frac{1}{2} \bar{a}\bar{b}^2,$$

$$w^{(3)} = \frac{3}{8} a^2b + \frac{3}{8} \bar{a}^2\bar{b}$$

и так далее.

Как и в случае определения промежуточного квазипериодического решения, этот алгоритм более прост по своей реализации, чем алгоритм почленного определения коэффициентов рядов (77), (78), применявшийся в работе (Brumberg, Chapront, 1973). Связь констант α , β и ε с кеплеровскими элементами легко устанавливается путем сопоставления (77), (78) с классическими разложениями с использованием средств пуассоновского или полиномиального процессора (Brumberg, Evdokimova, Skripnichenko, 1978; Евдокимова, 1977). Действительно, с одной стороны имеются разложения (77), (78), которые можно переписать в виде

$$p = -\frac{1}{2} a + \frac{3}{2} \bar{a} + \delta p(a, \bar{a}, b, \bar{b}), \quad (80)$$

$$w = b + \bar{b} + \delta w(a, \bar{a}, b, \bar{b}), \quad (81)$$

где δp , δw — ряды по степеням a , $\bar{a}$, b , $\bar{b}$, начинающиеся с членов второго порядка. С другой стороны, кеплеровский процессор, описанный в главе 2, позволяет получить разложения

$$(a \exp \sqrt{-1}\Lambda)^{-1} (x + \sqrt{-1}y) = 1 + \frac{1}{2} K - \frac{3}{2} \bar{K} + S(K, \bar{K}, L, \bar{L}), \quad (82)$$

$$a^{-1}z = L + \bar{L} + T(K, \bar{K}, L, \bar{L}), \quad (83)$$

где S , T — ряды по степеням K , $\bar{K}$, L , $\bar{L}$, начинающиеся с членов второй степени, причем кеплеровские переменные K и L определяются формулами (39) главы 2, а

$$\Lambda = nt + E \quad (84)$$

и E — кеплеровский элемент, имеющий смысл средней долготы в эпоху. Связь a , b , ε с K , L , E имеет вид

$$a = K + F(K, \bar{K}, L, \bar{L}), \quad (85)$$

$$b = L + G(K, \bar{K}, L, \bar{L}), \quad (86)$$

$$\exp \sqrt{-1}(\varepsilon - E) = 1 + H(K, \bar{K}, L, \bar{L}), \quad (87)$$

где F , G , H — ряды по степеням K , $\bar{K}$, L , $\bar{L}$, причем F и G содержат лишь формы нечетных степеней (начиная с третьей), а H — формы четных степеней (начиная с четвертой). Подстановка (80) — (83) и (85) — (87) в (37) приводит к соотношениям

$$\frac{1}{2} F - \frac{3}{2} \bar{F} + H = \Phi, \quad (88)$$

$$G + \bar{G} = \Psi, \quad (89)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi = S + (1 + H) \delta p + \left(-\frac{1}{2} K + \frac{3}{2} \bar{K} \right) H + \\ + \left(-\frac{1}{2} F + \frac{3}{2} \bar{F} \right) H, \end{aligned} \quad (90)$$

$$\Psi = T - \delta w. \quad (91)$$

Наиболее трудоемкой операцией здесь является подстановка рядов (85), (86) в выражения δp , δw (подпрограмма TAYLOR пуассоновского процессора).

Таким образом, если F , G , H найдены с точностью до членов некоторой степени, то после подстановки (85), (86) в (80), (81) правые части (90), (91) определяются с точностью на одну степень выше и из (88), (89) сейчас же находятся новые, более точные значения F , G , H . Далее, в случае необходимости подпрограмма INVERS пуассоновского процессора позволяет обратить соотношения (85), (86) и найти выражения K , L в виде рядов по степеням a , $\bar{a}$, b , $\bar{b}$.

Разделение переменных в элементах

§ 1. Метод Крылова — Боголюбова

В этой и последующих главах изложен ряд методов построения долгосрочных теорий движения небесных тел. В данной главе рассматриваются методы, применяемые к уравнениям движения в элементах, в следующей главе — методы, применяемые к уравнениям движения в координатах. Впрочем, различия между методами этих двух групп имеют несущественный характер и гораздо более важными являются объединяющие их общие черты. По существу, все современные методы построения долгосрочных теорий движения основаны на единой фундаментальной идее разделения короткопериодических и долгопериодических членов. В соответствии с этой идеей строится замена переменных, которая приводит исходную систему уравнений движения к системе, не содержащей переменных, быстро меняющихся со временем. Эта результирующая система, охватывающая вековые и долгопериодические (по классической терминологии) члены (а также резонансные, если исходная система принадлежит к числу резонансных систем), как правило, является полиномиальной и может быть решена более простыми аналитическими средствами, чем исходная система (тейлоровские разложения, нормализация Биркгофа и т. п.). Кроме того, всегда имеется возможность проинтегрировать результирующую систему численно с большой величиной шага интегрирования.

Изложение методов построения долгосрочных теорий в элементах начнем с метода Крылова — Боголюбова в форме, предложенной Мюзеном (Musen, 1965a). Эта форма допускает непосредственную реализацию метода на ЭВМ для широкого круга задач.

Пусть исходная система уравнений имеет вид:

$$\dot{x} = X(x, y, z), \quad (1)$$

$$\dot{y} = \lambda(x) + Y(x, y, z), \quad (2)$$

$$\dot{z} = Z(x, y, z), \quad (3)$$

где каждый символ обозначает в общем случае векторную величину. Правые части системы являются рядами Пуассона с полиномиальными переменными x и тригонометрическими переменными y и z . Кроме того, функции X, Y, Z пропорциональны некоторому малому параметру. Таким образом вектор x описывает переменные действия, вектор y — быстрые угловые переменные и вектор z — медленные угловые переменные. Ставится задача о нахождении такого преобразования

$$x = x^* + a(x^*, y^*, z^*), \quad (4)$$

$$y = y^* + b(x^*, y^*, z^*), \quad (5)$$

$$z = z^* + c(x^*, y^*, z^*), \quad (6)$$

при котором уравнения в новых переменных x^*, y^*, z^* не содержали бы быстрых угловых переменных:

$$\dot{x}^* = X^*(x^*, -, z^*), \quad (7)$$

$$\dot{y}^* = \lambda(x^*) + Y^*(x^*, -, z^*), \quad (8)$$

$$\dot{z}^* = Z^*(x^*, -, z^*). \quad (9)$$

При этом предполагается, что между компонентами вектора $\lambda(x)$ исходной системы нет резонансных соотношений. В противном случае в правые части результирующей системы (7) — (8) вошли бы резонансные комбинации переменных y^* .

Так как в силу уравнений (7) — (9) оператор дифференцирования по времени равен

$$\frac{d}{dt} = \lambda(x^*) \frac{\partial}{\partial y^*} + D, \quad (10)$$

где

$$D = X^* \frac{\partial}{\partial x^*} + Y^* \frac{\partial}{\partial y^*} + Z^* \frac{\partial}{\partial z^*}, \quad (11)$$

то путем дифференцирования соотношений (4) — (6) с использованием уравнений (1) — (3) и (7) — (9) получаем

$$\lambda(x^*) \frac{\partial a}{\partial y^*} = X(x^* + a, y^* + b, z^* + c) - X^* - Da, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \lambda(x^*) \frac{\partial b}{\partial y^*} = & Y(x^* + a, y^* + b, z^* + c) - Y^* + \\ & + \lambda(x^* + a) - \lambda(x^*) - Db, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\lambda(x^*) \frac{\partial c}{\partial y^*} = Z(x^* + a, y^* + b, z^* + c) - Z^* - Dc. \quad (14)$$

Эти уравнения служат для определения как правых частей X^* , Y^* , Z^* результирующей системы, так и функций a , b , c основного преобразования. Если a , b , c известны в некотором приближении, то за X^* , Y^* , Z^* принимаются функции

$$X^* = MX(x^* + a, y^* + b, z^* + c), \quad (15)$$

$$Y^* = \lambda(x^* + a) - \lambda(x^*) + MY(x^* + a, y^* + b, z^* + c), \quad (16)$$

$$Z^* = MZ(x^* + a, y^* + b, z^* + c), \quad (17)$$

где M означает оператор осреднения по быстрым переменным y^* , который выделяет в тригонометрических разложениях по y^* , z^* члены, не содержащие y^* . При значениях (15) — (17) правые части (12) — (14) разлагаются в тригонометрические ряды по y^* , z^* с обязательным присутствием y^* . Поэтому уравнения (12) — (14) сводятся к системе независимых друг от друга скалярных уравнений вида

$$\lambda(x^*) \frac{\partial \psi}{\partial y^*} = \Psi^*(x^*, y^*, z^*) \quad (18)$$

с неизвестной скалярной функцией ψ . В силу вышесказанного правая часть (18) допускает разложение вида

$$\Psi^* = \sum_{m \neq 0} \Psi_{mn}(x^*) \frac{\cos}{\sin}(my^* + nz^*), \quad (19)$$

где суммирование производится по мульти-индексам m , n . Интегрирование уравнения (18) дает

$$\psi = \sum_{m \neq 0} \frac{\Psi_{mn}(x^*)}{(m\lambda)} \frac{\sin}{\cos}(my^* + nz^*), \quad (20)$$

где $(m\lambda)$ означает скалярное произведение мульти-индекса m и вектора $\lambda(x^*)$. В такой форме находятся функции a , b , c . Полученные значения a , b , c используются для уточнения правых частей (12) — (14), и процесс повторяется, пока не будет достигнута заданная точность относительно малого параметра. Начальными данными процесса служат нулевые значения a , b , c . Основной операцией

этого процесса является разложение функций X, Y, Z при подстановке соотношений (4) — (6). Это разложение производится подпрограммой типа TAYLOR пуассоновского процессора.

В цитированной выше работе Мюзен опирался не на итерационный процесс, а на решение в виде рядов по степеням малого параметра, и вывел формулы для последовательного определения членов этих рядов. Для осуществления подстановки (4) — (6) Мюзен воспользовался операторным представлением

$$F(x^* + a, y^* + b, z^* + c) = (1 + T)F(x^*, y^*, z^*), \quad (21)$$

причем оператор T , определяемый соотношением

$$1 + T(x^*, y^*, z^*) = \exp\left(a \frac{\partial}{\partial x^*} + b \frac{\partial}{\partial y^*} + c \frac{\partial}{\partial z^*}\right), \quad (22)$$

также представлен Мюзеном в виде ряда по степеням малого параметра. При наличии процессора для действий с рядами типа (20) такая детализация аналитических операций является излишней и достаточно запрограммировать итерационный процесс в самом общем виде, как он описан выше.

Уточним теперь тип рядов (20). Если компоненты вектора λ — постоянные числа, то ряды (20) просто являются рядами Пуассона. Они сохраняют форму рядов Пуассона и в том случае, когда имеется только одна быстрая угловая переменная и скаляр λ является степенной функцией только от одной из переменных действия. В общем же случае ряды (20) являются эшелонированными рядами, когда коэффициент при тригонометрической функции представляет собой отношение двух многочленов относительно полиномиальных переменных. Если имеется процессор для действий с такими рядами, то задача, описанная в этом параграфе, становится типовой задачей и ее программирование в общем виде не вызывает никаких трудностей. При решении конкретной задачи этого вида надо лишь описать правые части (1) — (3) в виде эшелонированных рядов и тогда результатом работы алгоритма будет преобразование (4) — (6) и система (7) — (9) с наперед заданной точностью относительно малого параметра.

§ 2. Метод Цейпеля

Не будет преувеличением сказать, что метод Цейпеля является сейчас одним из основных методов решения задач небесной механики в аналитической форме. Как и метод Крылова — Боголюбова, он основан на идее разделения быстро и медленно меняющихся переменных, однако применяется он к каноническим системам дифференциальных уравнений. Суть метода Цейпеля состоит в нахождении такого канонического преобразования переменных, при котором правые части новых уравнений не содержат быстро меняющихся переменных. В методе Цейпеля речь идет об определении только двух скалярных функций — производящей функции канонического преобразования и нового гамильтониана и поэтому этот метод более компактен, чем метод Крылова — Боголюбова.

Классическая формулировка метода Цейпеля страдает тем недостатком, что в производящую функцию канонического преобразования входит часть новых и часть старых переменных (обычно новые переменные действия и старые угловые переменные). Современные модификации метода Цейпеля, принадлежащие Хори и Дебри, свободны от этого недостатка (Giacaglia, 1972; Stumpff, 1974). В них каноническое преобразование сразу строится в явном виде относительно старых или новых переменных. Однако при наличии развитых пуассоновских процессоров построение явного вида преобразования не представляет трудностей. Поэтому ниже будет изложен классический вариант метода Цейпеля в формулировке Мюзена (Musen, 1965a). Но, как и при изложении метода Крылова — Боголюбова, предпочтение будет отдано итерационному способу, без использования явных разложений в ряды по степеням малого параметра.

Рассмотрим каноническую систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial F}{\partial y}, & \dot{y} &= -\frac{\partial F}{\partial x}, \\ \dot{z} &= \frac{\partial F}{\partial z}, & \dot{z} &= -\frac{\partial F}{\partial u} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

с гамильтонианом

$$F(x, u, y, z) = F_0(x) + \bar{F}(x, u, y, z), \quad (24)$$

представляющим собой ряд Пуассона относительно степенных переменных x , u и тригонометрических переменных y , z . Функция $\bar{F}$ содержит некоторый малый параметр и поэтому мала по сравнению с главным членом $F_0(x)$; x , y — векторы одной размерности, u , z — векторы одинаковой, вообще говоря, другой размерности. Очевидно, что y — это вектор быстрых угловых переменных, z — вектор медленных переменных. Требуется найти производящую функцию

$$S = S(x^*, u^*, y, z)$$

канонического преобразования

$$\left. \begin{aligned} x &= x^* + \frac{\partial S}{\partial y}, & y^* &= y + \frac{\partial S}{\partial x^*}, \\ u &= u^* + \frac{\partial S}{\partial z}, & z^* &= z + \frac{\partial S}{\partial u^*}, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

при котором гамильтониан F^* новых уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}^* &= \frac{\partial F^*}{\partial y^*}, & \dot{y}^* &= -\frac{\partial F^*}{\partial x^*}, \\ \dot{u}^* &= \frac{\partial F^*}{\partial z^*}, & \dot{z}^* &= -\frac{\partial F^*}{\partial u^*} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

не содержит бы быстрых переменных y^* .

В силу канонического преобразования (25) имеем

$$F(x, u, y, z) = F^*(x^*, u^*, -, z^*). \quad (27)$$

Вытекающее отсюда тождество относительно x^* , u^* , y , z

$$F\left(x^* + \frac{\partial S}{\partial y}, u^* + \frac{\partial S}{\partial z}, y, z\right) = F^*\left(x^*, u^*, -, z + \frac{\partial S}{\partial u^*}\right) \quad (28)$$

позволяет определить функции S и F^* . Полагая, аналогично (24),

$$F^*(x^*, u^*, -, z^*) = F_0^*(x^*) + \bar{F}^*(x^*, u^*, -, z^*), \quad (29)$$

перепишем (28) в виде

$$\begin{aligned} F_0\left(x^* + \frac{\partial S}{\partial y}\right) - F_0^*(x^*) + \bar{F}\left(x^* + \frac{\partial S}{\partial y}, u^* + \frac{\partial S}{\partial z}, y, z\right) = \\ = \bar{F}^*\left(x^*, u^*, -, z + \frac{\partial S}{\partial u^*}\right). \end{aligned} \quad (30)$$

Учитывая, что S и $\tilde{F}^*$ — функции, пропорциональные малому параметру, находим, прежде всего, что

$$F_0^*(x^*) = F_0(x^*). \quad (31)$$

Функции F_0 и $\tilde{F}^*$ разложим в ряд по приращениям аргументов:

$$F_0\left(x^* + \frac{\partial S}{\partial y}\right) = F_0(x^*) - \lambda(x^*) \frac{\partial S}{\partial y} + T_2 F_0\left(x^* + \frac{\partial S}{\partial y}\right), \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}^*\left(x^*, u^*, -, z + \frac{\partial S}{\partial u^*}\right) &= \tilde{F}^*(x^*, u^*, -, z) + \\ &+ T_1 \tilde{F}^*\left(x^*, u^*, -, z + \frac{\partial S}{\partial u^*}\right), \end{aligned} \quad (33)$$

где T_k означает тейлоровское разложение, начинающееся с члена с номером k . Кроме того, в (32) введен вектор частот

$$\lambda(x^*) = -\frac{\partial F_0(x^*)}{\partial x^*}. \quad (34)$$

Использование (32) и (33) с учетом (31) позволяет переписать (30) в виде

$$-\lambda(x^*) \frac{\partial S}{\partial y} + \Phi(x^*, u^*, y, z) = \tilde{F}^*(x^*, u^*, -, z), \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(x^*, u^*, y, z) &= T_2 F_0\left(x^* + \frac{\partial S}{\partial y}\right) + \\ &+ \tilde{F}\left(x^* + \frac{\partial S}{\partial y}, u^* + \frac{\partial S}{\partial z}, y, z\right) - \\ &- T_1 \tilde{F}^*\left(x^*, u^*, -, z + \frac{\partial S}{\partial u^*}\right). \end{aligned} \quad (36)$$

Уравнение (35) служит для итерационного определения функций S и $\tilde{F}^*$. На каждом шаге итерации функция Φ допускает разложение

$$\Phi = \Sigma \Phi_{mn}(x^*, u^*) \frac{\cos}{\sin}(my + nz) \quad (37)$$

с суммированием по целочисленным мульти-индексам m, n . Функция $\tilde{F}^*$ получается применением к Φ оператора осреднения M по быстрым переменным, так что

$$\tilde{F}^*(x^*, u^*, -, z) = \Sigma \Phi_{0,n}(x^*, u^*) \frac{\cos}{\sin}(nz). \quad (38)$$

После этого S определяется путем интегрирования членов Φ , содержащих быстрые переменные:

$$S(x^*, u^*, y, z) = \sum_{m \neq 0} \frac{\Phi_{mn}(x^*, u^*)}{(m\lambda)} \frac{\sin}{-\cos}(my + nz). \quad (39)$$

Итерационный процесс начинается со значения $S = 0$ и продолжается вплоть до достижения заданной точности.

Как и в методе Крылова — Боголюбова, Мюзен в своем изложении метода Цейпеля вводит операторы

$$1 + T(x^*, u^*, y, z) = \exp\left(\frac{\partial S}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x^*} + \frac{\partial S}{\partial z} \frac{\partial}{\partial u^*}\right), \quad (40)$$

$$1 + T^*(x^*, u^*, y, z) = \exp\left(\frac{\partial S}{\partial u^*} \frac{\partial}{\partial z}\right) \quad (41)$$

и записывает основное уравнение (28) в виде

$$(1 + T)F(x^*, u^*, y, z) = (1 + T^*)F^*(x^*, u^*, -, z). \quad (42)$$

Неизвестные функции S и F^* определяются отсюда Мюзеном путем разложения в ряды по степеням малого параметра.

В любом случае после определения S и F^* встает задача о нахождении явной формы преобразования от старых переменных к новым или наоборот. Это легко осуществляется с помощью процессора над рядами нужной формы. Объединяя переменные действия x и u в один вектор p , а угловые переменные y, z — в один вектор q , и учитывая, что производящая функция S зависит от новых переменных действия p^* и старых угловых переменных q , запишем преобразование (25) в форме

$$p = p^* + P(p^*, q), \quad (43)$$

$$q^* = q + Q(p^*, q). \quad (44)$$

Обращение этих систем осуществляется процессором и дает

$$p^* = p + U(p, q), \quad (45)$$

$$q = q^* + V(p^*, q^*). \quad (46)$$

Подстановка (46) в P и объединение с (46) приводит к явным выражениям старых переменных p, q через новые p^*, q^* . Точно так же подстановка (45) в Q и объединение с (45) позволяет найти явную зависимость p^*, q^* от p, q .

Если исходный гамильтониан F представляет собой ряд Пуассона, то в общем случае ряды (38) и (39) будут эшелонированными рядами, когда коэффициенты при тригонометрических функциях являются дробно-рациональными функциями степенных переменных.

Как и изложенный в предыдущем разделе метод Крылова — Боголюбова метод Цейпеля может быть запрограммирован в самом общем виде.

Частный случай наличия резонансных соотношений между компонентами вектора частот λ здесь не рассматривается.

Система (26), кроме интеграла энергии

$$F^*(x^*, u^*, -, z^*) = \text{const}, \quad (47)$$

обладает интегралом

$$x^* = \text{const}. \quad (48)$$

Поэтому эта система сводится к системе для переменных u^*, z^* с гамильтонианом F^* , где компоненты вектора x^* фигурируют как параметры. Если вековая часть гамильтониана F^* (не содержащая z^*) имеет более низкий порядок малости, чем часть, зависящая от z^* , то процесс можно повторить и получить решение задачи в чисто тригонометрической форме.

§ 3. Метод Цейпеля как «координатный» метод

В классической небесной механике проводится различие между методами определения возмущений в элементах и в координатах. В действительности, это различие не является принципиальным и связано лишь со способом учета короткопериодических возмущений, поскольку вековые и долгопериодические возмущения всегда предполагают использование средних элементов или аналогичных им величин. Условный характер этого различия был подчеркнут Ижаком (Izsak, 1963), показавшим, что метод Цейпеля, традиционно считающийся методом

определения возмущений в элементах, может рассматриваться и как метод определения возмущений в координатах.

Ижак предложил применять метод Цейпеля к канонической системе уравнений, выведенной Хиллом. В одной из своих работ Хилл (Hill, 1913) ввел каноническое преобразование

$$\begin{pmatrix} X & Y & Z \\ x & y & z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} R & U & H \\ r & u & h \end{pmatrix}, \quad (49)$$

переводящее каноническую систему

$$\left. \begin{aligned} \dot{X} &= \frac{\partial F}{\partial x}, & \dot{x} &= -\frac{\partial F}{\partial X}, \\ \dot{Y} &= \frac{\partial F}{\partial y}, & \dot{y} &= -\frac{\partial F}{\partial Y}, \\ \dot{Z} &= \frac{\partial F}{\partial z}, & \dot{z} &= -\frac{\partial F}{\partial Z}, \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

$$F = -\frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{\mu}{r} + W(t, x, y, z), \quad (51)$$

эквивалентную обычным уравнениям возмущенного движения

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \frac{\mu x}{r^3} &= \frac{\partial W}{\partial x}, \\ \ddot{y} + \frac{\mu y}{r^3} &= \frac{\partial W}{\partial y}, \\ \ddot{z} + \frac{\mu z}{r^3} &= \frac{\partial W}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

в каноническую систему

$$\left. \begin{aligned} \dot{R} &= \frac{\partial F}{\partial r}, & \dot{r} &= -\frac{\partial F}{\partial R}, \\ \dot{U} &= \frac{\partial F}{\partial u}, & \dot{u} &= -\frac{\partial F}{\partial U}, \\ \dot{H} &= \frac{\partial F}{\partial h}, & \dot{h} &= -\frac{\partial F}{\partial H}, \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

$$F = -\frac{1}{2}\left(R^2 + \frac{U^2}{r^2}\right) + \frac{\mu}{r} + W(t, r, u, h, U, H). \quad (54)$$

Преобразование (49) задается выражениями:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \left(\cos u \cos h - \frac{H}{U} \sin u \sin h \right), \\ y &= r \left(\cos u \sin h + \frac{H}{U} \sin u \cos h \right), \\ z &= r \frac{\sqrt{U^2 - H^2}}{U} \sin u, \\ xY - yX &= H, \\ X^2 + Y^2 + Z^2 &= R^2 + \frac{U^2}{r^2}, \\ xX + yY + zZ &= rR. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Переменные U, H, h являются медленно меняющимися переменными. В функции от кеплеровых элементов имеем

$$U = \sqrt{\mu} \sqrt{a} \sqrt{1 - e^2}, \quad H = U \cos i, \quad h = \Omega. \quad (56)$$

Переменные R, r, u являются быстрыми переменными. При этом $R = \dot{r}$, r — радиус-вектор, а u — аргумент широты движущегося тела.

Справедливость уравнений (53) проще всего установить путем сопоставления с уравнениями в переменных Делоне:

$$\left. \begin{aligned} \dot{L} &= \frac{\partial F}{\partial l}, \quad \dot{l} = -\frac{\partial F}{\partial L}, \\ \dot{G} &= \frac{\partial F}{\partial g}, \quad \dot{g} = -\frac{\partial F}{\partial G}, \\ \dot{H} &= \frac{\partial F}{\partial h}, \quad \dot{h} = -\frac{\partial F}{\partial H}, \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

$$F = \frac{\mu^2}{2L^2} + W(t, l, g, h, L, G, H). \quad (58)$$

При этом

$$L = \sqrt{\mu} \sqrt{a}, \quad G = L \sqrt{1 - e^2}, \quad H = G \cos i, \quad (59)$$

l — средняя аномалия, g — аргумент перигеллия и h — долгота восходящего узла орбиты рассматриваемого тела. Преобразование

$$\begin{pmatrix} L & G & H \\ l & g & h \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} R & U & H \\ r & u & h \end{pmatrix} \quad (60)$$

задается выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mu^2}{L^2} &= \frac{2\mu}{r} - R^2 - \frac{U^2}{r^2}, \quad G = U, \\ e \cos(l + \gamma) &= \frac{U^2}{\mu r} - 1, \quad e \sin(l + \gamma) = \frac{RU}{\mu}, \\ l + \gamma + g &= u, \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

где $\gamma = \gamma(r, R, U)$ — уравнение центра, т. е. разность $v - l$ между истинной и средней аномалией. Из (61) дифференцированием находим

$$dl + d\gamma = \frac{RU^3}{\mu^2 e^2 r^2} dr - \frac{U}{\mu e^2} \left(1 - \frac{U^2}{\mu r}\right) dR - \\ - \frac{R}{\mu e^2} \left(1 + \frac{U^2}{\mu r}\right) dU, \quad (62)$$

где

$$e^2 = 1 - \frac{U^2}{L^2}.$$

С другой стороны γ определяется явным соотношением (Broucke, Cefola, 1973)

$$\gamma = 2 \operatorname{arctg} \frac{e \sin v}{1 + \sqrt{1 - e^2} + e \cos v} + \frac{e \sqrt{1 - e^2} \sin v}{1 + e \cos v} \quad (63)$$

или в переменных r, R, U

$$\gamma = 2 \operatorname{arctg} \frac{R}{\frac{U}{r} + \frac{\mu}{L}} + \frac{rR}{L}, \quad (64)$$

где под L нужно понимать функцию от r, R, U , определяемую первым из соотношений (64). Из (64) следует

$$d\gamma = \frac{R}{L} \left[1 + \frac{L^2 U^3}{\mu^2 r^2 (L + U)} \right] dr + \\ + \left[\frac{2r}{L} - \frac{LU}{\mu (L + U)} \left(1 - \frac{U^2}{\mu r} \right) \right] dR - \frac{LR}{\mu (L + U)} \left(1 + \frac{U^2}{\mu r} \right) dU. \quad (65)$$

Используя (62), (65), легко установить, что в функции от переменных R, U, r, u выполняется тождество

$$Ldl + Gdg - Rdr - Udu = \\ = (L - U)(dl + d\gamma) - Ld\gamma - Rdr = -2d(rR).$$

Так как правая часть является полным дифференциалом по переменным R, U, r, u , то преобразование (60), заданное с помощью (61) и (63), действительно является каноническим.

Уравнения (53) очень удобны для применения метода Цейпеля, особенно в тех случаях, когда желательно получить решение в замкнутой форме без разложения по степеням эксцентриситета. Исключение быстрой угловой переменной u позволяет непосредственно найти короткопериодические возмущения в координатной форме. Эта методика была проиллюстрирована Ижаком на примере главной задачи теории движения искусственного спутника Земли.

Переменная R имеет порядок малости эксцентриситета. В случае малого наклона также целесообразно использовать это обстоятельство. Для этого достаточно сделать еще одну каноническую замену переменных

$$\begin{pmatrix} R & U & H \\ r & u & h \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} R & U & K \\ r & w & h \end{pmatrix}, \quad (66)$$

определяемую формулами

$$K = H - U, \quad w = u + h. \quad (67)$$

Переменная K имеет теперь порядок малости квадрата наклона, а переменная w представляет собой истинную долготу в орбите.

Переменные Хилла были с успехом использованы Акснесом (Aksnes, 1972) в теории движения искусственных спутников Земли. Брукке (Broucke, 1978) разработал элегантный метод получения уравнений в этих и аналогичных переменных с помощью пфаффового формализма.

§ 4. Метод Колмогорова — Арнольда

С теоретической точки зрения основное значение метода Колмогорова — Арнольда заключается в построении сходящегося итерационного процесса для представления общего квази-периодического решения динамической системы с малым параметром. Сам итерационный процесс является процессом пьютоновского типа, т. е. обладает в общем случае квадратичной сходимостью. Однако эта сходимость достигается при выполнении двух условий:

1) на каждом шаге процесса приходится разрезать область допустимых начальных условий, чтобы исключить слишком малые значения делителей, возникающих в процессе интегрирования;

2) возмущающий параметр динамической системы должен быть достаточно малым.

При решении конкретных задач, когда значения малых параметров фиксированы, а начальные условия заданы лишь с определенной степенью точности, сходимость процесса в методе Колмогорова — Арнольда становится проблематичной и не имеет большого практического значения. Но метод Колмогорова — Арнольда в приложении к конкретным задачам можно рассматривать как конструктивный метод, позволяющий получать формальные решения при меньшем числе итераций, чем, например, это требуется в методе Цейделя, основанном на линейных итерациях. Такой подход к методу Колмогорова — Арнольда в применении к задачам небесной механики детально развит в работе (Howland, 1977). В этой работе метод Колмогорова — Арнольда реализован в рамках преобразований Хори и Депри, позволяющих избежать процедуры обращения рядов. Однако, как уже указывалось, эта процедура не представляет затруднений для современных вычислительных процессоров, а сам оригинальный вариант метода Колмогорова — Арнольда приводит к очень простому алгоритму.

Метод Колмогорова применяется для решения невырожденной динамической системы

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y}, \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

с гамильтонианом $H(x, y)$, голоморфным относительно x и периодическим относительно тригонометрических переменных y :

$$\begin{aligned} H(x, y) = H_0 - \sum_i \lambda_i x_i + A(y) + \sum_i B_i(y) x_i + \\ + \sum_i \sum_j C_{ij}(y) x_i x_j + D(x, y). \end{aligned} \quad (69)$$

Здесь H_0 — постоянная величина, λ_i — постоянные частоты, несоизмеримые между собой, функции $A(y)$,

$B_i(y)$, $C_{ij}(y)$ и $D(x, y)$ разлагаются в тригонометрические ряды по компонентам вектора y , причем $C_{ij} = C_{ji}$, а относительно компонент вектора x функция $D(x, y)$ имеет, по крайней мере, третий порядок. При этом, функции $A(y)$ и $B_i(y)$ пропорциональны некоторому малому параметру ε . Кроме того, свободный член функции $A(y)$ считается равным нулю (в противном случае его можно было бы отнести к H_0).

В методе Цейделя ставится задача о нахождении такой последовательности канонических преобразований

$$(x, y) \rightarrow (X, Y), \quad (70)$$

которая в пределе приводит к гамильтониану, не зависящему от угловых переменных Y . В методе Колмогорова отыскивается такая последовательность канонических преобразований (70), которая исключает угловые переменные Y из свободных и линейных по X членов. Иными словами, целью канонических преобразований метода Колмогорова служит гамильтониан (69) с равными нулю функциями A и B_i . Система с таким гамильтонианом допускает решение

$$X_i = 0, \quad Y_i = \lambda_i t + Y_i^{(0)}, \quad (71)$$

причем постоянные частоты λ_i имеют те же значения, что и в исходной системе.

Преобразование типа (70) строится в методе Колмогорова с помощью производящей функции $S = S(y, X)$

$$\left. \begin{aligned} x_i &= X_i + \frac{\partial S}{\partial y_i}, \\ Y_i &= y_i + \frac{\partial S}{\partial X_i} \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

с явным выражением

$$S(y, X) = \sum_i \xi_i y_i + U(y) + \sum_i V_i(y) X_i, \quad (73)$$

где $U(y)$, $V_i(y)$ — неизвестные периодические функции y без свободных членов, а ξ_i — неизвестные константы. В силу (72)

$$x_i = X_i + \xi_i + \frac{\partial U}{\partial y_i} + \sum_j X_j \frac{\partial V_j}{\partial y_i}, \quad (74)$$

$$Y_i = y_i + V_i \quad (75)$$

и подстановка этих соотношений в (69) дает

$$H = H_0^* - \sum_i \lambda_i X_i + A^{(1)}(y) + \sum_i B_i^{(1)}(y) X_i + A^*(Y) + \\ + \sum_i B_i^*(Y) X_i + \sum_i \sum_j C_{ij}^*(Y) X_i X_j + D^*(X, Y), \quad (76)$$

где

$$H_0^* = H_0 - \sum_i \lambda_i \zeta_i, \quad (77)$$

$$A^{(1)}(y) = A - \sum_i \lambda_i \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad (78)$$

$$B_i^{(1)}(y) = B_i - \sum_j \lambda_j \frac{\partial V_i}{\partial y_j} + 2 \sum_j C_{ij} \left(\zeta_j + \frac{\partial U}{\partial y_j} \right), \quad (79)$$

$$A^*(Y) = \sum_i B_i \left(\zeta_i + \frac{\partial U}{\partial y_i} \right) + \\ + \sum_i \sum_j C_{ij} \left(\zeta_i + \frac{\partial U}{\partial y_i} \right) \left(\zeta_j + \frac{\partial U}{\partial y_j} \right) + D, \quad (80)$$

$$B_i^*(Y) = \sum_j B_j \frac{\partial V_i}{\partial y_j} + 2 \sum_k \sum_j C_{kj} \left(\zeta_k + \frac{\partial U}{\partial y_k} \right) \frac{\partial V_i}{\partial y_j} + \\ + \sum_j \frac{\partial D}{\partial x_j} \left(\delta_{ij} + \frac{\partial V_i}{\partial y_j} \right), \quad (81)$$

$$C_{ij}^*(Y) = C_{ij} + 2 \sum_k C_{kj} \frac{\partial V_i}{\partial y_k} + \sum_k \sum_l C_{kl} \frac{\partial V_i}{\partial y_k} \frac{\partial V_j}{\partial y_l} + \\ + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \frac{\partial^2 D}{\partial x_k \partial x_l} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial V_i}{\partial y_k} \right) \left(\delta_{jl} + \frac{\partial V_j}{\partial y_l} \right), \quad (82)$$

причем в (80) — (82) в качестве аргументов x_i в функциях D должны быть взяты значения

$$x_i = \zeta_i + \frac{\partial U}{\partial y_i}. \quad (83)$$

Функции $D^*(X, Y)$, голоморфные по X и начинающиеся с членов третьего порядка по X , получаются путем разложения функций D по аргументу x в окрестности значений (83) и отбрасывания членов нулевой, первой и второй степени относительно X .

Определим теперь неизвестные величины $U(y)$, ζ_i и $V_i(y)$ уравнениями

$$\sum_i \lambda_i \frac{\partial U}{\partial y_i} = A, \quad (84)$$

$$\sum_j [C_{ij}] \zeta_j = -\frac{1}{2} [B_i] - \sum_j \left[C_{ij} \frac{\partial U}{\partial y_j} \right], \quad (85)$$

$$\sum_j \lambda_j \frac{\partial V_i}{\partial y_j} = B_i + 2 \sum_j C_{ij} \left(\zeta_j + \frac{\partial U}{\partial y_j} \right). \quad (86)$$

Квадратные скобки означают здесь постоянную часть соответствующей функции.

Так как по предположению $[A] = 0$ и частоты λ_i несоизмеримы, то первое уравнение принадлежит к рассмотренному ранее типу и всегда имеет чисто тригонометрическое решение. Соотношения (85) образуют систему линейных алгебраических уравнений, которая в невырожденном случае всегда разрешима. В силу (85) постоянные члены в правых частях дифференциальных уравнений (86) равны нулю, так что эти уравнения также имеют чисто тригонометрическое решение.

Таким образом, величины $U(y)$, ζ_i и $V_i(y)$ всегда могут быть определены, причем они имеют тот же порядок малости, что и исходные функции $A(y)$ и $B_i(y)$. Тем самым члены с функциями $A^{(1)}$ и $B_i^{(1)}$ в гамильтониане (76) исчезают и свободные и линейные по X члены определяются лишь функциями A^* и B_i^* . Из выражений (80), (81) видно, что эти функции имеют по крайней мере второй порядок малости по сравнению с функциями A и B_i .

Применяя преобразование (74), (75), (84) — (86) каждый раз к новому гамильтониану, получим итерационный процесс с квадратичной сходимостью. По достижении необходимой точности функциями A^* и B_i^* окажется возможным пренебречь, после чего результирующая система даст решение (71). Основные практические трудности при проведении этого процесса связаны с необходимостью обращения преобразования (75) и осуществления подстановки (74) в функциях D . Однако эти трудности в настоящее время решаются средствами пуассоновского процессора.

Метод Арнольда применяется для решения вырожденных систем (68) с гамильтонианом $H(x, y)$ вида

$$H(x, y) = H_0(x) + \varepsilon H_1(x) + \varepsilon^m H_m(x, y), \quad (87)$$

где $H_0(x)$ содержит не все компоненты вектора переменных действия x . Некоторые из этих компонент фигурируют только в члене $H_1(x)$, входящим в гамильтониан в сопровождении малого параметра ε . Поэтому тригонометрические переменные y делятся на быстро меняющиеся и медленно меняющиеся, однако в отличие от стандартной методики Цейделя, где эти переменные исключаются по отдельности, в методе Арнольда они исключаются одновременно. Это возможно при условии, что в выражении (87) $m \geq 2$. Метод Арнольда относится к методам типа Ньютона, но так как параметр ε появляется в процессе исключения медленно меняющихся переменных в знаменателе, то точность исключения тригонометрических переменных на каждом шаге определяется величиной ε^{2m-1} . В результате преобразования (70) типа (72) имеем

$$\begin{aligned} H = H_0(X) + \varepsilon H_1(X) + \sum_i \left(\frac{\partial H_0}{\partial x_i} + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial x_i} \right) \frac{\partial S}{\partial y_i} + \\ + \varepsilon^m H_m(X, y) + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial x_i \partial x_j} + \varepsilon \frac{\partial^2 H_1}{\partial x_i \partial x_j} \right) \frac{\partial S}{\partial y_i} \frac{\partial S}{\partial y_j} + \\ + \varepsilon^m \sum_i \frac{\partial H_m}{\partial x_i} \frac{\partial S}{\partial y_i} + \dots, \quad (88) \end{aligned}$$

где все производные от H_0 , H_1 , H_m должны быть взяты при значениях $x = X$. Производящую функцию $S = S(y, X)$ выберем как решение уравнения

$$\sum_i \left(\frac{\partial H_0}{\partial x_i} + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial x_i} \right) \frac{\partial S}{\partial y_i} = -\varepsilon^m H_m(X, y). \quad (89)$$

Постоянный член в тригонометрическом разложении H_m можно всегда считать равным нулю, так как в противном случае его можно отнести к функции H_1 . Поэтому это уравнение в нерезонансном случае допускает чисто тригонометрическое решение и определяемая им функция S имеет порядок ε^{m-1} . Гамильтониан (88) сохраняет прежний вид (87), но члены, зависящие от Y , имеют порядок

ε^{2m-1} . Это очевидно для членов, содержащих H_1 и H_m . Что же касается члена, зависящего от вторых производных от H_0 , то из (89) следует оценка

$$\sum_i \frac{\partial H_0}{\partial x_i} \frac{\partial S}{\partial y_i} \sim \varepsilon^m.$$

Поэтому и член со вторыми производными от H_0 имеет порядок ε^{2m-1} . Как и в методе Цейделя, главная практическая трудность при проведении метода Арнольда состоит в обращении второй группы уравнений (72) и осуществлении в гамильтониане H подстановки (72).

Разделение переменных в прямоугольных координатах

§ 1. Приводимость уравнений в вариациях задачи двух тел

Определение возмущений в прямоугольных координатах с помощью традиционных методов начинается с нахождения общего решения уравнений в вариациях задачи двух тел. Если теория возмущений строится в виде рядов по степеням малого параметра, то определение возмущений любого порядка сводится к решению вариационных уравнений с известными правыми частями. На основе общего решения уравнений в вариациях это решение находится квадратурами с помощью метода вариации произвольных постоянных. Если же теория возмущений строится итерациями относительно малого параметра, то уравнения возмущенного движения имеют вид вариационных уравнений, правые части которых содержат неизвестные функции. С помощью общего решения уравнений в вариациях и метода вариации произвольных постоянных эти уравнения заменяются интегральными уравнениями, которые решаются далее последовательными итерациями. В обоих случаях уравнения в вариациях решаются в явном виде и это приводит, вообще говоря, к появлению вековых членов. Детальный анализ подобных методов содержится, например, в курсе (Stumpff, 1974).

В данной главе предлагается другой метод определения возмущений в прямоугольных координатах, аналогичный методу Цейпеля разделения коротко- и долгопериодических возмущений в элементах. На основе общего решения уравнений в вариациях задачи двух тел строится замена переменных, приводящая уравнения в вариациях к системе с постоянными коэффициентами в жордановой форме. Поэтому уравнения возмущенного движения имеют линейные левые части, приведенные к жордановой форме, а их правые части голоморфны относительно неизвестных функций. Далее строится замена переменных, которая по-

звolyет исключить все короткопериодические члены и приводит уравнения возмущенного движения к полиномиальной системе с медленно меняющимися коэффициентами, служащей для определения членов долгого периода. Элементы исходной орбиты задачи двух тел могут быть заданы как в аналитическом, так и в численном виде, причем в процессе решения значение среднего движения не изменяется. Этот метод обобщает планетный метод работ (Brumberg, 1970; Brumberg, Chapront, 1973) на случай произвольных значений эксцентриситета и наклона и может быть использован для построения теорий движения как больших и малых планет, так и спутников. Для эффективной реализации метода на ЭВМ целесообразно применение пуассоновского и кеплеровского процессоров.

Рассмотрим уравнения в вариациях

$$\delta \ddot{\mathbf{r}} + \frac{\kappa}{\rho^3} \left[\delta \mathbf{r} - \frac{3}{\rho^2} (\rho \delta \mathbf{r}) \rho \right] = 0, \quad (1)$$

порожденные уравнениями невозмущенной задачи двух тел

$$\ddot{\rho} + \frac{\kappa}{\rho^3} \rho = 0. \quad (2)$$

Здесь κ — умноженная на гравитационную постоянную сумма масс тел, ρ — невозмущенный вектор положения движущегося тела, $\delta \mathbf{r}$ — вариация этого вектора. Для решения (1) воспользуемся обычным разложением $\delta \mathbf{r}$ на составляющие вдоль векторов ρ , $\dot{\rho}$ и $\mathbf{k}$, где вектор $\mathbf{k}$ направлен по нормали к плоскости невозмущенной орбиты:

$$\delta \mathbf{r} = T \rho + S \dot{\rho} + w \mathbf{k}. \quad (3)$$

Чтобы сделать компоненту w безразмерной величиной, положим

$$|\mathbf{k}| = a, \quad (4)$$

где a — большая полуось невозмущенной орбиты, связанная с наблюдаемым средним движением n третьим законом Кеплера

$$n^2 a^3 = \kappa. \quad (5)$$

Из (3) следует

$$\delta \dot{\mathbf{r}} = \left(\dot{T} - \frac{\kappa}{\rho^3} S \right) \rho + (\dot{S} + T) \dot{\rho} + \dot{w} \mathbf{k}. \quad (6)$$

Подстановка (3) и (6) в (1) с использованием (2) дает

$$\left(\ddot{T} - 2 \frac{\kappa}{\rho^3} \dot{S} - 3 \frac{\kappa}{\rho^3} T \right) \rho + (\ddot{S} + 2\dot{T}) \dot{\rho} + \left(\ddot{w} + \frac{\kappa}{\rho^3} w \right) k = 0, \quad (7)$$

так что для определения компонент T , S и w служат уравнения

$$\ddot{T} - 2 \frac{\kappa}{\rho^3} \dot{S} - 3 \frac{\kappa}{\rho^3} T = 0, \quad (8)$$

$$\ddot{S} + 2\dot{T} = 0, \quad (9)$$

$$\ddot{w} + \frac{\kappa}{\rho^3} w = 0. \quad (10)$$

Вместо компонент T и S введем безразмерные комплексно-сопряженные переменные

$$p = T + \sqrt{-1}nS, \quad q = T - \sqrt{-1}nS. \quad (11)$$

Тогда уравнения (8) и (9) можно заменить одним уравнением

$$\begin{aligned} \ddot{p} + \sqrt{-1}n \left(1 + \frac{a^3}{\rho^3} \right) \dot{p} + \sqrt{-1}n \left(1 - \frac{a^3}{\rho^3} \right) \dot{q} - \\ - \frac{3}{2} n^2 \frac{a^3}{\rho^3} (p + q) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Замена (3), (6) в переменных p , q примет вид

$$\delta r = \frac{1}{2} p \left(\rho - \frac{\sqrt{-1}}{n} \dot{\rho} \right) + \frac{1}{2} q \left(\rho + \frac{\sqrt{-1}}{n} \dot{\rho} \right) + wk, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \delta \dot{r} = \frac{1}{2} p \left(\dot{\rho} + \sqrt{-1}n \frac{a^3}{\rho^3} \rho \right) + \frac{1}{2} q \left(\dot{\rho} - \sqrt{-1}n \frac{a^3}{\rho^3} \rho \right) + \\ + \frac{1}{2} \dot{p} \left(\rho - \frac{\sqrt{-1}}{n} \dot{\rho} \right) + \frac{1}{2} \dot{q} \left(\rho + \frac{\sqrt{-1}}{n} \dot{\rho} \right) + \dot{w}k. \end{aligned} \quad (14)$$

Решение уравнений (8), (9) осуществляется без труда. Действительно, интегрирование (9) дает

$$\dot{S} + 2T = K, \quad (15)$$

где K — произвольная постоянная. Поэтому уравнение (8) принимает вид

$$\ddot{T} + \frac{\kappa}{\rho^3} T = 2 \frac{\kappa}{\rho^3} K. \quad (16)$$

Это уравнение имеет общее решение

$$T = \frac{1}{2} C \frac{\rho}{a} \exp \sqrt{-1} f + \frac{1}{2} \bar{C} \frac{\rho}{a} \exp (-\sqrt{-1} f) + 2K, \quad (17)$$

где f — истинная аномалия в невозмущенном движении, C — произвольная комплексная постоянная. Величина с чертой сверху здесь и далее означает комплексно-сопряженную величину. Дифференцирование (17) дает

$$\dot{T} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{-1} n}{\sqrt{1-e^2}} [C(e + \exp \sqrt{-1} f) - \bar{C}(e + \exp (-\sqrt{-1} f))], \quad (18)$$

где e — эксцентриситет невозмущенной орбиты. Далее из (15) получаем

$$\dot{S} = -C \frac{\rho}{a} \exp \sqrt{-1} f - \bar{C} \frac{\rho}{a} \exp (-\sqrt{-1} f) - 3K. \quad (19)$$

Интегрируя по средней аномалии g , имеем

$$\int \frac{\rho}{a} \exp \sqrt{-1} f dg = -\frac{3}{2} eg - \left(\sqrt{-1} \sqrt{1-e^2} + \frac{1}{2} \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\rho}{a} \sin f \right) \frac{\rho}{a} \exp \sqrt{-1} f \quad (20)$$

и

$$\begin{aligned} nS = & A + Bg + \\ & + C \left(\sqrt{-1} \sqrt{1-e^2} + \frac{1}{2} \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\rho}{a} \sin f \right) \frac{\rho}{a} \exp \sqrt{-1} f + \\ & + \bar{C} \left(-\sqrt{-1} \sqrt{1-e^2} + \frac{1}{2} \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\rho}{a} \sin f \right) \times \\ & \times \frac{\rho}{a} \exp (-\sqrt{-1} f). \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь A — новая произвольная вещественная постоянная, а через B обозначена вещественная постоянная

$$B = \frac{3}{2} e (C + \bar{C}) - 3K. \quad (22)$$

Собирая все полученные результаты, находим

$$p = \sqrt{-1}A - \frac{2}{3}B + \sqrt{-1}Bg - \\ - C \left(\sqrt{1-e^2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{-1} \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\rho}{a} \sin f \right) \frac{\rho}{a} \times \\ \times \exp \sqrt{-1}f + \bar{C} \left(\sqrt{1-e^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{-1} \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \times \right. \\ \left. \times \frac{\rho}{a} \sin f \right) \frac{\rho}{a} \exp(-\sqrt{-1}f) + (C + \bar{C})e, \quad (23)$$

$$\dot{p} = \sqrt{-1}n \left\{ B - C \left[\left(\frac{\rho}{a} - \frac{1}{2\sqrt{1-e^2}} \right) \exp \sqrt{-1}f + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2}e \left(3 - \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \right) \right] - \bar{C} \left[\left(\frac{\rho}{a} + \frac{1}{2\sqrt{1-e^2}} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \exp(-\sqrt{-1}f) + \frac{1}{2}e \left(3 + \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \right) \right] \right\}. \quad (24)$$

Что же касается уравнения (10), то его общее решение можно записать в виде

$$w = D \frac{\rho}{a} \exp \sqrt{-1}f + \bar{D} \frac{\rho}{a} \exp(-\sqrt{-1}f), \quad (25)$$

$$\dot{w} = \frac{\sqrt{-1}n}{\sqrt{1-e^2}} [D(e + \exp \sqrt{-1}f) - \bar{D}(e + \exp(-\sqrt{-1}f))], \quad (26)$$

где D — произвольная комплексная постоянная.

Выражения (23) — (26) с вещественными постоянными A, B и комплексными постоянными C, D представляют собой общее решение уравнений в вариациях (12) и (10). Эти выражения показывают, что существует преобразование

$$(p, \dot{p}, w, \dot{w}) \rightarrow (\xi, \eta, u, v) \quad (27)$$

такое, что в новых переменных уравнения в вариациях (12) и (10) принимают жорданову форму

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \sqrt{-1}n\eta, \\ \dot{\eta} &= 0, \\ \dot{u} &= \sqrt{-1}nu, \\ \dot{v} &= \sqrt{-1}nv. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Очевидно, что ξ — чисто мнимая переменная, η — вещественная переменная, u, v — комплексные переменные. Явный вид преобразования (27) следует из (23) — (26), а именно:

$$\left. \begin{aligned} p &= \xi - \frac{2}{3} \eta + \lambda u + \mu \bar{u}, \\ \dot{p} &= \sqrt{-1} n (\eta + \gamma u + \delta \bar{u}), \\ w &= \sigma v + \bar{\sigma} \bar{v}, \\ \dot{w} &= \sqrt{-1} n (v \bar{v} - \bar{v} v), \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

где

$$\lambda = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{1-e^2} + \frac{1}{2} \sqrt{-1} \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\rho}{a} \sin f \right) \times \\ \times \frac{\rho}{a} \exp \sqrt{-1} (f - g) + e \exp (-\sqrt{-1} g), \quad (30)$$

$$\mu = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{1-e^2} + \frac{1}{2} \sqrt{-1} \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\rho}{a} \sin f \right) \times \\ \times \frac{\rho}{a} \exp (-\sqrt{-1} (f - g)) + e \exp \sqrt{-1} g, \quad (31)$$

$$\gamma = - \left(\frac{\rho}{a} - \frac{1}{2 \sqrt{1-e^2}} \right) \exp \sqrt{-1} (f - g) - \\ - \frac{1}{2} e \left(3 - \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \right) \exp (-\sqrt{-1} g), \quad (32)$$

$$\delta = - \left(\frac{\rho}{a} + \frac{1}{2 \sqrt{1-e^2}} \right) \exp (-\sqrt{-1} (f - g)) - \\ - \frac{1}{2} e \left(3 + \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \right) \exp \sqrt{-1} g, \quad (33)$$

$$\sigma = \frac{\rho}{a} \exp \sqrt{-1} (f - g), \quad (34)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} [\exp \sqrt{-1} (f - g) + e \exp (-\sqrt{-1} g)]. \quad (35)$$

Общее решение уравнений (28) может быть записано в виде

$$\eta = B, \quad \xi = \sqrt{-1} (A + Bg), \quad u = C \exp \sqrt{-1} g, \\ v = D \exp \sqrt{-1} g,$$

и подстановка этого решения в (29) вновь приводит к выражениям (23) — (26).

В зависимости от конкретных приложений коэффициенты (30) — (35) могут быть либо оставлены в замкнутой форме, либо разложены с помощью кеплеровского процессора в ряды Пуассона с полиномиальной переменной e и тригонометрической переменной g .

§ 2. Возмущенная задача двух тел

Рассмотрим теперь уравнения возмущенного движения

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\kappa}{r^3} \mathbf{r} = \mathbf{G} \quad (36)$$

с малой возмущающей силой $\mathbf{G}$. Полагая

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho} + \delta \mathbf{r} \quad (37)$$

и учитывая (2), приведем уравнения возмущенного движения к виду

$$\delta \ddot{\mathbf{r}} + \frac{\kappa}{\rho^3} \left[\delta \mathbf{r} - \frac{3}{\rho^2} (\boldsymbol{\rho} \delta \mathbf{r}) \boldsymbol{\rho} \right] = \mathbf{Q}, \quad (38)$$

где

$$\mathbf{Q} = \mathbf{G} - \kappa \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} - \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3} \right) + \frac{\kappa}{\rho^3} \left[\delta \mathbf{r} - \frac{3}{\rho^2} (\boldsymbol{\rho} \delta \mathbf{r}) \boldsymbol{\rho} \right]. \quad (39)$$

С помощью оператора D (Musen, Carpenter, 1963; Musen, 1965b)

$$D = \nabla \exp(\delta \mathbf{r} \cdot \nabla) = \nabla \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\delta \mathbf{r} \cdot \nabla)^k, \quad \nabla = \text{grad}_{\boldsymbol{\rho}}, \quad (40)$$

это выражение можно переписать в форме

$$\mathbf{Q} = \mathbf{G} + \kappa (D - \nabla - (\delta \mathbf{r} \cdot \nabla) \nabla) \frac{1}{\rho}. \quad (41)$$

Вместо однородного уравнения (7) теперь при преобразовании (3), (6) получаем

$$\left(\ddot{T} - 2 \frac{\kappa}{\rho^3} S - 3 \frac{\kappa}{\rho^3} T \right) \boldsymbol{\rho} + (\ddot{S} + 2T) \dot{\boldsymbol{\rho}} + \left(\ddot{w} + \frac{\kappa}{\rho^3} w \right) \mathbf{k} = \mathbf{Q}. \quad (42)$$

Умножая это уравнение последовательно на $(\dot{\boldsymbol{\rho}} \times \mathbf{k})$, $(\mathbf{k} \times \boldsymbol{\rho})$, $\mathbf{k}$ и учитывая, что

$$\boldsymbol{\rho} \times \dot{\boldsymbol{\rho}} = na \sqrt{1 - e^2} \mathbf{k}, \quad (43)$$

получаем

$$\ddot{T} - 2 \frac{\kappa}{\rho^3} S - 3 \frac{\kappa}{\rho^3} T = \frac{1}{na^3 \sqrt{1-e^2}} Q (\dot{\rho} \times k),$$

$$\ddot{S} + 2\dot{T} = \frac{1}{na^3 \sqrt{1-e^2}} Q (k \times \rho),$$

$$\ddot{w} + \frac{\kappa}{\rho^3} w = \frac{1}{a^2} Q k.$$

Поэтому в переменных ρ , w уравнениях возмущенного движения можно придать вид

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} + \sqrt{-1} n \left(1 + \frac{a^3}{\rho^3}\right) \dot{\rho} + \sqrt{-1} n \left(1 - \frac{a^3}{\rho^3}\right) \dot{q} - \\ - \frac{3}{2} n^2 \frac{a^3}{\rho^3} (p + q) = n^2 P, \end{aligned} \quad (44)$$

$$\ddot{w} + n^2 \frac{a^3}{\rho^3} w = n^2 W, \quad (45)$$

где

$$P = \frac{\sqrt{-1}}{n^2 a^3 \sqrt{1-e^2}} Q \left[k \times \left(\rho + \frac{\sqrt{-1}}{n} \dot{\rho} \right) \right], \quad (46)$$

$$W = \frac{1}{n^2 a^2} Q k. \quad (47)$$

В случае, когда возмущающая сила G имеет потенциал $H = H(\mathbf{r}, t)$

$$G = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}, \quad (48)$$

эти выражения целесообразно преобразовать. Используя (43) и другие основные соотношения кеплеровского движения, легко найти, что

$$\begin{aligned} k \times \left(\rho + \frac{\sqrt{-1}}{n} \dot{\rho} \right) &= - \frac{\sqrt{-1} a}{\sqrt{1-e^2}} \left[\frac{1}{2} \left(\rho + \frac{\sqrt{-1}}{n} \dot{\rho} \right) \times \right. \\ &\quad \times \left(2 \frac{a}{\rho} - 1 + \frac{\rho^2}{a^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\rho - \frac{\sqrt{-1}}{n} \dot{\rho} \right) \times \\ &\quad \times \left. \left(2 \frac{a}{\rho} - 1 - \frac{\rho^2}{a^2} - 2 \sqrt{-1} \frac{\rho}{a} \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \sin f \right) \right], \\ \rho \left[k \times \left(\rho + \frac{\sqrt{-1}}{n} \dot{\rho} \right) \right] &= - \sqrt{-1} a^3 \sqrt{1-e^2}, \\ \dot{\rho} \left[k \times \left(\rho + \frac{\sqrt{-1}}{n} \dot{\rho} \right) \right] &= na^3 \sqrt{1-e^2}. \end{aligned}$$

С другой стороны, вводя силовую функцию

$$K = \frac{\kappa}{r} + H, \quad (49)$$

имеем

$$Q = n^2 \frac{a^3}{\rho^3} \left[\rho + \delta r - \frac{3}{\rho^2} (\rho \delta r) \rho \right] + \frac{\partial K}{\partial r}. \quad (50)$$

Поэтому в силу (13) P и W представятся в виде

$$\begin{aligned} P = \frac{a^3}{\rho^3} & \left[1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \sqrt{-1} \frac{a}{\rho} \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \sin f \right) p - \right. \\ & - \frac{3}{2} \left(1 + \sqrt{-1} \frac{a}{\rho} \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \sin f \right) q \left. \right] + \\ & + \frac{1}{n^2 a^2 (1-e^2)} \left[\left(2 \frac{a}{\rho} - 1 + \frac{\rho^2}{a^2} \right) \frac{\partial K}{\partial q} + \right. \\ & \left. + \left(2 \frac{a}{\rho} - 1 - \frac{\rho^2}{a^2} - 2 \sqrt{-1} \frac{\rho}{a} \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \sin f \right) \frac{\partial K}{\partial p} \right], \end{aligned} \quad (51)$$

$$W = \frac{a^3}{\rho^3} w + \frac{1}{n^2 a^2} \frac{\partial K}{\partial w}, \quad (52)$$

где силовая функция K предполагается выраженной по (37) и (13) через p, q, w . При разложении этой функции по степеням p, q, w свободные и линейные по p, q, w члены, не содержащие малый параметр, исчезнут из выражений P, W . Таким образом, P и W являются голоморфными функциями p, q, w , причем свободные и линейные по p, q, w члены пропорциональны возмущающему малому параметру.

Приведем теперь уравнения (44), (45) к жордановой форме. Вводя вектор переменных V и вектор правых частей B

$$V = \begin{pmatrix} p \\ q \\ \dot{p} \\ \dot{q} \\ w \\ \dot{w} \end{pmatrix}, \quad B = n^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P \\ \bar{P} \\ 0 \\ W \end{pmatrix}, \quad (53)$$

перепишем эти уравнения в форме системы уравнений первого порядка

$$\dot{V} = AV + B. \quad (54)$$

Матрица A здесь имеет блочную структуру

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad (55)$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} \frac{n^2 a^3}{\rho^3} & \frac{3}{2} \frac{n^2 a^3}{\rho^3} & -\sqrt{-1} n \left(1 + \frac{a^3}{\rho^3}\right) & -\sqrt{-1} n \left(1 - \frac{a^3}{\rho^3}\right) \\ \frac{3}{2} \frac{n^2 a^3}{\rho^3} & \frac{3}{2} \frac{n^2 a^3}{\rho^3} & \sqrt{-1} n \left(1 - \frac{a^3}{\rho^3}\right) & \sqrt{-1} n \left(1 + \frac{a^3}{\rho^3}\right) \end{pmatrix}, \quad (56)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{n^2 a^3}{\rho^3} & 0 \end{pmatrix}. \quad (57)$$

На основании результатов предыдущего параграфа совершим замену

$$V = JX, \quad (58)$$

где X — вектор новых переменных

$$X = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ u \\ \bar{u} \\ v \\ \bar{v} \end{pmatrix}, \quad (59)$$

а J — матрица той же структуры, что и A , имеющая блоки

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \lambda & \mu \\ -1 & -\frac{2}{3} & \bar{\mu} & \bar{\lambda} \\ 0 & \sqrt{-1} n & \sqrt{-1} n \gamma & \sqrt{-1} n \delta \\ 0 & -\sqrt{-1} n & -\sqrt{-1} n \bar{\delta} & -\sqrt{-1} n \bar{\gamma} \end{pmatrix}, \quad (60)$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} \sigma & \bar{\sigma} \\ \sqrt{-1} n v & -\sqrt{-1} n \bar{v} \end{pmatrix}. \quad (61)$$

Приведем независимый от результатов предшествующего параграфа матричный вывод приведения системы (54) с помощью (58) к жордановой форме.

Путем несложных операций с выражениями (30) — (35) найдем определители

$$\det(J_1) = \frac{2}{3} n^2 \sqrt{1-e^2}, \quad \det(J_2) = -2 \sqrt{-1} n \sqrt{1-e^2} \quad (62)$$

и блоки обратной матрицы J^{-1} :

$$J_1^{-1} = \frac{3}{2n \sqrt{1-e^2}} \times \begin{pmatrix} n\tau & -n\bar{\tau} & \sqrt{-1}\varphi & \sqrt{-1}\bar{\varphi} \\ n\chi & n\chi & \sqrt{-1}\psi & -\sqrt{-1}\bar{\psi} \\ -n\bar{\nu} & -n\bar{\nu} & \sqrt{-1}\left(-\frac{1}{3}\bar{\sigma} + \frac{2}{3}\bar{\nu}\right) & \sqrt{-1}\left(-\frac{1}{3}\bar{\sigma} - \frac{2}{3}\bar{\nu}\right) \\ -n\nu & -n\nu & \sqrt{-1}\left(\frac{1}{3}\sigma + \frac{2}{3}\nu\right) & \sqrt{-1}\left(\frac{1}{3}\sigma - \frac{2}{3}\nu\right) \end{pmatrix}, \quad (63)$$

$$J_2^{-1} = \frac{1}{2n \sqrt{1-e^2}} \begin{pmatrix} n\bar{\nu} & -\sqrt{-1}\bar{\sigma} \\ n\nu & \sqrt{-1}\sigma \end{pmatrix}. \quad (64)$$

В дополнение к (30) — (35) здесь введены функции

$$\tau = \frac{1}{3} \sqrt{1-e^2} - \sqrt{-1} \frac{\rho}{a} e \sin f, \quad (65)$$

$$\chi = -2 \sqrt{1-e^2} - 3 \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} (e + \cos f), \quad (66)$$

$$\varphi = -\frac{2}{3} \sqrt{1-e^2} \frac{\rho^2}{a^2} + \frac{2}{3} \sqrt{-1} \frac{\rho}{a} e \sin f, \quad (67)$$

$$\psi = \sqrt{1-e^2} + 2 \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} (e + \cos f) + \sqrt{-1} \frac{\rho}{a} e \sin f. \quad (68)$$

Дифференцирование выражений (30) — (35) дает далее

$$\dot{\lambda} = \sqrt{-1} n (\gamma - \lambda), \quad \dot{\mu} = \sqrt{-1} n (\delta + \mu),$$

$$\sqrt{-1} \dot{\gamma} = n \left[\left(2 + \frac{a^3}{\rho^3} \right) \gamma + \left(\frac{a^3}{\rho^3} - 1 \right) \bar{\delta} + \frac{3}{2} \frac{a^3}{\rho^3} (\lambda + \bar{\mu}) \right],$$

$$\sqrt{-1} \dot{\delta} = n \left[\frac{a^3}{\rho^3} \delta + \left(\frac{a^3}{\rho^3} - 1 \right) \bar{\gamma} + \frac{3}{2} \frac{a^3}{\rho^3} (\bar{\lambda} + \mu) \right],$$

$$\dot{\sigma} = \sqrt{-1} n (\nu - \sigma), \quad \sqrt{-1} \dot{\nu} = n \left(\nu - \frac{a^3}{\rho^3} \sigma \right).$$

Отсюда легко найти, что

$$A_1 J_1 - \dot{J}_1 = \sqrt{-1} n \begin{pmatrix} 0 & 1 & \lambda & -\mu \\ 0 & -1 & \bar{\mu} & -\bar{\lambda} \\ 0 & 0 & \sqrt{-1} n \gamma & -\sqrt{-1} n \delta \\ 0 & 0 & -\sqrt{-1} n \bar{\delta} & \sqrt{-1} n \bar{\gamma} \end{pmatrix}, \quad (69)$$

$$A_2 J_2 - \dot{J}_2 = \sqrt{-1} n \begin{pmatrix} \sigma & \bar{\sigma} \\ \sqrt{-1} n \nu & \sqrt{-1} n \bar{\nu} \end{pmatrix}. \quad (70)$$

Преобразование (58) приводит систему (54) к виду

$$\dot{X} = \sqrt{-1} n [PX + R(X, t)], \quad (71)$$

где

$$\sqrt{-1} n P = J^{-1} (AJ - \dot{J}) \quad (72)$$

и

$$\sqrt{-1} n R = J^{-1} B. \quad (73)$$

Выражения (69), (70) позволяют установить, что

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (74)$$

Таким образом, матрица P постоянная и имеет жорданову форму. Что же касается компонент вектора правых частей

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{pmatrix}, \quad (75)$$

то из (73), (63), (64) и (53) получаем

$$R_1 = \frac{3}{2\sqrt{1-e^2}} (P\varphi + \bar{P}\bar{\varphi}), \quad (76)$$

$$R_2 = \frac{3}{2\sqrt{1-e^2}} (P\psi - \bar{P}\bar{\psi}), \quad (77)$$

$$R_3 = \frac{1}{2\sqrt{1-e^2}} [(-\bar{\sigma} + 2\bar{\nu})P - (\bar{\sigma} + 2\bar{\nu})\bar{P}], \quad (78)$$

$$R_5 = -\frac{1}{2\sqrt{1-e^2}} \bar{\sigma}W, \quad (79)$$

$$R_4 = -\bar{R}_3, \quad R_6 = -\bar{R}_5. \quad (80)$$

Уравнения (74) служат основой излагаемого здесь метода. Напомним еще раз, что правая часть R голоморфна по X , причем свободные и линейные члены по X содержат малый параметр. Во многих задачах небесной механики зависимость R от t описывается периодическими или квази-периодическими функциями, и цель состоит в том, чтобы найти решение уравнений (74) без появления вековых членов.

§ 3. Метод решения

Для решения уравнений (74) применим методику общей планетной теории (Brumberg, 1970; Brumberg, Charpent, 1973). Будем искать близкое к тождественному преобразование от старых переменных X к новым переменным Y

$$X = Y + \Gamma(Y, t) \quad (81)$$

так, чтобы правая часть F новых уравнений

$$\dot{Y} = \sqrt{-1} \, n [PY + F(Y, t)] \quad (82)$$

имела бы по возможности более простой вид. При этом, разумеется, в функциях Γ и F не должны фигурировать вековые члены.

Подстановка (81) в (74) и сопоставление с (82) дает

$$E = (E + \Gamma_Y)^{-1} \left(R + P\Gamma - \Gamma_Y P Y - \frac{1}{\sqrt{-1} \, n} \Gamma_t \right). \quad (83)$$

Векторные функции Γ и F , голоморфные по Y , определяются в порядке возрастающих степеней Y . Вводя вектор F

$$F = (E + \Gamma_Y)^{-1} \left[R + \Gamma_Y \left(\frac{1}{\sqrt{-1} \, n} \Gamma_t + \Gamma_Y P Y - P\Gamma \right) \right], \quad (84)$$

перепишем F в виде

$$F = U + P\Gamma - \Gamma_Y P Y - \frac{1}{\sqrt{-1}n} \Gamma_t. \quad (85)$$

Если функция Γ известна с определенной степенью точности, то функция U становится известной с большей степенью точности. Соответствующее более точное значение Γ находится из уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{-1}n} \Gamma_t + \Gamma_Y P Y - P\Gamma = \bar{U}, \quad (86)$$

где $\bar{U}$ охватывает все те члены функции U , которые позволяют проинтегрировать уравнение (86) без появления вековых членов. Оставшиеся критические члены в U обозначаются через U^* , так что

$$U = U^* + \bar{U}. \quad (87)$$

Соотношения (84) и (85) теперь дают

$$U = R - \Gamma_Y U^* \quad (88)$$

и

$$F = U^*. \quad (89)$$

Соотношения (86) — (88) служат для итерационного определения функций U и Γ . Наиболее трудоемкой операцией этого алгоритма является осуществление подстановки (81) в правой части $R(X, t)$. Эта задача значительно облегчается при наличии пуассоновского процессора.

Компоненты векторов Γ , Y , U удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \bar{Y}_1 &= -Y_1, \quad \bar{Y}_2 = Y_2, \quad Y_4 = \bar{Y}_3, \quad Y_6 = \bar{Y}_5, \\ \bar{\Gamma}_1 &= -\Gamma_1, \quad \bar{\Gamma}_2 = \Gamma_2, \quad \Gamma_4 = \bar{\Gamma}_3, \quad \Gamma_6 = \bar{\Gamma}_5, \\ \bar{U}_1 &= U_1, \quad \bar{U}_2 = -U_2, \quad U_4 = -\bar{U}_3, \quad U_6 = -\bar{U}_5. \end{aligned}$$

В покомпонентной записи для $\kappa = 1, 2, 3, 5$ уравнение (86) дает

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-1}n} \frac{\partial \Gamma_\kappa}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma_\kappa}{\partial Y_1} Y_2 + \frac{\partial \Gamma_\kappa}{\partial Y_3} Y_3 - \frac{\partial \Gamma_\kappa}{\partial Y_4} Y_4 + \\ + \frac{\partial \Gamma_\kappa}{\partial Y_5} Y_5 - \frac{\partial \Gamma_\kappa}{\partial Y_6} Y_6 - (P\Gamma)_\kappa = \bar{U}_\kappa, \end{aligned} \quad (90)$$

причем

$$(P\Gamma)_1 = \Gamma_2, (P\Gamma)_2 = 0, (P\Gamma)_3 = \Gamma_3, (P\Gamma)_5 = \Gamma_5.$$

Функции U_k и Γ_k определяются в виде рядов по степеням Y

$$U_k = \sum U_{klpqrs}^{(\infty)}(t) Y_1^k Y_2^l Y_3^p Y_4^q Y_5^r Y_6^s, \quad (91)$$

$$\Gamma_k = \sum \Gamma_{klpqrs}^{(\infty)}(t) Y_1^k Y_2^l Y_3^p Y_4^q Y_5^r Y_6^s, \quad (92)$$

где суммирование происходит по всем неотрицательным значениям k, l, p, q, r, s .

Будем рассматривать частное решение уравнений (82), когда тождественно $Y_1 = Y_2 = 0$. Опуская излишние в этом случае нулевые значения индексов k, l в коэффициентах рядов (91), (92), имеем из (90)

$$\frac{1}{V-1} \dot{\Gamma}_{pqrs}^{(1)} + (p - q + r - s) \Gamma_{pqrs}^{(1)} - \Gamma_{pqrs}^{(2)} = U_{pqrs}^{(1)}, \quad (93)$$

$$\frac{1}{V-1} \dot{\Gamma}_{pqrs}^{(2)} + (p - q + r - s) \Gamma_{pqrs}^{(2)} = U_{pqrs}^{(2)}, \quad (94)$$

$$\frac{1}{V-1} \dot{\Gamma}_{pqrs}^{(3)} + (p - q + r - s - 1) \Gamma_{pqrs}^{(3)} = U_{pqrs}^{(3)}, \quad (95)$$

$$\frac{1}{V-1} \dot{\Gamma}_{pqrs}^{(5)} + (p - q + r - s - 1) \Gamma_{pqrs}^{(5)} = U_{pqrs}^{(5)}. \quad (96)$$

В широком классе задач небесной механики, допускающих решение без вековых по времени членов и без изменения среднего движения в возмущенном движении, выполняется условие

$$U_2^* = 0, \quad (97)$$

т. е. компонента U_2 не содержит критических членов. Тогда уравнение (94) интегрируется без появления вековых членов. Компонента U_1 может иметь критические члены, но в уравнении (93) они уничтожаются за счет выбора произвольной постоянной в Γ_2 , вводимой при интегрировании уравнения (94). Поэтому и уравнение (93) интегрируется без вековых членов. При этом в правых частях

уравнений (82) $F_1 = F_2 = 0$, так что эти уравнения действительно допускают решение $Y_1 = Y_2 = 0$.

Принимая за независимую переменную вместо времени t среднюю аномалию невозмущенного движения g , запишем решение уравнений (93) — (96) в виде ганзеновских квадратур

$$\Gamma_{pqrs}^{(2)} = \sqrt{V-1} n \int U_{pqrs}^{(2)} \times \\ \times \exp [\sqrt{V-1} (p-q+r-s)(g-\tilde{g})] dt - U_{pqrs}^{*(1)}, \quad (98)$$

$$\Gamma_{pqrs}^{(1)} = \sqrt{V-1} n \int (U_{pqrs}^{(1)} + \Gamma_{pqrs}^{(2)}) \times \\ \times \exp [\sqrt{V-1} (p-q+r-s)(g-\tilde{g})] dt, \quad (99)$$

$$\Gamma_{pqrs}^{(3)} = \sqrt{V-1} n \int \mathcal{U}_{pqrs}^{(3)} \times \\ \times \exp [\sqrt{V-1} (p-q+r-s-1)(g-\tilde{g})] dt, \quad (100)$$

$$\Gamma_{pqrs}^{(5)} = \sqrt{V-1} n \int \mathcal{U}_{pqrs}^{(5)} \times \\ \times \exp [\sqrt{V-1} (p-q+r-s-1)(g-\tilde{g})] dt, \quad (101)$$

где $\tilde{g}$ считается постоянной величиной при интегрировании, а после интегрирования принимает значение g . Критические члены в функциях U_{κ} определяются формулой

$$U_{pqrs}^{*(\kappa)} = \exp [-\sqrt{V-1} (p-q+r-s-\nabla_{\kappa}) g] \times \\ \times M_g [U_{pqrs}^{(\kappa)} \exp \sqrt{V-1} (p-q+r-s-\nabla_{\kappa}) g], \quad (102)$$

где

$$\nabla_{\kappa} = \begin{cases} 0, & \text{при } \kappa = 1 \text{ и } \kappa = 2, \\ 1, & \text{при } \kappa = 3 \text{ и } \kappa = 5, \end{cases}$$

а M_g означает оператор осреднения по g , исключаяющий из функции, стоящей под знаком оператора, все короткопериодические члены.

Таким образом, в правых частях уравнений (82) стоит вектор F с компонентами

$$F_1 = F_2 = 0, F_3 = U_3^*, F_5 = U_5^*, F_4 = -\bar{F}_3, F_6 = -\bar{F}_5,$$

причем функции U_{κ}^* ($\kappa = 3, 5$) определяются рядами (91) (при $k = l = 0$) с коэффициентами (102). Обозначая

$$Y_3 = a, Y_5 = b,$$

получим систему уравнений (82) в явной форме

$$\left. \begin{aligned} \dot{a} &= \sqrt{-1} n (a + F_3), \\ \dot{b} &= \sqrt{-1} n (b + F_5). \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

Совершая теперь переход от a , b к медленно меняющимся переменным α , β

$$a = \alpha \exp \sqrt{-1} g, \quad b = \beta \exp \sqrt{-1} g, \quad (104)$$

получим вековую систему

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha} &= \sqrt{-1} n \Phi, \\ \dot{\beta} &= \sqrt{-1} n \Psi \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

с правыми частями, не содержащими быстрых переменных:

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi \end{pmatrix} = F_{\kappa} \exp (-\sqrt{-1} g)$$

или

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi \end{pmatrix} = \sum M_g [U_{pqr}^{(\kappa)} \exp \sqrt{-1} (p - q + r - s - 1) g] \alpha^p \bar{\alpha}^q \beta^r \bar{\beta}^s, \quad (106)$$

где $\kappa = 3$ для функции Φ и $\kappa = 5$ для функции Ψ . В общем случае уравнения (105) образуют полиномиальную систему с медленно меняющимися коэффициентами.

Рассмотрим для конкретности частный случай, когда возмущающая сила G в правой части уравнений (36) зависит от t лишь посредством быстрых переменных — линейных функций

$$g_j = n_j t + g_j^{(0)} \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

с частотами n_j , несоизмеримыми между собой и со средним движением n . Такой случай имеет место, например, в задаче о движении малой планеты под действием N возмущающих больших планет, движущихся по кеплеровским орбитам. Тогда g_j представляют собой средние аномалии больших планет. С помощью гармонического анализа или аналитическим путем, коэффициенты рядов (91) могут быть

разложены в тригонометрические ряды

$$U_{pqrs}^{(\kappa)}(t) = \sum U_{pqrs\gamma\sigma}^{(\kappa)} \exp \sqrt{-1} \left(\gamma g + \sum_{j=1}^N \sigma_j g_j \right), \quad (107)$$

где суммирование распространяется по всем целочисленным значениям γ и $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N)$. В такой же форме определяются функции

$$\Gamma_{pqrs}^{(\kappa)}(t) = \sum \Gamma_{pqrs\gamma\sigma}^{(\kappa)} \exp \sqrt{-1} \left(\gamma g + \sum_{j=1}^N \sigma_j g_j \right). \quad (108)$$

Коэффициенты разложений (108) находятся по известным коэффициентам разложений (107) из соотношений

$$\Gamma_{pqrs\gamma\sigma}^{(2)} = \frac{1}{p - q + r - s + \gamma + \sum_{j=1}^N \sigma_j \frac{n_j}{n}} U_{pqrs\gamma\sigma}^{(2)}, \quad (109)$$

$$\Gamma_{pqrs\gamma\sigma}^{(1)} = \frac{1}{p - q + r - s + \gamma + \sum_{j=1}^N \sigma_j \frac{n_j}{n}} (U_{pqrs\gamma\sigma}^{(1)} + \Gamma_{pqrs\gamma\sigma}^{(2)}), \quad (110)$$

$$\Gamma_{pqrs\gamma\sigma}^{(\kappa)} = \frac{1}{p - q + r - s - 1 + \gamma + \sum_{j=1}^N \sigma_j \frac{n_j}{n}} U_{pqrs\gamma\sigma}^{(\kappa)}, \quad (\kappa = 3, 5). \quad (111)$$

Критические члены в функциях (107) соответствуют значениям

$$\gamma = -p + q - r + s + \nabla_{\kappa}, \quad \sigma_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, N). \quad (112)$$

Соответствующие коэффициенты в функциях (108) полагаются равными нулю за исключением коэффициента

$$\Gamma_{p, q, r, s, -p+q-r+s, 0}^{(2)} = -U_{p, q, r, s, -p+q-r+s, 0}^{(1)}. \quad (113)$$

Результирующая система (105) представляет собой в этом случае полиномиальную автономную систему с правыми частями

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi \end{pmatrix} &= \sum U_{p, q, r, s, 1-p+q-r+s, 0}^{(\kappa)} \alpha^p \bar{\alpha}^q \beta^r \bar{\beta}^s. \\ &(\kappa = 3, 5) \end{aligned} \quad (114)$$

В зависимости от цели построения конкретной теории движения решение системы (105) может быть получено в различных формах. Это решение вводит четыре дополнительных произвольных постоянных, определяемых обычным путем по начальным данным или результатам наблюдений.

§ 4. Задача движения N планет

Данный метод без труда распространяется на случай задачи многих тел, например, на задачу гелиоцентрического движения N больших планет. В работах (Brumberg, 1970; Brumberg, Chapront, 1973) общая планетная теория была построена по существу этим методом, однако с тем ограничением, что в порождающем решении эксцентриситеты и наклоны орбит планет полагались равными нулю. В работе (Duriez, 1977) за первое приближение общей планетной теории принимается движение по кеплеровским эллипсам, и теория строится в эллиптических переменных. Данный метод открывает возможность построения общей планетной теории в прямоугольных координатах при выборе в качестве первого приближения кеплеровского движения с произвольными параметрами.

Все предыдущие соотношения непосредственно обобщаются на задачу движения N планет. Применяя преобразования (13), (14) и (29) к каждой планете в отдельности, приходим к системе (74), где скалярный множитель n надо заменить на $N \times N$ диагональную матрицу $\mathcal{N}$, составленную из средних движений $n_1, n_2, \dots, n_N$. Векторы X и R имеют теперь размерность $6N$, а их компоненты ξ, η, u, v и R_1, R_2, R_3, R_5 в свою очередь являются N -векторами, причем компоненты правых частей $R_{1i}, R_{2i}, R_{3i}, R_{5i}$ ($i = 1, 2, \dots, N$) вычисляются по формулам (76) — (79) и (51), (52), примененными к каждой из планет. Жорданова матрица P размерности $6N$ имеет блочную структуру. Она получается из (74) при замене 0 и 1 на $N \times N$ нулевую и единичную матрицу соответственно. Преобразование (81) приводит к системе (82) снова с заменой n на $\mathcal{N}$, причем векторы Γ, Y и F имеют теперь размерность $6N$. При проведении итерационного процесса (86) — (89) соотношения (87), (89) остаются в силе, а уравнение (86) и соотношение (88) переходят соот-

ветственно в

$$\Gamma_t + \sqrt{-1} (\Gamma_Y \mathcal{N} P Y - \mathcal{N} P \Gamma) = \sqrt{-1} \mathcal{N} \mathcal{U}, \quad (115)$$

$$U = R - \mathcal{N}^{-1} \Gamma_Y \mathcal{N} U^*. \quad (116)$$

Компоненты $U_{\kappa i}$ и $\Gamma_{\kappa i}$ ($\kappa = 1, 2, \dots, 6$; $i = 1, 2, \dots, N$) ищутся в форме рядов (91), (92), где каждый из индексов k, l, p, q, r, s является теперь мульти-индексом размерности N . Коэффициенты этих рядов могут быть представлены, например, тригонометрическими рядами по средним аномалиям планет

$$U_{pqrs}^{(\kappa i)} = \sum U_{pqrs\gamma}^{(\kappa i)} \exp \sqrt{-1} (\gamma g), \quad (117)$$

$$\Gamma_{pqrs}^{(\kappa i)} = \sum \Gamma_{pqrs\gamma}^{(\kappa i)} \exp \sqrt{-1} (\gamma g), \quad (118)$$

где (γg) означает скалярное произведение мульти-индекса γ и вектора средних аномалий $g = (g_1, \dots, g_N)$. Коэффициенты рядов (118) получаются из коэффициентов рядов (117) по формулам:

$$\Gamma_{pqrs\gamma}^{(2i)} = \frac{n_i}{((p-q+r-s+\gamma)n)} U_{pqrs\gamma}^{(2i)}, \quad (119)$$

$$\Gamma_{pqrs\gamma}^{(1i)} = \frac{n_i}{((p-q+r-s+\gamma)n)} (U_{pqrs\gamma}^{(1i)} + \Gamma_{pqrs\gamma}^{(2i)}), \quad (120)$$

$$\Gamma_{pqrs\gamma}^{(\kappa i)} = \frac{n_i}{((p-q+r-s+\gamma)n) - n_i} U_{pqrs\gamma}^{(\kappa i)} \quad (\kappa = 3, 5). \quad (121)$$

Критические члены в функциях $U_{\kappa i}$ определяются значениями

$$\gamma_j = -p_j + q_j - r_j + s_j + \nabla_{\kappa} \delta_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (122)$$

и для этих значений

$$\Gamma_{pqrs\gamma}^{(2i)} = -U_{pqrs\gamma}^{(1i)}, \quad \Gamma_{pqrs\gamma}^{(\kappa i)} = 0 \quad (\kappa = 1, 3, 5). \quad (123)$$

Вековая система имеет вид (105) с заменой n на $\mathcal{N}$, а компоненты Φ_i, Ψ_i представляют собой ряды по степеням $\alpha_j, \bar{\alpha}_j, \beta_j, \bar{\beta}_j$ ($j = 1, 2, \dots, N$) с постоянными коэффициентами, появляющимися в разложениях функций $U_{\kappa i}$ ($\kappa = 3, 5$) при членах со значениями (122).

Если в порождающем решении эксцентриситеты и наклоны орбит планет положить равными нулю, то получается алгоритм общей планетной теории указанных выше работ (с изменением знака переменных p_i). Единственное отличие состоит в том, что определение членов нулевой и первой степени в преобразовании (81) в этих работах было выделено в качестве самостоятельных этапов алгоритма.

В заключение, отметим еще раз основные положения метода данной главы.

В основе предлагаемого метода построения теории движения в прямоугольных координатах лежит приведение (13), (14), (29) уравнений в вариациях задачи двух тел к жордановой форме (28). Это позволяет записать уравнения возмущенной задачи двух тел в виде системы (71), со значениями правых частей (76) — (80) и (46), (47) или (51), (52). Для решения системы (71) применяется метод разделения быстрых и медленных переменных, суть которого заключается в построении преобразования (81), приводящего систему (71) к системе (82). Алгоритм построения этого преобразования описывается соотношениями (86) — (89). При этом для широкого класса задач оказывается возможным построить решение без вековых членов и без изменения величины исходного среднего движения. Система (82) окончательно приводится к системе (105), содержащей лишь медленно меняющиеся переменные. Распространение метода на задачу движения N больших планет не представляет труда.

Метод допускает как аналитическое, так и численное задание элементов исходной кеплеровской орбиты. Для его реализации на ЭВМ целесообразно использовать пуассоновский и кеплеровский процессоры.

Общая форма представления координат больших планет, малых планет и Луны

§ 1. Движение больших планет

В этой заключительной главе описываются принципы построения и вид окончательных выражений для координат больших планет, Луны и малых планет в соответствии с методикой предыдущей главы. Однако за первое приближение всюду принимается движение по квази-периодическим орбитам при нулевых значениях эксцентриситетов и наклонов возмущаемого и возмущающих тел.

Построение теории движения больших планет указанного типа подробно освещено в работах (Brumberg, Charpent, 1973; Brumberg et al., 1978). Поэтому в этом параграфе приводится лишь общая форма полученного решения.

В уравнениях гелиоцентрического движения N больших планет

$$\ddot{\mathbf{r}}_i + \frac{f(m_0 + m_i)}{r_i^3} \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^N {}^{(i)}f m_j \left(\frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} \right) \quad (1)$$

делается не раз употреблявшаяся в этой книге замена переменных от эклиптических гелиоцентрических координат x_i, y_i, z_i , к безразмерным малым переменным p_i и w_i :

$$\left. \begin{aligned} x_i + \sqrt{-1} y_i &= a_i (1 - p_i) \exp \sqrt{-1} \lambda_i, \\ z_i &= a_i w_i, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где λ_i — средние долготы планет

$$\lambda_i = n_i t + \varepsilon_i, \quad (3)$$

а a_i — большие полуоси, связанные со средними движениями n_i третьим законом Кеплера

$$n_i^2 a_i^3 = f(m_0 + m_i). \quad (4)$$

Значения n_i предполагаются известными из наблюдений на большом интервале времени и не подвергаются из-

менениям в процессе построения теории. Кроме того, они считаются несоизмеримыми между собой. Переменные p_i — комплексные величины (сопряженные им величины обозначаются через q_i), а w_i — вещественные переменные. Переменные w_i имеют порядок наклонов планетных орбит к плоскости эклиптики. Что же касается переменных p_i , то их можно представить в виде

$$p_i = p_i^{(0)} + \delta p_i, \quad (5)$$

где величины $p_i^{(0)}$ имеют порядок возмущающих масс, а δp_i — порядок эксцентриситетов планетных орбит. При этом $p_i^{(0)}$ являются квази-периодическими функциями времени, явно зависящими лишь от разностей средних долгот

$$p_i^{(0)} = \sum_{\gamma} p_{\gamma}^{(i)} \exp \sqrt{-1} (\gamma \lambda), \quad (6)$$

где γ — N -мерный мульти-индекс с компонентами $\gamma_1, \dots, \gamma_N$, а $(\gamma \lambda)$ обозначает скалярное произведение

$$(\gamma \lambda) = \gamma_1 \lambda_1 + \dots + \gamma_N \lambda_N. \quad (7)$$

Суммирование в (6) происходит по всем целочисленным значениям $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ с условием

$$\gamma_1 + \dots + \gamma_N = 0. \quad (8)$$

Решение для δp_i , w_i имеет вид степенных рядов без свободных членов

$$\left. \begin{aligned} \delta p_i &= \sum p_{pqrs}^{(i)} \prod_{j=1}^N a_j^{p_j} \bar{a}_j^{q_j} b_j^{r_j} \bar{b}_j^{s_j}, \\ w_i &= \sum w_{pqrs}^{(i)} \prod_{j=1}^N a_j^{p_j} \bar{a}_j^{q_j} b_j^{r_j} \bar{b}_j^{s_j}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где a_j , b_j — переменные типа Лапласа, имеющие порядок малости соответственно эксцентриситета и наклона планеты с номером j . Коэффициенты этих рядов — квази-периодические функции времени типа (6), а именно

$$\left. \begin{aligned} p_{pqrs}^{(i)} &= \sum_{\gamma} p_{pqrs\gamma}^{(i)} \exp \sqrt{-1} (\gamma \lambda), \\ w_{pqrs}^{(i)} &= \sum_{\gamma} w_{pqrs\gamma}^{(i)} \exp \sqrt{-1} (\gamma \lambda) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

с условием (8). Суммирование в (9) происходит по всем неотрицательным значениям N -мерных мульти-индексов p, q, r, s . Переменные a_i, b_i удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{a}_i &= \sqrt{-1} n_i \left[(1 + A_{ii}) a_i + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^N A_{ij} a_j \exp \sqrt{-1} (\lambda_i - \lambda_j) + U_{3i}^* \right], \\ \dot{b}_i &= \sqrt{-1} n_i \left[(1 + B_{ii}) b_i + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^N B_{ij} b_j \exp \sqrt{-1} (\lambda_i - \lambda_j) + U_{5i}^* \right], \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где A, B — функции больших полуосей, имеющие порядок малости планетных масс, а функции $U_{\kappa i}^*$ ($\kappa = 3, 5$) представляют собой степенные ряды с квази-периодическими коэффициентами

$$U_{\kappa i}^* = \sum^* U_{pqrs\gamma}^{(\kappa i)} \exp \sqrt{-1} (\gamma \lambda) \prod_{j=1}^N a_j^{p_j} \bar{a}_j^{q_j} b_j^{r_j} \bar{b}_j^{s_j}, \quad (12)$$

где звездочка при сумме указывает, что суммирование производится лишь для критических комбинаций значений мульти-индексов, определяемых условиями

$$\sum_{j=1}^N (p_j - q_j + r_j - s_j) = 1, \quad \gamma_j = p_j - q_j + r_j - s_j - \delta_{ij}. \quad (13)$$

Кроме того, функции $U_{\kappa i}^*$ содержат лишь формы нечетных степеней

$$\sum_{j=1}^N (p_j + q_j + r_j + s_j) = 2k + 1, \quad k = 1, 2, \dots$$

В сочетании с первым из условий (13) отсюда следует

$$\sum_{j=1}^N (p_j + r_j) = k + 1, \quad \sum_{j=1}^N (q_j + s_j) = k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (14)$$

При переходе от a_i, b_i к медленно меняющимся переменным α_i, β_i , связанным с движением перигелиев и

узлов планетных орбит,

$$a_i = \alpha_i \exp \sqrt{-1} \lambda_i, \quad b_i = \beta_i \exp \sqrt{-1} \lambda_i \quad (15)$$

уравнения (11) перейдут в автономную систему

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha}_i &= \sqrt{-1} n_i \left(\sum_{j=1}^N A_{ij} \alpha_j + \sum^* U_{pqrs\gamma}^{(3i)} \prod_{j=1}^N \alpha_j^{p_j} \bar{\alpha}_j^{q_j} \beta_j^{r_j} \bar{\beta}_j^{s_j} \right), \\ \dot{\beta}_i &= \sqrt{-1} n_i \left(\sum_{j=1}^N B_{ij} \beta_j + \sum^* U_{pqrs\gamma}^{(5i)} \prod_{j=1}^N \alpha_j^{p_j} \bar{\alpha}_j^{q_j} \beta_j^{r_j} \bar{\beta}_j^{s_j} \right), \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

определяющую медленное изменение α_i , β_i . Как и в (12), звездочка при суммах означает суммирование по критическим значениям (13). Если этими суммами, которые пропорциональны малому параметру $\mu = 0,001$ (порядка отношения масс планет к массе Солнца) и начинаются с членов третьей степени относительно эксцентриситетов и наклонов, пренебречь, а в коэффициентах A_{ij} , B_{ij} ограничиться лишь членами первого порядка относительно μ , то система (16) перейдет в хорошо известную вековую систему Лапласа — Лагранжа.

Таким образом, общая теория движения N больших планет описывается выражениями (5), (6), (9), (10) и (15). Коэффициенты $p_\gamma^{(i)}$, $p_{pqrs\gamma}^{(i)}$, $w_{pqrs\gamma}^{(i)}$, а также коэффициенты системы (16) являются функциями средних движений, больших полуосей и масс планет. Если средние движения и массы планет считать известными, то по (14) можно найти большие полуоси и определять все эти коэффициенты в численной форме. Для теории движения больших планет это вполне оправдано, так как сохранение больших полуосей в буквенном виде приводит к очень длинным и медленно убывающим рядам. Впрочем, при построении планетной теории классического типа, обобщающей теорию Леверрье, Шапрону (Chapront, 1970) удалось сохранить все параметры, включая большие полуоси, в буквенном виде. Указанные коэффициенты $p_\gamma^{(i)}$, $p_{pqrs\gamma}^{(i)}$, $w_{pqrs\gamma}^{(i)}$ ищутся или в виде рядов по степеням μ , или итерациями относительно этого параметра. При этом коэффициенты $p_\gamma^{(i)}$ порождающего решения, а также коэффициенты системы (16) пропорциональны μ , а среди коэффициентов $p_{pqrs\gamma}^{(i)}$, $w_{pqrs\gamma}^{(i)}$ есть коэффициенты, не зависящие от μ .

Такие коэффициенты обусловлены задачей двух тел. В них все компоненты мульти-индекса γ , а также все компоненты мульти-индексов p, q, r, s с номерами, отличными от i , равны нулю. Таким образом, ряды задачи двух тел в общей планетной теории имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \delta p_i &= \sum_0 p_{pqrs} a_i^p \bar{a}_i^q b_i^r \bar{b}_i^s, \\ w_i &= \sum_0 w_{pqrs} a_i^p \bar{a}_i^q b_i^r \bar{b}_i^s. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Коэффициенты этих рядов являются числовыми константами, не зависящими от номера планеты i , а индексы суммирования p, q, r, s — скалярные величины. Фактическое построение рядов кеплеровского движения (17) и рядов промежуточного квази-периодического решения (6) рассматривалось в главе 7.

В зависимости от целей планетной теории решение автономной системы (16) может быть представлено в различных формах. Для практических потребностей, связанных с вычислением эфемерид, целесообразно решать систему (16) с помощью тейлоровских разложений по степеням t или их эквивалентов (Brumberg et al., 1975). Для изучения долгосрочной эволюции движения больших планет или для построения чисто тригонометрической теории движения Луны или малой планеты надо иметь представление координат больших планет в тригонометрической форме. Для этого система (16) должна быть решена методом типа нормализации Биркгофа, как это изложено в главе 4.

Сопоставление общей планетной теории рассмотренного здесь вида с планетной теорией классического типа проведено Дюрье (Duriez, 1978).

При построении теории движения Луны или малой планеты нет необходимости в полной теории движения больших планет. Достаточно иметь, кроме кеплеровских членов, результаты линейной теории, т. е. члены нулевой и первой степени относительно эксцентриситетов и наклонов, причем лишь с точностью первого порядка относительно планетных масс. Поэтому координаты p_i и w_i больших планет, необходимые для построения теории движения Луны или малой планеты, могут быть записаны

в виде

$$\left. \begin{aligned} p_i &= \delta p_i + p_i^{(0)} + \delta p_i^{(1)}, \\ w_i &= w_i + w_i^{(1)}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Нижние значки указывают здесь порядок малости относительно μ , верхние — степень по отношению к эксцентриситетам и наклонам. Члены δp_i , w_i — это кеплеровские разложения (17) вплоть до некоторой определенной степени $p + q + r + s$ относительно эксцентриситета и наклона планеты с номером i , $p_i^{(0)}$ — члены первого порядка по μ в промежуточном решении (6), $\delta p_i^{(1)}$, $w_i^{(1)}$ — члены первой степени относительно эксцентриситетов и наклонов орбит планет, вычисленные в первом порядке по μ . Эти члены удобно представить в форме

$$\delta p_i^{(1)} = \sum_{j=1}^N \sum_{\Delta}^{(i)} \delta p_{ij}^{(\Delta)}, \quad w_i^{(1)} = \sum_{j=1}^N \sum_{\Delta}^{(i)} w_{ij}^{(\Delta)}, \quad (19)$$

$$\delta p_{ij}^{(0)} = c(i, j, 0) a_i + d(i, j, 0) \bar{a}_i + c(i, j, 1) a_j + \\ + d(i, j, 1) \bar{a}_j, \quad (20)$$

$$w_{ij}^{(0)} = f(i, j, 0) b_i + \bar{f}(i, j, 0) \bar{b}_i + f(i, j, 1) b_j + \\ + \bar{f}(i, j, 1) \bar{b}_j. \quad (21)$$

Все коэффициенты $c(i, j, \Delta)$, $d(i, j, \Delta)$, $f(i, j, \Delta)$ ($\Delta = 0, 1$) разлагаются в ряды типа (6) с условием (8). Что же касается величин a_i , b_i , то они представляются выражениями (15), где за α_i , β_i можно принять решение линейной части системы (16) в первом порядке по μ . Иными словами,

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i &= \sum_{j=1}^N S_{ij} \xi_j \exp \sqrt{-1} (c_j t + \tau_j), \\ \beta_i &= \sum_{j=1}^N T_{ij} \eta_j \exp \sqrt{-1} (g_j t + \chi_j), \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

где c_i , S_{ij} и g_j , T_{ij} ($i = 1, 2, \dots, N$) — собственные числа и собственные векторы матриц $\|n_i A_{ij}\|$, $\|n_i B_{ij}\|$

соответственно, а $\xi_j, \eta_j, \tau_j, \chi_j$ — вещественные произвольные постоянные.

Выражения (2), (18), (17), (6), (19) — (21), (15) и (22) полностью определяют тригонометрическую теорию движения больших планет с точностью, достаточной для построения теории движения Луны или малой планеты.

§ 2. Движение малой планеты

Рассмотрим движение малой планеты, интерпретируя его как движение точки нулевой массы под действием Солнца с массой m_0 и N больших планет с массами m_i ($i = 1, 2, \dots, N$). В гелиоцентрических координатах x, y, z это движение описывается уравнениями

$$\ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z} \quad (23)$$

с силовой функцией

$$U = \frac{fm_0}{r} + \sum_{i=1}^N fm_i \left(\frac{1}{\Delta_i} - \frac{xx_i + yy_i + zz_i}{r_i^3} \right), \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 + z^2, \\ r_i^2 &= x_i^2 + y_i^2 + z_i^2, \\ \Delta_i^2 &= (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2. \end{aligned}$$

Гелиоцентрические координаты планет x_i, y_i, z_i подвергнем преобразованию (2) и аналогично положим

$$\left. \begin{aligned} x + \sqrt{-1}y &= a(1-p) \exp \sqrt{-1}\lambda, \\ z &= aw, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

где

$$\lambda = nt + \varepsilon$$

и

$$n^2 a^3 = fm_0.$$

Как обычно, рассматриваем нерезонансный случай, при котором среднее движение n несоизмеримо со средними движениями n_i больших планет. В новых переменных уравнения (23) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \ddot{p} + 2\sqrt{-1}n\dot{p} - \frac{3}{2}n^2(p+q) &= n^2P, \\ \ddot{w} + n^2w &= n^2W, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

где

$$P = -1 - \frac{1}{2} p - \frac{3}{2} q + \frac{2}{n^2 a^2} \frac{\partial U}{\partial q}, \quad (27)$$

$$W = w + \frac{1}{n^2 a^2} \frac{\partial U}{\partial w} \quad (28)$$

и

$$U = n^2 a^2 \left\{ \frac{a}{r} + \mu \sum_{i=1}^N \kappa_i \left[\frac{a}{\Delta_i} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} a^2 a_i \frac{(1-p)(1-q_i)\zeta_i + (1-q)(1-p_i)\zeta_i^{-1} + 2w w_i}{r_i^3} \right] \right\}. \quad (29)$$

Здесь

$$\zeta_i = \exp \sqrt{-1} (\lambda - \lambda_i), \quad (30)$$

и

$$\mu \kappa_i = \frac{m_i}{m_0}, \quad (31)$$

где μ — малый параметр порядка отношения масс планет к массе Солнца ($\mu = 0,001$). Кроме того, в новых переменных имеем

$$r^2 = a^2 [(1-p)(1-q) + w^2],$$

$$r_i^2 = a_i^2 [(1-p_i)(1-q_i) + w_i^2],$$

$$\Delta_i^2 = [a(1-p) - a_i(1-p_i)\zeta_i^{-1}][a(1-q) - \\ - a_i(1-q_i)\zeta_i] + (aw - a_i w_i)^2.$$

Поэтому

$$P = -1 - \frac{1}{2} p - \frac{3}{2} q + (1-p) \left(\frac{a}{r} \right)^3 + \\ + \mu \sum_{i=1}^N \kappa_i \left\{ \left[1 - p - \frac{a_i}{a} (1-p_i) \zeta_i^{-1} \right] \left(\frac{a}{\Delta_i} \right)^3 + \right. \\ \left. + \zeta_i^{-1} \left(\frac{a}{a_i} \right)^2 (1-p_i) \left(\frac{a_i}{r_i} \right)^3 \right\}, \quad (32)$$

$$W = w - w \left(\frac{a}{r} \right)^3 - \mu \sum_{i=1}^N \kappa_i \left[\left(w - \frac{a_i}{a} w_i \right) \left(\frac{a}{\Delta_i} \right)^3 + \right. \\ \left. + \left(\frac{a}{a_i} \right)^2 w_i \left(\frac{a_i}{r_i} \right)^3 \right] \quad (33)$$

или после разложения по степеням p , q , w , p_i , q_i , w_i

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_{klm} p^k q^l w^{2m} + \mu \times \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^N \kappa_i \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{l=E\left(\frac{m+1}{2}\right)}^{\infty} \psi_{k,l,r,s,t,t-m}^{(i)} p_i^r q_i^s w_i^{2t-m} \right) \times \\ \times p^k q^l w^m, \quad (34)$$

$$W = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \rho_{klm} p^k q^l w^{2m+1} + \mu \times \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^N \kappa_i \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{l=E\left(\frac{m}{2}\right)}^{\infty} \theta_{k,l,r,s,t,t-m}^{(i)} p_i^r q_i^s w_i^{2t-m+1} \right) \times \\ \times p^k q^l w^m. \quad (35)$$

Здесь φ_{klm} и ρ_{klm} — числовые коэффициенты, определяемые формулами

$$\varphi_{000} = \varphi_{100} = \varphi_{010} = 0, \\ \varphi_{klm} = (-1)^m \frac{\left(\frac{3}{2}\right)_m \left(\frac{1}{2} + m\right)_k \left(\frac{3}{2} + m\right)_l}{(1)_m (1)_k (1)_l}, \\ \rho_{000} = 0, \quad \rho_{klm} = (-1)^{m+1} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)_m \left(\frac{3}{2} + m\right)_k \left(\frac{3}{2} + m\right)_l}{(1)_m (1)_k (1)_l},$$

а $\psi^{(i)}$, $\theta^{(i)}$ — квази-периодические функции времени, разлагающиеся в экспоненциальные ряды относительно разности $\lambda - \lambda_i$

$$\psi_{klrsmt}^{(i)} = \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} \psi_{\sigma}(i; k, l, r, s, m, t) \zeta_i^{\sigma}, \\ \theta_{klrsmt}^{(i)} = \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} \theta_{\sigma}(i; k, l, r, s, m, t) \zeta_i^{\sigma}$$

с коэффициентами

$$\psi_{\sigma}(i; k, l, r, s, m, t) = (-1)^t \frac{\left(\frac{3}{2}\right)_m \left(\frac{1}{2} + m\right)_{k+r} \left(\frac{3}{2} + m\right)_{l+s}}{(1)_m (1)_{k+r} (1)_{l+s}} \times \\ \times \left[\left(\frac{a}{a_i}\right)^2 \delta_{k,0} \delta_{l,0} \delta_{t,0} \delta_{\sigma,-1} + \frac{(1+r)_k (1+s)_l (1+m-t)_{m+t}}{(1)_k (1)_l (1)_{m+t}} \times \right.$$

$$\times \gamma_{\sigma} \left\{ \begin{matrix} A, & B, & C, & D, & E \\ F, & G, & H, & I, & K \end{matrix} \right\}, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \text{где} \quad A &= r + s + m + t, & B &= -m - k - r - \frac{1}{2}, \\ C &= -m - l - s - \frac{3}{2}, & D &= -r + s, & E &= \frac{a_i}{a}, & F &= k + \\ &+ l + m - t + 2, & G &= -m - l - s - \frac{3}{2}, & H &= -m - k - \\ &- r - \frac{1}{2}, & I &= k - l - 1, & K &= \frac{a}{a_i}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Theta_{\sigma}(i; k, l, r, s, m, t) &= (-1)^t \frac{\left(\frac{3}{2}\right)_m \left(\frac{3}{2} + m\right)_{k+r} \left(\frac{3}{2} + m\right)_{l+s}}{(1)_m (1)_{k+r} (1)_{l+s}} \times \\ &\times \left[-\left(\frac{a}{a_i}\right)^2 \delta_{k,0} \delta_{l,0} \delta_{t,0} \delta_{\sigma,0} + \frac{(1+r)_k (1+s)_l (1+m-t)_{m+t+1}}{(1)_k (1)_l (1)_{m+t+1}} \times \right. \\ &\left. \times \gamma_{\sigma} \left\{ \begin{matrix} A+1, & B-1, & C, & D, & E \\ F, & G, & H-1, & I+1, & K \end{matrix} \right\} \right], \quad (37) \end{aligned}$$

причем коэффициенты γ_{σ} вычисляются по формулам (31) или (32) главы 6 со значениями параметров из первой или второй строки в фигурных скобках в зависимости от того, будет ли отношение a_i/a меньше или больше единицы. Разложения (34), (35) эквивалентны разложению (38) главы 6.

В соответствии с общей методикой полагаем

$$p = p^{(0)} + \delta p, \quad (38)$$

где $p = p^{(0)}$, $w = 0$ — частное квази-периодическое решение уравнений (26) при условии, что в правых частях положено $\delta p_i = w_i = 0$ (т. е. считается, что большие планеты движутся по плоским квази-периодическим орбитам). Функция $p^{(0)}$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{p}^{(0)} + 2 \sqrt{-1n} \dot{p}^{(0)} - \frac{3}{2} n^2 (p^{(0)} + q^{(0)}) = n^2 P^{(0)} \quad (39)$$

с правой частью

$$P^{(0)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\varphi_{klo} + \mu \sum_{i=1}^N \kappa_i \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \psi_{klrs00}^{(i)} (p_i^{(0)})^r (q_i^{(0)})^s \right] \times \\ \times (p^{(0)})^{\bar{k}} (q^{(0)})^l. \quad (40)$$

Как бы ни решать уравнение (39) — итерациями по μ или разложением в ряды по степеням μ — правая часть $P^{(0)}$ на каждом этапе приближения имеет вид

$$P^{(0)} = \sum p_{\gamma\gamma'}^{(0)} \exp \sqrt{-1} (\gamma\lambda + \gamma'\lambda'), \quad (41)$$

где λ' — вектор средних долгот больших планет $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$, а γ' — N -мерный мульти-индекс $(\gamma_1, \dots, \gamma_N)$. При этом

$$\gamma + \gamma_1 + \dots + \gamma_N = 0. \quad (42)$$

Поэтому и $p^{(0)}$ имеет тот же вид

$$p^{(0)} = \sum p_{\gamma\gamma'} \exp \sqrt{-1} (\gamma\lambda + \gamma'\lambda') \quad (43)$$

с коэффициентами

$$\left. \begin{aligned} p_{00} &= -\frac{1}{3} p_{00}^{(0)}, \\ p_{\gamma\gamma'} &= n^2 \frac{\left[(\gamma n + \gamma' n')^2 - 2n(\gamma n + \gamma' n') + \frac{3}{2} n^2 \right] p_{\gamma\gamma'}^{(0)} - \frac{3}{2} n^2 p_{-\gamma, -\gamma'}^{(0)}}{(\gamma n + \gamma' n')^2 [n^2 - (\gamma n + \gamma' n')^2]} \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

В первом же порядке по μ имеем

$$P^{(0)} = \mu \sum_{i=1}^N \kappa_i \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} \psi_{\sigma}(i; 0, 0, 0, 0, 0, 0) \xi_i^{\sigma}$$

и соответственно

$$p^{(0)} = \mu \sum_{i=1}^N \kappa_i \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} p_{\sigma}^{(i)} \xi_i^{\sigma} \quad (45)$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} p_0^{(i)} &= -\frac{1}{3} \psi_0(i; 0, 0, 0, 0, 0, 0), \\ p_{\sigma}^{(i)} &= \frac{1}{\left(1 - \frac{n_i}{n}\right)^2 \sigma^2 \left[1 - \left(1 - \frac{n_i}{n}\right)^2 \sigma^2\right]} \left\{ \left[\left(1 - \frac{n_i}{n}\right)^2 \sigma^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \left(1 - \frac{n_i}{n}\right) \sigma + \frac{3}{2} \right] \psi_{\sigma}(i; 0, 0, 0, 0, 0, 0) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2} \psi_{-\sigma}(i; 0, 0, 0, 0, 0, 0) \right\} \end{aligned}$$

Отметим еще выражение коэффициентов правых частей через симметричные коэффициенты Лапласа

$$\psi_{\sigma}(i; 0, 0, 0, 0, 0, 0) = \left(\frac{a}{a_i}\right)^2 \delta_{\sigma, -1} + \frac{1}{2} a^3 c_3^{(\sigma)}(a, a_i) - \\ - \frac{1}{2} a^2 a_i c_3^{(\sigma+1)}(a, a_i).$$

Напомним, что симметричными коэффициентами Лапласа называются коэффициенты разложения

$$\frac{1}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos H)^{n/2}} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} c_n^{(\sigma)}(r, r') \cos \sigma H, \\ c_n^{(-\sigma)}(r, r') = c_n^{(\sigma)}(r, r').$$

Эти функции, симметричные относительно своих аргументов, выражаются через обычные коэффициенты Лапласа (§ 2 главы 6) формулой

$$c_n^{(\sigma)}(r, r') = \frac{1}{(\max\{r, r'\})^n} b_n^{(\sigma)}\left(\frac{\min\{r, r'\}}{\max\{r, r'\}}\right)$$

или с помощью функции (32) главы 6

$$c_n^{(\sigma)}(r, r') = \frac{2}{(\max\{r, r'\})^n} \gamma_{\sigma}\left(0, -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}, 0, \frac{\min\{r, r'\}}{\max\{r, r'\}}\right).$$

Преобразуем теперь уравнения (26) с учетом замен (38) и (5). Осуществляя эти замены в правых частях (34), (35), имеем

$$P = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} P_{\alpha\beta m} (\delta p)^{\alpha} (\delta q)^{\beta} w^{2m} + \\ + \mu \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^N \sum_{\sigma=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{t=E\left(\frac{m+1}{2}\right)}^{\infty} P_{\alpha, \beta, \sigma, \nu, t, t-m}^{(i)} \times \right. \\ \left. \times (\delta p_i)^{\sigma} (\delta q_i)^{\nu} w_i^{2t-m} \right] (\delta p)^{\alpha} (\delta q)^{\beta} w^m, \quad (46)$$

$$W = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} W_{\alpha\beta m} (\delta p)^{\alpha} (\delta q)^{\beta} w^{2m+1} + \\ + \mu \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^N \sum_{\sigma=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{t=E\left(\frac{m}{2}\right)}^{\infty} W_{\alpha, \beta, \sigma, \nu, t, t-m}^{(i)} \times \right. \\ \left. \times (\delta p_i)^{\sigma} (\delta q_i)^{\nu} w_i^{2t-m+1} \right] (\delta p)^{\alpha} (\delta q)^{\beta} w^m, \quad (47)$$

где коэффициенты являются функциями квази-периодических решений $p^{(0)}$, $p_i^{(0)}$:

$$\begin{aligned}
 P_{\alpha\beta m} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(1+k)_{\alpha} (1+l)_{\beta}}{(1)_{\alpha} (1)_{\beta}} \varphi_{\alpha+k, \beta+l, m} p^k q^l, \\
 P_{\alpha\beta\sigma\nu m}^{(i)} &= \kappa_i \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1+k)_{\alpha} (1+l)_{\beta} (1+r)_{\sigma} (1+s)_{\nu}}{(1)_{\alpha} (1)_{\beta} (1)_{\sigma} (1)_{\nu}} \times \\
 &\quad \times \Psi_{\alpha+k, \beta+l, \sigma+r, \nu+s, m, i}^{(i)} p^k q^l p_i^r q_i^s, \\
 W_{\alpha\beta m} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(1+k)_{\alpha} (1+l)_{\beta}}{(1)_{\alpha} (1)_{\beta}} \varrho_{\alpha+k, \beta+l, m} p^k q^l, \\
 W_{\alpha\beta\sigma\nu m}^{(i)} &= \kappa_i \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1+k)_{\alpha} (1+l)_{\beta} (1+r)_{\sigma} (1+s)_{\nu}}{(1)_{\alpha} (1)_{\beta} (1)_{\sigma} (1)_{\nu}} \times \\
 &\quad \times \theta_{\alpha+k, \beta+l, \sigma+r, \nu+s, m, i}^{(i)} p^k q^l p_i^r q_i^s.
 \end{aligned}$$

В этих формулах надо полагать $p = p^{(0)}$, $p_i = p_i^{(0)}$. Выделяя свободные и линейные относительно δp , w , δp_i , w_i , члены получаем

$$\begin{aligned}
 P &= P^{(0)} - K\delta p - L\delta q + P', \\
 W &= -Mw + W', \\
 P^{(0)} &= P_{000} + \mu \sum_{i=1}^N P_{000000}^{(i)},
 \end{aligned}$$

$$P' = - \sum_{i=1}^N (K_i \delta p_i + L_i \delta q_i) + P^*,$$

$$W' = - \sum_{i=1}^N M_i w_i + W^*,$$

где

$$\begin{aligned}
 K &= -P_{100} - \mu \sum_{i=1}^N P_{100000}^{(i)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^3 - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \mu \sum_{i=1}^N \kappa_i \left(\frac{a}{\Delta_i} \right)^3,
 \end{aligned}$$

$$L = -P_{010} - \mu \sum_{i=1}^N P_{010000}^{(i)} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^5 (1-p)^2 - \\ - \frac{3}{2} \mu \sum_{i=1}^N \left(\frac{a}{\Delta_i} \right)^5 \left[1-p - \frac{a_i}{a} (1-p_i) \zeta_i^{-1} \right]^2,$$

$$M = -W_{000} - \mu \sum_{i=1}^N W_{0,0,0,0,0,-1}^{(i)} = \\ = -1 + \left(\frac{a}{r} \right)^3 + \mu \sum_{i=1}^N \kappa_i \left(\frac{a}{\Delta_i} \right)^5,$$

$$K_i = -\mu P_{001000}^{(i)} = \frac{1}{2} \mu \kappa_i a^2 a_i \left(\frac{1}{\Delta_i^3} - \frac{1}{r_i^3} \right) \zeta_i^{-1},$$

$$L_i = -\mu P_{000100}^{(i)} = \frac{3}{2} \mu \kappa_i a^2 a_i \times \\ \times \left\{ \frac{1}{\Delta_i^5} \left[1-p_i - \frac{a}{a_i} (1-p) \zeta_i \right]^2 - \frac{1}{r_i^5} (1-p_i)^2 \right\} \zeta_i^{-1},$$

$$M_i = -\mu W_{000000}^{(i)} = \mu \kappa_i a^2 a_i \left(\frac{1}{r_i^3} - \frac{1}{\Delta_i^3} \right).$$

Очевидно, что

$$M = -2K, \quad M_i = -2K_i \zeta_i.$$

В этих формулах также надо полагать $p = p^{(0)}$, $p_i = p_i^{(0)}$, $w = 0$, $w_i = 0$. Что же касается величин P^* , W^* , то они вычисляются по формулам (46), (47) для P , W с условиями

$$\alpha + \beta + 2m > \Delta, \quad \alpha + \beta + \sigma + \nu + 2t > \Delta,$$

где $\Delta = 1$ для сумм в (46) и $\Delta = 0$ для сумм в (47).

Для P^* , W^* можно дать и замкнутые формулы, удобные для итерационного варианта метода. Именно:

$$P^* = -\frac{3}{2} A (\delta p \delta q + w^2) - \frac{3}{2} B S \delta p + (C - B \delta p) T + \\ + \mu \sum_{i=1}^N \kappa_i \left\{ -\frac{3}{2} A_i \left[\left(\delta p - \frac{a_i}{a} \zeta_i^{-1} \delta p_i \right) \left(\delta q - \frac{a_i}{a} \zeta_i \delta q_i \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(w - \frac{a_i}{a} w_i \right)^2 \right] - \frac{3}{2} B_i S_i \left(\delta p - \frac{a_i}{a} \zeta_i^{-1} \delta p_i \right) + \right.$$

$$+ \left[C_i - B_i \left(\delta p - \frac{a_i}{a} \zeta_i^{-1} \delta p_i \right) \right] T_i + \zeta_i^{-1} \left(\frac{a}{a_i} \right)^2 (1 - p_i) \left(\frac{a_i}{r_i} \right)^3 \Big\},$$

$$W^* = -B \left(\frac{3}{2} S + T \right) w -$$

$$- \mu \sum_{i=1}^N \kappa_i \left[B_i \left(\frac{3}{2} S_i + T_i \right) \left(w - \frac{a_i}{a} w_i \right) + \left(\frac{a}{a_i} \right)^2 w_i \left(\frac{a_i}{r_i} \right)^3 \right].$$

Здесь

$$S = D \delta p + \bar{D} \delta q - E (\delta p \delta q + w^2),$$

$$S_i = D_i \left(\delta p - \frac{a_i}{a} \zeta_i^{-1} \delta p_i \right) + \bar{D}_i \left(\delta q - \frac{a_i}{a} \zeta_i \delta q_i \right) - \\ - E_i \left[\left(\delta p - \frac{a_i}{a} \zeta_i^{-1} \delta p_i \right) \left(\delta q - \frac{a_i}{a} \zeta_i \delta q_i \right) + \left(w - \frac{a_i}{a} w_i \right)^2 \right]$$

и

$$T = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\left(\frac{3}{2} \right)_k}{(1)_k} S^k, \quad T_i = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\left(\frac{3}{2} \right)_k}{(1)_k} S_i^k.$$

Величины A, B, C, D, E являются функциями промежуточного решения $p = p^{(0)}$, $w = 0$, а аналогичные им величины A_i, B_i, C_i, D_i, E_i зависят, кроме того, и от промежуточного решения $p_i = p_i^{(0)}$, $w_i = 0$:

$$A = (1 - p) \left(\frac{a}{r} \right)^5, \quad B = \left(\frac{a}{r} \right)^3, \quad C = (1 - p) \left(\frac{a}{r} \right)^3,$$

$$D = (1 - q) \left(\frac{a}{r} \right)^2, \quad E = \left(\frac{a}{r} \right)^2,$$

$$A_i = \left[1 - p - \frac{a_i}{a} (1 - p_i) \zeta_i^{-1} \right] \left(\frac{a}{\Delta_i} \right)^5, \quad B_i = \left(\frac{a}{\Delta_i} \right)^3,$$

$$C_i = \left[1 - p - \frac{a_i}{a} (1 - p_i) \zeta_i^{-1} \right] \left(\frac{a}{\Delta_i} \right)^3,$$

$$D_i = \left[1 - q - \frac{a_i}{a} (1 - q_i) \zeta_i \right] \left(\frac{a}{\Delta_i} \right)^2, \quad E_i = \left(\frac{a}{\Delta_i} \right)^2.$$

Подстановка (38) в (26) с использованием (39) позволяет переписать уравнения движения малой планеты в виде

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{p} + 2\sqrt{-1} n \delta \dot{p} + n^2 \left[\left(-\frac{3}{2} + K \right) \delta p + \right. \\ \left. + \left(-\frac{3}{2} + L \right) \delta q \right] = n^2 P', \\ \ddot{w} + n^2 (1 + M) w = n^2 W'. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Отметим еще упрощение вида правых частей в случае, когда движение больших планет можно считать происходящим по промежуточным орбитам, т. е. когда

$$P' = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\substack{\beta=0 \\ \alpha+\beta+2m>1}}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(P_{\alpha\beta m} + \mu \sum_{i=1}^N P_{\alpha, \beta, 0, 0, m, -m}^{(i)} \right) (\delta p)^{\alpha} (\delta q)^{\beta} w^{2m}, \quad (49)$$

$$W' = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\substack{\beta=0 \\ \alpha+\beta+2m>0}}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(W_{\alpha\beta m} + \mu \sum_{i=1}^N W_{\alpha, \beta, 0, 0, m, -m-1}^{(i)} \right) \times \\ \times (\delta p)^{\alpha} (\delta q)^{\beta} w^{2m+1}. \quad (50)$$

Решение системы (48) достигается методом разделения переменных предыдущей главы. Замена переменных

$$\left. \begin{aligned} \delta p &= \xi - \frac{2}{3} \eta - \frac{1}{2} u + \frac{3}{2} \bar{u}, \\ \delta \dot{p} &= \sqrt{-1} n \left(\eta - \frac{1}{2} u - \frac{3}{2} \bar{u} \right), \\ w &= v + \bar{v}, \\ \dot{w} &= \sqrt{-1} n (v - \bar{v}), \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

где ξ — чисто мнимая переменная, η — вещественная переменная, u и v — комплексные переменные, приводит систему (48) к виду

$$\dot{X} = \sqrt{-1} n [(P + Q) X + R(X, t)]. \quad (52)$$

Здесь X — 6-мерный вектор с компонентами ξ , η , u , $\bar{u}$, v , $\bar{v}$, P — постоянная 6×6 жорданова матрица

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Q — 6×6 квази-периодическая матрица с элементами

$$Q_{11} = -L + \bar{L}, \quad Q_{12} = -\frac{2}{3}(2K + L + \bar{L}),$$

$$Q_{13} = \frac{1}{2}(2K + 3L - \bar{L}),$$

$$Q_{21} = \frac{3}{2}(-2K + L + \bar{L}), \quad Q_{22} = L - \bar{L},$$

$$Q_{23} = \frac{3}{4}(4K - 3L - \bar{L}),$$

$$Q_{31} = \frac{1}{2}(-4K + L + 3\bar{L}), \quad Q_{32} = \frac{1}{3}(-2K + L - 3\bar{L}),$$

$$Q_{33} = \frac{1}{4}(10K - 3L - 3\bar{L}), \quad Q_{43} = \frac{1}{4}(6K - 9L - \bar{L}),$$

$$Q_{14} = \bar{Q}_{13}, \quad Q_{24} = -\bar{Q}_{23}, \quad Q_{41} = \bar{Q}_{31}, \quad Q_{42} = -\bar{Q}_{32},$$

$$Q_{34} = -\bar{Q}_{43}, \quad Q_{44} = -Q_{33}, \quad Q_{55} = Q_{56} = -K,$$

$$Q_{65} = Q_{66} = K,$$

$$Q_{\kappa 5} = Q_{\kappa 6} = Q_{5\kappa} = Q_{6\kappa} = 0 \quad (\kappa = 1, 2, 3, 4),$$

а R — 6-мерный вектор правых частей с компонентами

$$R_1 = -p' - \bar{p}', \quad R_2 = \frac{3}{2}(p' - \bar{p}'), \quad R_3 = \frac{1}{2}(p' - 3\bar{p}'),$$

$$R_4 = -\bar{R}_3, \quad R_5 = -\frac{1}{2}W', \quad R_6 = -\bar{R}_5.$$

Решение системы (52) ищем путем преобразования от X к новым переменным Y по формуле

$$X = (E + S)Y + \Gamma(Y, t), \quad (53)$$

где E — единичная матрица, S — квази-периодическая матрица, уничтожающаяся при $\mu = 0$, компоненты вектора Γ — голоморфные функции Y и квази-периодические функции t . Эта замена приводит систему (51) к виду

$$\dot{Y} = \sqrt{-1}n [HY + F(Y, t)]. \quad (54)$$

Определение матриц S и H осуществляется следующим путем. Сначала итерациями или с помощью рядов по степеням μ определяются с необходимой степенью точности

матрицы S и G из уравнений

$$G = Q(E + S) - SG^*, \quad (55)$$

$$G = G^* + \tilde{G}, \quad (56)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-1}n} \dot{S} + SP - PS = \tilde{G}. \quad (57)$$

Разбиение (56) производится так, чтобы уравнение (57) можно было проинтегрировать в квази-периодическом виде по t . Критические члены G^* определяют матрицу H :

$$H = P + G^*. \quad (58)$$

В поэлементной записи соотношение (55) принимает вид

$$G_{\kappa\nu} = Q_{\kappa\nu} + \sum_{\lambda=1}^6 (Q_{\kappa\lambda} S_{\lambda\nu} - S_{\kappa\lambda} G_{\lambda\nu}^*) \quad (59)$$

($\kappa, \nu = 1, 2, \dots, 6$).

В общем случае на каждом этапе приближения имеет место разложение

$$G_{\kappa\nu} = \Sigma G_{\gamma\gamma'}^{(\kappa\nu)} \exp \sqrt{-1}(\gamma\lambda + \gamma'\lambda') \quad (60)$$

с условием (42). Поэтому и элементы матрицы S находятся в этой же форме.

$$S_{\kappa\nu} = \Sigma S_{\gamma\gamma'}^{(\kappa\nu)} \exp \sqrt{-1}(\gamma\lambda + \gamma'\lambda'), \quad (61)$$

причем из уравнения (57) следует

$$\begin{aligned} S_{\gamma\gamma'}^{(21)} &= \frac{n}{\gamma n + \gamma' n'} G_{\gamma\gamma'}^{(21)}, \\ S_{\gamma\gamma'}^{(22)} &= \frac{n}{\gamma n + \gamma' n'} (G_{\gamma\gamma'}^{(22)} - S_{\gamma\gamma'}^{(21)}), \\ S_{\gamma\gamma'}^{(11)} &= \frac{n}{\gamma n + \gamma' n'} (G_{\gamma\gamma'}^{(11)} + S_{\gamma\gamma'}^{(21)}), \\ S_{\gamma\gamma'}^{(12)} &= \frac{n}{\gamma n + \gamma' n'} (G_{\gamma\gamma'}^{(12)} - S_{\gamma\gamma'}^{(11)} + S_{\gamma\gamma'}^{(22)}), \\ S_{\gamma\gamma'}^{(23)} &= \frac{n}{\gamma n + \gamma' n' + n} G_{\gamma\gamma'}^{(23)}, \\ S_{\gamma\gamma'}^{(13)} &= \frac{n}{\gamma n + \gamma' n' + n} (G_{\gamma\gamma'}^{(13)} + S_{\gamma\gamma'}^{(23)}), \\ S_{\gamma\gamma'}^{(31)} &= \frac{n}{\gamma n + \gamma' n' - n} G_{\gamma\gamma'}^{(31)}, \end{aligned}$$

$$S_{\gamma\gamma'}^{(32)} = \frac{n}{\gamma n + \gamma' n' - n} (G_{\gamma\gamma'}^{(32)} - S_{\gamma\gamma'}^{(31)}),$$

$$S_{\gamma\gamma'}^{(\kappa\nu)} = \frac{n}{\gamma n + \gamma' n'} G_{\gamma\gamma'}^{(\kappa\nu)} \quad (\kappa, \nu) = (3,3), (5,5),$$

$$S_{\gamma\gamma'}^{(\kappa\nu)} = \frac{n}{\gamma n + \gamma' n' + 2n} G_{\gamma\gamma'}^{(\kappa\nu)} \quad (\kappa, \nu) = (4,3), (6,5).$$

К этому надо добавить, что матрица S имеет те же нулевые элементы, что и матрица Q , а соотношения сопряженности для элементов S отличаются знаком от соответствующих соотношений для Q :

$$\begin{aligned} S_{14} &= -\bar{S}_{13}, & S_{24} &= \bar{S}_{23}, & S_{41} &= -\bar{S}_{31}, & S_{42} &= \bar{S}_{32}, \\ S_{34} &= \bar{S}_{43}, & S_{44} &= \bar{S}_{33}, & S_{56} &= \bar{S}_{65}, & S_{66} &= \bar{S}_{55}. \end{aligned}$$

Следовательно, элементы матрицы G^*

$$G_{\kappa\nu}^* = [G_{\kappa\nu}] = G_{00}^{(\kappa\nu)}$$

для $(\kappa, \nu) = (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)$ и равны нулю для остальных значений (κ, ν) . Квадратные скобки означают здесь осреднение по λ и λ' . Таким образом, элементы матрицы H равны

$$\left. \begin{aligned} H_{11} &= [G_{11}], & H_{12} &= 1 + [G_{12}], \\ H_{21} &= [G_{21}], & H_{22} &= [G_{22}], \\ H_{33} &= -H_{44} = 1 + [G_{33}], & H_{55} &= -H_{66} = 1 + [G_{55}], \end{aligned} \right\} (62)$$

а остальные элементы равны нулю.

В первом порядке по μ все вышеприведенные формулы значительно упрощаются. Величины K , L и M , из которых составляются элементы матрицы Q , разлагаются в ряды типа (45) с коэффициентами

$$K_{\sigma}^{(i)} = -\psi_{\sigma}(i; 1, 0, 0, 0, 0, 0) - \frac{3}{4} p_{\sigma}^{(i)} - \frac{3}{4} p_{-\sigma}^{(i)},$$

$$L_{\sigma}^{(i)} = -\psi_{\sigma}(i; 0, 1, 0, 0, 0, 0) - \frac{3}{4} p_{\sigma}^{(i)} - \frac{15}{4} p_{-\sigma}^{(i)},$$

$$M_{\sigma}^{(i)} = -\theta_{\sigma}(i; 0, 0, 0, 0, 0, -1) + \frac{3}{2} p_{\sigma}^{(i)} + \frac{3}{2} p_{-\sigma}^{(i)}.$$

По этим коэффициентам вычисляются коэффициенты разложений

$$Q_{\kappa\nu} = \mu \sum_{i=1}^N \kappa_i \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} Q_{\sigma}^{(i; \kappa\nu)} \zeta_{\sigma}^{\sigma},$$

а в свою очередь по ним определяются коэффициенты разложений

$$S_{\kappa\nu} = \mu \sum_{i=1}^N \kappa_i \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} S_{\sigma}^{(i; \kappa\nu)} \zeta_i^{\sigma}.$$

Эти коэффициенты вычисляются по формулам:

$$S_{\sigma}^{(i; 21)} = \frac{n}{\sigma(n - n_i)} G_{\sigma}^{(i; 21)},$$

$$S_{\sigma}^{(i; 22)} = \frac{n}{\sigma(n - n_i)} (G_{\sigma}^{(i; 22)} - S_{\sigma}^{(i; 21)}),$$

$$S_{\sigma}^{(i; 11)} = \frac{n}{\sigma(n - n_i)} (G_{\sigma}^{(i; 11)} + S_{\sigma}^{(i; 21)}),$$

$$S_{\sigma}^{(i; 12)} = \frac{n}{\sigma(n - n_i)} (G_{\sigma}^{(i; 12)} - S_{\sigma}^{(i; 11)} + S_{\sigma}^{(i; 22)}),$$

$$S_{\sigma}^{(i; 23)} = \frac{n}{\sigma(n - n_i) + n} G_{\sigma}^{(i; 23)},$$

$$S_{\sigma}^{(i; 13)} = \frac{n}{\sigma(n - n_i) + n} (G_{\sigma}^{(i; 13)} + S_{\sigma}^{(i; 23)}),$$

$$S_{\sigma}^{(i; 31)} = \frac{n}{\sigma(n - n_i) - n} G_{\sigma}^{(i; 31)},$$

$$S_{\sigma}^{(i; 32)} = \frac{n}{\sigma(n - n_i) - n} (G_{\sigma}^{(i; 32)} - S_{\sigma}^{(i; 31)}),$$

$$S_{\sigma}^{(i; \kappa\nu)} = \frac{n}{\sigma(n - n_i)} G_{\sigma}^{(i; \kappa\nu)} \quad (\kappa, \nu) = (3, 3), (5, 5),$$

$$S_{\sigma}^{(i; \kappa\nu)} = \frac{n}{\sigma(n - n_i) + 2n} G_{\sigma}^{(i; \kappa\nu)} \quad (\kappa, \nu) = (4, 3), (6, 5),$$

(в первом порядке по μ , естественно, $G_{\kappa\nu} = Q_{\kappa\nu}$). Что же касается критических членов, то в функции от симметричных коэффициентов Лапласа имеем

$$\begin{aligned} [G_{33}] &= -[G_{44}] = -[G_{55}] = [G_{66}] = -\frac{3}{8} [G_{12}] = \\ &= -\frac{1}{4} \mu \sum_{i=1}^N \kappa_i a^2 a_i c_3^{(1)}(a, a_i) \end{aligned}$$

и

$$[G_{11}] = [G_{22}] = [G_{21}] = 0$$

(эти соотношения выполняются и в дальнейших приближениях).

Определение матриц S и H позволяет найти все члены, пропорциональные первой степени эксцентриситета и наклона малой планеты и не зависящие от эксцентриситетов и наклонов больших планет.

Перейдем теперь к нахождению векторов Γ и F . Компоненты этих векторов определяют члены, малость которых обусловлена либо второй степенью относительно эксцентриситета и наклона малой планеты, либо первой степенью относительно эксцентриситетов и наклонов больших планет. Для нахождения Γ и F сначала итерациями или с помощью рядов по степеням μ находятся в порядке возрастания степеней Y компоненты векторов Γ и U из системы

$$U = R + Q\Gamma - \Gamma_Y G^* Y - (S + \Gamma_Y) U^*, \quad (63)$$

$$U = U^* + \bar{U}, \quad (64)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-1}n} \Gamma_t + \Gamma_Y P Y - P\Gamma = \bar{U}. \quad (65)$$

Здесь Γ_t — частная производная от Γ по t , Γ_Y — матрица производных $\|\partial \Gamma_{\kappa} / \partial Y_{\nu}\|$ ($\kappa, \nu = 1, 2, \dots, 6$), U — вспомогательный вектор. Разбиение U по (64) на две части производится так, чтобы уравнение (65) имело квазипериодическое по t решение. После определения U и Γ имеем

$$F = U^*. \quad (66)$$

Компоненты векторов Γ и U удовлетворяют следующим соотношениям сопряженности:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_1 &= -\Gamma_1, & \bar{\Gamma}_2 &= \Gamma_2, & \Gamma_4 &= \bar{\Gamma}_3, & \Gamma_6 &= \bar{\Gamma}_5, \\ \bar{U}_1 &= U_1, & \bar{U}_2 &= -U_2, & U_4 &= -\bar{U}_3, & U_6 &= -\bar{U}_5. \end{aligned}$$

Поскольку порождающее решение содержит две произвольные постоянные, то достаточно найти частное решение системы (54), содержащее еще 4 постоянные. Поэтому можно ограничиться решением, при котором тождественно

$$Y_1 = Y_2 = 0. \quad (67)$$

Обозначая остальные компоненты вектора Y через

$$Y_3 = a, \quad Y_5 = b,$$

находим, что компоненты вектора U представляются степенными рядами

$$U_{\kappa} = \Sigma U_{pqrs}^{(\kappa)}(t) a^p \bar{a}^q b^r \bar{b}^s \quad (68)$$

и в такой же форме можно искать компоненты вектора Γ

$$\Gamma_{\kappa} = \Sigma \Gamma_{pqrs}^{(\kappa)}(t) a^p \bar{a}^q b^r \bar{b}^s. \quad (69)$$

Суммирование в (68), (69) происходит по всем неотрицательным значениям p, q, r, s . В покомпонентной записи уравнение (65) дает тогда

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-1}n} \dot{\Gamma}_{pqrs}^{(1)} + (p - q + r - s) \Gamma_{pqrs}^{(1)} - \Gamma_{pqrs}^{(2)} &= U_{pqrs}^{(1)}, \\ \frac{1}{\sqrt{-1}n} \dot{\Gamma}_{pqrs}^{(2)} + (p - q + r - s) \Gamma_{pqrs}^{(2)} &= U_{pqrs}^{(2)}, \\ \frac{1}{\sqrt{-1}n} \dot{\Gamma}_{pqrs}^{(\kappa)} + (p - q + r - s - 1) \Gamma_{pqrs}^{(\kappa)} &= U_{pqrs}^{(\kappa)} \end{aligned} \right\} \quad (\kappa = 3, 5). \quad (70)$$

В нерезонансных задачах небесной механики структура правых частей такова, что критические члены в компоненте $U^{(2)}$ обращаются в нуль

$$U_{pqrs}^{*(2)}(t) = 0 \quad (71)$$

и уравнение для $\Gamma^{(2)}$ интегрируется без труда. В компоненте $U^{(1)}$ для комбинации индексов

$$p - q + r - s = 0$$

может присутствовать постоянный критический член, мешающий интегрированию уравнения для $\Gamma^{(1)}$ в тригонометрической форме. Однако этот член может быть уничтожен выбором аддитивной произвольной постоянной в $\Gamma^{(2)}$ так, чтобы выполнялось условие

$$\Gamma_{pqrs}^{(2)} = -U_{pqrs}^{*(1)}, \quad (p - q + r - s = 0). \quad (72)$$

Это условие обеспечивает тригонометрическое решение уравнения для $\Gamma^{(1)}$. Критические члены в компонентах $U^{(3)}$ и $U^{(5)}$ образуют правые части системы (54). В силу (71), (72) и (66) имеем $F_1 = F_2 = 0$, так что уравнения (54) при этих условиях действительно допускают решение

(67). В явной форме уравнения (54) запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{a} &= \sqrt{-1} n [(1 + A) a + U_3^*], \\ \dot{b} &= \sqrt{-1} n [(1 + B) b + U_5^*] \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

с обозначениями

$$A = [G_{33}], \quad B = [G_{55}],$$

причем в состав системы (73) надо еще включить два сопряженных уравнения. После замены

$$a = \alpha \exp \sqrt{-1} \lambda, \quad b = \beta \exp \sqrt{-1} \lambda \quad (74)$$

уравнения (73) перейдут в следующие:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha} &= \sqrt{-1} n (A\alpha + \Phi), \\ \dot{\beta} &= \sqrt{-1} n (B\beta + \Psi), \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

где

$$\Phi = U_3^* \exp(-\sqrt{-1} \lambda), \quad \Psi = U_5^* \exp(-\sqrt{-1} \lambda). \quad (76)$$

Уравнения (75) описывают поведение медленно меняющихся переменных α и β . Функции Φ и Ψ представляют собой в общем случае ряды по степеням α , $\bar{\alpha}$, β , $\bar{\beta}$ с медленно меняющимися или постоянными коэффициентами. Конкретный вид этих функций зависит от аппроксимации правых частей $R(X, t)$ уравнений (52).

Пусть, например, движение больших планет задается в чисто тригонометрической форме с помощью (22). Тогда коэффициенты рядов (68) можно представить в виде

$$U_{pqr}^{(\kappa)}(t) = \Sigma U_{\gamma\sigma'\rho'}^{(\kappa; pqr)} \exp \sqrt{-1} (\gamma\lambda + \sigma'\lambda' + \rho'\theta'), \quad (77)$$

где σ' , ρ' — мульти-индексы, λ' — вектор средних долгот больших планет, θ' — вектор медленных переменных с компонентами

$$\theta_i = v_i t + \theta_i^{(0)}, \quad (78)$$

стоящими в качестве аргументов в выражениях (22). Одно из значений v_i ($i = 1, 2, \dots, 2N$) равно нулю. Коэффициенты рядов (69) ищутся в той же форме, и из

уравнений (70) следует

$$\begin{aligned}\Gamma_{\gamma\sigma'\rho'}^{(2; p q r s)} &= \frac{n}{(p-q+r-s+\gamma)n+\sigma'n'+\rho'v'} U_{\gamma\sigma'\rho'}^{(2; p q r s)}, \\ \Gamma_{\gamma\sigma'\rho'}^{(1; p q r s)} &= \frac{n}{(p-q+r-s+\gamma)n+\sigma'n'+\rho'v'} (U_{\gamma\sigma'\rho'}^{(1; p q r s)} + \Gamma_{\gamma\sigma'\rho'}^{(2; p q r s)}), \\ \Gamma_{\gamma\sigma'\rho'}^{(\kappa; p q r s)} &= \frac{n}{(p-q+r-s+\gamma-1)n+\sigma'n'+\rho'v'} U_{\gamma\sigma'\rho'}^{(\kappa; p q r s)} \\ &\quad (\kappa = 3, 5),\end{aligned}$$

$$v' = (v_1, v_2, \dots, v_{2N}).$$

Цель преобразования (53) — исключение быстрых переменных, поэтому критическими надо считать члены, у которых

$$\begin{aligned}p-q+r-s+\gamma &= \begin{cases} 0, & \kappa = 1, 2, \\ 1, & \kappa = 3, 5 \end{cases} \\ \sigma_i &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N).\end{aligned}$$

В силу этих условий правые части Φ , Ψ вековой системы (75) будут представлять собой ряды по степеням α , $\bar{\alpha}$, β , $\bar{\beta}$, коэффициенты которых зависят от времени лишь посредством тригонометрических функций от медленных аргументов (78).

Заметим еще, что члены правых частей линейные по эксцентриситетам и наклонам больших планет, в первом порядке по μ имеют вид

$$\begin{aligned}P' &= \mu \sum_{i=1}^N \kappa_i (\psi_{001000}^{(i)} \delta p_i + \psi_{000100}^{(i)} \delta q_i), \\ W' &= \mu \sum_{i=1}^N \kappa_i \theta_{000000}^{(i)} w_i.\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\delta p_i = -\frac{1}{2} a_i + \frac{3}{2} \bar{a}_i, \quad w_i = b_i + \bar{b}_i,$$

находим

$$\begin{aligned}R_1 &= -\frac{1}{2} \mu \sum_{i=1}^N \kappa_i [(-\psi_{001000}^{(i)} - \bar{\psi}_{000100}^{(i)} + 3\psi_{000100}^{(i)} + 3\bar{\psi}_{001000}^{(i)}) a_i + \\ &\quad + (3\psi_{001000}^{(i)} + 3\bar{\psi}_{000100}^{(i)} - \psi_{000100}^{(i)} - \bar{\psi}_{001000}^{(i)}) \bar{a}_i]\end{aligned}$$

$$R_2 = \frac{3}{4} \mu \sum_{i=1}^N \kappa_i [(-\psi_{001000}^{(i)} + \bar{\psi}_{000100}^{(i)} + 3\psi_{000100}^{(i)} - 3\bar{\psi}_{001000}^{(i)}) a_i + \\ + (3\psi_{001000}^{(i)} - 3\bar{\psi}_{000100}^{(i)} - \psi_{000100}^{(i)} + \bar{\psi}_{001000}^{(i)}) \bar{a}_i],$$

$$R_3 = \frac{1}{4} \mu \sum_{i=1}^N \kappa_i [(-\psi_{001000}^{(i)} + 3\bar{\psi}_{000100}^{(i)} + 3\psi_{000100}^{(i)} - 9\bar{\psi}_{001000}^{(i)}) a_i + \\ + (3\psi_{001000}^{(i)} - 9\bar{\psi}_{000100}^{(i)} - \psi_{000100}^{(i)} + 3\bar{\psi}_{001000}^{(i)}) \bar{a}_i],$$

$$R_5 = -\frac{1}{2} \mu \sum_{i=1}^N \kappa_i \theta_{000000}^{(i)} (b_i + \bar{b}_i),$$

откуда

$$U_3^* = \frac{1}{4} \mu \sum_{i=1}^N \kappa_i [-\psi_1(i; 0, 0, 1, 0, 0, 0) + \\ + 3\psi_{-1}(i; 0, 0, 0, 1, 0, 0) + 3\psi_1(i; 0, 0, 0, 1, 0, 0) - \\ - 9\psi_{-1}(i; 0, 0, 1, 0, 0, 0)] a_i \exp \sqrt{-1} (\lambda - \lambda_i), \\ U_5^* = -\frac{1}{2} \mu \sum_{i=1}^N \kappa_i \theta_1(i; 0, 0, 0, 0, 0, 0) b_i \exp \sqrt{-1} (\lambda - \lambda_i)$$

и с помощью симметричных коэффициентов Лапласа приходим к классическим формулам

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{4} \mu \sum_{i=1}^N \kappa_i a^2 a_i c_3^{(2)}(a, a_i) \alpha_i, \\ \Psi &= -\frac{1}{4} \mu \sum_{i=1}^N \kappa_i a^2 a_i c_3^{(1)}(a, a_i) \beta_i. \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

§ 3. Движение Луны

Покажем теперь, что теория геоцентрического движения Луны также может быть построена на основе рассматриваемой здесь общей теории. В отличие от задачи движения малой планеты отношения больших полуосей возмущаемого и возмущающих тел являются в этом случае малыми величинами, и их целесообразно использовать

в качестве параметров разложений. Кроме того, нельзя пренебрегать отношением массы Луны к массе Земли.

Вывод основных уравнений произведем, следуя работе (Ash, 1965). Пусть индекс s указывает на связь рассматриваемой величины с Солнцем, e — с Землей, m — с Луной, c — с барицентром системы Земля — Луна, а j означает номер одной из больших планет ($j = 1, 2, 4, \dots, N$, где $N = 8$ или 9 в зависимости от того, исключается ли из рассмотрения Плутон или нет). Так, например, x_j — вектор положения планеты j в некоторой инерциальной системе, $x_{js} = x_j - x_s$ — вектор относительного положения планеты j по отношению к Солнцу s , r_j, r_{js} — длины этих векторов, M_j — масса планеты j и т. д. Уравнения движения Земли, Луны, Солнца и планет имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_e &= fM_m \frac{x_{me}}{r_{me}^3} + fM_s \frac{x_{se}}{r_{se}^3} + f \sum_j M_j \frac{x_{je}}{r_{je}^3} + \frac{1}{M_e} F_e, \\ \ddot{x}_m &= fM_e \frac{x_{em}}{r_{em}^3} + fM_s \frac{x_{sm}}{r_{sm}^3} + f \sum_j M_j \frac{x_{jm}}{r_{jm}^3} + \frac{1}{M_m} F_m, \\ \ddot{x}_s &= fM_e \frac{x_{es}}{r_{es}^3} + fM_m \frac{x_{ms}}{r_{ms}^3} + f \sum_j M_j \frac{x_{js}}{r_{js}^3}, \\ \ddot{x}_i &= fM_s \frac{x_{si}}{r_{si}^3} + fM_e \frac{x_{ei}}{r_{ei}^3} + fM_m \frac{x_{mi}}{r_{mi}^3} + f \sum_j^{(i)} M_j \frac{x_{ji}}{r_{ji}^3} \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

($i = 1, 2, 4, \dots, N$).

Здесь F_e и F_m означают дополнительные силы, действующие на Землю и Луну соответственно (главным образом, влияние несферичности фигур Земли и Луны).

Вводя массу барицентра системы Земля — Луна

$$M_c = M_e + M_m,$$

имеем

$$x_c = \frac{M_e}{M_c} x_e + \frac{M_m}{M_c} x_m$$

и

$$x_{es} = x_{cs} - \frac{M_m}{M_c} x_{me}, \quad (81)$$

$$x_{ms} = x_{cs}' + \frac{M_e}{M_c} x_{me}, \quad (82)$$

Уравнения для x_e и x_m заменим уравнениями для x_{me} и x_c :

$$\ddot{x}_{me} = -fM_c \frac{x_{me}}{r_{me}^3} + fM_s \left(\frac{x_{es}}{r_{es}^3} - \frac{x_{ms}}{r_{ms}^3} \right) + \\ + f \sum_j M_j \left(\frac{x_{jm}}{r_{jm}^3} - \frac{x_{je}}{r_{je}^3} \right) + \frac{1}{M_m} F_m - \frac{1}{M_e} F_e, \quad (83)$$

$$\ddot{x}_c = fM_s \left(\frac{M_e}{M_c} \frac{x_{se}}{r_{se}^3} + \frac{M_m}{M_c} \frac{x_{sm}}{r_{sm}^3} \right) + \\ + f \sum_j M_j \left(\frac{M_e}{M_c} \frac{x_{je}}{r_{je}^3} + \frac{M_m}{M_c} \frac{x_{jm}}{r_{jm}^3} \right) + \frac{1}{M_c} (F_e + F_m). \quad (84)$$

В свою очередь уравнения для x_c и x_i заменим гелиоцентрическими уравнениями для x_{cs} и x_{is} :

$$\ddot{x}_{cs} = -f(M_s + M_c) \frac{x_{cs}}{r_{cs}^3} + f \sum_j M_j \left(\frac{x_{jc}}{r_{jc}^3} - \frac{x_{js}}{r_{js}^3} \right) + \\ + A + \sum_j A_j + \frac{1}{M_c} (F_e + F_m), \quad (85)$$

$$\ddot{x}_{is} = -f(M_s + M_i) \frac{x_{is}}{r_{is}^3} + f \sum_j^{(i)} M_j \left(\frac{x_{ji}}{r_{ji}^3} - \frac{x_{js}}{r_{js}^3} \right) + \\ + fM_c \left(\frac{x_{ci}}{r_{ci}^3} - \frac{x_{cs}}{r_{cs}^3} \right) + T_i. \quad (86)$$

Здесь

$$A = f(M_s + M_c) \left(\frac{x_{cs}}{r_{cs}^3} - \frac{M_e}{M_c} \frac{x_{es}}{r_{es}^3} - \frac{M_m}{M_c} \frac{x_{ms}}{r_{ms}^3} \right), \\ A_j = fM_j \left(\frac{x_{cj}}{r_{cj}^3} - \frac{M_e}{M_c} \frac{x_{ej}}{r_{ej}^3} - \frac{M_m}{M_c} \frac{x_{mj}}{r_{mj}^3} \right), \\ T_i = fM_e \left(\frac{x_{ei}}{r_{ei}^3} - \frac{x_{es}}{r_{es}^3} \right) + fM_m \left(\frac{x_{mi}}{r_{mi}^3} - \frac{x_{ms}}{r_{ms}^3} \right) - \\ - fM_c \left(\frac{x_{ci}}{r_{ci}^3} - \frac{x_{cs}}{r_{cs}^3} \right)$$

Уравнения (85), (86) являются точными. Члены с A , A_j , T_i возникли в них в результате замены Земли и Луны на барицентр системы Земля—Луна с массой M_c . Обозначая

$$\omega_s = \frac{x_{me} x_{cs}}{r_{me} r_{cs}}, \quad \omega_j = \frac{x_{me} x_{cj}}{r_{me} r_{cj}}, \quad (87)$$

в силу (81), (82) имеем разложения:

$$\frac{1}{r_{es}^n} = \frac{1}{r_{cs}^n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{M_m}{M_c} \right)^k \left(\frac{r_{me}}{r_{cs}} \right)^k C_k^{n/2}(\omega_s),$$

$$\frac{1}{r_{ms}^n} = \frac{1}{r_{cs}^n} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{M_e}{M_c} \right)^k \left(\frac{r_{me}}{r_{cs}} \right)^k C_k^{n/2}(\omega_s)$$

и аналогично для r_{ej} , r_{mj} . Здесь $C_k^{n/2}(\omega)$ — полиномы Генбауэра и, в частности,

$$C_0^{n/2}(\omega) = 1, \quad C_1^{n/2}(\omega) = n\omega, \quad C_2^{n/2}(\omega) = \frac{n}{2} [(n+2)\omega^2 - 1].$$

Ограничиваясь членами не выше второй степени относительно величин r_{me}/r_{cs} и r_{me}/r_{ci} , получаем следующие приближенные значения:

$$A = 3f(M_s + M_c) \frac{M_e}{M_c} \frac{M_m}{M_c} \left(\frac{r_{me}}{r_{cs}} \right)^2 \frac{1}{r_{cs}^2} \left[\frac{x_{me}}{r_{me}} \omega_s - \frac{x_{cs}}{r_{cs}} \left(\frac{5}{2} \omega_s^2 - \frac{1}{2} \right) \right],$$

$$A_j = 3fM_j \frac{M_e}{M_c} \frac{M_m}{M_c} \left(\frac{r_{me}}{r_{cj}} \right)^2 \frac{1}{r_{cj}^2} \left[\frac{x_{me}}{r_{me}} \omega_j - \frac{x_{cj}}{r_{cj}} \left(\frac{5}{2} \omega_j^2 - \frac{1}{2} \right) \right],$$

$$T_i = 3fM_c \frac{M_e}{M_c} \frac{M_m}{M_c} \left\{ \left(\frac{r_{me}}{r_{cs}} \right)^2 \frac{1}{r_{cs}^2} \left[\frac{x_{me}}{r_{me}} \omega_s - \frac{x_{cs}}{r_{cs}} \left(\frac{5}{2} \omega_s^2 - \frac{1}{2} \right) \right] - \left(\frac{r_{me}}{r_{ci}} \right)^2 \frac{1}{r_{ci}^2} \left[\frac{x_{me}}{r_{me}} \omega_i - \frac{x_{ci}}{r_{ci}} \left(\frac{5}{2} \omega_i^2 - \frac{1}{2} \right) \right] \right\}.$$

Численные оценки показывают, что влияние членов A_j и T_i пренебрежимо мало, но член A в уравнениях (85) необходимо учитывать. На практике сначала решаются уравнения (85), (86) при нулевых значениях A , A_j ,

T_i , F_e и F_m (теория движения N больших планет), затем решаются уравнения (83) (теория движения Луны), и после этого учитывается влияние отброшенных ранее членов.

Отбрасывая члены с A , A_j , T_i , F_e , F_m , вводя вместо индекса s значение $j = 3$ для величин, связанных с барицентром системы Земля—Луна, и обозначая гелиоцентрические радиусы положения планет x_{is} через $\mathbf{r}_i$, вместо (85), (86) получаем уравнения движения N больших планет в обычной форме

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -f(M_s + M_i) \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} + f \sum_{j=1}^N {}^{(i)} M_j \left(\frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} \right). \quad (88)$$

В уравнениях (83) геоцентрического движения Луны отбросим члены F_e , F_m и обозначим x_{me} через $\mathbf{r}$. Тогда в результате разложений по степеням r/r_3 и r/Δ_{3j} получаем

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} = & -fM_c \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \\ & + \frac{fM_s}{r_3^3} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \left(\frac{r}{r_3} \right)^k \left[r_3 \frac{r}{r_3} C_{k+1}^{s/2}(\omega_s) - r C_k^{s/2}(\omega_s) \right] + \\ & + f \sum_{j=1}^N {}^{(3)} \frac{M_j}{\Delta_{3j}^3} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \left(\frac{r}{\Delta_{3j}} \right)^k \left[(r_3 - r_j) \frac{r}{\Delta_{3j}} C_{k+1}^{s/2}(\omega_j) - r C_k^{s/2}(\omega_j) \right], \end{aligned} \quad (89)$$

где

$$\varepsilon_k = \left(\frac{M_m}{M_c} \right)^{k+1} + (-1)^k \left(\frac{M_e}{M_c} \right)^{k+1} \quad (90)$$

и

$$\omega_s = \frac{rr_3}{rr_3}, \quad \omega_j = \frac{r(r_3 - r_j)}{r\Delta_{3j}} \quad (j = 1, 2, 4, \dots, N). \quad (91)$$

С помощью силовой функции уравнения (89) могут быть записаны в виде

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}, \quad (92)$$

где

$$U = \frac{fM_c}{r} + fM_s \left(\frac{M_c}{M_e} \frac{1}{r_{ms}} + \frac{M_c}{M_m} \frac{1}{r_{es}} \right) + \\ + f \sum_{j=1}^N {}^{(3)} M_j \left(\frac{M_c}{M_e} \frac{1}{r_{mj}} + \frac{M_c}{M_m} \frac{1}{r_{ej}} \right) \quad (93)$$

или после разложений по степеням r/r_3 и r/Δ_{3j}

$$U = \frac{fM_c}{r} + \frac{fM_s}{r_3} \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon_{k-2} \left(\frac{r}{r_3} \right)^k P_k(\omega_s) + \\ + f \sum_{j=1}^N \frac{M_j}{\Delta_{3j}} \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon_{k-2} \left(\frac{r}{\Delta_{3j}} \right)^k P_k(\omega_j), \quad (94)$$

где $P_k(\omega)$ — полином Лежандра.

Вводя теперь средние движения Луны и планет

$$n^2 a^3 = fM_c,$$

$$n_j^2 a_j^3 = f(M_s + M_j) \quad (j = 1, 2, 3, \dots, N),$$

получаем

$$U = n^2 a^2 \left\{ \frac{a}{r} + \right. \\ + \left(\frac{n_3}{n} \right)^2 \frac{M_s}{M_s + M_c} \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon_{k-2} \left(\frac{a}{a_3} \right)^{k-2} \left(\frac{r}{a} \right)^k \left(\frac{a_3}{r_3} \right)^{k+1} P_k(\omega_s) + \\ \left. + \sum_{j=1}^N {}^{(3)} \left(\frac{n_j}{n} \right)^2 \frac{M_j}{M_s + M_j} \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon_{k-2} \left(\frac{a}{a_j} \right)^{k-2} \left(\frac{r}{a} \right)^k \left(\frac{a_j}{\Delta_{3j}} \right)^{k+1} P_k(\omega_j) \right\}. \quad (95)$$

Множители ε_k можно ликвидировать путем введения дополнительного степенного параметра. Например, в солнечной части функции U можно ввести параметры (Вес et al., 1973)

$$\sigma = \frac{a}{a_3} \frac{M_e - M_m}{M_c}, \quad \rho = \frac{a}{a_3} \frac{M_e M_m}{M_e^2 - M_m^2}, \quad (96)$$

и тогда величина

$$\varepsilon_{k-2} \left(\frac{a}{a_3} \right)^{k-2}$$

представится полиномом по σ и ρ степени $k - 2$, например:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \left(\frac{a}{a_3} \right)^0 &= 1, & \varepsilon_1 \left(\frac{a}{a_3} \right)^1 &= -\sigma, \\ \varepsilon_2 \left(\frac{a}{a_3} \right)^2 &= \sigma^2 + \sigma\rho, & \varepsilon_3 \left(\frac{a}{a_3} \right)^3 &= -\sigma^3 - 2\sigma^2\rho, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Разумеется, эта модификация не нужна, если используются численные значения масс Земли и Луны. В планетной же части силовой функции можно просто положить $\varepsilon_k = 1$ для всех k .

После этого совершаем преобразования (25) и (2). Уравнения движения Луны (92) принимают вид (26) с правыми частями (27), (28). Разложение U по степеням p , q , w , p_j , q_j , w_j осуществляются без труда с помощью пуассоновского и кеплеровского процессора с учетом того, что

$$\begin{aligned} \omega_s &= \frac{1}{2} \frac{a}{r} \frac{a_3}{r_3} [(1-p)(1-q_3)\zeta_3 + (1-q)(1-p_3)\zeta_3^{-1} + \\ &\quad + 2w w_3], \quad (97) \\ \omega_j &= \frac{1}{2} \frac{a}{r} \frac{a_j}{\Delta_{3j}} \left\{ (1-p) \left[\frac{a_3}{a_j} (1-q_3)\zeta_3 - (1-q_j)\zeta_j \right] + \right. \\ &\quad + (1-q) \left[\frac{a_3}{a_j} (1-p_3)\zeta_3^{-1} - (1-p_j)\zeta_j^{-1} \right] + \\ &\quad \left. + 2w \left(\frac{a_3}{a_j} w_3 - w_j \right) \right\}. \quad (98) \end{aligned}$$

Таким образом ω_s представляет собой ряд Пуассона с полиномиальными переменными p , q , w , p_3 , q_3 , w_3 и тригонометрической переменной $\lambda - \lambda_3$, а ω_j — ряд Пуассона с полиномиальными переменными p , q , w , p_3 , q_3 , w_3 , p_j , q_j , w_j и тригонометрическими переменными $\lambda - \lambda_3$ и $\lambda - \lambda_j$ (отношение a_3/a_j при вычислении ω_j берется в численном виде). В такой же форме получаются полиномы Лежандра $P_k(\omega_s)$ и $P_k(\omega_j)$.

В результате правые части уравнений движения Луны представляются рядами типа (34), (35) с дополнительными

степенными параметрами σ , ρ и a/a_j . Дальнейшая теория строится так же, как и в предыдущем параграфе. Средние движения n и n_j , а также массы M_j ($j = 1, 2, \dots, N$) берутся в численном виде. В качестве первого приближения принимается квази-периодическое движение $p = p^{(0)}$, $w = 0$, соответствующее нулевым значениям эксцентриситетов и наклонов орбит Луны и больших планет и нулевым значениям параметров a/a_3 , a/a_j . Однако это решение уже содержит планетные неравенства, как косвенные, вызванные членами $p_3^{(0)}$ в солнечной части силовой функции, так и прямые. Удобство этого решения в качестве первого приближения состоит в том, что оно имеет вид кратного ряда Фурье с численными коэффициентами. Далее находятся члены, зависящие лишь от первой степени эксцентриситета и наклона орбиты Луны. Затем определяются все остальные неравенства.

Вековая система (75) для Луны содержит члены, обусловленные движением перигея и узла орбиты Луны, а также движением перигелиев и узлов орбит больших планет.

Таким образом, теория движения Луны может быть построена в той же форме и на тех же принципах, что и теория движения больших планет.

Литература

- Абалакин В. К., Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г., Рябов Ю. А., 1976. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике.— 2-е изд., М.: Наука.
- Бабаев И. О., 1976а. Пособие по использованию предкомпилятора для системы АМС.— Алгоритмы небесной механики, № 11, с. 3—21, ИТА АН СССР, Ленинград.
- Бабаев И. О., 1976б. Интерпретирующая часть системы АМС TYPE.— Алгоритмы небесной механики, № 13, с. 3—28, ИТА АН СССР, Ленинград.
- Бабаев И. О., Красинский Г. А., 1978. Разложение силовой функции несферического тела в произвольной системе координат.— Бюлл. ИТА, т. 14, № 6, с. 334—341.¹
- Брумберг В. А., 1963. Ряды полиномов в задаче трех тел. — Бюлл. ИТА, т. 9, № 4, с. 234—256.
- Брумберг В. А., 1974. Небесно-механические методы проведения буквенных операций на ЭВМ.— Томск: ТГУ.
- Брумберг В. А., Исакович Л. А., 1974. Система АМС проведения аналитических операций над рядами Пуассона на ЭВМ.— Алгоритмы небесной механики, № 1, с. 3—44, ИТА АН СССР, Ленинград.
- Брумберг В. А., Исакович Л. А., 1975. Кеплеровский процессор и разложение пертурбационной функции с помощью системы АМС.— Алгоритмы небесной механики, № 4, с. 3—28, ИТА АН СССР, Ленинград.
- Брумберг В. А., Евдокимова Л. С., Скрипниченко В. И., 1975. Квази-периодические промежуточные орбиты больших планет и резонансы нулевого порядка.— Астрон. ж., т. 52, № 2, с. 420—431.
- Васильева А. В., 1975. Система АЛИТА проведения аналитических операций над рядами Пуассона на ЭВМ.— Алгоритмы небесной механики, № 7, с. 3—40, ИТА АН СССР, Ленинград.

- Гердт В. П., Тарасов О. В., Ширков Д. В., 1978. Аналитические вычисления на ЭВМ в физике и математике.— Сообщения ОИЯИ, № Р2—11547, с. 3—22, Дубна.
- Евдокимова Л. С., 1977. Система POLY проведения аналитических операций над степенными рядами на ЭВМ.— Алгоритмы небесной механики, № 15, с. 3—40, ИТА АН СССР, Ленинград.
- Евдокимова Л. С., Красинский Г. А., Мерман Г. А., Петровская М. С., Скрипниченко В. И., 1975. Небесная механика.— Итоги науки и техники. Астрономия, т. 11, М.
- Егорова А. В., 1960. Возмущения в движении искусственного спутника Земли от Луны, Солнца и сжатия Земли.— Бюлл. ИТА, т. 7, № 10, с. 815—821.
- Кнут Д., 1976. Искусство программирования для ЭВМ. т. I. Основные алгоритмы.— М.: Мир.
- Красинский Г. А., 1973а. Основные уравнения планетной теории.— В кн.: Малые планеты/Под ред. Н. С. Самойловой-Яхонтовой, М.: Наука, с. 81—107.
- Красинский Г. А., 1973б. К вычислению возмущений от несферичности Земли в движении близких искусственных спутников.— Астрон. ж., т. 50, № 5, с. 1076—1084.
- Ланс Дж. Н., 1962. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин.— М.: ИЛ.
- Ланцош К. 1961. Практические методы прикладного анализа.— М.: Физматгиз.
- Лидов М. Л., 1978. Полуаналитические методы расчета движения спутников.— Труды ИТА, т. 17, с. 54—61.
- Лица Д. К., Рябов Ю. А., 1974. Методы итераций и мажорирующие уравнения Ляпунова в теории нелинейных колебаний.— Кишинев.: Штиинца.
- Маркеев А. П., Сокольский А. Г., 1976. Некоторые вычислительные алгоритмы нормализации гамильтоновых систем.— Препринт ИПМ АН СССР, № 31, с. 3—61, М.
- Маркеев А. П., Сокольский А. Г., 1978. Метод исследования периодических движений Ляпунова в гамильтоновых системах и его реализация на ЭВМ.— Труды ИТА, вып. 17, с. 62—68.
- Рябов Ю. А., 1974. Построение периодических и условно-периодических численно-аналитических решений с помощью ЭВМ.— Difford 74, Summer school on ordinary differential equations, с. 89—117, Stara Lesna (Czechoslovakia).
- Рябов Ю. А., Толмачева Т. А., 1975. Некоторые итерационные методы построения решения задачи трех тел и их реализация на ЭВМ.— Письма в АЖ, т. 1, № 11, с. 42—44.

- Штифель Е., Шейфеле Г., 1975. Линейная и регулярная небесная механика.— М.: Наука.
- Abu-El-Ata N., Chapront J.*, 1975. Développements analytiques de l'inverse de la distance en Mécanique Célesté.— *Astron. and Astrophys.*, v. 38, No. 1, p. 57—66.
- Aksnes K.*, 1972. On the Use of Hill Variables in Artificial Satellite Theory: Brouwer's Theory.— *Astron. and Astrophys.*, v. 17, No. 1, p. 70—75.
- Alfriend K. T., Dasenbrock R., Pickard H., Deprit A.*, 1977a. The Extended Phase Space Formulation of the Vinti Problem.— *Celes. Mech.*, v. 16, No. 4, p. 441—458.
- Alfriend K. T., Dasenbrock R., Kaufman B.*, 1977b. Luni-Solar Perturbations in the Extended Phase Space Representation of the Vinti Problem.— *Internat. Astronaut. Federation 28 Congress*, Paper 77—209.
- Ash M. E.*, 1965. Generation of Planetary Ephemerides on an Electronic Computer.— *Lincoln. Lab. Techn. Rep. No. 391*, p. 1—82, M.I.T.
- Balmino G., Borderies N.*, 1978. Gravitational Potential of Solid Bodies in the Solar System.— *Celes. Mech.*, v. 17, No. 2, p. 113—119.
- Barton D., Bourne S. R., Fitch J. P.*, 1970a. An Algebra System.— *Computer J.*, v. 13, No. 1, p. 32—39.
- Barton D., Bourne S. R., Horton J. R.*, 1970b. The Structure of the Cambridge Algebra System.— *Computer J.*, v. 13, No. 3, p. 243—247.
- Bec A., Kovalevsky J., Meyer C.*, 1973. Contribution to an Analytical Lunar Theory.— *Moon*, v. 8, No. 4, p. 434—442.
- Broucke R.*, 1969. Perturbations in Rectangular Coordinates by Iteration.— *Celes. Mech.*, v. 1, No. 1, p. 110—126.
- Broucke R.*, 1970. How to Assemble a Keplerian Processor.— *Celes. Mech.*, v. 2, No. 1, p. 9—20.
- Broucke R. A.*, 1971a. Construction of Rational and Negative Powers of a Series.— *Comm. of Assoc. of Comp. Mach.*, v. 14, No. 1, p. 32—35.
- Broucke R.*, 1971b. Solution of the N-Body Problem with Recurrent Power Series.— *Celes. Mech.*, v. 4, No. 1, p. 110—115.
- Broucke R.*, 1973. Ten Subroutines for the Manipulation of Chebyshev Series.— *Comm. of Assoc. of Comp. Mach.*, v. 16, No. 4, p. 254—256.
- Broucke R.*, 1974a. Computation of Solar Perturbations with Poisson Series.— *Lect. Notes Math.*, v. 362, p. 237—259.

- Broucke R.*, 1974b. A Note on Velocity-Related Series Expansions in the Two-Body Problem.— *Celes. Mech.*, v. 10, No. 4, p. 469—474.
- Broucke R.*, 1978. On Pfaff's Equations of Motion in Dynamics: Applications to Satellite Theory.— *Celes. Mech.*, v. 18, No. 3, p. 207—222.
- Broucke R., Carthwaite K.*, 1969. A Programming System for Analytical Series Expansion on a Computer.— *Celes. Mech.*, v. 1, No. 2, p. 271—284.
- Broucke R., Gefola P.*, 1973. A Note on the Relations Between True and Eccentric Anomalies in the Two-Body Problem.— *Celes. Mech.*, v. 7, No. 3, p. 388—389.
- Broucke R., Smith G.*, 1971. Expansion of the Planetary Disturbing Function.— *Celes. Mech.*, v. 4, No. 3—4, p. 490—499.
- Brown E. W., Shook C. A.*, 1933. Planetary Theory.— Cambridge University Press.
- Brumberg V. A.*, 1970. Application of Hill's Lunar Method in General Planetary Theory.— In: Periodic Orbits, Stability and Resonances/Ed. G. E. O. Giacaglia.— Dordrecht: Reidel, p. 410—450.
- Brumberg V. A., Chapront J.*, 1973. Construction of a General Planetary Theory of the First Order.— *Celes. Mech.*, v. 8, No. 3, p. 335—356.
- Brumberg V. A., Evdokimova L. S., Kochina N. G.*, 1971. Analytical Methods for the Orbits of Artificial Satellites of the Moon.— *Celes. Mech.*, v. 3, No. 2, p. 197—221.
- Brumberg V. A., Evdokimova L. S., Skripnichenko V. I.*, 1975. Secular Perturbations in General Planetary Theory.— *Celes. Mech.*, v. 11, No. 1, p. 131—138.
- Brumberg V. A., Evdokimova L. S., Skripnichenko V. I.*, 1978. Mathematical Results of the General Planetary Theory in Rectangular Coordinates.— In: Dynamics of Planets and Satellites and Theories of their Motion/Ed. V. Szebechely.— Dordrecht: Reidel, p. 33—48.
- Campbell J. A.*, 1972. An Exercise in Symbolic Programming: Computation of General Normalized Inclination Functions.— *Celes. Mech.*, v. 6, No. 2, p. 187—197.
- Chapront J.*, 1970. Construction d'une théorie littérale planétaire jusqu'au second ordre des masses.— *Astron. and Astrophys.*, v. 7, No. 2, p. 175—203.
- Chapront J.*, 1977. Le Calcul Direct d'une Ephéméride de Planète.— *Astron. and Astrophys.*, v. 61, No. 1, p. 7—11.

- Cherniack J. R.*, 1973. A More General System for Poisson Series Manipulation.— *Celes. Mech.*, v. 7, No. 1, p. 107—121.
- Coffey S., Deprit A.*, 1978. Fast Evaluation of Fourier Series.— AIAA/AAS Astrodynamics Conf. Paper No. 78—1384, p. 1—6.
- Cunningham L. E.*, 1970. On the Computation of the Spherical Harmonic Terms Needed During the Numerical Integration of the Orbital Motion of an Artificial Satellite.— *Celes. Mech.*, v. 2, No. 2, p. 207—216.
- Dasenbrock R. R.*, 1973. Algebraic Manipulation by Computer.— Naval Research Laboratory Report No. 7564, p. 1—69.
- Deprit A.*, 1976. Ideal Frames for Perturbed Keplerian Motions.— *Celes. Mech.*, v. 13, No. 2, p. 253—263.
- Deprit A., Henrard J., Price J. F., Rom A.* 1969. Birkhoff's Normalization.— *Celes. Mech.*, v. 1, No. 2, p. 222—251.
- Deprit A., Poplarchek W., Deprit-Bartholomé A.*, 1975. Compression of Ephemerides.— *Celes. Mech.*, v. 11, No. 1, p. 53—58.
- Deprit A., Pickard H. M., Poplarchek W.*, 1978. Compression of Ephemerides by Discrete Chebyshev Approximations.— AIAA/AAS Astrodynamics Conf. Paper No. 78—1403, p. 1—9.
- Drożyner A.*, 1977a. Recurrent Calculation of Gravitational Acceleration of a Satellite.— *Acta Astronomica*, v. 27, No. 1, p. 15—22.
- Drożyner A.*, 1977b. An Algorithm for Recurrent Calculation of Gravitational Acceleration.— *Artificial Satellites*, v. 12, No. 2, p. 33—39.
- Duriez L.*, 1977. Théorie Générale Planétaire en Variables Elliptiques.— *Astron. and Astrophys.*, v. 54, No. 1, p. 93—112.
- Duriez L.*, 1978. Correspondance entre une Théorie Générale Planétaire en Variables Elliptiques et la Théorie Classique de Le Verrier.— In: *Dynamics of Planets and Satellites and Theories of their Motion*/Ed. V. Szebechely.— Dordrecht: Reidel, p. 15—32.
- Fateman R. J.*, 1974. On the Multiplication of Poisson Series.— *Celes. Mech.*, v. 10, No. 2, p. 243—247.
- Feagin T., Gottlieb R. G.*, 1971. Generalization of Lagrange's Implication Function Theorem to N-Dimensions.— *Celes. Mech.*, v. 3, No. 2, p. 227—231.
- Fisher D.*, 1972. Analytic Short-Period Lunar and Solar Perturbations of Artificial Satellites.— *Celes. Mech.*, v. 6, No. 4, p. 447—467.

- Giacaglia G. E. O.*, 1972. Perturbations Methods in Non—Linear Systems.— New York — Heidelberg — Berlin: Springer.
- Giacaglia G. E. O.*, 1975. Evaluation of Geopotential and Luni-Solar Perturbations by a Recursive Algorithm.— Appl. Mech. Res. Lab. Paper No. 1073, p. 1—18, Univ. of Texas at Austin.
- Henrard J.*, 1978. Hill's Problem in Lunar Theory.— Celes. Mech., v. 17, No. 2, p. 195—204.
- Hill G. W.*, 1913. Motion of System of Material Points under the Action of Gravitation.— Astron. J., v. 27, No. 22—23, p. 171—182.
- Hori G., Yuasa M.*, 1978. A Note on the Development of the Reciprocal Distance in Planetary Theory.— In: Dynamics of Planets and Satellites and Theories of their Motion/Ed. V. Szebechely.— Dordrecht: Reidel, p. 177.
- Howland R. A., jr.*, 1977. An Accelerated Elimination Technique for the Solution of Perturbed Hamiltonian Systems.— Celes. Mech., v. 15, No. 3, p. 327—352.
- Izsak I. G.*, 1963. A Note on Perturbation Theory.— Astron. J., v. 68, No. 8, p. 559—561.
- Janin G.*, 1978. Mission Analysis for Terrestrial Satellite and Planetary Orbiters with Special Emphasis on Highly Eccentric Orbits. 2. The Software Design.— ESA J., v. 2, No. 3, p. 201—206.
- Jarnagin M. P.*, 1965. Expansions in Elliptic Motion.— Astron. Papers Am. Ephemeris, v. 18, p. 1—659.
- Jefferys W. H.*, 1970. A FORTRAN-Based List Processor for Poisson Series.— Celes. Mech., v. 2, No. 4, p. 474—480.
- Jefferys W. H.*, 1971. Automated Closed Form Integration of Formulas in Elliptic Motion.— Celes. Mech., v. 3, No. 3, p. 390—394.
- Jefferys W. H.*, 1972. A Precompiler for the Formula Manipulation System TRIGMAN.— Celes. Mech., v. 6, No. 1, p. 117—124.
- Jefferys W. H., Ries L. M.*, 1975. Theory of Enceladus and Dione.— Astron. J., v. 80, No. 10, p. 876—884.
- Jupp A. H.*, 1975. On Broucke's Velocity-Related Series Expansions in the Two-Body-Problem.— Celes. Mech., v. 12, No. 4, p. 513—518.
- LeSchack A. R., Sconzo P.*, 1968. FORMAC Language and its Application to Celestial Mechanics.— Astron. J., v. 73, No. 3, p. 217—220.

- Lieske J. H.*, 1977. Theory of Motion of Jupiter's Galilean Satellites.— Astron. and Astrophys., v. 56, No. 3, p. 333—352.
- Mathlab Group. 1977. MACSYMA Reference Manual.— Version Nine. Mass. Inst. of Technology.
- Musen P.*, 1963. On a Modification of Hansen's Lunar Theory.— J. of Geophys. Res., v. 68, No. 5, p. 1439—1456.
- Musen P.*, 1965a. On the High Order Effects in the Methods of Krylov — Bogoliubov and Poincaré.— J. Astronaut. Sci., v. 12, No. 4, p. 129—134.
- Musen P.*, 1965b. On the General Perturbations of the Position Vectors of a Planetary System.— J. des Observateurs, v. 48, No. 1, p. 11—27.
- Musen P., Carpenter L.*, 1963. On the General Planetary Perturbations in Rectangular Coordinates.— J. of Geophys. Res., v. 68, No. 9, p. 2727—2734.
- Rom A.*, 1970. Mechanized Algebraic Operations (MAO).— Celes. Mech., v. 1, No. 3—4, p. 301—319.
- Rom A.*, 1971. Echeloned Series Processor (ESP).— Celes. Mech., v. 3, No. 3, p. 331—345.
- Roth E. A.*, 1977. Mission Analysis for Terrestrial Satellite and Planetary Orbiters with Special Emphasis on Highly Eccentric Orbits. 1. The Mathematical Background.— ESA J., v. 1, No. 3, p. 245—268.
- Sack R. A.*, 1964. Generalization of Laplace's Expansion to Arbitrary Powers and Functions of the Distance between Two Points.— J. Math. Phys., v. 5, No. 2, p. 245—251.
- Sconzo P., LeSchack A. R., Tobey R.*, 1965. Symbolic Computation of δ and g Series by Computer.— Astron. J., v. 70, No. 4, p. 269—271.
- Shelus P. J., Jefferys W. H.*, 1975. A Note on an Attempt at More Efficient Poisson Series Evaluation.— Celes. Mech., v. 11, No. 1, p. 75—78.
- Simon J. L., Bretagnon P.*, 1975. Perturbations du premier ordre des quatre grosses planètes.— Astron. and Astrophys., v. 42, No. 2, p. 259—263.
- Simon J. L., Bretagnon P.*, 1978. Second Order Perturbations of the Four Large Planets.— Astron. and Astrophys., v. 69, No. 3, p. 369—372.
- Stiefel E., Rössler M., Waldvogel J., Burdet C. A.*, 1966. Report to NASA on Methods of Regularization for Computing Orbits in Celestial Mechanics.— Zurich: Juris Deuck.
- Stumpff K.*, 1943—1947. Über die Reihenentwicklung der rechtwinkligen Bahnkoordinaten im Zweikörperproblem.— Astron. Nachr.,

Bd. 274, H. 2—3, S. 49—68 (1943); Bd. 275, H. 5—6, S. 203—222 (1947).

Stumpff K., 1959. Himmelsmechanik. Bd. 1. Das Zweikörperproblem.— Berlin: DVW.

Stumpff K., 1974. Himmelsmechanik, Bd. 3. Allgemeine Störungen.— Berlin: DVW.

Tarasevich S. V., 1977. A Package for General Relativity Sympolic Manipulations Based on ANALYTIC-74 Language for MIR-3 Computer.— 8-th Intern. Conf. on General Relativity and Gravitation, Abstracts, p. 330, Univ. of Waterloo, Canada.

Предметный указатель

- Аномалия истинная 36
— средняя 36
— эксцентрическая 36, 106
— — обобщенная 63
- Биномиальные коэффициенты 8
- Вековая система 71, 159, 167, 186
Вековой член 39
- Гармонический осциллятор 60
- Движение больших планет 112, 161, 164
— Луны 188
— малой планеты 170
- Задача двух тел 35
— — —, интегрирование функций 37
— — —, локальные инварианты 50
— — —, полиномиальные разложения 45, 120
— — —, решение в замкнутой форме 36
— — —, тейлоровские разложения 49
— — —, тригонометрические разложения 44
— — —, уравнения в вариациях 143
- Кеплеровский процессор 35
Кодировка индексов 29
Координаты Ганзена 63
Коэффициенты Ганзена 43
— Лапласа 94, 175
— — обобщенные 99, 118
— — симметричные 175
- Метод Брауэра 106
— Ганзена 111
— Колмогорова—Арнольда 136
— Крылова—Боголюбова 124
— Тейлора—Стеффенсена 56
— Хилла 106
— Цейделя в переменных Хилла 128
— — в элементах 132
— Энке 106
Методы Брукке 103
- Нормализация Биркгофа 71
- Операторы Ньюкома 43
- Параметры Эйлера 63
Переменные Делоне 134
— Кустаанхеймо—Штифеля 58
— Лапласа 45, 120
Пертурбационная функция планетной задачи 90
— — спутниковой задачи 55, 85
Полиномы Гегенбауэра 54, 90, 91
— Лежандра 54, 91
— Чебышева 109

- Преобразование Энке 118
 Пуассоновский процессор 17
- Ряд Пуассона 17
 — —, биномиальное разложение 22
 — —, возведение в степень 25
 — —, вычисление 27
 — —, обращение 24
 — —, порядок члена 22
 — —, тейлоровское разложение 23
- Символ Кронекера 7
- Тейлоровские разложения 68
- Теорема Лагранжа о неявных функциях 24
- Углы Эйлера 63
 Уравнение Кеплера 36, 41
 — центра 39, 40, 135
 Уравнения Эйлера 66
- Факториалы обобщенные 7
 Фиктивное время 59
 Функции Бесселя 43
 — Каула 87
 — Лежандра 78, 82
 — наклона 87
 — секториальные 81
 — тессеральные 81
 — шаровые 79
- Язык PS-FORTRAN 19

Виктор Александрович Брумберг

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ
НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ**

М., 1980 г., 208 стр. с илл

Редактор *И. Е. Рахлин*

Технический редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректоры *Е. А. Белицкая, А. Л. Ипатова*

ИБ № 11613

Сдано в набор 15.09.79.

Подписано к печати 21.01.80. Т-01112.

Бумага 84×108^{1/32}. Тип. № 1. Обыкновенная
гарнитура. Высокая печать. Усл. печ. л. 10,92.

Уч.-изд. л. 11,12. Тираж 1750 экз. Заказ № 2358

Цена 1 р. 70 к.

Издательство «Наука»

Главная редакция

физико-математической литературы

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

2-я типография издательства «Наука»

Москва, Шубинский пер., д. 10

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, дом 15

КНИГИ ПО АСТРОНОМИИ, ВЫШЕДШИЕ В 1979 ГОДУ:

- В. К. Абалакин.** Основы эфемеридной астрономии.
- С. Н. Блажко.** Курс практической астрономии. — 4-е изд., перераб. и дополн.
- В. Б. Гуревич.** Введение в сферическую астрономию.
- С. Дебарба, Б. Гино.** Способ равных высот в астрономии: пер. с фр.
- А. З. Долгинов, Ю. Н. Гнедин, Н. А. Силантьев.** Распространение и поляризация излучения в космической среде.
- М. У. Сагитов.** Лунная гравиметрия.
- А. Н. Симоненко.** Метеориты — осколки астероидов.

Требуйте указанные выше книги в магазинах местных Книготоргов и Академкниги.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, дом 15

*КНИГИ ПО АСТРОНОМИИ, ГОТОВЯЩИЕСЯ
К ПЕЧАТИ:*

П. И. Бакулин. Фундаментальные каталоги звезд. — 2-е изд., доп.

В. Н. Жарков, В. П. Трубицын. Физика планетных недр.

Историко - астрономические исследования,
вып. XV.

В. В. Шевченко. Современная селенография.

П. В. Щеглов. Проблемы оптической астрономии.

Предварительные заказы на указанные выше книги принимаются всеми магазинами, распространяющими научно-техническую литературу.

1 р. 70 к.

