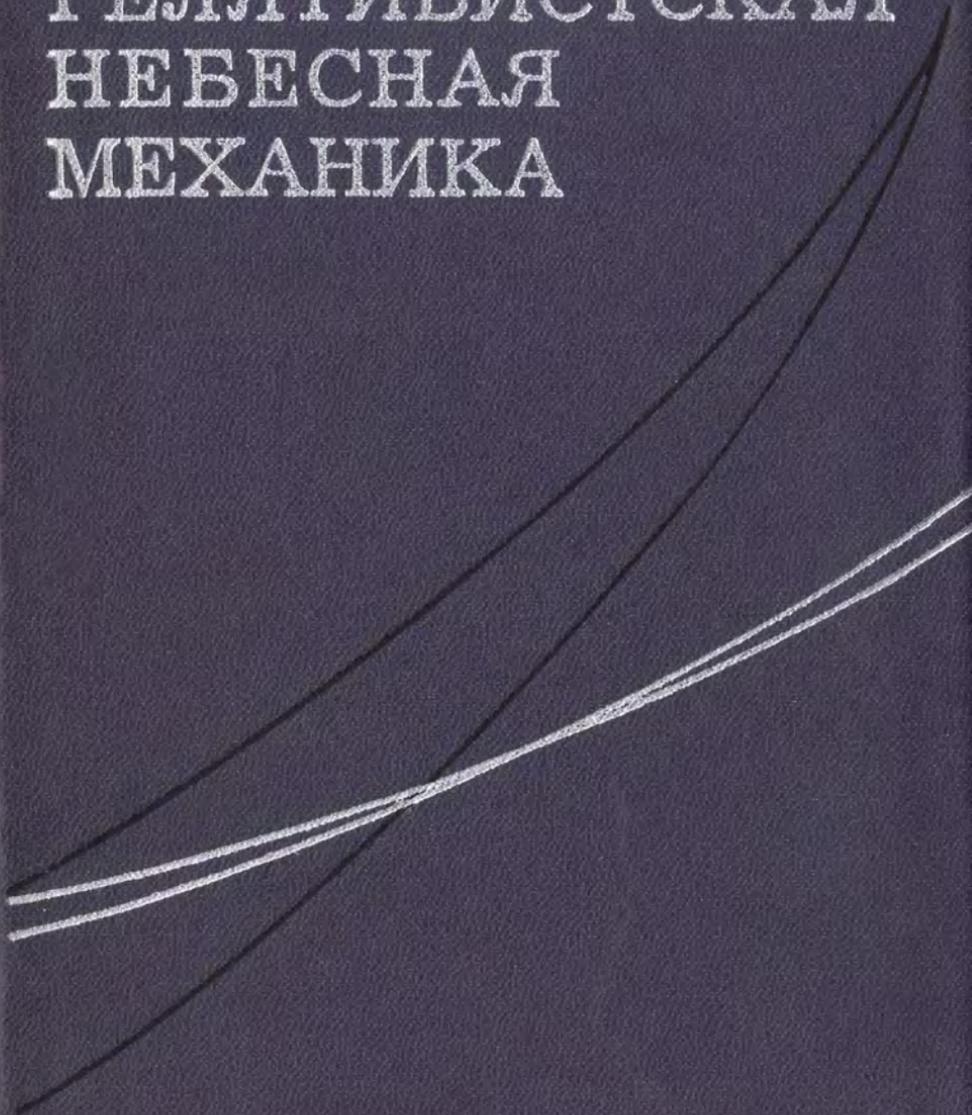


В.А. Брумберг

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ
НЕБЕСНАЯ
МЕХАНИКА



В. А. Брумберг

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ
НЕБЕСНАЯ
МЕХАНИКА



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 12572

Релятивистская небесная механика, Брумберг В. А. Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1972, 382 стр.

Монография, посвященная систематическому изложению вопросов исследования релятивистских эффектов в движении небесных тел.

В книге рассматриваются основные результаты, полученные в последние годы физиками и астрономами по проблеме движения макроскопических тел в общей теории относительности, и изучаются их разнообразные применения к исследованию движения тел Солнечной системы. Ряд результатов принадлежит автору книги. Рассмотрению проблем релятивистской небесной механики предшествует изложение математического аппарата общей теории относительности.

Книга рассчитана на астрономов и физиков, как специалистов, так и аспирантов и студентов старших курсов университетов.

Рисунков 10, библиографий 101.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
-----------------------	---

Глава 1

ЭЛЕМЕНТЫ НЬУТОНОВОЙ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

§ 1. Задача двух тел	13
§ 2. Уравнения возмущенного движения в элементах . .	19
§ 3. Возмущения от третьего тела	25
§ 4. Возмущения от несферичности центрального тела . .	39

Глава 2

ЭЛЕМЕНТЫ РИМАНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ И ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА

§ 1. Тензоры в аффинных пространствах	45
§ 2. Тензоры в евклидовых пространствах	50
§ 3. Псевдоевклидовы пространства	53
§ 4. Криволинейные координаты в аффинных и евклидовых пространствах	59
§ 5. Римановы пространства	63
§ 6. Неевклидовы пространства	67
§ 7. Пространства аффинной связности и абсолютное дифференцирование	73
§ 8. Аффинная связность и геодезические в римановом пространстве	78
§ 9. Тензор кривизны	84
§ 10. Применение римановой геометрии в задачах ньютоновой механики	93

*Глава 3*ОСНОВЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ
ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Формулы Лоренца	96
§ 2. Динамика точки	106
§ 3. Тензор энергии — импульса	112

Глава 4

УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Основные принципы общей теории относительности	119
§ 2. Вариационный принцип для уравнений поля	128
§ 3. Измерение расстояний и промежутков времени	132
§ 4. Кинематика точки в общей теории относительности	136
§ 5. Слабое поле тяготения и пост-ньютоновы уравнения движения пробной частицы	143
§ 6. Распространение света в слабом поле тяготения	150

Глава 5

СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ

§ 1. Задача Шварцшильда	153
§ 2. Движение пробной частицы в поле Шварцшильда	161
§ 3. Решение в оскулирующих элементах	171
§ 4. Распространение света	177
§ 5. Эффекты, связанные с распространением света	181
§ 6. Интерпретация координат в задаче Шварцшильда	189
§ 7. Геодезическая прецессия	191

Глава 6

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ

§ 1. История вопроса	195
§ 2. Принципы метода EIN	198
§ 3. Решение уравнений поля и вывод уравнений движения методом EIN	210
§ 4. Уравнения движения и координатные условия	221

*Глава 7*УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЗАДАЧИ N
ВРАЩАЮЩИХСЯ ТЕЛ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

§ 1. Принципы метода Фока	217
§ 2. Метрика поля вращающихся тел	234
§ 3. Вывод уравнений поступательного движения методом Фока	241
§ 4. Вывод уравнений вращательного движения методом Фока	252
§ 5. Вывод лагранжиана из вариационного принципа . . .	261

*Глава 8*РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЭФФЕКТЫ В ПОСТУПАТЕЛЬНОМ
ДВИЖЕНИИ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

§ 1. Задача N тел	269
§ 2. Вековые возмущения в задаче двух вращающихся тел	272
§ 3. Исследование движения в задаче двух вращающихся тел в координатной форме	282
§ 4. Релятивистские уравнения движения Луны и геоде- зическая прецессия	289
§ 5. Релятивистские эффекты в движении Луны	297
§ 6. Лазерная локация Луны	306

*Глава 9*РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЭФФЕКТЫ ВО ВРАЩАТЕЛЬНОМ
ДВИЖЕНИИ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

§ 1. Прецессия гироскопа в поле тяготения Земли . . .	311
§ 2. Взаимосвязь вращательного и поступательного дви- жения планет	313

*Глава 10*ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА
НЕБЕСНОМЕХАНИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ
ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Движение естественных тел Солнечной системы . . .	324
§ 2. Небесномеханические эксперименты	335

*Глава 11***ГРАВИТАЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ**

- § 1. Гравитационная энергия и законы сохранения . . . 339
§ 2. Гравитационное излучение системы тел 343

*Глава 12***ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КОСМОЛОГИИ**

- § 1. Статические решения однородной и изотропной Вселенной 354
§ 2. Мир Эйнштейна и мир де Ситтера 358
§ 3. Нестатические решения однородной и изотропной Вселенной 367
Литература 378

ПРЕДИСЛОВИЕ

В последние годы в связи с постепенным повышением точности результатов оптических наблюдений небесных тел, развитием новых методов наблюдений (доплеровские наблюдения, радио- и лазерная локация и т. п.) и возможностью проведения экспериментов в небесной механике при помощи ракет и спутников все большее значение приобретает учет релятивистских эффектов в движении тел Солнечной системы. Это и является основной задачей релятивистской небесной механики, опирающейся на общую теорию относительности Эйнштейна. Конечно, роль общей теории относительности для небесной механики отнюдь не определяется малыми релятивистскими поправками к ньютоновым теориям движения небесных тел. Только общей теории относительности удалось дать объяснение явлению тяготения, и небесная механика, как наука о гравитационном движении небесных тел, по существу должна быть релятивистской.

Сразу же после создания общей теории относительности появилась большая работа де Ситтера (de Sitter, 1916), посвященная небесномеханическим следствиям новой теории тяготения. Позднее во Франции был издан двухтомный курс по релятивистской небесной механике Шази (Chazy, 1928, 1930). Этот курс не утратил своего значения и в наше время, особенно в своей исторической части. Тем не менее, во многих отношениях его

содержание не отвечает современному уровню, поскольку наиболее существенные результаты по проблеме движения в общей теории относительности были получены только после 1938 г.

Что же касается многочисленных книг по общей теории относительности, вышедших за последнее время, то в них большей частью рассматриваются чисто математические или физические вопросы, далеко выходящие за классические рамки общей теории относительности. Даже в книгах В. А. Фока (1955) и Инфельда и Плебаньского (Infeld, Plebanski, 1960), посвященных в основном проблеме движения в общей теории относительности, специфические задачи релятивистской небесной механики остались несколько в стороне. Следует еще указать большую монографическую статью Тауснера (Tausner, 1966), изданную Массачусетским технологическим институтом. Однако в этой работе рассматривается сравнительно узкий круг вопросов.

В данной книге, написанной на основе лекций, прочитанных автором в Ленинградском государственном университете для студентов — небесных механиков, сделана попытка изложить на современном уровне задачи релятивистской небесной механики. В книге рассматриваются основные результаты, полученные за последние годы физиками и астрономами, в том числе и самим автором, по проблеме движения макроскопических тел в общей теории относительности, и изучаются их разнообразные применения к исследованию движения тел Солнечной системы. Обсуждению вопросов релятивистской небесной механики в книге предшествует изложение математического аппарата общей теории относительности, так что от читателя не требуется предварительного знания этой теории. Однако в первую очередь книга предназначена для небесных механиков, интересующихся релятивистскими задачами своей науки, и ни в какой мере не может заменить курса,

излагающего физическую сторону вопросов общей теории относительности, в особенности ее современные разделы.

По своему содержанию книга делится на 12 глав. В первой главе приводятся употребляющиеся в дальнейшем формулы теории возмущений ньютоновой небесной механики. Новыми здесь являются общие разложения пертурбационной функции притяжения третьего тела и несферичности центрального тела, а также распространение уравнений Лагранжа для оскулирующих элементов орбит на случай, когда пертурбационная функция зависит не только от координат и времени, но и от скоростей.

Во второй главе излагаются элементы римановой геометрии и аппарат тензорного исчисления. Изложение ведется по типу известного курса П. К. Рашевского (1953), но без детальных математических доказательств.

Основам специальной теории относительности посвящена третья глава, причем в качестве иллюстрации формул кинематики точки рассматриваются релятивистские эффекты при межзвездных полетах.

В четвертой главе освещены кардинальные вопросы общей теории относительности — уравнения поля, проблема измерения расстояний и промежутков времени и т. д. Здесь же найдены выражения функции Лагранжа для движения пробной частицы и распространения света в заданном гравитационном поле в пост-ньютоновом приближении. Для целей релятивистской небесной механики вполне достаточно ставить и решать задачи именно в этом приближении, т. е. с учетом лишь первой степени релятивистских параметров.

Важнейший как в теоретическом, так и в практическом отношении случай сферически симметричного поля (задача Шварцшильда) рассматривается в пятой главе. В отличие от традиционного рассмотрения в какой-либо одной определенной системе координат, здесь очень боль-

шое внимание уделено изучению влияния выбора координатной системы на тот или иной эффект (движение пробной частицы, распространение света, геодезическая прецессия). Исследование этих эффектов проводится в широком классе практически используемых метрик, соответствующих не только общей теории относительности, но и смежным релятивистским теориям тяготения.

Центральное место в книге занимают шестая и седьмая главы, посвященные выводу уравнений движения задачи многих тел из уравнений поля. В первой из этих глав массы рассматриваются как точечные особенности поля и для получения уравнений движения применяется дипольный метод Эйнштейна, Инфельда, Гоффмана. В отличие от работ указанных авторов, где координатные условия не фиксировались, а выбирались отдельно на каждом этапе приближения, здесь весь метод реализован в гармонической системе координат. Сами окончательные уравнения движения записаны для однопараметрического класса метрик, введенного ранее. В следующей главе методом Фока получены уравнения движения вращающихся тел произвольной формы. Новым по сравнению с результатами В. А. Фока является добавление в уравнениях поступательного движения релятивистских членов второго порядка относительно отношения линейных размеров тел к их взаимным расстояниям и вывод релятивистских уравнений вращательного движения. Лагранжиан уравнений поступательного и вращательного движения выведен также и по методу Инфельда непосредственно из вариационного принципа для уравнений поля.

В восьмой главе полученные уравнения поступательного движения применяются главным образом к решению задачи двух вращающихся тел конечной массы и к изучению движения Луны на основе ограниченной круговой задачи трех тел,

Релятивистские эффекты вращательного движения исследуются в девятой главе. Здесь, помимо известных эффектов, связанных с гироскопами на Земле или на ее спутниках, изучаются релятивистские поправки во вращательном движении планет. Показывается, что в силу орбитального движения планет вокруг Солнца их вращение не может происходить с постоянной угловой скоростью.

Вопрос о согласии важнейших релятивистских эффектов в движении тел Солнечной системы с результатами наблюдений обсуждается в десятой главе. Здесь же кратко освещаются перспективы, открывающиеся в связи с новыми экспериментальными возможностями небесной механики.

Две последние главы, посвященные теории гравитационного излучения и описанию основных моделей однородной и изотропной Вселенной, не связаны непосредственно с задачами небесной механики и носят обзорный характер. Однако знакомство с вопросами гравитационного излучения и релятивистской космологии чрезвычайно важно и для небесных механиков, так как позволяет ставить задачи о движении тел с учетом гравитационного излучения и окружающего космологического фона.

Приведенная в конце книги библиография не претендует на полноту и отражает лишь те работы, результаты которых непосредственно использовались в тексте книги.

В заключение надо отметить, что термин «релятивистская небесная механика» не вполне однозначен. Сейчас наряду с общей теорией относительности разработан целый ряд других релятивистских теорий тяготения, признающих основную идею общей теории относительности о римановом характере пространства событий реального мира и взаимосвязи пространства — времени с движением

и распределением масс. Однако по конкретной форме воплощения этой идеи эти теории отличаются от общей теории относительности и являются ее конкурентами. Из класса таких теорий наибольшую популярность имеют скалярно-тензорные теории тяготения, в которых, помимо метрического тензора, описывающего геометрические пространственно-временные свойства, вводится еще скалярная величина, соответствующая некоторому скалярному полю и обуславливающая, в частности, переменность гравитационной постоянной. Для подобного рода теорий также изучаются небесномеханические следствия с целью сопоставления соответствующих эффектов как с данными общей теории относительности, так и с результатами экспериментов. В отличие от общей теории относительности, свободной от каких-либо постоянных, добавочных по сравнению с ньютоновой теорией, в этих теориях, как правило, присутствуют некоторые постоянные, которые должны быть определены на основании экспериментальных результатов. В настоящее время нет никаких сведений, которые бы достаточно уверенно свидетельствовали о необходимости внесения тех или иных модификаций в общую теорию относительности. В данной книге в качестве фундамента релятивистской небесной механики рассматривается только общая теория относительности.

Автор надеется, что эта книга окажется полезной для небесных механиков, способствуя более широкому использованию общей теории относительности в небесной механике.

§ 1. Задача двух тел

Ньютонова небесная механика основана на законе всемирного тяготения Ньютона (теория ньютоновского потенциала) и трех законах ньютоновой механики (теория движения). Простейшей задачей классической или ньютоновой небесной механики является задача двух тел. Дифференциальные уравнения движения этой задачи в некоторой неподвижной декартовой системе координат имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_1 &= -\gamma m_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{r^3}, \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 &= -\gamma m_1 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{r^3}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где m_i — массы тел, \mathbf{r}_i — их радиусы-векторы ($i = 1, 2$), $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ — взаимное расстояние между телами и γ — гравитационная постоянная. Если вместо \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 ввести в качестве неизвестных абсолютные координаты ньютонового центра инерции системы тел

$$\mathbf{r}_0 = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_0}, \quad m_0 = m_1 + m_2$$

и относительные координаты первого тела относительно второго

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2,$$

то система (1) распадается на две системы

$$\ddot{\mathbf{r}}_0 = 0 \quad (2)$$

и

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\gamma m_0 \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (3)$$

Из (2) следует, что центр инерции системы двух тел движется равномерно и прямолинейно (система координат, в которой центр инерции покоится и находится в начале системы координат, называется барицентрической). Система (3) определяет относительное движение тела массы m_1 относительно центрального тела массы m_2 .

Общее решение системы (3) записывается обычно в одном из следующих трех видов: 1) в виде системы замкнутых аналитических формул, выражающих r и \dot{r} как

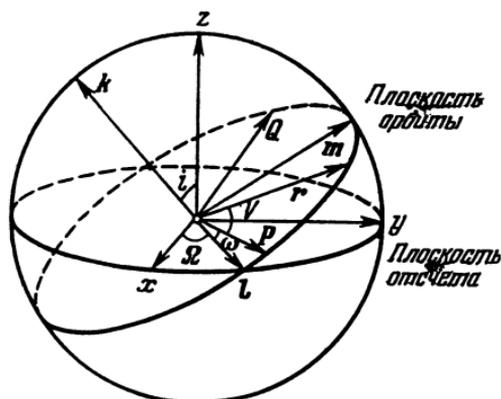


Рис. 1.

неявные функции времени t , 2) в виде тригонометрических рядов по кратным вспомогательной переменной, являющейся линейной функцией времени, и 3) в виде рядов по степеням времени, сходящихся лишь на некотором конечном интервале изменения t . Третья форма решения употребляется в сравнительно узком классе задач и рассматриваться здесь не будет.

Траекториями задачи двух тел служат конические сечения (прямые линии в вырожденном случае). Для дальнейших целей важен лишь случай эллиптического движения, поэтому движения по параболе или гиперболе здесь также не будут рассматриваться.

Размер и форма эллиптической орбиты характеризуются большой полуосью a и эксцентриситетом e ($0 \leq e < 1$). Положение плоскости движения в пространстве определяется наклоном i и долготой восходящего узла Ω (рис. 1). Для ориентации орбиты в плоскости движения служит угол ω — угловое расстояние перигентра от восходящего узла. Вместо этих пяти кеплеровых геометрических элементов, характеризующих траекторию тела, можно пользоваться векторными элементами — вектором площадей c и ортогональным ему вектором Лапласа f :

$$c = r \times \dot{r}, \quad f = \left(\dot{r}^2 - \frac{\gamma m_0}{r} \right) r - (r\dot{r})\dot{r}. \quad (4)$$

Выражения (4) представляют собой первые интегралы уравнений (3). Наряду с ними важную роль играет также интеграл энергии

$$\dot{r}^2 = \gamma m_0 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (5)$$

Произвольные постоянные, входящие в интегралы (4) и (5), связаны двумя соотношениями

$$cf = 0, \quad \gamma m_0 c^2 + af^2 = \gamma^2 m_0^2 a.$$

Для дальнейшего удобно ввести правую тройку единичных векторов l , m , k , направленных соответственно по линии узлов к восходящему узлу орбиты, по перпендикуляру к линии узлов в плоскости орбиты и по перпендикуляру к плоскости орбиты:

$$l = \begin{pmatrix} \cos \Omega \\ \sin \Omega \\ 0 \end{pmatrix}, \quad m = \begin{pmatrix} -\cos i \sin \Omega \\ \cos i \cos \Omega \\ \sin i \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} \sin i \sin \Omega \\ -\sin i \cos \Omega \\ \cos i \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Через P и Q обозначим единичные векторы, направленные соответственно по линии апсид к перицентру и по перпендикуляру к линии апсид в плоскости орбиты

$$P = l \cos \omega + m \sin \omega, \quad Q = -l \sin \omega + m \cos \omega. \quad (7)$$

Тогда

$$c = \sqrt{\gamma m_0 p k}, \quad f = \gamma m_0 e P, \quad (8)$$

где $p = a(1 - e^2)$ — параметр орбиты, P , Q , k — правая тройка ортов. Полярными координатами тела m_1 в плоскости движения служат радиус-вектор r и аргумент широты u — угловое расстояние, отсчитываемое от восходящего узла. В функции от r и u

$$\left. \begin{aligned} r &= r(l \cos u + m \sin u), \\ \dot{r} &= \sqrt{\frac{\gamma m_0}{p}} [-l(\sin u + e \sin \omega) + m(\cos u + e \cos \omega)]. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Наряду с аргументом широты u часто используется истинная аномалия V — угловое расстояние, отсчитываемое

мое от перицентра до движущегося тела. Очевидно,

$$u = V + \omega. \quad (10)$$

При переходе к истинной аномалии имеем

$$r = \frac{p}{1 + e \cos V} \quad (11)$$

и

$$\left. \begin{aligned} r &= r(P \cos V + Q \sin V), \\ \dot{r} &= \sqrt{\frac{\gamma m_0}{p}} [-P \sin V + Q(\cos V + e)]. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Связь со временем задается трансцендентным уравнением Кеплера

$$E - e \sin E = M. \quad (13)$$

Здесь эксцентрическая аномалия E связана с истинной аномалией V соотношением

$$\operatorname{tg} \frac{V}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}, \quad (14)$$

из которого следует

$$r \cos V = a(\cos E - e), \quad r \sin V = a\sqrt{1-e^2} \sin E \quad (15)$$

и

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (16)$$

Средняя аномалия M определяется выражением

$$M = \mathfrak{M} + n(t - t_0), \quad (17)$$

где величина \mathfrak{M} — средняя аномалия в эпоху t_0 — служит шестым, динамическим элементом эллиптического движения, а среднее движение n связано с большой полуосью a третьим законом Кеплера

$$n^2 a^3 = \gamma m_0. \quad (18)$$

Совокупность этих формул полностью определяет общее решение эллиптического случая задачи двух тел в функции времени t и шести постоянных интегрирования — кеплеровых элементов $a, e, i, \Omega, \omega, \mathfrak{M}$. Явная зависимость

решения от времени может быть задана рядами Фурье по кратным средней аномалии

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \exp \sqrt{-1} m V = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^{n,m}(e) \exp \sqrt{-1} k M, \quad (19)$$

справедливыми для произвольных целых чисел n и m . Коэффициенты Ганзена $X_k^{n,m}(e)$ зависят лишь от эксцентриситета e и легко вычисляются путем разложения в ряды по степеням e^2 . Эти ряды начинаются с членов степени $|m - k|$ относительно e . Существуют также таблицы, содержащие достаточное количество коэффициентов этих рядов (Jagnagin, 1965). Коэффициенты Ганзена с нулевым нижним индексом играют особенно важную роль, так как они дают среднее значение по времени функций, стоящих в левой части (19). Эти коэффициенты сводятся к гипергеометрическим полиномам

$$X_0^{n,m}(e) = \left(\frac{e}{2}\right)^{|m|} \frac{(-n-1-|m|)_{|m|}}{(1)_{|m|}} \times \left\{ \begin{array}{l} F\left(\frac{|m|-n-1}{2}, \frac{|m|-n}{2}, 1+|m|, e^2\right), \\ \quad n \geq |m|-1, \\ (1+\beta^2)^{|m|-n-1} F(|m|-n-1, -n-1, 1+|m|, \beta^2), \\ \quad |m|-1 > n \geq -1, \\ 0, \\ \quad -1 > n \geq -|m|-1, \\ (1-e^2)^{n+\frac{3}{2}} F\left(\frac{n+|m|+2}{2}, \frac{n+|m|+3}{2}, 1+|m|, e^2\right), \\ \quad -|m|-1 > n, \end{array} \right. \quad (20)$$

где

$$\beta = \frac{e}{1 + \sqrt{1-e^2}}, \quad (21)$$

$(\alpha)_s$ — обобщенные факториалы

$$(\alpha)_s = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+s-1), \quad (\alpha)_0 = 1$$

и $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ — гипергеометрический ряд

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_s (\beta)_s}{(\gamma)_s (1)_s} x^s.$$

Использование разложений (19) позволяет на основании (12) записать общее решение эллиптического случая задачи двух тел в виде тригонометрических рядов:

$$x + \sqrt{-1} y = a \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^{1,1}(e) \left[\cos^2 \frac{i}{2} \exp \sqrt{-1} (kM + \omega + \Omega) + \sin^2 \frac{i}{2} \exp \sqrt{-1} (-kM - \omega + \Omega) \right], \quad (22)$$

$$z = a \sin i \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^{1,1}(e) \sin (kM + \omega), \quad (23)$$

сходящихся для всех вещественных значений t при любом значении $0 \leq e < 1$. Элементы Ω , ω и \mathfrak{M} входят в эти ряды лишь как тригонометрические аргументы, а коэффициенты рядов являются функциями от a , e и i . Поэтому a , e , i (точнее, $\cos i$) аналогичны в определенном смысле переменным действия и называются линейными элементами, а Ω , ω , \mathfrak{M} носят название угловых элементов. Нередко вместо элемента \mathfrak{M} рассматривается сама средняя аномалия M . Кроме того, в обычном случае прямого движения ($0 \leq i < 90^\circ$) вместо ω и M часто употребляют долготу перицентра $\pi = \Omega + \omega$ и среднюю долготу $\lambda = \pi + M$. В соответствии с (17)

$$\lambda = n(t - t_0) + \varepsilon, \quad (24)$$

где $\varepsilon = \pi + \mathfrak{M}$ — средняя долгота в эпоху. Если в угловых аргументах рядов (22), (23) перейти от M и ω к λ и π , то сумма индексов при λ , π и Ω будет равна единице в рядах (22) и нулю — в рядах (23). При этом абсолютная величина индекса при π показывает порядок малости соответствующего коэффициента относительно e , а абсолютная величина индекса при Ω характеризует порядок малости этого коэффициента относительно i . Эти

свойства распространяются и на более сложные ряды, встречающиеся в задачах небесной механики.

Надо еще отметить, что часто, особенно при малых значениях эксцентриситета и наклона, вводят следующие комбинации элементов:

$$e \cos \pi, \quad e \sin \pi, \quad \sin i \cos \Omega, \quad \sin i \sin \Omega \quad (25)$$

или аналогичные им. Из вида рядов (22), (23) и свойств коэффициентов Ганзена следует, что координаты x , y , z являются голоморфными функциями этих величин.

§ 2. Уравнения возмущенного движения в элементах

Большинство встречающихся на практике задач небесной механики близко в том или ином отношении к задаче двух тел, и это позволяет решать их методами теории возмущений. Стандартные уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\gamma m_0 \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{F}, \quad (26)$$

где возмущающая сила \mathbf{F} зависит в общем случае от \mathbf{r} , $\dot{\mathbf{r}}$ и t . Эта сила пропорциональна некоторому малому параметру μ , определяемому конкретными условиями задачи, и общий принцип теории возмущений состоит в отыскании решения уравнений (26) при помощи рядов по степеням μ или последовательностей итераций по этому параметру.

При $\mathbf{F} = 0$ уравнения (26) переходят в уравнения задачи двух тел (3), и тогда \mathbf{r} , $\dot{\mathbf{r}}$ выражаются по формулам (11)—(17) через время t и шесть произвольных постоянных, за которые можно принять, например, кеплеровы элементы a , e , i , Ω , ω , \mathcal{M} . Если воспользоваться методом вариации произвольных постоянных, то эти формулы могут быть сохранены и в возмущенном движении при $\mathbf{F} \neq 0$, но величины a , e , i , Ω , ω , \mathcal{M} будут уже не постоянными, а некоторыми функциями времени, удовлетворяющими определенной системе дифференциальных уравнений. Такие величины называются оскулирующими

элементами. Уравнения для их определения таковы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left(Se \sin V + T \frac{p}{r} \right), \\ \frac{de}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} [S \sin V + T (\cos V + \cos E)], \\ \frac{di}{dt} &= \frac{r \cos u}{na^2 \sqrt{1-e^2}} W, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r \sin u}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} W, \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\cos i \frac{d\Omega}{dt} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} [-S \cos V + T \left(1 + \frac{r}{p}\right) \sin V], \\ \frac{d\mathfrak{M}}{dt} &= -\sqrt{1-e^2} \left(\frac{d\omega}{dt} + \cos i \frac{d\Omega}{dt} \right) - S \frac{2r}{na^2}, \end{aligned} \right\} (27)$$

где полярные координаты r и u должны быть выражены в функции от элементов по формулам задачи двух тел. Вместо двух последних уравнений можно использовать эквивалентные им уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d\pi}{dt} &= 2 \sin^2 \frac{i}{2} \frac{d\Omega}{dt} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left[-S \cos V + \right. \\ &\quad \left. + T \left(1 + \frac{r}{p}\right) \sin V \right], \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{e^2}{1 + \sqrt{1-e^2}} \frac{d\pi}{dt} + 2 \sqrt{1-e^2} \sin^2 \frac{i}{2} \frac{d\Omega}{dt} - S \frac{2r}{na^2}, \end{aligned}$$

S , T , W — это составляющие возмущающего ускорения F по радиусу-вектору r , по трансверсали и по нормали к плоскости орбиты. Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{rF}{r}, \\ T &= \left[k \frac{r}{r} \right] F = (-l \sin u + m \cos u) F = \\ &= \left(-\frac{e \sin V}{p} r + \frac{r}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \dot{r} \right) F, \\ W &= kF. \end{aligned} \right\} (28)$$

При составлении уравнений для \mathfrak{M} или ε принимается, что в отличие от (17) и (24), средняя аномалия и сред-

няя долгота в возмущенном движении определяются формулами

$$M = \mathfrak{M} + \int_{t_0}^t n dt, \quad \lambda = \varepsilon + \int_{t_0}^t n dt. \quad (29)$$

Это видоизменение сделано для того, чтобы избежать в правых частях уравнений для \mathfrak{M} и ε появления членов, пропорциональных t . Вместо уравнений для \mathfrak{M} и ε можно использовать уравнения для M и λ непосредственно

$$\frac{dM}{dt} = n + \frac{d\mathfrak{M}}{dt}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = n + \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Для оскулирующих векторных элементов c и f имеем

$$\dot{c} = r \times F, \quad \dot{f} = 2(rF)r - (rF)\dot{r} - (r\dot{r})F. \quad (30)$$

Так как в силу (8)

$$\begin{aligned} \dot{c} &= \frac{na}{2\sqrt{1-e^2}} \frac{dp}{dt} k + na^2 \sqrt{1-e^2} \left(l \sin i \frac{d\Omega}{dt} - m \frac{di}{dt} \right), \\ \dot{f} &= n^2 a^3 \frac{de}{dt} P + n^2 a^3 e \left[\left(\frac{d\omega}{dt} + \cos i \frac{d\Omega}{dt} \right) Q + \right. \\ &\quad \left. + \left(\sin \omega \frac{di}{dt} - \cos \omega \sin i \frac{d\Omega}{dt} \right) k \right], \end{aligned}$$

то умножая c скалярно на k, l, m , а \dot{f} — на P и Q , снова находим первые пять уравнений (27). Таким образом, уравнения (30) вполне эквивалентны этим пяти уравнениям.

Нередко оказывается удобным за независимую переменную в уравнениях для оскулирующих элементов принять вместо времени t аномалии V или E . Эта замена осуществляется по формулам

$$\frac{dV}{dt} = \frac{na^2 \sqrt{1-e^2}}{r^2} - \left(\frac{d\omega}{dt} + \cos i \frac{d\Omega}{dt} \right), \quad (31)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{na}{r} - \frac{r}{a \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{d\omega}{dt} + \cos i \frac{d\Omega}{dt} + \frac{\sin V}{1-e^2} \frac{de}{dt} \right), \quad (32)$$

причем производные оскулирующих элементов в правых частях этих выражений должны быть взяты из уравнений (27). Если при решении уравнений (27) можно огра-

ничиться лишь точностью первого порядка относительно возмущений, то в формулах (31), (32) замены от t к V или E достаточно сохранить лишь первые члены.

Интегрирование уравнений (27) вводит шесть произвольных постоянных. В качестве них можно принять либо значения оскулирующих элементов в начальный момент, либо некоторые постоянные величины, выбираемые из тех или иных условий. Такие постоянные величины называются средними элементами и их необходимо отличать от оскулирующих элементов.

Уравнения (27) справедливы при любой возмущающей силе. В случае, когда уравнения возмущенного движения записываются в лагранжевой форме, их можно заменить более удобными. Действительно, пусть существует пертурбационная (возмущающая) функция $R = R(r, \dot{r}, t)$ такая, что

$$F = \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{r}}. \quad (33)$$

Тогда исходные уравнения (26) могут быть записаны в лагранжевой форме с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{\gamma m_0}{r} + R. \quad (34)$$

Если ввести импульсы

$$p = \dot{r} + \frac{\partial R}{\partial \dot{r}}, \quad (35)$$

то уравнения движения можно записать в переменных r, p в канонической форме с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} p^2 - \frac{\gamma m_0}{r} - V, \quad (36)$$

где

$$V = R + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{r}} \right)^2. \quad (37)$$

Если при $R = 0$ канонические переменные r и p выражаются по формулам эллиптического движения с помощью некоторых элементов $\tilde{a}, \tilde{e}, \tilde{i}, \tilde{\Omega}, \tilde{\omega}, \tilde{M}$, называемых в дальнейшем контактными, то в соответствии

с методом вариации произвольных постоянных для канонических систем эти же формулы останутся справедливыми и в возмущенном движении при условии, что контактные элементы, как функции времени, удовлетворяют известным уравнениям Лагранжа с пертурбационной функцией V . Эти уравнения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\tilde{a}}{dt} &= \frac{2}{\tilde{n}\tilde{a}} \frac{\partial V}{\partial \tilde{\mathcal{M}}}, \\ \frac{d\tilde{e}}{dt} &= \frac{1-\tilde{e}^2}{\tilde{n}\tilde{a}^2\tilde{e}} \frac{\partial V}{\partial \tilde{\mathcal{M}}} - \frac{\sqrt{1-\tilde{e}^2}}{\tilde{n}\tilde{a}^2\tilde{e}} \frac{\partial V}{\partial \tilde{\omega}}, \\ \frac{d\tilde{i}}{dt} &= \frac{\operatorname{ctg} \tilde{i}}{\tilde{n}\tilde{a}^2 \sqrt{1-\tilde{e}^2}} \frac{\partial V}{\partial \tilde{\omega}} - \frac{\operatorname{cosec} \tilde{i}}{\tilde{n}\tilde{a}^2 \sqrt{1-\tilde{e}^2}} \frac{\partial V}{\partial \tilde{\Omega}}, \\ \frac{d\tilde{\Omega}}{dt} &= \frac{\operatorname{cosec} \tilde{i}}{\tilde{n}\tilde{a}^2 \sqrt{1-\tilde{e}^2}} \frac{\partial V}{\partial \tilde{i}}, \\ \frac{d\tilde{\omega}}{dt} &= - \frac{\operatorname{ctg} \tilde{i}}{\tilde{n}\tilde{a}^2 \sqrt{1-\tilde{e}^2}} \frac{\partial V}{\partial \tilde{i}} + \frac{\sqrt{1-\tilde{e}^2}}{\tilde{n}\tilde{a}^2\tilde{e}} \frac{\partial V}{\partial \tilde{e}}, \\ \frac{d\tilde{\mathcal{M}}}{dt} &= - \frac{1-\tilde{e}^2}{\tilde{n}\tilde{a}^2\tilde{e}} \frac{\partial V}{\partial \tilde{e}} - \frac{2}{\tilde{n}\tilde{a}} \frac{\partial V}{\partial \tilde{a}}. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

По сравнению с (27) эти уравнения обладают тем преимуществом, что в их правых частях фигурирует одна функция V вместо трех функций S , T , W . В классических задачах небесной механики, таких как планетная или спутниковая задача трех тел, R не зависит от \dot{r} , поэтому $p = \dot{r}$, и контактные элементы совпадают с оскулирующими. В общем случае, когда R зависит от \dot{r} , контактные элементы отличаются от оскулирующих на величины порядка возмущений. Переход от одних элементов к другим осуществляется по аналитическим формулам. В самом деле, если векторные оскулирующие элементы s и f по определению удовлетворяют соотношениям (4), то для контактных элементов \tilde{s} и \tilde{f} справедливы аналогичные соотношения, но с заменой \dot{r} на p :

$$\left. \begin{aligned} \tilde{s} &= r \times p, \\ \tilde{f} &= \left(p^2 - \frac{\gamma m_0}{r} \right) r - (rp) p. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Сопоставление (4) и (39) дает

$$c - \tilde{c} = \left[\frac{\partial R}{\partial \dot{r}} \quad r \right], \quad (40)$$

$$f - \tilde{f} = -2 \left(\dot{r} \frac{\partial R}{\partial \dot{r}} \right) r + \left(r \frac{\partial R}{\partial \dot{r}} \right) \dot{r} + (r \dot{r}) \frac{\partial R}{\partial \dot{r}} + \left[\frac{\partial R}{\partial \dot{r}} \left[\frac{\partial R}{\partial \dot{r}} \quad r \right] \right]. \quad (41)$$

Зная разности $c - \tilde{c}$, $f - \tilde{f}$, нетрудно по ним найти и разности кеплеровых элементов $a - \tilde{a}$, $e - \tilde{e}$, $i - \tilde{i}$, $\Omega - \tilde{\Omega}$, $\omega - \tilde{\omega}$. Что же касается разности $\mathfrak{M} - \tilde{\mathfrak{M}}$, то из уравнения Кеплера (13) со значением (29) и аналогичного уравнения в контактных элементах

$$\tilde{E} - \tilde{e} \sin \tilde{E} = \tilde{\mathfrak{M}} + \int_{t_0}^t \tilde{n} dt$$

имеем

$$\mathfrak{M} - \tilde{\mathfrak{M}} = - \int_{t_0}^t (n - \tilde{n}) dt + E - \tilde{E} - (e \sin E - \tilde{e} \sin \tilde{E}), \quad (42)$$

где под E нужно понимать функцию координат и скоростей, определяемую, например, выражением

$$\operatorname{tg} E = \frac{r \dot{r}}{r \dot{r}^2 - \gamma m_0} \sqrt{\frac{2\gamma m_0}{r} - \dot{r}^2}$$

и аналогично

$$\operatorname{tg} \tilde{E} = \frac{r p}{r p^2 - \gamma m_0} \sqrt{\frac{2\gamma m_0}{r} - p^2}.$$

Формулы (40)–(42) являются совершенно строгими. Если же достаточно ограничиться точностью первого порядка, то, как следует из сравнения (40) и (41) с (30), выражения для разностей $a - \tilde{a}$, $e - \tilde{e}$, $i - \tilde{i}$, $\Omega - \tilde{\Omega}$, $\omega - \tilde{\omega}$ совпадают с соответствующими правыми частями формул (27), вычисляемыми по возмущающим «силам» $F = -\partial R / \partial r$. Разность $\mathfrak{M} - \tilde{\mathfrak{M}}$ в пределах точности пер-

вого порядка на основании (42) и соотношений

$$n - \bar{n} = -\frac{3}{2} \frac{n}{a} (a - \bar{a}), \quad a - \bar{a} = -\frac{2}{n^2 a} \dot{r} \frac{\partial R}{\partial r} \quad (43)$$

будет

$$\mathfrak{M} - \bar{\mathfrak{M}} = -\sqrt{1-e^2} [(\omega - \bar{\omega}) + (\Omega - \bar{\Omega}) \cos i] + \\ + \frac{2}{na^2} \dot{r} \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{3}{na^2} \int_{t_0}^t \dot{r} \frac{\partial R}{\partial r} dt. \quad (44)$$

§ 3. Возмущения от третьего тела

В небесной механике разработано значительное число очень совершенных методов, позволяющих в аналитическом виде находить приближенные решения уравнений возмущенного движения как в элементах, так и в координатах. Для целей релятивистской небесной механики нет необходимости применять сложные методы, рассчитанные на вычисление возмущений не только первого, но и более высокого порядка.

Действительно, малый параметр, фигурирующий в уравнениях релятивистской небесной механики тел Солнечной системы, является настолько малым (порядка 10^{-8}), что учет членов высших порядков практически совершенно не нужен. К тому же сами основные релятивистские уравнения движения получены до сих пор лишь с точностью до первой степени этого параметра. Поэтому в релятивистских задачах речь обычно идет лишь о вычислении первого порядка, и наиболее удобным средством для этого оказывается метод вариации произвольных постоянных. Это не исключает, конечно, применения других методов, в частности, методов вычисления возмущений в координатах, которые в ряде случаев имеют вполне определенные преимущества. Но метод вариации произвольных постоянных является наиболее универсальным, и поэтому здесь будут изложены некоторые особенности его применения в небесномеханических задачах.

Рассмотрим гелиоцентрическое движение планеты массы m при возмущающем действии планеты массы m' . Возмущающая сила F' допускает в этом случае

пертурбационную функцию

$$R = \gamma m' \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r r'}{r'^3} \right),$$

где Δ — взаимное расстояние между планетами, r, r' — их радиусы-векторы. Для аналитического интегрирования уравнений Лагранжа в оскулирующих элементах функцию R необходимо разложить в ряд, используя формулы задачи двух тел. Наиболее общее разложение R имеет вид пятиаргументного тригонометрического ряда

$$R = \gamma m' \sum A_{qq's's'j} \cos [qM + q'M' + s\omega + s'\omega' + j(\Omega - \Omega')], \quad (45)$$

где коэффициенты A зависят от элементов a, a', e, e', i, i' , а суммирование проводится по всем целочисленным значениям пяти индексов с условием, что s и s' — числа одинаковой четности и $j \geq 0$. Обозначим угловые аргументы ряда (45) через $\theta_{qq's's'j}$. В функции от средних долгот и долгот перигелиев эти аргументы запишутся в виде

$$\theta_{qq's's'j} = q\lambda + q'\lambda' + (s - q)\pi + (s' - q')\pi' + (j - s)\Omega + (-j - s')\Omega'.$$

При малых эксцентриситетах и значениях наклонов, близких к 0 или 180°, коэффициенты A имеют порядок малости

$$A_{qq's's'j} = O \left(e^{|q-s|} e'^{|q'-s'|} \left(\sin \frac{i}{2} \right)^{|s-j|} \left(\sin \frac{i'}{2} \right)^{|s'+j|} \times \right. \\ \left. \times \left(\cos \frac{i}{2} \right)^{|s+j|} \left(\cos \frac{i'}{2} \right)^{|s'-j|} \right),$$

что является обобщением свойств коэффициентов решения (22), (23) задачи двух тел. Для справочных целей приведем формулы для вычисления произвольного коэффициента ряда (45). В случае $r < r'$

$$a A_{qq's's'j} = (2 - \delta_{j,0}) \sum_{k=k^*}^{\infty} \left(\frac{a}{a'} \right)^{2k+[s,s']+1} X_q^{2k+[s,s'],s}(e) \times \\ \times X_{q'}^{-2k-[s,s']-1,s'}(e') C_{ss'j}^{(k)}(i, i'), \quad (46)$$

а в случае $r > r'$

$$aA_{qq's's';j} =$$

$$= (2 - \delta_{j,0}) \sum_{k=k_*}^{\infty} \left[\left(\frac{a'}{a} \right)^{2k+[s,s']} X_q^{-2k-[s,s']-1,s}(e) X_{q'}^{2k+[s,s'],s'}(e') - \right. \\ \left. - \delta_{2k+[s,s'],1} \left(\frac{a}{a'} \right)^2 X_q^{1,s}(e) X_{q'}^{-2,s'}(e') \right] C_{ss'j}^{(k)}(i, i'), \quad (47)$$

где символом $[s, s']$ обозначено число

$$[s, s'] = \max\{|s|, |s'|\} = \left| \frac{s-s'}{2} \right| + \left| \frac{s+s'}{2} \right|,$$

нижние пределы суммирования имеют значения

$$k^* = \max\left\{0, E\left(\frac{\max\{2, |j|\} - [s, s'] + 1}{2}\right)\right\},$$

$$k_* = \max\left\{0, E\left(\frac{|j| - [s, s'] + 1}{2}\right)\right\}$$

и

$$C_{ss'j}^{(k)}(i, i') = \frac{(1)_{2k+[s,s']-j}}{(1)_{2k+[s,s']+j}} F_{2k+[s,s'], j, k + \frac{[s,s']-s}{2}}(i) \times \\ \times F_{2k+[s,s'], j, k + \frac{[s,s']+s'}{2}}(i'). \quad (48)$$

Величины $F_{kjl}(i)$ ($0 \leq j \leq k$; $0 \leq l \leq k$) сводятся к гипергеометрическим полиномам от $\sin^2 \frac{i}{2}$:

$$F_{kjl}(i) = \lambda_{kjl} \left(\sin \frac{i}{2} \right)^{|k-j-2l|} \left(\cos \frac{i}{2} \right)^{|k+j-2l|} \times \\ \times F\left(\frac{1}{2} |k-j-2l| + \frac{1}{2} |k+j-2l| - k, \right. \\ \left. 1 + k + \frac{1}{2} |k-j-2l| + \frac{1}{2} |k+j-2l|, \right. \\ \left. 1 + |k-j-2l|, \sin^2 \frac{i}{2} \right) \quad (49)$$

с числовыми коэффициентами

$$\lambda_{kjl} = (-1)^E\left(\frac{k-j}{2}\right) + \max\{0, -k+j+2l\} \times \\ \times \frac{(1)_{k+j} (1+k+i)_{\max\{0, k-j-2l\}} (1+k-i)_{\max\{0, -k+j+2l\}}}{2^k (1)_l (1)_{k-l} (1)_{|k-j-2l|}}.$$

Таким образом, коэффициенты разложения (45) представляются рядами по степеням квадрата отношения больших полуосей.

Так как в планетных задачах отношение больших полуосей может быть не очень мало, то в подобных случаях целесообразно применить к рядам (46) и (47) методы, позволяющие получить более быструю сходимость. Укажем еще упрощение разложения (45) при $i' = 0$, т. е. когда за основную плоскость отсчета принимается плоскость движения возмущающей планеты. Тогда должно быть $s' + j = 0$, так что суммирование по s' упраздняется, s и j становятся числами одинаковой четности, а начальные значения k^* и k_* переходят в

$$k^* = \max \left\{ 0, E \left(\frac{3 - [s, j]}{2} \right) \right\} \quad (k = 0).$$

Вообще, при исследовании решений уравнений небесной механики выбор той или иной плоскости отсчета имеет первостепенное значение и самым существенным образом влияет на величину и характер возмущений.

Подставляя теперь разложение (45) в уравнения Лагранжа для оскулирующих элементов, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{a} \frac{da}{dt} &= - \frac{2nm'}{1+m} \sum a A_{qq'ss'j} q \sin \theta_{qq'ss'j}, \\ \frac{de}{dt} &= - \frac{nm'}{1+m} \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \sum a A_{qq'ss'j} (q \sqrt{1-e^2} - s) \sin \theta_{qq'ss'j}, \\ \frac{di}{dt} &= - \frac{nm'}{1+m} \frac{\operatorname{cosec} i}{\sqrt{1-e^2}} \sum a A_{qq'ss'j} (s \cos i - j) \sin \theta_{qq'ss'j}, \\ \sin i \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{mn'}{1+m} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \sum a \frac{\partial A_{qq'ss'j}}{\partial i} \cos \theta_{qq'ss'j}, \\ e \left(\frac{d\omega}{dt} + \cos i \frac{d\Omega}{dt} \right) &= \frac{nm'}{1+m} \sqrt{1-e^2} \sum a \frac{\partial A_{qq'ss'j}}{\partial e} \cos \theta_{qq'ss'j}, \\ \frac{dM}{dt} + \sqrt{1-e^2} \left(\frac{d\omega}{dt} + \cos i \frac{d\Omega}{dt} \right) - n &= \\ &= - \frac{2nm'}{1+m} \sum a^2 \frac{\partial A_{qq'ss'j}}{\partial a} \cos \theta_{qq'ss'j}. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Невозможность проинтегрировать эти уравнения в строгом виде заставляет обращаться к различным мето-

дам построения приближенного решения. Простейший и наиболее распространенный способ состоит в подстановке в правые части (50) постоянных значений элементов и невозмущенного значения M . Тогда непосредственное интегрирование дает возмущения первого порядка относительно малого параметра — отношения возмущающей массы m' к массе Солнца (принятой здесь за единицу). Каждый из элементов a , e , i , Ω , ω и средняя аномалия M представятся в виде

$$Q = Q_0 + \delta Q, \quad M = \mathfrak{M}_0 + n_0 t + \delta M,$$

где Q означает любой из элементов, время t отсчитывается от некоторого момента t_0 , Q_0 и \mathfrak{M}_0 — постоянные величины. Приращения δQ , δM являются функциями времени и вычисляются из уравнений (50) с начальными значениями элементов Q_0 и невозмущенным значением средней аномалии $\mathfrak{M}_0 + n_0 t$. Каждую из этих функций можно представить в виде

$$\delta Q = \delta Q_s + \delta Q_l + \delta Q_p. \quad (51)$$

Приращения δQ_s охватывают вековые члены, получающиеся из (50) при нулевых значениях всех пяти индексов суммирования. Такие члены присутствуют лишь в угловых элементах Ω и ω и средней аномалии:

$$\left. \begin{aligned} \delta \Omega_s &= \frac{m'}{1+m} \frac{\operatorname{cosec} i}{\sqrt{1-e^2}} a \frac{\partial A_{00000}}{\partial i} nt, \\ \delta \omega_s + \cos i \delta \Omega_s &= \frac{m'}{1+m} \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} a \frac{\partial A_{00000}}{\partial e} nt, \\ \delta M_s + \sqrt{1-e^2} (\delta \omega_s + \cos i \delta \Omega_s) &= - \frac{m'}{1+m} 2a^2 \frac{\partial A_{00000}}{\partial a} nt. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

В силу свойств коэффициентов A делители $\sin i$ и e в первых двух выражениях (52) сокращаются при фактических вычислениях. Вековые члены (52) не приводят к вековым членам в координатах или скоростях, так как Ω , ω , M входят в выражение общего решения задачи двух тел лишь под знаком тригонометрических функций.

Вторая группа δQ_l порождена теми членами уравнений (50), которые содержат по крайней мере один из угловых аргументов ω , ω' или $\Omega - \Omega'$ и не содержат средних аномалий ($q = q' = 0$). При избранном методе интегрирования эти члены также выступают как вековые члены, изменяющиеся прямо пропорционально времени. Однако их уместно называть квазивековыми, так как при другом способе интегрирования уравнений (50) они принимают вид тригонометрических членов очень долгого периода, порядка периода изменения долгот перигелиев и узлов на 360° . Действительно, после нахождения вековых членов (52) в правые части уравнений (50) можно подставить значения M , ω , Ω (и аналогично для возмущающей планеты) с учетом вековых членов. Тогда каждый угловой аргумент разложения (45) будет представлять собой линейную функцию времени, хотя частоты изменения ω , ω' , $\Omega - \Omega'$ будут гораздо меньше частот изменения M и M' .

В большой полуоси a такие члены отсутствуют. Во всех остальных элементах они присутствуют и при первом способе интегрирования имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \delta e_l &= \frac{m'}{1+m} \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} nt \sum^* a A_{00ss'j} s \sin \theta_{00ss'j}, \\
 \delta i_l &= \frac{m'}{1+m} \frac{\operatorname{cosec} i}{\sqrt{1-e^2}} nt \sum a A_{00ss'j} (j - s \cos i) \sin \theta_{00ss'j}, \\
 \delta \Omega_l &= \frac{m'}{1+m} \frac{\operatorname{cosec} i}{\sqrt{1-e^2}} nt \sum^* \frac{\partial A_{00ss'j}}{\partial i} \cos \theta_{00ss'j}, \\
 \delta \omega_l + \cos i \delta \Omega_l &= \frac{m'}{1+m} \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} nt \sum^* a \frac{\partial A_{00ss'j}}{\partial e} \cos \theta_{00ss'j}, \\
 \delta M_l + \sqrt{1-e^2} (\delta \omega_l + \cos i \delta \Omega_l) &= \\
 &= - \frac{2m'}{1+m} nt \sum^* a^2 \frac{\partial A_{00ss'j}}{\partial a} \cos \theta_{00ss'j},
 \end{aligned} \tag{53}$$

где звездочка при сумме означает, что суммирование происходит лишь по трем индексам s , s' , j , не равным одновременно нулю. Делители e и $\sin i$ в δe_l и δi_l сокращаются при фактических вычислениях. В $\delta \Omega_l$ при значе-

ниях $s - j = \pm 1$ остается делитель $\sin \frac{i}{2}$, при $s + j = \pm 1$ — делитель $\cos \frac{i}{2}$, а при одновременном выполнении этих условий — делитель $\sin i$. В $\delta\omega_1$ делитель e остается при $s = \pm 1$. Квазивековые члены, появляющиеся в δe_1 и δi_1 , приводят к вековым членам в координатах и компонентах скорости. Однако это ни в коем случае не отражает действительную эволюцию движения, а является лишь следствием принятого способа интегрирования. Полученное таким образом приближенное решение пригодно на ограниченном промежутке времени, и никаких выводов относительно реальной эволюции орбит отсюда сделать нельзя.

Интегрирование, приводящее к квазивековым членам (53), часто применяется в задаче о движении больших планет Солнечной системы. Так как движения перигелиев и узлов планетных орбит чрезвычайно малы по сравнению со средними движениями планет, то этот способ дает экономное и очень хорошее приближение к реальному движению на протяжении нескольких сотен лет. В спутниковых задачах, типа движения Луны, где перицентр и узел орбиты движутся вековым образом гораздо быстрее, такой «планетный» способ интегрирования оказывается слишком грубым. В подобных задачах процесс приближения лучше строить в соответствии со вторым способом интегрирования уравнений (50), при котором в δe и δi , а тем самым в координатах и скоростях не возникают вековые члены. Получаемое этим путем решение имеет чисто тригонометрическую форму относительно времени и с формальной точки зрения пригодно на неограниченном интервале времени. Однако на основании такого формального решения тоже нельзя делать никаких выводов эволюционного характера. Лишь самые современные методы аналитической и качественной небесной механики могут в некоторых случаях дать математически обоснованный ответ.

Последняя совокупность возмущений δQ_p охватывает все те члены уравнений (50), для которых q и q' одновременно не обращаются в нуль. При интегрировании последнего из уравнений (50) надо иметь в виду, что величина n в левой части вычисляется с учетом возму

большой полуоси a . В результате эти короткопериодические возмущения имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta a_p}{a} &= \frac{2m'}{1+m} \sum' a A_{qq's's'j} \frac{q}{q+q' \frac{n'}{n}} \cos \theta_{qq's's'j}, \\
 \delta e_p &= \frac{m'}{1+m} \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \sum' a A_{qq's's'j} \frac{q \sqrt{1-e^2} - s}{q+q' \frac{n'}{n}} \cos \theta_{qq's's'j}, \\
 \delta i_p &= \frac{m'}{1+m} \frac{\operatorname{cosec} i}{\sqrt{1-e^2}} \sum' a A_{qq's's'j} \frac{s \cos i - j}{q+q' \frac{n'}{n}} \cos \theta_{qq's's'j}, \\
 \delta \Omega_p &= \frac{m'}{1+m} \frac{\operatorname{cosec} i}{\sqrt{1-e^2}} \sum' a \frac{\partial A_{qq's's'j} / \partial i}{q+q' \frac{n'}{n}} \sin \theta_{qq's's'j}, \\
 \delta \omega_p + \cos i \delta \Omega_p &= \frac{m'}{1+m} \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \sum' a \frac{\partial A_{qq's's'j} / \partial e}{q+q' \frac{n'}{n}} \sin \theta_{qq's's'j}, \\
 \delta M_p + \sqrt{1-e^2} (\delta \omega_p + \cos i \delta \Omega_p) &= \\
 &= -\frac{m'}{1+m} \sum' \left[2a^2 \frac{\partial A_{qq's's'j} / \partial a}{q+q' \frac{n'}{n}} + 3a A_{qq's's'j} \frac{q}{(q+q' \frac{n'}{n})^2} \right] \sin \theta_{qq's's'j}
 \end{aligned} \tag{54}$$

и штрих при сумме означает пропуск членов с $q = q' = 0$.

Делители e и $\sin i$ в δe_p и δi_p снова легко устраняются.

В $\delta \Omega_p$ делители $\sin \frac{i}{2}$, $\cos \frac{i}{2}$, $\sin i$ остаются при тех же значениях индексов, что и в $\delta \Omega_1$. В $\delta \omega_p$ эксцентриситет e остается в знаменателе для значений $q - s = \pm 1$. В планетных задачах важную роль играют делители $q + q' \frac{n'}{n}$.

Если эти делители не малы, то соответствующие члены действительно являются короткопериодическими. В случаях же острой соизмеримости средних движений эти делители могут быть очень малыми, и тогда соответствующие члены имеют большие периоды и большие амплитуды. Пример такого рода резонансных делителей встречается в движении Юпитера и Сатурна, где отношение средних движений близко к $5/2$. Но в целом такие резонансные делители в движении больших планет Солнеч-

ной системы не настолько малы, чтобы нельзя было пользоваться обычными методами теории возмущений. Очень малые резонансные делители встречаются в движении малых планет, и тогда приходится прибегать к помощи специальных методов, рассчитанных на резонансные случаи.

При «спутниковом» методе интегрирования после нахождения вековых членов (52) в правые части уравнений (50) подставляются постоянные значения элементов a , e , i и значения Ω , ω , M с учетом вековых возмущений. Тогда периодические возмущения принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta a_p}{a} &= \frac{m'}{1+m} 2 \sum^{(0)} a A_{qq's's'j} \frac{q}{\sqrt{qq's's'j}} \cos \theta_{qq's's'j}, \\ \delta e_p &= \frac{m'}{1+m} \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \sum^{(0)} a A_{qq's's'j} \frac{q \sqrt{1-e^2} - s}{\sqrt{qq's's'j}} \cos \theta_{qq's's'j}, \\ \delta i_p &= \frac{m'}{1+m} \frac{\operatorname{cosec} i}{\sqrt{1-e^2}} \sum^{(0)} a A_{qq's's'j} \frac{s \cos i - j}{\sqrt{qq's's'j}} \cos \theta_{qq's's'j}, \\ \delta \Omega_p &= \frac{m'}{1+m} \frac{\operatorname{cosec} i}{\sqrt{1-e^2}} \sum^{(0)} \frac{a \partial A_{qq's's'j} / \partial i}{\sqrt{qq's's'j}} \sin \theta_{qq's's'j}, \\ \delta \omega_p + \cos i \delta \Omega_p &= \frac{m'}{1+m} \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \sum^{(0)} \frac{a \partial A_{qq's's'j} / \partial e}{\sqrt{qq's's'j}} \sin \theta_{qq's's'j}, \\ \delta M_p + \sqrt{1-e^2} (\delta \omega_p + \cos i \delta \Omega_p) &= -\frac{m'}{1+m} \times \\ &\times \sum^{(0)} \left[2a^2 \frac{\partial A_{qq's's'j} / \partial a}{\sqrt{qq's's'j}} + 3a A_{qq's's'j} \frac{q}{(\sqrt{qq's's'j})^2} \right] \sin \theta_{qq's's'j}, \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

где

$$\begin{aligned} \sqrt{qq's's'j} &= q \left(1 + \frac{\delta \dot{M}_s}{n} \right) + q' \left(1 + \frac{\delta \dot{M}'_s}{n'} \right) \frac{n'}{n} + \\ &+ s \frac{\delta \dot{\omega}_s}{n} + s' \frac{\delta \dot{\omega}'_s}{n'} \frac{n'}{n} + j \left(\frac{\delta \dot{\Omega}_s}{n} - \frac{\delta \dot{\Omega}'_s}{n'} \frac{n'}{n} \right). \end{aligned}$$

Скорости вековых изменений $\delta \dot{\Omega}_s$, $\delta \dot{\omega}_s$, $\delta \dot{M}_s$ находятся из уравнений (52). Верхний нулевой индекс при суммах (55) означает пропуск членов с нулевыми значениями всех пяти индексов. Таким образом, при этом способе интегрирования возмущения оскулирующих элементов

состоят из вековых членов (52) и периодических членов (55).

Разумеется, все вышесказанное значительно проще фактического построения теории движения того или иного небесного тела. К тому же речь здесь идет исключительно о возмущениях первого порядка относительно малых параметров.

Для иллюстрации основных планетных возмущений рассмотрим начальные члены разложения пертурбационной функции в предположении малости эксцентриситетов и наклонов. Ограничиваясь лишь членами второй степени относительно этих величин, имеем

$$R = \gamma m' \left[\frac{1}{2} c_1^{(0)} - \frac{1}{2} a \frac{\partial c_1^{(0)}}{\partial a} e \cos M + \frac{1}{8} aa' (e^2 + e'^2 - \sin^2 i - \sin^2 i') c_3^{(1)} - \frac{1}{4} aa' c_3^{(2)} ee' \cos(\pi - \pi') + \frac{1}{4} aa' c_3^{(1)} \sin i \sin i' \cos(\Omega - \Omega') + \dots \right]. \quad (56)$$

Здесь в функции R оставлены главные вековые члены, не зависящие от средних долгот планет, и главный короткопериодический член с $\cos M$. Коэффициенты $c_n^{(k)}$ являются симметричными функциями больших полуосей a, a' и определяются разложением

$$(a^2 - 2aa' \cos H + a'^2)^{-n/2} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_n^{(k)}(a, a') \cos kH, \quad c_n^{(k)} = c_n^{(-k)},$$

откуда

$$c_n^{(k)}(a, a') = \frac{1}{(\max\{a, a'\})^n} \frac{\left(\frac{n}{2}\right)_k}{(1)_k} \alpha^k F\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + k, 1 + k, \alpha^2\right),$$

где

$$\alpha = \frac{\min\{a, a'\}}{\max\{a, a'\}}.$$

Уравнения Лагранжа с функцией R в переменных $a, e, i, \Omega, \pi, \varepsilon$ дают

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{m'}{1+m} na^3 \frac{\partial c_1^{(0)}}{\partial a} e \sin M, \\ \frac{de}{dt} &= \frac{m'}{1+m} n \left[\frac{a^2}{2} \frac{\partial c_1^{(0)}}{\partial a} \sin M - \frac{1}{4} a^2 a' c_3^{(2)} e' \sin(\pi - \pi') \right], \\ \frac{di}{dt} &= \frac{m'}{1+m} n \frac{a^2 a'}{4} c_3^{(1)} \sin i' \sin(\Omega - \Omega'), \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{m'}{1+m} n \frac{a^2 a'}{4} c_3^{(1)} \left[-1 + \frac{\sin i'}{\sin i} \cos(\Omega - \Omega') \right], \\ \frac{d\pi}{dt} &= \frac{m'}{1+m} n \left[-\frac{1}{2e} a^2 \frac{\partial c_1^{(0)}}{\partial a} \cos M + \frac{1}{4} a^2 a' c_3^{(1)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} a^2 a' c_3^{(2)} \frac{e'}{e} \cos(\pi - \pi') \right], \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= -\frac{m'}{1+m} na^2 \frac{\partial c_1^{(0)}}{\partial a}. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Воспользуемся этими уравнениями при рассмотрении двух частных вопросов — определении понятий большой полуоси и среднего движения в возмущенном движении и нахождении вековых возмущений. Первый вопрос решается при помощи последнего из этих уравнений и короткопериодических членов в уравнениях для e и π . Действительно, если n_0 и a_0 — невозмущенные значения среднего движения и большой полуоси, связанные третьим законом Кеплера, то наблюдаемое значение среднего движения, определяемое по наблюдениям средней долготы за большой промежуток времени, будет

$$n = n_0 \left(1 - \frac{m'}{1+m} a^2 \frac{\partial c_1^{(0)}}{\partial a} \right).$$

Значение a большой полуоси, получаемое по n в соответствии с третьим законом Кеплера, связано с a_0 зависимостью

$$a = a_0 \left(1 + \frac{2}{3} \frac{m'}{1+m} a^2 \frac{\partial c_1^{(0)}}{\partial a} \right).$$

Возмущения в радиусе-векторе с принятой степенью точности находятся по приближенной формуле

$$\delta r = (1 - e \cos M) \delta a - a \cos M \delta e + ae \sin M \delta M.$$

Поэтому постоянный член a в выражении возмущенного значения радиуса-вектора складывается из невозмущенного значения a_0 и постоянной части в возмущении δr , находимой по короткопериодическим возмущениям в δe и δM . В итоге имеем

$$a = a_0 \left(1 + \frac{m'}{1+m} \frac{a^2}{2} \frac{\partial c_1^{(0)}}{\partial a} \right)$$

или

$$a = a \left(1 - \frac{m'}{1+m} \frac{a^2}{6} \frac{\partial c_1^{(0)}}{\partial a} \right). \quad (58)$$

Если n — значение среднего движения, соответствующее a по третьему закону Кеплера, то

$$n = n \left(1 - \frac{m'}{1+m} \frac{a^2}{4} \frac{\partial c_1^{(0)}}{\partial a} \right).$$

Обычно в теориях движения больших планет употребляют наблюдаемое среднее движение n , а в качестве большой полуоси — величину a . Таким образом, вековой член в средней долготе в эпоху компенсируется постоянным членом в выражении большой полуоси, т. е. заменой a на a .

Отбросим теперь в уравнениях для e и λ короткопериодические члены и рассмотрим систему для вековых возмущений e , i , Ω и λ . Уравнения (57) дают очень простое и вместе с тем достаточно хорошее приближение в задаче о вековых возмущениях больших планет Солнечной системы. Эти уравнения можно интегрировать приближенно, подставляя в правые части постоянные значения всех элементов, и тогда получаются вековые члены, пригодные на ограниченном интервале времени. Но эти уравнения можно проинтегрировать и точно. Рассмотрим для общности случай N планет. Тогда предыдущие уравнения для вековых

возмущений переписутся в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{de_k}{dt} &= -n_k \sum_{j=1}^{N^{(k)}} [k, j] e_j \sin(\pi_k - \pi_j), \\ \frac{d\pi_k}{dt} &= n_k A_k - n_k \sum_{j=1}^{N^{(k)}} [k, j] \frac{e_j}{e_k} \cos(\pi_k - \pi_j) \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \frac{di_k}{dt} &= n_k \sum_{j=1}^{N^{(k)}} (k, j) \sin i_j \sin(\Omega_k - \Omega_j), \\ \frac{d\Omega_k}{dt} &= -n_k A_k + n_k \sum_{j=1}^{N^{(k)}} (k, j) \frac{\sin i_j}{\sin i_k} \cos(\Omega_k - \Omega_j), \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

где числовые коэффициенты имеют значения:

$$[k, j] = \frac{1}{4} \frac{m_j}{1 + m_k} a_k^2 a_j c_3^{(2)}(a_k, a_j),$$

$$(k, j) = \frac{1}{4} \frac{m_j}{1 + m_k} a_k^2 a_j c_3^{(1)}(a_k, a_j),$$

$$A_k = \sum_{j=1}^{N^{(k)}} (k, j), \quad (k = 1, 2, \dots, N).$$

Если теперь в качестве неизвестных ввести величины типа (25), то для их определения из (59) и (60) получим две независимые системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, решение которых дает выражения вида

$$e_k \exp \sqrt{-1} \pi_k = \sum_{j=1}^N h_j M_j^{(k)} \exp \sqrt{-1} (c_j t + \chi_j), \quad (61)$$

$$\sin i_k \exp \sqrt{-1} \Omega_k = \sum_{j=1}^N \gamma_j L_j^{(k)} \exp \sqrt{-1} (g_j t + \tau_j), \quad (62)$$

где h_j , γ_j , χ_j , τ_j — произвольные постоянные, определяемые начальными условиями, а собственные векторы $M_j^{(k)}$, $L_j^{(k)}$ и собственные числа c_j , g_j линейных систем представляют собой функции масс и больших полуосей. Решение (61),

(62) известно в небесной механике под названием тригонометрической теории вековых возмущений Лапласа—Лагранжа. Здесь вековые возмущения, играющие основную роль в эволюции орбит, представлены в чисто тригонометрическом виде и не приводят к вековым членам в координатах и скоростях планет. Вопрос о вековых членах в долготях перигелиев и узлов решается на основании анализа численных значений коэффициентов выражений (61), (62). Типичным является случай наличия вековых членов, что соответствует вращательному движению перигелиев и узлов. Но встречается также и случай отсутствия векового члена, когда соответствующий перигелий или узел совершает либрационное, колебательное движение относительно некоторого значения.

Существенной чертой тригонометрической теории вековых возмущений является и то, что определение вековых возмущений здесь отделено от определения остальных возмущений. Эта идея разделения возмущений короткого и долгого периода лежит в основе всех современных аналитических методов небесной механики. В самых общих чертах их суть сводится к тому, чтобы подходящим преобразованием ввести медленно меняющиеся переменные типа (25), определяемые автономной системой нелинейных дифференциальных уравнений. Решение такой эволюционной системы уравнений можно далее искать или в аналитической форме, простейшим примером чего является решение (61), (62), или численными методами. Подобный путь может быть использован для построения теорий движения планет и спутников Солнечной системы как в случае вращательного движения линий апсид и узлов, так и в случае либрационного движения.

В заключение данного параграфа выпишем в явном виде уравнения для вековых возмущений. Как ясно из вышеизложенного, эти возмущения получаются при осреднении пертурбационной функции по средним аномалиям, т. е. по быстро меняющимся угловым переменным. Возвратимся к общему случаю уравнений (38) для контактных элементов. Вековые возмущения обычно принято находить в оскулирующих элементах. Если R не зависит от t вне аргумента тригонометрических функций, то, как следует из (40), (41), вековые возмущения для геометрических оскулирующих и контактных элементов будут одинаковыми. Что же ка-

сается средней аномалии в эпоху, то надо учесть последний член в формуле (44). Окончательно, уравнения для нахождения вековых возмущений первого порядка в оскулирующих элементах примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial [R]}{\partial \mathcal{M}}, \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial [R]}{\partial \mathcal{M}} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial [R]}{\partial \omega}, \\ \frac{di}{dt} &= \frac{\operatorname{ctg} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial [R]}{\partial \omega} - \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial [R]}{\partial \Omega}, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial [R]}{\partial i}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\operatorname{ctg} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial [R]}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial [R]}{\partial e}, \\ \frac{d\mathcal{M}}{dt} &= -\frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial [R]}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial [R]}{\partial a} - \frac{3}{na^2} \left[\left(\dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial R}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right) \right], \end{aligned} \right\} (63)$$

где квадратные скобки означают осреднение по быстро меняющимся переменным.

§ 4. Возмущения от несферичности центрального тела

Помимо возмущений от третьего тела типичными возмущениями в задачах небесной механики являются и возмущения, обусловленные несферичностью центрального тела. В этом параграфе приводится общее выражение соответствующей пертурбационной функции, которое затем применяется к нахождению вековых возмущений от сжатия тела.

Пусть в гравитационном поле вращающегося несферического центрального тела движется спутник P . В отсутствие возмущающих тел за основную плоскость отсчета естественно принять плоскость экватора центрального тела. Если же есть возмущающие тела и возмущения от них более значительны, чем возмущения от несферичности центрального тела, то выбор плоскости экватора центрального тела в качестве основной плоскости является неудобным. Поэтому ниже плоскость отсчета остается произвольной.

В качестве основной системы координат примем неподвижную прямоугольную систему xuz , у которой ось x направлена в точку начала отсчета долгот, плоскость xu определяет плоскость отсчета, а ось z направлена в северный полюс этой плоскости.

Рассмотрим, далее, подвижную систему прямоугольных координат $x'y'z'$, жестко связанную с вращающимся центральным телом. Ось x' направлена в подвижную точку начала отсчета долгот в этой системе, плоскость $x'y'$ совпадает с плоскостью экватора тела, а ось z' направлена в

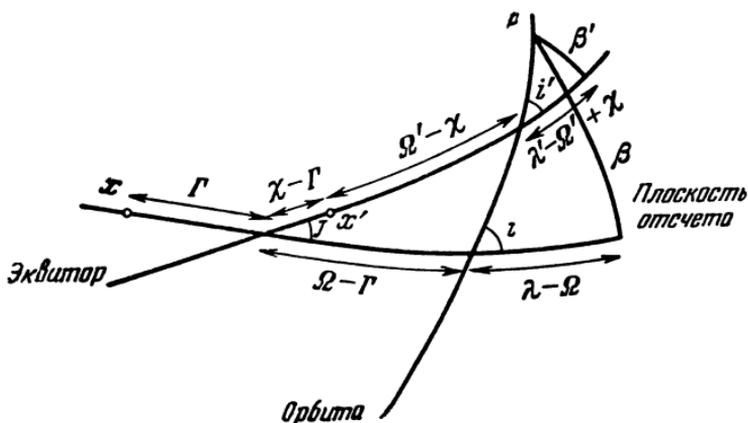


Рис. 2.

северный полюс этой плоскости. Обе системы координат — правые и имеют начало в центре тяжести центрального тела. Взаимное расположение осей x, y, z и x', y', z' будем характеризовать тремя углами Эйлера: наклоном I экватора тела к плоскости отсчета, долготой Γ восходящего узла N экватора тела на плоскости отсчета и угловым расстоянием $\chi - \Gamma$ оси x' от узла N (рис. 2). Пусть Ω и Ω' — отсчитываемые от оси x долготы восходящих узлов орбиты P на плоскости отсчета и на экваторе тела, а i и i' — наклоны орбиты к этим плоскостям. Положение самой точки P характеризуется в системах xuz и $x'y'z'$ широтами β, β' и долготами λ, λ' , причем первая долгота отсчитывается от оси x , а вторая — от оси x' .

Стандартное разложение по сферическим гармоникам пертурбационной функции от несферичности центрального

тела дает

$$R = \gamma m_0 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{r_0^k}{r^{k+1}} (C_{kj} \cos j\lambda' + S_{kj} \sin j\lambda') P_{kj}(\sin \beta'), \quad (64)$$

где m_0 и r_0 — масса и средний экваториальный радиус центрального тела, C_{kj} и S_{kj} — численные коэффициенты, характеризующие отклонение структуры тела от сферической, r — радиус-вектор точки P , $P_{kj}(t)$ — присоединенные функции Лежандра с целочисленными индексами

$$P_{kj}(t) = (1 - t^2)^{j/2} \frac{d^j P_k(t)}{dt^j}, \quad (0 \leq j \leq k),$$

где $P_k(t)$ — полином Лежандра. В функции от элементов орбиты разложение (64) принимает вид

$$R = \gamma m_0 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{l=-k}^k \sum_{s=0}^k (-1)^{E\left(\frac{k-j}{2}\right) + E\left(\frac{k-l}{2}\right) + \max\{0, j-l\}} \times \\ \times \frac{r_0^k}{r^{k+1}} A_{kjl}(I) F_{kls}(i) \times \\ \times \left\{ C_{kj} \cos \left[(k-2s)u + l(\Omega - \Gamma) - j(\chi - \Gamma) - \nabla_{kj} \frac{\pi}{2} \right] + \right. \\ \left. + S_{kj} \sin \left[(k-2s)u + l(\Omega - \Gamma) - j(\chi - \Gamma) - \nabla_{kj} \frac{\pi}{2} \right] \right\}, \quad (65)$$

где u — аргумент широты и

$$\nabla_{kj} = \begin{cases} 0, & k - j = 2p, \\ 1, & k - j = 2p + 1. \end{cases}$$

Дальнейшее разложение в ряд Фурье по кратным средней аномалии M приводит к

$$R = \frac{\gamma m_0}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{l=-k}^k \sum_{s=0}^k \sum_{q=-\infty}^{\infty} (-1)^{E\left(\frac{k-j}{2}\right) + E\left(\frac{k-l}{2}\right) + \max\{0, j-l\}} \times \\ \times \left(\frac{r_0}{a} \right)^k A_{kjl}(I) F_{kls}(i) X_{k-2s+q}^{-k-1, k-2s}(e) \left\{ C_{kj} \cos \times \right. \\ \times \left[(k-2s+q)M + (k-2s)\omega + l(\Omega - \Gamma) - j(\chi - \Gamma) - \nabla_{kj} \frac{\pi}{2} \right] + \\ \left. + S_{kj} \sin \left[(k-2s+q)M + (k-2s)\omega + l(\Omega - \Gamma) - j(\chi - \Gamma) - \nabla_{kj} \frac{\pi}{2} \right] \right\}. \quad (66)$$

В формулах (65) и (66) $F_{kls}(i)$ — функции, уже встречавшиеся в предыдущем параграфе, а $A_{kjl}(I)$ — несколько более общие функции

$$A_{kjl}(I) = \frac{(1)_{k-l}}{(1)_{k-j}} \cdot \frac{(-k-j)_{\max\{0, j-l\}} (-k+l)_{\max\{0, l-j\}}}{(1)_{|j-l|}} \times \\ \times \left(\sin \frac{I}{2} \right)^{|j-l|} \left(\cos \frac{j}{2} \right)^{|j+l|} F \left(\frac{1}{2} |j-l| + \frac{1}{2} |j+l| - k, \right. \\ \left. 1+k + \frac{1}{2} |j-l| + \frac{1}{2} |j+l|, 1+|j-l|, \sin^2 \frac{I}{2} \right), \quad (67)$$

так что

$$F_{kjl}(i) = \\ = (-1)^{E \left(\frac{k-j}{2} \right) + \max\{0, k-j-2l\}} \frac{2^{k-2l} \left(\frac{1}{2} \right)_{k-l}}{(1)_l} A_{k, j, k-2l}(i). \quad (68)$$

Если плоскость отсчета совпадает с плоскостью экватора центрального тела, то $I = 0$, а так как $A_{kjl}(0) = \delta_{jl}$, то суммирование по l в (65) и (66) исчезает и в этих разложениях становится одним угловым аргументом меньше. Заметим еще, что при учете членов с $j = 0$ (зональные гармоники) в (65) и (66) суммирование по l упрощается заменой

$$\sum_{l=-k}^k \rightarrow \sum_{l=0}^k (2 - \delta_{l,0}).$$

Применим это общее разложение к нахождению вековых возмущений, обусловленных коэффициентом C_{20} , т. е. зависящим, в основном, от сжатия центрального тела. Осредняя R по средней аномалии M и учитывая, что $X_0^{-3,2}(e) = 0$, получаем

$$[R] = \frac{\gamma m_0}{a^3} r_0^3 C_{20} X_0^{-3,0}(e) A_{200}(I) F_{201}(i) - 2A_{201}(I) F_{211}(i) \times \\ \times \cos(\Omega - \Gamma) - 2A_{202}(I) F_{221}(i) \cos 2(\Omega - \Gamma)], \quad (69)$$

где

$$\begin{aligned}
 X_0^{-3,0}(e) &= (1 - e^2)^{-3/2}, \\
 A_{200}(I) &= 1 - \frac{3}{2} \sin^2 I, \quad A_{201}(I) = -\frac{1}{4} \sin 2I, \\
 A_{202}(I) &= \frac{1}{8} \sin^2 I, \\
 F_{201}(i) &= -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i\right), \quad F_{211}(i) = -\frac{3}{4} \sin 2i, \\
 F_{221}(i) &= \frac{3}{2} \sin^2 i.
 \end{aligned}$$

Поэтому из уравнений Лагранжа для оскулирующих элементов следует, прежде всего,

$$\frac{da}{dt} = \frac{de}{dt} = 0.$$

Уравнения для i и Ω сводятся к канонической системе с одной степенью свободы:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d \cos i}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial [R]}{\partial \Omega}, \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= -\frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial [R]}{\partial \cos i}
 \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

или в явном виде

$$\begin{aligned}
 \frac{di}{dt} = -\frac{3}{4} \frac{m_0}{m_0 + m} \left(\frac{r_0}{a}\right)^2 C_{20} \frac{n}{(1-e^2)^2} [\sin 2I \cos i \sin(\Omega - \Gamma) + \\
 + \sin^2 I \sin i \sin 2(\Omega - \Gamma)], \quad (71)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Omega}{dt} = \frac{3}{2} \frac{m_0}{m_0 + m} \left(\frac{r_0}{a}\right)^2 C_{20} \frac{n}{(1-e^2)^2} \left[\left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 I\right) \cos i - \right. \\
 \left. - \frac{1}{2} \frac{\sin 2I}{\sin i} \cos 2i \cos(\Omega - \Gamma) - \frac{1}{2} \sin^2 I \cos i \cos 2(\Omega - \Gamma) \right]. \quad (72)
 \end{aligned}$$

Если считать, что I и Γ не зависят от времени, то решение системы (70) можно легко получить в квадратурах. После этого аргумент перицентра и средняя аномалия в

эпоху найдутся квадратурами из уравнений

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{4} \frac{m_0}{m_0 + m} \left(\frac{r_0}{a}\right)^2 C_{20} \frac{n}{(1-e^2)^2} \left[\left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 I\right) \times \right. \\ \left. \times (1 - 5 \cos^2 i) + \sin 2I \operatorname{ctg} i (5 \cos^2 i - 4) \cos (\Omega - \Gamma) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sin^2 I (5 \cos^2 i - 3) \cos 2(\Omega - \Gamma) \right], \quad (73)$$

$$\frac{d\mathcal{M}}{dt} = \frac{3}{na^2} [R]. \quad (74)$$

В экваториальной системе $I = 0$, и возмущения значительно упрощаются. Поэтому иногда бывает удобно найти возмущения в экваториальной системе координат, т. е. в элементах i' , ω' , Ω' , а затем перейти к элементам i , ω , Ω . Действительно, по формулам сферической тригонометрии имеем:

$$\left. \begin{aligned} \cos i &= \cos i' \cos I - \sin i' \sin I \cos (\Omega' - \Gamma), \\ \sin i \cos (\omega - \omega') &= \cos I \sin i' + \sin I \cos i' \cos (\Omega' - \Gamma), \\ \sin i \sin (\omega - \omega') &= \sin I \sin (\Omega' - \Gamma), \\ \sin i \cos (\Omega - \Gamma) &= \sin I \cos i' + \cos I \sin i' \cos (\Omega' - \Gamma), \\ \sin i \sin (\Omega - \Gamma) &= \sin i' \sin (\Omega' - \Gamma). \end{aligned} \right\} (75)$$

Обратный переход от i , ω , Ω к i' , ω' , Ω' совершается по этим же формулам с переменной ролей штрихованных и нештрихованных величин и заменой I на $-I$. Дифференцирование (75) дает

$$\frac{di}{dt} = \cos (\omega - \omega') \frac{di'}{dt} + \cos (\Omega - \Gamma) \frac{dI}{dt} - \\ - \sin I \sin (\Omega - \Gamma) \frac{d(\Omega' - \Gamma)}{dt}, \quad (76)$$

$$\frac{d(\Omega - \Gamma)}{dt} = \frac{\sin (\omega - \omega')}{\sin i} \frac{di'}{dt} - \frac{\cos i \sin (\Omega - \Gamma)}{\sin i} \frac{dI}{dt} + \\ + \frac{\sin i' \cos (\omega - \omega')}{\sin i} \frac{d(\Omega' - \Gamma)}{dt}, \quad (77)$$

$$\frac{d(\omega - \omega')}{dt} = - \frac{\cos i \sin (\omega - \omega')}{\sin i} \frac{di'}{dt} + \frac{\sin (\Omega - \Gamma)}{\sin i} \frac{dI}{dt} + \\ + \frac{\sin I \cos (\Omega - \Gamma)}{\sin i} \frac{d(\Omega' - \Gamma)}{dt}. \quad (78)$$

Во многих задачах I и Γ можно считать постоянными, то значительно упрощает использование этих формул.

ЭЛЕМЕНТЫ РИМАНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ И ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА

§ 1. Тензоры в аффинных пространствах

Аффинное пространство представляет собой множество точек и векторов, операции над которыми производятся так же, как в обычной векторной алгебре. Это пространство однородно и изотропно, т. е. все точки и направления в нем равноправны. Размерность пространства определяется максимально возможным числом линейно независимых векторов. В аффинном пространстве n измерений (A_n) существует n линейно независимых векторов, но любые $n + 1$ векторов являются линейно зависимыми.

Рассмотрим некоторую точку O пространства A_n и n каких-либо линейно независимых векторов e_1, \dots, e_n (их можно считать выходящими из точки O). Присоединяя к ним произвольный вектор x , получим совокупность $n + 1$ линейно зависимых векторов. Следовательно, должно иметь место соотношение

$$\alpha x + \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0,$$

причем α не может быть равно нулю в силу линейной независимости e_1, \dots, e_n . Отсюда после деления на α находим разложение произвольного вектора x по n линейно независимым векторам e_1, \dots, e_n :

$$x = x^i e_i. \quad (1)$$

Здесь, как и всюду в дальнейшем, принято, что по дважды встречающемуся индексу — один раз внизу и один раз вверху — происходит суммирование от 1 до n — числа размерности пространства.

Совокупность точки O и n линейно независимых векторов e_1, \dots, e_n носит название аффинного репера, а коэффициенты x^i разложения вектора x по векторам репера называются аффинными координатами вектора относительно данного репера. В силу линейной независимости

векторов репера эти коэффициенты определяются единственным образом. Аффинными координатами произвольной точки M относительно данного репера называются аффинные координаты ее радиуса-вектора^a \overrightarrow{OM} относительно того же репера.

Выясним, как изменяются аффинные координаты вектора при аффинных (линейных) преобразованиях векторов репера. Считая начало репера неподвижным (перенос начала не является существенным), рассмотрим неособенное преобразование

$$e_{i'} = A_i^i e_i \quad (2)$$

от старого репера e_1, \dots, e_n к новому $e_{1'}, \dots, e_{n'}$. Надо отметить, что i' — это индекс, совершенно не связанный с i , и штрих фактически относится не к самому индексу, а указывает на принадлежность к новому реперу. Часто преобразования вида (2) записывают в форме

$$e'_k = A_k^i e_i,$$

где e'_1, \dots, e'_n — векторы нового репера. Однако ниже будет использоваться запись типа (2).

В силу неособенности преобразования (2) существует обратное преобразование

$$e_i = A_i^{i'} e_{i'}, \quad (3)$$

причем коэффициенты прямого и обратного преобразований связаны зависимостями

$$A_i^{i'} A_i^{j'} = \delta_i^{j'}, \quad A_i^i A_i^{j'} = \delta_i^{j'}, \quad (4)$$

где δ_i^j — символ Кронекера со значениями

$$\delta_i^j = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases} \quad (5)$$

Наряду с разложением (1) рассмотрим разложение того же вектора по векторам нового репера

$$x = x^{i'} e_{i'}. \quad (6)$$

Подставляя в (1) выражения (3) и сравнивая с (6), находим искомый закон преобразования аффинных координат вектора

$$x^{i'} = A_{i'}^i x^i. \quad (7)$$

Таким образом, при аффинном преобразовании репера (2) аффинные координаты вектора преобразуются по формулам (7), т. е. при помощи транспонированной обратной матрицы исходного преобразования.

На примере аффинных координат вектора видны все преимущества и недостатки координатного метода. Действительно, введение аффинного репера, фиксирующего некоторую систему координат, позволяет приписать каждому вектору вполне определенные координаты, к которым можно затем применять методы алгебры и анализа. Но так как координаты вектора различны в различных координатных системах, то встает задача о таком математическом аппарате, который исключал бы влияние случайного выбора координатной системы. Эта задача решается применением тензорного анализа. Тензоры представляют собой системы величин, преобразующихся по простому линейному закону при переходе от одной координатной системы к другой. Между тензорами определяются операции инвариантного характера, т. е. не меняющие своего вида при преобразовании координатной системы. Все соотношения, записанные в тензорной форме, сохраняют свою форму в любой координатной системе, и тем самым исключается влияние выбора системы.

Математически тензор валентности $k + l$, k раз ковариантный и l раз контрвариантный, определяется как совокупность n^{k+l} величин $a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}$, заданных в любой координатной системе и преобразующихся при переходе (2) по закону

$$a_{i_1' \dots i_k'}^{j_1' \dots j_l'} = A_{j_1}^{j_1'} \dots A_{j_l}^{j_l'} A_{i_1}^{i_1'} \dots A_{i_k}^{i_k'} a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}. \quad (8)$$

Нижние индексы, для которых закон преобразования совпадает с исходным преобразованием репера (2), называются ковариантными. Верхние индексы преобразуются по закону (7) и носят название контрвариантных.

Для одновалентного ковариантного тензора имеем просто

$$a_{i'} = A_{i'}^i a_i, \quad (9)$$

в то время как для одновалентного контрвариантного тензора будет

$$a^{j'} = A_{j'}^j a^j. \quad (10)$$

Аффинные координаты вектора представляют, таким образом, пример одновалентного контрвариантного тензора.

Основными алгебраическими операциями над тензорами являются сложение, умножение, свертывание и подстановка индексов. Первые две операции обобщают соответствующие операции векторной алгебры. Надо только иметь в виду, что операция сложения возможна лишь для тензоров одного и того же строения, а результат операции умножения, определенной для тензоров любого строения, зависит от порядка сомножителей (поскольку в понятие тензора входит и порядок нумерации его компонент). Операция свертывания, возможная для тензора по крайней мере с одним ковариантным и одним контрвариантным индексами, состоит в том, что выбираются все компоненты данного тензора, у которых определенный верхний индекс равен определенному нижнему. В результате этой операции получается новый тензор, валентность которого на две единицы меньше валентности исходного тензора. Наконец, операция подстановки индексов позволяет получать новые тензоры путем изменения порядка написания верхних или нижних индексов.

Частными случаями операции подстановки индексов являются симметрирование и альтернация. Симметрирование состоит в том, что выбирается N одноименных индексов и составляется среднее арифметическое из $N!$ тензоров, получаемых всевозможными $N!$ подстановками выбранных индексов. Альтернация производится аналогичным образом, но тензоры, соответствующие четным подстановкам индексов, берутся со знаком плюс, в то время как тензоры, соответствующие нечетным подстановкам, берутся со знаком минус. Результатом симметрирования является тензор, симметричный относительно выделенных индексов, а в результате альтернации возникает тензор, кососим-

метричный по этим индексам (меняющий знак при нечетных подстановках избранных индексов и сохраняющий знак при четных). Например, трехвалентный ковариантный тензор a_{ijk} переходит при симметрировании по всем трем индексам в симметричный тензор

$$a_{(ijk)} = \frac{1}{3!} (a_{ijk} + a_{jki} + a_{kij} + a_{jik} + a_{ikj} + a_{kji}),$$

а при альтернации — в кососимметричный тензор

$$a_{[ijk]} = \frac{1}{3!} (a_{ijk} + a_{jki} + a_{kij} - a_{jik} - a_{ikj} - a_{kji}).$$

До сих пор речь шла о тензорах, заданных в одной точке пространства A_n . Если тензор, описывающий некоторый геометрический или физический объект, задан в некоторой области пространства A_n , то его компоненты являются в общем случае функциями от координат точки области

$$a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} = a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}(x^1, \dots, x^n),$$

что позволяет говорить о тензорном поле. Для тензорных полей, помимо перечисленных выше алгебраических операций, возможна инвариантная операция абсолютного дифференцирования. Если в области определения тензора проведена некоторая кривая $x^i = x^i(t)$, то компоненты тензора вдоль этой кривой являются сложными функциями параметра t и операция абсолютного дифференцирования, определяемая соотношением

$$da_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} = \frac{\partial a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}}{\partial x^i} dx^i, \quad (11)$$

приводит к тензору того же строения, как и исходный.

Коэффициенты при dx^i

$$\nabla_i a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} = \frac{\partial a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}}{\partial x^i} \quad (12)$$

носят название абсолютных производных и также пред-

ставляют собой тензоры, но с одним дополнительным ковариантным индексом по сравнению с исходным тензором. Это вытекает из непосредственного дифференцирования соотношения (8) по x^i при учете (7).

§ 2. Тензоры в евклидовых пространствах

Евклидово пространство n измерений (R_n) представляет собой пространство A_n , в котором введена операция скалярного произведения векторов. Это определяет все метрические свойства пространства, в частности, позволяет измерять длины векторов и дуг кривых.

Скалярным произведением двух векторов x и y называется билинейная скалярная функция этих векторных аргументов, обозначаемая xy и удовлетворяющая двум условиям — условию симметрии: $xy = yx$ и условию невырожденности: для каждого вектора $x \neq 0$ можно найти такой вектор y , что $xy \neq 0$.

Векторы x и y называются ортогональными, если их скалярное произведение обращается в нуль. Поэтому условие невырожденности означает, что не существует векторов $x \neq 0$, ортогональных ко всем векторам пространства.

Скалярным квадратом вектора x называется число $x^2 = xx$. Квадратный корень из этого числа дает длину вектора x :

$$|x| = \sqrt{x^2}, \quad (13)$$

а расстояние между двумя любыми точками A и B пространства R_n определяется тогда как длина вектора \vec{AB} . В комплексном R_n , построенном на базе комплексного A_n (где допускаются комплексные числа), скалярные квадраты векторов являются комплексными величинами. В вещественном R_n , построенном на базе вещественного A_n , скалярные квадраты векторов могут принимать лишь вещественные значения. Вещественные евклидовы пространства в свою очередь подразделяются на собственно евклидовы, где все векторы, отличные от нуля, имеют строго положительные скалярные квадраты, и на псевдоевклидовы, где существуют отличные от нуля векторы трех типов — с положительными, нулевыми и отрицательными скалярными квадратами. Таким образом, в псевдоевклидовых пространствах длина

ненулевого вектора может быть положительным числом, чисто мнимым или нулем. В дальнейшем будут рассматриваться лишь вещественные евклидовы пространства.

Кривая в A_n может быть задана аналитически в виде однопараметрической зависимости координат точек кривой $x^i = x^i(t)$, и тогда радиус-вектор текущей точки кривой будет допускать обычное разложение по векторам выбранного аффинного репера

$$x(t) = x^i(t) e_i.$$

Вектор

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx^i}{dt} e_i$$

представляет собой касательный вектор данной кривой.

В R_n становится возможным определять длину дуги кривой от точки M_1 до точки M_2 как

$$s = \int_{M_1}^{M_2} |dx| = \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{dx}{dt} \right| dt,$$

а дифференциал дуги будет

$$ds = |dx| = \left| \frac{dx}{dt} \right| dt.$$

Знак квадрата дифференциала дуги $ds^2 = dx^2$ определяет, имеет ли кривая вещественную ($ds^2 > 0$) или чисто мнимую длину ($ds^2 < 0$). При $ds^2 = 0$ кривая обладает нулевой длиной и называется изотропной. Если дуга имеет вещественную длину, то s можно принять за параметр t вдоль кривой. Тогда $u = dx/ds$ является единичным касательным вектором. Если же дуга имеет чисто мнимую длину, то, полагая $s = \sqrt{-1} \sigma$ и принимая за параметр t вещественную переменную σ , придем к мнимоединичному касательному вектору $u = dx/ds$.

Обозначим скалярное произведение векторов некоторого аффинного репера через g_{ij} :

$$g_{ij} = e_i e_j. \quad (14)$$

Легко убедиться, что при преобразовании (2) величины

g_{ij} ведут себя как компоненты дважды ковариантного тензора. Этот тензор носит название метрического тензора и определяет всю структуру рассматриваемого пространства R_n . В силу (1) скалярное произведение векторов x, y запишется в виде

$$xy = g_{ij}x^i y^j, \quad (15)$$

а скалярный квадрат вектора x будет выражаться квадратичной формой относительно его аффинных координат:

$$x^2 = g_{ij}x^i x^j. \quad (16)$$

В силу условия симметрии скалярного произведения тензор g_{ij} является симметричным тензором, а в силу условия невырожденности матрица из компонент g_{ij} должна быть неособенной. Таким образом, метрический тензор удовлетворяет условиям

$$g_{ij} = g_{ji}, \quad \det \|g_{ij}\| \neq 0. \quad (17)$$

Заметим, что так как в новой системе координат

$$g_{i'j'} = A_i^{i'} A_j^{j'} g_{ij},$$

то

$$\det \|g_{i'j'}\| = (\det \|A_i^{i'}\|)^2 \det \|g_{ij}\|, \quad (18)$$

т. е. определитель, составленный из компонент метрического тензора, является относительным инвариантом веса 2 (относительным инвариантом веса p называется скалярная величина, умножающаяся на $(\det \|A_i^{i'}\|)^p$ при переходе к новой системе координат).

Обозначим через $g^{i'j'}$ элементы матрицы, обратной матрице $\|g_{ij}\|$,

$$g_{ik} g^{jk} = \delta_i^j. \quad (19)$$

Величины g^{ij} представляют собой компоненты дважды контрвариантного метрического тензора. При помощи g_{ij} и g^{ij} в R_n можно производить тензорные операции опускания и поднятия индексов. Например, умножение контрвариантных координат вектора x^i на метрический тензор и последующее свертывание по одному из индексов дает ковариантные координаты вектора

$$x_i = g_{ij} x^j. \quad (20)$$

В силу (14) и (1) эти координаты имеют простое истолкование:

$$x_i = x e_i. \quad (21)$$

В свою очередь контрвариантные координаты вектора получаются из ковариантных путем поднятия индекса

$$x^i = g^{ij} x_j. \quad (22)$$

Для тензоров, валентность которых больше единицы, надо нумеровать верхние и нижние индексы в их совокупности, чтобы избежать неопределенности при поднятии и опускании индексов. Заметим еще, что поднятие одного (любого) из нижних индексов ковариантного метрического тензора приводит к символу Кронекера, представляющего собой двухвалентный смешанный тензор со значениями (5) в любых аффинных системах координат

$$g_i^j = g^{jk} g_{ik} = \delta_i^j. \quad (23)$$

§ 3. Псевдоевклидовы пространства

Рассмотрим в A_n m линейно независимых векторов a_1, \dots, a_m ($m \leq n$) и построим множество всех точек M , для которых вектор \overrightarrow{OM} допускает разложение по a_1, \dots, a_m . Полученное пространство A_m называется m -мерной плоскостью в A_n с направляющими векторами a_1, \dots, a_m . Частными случаями m -мерной плоскости являются прямая ($m = 1$), двумерная плоскость ($m = 2$) и гиперплоскость ($m = n - 1$). Аналитически m -мерная плоскость может быть задана либо неявно при помощи $n - m$ независимых линейных уравнений относительно координат x^1, \dots, x^n , либо в явном виде путем параметрического задания x^1, \dots, x^n как линейных функций от координат векторов a_1, \dots, a_m . Однако m -мерная плоскость в R_n не обязательно представляет собой пространство R_m , так как на этой плоскости может не выполняться условие невырожденности (хотя оно и выполняется в R_n). Иными словами, на этой плоскости может найтись вектор $x \neq 0$, ортогональный ко всем векторам плоскости, и такая плоскость с вырожденной метрикой называется изотропной. Вектор $x \neq 0$, ортогональный к самому себе (для которого,

таким образом, $x^2 = 0$), также называется изотропным. В собственно евклидовом пространстве нет ни изотропных плоскостей, ни изотропных векторов, но в псевдоевклидовом пространстве такие плоскости и векторы существуют.

Рассмотрим, далее, прямую с направляющим вектором a (a^1, \dots, a^n) и совокупность всех векторов x (x^1, \dots, x^n), ортогональных к этой прямой. Записывая условие обращения в нуль скалярного произведения векторов a и x в виде

$$g_{ij}a^i x^j = 0$$

и переходя к ковариантным координатам вектора a , имеем

$$a_i x^i = 0,$$

что представляет собой уравнение гиперплоскости, проходящей через начало координат и ортогональной к данной прямой. При этом возможны два случая.

1-й случай: данная прямая — неизотропная, т. е. $a^2 \neq 0$. Тогда вектор a не лежит в ортогональной гиперплоскости и линейно независим от ее $n - 1$ направляющих векторов. Следовательно, эти направляющие векторы и вектор a можно принять за n векторов аффинного репера в A_n . При этом сама ортогональная гиперплоскость также является неизотропной.

2-й случай: данная прямая — изотропная. Тогда вектор a лежит в ортогональной гиперплоскости, и сама она также является изотропной.

При помощи понятия m -мерной плоскости процесс построения ортонормированного репера в R_n может быть описан следующим образом. Выбирается некоторый неизотропный вектор x и производится его нормировка. Если $x^2 > 0$, то нормировка достигается путем введения единичного вектора e_1 такого, что

$$e_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2}}, \quad e_1^2 = 1.$$

Если же $x^2 < 0$, то вводится мнимоеединичный вектор e_1 :

$$e_1 = \frac{x}{\sqrt{-x^2}}, \quad e_1^2 = -1.$$

Далее выбирается гиперплоскость, ортогональная к e_1 . Она неизотропна и представляет собой евклидово пространство R_{n-1} . На ней выбирается некоторый неизотропный вектор, и весь процесс повторяется. В результате получается ортонормированный репер e_1, \dots, e_n . Легко подсчитать, что ортонормированный репер в R_n характеризуется $n(n+1)/2$ независимыми параметрами, в то время как произвольный репер в A_n имеет $n(n+1)$ независимых параметров. Орты репера можно упорядочить так, чтобы сначала шли мнимоединичные векторы, затем — единичные. Считая число мнимоединичных векторов равным k ($\leq n$), получаем по (14)

$$g_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}, \quad g_{ij} = \delta_{ij} \quad (24)$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2, \dots, k; \quad i, j = k+1, k+2, \dots, n),$$

где δ_{ij} имеет прежние значения (5). Поэтому

$$x_\alpha = -x^\alpha, \quad x_i = x^i$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, k; \quad i = k+1, k+2, \dots, n) \quad (25)$$

$$xy = -x^1y^1 - \dots - x^ky^k + x^{k+1}y^{k+1} + \dots + x^ny^n, \quad (26)$$

$$x^2 = -(x^1)^2 - \dots - (x^k)^2 + (x^{k+1})^2 + \dots + (x^n)^2. \quad (27)$$

В данном R_n при любом выборе репера число k , называемое индексом евклидова пространства, всегда одно и то же. Пространство с $k=0$ является собственно евклидовым. Пространство с $k=n$ также представляет собой собственно евклидово пространство, поскольку все длины в этом пространстве умножаются на $\sqrt{-1}$. Вообще, если в двух пространствах соответствующие скалярные произведения отличаются лишь знаком, то эти пространства не являются существенно различными. Пространство с индексом k , заключенным в пределах $0 < k < n$, представляет собой псевдоевклидово пространство, и простейшим примером такого пространства служит псевдоевклидова плоскость ($n=2, k=1$).

При изучении геометрии псевдоевклидовой плоскости (и вообще псевдоевклидова пространства индекса 1) удобно вести нумерацию координат от нуля, отмечая нулевым индексом мнимоединичный вектор. Пусть

$$e_0^2 = -1, \quad e_1^2 = 1.$$

Тогда скалярный квадрат и скалярное произведение векторов псевдоевклидовой плоскости запишутся в виде

$$x^2 = -x^0{}^2 + x^1{}^2, \quad xy = -x^0y^0 + x^1y^1. \quad (28)$$

В чисто условной форме геометрические соотношения на псевдоевклидовой плоскости могут быть изображены на обычной евклидовой плоскости, как это сделано, например,

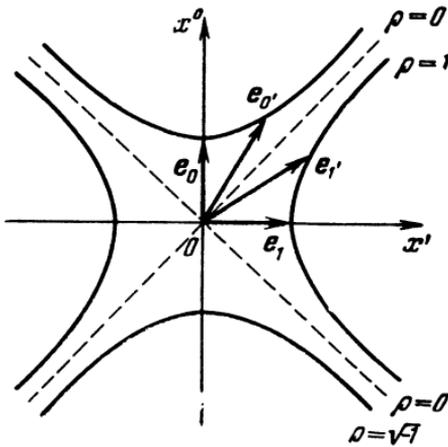


Рис. 3.

на рис. 3. За ось ординат здесь принята ось x^0 , за ось абсцисс — ось x^1 и на этих осях отложены соответственно орты e_0 и e_1 . Изотропные прямые $x^2 = 0$ (т. е. $x^0 = \pm x^1$) изображаются биссектрисами координатных углов. В паре вертикальных углов, образованных этими биссектрисами и содержащими ось x^1 , лежат векторы вещественной длины ($x^2 > 0$). В другой паре вертикальных углов, содержащих ось x^0 , находятся векторы мнимой длины ($x^2 < 0$). Окружности $x^2 = \rho^2$ ($\rho = \text{const}$) псевдоевклидовой плоскости соответствуют в координатах x^0, x^1 равносторонним гиперболам. Ортогональные прямые в силу (28) характеризуются соотношением $y^0/y^1 = x^1/x^0$ и симметричны относительно соответствующих биссектрис. Поэтому поворот одного из ортов репера на некоторый угол влечет за собой встречное вращение другого орта. Вращение репера, т. е. переход к новому реперу, аналитически задается формулами, вытекающими из (2):

$$e_0' = A_0^0 e_0 + A_0^1 e_1, \quad e_1' = A_1^0 e_0 + A_1^1 e_1. \quad (29)$$

При этом коэффициенты A_0^0 и A_1^1 отличны от нуля (иначе мнимое единичный вектор был бы пропорционален единичному, что невозможно), и в силу ортогональности

ортов e_0 и e_1 , должно быть

$$\frac{A_0^1}{A_0^0} = \frac{A_1^0}{A_1^1} = \beta,$$

где β — некоторое вещественное число. Подставляя в (29) вытекающие отсюда выражения A_0^1 , A_1^0 и записывая, что $e_0^2 = -1$, $e_1^2 = 1$, находим

$$A_0^0 = \pm \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad A_1^1 = \pm \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

в результате чего формулы (29) принимают вид

$$e_0' = \frac{e_0 + \beta e_1}{\pm \sqrt{1-\beta^2}}, \quad e_1' = \frac{\beta e_0 + e_1}{\pm \sqrt{1-\beta^2}}, \quad (30)$$

причем для вещественности преобразования необходимо условие

$$-1 < \beta < 1. \quad (31)$$

В зависимости от комбинации знаков в формулах (30) возможны четыре типа вращения репера. Для приложений к теории относительности важен случай собственного вращения, при котором в обеих формулах (30) берутся положительные знаки и тем самым сохраняется ориентация ортов e_0 , e_1 . Определитель такого преобразования равен $+1$.

Обобщением псевдоевклидовой плоскости является n -мерное псевдоевклидово пространство индекса 1. В случае $n = 4$, важном для теории относительности, можно положить

$$e_0^2 = -1, \quad e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 1. \quad (32)$$

Скалярный квадрат вектора в этом пространстве будет тогда

$$x^2 = -x^0^2 + x^1^2 + x^2^2 + x^3^2. \quad (33)$$

Уравнение $x^2 = 0$ определяет изотропный гиперконус вдоль оси x^0 , являющийся непосредственным обобщением изотропных прямых псевдоевклидовой плоскости. Внутри гиперконуса проходят кривые мнимой длины, вне его — кривые вещественной длины. Преобразование репера e_0 ,

e_1, e_2, e_3 этого пространства к новому реперу e_0', e_1', e_2', e_3' сводится по существу к вращению репера в псевдоевклидовой плоскости. Действительно, пусть R_3 — сечение рассматриваемого четырехмерного псевдоевклидова пространства плоскостью $x^0 = 0$, а R_3' — сечение плоскостью $x^{0'} = 0$. R_3 и R_3' представляют собой трехмерные собственно евклидовы пространства с реперами e_1, e_2, e_3 и e_1', e_2', e_3' соответственно. Тривиальным вращением реперов в R_3 и R_3' можно добиться совпадения ортов e_2 и e_2', e_3 и e_3' . Псевдоевклидовы плоскости, определяемые ортами e_0, e_1 и e_0', e_1' , будут тогда совпадать друг с другом. Поэтому для завершения преобразования к новому реперу остается лишь произвести вращение репера (30) в псевдоевклидовой плоскости. Окончательно преобразование репера четырехмерного псевдоевклидова пространства индекса 1 запишется в виде

$$e_0' = \frac{e_0 + \beta e_1}{\pm \sqrt{1 - \beta^2}}, \quad e_1' = \frac{\beta e_0 + e_1}{\pm \sqrt{1 - \beta^2}}, \quad e_2' = e_2, \quad e_3' = e_3. \quad (34)$$

Возвращаясь к общему случаю евклидова пространства R_n , рассмотрим преобразование координат при преобразовании репера (2). Контрвариантные координаты преобразуются по общей формуле (7), ковариантные координаты — по формуле

$$x_{i'}' = A_{i'}^i x_i. \quad (35)$$

Считая теперь греческие индексы изменяющимися от 1 до k , а латинские — от $k + 1$ до n , перепишем формулы (7) и (35) в виде

$$\begin{aligned} x^{\alpha'} &= A_{\alpha'}^{\alpha} x^{\alpha} + A_{i'}^{\alpha'} x^i, & x_{\alpha'} &= A_{\alpha'}^{\alpha} x_{\alpha} + A_{i'}^{\alpha'} x_i, \\ x^{i'} &= A_{\alpha'}^{i'} x^{\alpha} + A_{i'}^i x^i, & x_{i'} &= A_{i'}^{\alpha} x_{\alpha} + A_{i'}^i x_i. \end{aligned}$$

Подставляя сюда соотношения (25), находим

$$A_{\alpha'}^{\alpha'} = A_{\alpha'}^{\alpha}, \quad A_{\alpha'}^{i'} = -A_{i'}^{\alpha'}, \quad A_{i'}^{\alpha'} = -A_{\alpha'}^{i'}, \quad A_{i'}^{i'} = A_{i'}^i. \quad (36)$$

Таким образом, переход к новому реперу и соответствующее преобразование координат в n -мерном псевдоевклидовом пространстве индекса k совершается при помощи

псевдоортогональной матрицы. Произведение строк этой матрицы дает 0, если строки разные, -1 — если номер строки не превышает k , и $+1$, если номер строки больше k . Произведение строк берется по типу (26), т. е. первые k элементов произведения входят с противоположным знаком. Аналогичные соотношения справедливы и для произведения столбцов. Определитель такой матрицы равен ± 1 .

Пользуясь соотношениями (36), можно написать закон преобразования контрвариантных координат в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве индекса 1 при переходе к новому реперу (34)

$$x^{0'} = \frac{x^0 - \beta x^1}{\pm \sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x^{1'} = \frac{-\beta x^0 + x^1}{\pm \sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x^{2'} = x^2, \quad x^{3'} = x^3. \quad (37)$$

§ 4. Криволинейные координаты в аффинных и евклидовых пространствах

До сих пор использовались исключительно аффинные координаты и аффинные преобразования. Это вполне естественно, так как при этом все соотношения в A_n и R_n принимают наиболее простой вид. Однако ничто не мешает ввести в рассматриваемом аффинном пространстве A_n криволинейные координаты $x^{i'}$, связанные с аффинными координатами x^i посредством обратимого, однозначного, непрерывно дифференцируемого, нелинейного преобразования $x^{i'} = x^{i'}(x^1, \dots, x^n)$. Радиус-вектор \mathbf{x} произвольной точки M , допускающий обычное разложение (1) по векторам выбранного аффинного репера, становится теперь функцией криволинейных координат $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x^{1'}, \dots, x^{n'})$, причем n векторов

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} e_i$$

являются линейно независимыми в силу неособенности преобразования, связывающего аффинные и криволинейные координаты.

Обозначим теперь криволинейные координаты через x^i и рассмотрим в точке M n координатных линий — кривых, вдоль которых меняется лишь одна из координат. На координатной линии x^i радиус-вектор текущей точки становится функцией лишь этой координаты и производная

$x_i = \partial x / \partial x^i$, взятая в точке M , представляет собой касательный вектор к этой линии в данной точке. В силу сказанного выше n векторов x_i ($i = 1, \dots, n$) являются линейно независимыми и вместе с точкой M образуют локальный репер в A_n . Таким образом, при употреблении криволинейных координат в каждой точке M пространства A_n строится свой локальный репер, в отличие от единого аффинного репера в аффинных координатах. Если, в частности, x^i — аффинные координаты, то в силу разложения (1) имеем просто $x_i = e_i$.

При обратимом, однозначном и непрерывно дифференцируемом преобразовании, связывающем криволинейные координаты x^i и $x^{i'}$:

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, \dots, x^n), \quad x^i = x^i(x^{1'}, \dots, x^{n'}), \quad (38)$$

возникает новый локальный репер, связанный со старым при помощи преобразования

$$x_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} x_i, \quad (39)$$

поскольку

$$\frac{\partial x}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}.$$

Таким образом, постоянные коэффициенты A_i^i преобразования (2) от одного аффинного репера к другому, заменяются теперь на переменные коэффициенты $\partial x^i / \partial x^{i'}$, являющиеся функциями точки M .

В криволинейных координатах компоненты тензоров вычисляются относительно локального репера, и при преобразовании (38) для l раз контрвариантного и k раз ковариантного тензора имеем

$$a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}(M) = \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{i_1}}(M) \dots \frac{\partial x^{j_l}}{\partial x^{i_l}}(M) \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i_1'}}(M) \dots$$

$$\dots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{i_k'}}(M) a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}(M). \quad (40)$$

Все операции тензорной алгебры сохраняются и в криволинейных координатах. Однако операция дифферен-

цирования принимает более сложный вид, поскольку это требует рассмотрения тензоров не в одной, а в разных точках пространства, т. е. отнесенных к разным локальным реперам. Первая проблема, с которой приходится сталкиваться при этом, состоит в параллельном переносе вектора.

Пусть в некоторой точке $M(x^i)$ кривой $x^i = x^i(t)$ задан постоянный вектор ξ , имеющий координаты ξ^k относительно локального репера в точке M :

$$\xi = \xi^k(t) x_k. \quad (41)$$

При параллельном переносе этого вектора в соседнюю точку $\bar{M}(x^i + dx^i)$ его координаты изменяются в силу изменения локального репера и станут $\xi^k + d\xi^k$. Дифференцируя (41), находим

$$x_k d\xi^k + \xi^j dx_j = 0. \quad (42)$$

Но

$$dx_j = x_{ij} dx^i,$$

где

$$x_{ij} = \frac{\partial x_j}{\partial x^i} = \frac{\partial^2 x}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Разлагая этот последний вектор по векторам локального репера, получаем

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^k x_k. \quad (43)$$

Подстановка найденного выражения для dx_j в (42) приводит в силу произвольного выбора локального репера к формуле

$$d\xi^k = -\Gamma_{ij}^k \xi^j dx^i, \quad (44)$$

показывающей, как меняются координаты вектора при его параллельном переносе (с точностью до бесконечно малых высших порядков). Величины Γ_{ij}^k , симметричные по своим нижним индексам, носят название коэффициентов связности, поскольку при их помощи «связываются» координаты вектора в соседних точках пространства. В аффинных координатах $x_i = e_i$, $x_{ij} = 0$ и $\Gamma_{ij}^k = 0$. Обращение в нуль коэффициентов связности Γ_{ij}^k является необходимым и достаточным условием того, чтобы криволинейные координаты x^i в A_n были бы аффинными.

При переходе к новым криволинейным координатам вторые производные x_{ij} , как это следует из (39), преобразуются по закону

$$x_{i'j'} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} x_k + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} x_{ij},$$

откуда применением соотношения (43) в новых и старых координатах находим

$$\Gamma_{i'j'}^{k'} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^{k'}. \quad (45)$$

Итак, коэффициенты связности в общем случае не являются тензорами и лишь при линейных преобразованиях в силу исчезновения членов со вторыми производными ведут себя как тензоры.

Формула параллельного переноса (44) служит основой для аппарата абсолютного дифференцирования, рассматриваемого в § 7.

При употреблении криволинейных координат в евклидовом пространстве R_n метрический тензор определяется как скалярное произведение векторов локального репера

$$g_{ij}(M) = x_i(M) x_j(M) \quad (46)$$

и, таким образом, является функцией точки. Если $x^i = x^i(t)$ — некоторая кривая в R_n и $x = x(x^1, \dots, x^n)$ — радиус-вектор точки кривой, то по правилу дифференцирования сложной функции дифференциал радиуса-вектора определяется выражением

$$dx = x_i dx^i,$$

а касательный вектор

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx^i}{dt} x_i$$

имеет относительно локального репера координаты dx^i/dt . Квадрат дифференциала дуги $ds^2 = dx^2$ выражается метрической квадратичной формой

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad (47)$$

откуда для длины дуги следует

$$\overline{M_1 M_2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt.$$

Задание метрического тензора g_{ij} или метрической формы ds^2 полностью определяет всю геометрию пространства R_n и, в частности, позволяет найти коэффициенты связности. Из (43) умножением на x_l получается

$$x_{ij}x_l = \Gamma_{l,ij}, \quad (48)$$

где обозначено

$$\Gamma_{l,ij} = g_{lk} \Gamma_{ij}^k. \quad (49)$$

Из (49) следует, что

$$\Gamma_{ij}^k = g^{kl} \Gamma_{l,ij}. \quad (50)$$

Поэтому, хотя коэффициенты связности не являются тензорами, формальные операции (49), (50) опускания и поднятия индексов для них сохраняются. Дифференцируя по x^m равенство $x_k x_l = g_{kl}$ и учитывая (48), находим

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} = \Gamma_{k,lm} + \Gamma_{l,km}. \quad (51)$$

Круговой перестановкой индексов k, l, m получаем еще два аналогичных соотношения, которые в результате дают искомые выражения

$$\Gamma_{l,ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right), \quad (52)$$

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right). \quad (53)$$

Величины $\Gamma_{l,ij}$ и Γ_{ij}^k называются еще символами Кристоффеля первого и второго рода соответственно.

§ 5. Римановы пространства

Всякую открытую связную область в A_n можно рассматривать как множество элементов, допускающее взаимно однозначное отображение на область изменения криволинейных координат x^i или $x^{i'}$, связанных преобразованием

(38). Поскольку рассматриваемая область принадлежит пространству A_n , то существуют некоторые особые, а именно аффинные координаты, определенные с точностью до линейных преобразований. Если же отказаться от выделения аффинных координат, то указанная область представит собой пример элементарного многообразия.

В общем случае под элементарным многообразием n измерений и порядка N понимается множество \mathfrak{M}_n , для которого задано взаимно однозначное отображение на область изменения n переменных x^i , причем эти переменные определены лишь с точностью до N раз непрерывно дифференцируемого преобразования (38).

Тензор в точке M элементарного многообразия определяется как система чисел, заданных в каждой системе координат x^i и преобразующихся при переходе к новым координатам по закону (40). Но в A_n эти числа имеют смысл координат тензора относительно некоторого локального репера и исходным является не преобразование самих координат (38), а преобразование репера (39). В многообразии нет векторов, нет поэтому и локального репера. Но его можно построить в касательном аффинном пространстве, которое вводится следующим путем.

Рассматривается произвольный тензор ξ^i в точке M многообразия \mathfrak{M}_n и строится пространство A_n , имеющее начало системы координат в точке M и обладающее тем свойством, что каждому тензору ξ^i соответствует вектор ξ и линейным операциям над тензорами ξ^i в точке M соответствуют такие же линейные операции над векторами ξ в A_n . Такое пространство A_n и называется касательным аффинным пространством. Его геометрический смысл состоит в том, что всякому бесконечно малому смещению по кривой $x^i = x^i(t)$ в многообразии \mathfrak{M}_n будет отвечать в касательном пространстве A_n бесконечно малый вектор dx (поскольку дифференциалы $dx^i = dx^i(t)$ образуют одноконтрвариантный тензор) и этот вектор определяет соответствующее ему смещение с точностью до малых первого порядка включительно. Если в системе координат x^i в точке M многообразия \mathfrak{M}_n заданы n тензоров $\xi_{(j)}^i$ ($j = 1, \dots, n$), причем $\xi_{(j)}^i = \delta_j^i$, то соответствующие им векторы ξ_j в касательном пространстве A_n образуют ло-

кальный репер. С введением локального репера в касательном аффинном пространстве A_n компоненты тензоров в \mathfrak{M}_n в координатах x^i можно трактовать как координаты тензоров в A_n относительно локального репера, соответствующего координатам x^i .

На основе элементарного многообразия \mathfrak{M}_n путем добавления определенных аналитических или геометрических конструкций строятся разнообразные классы геометрических пространств.

Многообразие \mathfrak{M}_n , в каждой точке которого задан дважды ковариантный симметричный и невырожденный метрический тензор $g_{ij}(M) = g_{ij}(x^1, \dots, x^n)$, называется римановым пространством V_n . При помощи тензора $g_{ij}(M)$ касательное аффинное пространство A_n в точке M переходит в евклидово пространство R_n путем введения для любых векторов x, y скалярного произведения

$$xy = g_{ij}(M) x^i y^j. \quad (54)$$

Вещественное риманово пространство V_n делится на собственно риманово и псевдориманово — в зависимости от того, является ли его касательное пространство R_n собственно евклидовым или псевдоевклидовым. Если $x^i = x^i(t)$ — кривая в V_n , то бесконечно малому смещению по ней отвечает бесконечно малый вектор $dx^i(t)$ в касательном пространстве R_n и длина этого вектора

$$|dx| = \sqrt{dx^2} = \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j}$$

принимается за дифференциал дуги, так что прежняя формула (47) для квадрата дифференциала дуги остается в силе.

В собственно римановом пространстве всегда $ds^2 > 0$, но в псевдоримановом существуют кривые вещественной ($ds^2 > 0$), мнимой ($ds^2 < 0$) и нулевой ($ds^2 = 0$) длины. Евклидово пространство R_n можно рассматривать теперь как частный случай V_n , когда существуют такие координаты (аффинные), в которых во всей области компоненты g_{ij} постоянны (и путем нормировки эти постоянные можно всегда свести к значениям $0, \pm 1$).

Определитель g , составленный из компонент метрического тензора g_{ij} , является в V_n , так же как и в R_n , отно-

сительным инвариантом веса два. При преобразовании (38) этот определитель преобразуется по закону

$$g' = \left(\det \left\| \frac{\partial x^i}{\partial x'^i} \right\| \right)^2 g,$$

что является непосредственным обобщением формулы (18). Поэтому n -кратный интеграл, взятый по некоторой области Ω ,

$$W = \int_{\Omega} \sqrt{|g|} dx^1 \dots dx^n \quad (55)$$

инвариантен по отношению к преобразованию (38). Так как в аффинных координатах в R_n это выражение является естественным обобщением объема в обычном трехмерном пространстве, то и в криволинейных координатах в R_n и в пространстве V_n этот интеграл принимается за определение объема области Ω .

Если в V_n задана m -мерная поверхность \mathfrak{M}_m ($m < n$)

$$x^i = x^i(u^1, \dots, u^m),$$

то дифференциал дуги при произвольном бесконечно малом смещении по произвольной кривой в \mathfrak{M}_m в силу

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} du^\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

будет

$$ds^2 = G_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, m), \quad (56)$$

где

$$G_{\alpha\beta}(u^1, \dots, u^m) = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} \quad (i, j = 1, \dots, n). \quad (57)$$

При этом, если выполняется условие невырожденности, т. е. $\det \| G_{\alpha\beta} \| \neq 0$, то эта m -мерная поверхность \mathfrak{M}_m представляет собой риманово пространство V_m с метрическим тензором $G_{\alpha\beta}$. Поверхность, для которой $\det \| G_{\alpha\beta} \| = 0$, называется изотропной.

§ 6. Неевклидовы пространства

Простейшим примером римановых пространств являются неевклидовы пространства (в узком смысле слова). Эти пространства реализуются следующим образом. Рассматривается невырожденная m -мерная поверхность \mathfrak{M}_m (т. е. пространство V_m) при условии, что вмещающее пространство V_n представляет собой евклидово пространство R_n . Одно это обстоятельство ведет к упрощениям. Действительно, если x^i — аффинные координаты в R_n и $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, \dots, u^m)$ — радиус-вектор произвольной точки в V_m , то метрическая форма пространства $V_m ds^2 = dx^2$ по-прежнему определяется выражением (56), где на этот раз

$$G_{\alpha\beta} = \frac{\partial x}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x}{\partial u^\beta}.$$

Будем рассматривать частный случай, когда поверхность V_m представляет собой гиперсферу S_{n-1} , т. е. множество всех точек в R_n , находящихся на постоянном расстоянии (вещественном, чисто мнимом или нулевом) от некоторой фиксированной точки. Римановы геометрии, реализующиеся на гиперсферах S_{n-1} в R_n , называются неевклидовыми, а сами гиперсферы — неевклидовыми пространствами. Эти пространства характеризуются значением индекса $k = 0, 1, \dots, n$ вмещающего пространства R_n и вещественным или чисто мнимым значением радиуса гиперсферы. Нулевое значение радиуса исключается, так как тогда S_{n-1} становится изотропной поверхностью.

Уравнение гиперсферы S_{n-1} в аффинных координатах в R_n будет

$$-x^{1^2} - \dots - x^{k^2} + (x^{k+1})^2 + \dots + x^{n^2} = \rho^2. \quad (58)$$

Можно считать, что ρ — вещественная положительная постоянная. Это уравнение включает и случай чисто мнимого радиуса, так как его можно переписать в виде

$$x^{1^2} + \dots + x^{k^2} - (x^{k+1})^2 - \dots - x^{n^2} = -\rho^2$$

и истолковать как уравнение гиперсферы мнимого радиуса $\sqrt{-1}\rho$ в пространстве R_n с индексом $n - k$. При этом все длины в R_n и S_{n-1} умножаются на $\sqrt{-1}$. Вообще,

гиперсфера S_{n-1} радиуса ρ в пространстве R_n с индексом k имеет ту же риманову геометрию, что и гиперсфера S_{n-1} радиуса $\sqrt{-1}\rho$ в пространстве R_n с индексом $n-k$ (если не считать умножения всех длин на $\sqrt{-1}$).

Итак, будем считать в (58) $\rho > 0$. Так как случай $k = n$ при этом невозможен, допустим, что коэффициент при x^{n^2} всегда равен $+1$. Укажем теперь три часто употребляемые координатные системы на гиперсфере S_{n-1} .

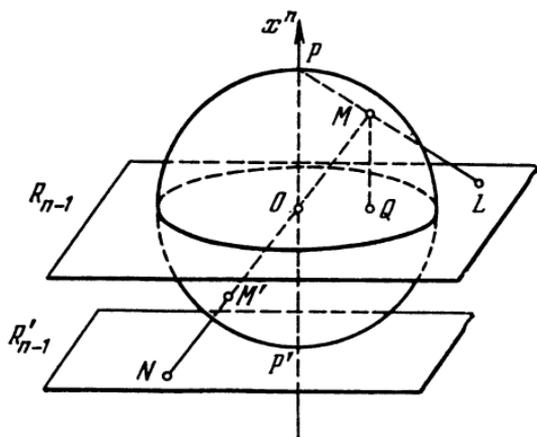


Рис. 4.

1. Рассмотрим точку $M(x^1, \dots, x^n)$, лежащую на гиперсфере S_{n-1} , и спроектируем ее параллельно оси x^n на экваториальную плоскость, представляющую собой пространство R_{n-1} (гиперплоскость $x^n = 0$). Координаты x^α ($\alpha = 1, \dots, n-1$) точки $Q(x^1, \dots, x^{n-1}, 0)$ полученной таким образом проекции примем за координаты, характеризующие положение точки M на гиперсфере (рис. 4). Экватор $x^n = 0$ является особой линией этой координатной системы. Каждой системе неособых значений координат x^α соответствуют две точки гиперсферы.

Перепишем уравнение гиперсферы и метрическую формулу в R_n в виде

$$r^2 + x^{n^2} = \rho^2, \quad (59)$$

$$ds^2 = dr^2 + dx^{n^2}, \quad (60)$$

где

$$r^2 = -x^{1^2} - \dots - x^{k^2} + (x^{k+1})^2 + \dots + (x^{n-1})^2, \quad (61)$$

$$dr^2 = -dx^{1^2} - \dots - dx^{k^2} + (dx^{k+1})^2 + \dots + (dx^{n-1})^2. \quad (62)$$

Метрика на S_{n-1} получается из (59) и (60) простым исключением x^n , именно

$$ds^2 = dr^2 + \frac{(r dr)^2}{\rho^2 - r^2}, \quad (63)$$

причем

$$r dr = -x^1 dx^1 - \dots - x^k dx^k + x^{k+1} dx^{k+1} + \dots + x^{n-1} dx^{n-1}. \quad (64)$$

2. Примем за координаты на гиперсфере S_{n-1} координаты v^α ($\alpha = 1, \dots, n-1$) точки $N(v^1, \dots, v^{n-1}, -\rho)$ центральной проекции M на гиперплоскость R'_{n-1} , проходящую через точку $P'(0, \dots, 0, -\rho)$ ортогонально оси x^n . Экватор и в этих координатах является особой линией, не имеющей проекции. Условие коллинеарности векторов \vec{OM} и \vec{ON} дает соотношения

$$\frac{x^\alpha}{v^\alpha} = -\frac{x^n}{\rho},$$

подстановка которых в уравнение гиперсферы (59) позволяет найти x^n в виде

$$x^n = \frac{\rho}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{\rho^2}}}, \quad (65)$$

где

$$v^2 = -v^{1^2} - \dots - v^{k^2} + (v^{k+1})^2 + \dots + (v^{n-1})^2. \quad (66)$$

Из (61) поэтому следует

$$r = \frac{v}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{\rho^2}}}. \quad (67)$$

В формулах (65) и (67) корень может иметь оба знака, которым соответствуют точки $M(x^1, \dots, x^n)$ и $M'(-x^1, \dots, -x^n)$. Дифференцируя (65) и (67) и подставляя полученные

выражения в (60), находим метрику гиперсферы S_{n-1} в координатах v^α :

$$ds^2 = \frac{dv^2}{1 + \frac{v^2}{\rho^2}} - \frac{(v dv)^2}{\rho^2 \left(1 + \frac{v^2}{\rho^2}\right)^2}, \quad (68)$$

где dv^2 и $v dv$ выражаются через v^α и dv^α по формулам, аналогичным (62) и (64).

3. Наиболее компактное выражение метрики на S_{n-1} получается, когда за координаты точки M на гиперсфере принимаются координаты u^α ($\alpha = 1, 2, \dots, n-1$) точки $L(u^1, \dots, u^{n-1}, 0)$ ее стереографической проекции из точки $P(x^1, \dots, x^{n-1}, \rho)$ на экваториальную гиперплоскость R_{n-1} . Проекция не существует при условии $x^n = \rho$, которое определяет изотропный гиперконус в гиперплоскости, проходящей через точку P ортогонально оси x^n .

В силу коллинеарности векторов \vec{PM} и \vec{PL}

$$\frac{x^\alpha}{u^\alpha} = \frac{x^n - \rho}{-\rho},$$

и поэтому из уравнения гиперсферы (59) следует

$$x^n = \rho \left(1 - \frac{2}{1 + \frac{u^2}{\rho^2}}\right), \quad (69)$$

где, как обычно,

$$u^2 = -u^1^2 - \dots - u^{k^2} + (u^{k+1})^2 + \dots + (u^{n-1})^2. \quad (70)$$

Связь вектора u с r и v дается формулами

$$r = \frac{2u}{1 + \frac{u^2}{\rho^2}}, \quad v = \frac{2u}{1 - \frac{u^2}{\rho^2}}. \quad (71)$$

Дифференцирование выражений x^n и r с последующей подстановкой в (60) после упрощений приводит к результату

$$ds^2 = \frac{4du^2}{\left(1 + \frac{u^2}{\rho^2}\right)^2}. \quad (72)$$

В силу (70) du^2 выражается через du^α по формуле, аналогичной (62).

Стереографическая проекция во многих отношениях является наиболее удобной координатной системой на S_{n-1} . В случае собственно евклидовой геометрии на R_{n-1} величина $u^2 > 0$ и область изменения u^α — вся гиперплоскость R_{n-1} , причем на S_{n-1} получаются все точки, кроме вершины P . В случае псевдоевклидовой геометрии на R_{n-1} область изменения координат u^α несвязная и представляет собой гиперплоскость R_{n-1} с вырезанной из нее поверхностью $u^2 + \rho^2 = 0$ (сфера радиуса $\sqrt{-1} \rho$). Этой области соответствуют все точки гиперсферы S_{n-1} , кроме изотропного гиперконуса с вершиной в точке P .

Так как du^2 является метрической формой гиперплоскости R_{n-1} , то как видно из (72), метрики в S_{n-1} и R_{n-1} отличаются друг от друга лишь множителем, зависящим от точки. Такое взаимно однозначное соответствие между пространствами называется конформным. Таким образом, неевклидовы пространства S_{n-1} конформны евклидову пространству R_{n-1} . Не менее важно еще одно свойство этих пространств. Вращение R_n около начала координат означает преобразование S_{n-1} в себя. Это преобразование зависит от $(n-1)n/2$ параметров. Преобразование R_{n-1} в себя также зависит от $(n-1)n/2$ параметров. Поэтому пространства S_{n-1} обладают той же максимальной степенью однородности и изотропности, что и евклидово пространство R_{n-1} .

До сих пор ρ считалось вещественной величиной. Чтобы включить случай чисто мнимого ρ , надо умножить метрические формы в R_n и S_{n-1} на -1 и индекс k заменить на $n-k$. Всего будет $2n$ вариантов $(n-1)$ -мерной неевклидовой геометрии: для гиперсферы вещественного радиуса ρ при значениях $k = 0, 1, \dots, n-1$ и для гиперсферы мнимого радиуса $\sqrt{-1} \rho$ при значениях $n-k = n, n-1, \dots, 1$.

Наиболее интересны неевклидовы пространства с собственно римановой метрикой. Их будет два — при значениях $k = 0$ и $k = n-1$ (в последнем случае надо еще умножить метрические формы на -1).

Случай $k = 0$. В этом случае R_n является собственно евклидовым пространством, а метрика S_{n-1} согласно (72)

имеет вид

$$ds^2 = 4 \frac{du^2 + \dots + (du^{n-1})^2}{\left(1 + \frac{u^2 + \dots + (u^{n-1})^2}{\rho^2}\right)^2}. \quad (73)$$

Пространство S_{n-1} с такой метрической формой носит название сферического пространства Римана (при $n = 3$ это обычная сферическая поверхность в трехмерном пространстве). С ним тесно связано эллиптическое пространство Римана, получаемое при отождествлении двух диаметрально противоположных точек на S_{n-1} . Областью изменения координат u^α будет тогда не вся гиперплоскость R_{n-1} , а шар $u^2 \leq \rho^2$, причем в этом шаре нужно отождествить диаметрально противоположные точки его границы. Это означает, что рассматривается нижняя половина гиперсферы S_{n-1} , срезанная плоскостью R_{n-1} , а на срезе отождествляются диаметрально противоположные точки.

Случай $k = n - 1$. В этом случае после изменения знака метрических форм имеем во вмещающем пространстве R_n

$$x^2 = x^1^2 + \dots + (x^{n-1})^2 - x^n^2,$$

а из (72) получаем

$$ds^2 = 4 \frac{du^2 + \dots + (du^{n-1})^2}{\left(1 - \frac{u^2 + \dots + (u^{n-1})^2}{\rho^2}\right)^2}. \quad (74)$$

Пространство S_{n-1} с такой метрикой называется пространством Лобачевского. Как видно из предыдущего, оно реализуется на гиперсфере радиуса $\sqrt{-1} \rho$ в псевдоевклидовом пространстве индекса 1 (при $n = 3$ метрика (74) определяет геометрию двуполостного гиперboloида в обычном трехмерном пространстве). При этом внутренность шара $u^2 < \rho^2$ отображается на нижнюю полость S_{n-1} (x^n отрицательно), а внешняя часть шара — на верхнюю полость.

И пространство Римана, и пространство Лобачевского играют исключительно важную роль в космологических задачах.

§ 7. Пространства аффинной связности и абсолютное дифференцирование

Если риманово пространство V_n , обобщающее евклидово пространство R_n , получается заданием в элементарном многообразии \mathfrak{M}_n метрического тензора $g_{ij}(M)$, то пространство аффинной связности L_n , представляющее собой обобщение аффинного пространства A_n , получается путем внесения в \mathfrak{M}_n объекта связности $\Gamma_{ij}^k(M)$, преобразующегося при замене координат (38) по закону (45). В частном случае, когда объект связности симметричен по своим нижним индексам и поэтому величина $S_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$, называемая тензором кручения, обращается в нуль, соответствующее пространство L_n^0 называется пространством аффинной связности без кручения.

Благодаря введению объекта связности в L_n становится возможным определить операцию параллельного переноса векторов, совпадающую с формальной стороны с соответствующей операцией в A_n в криволинейных координатах. Именно, если вдоль некоторой кривой $x^i = x^i(t)$ задано векторное поле $\xi^k = \xi^k(t)$, то параллельный перенос вектора определяется как такой, при котором координаты вектора при бесконечно малом смещении по кривой меняются по закону (44). В силу закона преобразования объекта связности Γ_{ij}^k эта формула сохраняет свой вид и при переходе к новым координатам. Однако в L_n , в отличие от A_n , параллельный перенос, вообще говоря, зависит от пути.

Кривая в L_n называется геодезической, если всякий вектор, касательный к ней в какой-либо точке, остается касательным при параллельном переносе вдоль нее (обобщение свойства постоянства направления прямых линий в A_n). Из этого определения на основе формулы (44) легко найти дифференциальные уравнения геодезической линии. Действительно, пусть $\xi^k = \xi^k(t)$ — параллельно переносимый касательный вектор вдоль кривой $x^i = x^i(t)$. В силу коллинеарности касательных векторов должно быть

$$\frac{dx^k}{dt} = \alpha(t) \xi^k(t),$$

где $\alpha(t)$ — отличный от нуля скалярный множитель, зависящий от точки кривой. Вместо параметра t вводится

параметр λ такой, что

$$d\lambda = \alpha(t) dt.$$

Уравнение кривой тогда станет $x^i = x^i(\lambda)$, а $dx^k/d\lambda = \xi^k$ будет параллельно переносимым касательным вектором. Такой параметр λ , определенный с точностью до линейного преобразования, называется каноническим. На основании (44) условие параллельного переноса вектора $dx^k/d\lambda$ запишется в виде

$$d \frac{dx^k}{d\lambda} = - \Gamma_{ij}^k \frac{dx^j}{d\lambda} dx^i,$$

откуда и следуют дифференциальные уравнения геодезической линии, отнесенные к каноническому параметру λ :

$$\frac{d^2 x^k}{d\lambda^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} = 0. \quad (75)$$

В силу теоремы существования и единственности решений обыкновенных дифференциальных уравнений через каждую точку по каждому направлению в L_n проходит одна и только одна геодезическая.

Как уже указывалось, частным случаем пространств аффинной связности являются аффинные пространства, где можно ввести такие координаты (аффинные), что во всей рассматриваемой области коэффициенты связности Γ_{ij}^k обращаются в нуль. В L_n^0 , т. е. в пространствах аффинной связности без кручения, можно добиться исчезновения Γ_{ij}^k лишь в одной данной точке M . Координаты, удовлетворяющие этому условию, называются геодезическими. Все операции в этих координатах значительно упрощаются, а окончательные результаты, записанные в тензорной форме, остаются справедливыми в любых координатах. Сам переход от произвольных координат x^i , в которых $\Gamma_{ij}^k(M) \neq 0$, к координатам $x^{i'}$, геодезическим в точке M , осуществляется достаточно просто. В самом деле, переписывая закон (45) преобразования объектов связности в виде

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \Gamma_{i'j'}^{k'},$$

применяя это выражение к геодезическим координатам и умножая на $\partial x^{l'}/\partial x^k$, получаем систему уравнений, определяющих геодезические координаты $x^{i'}$ в функции от старых координат x^i :

$$\frac{\partial^2 x^{l'}}{\partial x^i \partial x^j}(M) = \Gamma_{ij}^k(M) \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^k}(M). \quad (76)$$

Этим уравнениям можно удовлетворить, полагая, например,

$$x^{l'} = a_{i'}^{l'}(x^i - x_M^i) + \frac{1}{2} a_{k'}^{l'} \Gamma_{ij}^k(M) (x^i - x_M^i) (x^j - x_M^j), \quad (77)$$

где $\|a_{i'}^{l'}\|$ — неособенная числовая матрица, а x_M^i — координаты точки M .

Перейдем далее к наиболее важному понятию тензорного анализа — операции абсолютного дифференцирования. По своему геометрическому смыслу она самым тесным образом связана с операцией параллельного переноса.

Пусть в L_n проведена кривая $x^i = x^i(t)$ и в некоторой ее точке задан тензор $a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}(t)$. В бесконечно близкой точке значение этого тензора будет $a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}(t + dt)$. Но эти тензоры отнесены к разным локальным реперам и непосредственно сравнивать их между собой нельзя. Приближенно

$$a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}(t + dt) - a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}(t) \approx da_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}(t), \quad (78)$$

но стоящая справа величина не является тензором. Пусть тензор $\tilde{a}_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}(t)$ представляет собой результат параллельного переноса тензора $a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}(t + dt)$ в точку t . Тогда главная линейная часть разности

$$\tilde{a}_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}(t) - a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}(t) \approx Da_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}(t) \quad (79)$$

и будет абсолютным дифференциалом, представляющим собой тензор того же строения, что и исходный.

Для векторов операция параллельного переноса была определена выше, и поэтому абсолютный дифференциал

вектора находится без труда. Действительно, запишем для вектора $a^k(t)$ выражение (78)

$$a^k(t + dt) \approx a^k(t) + da^k.$$

Вектор $\tilde{a}^k(t)$ — это вектор $a^k(t + dt)$, перенесенный параллельно из точки $t + dt$ в точку t . Значит, наоборот, $a^k(t + dt)$ можно рассматривать как результат параллельного переноса вектора $\tilde{a}^k(t)$ из точки t в точку $t + dt$. Согласно (44) имеем поэтому

$$a^k(t + dt) \approx \tilde{a}^k(t) - \Gamma_{ij}^k \tilde{a}^j dx^i.$$

Пренебрегая бесконечно малыми высших порядков, можно заменить во втором члене правой части \tilde{a}^j на a^j и тогда сравнение двух полученных выражений для $a^k(t + dt)$ даст по (79) абсолютный дифференциал контрвариантного вектора

$$Da^k = da^k + \Gamma_{ij}^k a^j dx^i. \quad (80)$$

Для ковариантного вектора a_k параллельный перенос можно определить как такой, при котором не меняется его свертка с произвольным контрвариантным вектором ξ^i , т. е. для параллельного переноса

$$d(a_k \xi^k) = 0.$$

Отсюда, используя (44) и учитывая, что ξ^i — произвольный вектор, получаем формулу параллельного переноса ковариантного вектора

$$da_j = \Gamma_{ij}^k a_k dx^i. \quad (81)$$

Абсолютный дифференциал ковариантного вектора находится теперь без труда;

$$Da_j = da_j - \Gamma_{ij}^k a_k dx^i. \quad (82)$$

Параллельный перенос тензора любого строения также можно определить условием неизменности его скалярной свертки с произвольными контрвариантными и ковариантными векторами, именно

$$d(a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} \xi^{i_1} \dots \xi^{i_k} \eta_{j_1} \dots \eta_{j_l}) = 0.$$

Применяя (44), (81) и учитывая произвольность векторов ξ^i, η_j , находим формулу параллельного переноса произвольного тензора

$$da_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} = (-\Gamma_{rs}^{j_1} a_{i_1 \dots i_k}^{s j_2 \dots j_l} - \dots - \Gamma_{rs}^{j_l} a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_{l-1} s} + \Gamma_{r i_1}^s a_{s i_2 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} + \dots + \Gamma_{r i_k}^s a_{i_1 \dots i_{k-1} s}^{j_1 \dots j_l}) dx^r. \quad (83)$$

Каждому контрвариантному индексу соответствует, таким образом, член типа (44), а каждому ковариантному — член типа (81). Для абсолютного дифференциала тензора произвольного строения получаем отсюда

$$Da_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} = da_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} + (\Gamma_{rs}^{j_1} a_{i_1 \dots i_k}^{s j_2 \dots j_l} + \dots + \Gamma_{rs}^{j_l} a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_{l-1} s} - - \Gamma_{r i_1}^s a_{s i_2 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} - \dots - \Gamma_{r i_k}^s a_{i_1 \dots i_{k-1} s}^{j_1 \dots j_l}) dx^r. \quad (84)$$

Как следует из (83), при параллельном переносе тензора его абсолютный дифференциал равен нулю. Используя эту формулу, можно показать, что если взять некоторый локальный репер в касательном пространстве A_n и переносить его параллельно, то координаты параллельно переносимого тензора относительно этого репера не меняются.

Формула (84) может быть представлена в виде

$$Da_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} = \nabla_r a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} dx^r. \quad (85)$$

Величины $\nabla_r a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}$, обозначаемые часто и как $a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l; r}$, представляют собой тензор с дополнительным нижним индексом и называются абсолютными или ковариантными производными. Их вид для тензора произвольного строения следует из (84). В частности, ковариантная производная скалярной величины совпадает с обыкновенной

$$\nabla_r a = \frac{\partial a}{\partial x^r}, \quad (86)$$

для контрвариантного вектора будет

$$\nabla_r a^k = \frac{\partial a^k}{\partial x^r} + \Gamma_{rs}^k a^s, \quad (87)$$

а для ковариантного —

$$\nabla_r a_k = \frac{\partial a_k}{\partial x^r} - \Gamma_{rk}^s a_s. \quad (88)$$

Обычные правила дифференцирования суммы, произведения и т. п. распространяются и на абсолютное дифференцирование. Важно также отметить, что операция свертывания перестановочна с операцией абсолютного дифференцирования.

§ 8. Аффинная связность и геодезические в римановом пространстве

При рассмотрении объектов связности Γ_{ij}^k в римановом пространстве V_n оказывается возможным наложить два условия:

1) отсутствие кручения, т. е. $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$;

2) неизменность скалярного произведения двух векторов при их одновременном параллельном переносе вдоль какого-либо пути (в частности, постоянство скалярного квадрата параллельно переносимого вектора).

Смысл второго условия состоит в сохранении метрических свойств (длин и углов между векторами) при параллельном переносе. В силу этого условия $d(\xi \eta) = 0$ при параллельном переносе векторов ξ и η . Учитывая формулу (54) для скалярного произведения векторов и формулу (44) параллельного переноса, находим, что это условие эквивалентно следующему:

$$\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} - g_{jk} \Gamma_{li}^k - g_{ik} \Gamma_{lj}^k \right) \xi^i \eta^j dx^l = 0.$$

Следовательно, выражение в круглой скобке должно быть равно нулю, а отсюда на основании первого условия получаем для Γ_{ij}^k то же выражение (53), что и в криволинейных координатах в R_n .

После введения объектов связности все формулы абсолютного дифференцирования становятся применимыми и в V_n . Важно отметить, что абсолютный дифференциал как ковариантного, так и контрвариантного метрического тен-

зора равен нулю. Действительно, в силу (51) и (49)

$$\nabla_k g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma_{ki}^s g_{sj} - \Gamma_{kj}^s g_{si} = 0.$$

Поскольку как в V_n , так и в L_n

$$\nabla_k \delta_j^i = \Gamma_{ks}^i \delta_j^s - \Gamma_{kj}^s \delta_s^i = 0,$$

то на основании связи (19) между ковариантными и контрвариантными компонентами метрического тензора должно быть также

$$\nabla_k g^{ij} = 0.$$

Так как абсолютные дифференциалы Dg_{ij} и Dg^{ij} равны нулю, то операции поднятия и опускания индексов перестановочны с операцией абсолютного дифференцирования.

Будем теперь рассматривать геодезические линии в V_n . На основе определения, данного в предыдущем параграфе, кривая $x^i = x^i(\lambda)$ является геодезической, отнесенной к каноническому параметру λ , если

$$D \frac{dx^i}{d\lambda} = 0,$$

откуда и следуют уравнения (75). Однако геодезическая линия в V_n обладает дополнительными по сравнению с L_n свойствами. Прежде всего, поскольку в V_n параллельно переносимый вектор сохраняет свою длину, то вдоль геодезической имеем

$$g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} = C, \quad (89)$$

где C — постоянная величина. За канонический параметр λ можно принять либо s (в случае вещественной геодезической), либо $\sigma = s/\sqrt{-1}$ (в случае геодезической чисто мнимой длины). В первом случае $C = 1$, во втором $C = -1$. Для неизотропной геодезической соотношение (89) является первым интегралом уравнений (75). Для изотропной геодезической $C = 0$ и соотношение (89), определяющее канонический параметр, нужно рассматривать совместно с уравнениями (75). При этом важно отметить, что в силу

(89) геодезическая, проведенная через данную точку в изотропном направлении, будет и всюду изотропной. Укажем еще, что изотропная геодезическая, отнесенная к произвольному (не каноническому) параметру $t = t(\lambda)$, будет определяться согласно (75) и (89) уравнениями:

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = - \frac{\frac{d^2 t}{d\lambda^2}}{\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2} \frac{dx^k}{dt}, \quad (90)$$

$$g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0. \quad (91)$$

Чрезвычайно важное свойство геодезической линии в V_n состоит в том, что ее уравнения могут быть получены из вариационного принципа. Предварительно напомним, что согласно теореме вариационного исчисления для выполнения условия стационарности интеграла

$$\delta \int f(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx = 0 \quad (92)$$

необходимо и достаточно, чтобы функции $y_i = y_i(x)$ удовлетворяли системе обыкновенных дифференциальных уравнений (уравнениям Эйлера — Лагранжа)

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (93)$$

Таким образом, если уравнения какой-либо физической задачи могут быть выведены из вариационного принципа (92), то f является функцией Лагранжа для этих уравнений. В частности, если f не зависит от одной из переменных y_i , т. е. $\partial f / \partial y_i = 0$, то существует первый интеграл

$$\frac{\partial f}{\partial y'_i} = \text{const.} \quad (94)$$

Если f не зависит явно от независимого переменного x , т. е. $\partial f / \partial x = 0$, то также существует первый интеграл

$$f - \sum_{i=1}^n y'_i \frac{\partial f}{\partial y'_i} = \text{const.} \quad (95)$$

Покажем теперь, что уравнения неизотропной геодезической вытекают из вариационного принципа

$$\delta \int ds = 0. \quad (96)$$

Положим в соответствии с (47)

$$ds = \sqrt{f} d\lambda, \quad (97)$$

где λ — параметр вдоль геодезической, а

$$f = g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda}. \quad (98)$$

Уравнения (93), соответствующие вариационному принципу (96), будут

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \sqrt{f}}{\partial \frac{dx^i}{d\lambda}} - \frac{\partial \sqrt{f}}{\partial x^i} = 0. \quad (99)$$

Так как

$$\frac{\partial \sqrt{f}}{\partial x^i} = \frac{1}{2\sqrt{f}} \frac{dx^k}{d\lambda} \frac{dx^l}{d\lambda} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}, \quad \frac{\partial \sqrt{f}}{\partial \frac{dx^i}{d\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{f}} g_{ij} \frac{dx^j}{d\lambda},$$

то эти уравнения сводятся к следующим:

$$g_{ik} \frac{d^2 x^k}{d\lambda^2} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \frac{dx^k}{d\lambda} \frac{dx^l}{d\lambda} - \frac{1}{2} \frac{d \ln f}{d\lambda} g_{ik} \frac{dx^k}{d\lambda} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \frac{dx^k}{d\lambda} \frac{dx^l}{d\lambda} = 0,$$

откуда после выражения производных от метрического тензора по формуле (51) и свертывания с g^{ij} окончательно получаем

$$\frac{d^2 x^k}{d\lambda^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} = \frac{1}{2} \frac{d \ln f}{d\lambda} \frac{dx^k}{d\lambda}. \quad (100)$$

Если λ — канонический параметр, то согласно (89) $f = \text{const}$, правые части уравнений (100) обращаются в нуль и эти уравнения становятся тождественными с каноническими уравнениями геодезической в форме (75). Уравнения (100) обобщают уравнения (75) на случай произвольного параметра λ . В процессе вывода этих

уравнений из (96) использовалось условие $f \neq 0$. Поэтому вариационный принцип в форме (96) неприменим для изотропной геодезической. Этот принцип особенно удобно использовать, если за независимую переменную λ желательнее взять одну из переменных x^i . Тогда функцию Лагранжа \sqrt{f} целесообразно с самого начала отнести к этой новой независимой переменной. Заметим, что если уравнения (99) умножить на $d\lambda$, то λ вообще не будет фигурировать в уравнениях, за независимую переменную надо будет взять одну из переменных x^i , и тогда для определения неизотропной геодезической линии получим $n-1$ уравнений второго порядка. Это является отражением того факта, что неизотропная геодезическая в V_n зависит от $2n - 2$ параметров.

Принцип (96) дает функцию Лагранжа \sqrt{f} в иррациональной форме. Однако вариационный принцип можно дать в рациональной форме в виде

$$\delta \int \left(\frac{ds}{d\lambda} \right)^2 d\lambda = 0. \quad (101)$$

Но тогда в него войдет лишняя переменная — параметр λ . Действительно, в выражении (101) параметр λ входит явно в формулировку принципа. Вариационный принцип в форме (101) применим и для изотропной геодезической. Функцией Лагранжа, соответствующей (101), служит величина f и уравнения (93) в данном случае имеют вид

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial f}{\partial \left(\frac{dx^i}{d\lambda} \right)} - \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0. \quad (102)$$

Так как

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \frac{dx^k}{d\lambda} \frac{dx^l}{d\lambda}, \quad \frac{\partial f}{\partial \left(\frac{dx^i}{d\lambda} \right)} = 2g_{ij} \frac{dx^j}{d\lambda},$$

то уравнения (102) дают

$$g_{ik} \frac{d^2 x^k}{d\lambda^2} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \frac{dx^k}{d\lambda} \frac{dx^l}{d\lambda} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \frac{dx^k}{d\lambda} \frac{dx^l}{d\lambda} = 0,$$

откуда после замены (51) и свертывания с g^{ij} получаем

$$\frac{d^2 x^k}{d\lambda^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} = 0. \quad (103)$$

Из сопоставления с (75) ясно, что в формулировке принципа (101) λ должно быть каноническим параметром. Так как функция Лагранжа f этого принципа не зависит явно от λ , то существует интеграл (95), сводящийся в силу однородности f к выражению $f = \text{const}$, т. е. к (89). Система (103) состоит из n уравнений второго порядка и в числе $2n$ произвольных постоянных две постоянные — лишние, связанные с введением параметра λ . Для изотропных геодезических условие $f = 0$ должно быть присоединено как независимое к уравнениям (103) или к вариационному принципу (101).

Из вариационного принципа в форме (96) вытекает следствие: для того чтобы неизотропная линия в V_n имела стационарную длину, необходимо и достаточно, чтобы она была геодезической.

При помощи геодезических можно, по крайней мере в некоторой окрестности любой точки M в V_n , построить очень удобную систему координат, называемую полу-геодезической. Для этого выберем неизотропную гиперповерхность V_{n-1} , проходящую через точку M и заданную параметрическими уравнениями

$$x^i = x^i(u^1, \dots, u^{n-1}).$$

В точке M проводим нормальную к V_{n-1} геодезическую с параметром s , если она вещественной длины, или σ , если она чисто мнимой длины (изотропной эта геодезическая быть не может, поскольку она является нормалью к неизотропной гиперповерхности). Всякую точку L , лежащую на этой геодезической, можно характеризовать координатами x^α , x^n , где $x^\alpha = u^\alpha$ ($\alpha = 1, \dots, n-1$), а x^n совпадает с s или σ . Построенная таким путем система координат и называется полугеодезической.

Установим вид метрической формы в этой системе. Пусть dx^i — смещение из точки L по координатной линии x^n , а δx^i — смещение по гиперповерхности $x^n = \text{const}$. Тогда

$$dx^1 = \dots = dx^{n-1} = 0, \quad \delta x^n = 0.$$

В силу ортогональности координатных линий x^n к гиперповерхностям $x^n = \text{const}$ скалярное произведение

векторов dx^i и δx^j обращается в нуль, откуда следует

$$(g_{n1}\delta x^1 + \dots + g_{n, n-1}\delta x^{n-1})dx^n = 0.$$

Так как смещения δx^α ($\alpha = 1, \dots, n-1$) произвольны, а $dx^n \neq 0$, то

$$g_{n1} = \dots = g_{n, n-1} = 0.$$

При смещении вдоль координатной линии x^n

$$ds^2 = g_{nn}dx^{n^2},$$

т. е. $g_{nn} = \pm 1$ (знак «+», когда $dx^n = ds$, и знак «-», когда $dx^n = d\sigma$). Итак, окончательно в полугеодезической системе координат имеем

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \pm (dx^n)^2 \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n-1). \quad (104)$$

§ 9. Тензор кривизны

Как уже указывалось, все операции с абсолютными дифференциалами и производными первого порядка производятся так же, как с обычными дифференциалами и производными. Но уже для абсолютных дифференциалов и производных второго порядка положение меняется, так как для них не выполняется закон коммутативности.

Рассмотрим в L_n одноковариантное тензорное поле $a_i = a_i(x^1, \dots, x^n)$, и пусть D, d — операторы абсолютного и обычного дифференцирования, при смещении из данной точки в каком-то определенном направлении, а \tilde{D}, \tilde{d} — также операторы абсолютного и обычного дифференцирования, но при смещении по какому-то другому направлению. Дважды применяя формулу (82) — сначала для вычисления Da_i , затем для вычисления $\tilde{D}Da_i$, имеем

$$\begin{aligned} \tilde{D}Da_i &= \tilde{d}(da_i - \Gamma_{li}^j a_j dx^l) - \Gamma_{ki}^m (da_m - \Gamma_{lm}^j a_j dx^l) \tilde{d}x^k = \\ &= \tilde{d}da_i - \tilde{d}\Gamma_{li}^j a_j dx^l - \Gamma_{li}^j \tilde{d}a_j dx^l - \Gamma_{li}^j a_j \tilde{d}dx^l - \Gamma_{li}^j da_j \tilde{d}x^l + \\ &\quad + \Gamma_{ki}^m \Gamma_{lm}^j a_j dx^l \tilde{d}x^k. \end{aligned}$$

Меняя порядок дифференцирования и составляя разность полученных выражений, находим

$$\tilde{D}Da_i - D\tilde{D}a_i = R_{kli}^j a_j \tilde{d}x^k dx^l, \quad (105)$$

где

$$R_{kli}^{\dots j} = \frac{\partial \Gamma_{ki}^j}{\partial x^l} + \Gamma_{lm}^j \Gamma_{ki}^m - \frac{\partial \Gamma_{li}^j}{\partial x^k} - \Gamma_{km}^j \Gamma_{li}^m. \quad (106)$$

Поскольку левая часть соотношения (105) представляет собой тензор, то и правая часть должна быть тензором. Поэтому и выражение (106) является тензором. Этот тензор носит название тензора кривизны или тензора Римана — Кристоффеля. Непосредственно из (106) видно, что этот тензор антисимметричен по первым двум нижним индексам

$$R_{lki}^{\dots j} = -R_{kli}^{\dots j}. \quad (107)$$

Вычислим далее второй альтернированный абсолютный дифференциал от контрвариантного вектора a^j . Для этого проще всего свернуть a^j с произвольным ковариантным вектором ξ_i и взять абсолютные дифференциалы от полученного таким образом инварианта. Поскольку

$$D(a^j \xi_j) = (Da^j) \xi_j + a^j D\xi_j$$

и

$$\tilde{D}D(a^j \xi_j) = (\tilde{D}Da^j) \xi_j + Da^j \tilde{D}\xi_j + \tilde{D}a^j D\xi_j + a^j \tilde{D}D\xi_j,$$

то

$$(\tilde{D}Da^j - D\tilde{D}a^j) \xi_j = -a^j (\tilde{D}D\xi_j - D\tilde{D}\xi_j),$$

откуда, используя (105) и учитывая произвольность ξ_j , имеем

$$\tilde{D}Da^j - D\tilde{D}a^j = -R_{kli}^{\dots j} a^i \tilde{d}x^k dx^l. \quad (108)$$

Для тензора произвольного строения аналогичным путем получаем

$$\begin{aligned} (\tilde{D}D - D\tilde{D}) a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} = & (-R_{mnq}^{\dots j_1} a_{i_1 \dots i_k}^{qj_2 \dots j_l} - \dots - R_{mnq}^{\dots j_l} a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_{l-1}q} + \\ & + R_{mni_1}^{\dots q} a_{q i_2 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} + \dots + R_{mni_k}^{\dots q} a_{i_1 \dots i_{k-1}q}^{j_1 \dots j_l}) \tilde{d}x^m dx^n. \end{aligned} \quad (109)$$

Выясним теперь геометрический смысл тензора кривизны. Рассмотрим кривую $x^i = x^i(s)$ (считая для простоты, что параметром является длина дуги) и вектор $\xi^i = \xi^i(s)$,

параллельно переносимый вдоль нее. Найдем уклонение его координат при обходе по бесконечно малому замкнутому контуру. Интегрируя уравнения параллельного переноса (44) от точки M , соответствующей значению $s = 0$, до текущей точки кривой, получим, что координаты вектора изменятся на величину

$$\Delta \xi^i = - \int_0^s \Gamma_{ij}^i \xi^j \frac{dx^l}{ds} ds.$$

Разложим теперь подынтегральную функцию в окрестности точки M . Так как

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^i &= (\Gamma_{ij}^i)_M + \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^i}{\partial x^k} \right)_M \Delta x^k + \dots, \\ \xi^j &= \xi_M^j - (\Gamma_{km}^j \xi^m)_M \Delta x^k + \dots, \end{aligned}$$

то

$$\Delta \xi^i \approx - (\Gamma_{kj}^i \xi^j)_M \Delta x^k + \left(\Gamma_{im}^i \Gamma_{kj}^m - \frac{\partial \Gamma_{ij}^i}{\partial x^k} \right)_M \xi_M^j \int_0^s \Delta x^k dx^l.$$

Рассмотрим бесконечно малый замкнутый контур, лежащий на двумерной поверхности $x^k = x^k(u^1, u^2)$. При обходе по этому контуру первое слагаемое обратится в нуль (так как при возвращении в точку M $\Delta x^k = 0$), а интеграл во втором слагаемом преобразуется по теореме Грина к поверхностному интегралу, распространенному по области поверхности D , охваченной контуром

$$\begin{aligned} \oint \Delta x^k dx^l &= \oint x^k dx^l = \oint x^k \left(\frac{\partial x^l}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial x^l}{\partial u^2} du^2 \right) = \\ &= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial u^1} \left(x^k \frac{\partial x^l}{\partial u^2} \right) - \frac{\partial}{\partial u^2} \left(x^k \frac{\partial x^l}{\partial u^1} \right) \right] du^1 du^2 = 2 \iint_D x^{kl} du^1 du^2. \end{aligned}$$

Через x^{kl} здесь обозначен кососимметричный дважды контрвариантный тензор

$$x^{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x^k}{\partial u^1} \frac{\partial x^l}{\partial u^2} - \frac{\partial x^k}{\partial u^2} \frac{\partial x^l}{\partial u^1} \right).$$

Этот тензор, называемый бивектором, определяет двумерное направление касательной плоскости к поверхности. Заменяя значение бивектора внутри контура его значением в точке M и обозначая через σ интеграл

$$\sigma = \iint_D du^1 du^2, \quad (110)$$

характеризующий в координатах u^1, u^2 площадь поверхности, ограниченной контуром, имеем

$$\Delta \xi^i \approx 2 \left(\Gamma_{lm}^i \Gamma_{kj}^m - \frac{\partial \Gamma_{lj}^i}{\partial x^k} \right) \xi^j x^{kl} \sigma$$

или в силу антисимметричности бивектора

$$\Delta \xi^i \approx R_{klij} \cdot \xi^j x^{kl} \sigma. \quad (111)$$

Таким образом, отклонение от первоначальных значений координат вектора характеризуется тензором кривизны. Если L_n — пространство с абсолютным параллелизмом, в котором результат параллельного переноса вектора не зависит от пути, то тензор кривизны должен быть равен нулю. Аффинное пространство A_n обладает абсолютным параллелизмом. Поэтому если L_n — пространство без кручения ($\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$) и без кривизны ($R_{klij} = 0$), то оно будет аффинным (по крайней мере локально).

В пространстве аффинной связности без кручения L_n^0 компоненты тензора кривизны удовлетворяют тождествам Риччи

$$R_{kli}^{\cdot\cdot\cdot j} + R_{lik}^{\cdot\cdot\cdot j} + R_{ikl}^{\cdot\cdot\cdot j} = 0, \quad (112)$$

представляющим собой результат циклирования по трем нижним индексам, и тождествам Бианки

$$\nabla_m R_{kli}^{\cdot\cdot\cdot j} + \nabla_k R_{lim}^{\cdot\cdot\cdot j} + \nabla_l R_{mki}^{\cdot\cdot\cdot j} = 0, \quad (113)$$

получаемым циклированием по индексу абсолютного дифференцирования и первым двум нижним индексам. Обе группы тождеств проверяются непосредственно на основе определяющей формулы (106), причем при проверке (113) проще всего перейти к геодезическим координатам, когда

ковариантная производная сводится к обычной. Формула (105) для альтернированного второго дифференциала приводит в L_n^0 к простой формуле для альтернированной второй производной. Действительно,

$$Da_i = dx^l \nabla_l a_i,$$

$$\tilde{D}Da_i = (\tilde{D} dx^l) \nabla_l a_i + dx^l \tilde{d}x^k \nabla_k \nabla_l a_i$$

и

$$\tilde{D} dx^l = \tilde{d} dx^l + \Gamma_{ij}^l dx^j \tilde{d}x^i.$$

В силу отсутствия кручения $\tilde{D}dx^l = D\tilde{d}x^l$, и поэтому

$$\tilde{D}Da_i - D\tilde{D}a_i = dx^l \tilde{d}x^k (\nabla_k \nabla_l a_i - \nabla_l \nabla_k a_i),$$

откуда из сопоставления с (105) следует

$$(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k) a_i = R_{kli}^{\cdot\cdot\cdot j} a_j. \quad (114)$$

Аналогично

$$(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k) a^j = -R_{kli}^{\cdot\cdot\cdot i} a^j, \quad (115)$$

и эти же законы применяются к каждому индексу тензора произвольного строения.

В римановом пространстве V_n опусканием верхнего индекса тензора Римана—Кристоффеля получается ковариантный тензор кривизны

$$R_{klij} = g_{jm} R_{kli}^{\cdot\cdot\cdot m} \quad (116)$$

или после преобразований, основанных на формулах (106) и (53),

$$R_{klij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{kj}}{\partial x^l \partial x^i} + \frac{\partial^2 g_{li}}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{lj}}{\partial x^k \partial x^i} - \frac{\partial^2 g_{ki}}{\partial x^l \partial x^j} \right) + g_{\nu q} (\Gamma_{kj}^p \Gamma_{li}^q - \Gamma_{lj}^p \Gamma_{ki}^q). \quad (117)$$

Ковариантный тензор кривизны не меняется при перемене мест первой и второй пары нижних индексов и меняет знак при перемене порядка индексов внутри одной из пар

$$R_{ijkl} = R_{klij}, \quad R_{lkij} = -R_{klij}, \quad R_{klji} = -R_{klij}. \quad (118)$$

Тождества Риччи (112) принимают вид

$$R_{klij} + R_{likj} + R_{iklj} = 0, \quad (119)$$

но циклировать можно теперь по любым трем индексам. В силу всех этих тождественных соотношений число существенно различных компонент тензора кривизны в V_n будет равно не n^4 , а $n^2(n^2 - 1)/12$.

Наряду с тензором (116) важную роль в V_n играют дважды ковариантный симметричный тензор Риччи

$$R_{ij} = R_{kij}^{\cdot\cdot\cdot k} \quad (120)$$

и скалярная кривизна пространства

$$R = g^{ij} R_{ij}. \quad (121)$$

Симметричность тензора Риччи следует из того, что в соответствии с (116)

$$R_{kij}^{\cdot\cdot\cdot m} = g^{lm} R_{kijl}, \quad (122)$$

откуда

$$R_{ij} = g^{kl} R_{kijl}, \quad (123)$$

и в силу (118) теперь очевидно, что $R_{ij} = R_{ji}$.

Из формулы (111) для изменения координат вектора при его параллельном переносе вдоль бесконечно малого замкнутого контура на некоторой двумерной поверхности можно вывести в римановом пространстве V_n дальнейшие следствия. Пусть параллельно переносимый вектор ξ^i является единичным касательным вектором. После обхода он, вообще говоря, выйдет из касательной плоскости и получит некоторое приращение $\Delta \xi^i$. Составляя скалярное произведение векторов ξ^i и $\Delta \xi^i$, найдем в силу (111) и (116)

$$g_{ij} \xi^j \Delta \xi^i = R_{klij} \xi^i \xi^j x^{kl} \sigma,$$

и это выражение равно нулю на основании (118) (косо-симметричность ковариантного тензора кривизны относительно i и j). Следовательно, приращение $\Delta \xi^i$ ортогонально ξ^i , а значит, и составляющая $\Delta_1 \xi^i$ этого приращения в касательной плоскости ортогональна ξ^i . Поэтому если η^i — единичный касательный вектор, перпендикулярный

ξ^i , а φ — угол поворота вектора ξ^i в касательной плоскости после обхода по контуру, то

$$\Delta_1 \xi^i = \eta^i \operatorname{tg} \varphi,$$

откуда

$$g_{ij} \eta^j \Delta_1 \xi^i = \operatorname{tg} \varphi,$$

а, следовательно, и

$$g_{ij} \eta^j \Delta \xi^i = \operatorname{tg} \varphi.$$

Подставляя сюда значение (111), находим

$$\varphi \approx R_{klij} \xi^i \eta^j x^{kl} \sigma. \quad (124)$$

Прежде чем привести это выражение к окончательному виду, рассмотрим смысл величины σ в римановом пространстве V_n . На двумерной поверхности с метрическим тензором $G_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) площадь некоторой области D в соответствии с (55) выражается интегралом

$$W_D = \iint_D \sqrt{|G|} du^1 du^2.$$

С другой стороны, $\sqrt{|G|}$ представляет собой площадь параллелограмма, построенного на направляющих векторах касательной евклидовой плоскости к данной двумерной поверхности. В самом деле, площадь параллелограмма, построенного на векторах a_1, a_2 , определяется формулой

$$\begin{aligned} S &= |a_1 \times a_2| = \sqrt{a_1^2 a_2^2 - (a_1 a_2)^2} = \\ &= \sqrt{G_{11} G_{22} - (G_{12})^2} = \sqrt{|G|}, \end{aligned}$$

поскольку $G_{\alpha\beta} = a_\alpha a_\beta$. В формуле (110) $\sqrt{|G|} = 1$, т. е. площадь параллелограмма, построенного на направляющих векторах $\frac{\partial x^k}{\partial u^1}, \frac{\partial x^k}{\partial u^2}$, равна единице. Бивектор x_{kl} , соответствующий единичной площади, называется **единичным**.

Единичные векторы ξ^i, η^i , фигурирующие в (124), можно за счет выбора координат u^1, u^2 привести к выражениям

$$\xi^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^1}, \quad \eta^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^2}. \quad (125)$$

Соответствующий единичный бивектор переписется в форме

$$x^{ij} = \frac{1}{2} (\xi^i \eta^j - \xi^j \eta^i), \quad (126)$$

и в силу кососимметричности R_{klij} по i и j выражение (124) окончательно преобразуется к виду

$$\varphi \approx R_{klij} x^{kl} x^{ij} \sigma. \quad (127)$$

Предел

$$K = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\varphi}{\sigma} = R_{klij} x^{kl} x^{ij} \quad (128)$$

называется римановой кривизной в данной точке в данном двумерном направлении. В формуле (128) x^{ij} — единичный бивектор. Обобщение на случай произвольного, не единичного бивектора y^{ij} достигается без труда. Очевидно, что

$$x^{ij} = \frac{y^{ij}}{S},$$

где S — площадь, соответствующая бивектору y^{ij} . Пусть теперь ξ^i, η^i , определяемые по (125), — произвольные направляющие векторы касательной плоскости. Бивектор y^{ij} будет по-прежнему определяться формулой (126), но с новым смыслом ξ^i, η^i . Для квадрата площади параллелограмма, построенного на этих векторах, имеем

$$S^2 = G_{11}G_{22} - (G_{12})^2$$

или после подстановки значений (57)

$$S^2 = (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) \xi^i \xi^k \eta^j \eta^l. \quad (129)$$

Поэтому окончательно риманова кривизна в данной точке в данном двумерном направлении, характеризуемом произвольными векторами ξ^i, η^i , представится в виде

$$K = \frac{R_{klij} \xi^i \xi^k \eta^j \eta^l}{(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) \xi^i \xi^k \eta^j \eta^l}. \quad (130)$$

Из анализа (130) можно установить, что тензор кривизны пространства с постоянной кривизной K (не зависящей

ни от точки, ни от направления) имеет строение

$$R_{klij} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}). \quad (131)$$

Для тензора Риччи и скалярной кривизны такого пространства отсюда в силу соотношения $g_{ij}g^{ij} = \delta_j^i = n$ имеем

$$R_{ij} = -(n-1)Kg_{ij}, \quad R = -n(n-1)K. \quad (132)$$

Примером пространств постоянной кривизны могут служить однородные и изотропные гиперсферы S_{n-1} в R_n . Найдем, в частности, значение K для пространств Римана и Лобачевского. Как видно из (73), для пространства Римана

$$g_{ij} = \frac{4\delta_{ij}}{\left(1 + \frac{x^2}{\rho^2}\right)^2},$$

и поэтому в начале координат

$$g_{ij} = 4\delta_{ij}, \quad g^{ij} = \frac{1}{4}\delta^{ij}, \quad \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} = -16 \frac{\delta_{ij}\delta_{kl}}{\rho^2}, \quad \Gamma_{ij}^k = 0,$$

откуда по (117)

$$R_{ij} = -\frac{4}{\rho^2}(n-1)\delta_{ij}$$

и сравнение с (132) дает $K = 1/\rho^2$.

Итак, для евклидова пространства $K = 0$ ($\rho = \infty$, плоское пространство), для пространства Римана (73) $K = 1/\rho^2$ (пространство с положительной постоянной кривизной), для пространства Лобачевского (74) $K = -1/\rho^2$ (пространство с отрицательной постоянной кривизной).

Заканчивая на этом изложение элементов римановой геометрии и тензорного анализа, отметим, что в литературе отсутствует, к сожалению, стандартное определение тензора кривизны, что влечет за собой некоторую неоднозначность также и в дальнейших определениях. Употребляющиеся здесь обозначения, в частности определение (106), как и вообще характер изложения основной части материала этой главы, основаны на курсе П. К. Рашевского (1953).

§ 10. Применение римановой геометрии в задачах ньютоновой механики

В заключение остановимся вкратце на возможностях применения тензорных методов и идей римановой геометрии в задачах ньютоновой механики.

Пусть кривая $x^i = x^i(t)$ представляет собой траекторию движения некоторой материальной точки в V_n . Касательный вектор $\dot{x}^i = dx^i/dt$ определяет скорость этой точки, а ее ускорение выражается абсолютной производной

$$\frac{D\dot{x}^k}{dt} = \frac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}.$$

Уравнения движения точки естественно определить как

$$\frac{D\dot{x}^k}{dt} = f^k, \quad (133)$$

где $f^k = f^k(t, x^1, \dots, x^n)$ — контрвариантные компоненты вектора внешних сил. При отсутствии внешних сил, т. е. при $f^k = 0$, движение точки будет происходить по инерции по геодезической линии. Ковариантные компоненты ускорения запишутся в виде

$$\frac{D\dot{x}_i}{dt} = \frac{d\dot{x}_i}{dt} - \Gamma_{ki}^j \dot{x}_j \dot{x}^k = \frac{d\dot{x}_i}{dt} - \Gamma_{l, ki} \dot{x}^k \dot{x}^l.$$

После подстановки значений (53) уравнения движения (133) примут окончательную форму

$$\frac{d\dot{x}_i}{dt} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \dot{x}^k \dot{x}^l = f_i$$

или

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial T}{\partial x^i} = f_i, \quad (134)$$

где

$$T = \frac{1}{2} g_{kl} \dot{x}^k \dot{x}^l. \quad (135)$$

Но в ньютоновой механике уравнения движения склерономных голономных систем в обобщенных

координатах записываются как

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = Q_i,$$

где Q_i — обобщенные силы, а кинетическая энергия T является квадратичной формой относительно обобщенных скоростей \dot{q}^i :

$$T = \frac{1}{2} a_{kl} (q^1, \dots, q^n) \dot{q}^k \dot{q}^l. \quad (136)$$

Сопоставление с предыдущими уравнениями сейчас же показывает, что движение механической системы с кинетической энергией (136) можно интерпретировать как движение точки в V_n с метрикой

$$ds^2 = a_{ij} (q^1, \dots, q^n) dq^i dq^j = 2T dt^2 \quad (137)$$

под действием сил Q_i . Если силы обладают силовой функцией U , то $Q_i = \partial U / \partial q^i$, т. е. система консервативна, и возможна другая интерпретация, основанная на принципе Мопертюи. Именно, если рассмотреть пространство V_n с метрикой

$$ds^2 = 2(E + U) a_{ij} dq^i dq^j, \quad (138)$$

где E — постоянная интеграла живых сил

$$T - U = E,$$

то геодезические этого пространства будут определяться вариационным принципом (96)

$$\delta \int \sqrt{2(E + U)} \sqrt{a_{ij} dq^i dq^j} = 0,$$

а это и есть принцип Мопертюи. Таким образом, траектории движения консервативной механической системы с фиксированным значением константы E изображаются геодезическими линиями в пространстве V_n с метрикой (138).

Все геометрические объекты пространства V_n находят свое отражение при таком истолковании процесса движения механической системы. Например, при исследовании устойчивости движения и составлении уравнений в вари-

циях естественным образом возникает тензор кривизны. Применение тензорных методов позволяет, с одной стороны, вскрыть глубокие связи между классической механикой и римановой геометрией, а с другой стороны, облегчает выполнение различного рода преобразований уравнений движения механической системы. Этим вопросам посвящена монография Синга (Synge, 1936). Как пример применения тензорного анализа в ньютоновой небесной механике укажем работу Депри и Дели (Deprit, Delie, 1963), посвященную сведению уравнений задачи трех тел к системе восьмого порядка с одновременной регуляризацией двойных соударений, работу Кустаанхеймо и Штифеля (Kustaanheimo, Stiefel, 1965) по пространственной регуляризации при помощи спинорного исчисления во вспомогательном четырехмерном пространстве и работу (Knothe, 1969), в которой исследуется движение искусственных спутников в поле осесимметричной Земли. Несомненно, что дальнейшее, более углубленное использование идей римановой геометрии может оказаться очень благотворным при исследовании задач небесной механики.

ОСНОВЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ
ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Формулы Лоренца

Всякое реальное физическое событие происходит в некоторой точке трехмерного пространства с декартовыми координатами x, y, z в некоторый момент времени t . Множество всех точек x, y, z, t составляет пространство событий реального физического мира. Многочисленные опытные данные, накопленные к концу 19 — началу 20 столетия, привели к установлению четырех положений:

- 1) все точки пространства и все моменты времени равноправны — однородность пространства и времени;
- 2) все направления в пространстве равноправны — изотропность пространства;
- 3) законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета — специальный принцип относительности;
- 4) скорость света в вакууме есть величина постоянная, одинаковая во всех инерциальных системах — постулат постоянства скорости света c .

Первые два положения — общие для ньютоновой механики и специальной теории относительности. Последние два специфичны для специальной теории относительности, разработанной А. Эйнштейном в 1905 году.

Первым из основных законов ньютоновой механики является закон инерции. Система отсчета, в которой справедлив этот закон, носит название инерциальной системы. Строго говоря, в природе инерциальной системы отсчета не существует — она реализуется материальными телами лишь с большей или меньшей степенью точности. Всякая система отсчета, движущаяся равномерно и прямолинейно относительно данной инерциальной системы, в свою очередь является инерциальной. С момента возникновения ньютоновой механики было известно, что ее законы справедливы в любой инерциальной системе — принцип относительности Галилея. Математическим

выражением этого принципа является инвариантность уравнений ньютоновой механики относительно преобразований Галилея, дающих переход от одной инерциальной системы к другой.

Пусть имеются две инерциальные системы $S(t, x, y, z)$ и $S'(t', x', y', z')$, причем S' движется относительно системы S с постоянной скоростью v . Если радиус-вектор некоторой точки равен r в системе S и r' в S' , то

$$r' = r - vt.$$

С точки зрения ньютоновой механики время имеет абсолютный характер, в частности, промежуток времени между двумя событиями всегда имеет одну и ту же величину независимо от системы отсчета, в которой он измеряется. Поэтому

$$t' = t.$$

Эти формулы характеризуют преобразования Галилея. Инвариантная запись уравнений ньютоновой механики относительно преобразований Галилея обеспечивается тем, что в левой части этих уравнений стоит вектор ускорения, имеющий одно и то же значение в любой инерциальной системе: $d^2r'/dt'^2 = d^2r/dt^2$, а в правой — вектор силы, который также не зависит от равномерного и прямолинейного движения системы.

Из преобразований Галилея вытекает, кроме того, что расстояния между точками пространства, измеряемые в различных инерциальных системах, должны быть одинаковыми. Это является отражением того факта, что пространство ньютоновой механики описывается геометрией трехмерного собственно евклидова пространства с метрикой

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Принятие специального принципа относительности и постулата постоянства скорости света коренным образом изменило ньютоновы представления о пространстве и времени. Из совокупности четырех положений, приведенных выше, следует, что для любых двух событий $M(t, x, y, z)$ и $\tilde{M}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$, наблюдаемых в разных

инерциальных системах S и S' , должно быть

$$\begin{aligned} & -(\tilde{c}t - ct)^2 + (\tilde{x} - x)^2 + (\tilde{y} - y)^2 + (\tilde{z} - z)^2 = \\ & = -(\tilde{c}t' - ct')^2 + (\tilde{x}' - x')^2 + (\tilde{y}' - y')^2 + (\tilde{z}' - z')^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Но если положить

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad (2)$$

то формула (1) будет означать не что иное, как инвариантность во всех инерциальных системах скалярного четырехмерного вектора $\overline{MM'}$:

$$\overline{MM'}^2 = -(\tilde{x}^0 - x^0)^2 + (\tilde{x}^1 - x^1)^2 + (\tilde{x}^2 - x^2)^2 + (\tilde{x}^3 - x^3)^2. \quad (3)$$

Поэтому пространство событий, рассматриваемое в специальной теории относительности, может быть взаимнооднозначно отображено на четырехмерное псевдоевклидово пространство индекса 1. Переход между различными инерциальными системами сводится, таким образом, к преобразованию ортонормированных реперов. В общем случае это преобразование зависит от $n(n+1)/2 = 10$ параметров, четыре из которых связаны с возможностью произвольного выбора начальной точки (однородность пространства и времени), три параметра обусловлены возможностью произвольного поворота пространственных осей (изотропность пространства), а остальные три параметра представляют собой компоненты скорости поступательного движения одной инерциальной системы относительно другой. С точностью до тривиального преобразования переноса и поворота этот переход от одной инерциальной системы к другой описывается формулами (37) гл. 2. В первой из этих формул из физических соображений сохраняется лишь знак «+» (иначе время в разных системах текло бы в противоположных направлениях). Знак во второй формуле не существен, и можно поэтому оставить лишь знак «+» (отрицательный знак означал бы просто изменение направления оси x^1). В силу (2) эти формулы примут вид

$$t' = \frac{t - \frac{\beta}{c}x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x' = \frac{-\beta ct + x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (4)$$

Для выяснения физического смысла β рассмотрим точку P , закрепленную в S' , т. е. имеющую постоянные координаты x', y', z' . Дифференцирование по времени t трех последних формул (4) дает

$$\frac{dx}{dt} = \beta c, \quad \frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{dz}{dt} = 0.$$

Таким образом, рассматриваемая точка P движется относительно системы S с постоянной скоростью $v = \beta c$ в направлении оси x . Следовательно, и вся система S' поступательно движется относительно S с этой скоростью. Итак,

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad (5)$$

где v — скорость поступательного движения S' относительно S и согласно неравенству (31) гл. 2

$$-c < v < c. \quad (6)$$

Подстановка (5) в (4) приводит к знаменитым формулам Лоренца, дающим переход от одной инерциальной системы к другой:

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x' = \frac{-vt + x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (7)$$

Формулы (7) относятся к частному случаю движения системы S' относительно S вдоль оси x . Чтобы получить более общее преобразование, пригодное для любого направления вектора относительной скорости v системы S' , разложим вектор r на составляющие r_{\parallel} и r_{\perp} , направленные соответственно параллельно и перпендикулярно направлению v . По формулам (7) будет

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} |r_{\parallel}|}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad r'_{\parallel} = \frac{-vt + r_{\parallel}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad r'_{\perp} = r_{\perp}.$$

Но так как

$$r_{\parallel} = \frac{(rv)}{v^2} v$$

и

$$r = r_{\parallel} + r_{\perp}, \quad r' = r'_{\parallel} + r'_{\perp},$$

то окончательно

$$\left. \begin{aligned} t' &= \frac{t - \frac{1}{c^2}(vr)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ r' &= r - vt + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) (rv - v^2t) \frac{v}{v^2}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Более общие формулы (8) содержат три параметра — составляющие относительной скорости v . Недостающие семь параметров добавляются за счет тривиального преобразования переноса начала системы отсчета и поворота пространственных осей.

При $c = \infty$ преобразования Лоренца (8) переходят в преобразования Галилея.

Рассмотрим кратко основные кинематические следствия из преобразований Лоренца, начиная со ставших классическими примеров движущихся материальных стержней и часов.

1. Сокращение продольных размеров движущихся тел. Пусть материальный стержень, покоящийся вдоль оси x' системы S' , имеет длину $l = x'_2 - x'_1$. Относительно системы S он движется со скоростью v в направлении оси x . Его длина $l' = x_2 - x_1$ в системе S — это расстояние между абсциссами x_1, x_2 его концов, взятыми в один и тот же момент времени t по часам системы S . Поэтому по (7)

$$x'_1 = \frac{-vt + x_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x'_2 = \frac{-vt + x_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

откуда

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (9)$$

Таким образом, стержень, имеющий длину l в той системе, где он покоится (собственная длина), имеет длину l' , определяемую по (9), в той системе, относительно которой он движется со скоростью v в продольном направлении.

2. Относительный характер одновременности. Рассмотрим два события M_1 и M_2 . Согласно (7) имеем

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (10)$$

Если $t_2 = t_1$, но $x_2 \neq x_1$, т. е. если M_1 и M_2 — одновременные события относительно системы S , происходящие в разных ее пространственных точках, то $t'_2 \neq t'_1$, и, таким образом, относительно системы S' эти события не являются одновременными.

Пусть два события таковы, что промежуток времени между ними больше, чем то время, которое требуется свету, чтобы пройти расстояние между ними, т. е. пусть

$$|t_2 - t_1| \geq \frac{1}{c} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Отсюда вытекает условие

$$-(ct_2 - ct_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \leq 0, \quad (11)$$

носящее инвариантный характер. Такие события называются последовательными, и если $t_1 < t_2$, то и в любой другой системе событие M_1 предшествует событию M_2 (т. е. и $t'_1 < t'_2$). Интервал (11) между такими событиями называется времениподобным. При этом оказывается возможным ввести такую систему отсчета, в которой M_1 и M_2 происходят в одной точке пространства. Например, для систем S и S' , связанных преобразованиями (7), достаточно принять $v = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1)$, чтобы получить $x'_2 = x'_1$.

Если же события M_1 и M_2 таковы, что

$$|t_2 - t_1| < \frac{1}{c} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

т. е. промежуток времени между ними меньше того времени, которое необходимо свету для прохождения расстояния между ними, то интервал между событиями будет

$$-(ct_2 - ct_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 > 0. \quad (12)$$

Такие события называются квазиодновременными. Их порядок в разных системах может быть различным (т. е. возможно, например, $t_2 > t_1$, но $t'_2 < t'_1$), но между ними не может быть причинно-следственной связи, поскольку ни одно взаимодействие не может распространяться со скоростью, большей скорости света. Интервал (12) называется пространственноподобным. Для квазиодновременных событий всегда можно найти систему отсчета, где они происходят в один момент времени. Для систем, связанных преобразованиями (7), достаточно положить

$$v = \frac{c^2(t_2 - t_1)}{(x_2 - x_1)},$$

чтобы получить $t'_2 = t'_1$.

3. Отставание движущихся часов. Рассмотрим часы, неподвижные в системе S' (например, расположенные в точке $x' = \text{const}$, $y' = z' = 0$) и показывающие время t' . При помощи обратного преобразования Лоренца, получаемого из (7) взаимной заменой штрихованных и нештрихованных величин и изменением знака v , находим

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Обозначая через τ промежуток $t'_2 - t'_1$, т. е. время, показываемое часами, покоящимися в данной системе (собственное время системы), имеем

$$\tau = (t_2 - t_1) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (13)$$

Соответствующий промежуток времени $t_2 - t_1$ по движущимся часам будет больше, т. е. происходит отставание движущихся часов.

4. Сложение скоростей. Пусть некоторая точка движется относительно системы S' со скоростью $u' = dr'/dt'$. Относительно системы S ее скорость будет $u = dr/dt$. Считая по-прежнему, что система S' движется со скоростью v относительно S , находим при помощи обратного

преобразования Лоренца

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{t' + \frac{1}{c^2} v r'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ r &= r' + v t' + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) (v r' + v^2 t') \frac{v}{v^2}. \end{aligned} \right\} (14)$$

Переходя к дифференциалам и разделив одно соотношение на другое, получаем

$$u = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v u'}{c^2}} \left[u' + v + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) (v u' + v^2) \frac{v}{v^2} \right]. \quad (15)$$

В частном случае, когда u' и v параллельны, имеем эйнштейновскую формулу сложения скоростей

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u' v}{c^2}}. \quad (16)$$

В формулу (15) скорости u' и v входят несимметрично (если только они не параллельны). Это связано с некоммутативностью преобразования Лоренца — результат двух последовательных преобразований Лоренца зависит от их порядка. Однако лишь направление скорости u зависит от порядка сложения скоростей. Абсолютная величина u обладает коммутативностью, поскольку, как следует из (15),

$$u^2 = \frac{1}{\left(1 + \frac{v u'}{c^2}\right)^2} \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) (u' + v)^2 + \frac{1}{c^2} (v u' + v^2)^2 \right]$$

или окончательно

$$u^2 = \frac{(u' + v)^2 - \frac{1}{c^2} |v \times u'|^2}{\left(1 + \frac{v u'}{c^2}\right)^2}. \quad (17)$$

Формула (15) позволяет решить целый ряд вопросов, связанных с кинематикой точки в специальной теории относительности. Например, пусть две частицы имеют скорости v_1 и v_2 относительно некоторой системы и требуется найти их относительную скорость. Очевидно, скорость второй частицы относительно первой представляет собой скорость второй частицы относительно системы, в которой первая частица покоится. Обозначим первоначальную систему через S' . Тогда первая частица покоится в системе S , движущейся относительно S' со скоростью v_1 . Поэтому, полагая в (15) $v = -v_1$, $u' = v_2$, находим u — скорость второй частицы относительно первой. Если, в частности, скорости частиц близки друг к другу, например $v_2 = v_1 + dv$, то, полагая в (17) $v = -v_1$, $u' = v_1 + dv$ и обозначая затем v_1 через v , получим для квадрата относительной скорости частиц выражение

$$ds^2 = \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) dv^2 + \frac{1}{c^2} (v dv)^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2}. \quad (18)$$

Как видно из сопоставления с формулой (68) предыдущей главы, это выражение представляет собой метрику пространства Лобачевского (со значением $\rho^2 = -c^2$).

5. А б е р р а ц и я с в е т а. Как известно, в двух движущихся друг относительно друга системах направления на одну и ту же звезду оказываются не совпадающими, а отличающимися на величину абберации.

Возвращаясь к формуле (15), снова примем для простоты, что скорость системы S' относительно S направлена по оси x , так что $v_x = v$, $v_y = v_z = 0$. Тогда

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}, \quad u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}, \quad u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}. \quad (19)$$

Пусть вектор скорости u' лежит в плоскости $x'y'$ и составляет угол θ' с осью x' :

$$u'_x = u' \cos \theta', \quad u'_y = u' \sin \theta', \quad u'_z = 0.$$

Тогда вектор u будет лежать в плоскости xy :

$$u_x = u \cos \theta, \quad u_y = u \sin \theta, \quad u_z = 0$$

и угол θ между этим вектором и осью x определится в силу (19) выражением

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} u' \sin \theta'}{u' \cos \theta' + v}. \quad (20)$$

В случае явления аберрации, т. е. при распространении света, $u' = u = c$, и тогда релятивистская формула аберрации будет

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \sin \theta'}{\cos \theta' + \frac{v}{c}}. \quad (21)$$

Обращая эту формулу, имеем

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \sin \theta}{\cos \theta - \frac{v}{c}}, \quad (22)$$

откуда путем разложения по степеням v/c вытекает

$$\theta' - \theta = \frac{v}{c} \sin \theta + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \sin \theta \cos \theta + \dots \quad (23)$$

6. Эффект Доплера. Пусть в движущейся системе S' происходит некоторый периодический процесс, с которым можно связать периодическое испускание световых сигналов. В системе S эти сигналы регистрируются в момент t^* , но учитывая запаздывание сигналов вследствие конечной величины скорости света, надо считать, что время испускания сигнала есть t , где

$$t^* = t + \frac{r(t)}{c}$$

и $r(t)$ — расстояние между источником и приемником света. В системе S этот процесс воспринимается как

периодический с частотой

$$\Delta t^* = \left(1 + \frac{v_r}{c}\right) \Delta t,$$

где $v_r = dr/dt$ — радиальная скорость источника света. Можно полагать, что источник света расположен в S' в начале координат, т. е. $r' = 0$, и тогда из обратного преобразования Лоренца следует

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

откуда видно, что частота Δt^* в системе S связана с собственной частотой $\Delta t'$ в системе S' зависимостью

$$\Delta t^* = \frac{1 + \frac{v_r}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Delta t'. \quad (24)$$

При этом

$$v_r = -v \cos \theta, \quad (25)$$

где θ — угол между направлением относительной скорости S' и направлением луча света.

Таковы основные кинематические эффекты, связанные с преобразованиями Лоренца. Их более подробное физическое истолкование содержится в многочисленных курсах по специальной теории относительности. В этой же главе приводятся лишь самые поверхностные сведения из специальной теории относительности, необходимые для задач релятивистской небесной механики.

§ 2. Динамика точки

Кривая, отображающая в пространстве событий специальной теории относительности процесс движения материальной точки, называется четырехмерной траекторией или мировой линией. Поскольку скорость движения материальной точки не может превышать скорости света, то мировая линия точки имеет мнимую длину. Дейст-

вительно, из условия

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} < c$$

следует

$$-c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 < 0,$$

т. е. квадрат дифференциала дуги мировой линии материальной точки будет отрицательным:

$$ds^2 = -dx^0{}^2 + dx^1{}^2 + dx^2{}^2 + dx^3{}^2 < 0. \quad (26)$$

Мировой линией света является изотропная прямая, определяемая условием

$$ds^2 = 0. \quad (27)$$

Рассмотрим ряд вопросов, связанных с движением материальной точки в пространстве событий специальной теории относительности. Здесь и в следующем параграфе будем считать, что греческие индексы пробегают значения от 0 до 3, латинские — от 1 до 3.

Принимая за параметр мировой линии величину $\sigma = s/\sqrt{-1}$, запишем уравнения мировой линии материальной точки в виде

$$x^\alpha = x^\alpha(\sigma). \quad (28)$$

Мнимоединичный касательный вектор

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \quad (29)$$

определяет четырехмерную скорость точки. Из определения ds^2 в виде (26) следует

$$d\sigma = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt, \quad (30)$$

где v — вектор обычной трехмерной скорости с компонентами $v^i = dx^i/dt$. Поэтому для составляющих четырехмерной скорости имеем

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad u^i = \frac{v^i}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (31)$$

Вектор w с компонентами

$$w^\alpha = \frac{du^\alpha}{d\sigma} = \frac{1}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{du^\alpha}{dt} \quad (32)$$

представляет собой четырехмерное ускорение движущейся точки. В силу того, что $u^2 = -1$, векторы u и w ортогональны

$$uw = 0. \quad (33)$$

По второму закону механики уравнения движения материальной точки в некоторой инерциальной системе запишутся в виде

$$\frac{d}{d\sigma} (m_0 u^\alpha) = \frac{1}{c^2} \chi(v) F^\alpha. \quad (34)$$

Здесь m_0 — постоянная величина, характеризующая инерциальную массу точки и называемая массой покоя, $\chi(v)$ — определяемый ниже множитель, зависящий лишь от абсолютной величины трехмерной скорости v , F^α — компоненты внешней силы. Трехмерный вектор F с компонентами F представляет собой обычный вектор силы. Из условия совпадения (34) при $v = 0$ с обычными ньютоновыми уравнениями вытекает, что $\chi(0) = 1$ и $F^0 = 0$ при $v = 0$. В более подробной записи уравнения (34) принимают вид

$$m_0 w^\alpha + u^\alpha \frac{dm_0}{d\sigma} = \frac{1}{c^2} \chi(v) F^\alpha,$$

откуда после умножения на u_α получаем

$$- \frac{dm_0}{d\sigma} = \frac{1}{c^2} \chi(v) u_\alpha F^\alpha.$$

Для выполнения условия $m_0 = \text{const}$ должно быть $u_\alpha F^\alpha = 0$, и поэтому

$$F^0 = \frac{1}{c} F v.$$

Полагая далее

$$\chi(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

находим окончательный вид уравнений (34)

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = Fv, \quad \frac{d}{dt} \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = F. \quad (35)$$

Отсюда видно, что масса движущейся точки определяется через массу покоя m_0 и скорость v формулой

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (36)$$

а величина $p = mv$ является импульсом. Первое из уравнений (35) является следствием трех остальных. Стоящая в правой части первого уравнения величина Fv представляет собой работу, производимую силой в единицу времени, поэтому из этого уравнения следует взаимосвязь кинетической энергии E с массой точки

$$E = mc^2. \quad (37)$$

Динамической характеристикой движущейся точки может служить вектор энергии—импульса $E_0 u$, где $E_0 = m_0 c^2$ — энергия покоя. Временная компонента этого вектора совпадает с энергией точки $E_0 u^0 = mc^2$, а пространственные компоненты представляют собой умноженные на c компоненты импульса $E_0 u^i = mv^i c$.

Небесномеханические задачи, основанные на механике специальной теории относительности, разработаны сравнительно мало. Это не удивительно, так как промежуток времени между созданием специальной теории относительности и возникновением общей теории относительности был слишком коротким (фактически всего 10 лет). После же появления общей теории относительности исследование ее эффектов приобрело для небесной механики неизмеримо большее значение, чем исследование эффектов лишь специальной теории относительности. Тем не менее, отдельные работы по изучению движения материальных тел в специальной теории относительности публикуются и в настоящее время и представляют несомненный интерес для небесной механики. Однако результаты таких работ здесь не будут освещены.

В качестве иллюстративного примера рассмотрим кинематику межзвездных полетов, мыслимых гипотетически при помощи фотонных ракет. Пусть ракета движется прямолинейно, скажем вдоль оси x с постоянным собственным ускорением a (т. е. ускорением в собственной системе отсчета, постоянно связанной с ракетой). Влиянием внешних сил на полет ракеты, ради простоты, пренебрегаем. Компоненты четырехмерного ускорения в собственной системе отсчета будут

$$w^0 = 0, \quad w^1 = \frac{a}{c^2}, \quad w^2 = 0, \quad w^3 = 0.$$

В любой другой инерциальной системе отсчета, в том числе в системе планеты старта — на Земле, скалярный квадрат вектора w должен сохранять свое значение $w^2 = a^2/c^4$. Так как скорость ракеты будет все время направлена по оси x , то это условие дает

$$\frac{1}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \left[- \left(\frac{du^0}{dt}\right)^2 + \left(\frac{du^1}{dt}\right)^2 \right] = \frac{a^2}{c^4}.$$

Дифференцируя (31), находим

$$\frac{du^0}{dt} = \frac{v\dot{v}}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}, \quad \frac{du^1}{dt} = \frac{\dot{v}}{c \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}},$$

так что предыдущее условие сводится к уравнению

$$\frac{\dot{v}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = a.$$

Интегрирование этого уравнения дает выражение скорости ракеты

$$v = \frac{at}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}}, \quad (38)$$

откуда для пути, пройденного ракетой, имеем

$$x = \frac{c^2}{a} \left(\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - 1 \right). \quad (39)$$

Собственное время ракеты определяется формулой

$$\tau = \int_0^t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt. \quad (40)$$

Строго говоря, в соответствии с (13), где $v = \text{const}$, можно рассматривать лишь дифференциал собственного времени $d\tau$. Однако интеграл (40) определяет некоторую вспомогательную величину, характеризующую ход времени на ракете. Подставляя (38) в (40) и интегрируя, получаем

$$\tau = \frac{c}{a} \ln \left(\frac{at}{c} + \sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} \right). \quad (41)$$

В этой формуле и заключается вся суть проблемы — при очень большом значении времени на Земле t собственное время ракеты τ течет по логарифмическому закону, т. е. гораздо медленнее, что и делает межзвездные полеты столь увлекательными. Всесторонний анализ релятивистской динамики полета фотонной ракеты дан в монографии Зенгера (Sänger, 1956).

Попутно здесь уместно упомянуть об известном парадоксе часов, долгое время служившим предметом острых дискуссий. Классическая формулировка парадокса часов состоит в следующем. Пусть в системе S покоятся часы A . Часы B , находившиеся в начальный момент в одной точке с A , движутся относительно них с постоянной скоростью v , а затем после остановки движутся в обратном направлении со скоростью $-v$ и возвращаются обратно. Окажется, что часы B отстали от A . Но в силу относительности движения можно считать, что часы B покоились, а двигались часы A , и напрашивается парадоксальный вывод об отставании часов A . Разъяснение парадокса заключается в том, что надо рассматривать не две, а три инерциальные системы: систему S , систему S' , движущуюся относительно S со скоростью v , и систему S'' , движущуюся относительно S со скоростью $-v$. В первой половине движения часы B покоятся в S' , а во второй половине — в системе S'' . Если вести все рассуждения в рамках системы S' , то сначала часы A будут действительно отставать, но затем, на втором

этапе, будут двигаться и часы A (со скоростью $-v$), и часы B (со скоростью $-2v/(1+v^2/c^2)$). В окончательном итоге отстанут именно часы B . Разумеется, этот результат одинаков во всех трех системах.

§ 3. Тензор энергии — импульса

В некоторой системе S будем рассматривать поток пылевидных невзаимодействующих частиц. Выделим элемент объема $d\omega$, в котором содержится элемент массы dm . С этим элементом объема свяжем сопутствующую систему S_0 , движущуюся относительно системы S со скоростью v (v^1, v^2, v^3). Выделенные элементы объема и массы будут иметь в системе S_0 значения $d\omega_0$ и dm_0 — элементы объема покоя и массы покоя. В силу предшествующих соотношений

$$d\omega = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} d\omega_0, \quad dm = \frac{dm_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (42)$$

Введем следующие характеристики плотности масс:

$$\rho^* = \frac{dm_0}{d\omega_0}, \quad (43)$$

$$\rho = \frac{dm_0}{d\omega} = \frac{\rho^*}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (44)$$

$$\tilde{\rho} = \frac{dm}{d\omega} = \frac{\rho^*}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{\rho}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (45)$$

Ясно, что ρ^* представляет собой плотность масс покоя в сопутствующей системе S_0 (инвариантная плотность), ρ является плотностью масс покоя в системе S , а $\tilde{\rho}$ — плотность масс в системе S (это плотность всей массы, включая массу, соответствующую кинетической энергии частиц). Тензором массы потока частиц называется тензор

$$T^{\alpha\beta} = \rho^* u^\alpha u^\beta, \quad (46)$$

где u^α — вектор четырехмерной скорости. Тензор $c^2 T^{\alpha\beta}$ носит название тензора энергии — импульса потока

частиц. Его компоненты имеют значения

$$c^2 T^{00} = c^2 \tilde{\rho}, \quad c^2 T^{0i} = c \tilde{\rho} v^i, \quad c^2 T^{ij} = \tilde{\rho} v^i v^j. \quad (47)$$

Временная компонента этого тензора $c^2 T^{00}$ представляет собой плотность энергии. Смешанная компонента $c^2 T^{0i}$ — это умноженная на c плотность проекции импульса на ось i или, что то же, деленная на c плотность потока энергии в направлении этой оси. При этом плотность потока величины в направлении некоторой оси определяется как количество величины, протекающее через площадку, перпендикулярную оси, и отнесенное к единице времени и единице площади. Наконец, пространственная компонента $c^2 T^{ij}$ является плотностью потока проекции импульса на ось i в направлении оси j (или наоборот).

Поток пылевидных частиц представляет собой простейший случай движущейся материальной среды. В более общих случаях тензором энергии — импульса называется дважды контрвариантный симметричный тензор, компоненты которого имеют вышеуказанный смысл. Важнейшее свойство полного тензора энергии — импульса, учитывающего все виды материи, играющие роль в той или иной конкретной физической задаче, состоит в законе сохранения. Аналитическую формулировку закона сохранения можно получить следующим путем.

По формуле Грина поток векторного поля a через замкнутую поверхность σ , ограничивающую некоторый объем ω , будет

$$\iint_{\sigma} a \cdot n d\tau = \iiint_{\omega} \operatorname{div} a d\omega,$$

где n — единичный вектор нормали к поверхности. На основании этой формулы поток энергии через поверхность σ определяется выражением

$$c^3 \iint_{\sigma} T^{0i} n_i d\tau = c^3 \iiint_{\omega} \frac{\partial T^{0i}}{\partial x^i} d\omega.$$

Аналогично для потока проекции импульса через поверхность имеем

$$c^2 \iint_{\sigma} T^{ij} n_j d\tau = c^2 \iiint_{\omega} \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j} d\omega.$$

С другой стороны, общее количество энергии в объеме ω в момент t равно

$$c^2 \iiint_{\omega} T^{00} d\omega,$$

и поэтому полное изменение энергии за время Δt составляет

$$\Delta t \left(c^3 \iiint_{\omega} \frac{\partial T^{0i}}{\partial x^i} d\omega + c^2 \frac{d}{dt} \iiint_{\omega} T^{00} d\omega \right) = \Delta t c^3 \iiint_{\omega} \frac{\partial T^{0\alpha}}{\partial x^\alpha} d\omega.$$

Если $c^2 T^{\alpha\beta}$ — полный тензор энергии — импульса, то количество возникающей энергии должно равняться нулю. Следовательно, закон сохранения энергии относительно данной системы отсчета принимает вид

$$\frac{\partial T^{0\alpha}}{\partial x^\alpha} = 0. \quad (48)$$

Точно так же, учитывая, что импульс, заключенный в объеме ω , равен

$$c e_i \iiint_{\omega} T^{0i} d\omega,$$

найдем полное изменение импульса за время Δt :

$$\Delta t \left(c^2 e_i \iiint_{\omega} \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j} d\omega + c e_i \frac{d}{dt} \iiint_{\omega} T^{0i} d\omega \right) = \Delta t c^2 e_i \iiint_{\omega} \frac{\partial T^{i\alpha}}{\partial x^\alpha} d\omega.$$

Отсюда закон сохранения импульса относительно данной системы отсчета будет

$$\frac{\partial T^{i\alpha}}{\partial x^\alpha} = 0. \quad (49)$$

Объединяя (48) и (49), получаем окончательную формулировку закона сохранения энергии — импульса в виде

$$\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = 0. \quad (50)$$

Введение ковариантных производных вместо обычных делает эти соотношения справедливыми в любых криволи-

нейных координатах, а не только в аффинных, употребляющихся в этой главе повсеместно, начиная с отождествления (2).

Легко проверить выполнение закона сохранения (50) для случая потока пылевидной материи с тензором (46). Действительно, в этом случае

$$\nabla_{\beta} T^{\alpha\beta} = \frac{\partial (\rho^* u^{\alpha} u^{\beta})}{\partial x^{\beta}} = u^{\alpha} \frac{\partial (\rho^* u^{\beta})}{\partial x^{\beta}} + \rho^* u^{\beta} \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}.$$

Однако

$$\frac{\partial (\rho^* u^{\beta})}{\partial x^{\beta}} = \frac{\partial \rho}{\partial x^0} + \frac{1}{c} \frac{\partial (\rho v^i)}{\partial x^i},$$

и это выражение обращается в нуль в силу выполнения уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (51)$$

означающего сохранение масс покоя. Далее,

$$u^{\beta} \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \frac{1}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial t} + v^i \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^i} \right) = \frac{1}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{du^{\alpha}}{dt} = w^{\alpha},$$

а четырехмерное ускорение w^{α} равно нулю в силу отсутствия внешних сил и взаимодействия между частицами. Тем самым устанавливается справедливость закона (50) для пылевидной материи.

Перейдем теперь к более сложному понятию — тензору энергии — импульса макроскопических тел. Внутри тел будем предполагать выполненными ньютоновы уравнения — уравнение неразрывности (51) и уравнения движения сплошной среды

$$\rho \frac{dv^i}{dt} = \rho F^i + \frac{\partial p^{ij}}{\partial x^j}, \quad (52)$$

где F^i — внешняя сила, действующая на элемент объема, а p^{ij} — тензор напряжений. Для идеальной жидкости

$$p^{ij} = -p \delta^{ij}, \quad (53)$$

где δ^{ij} , так же как δ_{ij} и δ_i^j , определяются значениями (5) гл. 2. Так как отклонения от изотропного давления в твердых телах ничтожны, то соотношение (53) будет применяться и для твердых тел.

Выражение для тензора энергии — импульса макроскопических тел получается обобщением (46) с учетом давления p :

$$c^2 T^{\alpha\beta} = (c^2 \mu^* + p) u^\alpha u^\beta + p \eta^{\alpha\beta}, \quad (54)$$

причем

$$\eta^{00} = -1, \quad \eta^{0i} = 0, \quad \eta^{ij} = \delta^{ij}, \quad (55)$$

а плотность μ^* и давление p должны быть связаны функциональной зависимостью. В случае упругой жидкости, обладающей потенциальной энергией сжатия, в массу покоя входит масса, пропорциональная этой энергии. Поскольку энергия сжатия может меняться, масса покоя жидкого объема меняется. Величина μ^* представляет собой плотность этой полной массы покоя, в отличие от ρ^* — плотности неизменяющейся части массы покоя. Отдельные компоненты тензора (54) имеют значения:

$$\left. \begin{aligned} T^{00} &= \frac{\mu^* + \frac{pv^2}{c^4}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \\ cT^{0i} &= \frac{\mu^* + \frac{p}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} v^i, \\ c^2 T^{ij} &= \frac{\mu^* + \frac{p}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} v^i v^j + p \delta^{ij}. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Записывая условия (50) для тензора (54), получаем соотношения

$$u^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\beta} [(c^2 \mu^* + p) u^\beta] + (c^2 \mu^* + p) w^\alpha + \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial p}{\partial x^\beta} = 0, \quad (57)$$

которые при отсутствии внешних сил дают уравнения движения сплошной среды. Умножая на u_α , находим

отсюда

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} [(c^2 \mu^* + p) u^\beta] = u^\beta \frac{\partial p}{\partial x^\beta} \quad (58)$$

или

$$(c^2 \mu^* + p) \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\beta} + c^2 u^\beta \frac{\partial \mu^*}{\partial x^\beta} = 0. \quad (59)$$

Если определить ρ^* при помощи уравнения

$$\frac{d\rho^*}{\rho^*} = \frac{d\mu^*}{\mu^* + \frac{p}{c^2}} \quad (60)$$

с условием $\rho^* = \mu^*$ при $p = 0$, то предыдущее уравнение дает

$$\rho^* \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\beta} + u^\beta \frac{d\rho^*}{d\mu^*} \frac{\partial \mu^*}{\partial x^\beta} \equiv \frac{\partial (\rho^* u^\beta)}{\partial x^\beta} = 0, \quad (61)$$

т. е. уравнение неразрывности. Поэтому ρ^* действительно является плотностью сохраняющейся части массы покоя. Полагая

$$\mu^* = \rho^* \left(1 + \frac{\Pi}{c^2} \right) \quad (62)$$

и подставляя это выражение в (60), находим уравнение для потенциальной энергии Π единицы массы жидкости

$$d\Pi = \frac{c^2}{\rho^{*2}} (\rho^* d\mu^* - \mu^* d\rho^*) = \frac{p}{\rho^{*2}} d\rho^*, \quad (63)$$

откуда

$$\Pi = -\frac{p}{\rho^*} + \int_0^p \frac{dp}{\rho^*}. \quad (64)$$

Учитывая соотношение (62) и принимая во внимание, что

$$u^\beta \frac{\partial p}{\partial x^\beta} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{1 - v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dp}{dt},$$

из комбинации (57) и (58) получаем уравнения движения в виде

$$(c^2\rho^* + \rho^*\Pi + p)w^\alpha = -\eta^{\alpha\beta} \frac{\partial p}{\partial x^\beta} - \frac{u^\alpha}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dp}{dt}. \quad (65)$$

Тензор энергии — импульса (54) примет окончательную форму

$$c^2 T^{\alpha\beta} = (c^2\rho^* + \rho^*\Pi + p)u^\alpha u^\beta + p\eta^{\alpha\beta}. \quad (66)$$

Использованное здесь представление тензора энергии — импульса макроскопических тел было впервые обосновано В. А. Фоком (1955).

УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Основные принципы общей теории относительности

В настоящее время к основной идее общей теории относительности можно было бы прийти чисто опытным путем. Например, лабораторные опыты последних лет показали, что частота кванта света меняется в зависимости от величины гравитационного поля (эффект Мессбауэра). Это означает по существу, что время в точках пространства с различным гравитационным потенциалом течет по-разному, а так как в силу специальной теории относительности пространство и время неразрывно связаны, то, следовательно, тяготение с одной стороны и пространство — время с другой — также должны быть связаны.

Эйнштейн же разработал основные положения общей теории относительности чисто логическим путем, исходя из специальной теории относительности и фундаментального закона равенства гравитационной и инертной массы. И хотя сейчас путь Эйнштейна многим физикам представляется не безупречным, нельзя забывать, что именно этот путь привел к величайшему во всем естествознании триумфу логического мышления.

После создания специальной теории относительности Эйнштейн последовательно пришел к принципу эквивалентности, а затем и к принципу общековариантности. Принцип эквивалентности говорит о том, что все физические процессы протекают одинаково в инерциальной системе, находящейся в однородном поле тяготения, и в неинерциальной равномерно-ускоренной системе. Принцип эквивалентности строго локален, в отличие от закона равенства гравитационной и инертной массы, на который он опирается. Принцип общековариантности — это математический принцип, согласно которому уравнения физики должны иметь одну и ту же форму во всех без исключения системах, т. е. все системы отсчета должны быть равноправны. Сочетание этих двух принципов

позволило Эйнштейну говорить о принципе общей относительности, который, по его мнению, является обобщением специального принципа относительности.

Исходя из этих принципов, Эйнштейн пришел к выводу, что пространство событий общей теории относительности должно представлять собой псевдориманово четырехмерное пространство с метрикой

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (1)$$

(в этой и во всех последующих главах будем считать, что греческие индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3, латинские — 1, 2, 3).

В специальной теории относительности можно, если угодно, также записывать все уравнения в общековариантном виде и пользоваться любыми криволинейными системами координат. Однако пространство событий специальной теории относительности — плоское (аффинное), т. е. тензор кривизны такого пространства равен нулю. В этом пространстве существуют преимущественные, выделенные системы (аффинные), определяемые с точностью до аффинных преобразований — преобразований Лоренца. В таких аффинных системах метрика пространства событий специальной теории относительности принимает вид

$$ds^2 = dx^0{}^2 - dx^1{}^2 - dx^2{}^2 - dx^3{}^2 \quad (2)$$

или при использовании (1)

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}, \quad \eta_{00} = 1, \quad \eta_{0i} = 0, \quad \eta_{ij} = -\delta_{ij}. \quad (3)$$

Здесь и всюду в дальнейшем будем употреблять сигнатуру $+, -, -, -$ в то время, как в третьей главе пространство событий специальной теории относительности описывалось четырехмерным псевдоевклидовым пространством индекса 1, т. е. имело сигнатуру $-, +, +, +$. К сожалению, нет общепринятого соглашения об использовании какой-либо определенной из этих сигнатур. Хотя переход от одной сигнатуры к другой не вызывает особых трудностей, все же при изучении работ по теории относительности это обстоятельство всегда приходится иметь в виду. Как уже указывалось, изменение знака метрической формы сводится к умножению

всех длин на $\sqrt{-1}$, т. е. величина s будет теперь играть роль величины σ третьей главы.

Координаты, в которых метрический тензор имеет значения (3), называются галилеевыми. В общей теории относительности галилеевых координат не существует, но существуют координаты, близкие к галилеевым, такие, что

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad (4)$$

где $h_{\alpha\beta}$ представляют собой функции координат x^0, x^1, x^2, x^3 , абсолютные значения которых малы по сравнению с единицей. Представление (4) является отражением того факта, что псевдориманова метрика общей теории относительности мало отличается от псевдоевклидовой метрики специальной теории.

Координаты x^α , близкие к галилеевым, допускают не только линейные преобразования, но и любые нелинейные вида

$$\bar{x}^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3), \quad \left| \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} \right| \ll 1, \quad (5)$$

поскольку тогда и в новых координатах \bar{x}^α метрика снова будет мало отличаться от галилеевой. Вместе с тем важно подчеркнуть, что это отличие в каждой координатной системе выглядит по-своему.

В каждой точке M пространства событий общей теории относительности можно ввести локально геодезические координаты такие, что в этой точке $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ и $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = 0$, т. е. и $\partial g_{\alpha\beta} / \partial x^\mu = 0$. Таким образом, в этих координатах при смещении из точки M в бесконечно близкую соседнюю точку функции $h_{\alpha\beta}$ начинаются с членов второго порядка относительно разностей $x^\mu - (x^\mu)_M$. Если пренебречь этими бесконечно малыми членами второго порядка, то в бесконечно малой окрестности каждой точки M возникает пространство событий специальной теории относительности и все соответствующие соотношения будут выполняться в этой бесконечно малой окрестности, в частности, в ней координаты x^0, x^1, x^2, x^3 будут иметь истолкование ct, x, y, z . Тем самым локально геодезические координаты определяют локально инерциальную систему отсчета, в которой отсутствует поле тяготения. Такая

возможность введения локально геодезических координат является математическим отражением принципа эквивалентности, справедливого лишь локально.

В локально инерциальной системе тензор масс $T^{\alpha\beta}$ имеет то же истолкование, что и в специальной теории относительности. В координатах, близких к галилеевым, $T^{\alpha\beta}$ тоже имеет приблизительно тот же смысл. Этот тензор описывает суммарное распределение и изменение всей энергии и импульса, кроме энергии и импульса гравитационного происхождения. В специальной теории относительности уравнения сохранения энергии и импульса имеют вид

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0 \quad (6)$$

в аффинных (галилеевых) координатах и

$$\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = 0 \quad (7)$$

в произвольных координатах. В общей теории относительности естественно считать, что $T^{\alpha\beta}$ тоже удовлетворяет уравнениям (7), но отсюда уже не будет следовать закон сохранения, так как ни в каких координатах нельзя переписать (7) в виде (6). Это и понятно, потому что $T^{\alpha\beta}$ не учитывает энергию и импульс гравитационного происхождения и для получения закона сохранения надо добавить к $T^{\alpha\beta}$ нетензорную величину. Эта величина отражает наличие энергии и импульса у гравитационного поля, однако в различных координатных системах она имеет разный вид и этим объясняется ее название — псевдоэнергия гравитационного поля.

Согласно основной идее общей теории относительности свойства пространства и времени, т. е. метрика пространства событий, определяются движением и распределением масс, а движение и распределение масс в свою очередь определяются метрикой поля. Выражением этой взаимосвязи являются уравнения поля — уравнения для нахождения тензора $g_{\alpha\beta}$. Число существенно различных компонент этого тензора равно десяти, следовательно, надо иметь 10 уравнений поля. Эйнштейн установил их вид, опираясь на следующие соображения:

1. Согласно закону Галилея гравитационная масса равна инертной, т. е. пропорциональна энергии. Но

энергия — одна из компонент тензора масс. Можно считать, что в уравнения поля не должны входить никакие другие переменные, описывающие состояния масс, кроме тензора масс.

2. Уравнения поля должны быть общековариантными.

3. По аналогии с уравнением Пуассона, определяющим потенциал ньютонова поля тяготения, можно полагать, что уравнения должны быть второго порядка.

Из этих положений вытекает следующая форма уравнений поля:

$$R^{\alpha\beta} + kRg^{\alpha\beta} + \Lambda g^{\alpha\beta} = -\kappa T^{\alpha\beta}, \quad (8)$$

где k , Λ , κ — некоторые постоянные. Путем опускания индексов эти уравнения, естественно, можно переписать и в ковариантных составляющих. От вторых производных от $g_{\alpha\beta}$ уравнения (8) зависят линейно.

4. Если известно какое-либо решение общековариантных уравнений поля, то переходом к другим координатам можно получить бесчисленное множество решений, равноправных по своей физической сущности. Значит, общее решение уравнений поля должно содержать четыре произвольные функции, т. е. уравнения поля должны удовлетворять четырем тождествам. Но правые части удовлетворяют тождествам (7). Разумеется, и левые части должны удовлетворять этим тождествам. В силу тождеств Бианки (формула (113) гл. 2)

$$\nabla_{\alpha} R_{\mu\nu\rho}^{\cdot\cdot\cdot\sigma} + \nabla_{\mu} R_{\nu\alpha\rho}^{\cdot\cdot\cdot\sigma} + \nabla_{\nu} R_{\alpha\mu\rho}^{\cdot\cdot\cdot\sigma} = 0$$

и свертывая по μ и σ , находим

$$\nabla_{\alpha} R_{\nu\rho} - \nabla_{\nu} R_{\alpha\rho} + \nabla_{\mu} R_{\nu\alpha\rho}^{\cdot\cdot\cdot\mu} = 0.$$

После умножения на $g^{\nu\rho}$ это соотношение дает

$$\nabla_{\alpha} R - g^{\nu\rho} \nabla_{\nu} R_{\alpha\rho} - g^{\mu\beta} \nabla_{\mu} R_{\alpha\beta} = 0$$

или

$$\nabla_{\alpha} R = 2\nabla_{\beta} R_{\alpha}^{\cdot\beta}.$$

Поэтому результат ковариантного дифференцирования по x^{β} левой части (8) будет

$$\nabla_{\beta} (R^{\alpha\beta} + kRg^{\alpha\beta} + \Lambda g^{\alpha\beta}) \equiv (2k + 1) \nabla_{\beta} R^{\alpha\beta},$$

т. е. для выполнения тождеств (7) должно быть $k = -1/2$. Окончательно уравнения поля общей теории относительности записываются поэтому в виде

$$R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g^{\alpha\beta} + \Lambda g^{\alpha\beta} = -\kappa T^{\alpha\beta}. \quad (9)$$

Здесь κ — постоянная, определяемая ниже путем предельного перехода к случаю ньютонова поля, Λ — космологическая постоянная, называемая так потому, что член $\Lambda g^{\alpha\beta}$ вследствие малости Λ играет роль лишь при рассмотрении космологических вопросов. Во всех остальных вопросах общей теории относительности рассматриваются уравнения поля без космологического члена

$$R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g^{\alpha\beta} = -\kappa T^{\alpha\beta}. \quad (10)$$

После свертывания с $g_{\alpha\beta}$ отсюда следует

$$R = \kappa T, \quad (11)$$

где

$$T = g_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta}. \quad (12)$$

Поэтому уравнения (10) могут быть переписаны в виде

$$R^{\alpha\beta} = -\kappa \left(T^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T g^{\alpha\beta} \right). \quad (13)$$

В области пространства вне масс тензор $T^{\alpha\beta}$ обращается в нуль и уравнения поля для пустого пространства сводятся просто к равенству нулю тензора Риччи

$$R_{\alpha\beta} = 0. \quad (14)$$

Левые части уравнений поля удовлетворяют четырем тождествам Бианки

$$\nabla_{\beta} \left(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g^{\alpha\beta} \right) = 0, \quad (15)$$

и для правых частей автоматически вытекают соотношения (7).

Уравнения поля — это 10 нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка гиперболического типа. Они определяют 10 неизвестных

функций: 6 компонент метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ (4 компоненты остаются произвольными в силу общековариантности уравнений поля), три составляющие пространственной скорости v^i вещества и плотность масс ρ (отдельно должно быть задано уравнение состояния, связывающее плотность и давление).

Чтобы получить решение в какой-нибудь определенной координатной системе, надо добавить к уравнениям поля четыре нетензорных уравнения — координатные условия, которые и обуславливают выбор системы координат. Для каждой конкретной задачи может существовать координатная система, преимущественная в том или ином смысле для этой задачи (например, обеспечивающая максимально простую форму решения). В задачах релятивистской небесной механики часто используются гармонические координаты, определяемые уравнениями

$$\frac{\partial(\sqrt{-g} g^{\alpha\beta})}{\partial x^\beta} = 0, \quad (16)$$

где g означает определитель, составленный из компонент метрического тензора. В этих координатах вид уравнений поля, как будет видно из дальнейшего, значительно упрощается.

Основные принципы общей теории относительности служили, да и по сегодняшний день служат, предметом горячих дискуссий. В частности, в последнее время все более широкое распространение получает точка зрения В. А. Фока (1955) на общую теорию относительности как на теорию тяготения, но не как на обобщение специальной теории относительности. В специальной теории относительности общековариантная запись уравнений, хотя и возможна, но не обязательна в силу существования преимущественных, инерциальных систем. Относительность в специальной теории означает равноправие всех инерциальных систем по своим физическим свойствам. Слово «специальная» в названии теории подчеркивает, что эти преимущественные системы — не любые. В общей теории относительности под относительностью понимается возможность математического применения любых систем, хотя эти системы и отличаются по своим физическим свойствам. Если под относительностью понимать именно равнопра-

вие систем по физическим свойствам, то в общей теории относительности такая относительность есть только в бесконечно малом. В. А. Фок предлагает именно такое понимание слова «относительность» и поэтому настаивает на названии «теория тяготения Эйнштейна» вместо термина «общая теория относительности».

Другим дискуссионным вопросом является вопрос о координатных условиях и особенно о роли гармонических координат. По мнению В. А. Фока, для основной задачи релятивистской небесной механики — движения изолированной системы макроскопических тел — гармонические системы координат являются преимущественными, обобщающими инерциальные системы специальной теории относительности. По мнению других авторов, в особенности Л. Инфельда (Infeld, Plebánski, 1960), гармонические координаты математически удобны, но обязательное рассмотрение уравнений поля совместно с гармоническими условиями искажает дух общей теории относительности.

Существует еще целый ряд полемических вопросов общей теории относительности. К счастью, подавляющее большинство этих вопросов не затрагивает математической стороны теории и не влияет на ее практические выводы, в особенности в применении к небесной механике.

Важнейшей проблемой общей теории относительности с точки зрения небесномеханических приложений является проблема движения материальных тел. Первоначально считалось, что уравнения движения нужно постулировать отдельно от уравнений поля, как это имеет место в ньютоновой теории тяготения. Действительно, ньютонова теория тяготения состоит из теории поля (линейные уравнения Пуассона и Лапласа для ньютонова потенциала) и уравнений движения (второй закон механики Ньютона). Но ньютонова теория гравитации — это линейная теория, в линейной теории движение источников поля — тяготеющих масс — не зависит от уравнений поля. В 1927 году Эйнштейн в совместной работе с Громмером (Einstein, Grommer, 1927) показал, что уравнения движения тел в общей теории относительности содержатся в уравнениях поля, а начиная с 1938 года группой Эйнштейна и Инфельда с одной стороны и группой В. А. Фока с другой — были разработаны практические методы нахождения уравне-

ний движения материальных тел в общей теории относительности.

Для пробной частицы, т. е. для частицы с бесконечно малой массой покоя, не оказывающей поэтому влияния на окружающее ее поле, уравнения движения определяются геодезическим принципом — движение такой частицы происходит по геодезической линии в заданном поле. Этот закон является следствием уравнений поля. В самом деле, для потока невзаимодействующих пылевых частиц (§ 3 гл. 3)

$$T^{\alpha\beta} = \rho^* u^\alpha u^\beta,$$

где $u^\alpha = dx^\alpha/ds$ — четырехмерная скорость частицы, причем

$$g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 1. \quad (17)$$

Условие сохранения масс покоя в общековариантной формулировке будет

$$\nabla_\beta (\rho^* u^\beta) = 0, \quad (18)$$

и поэтому из (7) следует

$$u^\beta \nabla_\beta u^\alpha = 0$$

или

$$Du^\alpha \equiv \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0,$$

т. е. траектория $x^\alpha = x^\alpha(s)$ пробной материальной частицы является неизотропной геодезической (напомним еще раз, что величина s заменяет теперь величину σ третьей главы).

Движение по геодезической можно получить и не прибегая к помощи тензора масс и соотношения (7). Как доказывается в работе Инфельда и Шильда (Infeld, Schild, 1949), движение по геодезической является следствием уравнений поля (14) в пустоте, если рассматривать частицу как особенность поля. Распространение света происходит на основе принципа эквивалентности по изотропным геодезическим.

Для тел с конечной массой покоя геодезический принцип, строго говоря, неприменим, но если учесть влияние

тела на окружающее его поле, то формально можно получить правильные уравнения движения, видоизменяя соответствующим образом геодезический принцип.

Итак, общая теория относительности устраняет силу тяготения в ньютоновом смысле. Движение пробной частицы только под действием тяготения — это свободное движение по инерции, происходящее по геодезическим линиям псевдориманова пространства, метрика которого определяется самими гравитирующими массами. Компоненты метрического тензора выступают при этом как потенциалы тяготения, играющие ту же роль, что и ньютонов потенциал для ньютоновой теории тяготения. Поэтому уравнения поля (10) и (14) можно рассматривать с этой точки зрения как обобщение ньютоновых уравнений Пуассона и Лапласа для ньютонова потенциала. Совершенно независимо от малости релятивистских эффектов в конкретных небесномеханических задачах объяснение явления тяготения, впервые достигнутое лишь общей теорией относительности, представляет собой величайшее научное достижение и небесная механика, как наука о гравитационном движении небесных тел, неизбежно должна быть релятивистской, т. е. основываться на общей теории относительности.

§ 2. Вариационный принцип для уравнений поля

Замечательное свойство уравнений поля (10) состоит в том, что они могут быть получены из требования стационарности некоторого скалярного инварианта. Рассмотрим четырехмерный инвариантный интеграл

$$S_g = \int \sqrt{-g} R d\Omega, \quad (19)$$

взятый по некоторой четырехмерной области, и найдем вариацию этого интеграла при варьировании $g_{\mu\nu}$, считая, что на границе области вариации величин $g_{\mu\nu}$ и их первые производные обращаются в нуль. Так как в силу формул (120) и (106) гл. 2 тензор Риччи имеет вид

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\alpha\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^{\beta}, \quad (20)$$

то в геодезической системе координат, где символы Кристоффеля исчезают и обыкновенные производные совпадают с абсолютными, получаем

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\mu} \delta \Gamma_{\alpha\nu}^{\alpha} - \nabla_{\alpha} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}. \quad (21)$$

Но правая часть этого выражения представляет собой тензор, так как вариация символа Кристоффеля, как разность двух бесконечно близких символов Кристоффеля, является тензором. Следовательно, соотношение (21) — это тензорное уравнение, верное в любых координатах. Вариацию интеграла (19) можно теперь записать в форме

$$\delta S_g = \int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} d\Omega + \int R_{\mu\nu} \delta (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) d\Omega.$$

Непосредственно из правила дифференцирования определителя и из того факта, что контрвариантные компоненты метрического тензора $g^{\alpha\beta}$ являются элементами обратной матрицы ковариантных компонент $g_{\alpha\beta}$, следует

$$dg = g g^{\alpha\beta} dg_{\alpha\beta}. \quad (22)$$

Отсюда и на основании формулы (53) гл. 2 находим

$$\Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^{\mu}}. \quad (23)$$

Поэтому для любого тензора a^{μ}

$$\nabla_{\mu} a^{\mu} = \frac{\partial a^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\mu} a^{\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g} a^{\mu})}{\partial x^{\mu}}. \quad (24)$$

Так как абсолютные производные от метрического тензора обращаются в нуль, то из (21) следует

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\mu} (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\alpha\nu}^{\alpha} - g^{\alpha\nu} \delta \Gamma_{\alpha\nu}^{\mu})$$

или после применения (24)

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left[\sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\alpha\nu}^{\alpha} - g^{\alpha\nu} \delta \Gamma_{\alpha\nu}^{\mu}) \right].$$

Таким образом, в первом интеграле для δS_g можно выполнить интегрирование по одной из переменных,

а так как $\delta g_{\mu\nu}$ вместе со своими первыми производными исчезают на границе области, то этот интеграл равен нулю. Далее, из соотношения

$$g_{\mu\nu}g^{\beta\nu} = \delta_{\mu}^{\beta}$$

получаем

$$g_{\mu\nu}dg^{\beta\nu} = -g^{\beta\nu}dg_{\mu\nu}. \quad (25)$$

Поэтому формулу (22) для дифференциала определителя g можно записать и в форме

$$dg = -gg_{\alpha\beta}dg^{\alpha\beta}. \quad (26)$$

Кроме того, из (25) путем свертывания с $g^{\alpha\mu}$ находим

$$dg^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}dg_{\mu\nu}, \quad (27)$$

откуда для произвольного тензора $a_{\alpha\beta}$ следует

$$a_{\alpha\beta}dg^{\alpha\beta} = -a^{\alpha\beta}dg_{\alpha\beta}. \quad (28)$$

В силу (24) имеем

$$\delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) = \sqrt{-g}\left(\delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}\right) \quad (29)$$

и, следовательно,

$$R_{\mu\nu}\delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) = \sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu}.$$

Отсюда, с учетом (26), можно записать вариацию интеграла (19) в виде

$$\delta S_g = -\int\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}\delta g_{\mu\nu}d\Omega. \quad (30)$$

Таким образом, требование стационарности интеграла (19) дает левую часть уравнений поля (10), и поэтому этот интеграл можно рассматривать как действие для гравитационного поля.

Покажем теперь, что и правую часть уравнений (10), т. е. тензор масс, также можно получить вариацией соответствующего интеграла действия. Ограничиваясь случаем тензора масс для макроскопических тел (§ 3 гл. III),

рассмотрим инвариантный четырехмерный интеграл

$$S_m = \int (c^2 \rho^* + \rho^* \Pi) \sqrt{-g} d\Omega, \quad (31)$$

где, как и раньше, ρ^* обозначает инвариантную плотность, удовлетворяющую уравнению неразрывности (18), а Π — потенциальная энергия единицы массы. В силу (24) уравнение неразрывности можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{-g} \rho^* u^\alpha) = 0. \quad (32)$$

Постараемся удовлетворить ему, полагая

$$\sqrt{-g} \rho^* = \rho \frac{ds}{dx^0}, \quad (33)$$

где ρ — некоторая функция от координат x^0, x^1, x^2, x^3 . Тогда уравнение (32) перейдет в

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\rho \frac{dx^\alpha}{dx^0} \right) = 0,$$

что является уравнением неразрывности в стандартной форме (формула (51) гл. 3). Следовательно, ρ представляет собой, как и прежде, плотность масс покоя, а соотношение (33) обобщает соотношение (44) гл. 3. Варьирование соотношения (33) по $g_{\mu\nu}$ дает

$$\sqrt{-g} \delta \rho^* + \frac{1}{2} \sqrt{-g} \rho^* g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \rho \frac{dx^\mu}{dx^0} \frac{dx^\nu}{ds} \delta g_{\mu\nu},$$

откуда

$$\delta \rho^* = \frac{1}{2} \rho^* (u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu}) \delta g_{\mu\nu}. \quad (34)$$

На основании выражения (63) гл. III вариация интеграла (31) может быть записана в виде

$$\delta S_m = \int \left[\left(c^2 + \Pi + \frac{p}{\rho^*} \right) \delta \rho^* + \frac{1}{2g} (c^2 \rho^* + \rho^* \Pi) \delta g \right] \sqrt{-g} d\Omega$$

или после использования формул (22) и (34) и приведения подобных членов

$$\delta S_m = \frac{c^2}{2} \int T^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g_{\mu\nu} d\Omega, \quad (35)$$

где

$$c^2 T^{\mu\nu} = (c^2 \rho^* + \rho^* \Pi + p) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}. \quad (36)$$

С учетом изменения сигнатуры метрики это выражение для тензора энергии — импульса макроскопических тел при отсутствии гравитационного поля полностью переходит в выражение (66) гл. 3.

Объединение результатов (30) и (35) позволяет заключить, что уравнения поля (10) следуют из вариационного принципа

$$\delta \left(2 \frac{\kappa}{c^2} S_m - S_g \right) = 0, \quad (37)$$

где $g_{\mu\nu}$ рассматриваются как произвольные функции координат x^0, x^1, x^2, x^3 .

§ 3. Измерение расстояний и промежутков времени

Как уже указывалось, искажение метрики пространства событий общей теории относительности в различных координатных системах выглядит по-разному, и поэтому встает задача об определении расстояний и промежутков времени по координатам x^0, x^1, x^2, x^3 некоторой данной системы. Это представляет собой сложный вопрос, окончательный ответ на который во всей его общности еще не получен. Но для бесконечно малых расстояний и промежутков времени задача оказывается значительно более простой, и существуют определенные методы ее решения. Ниже рассматривается ряд соотношений, важных в практическом отношении.

1. Интервал ds^2 для двух бесконечно близких событий в одной и той же точке пространства будет $c^2 d\tau^2$, где $d\tau$ — промежуток собственного времени системы. Полагая, с другой стороны, в (1) $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$, находим

$$c^2 d\tau^2 = g_{00} dx^0{}^2$$

или

$$d\tau = \frac{\sqrt{g_{00}}}{c} dx^0. \quad (38)$$

Эта формула определяет собственное время покоящейся частицы (покоящейся относительно данной системы).

2. Аналогично находится время, отсчитываемое часами, движущимися в данной системе. В этом случае

$$c^2 d\tau^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta,$$

откуда

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00} + 2g_{0i} \frac{dx^i}{dx^0} + g_{ij} \frac{dx^i}{dx^0} \frac{dx^j}{dx^0}} dx^0. \quad (39)$$

Эта формула выражает собственное время движущейся частицы и обобщает формулу (13) гл. III.

3. В специальной теории относительности расстояние между точками определяется как интервал между событиями, происходящими в один и тот же момент x^0 . В общей теории относительности в выражении интервала нельзя просто положить $dx^0 = 0$, так как в соответствии с (38) собственное время в разных точках по-разному зависит от x^0 . Расстояние между двумя бесконечно близкими точками A и B может быть здесь определено, например, следующей процедурой (Ландау, Лифшиц, 1962). Из точки A в момент $x^0 + dx^0_{(1)}$ исходит световой сигнал, достигающий точки B в момент x^0 и после отражения из B возвращающийся в A в момент $x^0 + dx^0_{(2)}$. За расстояние между A и B принимается умноженный на $c/2$ промежуток собственного времени системы, прошедший между испусканием и возвращением сигнала в A . Рассматривая уравнение распространения света $ds^2 = 0$ как уравнение относительно dx^0 , находим два корня

$$dx^0_{(1,2)} = -\frac{g_{0i}}{g_{00}} dx^i \mp \frac{1}{g_{00}} \sqrt{(g_{0i}g_{0j} - g_{00}g_{ij}) dx^i dx^j}.$$

Промежуток координатного времени между испусканием и возвращением сигнала в A составит поэтому

$$dx^0_{(2)} - dx^0_{(1)} = \frac{2}{g_{00}} \sqrt{(g_{0i}g_{0j} - g_{00}g_{ij}) dx^i dx^j}.$$

Умножая это уравнение сначала на $\sqrt{g_{00}}/c$ — для перехода к собственному времени системы, а затем на $c/2$, и возвышая в квадрат, находим, что квадрат бесконечно малого пространственного расстояния определяется

в общей теории относительности формулой

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (40)$$

где

$$\gamma_{ij} = \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} - g_{ij}. \quad (41)$$

Квадратичная форма (40), вообще говоря, меняется со временем, поэтому интеграл от dl не имеет смысла — он зависит от мировой линии между заданными пространственными точками. Лишь в постоянных полях, где метрический тензор $g_{\alpha\beta}$ не зависит от времени x^0 , интеграл от dl имеет вполне определенный смысл и определяет пространственное расстояние между точками. По самому смыслу собственное время $d\tau$, определяемое по (38), должно быть вещественным, а форма dl^2 должна быть положительно определенной. Отсюда вытекают условия

$$g_{00} > 0, \quad \gamma_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \gamma > 0$$

(γ означает определитель третьего порядка, составленный из величин γ_{ij}), или, что то же,

$$g_{00} > 0, \quad \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{vmatrix} < 0, \quad \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad g < 0. \quad (42)$$

Этим условиям должны удовлетворять компоненты метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ для того, чтобы соответствующая система координат могла быть физически реализована.

Величины γ_{ij} можно рассматривать как компоненты трехмерного метрического тензора, определяющего метрику (40). Эти величины имеют и немаловажное вспомогательное значение для облегчения выкладок, связанных с переходом от ковариантных компонент $g_{\alpha\beta}$ к контрвариантным компонентам $g^{\alpha\beta}$ (обращение матрицы четвертого порядка заменяется при этом обращением матрицы третьего порядка). Действительно, из основного соотношения, связывающего $g_{\alpha\mu}$ и $g^{\alpha\nu}$, следует

$$g_{i0}g^{j0} + g_{ik}g^{jk} = \delta_i^j, \quad g_{00}g^{j0} + g_{0k}g^{jk} = 0.$$

Исключая отсюда g^{j0} и учитывая (41), находим

$$-\gamma_{ik}g^{jk} = \delta_i^j,$$

откуда для контрвариантных компонент γ^{ij} имеем

$$\gamma^{ij} = -g^{ij}. \quad (43)$$

Из предшествующих выражений теперь легко получают формулы, связывающие g_{0i} и g^{0j} :

$$g^{0i} = \frac{g_{0k}\gamma^{ik}}{g_{00}}, \quad (44)$$

$$g_{0i} = g_{00}\gamma_{ik}g^{0k}. \quad (45)$$

Наконец, для определителя g находим

$$g = g_{00} \begin{vmatrix} 1 & \frac{g_{01}}{g_{00}} & \frac{g_{02}}{g_{00}} & \frac{g_{03}}{g_{00}} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = g_{00} \begin{vmatrix} 1 & \frac{g_{01}}{g_{00}} & \frac{g_{02}}{g_{00}} & \frac{g_{03}}{g_{00}} \\ 0 & -\gamma_{11} & -\gamma_{12} & -\gamma_{13} \\ 0 & -\gamma_{21} & -\gamma_{22} & -\gamma_{23} \\ 0 & -\gamma_{31} & -\gamma_{32} & -\gamma_{33} \end{vmatrix}$$

или окончательно

$$g = -g_{00}\gamma. \quad (46)$$

4. В специальной теории относительности время различно для движущихся часов. В общей теории относительности оно различно и в разных точках пространства одной и той же системы. Сравнение показаний часов в бесконечно близких точках A и B , т. е. их синхронизацию, можно вновь определить при помощи только что рассматривавшихся световых сигналов. Именно одновременным с моментом x^0 в точке B следует считать показание часов $x^0 + \Delta x^0$ в точке A , лежащее посередине между моментами отправления и возвращения сигнала. Поэтому

$$\Delta x^0 = \frac{1}{2} (dx_{(1)}^0 + dx_{(2)}^0)$$

или

$$\Delta x^0 = -\frac{g_{0i}dx^i}{g_{00}}. \quad (47)$$

Для замкнутого бесконечно малого контура синхронизация невозможна, так как после обхода точки B по этому контуру Δx^0 примет другое значение. Поэтому тем более синхронизация невозможна в конечной области. Лишь при $g_{0i} = 0$ синхронизация становится возможной во всем пространстве.

5. В пункте 1 собственное время было определено для событий, происходящих в одной и той же точке пространства. Рассмотрим теперь события, происходящие в разных точках. Пусть некоторая частица выходит из A в момент x^0 и приходит в B в момент $x^0 + dx^0$ (A и B , как и прежде, бесконечно близкие точки). Чтобы получить промежуток координатного времени между этими событиями, надо из момента $x^0 + dx^0$ в B вычесть момент $x^0 + \Delta x^0$ в B , одновременный с моментом x^0 в A , т. е.

$$x^0 + dx^0 - (x^0 + \Delta x^0) = dx^0 + \frac{g_{0i} dx^i}{g_{00}}.$$

Умножая это выражение на $\sqrt{g_{00}}/c$, получаем промежуток собственного времени между событиями, происходящими в разных точках пространства:

$$d\tau = \frac{\sqrt{g_{00}}}{c} \left(dx^0 + \frac{g_{0i} dx^i}{g_{00}} \right) = \frac{g_{0\alpha} dx^\alpha}{c \sqrt{g_{00}}}. \quad (48)$$

§ 4. Кинематика точки в общей теории относительности

Перейдем к рассмотрению кинематики точки в общей теории относительности. При этом целесообразно пользоваться величинами, имеющими определенный смысл не только в рамках одной конкретной системы координат x^0, x^1, x^2, x^3 , а и в пределах различных систем координат, но принадлежащих одной и той же системе отсчета. Под этим понимается, что все системы координат, связанные преобразованиями

$$\tilde{x}^0 = \tilde{x}^0(x^0, x^1, x^2, x^3), \quad (49)$$

$$\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^1, x^2, x^3), \quad \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^0} = 0, \quad (50)$$

т. е. неподвижные друг относительно друга, относятся к одной и той же системе отсчета. Величины, инвариантные

по отношению к этим преобразованиям, носят название хронометрических инвариантов, и соответствующая теория, излагаемая ниже, была разработана А. Л. Зельмановым (1956). Теория хронометрических инвариантов имеет самое непосредственное отношение к рассмотренной выше проблеме измерения расстояний и промежутков времени. Легко проверить, что элемент собственного времени $d\tau$ (48) для бесконечно близких событий в бесконечно близких точках и элементарное расстояние dl (40) являются хронометрическими инвариантами. Квадрат интервала (1) запишется при помощи этих величин в виде

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - dl^2. \quad (51)$$

Четырехмерную скорость точки будем по-прежнему обозначать через u^α :

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}, \quad (52)$$

а через q^i обозначим трехмерную синхронизированную скорость

$$q^i = \frac{dx^i}{d\tau} \quad (53)$$

(в отличие от трехмерной координатной скорости $v^i = dx^i/dt$). Все операции над трехмерными векторами и тензорами будем производить в пространстве с метрикой (40). Поэтому скалярный квадрат синхронизированной скорости запишется в виде

$$q^2 = \gamma_{ij} q^i q^j = \frac{dl^2}{d\tau^2}, \quad (54)$$

откуда

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 \left(1 - \frac{q^2}{c^2} \right). \quad (55)$$

Поэтому

$$u^\alpha = \frac{1}{c} \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}} \frac{dx^\alpha}{d\tau}. \quad (56)$$

С внешней стороны эти формулы совпадают с соответствующими формулами специальной теории относитель-

ности. Выразив из (48) значение $dx^0/d\tau$, находим

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{00}}} - \frac{g_{0i}}{g_{00}} \frac{q^i}{c} \right) \quad (57)$$

и

$$u^i = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \frac{q^i}{c}. \quad (58)$$

Рассмотрим теперь уравнения геодезической линии частицы

$$\frac{du^\alpha}{ds} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha u^\mu u^\nu = 0 \quad (59)$$

(если на частицу действует негравитационная сила, то в правой части (59) появится соответствующий член). Подставляя значения (57), (58), имеем

$$\begin{aligned} \frac{du^\alpha}{ds} &= -\Gamma_{00}^\alpha u^0 u^0 - 2\Gamma_{0k}^\alpha u^0 u^k - \Gamma_{kl}^\alpha u^k u^l = \\ &= \frac{1}{1 - \frac{q^2}{c^2}} \left[-\frac{\Gamma_{00}^\alpha}{g_{00}} - \frac{2}{c \sqrt{g_{00}}} \left(\Gamma_{0k}^\alpha - \frac{g_{0k}}{g_{00}} \Gamma_{00}^\alpha \right) q^k - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{c^2} \left(\Gamma_{kl}^\alpha - \frac{g_{0l}}{g_{00}} \Gamma_{0k}^\alpha - \frac{g_{0k}}{g_{00}} \Gamma_{0l}^\alpha + \frac{g_{0k} g_{0l}}{g_{00}^2} \Gamma_{00}^\alpha \right) q^k q^l \right]. \end{aligned}$$

Для пространственных составляющих четырехмерной скорости отсюда следует

$$\frac{d}{d\tau} \frac{q^i}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} [F^i - 2(D_k^i + A_k^i) q^k - \Delta_{kl}^i q^k q^l], \quad (60)$$

где

$$F^i = -c^2 \frac{\Gamma_{00}^i}{g_{00}}, \quad (61)$$

$$D_k^i + A_k^i = \frac{c}{\sqrt{g_{00}}} \left(\Gamma_{0k}^i - \frac{g_{0k}}{g_{00}} \Gamma_{00}^i \right), \quad (62)$$

$$\Delta_{kl}^i = \Gamma_{kl}^i - \frac{g_{0l}}{g_{00}} \Gamma_{0k}^i - \frac{g_{0k}}{g_{00}} \Gamma_{0l}^i + \frac{g_{0k} g_{0l}}{g_{00}^2} \Gamma_{00}^i. \quad (63)$$

Умножая (60) на массу покоя $m_0 = \text{const}$ и определяя массу частицы как

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}, \quad (64)$$

получаем обобщение уравнений специальной теории относительности.

Перейдем к истолкованию величин (61)—(63). Вектор (61) означает ускорение, которое испытывает точка, покоящаяся в данный момент. Как оказывается, условие

$$F^i = 0$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы одним лишь преобразованием x^0 перейти к координатам, в которых

$$g_{00} = 1, \quad \frac{\partial g_{0i}}{\partial x^0} = 0.$$

Формула (62) определяет одновременно симметричный тензор D^{ij} и кососимметричный тензор A^{ij} . Действительно, из (62) и (44) следует

$$D^{ji} + A^{ji} = \gamma^{kj} (D_k^i + A_k^i) = -\frac{c}{\sqrt{g_{00}}} g^{\alpha j} \Gamma_{0\alpha}^i. \quad (65)$$

Отсюда выделяя симметричную и антисимметричную части и учитывая (27), находим

$$\begin{aligned} D^{ij} &= -\frac{c}{2\sqrt{g_{00}}} (g^{\alpha j} \Gamma_{0\alpha}^i + g^{\alpha i} \Gamma_{0\alpha}^j) = -\frac{c}{2\sqrt{g_{00}}} g^{\alpha i} g^{\beta j} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0} = \\ &= \frac{c}{2\sqrt{g_{00}}} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^0}, \quad (66) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^{ij} &= \frac{c}{2\sqrt{g_{00}}} (g^{\alpha j} \Gamma_{0\alpha}^i - g^{\alpha i} \Gamma_{0\alpha}^j) = \frac{c}{2\sqrt{g_{00}}} g^{\alpha i} g^{\beta j} \left(\frac{\partial g_{0\alpha}}{\partial x^\beta} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial g_{0\beta}}{\partial x^\alpha} \right) = \frac{c}{\sqrt{g_{00}}} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^0} + g^{\alpha j} \Gamma_{0\alpha}^i \right). \quad (67) \end{aligned}$$

Тензор D^{ij} называется тензором деформации координатной системы. Инвариант

$$D = \gamma_{ij} D^{ij} = -\frac{c}{2\sqrt{g_{00}}} \gamma_{ij} \frac{\partial \gamma^{ij}}{\partial x^0},$$

преобразующийся с помощью формулы, аналогичной (26), к виду

$$D = \frac{c}{2\sqrt{g_{00}}} \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial x^0} = \frac{c}{\sqrt{g_{00}}} \frac{\partial \ln \sqrt{\gamma}}{\partial x^0}, \quad (68)$$

характеризует скорость объемного расширения элемента пространства.

Тензор A^{ij} представляет собой тензор угловой скорости вращения системы. В самом деле, рассмотрим соответствующий член в правой части уравнений (60)

$$\Phi^i = - \frac{2A_l^{i \cdot} u^l}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

или в ковариантных составляющих

$$\Phi_k = \gamma_{ki} \Phi^i = \frac{2A_{kl} q^l}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}, \quad (69)$$

где

$$\begin{aligned} A_{kl} = \gamma_{ki} \gamma_{lj} A^{ij} &= \frac{c}{2\sqrt{g_{00}}} \gamma_{ki} \gamma_{lj} g^{\alpha i} g^{\beta j} \left(\frac{\partial g_{0\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{0\beta}}{\partial x^\alpha} \right) = \\ &= \frac{c}{2\sqrt{g_{00}}} \left[\frac{\partial g_{0k}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{0l}}{\partial x^k} - \frac{g_{0k}}{g_{00}} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{0l}}{\partial x^0} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{g_{0l}}{g_{00}} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{0k}}{\partial x^0} \right) \right] \end{aligned}$$

и окончательно

$$\begin{aligned} A_{kl} = \frac{c}{2} \sqrt{g_{00}} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^k} - \frac{g_{0k}}{g_{00}} \frac{\partial}{\partial x^0} \right) \left(- \frac{g_{0l}}{g_{00}} \right) - \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial}{\partial x^l} - \frac{g_{0l}}{g_{00}} \frac{\partial}{\partial x^0} \right) \left(- \frac{g_{0k}}{g_{00}} \right) \right]. \quad (70) \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь трехмерный символ перестановки ϵ^{ikl} , определяемый условиями: $\epsilon^{ikl} = 1$, если i, k, l — четная перестановка цифр 1, 2, 3, $\epsilon^{ikl} = -1$ — в случае нечетной перестановки и $\epsilon^{ikl} = 0$, если хотя бы два из индексов i, k, l равны друг другу. Если через G обоз-

начить определитель преобразования (50)

$$G = \det \left\| \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \right\|,$$

то по правилу разложения определителя

$$G \varepsilon^{ikl} = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^m} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^n} \varepsilon^{jmn}. \quad (71)$$

Это можно рассматривать как закон преобразования величин ε^{ikl} при преобразовании координат. Так как определитель трехмерного метрического тензора γ_{ij} преобразуется при этом по закону

$$\sqrt{\gamma} = |G| \sqrt{\tilde{\gamma}},$$

то ясно, что закон преобразования величин $\varepsilon^{ikl}/\sqrt{\gamma}$ совпадает с тензорным при $G > 0$ и отличается от него лишь знаком при $G < 0$. Такие величины называются псевдотензорами. Точно так же, величины $\sqrt{\gamma} \varepsilon_{ikl}$, где ε_{ikl} имеют те же числовые значения, что и составляющие контрвариантного символа перестановки, представляют собой компоненты совершенно кососимметричного ковариантного псевдотензора.

Возвратимся к тензору A_{kl} . Вследствие своей кососимметричности этот тензор имеет три существенные компоненты, из которых можно образовать контрвариантный вектор (точнее, псевдовектор) угловой скорости

$$\Omega^i = \frac{1}{2 \sqrt{\gamma}} \varepsilon^{ikl} A_{kl} \quad (72)$$

или

$$\Omega^1 = \frac{A_{23}}{\sqrt{\gamma}}, \quad \Omega^2 = \frac{A_{31}}{\sqrt{\gamma}}, \quad \Omega^3 = \frac{A_{12}}{\sqrt{\gamma}}.$$

В ковариантных составляющих будет

$$\Omega_j = \frac{1}{2} \sqrt{\gamma} \varepsilon_{jmn} A^{mn}. \quad (73)$$

Соотношение

$$\gamma \varepsilon_{jmn} = \gamma_{ij} \gamma_{km} \gamma_{ln} \varepsilon^{ikl}, \quad (74)$$

вытекающее, как и (71), из правила разложения определителя, позволяет сейчас же установить, что

$$\Omega_j = \gamma_{ij} \Omega^i.$$

Выражение (69) теперь может быть записано в виде

$$\Phi_i = \frac{2 \sqrt{\gamma}}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \varepsilon_{ikl} q^k \Omega^l. \quad (75)$$

При этом надо лишь иметь в виду, что

$$\varepsilon_{ikl} \varepsilon^{jml} = \delta_i^j \delta_k^m - \delta_k^j \delta_i^m.$$

Компоненты (75) имеют значения

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix} = \frac{2 \sqrt{\gamma}}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} q^2 \Omega^3 - q^3 \Omega^2 \\ q^3 \Omega^1 - q^1 \Omega^3 \\ q^1 \Omega^2 - q^2 \Omega^1 \end{pmatrix}.$$

При малых скоростях $q^2 \ll c^2$ эти члены в уравнениях движения эквивалентны силе Кориолиса, появляющейся в системе, вращающейся с угловой скоростью $\sqrt{\gamma} \Omega$. В силу (72) и (70)

$$\sqrt{\gamma} \Omega^1 = \frac{c}{2} \sqrt{g_{00}} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^2} - \frac{g_{02}}{g_{00}} \frac{\partial}{\partial x^0} \right) \left(-\frac{g_{03}}{g_{00}} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x^3} - \frac{g_{03}}{g_{00}} \frac{\partial}{\partial x^0} \right) \left(-\frac{g_{02}}{g_{00}} \right) \right], \quad (76)$$

а остальные компоненты получаются отсюда циклической перестановкой индексов 1, 2, 3.

Заканчивая истолкование члена (67), остается лишь добавить, что равенство

$$A^{ij} = 0$$

является необходимым и достаточным условием для обращения в нуль всех компонент g_{0i} путем надлежащего преобразования x^0 .

Наконец, для члена (63) справедлива элегантная формула

$$\gamma^{km} \gamma^{ln} \Delta_{kl}^i = g^{\alpha m} g^{\beta n} \Gamma_{\alpha\beta}^i.$$

Умножая обе части выражения на $\gamma_{mp}\gamma_{nq}$, вновь приходим к (63).

Подчеркнем еще раз, что величины F^i , A^{ij} , D^{ij} не зависят от выбора координаты времени, т. е. не меняются при преобразовании (49). По отношению же к преобразованиям (50) только пространственных координат они ведут себя как трехмерные векторы и тензоры.

Теория хронометрических инвариантов является примером одного из новых направлений в общей теории относительности, ставящего своей целью разработку математического аппарата для решения проблемы физического описания наблюдений и измерений в общей теории относительности. Этой проблеме посвящена обширная литература. Укажем лишь курс Синга (Synge, 1960), в котором общая теория относительности последовательно излагается именно под этим углом зрения.

В заключение отметим несколько случаев гравитационных полей частного вида. Если для данного поля можно выбрать такую систему, в которой все $g_{\alpha\beta}$ не зависят от x^0 , то такое поле, как уже указывалось, называется постоянным, а сама координата x^0 называется мировым временем. Постоянным может быть поле, создаваемое лишь одним телом. Если имеются по крайней мере два тела, то они должны двигаться, и, следовательно, поле не будет постоянным. Если поле создается одним телом и это тело неподвижно, то оба направления времени равноправны и можно выбрать такие координаты, в которых все $g_{0i} = 0$. Такое поле называется статическим и в нем возможна синхронизация часов во всем пространстве. Если же поле постоянно, но, по меньшей мере, одна из компонент $g_{0i} \neq 0$, то поле называется стационарным. Примером стационарного поля может служить поле вращающегося вокруг оси симметрии аксиально симметричного тела.

§ 5. Слабое поле тяготения и пост-ньютоновы уравнения движения пробной частицы

Простейшее приближенное решение уравнений поля (13) получается в линеаризованной теории. Эта теория физически соответствует случаю слабого поля тяготения, когда поправки $h_{\alpha\beta}$ (4) к галилеевым значениям $\eta_{\alpha\beta}$ настолько малы, что их квадратами и произведениями можно

пренебречь. По формуле (117) гл. 2 для ковариантного тензора кривизны тогда имеем

$$R_{\mu\alpha\beta\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \frac{\partial^2 h_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 h_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\beta} \right), \quad (77)$$

откуда тензор Риччи будет

$$R_{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} R_{\mu\alpha\beta\nu} = \frac{1}{2} \left[\square h_{\alpha\beta} - \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\nu} \left(\eta^{\mu\nu} h_{\mu\beta} - \frac{1}{2} \delta_\beta^\nu \eta^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^\beta \partial x^\mu} \left(\eta^{\mu\nu} h_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} \delta_\alpha^\mu \eta^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma} \right) \right], \quad (78)$$

где \square означает оператор Даламбера:

$$\square = \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial^2}{\partial x^0{}^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^1{}^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2{}^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^3{}^2}.$$

Будем пользоваться гармоническими координатами (16). В линейном приближении

$$g = -1 - h_{00} + h_{11} + h_{22} + h_{33} = -1 - \eta^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma}$$

и

$$\sqrt{-g} = 1 + \frac{1}{2} \eta^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma}.$$

С другой стороны, из связи $g^{\alpha\nu}$ с $g_{\alpha\mu}$ вытекает

$$g^{\alpha\nu} = \eta^{\alpha\nu} - \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} h_{\mu\beta}. \quad (79)$$

Таким образом,

$$\sqrt{-g} g^{\alpha\nu} = \eta^{\alpha\nu} + \eta^{\alpha\beta} \left(\frac{1}{2} \delta_\beta^\nu \eta^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma} - \eta^{\mu\nu} h_{\mu\beta} \right),$$

так что в линейном приближении условия гармоничности (16) принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\eta^{\mu\nu} h_{\mu\beta} - \frac{1}{2} \delta_\beta^\nu \eta^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma} \right) = 0. \quad (80)$$

Поэтому выражение (78) для тензора Риччи сводится к

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \square h_{\alpha\beta}$$

и линеаризованные уравнения поля (13) будут тогда

$$\square h_{\alpha\beta} = -2\kappa T_{\alpha\beta}^*, \quad (81)$$

где

$$T_{\alpha\beta}^* = T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T g_{\alpha\beta}.$$

В строгой теории уравнения поля тяготения нелинейны относительно первых производных от компонент метрического тензора и линейны относительно вторых производных. С чисто математической точки зрения гармонические условия существенно упрощают уравнения поля, так как при этом каждое уравнение содержит вторую производную лишь от одной соответствующей компоненты метрического тензора. В линеаризованной теории уравнения поля в гармонических координатах просто имеют вид волновых уравнений (81).

Как известно, решение волнового уравнения

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -4\pi\sigma(t, \mathbf{r}), \quad (82)$$

где Δ — оператор Лапласа:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

выражается объемным интегралом

$$\psi = \int \frac{\sigma(t', \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} (dx')^3, \quad (83)$$

в котором $(dx')^3 = dx' dy' dz'$ — элемент трехмерного объема, а значение плотности σ в текущей точке \mathbf{r}' берется в запаздывающий момент

$$t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}. \quad (84)$$

Если расстояние $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ рассматриваемой точки $\mathbf{r}(x, y, z)$ пространства от текущей точки $\mathbf{r}'(x', y', z')$ мало по сравнению с расстоянием ct , то точное решение (83) можно разложить в ряд

$$\begin{aligned} \psi = & \int \frac{\sigma(t, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} (dx')^3 - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \sigma(t, \mathbf{r}') (dx')^3 + \\ & + \frac{1}{2c^2} \frac{d^2}{dt^2} \int \sigma(t, \mathbf{r}') |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| (dx')^3 + \dots \quad (85) \end{aligned}$$

В линеаризированной теории достаточно ограничиться первым членом этого разложения, в результате чего решение уравнений (81) представится в виде

$$h_{\alpha\beta} = -\frac{\kappa}{2\pi} \int \frac{(T_{\alpha\beta}^*)'}{|r-r'|} (dx')^3, \quad (86)$$

где штрих при тензоре $T_{\alpha\beta}^*$ указывает, что соответствующие значения должны быть вычислены для момента t в текущей точке x', y', z' . Подставляя в (36) галилеевы значения метрического тензора и учитывая лишь начальные члены разложений по величинам порядка v^2/c^2 , находим

$$T^{00} = \rho, \quad T^{0i} = \frac{1}{c} \rho v^i, \quad T^{ij} = 0.$$

Отсюда

$$T_{00} = g_{\alpha 0} g_{\beta 0} T^{\alpha\beta} = \rho, \quad T_{0i} = g_{\alpha 0} g_{\beta i} T^{\alpha\beta} = -\frac{1}{c} \rho v^i, \\ T_{ij} = 0, \quad T = g_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = \rho,$$

так что в (86) должны быть подставлены значения

$$T_{00}^* = \frac{1}{2} \rho, \quad T_{0i}^* = -\frac{1}{c} \rho v_i, \quad T_{ij}^* = \frac{1}{2} \rho \delta_{ij}. \quad (87)$$

Остается определить постоянную κ . Это можно сделать различными способами, например, путем сравнения с уравнениями движения пробной частицы в ньютоновом поле тяготения. Составим, прежде всего, уравнения движения пробной частицы в поле тяготения общей теории относительности, отнесенные к координате x^0 . Так как

$$\frac{dx^i}{dx^0} = \frac{dx^i}{ds} \frac{ds}{dx^0}, \quad \frac{d^2x^i}{dx^{02}} = \frac{d^2x^i}{ds^2} \left(\frac{ds}{dx^0} \right)^2 + \frac{dx^i}{ds} \frac{d^2s}{dx^{02}}$$

и

$$\frac{ds}{dx^0} = \frac{1}{\left(\frac{dx^0}{ds} \right)}, \quad \frac{d^2s}{dx^{02}} = -\frac{\frac{d^2x^0}{ds^2}}{\left(\frac{dx^0}{ds} \right)^3},$$

то уравнения геодезической линии (59), отнесенные к параметру x^0 , примут вид

$$\frac{d^2x^i}{dx^{02}} = -\Gamma_{\alpha\beta}^i \frac{dx^\alpha}{dx^0} \frac{dx^\beta}{dx^0} + \Gamma_{\alpha\beta}^0 \frac{dx^\alpha}{dx^0} \frac{dx^\beta}{dx^0} \frac{dx^i}{dx^0}. \quad (88)$$

Для символов Кристоффеля находим следующие выражения:

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2c} h_{00,0} + \dots,$$

$$\Gamma_{0k}^0 = \frac{1}{2} h_{00,k} + \dots,$$

$$\Gamma_{kl}^0 = \frac{1}{2} \left(h_{0k,l} + h_{0l,k} - \frac{1}{c} h_{kl,0} \right) + \dots,$$

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} h_{00,i} + \frac{1}{2} h_{ij} h_{00,j} - \frac{1}{c} h_{0i,0} + \dots,$$

$$\Gamma_{0k}^i = \frac{1}{2} \left(h_{0k,i} - h_{0i,k} - \frac{1}{c} h_{ik,0} \right) + \dots,$$

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} (h_{kl,i} - h_{ik,l} - h_{il,k}) + \dots$$

Эти функции вычислены здесь в линейном приближении, за исключением Γ_{00}^i , где удержан один нелинейный член, имеющий, как станет ясно ниже, такой же порядок, что и следующий за ним линейный член. Величина Γ_{00}^i входит в уравнения движения с коэффициентом c^2 и поэтому должна быть вычислена точнее остальных компонент. Индекс k после запятой означает дифференцирование по x^k , нулевой индекс после запятой — частное дифференцирование по координатному времени t . Подставляя найденные значения в (88), принимая t за независимое переменное и обозначая через \dot{x}^i производные от координат x^i по t , получаем

$$\begin{aligned} \ddot{x}^i = & -\frac{1}{2} c^2 h_{00,i} - \frac{1}{2} c^2 h_{ij} h_{00,j} + c h_{0i,0} + \frac{1}{2} h_{00,0} \dot{x}^i + \\ & + h_{ij,0} \dot{x}^j + c (h_{0i,j} - h_{0j,i}) \dot{x}^j + h_{00,j} \dot{x}^i \dot{x}^j + \left(h_{ij,k} - \frac{1}{2} h_{jk,i} \right) \dot{x}^j \dot{x}^k. \end{aligned} \quad (89)$$

В этих уравнениях опущены не только нелинейные члены относительно $h_{\alpha\beta}$ (за исключением одного), но и члены, происходящие от слагаемого $\Gamma_{kl}^0 \dot{x}^k \dot{x}^l \dot{x}^i / c$. Как выяснится ниже, эти члены имеют более высокий порядок, чем выписанные здесь. Главным в правой части (89) является первый член и именно он должен быть сравнен

с ньютоновыми уравнениями

$$\ddot{x}^i = \frac{\partial U}{\partial x^i}, \quad (90)$$

где U — ньютонов потенциал

$$U = \gamma \int \frac{\rho'(dx')^3}{|r - r'|}, \quad (91)$$

а γ — гравитационная постоянная. Это сравнение показывает, что уравнения (89) переходят в ньютоновом приближении в уравнения (90), если положить

$$\kappa = \frac{8\pi\gamma}{c^2}. \quad (92)$$

Решение (86) и (87) уравнений тяготения для слабого поля запишется тогда окончательно в виде

$$h_{00} = -\frac{2U}{c^2}, \quad h_{0i} = \frac{4}{c^3} U_i, \quad h_{ij} = -\frac{2U}{c^2} \delta_{ij}, \quad (93)$$

где наряду с ньютоновым потенциалом U фигурирует вектор-потенциал

$$U_i = \gamma \int \frac{\rho' v_i'}{|r - r'|} (dx')^3. \quad (94)$$

Таким образом, метрика слабого поля определяется выражением

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2U}{c^2}\right) c^2 dt^2 + \frac{8}{c^2} (U_1 dx + U_2 dy + U_3 dz) dt - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (95)$$

Во всех небесномеханических приложениях общей теории относительности скорости тел гораздо меньше скорости света. При этом квадрат характеристической скорости тел v^2 и ньютонов потенциал U — величины одного порядка. Малыми величинами, по которым ведутся разложения в задачах релятивистской небесной механики, служат поэтому отношения v^2/c^2 и U/c^2 . Из (93) видно, что h_{00} и h_{ij} являются величинами второго, а h_{0i} — третьего порядка малости. Это верно в гармонических координатах, а также во всех практически используемых координатных системах. Уравнения (89), выведенные без привлечения каких-либо координатных условий, справедливы поэтому с точностью до величин второго порядка малости

включительно. При этом, однако, величина h_{00} должна быть вычислена не с точностью второго порядка, как в (93), а с точностью четвертого порядка. Тогда уравнения (89) могут быть названы пост-ньютоновыми уравнениями движения пробной частицы (или уравнениями во втором приближении общей теории относительности).

Уравнения (89) будут часто использоваться в дальнейшем. С помощью геодезического вариационного принципа в форме (96) гл. 2 легко записать их в лагранжевой форме

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0.$$

Так как

$$\left(\frac{ds}{dx^0} \right)^2 = 1 + h_{00} + \frac{2}{c} h_{0i} v^i - \frac{1}{c} v^2 + \frac{1}{c^2} h_{ij} v^i v^j + \dots,$$

то после возведения в степень $1/2$, отбрасывания постоянного члена и умножения на $-c^2$, получаем

$$L = \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} c^2 h_{00} + \frac{1}{8c^2} v^4 - \frac{1}{4} h_{00} v^2 + \frac{1}{8} c^2 h_{00}^2 - \\ - \frac{1}{2} h_{ij} v^i v^j - c h_{0i} v^i + \dots \quad (96)$$

Эта функция Лагранжа справедлива с точностью до членов второго порядка малости включительно и полностью эквивалентна уравнениям (89). Естественно, что величина h_{00} должна быть при этом вычислена с точностью до членов четвертого порядка включительно. При получении уравнений (89) из (96) надо лишь иметь в виду, что после нахождения производных

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = -\frac{1}{2} c^2 h_{00,i} - \frac{1}{4} h_{00,i} \dot{x}^j \dot{x}^j + \frac{1}{4} c^2 h_{00} h_{00,i} - \\ - \frac{1}{2} h_{jk,i} \dot{x}^j \dot{x}^k - c h_{0j,i} \dot{x}^j,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = \dot{x}^i + \frac{1}{2c^2} \dot{x}^j \dot{x}^j \dot{x}^i - \frac{1}{2} h_{00} \dot{x}^i - h_{ij} \dot{x}^j - c h_{0i},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \ddot{x}^i + \frac{1}{2c^2} \dot{x}^j \dot{x}^j \ddot{x}^i + \frac{1}{c^2} \dot{x}^j \dot{x}^j \dot{x}^i - \frac{1}{2} h_{00} \ddot{x}^i -$$

$$- \frac{1}{2} (h_{00,0} + h_{00,j} \dot{x}^j) \dot{x}^i - h_{ij} \ddot{x}^j - (h_{ij,0} + h_{ij,k} \dot{x}^k) \dot{x}^j -$$

$$- c (h_{0i,0} + h_{0ij} \dot{x}^j)$$

в членах второго порядка малости вторые производные \ddot{x}^i

можно заменить на $(-c^2 h_{00, i})/2$, после чего и получаются уравнения (89) в форме, разрешенной относительно \dot{x}^i .

С теоретической точки зрения уравнения (89) уступают хронометрически инвариантным уравнениям (60). Но простота этих уравнений делает их очень употребительными при решении практических задач. Решение уравнений (89) дает движение пробной частицы в какой-то конкретной координатной системе, обусловленной значениями компонент $g_{\alpha\beta}$. В общем случае для сравнения с наблюдениями необходимо далее в той же системе координат описать результаты наблюдений (обычно оптических или радиолокационных). Этой цели служат уравнения распространения света, рассматриваемые в следующем параграфе. Только после этого можно исключить не имеющие прямого физического смысла координаты пробной частицы x^i и перейти к непосредственно измеряемым величинам в собственном времени станции наблюдения.

В заключение отметим, что, начиная с этого параграфа, строгая запись верхних и нижних индексов становится не очень удобной и не всегда соблюдается. Поэтому, в частности, по дважды входящему индексу подразумевается суммирование и в тех случаях, когда этот индекс фигурирует только как нижний или только как верхний.

§ 6. Распространение света в слабом поле тяготения

В этом параграфе найдем уравнения, описывающие распространение света в произвольном слабом поле тяготения. Как и прежде, будем считать h_{00} и h_{ij} величинами второго порядка малости, h_{0i} — величинами третьего порядка. Кроме того, будем пользоваться тем обстоятельством, что дифференцирование потенциалов тяготения по времени повышает их порядок малости на единицу.

Движение света, отнесенное к координатному времени t , описывается уравнениями (90) и (91) гл. 2, именно

$$\ddot{x}^i + \Gamma_{\alpha\beta}^i \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = - \frac{\frac{d^2 t}{d\lambda^2}}{\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2} \dot{x}^i, \quad (97)$$

$$g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0, \quad (98)$$

где λ — канонический параметр.

В подробной записи условие (98) дает

$$c^2(1 + h_{00}) + 2ch_{0i}\dot{x}^i + (-\delta_{ij} + h_{ij})\dot{x}^i\dot{x}^j = 0, \quad (99)$$

откуда после дифференцирования по времени и использования в релятивистских членах ньютоновых уравнений движения света $\ddot{x}^i = 0$, получаем

$$c^2h_{00,0} + (c^2h_{00,i} + 2ch_{0i,0})\dot{x}^i + (2ch_{0i,j} + h_{ij,0})\dot{x}^i\dot{x}^j + \\ + h_{ij,k}\dot{x}^i\dot{x}^j\dot{x}^k = 2\dot{x}^i\ddot{x}^i. \quad (100)$$

Подставляя теперь в (97) начальные члены символов Кристоффеля, находим

$$\ddot{x}^i + c^2 \left(\frac{1}{2} h_{00,i} + \frac{1}{2} h_{ij}h_{00,j} - \frac{1}{c} h_{0i,0} \right) + c \left(h_{0k,i} - h_{0i,k} - \right. \\ \left. - \frac{1}{c} h_{ik,0} \right) \dot{x}^k + \left(\frac{1}{2} h_{kl,i} - h_{ik,l} \right) \dot{x}^k\dot{x}^l = - \frac{\frac{d^2t}{d\lambda^2}}{\left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2} \dot{x}^i. \quad (101)$$

В ньютоновом приближении, как ясно из (97) и (99), $\dot{x}^i\dot{x}^i = c^2$ и $d^2t/d\lambda^2 = 0$. Поэтому умножая уравнения (101) на \dot{x}^i , складывая их и исключая член $\dot{x}^i\ddot{x}^i$ при помощи соотношения (100), имеем

$$-c^2 \frac{\frac{d^2t}{d\lambda^2}}{\left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2} = \frac{1}{2} c^2 h_{00,0} + c^2 \left(h_{00,k}\dot{x}^k + \frac{1}{2} h_{jk}h_{00,j} \right) + \\ + \left(ch_{0k,j} - \frac{1}{2} h_{jk,0} \right) \dot{x}^j\dot{x}^k. \quad (102)$$

Подставляя это выражение в правую часть (101), получаем уравнения распространения света

$$\ddot{x}^i = -\frac{1}{2} c^2 h_{00,i} + ch_{0i,0} - \frac{1}{2} c^2 h_{ik}h_{00,k} + \frac{1}{2} h_{00,0}\dot{x}^i + \\ + c \left(h_{0i,k} - h_{0k,i} + \frac{1}{c} h_{ik,0} \right) \dot{x}^k + h_{00,k}\dot{x}^k\dot{x}^i + \\ + \left(h_{ik,l} - \frac{1}{2} h_{kl,i} \right) \dot{x}^k\dot{x}^l + \left(\frac{1}{c} h_{0k,j} - \frac{1}{2c^2} h_{jk,0} \right) \dot{x}^j\dot{x}^k\dot{x}^i. \quad (103)$$

Таким образом, уравнения распространения света (103) оказываются тождественными с уравнениями дви-

жения пробной материальной частицы (89) (если в правой части (89) восстановить опущенный член $\Gamma_{kl}^0 \dot{x}^k \dot{x}^l \dot{x}^i / c$). Различие состоит лишь в порядке малости отдельных членов в правых частях этих уравнений. Это связано с тем, что скорости \dot{x}^i в уравнениях (89) малы по сравнению со скоростью света c , а в (103) — имеют тот же порядок. При сохранении в правой части (103) только членов нулевого и первого порядка малости получаются очень простые уравнения

$$\ddot{x}^i = -\frac{1}{2} c^2 h_{00,i} + h_{00,k} \dot{x}^k \dot{x}^i + \left(h_{ik,l} - \frac{1}{2} h_{kl,i} \right) \dot{x}^k \dot{x}^l + \\ + c (h_{0i,k} - h_{0k,i}) \dot{x}^k + \frac{1}{c} h_{0k,j} \dot{x}^j \dot{x}^k \dot{x}^i. \quad (104)$$

Для решения практических задач часто достаточны еще более простые уравнения, получающиеся отбрасыванием членов со смешанными компонентами h_{0i} (члены первого порядка малости). Надо также иметь в виду, что величина h_{00} в (104) должна быть взята лишь в первом приближении, т. е. с точностью до малых второго, а не четвертого порядка включительно.

Уравнения (104) могут быть записаны и в лагранжевой форме с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2} \dot{r}^2 - \frac{1}{2} h_{00} \dot{r}^2 - \frac{1}{2} h_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j - \frac{1}{2} c h_{0i} \dot{x}^i - \frac{1}{2c} h_{0k} \dot{x}^k \dot{x}^j \dot{x}^j. \quad (105)$$

Действительно, с принятой точностью

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = -\frac{1}{2} h_{00,i} \dot{r}^2 - \frac{1}{2} h_{kl,i} \dot{x}^k \dot{x}^l - \frac{1}{2} c h_{0k,i} \dot{x}^k - \\ - \frac{1}{2c} h_{0k,i} \dot{x}^k \dot{x}^j \dot{x}^j, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \dot{x}^i - h_{00} \dot{x}^i - h_{ij} \dot{x}^j - \frac{1}{2} c h_{0i} - \frac{1}{2c} h_{0i} \dot{x}^k \dot{x}^k - \frac{1}{c} h_{0k} \dot{x}^k \dot{x}^i, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \ddot{x}^i - h_{00,k} \dot{x}^k \dot{x}^i - h_{ik,l} \dot{x}^k \dot{x}^l - \frac{1}{2} c h_{0i,k} \dot{x}^k - \\ - \frac{1}{2c} h_{0i,k} \dot{x}^k \dot{x}^j \dot{x}^j - \frac{1}{c} h_{0k,j} \dot{x}^k \dot{x}^j \dot{x}^i,$$

откуда с учетом ньютонова значения $\dot{r}^2 = \dot{x}^j \dot{x}^j = c^2$ вновь следуют уравнения (104).

СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ

§ 1. Задача Шварцшильда

Важнейшим случаем поля тяготения общей теории относительности является сферически симметричное поле, создаваемое одним неподвижным телом сферической структуры. В силу сферической симметрии метрическую форму этого поля можно искать в виде

$$ds^2 = p(t, r) c^2 dt^2 + 2b(t, r) c dt dr - q(t, r) dr^2 - a^2(t, r) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (1)$$

где t — координатное время, r, φ, θ — сферические координаты, p, q, a и b — функции t и r , подлежащие определению из уравнений поля. Так как «время» t и «радиальное расстояние» r можно выбрать произвольным образом, не нарушая сферической симметрии поля, то, очевидно, две из этих четырех функций, например a и b , можно считать произвольными. Тогда функции p и q выражаются в силу уравнений поля через a и b . В прямоугольных координатах

$$x^1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x^2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x^3 = r \cos \theta$$

метрика (1) запишется в виде

$$ds^2 = p(t, r) c^2 dt^2 + 2b(t, r) \frac{x^i}{r} c dt dx^i - \frac{1}{r^2} \left\{ a^2(t, r) \delta_{ij} + \left[q(t, r) - \frac{a^2(t, r)}{r^2} \right] x^i x^j \right\} dx^i dx^j. \quad (2)$$

Введем в (1) вместо r новую координату

$$\tilde{r} = a(t, r). \quad (3)$$

Тогда

$$d\tilde{r} = a_0 c dt + a_r dr, \quad a_0 = \frac{1}{c} \frac{\partial a}{\partial t}, \quad a_r = \frac{\partial a}{\partial r} \neq 0, \quad (4)$$

и метрика (1) перейдет в

$$ds^2 = \left(p - 2b \frac{a_0}{a_r} - q \frac{a_0^2}{a_r^2} \right) c^2 dt^2 + \frac{2}{a_r} \left(b + q \frac{a_0}{a_r} \right) c dt d\tilde{r} - \\ - \frac{q}{a_r^2} d\tilde{r}^2 - \tilde{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (5)$$

Кроме того, с целью устранения в метрической форме смешанных членов введем вместо t новую переменную \tilde{t} , определяемую дифференциальным выражением

$$d\tilde{t} = \eta \left[\left(p - b \frac{a_0}{a_r} \right) dt + \frac{1}{c} \left(b + q \frac{a_0}{a_r} \right) dr \right]. \quad (6)$$

Здесь $\eta = \eta(t, r)$ — интегрирующий множитель, делающий правую часть выражения (6) полным дифференциалом. Поэтому η определяется уравнением

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\eta \left(b + q \frac{a_0}{a_r} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial r} \left[\eta \left(p - b \frac{a_0}{a_r} \right) \right]. \quad (7)$$

Так как (6) можно с помощью (4) переписать в виде

$$d\tilde{t} = \eta \left[\left(p - 2b \frac{a_0}{a_r} - q \frac{a_0^2}{a_r^2} \right) dt + \frac{1}{ca_r} \left(b + q \frac{a_0}{a_r} \right) d\tilde{r} \right], \quad (8)$$

откуда

$$\left(p - 2b \frac{a_0}{a_r} - q \frac{a_0^2}{a_r^2} \right) c^2 dt^2 + \frac{2}{a_r} \left(b + q \frac{a_0}{a_r} \right) c dt d\tilde{r} = \\ = \frac{1}{\left(p - 2b \frac{a_0}{a_r} - q \frac{a_0^2}{a_r^2} \right)} \left[\frac{c^2 d\tilde{t}^2}{\eta^2} - \frac{1}{a_r^2} \left(b + q \frac{a_0}{a_r} \right)^2 d\tilde{r}^2 \right],$$

то окончательно в переменных \tilde{t} , \tilde{r} , φ , θ метрика (5) примет вид

$$ds^2 = \frac{c^2 d\tilde{t}^2}{\eta^2 \left(p - 2b \frac{a_0}{a_r} - q \frac{a_0^2}{a_r^2} \right)} - \frac{1}{a_r^2} \left[q + \frac{\left(b + q \frac{a_0}{a_r} \right)^2}{p - 2b \frac{a_0}{a_r} - q \frac{a_0^2}{a_r^2}} \right] d\tilde{r}^2 - \\ - \tilde{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (9)$$

Обозначая временно

$$x^0 = \tilde{c}t, \quad x^1 = \tilde{r}, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \varphi,$$

перепишем эту форму следующим образом:

$$ds^2 = e^\nu dx^{0^2} - e^\lambda dx^{1^2} - x^{1^2} (dx^{2^2} + \sin^2 x^2 dx^{3^2}), \quad (10)$$

где ν , λ — некоторые функции от x^0 и x^1 . Эти функции будут определены из уравнений поля, а сравнение (9) и (10) даст затем две искомые зависимости между p , q , a и b .

Вычисление символов Кристоффеля можно провести не только стандартным путем на основе выражений для ковариантных и контрвариантных компонент метрического тензора метрики (10), но и путем использования геодезического вариационного принципа в форме (101) гл. 2. Если за параметр принять величину s , то функция Лагранжа для уравнений геодезического движения запишется в виде

$$L = e^\nu \left(\frac{dx^0}{ds} \right)^2 - e^\lambda \left(\frac{dx^1}{ds} \right)^2 - x^{1^2} \left[\left(\frac{dx^2}{ds} \right)^2 + \sin^2 x^2 \left(\frac{dx^3}{ds} \right)^2 \right]. \quad (11)$$

Отсюда сами уравнения будут:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^0}{ds^2} + \frac{1}{2} \dot{\nu} \left(\frac{dx^0}{ds} \right)^2 + \nu' \frac{dx^0}{ds} \frac{dx^1}{ds} + \frac{1}{2} e^{\lambda-\nu} \dot{\lambda} \left(\frac{dx^1}{ds} \right)^2 &= 0, \\ \frac{d^2 x^1}{ds^2} + \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \nu' \left(\frac{dx^0}{ds} \right)^2 + \dot{\lambda} \frac{dx^0}{ds} \frac{dx^1}{ds} + \frac{1}{2} \lambda' \left(\frac{dx^1}{ds} \right)^2 - \\ - x^{1^2} e^{-\lambda} \left[\left(\frac{dx^2}{ds} \right)^2 + \sin^2 x^2 \left(\frac{dx^3}{ds} \right)^2 \right] &= 0, \\ \frac{d^2 x^2}{ds^2} + \frac{2}{x^1} \frac{dx^1}{ds} \frac{dx^2}{ds} - \sin x^2 \cos x^2 \left(\frac{dx^3}{ds} \right)^2 &= 0, \\ \frac{d^2 x^3}{ds^2} + \frac{2}{x^1} \frac{dx^1}{ds} \frac{dx^3}{ds} + 2 \operatorname{ctg} x^2 \frac{dx^2}{ds} \frac{dx^3}{ds} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь временно точкой обозначено дифференцирование по x^0 , а штрихом — дифференцирование по x^1 . Из вида уравнений сейчас же следует, что движение пробной частицы и лучей света в сферически симметричном поле происходит в плоскости, за которую можно принять, например, плоскость $\theta = \pi/2$. Сопоставление этих уравне-

ний с каноническими уравнениями геодезической линии позволяет написать следующие выражения для отличных от нуля символов Кристоффеля:

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2} \dot{v}, \quad \Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2} v', \quad \Gamma_{11}^0 = \frac{1}{2} e^{\lambda-v} \dot{\lambda}, \\ \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} v', \quad \Gamma_{01}^1 = \frac{1}{2} \dot{\lambda}, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} \lambda', \quad \Gamma_{22}^1 = -x^1 e^{-\lambda}, \\ \Gamma_{33}^1 &= -x^1 e^{-\lambda} \sin^2 x^2, \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{x^1}, \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin x^2 \cos x^2, \\ \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{x^1}, \quad \Gamma_{33}^3 = \operatorname{ctg} x^2.\end{aligned}$$

Отсюда для компонентов тензора Риччи по формуле (20) гл. 4 имеем

$$\begin{aligned}R_{00} &= \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} - \frac{\dot{\lambda}\dot{v}}{4} + e^{\nu-\lambda} \left(-\frac{v''}{2} - \frac{v'^2}{4} + \frac{\lambda'v'}{4} - \frac{v'}{x^1} \right), \\ R_{11} &= \frac{v''}{2} + \frac{v'^2}{4} - \frac{\lambda'v'}{4} - \frac{\lambda'}{x^1} + e^{\lambda-\nu} \left(-\frac{\ddot{\lambda}}{2} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} + \frac{\dot{\lambda}\dot{v}}{4} \right), \\ R_{22} &= -1 + e^{-\lambda} \left(1 - x^1 \lambda' + \frac{v' + \lambda'}{2} x^1 \right), \\ R_{33} &= R_{22} \sin^2 x^2, \quad R_{01} = -\frac{\dot{\lambda}}{x^1}.\end{aligned}$$

Остальные компоненты тензора Риччи тождественно равны нулю.

Поле во внешней области тела определяется уравнениями (14) гл. 4, которые в силу найденных выражений дают

$$\dot{\lambda} = 0, \quad \lambda' + v' = 0, \quad (x^1 e^{-\lambda})' = 1.$$

Таким образом, λ не зависит от x^0 и определяется формулой

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2\mu}{x^1}, \quad (12)$$

где μ — произвольная постоянная. Без ограничения общности можно считать $v = -\lambda$ (v отличается от $-\lambda$ на произвольную аддитивную функцию от x^0 , которая преобразованием только x^0 может быть обращена в нуль; возможность такого преобразования содержится в об-

щем виде метрики (1)). Итак,

$$e^{\nu} = 1 - \frac{2\mu}{x^1}, \quad (13)$$

и метрика (10) принимает форму

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\mu}{x^1}\right) dx^{0^2} - \frac{dx^{1^2}}{1 - \frac{2\mu}{x^1}} - x^{1^2} (dx^{2^2} + \sin^2 x^2 dx^{3^2}). \quad (14)$$

Это выражение носит название метрики Шварцшильда, а вся задача определения поля тяготения одного сферически симметричного тела называется задачей Шварцшильда. Как видно из (14), общая метрика (1) сферически симметричного поля всегда может быть сведена к статическому виду, что впервые было отмечено Дж. Биркгофом. Решение Шварцшильда является одним из немногих известных точных решений уравнений поля общей теории относительности. Из сопоставления с ньютоновой теорией (см. формулу (93) гл. 4 для выражения h_{00} в случае слабого поля) находим смысл постоянной μ :

$$\mu = \frac{\gamma m}{c^2}, \quad (15)$$

где m — масса создающего поля тела. Определенная таким образом величина μ имеет размерность длины и называется гравитационным радиусом тела (иногда, правда, этот термин применяется к величине 2μ). Для всех тел Солнечной системы гравитационные радиусы тел очень малы по сравнению с их линейными радиусами. Возвращаясь к общему виду метрики (1), из сопоставления (9) и (10) с учетом (3), (12) и (13) получаем

$$\frac{1}{\eta^2 \left(p - 2b \frac{a_0}{a_r} - q \frac{a_0^2}{a_r^2} \right)} = 1 - \frac{2\mu}{a}, \quad (16)$$

$$q = \frac{a_r^2}{1 - \frac{2\mu}{a}} - \frac{\left(b + q \frac{a_0}{a_r} \right)^2}{p - 2b \frac{a_0}{a_r} - q \frac{a_0^2}{a_r^2}}. \quad (17)$$

Таким образом, общее выражение метрики сферически симметричного поля может быть получено заданием произвольных функций $a(t, r)$, $b(t, r)$, и тогда две остальные функции $p(t, r)$, $q(t, r)$ и вспомогательная функция $\eta(t, r)$ должны быть найдены из двух алгебраических соотношений (16), (17) и одного дифференциального уравнения (7). Задание двух произвольных функций $a(t, r)$, $b(t, r)$ фиксирует выбор той или иной координатной системы. Переход от одной формы решения к другой достигается преобразованием координат t и r .

В задачах релятивистской небесной механики обычно используется возможность сведения общей метрики (1) к метрике постоянного поля. В этом случае a, b, p, q являются функциями лишь от r , уравнение (7) удовлетворяется при $\eta = 1/p$ и соотношения (16), (17) дают в явном виде выражения $p(r)$ и $q(r)$ через $a(r)$ и $b(r)$:

$$p(r) = 1 - \frac{2\mu}{a(r)}, \quad (18)$$

$$q(r) = \frac{a'^2(r) - b^2(r)}{p(r)}. \quad (19)$$

Рассмотрим несколько примеров записи этой метрики в различных координатных системах.

1. $a(r) = r$, $b(r) = \frac{2\mu}{r}$ — решение Эддингтона. В этом случае

$$p(r) = 1 - \frac{2\mu}{r},$$

$$q(r) = 1 + \frac{2\mu}{r}$$

и

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{4\mu}{r} c dt dr - \left(1 + \frac{2\mu}{r}\right) dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (20)$$

или в прямоугольных координатах

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{4\mu}{r} \frac{x^i}{r} c dt dx^i - \left(\delta_{ij} + \frac{2\mu}{r^3} x^i x^j\right) dx^i dx^j. \quad (21)$$

2. $a(r) = r$, $b(r) = \sqrt{\frac{2\mu}{r}}$ — решение Пенлеве.

Здесь

$$p(r) = 1 - \frac{2\mu}{r}, \quad q(r) = 1$$

и

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) c^2 dt^2 + 2 \sqrt{\frac{2\mu}{r}} c dt dr - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (22)$$

или

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) c^2 dt^2 + 2 \sqrt{\frac{2\mu}{r}} \frac{x^i}{r} c dt dx^i - \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (23)$$

Интересно отметить, что пространственная часть метрики здесь имеет чисто евклидову форму.

Следующие четыре формы метрик являются статическими.

3. $a(r) = r$, $b(r) = 0$ — решение Шварцшильда в стандартных координатах. В этих координатах

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2\mu}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (24)$$

или

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(\delta_{ij} + \frac{2\mu}{r^3} \frac{x^i x^j}{1 - \frac{2\mu}{r}} \right) dx^i dx^j. \quad (25)$$

Эта форма является одной из самых употребительных при исследовании поля Шварцшильда.

4. $a(r) = r + \mu$, $b(r) = 0$ — решение в гармонических координатах. Здесь

$$p(r) = \frac{r - \mu}{r + \mu}, \quad q(r) = \frac{r + \mu}{r - \mu}$$

и

$$ds^2 = \frac{r - \mu}{r + \mu} c^2 dt^2 - \frac{r + \mu}{r - \mu} dr^2 - (r + \mu)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (26)$$

или

$$ds^2 = \frac{r-\mu}{r+\mu} c^2 dt^2 - \left[\left(1 + \frac{\mu}{r}\right)^2 \delta_{ij} + \frac{\mu^2}{r^4} \frac{r+\mu}{r-\mu} x^i x^j \right] dx^i dx^j. \quad (27)$$

5. $a(r) = r \left(1 + \frac{\mu}{2r}\right)^2$, $b(r) = 0$ — решение в изотропных координатах. В этом случае

$$p(r) = \frac{\left(1 - \frac{\mu}{2r}\right)^2}{\left(1 + \frac{\mu}{2r}\right)^2}, \quad q(r) = \left(1 + \frac{\mu}{2r}\right)^4$$

и

$$ds^2 = \frac{\left(1 - \frac{\mu}{2r}\right)^2}{\left(1 + \frac{\mu}{2r}\right)^2} c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{\mu}{2r}\right)^4 (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (28)$$

или

$$ds^2 = \frac{\left(1 - \frac{\mu}{2r}\right)^2}{\left(1 + \frac{\mu}{2r}\right)^2} c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{\mu}{2r}\right)^4 \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (29)$$

В этой форме метрики пространственная часть интервала отличается от евклидовой метрики лишь множителем, зависящим от точки поля.

6. $a^2(r) = r^2 \left[1 - \frac{2\mu}{a(r)}\right]$, $b(r) = 0$ — решение Пенлеве. В этом случае

$$ds^2 = \left[1 - \frac{2\mu}{a(r)}\right] c^2 dt^2 - \frac{a'^2(r)}{1 - \frac{2\mu}{a(r)}} dr^2 - \left[1 - \frac{2\mu}{a(r)}\right] r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (30)$$

или

$$ds^2 = \left[1 - \frac{2\mu}{a(r)}\right] c^2 dt^2 - \left\{ \left[1 - \frac{2\mu}{a(r)}\right] \delta_{ij} + \frac{a'^2(r) - \left[1 - \frac{2\mu}{a(r)}\right]^2}{r^2 \left[1 - \frac{2\mu}{a(r)}\right]} x^i x^j \right\} dx^i dx^j. \quad (31)$$

Здесь $a(r)$ является корнем указанного кубического уравнения и при малых значениях отношения μ/r

$$a(r) = r - \mu + \dots$$

В этих координатах поле тяготения по своему действию эквивалентно центральной силе, так как коэффициенты при $c^2 dt^2$ и $r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$ равны друг другу по абсолютной величине и противоположны по знаку.

Исторические сведения об этих видах метрик можно найти, например, в курсе Шази (Chazy, 1928, 1930).

Приведенное в этом параграфе решение относится к внешней задаче Шварцшильда — определение поля тяготения вне сферического тела. В космологии и релятивистской астрофизике важную роль играет и решение внутренней задачи Шварцшильда — определение поля тяготения внутри тела. Однако для практических целей релятивистской небесной механики это решение не представляет интереса и не будет здесь рассматриваться.

§ 2. Движение пробной частицы в поле Шварцшильда

Решение Шварцшильда является строгим решением уравнений поля. Поэтому на основе геодезического вариационного принципа можно написать строгие уравнения движения пробной частицы или луча света. Как оказывается, эти уравнения могут быть точно проинтегрированы в эллиптических функциях. Действительно, используя метрику поля Шварцшильда в стандартных координатах (24) и принимая за плоскость движения плоскость $\theta = \pi/2$, можно, как и в (11), написать функцию Лагранжа в виде

$$L = \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) c^2 \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \frac{1}{1 - \frac{2\mu}{r}} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2. \quad (32)$$

Так как L не зависит явно ни от ct , ни от φ , то производные от L по cdt/ds и $d\varphi/ds$ дадут два первых интеграла движения:

$$\left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) c \frac{dt}{ds} = f, \quad r^2 \frac{d\varphi}{ds} = g \quad (f, g = \text{const}). \quad (33)$$

Так как L не содержит s в явном виде, то существует еще один интеграл (формула (95) гл. 2), который в силу однородности относительно производных имеет вид

$$\left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) c^2 \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \frac{1}{1 - \frac{2\mu}{r}} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = C. \quad (34)$$

Для пробной материальной частицы $C = 1$, для света — $C = 0$. Комбинируя первый интеграл с третьим, находим

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = f^2 - \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) \left(C + \frac{g^2}{r^2}\right), \quad (35)$$

откуда в сочетании со вторым интегралом следует дифференциальное уравнение траектории

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2 = \frac{f^2}{g^2} - \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) \left(\frac{1}{r^2} + \frac{C}{g^2}\right). \quad (36)$$

Поскольку в правой части стоит многочлен третьей степени относительно $1/r$, то это уравнение строго интегрируется в эллиптических функциях. Исчерпывающий небесномеханический анализ точного решения уравнения типа (36) дан С. Д. Черным (1949). Из многочисленных работ, посвященных рассмотрению этого уравнения специально в общей теории относительности, отметим лишь исследования А. Ф. Богородского (1962) и Богдана и Плебаньского (Bogdan, Plebánski, 1962). Это точное решение важно для задач релятивистской астрофизики, которым посвящен курс Я. Б. Зельдовича и И. Д. Новикова (1967). С этим решением связан ряд исключительно интересных вопросов, не имеющих аналога в ньютоновой задаче двух тел — несуществование круговых орбит вблизи гравитационного радиуса, захват частицы центральным телом, временный захват (когда частица приближается к центральному телу, совершает вокруг него некоторое количество оборотов, а затем снова удаляется от него) и т. п. Но все это имеет место на расстоянии не более нескольких гравитационных радиусов от центра создающего поле тела.

Для реальных тел Солнечной системы гравитационные радиусы ничтожны по сравнению с их линейными разме-

рами, и все эти интересные случаи движения не могут реализоваться практически. Для релятивистской небесной механики достаточно иметь приближенное решение, отклонение которого от ньютоновского решения должно быть исследовано во всех подробностях. В частности, очень важным вопросом здесь является изучение влияния координатных условий на вид той или иной релятивистской зависимости. Поэтому вместо исследования строгого уравнения (36) ниже будет изучаться приближенное уравнение траектории частицы, пригодное, однако, для всех координатных систем типа 3)—6).

Ограничиваясь случаем статических полей, положим

$$a(r) = r + (1 - \alpha) \mu, \quad (37)$$

где α — произвольное вещественное число. Разлагая компоненты метрического тензора по степеням μ/r , находим по (18), (19) метрику поля Шварцшильда в виде

$$ds^2 = \left[1 - \frac{2\mu}{r} + \frac{2(1-\alpha)\mu^2}{r^2} + \dots \right] c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2\mu}{r} + \dots \right) dr^2 - \left[1 + \frac{2(1-\alpha)\mu}{r} + \dots \right] r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (38)$$

или в прямоугольных координатах

$$ds^2 = \left[1 - \frac{2\mu}{r} + \frac{2(1-\alpha)\mu^2}{r^2} + \dots \right] c^2 dt^2 - \left\{ \delta_{ij} + \frac{2\mu}{r} \left[(1-\alpha) \delta_{ij} + \alpha \frac{x^i x^j}{r^2} \right] + \dots \right\} dx^i dx^j. \quad (39)$$

Выписанные здесь члены позволяют решать соответствующие задачи релятивистской небесной механики с точностью до членов второго порядка малости относительно v/c включительно.

При любом α метрические формы (38), (39) имеют галилеев характер на бесконечности и одинаково пригодны для изучения движения в задаче Шварцшильда. Случай $\alpha = 1$ соответствует стандартным координатам, при $\alpha = 0$ получаются гармонические или изотропные координаты (совпадающие друг с другом в пределах этой точности), а $\alpha = 2$ соответствует координатам Пенлеве.

Целесообразно заменить метрики (38), (39) несколько более общими формами:

$$ds^2 = \left(1 - 2 \frac{\mu}{r} + K \frac{\mu^2}{r^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + A \frac{\mu}{r}\right) dr^2 - \left(1 + B \frac{\mu}{r}\right) r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (40)$$

$$ds^2 = \left(1 - 2 \frac{\mu}{r} + K \frac{\mu^2}{r^2}\right) c^2 dt^2 - \left\{ \delta_{ij} + \frac{\mu}{r} \left[B \delta_{ij} + (A - B) \frac{x^i x^j}{r^2} \right] \right\} dx^i dx^j. \quad (41)$$

Это позволяет применять получаемые ниже результаты не только к задаче Шварцшильда общей теории относительности, когда

$$A = 2, \quad B = K = 2(1 - \alpha), \quad (42)$$

но и в случае сферически симметричных полей других, неэйнштейновских теорий тяготения, приводящих к метрикам (40), (41) с другими значениями постоянных A , B , K .

Если за независимую переменную принять координатное время t , то лагранжиан движущейся пробной частицы для метрики (41) запишется по формуле (96) гл. 4 в виде

$$L = \frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{\gamma m}{r} + \frac{1}{8c^2} \dot{r}^4 + \frac{\mu}{2r} \left[(1 - K) \frac{\gamma m}{r} + (1 + B) \dot{r}^2 + (A - B) \frac{(r \dot{r})^2}{r^2} \right], \quad (43)$$

где r означает обычный трехмерный радиус-вектор частицы с компонентами x^1 , x^2 , x^3 . В сферических координатах

$$L = \frac{1}{2} [\dot{r}^2 + r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2)] + \frac{\gamma m}{r} + \frac{1}{8c^2} [\dot{r}^2 + r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2)]^2 + \frac{\mu}{2r} \left[(1 - K) \frac{\gamma m}{r} + (1 + A) \dot{r}^2 + (1 + B) r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \right]. \quad (44)$$

Лагранжиану (43) соответствуют уравнения движения (уравнения (89) гл. 4)

$$\ddot{r} = -\frac{\gamma m}{r^3} r + \mu \left[(A + K) \frac{\gamma m}{r^4} r + \left(\frac{1}{2} B - A \right) \frac{\dot{r}^2}{r^3} r + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} (A - B) \frac{(r\dot{r})^2}{r^5} r + (2 + B) \frac{(r\dot{r})}{r^3} \dot{r} \right]. \quad (45)$$

Эти уравнения в прямоугольных координатах удобны для численного интегрирования.

Для аналитического исследования перейдем к полярным координатам r , u в плоскости движения. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{u}^2 &= -\frac{\gamma m}{r^3} + \mu \left[(A + K) \frac{\gamma m}{r^3} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2} B - A \right) \dot{u}^2 + \left(2 + \frac{1}{2} A \right) \frac{\dot{r}^2}{r^2} \right], \\ \frac{d}{dt} (r^2 \dot{u}) &= \mu (2 + B) \dot{r} \dot{u}. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Из этих уравнений сейчас же следуют формулы для частного кругового решения

$$r = a, \quad u = nt + \text{const}, \quad (47)$$

где «частота» n связана с радиусом a круговой орбиты зависимостью

$$n^2 = \frac{\gamma m}{a^3} \left[1 - \left(K + \frac{1}{2} B \right) \frac{\mu}{a} \right]. \quad (48)$$

Со значениями (42), соответствующими общей теории относительности, имеем отсюда

$$n^2 = \frac{\gamma m}{a^3} \left[1 - 3(1 - \alpha) \frac{\mu}{a} \right]. \quad (49)$$

Интересно отметить, что в стандартных координатах ($\alpha = 1$) третий закон Кеплера для кругового движения имеет тот же вид, что и в ньютоновом случае. Уравнения (46) обладают двумя интегралами — интегралом площадей и интегралом живых сил, которые проще получить непосредственно из лагранжиана (44), составив выражения $\partial L / \partial \dot{\phi}$ и $\dot{r} \partial L / \partial \dot{r} + \phi \partial L / \partial \dot{\phi} - L$ для $\theta = \pi/2$

и положив затем $\varphi = u$. Интеграл площадей имеет вид

$$r^2 \dot{u} \left\{ 1 + \frac{1}{c^2} \left[\frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{u}^2) + (1 + B) \frac{\gamma m}{r} \right] \right\} = P, \quad (50)$$

а интеграл живых сил будет

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{u}^2) - \frac{\gamma m}{r} + \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{3}{8} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{u}^2)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (K - 1) \frac{\gamma^2 m^2}{r^2} + \frac{\gamma m}{2r} [(1 + A) \dot{r}^2 + (1 + B) r^2 \dot{u}^2] \right\} = h. \end{aligned} \quad (51)$$

Подставляя в релятивистские члены ньютоновы выражения, получаем

$$r^2 \dot{u} = P \left\{ 1 - \frac{1}{c^2} \left[(2 + B) \frac{\gamma m}{r} + h \right] \right\} \quad (52)$$

и

$$\begin{aligned} \dot{r}^2 = & -r^2 \dot{u}^2 + \frac{2\gamma m}{r} + 2h + \frac{2}{c^2} \left[- (2 + A + \frac{1}{2} K) \frac{\gamma^2 m^2}{r^2} - \right. \\ & \left. - (4 + A) h \frac{\gamma m}{r} - \frac{3}{2} h^2 + \frac{1}{2} (A - B) P^2 \frac{\gamma m}{r^3} \right]. \end{aligned} \quad (53)$$

Отсюда вытекает дифференциальное уравнение траектории в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{d \frac{1}{r}}{du} \right)^2 = & - \frac{1}{r^2} + \frac{2\gamma m}{P^2} \frac{1}{r} + \frac{2h}{P^2} + \\ & + \mu \left[\frac{A - B}{r^3} + (4 - 2A + 4B - K) \frac{\gamma m}{P^2} \frac{1}{r^2} + \right. \\ & \left. + 2(2 + 2B - A) \frac{h}{P^2} \frac{1}{r} + \frac{h^2}{\gamma m P^2} \right]. \end{aligned} \quad (54)$$

В стандартных координатах поля Шварцшильда ($A = 2, B = K = 0$) это уравнение, естественно, переходит в ранее выведенное уравнение (36). Связь между постоянными дается при этом формулами

$$f = 1 + \frac{h}{c^2}, \quad g = \frac{P}{c}.$$

Наиболее простой вид уравнение (54) для поля Шварцшильда принимает в гармонических или изотропных коор-

динахах ($A = B = K = 2$), когда его правая часть становится многочленом лишь второй степени относительно $1/r$.

Введем в (54) вместо P, h новые постоянные a, e такие, что $1/a(1+e)$ и $1/a(1-e)$ являются корнями уравнения относительно $1/r$, полученного при приравнивании правой части уравнения (54) нулю. Таким образом, a и e играют роль большой полуоси и эксцентриситета орбиты. Тогда

$$\left(\frac{d}{du} \frac{1}{r}\right)^2 = \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{a(1+e)}\right] \left[\frac{1}{a(1-e)} - \frac{1}{r}\right] \times \\ \times \left[1 + k + (B - A) \frac{\mu}{r}\right]. \quad (55)$$

Сравнение коэффициентов (54) и (55) позволяет установить соотношения

$$k = (K - 2B - 4) \frac{\mu}{a(1-e^2)},$$

$$P^2 = \gamma m a (1 - e^2) \left[1 + \left(-1 - \frac{1}{2}B + \frac{4 + 2B - K}{1 - e^2}\right) \frac{\mu}{a}\right], \quad (56)$$

$$h = -\frac{\gamma m}{2a} \left[1 - \frac{1}{4}(3 + 2B) \frac{\mu}{a}\right]. \quad (57)$$

Решение уравнения (55) ищем в той же форме, что и в ньютоновой теории, т. е.

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e \cos V}. \quad (58)$$

Подстановка этого выражения в (55) дает

$$\left(\frac{dV}{du}\right)^2 = 1 + k + (B - A) \frac{\mu}{r}$$

или

$$\left(\frac{dV}{du}\right)^2 = 1 + (K - A - B - 4) \frac{\mu}{a(1-e^2)} + \\ + (B - A) \frac{\mu}{a(1-e^2)} e \cos V.$$

Отсюда в пределах принятой точности

$$\frac{dV}{du} = v \left[1 + \frac{1}{2}(B - A) \frac{\mu}{a(1-e^2)} e \cos V\right], \quad (59)$$

где

$$v = 1 + \frac{1}{2}(K - A - B - 4) \frac{\mu}{a(1 - e^2)}. \quad (60)$$

Приближенное решение уравнения (59) записывается в виде

$$V = \psi + \frac{1}{2}(B - A) \frac{\mu}{a(1 - e^2)} e \sin \psi, \quad (61)$$

причем

$$\psi = v(u - \omega), \quad (62)$$

а ω — произвольная постоянная.

Итак, уравнение траектории пробной частицы в поле с метрикой (40) в рассматриваемом пост-ньютоновом приближении дается формулами (58), (61), (62) и (60).

Практический интерес для релятивистской небесной механики имеет лишь случай движения эллиптического типа. В этом случае между двумя последовательными прохождениями через перицентр $V = 0$ и $V = 2\pi$ аргумент широты u меняется от $u = \omega$ до $u = \omega + 2\pi/v = \omega + 2\pi + \Delta\omega$, где

$$\Delta\omega = (4 + A + B - K) \frac{\pi\mu}{a(1 - e^2)}. \quad (63)$$

Для поля Шварцшильда общей теории относительности имеем

$$\Delta\omega = \frac{6\pi\mu}{a(1 - e^2)}. \quad (64)$$

Это и есть знаменитая формула для шварцшильдовского смещения перицентра за один оборот. Важно отметить, что величина этого эффекта не зависит от α — от конкретного выбора координатной системы типа (38).

После определения траектории частицы нетрудно установить зависимость истинной аномалии V от времени. Подставляя в интеграл площадей (52) значения (56), (57), находим

$$r^2 \dot{u} = \sqrt{\gamma m a (1 - e^2)} \times \\ \times \left\{ 1 + \left[-\frac{1}{4} B + \frac{2 + B - \frac{1}{2} K}{1 - e^2} - (2 + B) \frac{a}{r} \right] \frac{\mu}{a} \right\}.$$

Так как в силу (59)

$$du = \left\{ 1 + \frac{\mu}{a} \left[\frac{2 + B - \frac{1}{2}K}{1 - e^2} + \frac{1}{2}(A - B) \frac{a}{r} \right] \right\} dV,$$

то предыдущее уравнение может быть переписано в виде

$$n dt = \frac{r^2}{a^2 \sqrt{1 - e^2}} \left\{ 1 + \frac{\mu}{2a} \left[-K + (4 + A + B) \frac{a}{r} \right] \right\} dV, \quad (65)$$

где среднее движение n определяется по (48). Обозначим через M среднюю аномалию и введем эксцентрическую аномалию E , связанную с истинной аномалией V обычной формулой (14) гл. 1. Интегрированием уравнения (65) получаем теперь релятивистский аналог уравнения Кеплера

$$\left[1 + \left(2 + \frac{A + B - K}{2} \right) \frac{\mu}{a} \right] E - \left(1 - \frac{1}{2}K \frac{\mu}{a} \right) e \sin E = M, \quad (66)$$

$$M = nt + \text{const.}$$

С помощью этого уравнения можно легко найти формулу для периода обращения частицы вокруг центрального тела. При этом нужно лишь четко определить, какой именно период имеется в виду. Для аномалистического периода T_1 , определяемого как промежуток времени t , в течение которого V и E возрастают на 2π , имеем

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\gamma m}} \left[1 + \left(2 + \frac{1}{2}A + \frac{3}{4}B \right) \frac{\mu}{a} \right]. \quad (67)$$

В конце этого периода r и \dot{r} принимают свои начальные значения. Сидерический период T_2' определяется как промежуток времени, в течение которого u возрастает на 2π . При этом ψ и V возрастают на $2\pi\nu$, а приращение E составит

$$2\pi + \frac{2\pi(\nu - 1) \sqrt{1 - e^2}}{1 + e \cos V}.$$

Поэтому

$$T_2' = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\gamma m}} \left\{ 1 + \frac{\mu}{a} \left[2 + \frac{1}{2}A + \frac{3}{4}B + \frac{1}{2}(K - A - B - 4) \frac{\sqrt{1 - e^2}}{(1 + e \cos V)^2} \right] \right\}. \quad (68)$$

В конце этого периода радиус-вектор частицы совпадает по направлению с начальным положением. При $e = 0$ отсюда следует формула для периода кругового движения, согласующаяся с (48). Если $e \neq 0$, то T_2 зависит от начального положения радиуса-вектора. Среднее значение сидерического периода при изменении V от 0 до 2π будет

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\gamma m}} \left[1 + \frac{\mu}{a} \left(2 + \frac{1}{2} A + \frac{3}{4} B + \frac{1}{2} \frac{K - A - B - 4}{1 - e^2} \right) \right], \quad (69)$$

поскольку

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dV}{(1 + e \cos V)^2} = \frac{1}{(1 - e^2)^{3/2}}.$$

При выводе уравнения (66) и вытекающих из него формул (67)–(69) за независимую переменную было принято координатное время t . Для ряда задач более целесообразно пользоваться собственным временем движущейся частицы τ , определяемым формулой (39) гл. 4. Для метрики (41)

$$\left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 = 1 - \frac{2\mu}{r} - \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \dots$$

Подставляя сюда значение \dot{r}^2 из интеграла живых сил и извлекая корень, получаем

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 - \frac{2\mu}{r} + \frac{1}{2} \frac{\mu}{a} + \dots \quad (70)$$

Поэтому на основании (65) дифференциальное уравнение, связывающее истинную аномалию v с собственным временем τ , имеет вид

$$n' d\tau = \frac{r^2}{a^2 \sqrt{1 - e^2}} \left\{ 1 + \frac{\mu}{2a} \left[4 - K + (A + B) \frac{a}{r} \right] \right\} dV,$$

где n' — «частота» кругового движения в собственном времени частицы, а именно

$$n'^2 = \frac{\gamma m}{a^3} \left[1 + \left(3 - K - \frac{1}{2} B \right) \frac{\mu}{a} \right]. \quad (71)$$

Интегрируя, получаем релятивистский аналог уравнения Кеплера в собственном времени движущейся частицы

$$\left[1 + \left(2 + \frac{A+B-K}{2}\right) \frac{\mu}{a}\right] E - \left[1 + \left(2 - \frac{1}{2}K\right) \frac{\mu}{a}\right] e \sin E = n'\tau + \text{const.} \quad (72)$$

Поэтому аномалистический и сидерические периоды, аналогичные (67)–(69), но выраженные в собственном времени, будут соответственно

$$\mathcal{T}_1 = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\gamma m}} \left[1 + \frac{1}{2} \left(1 + A + \frac{3}{2}B\right) \frac{\mu}{a}\right], \quad (73)$$

$$\mathcal{T}'_2 = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\gamma m}} \left\{1 + \frac{\mu}{2a} \left[1 + A + \frac{3}{2}B + (K - A - B - 4) \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+e \cos V)^2}\right]\right\} \quad (74)$$

и

$$\mathcal{T}_2 = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\gamma m}} \left[1 + \frac{\mu}{2a} \left(1 + A + \frac{3}{2}B + \frac{K - A - B - 4}{1 - e^2}\right)\right]. \quad (75)$$

§ 3. Решение в оскулирующих элементах

В этом параграфе решение той же задачи о движении пробной частицы в сферически симметричном гравитационном поле выразим при помощи оскулирующих элементов. Снова имея в виду возможные применения получаемых результатов не только в общей теории относительности, но и в других, близких к ней теориях тяготения, будем, как это сделано в курсе Шази, рассматривать уравнения (26) гл. 1 с несколько более общей возмущающей силой

$$F = \mu \left[\left(2\sigma \frac{\gamma m}{r} - 2\beta \dot{r}^2 + 3\alpha \dot{r}^2\right) \frac{r}{r^3} + 2\lambda \frac{\dot{r}}{r^2} \dot{r} \right], \quad (76)$$

где α , β , λ , σ — некоторые постоянные. Надо сказать, что еще задолго до создания общей теории относительности было предложено много модификаций ньютонового закона тяготения, приводящих к возмущающей силе (76)

с теми или иными значениями постоянных α , β , λ , σ . Релятивистские же уравнения задачи Шварцшильда получаются отсюда, если фиксировать три из этих постоянных, а именно

$$2\beta = 1 + \alpha, \quad \lambda = \sigma = 2 - \alpha, \quad (77)$$

где постоянная α по-прежнему характеризует выбор системы координат. Конечно, решение этих уравнений можно было бы найти методом предыдущего параграфа и получить аналогичные формулы. В частности, для кругового движения (47) «частота» будет определяться соотношением

$$n^2 = \frac{\gamma m}{a^3} \left[1 + 2(\beta - \sigma) \frac{\mu}{a} \right]. \quad (78)$$

Однако с целью иллюстрации метода вариации произвольных постоянных воспользуемся здесь оскулирующими элементами. По формулам (28) гл. 1 находим компоненты силы:

$$\begin{aligned} S &= \frac{\mu}{r^2} \left[2\sigma \frac{\gamma m}{r} - 2\beta \dot{r}^2 + (3\alpha + 2\lambda) \dot{r}^2 \right] = \\ &= \mu \frac{n^2 a^2}{r^2} \left[-(3\alpha + 2\lambda) \frac{pa}{r^2} + \right. \\ &\quad \left. + 2(3\alpha - 2\beta + 2\lambda + \sigma) \frac{a}{r} - 3\alpha + 2\beta - 2\lambda \right], \\ T &= \mu 2\lambda \frac{\sqrt{\gamma m} \sqrt{p}}{r^3} \dot{r} = \mu 2\lambda \frac{n^2 a^3}{r^3} e \sin V, \\ W &= 0. \end{aligned}$$

Поэтому из уравнений (27) гл. 1 для оскулирующих элементов следует

$$i = \text{const}, \quad \Omega = \text{const},$$

а дифференциальные уравнения для возмущений остальных элементов будут:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \mu \frac{2na^2 e \sin V}{r^2 \sqrt{1-e^2}} \left[-3\alpha \frac{pa}{r^2} + \right. \\ &\quad \left. + 2(3\alpha - 2\beta + 2\lambda + \sigma) \frac{a}{r} - 3\alpha + 2\beta - 2\lambda \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \mu \frac{na\sqrt{1-e^2}}{r^2} \sin V \left[-3\alpha \frac{pa}{r^2} + \right. \\ &\quad \left. + 2(3\alpha - 2\beta + 2\lambda + \sigma) \frac{a}{r} - 3\alpha + 2\beta - 4\lambda \right], \\ \frac{d\pi}{dt} &= \mu \frac{na\sqrt{1-e^2}}{r^2 e^2} \left[3\alpha \frac{p^2 a}{r^3} + (-9\alpha + 4\beta - 4\lambda - 2\sigma) \frac{pa}{r^2} + \right. \\ &\quad \left. + (3\alpha - 2\beta) \frac{p}{r} + 2(3\alpha - 2\beta + 4\lambda + \sigma) \frac{a}{r} - 3\alpha + 2\beta - 4\lambda \right], \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= (1 - \sqrt{1-e^2}) \frac{d\pi}{dt} + \\ &\quad + \mu \frac{2na}{r^2} \left[(3\alpha + 2\lambda) \frac{p}{r} + 2(-3\alpha + 2\beta - 2\lambda - \sigma) + \right. \\ &\quad \left. + (3\alpha - 2\beta + 2\lambda) \frac{r}{a} \right]. \end{aligned}$$

Подставляя в правые части этих уравнений значения оскулирующих элементов в начальный момент времени и интегрируя, находим возмущения первого порядка:

$$\begin{aligned} \delta a &= \frac{\mu e}{(1-e^2)^2} \left\{ \left[4(\beta - \lambda - \sigma) + e^2 \left(-\frac{9}{2}\alpha + 4\beta - 4\lambda \right) \right] \cos V + \right. \\ &\quad \left. + (2\beta - 2\lambda - \sigma) e \cos 2V + \frac{1}{2} \alpha e^2 \cos 3V \right\} \Big|_{t_0}^t, \quad (79) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta e &= \frac{\mu}{a(1-e^2)} \left\{ \left[2(\beta - \sigma) + e^2 \left(-\frac{9}{4}\alpha + 2\beta - 4\lambda \right) \right] \cos V + \right. \\ &\quad \left. + \left(\beta - \lambda - \frac{1}{2}\sigma \right) e \cos 2V + \frac{1}{4} \alpha e^2 \cos 3V \right\} \Big|_{t_0}^t, \quad (80) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \pi &= \frac{\mu}{a(1-e^2)} \left\{ (2\beta + 2\lambda - \sigma) V + \right. \\ &\quad \left. + \left[2 \frac{\beta - \sigma}{e} + \left(-\frac{3}{4}\alpha + 2\beta \right) e \right] \sin V + \right. \\ &\quad \left. + \left(\beta - \lambda - \frac{1}{2}\sigma \right) \sin 2V + \frac{1}{4} \alpha e \sin 3V \right\} \Big|_{t_0}^t, \quad (81) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon &= (1 - \sqrt{1-e^2}) \delta \pi + \frac{\mu}{a\sqrt{1-e^2}} [2(3\alpha - 2\beta + 2\lambda) \times \\ &\quad \times \sqrt{1-e^2} E + 2(-3\alpha + 4\beta - 2\lambda - 2\sigma) V + \\ &\quad + 2(3\alpha + 2\lambda) e \sin V] \Big|_{t_0}^t. \quad (82) \end{aligned}$$

Переписав далее δa в виде

$$\delta a = \frac{2\mu}{(1-e^2)^2} \left[\alpha \left(\frac{P}{r} \right)^3 + (-3\alpha + 2\beta - 2\lambda - \sigma) \left(\frac{P}{r} \right)^2 + \right. \\ \left. + (3\alpha - 2\beta + 2\lambda)(1-e^2) \frac{P}{r} - \alpha + \sigma + \right. \\ \left. + (3\alpha - 3\beta + 3\lambda + \frac{1}{2}\sigma) e^2 \right] \Big|_{t_0}^t,$$

находим

$$\int_{t_0}^t \delta n dt = 3 \frac{\mu}{a} \left\{ (-3\alpha + 2\beta - 2\lambda) E + (2\alpha - 2\beta + 2\lambda + \sigma) \times \right. \\ \times \frac{V}{\sqrt{1-e^2}} - \alpha \frac{e \sin V}{\sqrt{1-e^2}} + \left[\alpha(1-e^2) \left(\frac{a}{r_0} \right)^3 + \right. \\ \left. + (-3\alpha + 2\beta - 2\lambda - \sigma) \left(\frac{a}{r_0} \right)^2 + (3\alpha - 2\beta + 2\lambda) \frac{a}{r_0} \right] M \Big\} \Big|_{t_0}^t, \quad (83)$$

где нулевым индексом отмечено начальное значение. Приращение средней долготы составляет

$$\Delta \lambda = n(t - t_0) + \delta \lambda, \quad \delta \lambda = \int_{t_0}^t \delta n dt + \delta \varepsilon$$

и за один оборот будет

$$[\delta \lambda]_{V_0}^{V_0+2\pi} = [\delta \pi]_{V_0}^{V_0+2\pi} + 2\pi \frac{\mu}{a} \left[-3\alpha + 2\beta - 2\lambda + \right. \\ \left. + 3(3\alpha - 2\beta + 2\lambda) \frac{a}{r_0} + 3(-3\alpha + 2\beta - 2\lambda - \sigma) \left(\frac{a}{r_0} \right)^2 + \right. \\ \left. + 3\alpha(1-e^2) \left(\frac{a}{r_0} \right)^3 \right]. \quad (84)$$

Из уравнения Кеплера следует, что аномалистический период, при котором начальные значения V и E возрастают на 2π , определяется выражением

$$T_1 = \frac{2\pi}{n} + \frac{1}{n} (-[\delta \lambda]_{V_0}^{V_0+2\pi} + [\delta \pi]_{V_0}^{V_0+2\pi})$$

или

$$T_1 = \frac{2\pi}{n} \left\{ 1 + \frac{\mu}{a} \left[3\alpha - 2\beta + 2\lambda + 3(-3\alpha + 2\beta - 2\lambda) \frac{a}{r_0} + \right. \right. \\ \left. \left. + 3(3\alpha - 2\beta + 2\lambda + \sigma) \left(\frac{a}{r_0} \right)^2 - 3\alpha(1-e^2) \left(\frac{a}{r_0} \right)^3 \right] \right\}. \quad (85)$$

Сидерический период, при котором начальное значение средней долготы возрастает на 2π , будет

$$T'_2 = \frac{2\pi}{n} - \frac{1}{n} [\delta\lambda]_{V_0}^{V_0+2\pi}$$

или

$$T'_2 = \frac{2\pi}{n} \left\{ 1 + \frac{\mu}{a} \left[\frac{3\alpha - 4\beta + \sigma + (-3\alpha + 2\beta - 2\lambda) e^2}{1 - e^2} + 3(-3\alpha + 2\beta - 2\lambda) \frac{a}{r_0} + 3(3\alpha - 2\beta + 2\lambda + \sigma) \left(\frac{a}{r_0} \right)^2 - 3\alpha(1 - e^2) \left(\frac{a}{r_0} \right)^3 \right] \right\}. \quad (86)$$

Выражения (85) и (86) при релятивистских значениях (77) отличаются по форме от (67) и (68) со значениями (43). Это связано с тем, что в (85) и (86) фигурируют значения $a = a_0$, $e = e_0$ оскулирующих элементов в начальный момент времени, в то время как в (67) и (68) величины $a = a'$, $e = e'$ являются постоянными, характеризующими размер и форму орбиты. Если a_1 , e_1 и a_2 , e_2 — значения оскулирующих элементов в перигентре и апоцентре, то

$$\begin{aligned} 2a' &= a_2(1 + e_2) + a_1(1 - e_1), \\ 2a'e' &= a_2(1 + e_2) - a_1(1 - e_1). \end{aligned}$$

Выразив при помощи (79), (80) a_1 , a_2 , e_1 , e_2 , а следовательно, и a' , e' через начальные значения оскулирующих элементов, можно убедиться в полной эквивалентности формул (67), (68) и (85), (86).

Как видно из (81), смещение долготы перигентра за один оборот составляет

$$\delta\pi = \frac{2\pi\mu}{a(1 - e^2)} (2\beta + 2\lambda - \sigma). \quad (87)$$

При значениях (77) отсюда вытекает прежняя формула шварцшильдовского смещения перигентра (64).

Уравнения движения частицы с возмущающей силой (76) могут быть записаны в лагранжевом виде с функцией Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{\gamma m}{r} + \frac{2\alpha - 2\beta + \lambda}{8c^2} \dot{r}^4 + \frac{\mu}{r} \left[\left(\beta + \frac{1}{2} \lambda - \sigma \right) \frac{\gamma m}{r} + \left(-\alpha + \beta + \frac{1}{2} \lambda \right) \dot{r}^2 + \alpha \frac{(r\dot{r})^2}{r^2} \right]. \quad (88)$$

Формулы (79)—(83) дают возмущения оскулирующих элементов. Эти же выражения можно было бы получить на основе уравнений Лагранжа для контактных элементов (уравнения (38) гл. 1).

В лагранжиан (88) входят четыре произвольных числовых параметра. Если три из них связать соотношением

$$2\alpha - 2\beta + \lambda = 1, \quad (89)$$

автоматически выполняющимся при значениях (77), то этому лагранжиану будет соответствовать метрическая форма с тремя произвольными параметрами α , β , σ :

$$\begin{aligned} ds^2 = & \left[1 - \frac{2\mu}{r} + 2(\alpha - 2\beta + \sigma) \frac{\mu^2}{r^2} \right] c^2 dt^2 - \\ & - \left[1 + 2(-\alpha + 2\beta) \frac{\mu}{r} \right] dr^2 - \\ & - r^2 \left[1 + 4(-\alpha + \beta) \frac{\mu}{r} \right] (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (90) \end{aligned}$$

Метрика задачи Шварцшильда общей теории относительности (38) получается отсюда при значениях β и σ , удовлетворяющих (77). Как уже указывалось, частные виды метрики (90) возникают в различных неэйнштейновских теориях тяготения. Интересно отметить, что все метрики, параметры которых удовлетворяют соотношению

$$-4\alpha + 6\beta - \sigma = 1,$$

приводят к тому же вековому движению перицентра, что и общая теория относительности. Напротив, в полях тяготения, определяемых метриками (90) с дополнительным соотношением

$$-4\alpha + 6\beta - \sigma = -2,$$

вековое смещение перицентра вообще отсутствует.

Метрические формы (40) и (90) полностью эквивалентны друг другу. Постоянные, входящие в эти метрики, связаны между собой соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} A = 2(-\alpha + 2\beta), & \quad \alpha = \frac{1}{2}(A - B), \\ B = 4(\beta - \alpha), & \quad \beta = \frac{1}{4}(2A - B), \\ K = 2(\alpha - 2\beta + \sigma), & \quad \sigma = \frac{1}{2}(A + K). \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

§ 4. Распространение света

Геодезический вариационный принцип для постоянного гравитационного поля приводит к задаче построения геодезических в трехмерном пространстве. Действительно, запишем этот принцип ((96) гл. 2) в виде

$$\delta \int \sqrt{f} dx^0 = 0, \quad (92)$$

где

$$f = g_{00} + 2g_{0i} \frac{dx^i}{dx^0} + g_{ij} \frac{dx^i}{dx^0} \frac{dx^j}{dx^0}.$$

Так как f не зависит явно от x^0 , то существует интеграл

$$\sqrt{f} - \frac{\partial \sqrt{f}}{\partial \frac{dx^i}{dx^0}} \frac{dx^i}{dx^0} = \frac{1}{\sqrt{h}}, \quad h = \text{const}$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{f}} \left(g_{00} + g_{0i} \frac{dx^i}{dx^0} \right) = \frac{1}{\sqrt{h}}. \quad (93)$$

Величину f можно представить в виде

$$f = \frac{1}{g_{00}} \left(g_{00} + g_{0i} \frac{dx^i}{dx^0} \right)^2 - \left(\frac{dl}{dx^0} \right)^2, \quad (94)$$

где dl , как и в § 3 гл. 4, означает элемент пространственного расстояния

$$dl^2 = \left(\frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} - g_{ij} \right) dx^i dx^j.$$

Поэтому из (93) следует формула, выражающая dx^0 через дифференциалы dx^i :

$$g_{00} dx^0 + g_{0i} dx^i = \frac{\sqrt{g_{00}} dl}{\sqrt{1 - hg_{00}}}. \quad (95)$$

Комбинация (94) и (95) дает

$$\sqrt{f} dx^0 = \frac{\sqrt{hg_{00}}}{\sqrt{1 - hg_{00}}} dl. \quad (96)$$

Рассматривая траектории с фиксированным значением h , перепишем вариационный принцип (92) в виде

$$\delta \int \left(\frac{1}{\sqrt{h}} - \sqrt{f} \right) dx^0 = 0 \quad (97)$$

с произвольными вариациями x^0 на концах интервала интегрирования. В справедливости перехода от (92) к (97) нетрудно убедиться, если принять во внимание основную формулу вариационного исчисления

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') dx = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y dx + \left(f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta x \Big|_{x_0}^{x_1} + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_0}^{x_1}.$$

В данном случае третий член этой формулы обращается в нуль благодаря исчезновению вариаций пространственных координат на концах, второй член равен нулю в силу существования первого интеграла, а первый член приводит к уравнениям Лагранжа с тем же лагранжианом, что и при выводе из вариационного принципа (92). Исключая из (97) dx^0 при помощи (95) и (96), находим

$$\left(\frac{1}{\sqrt{h}} - \sqrt{f} \right) dx^0 = \frac{1}{\sqrt{h}} \left(\frac{\sqrt{1 - hg_{00}}}{\sqrt{g_{00}}} dl - \frac{g_{0i}}{g_{00}} dx^i \right),$$

так что окончательно геодезический вариационный принцип для постоянного поля записывается в виде

$$\delta \int \left(\frac{\sqrt{1 - hg_{00}}}{\sqrt{g_{00}}} dl - \frac{g_{0i}}{g_{00}} dx^i \right) = 0. \quad (98)$$

После определения траектории связь со временем определяется квадратурой (95).

Этот принцип особенно удобен для изучения движения света. В этом случае $h = 0$ (поскольку $f = 0$) и сопоставление (98) с (95) показывает, что распространение света происходит в соответствии с принципом Ферма (принцип наикратчайшего времени)

$$\delta \int dx^0 = 0. \quad (99)$$

Для статического сферически симметричного поля с метрикой (40) этот принцип принимает вид

$$\delta \int \frac{dl}{\sqrt{p(r)}} = 0, \quad (100)$$

где

$$dl^2 = \left\{ \delta_{ij} + \frac{\mu}{r} \left[B\delta_{ij} + (A - B) \frac{x^i x^j}{r^2} \right] \right\} dx^i dx^j,$$

а в $p(r)$ достаточно учесть лишь член порядка μ/r :

$$p(r) = 1 - \frac{2\mu}{r}.$$

Подобно тому, как в § 8 гл. 2 был осуществлен переход от вариационного принципа (96) к (101), перепишем (100) в рациональной форме, приняв за канонический параметр время t :

$$\delta \int \frac{1}{p(r)} \left(\frac{dl}{dt} \right)^2 dt = 0. \quad (101)$$

Для статического поля время t является каноническим параметром, так как в этом случае уравнения, соответствующие вариационному принципу (101) гл. 2, допускают первый интеграл

$$g_{00} \frac{dx^0}{d\lambda} = \text{const},$$

откуда следует, что параметры x^0 и λ связаны линейной зависимостью и, следовательно, эквивалентны друг другу. Функция Лагранжа для вариационного принципа (101) будет

$$L = \frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{\mu}{r} \left[\left(1 + \frac{1}{2} B \right) \dot{r}^2 + \frac{1}{2} (A - B) \frac{(r\dot{r})^2}{r^3} \right], \quad (102)$$

а соответствующие уравнения распространения света в прямоугольных координатах имеют вид

$$\ddot{r} = \mu \left[\left(\frac{1}{2} B - A - 1 \right) \frac{\dot{r}^2}{r^3} r + \frac{3}{2} (A - B) \frac{(r\dot{r})^2}{r^5} r + \right. \\ \left. + (B + 2) \frac{(r\dot{r})}{r^3} \dot{r} \right]. \quad (103)$$

Общее решение этих уравнений можно записать как

$$\begin{aligned} \dot{r}(t) = cn + \frac{1}{2} c\mu \left\{ r_0 \left[\frac{A+2}{r_0^2 \sin^2 \psi} - (A+2) \frac{r_0 \cos \psi + c(t-t_0)}{rr_0^2 \sin^2 \psi} - \right. \right. \\ \left. \left. - (A-B) \frac{r_0 \cos \psi + c(t-t_0)}{r^3} \right] + n \left[- (A+2) \frac{\cos \psi}{r_0 \sin^2 \psi} - \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \frac{A+2}{r} + (A+2) \frac{r_0 + c(t-t_0) \cos \psi}{rr_0 \sin^2 \psi} + \right. \right. \\ \left. \left. + (A-B) r_0 \frac{r_0 + c(t-t_0) \cos \psi}{r^3} \right] \right\} \quad (104) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} r(t) = r_0 + c(t-t_0)n + \frac{1}{2} \mu \left\{ r_0 \left[(A-B) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + (A+2) \frac{r_0 - r + c(t-t_0)}{r_0^2 \sin^2 \psi} \right] + n \left[(A+2) \frac{r-r_0-c(t-t_0)}{r_0 \sin^2 \psi} \cos \psi + \right. \right. \\ \left. \left. + (A-B) \frac{c(t-t_0)}{r} - (A+2) \ln \frac{r + r_0 \cos \psi + c(t-t_0)}{(1 + \cos \psi) r_0} \right] \right\}. \quad (105) \end{aligned}$$

В качестве произвольных постоянных здесь приняты компоненты радиуса-вектора в начальный момент времени и компоненты скорости света на бесконечно удаленном расстоянии от центрального тела (чему соответствует бесконечно большое значение времени). Таким образом,

$$r(t_0) = r_0, \quad \dot{r}(\infty) = cn, \quad n^2 = 1 \quad (106)$$

и угол между r_0 и n обозначен в (104) и (105) через ψ :

$$r_0 n = r_0 \cos \psi. \quad (107)$$

В релятивистских членах в (104) и (105) под r нужно подразумевать ньютоново значение

$$r^2 = r_0^2 + 2c(t-t_0)r_0 \cos \psi + c^2(t-t_0)^2. \quad (108)$$

Из (104) следует, что модуль скорости света в произвольный момент времени будет

$$\dot{r}^2(t) = c^2 \left\{ 1 + \frac{\mu}{r} \left[-A - 2 + (A-B) \frac{r_0^2 \sin^2 \psi}{r^2} \right] \right\}. \quad (109)$$

В соответствии с условием (106) на бесконечно большом

расстоянии от центрального тела скорость света принимает постоянное значение c . Однако измеряемая скорость света в собственном времени всегда равна c , как это следует из формулы (55) гл. 4 и условия $ds^2 = 0$.

§ 5. Эффекты, связанные с распространением света

Рассмотрим здесь некоторые эффекты, связанные с распространением света в поле с метрикой (40).

1. Отклонение лучей света при прохождении вблизи центрального тела. Примем за плоскость движения светового луча плоскость $x^3 = 0$ или $\theta = \pi/2$.

Пусть при $t = t_0$ траектория луча света пересекает ось $x^1 = x$ на расстоянии $r_0 = \rho$ от начала координат, переходя от положительных значений координаты $x^2 = y$ к отрицательным (рис. 5). Пусть при $t = \infty$ направление распространения луча составляет с положительным направлением оси x угол $\psi = 90^\circ + \delta$, где δ — малый угол, так что величинами второго и более высокого порядка относительно δ , а также произведением μ на δ можно пренебречь. Тогда в (105) надо подставить значения

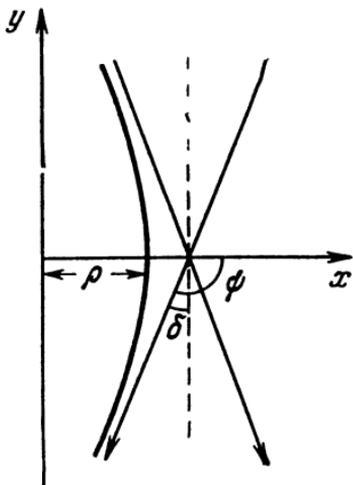


Рис. 5.

$x^1(t_0) = \rho$, $x^2(t_0) = 0$, $n^1 = -\sin \delta$, $n^2 = \cos \delta \approx 1$, откуда

$$x = \rho - c(t - t_0) \sin \delta + \frac{1}{2} \mu \rho \left[(A - B) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho} \right) + (A + 2) \frac{\rho - r + c(t - t_0)}{\rho^2} \right],$$

$$y = c(t - t_0) + \frac{1}{2} \mu \left[(A - B) \frac{c(t - t_0)}{r} - (A + 2) \ln \frac{r + c(t - t_0)}{\rho} \right].$$

Исключая здесь $t - t_0$, получаем уравнение траектории световой частицы в форме

$$x = \rho + \left(1 + \frac{1}{2} B\right) \mu - \left(1 + \frac{1}{2} A\right) \mu \frac{r}{\rho} + \frac{1}{2} (A - B) \mu \frac{r}{r} + y \left[\left(1 + \frac{1}{2} A\right) \frac{\mu}{\rho} - \sin \delta \right], \quad (110)$$

где в релятивистских членах можно считать

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Выберем теперь ось x так, чтобы траектория луча света пересекала ее под прямым углом. Это означает, что должно быть

$$\left. \frac{\partial x}{\partial y} \right|_{y=0} = \left(1 + \frac{1}{2} A\right) \frac{\mu}{\rho} - \sin \delta = 0.$$

При таком выборе оси x последний член в (110) будет отсутствовать. Это уравнение является уравнением гиперболы с асимптотами

$$x = \rho + \left(1 + \frac{1}{2} B\right) \mu \mp \left(1 + \frac{1}{2} A\right) \frac{\mu}{\rho} y.$$

Угол между асимптотами, равный

$$2\delta = (A + 2) \frac{\mu}{\rho}, \quad (111)$$

определяет изменение направления луча света при прохождении вблизи центрального тела. Для поля Шварцшильда общей теории относительности эта формула дает

$$2\delta = \frac{4\mu}{\rho}. \quad (112)$$

2. Радиолокационный эффект. Скалярное умножение обеих частей (105) на n дает формулу для времени распространения светового луча между фиксированными точками t_0, r_0 и t, r :

$$c(t - t_0) = (r - r_0) n + \mu \Delta(t, t_0), \quad (113)$$

где

$$\Delta(t, t_0) = \left(1 + \frac{1}{2} A\right) \ln \frac{r + rn}{r_0 + r_0 n} + \frac{1}{2} (A - B) \left(\frac{r_0}{r_0} - \frac{r}{r}\right) n. \quad (114)$$

Обозначая коэффициент при μ в (105) через q , перепишем это уравнение в виде

$$r = r_0 + c(t - t_0) n + \mu q. \quad (115)$$

После переноса r_0 и μq в левую часть и возведения уравнения в квадрат имеем

$$c^2 (t - t_0)^2 = (r - r_0)^2 - 2\mu (r - r_0) q. \quad (116)$$

Из (115) и (116) находим

$$n = \frac{1}{|r - r_0|} \left\{ r - r_0 + \mu \left[\frac{((r - r_0) q)}{(r - r_0)^2} (r - r_0) - q \right] \right\}. \quad (117)$$

Подставляя это значение в (113) и обозначая

$$R(t, t_0) = |r(t) - r(t_0)|, \quad (118)$$

перепишем (113) в виде

$$c(t - t_0) = R(t, t_0) + \mu \Delta(t, t_0) \quad (119)$$

со значением

$$\Delta(t, t_0) = \left(1 + \frac{1}{2} A\right) \ln \frac{r + r_0 + R(t, t_0)}{r + r_0 - R(t, t_0)} + \frac{1}{4} (A - B) \frac{(r + r_0) [r - r_0 + R(t, t_0)] [r - r_0 - R(t, t_0)]}{r r_0 R(t, t_0)}. \quad (120)$$

Формула (119) используется для вычисления времени распространения сигнала при радиолокации с Земли Меркурия или Венеры (Tausner, 1966). Пусть в момент $t = 0$ с земли E , занимающей в этот момент положение $r = r_E(0)$, испускается радиосигнал, достигающий положения планеты P $r = r_P(T)$ в момент $t = T$. Этот сигнал отражается и достигает в момент $t = T + T'$ положения

Земли $r = r_E(T + T')$. Для определения T и T' имеем два одностипных уравнения:

$$cT = F(T, 0), \quad (121)$$

$$cT' = F(T + T', T), \quad (122)$$

где через $F(t, t_0)$ обозначена правая часть выражения (119). Сначала последовательными итерациями из первого уравнения находится T :

$$cT_{k+1} = F(T_k, 0), \quad T_0 = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

затем из второго уравнения аналогичным путем находится T' :

$$cT'_{k+1} = F(T + T'_k, T), \quad T'_0 = 0, \\ (k = 0, 1, 2, \dots).$$

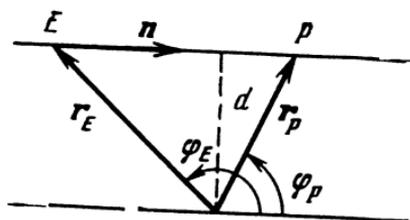


Рис. 6.

Приближенную оценку релятивистской поправки $\Delta(T, 0)$ на запаздывание сигнала легко получить на основании (114). Вводя в

рассмотрение минимальное расстояние d траектории радиосигнала от Солнца (рис. 6), имеем

$$\Delta(T, 0) = \left(1 + \frac{1}{2}A\right) \ln \frac{r_P \pm \sqrt{r_P^2 - d^2}}{r_E - \sqrt{r_E^2 - d^2}} + \\ + \frac{1}{2}(A - B) \left(- \frac{\sqrt{r_E^2 - d^2}}{r_E} \mp \frac{\sqrt{r_P^2 - d^2}}{r_P} \right). \quad (123)$$

Верхние и нижние знаки здесь берутся в зависимости от того, находятся ли Земля E и планета P по разные или по одну сторону от Солнца S . Наибольшего значения эта поправка достигает при положении P в верхнем соединении (Земля, Солнце и планета находятся на одной прямой, причем Земля и планета — по разные стороны от Солнца). В этом случае

$$\Delta(T, 0) \approx \left(1 + \frac{1}{2}A\right) \ln \frac{4r_E r_P}{d^2} - (A - B). \quad (124)$$

Для общей теории относительности эта формула принимает вид

$$\Delta(T, 0) \approx 2 \ln \frac{4r_E r_P}{d^2} - 2\alpha. \quad (125)$$

Для численной оценки важен только первый член этой формулы. Второй член, зависящий от выбора системы координат, после умножения на μ дает слишком малый вклад в релятивистскую поправку времени. К тому же этот член исчезает, если записать ньютонову часть уравнения (121) при помощи величин, не зависящих от системы координат. Действительно, это уравнение дает

$$cT = |r_P - r_E| + \mu \Delta(T, 0) \quad (126)$$

со значением (123). Однако расстояния r_E и r_P зависят от системы координат и непосредственно не измеряются. Допустим, что помимо радиолокационных используются и оптические наблюдения. Тогда периоды обращения T_P и T_E планеты и Земли можно считать известными. В момент радиолокации с Земли определяются геоцентрические долготы планеты и Солнца, а тем самым и углы $\varphi_P = \langle (r_P, n) \rangle$, $\varphi_E = \langle (r_E, n) \rangle$. Ограничиваясь для простоты случаем кругового движения, имеем на основании (48)

$$r_P = \left(\frac{\gamma m}{4\pi^2} T_P^2 \right)^{1/3} - \frac{1}{3} \left(K + \frac{1}{2} B \right) \mu \quad (127)$$

и аналогично для r_E . Записывая расстояние между Землей и планетой в виде

$$|r_P - r_E| = r_P \cos \varphi_P - r_E \cos \varphi_E,$$

получаем

$$\begin{aligned} cT = & \left(\frac{\gamma m}{4\pi^2} \right)^{1/3} (T_P^{2/3} \cos \varphi_P - T_E^{2/3} \cos \varphi_E) + \\ & + \mu \left[\left(1 + \frac{1}{2} A \right) \ln \frac{r_P \pm \sqrt{r_P^2 - d^2}}{r_E - \sqrt{r_E^2 - d^2}} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{2} A - \frac{1}{3} B + \frac{1}{3} K \right) (\cos \varphi_E - \cos \varphi_P) \right]. \quad (128) \end{aligned}$$

Для общей теории относительности коэффициенты этой формулы принимают значения

$$1 + \frac{1}{2} A = 2, \quad \frac{1}{2} A - \frac{1}{3} B + \frac{1}{3} K = 1,$$

т. е. зависимость от параметра α , определяющего выбор системы координат, исчезает. Однако необходимо отметить, что ньютонова часть уравнения (128) все еще не представлена в функции одних действительно измеряемых величин (неизмеряемым параметром в ней является отношение $\gamma m/c$). При радиолокации планет непосредственно измеряются такие величины, как синодический период, моменты соединений и элонгаций и т. п. При использовании оптических наблюдений к этому добавляются сидерические периоды обращения. Обработка наблюдений позволяет найти непосредственно неизмеряемые элементы орбит, гелиоцентрическую постоянную γm , скорость света c и рассчитать разницу во времени возвращения сигнала согласно ньютоновой механике и общей теории относительности. Расчет этой разницы для модели круговых компланарных движений в функции лишь реально измеряемых величин проведен в работах Шапиро (Shapiro, 1966a, b).

Поправка $\mu\Delta(T, 0)$ характеризует релятивистское запаздывание радиосигнала при его распространении от Земли к планете. Поправка $\mu\Delta(T + T', T)$ запаздывания сигнала на обратном пути к Земле приближенно имеет то же численное значение. Это следует из того, что аргумент логарифмической функции в (114) приблизительно одинаков при распространении радиосигнала в оба конца. Действительно,

$$(r_P + nr_P)(r_P - nr_P) = |r_P \times n|^2 = \frac{|r_P \times r_E|^2}{R^2} = d^2$$

и

$$(r_E + nr_E)(r_E - nr_E) = |r_E \times n|^2 = \frac{|r_P \times r_E|^2}{R^2} = d^2,$$

так что

$$\frac{r_P + nr_P}{r_E + nr_E} = \frac{r_E - nr_E}{r_P - nr_P}.$$

До сих пор все рассмотрение радиолокационного эффекта велось в координатном времени t . После нахождения времени распространения сигнала T нужно выразить этот промежуток в собственном времени наблюдательной радиолокационной станции на Земле

$$\mathcal{T} = \int_0^T \left(1 - \frac{2\mu}{r_E} - \frac{v_E^2}{c^2} \right)^{1/2} dt, \quad (129)$$

где

$$r_E = r_C + \rho, \quad v_E = v_C + [\omega, \rho],$$

причем r_C , v_C — радиус-вектор и скорость центра масс Земли, ω — угловая скорость вращения Земли, ρ — геоцентрический радиус-вектор радиолокационной станции. Как показано в цитированной выше работе Тауснера, подынтегральную функцию в (129) можно при практических вычислениях заменить ее значением в начальной точке и тогда

$$\mathcal{T} = \left[1 - \frac{\mu}{r_E(0)} - \frac{v_E^2(0)}{2c^2} \right] T. \quad (130)$$

3. Гравитационное смещение спектральных линий и эффект Доплера. При точном расчете времени распространения сигнала при радиолокации планет необходимо учитывать и эффект Доплера. В общих чертах учет эффекта Доплера для произвольного гравитационного поля может быть произведен следующим образом (Tolman, 1934, § 116).

Пусть заданы движения источника света $x_1^i = x_1^i(t)$ и приемника $x_2^i = x_2^i(t)$. Пусть свет испускается в момент t_1 и достигает приемника в момент t_2 . По предыдущим формулам можно рассчитать зависимость $t_2 = f(t_1)$ для конкретных движений источника и приемника света. Пусть свет испускается с периодом δt_1 . Соответствующий интервал собственного времени источника света будет

$$\delta \tau_1 = \left[g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dx^0} \frac{dx^\beta}{dx^0} \right]_{x_1^i(t_1)}^{1/2} \delta t_1. \quad (131)$$

Приемник света воспринимает эти сигналы с периодом δt_2 в координатном времени t или с периодом

$$\delta\tau_2 = \left[g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dx^0} \frac{dx^\beta}{dx^0} \right]_{x_2^i(t_2)}^{1/2} \delta t_2 \quad (132)$$

в собственном времени приемника. При этом

$$\delta t_2 = \frac{df(t_1)}{dt_1} \delta t_1.$$

Но интервал $\delta\tau_1$ пропорционален измеряемой на источнике длине волны λ_1 , а интервал $\delta\tau_2$ пропорционален длине волны λ_2 , измеряемой на приемнике света. Поэтому

$$\frac{\lambda_2(t_2)}{\lambda_1(t_1)} = \frac{\left[g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dx^0} \frac{dx^\beta}{dx^0} \right]_{x_2^i(t_2)}^{1/2} df(t_1)}{\left[g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dx^0} \frac{dx^\beta}{dx^0} \right]_{x_1^i(t_1)}^{1/2} dt_1}. \quad (133)$$

Для частот ν_1 и ν_2 имеем обратное соотношение. Использование этой общей формулы позволяет получать решение в конкретных частных случаях.

Если и источник, и приемник света покоятся в постоянном поле, то $df(t_1)/dt_1 = 1$ (что ясно, например, из (113)) и из (133) вытекает формула гравитационного спектрального смещения

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{g_{00}(1)}{g_{00}(2)}} \quad (134)$$

или в случае поля Шварцшильда

$$\frac{\delta\nu}{\nu} = \frac{\mu}{r_2} - \frac{\mu}{r_1}, \quad (135)$$

где $\nu = \nu_1$ и $\delta\nu = \nu_2 - \nu_1$. Если $r_1 < r_2$, то $\delta\nu$ отрицательно и выражение (135) дает известное гравитационное красное смещение. В общем случае это смещение входит составной частью в доплеровское смещение (133). Например, если приемник света неподвижен, то из (113) следует

$$\frac{df(t_1)}{dt_1} = 1 - \frac{v_r}{c} + \dots,$$

где v_r — радиальная скорость источника света. Тогда (133) дает

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{1 - \frac{v_r}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}, \quad (136)$$

что обобщает формулу эффекта Доплера специальной теории относительности.

Подробное рассмотрение эффекта Доплера и явления аберрации в поле Шварцшильда содержится в неоднократно цитированной работе Тауснера (Tausner, 1966) и книге Синга (Synge, 1960).

§ 6. Интерпретация координат в задаче Шварцшильда

Возвратимся снова к метрике поля Шварцшильда (38). В любой задаче релятивистской небесной механики после нахождения решения релятивистских уравнений движения встает вопрос о сравнении полученного решения с наблюдениями и определении соответствующих постоянных интегрирования. При этом приходится учитывать, что те или иные употребляемые координаты четырехмерного пространства событий общей теории относительности не имеют однозначно определенного физического смысла, как в ньютоновой механике. Например, в поле Шварцшильда (38) углы θ и φ обладают всеми свойствами, что и соответствующие величины в ньютоновой задаче, но этого нельзя сказать о t и r . Общий метод, как уже указывалось, состоит в том, что, получив решение в некоторой определенной координатной системе, надо в этой же системе провести сравнение с наблюдениями, т. е. с фактически измеряемыми величинами. Для этой цели и служат законы распространения света, найденные выше.

В литературе неоднократно ставился вопрос о том, какие координаты наиболее «объективны», т. е. наиболее близки к галилеевым координатам специальной теории относительности. Нередко такая роль приписывалась гармоническим координатам. В 1960 году Инфельд и Плебаньский в своей монографии предложили простой способ для объективного (т. е. не зависящего от системы координат) описания движения в задаче Шварцшильда.

Этот способ основан на отображении с помощью световых лучей событий в используемой римановой системе на галилееву систему в бесконечности. Каждому событию $t_0 = \tau$, $x_0^i = \xi^i$, зависящему от конкретного вида метрики (38) (т. е. от α), ставится в соответствие объективное изображение T , Ξ^i в галилеевой системе. Инфельд и Плебаньский провели исследование в координатной системе, практически совпадающей с гармонической ($\alpha = 0$). Интересно применить их метод к общему случаю и выяснить, есть ли у гармонической системы в этом отношении какие-либо преимущества (Брумберг, 1968б).

Проекция события τ , ξ^i на удаленную галилееву систему задается значением $r(\infty)$ при $\psi = \pi/2$, т. е. на основании (105) и (42)

$$\Xi = r(\infty) \Big|_{\psi=\frac{\pi}{2}} = \xi \left[1 + (2 - \alpha) \frac{\mu}{\rho} \right] + \\ + n \left[c(t - \tau) + \mu\alpha - 2\mu \ln \frac{2c(t - \tau)}{\rho} \right], \quad \rho = |\xi|. \quad (137)$$

Пусть плоскость движения пробной частицы совпадает с плоскостью $x^3 = 0$ и это движение наблюдается с удаленной плоскости $\Xi^3 = \text{const}$. Тогда $\xi^3 = 0$, $n^1 = n^2 = 0$, $n^3 = 1$ и

$$\Xi^1 = \xi^1 \left[1 + (2 - \alpha) \frac{\mu}{\rho} \right], \\ \Xi^2 = \xi^2 \left[1 + (2 - \alpha) \frac{\mu}{\rho} \right], \\ \Xi^3 = c(T - \tau) + \mu \left[\alpha - 2 \ln \frac{2c(T - \tau)}{\rho} \right].$$

Из последнего соотношения видно, что α не влияет на связь промежутков $\Delta T = T_2 - T_1$ и $\Delta \tau = \tau_2 - \tau_1$ между двумя событиями, и поэтому справедлив вывод Инфельда и Плебаньского $\Delta T \approx \Delta \tau$, означающий практическое совпадение ритма времени на объективной плоскости $\Xi^3 = \text{const}$ и на плоскости x^1, x^2 . Если от ξ^1, ξ^2 перейти к полярным координатам ρ, φ , то полярный угол φ независимо от α сохраняет свое значение при проекции на удаленную плоскость, а проекция R радиального расстояния ρ будет

$$R = \rho + (2 - \alpha) \mu. \quad (138)$$

Наиболее «объективными» по методу Инфельда и Плебаньского оказываются не стандартные координаты ($\alpha = 1$) и не гармонические или изотропные координаты ($\alpha = 0$), а координаты, введенные Пенлеве ($\alpha = 2$). К этому надо добавить, что в координатах Пенлеве формула (73) для аномалистического периода в собственном времени движущейся частицы совпадает с ньютоновой.

Однако вряд ли следует говорить о физических преимуществах тех или иных координат. Всякую конкретную небесномеханическую задачу можно решать в любых координатах (учитывая при этом возможности математического упрощения задачи в какой-либо определенной системе), но при окончательном сопоставлении с наблюдательными данными, выраженными в тех же координатах, должны получаться результаты, не зависящие от используемой системы.

§ 7. Геодезическая прецессия

В римановом пространстве вектор при параллельном переносе вдоль некоторого замкнутого контура не возвращается, вообще говоря, в первоначальное положение. В случае бесконечно малого контура изменение координат вектора задается формулой (111) гл. 2. Следуя методике, примененной в курсе Шази, найдем теперь изменение координат вектора при его параллельном переносе вдоль кругового решения задачи Шварцшильда. Само это явление изменения направления вектора носит название геодезической прецессии или прецессии Схоутена — не Ситтера.

Для общности проведем все выкладки в поле с метрикой (40). Получим еще раз круговые решения пробной частицы, движущейся в этом поле. Вместо φ введем переменную ψ по формуле

$$\varphi = \omega t + \psi, \quad (139)$$

где ω — постоянная. Подставляя в (40)

$$d\varphi = \omega dt + d\psi,$$

находим

$$ds^2 = \left[1 - \frac{2\mu}{r} + K \frac{\mu^2}{r^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + B \frac{\mu}{r} \right) r^2 \sin^2 \theta \right] c^2 dt^2 - \\ - 2\omega \left(1 + B \frac{\mu}{r} \right) r^2 \sin^2 \theta dt d\psi - \left(1 + A \frac{\mu}{r} \right) dr^2 - \\ - \left(1 + B \frac{\mu}{r} \right) r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta \cdot d\psi^2). \quad (140)$$

Таким образом, поле описывается теперь в координатах $(x^\mu) = (ct, r, \theta, \psi)$. Круговое решение означает выполнение трех условий $x^i = \text{const}$. Из канонических уравнений геодезической линии следует, что на круговом решении символы Кристоффеля Γ_{00}^i должны обратиться в нуль, а это приводит к условиям

$$\frac{\partial g_{00}}{\partial r} = \frac{\partial g_{00}}{\partial \theta} = 0.$$

Как нетрудно видеть, этим условиям можно удовлетворить, полагая

$$r = a, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \psi = \text{const} \quad (141)$$

и $\omega = n$, где n определяется формулой (48).

Для упрощения выкладок перейдем далее к таким координатам, в которых на круговом решении смешанная компонента $g_{03} = 0$. Для этого вместо t введем переменную u при помощи соотношения

$$ct = u + C\psi, \quad (142)$$

где C — постоянная, определяемая ниже. Подставляя в (140)

$$c dt = du + C d\psi,$$

находим

$$ds^2 = \left[1 - \frac{2\mu}{r} + K \frac{\mu^2}{r^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + B \frac{\mu}{r} \right) r^2 \sin^2 \theta \right] du^2 + \\ + 2 \left\{ C \left[1 - \frac{2\mu}{r} + K \frac{\mu^2}{r^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + B \frac{\mu}{r} \right) r^2 \sin^2 \theta \right] - \right. \\ - \frac{\omega}{c} \left(1 + B \frac{\mu}{r} \right) r^2 \sin^2 \theta \left. \right\} du d\psi - \left(1 + A \frac{\mu}{r} \right) dr^2 - \\ - \left(1 + B \frac{\mu}{r} \right) r^2 d\theta^2 - \left\{ \left(1 + 2C \frac{\omega}{c} \right) \left(1 + B \frac{\mu}{r} \right) r^2 \sin^2 \theta - \right. \\ - C^2 \left[1 - \frac{2\mu}{r} + K \frac{\mu^2}{r^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + B \frac{\mu}{r} \right) r^2 \sin^2 \theta \right] \left. \right\} d\psi^2. \quad (143)$$

Теперь поле описывается следующими координатами: $(x_\mu) = (u, r, \theta, \psi)$. Из требования $g_{03} = 0$ на круговом решении вытекает

$$C = \frac{\omega a^2}{c} \frac{1 + B \frac{\mu}{a}}{1 - \frac{3\mu}{a} + \left(2K - \frac{1}{2} B\right) \frac{\mu^2}{a^2}} = \frac{\omega a^2}{c} \left[1 + (B + 3) \frac{\mu}{a} + \dots\right]. \quad (144)$$

При параллельном переносе некоторого вектора X^μ вдоль круговой орбиты его компоненты меняются по закону

$$dX^\mu = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu X^\alpha dx^\beta = -\Gamma_{\alpha 0}^\mu X^\alpha du = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial g_{0\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{g_{0\nu}}{\partial x^\alpha}\right) X^\alpha du,$$

где значения $g_{\mu\nu}$ и их производных берутся для кругового решения. Поэтому

$$\begin{aligned} dX^0 &= 0, & dX^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{03}}{\partial r} X^3 du, \\ dX^2 &= 0, & dX^3 &= -\frac{1}{2} g^{33} \frac{\partial g_{03}}{\partial r} X^1 du. \end{aligned}$$

Выберем теперь вектор X^μ таким, чтобы компоненты X^0 и X^2 в начальный момент были бы равны нулю. Тогда эти составляющие будут равны нулю постоянно. Учитывая, что здесь $g^{11} = 1/g_{11}$, $g^{33} = 1/g_{33}$, для компонент X^1 , X^3 получаем уравнения:

$$\left. \begin{aligned} d(\sqrt{-g_{11}} X^1) &= -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{03}}{\partial r} \frac{\sqrt{-g_{33}} X^3}{\sqrt{g_{11}g_{33}}} du, \\ d(\sqrt{-g_{33}} X^3) &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{03}}{\partial r} \frac{\sqrt{-g_{11}} X^1}{\sqrt{g_{11}g_{33}}} du. \end{aligned} \right\} \quad (145)$$

На круговом решении

$$\begin{aligned} g_{11} &= -\left(1 + A \frac{\mu}{a}\right), & g_{33} &= -a^2 \left[1 + (B + 1) \frac{\mu}{a}\right], \\ \frac{\partial g_{03}}{\partial r} &= -\frac{2\omega a}{c} \left(1 + \frac{1}{2} B \frac{\mu}{a}\right), \end{aligned}$$

и поэтому

$$\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{33}}} \frac{\partial g_{03}}{\partial r} = -\frac{2\omega}{c} \left[1 - \frac{1}{2} (A+1) \frac{\mu}{a} \right].$$

Обозначим теперь через x и y проекции вектора X^μ на радиус-вектор и на касательную к круговой орбите

$$x = \sqrt{-g_{11}} X^1, \quad y = \sqrt{-g_{33}} X^3.$$

Уравнения (145) дают

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{du} &= \frac{\omega}{c} \left[1 - \frac{1}{2} (A+1) \frac{\mu}{a} \right] y, \\ \frac{dy}{du} &= -\frac{\omega}{c} \left[1 - \frac{1}{2} (A+1) \frac{\mu}{a} \right] x, \end{aligned} \right\} \quad (146)$$

причем на круговой орбите $du = c dt$. Решение этих уравнений записывается в виде:

$$\left. \begin{aligned} x &= H \cos \left[\omega \left(1 - \frac{A+1}{2a} \mu \right) (t - t_0) \right], \\ y &= -H \sin \left[\omega \left(1 - \frac{A+1}{2a} \mu \right) (t - t_0) \right], \end{aligned} \right\} \quad (147)$$

где H и t_0 — произвольные постоянные. Через один оборот $2\pi/\omega$ по круговой орбите вектор \overline{PQ} займет положение

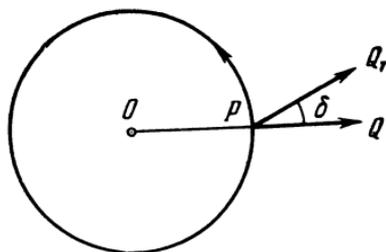


Рис. 7.

\overline{PQ}_1 (рис. 7), и малый угол δ между этими векторами будет приближенно равен

$$\delta = \frac{(A+1) \pi \mu}{a}. \quad (148)$$

Для поля Шварцшильда общей теории относительности независимо от величины α имеем

$$\delta = \frac{3\pi\mu}{a}. \quad (149)$$

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ

§ 1. История вопроса

Как уже указывалось, в общей теории относительности известно фактически лишь одно строгое решение, представляющее интерес для релятивистской небесной механики — это решение Шварцшильда проблемы одного тела. Правда, сравнительно недавно Керру (Керг, 1963) удалось найти строгое решение, описывающее поле тяготения вращающегося шара. До этого времени поле вращающегося шара было известно лишь приближенно. Но метрика Керра также относится к задаче одного тела, хотя и более сложной по сравнению с задачей Шварцшильда.

Строгое решение уравнений поля и вид строгих уравнений движения задачи N тел, даже для $N = 2$, в общей теории относительности не известны. Для решения этой задачи приходится прибегать к приближенным методам и искать решение в виде рядов по степеням малых параметров. Сложность самой задачи такова, что пытаются найти лишь начальные члены этих рядов, совершенно не исследуя вопроса об их сходимости.

Возможны три основных типа разложений по малому параметру в общей теории относительности:

1. По степеням $\lambda = 1/c$ (фактически по степеням v^2/c^2 и U/c^2 , где v — характеристическая скорость тел, U — ньютонов потенциал), — случай медленных движений, типичный для тел Солнечной системы. При помощи этого типа разложения выполнено большинство работ по проблеме движения в общей теории относительности. За исходное приближение при этом принимается галилеева метрика, соответствующая случаю отсутствия масс.

2. k -метод или метод быстрых движений, когда разложение ведется по степеням переменной k , эквивалентной гравитационной постоянной γ . Но при этом за первое приближение в уравнениях движения принимается не кеплерово движение, как в методах первого типа,

а равномерное прямолинейное движение. Для тел Солнечной системы — это неудачное первое приближение (хотя даже в ньютоновой небесной механике строят так иногда решение задачи N тел на небольшом интервале времени). Поэтому для решения практических задач релятивистской небесной механики использование этого метода не представляется целесообразным.

3. В методах первого типа массы всех тел трактуются как имеющие один и тот же порядок величины. В Солнечной системе отношение массы всех планет к массе Солнца порядка 10^{-3} , и отсюда напрашивается идея методов третьего типа — за исходное приближение брать решение Шварцшильда для поля Солнца и искать решение по степеням отношения массы планет к массе Солнца, т. е. по тому же основному малому параметру, какой употребляется в планетных задачах ньютоновой небесной механики. Преимущество такого подхода — в более точном исследовании вклада членов, зависящих от отношения v/c , что важно для решения проблемы излучения. Действительно, в методах первого типа уравнения движения задачи N тел получены в общем случае лишь с точностью до членов порядка v^2/c^2 включительно, а излучение проявляется только в членах пятого порядка относительно v/c . К сожалению, методы третьего типа практически почти не разработаны. В частности, в работах Маса (Mas, 1966, 1967) составлены лишь уравнения в вариациях для решения Шварцшильда и сделаны первые применения к задаче двух и трех тел (однако при этом Мас пользовался и разложением по v/c , поэтому его окончательные результаты дают меньше, чем уравнения, полученные по первому способу).

В дальнейшем речь всюду будет идти лишь о методах первой группы.

К настоящему времени хорошо разработаны два основных пути вывода уравнений движения. Первый путь — это обобщение геодезического принципа. Если известен метрический тензор $g_{\mu\nu}$, то уравнения движения точки нулевой массы получаются из геодезического вариационного принципа. Учитывая надлежащим образом влияние тела на поле, в котором оно находится, этот принцип можно обобщить и применить к движению конечных масс. Именно таким методом де Ситтер еще в 1916 году (de Sitter,

1916) впервые получил релятивистские уравнения движения задачи N тел. Однако он допустил арифметические ошибки, вошедшие в последующий обзор Коттлера (Kottler, 1922) и книгу Шази (Chazy, 1928, 1930). Аналогичная ошибка позднее привела Леви-Чивита к неправильному выводу о вековом движении ньютонова центра инерции масс в задаче двух тел (Levi-Civita, 1937). Эта ошибка в уравнениях движения была исправлена Эддингтоном и Кларком в 1938 году (Eddington, Clark, 1938). Пользуясь геодезическим принципом, правильные уравнения движения задачи N тел нашли также позднее Леви-Чивита (Levi-Civita, 1950) и Бертотти (Bertotti, 1954).

Второй путь вывода уравнений движения — математически более совершенный. В общей теории относительности, в отличие от ньютоновой теории тяготения, уравнения движения гравитирующих масс — источников поля — содержатся в самих уравнениях поля, что было впервые доказано Эйнштейном и Громмером в 1927 году (Einstein, Grommer, 1927). Причина этого заключается в нелинейности уравнений поля и существовании четырех тождеств Бианки. В линейной, ньютоновой теории поля, определяемой линейным уравнением Пуассона, уравнения движения не связаны с уравнениями поля, уравнения поля имеют решение при произвольном движении масс, а уравнения движения постулируются отдельно. В общей теории относительности для разрешимости уравнений поля или для выполнения координатных условий должны накладываться определенные соотношения на координаты масс. Эти соотношения и представляют собой дифференциальные уравнения движения.

Впервые уравнения движения задачи N тел были выведены из уравнений поля Эйнштейном, Инфельдом и Гоффманом в 1938 году (Einstein, Infeld, Hoffman, 1938) и их метод — метод ЕИН — получил окончательное оформление в работе Эйнштейна и Инфельда (Einstein, Infeld, 1949). Отличительной чертой этого метода является использование уравнений поля для пустого пространства вне масс и трактовка масс как особых точек поля. Независимо и несколько позднее уравнения движения были выведены В. А. Фоком (1939) с использованием тензора масс протяженных тел. Окончательное оформление этого метода содержится в книге В. А. Фока (1955). Позже

были предложены и различные промежуточные методы, например метод Инфельда (Infeld, 1954, 1957), в котором используется тензор масс с δ -функциями и уравнения движения находятся из вариационного принципа.

Ниже будут рассмотрены два основных метода получения уравнений движения из уравнений поля — метод ЕИН и метод Фока, причем последний — более детально, как позволяющий получать наиболее полные результаты. Действительно, учет формы тел и их вращения производится в методе Фока наиболее естественным образом. Однако и метод ЕИН имеет свои неоспоримые достоинства, так что для развития задач релятивистской небесной механики необходимо изучение обоих этих методов. Их изложение будет проведено ниже в обозначениях оригинальных работ, хотя эти обозначения не согласуются между собой.

§ 2. Принципы метода ЕИН

Исходными в методе ЕИН являются уравнения для пространства вне особенностей

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (1)$$

Как обычно, полагаем

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}, \quad (2)$$

где $\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ — галилеевы значения метрического тензора

$$\eta_{00} = 1, \quad \eta_{0m} = 0, \quad \eta_{mn} = -\delta_{mn}. \quad (3)$$

Из соотношения

$$g_{\mu\alpha} g^{\nu\alpha} = \delta_{\mu}^{\nu}$$

находим связь между величинами $h^{\mu\nu}$ и $h_{\mu\nu}$:

$$h^{\mu\nu} = -\eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} h_{\alpha\beta} - \eta^{\mu\alpha} h^{\nu\beta} h_{\alpha\beta} \quad (4)$$

или в подробной записи:

$$\left. \begin{aligned} h^{00} &= -h_{00} - h_{0\alpha} h^{0\alpha}, \\ h^{0m} &= h_{0m} - h_{0\alpha} h^{m\alpha}, \\ h^{mn} &= -h_{mn} + h_{m\alpha} h^{n\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Выделяя в тензоре Риччи линейную и нелинейную части относительно $h_{\mu\nu}$, получаем

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} (h_{\alpha\beta|\mu\nu} + h_{\mu\nu|\alpha\beta} - h_{\alpha\mu|\beta\nu} - h_{\beta\nu|\alpha\mu}) + L'_{\mu\nu}, \quad (6)$$

$$L'_{\mu\nu} = \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} (h_{\alpha\beta|\mu\nu} + h_{\mu\nu|\alpha\beta} - h_{\alpha\mu|\beta\nu} - h_{\beta\nu|\alpha\mu}) + \\ + g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} (\Gamma_{\rho, \mu\nu} \Gamma_{\sigma, \alpha\beta} - \Gamma_{\rho, \alpha\mu} \Gamma_{\sigma, \beta\nu}). \quad (7)$$

Вертикальная черта означает здесь дифференцирование по соответствующей координате, например

$$g_{\mu\nu|\sigma} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}.$$

Для удобства вводятся новые переменные $\gamma_{\mu\nu}$, связанные с $h_{\mu\nu}$ линейной зависимостью

$$\gamma_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma} \quad (8)$$

или

$$\gamma_{00} = \frac{1}{2} (h_{00} + h_{ss}), \quad \gamma_{0m} = h_{0m},$$

$$\gamma_{mn} = h_{mn} + \frac{1}{2} \delta_{mn} (h_{00} - h_{ss}).$$

При этом $h_{\mu\nu}$ выражаются через $\gamma_{\mu\nu}$ таким же образом:

$$h_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} \gamma_{\rho\sigma}. \quad (9)$$

Чтобы записать уравнения поля в переменных $\gamma_{\mu\nu}$, составим комбинацию

$$2 \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma} \right) = \\ = \eta^{\rho\sigma} (\gamma_{\mu\nu|\rho\sigma} - \gamma_{\rho\mu|\sigma\nu} - \gamma_{\sigma\nu|\rho\mu} + \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \gamma_{\rho\alpha|\sigma\beta}) + 2\Lambda'_{\mu\nu}, \quad (10)$$

где

$$\Lambda'_{\mu\nu} = L'_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} L'_{\rho\sigma}. \quad (11)$$

Приравнивая правую часть (10) нулю, получим уравнения, эквивалентные (1), а именно

$$\gamma_{\mu\nu|00} - \gamma_{0\mu|0\nu} - \gamma_{0\nu|0\mu} + \eta_{\mu\nu} (\gamma_{00|00} - \gamma_{0s|0s}) - \gamma_{\mu\nu|ss} + \\ + \gamma_{\mu s|vs} + \gamma_{vs|\mu s} - \eta_{\mu\nu} (\gamma_{0s|0s} - \gamma_{rs|rs}) + 2\Lambda'_{\mu\nu} = 0. \quad (12)$$

Для применения способа последовательных приближений эти уравнения записываются в виде

$$\Phi_{\mu\nu} + 2\Lambda_{\mu\nu} = 0, \quad (13)$$

где

$$\Phi_{00} = -\gamma_{00|ss}, \quad (14a)$$

$$\Phi_{0m} = -\gamma_{0m|ss} + \gamma_{0s|ms}, \quad (14b)$$

$$\Phi_{mn} = -\gamma_{mn|ss} + \gamma_{ms|ns} + \gamma_{ns|ms} - \delta_{mn}\gamma_{rs|rs} \quad (14c)$$

и

$$2\Lambda_{00} = \gamma_{rs|rs} + 2\Lambda'_{00}, \quad (15a)$$

$$2\Lambda_{0m} = -\gamma_{00|0m} + \gamma_{ms|0s} + 2\Lambda'_{0m}, \quad (15b)$$

$$2\Lambda_{mn} = \gamma_{mn|00} - \gamma_{0m|0n} - \gamma_{0n|0m} - \delta_{mn}\gamma_{00|00} + \\ + 2\delta_{mn}\gamma_{0s|0s} + 2\Lambda'_{mn}. \quad (15c)$$

Решение уравнений (13) ищется в виде рядов по степеням $\lambda = 1/c$:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{00} &= \lambda^2 \gamma_{00} + \lambda^4 \gamma_{00} + \lambda^6 \gamma_{00} + \dots, \\ \gamma_{0m} &= \lambda^3 \gamma_{0m} + \lambda^5 \gamma_{0m} + \dots, \\ \gamma_{mn} &= \lambda^4 \gamma_{mn} + \lambda^6 \gamma_{mn} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Для слабого поля в гармонических координатах (формула (93) гл. 4) начальные значения компонент метрического тензора таковы:

$$h_{00} = -\frac{2U}{c^2}, \quad h_{0m} = \frac{4}{c^3} U_m, \quad h_{mn} = -\frac{2U}{c^2} \delta_{mn},$$

где U — ньютонов потенциал, а U_m — вектор-потенциал. Поэтому в гармонических или близких к ним координатах начальные значения величин $\gamma_{\mu\nu}$ будут

$$\gamma_{00} = -4U, \quad \gamma_{0m} = 4U_m, \quad \gamma_{mn} = 0. \quad (17)$$

Разложение γ_{00} и γ_{mn} только по четным, а γ_{0m} — только по нечетным степеням λ соответствует пренебрежению гравитационным излучением системы тел. Возникающие вследствие этого излучения члены входят в уравнения дви-

жения лишь в пятом порядке относительно v/c , а в разложении (16) — лишь при λ^9 .

Пусть на некотором этапе приближения найдены γ_{00} ,

γ_{0m} и γ_{mn} (для $l = 2$ — это исходные нулевые значения).

Тогда для определения γ_{00} , γ_{0m} и γ_{mn} служат уравнения

$$\Phi_{00} + 2\Lambda_{00} = 0, \quad (18a)$$

$$\Phi_{0m} + 2\Lambda_{0m} = 0, \quad (18b)$$

$$\Phi_{mn} + 2\Lambda_{mn} = 0, \quad (18c)$$

где Φ_{00} , Φ_{0m} , Φ_{mn} содержат неизвестные функции, а

Λ_{00} , Λ_{0m} , Λ_{mn} — известны из предшествующих этапов.

Если дифференцирование по времени t и пространственным координатам обозначить запятой, то, поскольку $t = \lambda x^0$, имеем

$$\gamma_{...|s} = \gamma_{...s}, \quad \gamma_{...|0} = \lambda \gamma_{...0}.$$

Поэтому в соответствии с (14) и (15):

$$\Phi_{00} = -\gamma_{00, ss}, \quad (19a)$$

$$\Phi_{0m} = -\gamma_{0m, ss} + \gamma_{0s, ms}, \quad (19b)$$

$$\Phi_{mn} = -\gamma_{mn, ss} + \gamma_{ms, ns} + \gamma_{ns, ms} - \delta_{mn} \gamma_{rs, rs} \quad (19c)$$

и

$$2\Lambda_{00} = \gamma_{rs, rs} + 2\Lambda'_{00}, \quad (20a)$$

$$2\Lambda_{0m} = -\gamma_{00, 0m} + \gamma_{ms, 0s} + 2\Lambda'_{0m}, \quad (20b)$$

$$2\Lambda_{mn} = -\gamma_{0m, 0n} - \gamma_{0n, 0m} + 2\delta_{mn} \gamma_{0s, 0s} + \gamma_{mn, 00} - \\ - \delta_{mn} \gamma_{00, 00} + 2\Lambda'_{mn}. \quad (20c)$$

Уравнение (18a) является уравнением Пуассона и, следовательно, всегда имеет решение, определенное с точ-

ностью до произвольной аддитивной гармонической функции. Что же касается систем (18b) и (18c), то для их разрешимости должны выполняться определенные условия.

Прежде всего, так как тождественно

$$\Phi_{0m, m} = 0, \quad \Phi_{mn, n} = 0,$$

то должно быть также

$$\Lambda_{0m, m} = 0, \quad \Lambda_{mn, n} = 0. \quad (21)$$

Эти условия действительно соблюдаются в силу тождеств Бианки и решения уравнений поля на предшествующих этапах. Далее, Φ_{0m} и Φ_{mn} — это дивергенции антисимметричных выражений, именно

$$\begin{aligned} \Phi_{0m} &= (\gamma_{0s, m} - \gamma_{0m, s}), s, \\ \Phi_{mn} &= (-\gamma_{mn, s} + \gamma_{ms, n} + \delta_{ms} \gamma_{rn, r} - \delta_{mn} \gamma_{rs, r}), s. \end{aligned}$$

Но по теореме Стокса для всякой функции, антисимметричной по каким-либо двум индексам $F_{kl} = -F_{lk}$, поверхностный интеграл от дивергенции этой функции, взятый по произвольной двумерной поверхности, не проходящей через особенность поля, равен нулю:

$$\oint F_{kl, l} n_k dS = 0.$$

Поэтому должны обратиться в нуль интегралы

$$\oint_{2l-1}^p \Phi_{0s} n_s dS = 0, \quad \oint_{2l}^p \Phi_{ms} n_s dS = 0,$$

взятые по произвольной замкнутой двумерной поверхности, окружающей p -особенность ($p = 1, 2, \dots, N$). Через n_s здесь обозначены компоненты единичного нормального вектора к поверхности. Значит, должны выполняться и условия

$$\oint_{2l-1}^p 2\Lambda_{0s} n_s dS = 0, \quad \oint_{2l}^p 2\Lambda_{ms} n_s dS = 0. \quad (22)$$

Но эти интегралы, вообще говоря, в нуль не обращаются. В силу (21) они не зависят от вида поверхностей и являются функциями лишь особенностей и их движения, т. е. функциями t . Обозначим

$$\overset{p}{C}_0(t) = \frac{1}{4\pi} \oint_{2l-1}^p 2\Lambda_{0s} n_s dS, \quad \overset{p}{C}_m(t) = \frac{1}{4\pi} \oint_{2l}^p 2\Lambda_{ms} n_s dS. \quad (23)$$

Пусть уравнения решены до порядка $2l - 2$ включительно и $\overset{p}{C}_0 \neq 0$. Тогда добавлением простого полюса к $\overset{p}{\gamma}_{00}$ можно добиться выполнения первого из условий (22).

Действительно, если решение $\overset{p}{\gamma}_{00}$ уравнения (18а) заменить на

$$\overset{p}{\gamma}_{00} - \sum_{p=1}^N 4 \overset{p}{m} \overset{p}{\psi}, \quad (24)$$

где

$$\overset{p}{\psi} = 1/r = [(x^s - \overset{p}{x}^s)(x^s - \overset{p}{x}^s)]^{-1/2}, \quad (25)$$

$\overset{p}{x}^s = \overset{p}{x}^s(t)$ — координаты p -особенности, а $\overset{p}{m}$ — пока не определенные функции t , то величина $2\Lambda_{0s}$ заменится на

$$2\Lambda_{0s} + \sum_{p=1}^N 4 \left(\overset{p}{m} \overset{p}{\psi}_s \right)_0,$$

а новое значение интеграла $\overset{p}{C}_0$ станет

$$\overset{p}{C}_0 - 4 \overset{p}{m}_0.$$

Следовательно, полагая

$$4 \overset{p}{m}_0 = \overset{p}{C}_0, \quad (26)$$

можно добиться выполнения первого из условий (22) и уравнения (18b) могут быть проинтегрированы. Пусть,

далее, $\overset{p}{C}_m \neq 0$. Чтобы добиться выполнения второго из условий (22), надо к решению $\overset{p}{\gamma}_{00}$, содержащему уже добавочные полюсы, добавить и дипольное решение. Действительно, заменим $\overset{p}{\gamma}_{00}$ уже с учетом (24) на

$$\overset{p}{\gamma}_{00} = \sum_{p=1}^N \overset{p}{S}_r \overset{p}{\psi}_{,r}, \quad (27)$$

где $\overset{p}{S}_r$ — пока еще не определенные функции t . Интегрируемость (18b) от добавления дипольного решения (27) не нарушается, так как $2 \overset{p}{\Lambda}_{0s}$ заменится при этом на

$$2 \overset{p}{\Lambda}_{0s} + \sum_{p=1}^N (\overset{p}{S}_r \overset{p}{\psi}_{,rs}),_0,$$

а эти добавочные члены не скажутся при интегрировании по поверхности (вклад в интегралы (23) могут внести только члены, которые при стремлении r к нулю стремятся к бесконечности как r^{-2}). Но решение $\overset{p}{\gamma}_{0m}$ уравнений (18b) заменится при этом на

$$\overset{p}{\gamma}_{0m} = \sum_{p=1}^N (\overset{p}{S}_m \overset{p}{\psi}),_0, \quad (28)$$

что в сочетании с (27) приведет к замене $2 \overset{p}{\Lambda}_{mn}$ на

$$2 \overset{p}{\Lambda}_{mn} + \sum_{p=1}^N (\overset{p}{S}_m \overset{p}{\psi}_{,n} + \overset{p}{S}_n \overset{p}{\psi}_{,m} - \delta_{mn} \overset{p}{S}_r \overset{p}{\psi}_{,r}),_{00} + \dots$$

Многоточием здесь обозначена совокупность членов, добавляющихся к $2 \overset{p}{\Lambda}_{mn}$ из-за нелинейных членов $2 \overset{p}{\Lambda}_{mn}$. Как оказывается, эти нелинейные члены не дают вклада при интегрировании по поверхности и новое значение интеграла $\overset{p}{C}_m$, изменяющееся лишь за счет линейных

добавок, станет

$$C_m^p - S_{2l-2}^p.$$

Поэтому, выбирая

$$S_{2l-2}^p = C_m^p, \quad (29)$$

можно добиться выполнения и второго из условий (22). Таким образом, благодаря введению диполей уравнения (18) будут разрешимы на всех этапах приближения. После завершения вычислений на некотором определенном этапе окажется, что совокупность диполей в γ_{00} имеет вид

$$- \sum_{p=1}^N \left(\sum_{l=2} \lambda^{2l-2} S_{2l-2}^p \right)^p \psi_{,m}.$$

Но диполи не являются физически допустимыми решениями и должны быть устранены из окончательных выражений для потенциалов тяготения. Поэтому после завершения процесса приближений нужно положить

$$\sum_{l=2} \lambda^{2l-2} S_{2l-2}^p = 0,$$

что после двукратного дифференцирования по времени дает в силу (29)

$$\sum_{l=2} \lambda^{2l} C_m^p = 0. \quad (30)$$

Эти соотношения и представляют собой $3N$ дифференциальных уравнений движения частиц. При этом

$$C_m^p = 0 \quad (31)$$

являются ньютоновыми уравнениями движения, а

$$C_m^p + \lambda^2 C_m^p = 0 \quad (32)$$

— это пост-ньютоновы уравнения, справедливые с точностью до членов порядка v^2/c^2 включительно.

Таким образом, уравнения движения (30) выступают в методе ЕИН как условия разрешимости уравнений поля. Иными словами, уравнения поля имеют решение не при произвольном движении масс, а лишь при движении, обусловленном уравнениями (30).

При непосредственном решении уравнений поля можно, разумеется, пользоваться и величинами $h_{\mu\nu}$. Разложения, эквивалентные (16), запишутся для этих величин в виде:

$$\left. \begin{aligned} h_{00} &= \lambda^2 h_{00}^{(2)} + \lambda^4 h_{00}^{(4)} + \dots, \\ h_{mn} &= \lambda^2 h_{mn}^{(2)} + \lambda^4 h_{mn}^{(4)} + \dots, \\ h_{0m} &= \lambda^3 h_{0m}^{(3)} + \lambda^5 h_{0m}^{(5)} + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

а уравнения для нахождения коэффициентов этих разложений получаются непосредственно из (1) и (6):

$$h_{00, ss}^{(2l)} = - h_{ss, 00}^{(2l-2)} + 2 h_{0s, 0s}^{(2l-1)} + 2L_{00}^{(2l)}, \quad (34a)$$

$$\begin{aligned} h_{mn, ss}^{(2l)} + h_{ss, mn}^{(2l)} - h_{ms, ns}^{(2l)} - h_{ns, ms}^{(2l)} \\ = h_{00, mn}^{(2l)} + h_{mn, 00}^{(2l-2)} - h_{0m, 0n}^{(2l-1)} - h_{0n, 0m}^{(2l-1)} + 2L_{mn}^{(2l)}, \end{aligned} \quad (34b)$$

$$h_{0m, ss}^{(2l+1)} - h_{0s, ms}^{(2l+1)} = - h_{ss, 0m}^{(2l)} + h_{ms, 0s}^{(2l)} + 2L_{0m}^{(2l+1)}. \quad (34c)$$

Само решение уравнений (18) можно проводить в любой системе координат. Допустим, найдены все коэффициенты разложений (16) вплоть до членов $\gamma_{0m}^{(2l-1)}$ включительно. Пусть из уравнений (18) найдены затем дальнейшие члены $\gamma_{mn}^{(2l)}$, $\gamma_{00}^{(2l)}$, $\gamma_{0m}^{(2l+1)}$. Как легко проверить, уравнениям (18) будут удовлетворять также значения:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{mn} &= \gamma_{mn}^{(2l)} + a_{m, n}^{(2l)} + a_{n, m}^{(2l)} - \delta_{mn} a_{s, s}^{(2l)}, \\ \gamma_{00} &= \gamma_{00}^{(2l)} + a_{s, s}^{(2l)}, \\ \gamma_{0m} &= \gamma_{0m}^{(2l+1)} + a_{m, 0}^{(2l)} + a_{0, m}^{(2l+1)}, \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

где a_m , a_0 — четыре произвольные функции, определяющие выбор системы координат. Для величин $h_{\mu\nu}$ имеем:

$$\left. \begin{aligned} h_{00} &= h_{00}^*, \\ h_{mn} &= h_{mn}^* + a_{m,n} + a_{n,m}, \\ h_{0m} &= h_{0m}^* + a_{m,0} + a_{0,m}. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Если решения h_{00}^* , h_{mn}^* , h_{0m}^* получены в некоторой определенной системе координат $x^{*\alpha}$, то решения (36) могут быть найдены простым переходом от координат $x^{*\alpha}$ к координатам x^α по формулам

$$x^{*0} = x^0 + \lambda^{2l+1} a_0, \quad (37a)$$

$$x^{*m} = x^m - \lambda^{2l} a_m. \quad (37b)$$

Действительно, обычные формулы

$$g_{\mu\nu}(x^\sigma) = \frac{\partial x^{*\alpha}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^{*\beta}}{\partial x^\nu} g_{\alpha\beta}^*(x^{*\sigma}) \quad (38)$$

сейчас же дают (36).

Выяснению роли координатных условий при выводе уравнений движения посвящена обширная литература (см. книгу Инфельда и Плебаньского). В частности, было показано, что введение произвольных функций a_0 , a_m , ...

не влияет на значения интегралов C_m^p , C_m^p , а тем самым и на пост-ньютоновы уравнения (32). Зато путем соответствующего выбора этих функций можно, вообще говоря, уничтожить все дальнейшие члены в уравнениях (30). Можно пойти еще дальше и найти такую систему координат, в которой и $C_m^p = 0$, т. е. релятивистские уравнения движения имеют ньютонову форму (31). Но это может быть достигнуто лишь очень дорогой ценой — путем введения

функций a_0 , a_m , так что разложения (16) приходится начинать с членов γ_{0m} и γ_{mn} . При этом поле вблизи масс не будет приближенно ньютоновым и не будет исчезать на бесконечно большом расстоянии от масс. Таким образом, все релятивистские эффекты из уравнений движения перейдут в метрику, где их исследование более затруднительно (Infeld, 1953).

Если вести разложения (16) не по степеням λ^2 , а по степеням λ , то можно получить члены, вызванные гравитационным излучением системы тел (Carmeli, 1964, 1965). По вопросу о гравитационном излучении при движении тел высказывались самые противоречивые мнения (см. обзор Tonnelat, 1969). Частично этот вопрос будет освещен в гл. 11.

В цитированной выше работе Эйнштейна и Инфельда по практическому выводу уравнений движения (32) использовались координатные условия

$$\gamma_{00,0} - \gamma_{0s,s} = 0, \quad \gamma_{mn,n} = 0, \quad (39)$$

так что координатная система не фиксировалась с самого начала, а уточнялась с каждым следующим этапом приближения. Сравним эти условия с гармоническими условиями ((16) гл. 4). Пренебрегая членами шестой степени относительно λ , из (5) находим:

$$\left. \begin{aligned} h^{00} &= -h_{00} + h_{00}^2 + \dots, \\ h^{0m} &= h_{0m} - h_{00}h_{0m} + h_{0s}h_{ms} + \dots, \\ h^{mn} &= -h_{mn} - h_{ms}h_{ns} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

С той же точностью определитель g будет

$$-g = 1 + h_{00} - h_{ss} - h_{00}h_{ss} + \frac{1}{2}(h_{ss})^2 - \frac{1}{2}h_{rs}h_{rs} + \dots \quad (41)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} &= 1 + \frac{1}{2}(h_{00} - h_{ss}) - \frac{1}{8}h_{00}^2 - \frac{1}{4}h_{00}h_{ss} + \\ &+ \frac{1}{8}(h_{ss})^2 - \frac{1}{4}h_{rs}h_{rs} + \dots \quad (42) \end{aligned}$$

Поэтому

$$\sqrt{-g}g^{00} = 1 - \frac{1}{2}(h_{00} + h_{ss}) + \frac{3}{8}h_{00}^2 + \frac{1}{4}h_{00}h_{ss} + \\ + \frac{1}{8}(h_{ss})^2 - \frac{1}{4}h_{rs}h_{rs} + \dots, \quad (43)$$

$$\sqrt{-g}g^{0m} = h_{0m} - \frac{1}{2}(h_{00} + h_{ss})h_{0m} + h_{0s}h_{ms} + \dots, \quad (44)$$

$$\sqrt{-g}g^{mn} = -\delta_{mn} - h_{mn} - \frac{1}{2}(h_{00} - h_{ss})\delta_{mn} + \\ + \left(\frac{1}{8}h_{00}^2 + \frac{1}{4}h_{00}h_{ss} - \frac{1}{8}(h_{ss})^2 + \frac{1}{4}h_{rs}h_{rs} \right) \delta_{mn} - \\ - \frac{1}{2}(h_{00} - h_{ss})h_{mn} - h_{ms}h_{ns} + \dots \quad (45)$$

Дифференцирование этих соотношений позволяет легко написать условия гармоничности в явном виде с точностью до членов порядка λ^5 включительно. Нетрудно видеть, что условия (39) и условия гармоничности близки друг другу и отличие между двумя системами координат начинается с членов a_m , a_0 в преобразованиях (37).

Как в гармонических координатах, так и в координатах, определяемых условиями (39), все уравнения поля (18) принимают вид уравнений Пуассона, и поэтому их решение значительно упрощается. В связи с этим открывается еще одна возможность получения уравнений движения. При наложении этих условий уравнения поля формально всегда разрешимы. Но затем нужно потребовать, чтобы решение этих уравнений действительно удовлетворяло координатным условиям. Отсюда вытекают дифференциальные соотношения между координатами особенностей, которые и являются уравнениями движения. Таким образом, при этом подходе уравнения движения следуют из координатных условий.

Метод ЕИН считается малопрактичным, поскольку при нахождении пост-ньютоновых уравнений движения (32) этим методом надо знать h_{00} , h_{mn} , h_{0m} , h_{00} , h_{mn} , h_{0m} . По методу Фока не надо знать h_{mn} и h_{0m} . По методу Инфельда

1957 года, в котором уравнения движения получаются из вариационного принципа действия с использованием тензора масс с δ -функциями, не надо знать и h_{00} . Однако

математическое изящество метода EIN, в частности, использование одних только уравнений поля для пустого пространства, в значительной мере искупает его практическую сложность. В следующем параграфе, в отличие от оригинальных работ по методу EIN, будет проведено вычисление потенциалов тяготения и дан вывод уравнений движения этим методом в гармонической системе координат, что приводит к упрощению необходимых выкладок.

§ 3. Решение уравнений поля и вывод уравнений движения методом EIN

Во втором порядке по λ условие гармоничности имеет вид

$$\gamma_{2mn, n} = 0, \quad (46)$$

так что можно положить $\gamma_{2mn} = 0$ и начать разложение величин γ_{mn} с γ_{4mn} . Уравнение (18а) для $l = 2$ является обычным уравнением Лапласа

$$\gamma_{200, ss} = 0. \quad (47)$$

Чтобы получить в предельном случае согласие с ньютоновой теорией, надо положить

$$\gamma_{200} = 2\varphi, \quad (48)$$

$$\varphi = - \sum_{p=1}^N 2m \frac{p}{2} \psi, \quad (49)$$

где $m \frac{p}{2}$ — масса покоя частицы (в дальнейшем нижний значок у $m \frac{p}{2}$ опускается), а $\psi \frac{p}{2}$ определяется формулой (25) и

представляет собой величину, обратную расстоянию $r \frac{p}{2}$ от текущей точки поля до p -особенности. Значению (48) соответствуют

$$h_{200} = \varphi, \quad (50)$$

$$h_{3mn} = \delta_{mn} \varphi. \quad (51)$$

Так как

$$2\Lambda_{0m} = -\gamma_{00,0m},$$

то условие разрешимости уравнений (18b) для $l = 2$ сводится к условию

$$\frac{p}{m,0} = 0, \quad (52)$$

которое автоматически выполняется. В третьем порядке по λ условие гармоничности дает

$$\gamma_{0s,s} - \gamma_{00,0} = 0 \quad (53)$$

и уравнения (18b) для $l = 2$ также принимают вид уравнений Лапласа

$$\gamma_{0m,ss} = 0. \quad (54)$$

Решение, удовлетворяющее (53) и (54), будет

$$\gamma_{0m} = \sum_{p=1}^N 4m^p \psi x^m \quad (x^m = x_{,0}^m). \quad (55)$$

Далее,

$$\begin{aligned} L'_{00} &= \frac{1}{2} \varphi, s \varphi, s, \\ L'_{mn} &= -\varphi \varphi, mn - \frac{1}{2} \varphi, m \varphi, n - \frac{1}{2} \delta_{mn} \varphi, s \varphi, s, \end{aligned}$$

и поэтому правые части уравнений (18c) для $l = 2$ состоят из членов

$$\begin{aligned} 2\Lambda_{mn} &= -\gamma_{0m,0n} - \gamma_{0n,0m} + 2\delta_{mn} \varphi, 00 - 2\varphi \varphi, mn - \varphi, m \varphi, n + \\ &+ \frac{3}{2} \delta_{mn} \varphi, s \varphi, s. \quad (56) \end{aligned}$$

При вычислении поверхностных интегралов приходится иметь дело с интегралами типа

$$\frac{1}{4\pi} \oint \psi, rn_s dS = -\frac{1}{3} \delta_{rs}, \quad (57)$$

$$\frac{1}{4\pi} \oint x^k \psi, prn_s dS = -\frac{1}{15} (2\delta_{ks} \delta_{pr} - 3\delta_{kp} \delta_{rs} - 3\delta_{kr} \delta_{ps}). \quad (58)$$

Эти интегралы предполагаются взятыми по двумерной замкнутой поверхности, окружающей особенность в начале координат. Помимо этих выражений при вычислении интегралов (23) приходится пользоваться разложениями типа

$$\psi^q = \psi^q_{(p)} + \psi^q_{(p),r} (x^r - x^r) + \frac{1}{2} \psi^q_{(p),rs} (x^r - x^r)(x^s - x^s) + \dots, \quad (59)$$

справедливыми в окрестности p -особенности. Нижний знакоч (p) указывает, что соответствующие функции должны быть вычислены при значениях $x^r = x^r$. С учетом (57), (58) и разложения (59) вторая из формул (23) дает

$$C_m^p = 4m^p \left\{ \dot{x}^m - \sum_{q=1}^N \binom{p}{q} \frac{q}{m} \psi_{(p)}^q \right\}. \quad (60)$$

Интересно отметить, что вклады в C_m^p от второго и третьего членов выражения (56), а также от четвертого и пятого членов взаимно уничтожаются. Как показывает выражение (60), уравнения (31) действительно представляют собой ньютоновы уравнения движения.

Приступим теперь к интегрированию уравнений (18с) для $l = 2$. Используя формулы (44), (45), легко найти, что условие гармоничности в четвертом порядке по λ будет

$$\gamma_{mn, n} = \gamma_{0m, 0} + \Phi \Phi_{, m}, \quad (61)$$

и поэтому уравнения (18с) для $l = 2$ в гармонических координатах имеют вид

$$\gamma_{mn, ss} = \frac{1}{2} \delta_{mn} \Phi_{, s} \Phi_{, s} + \Phi_{, m} \Phi_{, n}. \quad (62)$$

В подробной записи

$$\begin{aligned} \gamma_{mn, ss} = \frac{1}{2} \delta_{mn} \Phi_{, s} \Phi_{, s} + \sum_{p=1}^N 4 \binom{p}{m}^2 \psi_{, m}^p \psi_{, n}^p + \\ + \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \binom{p}{m} \binom{q}{n} 2m^p m^q (\psi_{, m}^p \psi_{, n}^q + \psi_{, n}^p \psi_{, m}^q). \end{aligned} \quad (63)$$

Интегрирование первых двух членов, стоящих в правой части (63), не вызывает затруднений. Что же касается членов под знаком двойной суммы, то при их интегрировании надо учесть соотношение, указанное В. А. Фоком:

$$(\ln(r + r + r))_{,ss} = \psi^p \psi^q, \quad (64)$$

а также элементарные соотношения типа

$$\psi_{,m}^p = -\frac{\partial}{\partial x^m} \psi^p.$$

Через r^{pq} будем обозначать взаимное расстояние между p - и q -особенностями, а через ψ^{pq} — обратную величину этого расстояния. Решение уравнений (63) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \gamma_{mn} = & \frac{1}{4} \delta_{mn} \varphi^2 + \sum_{p=1}^N (m)^2 [\delta_{mn} \psi^p - (x^m - x^m)(x^n - x^n) \psi^p] + \\ & + \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \sum^{(p)} 2m^p m^q \left(\frac{\partial^2}{\partial x^m \partial x^n} + \frac{\partial^2}{\partial x^n \partial x^m} \right) \ln(r + r + r) + \\ & + \sum_{p=1}^N \alpha_{mn}^p m^p \psi^p. \quad (65) \end{aligned}$$

Последний член представляет собой сумму дополнительных полюсов, добавленных для удовлетворения координатным условиям (61). Коэффициенты α_{mn}^p , являющиеся функциями лишь t , определяются этими условиями. Учитывая, что

$$2 \frac{\partial^2}{\partial x^s \partial x^s} \ln(r + r + r) = \psi^q \psi^p - \psi^p \psi^q - \psi^p \psi^q, \quad (66)$$

и дифференцируя (65) по x^n , получаем

$$\gamma_{mn, n} = \varphi \varphi_{,m} + \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \sum^{(p)} m^p m^q (4\psi^p \psi^q_{,m} - 2\psi^p_{,m} \psi^q) + \sum_{p=1}^N \alpha_{mn}^p m^p \psi^p_{,n}$$

Приравнивая это выражение правой части (61), подставляя значение (55) и используя ньютоновы уравнения движения (31) и (60), находим

$$\alpha_{mn}^p = 2\delta_{mn} \sum_{q=1}^N \binom{p}{q} m^q \psi^{pq} - 4\dot{x}^m \dot{x}^n. \quad (67)$$

Формулы (65) и (67) полностью определяют выражения γ_{mn}^4 в гармонических координатах. Подчеркнем, что интегрирование уравнений (18с) для $l = 2$ и выполнение координатных условий (61) здесь удалось осуществить при предположении, что координаты особенностей удовлетворяют ньютоновым уравнениям движения. Без этого предположения пришлось бы добавить к γ_{00}^2 дипольное решение.

Из (65) и (66) (с заменой x^s на $x^s{}^q$) вытекает важное выражение

$$\gamma_{ss}^4 = \frac{5}{4} \varphi^2 - 4 \sum_{p=1}^N m^p \psi^{pp} \dot{x}^s \dot{x}^s + 2 \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \binom{p}{q} m^q \psi^{pq}. \quad (68)$$

Перейдем теперь к решению уравнения (18а) на следующем этапе приближения — при $l = 3$. С учетом координатных условий это уравнение записывается в виде

$$\gamma_{00,ss}^4 = -\frac{1}{2} \varphi_{,s} \varphi_{,s} + 2\varphi_{,00} \quad (69)$$

и его решением будет

$$\gamma_{00}^4 = -\frac{1}{4} \varphi^2 - 2 \sum_{p=1}^N m^p r_{,00}^p - \sum_{p=1}^N 4m^p \psi^p. \quad (70)$$

Функции $m^p = m^p(t)$ выбираются из условия разрешимости уравнений (18b) для $l = 3$. Легко вычислить, что

$$L'_{0m} = \frac{1}{2} \varphi_{,s} \gamma_{0s,m}^3 - \frac{1}{2} \varphi_{,ms} \gamma_{0s}^3 - \frac{3}{2} \varphi_{,0} \varphi_{,m},$$

и поэтому

$$2\Delta_{50m} = -\gamma_{03,0m} + \gamma_{0m,00} + \gamma_{0s,m\varphi,s} - \gamma_{0s}\varphi_{,ms} - \\ - 2\varphi_{,0\varphi,m} + \varphi\varphi_{,0m}. \quad (71)$$

Требование обращения в нуль поверхностного интеграла от этого выражения приводит к значениям

$$4m_{,0}^p = 2m^p \sum_{q=1}^N \binom{p}{q} m^q \psi_{,s}^q (\dot{x}^s + \dot{x}^s),$$

откуда, используя ньютоновы уравнения, получаем

$$4m_{,0}^p = 2m^p \dot{x}^s \dot{x}^s - 2m^p \sum_{q=1}^N \binom{p}{q} m^q \psi^q. \quad (72)$$

Комбинируя значения (68), (70) и (72), находим

$$h_{00}^p = \frac{1}{2} \varphi^2 - \sum_{p=1}^N m^p r_{,00}^p - 3 \sum_{p=1}^N m^p \psi^p \dot{x}^s \dot{x}^s + \\ + 2 \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \binom{p}{q} m^q m^p \psi^q. \quad (73)$$

Из формул (43), (44) выводим условие гармоничности в пятом порядке по λ :

$$\gamma_{0s,s}^5 - \gamma_{00,0}^4 = \gamma_{0s}\varphi_{,s} - \varphi\varphi_{,0}. \quad (74)$$

Поэтому уравнения (18b) для $l = 3$ в гармонических координатах принимают вид

$$\gamma_{0m,ss}^5 = \gamma_{0m,00}^3 + 2\gamma_{0s,m\varphi,s}^2 - 3\varphi_{,0\varphi,m}. \quad (75)$$

или в подробной записи

$$\gamma_{0m,ss}^5 = \gamma_{0m,00}^3 - 4 \sum_{p=1}^N (m^p)^2 \psi_{,m}^p \psi_{,s}^p \dot{x}^s + \\ + 2 \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \binom{p}{q} m^q m^p [(3\dot{x}^s - 4\dot{x}^s) \psi_{,m}^q \psi_{,s}^q + (3\dot{x}^s - 4\dot{x}^s) \psi_{,s}^q \psi_{,m}^q].$$

Это уравнение удовлетворяется при

$$\begin{aligned} \gamma_{0m}^p = & \sum_{p=1}^N 2m^p (r \dot{x}^m)^p - \sum_{p=1}^N (m)^2 [\psi^2 \dot{x}^m - (x^m - \dot{x}^m) \times \\ & \times (x^s - \dot{x}^s) \psi^4 \dot{x}^s] + 2 \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \binom{p}{q} m^p m^q \left[(3\dot{x}^s - 4\dot{x}^s) \frac{\partial^2}{\partial x^m \partial x^s} + \right. \\ & \left. + (3\dot{x}^s - 4\dot{x}^s) \frac{\partial^2}{\partial x^s \partial x^m} \right] \ln(r + r + r) + \sum_{p=1}^N \alpha_{0m}^p m^p \psi, \quad (76) \end{aligned}$$

где последний член с неизвестными пока функциями $\alpha_{0m}^p = \alpha_{0m}^p(t)$ добавлен с целью удовлетворения координатным условиям (74). Дифференцирование (76) с использованием (66) дает

$$\begin{aligned} \gamma_{0s,s}^p = & - \sum_{p=1}^N 2mr^p - \sum_{p=1}^N 2(m)^2 \psi \psi_{,s} \dot{x}^s + \\ & + \sum_{p=1}^N \alpha_{0s}^p m^p \psi_{,s} + 2 \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \binom{p}{q} m^p m^q \left[(3\dot{x}^s - 4\dot{x}^s) \psi \psi_{,s} - \right. \\ & \left. - (\dot{x}^s + \dot{x}^s) \psi \frac{\partial}{\partial x^s} \psi + (4\dot{x}^s - 3\dot{x}^s) \psi_{,s} \psi \right]. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (74), будем иметь

$$\alpha_{0m}^p = 2\dot{x}^s \dot{x}^s \dot{x}^m + 4\dot{x}^m \sum_{q=1}^N \binom{p}{q} m^q \psi - 8 \sum_{q=1}^N \binom{p}{q} m^q \psi \dot{x}^m. \quad (77)$$

Этим заканчивается определение потенциалов тяготения, нужных для вывода уравнений движения (32). Заметим, что подстановка полученных выражений в вытекающие из (43) — (45) формулы

$$\sqrt{-g} g^{00} = 1 - 2\lambda^2 \varphi + \lambda^4 \left(\frac{3}{2} \varphi^2 - \gamma_{00} \right) + \dots,$$

$$\sqrt{-g} g^{0m} = \lambda^3 \gamma_{0m} + \lambda^5 (\gamma_{0m} - \varphi \gamma_{0m}) + \dots,$$

$$\sqrt{-g} g^{mn} = -\delta_{mn} + \lambda^4 \left(\frac{1}{2} \delta_{mn} \varphi^2 - \gamma_{mn} \right) + \dots$$

приводит к значениям, найденным В. А. Фоком.

Переходим к завершающему этапу вывода уравнений (32) — вычислению значений интегралов $\overset{p}{C}_m$. Прежде всего, находим

$$L'_{00} = -\frac{1}{2} \varphi_{,rs} h_{rs} - \frac{1}{2} \varphi_{,r} h_{rs,s} + \frac{1}{4} \varphi_{,s} h_{rr,s} + \frac{3}{4} \varphi_{,s} h_{00,s} - \\ - \frac{1}{2} h_{0r,s} h_{0r,s} + \frac{1}{2} h_{0r,s} h_{0s,r} - \frac{1}{2} \varphi_{,s} h_{0s,0} - \varphi_{,0} \varphi,$$

и

$$L'_{mn} = -\frac{1}{2} \varphi_{,mn} h_{00} - \varphi h_{00,mn} - \frac{1}{2} \varphi_{,mn} h_{ss} - \\ - \frac{1}{2} \delta_{mn} \varphi_{,rs} h_{rs} + \frac{1}{2} \varphi_{,ns} h_{ms} + \frac{1}{2} \varphi_{,ms} h_{ns} - \\ - \frac{1}{4} \delta_{mn} \varphi_{,s} h_{00,s} + \frac{1}{4} \delta_{mn} \varphi_{,s} h_{rr,s} - \frac{1}{2} \delta_{mn} \varphi_{,s} h_{rs,r} - \varphi_{,s} h_{mn,s} + \\ + \frac{1}{2} \varphi_{,s} h_{ms,n} + \frac{1}{2} \varphi_{,s} h_{ns,m} + \frac{1}{2} \varphi_{,n} h_{ms,s} + \\ + \frac{1}{2} \varphi_{,m} h_{ns,s} - \frac{1}{2} \varphi_{,n} h_{ss,m} - \frac{1}{2} \varphi_{,m} h_{ss,n} + \\ + \frac{1}{2} h_{0n,s} h_{0m,s} + \frac{1}{2} h_{0s,n} h_{0s,m} - \frac{1}{2} \varphi_{,0} h_{0m,n} - \\ - \frac{1}{2} \varphi_{,0} h_{0m,m} - \frac{1}{2} \varphi_{,n} h_{0m,0} - \frac{1}{2} \varphi_{,m} h_{0n,0} + \\ + \frac{1}{2} \delta_{mn} \varphi_{,s} h_{0s,0} + \varphi h_{0m,0n} + \varphi h_{0n,0m} + h_{0s} h_{0s,mn} - \\ - \frac{1}{2} h_{0s} h_{0m,ns} - \frac{1}{2} h_{0s} h_{0n,ms} + \delta_{mn} \varphi_{,0s} h_{0s} - \\ - \frac{1}{2} \varphi_{,0n} h_{0m} - \frac{1}{2} \varphi_{,0m} h_{0n} - \delta_{mn} \varphi \varphi_{,00} + \\ + \frac{1}{2} \delta_{mn} \varphi_{,0} \varphi_{,0} - \frac{1}{2} \varphi \varphi_{,m} \varphi_{,n} + \varphi \varphi \varphi_{,mn}.$$

После использования координатных условий и уравнений поля для этапов $l = 2$ и $l = 3$ величину $2\Lambda_{mn}$

оказывается возможным записать в виде

$$\begin{aligned}
 2\Lambda_{6mn} = & -\gamma_{50m, 0n} + \left(\gamma_{4mn} - \frac{1}{4} \delta_{mn} \varphi^2 \right)_{,00} + \gamma_{30s} \gamma_{30s, mn} - \\
 & - \frac{1}{2} \delta_{mn} \gamma_{30r, s} \gamma_{30r, s} - (\varphi, n \gamma_{30m}, 0) + (\varphi \gamma_{30m, n}, 0) + 2(\varphi \gamma_{30n, m}, 0) + \\
 & + \varphi, m \left(h_{400} - \frac{1}{2} \varphi^2 \right)_{,n} - \varphi, mn \left(h_{400} - \frac{1}{2} \varphi^2 \right) - \\
 & - \frac{9}{2} \delta_{mn} \varphi \varphi_{,00} - 4 \delta_{mn} \varphi_{,0} \varphi_{,0} + (\delta_{mn} \gamma_{50s, 0} - \delta_{ms} \gamma_{50n, 0}, s) + \\
 & + (\delta_{mn} \varphi h_{400, s} - \delta_{ms} \varphi h_{400, n}, s) + [(\varphi h_{4ms}), n - (\varphi h_{mn}), s], s + \\
 & + [\delta_{mn} (\varphi h_{rr}), s - \delta_{ms} (\varphi h_{rr}), n], s + \\
 & + [\delta_{ms} (\varphi h_{nr}), r - \delta_{mn} (\varphi h_{sr}), r], s + \frac{1}{2} (\gamma_{30s, m} \gamma_{30n} - \gamma_{30n, m} \gamma_{30s}), s + \\
 & + (\gamma_{30m, s} \gamma_{30n} - \gamma_{30m, n} \gamma_{30s}), s + \frac{1}{2} (\delta_{mn} \gamma_{30s, r} \gamma_{30r} - \delta_{ms} \gamma_{30n, r} \gamma_{30r}), s + \\
 & + (\delta_{ms} \gamma_{30r, n} \gamma_{30r} - \delta_{mn} \gamma_{30r, s} \gamma_{30r}), s + (\delta_{mn} \varphi_{,0} \gamma_{30s} - \delta_{ms} \varphi_{,0} \gamma_{30n}), s + \\
 & + [\delta_{mn} (\varphi \gamma_{30s}), 0 - \delta_{ms} (\varphi \gamma_{30n}), 0], s + \frac{1}{2} (\delta_{mn} \varphi^2 \varphi_{,s} - \delta_{ms} \varphi^2 \varphi_{,n}), s. \quad (78)
 \end{aligned}$$

Все члены, представленные в виде дивергенций от антисимметричных выражений, не скажутся на значениях интеграла $\overset{p}{C}_m$. Вклады в значение этого интеграла дают лишь

первые одиннадцать членов выписанного выражения $2\Lambda_{6mn}$. Методика вычисления соответствующих величин

основана, как и прежде, на разложении подынтегральных функций в окрестности p -особенности и использовании формул (57), (58). Таким путем находятся следующие вклады в $\overset{p}{C}_m$ от первых одиннадцати членов выражения (78):

$$\begin{aligned}
 [-\gamma_{50m, 0n}] = & 4m \left\{ 2 \overset{p}{\dot{x}}^m \overset{p}{\dot{x}}^s \overset{p}{\dot{x}}^s + \frac{3}{2} \overset{p}{\dot{x}}^m \overset{p}{\dot{x}}^s \overset{p}{\dot{x}}^s + \right. \\
 & + \sum_{q=1}^N \binom{p}{q} m \left[(\overset{p}{\dot{x}}^m - 2 \overset{q}{\dot{x}}^m) \overset{p}{\psi} + (\overset{p}{\dot{x}}^m - 2 \overset{q}{\dot{x}}^m) (\overset{q}{\dot{x}}^s - \overset{q}{\dot{x}}^s) \overset{p}{\psi}, s + \right. \\
 & \left. \left. + \left(\frac{4}{3} \overset{p}{\dot{x}}^s - \overset{q}{\dot{x}}^s \right) \overset{q}{\psi}, s \overset{p}{\dot{x}}^m + \left(\frac{4}{3} \overset{q}{\dot{x}}^s - \overset{p}{\dot{x}}^s \right) \overset{p}{\dot{x}}^s \overset{q}{\psi}, m \right] \right\},
 \end{aligned}$$

(обозначены квадратными скобками от соответствующих членов).

$$\left[\left(\gamma_{mn} - \frac{1}{4} \delta_{mn} \varphi^2 \right)_{,00} \right] = 4m^p \left\{ - \frac{p}{\dot{x}^m \dot{x}^s \dot{x}^s} - \frac{2}{3} \frac{p}{\dot{x}^m \dot{x}^s \dot{x}^s} + \right. \\ \left. + \sum_{q=1}^N \binom{p}{q} m^q \left[\frac{1}{6} \frac{p}{\dot{x}^m} \psi + \frac{1}{3} \dot{x}^m (\dot{x}^s - \dot{x}^s) \psi_{,s} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2}{15} \frac{p}{\dot{x}^m \dot{x}^s \dot{x}^s} \psi_{,s} - \frac{2}{5} \frac{p}{\dot{x}^m \dot{x}^s \dot{x}^s} \psi_{,m} \right] \right\},$$

$$\left[\gamma_{0s} \gamma_{0s, mn} \right] = 4m^p \sum_{q=1}^N \binom{p}{q} \frac{8}{3} m^q \dot{x}^s \dot{x}^s \psi_{,m},$$

$$\left[-\frac{1}{2} \delta_{mn} \gamma_{0r, s} \gamma_{0r, s} \right] = 4m^p \sum_{q=1}^N \binom{p}{q} \frac{4}{3} m^q \dot{x}^s \dot{x}^s \psi_{,m},$$

$$\left[-(\varphi_{,n} \gamma_{0m})_{,0} \right] = 4m^p \sum_{q=1}^N \binom{p}{q} 2m^q \left(- \frac{q}{\dot{x}^m \dot{x}^s} + \frac{q}{\dot{x}^m \dot{x}^s} \psi_{,s} + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \frac{p}{\dot{x}^m \dot{x}^s \dot{x}^s} \psi_{,s} - \frac{2}{3} \frac{q}{\dot{x}^m \dot{x}^s \dot{x}^s} \psi_{,s} \right),$$

$$\left[(\varphi \gamma_{0m, n})_{,0} \right] = 4m^p \sum_{q=1}^N \binom{p}{q} 2m^q \left(\dot{x}^m \dot{x}^s \psi - \dot{x}^m \dot{x}^s \psi_{,s} + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} \frac{p}{\dot{x}^m \dot{x}^s \dot{x}^s} \psi_{,s} - \frac{1}{3} \frac{q}{\dot{x}^m \dot{x}^s \dot{x}^s} \psi_{,s} \right),$$

$$\left[2(\varphi \gamma_{0n, m})_{,0} \right] = 4m^p \sum_{q=1}^N \binom{p}{q} 4m^q \left(\frac{1}{3} \dot{x}^m \dot{x}^s \psi - \frac{1}{3} \dot{x}^m \dot{x}^s \psi_{,s} - \right. \\ \left. - \frac{1}{3} \frac{p}{\dot{x}^m \dot{x}^s \dot{x}^s} \psi_{,m} + \frac{1}{15} \frac{p}{\dot{x}^m \dot{x}^s \dot{x}^s} \psi_{,s} + \frac{1}{5} \frac{p}{\dot{x}^m \dot{x}^s \dot{x}^s} \psi_{,m} \right),$$

$$\left[\varphi_{,m} \left(h_{00} - \frac{1}{2} \varphi^2 \right)_{,n} \right] = \\ = 4m^p \sum_{q=1}^N \binom{p}{q} m^q \left(-\frac{1}{6} \frac{q}{r_{,00m}} - \frac{11}{6} \frac{p}{\dot{x}^s \dot{x}^s \dot{x}^s} \psi_{,m} - \frac{1}{2} \frac{q}{\dot{x}^s \dot{x}^s \dot{x}^s} \psi_{,m} + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \binom{q}{k} m^k \psi_{,m} \psi + \sum_{k=1}^N \binom{p}{k} m^k \psi_{,m} \psi \right),$$

$$\begin{aligned}
& \left[-\varphi_{,mn} \left(h_{00} - \frac{1}{2} \varphi^2 \right) \right] = \\
& = 4m \sum_{q=1}^N \binom{p}{q} m \left(-\frac{1}{3} r_{,00m}^{(p)q} - \dot{x}^s \dot{x}^s \psi_{,m}^{(p)q} + \frac{2}{3} \sum_{k=1}^N \binom{q}{k} m \psi_{,m}^{(p)k} \psi^{(p)k} \right), \\
& \left[-\frac{9}{2} \delta_{mn} \varphi \varphi_{,00} \right] = \\
& = 4m \sum_{q=1}^N \binom{p}{q} m \left(-\frac{3}{2} \dot{x}^m \dot{x}^{pq} + \frac{3}{5} \dot{x}^s \dot{x}^s \psi_{,m}^{(p)q} - \frac{9}{5} \dot{x}^m \dot{x}^s \psi_{,s}^{(p)q} \right), \\
& \left[-4\delta_{mn} \varphi_{,0} \varphi_{,0} \right] = 4m \sum_{q=1}^N \binom{p}{q} \frac{8}{3} \dot{x}^m \dot{x}^s \psi_{,s}^{(p)q}.
\end{aligned}$$

Суммирование всех результатов и использование ньютоновых уравнений движения дает

$$\begin{aligned}
C_m^p = 4m \sum_{q=1}^N \binom{p}{q} m \left\{ \left[4\dot{x}^s \dot{x}^s - \dot{x}^s \dot{x}^s - \frac{3}{2} \dot{x}^s \dot{x}^s + (5m + 4m) \psi \right] \psi_{,m}^{(p)q} + \right. \\
\left. + (4\dot{x}^m \dot{x}^s - 4\dot{x}^s \dot{x}^m - 3\dot{x}^m \dot{x}^s + 4\dot{x}^m \dot{x}^s) \psi_{,s}^{(p)q} - \frac{1}{2} r_{,00m}^{(p)q} + \right. \\
\left. + \sum_{k=1}^N \binom{p,q}{k} m \left[(4\psi + \psi) \psi_{,m}^{(p)k} - 4\psi \psi_{,m}^{(p)k} \right] \right\}. \quad (79)
\end{aligned}$$

Замечая, что

$$r_{,00m}^{(p)q} = r_{,mrs}^{(p)q} \dot{x}^r \dot{x}^s - r_{,ms}^{(p)q} \sum_{k=1}^N \binom{p,q}{k} m \psi_{,s}^{(p)k},$$

можно переписать последние члены в (79) в виде

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} r_{,00m}^{(p)q} + \sum_{k=1}^N \binom{p,q}{k} m \left[(4\psi + \psi) \psi_{,m}^{(p)k} - 4\psi \psi_{,m}^{(p)k} \right] = \\
& = -\frac{1}{2} r_{,mrs}^{(p)q} \dot{x}^r \dot{x}^s + \sum_{k=1}^N \binom{p,q}{k} m \left\{ \left[4\psi + \frac{1}{2} (\dot{x}^s - \dot{x}^s) \psi_{,s}^{(p)k} + \psi \right] \psi_{,m}^{(p)k} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{7}{2} \psi \psi_{,m}^{(p)k} \right\}. \quad (80)
\end{aligned}$$

Тем самым завершается нахождение потенциалов тяготения и пост-ньютоновых уравнений движения методом ЕИ!1 в гармонической системе координат.

§ 4. Уравнения движения и координатные условия

Выше уже указывалось, что в любых координатах, отличающихся от гармонических на члены не ниже третьего порядка относительно λ , пост-ньютоновские уравнения движения имеют одну и ту же форму. Выясним теперь влияние функций a_m в формулах (37) на вид этих уравнений. Будем отмечать гармонические координаты звездочкой и со-вершим преобразование (37), начинающееся с членов второго порядка:

$$\left. \begin{aligned} x^{*0} &= x^0 + \lambda^3 a_0 + \lambda^5 a_0 + \dots, \\ x^{*m} &= x^m - \lambda^2 a_m - \lambda^4 a_m - \dots \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

(в дальнейшем значки 2 и 3 у функций a_m и a_0 опускаются). Тогда по формулам (38) находим значения потенциалов тяготения в системе x^m :

$$\left. \begin{aligned} h_{00} &= \varphi, \\ h_{mn} &= \delta_{mn} \varphi + a_{m,n} + a_{n,m}, \\ h_{0m} &= h_{0m}^* + a_{m,0} + a_{0,m}, \\ h_{00} &= h_{00}^* - a_s \varphi_{,s} + 2a_{0,0} - \sum_{p=1}^N 2m^p \psi_{,s}^p \bar{a}_{s,p}, \\ h_{mn} &= h_{mn}^* - a_{m,n} \varphi - a_{n,m} \varphi - \delta_{mn} a_s \varphi_{,s} - a_{s,n} a_{s,m} + \\ &\quad + a_{m,n} + a_{n,m} - \delta_{mn} \sum_{p=1}^N 2m^p \psi_{,s}^p \bar{a}_{s,p}, \\ h_{0m} &= h_{0m}^* - a_s h_{0m,s}^* - a_{s,m} h_{0s}^* - a_{m,0} \varphi - a_{s,0} a_{s,m} + \\ &\quad + a_{0,m} \varphi + a_{m,0} + a_{0,m} + \sum_{p=1}^N 4m^p [\psi_{,s}^p \dot{x}^m \bar{a}_{s,p}^p - \psi^p (\bar{a}_m)_{,0}]. \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

Здесь φ , h_{00}^* , h_{mn}^* и h_{0m}^* выражаются через x^m и \dot{x}^m при помощи прежней совокупности формул (49), (55), (65), (70),

(73) и (76). При выводе этих выражений надо учесть необходимость преобразования в формулах (38) $g_{\alpha\beta}^*(x^{*\sigma})$ к $g_{\alpha\beta}^*(x^\sigma)$. Это производится по формуле

$$g_{\alpha\beta}^*(x^{*\sigma}, x^{*s}, \dot{x}^{*s}) = g_{\alpha\beta}^*(x^\sigma, x^s, \dot{x}^s) + g_{\alpha\beta}^*|_{\sigma} (x^{*\sigma} - x^\sigma) + \\ + \sum_{p=1}^N \left[\frac{\partial g_{\alpha\beta}^*}{\partial x^s} (x^{*s} - x^s) + \frac{\partial g_{\alpha\beta}^*}{\partial \dot{x}^s} (\dot{x}^{*s} - \dot{x}^s) \right] + \dots \quad (83)$$

Кроме того, в выражениях (82) введено обозначение

$$\bar{a}_m^p = a_m \Big|_{x^s = \dot{x}^s},$$

причем, если функция a_m имеет особенность при $x^s = \dot{x}^s$, то \bar{a}_m^p включает в себя лишь регулярную часть этой функции (это равносильно записи \bar{a}_m^p с помощью модифицированных δ -функций, введенных Инфельдом и Плебаньским). Производные $(\bar{a}_m^p)_{,0}$ вычисляются по формуле

$$(\bar{a}_m^p)_{,0} = \overbrace{a_{m,0}^p} + \overbrace{a_{m,s}^p} \dot{x}^s.$$

Значения потенциалов (82) можно было бы найти путем непосредственного решения уравнений поля без добавления гармонических условий. Последовательно определив величины $2\Lambda_{0m}^3$, $2\Lambda_{mn}^4$, $2\Lambda_{0m}^5$, $2\Lambda_{mn}^6$ (что требует трудоемких, но принципиально простых вычислений), можно убедиться, что введение произвольных функций не влияет на значения интегралов C_0^3 , C_m^4 , C_0^5 . Что же касается C_m^6 , то, обозначая прежнее значение (79) этого интеграла через C_m^{*6} , имеем

$$C_m^6 = C_m^{*6} + 4m^p \left[-(\bar{a}_m^p)_{,00} + \sum_{q=1}^N m^q (\bar{a}_s^q - \bar{a}_s^q) \psi_{,ms} \right], \quad (84)$$

где

$$(\bar{a}_m^p)_{,00} = \overbrace{a_{m,00}^p} + 2\overbrace{a_{m,s0}^p} \dot{x}^s + \overbrace{a_{m,rs}^p} \dot{x}^r \dot{x}^s + \overbrace{a_{m,rs}^p} \dot{x}^s.$$

Подстановка значения (84) в (32) дает пост-ньютоновы уравнения движения в координатах x^σ . Их можно получить и из уравнений движения в гармонических координатах, если в этих последних непосредственно совершить преобразование (81), записанное для координат особенностей $x^{*\sigma}$.

В заключение выпишем в явном виде метрику гравитационного поля N сферически симметричных тел и уравнения их поступательного движения. Ограничиваясь лишь потенциалами h_{00} , h_{mn} , h_{0m} , h_{00} и несколько видоизменяя обозначения, имеем

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & \left[1 - \frac{2}{c^2} \sum_{p=1}^N \frac{\gamma m_p}{\rho_p} + \frac{2}{c^4} \left(\sum_{p=1}^N \frac{\gamma m_p}{\rho_p} \right)^2 + \frac{2}{c^2} \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \frac{\gamma^2 m_p m_q}{\rho_p r_{pq}} - \right. \\
 & - \frac{3}{c^4} \sum_{p=1}^N \frac{\gamma m_p}{\rho_p} \dot{x}_p^s \dot{x}_p^s - \frac{1}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{p=1}^N \gamma m_p \rho_p + \frac{2}{c^4} \frac{\partial a_0}{\partial t} + \\
 & + \frac{2}{c^4} \sum_{p=1}^N \frac{\gamma m_p}{\rho_p^3} (x^s - x_p^s) (\ddot{a}_s - a_s) \left. \right] c^2 dt^2 + \\
 & + \frac{2}{c^2} \left(4 \sum_{p=1}^N \frac{\gamma m_p}{\rho_p} \dot{x}_p^s + \frac{\partial a_0}{\partial x^s} + \frac{\partial a_s}{\partial t} \right) c dt dx^s + \\
 & + \left[- \left(1 + \frac{2}{c^2} \sum_{p=1}^N \frac{\gamma m_p}{\rho_p} \right) \delta_{mn} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial a_m}{\partial x^n} + \frac{\partial a_n}{\partial x^m} \right) \right] dx^m dx^n.
 \end{aligned} \tag{85}$$

Здесь m_p — масса тела p , x_p^s ($s = 1, 2, 3$) — прямоугольные координаты его центра инерции, ρ_p — расстояние от этого тела до текущей точки поля x^s , r_{pq} — расстояние между телами p и q , a_0 и a_s — четыре произвольные функции пространственных координат и времени, характеризующие выбор координатной системы, причем \ddot{a}_s , как и прежде, означает подстановку координат x_p^s вместо x^s и устранение расходимостей. Если x^s — гармонические координаты, то все произвольные функции обращаются в нули.

Пост-ньютоновы уравнения движения (32) задачи N тел принимают вид

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_p^m + \sum_{q=1}^N \binom{p}{q} \gamma m_q \frac{x_p^m - x_q^m}{r_{pq}^3} &= \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \tilde{a}_m^p}{dt^2} + \\
 + \frac{1}{c^2} \sum_{q=1}^N \binom{p}{q} \gamma m_q &\left\{ \left[4\dot{x}_p^s \dot{x}_q^s - \dot{x}_p^s \dot{x}_p^s - 2\dot{x}_q^s \dot{x}_q^s + \frac{3}{2} \frac{((x_p^s - x_q^s) \dot{x}_q^s)^2}{r_{pq}^2} + \right. \right. \\
 + \gamma \frac{5m_p + 4m_q}{r_{pq}} + \sum_{k=1}^N \binom{p, q}{k} \gamma m_k &\left. \left(\frac{4}{r_{pk}} + \frac{1}{r_{qk}} + \frac{(x_p^s - x_q^s)(x_k^s - x_q^s)}{2r_{qk}^3} \right) \right] \times \\
 \times \frac{x_p^m - x_q^m}{r_{pq}^3} + (x_p^s - x_q^s)(4\dot{x}_p^s - 3\dot{x}_q^s) &\frac{\dot{x}_p^m - \dot{x}_q^m}{r_{pq}^3} + \\
 + \frac{7}{2} \sum_{k=1}^N \binom{p, q}{k} \gamma m_k \frac{x_k^m - x_q^m}{r_{pq} r_{qk}^3} + \\
 + \frac{1}{r_{pq}^3} \left[(\tilde{a}_m^p - \tilde{a}_m^q) - \frac{3}{r_{pq}^2} (\tilde{a}_s^p - \tilde{a}_s^q) (x_p^s - x_q^s) (x_p^m - x_q^m) \right] \}. &\quad (86)
 \end{aligned}$$

В качестве иллюстрации примем

$$a_m = \alpha \sum_{p=1}^N \gamma m_p \frac{x_p^m - x_p^m}{\rho_p}, \quad a_0 = \frac{1}{2} \beta \frac{\partial}{\partial t} \sum_{p=1}^N \gamma m_p \rho_p,$$

где α и β — произвольные вещественные числа. Тогда

$$\tilde{a}_m^p = \alpha \sum_{q=1}^N \binom{p}{q} \gamma m_q \frac{x_p^m - x_q^m}{r_{pq}}$$

« метрика (85) перейдет в

$$\begin{aligned}
 d\mathcal{L}^2 &= \left\{ 1 - \frac{2}{c^2} \sum_{p=1}^N \frac{\gamma m_p}{\rho_p} + \frac{2(1-\alpha)}{c^4} \left(\sum_{p=1}^N \frac{\gamma m_p}{\rho_p} \right)^2 + \right. \\
 + \frac{2}{c^4} \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \binom{p}{q} \frac{\gamma^2 m_p m_q}{\rho_p} &\left[\frac{1}{r_{pq}} + \alpha \frac{(x_p^s - x_q^s)(x_p^s - x_q^s)}{\rho_p^2} \left(\frac{1}{r_{pq}} - \frac{1}{\rho_q} \right) \right] - \\
 - \frac{3}{c^4} \sum_{p=1}^N \frac{\gamma m_p}{\rho_p} \dot{x}_p^s \dot{x}_p^s + \frac{\beta-1}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} &\sum_{p=1}^N \gamma m_p \rho_p \left. \right\} c^2 dt^2 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2}{c^3} \sum_{p=1}^N \frac{\gamma m_p}{\rho_p} \left[\left(4 - \alpha - \frac{1}{2} \beta \right) \dot{x}_p^s + \frac{\alpha + \frac{1}{2} \beta}{\rho_p^2} (x^s - x_p^s) \times \right. \\
 & \times (x^r - x_p^r) \dot{x}_p^r \left. \right] c dt dx^s - \left[\left(1 + \frac{2(1-\alpha)}{c^2} \sum_{p=1}^N \frac{\gamma m_p}{\rho_p} \right) \delta_{mn} + \right. \\
 & \left. + \frac{2\alpha}{c^2} \sum_{p=1}^N \gamma m_p \frac{(x^m - x_p^m)(x^n - x_p^n)}{\rho_p^3} \right] dx^m dx^n, \quad (87)
 \end{aligned}$$

а уравнения (86) станут

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_p^m + \sum_{q=1}^{N(p)} \gamma m_q \frac{x_p^m - x_q^m}{r_{pq}^3} &= \frac{1}{c^2} \sum_{q=1}^{N(p)} \gamma m_q \{ [(4 + 2\alpha) \dot{x}_p^s \dot{x}_q^s - \\
 & - (1 + \alpha) \dot{x}_p^s \dot{x}_p^s - (2 + \alpha) \dot{x}_q^s \dot{x}_q^s + \frac{3}{2r_{pq}^2} ((x_p^s - x_q^s) \dot{x}_q^s)^2 + \\
 & + \frac{3\alpha}{r_{pq}^2} ((x_p^s - x_q^s)(\dot{x}_p^s - \dot{x}_q^s))^2 + (5 - 2\alpha) \frac{\gamma m_p}{r_{pq}} + (4 - 2\alpha) \frac{\gamma m_q}{r_{pq}} + \\
 & + \sum_{k=1}^{N(p,q)} \gamma m_k \left(\frac{4 - 2\alpha}{r_{pk}} + \frac{1}{r_{qk}} + \left(\frac{\alpha + \frac{1}{2}}{r_{qk}^3} - \frac{\alpha}{r_{pk}^3} + \frac{3\alpha}{r_{pk} r_{pq}^2} - \frac{3\alpha}{r_{qk} r_{pq}^2} \right) \times \right. \\
 & \left. \times (x_p^s - x_q^s)(x_k^s - x_q^s) \right] \frac{x_p^m - x_q^m}{r_{pq}^3} + [(4 - 2\alpha) \dot{x}_p^s - (3 - 2\alpha) \dot{x}_q^s] \times \\
 & \times (x_p^s - x_q^s) \frac{\dot{x}_p^m - \dot{x}_q^m}{r_{pq}^3} + \sum_{k=1}^{N(p,q)} \gamma m_k \left[\frac{\frac{7}{2} - \alpha}{r_{qk}^3} + \alpha \left(\frac{1}{r_{pk}^3} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{r_{pq}^2 r_{qk}} - \frac{1}{r_{pk} r_{pq}^2} \right) \right] \frac{x_k^m - x_q^m}{r_{pq}} \}. \quad (88)
 \end{aligned}$$

Метрика (87) и уравнения (88) являются обобщениями метрики (39) гл. 5 и уравнений движения пробной частицы задачи Шварцшильда. Придавая константам α и β различные простые численные значения, можно получить метрику поля и уравнения движения в различных, часто встречающихся в литературе координатных системах. Например, системе координат работы Хейвуда (Haywood, 1952), определяемой условиями $g_{\nu}^{\mu\nu} = 0$, соответствуют

значения $\alpha = 1/2$, $\beta = 1$, а в курсе Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица (1962) используется система со значениями $\alpha = 0$, $\beta = 1$.

Заметим еще, что уравнения (88) могут быть записаны в лагранжевой форме

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_p^m} - \frac{\partial L}{\partial x_p^m} = 0 \quad (89)$$

с функцией Лагранжа

$$\begin{aligned} L = & \sum_{p=1}^N m_p \left[\frac{1}{2} \dot{x}_p^m \dot{x}_p^m + \frac{1}{8c^2} (\dot{x}_p^m \dot{x}_p^m)^2 \right] + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \gamma m_p m_q \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{r_{pq}} + \frac{\alpha - \frac{1}{2}}{c^2} \frac{\gamma (m_p + m_q)}{r_{pq}^2} + \frac{1}{2c^2 r_{pq}} [(3 - 2\alpha)(\dot{x}_p^m \dot{x}_p^m + \right. \\ & \left. + \dot{x}_q^m \dot{x}_q^m) + (4\alpha - 7) \dot{x}_p^m \dot{x}_q^m] + \frac{1}{2c^2 r_{pq}^3} (x_p^m - x_q^m)(x_p^l - x_q^l) \times \right. \\ & \left. \times [2\alpha (\dot{x}_p^m \dot{x}_p^l + \dot{x}_q^m \dot{x}_q^l) - (1 + 4\alpha) \dot{x}_p^m \dot{x}_q^l] \right\} + \\ & + \frac{1}{6c^2} \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \sum_{k=1}^N \gamma^2 m_p m_q m_k \left\{ - \left(\frac{1}{r_{pq} r_{pk}} + \frac{1}{r_{qk} r_{qp}} + \frac{1}{r_{kp} r_{kq}} \right) + \right. \\ & \left. + \alpha \left[\left(\frac{\partial r_{qk}}{\partial x_q^s} + \frac{\partial r_{kp}}{\partial x_k^s} \right) \frac{\partial}{\partial x_p^s} \frac{1}{r_{pq}} + \left(\frac{\partial r_{kp}}{\partial x_k^s} + \frac{\partial r_{pq}}{\partial x_p^s} \right) \frac{\partial}{\partial x_q^s} \frac{1}{r_{qk}} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{\partial r_{pq}}{\partial x_p^s} + \frac{\partial r_{qk}}{\partial x_q^s} \right) \frac{\partial}{\partial x_k^s} \frac{1}{r_{kp}} \right] \right\}. \quad (90) \end{aligned}$$

Более подробно вопрос о лагранжевой форме уравнений движения задачи N тел будет рассмотрен в следующей главе.

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЗАДАЧИ N ВРАЩАЮЩИХСЯ ТЕЛ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

§ 1. Принципы метода Фока

В методе Фока решение уравнений поля

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} = -\frac{8\pi\gamma}{c^2} T^{\mu\nu} \quad (1)$$

ищется в гармонической системе координат

$$\frac{\partial (\sqrt{-g} g^{\mu\nu})}{\partial x^\mu} = 0 \quad (2)$$

путем разложения компонент метрического тензора и тензора масс в ряды по малым отношениям гравитационного потенциала и квадрата скорости тел к квадрату скорости света. В силу тождеств Бианки, которым удовлетворяют левые части уравнения поля, должны выполняться условия

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (3)$$

Если в левой части (1), носящей название тензора Эйнштейна, использовать условия гармоничности (2), то условия (3) уже не будут непосредственно вытекать из уравнений поля, а будут выполняться лишь в силу выполнения условий гармоничности. Действительно, левые части условий (3) можно представить в виде дифференциальных операторов от левых частей условий гармоничности. Так как уравнения поля решаются приближенно, то и эту дифференциальную зависимость достаточно иметь в приближенном виде, а именно

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\partial (\sqrt{-g} g^{\mu\nu})}{\partial x^\mu} = \frac{16\pi\gamma}{c^2} g \nabla_\mu T^{\mu\nu}, \quad (4)$$

где Δ — трехмерный оператор Лапласа. Так как метод Фока изложен самим автором во всех подробностях

(Фок, 1955), то исходные формулы этого метода будут приведены в этом параграфе без детального вывода. При сравнении с формулами первоисточника нужно лишь иметь в виду, что здесь принято $x^0 = ct$, а не $x^0 = t$, как в книге В. А. Фока.

Приближенное соотношение (4) устанавливает связь между точностями выполнения условий (2) и (3). Если рассматривать (4) как уравнения относительно левых частей соотношений (2), то на основании формулы (85) гл. 4 их решение запишется в виде

$$\frac{c^2}{4\gamma} \frac{\partial (\sqrt{-g} g^{\mu\nu})}{\partial x^\mu} = \sum_a \left\{ \frac{\mu_a}{|r-a|} - \mu_a^k \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{1}{|r-a|} + \dots - \frac{1}{c} \frac{d\mu_a}{dt} + \frac{1}{2c^2} \frac{d^2}{dt^2} \left[\mu_a |r-a| - \mu_a^k \frac{\partial}{\partial x^k} |r-a| + \dots \right] \right\}, \quad (5)$$

где

$$\mu_a = - \int_{(a)} g \nabla_\mu T^{\mu\nu} (dx)^3, \quad \mu_a^k = - \int_{(a)} (x^k - a^k) g \nabla_\mu T^{\mu\nu} (dx)^3, \dots$$

Интегралы здесь распространены по объемам, занятым телами a, b, c, \dots , создающими поле, а суммирование происходит по всем телам системы. Чтобы облегчить сопоставление с результатами В. А. Фока и представителей его школы, здесь с небольшими отклонениями используется система обозначений их работ. В частности, a^k означают прямоугольные координаты центра инерции тела a . В дальнейшем, ради удобства записи, индексы преимущественно записываются внизу, даже если они и являются контрвариантными, например, x^i, v^i, a^i будут записываться как x_i, v_i, a_i .

В силу (5) для выполнения условий гармоничности нужно потребовать, прежде всего, обращения в нуль моментов μ_a . Это приводит к условиям

$$\int_{(a)} g \nabla_\alpha T^{\alpha i} (dx)^3 = 0, \quad (6)$$

представляющим собой уравнения поступательного движения. Как оказывается, обращение в нуль нулевой компоненты момента μ_a следует отсюда автоматически. Тре-

бование обращения в нуль комбинации моментов

$$\int_{(a)} g(x_i \nabla_\alpha T^{\alpha j} - x_j \nabla_\alpha T^{\alpha i}) (dx)^3 = 0 \quad (7)$$

дает закон изменения момента количества движения соответствующего тела. После выделения членов, характеризующих орбитальный момент, отсюда вытекают непосредственные уравнения вращательного движения.

Начальные члены разложений компонент метрического тензора имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} g_{00} &= 1 - \frac{2U^*}{c^2} + \frac{2U^{*2}}{c^4} + \dots, \\ g_{0i} &= \frac{4U_i}{c^3} + \dots, \\ g_{ij} &= - \left(1 + \frac{2U}{c^2} \right) \delta_{ij} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} g^{00} &= 1 + \frac{2U^*}{c^2} + \frac{2U^{*2}}{c^4} + \dots, \\ g^{0i} &= \frac{4U_i}{c^3} + \dots, \\ g^{ij} &= - \left(1 - \frac{2U}{c^2} \right) \delta_{ij} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

и

$$g = - \left(1 + \frac{4U}{c^2} + \dots \right). \quad (10)$$

Здесь U — ньютонов потенциал, U_i — вектор-потенциал, а U^* — обобщенный ньютонов потенциал, совпадающий с U в первом приближении. Тензор масс макроскопических тел определяется формулой (36) гл. 4. Подстановка разложений (8) в эту формулу позволяет написать:

$$\left. \begin{aligned} T^{00} &= \rho \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} v^2 + \Pi - U \right) \right] + \dots, \\ cT^{0i} &= \rho v_i \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} v^2 + \Pi - U \right) \right] + \frac{1}{c^2} p v_i + \dots, \\ c^2 T^{ij} &= \rho v_i v_j + p \delta_{ij} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Как и ранее, ρ — плотность масс тела, Π — упругая энергия единицы массы, p — изотропное давление. С пужной степенью точности уравнения поля дают

$$\Delta U = -4\pi\gamma\rho, \quad (12)$$

$$\Delta U_i = -4\pi\gamma\rho v_i, \quad (13)$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) U^* = -4\pi\gamma\sigma, \quad (14)$$

где $\sigma = T^{\mu\mu}$ или

$$\sigma = \rho + \frac{1}{c^2} \rho \left(\frac{3}{2} v^2 - U + \Pi \right) + \frac{3p}{c^2}. \quad (15)$$

Из уравнения (14) следует, что U^* может быть выражено через U и две вспомогательные функции W и \tilde{U} :

$$U^* = U + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \tilde{U}, \quad (16)$$

причем

$$\Delta W = U \quad (17)$$

и

$$\Delta \tilde{U} = -4\pi\gamma(\sigma - \rho). \quad (18)$$

Таким образом,

$$g_{00} = 1 - \frac{2U}{c^2} + \frac{2}{c^4} \left(U^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - c^2 \tilde{U} \right) + \dots \quad (19)$$

и

$$g^{00} = 1 + \frac{2U}{c^2} + \frac{2}{c^4} \left(U^2 + \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + c^2 \tilde{U} \right) + \dots \quad (20)$$

Значения (8) приводят к соотношениям

$$g \nabla_{\alpha} T^{\alpha i} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (g T^{i0}) + \frac{\partial}{\partial x_k} (g T^{ik}) + \left(\frac{\partial U^*}{\partial x_i} + \frac{4}{c^2} \frac{\partial U_i}{\partial t} \right) T^{\mu\mu} + \\ + \frac{4}{c} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right) T^{0k},$$

которые вместе с уравнением неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_k)}{\partial x_k} = 0$$

позволяют преобразовать уравнения (6) к виду

$$\frac{dP_i^{(a)}}{dt} = F_i^{(a)}, \quad (21)$$

где

$$P_i^{(a)} = \int_{(a)} G_i(dx),^3 \quad (22)$$

$$F_i^{(a)} = \int_{(a)} \left(\sigma \frac{\partial U}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x_i} - \frac{1}{c^2} \rho v_k \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_k \partial t} - \frac{4}{c^2} \rho v_k \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right) (dx)^3 \quad (23)$$

и

$$G_i = \left[\rho + \frac{1}{c^2} \rho \left(\frac{1}{2} v^2 + \Pi + 3U \right) + \frac{P}{c^2} \right] v_i - \frac{4}{c^2} \rho U_i - \frac{1}{c^2} \rho \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial t}. \quad (24)$$

Точно так же уравнения (7) сводятся к

$$\frac{dM_{ij}^{(a)}}{dt} = L_{ij}^{(a)} \quad (25)$$

со значениями

$$M_{ij}^{(a)} = \int_{(a)} (x_i G_j - x_j G_i) (dx)^3, \quad (26)$$

$$L_{ij}^{(a)} = \int_{(a)} \left[\sigma \left(x_i \frac{\partial U}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial U}{\partial x_i} \right) + \rho \left(x_i \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{c^2} \rho v_k \left(x_i \frac{\partial^2 W}{\partial x_j \partial x_k \partial t} - x_j \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_k \partial t} \right) - \frac{4}{c^2} \rho v_k \left(x_i \frac{\partial U_k}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{c^2} \rho \left(v_i \frac{\partial^2 W}{\partial x_j \partial t} - v_j \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial t} \right) - \frac{4}{c^2} \rho (v_i U_j - v_j U_i) \right] (dx)^3. \quad (27)$$

В каждой из функций U , U_i , W , \tilde{U} можно выделить внутреннюю часть, обусловленную рассматриваемым телом, и внешнюю, вызванную действием остальных тел. Если в соответствии с этим положить

$$U = u^{(a)} + U^{(a)}, \quad U_i = u_i^{(a)} + U_i^{(a)}, \quad W = w^{(a)} + W^{(a)}, \\ \tilde{U} = \tilde{u}^{(a)} + \tilde{U}^{(a)},$$

то внутренние части будут определяться выражениями

$$u^{(a)} = \gamma \int_{(a)} \frac{\rho' (dx')^3}{|r - r'|}, \quad u_i^{(a)} = \gamma \int_{(a)} \frac{\rho' v'_i (dx')^3}{|r - r'|},$$

$$w^{(a)} = \frac{1}{2} \gamma \int_{(a)} \rho' |r - r'| (dx')^3, \quad \tilde{u}^{(a)} = \gamma \int_{(a)} \frac{(\sigma' - \rho')(dx')^3}{|r - r'|}.$$

В $F_i^{(a)}$ и $L_{ij}^{(a)}$ вклады от внутренних частей подынтегральных функций обращаются в нуль. Например, первые два члена в (23) в пределах принятой точности сводятся к

$$\int_{(a)} \sigma \frac{\partial (u^{(a)} + \tilde{u}^{(a)})}{\partial x_i} (dx)^3 = -\gamma \int_{(a)} \int_{(a)} \frac{\sigma \sigma' (x_i - x'_i)}{|r - r'|^3} (dx)^3 (dx')^3$$

и в результате дают нуль в силу антисимметрии подынтегральной функции относительно x_i и x'_i . По той же причине после интегрирования по частям и использования уравнения неразрывности обращается в нуль следующий член в (23):

$$\int_{(a)} \rho v_k \frac{\partial^2 w^{(a)}}{\partial x_i \partial x_k \partial t} (dx)^3 = \int_{(a)} \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial^2 w^{(a)}}{\partial x_i \partial t} (dx)^3 =$$

$$= \frac{1}{2} \gamma \int_{(a)} \int_{(a)} \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial \rho'}{\partial t} \frac{x_i - x'_i}{|r - r'|} (dx)^3 (dx')^3.$$

И, наконец, последний член в (23) в силу

$$\int_{(a)} \rho v_k \frac{\partial u_k^{(a)}}{\partial x_i} (dx)^3 = -\gamma \int_{(a)} \int_{(a)} \rho \rho' \frac{v_k v'_k (x_i - x'_i)}{|r - r'|^3} (dx)^3 (dx')^3$$

также дает нулевой вклад при интегрировании внутренней части.

Совершенно аналогично показывается, что и в $L_{ij}^{(a)}$ внутренние части подынтегральных функций не сказываются при интегрировании. Поэтому в выражениях (23) и (27) для $F_i^{(a)}$ и $L_{ij}^{(a)}$ надо всюду вместо U , U_i , W и \tilde{U} писать $U^{(a)}$, $U_i^{(a)}$, $W^{(a)}$ и $\tilde{U}^{(a)}$.

Сумма выражений $F_i^{(a)}$ и $L_{ij}^{(a)}$ по всем телам системы a , b , c , ... дает по тем же причинам в итоге нуль, в результа-

те чего получают законы сохранения количества движения и полного момента количества движения

$$\sum_a P_i^{(a)} = \text{const}, \quad (28)$$

$$\sum_a M_{ij}^{(a)} = \text{const}. \quad (29)$$

В интегральной форме эти законы следуют после интегрирования по времени соотношений

$$\int_{\infty} g \nabla_{\alpha} T^{\alpha i} (dx)^3 = 0,$$

$$\int_{\infty} g (x_i \nabla_{\alpha} T^{\alpha j} - x_j \nabla_{\alpha} T^{\alpha i}) (dx)^3 = 0,$$

где область интегрирования охватывает все массы. Точно так же из соотношения

$$\int_{\infty} g \nabla_{\alpha} T^{\alpha 0} (dx)^3 = 0$$

следует интеграл энергии, а из соотношения

$$\int_{\infty} g x_i \nabla_{\alpha} T^{\alpha 0} (dx)^3 = 0$$

— интеграл движения центра масс системы тел.

Уравнения (21) и (25), данные В. А. Фоком, представляют собой уравнения поступательного и вращательного движения в интегральной форме. При вычислении интегралов от внешних частей подынтегральных функций приходится разлагать функции от $|r - r'|$ в окрестности массы a , предполагая, что средний линейный размер тел R мал по сравнению с характеристическим расстоянием D между ними. В. А. Фоком были получены релятивистские уравнения поступательного движения с точностью до членов порядка R/D включительно и ньютонovy уравнения вращательного движения. В двух следующих параграфах будут выведены релятивистские уравнения поступательного движения с точностью до членов порядка R^2/D^2 включительно, а в § 4 — релятивистские уравнения вращательного движения.

§ 2. Метрика поля вращающихся тел

Масса рассматриваемого тела, координаты и компоненты скорости его центра инерции выражаются интегралами

$$M_a = \int_{(a)} \rho (dx)^3,$$

$$M_a a_i = \int_{(a)} \rho x_i (dx)^3,$$

$$M_a \dot{a}_i = \int_{(a)} \rho v_i (dx)^3.$$

Будем предполагать, что распределение скоростей внутри тела имеет вид

$$v_i = \dot{a}_i + \omega_{ki}^{(a)} (x_k - a_k), \quad (30)$$

где ω_{ij} — антисимметричный тензор угловой скорости с компонентами

$$(\omega_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Величины

$$I_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(a)} = \int_{(a)} \rho (x_{i_1} - a_{i_1}) (x_{i_2} - a_{i_2}) \dots (x_{i_n} - a_{i_n}) (dx)^3$$

определяют моменты инерции порядка n ($n = 2, 3, \dots$). Их производные по времени удовлетворяют кинематическим соотношениям

$$\dot{I}_{i_1 i_2 \dots i_n} = \omega_{k i_1} I_{k i_2 \dots i_n} + \dots + \omega_{k i_n} I_{i_1 \dots i_{n-1} k}. \quad (32)$$

Если через $\Omega^{(a)}$ обозначить потенциал центробежных сил

$$\Omega^{(a)} = \frac{1}{2} \omega_{km}^{(a)} \omega_{lm}^{(a)} (x_k - a_k) (x_l - a_l), \quad (33)$$

то кинетическая энергия вращения и моменты первого и второго порядков будут

$$T^{(a)} = \int_{(a)} \rho \Omega^{(a)} (dx)^3 = \frac{1}{2} \omega_{km}^{(a)} \omega_{lm}^{(a)} I_{kl}^{(a)},$$

$$T_i^{(a)} = \int_{(a)} \rho \Omega^{(a)} (x_i - a_i) (dx)^3 = \frac{1}{2} \omega_{km}^{(a)} \omega_{lm}^{(a)} I_{ikl}^{(a)},$$

$$T_{ij}^{(a)} = \int_{(a)} \rho \Omega^{(a)} (x_i - a_i) (x_j - a_j) (dx)^3 = \frac{1}{2} \omega_{km}^{(a)} \omega_{lm}^{(a)} I_{ijkl}^{(a)}.$$

При вычислении интегралов от внутренних частей подинтегральных выражений понадобятся вспомогательные интегралы, зависящие лишь от внутренней структуры тела:

$$B_{kl}^{(a)} = \frac{1}{2} \gamma \int_{(a)} \int_{(a)} \rho \rho' \frac{(x_k - x'_k)(x_l - x'_l)}{|r - r'|^3} (dx)^3 (dx')^3,$$

$$B_{ikl}^{(a)} = \frac{1}{2} \gamma \int_{(a)} \int_{(a)} \rho \rho' \frac{(x_k - x'_k)(x_l - x'_l)}{|r - r'|^3} (x_i - a_i) (dx)^3 (dx')^3,$$

$$B_{ijkl}^{(a)} =$$

$$= \frac{1}{2} \gamma \int_{(a)} \int_{(a)} \rho \rho' \frac{(x_k - x'_k)(x_l - x'_l)}{|r - r'|^3} (x_i - a_i) (x_j - a_j) (dx)^3 (dx')^3.$$

При помощи этих интегралов находим

$$\varepsilon^{(a)} = \frac{1}{2} \int_{(a)} \rho u^{(a)} (dx)^3 = B_{kk}^{(a)},$$

$$\varepsilon_i^{(a)} = \frac{1}{2} \int_{(a)} \rho u^{(a)} (x_i - a_i) (dx)^3 = B_{ikk}^{(a)},$$

$$\varepsilon_{ij}^{(a)} = \frac{1}{2} \int_{(a)} \rho u^{(a)} (x_i - a_i) (x_j - a_j) (dx)^3 = B_{ijkk}^{(a)}$$

и

$$\varphi_{kl}^{(a)} = \int_{(a)} \rho \frac{\partial^2 w^{(a)}}{\partial x_k \partial x_l} (dx)^3 = \varepsilon^{(a)} \delta_{kl} - B_{kl}^{(a)},$$

$$\varphi_{ikl}^{(a)} = \int_{(a)} \rho \frac{\partial^2 w^{(a)}}{\partial x_k \partial x_l} (x_i - a_i) (dx)^3 = \varepsilon_i^{(a)} \delta_{kl} - B_{ikl}^{(a)},$$

$$\varphi_{ijkl}^{(a)} = \int_{(a)} \rho \frac{\partial^2 w^{(a)}}{\partial x_k \partial x_l} (x_i - a_i) (x_j - a_j) (dx)^3 = \varepsilon_{ij}^{(a)} \delta_{kl} - B_{ijkl}^{(a)}.$$

Введем, далее, еще две группы интегралов, также зависящих лишь от внутренней структуры тела, а именно

$$\xi^{(a)} = \int_{(a)} (-\rho u^{(a)} + \rho \Pi + 3p) (dx)^3,$$

$$\xi_i^{(a)} = \int_{(a)} (-\rho u^{(a)} + \rho \Pi + 3p) (x_i - a_i) (dx)^3,$$

$$\xi_{ij}^{(a)} = \int_{(a)} (-\rho u^{(a)} + \rho \Pi + 3p) (x_i - a_i) (x_j - a_j) (dx)^3$$

и

$$\eta^{(a)} = \int_{(a)} (-\rho u^{(a)} + \rho \Pi + p) (dx)^3,$$

$$\eta_i^{(a)} = \int_{(a)} (-\rho u^{(a)} + \rho \Pi + p) (x_i - a_i) (dx)^3,$$

$$\eta_{ij}^{(a)} = \int_{(a)} (-\rho u^{(a)} + \rho \Pi + p) (x_i - a_i) (x_j - a_j) (dx)^3.$$

Все эти значения представляют собой необходимое расширение ряда интегралов, приведенных в книге В. А. Фока. Что же касается интегралов от внешних частей, то, как уже указывалось, они вычисляются путем разложения функций от $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ в окрестности соответствующего тела. Этим путем легко найти

$$\begin{aligned} U^{(a)}(\mathbf{r}) &= \sum_b^{(a)} \gamma \int_{(b)} \frac{\rho' (dx')^3}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \\ &= \sum_b^{(a)} \left\{ \frac{\gamma M_b}{|\mathbf{r} - \mathbf{b}|} + \frac{1}{2} \gamma I_{kl}^{(b)} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{b}|} + \dots \right\}, \quad (34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_i^{(a)}(\mathbf{r}) &= \sum_b^{(a)} \gamma \int_{(b)} \frac{\rho' v_i' (dx')^3}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \\ &= \gamma \sum_b^{(a)} \left\{ \frac{M_b \dot{b}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{b}|} - \omega_{li}^{(b)} I_{kl}^{(b)} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{b}|} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\dot{b}_i I_{kl}^{(b)} + \omega_{mi}^{(b)} I_{klm}^{(b)}) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{b}|} + \dots \right\}, \quad (35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W^{(a)}(r) &= \sum_b^{(a)} \frac{1}{2} \gamma \int_{(b)} \rho' |r - r'| (dx')^3 = \\
 &= \frac{1}{2} \gamma \sum_b^{(a)} \left\{ M_b |r - b| + \frac{1}{2} I_{kl}^{(b)} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} |r - b| - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{6} I_{klm}^{(b)} \frac{\partial^3}{\partial x_k \partial x_l \partial x_m} |r - b| + \dots \right\}, \quad (36)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial W^{(a)}(r)}{\partial t} &= \frac{1}{2} \gamma \sum_b^{(a)} \left\{ -M_b \dot{b}_k \frac{\partial |r - b|}{\partial x_k} + \frac{1}{2} I_{kl}^{(b)} \frac{\partial^2 |r - b|}{\partial x_k \partial x_l} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \left(I_{kl}^{(b)} \dot{b}_m + \frac{1}{3} I_{klm}^{(b)} \right) \frac{\partial^3 |r - b|}{\partial x_k \partial x_l \partial x_m} + \dots \right\}, \quad (37)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U^{(a)}(r) &= \sum_b^{(a)} \gamma \int_{(b)} \frac{(\sigma' - \rho') (dx')^3}{|r - r'|} = \\
 &= \frac{\gamma}{c^2} \sum_b^{(a)} \left\{ \left(\frac{3}{2} M_b \dot{b}_k^2 - M_b U^{(b)}(b) + 3T^{(b)} + \xi^{(b)} \right) \frac{1}{|r - b|} - \right. \\
 &\quad \left. - (3\dot{b}_m \omega_{lm}^{(b)} I_{kl}^{(b)} + 3T_k^{(b)} + \xi_k^{(b)}) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|r - b|} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \dot{b}_m^2 I_{kl}^{(b)} - I_{kl}^{(b)} U^{(b)}(b) + 3\dot{b}_n \omega_{mn}^{(b)} I_{klm}^{(b)} + 3T_{kl}^{(b)} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \xi_{kl}^{(b)} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \frac{1}{|r - b|} + I_{kl}^{(b)} \left(\frac{\partial U^{(b)}}{\partial x_l} \right)_b \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|r - b|} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} I_{kl}^{(b)} \left(\frac{\partial^2 U^{(b)}}{\partial x_k \partial x_l} \right)_b \frac{1}{|r - b|} + \dots \right\}. \quad (38)
 \end{aligned}$$

Последнее выражение может быть переписано в виде

$$\begin{aligned}
 U^{(a)}(r) &= \frac{\gamma}{c^2} \sum_b^{(a)} \left\{ \frac{1}{|r - b|} \left(\frac{3}{2} M_b \dot{b}_k^2 - M_b \sum_c^{(b)} \frac{\gamma M_c}{|b - c|} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 3T^{(b)} + \xi^{(b)} \right) - (3\dot{b}_m \omega_{lm}^{(b)} I_{kl}^{(b)} + 3T_k^{(b)} + \xi_k^{(b)}) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|r - b|} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \dot{b}_m^2 I_{kl}^{(b)} - I_{kl}^{(b)} \sum_c^{(b)} \frac{\gamma M_c}{|b - c|} + 3\dot{b}_n \omega_{mn}^{(b)} I_{klm}^{(b)} + 3T_{kl}^{(b)} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \xi_{kl}^{(b)} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \frac{1}{|r - b|} + I_{kl}^{(b)} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|r - b|} \sum_c^{(b)} \gamma M_c \times \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{\partial}{\partial b_l} \frac{1}{|b - c|} - \frac{1}{2|r - b|} \sum_c^{(b)} \gamma (M_b I_{kl}^{(c)} + \right. \\
 &\quad \left. + M_c I_{kl}^{(b)}) \frac{\partial^2}{\partial b_k \partial b_l} \frac{1}{|b - c|} + \dots \right\}. \quad (39)
 \end{aligned}$$

В случае сферически симметричных тел все приведенные формулы значительно упрощаются. Интегралы, зависящие от внутренней структуры, принимают значения

$$B_{kl}^{(a)} = \frac{1}{3} \delta_{kl} B_{mm}^{(a)}, \quad B_{ikl}^{(a)} = 0, \quad B_{ijkl}^{(a)} = \frac{1}{9} \delta_{ij} \delta_{kl} B_{mmnn}^{(a)}.$$

Величины $\epsilon_i^{(a)}$, $\xi_i^{(a)}$, $\eta_i^{(a)}$ обращаются, очевидно, в нуль, а величины $\epsilon_{ij}^{(a)}$, $\xi_{ij}^{(a)}$, $\eta_{ij}^{(a)}$ становятся пропорциональными δ_{ij} . Далее,

$$I_{kl}^{(a)} = \delta_{kl} I_a, \quad I_{klm}^{(a)} = 0, \\ I_{klmn}^{(a)} = (\delta_{kl} \delta_{mn} + \delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{kn} \delta_{lm}) I_a'.$$

Поэтому

$$T^{(a)} = \omega_a^2 I_a, \quad T_i^{(a)} = 0, \quad T_{ij}^{(a)} = (2\omega_a^2 \delta_{ij} - \omega_i^{(a)} \omega_j^{(a)}) I_a',$$

где ω_a означает трехмерный вектор угловой скорости с компонентами $\omega_1^{(a)}$, $\omega_2^{(a)}$, $\omega_3^{(a)}$. При этом для однородного тела радиуса R_a

$$I_a = \frac{1}{5} M_a R_a^2, \quad I_a' = \frac{1}{35} M_a R_a^4.$$

Для сферических тел формулы (34), (35), (36) и (39) дают

$$U^{(a)}(\mathbf{r}) = \gamma \sum_b^{(a)} \frac{M_b}{|\mathbf{r} - \mathbf{b}|},$$

$$U_i^{(a)}(\mathbf{r}) = \gamma \sum_b^{(a)} \left\{ \frac{M_b}{|\mathbf{r} - \mathbf{b}|} b_i + \frac{I_b}{|\mathbf{r} - \mathbf{b}|^3} [\omega_b \times (\mathbf{r} - \mathbf{b})]_i \right\},$$

$$W^{(a)}(\mathbf{r}) = \frac{\gamma}{2} \sum_b^{(a)} M_b |\mathbf{r} - \mathbf{b}| + \dots,$$

$$\begin{aligned} \bar{U}^{(a)}(\mathbf{r}) = \frac{\gamma}{c^2} \sum_b^{(a)} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{b}|} \left(\frac{3}{2} M_b \dot{b}^2 - M_b \sum_c^{(b)} \frac{\gamma M_c}{|\mathbf{b} - \mathbf{c}|} + \right. \right. \\ \left. \left. + 3\omega_b^2 I_b + \xi^{(b)} \right) + \frac{3I_b}{|\mathbf{r} - \mathbf{b}|^3} \omega_b [(\mathbf{r} - \mathbf{b}) \times \dot{\mathbf{b}}] + \dots \right\}. \end{aligned}$$

В $W^{(a)}(\mathbf{r})$ и $\bar{U}^{(a)}(\mathbf{r})$ здесь сохранены лишь основные члены.

Вводя теперь эффективную массу

$$m_a = M_a + \frac{1}{c^2} \xi^{(a)} \quad (40)$$

и определяя по формулам (8) и (19) потенциалы $g_{\mu\nu}$, находим метрику внешнего гравитационного поля N вращающихся сферических тел в гармонических координатах

$$\begin{aligned} ds^2 = & \left\{ 1 - \frac{2\gamma}{c^2} \sum_a \frac{m_a}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} + \frac{2\gamma^2}{c^4} \left(\sum_a \frac{m_a}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} \right)^2 - \right. \\ & - \frac{\gamma}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_a m_a |\mathbf{r}-\mathbf{a}| - \frac{3\gamma}{c^4} \sum_a \frac{m_a}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} \dot{\mathbf{a}}^2 + \\ & + \frac{2\gamma^2}{c^4} \sum_a \frac{m_a}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} \sum_b^{(a)} \frac{m_b}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|} - \\ & - \frac{6\gamma}{c^4} \sum_a \frac{I_a}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^3} \omega_a [(\mathbf{r}-\mathbf{a}) \times \dot{\mathbf{a}}] - \frac{6\gamma}{c^4} \sum_a \frac{I_a}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} \omega_a^2 \left. \right\} c^2 dt^2 + \\ & + \frac{8\gamma}{c^3} \sum_a \left\{ \frac{m_a}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} \dot{a}_i + \frac{I_a}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^3} [\omega_a \times (\mathbf{r}-\mathbf{a})]_i \right\} c dt dx^i - \\ & - \left(1 + \frac{2\gamma}{c^2} \sum_a \frac{m_a}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} \right) (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2). \quad (41) \end{aligned}$$

Эта метрическая форма обобщает выражение (85) гл. 6 на случай вращающихся масс. Преобразованием координат можно перейти к другой системе координат.

В частном случае, когда имеется лишь одно сферическое однородное тело, обладающее массой m , радиусом R , моментом инерции $I = mR^2/5$ и вращающееся вокруг оси $x_3 = z$ с угловой скоростью ω , метрика (41) дает

$$\begin{aligned} ds^2 = & \left(1 - \frac{2\gamma m}{c^2 r} + \frac{2\gamma^2 m^2}{c^4 r^2} \right) c^2 dt^2 + \frac{8\gamma I \omega}{c^3 r^3} (x dy - y dx) c dt - \\ & - \left(1 + \frac{2\gamma m}{c^2 r} \right) (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (42) \end{aligned}$$

Это выражение определяет метрику внешнего гравитационного поля медленно вращающегося шара. По сравнению с (41) здесь отброшены члены, квадратичные относительно ω . В сферических координатах

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta$$

отсюда следует

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\gamma m}{c^2 r} + \frac{2\gamma^2 m^2}{c^4 r^2}\right) c^2 dt^2 + \frac{8\gamma I \omega}{c^3 r} \sin^2 \theta c dt d\varphi - \\ - \left(1 + \frac{2\gamma m}{c^2 r}\right) [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (43)$$

Интересно сопоставить с этим выражением упоминавшаяся выше точное решение Керра для поля вращающегося шара. Оно имеет вид (Керр, 1963)

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 - \frac{2\mu r^3}{r^4 + a^2 z^2} k^2, \quad (44)$$

где μ и a — два параметра, определяемые ниже, k задается соотношением

$$(r^2 + a^2) rk = r^2 (x dx + y dy) + \\ + ar (x dy - y dx) + (r^2 + a^2) (z dz + rc dt),$$

а r является корнем уравнения

$$r^4 - (x^2 + y^2 + z^2 - a^2) r^2 - a^2 z^2 = 0.$$

В сфероидальных координатах

$$x = (r \cos \varphi + a \sin \varphi) \sin \theta, \\ y = (r \sin \varphi - a \cos \varphi) \sin \theta, \\ z = r \cos \theta$$

решение Керра принимает форму (Boyer, Lindquist, 1967)

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\mu r}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) c^2 dt^2 - \frac{4\mu r}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} c dt dr - \\ - \frac{4\mu r a \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} c dt d\varphi - \left(1 + \frac{2\mu r}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) dr^2 - \\ - 2a \left(1 + \frac{2\mu r}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) \sin^2 \theta dr d\varphi - \\ - \left(r^2 + a^2 + \frac{2\mu r a^2 \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) \sin^2 \theta d\varphi^2 - (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2. \quad (45)$$

При $a = 0$ это выражение переходит в метрику поля Шварцшильда в форме Эддингтона (формула (20) гл. 5).

Наконец, при преобразовании

$$d\tilde{\varphi} = d\varphi + \frac{a dr}{r^2 - 2\mu r + a^2}, \quad c d\tilde{t} = c dt - \frac{2\mu r dr}{r^2 - 2\mu r + a^2}$$

выражение (45) станет

$$\begin{aligned} ds^2 = c^2 d\tilde{t}^2 \left(1 - \frac{2\mu r}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right) - \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 - 2\mu r + a^2} dr^2 - \\ - (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{2\mu r a^2 \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right) \sin^2 \theta d\tilde{\varphi}^2 - \\ - \frac{4\mu r a \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} c d\tilde{t} d\tilde{\varphi}, \quad (46) \end{aligned}$$

что также рассмотрено в указанной выше работе. При $a = 0$ отсюда следует метрика Шварцшильда в стандартной форме. Из сопоставления с метрикой (43) с учетом различия используемых координатных систем вытекает, что μ представляет собой гравитационный радиус тела $\mu = \gamma m/c^2$, а

$$a = -\frac{2I\omega}{cm}.$$

§ 3. Вывод уравнений поступательного движения методом Фока

Переходя к составлению уравнений поступательного движения, начнем с определения количества движения $P_i^{(a)}$. Замечая, что

$$u_i^{(a)} = v_i u^{(a)} - 2\omega_{ki}^{(a)} \frac{\partial w^{(a)}}{\partial x_k}, \quad (47)$$

перепишем выражение величины G_i в виде

$$\begin{aligned} G_i = \rho v_i + \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{1}{2} \rho v^2 - \rho u^{(a)} + \rho \Pi + p \right) v_i - \right. \\ \left. - \rho \frac{\partial^2 w^{(a)}}{\partial x_i \partial t} + 8\rho \omega_{ki}^{(a)} \frac{\partial w^{(a)}}{\partial x_k} \right] + \\ + \frac{1}{c^2} \left(3\rho v_i U^{(a)} - 4\rho U_i^{(a)} - \rho \frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i \partial t} \right). \quad (48) \end{aligned}$$

При взятии интегралов от внутренних частей надо учесть, что

$$\int_{(a)} \rho \frac{\partial w^{(a)}}{\partial x_k} (dx)^3 = 0,$$

и поэтому

$$\begin{aligned} - \int_{(a)} \rho \frac{\partial w^{(a)}}{\partial x_i \partial t} (dx)^3 &= - \frac{d}{dt} \int_{(a)} \rho \frac{\partial w^{(a)}}{\partial x_i} (dx)^3 + \int_{(a)} \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial w^{(a)}}{\partial x_i} (dx)^3 = \\ &= \int_{(a)} \rho v_k \frac{\partial^2 w^{(a)}}{\partial x_i \partial x_k} (dx)^3 = \varepsilon^{(a)} \dot{a}_i - B_{ik}^{(a)} \dot{a}_k + \omega_{ik}^{(a)} \Phi_{ik}^{(a)}. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \int_{(a)} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 - \rho u^{(a)} + \rho \Pi + p \right) v_i (dx)^3 &= \\ &= \frac{1}{2} M_a \dot{a}_k^2 \dot{a}_i + (T^{(a)} + \eta^{(a)}) \dot{a}_i + \omega_{ki}^{(a)} \omega_{lm}^{(a)} I_{kl}^{(a)} \dot{a}_m + \\ &\quad + \omega_{ki}^{(a)} (T_k^{(a)} + \eta_k^{(a)}). \end{aligned}$$

Интегралы от внешних частей вычисляются однотипным способом:

$$\begin{aligned} \int_{(a)} 3\rho v_i U^{(a)} (dx)^3 &= 3M_a \dot{a}_i U^{(a)}(a) + 3\omega_{li}^{(a)} I_{kl}^{(a)} \left(\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_k} \right)_a + \\ &\quad + \frac{3}{2} (\dot{a}_i I_{kl}^{(a)} + \omega_{mi}^{(a)} I_{klm}^{(a)}) \left(\frac{\partial^2 U^{(a)}}{\partial x_k \partial x_l} \right)_a + \dots = \\ &= \sum_b^{(a)} \left\{ \frac{3\gamma M_a M_b}{|\alpha - \beta|} \dot{a}_i + 3\gamma M_b \omega_{li}^{(a)} I_{kl}^{(a)} \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{|\alpha - \beta|} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} \gamma [\dot{a}_i (M_a I_{kl}^{(b)} + M_b I_{kl}^{(a)}) + \right. \\ &\quad \left. + M_b \omega_{mi}^{(a)} I_{klm}^{(a)}] \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_l} \frac{1}{|\alpha - \beta|} + \dots \right\}, \\ - \int_{(a)} 4\rho U_i^{(a)} (dx)^3 &= -4M_a U_i^{(a)}(a) - 2I_{kl}^{(a)} \left(\frac{\partial^2 U_i^{(a)}}{\partial x_k \partial x_l} \right)_a + \dots = \\ &= \sum_b^{(a)} \left\{ -\frac{4\gamma M_a M_b}{|\alpha - \beta|} \dot{b}_i + 4\gamma M_a \omega_{li}^{(b)} I_{kl}^{(b)} \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{|\alpha - \beta|} - \right. \\ &\quad \left. - 2\gamma [\dot{b}_i (M_a I_{kl}^{(b)} + M_b I_{kl}^{(a)}) + M_a \omega_{mi}^{(b)} I_{klm}^{(b)}] \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_l} \frac{1}{|\alpha - \beta|} + \dots \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_{(a)} \rho \frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i \partial t} (dx)^3 = \\
 & = - M_a \left(\frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i \partial t} \right)_a - \frac{1}{2} I_{kl}^{(a)} \left(\frac{\partial^4 W^{(a)}}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l \partial t} \right)_a + \dots = \\
 & = \sum_b^{(a)} \left\{ \frac{1}{2} \gamma M_a M_b \dot{b}_k \frac{\partial^2 |a-b|}{\partial a_i \partial a_k} - \frac{1}{4} \gamma M_a I_{kl}^{(b)} \frac{\partial^3 |a-b|}{\partial a_i \partial a_k \partial a_l} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{4} \gamma \left[\dot{b}_m (M_a I_{kl}^{(b)} + M_b I_{kl}^{(a)}) + \frac{1}{3} M_a I_{klm}^{(b)} \right] \frac{\partial^4 |a-b|}{\partial a_i \partial a_k \partial a_l \partial a_m} + \dots \right\}.
 \end{aligned}$$

Учитывая, что интеграл от первого члена в G_i равен $M_a \dot{a}_i$, и суммируя все полученные результаты, нетрудно убедиться, что $P_i^{(a)}$ может быть представлено в виде

$$P_i^{(a)} = \frac{\partial}{\partial \dot{a}_i} (K + K_1 + K_2 + K_3 + \dots), \quad (49)$$

где

$$\begin{aligned}
 K = \sum_a \left(\frac{1}{2} M_a \dot{a}_k^2 + T^{(a)} \right) + \frac{1}{c^2} \sum_a \left[\frac{1}{8} M_a (\dot{a}_k^2)^2 + \right. \\
 \left. + \frac{1}{2} Z_{kl}^{(a)} \dot{a}_k \dot{a}_l + Z_k^{(a)} \dot{a}_k + \Gamma^{(a)} \right], \quad (50)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_1 = \frac{\gamma}{2c^2} \sum_a \sum_b^{(a)} \left[\frac{1}{2} \frac{M_a M_b}{|a-b|} (3\dot{a}_k^2 + 3\dot{b}_k^2 - 8\dot{a}_k \dot{b}_k) + \right. \\
 \left. + \frac{1}{2} M_a M_b \dot{a}_k \dot{b}_l \frac{\partial^2 |a-b|}{\partial a_k \partial a_l} \right], \quad (51)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_2 = \frac{\gamma}{2c^2} \sum_a \sum_b^{(a)} \left\{ [M_b \omega_{lm}^{(a)} I_{kl}^{(a)} (3\dot{a}_m - 4\dot{b}_m) - \right. \\
 \left. - M_a \omega_{lm}^{(b)} I_{kl}^{(b)} (3\dot{b}_m - 4\dot{a}_m)] \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{|a-b|} + \right. \\
 \left. + \frac{1}{4} (M_b \dot{b}_m I_{kl}^{(a)} - M_a \dot{a}_m I_{kl}^{(b)}) \frac{\partial^3 |a-b|}{\partial a_k \partial a_l \partial a_m} \right\}, \quad (52)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_3 = \frac{\gamma}{2c^2} \sum_a \sum_b^{(a)} \left\{ \left[\frac{1}{4} (M_a I_{kl}^{(b)} + M_b I_{kl}^{(a)}) (3\dot{a}_m^2 + 3\dot{b}_m^2 - \right. \right. \\
 \left. \left. - 8\dot{a}_m \dot{b}_m) + \frac{1}{2} M_b \omega_{mn}^{(a)} I_{klm}^{(a)} (3\dot{a}_n - 4\dot{b}_n) + \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{1}{2} M_a \omega_{mn}^{(b)} I_{klm}^{(b)} (3\dot{b}_n - 4\dot{a}_n) \right] \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_l} \frac{1}{|a-b|} + \right.
 \end{aligned}$$

$$+ \left[\frac{1}{4} (M_a I_{kl}^{(b)} + M_b I_{kl}^{(a)}) \dot{a}_m \dot{b}_n + \frac{1}{12} (M_a \dot{a}_n I_{klm}^{(b)} + M_b \dot{b}_n I_{klm}^{(a)}) \right] \frac{\partial^4 |\mathbf{a} - \mathbf{b}|}{\partial a_k \partial a_l \partial a_m \partial a_n} \}. \quad (53)$$

Здесь в свою очередь

$$Z_{ik}^{(a)} = (T^{(n)} + \eta^{(a)} + \varepsilon^{(a)}) \delta_{ik} + \omega_{li}^{(a)} \omega_{mk}^{(a)} I_{lm}^{(a)} - B_{ik}^{(a)}, \quad (54)$$

$$Z_i^{(a)} = \omega_{ki}^{(a)} (T_k^{(a)} + \eta_k^{(a)}) + \omega_{lk}^{(a)} \varphi_{lik}^{(a)}. \quad (55)$$

Аддитивные члены с $T^{(a)}$, исчезающие при дифференцировании по \dot{a}_i , добавлены в K для совпадения в ньютоновом пределе с ньютоновой кинетической энергией. В K включены и релятивистские члены $\Gamma^{(a)}$, также зависящие лишь от угловых скоростей тел. Эти члены будут определены позднее. Если среднюю массу тел оценить числом M , а среднюю скорость — числом q и принять, что угловая скорость вращения тел имеет порядок q/R , то порядки величин K_1 , K_2 , K_3 будут соответственно Mq^4/c^2 , $(Mq^4/c^2) \cdot (R/D)$ и $(Mq^4/c^2) \cdot (R^2/D^2)$.

Перейдем к вычислению правых частей (23) уравнений (21). Прежде всего, находим ньютоновы члены

$$\begin{aligned} \int_{(a)} \rho \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i} (dx)^3 &= M_a \left(\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i} \right)_a + \frac{1}{2} I_{kl}^{(a)} \left(\frac{\partial^3 U^{(a)}}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} \right)_a + \dots = \\ &= \gamma \sum_b^{(a)} \left\{ M_a M_b \frac{\partial}{\partial a_i} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} (M_a I_{kl}^{(b)} + M_b I_{kl}^{(a)}) \frac{\partial^3}{\partial a_i \partial a_k \partial a_l} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} + \dots \right\} = - \frac{\partial \Phi}{\partial a_i}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi &= - \frac{\gamma}{2} \sum_a \sum_b^{(a)} \left\{ \frac{M_a M_b}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} (M_a I_{kl}^{(b)} + M_b I_{kl}^{(a)}) \frac{\partial^3}{\partial a_k \partial a_l} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} + \dots \right\}. \quad (56) \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \int_{(a)} (\sigma - \rho) \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i} (dx)^3 &= \frac{1}{c^2} \left\{ \left(\frac{3}{2} M_a \dot{a}_k^2 + 3T^{(a)} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \xi^{(a)} \right) \left(\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i} \right)_a + (3\dot{a}_m \omega_{lm}^{(a)} I_{kl}^{(a)} + 3T_k^{(a)} + \xi_k^{(a)}) \left(\frac{\partial^2 U^{(a)}}{\partial x_i \partial x_k} \right)_a + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \dot{a}_m^2 I_{kl}^{(a)} + 3\dot{a}_n \omega_{mn}^{(a)} I_{klm}^{(a)} + 3T_{kl}^{(a)} + \xi_{kl}^{(a)} \right) \times \\
& \quad \times \left(\frac{\partial^3 U^{(a)}}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} \right)_a + \dots - \frac{1}{2} M_a \left(\frac{\partial (U^{(a)})^2}{\partial x_i} \right)_a - \\
& - \frac{1}{4} I_{kl}^{(a)} \left(\frac{\partial^3 (U^{(a)})^2}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} \right)_a + \dots \Big\} = \frac{\gamma}{c^2} \frac{\partial}{\partial a_i} \sum_b^{(a)} \left\{ \frac{M_b}{|a-b|} \times \right. \\
& \quad \times \left(\frac{3}{2} M_a \dot{a}_k^2 + 3T^{(a)} + \xi^{(a)} \right) + M_b (3\dot{a}_m \omega_{lm}^{(a)} I_{kl}^{(a)} + \\
& \quad + 3T_k^{(a)} + \xi_k^{(a)}) \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{|a-b|} + \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} \dot{a}_m^2 (M_a I_{kl}^{(b)} + \right. \\
& \quad + M_b I_{kl}^{(a)}) + 3M_b \dot{a}_n \omega_{mn}^{(a)} I_{klm}^{(a)} + I_{kl}^{(b)} (3T^{(a)} + \xi^{(a)}) + \\
& \quad \left. + M_b (3T_{kl}^{(a)} + \xi_{kl}^{(a)}) \right] \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_l} \frac{1}{|a-b|} + \dots \Big\} - \\
& - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial a_i} \left\{ \frac{1}{2} M_a (U^{(a)}(a))^2 + \frac{1}{4} I_{kl}^{(a)} \frac{\partial^2 (U^{(a)}(a))^2}{\partial a_k \partial a_l} + \dots \right\}.
\end{aligned}$$

Вычисляя следующий интеграл, получаем

$$\begin{aligned}
\int_{(a)} \rho \frac{\partial \tilde{U}^{(a)}}{\partial x_i} (dx)^3 &= M_a \left(\frac{\partial \tilde{U}^{(a)}}{\partial x_i} \right)_a + \frac{1}{2} I_{kl}^{(a)} \left(\frac{\partial^3 \tilde{U}^{(a)}}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} \right)_a + \dots = \\
&= \frac{\gamma}{c^2} \sum_b^{(a)} \left\{ M_a \left(\frac{3}{2} M_b \dot{b}_k^2 + 3T^{(b)} + \xi^{(b)} - M_b U^{(b)}(b) \right) \times \right. \\
& \quad \times \frac{\partial}{\partial a_i} \frac{1}{|a-b|} - M_a (3\dot{b}_m \omega_{lm}^{(b)} I_{kl}^{(b)} + 3T_k^{(b)} + \xi_k^{(b)}) \times \\
& \quad \times \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_k} \frac{1}{|a-b|} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{3}{2} \dot{b}_m^2 - U^{(b)}(b) \right) (M_a I_{kl}^{(b)} + M_b I_{kl}^{(a)}) + \right. \\
& \quad + 3M_a \dot{b}_n \omega_{mn}^{(b)} I_{klm}^{(b)} + I_{kl}^{(a)} (3T^{(b)} + \xi^{(b)}) + M_a (3T_{kl}^{(b)} + \\
& \quad \left. + \xi_{kl}^{(b)}) \right] \frac{\partial^3}{\partial a_i \partial a_k \partial a_l} \frac{1}{|a-b|} + M_a I_{kl}^{(b)} \left[\frac{\partial U^{(b)}(b)}{\partial b_l} \times \right. \\
& \quad \left. \times \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_k} \frac{1}{|a-b|} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U^{(b)}(b)}{\partial b_k \partial b_l} \frac{\partial}{\partial a_i} \frac{1}{|a-b|} \right] + \dots \Big\}.
\end{aligned}$$

При помощи соотношений

$$\begin{aligned}
U^{(b)}(b) \frac{\partial}{\partial a_i} \frac{1}{|a-b|} &= \frac{\partial}{\partial a_i} \left(\frac{U^{(b)}(b)}{|a-b|} - \frac{\gamma M_a}{2|a-b|^2} \right) - \\
& - \frac{\gamma I_{kl}^{(a)}}{2|a-b|} \frac{\partial^3}{\partial a_i \partial a_k \partial a_l} \frac{1}{|a-b|} + \dots,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U^{(b)}(\mathbf{b}) \frac{\partial^3}{\partial a_i \partial a_k \partial a_l} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} &= \frac{\partial}{\partial a_i} \left(U^{(b)}(\mathbf{b}) \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_l} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} \right) - \\
 &\quad - \gamma M_a \left(\frac{\partial}{\partial a_i} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} \right) \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_l} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} + \dots, \\
 \frac{\partial U^{(b)}(\mathbf{b})}{\partial b_l} \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_k} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} &= \frac{\partial}{\partial a_i} \left(\frac{\partial U^{(b)}(\mathbf{b})}{\partial b_l} \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} \right) + \\
 &\quad + \gamma M_a \left(\frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} \right) \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_l} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} + \dots, \\
 \frac{\partial^2 U^{(b)}(\mathbf{b})}{\partial b_k \partial b_l} \frac{\partial}{\partial a_i} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} &= \frac{\partial}{\partial a_i} \left(\frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} \frac{\partial^2 U^{(b)}(\mathbf{b})}{\partial b_k \partial b_l} \right) - \\
 &\quad - \frac{\gamma M_a}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} \frac{\partial^3}{\partial a_i \partial a_k \partial a_l} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} + \dots
 \end{aligned}$$

последний интеграл может быть преобразован к виду

$$\begin{aligned}
 \int_{(a)} \rho \frac{\partial \tilde{U}^{(a)}}{\partial x_i} (dx^3) &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial a_i} \sum_b^{(a)} \left\{ \frac{\gamma M_a}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} \left(\frac{3}{2} M_b \dot{b}_k^2 - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - M_b U^{(b)}(\mathbf{b}) + \frac{\gamma M_a M_b}{2|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} + 3T^{(b)} + \xi^{(b)} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \gamma M_a (3\dot{b}_m \omega_{lm}^{(b)} I_{kl}^{(b)} + 3T_k^{(b)} + \xi_k^{(b)}) \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \gamma \left[\left(\frac{3}{2} \dot{b}_m^2 - U^{(b)}(\mathbf{b}) + \frac{\gamma M_a}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} \right) (M_a I_{kl}^{(b)} + M_b I_{kl}^{(a)}) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 3M_a \dot{b}_{mn} \omega_{mn}^{(b)} I_{klm}^{(b)} + I_{kl}^{(a)} (3T^{(b)} + \xi^{(b)}) + M_a (3T_{kl}^{(b)} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \xi_{kl}^{(b)}) \right] \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_l} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} + \gamma M_a I_{kl}^{(b)} \left[\left(\frac{\partial U^{(b)}(\mathbf{b})}{\partial b_l} + \frac{1}{2} \gamma M_a \times \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times \frac{\partial}{\partial a_l} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} \right) \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U^{(b)}(\mathbf{b})}{\partial b_k \partial b_l} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} \right] + \dots \left. \right\}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, интеграл от двух первых членов в (23) дает в итоге

$$\begin{aligned}
 \int_{(a)} \left(\sigma \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial \tilde{U}^{(a)}}{\partial x_i} \right) (dx)^3 &= \\
 &= \frac{\partial}{\partial a_i} (-\Phi - \Psi + S_1 + S_2 + S_3 + \dots),
 \end{aligned}$$

ГДЕ

$$S_1 = \frac{\gamma}{2c^2} \sum_a \sum_b^{(a)} \left[\frac{3}{2} M_a M_b (\dot{a}_k^2 + \dot{b}_k^2) + M_a (3T^{(b)} + \xi^{(b)}) + \right. \\ \left. + M_b (3T^{(a)} + \xi^{(a)}) \right] \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|},$$

$$S_2 = \frac{\gamma}{2c^2} \sum_a \sum_b^{(a)} [3 (M_b \dot{a}_m \omega_{lm}^{(a)} I_{kl}^{(a)} - M_a \dot{b}_m \omega_{lm}^{(b)} I_{kl}^{(b)}) + \\ + M_b (3T_k^{(a)} + \xi_k^{(a)}) - M_a (3T_k^{(b)} + \xi_k^{(b)})] \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|},$$

$$S_3 = \frac{\gamma}{2c^2} \sum_a \sum_b^{(a)} \left\{ \frac{3}{4} (\dot{a}_m^2 + \dot{b}_m^2) (M_a I_{kl}^{(b)} + M_b I_{kl}^{(a)}) + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} (M_a \dot{b}_n \omega_{mn}^{(b)} I_{klm}^{(b)} + M_b \dot{a}_n \omega_{mn}^{(a)} I_{klm}^{(a)}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} [I_{kl}^{(a)} (3T^{(b)} + \xi^{(b)}) + I_{kl}^{(b)} (3T^{(a)} + \xi^{(a)}) + M_a (3T_{kl}^{(b)} + \right. \\ \left. + \xi_{kl}^{(b)}) + M_b (3T_{kl}^{(a)} + \xi_{kl}^{(a)})] \right\} \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_l} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|}$$

И

$$\Psi = \frac{\gamma^2}{2c^3} \sum_a \sum_b^{(a)} \left[\frac{M_a M_b (M_a + M_b)}{2|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^3} + \frac{M_a M_b}{2|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} (I_{kl}^{(a)} + I_{kl}^{(b)}) \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_l} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} + \frac{1}{4} (M_a^2 I_{kl}^{(b)} + M_b^2 I_{kl}^{(a)}) \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_l} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^3} \right] + \\ + \frac{\gamma^2}{3c^3} \sum_a \sum_b^{(a)} \sum_c^{(a, b)} \left(\frac{1}{2} M_a M_b M_c + \frac{1}{4} M_b M_c I_{kl}^{(a)} \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_l} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} M_c M_a I_{kl}^{(b)} \frac{\partial^2}{\partial b_k \partial b_l} + \frac{1}{4} M_a M_b I_{kl}^{(c)} \frac{\partial^2}{\partial c_k \partial c_l} \right) \times \\ \times \left(\frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}| |\mathbf{a} - \mathbf{c}|} + \frac{1}{|\mathbf{b} - \mathbf{c}| |\mathbf{b} - \mathbf{a}|} + \frac{1}{|\mathbf{c} - \mathbf{a}| |\mathbf{c} - \mathbf{b}|} \right). \quad (57)$$

Члены функции Ψ описывают двойные и тройные взаимодействия масс. Члены, зависящие только от масс, имеют порядок Mq^4/c^2 , а порядок членов, содержащих моменты инерции, равен $(Mq^4/c^2) \cdot (R^2/D^2)$.

Третий интеграл выражения (23) последовательно преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{c^2} \int_{(a)} \rho v_k \frac{\partial^3 W^{(a)}}{\partial x_i \partial x_k \partial t} (dx)^3 = \\
 & = \frac{1}{c^2} \left\{ - M_a \dot{a}_k \left(\frac{\partial^3 W^{(a)}}{\partial x_i \partial x_k \partial t} \right)_a - \omega_{mk}^{(a)} I_{lm}^{(a)} \left(\frac{\partial^4 W^{(a)}}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l \partial t} \right)_a - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{2} (\dot{a}_k I_{lm}^{(a)} + \omega_{nk}^{(a)} I_{lmn}^{(a)}) \left(\frac{\partial^5 W^{(a)}}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l \partial x_m \partial t} \right)_a + \dots \right\} = \\
 & = \frac{\gamma}{c^2} \frac{\partial}{\partial a_i} \sum_b^{(a)} \left\{ \frac{1}{2} M_a M_b \dot{a}_k \dot{b}_l \frac{\partial^2 |a-b|}{\partial a_k \partial a_l} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{4} (M_b \dot{b}_m I_{kl}^{(a)} - M_a \dot{a}_m I_{kl}^{(b)}) \frac{\partial^3 |a-b|}{\partial a_k \partial a_l \partial a_m} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{4} \left[(M_a I_{kl}^{(b)} + M_b I_{kl}^{(a)}) \dot{a}_m \dot{b}_n + \frac{1}{3} (M_a \dot{a}_n I_{klm}^{(b)} + M_b \dot{b}_n I_{klm}^{(a)}) - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{1}{2} I_{kl}^{(a)} I_{mnl}^{(b)} \right] \frac{\partial^4 |a-b|}{\partial a_k \partial a_l \partial a_m \partial a_n} + \dots \right\} = \frac{\partial}{\partial a_i} (T_1 + T_2 + T_3 + \dots),
 \end{aligned}$$

где

$$T_1 = \frac{\gamma}{2c^2} \sum_a \sum_b^{(a)} \frac{1}{2} M_a M_b \dot{a}_k \dot{b}_l \frac{\partial^2 |a-b|}{\partial a_k \partial a_l},$$

$$T_2 = \frac{\gamma}{2c^2} \sum_a \sum_b^{(a)} \frac{1}{4} (M_b \dot{b}_m I_{kl}^{(a)} - M_a \dot{a}_m I_{kl}^{(b)}) \frac{\partial^3 |a-b|}{\partial a_k \partial a_l \partial a_m},$$

$$\begin{aligned}
 T_3 = & \frac{\gamma}{2c^2} \sum_a \sum_b^{(a)} \left[\frac{1}{4} (M_a I_{kl}^{(b)} + M_b I_{kl}^{(a)}) \dot{a}_m \dot{b}_n + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{12} (M_a \dot{a}_n I_{klm}^{(b)} + M_b \dot{b}_n I_{klm}^{(a)}) - \frac{1}{8} I_{kl}^{(a)} I_{mnl}^{(b)} \right] \frac{\partial^4 |a-b|}{\partial a_k \partial a_l \partial a_m \partial a_n}.
 \end{aligned}$$

И, наконец, вычисление последнего интеграла в (23) дает

$$\begin{aligned}
 & - \frac{4}{c^2} \int_{(a)} \rho v_k \frac{\partial U_k^{(a)}}{\partial x_i} (dx)^3 = \frac{1}{c^2} \left\{ - 4 M_a \dot{a}_k \left(\frac{\partial U_k^{(a)}}{\partial x_i} \right)_a - \right. \\
 & \quad \left. - 4 \omega_{lm}^{(a)} I_{kl}^{(a)} \left(\frac{\partial^2 U_m^{(a)}}{\partial x_i \partial x_k} \right)_a - 2 (\dot{a}_m I_{kl}^{(a)} + \omega_{nm}^{(a)} I_{klm}^{(a)}) \times \right. \\
 & \quad \left. \times \left(\frac{\partial^3 U_m^{(a)}}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} \right)_a + \dots \right\} = \frac{\gamma}{c^2} \frac{\partial}{\partial a_i} \sum_b^{(a)} \left\{ - \frac{4 M_a M_b}{|a-b|} \dot{a}_k \dot{b}_k + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 4 (M_a \dot{a}_m \omega_{lm}^{(b)} I_{kl}^{(b)} - M_b \dot{b}_m \omega_{lm}^{(a)} I_{kl}^{(a)}) \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{|a-b|} + \\
 & + 2 \{ - (M_a I_{kl}^{(b)} + M_b I_{kl}^{(a)}) \dot{a}_m \dot{b}_m - (M_a \dot{a}_n \omega_{mn}^{(b)} I_{klm}^{(b)} + \\
 & \quad + M_b \dot{b}_n \omega_{mn}^{(a)} I_{klm}^{(a)}) + 2 \omega_{ms}^{(a)} \omega_{ns}^{(b)} I_{lm}^{(a)} I_{kn}^{(b)} \} \times \\
 & \times \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_l} \frac{1}{|a-b|} + \dots \} = \frac{\partial}{\partial a_i} (W_1 + W_2 + W_3 + \dots),
 \end{aligned}$$

где

$$W_1 = \frac{\gamma}{2c^2} \sum_a \sum_b^{(a)} \frac{-4M_a M_b}{|a-b|} \dot{a}_k \dot{b}_k,$$

$$\begin{aligned}
 W_2 = \frac{\gamma}{2c^2} \sum_a \sum_b^{(a)} & 4 (M_a \dot{a}_m \omega_{lm}^{(b)} I_{kl}^{(b)} - \\
 & - M_b \dot{b}_m \omega_{lm}^{(a)} I_{kl}^{(a)}) \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{|a-b|},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_3 = \frac{\gamma}{2c^2} \sum_a \sum_b^{(a)} & \{ - 2 \dot{a}_m \dot{b}_m (M_a I_{kl}^{(b)} + M_b I_{kl}^{(a)}) - \\
 & - 2 (M_a \dot{a}_n \omega_{mn}^{(b)} I_{klm}^{(b)} + M_b \dot{b}_n \omega_{mn}^{(a)} I_{klm}^{(a)}) + \\
 & + 4 \omega_{ms}^{(a)} \omega_{ns}^{(b)} I_{lm}^{(a)} I_{kn}^{(b)} \} \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_l} \frac{1}{|a-b|}.
 \end{aligned}$$

Из полученных выражений видно, что каждая из трех сумм $S_i + T_i + W_i$ ($i = 1, 2, 3$) отличается от соответствующей величины K_i на члены, не содержащие скоростей тел. Именно

$$S_1 + T_1 + W_1 = K_1 - \Phi_1,$$

$$S_2 + T_2 + W_2 = K_2 - \Phi_2,$$

$$S_3 + T_3 + W_3 = K_3 - \Phi_3 - \Lambda,$$

где

$$\begin{aligned}
 \Phi_1 = - \frac{\gamma}{2c^2} \sum_a \sum_b^{(a)} & [M_a (3T^{(b)} + \xi^{(b)}) + \\
 & + M_b (3T^{(a)} + \xi^{(a)})] \frac{1}{|a-b|}, \quad (58)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_2 = - \frac{\gamma}{2c^2} \sum_a \sum_b^{(a)} & [M_b (3T_k^{(a)} + \xi_k^{(a)}) - \\
 & - M_a (3T_k^{(b)} + \xi_k^{(b)})] \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{|a-b|}, \quad (59)
 \end{aligned}$$

$$\Phi_3 = -\frac{\gamma}{2c^2} \sum_a \sum_b^{(a)} \frac{1}{2} [I_{kl}^{(a)} (3T^{(b)} + \xi^{(b)}) + I_{kl}^{(b)} (3T^{(a)} + \xi^{(a)}) + M_a (3T_{kl}^{(b)} + \xi_{kl}^{(b)}) + M_b (3T_{kl}^{(a)} + \xi_{kl}^{(a)})] \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_l} \frac{1}{|a-b|} \quad (60)$$

и

$$\Lambda = -\frac{\gamma}{2c^2} \sum_a \sum_b^{(a)} \left[4\omega_{ms}^{(a)} \omega_{ns}^{(b)} I_{lm}^{(a)} I_{kn}^{(b)} \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_l} \frac{1}{|a-b|} - \frac{1}{8} I_{kl}^{(a)} I_{mn}^{(b)} \frac{\partial^4 |a-b|}{\partial a_k \partial a_l \partial a_m \partial a_n} \right]. \quad (61)$$

Следовательно, если положить

$$L = K + K_1 + K_2 + K_3 - \Phi - \Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 - \Psi - \Lambda, \quad (62)$$

то выражения (22) и (23) дадут

$$P_i^{(a)} = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i}, \quad F_i^{(a)} = \frac{\partial L}{\partial a_i} \quad (63)$$

и уравнения (21) поступательного движения системы тел примут лагранжеву форму

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i} - \frac{\partial L}{\partial a_i} = 0. \quad (64)$$

Функция Лагранжа L определяется выражениями (50)–(62). Это значение функции L отличается от значения, приведенного в книге В. А. Фока, добавлением членов порядка $Mq^4 R^2/c^2 D^2$. Для случая сферических тел отдельные составляющие функции L принимают значения

$$K = \sum_a \left(\frac{1}{2} M_a \dot{a}^2 + \omega_a^2 I_a \right) + \frac{1}{c^2} \sum_a \left[\frac{1}{8} M_a (\dot{a}^2)^2 + \left(\omega_a^2 I_a + \frac{1}{2} \eta^{(a)} + \frac{1}{3} \varepsilon^{(a)} \right) \dot{a}^2 - \frac{1}{2} I_a (\omega_a, \dot{a})^2 + \Gamma^{(a)} \right], \quad (65)$$

$$K_1 = \frac{\gamma}{2c^2} \sum_a \sum_b^{(a)} \frac{1}{2} \frac{M_a M_b}{|a-b|} \left[3\dot{a}^2 + 3\dot{b}^2 - 7\dot{a}\dot{b} - \frac{((a-b)\dot{a})((a-b)\dot{b})}{|a-b|^2} \right], \quad (66)$$

$$K_2 = \frac{\gamma}{2c^2} \sum_a \sum_b^{(a)} \frac{1}{|a-b|^3} \{M_a I_b \omega_b [(a-b), (3\dot{b} - 4\dot{a})] -$$

$$- M_b I_a \omega_a [(a-b), (3\dot{a} - 4\dot{b})]\}, \quad (67)$$

$$K_3 = \frac{\gamma}{2c^2} \sum_a \sum_b^{(a)} \frac{M_a I_b + M_b I_a}{2|a-b|^3} \left[-\dot{a}\dot{b} + \right.$$

$$\left. + 3 \frac{((a-b)\dot{a})((a-b)\dot{b})}{|a-b|^2} \right], \quad (68)$$

$$\Phi = -\frac{1}{2} \sum_a \sum_b^{(a)} \frac{\gamma M_a M_b}{|a-b|}, \quad (69)$$

$$\Phi_1 = -\frac{\gamma}{2c^2} \sum_a \sum_b^{(a)} \frac{1}{|a-b|} [M_a (3\omega_b^2 I_b + \xi^{(b)}) + M_b (3\omega_a^2 I_a +$$

$$+ \xi^{(a)})], \quad (70)$$

$$\Phi_2 = 0, \quad (71)$$

$$\Phi_3 = -\frac{\gamma}{2c^2} \sum_a \sum_b^{(a)} \frac{3}{2|a-b|^3} \left\{ M_a I_b' \left[\omega_b^2 - 3 \frac{((a-b)\omega_b)^2}{|a-b|^2} \right] + \right.$$

$$\left. + M_b I_a' \left[\omega_a^2 - 3 \frac{((a-b)\omega_a)^2}{|a-b|^2} \right] \right\}, \quad (72)$$

$$\Psi =$$

$$= \frac{\gamma^2}{2c^2} \sum_a \sum_b^{(a)} \frac{1}{2|a-b|^2} \left[M_a M_b (M_a + M_b) + \frac{M_a^2 I_b + M_b^2 I_a}{|a-b|^2} \right] +$$

$$+ \frac{\gamma^2}{3c^2} \sum_a \sum_b^{(a)} \sum_c^{(a,b)} \frac{1}{2} \left[M_a M_b M_c \left(\frac{1}{|a-b||a-c|} + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{1}{|b-c||b-a|} + \frac{1}{|c-a||c-b|} \right) +$$

$$+ M_b M_c I_a \frac{(a-b)(a-c)}{|a-b|^3 |a-c|^3} + M_c M_a I_b \frac{(b-c)(b-a)}{|b-c|^3 |b-a|^3} +$$

$$\left. + M_a M_b I_c \frac{(c-a)(c-b)}{|c-a|^3 |c-b|^3} \right] \quad (73)$$

и

$$\Lambda = -\frac{\gamma}{2c^2} \sum_a \sum_b^{(a)} \frac{4I_a I_b}{|a-b|^3} \left[\omega_a \omega_b - 3 \frac{((a-b)\omega_a)((a-b)\omega_b)}{|a-b|^2} \right]. \quad (74)$$

Рассматривая тела как абсолютно твердые, будем считать, что давление внутри них приближенно удовлетворяет уравнению

$$\rho \frac{\partial u^{(a)}}{\partial x_k} = \frac{\partial p}{\partial x_k}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{(a)} p (dx)^3 &= -\frac{1}{3} \int_{(a)} x_k \frac{\partial p}{\partial x_k} (dx)^3 = \\ &= \frac{1}{3} \int_{(a)} \int_{(a)} \rho \rho' \frac{x_k (x_k - x'_k)}{|r - r'|^3} (dx)^3 (dx')^3 = \frac{1}{3} \varepsilon^{(a)}, \end{aligned}$$

так что

$$\frac{1}{2} \eta^{(a)} + \frac{1}{3} \varepsilon^{(a)} = \frac{1}{2} \xi^{(a)}.$$

Поэтому, если в ньютоновых членах в (65) и (69) ввести эффективные массы, определяемые по (40), то из функции L исчезнут члены с $\varepsilon^{(a)}$, $\xi^{(a)}$ и $\eta^{(a)}$. В приложениях к задачам релятивистской небесной механики всюду употребляются эффективные массы, так что члены с $\varepsilon^{(a)}$, $\xi^{(a)}$ и $\eta^{(a)}$ в K и Φ_1 можно полагать отсутствующими.

Можно, разумеется, делать иные предположения о внутренней структуре тел, например, рассматривать их как жидкие тела, находящиеся в состоянии гидродинамического равновесия. В этом случае интегралы, зависящие от внутренней структуры тел, принимают другие значения. Уравнения поступательного движения, аналогичные (64) со значениями (50)—(62), выведены во многих работах, например (Michalska, 1960a; Vazanski, 1962; Lanzano, 1968). Небольшие различия в выражении функции Лагранжа объясняются различной трактовкой внутренней структуры тел. С точностью, вполне достаточной для задач релятивистской небесной механики, влиянием внутренней структуры тел можно вообще пренебречь и опустить в (50)—(61) все члены, связанные с учетом этого влияния.

§ 4. Вывод уравнений вращательного движения методом Фока

Переходя к нахождению явного вида уравнений вращательного движения (25), представим общий момент количества движения в виде суммы орбитального и враща-

ТЕЛЬНОГО МОМЕНТОВ

$$M_{ij}^{(a)} = a_i P_j^{(a)} - a_j P_i^{(a)} + S_{ij}^{(a)}, \quad (75)$$

где вращательный момент $S_{ij}^{(a)}$ определяется выражением

$$S_{ij}^{(a)} = \int_{(a)} [(x_i - a_i) G_j - (x_j - a_j) G_i] (dx)^3. \quad (76)$$

Отсюда непосредственные уравнения вращательного движения с учетом уравнений поступательного движения будут

$$\frac{dS_{ij}^{(a)}}{dt} = Q_{ij}^{(a)}, \quad (77)$$

где

$$Q_{ij}^{(a)} = L_{ij}^{(a)} - (a_i F_j^{(a)} - a_j F_i^{(a)}) - (\dot{a}_i P_j^{(a)} - \dot{a}_j P_i^{(a)}). \quad (78)$$

В соответствии с (48) определение $S_{ij}^{(a)}$ сводится к вычислению следующих интегралов:

$$\begin{aligned} & \int_{(a)} (x_i - a_i) \rho v_j (dx)^3 = \omega_{kj}^{(a)} I_{ik}^{(a)}, \\ & \int_{(a)} (x_i - a_i) \left(\frac{1}{2} \rho v^2 - \rho u^{(a)} + \rho \Pi + p \right) v_j (dx)^3 = \\ & = \frac{1}{2} \dot{a}_l^2 \omega_{kj}^{(a)} I_{ik}^{(a)} + \dot{a}_j \dot{a}_l \omega_{kl}^{(a)} I_{ik}^{(a)} + \dot{a}_m \omega_{lm}^{(a)} \omega_{kj}^{(a)} I_{ikl}^{(a)} + \\ & \quad + \dot{a}_j (T_i^{(a)} + \eta_i^{(a)}) + \omega_{kj}^{(a)} (T_{ik}^{(a)} + \eta_{ik}^{(a)}), \\ & - \int_{(a)} (x_i - a_i) \rho \frac{\partial^2 w^{(a)}}{\partial x_j \partial t} (dx)^3 = - \frac{d}{dt} \int_{(a)} (x_i - a_i) \rho \frac{\partial w^{(a)}}{\partial x_j} (dx)^3 + \\ & \quad + \int_{(a)} (x_i - a_i) \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial w^{(a)}}{\partial x_j} (dx)^3 = - \frac{d}{dt} \int_{(a)} \rho x_i \frac{\partial w^{(a)}}{\partial x_j} (dx)^3 + \\ & \quad + \int_{(a)} \rho v_k (x_i - a_i) \frac{\partial^2 w^{(a)}}{\partial x_j \partial x_k} (dx)^3 + \int_{(a)} \rho v_i \frac{\partial w^{(a)}}{\partial x_j} (dx)^3 = \\ & = - \frac{d}{dt} \psi_{ij}^{(a)} + \dot{a}_k \varphi_{ijk}^{(a)} + \omega_{lk}^{(a)} \varphi_{ujk}^{(a)} + \omega_{ki}^{(a)} \psi_{kj}^{(a)}, \\ & 8 \int_{(a)} \rho \omega_{kj}^{(a)} \frac{\partial w^{(a)}}{\partial x_k} (x_i - a_i) (dx)^3 = 8 \omega_{kj}^{(a)} \psi_{ik}^{(a)}. \end{aligned}$$

Здесь через $\psi_{ij}^{(a)}$ обозначен интеграл, зависящий лишь от внутренней структуры тела

$$\psi_{ij}^{(a)} = \int_{(a)} \rho x_i \frac{\partial w^{(a)}}{\partial x_j} (dx)^3.$$

Легко убедиться, что функция $\psi_{ij}^{(a)}$ симметрична по своим индексам и может быть записана в виде

$$\psi_{ij}^{(a)} = \frac{1}{4} \gamma \int_{(a)} \int_{(a')} \rho \rho' \frac{(x_i - x'_i)(x_j - x'_j)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} (dx)^3 (dx')^3.$$

Оставшиеся три интеграла зависят от взаимодействия тел

$$\begin{aligned} & 3 \int_{(a)} \rho (x_i - a_i) v_j U^{(a)} (dx)^3 = \\ & = 3\omega_{kj}^{(a)} I_{ik}^{(a)} U^{(a)}(a) + 3(\dot{a}_j I_{ik}^{(a)} + \omega_{lj}^{(a)} I_{ikl}^{(a)}) \left(\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_k} \right)_a + \\ & + \frac{3}{2} (\dot{a}_j I_{ikl}^{(a)} + \omega_{mj}^{(a)} I_{iklm}^{(a)}) \left(\frac{\partial^2 U^{(a)}}{\partial x_k \partial x_l} \right)_a + \dots = \\ & = \gamma \sum_b^{(a)} \left\{ \frac{3M_b}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} \omega_{kj}^{(a)} I_{ik}^{(a)} + 3M_b (\dot{a}_j I_{ik}^{(a)} + \right. \\ & + \omega_{ij}^{(a)} I_{ikl}^{(a)}) \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} + \frac{3}{2} [M_b (\dot{a}_j I_{ikl}^{(a)} + \\ & + \omega_{mj}^{(a)} I_{iklm}^{(a)}) + \omega_{mj}^{(a)} I_{im}^{(a)} I_{kl}^{(b)}] \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_l} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} + \dots \left. \right\}, \\ & - 4 \int_{(a)} \rho (x_i - a_i) U_j^{(a)} (dx)^3 = -4I_{ik}^{(a)} \left(\frac{\partial U_j^{(a)}}{\partial x_k} \right)_a - \\ & - 2I_{kl}^{(a)} \left(\frac{\partial^2 U_j^{(a)}}{\partial x_k \partial x_l} \right)_a + \dots = \gamma \sum_b^{(a)} \left\{ -4M_b \dot{b}_j I_{ik}^{(a)} \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} + \right. \\ & + (4\omega_{mj}^{(b)} I_{ik}^{(a)} I_{lm}^{(b)} - 2M_b \dot{b}_j I_{ikl}^{(a)}) \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_l} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} + \dots \left. \right\}, \\ & - \int_{(a)} \rho (x_i - a_i) \frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_j \partial t} (dx)^3 = -I_{ik}^{(a)} \left(\frac{\partial^3 W^{(a)}}{\partial x_j \partial x_k \partial t} \right)_a - \\ & - \frac{1}{2} I_{ikl}^{(a)} \left(\frac{\partial^4 W^{(a)}}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l \partial t} \right)_a + \dots = \gamma \sum_b^{(a)} \left\{ \frac{1}{2} M_b \dot{b}_l I_{ik}^{(a)} \frac{\partial^3 |\mathbf{a} - \mathbf{b}|}{\partial a_j \partial a_k \partial a_l} + \right. \\ & + \frac{1}{4} (M_b \dot{b}_m I_{ikl}^{(a)} - I_{ik}^{(a)} I_{lm}^{(b)}) \frac{\partial^4 |\mathbf{a} - \mathbf{b}|}{\partial a_j \partial a_k \partial a_l \partial a_m} + \dots \left. \right\}. \end{aligned}$$

Альтернируя по индексам i и j и складывая все полученные результаты, имеем

$$\begin{aligned}
 S_{ij}^{(a)} = & \omega_{kj}^{(a)} I_{ik}^{(a)} - \omega_{ki}^{(a)} I_{jk}^{(a)} + \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{1}{2} \dot{a}_l^2 (\omega_{kj}^{(a)} I_{ik}^{(a)} - \omega_{ki}^{(a)} I_{jk}^{(a)}) + \right. \\
 & + \dot{a}_l \omega_{kl}^{(a)} (\dot{a}_j I_{ik}^{(a)} - \dot{a}_i I_{jk}^{(a)}) + \dot{a}_m \omega_{lm}^{(a)} (\omega_{kj}^{(a)} I_{ikl}^{(a)} - \omega_{ki}^{(a)} I_{jkl}^{(a)}) + \\
 & + (\dot{a}_j T_i^{(a)} - \dot{a}_i T_j^{(a)}) + (\dot{a}_j \eta_i^{(a)} - \dot{a}_i \eta_j^{(a)}) + (\omega_{kj}^{(a)} T_{ik}^{(a)} - \omega_{ki}^{(a)} T_{jk}^{(a)}) + \\
 & + (\omega_{kj}^{(a)} \eta_{ik}^{(a)} - \omega_{ki}^{(a)} \eta_{jk}^{(a)}) + \dot{a}_k (\varphi_{ijk}^{(a)} - \varphi_{jik}^{(a)}) + \\
 & + \omega_{lk}^{(a)} (\varphi_{ijk}^{(a)} - \varphi_{jik}^{(a)}) + 7 (\omega_{kj}^{(a)} \psi_{ki}^{(a)} - \omega_{ki}^{(a)} \psi_{kj}^{(a)}) \left. \right\} + \\
 & + \frac{\gamma}{c^2} \sum_b^{(a)} \left\{ \frac{3M_b}{|a-b|} (\omega_{kj}^{(a)} I_{ik}^{(a)} - \omega_{ki}^{(a)} I_{jk}^{(a)}) + \right. \\
 & + M_b [(3\dot{a}_j - 4\dot{b}_j) I_{ik}^{(a)} - (3\dot{a}_i - 4\dot{b}_i) I_{jk}^{(a)} + \\
 & + 3 (\omega_{lj}^{(a)} I_{ikl}^{(a)} - \omega_{li}^{(a)} I_{jkl}^{(a)})] \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{|a-b|} + \\
 & + \frac{1}{2} M_b \dot{b}_l \left(I_{ik}^{(a)} \frac{\partial}{\partial a_j} - I_{jk}^{(a)} \frac{\partial}{\partial a_i} \right) \frac{\partial^2 |a-b|}{\partial a_k \partial a_l} + \\
 & + \left[\frac{1}{2} M_b ((3\dot{a}_j - 4\dot{b}_j) I_{ikl}^{(a)} - (3\dot{a}_i - 4\dot{b}_i) I_{jkl}^{(a)}) + \right. \\
 & + \frac{3}{2} M_b (\omega_{mj}^{(a)} I_{iklm}^{(a)} - \omega_{mi}^{(a)} I_{jklm}^{(a)}) + \frac{3}{2} I_{ll}^{(b)} (\omega_{mj}^{(a)} I_{im}^{(a)} - \omega_{mi}^{(a)} I_{jm}^{(a)}) + \\
 & + 4 I_{lm}^{(b)} (\omega_{mj}^{(a)} I_{ik}^{(a)} - \omega_{mi}^{(a)} I_{jk}^{(a)}) \left. \right] \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_l} \frac{1}{|a-b|} + \\
 & + \frac{1}{4} \left[M_b \dot{b}_m \left(I_{ikl}^{(a)} \frac{\partial}{\partial a_j} - I_{jkl}^{(a)} \frac{\partial}{\partial a_i} \right) - I_{lm}^{(b)} \left(I_{ii}^{(a)} \frac{\partial}{\partial a_j} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - I_{jk}^{(a)} \frac{\partial}{\partial a_i} \right) \right] \frac{\partial^3 |a-b|}{\partial a_k \partial a_l \partial a_m} + \dots \left. \right\}. \quad (79)
 \end{aligned}$$

Здесь удержаны члены до порядка Mq^3R^3/c^2D^2 включительно.

Остается найти правые части $Q_{ij}^{(a)}$ уравнений (77). В соответствии с (78)

$$\begin{aligned}
 Q_{ij}^{(a)} = & \int_{(a)} \left\{ \sigma \left[(x_i - a_i) \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_j} - (x_j - a_j) \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i} \right] + \right. \\
 & + \rho \left[(x_i - a_i) \frac{\partial \tilde{U}^{(a)}}{\partial x_j} - (x_j - a_j) \frac{\partial \tilde{U}^{(a)}}{\partial x_i} \right] - \\
 & \left. - \frac{1}{c^2} \rho v_k \left[(x_i - a_i) \frac{\partial^3 W^{(a)}}{\partial x_j \partial x_k \partial t} - (x_j - a_j) \frac{\partial^3 W^{(a)}}{\partial x_i \partial x_k \partial t} \right] - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{4}{c^2} \rho v_k \left[(x_i - a_i) \frac{\partial U_k^{(a)}}{\partial x_j} - (x_j - a_j) \frac{\partial U_k^{(a)}}{\partial x_i} \right] - \\
& - \frac{1}{c^2} \rho (x_k - a_k) \left(\omega_{ki}^{(a)} \frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_j \partial t} - \omega_{kj}^{(a)} \frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i \partial t} \right) - \\
& - \frac{4}{c^2} \rho (x_k - a_k) (\omega_{ki}^{(a)} U_j^{(a)} - \omega_{kj}^{(a)} U_i^{(a)}) - \\
& - \frac{3}{c^2} \rho (\dot{a}_i \omega_{kj}^{(a)} - \dot{a}_j \omega_{ki}^{(a)}) (x_k - a_k) U^{(a)} - \\
& - \frac{1}{c^2} (\dot{a}_i \omega_{kj}^{(a)} - \dot{a}_j \omega_{ki}^{(a)}) (x_k - a_k) \left(\frac{1}{2} \rho v^2 - \rho u^{(a)} + \rho \Pi p \right) + \\
& + \frac{1}{c^2} \rho \left(\dot{a}_i \frac{\partial^2 w^{(a)}}{\partial x_j \partial t} - \dot{a}_j \frac{\partial^2 w^{(a)}}{\partial x_i \partial t} \right) \} (dx)^3. \quad (80)
\end{aligned}$$

Входящие сюда интегралы имеют значения

$$\begin{aligned}
\int_{(a)} \rho (x_i - a_i) \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_j} (dx)^3 &= I_{ik}^{(a)} \left(\frac{\partial^2 U^{(a)}}{\partial x_j \partial x_k} \right)_a + \dots = \\
&= \sum_b^{(a)} \left\{ \gamma M_b I_{ik}^{(a)} \frac{\partial^2}{\partial a_j \partial a_k} \frac{1}{|a-b|} + \dots \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{(a)} \rho (x_i - a_i) \frac{\partial \tilde{U}^{(a)}}{\partial x_j} (dx)^3 &= I_{ik}^{(a)} \left(\frac{\partial^2 \tilde{U}^{(a)}}{\partial x_j \partial x_k} \right)_a + \dots = \\
&= \frac{1}{c^2} \sum_b^{(a)} \left\{ \gamma I_{ik}^{(a)} \left(\frac{3}{2} M_b \delta_l^2 + 3T^{(b)} + \xi^{(b)} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - M_b U^{(b)}(b) \right) \frac{\partial^2}{\partial a_j \partial a_k} \frac{1}{|a-b|} + \dots \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{(a)} (\sigma - \rho) (x_i - a_i) \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_j} (dx)^3 &= \\
&= \frac{1}{c^2} \left\{ (3\dot{a}_l \omega_{kl}^{(a)} I_{ik}^{(a)} + 3T_i^{(a)} + \xi_i^{(a)}) \left(\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_j} \right)_a + \right. \\
&+ \left(\frac{3}{2} \dot{a}_l^2 I_{ik}^{(a)} + 3\dot{a}_m \omega_{lm}^{(a)} I_{ikl}^{(a)} + 3T_{ik}^{(a)} + \xi_{ik}^{(a)} \right) \left(\frac{\partial^2 U^{(a)}}{\partial x_j \partial x_k} \right) + \dots - \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} I_{ik}^{(a)} \left(\frac{\partial^2 (U^{(a)})^2}{\partial x_j \partial x_k} \right)_a + \dots \right\} = \\
&= \frac{\gamma}{c^2} \sum_b^{(a)} \left\{ M_b (3\dot{a}_l \omega_{kl}^{(a)} I_{ik}^{(a)} + 3T_i^{(a)} + \xi_i^{(a)}) \frac{\partial}{\partial a_j} \frac{1}{|a-b|} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + M_b \left(\frac{3}{2} \dot{a}_l^2 I_{ik}^{(a)} + 3 \dot{a}_m \omega_{lm}^{(a)} I_{ikl}^{(a)} + 3 T_{ik}^{(a)} + \xi_{ik}^{(a)} \right) \times \\
 & \times \frac{\partial^2}{\partial a_j \partial a_k} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} + \dots \left\{ \frac{1}{c^2} I_{ik}^{(a)} \frac{\partial^2 (U^{(a)}(\mathbf{a}))^2}{\partial a_j \partial a_k} + \dots \right\}, \\
 & - \frac{1}{c^2} \int_{(a)} \rho v_k (x_i - a_i) \frac{\partial^3 W^{(a)}}{\partial x_j \partial x_k \partial t} (dx)^3 = \\
 & = \frac{1}{c^2} \left\{ - \omega_{ik}^{(a)} I_{il}^{(a)} \left(\frac{\partial^3 W^{(a)}}{\partial x_j \partial x_k \partial t} \right)_a - \right. \\
 & \quad \left. - (\dot{a}_k I_{il}^{(a)} + \omega_{mk}^{(a)} I_{ilm}^{(a)}) \left(\frac{\partial^4 W^{(a)}}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l \partial t} \right)_a + \dots \right\} = \\
 & = \frac{\gamma}{2c^2} \sum_b^{(a)} \left\{ M_b \dot{b}_l \omega_{mk}^{(a)} I_{im}^{(a)} \frac{\partial^3 |\mathbf{a} - \mathbf{b}|}{\partial a_j \partial a_k \partial a_l} + \left[M_b \dot{b}_m (\dot{a}_k I_{il}^{(a)} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \omega_{nk}^{(a)} I_{in}^{(a)}) - \frac{1}{2} I_{lm}^{(b)} \omega_{nk}^{(a)} I_{in}^{(a)} \right] \frac{\partial^4 |\mathbf{a} - \mathbf{b}|}{\partial a_j \partial a_k \partial a_l \partial a_m} + \dots \right\}, \\
 & - \frac{4}{c^2} \int_{(a)} \rho V_k (x_i - a_i) \frac{\partial U_k^{(a)}}{\partial x_j} (dx)^3 = \frac{1}{c^2} \left\{ - 4 \omega_{kl}^{(a)} I_{ik}^{(a)} \times \right. \\
 & \quad \left. \times \left(\frac{\partial U_l^{(a)}}{\partial x_j} \right)_a - 4 (\dot{a}_l I_{ik}^{(a)} + \omega_{ml}^{(a)} I_{ikm}^{(a)}) \left(\frac{\partial^2 U_l^{(a)}}{\partial x_j \partial x_k} \right)_a + \dots \right\} = \\
 & = \frac{\gamma}{c^2} \sum_b^{(a)} \left\{ - 4 M_b \dot{b}_l \omega_{kl}^{(a)} I_{ik}^{(a)} \frac{\partial}{\partial a_j} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} + 4 [\omega_{ln}^{(a)} \omega_{mn}^{(b)} I_{il}^{(a)} I_{km}^{(b)} - \right. \\
 & \quad \left. - M_b \dot{b}_l (\dot{a}_l I_{ik}^{(a)} + \omega_{ml}^{(a)} I_{ikm}^{(a)}) \right] \frac{\partial^2}{\partial a_j \partial a_k} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} + \dots \left\{ , \right. \\
 & - \frac{1}{c^2} \omega_{ki}^{(a)} \int_{(a)} \rho (x_k - a_k) \frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_j \partial t} (dx)^3 = \\
 & = \frac{1}{c^2} \left\{ - \omega_{li}^{(a)} I_{kl}^{(a)} \left(\frac{\partial^3 W^{(a)}}{\partial x_j \partial x_k \partial t} \right)_a - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{2} \omega_{mi}^{(a)} I_{klm}^{(a)} \left(\frac{\partial^4 W^{(a)}}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l \partial t} \right)_a + \dots \right\} = \\
 & = \frac{\gamma}{2c^2} \sum_b^{(a)} \left\{ M_b \dot{b}_l \omega_{mi}^{(a)} I_{klm}^{(a)} \frac{\partial^3 |\mathbf{a} - \mathbf{b}|}{\partial a_j \partial a_k \partial a_l} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} (M_b \dot{b}_m \omega_{ni}^{(a)} I_{kln}^{(a)} - \omega_{ni}^{(a)} I_{kn}^{(a)} I_{lm}^{(b)}) \frac{\partial^4 |\mathbf{a} - \mathbf{b}|}{\partial a_j \partial a_k \partial a_l \partial a_m} + \dots \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{4}{c^2} \omega_{ki}^{(a)} \int_{(a)} \rho (x_k - a_k) U_j^{(a)} (dx)^3 = \\
& = \frac{1}{c^2} \left\{ -4 \omega_{li}^{(a)} I_{kl}^{(a)} \left(\frac{\partial U_j^{(a)}}{\partial x_k} \right)_a - 2 \omega_{mi}^{(a)} I_{klm}^{(a)} \left(\frac{\partial^2 U_j^{(a)}}{\partial x_k \partial x_l} \right)_a + \dots \right\} = \\
& = \frac{\gamma}{c^2} \sum_b^{(a)} \left\{ -4 M_a b_j \omega_{li}^{(a)} I_{kl}^{(a)} \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{|a-b|} + \right. \\
& \quad \left. + (\omega_{ni}^{(a)} \omega_{mj}^{(b)} I_{kln}^{(b)} - 2 M_b b_j \omega_{ni}^{(a)} I_{kln}^{(a)}) \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_l} \frac{1}{|a-b|} + \dots \right\}, \\
& -\frac{3}{c^2} \dot{a}_i \omega_{kj}^{(a)} \int_{(a)} \rho (x_k - a_k) U^{(a)} (dx)^3 = \\
& = \frac{1}{c^2} \left\{ -3 \dot{a}_i \omega_{lj}^{(a)} I_{kl}^{(a)} \left(\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_k} \right)_a - \right. \\
& \quad \left. - \frac{3}{2} \dot{a}_i \omega_{mj}^{(a)} I_{klm}^{(a)} \left(\frac{\partial^2 U^{(a)}}{\partial x_k \partial x_l} \right)_a + \dots \right\} = \\
& = \frac{\gamma}{c^2} \sum_b^{(a)} \left\{ -3 M_b \dot{a}_i \omega_{lj}^{(a)} I_{kl}^{(a)} \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{|a-b|} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{3}{2} M_b \dot{a}_i \omega_{mj}^{(a)} I_{klm}^{(a)} \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_l} \frac{1}{|a-b|} + \dots \right\}, \\
& -\frac{1}{c^2} \dot{a}_i \omega_{kj}^{(a)} \int_{(a)} (x_k - a_k) \left(\frac{1}{2} \rho v^2 - \rho u^{(a)} + \rho \Pi + p \right) (dx)^3 = \\
& = -\frac{1}{c^2} \dot{a}_i \omega_{kj}^{(a)} (\dot{a}_m \omega_{lm}^{(a)} I_{kl}^{(a)} + T_k^{(a)} + \eta_k^{(a)}), \\
& \frac{1}{c^2} \dot{a}_i \int_{(a)} \rho \frac{\partial^2 w^{(a)}}{\partial x_j \partial t} (dx)^3 = \frac{1}{c^2} \dot{a}_i (-\varepsilon^{(a)} \dot{a}_j + B_{jk}^{(a)} \dot{a}_k - \omega_{lk}^{(a)} \varphi_{ljk}^{(a)}).
\end{aligned}$$

Собирая все найденные значения, получаем

$$\begin{aligned}
Q_{ij}^{(a)} &= \gamma \sum_b^{(a)} \left\{ M_b \left(I_{ik}^{(a)} \frac{\partial}{\partial a_j} - I_{jk}^{(a)} \frac{\partial}{\partial a_i} \right) \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{|a-b|} + \dots \right\} + \\
&+ \frac{\gamma}{c^2} \sum_b^{(a)} \left\{ M_b (3\dot{a}_l - 4\dot{b}_l) \omega_{kl}^{(a)} \left(I_{ik}^{(a)} \frac{\partial}{\partial a_j} - I_{jk}^{(a)} \frac{\partial}{\partial a_i} \right) \frac{1}{|a-b|} + \right. \\
&+ M_b \left[(3T_i^{(a)} + \xi_i^{(a)}) \frac{\partial}{\partial a_j} - (3T_j^{(a)} + \xi_j^{(a)}) \frac{\partial}{\partial a_i} \right] \frac{1}{|a-b|} + \\
&+ M_b [(3\dot{a}_j - 4\dot{b}_j) \omega_{li}^{(a)} - (3\dot{a}_i - 4\dot{b}_i) \omega_{lj}^{(a)}] I_{kl}^{(a)} \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{|a-b|} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} M_b \dot{b}_l \left(I_{ik}^{(a)} \frac{\partial}{\partial a_j} - I_{jk}^{(a)} \frac{\partial}{\partial a_i} \right) \frac{\partial^2 |\mathbf{a} - \mathbf{b}|}{\partial a_k \partial a_l} + \\
 & + \left[\frac{1}{2} M_b (3\dot{a}_l^2 + 3\dot{b}_l^2 - 8\dot{a}_l \dot{b}_l) - M_b U^{(b)}(\mathbf{b}) + 3T^{(b)} + \xi^{(b)} \right] \times \\
 & \quad \times \left(I_{ik}^{(a)} \frac{\partial}{\partial a_j} - I_{jk}^{(a)} \frac{\partial}{\partial a_i} \right) \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} + \\
 & + M_b (3\dot{a}_m - 4\dot{b}_m) \omega_{lm}^{(a)} \left(I_{ikl}^{(a)} \frac{\partial}{\partial a_j} - I_{jkl}^{(a)} \frac{\partial}{\partial a_i} \right) \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} + \\
 & \quad + M_b \left[(3T_{ik}^{(a)} + \xi_{ik}^{(a)}) \frac{\partial}{\partial a_j} - (3T_{jk}^{(a)} + \xi_{jk}^{(a)}) \frac{\partial}{\partial a_i} \right] \times \\
 & \quad \times \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} + 4\omega_{ln}^{(a)} \omega_{mn}^{(b)} I_{km}^{(b)} \left(I_{il}^{(a)} \frac{\partial}{\partial a_j} - I_{jl}^{(a)} \frac{\partial}{\partial a_i} \right) \times \\
 & \quad \times \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} + \left[4(\omega_{ni}^{(a)} \omega_{mj}^{(b)} - \omega_{nj}^{(a)} \omega_{mi}^{(b)}) I_{kn}^{(a)} I_{lm}^{(b)} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} M_b ((3\dot{a}_j - 4\dot{b}_j) \omega_{mi}^{(a)} - (3\dot{a}_i - 4\dot{b}_i) \omega_{mj}^{(a)}) I_{klm}^{(a)} \right] \times \\
 & \quad \times \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_l} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} + \left\{ \left[\frac{1}{2} M_b \dot{b}_m \dot{a}_k I_{il}^{(a)} + \frac{1}{4} M_b \dot{b}_m I_{ikl}^{(a)} - \right. \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{4} I_{ik}^{(a)} I_{lm}^{(b)} \right] \frac{\partial}{\partial a_j} - \left[\frac{1}{2} M_b \dot{b}_m \dot{a}_k I_{jl}^{(a)} + \frac{1}{4} M_b \dot{b}_m I_{jkl}^{(a)} - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{4} I_{jk}^{(a)} I_{lm}^{(b)} \right] \frac{\partial}{\partial a_i} \left. \right\} \frac{\partial^2 |\mathbf{a} - \mathbf{b}|}{\partial a_k \partial a_l \partial a_m} + \dots \left. \right\} + \\
 & \quad + \frac{1}{2c^2} \left(I_{jk}^{(a)} \frac{\partial}{\partial a_i} - I_{ik}^{(a)} \frac{\partial}{\partial a_j} \right) \frac{\partial (U^{(a)}(\mathbf{a}))^2}{\partial a_k} + \dots + \\
 & \quad + \frac{1}{c^2} [(\dot{a}_m \omega_{lm}^{(a)} I_{kl}^{(a)} + T_k^{(a)} + \eta_k^{(a)}) (\dot{a}_j \omega_{ki}^{(a)} - \dot{a}_i \omega_{kj}^{(a)}) + \\
 & \quad + \dot{a}_k (\dot{a}_i B_{jk}^{(a)} - \dot{a}_j B_{ik}^{(a)}) + \omega_{ik}^{(a)} (\dot{a}_j \varphi_{lik}^{(a)} - \dot{a}_i \varphi_{ljk}^{(a)})]. \quad (81)
 \end{aligned}$$

В релятивистской части здесь удержаны члены до порядка $Mq^4 R^2/c^2 D^2$ включительно.

В случае сферических масс уравнения вращательного движения значительно упрощаются и в векторной записи принимают форму

$$\frac{dS_a}{dt} = Q_a, \quad (82)$$

где

$$\begin{aligned}
 S_a = & 2I_a \omega_a + \frac{1}{c^2} \left[2I_a \omega_a \dot{a}^2 - I_a (\omega_a \dot{a}) \dot{a} + \right. \\
 & \left. + \left(4I_a' \omega_a^2 + \frac{2}{3} \eta_{kk}^{(a)} + \frac{4}{9} B_{kkll}^{(a)} + \frac{14}{3} \psi_{kk}^{(a)} \right) \omega_a \right] + \\
 & + \frac{\gamma}{c^2} \sum_b^{(a)} \left\{ \frac{M_b J_a}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} \left(6\omega_a + \frac{[(3\dot{a} - 4\dot{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b})]}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2} \right) \right\} +
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{4I_a I_b}{|a-b|^3} \left[\omega_b - 3 \frac{((a-b)\omega_b)}{|a-b|^2} (a-b) \right] + \\ + \frac{3M_b I'_a}{|a-b|^3} \left[\omega_a - 3 \frac{((a-b)\omega_a)}{|a-b|^2} (a-b) \right] + \dots \}, \quad (83)$$

$$Q_a = \frac{\gamma}{c^2} \sum_b^{(a)} \left\{ \frac{M_b I_a}{|a-b|^3} [\omega_a \times [(3\dot{a}-4\dot{b}) \times (a-b)]] + \right. \\ + \frac{4I_a I_b}{|a-b|^3} \left([\omega_a \times \omega_b] + \frac{3((a-b)\omega_b)}{|a-b|^2} [(a-b) \times \omega_a] \right) + \\ \left. + \frac{9M_b I'_a}{|a-b|^3} ((a-b)\omega_a) [(a-b) \times \omega_a] + \dots \right\} + \\ + \frac{1}{c^2} I_a (\omega_a \dot{a}) [\dot{a}, \omega_a]. \quad (84)$$

В S_a в первой квадратной скобке можно отбросить члены, зависящие лишь от ω_a и от внутренней структуры тела. Действительно, для сферических тел в ньютоновом приближении $\dot{\omega}_a = 0$, так что в релятивистских членах угловая скорость ω_a может считаться постоянной величиной. Учитывая значение лагранжиана L уравнений поступательного движения сферических тел, определяемое формулами (62), (65)–(74), легко установить, что

$$S_a = \frac{\partial L}{\partial \omega_a}, \quad Q_a = \omega_a \times \frac{\partial L}{\partial \omega_a}, \quad (85)$$

и, таким образом, уравнения вращательного движения сферических тел можно записать еще в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \omega_a} = \omega_a \times \frac{\partial L}{\partial \omega_a}. \quad (86)$$

В выражении (83) для S_a имеются две группы членов порядка $Mq^3 R^3/c^2 D^2$. Члены, пропорциональные произведению $I_a I_b$, зависят от ω_b , но не зависят от ω_a . Подобных членов нет среди членов соответствующего порядка в Q_a , поэтому в S_a и были удержаны члены на один порядок выше относительно R/D , чем в Q_a . Члены же в S_a , пропорциональные произведению $M_b I'_a$, вполне могут быть опущены. Но наибольший интерес в выражении (83) для S_a представляют члены порядка $Mq^3 R^2/c^2 D$, которые не зависят от угловых скоростей тел. Наличие таких членов означает, что в общем случае уравнения (86) не допускают

решения $\omega_a = 0$ для всех тел системы. Иными словами, поступательное движение сферически симметричных тел влечет за собой и их вращение.

Приведенные здесь уравнения вращательного движения задачи N тел были впервые найдены методом Фока в работе (Брумберг, 1968а). Аналогичные уравнения были получены другими путями во многих работах, например (Айтекеева, Петрова, 1959; Айтекеева, 1962; Michalska, 1960b; Gábos, 1960, 1961). В первых двух работах эти уравнения находились из условия симметричности g_{ij} при решении уравнений поля в следующем за (8) приближении. При этом использовался тензор масс, отличный от (11). В остальных работах уравнения вращательного движения выводились непосредственно из лагранжиана. Полученные в этих работах уравнения вращательного движения не согласуются полностью ни между собой, ни с уравнениями, данными выше.

В заключение надо отметить, что для пробной вращающейся частицы, движущейся в заданном гравитационном поле, уравнения поступательного и вращательного движения могут быть выведены на основании мультипольного формализма (описание частицы посредством моментов различного порядка). Такой путь развивался в работах (Parapetrou, 1951; Tulczyjew B., Tulczyjew W., 1962). Однако метод, изложенный в этой главе, представляется более общим и полученные с его помощью уравнения поступательного и вращательного движения будут использоваться также и для случая пробной частицы.

§ 5. Вывод лагранжиана из вариационного принципа

В методе Фока, как и в методе ЕИН, функция Лагранжа строится на основе явного вида уравнений движения. Как было показано Инфельдом (Infeld, 1957), лагранжиан уравнений движения может быть получен непосредственно из вариационного принципа (37) гл. 4. Это дает самый экономный способ получения уравнений движения задачи N тел, так как при этом нужно знать лишь первые члены h_{00} , h_{mn} , h_{0m} разложений потенциалов тяготения. Все выкладки особенно упрощаются при рассмотрении точечных масс, описываемых тензором энергии-импульса

с δ -функциями. Однако в этом параграфе будет дан вывод лагранжиана уравнений движения вращающихся масс произвольной формы.

Перепишем исходный вариационный принцип в виде

$$\delta \int \sqrt{-g} \left[-R + \frac{16\pi\gamma}{c^4} (c^2\rho^* + \rho^*\Pi) \right] (dx)^4 = 0. \quad (87)$$

При варьировании по компонентам метрического тензора $g_{\mu\nu}$ отсюда получаются уравнения поля (1) с тензором энергии — импульса, определяемым формулой (36) гл. 4. Преобразуем вариационный принцип (87) так, чтобы в подынтегральное выражение не входили вторые производные от компонент метрического тензора. В соответствии с определением скалярной кривизны R имеем

$$\sqrt{-g}R = \sqrt{-g}g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial\Gamma_{\alpha\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\nu}^{\sigma} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} - \Gamma_{\alpha\sigma}^{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \right)$$

или

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}R = & \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Gamma_{\alpha\nu}^{\alpha}) - \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}) - \\ & - \Gamma_{\alpha\nu}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) + \\ & + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) + \sqrt{-g}g^{\mu\nu} (\Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\alpha\sigma}^{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}). \end{aligned}$$

Учитывая формулы

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\nu}^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x_{\nu}^{\alpha}}, \quad g^{\alpha\beta}\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (\sqrt{-g}g^{\alpha\mu}), \\ \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} = -\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}g^{\nu\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\nu}g^{\mu\beta}, \end{aligned}$$

предыдущую формулу можно переписать в вид

$$\sqrt{-g}R = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} [\sqrt{-g} (g^{\mu\nu}\Gamma_{\alpha\nu}^{\alpha} - g^{\alpha\nu}\Gamma_{\alpha\nu}^{\mu})] - \sqrt{-g}G,$$

где

$$G = g^{\mu\nu} (\Gamma_{\beta\nu}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\mu}^{\beta} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}). \quad (88)$$

Заметим, что величина G , рассматриваемая как функция от $g^{\alpha\beta}$ и производных $\partial g^{\alpha\beta}/\partial x^{\mu}$, представляет собой функцию Лагранжа для левых частей уравнений поля (1).

Итак, вариационный принцип (87) может быть записан в желаемой форме

$$\delta \int \sqrt{-g} \left[G + \frac{16\pi\gamma}{c^4} (c^2\rho^* + \rho^*\Pi) \right] (dx)^4 = 0. \quad (89)$$

Так как элемент четырехмерного объема равен $(dx)^4 = = c dt (dx)^3$, то напрашивается мысль переписать этот принцип в виде

$$\delta \int L dt = 0 \quad (90)$$

и рассматривать L как лагранжиан уравнений движения.

Оказывается, что это действительно можно сделать. Обоснование этого приема содержится в книге Инфельда и Плебаньского. При таком подходе также выясняется самая тесная связь между уравнениями поля и уравнениями движения, поскольку и те, и другие вытекают фактически из одного и того же принципа.

Умножая на несущественный множитель, положим

$$L = - \int \left[\frac{c^4}{16\pi\gamma} \sqrt{-g} G + (c^2\rho^* + \rho^*\Pi) \sqrt{-g} \right] (dx)^3, \quad (91)$$

где интеграл надо рассматривать как сумму интегралов, взятых по областям, занимаемым массами. Сюда нужно подставить выражение ρ^* через ρ :

$$\sqrt{-g}\rho^* = \rho \frac{\sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}}{dx^0},$$

и значения метрического тензора

$$g_{00} = 1 - \frac{2U}{c^2} + h_{00}, \quad g_{0i} = \frac{4U_i}{c^3}, \quad g_{ij} = -\left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) \delta_{ij}$$

с учетом соотношения

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U_k}{\partial x_k} = 0.$$

На основе этих выражений получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}\rho^* = \rho \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} v^2 + U \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{c^4} \left(-\frac{1}{8} v^4 - \frac{3}{2} v^2 U - \frac{1}{2} U^2 + 4U_k v_k + \frac{1}{2} c^4 h_{00} \right) + \dots \right] \end{aligned}$$

и

$$\sqrt{-g}G = \frac{2}{c^4} \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{1}{c^6} \left[8U \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} \right)^2 + 6 \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \right. \\ \left. + 16 \frac{\partial U}{\partial x_k} \frac{\partial U_k}{\partial t} - 4 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_i} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right)^2 - 2c^4 \frac{\partial U}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} h_{00} \right] + \dots$$

Последнее выражение можно переписать в виде

$$\sqrt{-g}G = -\frac{2}{c^4} U \Delta U + \\ + \frac{1}{c^6} \left[-4U^2 \Delta U - 2 \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right)^2 + 8U_k \Delta U_k + 2c^4 h_{00} \Delta U \right] + \\ + \frac{16}{c^6} \frac{\partial}{\partial t} \left(U_k \frac{\partial U}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{2}{c^4} U + \frac{4}{c^6} U^2 - \frac{2}{c^2} h_{00} \right) \frac{\partial U}{\partial x_i} + \right. \\ \left. + \frac{8}{c^4} \frac{\partial}{\partial x_k} (U_i U_k) - \frac{8}{c^6} U_k \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right] + \dots$$

Члены, стоящие под знаком производной $\partial/\partial x_i$, обращаются в нуль при интегрировании, а член в виде производной по времени не влияет на уравнения движения (поскольку функция Лагранжа определяется с точностью до производной по времени от произвольной функции). Подставляя эти значения в (91) и учитывая уравнения для U и U_i , убедимся, что члены с h_{00} взаимно уничтожаются и в итоге следует

$$L = \int \left\{ -c^2 \rho + \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{1}{2} \rho U - \rho \Pi + \right. \\ \left. + \frac{1}{c^2} \left[\frac{1}{8} \rho v^4 + \frac{3}{2} \rho v^2 U - \frac{1}{2} \rho U^2 - 2\rho v_k U_k + \frac{1}{8\pi\gamma} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \rho v^2 \Pi + \rho \Pi U \right] \right\} (dx)^3. \quad (92)$$

Прежде всего, преобразуем член, содержащий дивергенцию вектор-потенциала

$$\frac{1}{8\pi\gamma} \int \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right)^2 (dx)^3 = -\frac{1}{8\pi\gamma} \int \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \frac{\partial U}{\partial t} (dx)^3 = \\ = \frac{1}{8\pi\gamma} \int U_k \frac{\partial^2 U}{\partial x_k \partial t} (dx)^3 = -\frac{1}{8\pi\gamma} \int \frac{\partial U_k}{\partial x_l} \frac{\partial^3 W}{\partial x_k \partial x_l \partial t} (dx)^3 = \\ = \frac{1}{8\pi\gamma} \int \Delta U_k \frac{\partial^2 W}{\partial x_k \partial t} (dx)^3 = -\frac{1}{2} \int \rho v_k \frac{\partial^2 W}{\partial x_k \partial t} (dx)^3.$$

До сих пор величина Π фигурировала только в релятивистских членах. В интеграле (92) Π входит и в ньютоновы члены. Поэтому в формуле (64) гл. 3 нужно выделить релятивистский член. Так как

$$\epsilon^* = \rho \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} v^2 + 3U \right) + \dots \right],$$

то, полагая

$$\Pi^* = -\frac{p}{\rho} + \int_0^p \frac{dp}{\rho^*},$$

находим

$$\rho\Pi = \rho\Pi^* - \frac{p}{c^2} \left(\frac{1}{2} v^2 + 3U \right).$$

Наконец, выделим, как и раньше, в функциях U , U_k , W внутренние и внешние части и воспользуемся формулой (47). В результате всех этих замен лагранжиан L примет следующую окончательную форму:

$$\begin{aligned} L = \sum_a \int_{(a)} \left\{ -c^2\rho + \frac{1}{2} \rho u^{(a)} - \rho\Pi^* + \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{1}{2} \rho U^{(a)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{c^2} \left[\frac{1}{8} \rho v^4 + \frac{3}{2} \rho v^2 U^{(a)} - \frac{1}{2} \rho (U^{(a)})^2 - \right. \right. \\ \left. - 2\rho v_k U_k^{(a)} - \frac{1}{2} \rho v_k \frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_k \partial t} \right] + \frac{1}{c^2} \left[\frac{1}{2} (-\rho u^{(a)} + \rho\Pi + p)v^2 + \right. \\ \left. + (-\rho u^{(a)} + \rho\Pi + 3p) U^{(a)} + \frac{1}{2} \rho (u^{(a)})^2 + 4\rho \varepsilon_{ki}^{(a)} v_i \frac{\partial w^{(a)}}{\partial x_k} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \rho v_k \frac{\partial^2 w^{(a)}}{\partial x_k \partial t} + (-\rho u^{(a)} + \rho\Pi + 3p) u^{(a)} \right] \} (dx)^3. \quad (93) \end{aligned}$$

Входящие сюда интегралы имеют значения

$$\frac{1}{2} \int_{(a)} \rho v^2 (dx)^3 = \frac{1}{2} M_a \dot{a}_k^2 + T^{(a)},$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{(a)} \rho U^{(a)} (dx)^3 &= \frac{1}{2} M_a U^{(a)}(a) + \frac{1}{4} I_{kl}^{(a)} \frac{\partial^2 U^{(a)}(a)}{\partial a_k \partial a_l} + \dots = \\ &= \gamma \sum_b^{(a)} \left\{ \frac{M_a M_b}{2|\mathbf{a}-\mathbf{b}|} + \frac{1}{4} (M_a I_{kl}^{(b)} + \right. \\ &\quad \left. + M_b I_{kl}^{(a)}) \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_l} \frac{1}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|} + \dots \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{8} \int_{(a)} \rho v^4 (dx)^3 &= \frac{1}{8} M_a (\dot{a}_k^2)^2 + \frac{1}{2} \dot{a}_k \dot{a}_l \omega_{mk}^{(a)} \omega_{nl}^{(a)} I_{mn}^{(a)} + \\
&+ \frac{1}{2} \dot{a}_k^2 T^{(a)} + \dot{a}_k \omega_{ik}^{(a)} T_i^{(a)} + \frac{1}{4} \omega_{km}^{(a)} \omega_{lm}^{(a)} T_{kl}^{(a)}, \\
\frac{1}{2} \int_{(a)} (-\rho u^{(a)} + \rho \Pi + p) v^2 (dx)^3 &= \\
&= \frac{1}{2} \eta^{(a)} \dot{a}_k^2 + \dot{a}_k \omega_{ik}^{(a)} \eta_i^{(a)} + \frac{1}{2} \omega_{km}^{(a)} \omega_{lm}^{(a)} \eta_{kl}^{(a)}, \\
\int_{(a)} \left(\frac{3}{2} \rho v^2 - \rho u^{(a)} + \rho \Pi + 3p \right) U^{(a)} (dx)^3 &= \\
&= \left(\frac{3}{2} M_a \dot{a}_k^2 + 3T^{(a)} + \xi^{(a)} \right) U^{(a)} (a) + \\
&+ (3\dot{a}_m \omega_{lm}^{(a)} I_{kl}^{(a)} + 3T_k^{(a)} + \xi_k^{(a)}) \frac{\partial U^{(a)} (a)}{\partial a_k} + \\
&+ \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \dot{a}_m^2 I_{kl}^{(a)} + 3\dot{a}_n \omega_{mn}^{(a)} I_{klm}^{(a)} + 3T_{kl}^{(a)} + \xi_{kl}^{(a)} \right) \frac{\partial^2 U^{(a)} (a)}{\partial a_k \partial a_l} + \dots = \\
&= \Upsilon \sum_b^{(a)} \left\{ \frac{M_b}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} \left(\frac{3}{2} M_a \dot{a}_k^2 + 3T^{(a)} + \xi^{(a)} \right) + \right. \\
&+ M_b (3\dot{a}_m \omega_{lm}^{(a)} I_{kl}^{(a)} + 3T_k^{(a)} + \xi_k^{(a)}) \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} + \\
&+ \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} \dot{a}_m^2 (M_a I_{kl}^{(b)} + M_b I_{kl}^{(a)}) + M_b (3T_{kl}^{(a)} + \xi_{kl}^{(a)}) + \right. \\
&+ \left. \left. 3M_b \dot{a}_n \omega_{mn}^{(a)} I_{klm}^{(a)} + I_{kl}^{(b)} (3T^{(a)} + \xi^{(a)}) \right] \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_l} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} + \dots \right\}, \\
-2 \int_{(a)} \rho v_i U_i^{(a)} (dx)^3 &= -2 \left[M_a \dot{a}_i U_i^{(a)} (a) + \omega_{li}^{(a)} I_{kl}^{(a)} \times \right. \\
&\times \left. \frac{\partial}{\partial a_k} U_i^{(a)} (a) + \frac{1}{2} (\dot{a}_i I_{kl}^{(a)} + \omega_{mi}^{(a)} I_{klm}^{(a)}) \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_l} U_i^{(a)} (a) + \dots \right] = \\
&= \Upsilon \sum_b^{(a)} \left\{ -\frac{2M_a M_b}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} \dot{a}_k \dot{b}_k + \right. \\
&+ 2(\dot{a}_m \omega_{lm}^{(b)} M_a I_{kl}^{(b)} - \dot{b}_m \omega_{lm}^{(a)} M_b I_{kl}^{(a)}) \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} + \\
&+ \left[-(M_a I_{kl}^{(b)} + M_b I_{kl}^{(a)}) \dot{a}_m \dot{b}_m - (\dot{a}_n \omega_{mn}^{(b)} M_a I_{klm}^{(b)} + \dot{b}_n \omega_{mn}^{(a)} M_b I_{klm}^{(a)}) + \right. \\
&+ \left. \left. 2\omega_{ms}^{(a)} \omega_{ns}^{(b)} I_{km}^{(a)} I_{ln}^{(b)} \right] \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_l} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} + \dots \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \int_{(a)} \rho v_k \frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_k \partial t} (dx)^3 = \\
 & = -\frac{1}{2} \left[M_a \dot{a}_i \frac{\partial^2 W^{(a)}(a)}{\partial a_i \partial t} + \omega_{li}^{(a)} I_{kl}^{(a)} \frac{\partial^3 W^{(a)}(a)}{\partial a_i \partial a_k \partial t} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} (\dot{a}_i I_{kl}^{(a)} + \omega_{mi}^{(a)} I_{klm}^{(a)}) \frac{\partial^4 W^{(a)}(a)}{\partial a_i \partial a_k \partial a_l \partial t} + \dots \right] = \\
 & = \gamma \sum_b^{(a)} \left\{ \frac{1}{4} M_a M_b \dot{a}_k \dot{b}_l \frac{\partial^2 |a-b|}{\partial a_k \partial a_l} + \right. \\
 & \quad + \frac{1}{8} (M_b \dot{b}_m I_{kl}^{(a)} - M_a \dot{a}_m I_{kl}^{(b)}) \frac{\partial^3 |a-b|}{\partial a_k \partial a_l \partial a_m} + \\
 & \quad \left. + \left[\frac{1}{8} (M_a I_{kl}^{(b)} + M_b I_{kl}^{(a)}) \dot{a}_m \dot{b}_n + \frac{1}{24} (M_a \dot{a}_n I_{klm}^{(b)} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + M_b \dot{b}_n I_{klm}^{(a)}) - \frac{1}{16} I_{kl}^{(a)} I_{mn}^{(b)} \right] \frac{\partial^4 |a-b|}{\partial a_k \partial a_l \partial a_m \partial a_n} + \dots \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \int_{(a)} \rho (U^{(a)})^2 (dx)^3 = -\frac{1}{2} M_a (U^{(a)}(a))^2 - \\
 & -\frac{1}{4} I_{kl}^{(a)} \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_l} (U^{(a)}(a))^2 + \dots = -\frac{\gamma^2}{2} \sum_b^{(a)} \frac{M_a M_b^2}{|a-b|^2} - \\
 & \quad -\frac{\gamma^2}{2} \sum_b^{(a)} \sum_c^{(a,b)} \frac{M_a M_b M_c}{|a-b| |a-c|} - \\
 & \quad -\frac{\gamma^2}{2} \sum_b^{(a)} \left(M_a M_b I_{kl}^{(b)} \frac{1}{|a-b|} \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_l} \frac{1}{|a-b|} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} M_b^2 I_{kl}^{(a)} \frac{\partial^3}{\partial a_k \partial a_l} \frac{1}{|a-b|^2} \right) - \\
 & \quad -\frac{\gamma^2}{4} \sum_b^{(a)} \sum_c^{(a,b)} \left(M_a M_b I_{kl}^{(c)} \frac{\partial^2}{\partial c_k \partial c_l} + M_b M_c I_{kl}^{(a)} \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_l} + \right. \\
 & \quad \left. + M_c M_a I_{kl}^{(b)} \frac{\partial^2}{\partial b_k \partial b_l} \right) \frac{1}{|a-b| |a-c|} + \dots,
 \end{aligned}$$

$$4 \int_{(a)} \rho \omega_{ki}^{(a)} v_i \frac{\partial w^{(a)}}{\partial x_k} (dx)^3 = 4 \omega_{km}^{(a)} \omega_{lm}^{(a)} \Psi_{kl}^{(a)},$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \int_{(a)} \rho v_k \frac{\partial^2 w^{(a)}}{\partial x_k \partial t} (dx)^3 = \frac{1}{2} \dot{a}_k^2 \varepsilon^{(a)} - \frac{1}{2} B_{kl}^{(a)} \dot{a}_k \dot{a}_l + \dot{a}_k \omega_{ij}^{(a)} \varphi_{ijk}^{(a)} + \\
 & \quad + \frac{1}{2} \omega_{kl}^{(a)} \omega_{mnl}^{(a)} \varphi_{kmln}^{(a)} - \frac{1}{2} \omega_{km}^{(a)} \omega_{lm}^{(a)} \Psi_{kl}^{(a)} - \frac{1}{2} \omega_{kl}^{(a)} \Psi_{kl}^{(a)}.
 \end{aligned}$$

Суммирование всех приведенных значений снова дает функцию Лагранжа L , определяемую формулами (50)—(62). Единственное дополнение состоит в том, что теперь можно указать явный вид релятивистских членов в K , зависящих лишь от угловых скоростей тел

$$\Gamma^{(a)} = \frac{1}{4} \omega_{km}^{(a)} \omega_{lm}^{(a)} T_{kl}^{(a)} + \frac{1}{2} \omega_{km}^{(a)} \omega_{lm}^{(a)} \eta_{kl}^{(a)} + \frac{1}{2} \omega_{kl}^{(a)} \omega_{mn}^{(a)} \rho_{kmnl}^{(a)} + \\ + \frac{7}{2} \omega_{km}^{(a)} \omega_{lm}^{(a)} \psi_{kl}^{(a)} - \frac{1}{2} \omega_{kl}^{(a)} \psi_{kl}^{(a)}. \quad (94)$$

Последний член, очевидно, должен быть отброшен, если считать, что внутренняя структура тел не меняется со временем. Для сферических тел

$$\Gamma^{(a)} = I'_a \omega_a^4 + \frac{1}{3} \left(\eta_{kk}^{(a)} + 7\psi_{kk}^{(a)} + \frac{2}{3} B_{kkll}^{(a)} \right) \omega_a^2. \quad (95)$$

На основе полученной здесь функции Лагранжа можно непосредственно написать уравнения поступательного и вращательного движения, найденные в двух предшествующих параграфах.

В выражении (93) остались неучтенными члены, зависящие лишь от внутренней структуры тел. Эти члены не сказываются на виде уравнений поступательного и вращательного движения и важны только для вывода уравнений движения внутри тел, например, для получения уравнений релятивистской гидродинамики (Plebanski, Bazanski, 1959; Chandrasekhar, 1965). К задачам релятивистской небесной механики эти уравнения непосредственного отношения не имеют.

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЭФФЕКТЫ В ПОСТУПАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

§ 1. Задача N тел

Для сферически симметричных тел функция Лагранжа в гармонических координатах, найденная в предшествующей главе, может быть переписана в виде

$$\begin{aligned}
 L = & \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2 + I_i \omega_i^2 \right) + \frac{\gamma}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N(i)} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}} + \\
 & + \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{8} m_i \dot{r}_i^4 + I_i \omega_i^2 \dot{r}_i^2 - \frac{1}{2} I_i (\omega_i \dot{r}_i)^2 \right] + \\
 & + \frac{\gamma}{2c^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N(i)} \left\{ \frac{1}{2} (3\dot{r}_i^2 + 3\dot{r}_j^2 - 7\dot{r}_i \dot{r}_j) \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}} - \right. \\
 & - \frac{1}{2} ((r_i - r_j) \dot{r}_i) ((r_i - r_j) \dot{r}_j) \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}^3} - \frac{\gamma m_i m_j (m_i + m_j)}{2\Delta_{ij}^2} + \\
 & + \omega_j [(r_i - r_j) \times (3\dot{r}_j - 4\dot{r}_i)] \frac{m_i I_j}{\Delta_{ij}^3} - \omega_i [(r_i - r_j) \times \\
 & \times (3\dot{r}_i - 4\dot{r}_j)] \frac{m_j I_i}{\Delta_{ij}^3} + \frac{3}{\Delta_{ij}} (m_i I_j \omega_j^2 + m_j I_i \omega_i^2) - \\
 & - \frac{12}{\Delta_{ij}^5} ((r_i - r_j) \omega_i) ((r_i - r_j) \omega_j) I_i I_j + \frac{4}{\Delta_{ij}^3} I_i I_j \omega_i \omega_j \left. \right\} - \\
 & - \frac{\gamma^2}{6c^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N(i)} \sum_{k=1}^{N(i,j)} m_i m_j m_k \left(\frac{1}{\Delta_{ij} \Delta_{ik}} + \frac{1}{\Delta_{ji} \Delta_{jk}} + \frac{1}{\Delta_{ki} \Delta_{kj}} \right).
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь m_i и I_i — эффективные массы и моменты инерции тел, r_i — радиусы-векторы их центров инерции, ω_i — угловые скорости тел, Δ_{ij} — взаимные расстояния между телами. В функции Лагранжа (1) отброшены члены $\Gamma^{(i)}$ и члены порядка $Mq^4 R^2/c^2 D^2$, за исключением членов с попарными произведениями угловых скоростей.

Составляя производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} = & m_i \dot{\mathbf{r}}_i + \frac{1}{c^2} \left\{ \left(\frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 + 2I_i \omega_i^2 \right) \dot{\mathbf{r}}_i - I_i (\omega_i \dot{\mathbf{r}}_i) \omega_i + \right. \\ & + \gamma \sum_j^{(i)} \left[\frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}} \left(3\dot{\mathbf{r}}_i - \frac{7}{2} \dot{\mathbf{r}}_j \right) - \frac{m_i m_j}{2\Delta_{ij}^3} ((\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \dot{\mathbf{r}}_j)(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) - \right. \\ & \left. \left. - \frac{4}{\Delta_{ij}^3} m_i I_j [\omega_j \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)] - \frac{3}{\Delta_{ij}^3} m_j I_i [\omega_i \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)] \right\} \end{aligned}$$

и суммируя по всем телам системы, находим интегралы количества движения

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i + \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^N \left[\left(\frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 + 2I_i \omega_i^2 \right) \dot{\mathbf{r}}_i - I_i (\omega_i \dot{\mathbf{r}}_i) \omega_i \right] + \\ + \frac{\gamma}{c^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{(i)} \left\{ -\frac{m_i m_j}{2\Delta_{ij}} \dot{\mathbf{r}}_i - \frac{m_i m_j}{2\Delta_{ij}^3} \left((\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \dot{\mathbf{r}}_i \right) (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) + \right. \\ \left. + \frac{m_j I_i}{\Delta_{ij}^3} [\omega_i \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)] \right\} = P. \quad (2) \end{aligned}$$

Интегрируя эти соотношения, получаем интегралы движения центра инерции

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left\{ m_i \mathbf{r}_i + \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 + 2I_i \omega_i^2 \right) \mathbf{r}_i - \frac{I_i}{c^2} (\omega_i \mathbf{r}_i) \omega_i - \right. \\ \left. - \frac{\gamma}{2c^2} \sum_{j=1}^{(i)} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}} \mathbf{r}_i - \frac{I_i}{c^2} [\omega_i \times \dot{\mathbf{r}}_i] \right\} = Pt + K. \quad (3) \end{aligned}$$

Систему координат, для которой константы P и K равны нулю, будем называть барицентрической. Можно было бы написать в явном виде интегралы площадей

$$\sum_{i=1}^N \left\{ \left[\mathbf{r}_i \times \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right] + \frac{\partial L}{\partial \omega_i} \right\} = M \quad (4)$$

и интеграл энергии

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \dot{\mathbf{r}}_i + \frac{\partial L}{\partial \omega_i} \omega_i \right) - L = E, \quad (5)$$

но для дальнейших целей это не понадобится.

Лагранжева форма уравнений движения задачи N тел облегчает исследование ряда теоретических вопросов — нахождение частных решений, обобщающих лагранжевы решения ньютоновой задачи, составление уравнений в канонической форме и т. д. Однако все эти вопросы представляют пока чисто абстрактный интерес и не будут здесь затрагиваться.

Рассмотрим применение задачи $N + 1$ тел к движению больших планет Солнечной системы. Пусть r_0 — радиус-вектор Солнца, r_i ($i = 1, 2, \dots, N$) — радиусы-векторы планет. Вместо r_0 и r_i введем новые переменные — радиус-вектор ρ ньютонового центра инерции всей системы и гелиоцентрические радиусы-векторы планет ρ_i . Очевидно,

$$r_0 = \rho - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \rho_i, \quad r_i = r_0 + \rho_i, \quad (6)$$

где M — сумма масс всех планет и Солнца. Так как

$$\sum_{i=0}^N m_i r_i = M \rho,$$

то из (2) и (3) следует, что в барицентрической системе координат, где $P = K = 0$, ρ и $\dot{\rho}$ будут отличны от нуля лишь за счет релятивистских поправок. Поэтому в релятивистских членах уравнений движения этими величинами можно пренебречь. Тем самым движение ньютоновского центра инерции исключается и можно получить релятивистские уравнения гелиоцентрического движения планет (Tausner, 1966). На практике эти уравнения никогда не используются, и, по-видимому, потребность в них не будет ощущаться еще достаточно долго.

Практическое значение в этих уравнениях имеют лишь шварцшильдовские члены, обусловленные Солнцем. Поэтому гелиоцентрические релятивистские уравнения движения планет можно записать с учетом лишь ньютоновых и шварцшильдовских членов в виде

$$\ddot{\rho}_i = - \frac{\gamma(m_0 + m_i)}{\rho_i^3} \rho_i + \sum_{j=1}^N {}^{(i)} \gamma m_j \left(\frac{\rho_j - \rho_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{\rho_j}{\rho_j^3} \right) +$$

$$+ \frac{\gamma m_0}{c^2} \left[(4 - 2\alpha) \frac{\gamma m_0}{\rho_i^4} \rho_i - (1 + \alpha) \frac{\dot{\rho}_i^2}{\rho_i^3} \rho_i + 3\alpha \frac{(\rho_i \dot{\rho}_i)^2}{\rho_i^5} \rho_i + \right. \\ \left. + (4 - 2\alpha) \frac{(\rho_i \dot{\rho}_i)}{\rho_i^3} \dot{\rho}_i \right]. \quad (7)$$

Здесь снова, как и при исследовании задачи Шварцшильда, введен числовой параметр α , характеризующий выбор системы координат. Напомним еще раз, что гармонической системе координат соответствует значение $\alpha = 0$. Для учета смежных теорий тяготения релятивистские члены надо записывать по типу уравнений (45) гл. 5.

После нахождения ρ_i радиус-вектор ньютонова центра инерции ρ определяется непосредственно из (3). Ясно, что если ρ_i являются квазипериодическими функциями времени (что осуществляется для большинства начальных условий эллиптического типа при достаточно малых значениях параметров), то и ρ представляется в том же виде.

Уравнения (7) вполне достаточны в настоящее время для исследования релятивистских эффектов в движении планет Солнечной системы.

§ 2. Вековые возмущения в задаче двух вращающихся тел

Рассмотрим более детально задачу двух вращающихся тел. Функция Лагранжа (1) принимает для этой задачи вид

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{r}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}_2^2 + I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + \frac{\gamma m_1 m_2}{\Delta} + \\ + \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{1}{8} m_1 \dot{r}_1^4 + \frac{1}{8} m_2 \dot{r}_2^4 + I_1 \omega_1^2 \dot{r}_1^2 + I_2 \omega_2^2 \dot{r}_2^2 - \right. \\ - \frac{1}{2} I_1 (\omega_1 \dot{r}_1)^2 - \frac{1}{2} I_2 (\omega_2 \dot{r}_2)^2 + \frac{\gamma m_1 m_2}{2\Delta} (3\dot{r}_1^2 + 3\dot{r}_2^2 - 7\dot{r}_1 \dot{r}_2) - \\ - \frac{\gamma m_1 m_2}{2\Delta^3} ((r_1 - r_2) \dot{r}_1) ((r_1 - r_2) \dot{r}_2) - \frac{\gamma^2 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{2\Delta^2} + \\ + \frac{\gamma m_1}{\Delta^3} I_2 \omega_2 [(r_1 - r_2) \times (3\dot{r}_2 - 4\dot{r}_1)] - \\ - \frac{\gamma m_2}{\Delta^3} I_1 \omega_1 [(r_1 - r_2) \times (3\dot{r}_1 - 4\dot{r}_2)] + \frac{3\gamma}{\Delta} (m_1 I_2 \omega_2^2 + m_2 I_1 \omega_1^2) + \\ \left. + \frac{4\gamma}{\Delta^3} I_1 I_2 \omega_1 \omega_2 - \frac{12\gamma}{\Delta^5} I_1 I_2 ((r_1 - r_2) \omega_1) ((r_1 - r_2) \omega_2) \right\}, \quad (8)$$

где Δ — взаимное расстояние между телами. Вместо переменных r_1 и r_2 введем новые переменные — радиус-вектор ньютонова центра инерции тел r_0 и радиус-вектор r первого тела относительно второго. Обозначая через m_0 сумму масс m_1 и m_2 , имеем

$$r_0 = \frac{1}{m_0} (m_1 r_1 + m_2 r_2), \quad r = r_1 - r_2 \quad (9)$$

или

$$r_1 = r_0 + \frac{m_2}{m_0} r, \quad r_2 = r_0 - \frac{m_1}{m_0} r. \quad (10)$$

В новых переменных функция Лагранжа будет

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} m_0 \dot{r}_0^2 + \frac{m_1 m_2}{2m_0} \dot{r}^2 + I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + \frac{\gamma m_1 m_2}{r} + \\ & + \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{1}{8} m_0 \dot{r}_0^4 + \frac{m_1 m_2}{4m_1} \dot{r}_0^2 \dot{r}^2 + \frac{m_1 m_2}{2m_1} (\dot{r}_0 \dot{r})^2 + \right. \\ & + \frac{m_1 m_2 (m_2 - m_1)}{2m_0^2} (\dot{r}_0 \dot{r}) \dot{r}^2 + \frac{m_1 m_2}{8m_1} \left(1 - 3 \frac{m_1 m_2}{m_0^2} \right) \dot{r}^4 + \\ & + (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2) \dot{r}_0^2 + \frac{2}{m_0} (m_2 I_1 \omega_1^2 - m_1 I_2 \omega_2^2) \dot{r}_0 \dot{r} + \\ & + \frac{1}{m_0^2} (m_2^2 I_1 \omega_1^2 + m_1^2 I_2 \omega_2^2) \dot{r}^2 - \frac{1}{2} I_1 (\omega_1 \dot{r}_0)^2 - \frac{1}{2} I_2 (\omega_2 \dot{r}_0)^2 - \\ & - \frac{m_2}{m_0} I_1 (\omega_1 \dot{r}_0)(\omega_1 \dot{r}) + \frac{m_1}{m_0} I_2 (\omega_2 \dot{r}_0)(\omega_2 \dot{r}) - \frac{m_2^2}{2m_0^2} I_1 (\omega_1 \dot{r})^2 - \\ & - \frac{m_1^2}{2m_0^2} I_2 (\omega_2 \dot{r})^2 + \frac{\gamma m_1 m_2}{2r} \left[-\dot{r}_0^2 + \frac{m_1 - m_2}{m_0} \dot{r}_0 \dot{r} + \right. \\ & + \left(3 + \frac{m_1 m_2}{m_0^2} \right) \dot{r}^2 \left. \right] + \frac{\gamma m_1 m_2}{2r^3} \left[- (r \dot{r}_0)^2 + \right. \\ & + \frac{m_1 - m_2}{m_0} (r \dot{r}_0)(r \dot{r}) + \frac{m_1 m_2}{m_0^2} (r \dot{r})^2 \left. \right] - \\ & - \frac{\gamma^2 m_1 m_2 m_0}{2r^2} - \frac{\gamma m_1 m_2}{2r^3} (\mathcal{S}_2 - \mathcal{S}_1) [\dot{r}_0 \times r] + \\ & + \frac{\gamma m_1 m_2}{2r^3} \left[\left(3 + \frac{m_2}{m_0} \right) \mathcal{S}_2 + \left(3 + \frac{m_1}{m_0} \right) \mathcal{S}_1 \right] [\dot{r} \times r] + \\ & + \frac{3\gamma}{r} (m_1 I_2 \omega_2^2 + m_2 I_1 \omega_1^2) + \frac{\gamma m_1 m_2}{r^3} \mathcal{S}_1 \mathcal{S}_2 - 3 \frac{\gamma m_1 m_2}{r^5} (\mathcal{S}_1 r)(\mathcal{S}_2 r) \left. \right\}. \quad (11) \end{aligned}$$

Здесь через S_i обозначены собственные угловые моменты тел, деленные на массы соответствующих тел

$$S_i = \frac{2I_i}{m_i} \omega_i. \quad (12)$$

Так как r_0 не входит в функцию Лагранжа, то уравнение для движения ньютонова центра инерции получается интегрированием выражения $\partial L / \partial \dot{r}_0$. В барицентрической системе координат получаем

$$\begin{aligned} m_0 r_0 + \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{m_1 m_2 (m_2 - m_1)}{2m_0^2} \left(\dot{r}^2 - \frac{\gamma m_0}{r} \right) r + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{m_2}{m_0} I_1 \omega_1^2 - \frac{m_1}{m_0} I_2 \omega_2^2 \right) r - \frac{m_2}{m_0} I_1 (\omega_1 r) \omega_1 + \right. \\ \left. + \frac{m_1}{m_0} I_2 (\omega_2 r) \omega_2 + \frac{m_1 m_2}{2m_0} [\dot{r} \times (S_1 - S_2)] \right\} = 0. \quad (13) \end{aligned}$$

Это уравнение сейчас же следует и из (3) при подстановке выражений (10). Разумеется, при выводе уравнения (13) в релятивистских членах использовались ньютоновы уравнения

$$\ddot{r} = -\frac{\gamma m_0}{r^3} r, \quad \ddot{r}_0 = 0, \quad \dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = 0.$$

Из уравнения (13) видно, что радиус-вектор ньютонова центра инерции r_0 в случае эллиптического движения в задаче двух тел является периодической функцией времени.

Так как \dot{r}_0 — величина релятивистского порядка малости, то лагранжиан уравнений относительного движения задачи двух тел получается из (11) отбрасыванием всех членов, содержащих \dot{r}_0 . Опуская также члены, зависящие лишь от угловых скоростей, и умножая на несущественный множитель $m_0/m_1 m_2$, получаем

$$L = \frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{\gamma m_0}{r} + R \quad (14)$$

с пертурбационной функцией

$$\begin{aligned} R = \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{1}{8} (1 - 3\mu_1 \mu_2) \dot{r}^4 + \right. \\ \left. + \left(\frac{\mu_2 I_1}{m_1} \omega_1^2 + \frac{\mu_1 I_2}{m_2} \omega_2^2 \right) \dot{r}^2 - \frac{\mu_2 I_1}{2m_1} (\omega_1 \dot{r})^2 - \frac{\mu_1 I_2}{2m_2} (\omega_2 \dot{r})^2 \right\} + \end{aligned}$$

$$+ \mu \left\{ \frac{1}{2} (3 + \mu_1 \mu_2) \frac{\dot{r}^2}{r} + \frac{1}{2} \mu_1 \mu_2 \frac{(r\dot{r})^2}{r^3} - \frac{\gamma m_0}{2r^2} + \frac{\mathbf{S} [\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r}]}{2r^3} + \right. \\ \left. + \frac{3}{r} \left(\frac{\mu_1 I_2}{m_2} \omega_2^2 + \frac{\mu_2 I_1}{m_1} \omega_1^2 \right) + \frac{\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2}{r^3} - 3 \frac{(\mathbf{S}_1 \mathbf{r})(\mathbf{S}_2 \mathbf{r})}{r^5} \right\}. \quad (15)$$

Здесь введены обозначения:

$$\mu = \frac{\gamma m_0}{c^2}, \quad \mu_i = \frac{m_i}{m_0} \quad (i = 1, 2) \quad (16)$$

и

$$\mathbf{S} = (3 + \mu_1) \mathbf{S}_1 + (3 + \mu_2) \mathbf{S}_2. \quad (17)$$

Уравнения относительного движения в задаче двух тел приводятся, таким образом, к стандартному виду

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\gamma m_0}{r^3} \mathbf{r} = \mathbf{F}, \quad (18)$$

где

$$\mathbf{F} = \frac{\partial R}{\partial \mathbf{r}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{\mathbf{r}}}$$

или в соответствии с (15)

$$\mathbf{F} = \mu \left\{ (4 + 2\mu_1 \mu_2) \frac{\gamma m_0}{r^4} \mathbf{r} - (1 + 3\mu_1 \mu_2) \frac{\dot{r}^2}{r^3} \mathbf{r} + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \mu_1 \mu_2 \frac{(r\dot{r})^2}{r^5} \mathbf{r} + (4 - 2\mu_1 \mu_2) \frac{(r\dot{r})}{r^3} \dot{\mathbf{r}} + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{\mu_2 I_1}{m_1} \omega_1^2 + \frac{\mu_1 I_2}{m_2} \omega_2^2 \right) \frac{\mathbf{r}}{r^3} - \frac{\mu_2 I_1}{m_1} \frac{(\omega_1 \mathbf{r})}{r^3} \omega_1 - \right. \\ \left. - \frac{\mu_1 I_2}{m_2} \frac{(\omega_2 \mathbf{r})}{r^3} \omega_2 + \frac{3}{2} \frac{(\mathbf{S} [r \times \dot{r}])}{r^5} \mathbf{r} + \frac{3}{2} \frac{(r\dot{r})}{r^5} [r \times \mathbf{S}] + \right. \\ \left. + \frac{[\mathbf{S} \times \dot{\mathbf{r}}]}{r^3} - 3 \left(\frac{\mu_1 I_2}{m_2} \omega_2^2 + \frac{\mu_2 I_1}{m_1} \omega_1^2 \right) \frac{\mathbf{r}}{r^3} - 3 \frac{(\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2)}{r^5} \mathbf{r} + \right. \\ \left. + 15 \frac{(\mathbf{S}_1 \mathbf{r})(\mathbf{S}_2 \mathbf{r})}{r^7} \mathbf{r} - 3 \frac{(\mathbf{S}_2 \mathbf{r})}{r^5} \mathbf{S}_1 - 3 \frac{(\mathbf{S}_1 \mathbf{r})}{r^5} \mathbf{S}_2 \right\}. \quad (19)$$

Первые четыре члена в правой части этого уравнения не зависят от угловых скоростей. Решение, соответствующее этим членам, было изучено в § 3 гл. 5. Решение общей задачи, описываемой уравнениями (18) с возмущающей силой (19), будет дано здесь лишь в рамках теории вековых возмущений.

Вековые возмущения первого порядка оскулирующих элементов определяются уравнениями (63) гл. 1. Среди членов функции (15), квадратичных относительно угловых скоростей, интерес представляют лишь члены, содержащие произведения угловых скоростей обоих тел. Члены, зависящие от квадрата лишь одной из угловых скоростей, не приводят к качественно новым результатам и поэтому в дальнейшем опускаются. Подставляя в выражение R решение задачи двух тел в форме соотношений (9) гл. 1, получаем

$$R = \mu \left\{ -\mu_1\mu_2 \frac{\gamma m_0 p}{2r^3} + \left(3 + \frac{1}{2} \mu_1\mu_2 \right) \frac{\gamma m_0}{r^2} + \right. \\ \left. + \left(-2 + \frac{1}{2} \mu_1\mu_2 \right) \frac{\gamma m_0}{ra} + (1 - 3\mu_1\mu_2) \frac{\gamma m_0}{8a^2} - \sqrt{\gamma m_0} \sqrt{p} \frac{Sk}{2r^3} + \right. \\ \left. + \left[S_1 S_2 - \frac{3}{2} (S_1 P)(S_2 P) - \frac{3}{2} (S_1 Q)(S_2 Q) \right] \frac{1}{r^3} + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} [(S_1 Q)(S_2 Q) - (S_1 P)(S_2 P)] \frac{\cos 2V}{r^3} - \right. \\ \left. - \frac{3}{2} [(S_1 P)(S_2 Q) + (S_1 Q)(S_2 P)] \frac{\sin 2V}{r^3} \right\}. \quad (20)$$

Отсюда, используя значения коэффициентов Ганзена

$$X_0^{-1,0} = 1, \quad X_0^{-2,0} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}, \quad X_0^{-3,0} = \frac{1}{(1-e^2)^{3/2}}, \quad X_0^{-3,2} = 0$$

и учитывая, что

$$(S_1 P)(S_2 P) + (S_1 Q)(S_2 Q) = (S_1 l)(S_2 l) + (S_1 m)(S_2 m),$$

имеем

$$[R] = \mu \left\{ \frac{3\gamma m_0}{a^2 \sqrt{1-e^2}} + (-15 + \mu_1\mu_2) \frac{\gamma m_0}{8a^2} - \frac{\sqrt{\gamma m_0} Sk}{2a^{5/2} (1-e^2)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{a^3 (1-e^2)^{3/2}} \left[S_1 S_2 - \frac{3}{2} (S_1 l)(S_2 l) - \frac{3}{2} (S_1 m)(S_2 m) \right] \right\} \quad (21)$$

или в явном виде

$$[R] = \mu \left\{ \frac{3\gamma m_0}{a^2 \sqrt{1-e^2}} + (-15 + \mu_1\mu_2) \frac{\gamma m_0}{8a^2} + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{\gamma m_0}}{2a^{5/2} (1-e^2)} (-S_x \sin i \sin \Omega + S_y \sin i \cos \Omega - S_z \cos i) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{a^3(1-e^2)^{3/2}} \left[\left(-\frac{1}{2} S_x^{(1)} S_x^{(2)} - \frac{1}{2} S_y^{(1)} S_y^{(2)} + S_z^{(1)} S_z^{(2)} \right) \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) + \right. \\
& + \frac{3}{4} (S_x^{(1)} S_z^{(2)} + S_z^{(1)} S_x^{(2)}) \sin 2i \sin \Omega - \frac{3}{4} (S_y^{(1)} S_z^{(2)} + S_z^{(1)} S_y^{(2)}) \times \\
& \quad \times \sin 2i \cos \Omega - \frac{3}{4} (S_x^{(1)} S_y^{(2)} + S_y^{(1)} S_x^{(2)}) \sin^2 i \sin 2\Omega + \\
& \quad \left. + \frac{3}{4} (S_y^{(1)} S_y^{(2)} - S_x^{(1)} S_x^{(2)}) \sin^2 i \cos 2\Omega \right] \}. \quad (22)
\end{aligned}$$

Кроме того, из (15) находим

$$\begin{aligned}
\dot{r} \frac{\partial R}{\partial \dot{r}} = \mu \left\{ (1 - 3\mu_1\mu_2) \frac{\dot{r}^4}{2\gamma m_0} + (3 + \mu_1\mu_2) \frac{\dot{r}^2}{r} + \right. \\
\left. + \mu_1\mu_2 \frac{(r\dot{r})^2}{r^3} - \frac{S_c}{2r^3} \right\}.
\end{aligned}$$

Этому выражению можно придать вид

$$\begin{aligned}
\dot{r} \frac{\partial R}{\partial \dot{r}} = \mu \left\{ -\mu_1\mu_2 \frac{\gamma m_0 p}{r^3} + (8 - 2\mu_1\mu_2) \frac{\gamma m_0}{r^2} + \right. \\
\left. + (-5 + 4\mu_1\mu_2) \frac{\gamma m_0}{ra} + \frac{1}{2} (1 - 3\mu_1\mu_2) \frac{\gamma m_0}{a^2} - \sqrt{\gamma m_0} \sqrt{p} \frac{S_k}{2r^3} \right\},
\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
\left[\dot{r} \frac{\partial R}{\partial \dot{r}} \right] = \mu \left\{ \frac{(8 - 3\mu_1\mu_2) \gamma m_0}{a^2 \sqrt{1-e^2}} + \right. \\
\left. + \frac{1}{2} (-9 + 5\mu_1\mu_2) \frac{\gamma m_0}{a^2} - \frac{\sqrt{\gamma m_0} S_k}{2a^{3/2} (1-e^2)} \right\}. \quad (23)
\end{aligned}$$

Формула (22) показывает, что $[R]$ зависит лишь от элементов a , e , i и Ω . Поэтому из уравнений (63) гл. 1 следует, прежде всего,

$$\frac{da}{dt} = 0, \quad \frac{de}{dt} = 0. \quad (24)$$

Уравнения для наклона и долготы узла приводятся к автономной канонической системе с одной степенью свободы:

$$\left. \begin{aligned}
\frac{d \cos i}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial [R]}{\partial \Omega}, \\
\frac{d\Omega}{dt} &= -\frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial [R]}{\partial \cos i}
\end{aligned} \right\} \quad (25)$$

или в развернутой записи:

$$\left. \begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \mu \left[\frac{St}{2a^3 (1-e^2)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{(S_1k)(S_2l) + (S_2k)(S_1l)}{\sqrt{\gamma m_0} a^{7/2} (1-e^2)^2} \right], \\ \sin i \frac{d\Omega}{dt} &= \mu \left[\frac{Sm}{2a^3 (1-e^2)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{(S_1k)(S_2m) + (S_2k)(S_1m)}{\sqrt{\gamma m_0} a^{7/2} (1-e^2)^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Эта система обладает интегралом

$$[R] = \text{const}, \quad (27)$$

и ее решение сводится к квадратурам. В силу интеграла (27) $\cos i$ является периодической функцией от Ω . В свою очередь, как следует из общей теории решения систем типа (25), долгота узла представляется тригонометрическим рядом по кратным некоторой угловой переменной, линейно связанной со временем. В зависимости от значений коэффициентов функции (22) возможны случаи наличия или отсутствия в этом ряде члена, пропорционального времени. Эти случаи обуславливают вращение или либрацию линии узлов.

Фактическое интегрирование системы (25) осуществляется без труда, если за плоскость xu выбрана экваториальная плоскость тела m_2 . В этом случае $S_x^{(2)} = S_y^{(2)} = 0$, и из (27), учитывая, что a и e постоянны, имеем

$$\sin i [(3 + \mu_1) \sqrt{\gamma m_0} \sqrt{p} - 3S_z^{(2)} \cos i] (-S_x^{(1)} \sin \Omega + S_y^{(1)} \cos \Omega) = C + \sqrt{\gamma m_0} \sqrt{p} S_z \cos i - 3S_z^{(1)} S_z^{(2)} \cos^2 i, \quad (28)$$

где C — произвольная постоянная. Соотношение

$$\begin{aligned} S_x^{(1)} \cos \Omega + S_y^{(1)} \sin \Omega &= \\ &= [(S_x^{(1)})^2 (S_y^{(1)})^2 - (S_y^{(1)} \cos \Omega - S_x^{(1)} \sin \Omega)^2]^{1/2} \end{aligned}$$

позволяет исключить Ω из первого уравнения системы (25). В результате получаем

$$\begin{aligned} \frac{d \cos i}{dt} &= \frac{\pm \sqrt{\gamma m_0}}{2c^2 a^{7/2} (1-e^2)^2} (a_0 \cos^4 i + 4a_1 \cos^3 i + 6a_2 \cos^2 i + \\ &+ 4a_3 \cos i + a_4)^{1/2}, \quad (29) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= -9S_z^{(2)2} (S_x^{(1)2} + S_y^{(1)2} + S_z^{(1)2}), \\ 4a_1 &= 6\sqrt{\gamma m_0} \sqrt{p} S_z^{(2)} [S_z S_z^{(1)} + (3 + \mu_1) (S_x^{(1)2} + S_y^{(1)2})], \\ 6a_2 &= [9S_z^{(2)2} - (3 + \mu_1)^2 \gamma m_0 p] (S_x^{(1)2} + S_y^{(1)2}) - \\ &\quad - \gamma m_0 p S_z^2 + 6CS_z^{(1)} S_z^{(2)}, \\ 4a_3 &= -2\sqrt{\gamma m_0} \sqrt{p} [CS_z + 3(3 + \mu_1) S_z^{(2)} (S_x^{(1)2} + S_y^{(1)2})], \\ a_4 &= (3 + \mu_1)^2 \gamma m_0 p (S_x^{(1)2} + S_y^{(1)2}) - C^2. \end{aligned}$$

Итак, в общем случае $\cos i$ выражается известным образом через эллиптические функции Вейерштрасса. Величина Ω определяется затем из тригонометрического уравнения (28).

Интегрирование двух последних уравнений системы (63) гл. 1 осуществляется простыми квадратурами

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= -\cos i \frac{d\Omega}{dt} + \mu \left\{ \frac{3\sqrt{\gamma m_0}}{a^{3/2}(1-e^2)} - \frac{Sk}{a^3(1-e^2)^{3/2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{\sqrt{\gamma m_0} a^{1/2}(1-e^2)^2} \left[S_1 S_2 - \frac{3}{2} (S_1 l)(S_2 l) - \frac{3}{2} (S_1 m)(S_2 m) \right] \right\} \end{aligned} \quad (30)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{M}}{dt} &= \mu \left\{ (-15 + 9\mu_1 \mu_2) \frac{\sqrt{\gamma m_0}}{a^{1/2} \sqrt{1-e^2}} + (6 - 7\mu_1 \mu_2) \frac{\sqrt{\gamma m_0}}{a^{1/2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{\sqrt{\gamma m_0} a^{1/2}(1-e^2)^2} \left[S_1 S_2 - \frac{3}{2} (S_1 l)(S_2 l) - \frac{3}{2} (S_1 m)(S_2 m) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (31)$$

К уравнениям (24), (25), (30) и (31) можно, разумеется, прийти и без использования функции Лагранжа на основе уравнений (27), (28) гл. 1 и выражения (19) для F' . Например, использование уравнений (30) гл. 1 позволяет написать уравнения для вековых изменений во времени вектора площадей и вектора Лапласа

$$\begin{aligned} \dot{c} &= \mu \left\{ \frac{\sqrt{\gamma m_0}}{2a^{3/2}(1-e^2)} [S \times k] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2a^3(1-e^2)^{3/2}} ((kS_1) [k \times S_2] + (kS_2) [k \times S_1]) \right\} \end{aligned} \quad (32)$$

и

$$\begin{aligned}
 \dot{f} = \mu \left\{ \frac{3(\gamma m_0)^{3/2} e}{a^{3/2}(1-e^2)} Q - \frac{3\sqrt{\gamma m_0} e (Sc)}{2a^{3/2}(1-e^2)^2} Q + \right. \\
 \left. + \frac{\gamma m_0 e}{2a^3(1-e^2)^{3/2}} [S \times P] + \right. \\
 \left. + \frac{3\sqrt{\gamma m_0} e}{a^{3/2}(1-e^2)^2} \left[(S_1 S_2) Q - \frac{3}{2} ((S_1 P)(S_2 P) + \right. \right. \\
 \left. \left. + (S_1 Q)(S_2 Q)) Q + \frac{1}{2} ((S_1 Q)(S_2 k) + (S_2 Q)(S_1 k)) k \right] \right\}. \quad (33)
 \end{aligned}$$

Но примененный выше способ дает сразу же уравнения в канонической форме и тем самым существенно облегчает их решение.

В связи с рассматриваемой задачей следует упомянуть в порядке предостережения о работе М. Абдильдина (1964). В этой работе утверждалось, что эксцентриситет и наклон орбиты в релятивистской задаче двух вращающихся тел испытывают вековые изменения, и на этом основании делались далеко идущие выводы об эволюции орбит планет Солнечной системы. М. Абдильдин вывел уравнение (32) для s , но при осреднении уравнения для f допустил ошибки и не получил уравнения (33). Из уравнения (32) М. Абдильдин, основываясь на приближенном решении, вытекающем из подстановки в правую часть постоянных значений всех элементов, пришел к неверному выводу о вековом изменении $\cos i$. Однако полученное им решение пригодно лишь на ограниченном интервале времени и не позволяет сделать никаких выводов космогонического характера. Аналогичные ошибки встречаются, к сожалению, и в некоторых других работах. Все эти ошибки проистекают по существу из-за неправильного толкования фиктивных вековых членов, подробно рассмотренных в § 3 гл. 1. Вообще же, из самого факта существования функции Лагранжа следует, что в первом приближении относительно величин порядка v^2/c^2 нельзя ожидать в релятивистской задаче N тел качественно новых результатов (в смысле эволюции орбит планет) по сравнению с ньютоновой задачей.

Добавим еще, что правильное уравнение (33) впервые получено в работе З. Х. Курмакаева (1966), а вся методика этого параграфа изложена в работе (Брумберг, 1970).

Рассмотрим теперь частный случай, когда тело m_1 не вращается. По-прежнему принимая за плоскость xu плоскость экватора вращающегося тела m_2 , получаем из (26) и (30), что наклон i остается постоянным, а долгота узла и аргумент перицентра имеют вековые движения:

$$\dot{\Omega} = \mu \frac{S_z}{2a^3(1-e^2)^{3/2}}, \quad (34)$$

$$\dot{\omega} = \mu \left[\frac{3\sqrt{\gamma m_0}}{a^{5/2}(1-e^2)} - \frac{3S_z \cos i}{2a^3(1-e^2)^{3/2}} \right], \quad (35)$$

где в соответствии с (17) и (12)

$$S_z = 2 \left(3 + \frac{m_2}{m_0} \right) \frac{I_2}{m_2} \omega_2. \quad (36)$$

В задаче о движении спутника пренебрежимо малой массы ($m_1 = 0$) в поле сферического тела радиуса $R_2 = R$, вращающегося с угловой скоростью $\omega_2 = \omega_0$,

$$S_z = \frac{8}{5} \omega_0 R^2$$

и приращения долготы узла и аргумента перицентра за один оборот будут

$$\delta\Omega = \mu \frac{8\pi\omega_0 R^2}{5na^3(1-e^2)^{3/2}}, \quad (37)$$

$$\delta\omega = \mu \left[\frac{6\pi}{a(1-e^2)} - \frac{24\pi\omega_0 R^2}{5na^3(1-e^2)^{3/2}} \cos i \right], \quad (38)$$

где под n надо понимать среднее движение спутника, т. е. $n = \sqrt{\gamma m_2/a^3}$. Эффекты вращения, обусловленные наличием угловой скорости ω_0 , носят название прецессии Лензе—Тирринга. Эти члены можно было бы получить и при рассмотрении движения пробной частицы в поле медленно вращающегося шара с метрикой (42) гл. 7. Как видно из (31), вращение центрального тела при отсутствии вращения спутника не сказывается на вековом изменении средней аномалии в эпоху, и это изменение определяется чисто шварцшильдовскими членами.

§ 3. Исследование движения в задаче двух вращающихся тел в координатной форме

Рассмотрим ту же задачу, что и в предыдущем параграфе, но на этот раз будем проводить исследование в координатной форме. Возвратимся снова к уравнениям (18). При $F = 0$ невозмущенное движение происходит в некоторой фиксированной плоскости. Это наводит на мысль, что и возмущенное движение при $F \neq 0$ близко к плоскому, и поэтому следует попытаться по возможности отделить возмущения в плоскости орбиты от возмущений самой плоскости. Такая задача решается в небесной механике введением координат Ганзена.

Наряду с системой xuz вводится система прямоугольных подвижных осей XYZ :

$$X = \alpha r, \quad Y = \beta r, \quad Z = \gamma r, \quad (39)$$

где α , β , γ — единичные ортогональные векторы, определяющие положение системы координат XYZ относительно xuz с точностью до трех произвольных параметров. Чтобы фиксировать эти параметры, вводятся условия

$$\dot{\alpha}r = 0, \quad \dot{\beta}r = 0, \quad \dot{\gamma}r = 0 \quad (40)$$

и

$$\gamma r = 0. \quad (41)$$

Из трех соотношений (40) только два являются независимыми, так что в сочетании с (41) они дают три условия, полностью определяющие ориентацию системы ганзеновских координат XYZ . В силу (39) и (41)

$$r = X\alpha + Y\beta. \quad (42)$$

Кроме того, из соотношений ортогональности и условий (40) вытекает, что

$$X\dot{\alpha} + Y\dot{\beta} = 0,$$

а также

$$\dot{\alpha}\beta = 0, \quad \alpha\dot{\beta} = 0. \quad (43)$$

Поэтому

$$\dot{r} = \dot{X}\alpha + \dot{Y}\beta. \quad (44)$$

Простой проверкой нетрудно также убедиться, что постоянно выполняется не только условие $Z = 0$, но и $\dot{Z} = 0$.

Таким образом, при использовании ганзеновских координат движение происходит в плоскости XU , а само положение этой движущейся плоскости определяется направляющими векторами α , β , γ . Умножая уравнения (18) скалярно на α и β , получаем уравнения движения в плоскости орбиты:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{X} + \gamma m_0 \frac{X}{r^3} &= \alpha F, \\ \ddot{Y} + \gamma m_0 \frac{Y}{r^3} &= \beta F. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Переходя к полярным координатам в плоскости орбиты

$$X = r \cos w, \quad Y = r \sin w$$

и учитывая, что

$$\alpha \cos w + \beta \sin w = \frac{r}{r}, \quad -\alpha \sin w + \beta \cos w = \left[\gamma \times \frac{r}{r} \right],$$

находим

$$\left. \begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{w}^2 + \frac{\gamma m_0}{r^2} &= \frac{r}{r} F, \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{w}) &= \left[\gamma, \frac{r}{r} \right] F. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Умножая (18) скалярно на γ , приходим к соотношению

$$\dot{X}\dot{\alpha}\gamma + \dot{Y}\dot{\beta}\gamma = \gamma F,$$

которое в сочетании с последним из условий (40) приводит к уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} h\alpha\dot{\gamma} &= Y\gamma F, \\ h\beta\dot{\gamma} &= -X\gamma F, \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

где

$$h = X\dot{Y} - Y\dot{X} = r^2\dot{w}. \quad (48)$$

Уравнения (45) и (47) совместно с приведенными выше чисто кинематическими соотношениями полностью определяют движение в плоскости XU и движение самой этой плоскости относительно основной системы xuz .

На практике вместо направляющих векторов α , β , γ обычно пользуются тремя углами Эйлера — долготой восходящего узла Ω , наклоном i плоскости XU по отношению

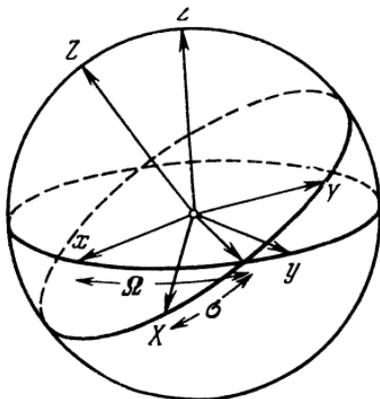


Рис. 8.

к плоскости xy и угловым расстоянием σ этого узла от оси X (рис. 8). Тогда

$$\alpha = \begin{pmatrix} \cos \Omega \cos \sigma + \sin \Omega \sin \sigma \cos i \\ \sin \Omega \cos \sigma - \cos \Omega \sin \sigma \cos i \\ -\sin \sigma \sin i \end{pmatrix},$$

$$\beta = \begin{pmatrix} \cos \Omega \sin \sigma - \sin \Omega \cos \sigma \cos i \\ \sin \Omega \sin \sigma + \cos \Omega \cos \sigma \cos i \\ \cos \sigma \sin i \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} \sin \Omega \sin i \\ -\cos \Omega \sin i \\ \cos i \end{pmatrix}.$$

Непосредственным дифференцированием легко убедиться, что соотношения (43) влекут за собой следующее:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \cos i \frac{d\Omega}{dt}. \quad (49)$$

Кроме того,

$$\alpha \dot{\gamma} = \sin \sigma \frac{di}{dt} + \cos \sigma \sin i \frac{d\Omega}{dt},$$

$$\beta \dot{\gamma} = -\cos \sigma \frac{di}{dt} + \sin \sigma \sin i \frac{d\Omega}{dt}$$

и уравнения (47) могут быть преобразованы к виду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \frac{r \cos u}{h} \gamma F', \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r \sin u}{h} \operatorname{cosec} i \gamma F'. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Здесь u — аргумент широты, отсчитываемый от узла в плоскости $X'Y'$ так, что

$$w = u + \sigma. \quad (51)$$

Четыре уравнения (45) и три уравнения (49), (50) заменяют исходные уравнения (18). Одна из произвольных постоянных, вводимых интегрированием уравнений (49), (50), является лишней. Поэтому полагают обычно

$$\sigma|_{t=0} = \Omega|_{t=0}.$$

Возвратимся теперь к задаче двух вращающихся тел. Функция F' определяется формулой (19), где, как и прежде, будем пренебрегать членами, квадратичными относительно компонент угловой скорости лишь одного из тел. Уравнения (46) запишутся тогда в виде

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{w}^2 + \frac{\gamma m_0}{r^2} &= \mu \left\{ (4 + 2\mu_1\mu_2) \frac{\gamma m_0}{r^3} + \right. \\ &+ \left(3 - \frac{7}{2} \mu_1\mu_2 \right) \frac{\dot{r}^2}{r^2} - (1 + 3\mu_1\mu_2) \dot{w}^2 + \frac{1}{2} \frac{S_Y}{r^2} \dot{w} + \\ &+ \frac{3}{2} \frac{S_1 S_2}{r^4} - \frac{9}{2} \frac{(S_1 \Upsilon)(S_2 \Upsilon)}{r^4} + \frac{9}{2} [(S_1 \alpha)(S_2 \alpha) - \\ &- (S_1 \beta)(S_2 \beta)] \frac{\cos 2w}{r^4} + \frac{9}{2} [(S_1 \alpha)(S_2 \beta) + (S_1 \beta)(S_2 \alpha)] \frac{\sin 2w}{r^4} \left. \right\} \quad (52) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{w}) &= \mu \left\{ (4 - 2\mu_1\mu_2) \frac{\dot{r} \dot{w}}{r} - \frac{1}{2} \frac{S_Y}{r^3} \dot{r} - 3 [(S_1 \alpha)(S_2 \beta) + \right. \\ &+ (S_1 \beta)(S_2 \alpha)] \frac{\cos 2w}{r^4} + 3 [(S_1 \alpha)(S_2 \alpha) - (S_1 \beta)(S_2 \beta)] \frac{\sin 2w}{r^4} \left. \right\}. \quad (53) \end{aligned}$$

При выводе уравнения (52) использовалось часто встречающееся тождество

$$(S_1 \alpha)(S_2 \alpha) + (S_1 \beta)(S_2 \beta) = S_1 S_2 - (S_1 \Upsilon)(S_2 \Upsilon).$$

Стоящее в правых частях уравнений (50) скалярное произведение γF^i имеет вид

$$\begin{aligned} \gamma F^i = \mu \left\{ \frac{\dot{r}}{2r^3} [- (S\alpha) \sin w + (S\beta) \cos w] + \right. \\ \left. + \frac{\dot{w}}{r^2} [(S\alpha) \cos w + (S\beta) \sin w] - \right. \\ \left. - \frac{3}{r^4} [(S_1\alpha)(S_2\gamma) + (S_2\alpha)(S_1\gamma)] \cos w - \right. \\ \left. - \frac{3}{r^4} [(S_1\beta)(S_2\gamma) + (S_2\beta)(S_1\gamma)] \sin w \right\}. \quad (54) \end{aligned}$$

Будем искать решение уравнений (52) и (53), соответствующее движению по орбитам, близким к круговым. Положим с этой целью

$$r = a + \rho, \quad w = nt + w_0 + \psi, \quad (55)$$

где a и w_0 — произвольные постоянные, а ρ и ψ — малые возмущения, зависящие от времени. Подставляя (55) в (52) и (53) и ограничиваясь, как обычно, членами первого порядка малости, находим зависимость среднего движения n от a :

$$\begin{aligned} n^2 = \frac{\gamma m_0}{a^3} \left\{ 1 + \frac{\mu}{a} \left[-3 + \mu_1 \mu_2 - \frac{1}{2} \frac{S\gamma}{\sqrt{\gamma m_0 a}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3}{2} \frac{S_1 S_2}{\gamma m_0 a} + \frac{9}{2} \frac{(S_1\gamma)(S_2\gamma)}{\gamma m_0 a} \right] \right\} \quad (56) \end{aligned}$$

и уравнения для определения ρ и ψ :

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} - 3n^2\rho - 2na\dot{\psi} = \frac{9}{2} \frac{\mu}{a^4} \{ [(S_1\alpha)(S_2\beta) + (S_1\beta)(S_2\alpha)] \sin 2w + \\ + [(S_1\alpha)(S_2\alpha) - (S_1\beta)(S_2\beta)] \cos 2w \}, \quad (57) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} + 2\frac{n}{a}\dot{\rho} = 3\frac{\mu}{a^5} \{ [(S_1\alpha)(S_2\alpha) - (S_1\beta)(S_2\beta)] \sin 2w - \\ - [(S_1\alpha)(S_2\beta) + (S_1\beta)(S_2\alpha)] \cos 2w \}. \quad (58) \end{aligned}$$

В релятивистских членах (56)–(58) в качестве α , β , γ надо брать их невозмущенные, т. е. постоянные значения. Долгота в орбите w , фигурирующая в правых частях (57), (58), должна рассматриваться как линейная функция времени $w = nt + w_0$ со значением n , определяемым по (56).

Интегрирование этих уравнений дает

$$\rho = -\frac{1}{2c^2a} \{ [(S_1\alpha)(S_2\beta) + (S_1\beta)(S_2\alpha)] \sin 2w + \\ + [(S_1\alpha)(S_2\alpha) - (S_1\beta)(S_2\beta)] \cos 2w \} \quad (59)$$

и

$$\psi = \frac{1}{4c^2a} \{ [(S_1\alpha)(S_2\beta) + (S_1\beta)(S_2\alpha)] \cos 2w - \\ - [(S_1\alpha)(S_2\alpha) - (S_1\beta)(S_2\beta)] \sin 2w \}. \quad (60)$$

Эти соотношения показывают, что в общем случае при произвольно ориентированных угловых скоростях вращения тел задача не имеет круговых решений. Элементы ориентации плоскости орбиты определяются при решении (55) уравнениями:

$$\frac{di}{dt} = \frac{n^2}{c^2} \left\{ [(S\alpha) - \frac{3}{na^2} ((S_1\alpha)(S_2\gamma) + (S_2\alpha)(S_1\gamma))] \cos w + \right. \\ \left. + [(S\beta) - \frac{3}{na^2} ((S_1\beta)(S_2\gamma) + (S_2\beta)(S_1\gamma))] \sin w \right\} \cos u, \quad (61)$$

$$\sin i \frac{d\Omega}{dt} = \frac{n^2}{c^2} \left\{ [(S\alpha) - \frac{3}{na^2} ((S_1\alpha)(S_2\gamma) + (S_2\alpha)(S_1\gamma))] \cos w + \right. \\ \left. + [(S\beta) - \frac{3}{na^2} ((S_1\beta)(S_2\gamma) + (S_2\beta)(S_1\gamma))] \sin w \right\} \sin u, \quad (62)$$

к которым надо добавить уравнение (49) и соотношение (51).

Уравнения (59)–(62) позволяют рассмотреть ряд частных случаев, допускающих простые решения. Ограничимся лишь простейшим случаем, когда первое тело не вращается ($S_1 = 0$). Тогда задача допускает круговое движение $\rho = 0$, $\psi = 0$, происходящее в плоскости, определяемой уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \frac{n^2 S_z}{c^2} \sin i \sin u \cos u, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{n^2 S_z}{c^2} \sin^2 u. \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

За основную плоскость xu здесь, как и в предыдущем параграфе, принята плоскость экватора второго тела и S_z определяется прежней формулой (36). Уравнения (63) могут быть приведены к автономной канонической системе

с одной степенью свободы, если в качестве переменных принять аргумент широты u и $\cos i$. Действительно,

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \cos i}, \\ \frac{d \cos i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial u}, \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

где

$$H = n \cos i + \frac{1}{2} \frac{n^2 S_z}{c^2} \sin^2 i \sin^2 u. \quad (65)$$

Используя интеграл $H = C$, нетрудно найти решение

$$\cos i = \frac{C}{n} + \frac{1}{2} \frac{n S_z}{c^2} \left(\frac{C^2}{n^2} - 1 \right) \sin^2 \varphi + \dots, \quad (66)$$

$$u = \varphi - \frac{1}{2} \frac{n S_z}{c^2} C t + \frac{1}{4} \frac{S_z}{c^2} C (\sin 2\varphi - \sin 2\varphi_0) + \dots \quad (67)$$

и

$$\varphi = nt + \overline{\varphi_0},$$

где на этот раз

$$n = \frac{\sqrt{\gamma m_0}}{a^{3/2}} \left[1 + \frac{\mu}{2a} \left(-3 + \mu_1 \mu_2 - \frac{S_z \cos i}{2 \sqrt{\gamma m_0} \sqrt{a}} \right) \right],$$

а φ_0 — произвольная постоянная. Отсюда

$$\Omega = \Omega_0 + \frac{1}{2} \frac{n^2 S_z}{c^2} t - \frac{1}{4} \frac{n S_z}{c^2} (\sin 2\varphi - \sin 2\varphi_0) + \dots, \quad (68)$$

$$\sigma = \Omega_0 + \frac{1}{2} \frac{n S_z}{c^2} C t - \frac{1}{4} \frac{S_z}{c^2} C (\sin 2\varphi - \sin 2\varphi_0) + \dots \quad (69)$$

со связью $w_0 = \varphi_0 + \Omega_0$ между постоянными интегрирования. Вековые члены в (67)–(69) соответствуют результатам предыдущего параграфа при эксцентриситете, равном нулю. Формула (66) показывает, что наклон круговых орбит периодически меняется со временем. Случай $C = n$ соответствует круговым орбитам, лежащим в экваториальной плоскости центрального тела.

§ 4. Релятивистские уравнения движения Луны и геодезическая прецессия

Задача исследования движения Луны всегда занимала особое место в небесной механике. Почти все крупные небесные механики в большей или меньшей степени работали в этой области. В результате многочисленных усилий в конце 19 — начале 20 века уже имелся целый ряд первоклассных теорий движения Луны. Наиболее точной из них является теория Хилла — Брауна, которая с некоторыми позднейшими модификациями используется и сейчас для представления движения Луны. Вместе с тем, в настоящее время ведется интенсивная разработка новых, еще более совершенных теорий движения Луны. Это стало необходимым в связи с исследованием Луны средствами астродинамики и развитием новых методов наблюдений Луны, в первую очередь методов лазерной локации. Действительно, лазерная локация обеспечивает измерение расстояния между двумя точками на поверхности Земли и Луны с точностью порядка 10 см. Конечно, это не означает, что отсюда с такой же точностью можно получить расстояние между центрами масс Земли и Луны, поскольку необходимые при этой редукции астрономические постоянные известны с недостаточной точностью. Лазерная локация должна позволить уточнить эти постоянные, а также выявить эффекты ньютоновых теорий тяготения. Поэтому разработка совершенной ньютоновой теории движения Луны и исследование релятивистских эффектов в этой задаче приобретают сейчас исключительно важное значение.

Релятивистские эффекты в движении Луны будут изучены здесь в гармонической системе координат на основе круговой ограниченной задачи трех тел. Рассмотрим, прежде всего, уравнения ограниченной задачи n тел, предполагая, что имеется $n - 1$ тел с конечными массами m_1, m_2, \dots, m_{n-1} и одно тело нулевой массы $m_n = 0$. Начало системы координат выберем в центре инерции системы конечных масс. Составляя уравнения Лагранжа для всех n тел и полагая затем $m_n = 0$, получим уравнения движения нулевой массы в виде

$$\ddot{\rho} = \frac{\partial U}{\partial \rho} - \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{\rho}}, \quad (70)$$

где

$$\begin{aligned}
 U = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\gamma m_i}{\rho_i} \left[1 + \frac{3}{2c^2} \dot{\rho}^2 + \frac{3}{2c^2} \dot{r}_i^2 - \frac{7}{2c^2} \dot{\rho} \dot{r}_i - \right. \\
 \left. - \frac{1}{2c^2} \frac{(\dot{\rho} \rho_i)(\dot{r}_i \rho_i)}{\rho_i^2} - \frac{1}{c^2} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\gamma m_j}{r_{ij}} \right] + \\
 + \frac{1}{8c^2} \dot{\rho}^4 - \frac{1}{2c^2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\gamma m_i}{\rho_i} \right)^2. \quad (71)
 \end{aligned}$$

Здесь $\rho = (X, Y, Z)$ — радиус-вектор тела нулевой массы, $r_i = (X_i, Y_i, Z_i)$ — радиусы-векторы тел конечной массы ($i = 1, 2, \dots, n-1$), r_{ij} — взаимное расстояние между телами i и j и $\rho_i = \rho - r_i$. Для простоты все тела рассматриваются как материальные точки, их размеры и собственное вращение не принимаются во внимание. Силовая функция U может быть получена и из метрики поля $n-1$ конечных масс (формула (87) гл. 6)

$$\begin{aligned}
 ds^2 = \left[1 - \frac{2}{c^2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\gamma m_i}{\rho_i} + \frac{2}{c^4} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\gamma m_i}{\rho_i} \right)^2 + \right. \\
 + \frac{2}{c^4} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\gamma^2 m_i m_j}{\rho_i r_{ij}} - \frac{3}{c^4} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\gamma m_i}{\rho_i} \dot{r}_i^2 - \\
 \left. - \frac{1}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{i=1}^{n-1} \gamma m_i \rho_i \right] c^2 dt^2 + \\
 + \frac{8}{c^2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\gamma m_i}{\rho_i} (\dot{X}_i dX + \dot{Y}_i dY + \dot{Z}_i dZ) c dt - \\
 - \left(1 + \frac{2}{c^2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\gamma m_i}{\rho_i} \right) (dX^2 + dY^2 + dZ^2). \quad (72)
 \end{aligned}$$

При этом надо иметь в виду, что уравнения (70) остаются неизменными при замене

$$U \rightarrow U + \frac{dF}{dt}, \quad (73)$$

где F — произвольная функция координат и независимой переменной t . Поэтому в дальнейшем равенства между различными выражениями силовой функции могут быть спра-

ведливы лишь с точностью до слагаемого указанного вида. В частности, при выводе функции U из (72) надо при составлении производной ds/dt отбросить первый член в выражении

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho_i = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_i \dot{r}_i}{\rho_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\rho_i \dot{r}_i}{\rho_i} \right) - \frac{\dot{\rho}_i \dot{r}_i}{\rho_i} + \frac{(\rho_i \dot{r}_i) (\rho_i \dot{\rho})}{\rho_i^3}.$$

Рассмотрим теперь круговую ограниченную задачу трех тел. Принимая плоскость XY за плоскость движения двух конечных масс и выбирая начало системы координат в их центре инерции (причем в круговой задаче двух тел ньютонов центр инерции неподвижен и совпадает с релятивистским), запишем круговое решение задачи двух тел в виде:

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= -\frac{m_2}{M} A \cos Nt, & X_2 &= \frac{m_1}{M} A \cos Nt, \\ Y_1 &= -\frac{m_2}{M} A \sin Nt, & Y_2 &= \frac{m_1}{M} A \sin Nt, \\ Z_1 &= 0, & Z_2 &= 0, \end{aligned} \right\} (74)$$

где наблюдаемое среднее движение N выражается через сумму масс M обоих тел и расстояние A между ними по формуле

$$N = \frac{\sqrt{\gamma M}}{A^{3/2}} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\gamma M}{c^2 A} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{m_1 m_2}{M^2} \right) \right]. \quad (75)$$

Подставляя значение (74) в (72), получаем выражение метрики поля, создаваемого двумя точечными массами, движущимися по круговым орбитам вокруг общего центра инерции:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left[1 - \frac{2\gamma}{c^2} \left(\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} \right) + \frac{2\gamma^2}{c^4} \left(\frac{m_1^2}{\rho_1^2} + \frac{m_2^2}{\rho_2^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma^2 m_1 m_2}{c^4} \left(\frac{4}{\rho_1 \rho_2} + \frac{2m_1 - m_2}{M A \rho_1} + \frac{2m_2 - m_1}{M A \rho_2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma^2 m_1 m_2}{c^4 M A} (-X \sin Nt + Y \cos Nt)^2 \left(\frac{m_2}{\rho_1^3} + \frac{m_1}{\rho_2^3} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma^2 m_1 m_2}{c^4 A^2} (X \cos Nt + Y \sin Nt) \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \right] c^2 dt^2 + \\ &\quad + \frac{8\gamma m_1 m_2 N A}{c^2 M} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) (dX \sin Nt - dY \cos Nt) c dt - \\ &\quad - \left[1 + \frac{2\gamma}{c^2} \left(\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} \right) \right] (dX^2 + dY^2 + dZ^2). \quad (76) \end{aligned}$$

Движение пробной частицы в таком поле описывается уравнениями (70) с силовой функцией

$$\begin{aligned}
 U = & \gamma \left(\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} \right) + \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{1}{8} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2)^2 + \right. \\
 & + \frac{3}{2} \gamma \left(\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} \right) (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) - \frac{1}{2} \gamma^2 \left(\frac{m_1^2}{\rho_1^2} + \frac{m_2^2}{\rho_2^2} \right) + \\
 & + \frac{\gamma m_1 m_2}{M} \left[N A \left(\left(-4\dot{X} - \frac{1}{2} N Y \right) \sin Nt + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left(4\dot{Y} - \frac{1}{2} N X \right) \cos Nt \right) \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) - \right. \\
 & \left. - \frac{N^2 A^2}{2M} \left(-X \sin Nt + Y \cos Nt \right)^2 \left(\frac{m_2}{\rho_1^3} + \frac{m_1}{\rho_2^3} \right) + \right. \\
 & \left. \left. + N^2 A^2 \left(-\frac{A}{\rho_1 \rho_2} + \frac{m_2 - 2m_1}{2M \rho_1} + \frac{m_1 - 2m_2}{2M \rho_2} \right) \right] \right\}. \quad (77)
 \end{aligned}$$

Эта функция следует из (71) при замене (73) с

$$F = \frac{1}{2} \frac{\gamma m_1 m_2}{c^2 M} N A \left(-X \sin Nt + Y \cos Nt \right) \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right).$$

При употреблении вращающейся, синодической системы координат ξ, η, ζ , в которой координаты конечных масс постоянны:

$$\left. \begin{aligned}
 X &= \xi \cos Nt - \eta \sin Nt, & \xi_1 &= -\frac{m_2}{M} A, & \xi_2 &= \frac{m_1}{M} A, \\
 Y &= \xi \sin Nt + \eta \cos Nt, & \eta_1 &= 0, & \eta_2 &= 0, \\
 Z &= \zeta, & \zeta_1 &= 0, & \zeta_2 &= 0,
 \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

метрика поля принимает стационарный характер

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & \left[1 - \frac{2\gamma}{c^2} \left(\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} \right) - \frac{N^2}{c^2} (\xi^2 + \eta^2) + \right. \\
 & + \frac{2\gamma^2}{c^4} \left(\frac{m_1^2}{\rho_1^2} + \frac{m_2^2}{\rho_2^2} \right) - \frac{2\gamma^2 M}{c^4 A^3} \left(\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} \right) (\xi^2 + \eta^2) + \\
 & + \frac{\gamma^2 m_1 m_2}{c^4} \left(\frac{4}{\rho_1 \rho_2} + \frac{2m_1 - m_2}{M A \rho_1} + \frac{2m_2 - m_1}{M A \rho_2} \right) - \\
 & \left. - \frac{7\gamma^2 m_1 m_2}{c^4 A^2} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \xi + \frac{\gamma^2 m_1 m_2}{c^4 M A} \left(\frac{m_2}{\rho_1^3} + \frac{m_1}{\rho_2^3} \right) \eta^2 \right] c^2 dt^2 + \\
 & + 2N \left[\eta + \frac{2\gamma}{c^2} \left(\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} \right) \eta \right] d\xi dt - 2N \left[\xi + \frac{2\gamma}{c^2} \left(\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} \right) \xi + \right.
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{4\gamma m_1 m_2}{c^2 M} NA \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) d\eta dt - \\ - \left[1 + \frac{2\gamma}{c^2} \left(\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} \right) \right] (d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2). \quad (79)$$

В переменных ξ, η, ζ уравнения движения примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi} - 2N\dot{\eta} &= \frac{\partial W}{\partial \xi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial \dot{\xi}}, \\ \ddot{\eta} + 2N\dot{\xi} &= \frac{\partial W}{\partial \eta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial \dot{\eta}}, \\ \ddot{\zeta} &= \frac{\partial W}{\partial \zeta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial \dot{\zeta}}, \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

причем силовая функция определяется формулой

$$W = \frac{1}{2} N^2 (\xi^2 + \eta^2) + \gamma \left(\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} \right) + \\ + \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{1}{8} [\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 + 2N(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}) + N^2(\xi^2 + \eta^2)]^2 + \right. \\ + \frac{3}{2} \gamma \left(\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} \right) [\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 + 2N(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}) + \\ + N^2(\xi^2 + \eta^2)] - \frac{1}{2} \gamma^2 \left(\frac{m_1^2}{\rho_1^2} + \frac{m_2^2}{\rho_2^2} \right) + \\ + \frac{\gamma m_1 m_2}{M} \left[NA \left(4\dot{\eta} + \frac{7}{2} N\xi \right) \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{N^2 A^2}{2M} \eta^2 \left(\frac{m_2}{\rho_1^3} + \frac{m_1}{\rho_2^3} \right) + \right. \\ \left. + N^2 A^2 \left(-\frac{A}{\rho_1 \rho_2} + \frac{m_2 - 2m_1}{2M\rho_1} + \frac{m_1 - 2m_2}{2M\rho_2} \right) \right] \}. \quad (81)$$

Умножая уравнения (80) соответственно на $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$, складывая их и интегрируя, получим интеграл Якоби

$$\frac{1}{2} (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) - W_0 + W_2 + 2W_3 + 3W_4 = \text{const}, \quad (82)$$

где W_i ($i = 0, 1, \dots, 4$) содержит все те члены W , которые являются однородными функциями порядка i относительно скоростей $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$.

На основе уравнений (80) и интеграла (82) можно провести качественный анализ движения точно так же, как

это делается в ньютоновой задаче, т. е. определить области возможности движения, найти точки либрации и т. д. Этим вопросам посвящена, например, работа (Krefetz, 1967).

Наконец, имея в виду изучение движения материальной точки в окрестности массы m_1 , введем геоцентрические координаты

$$x = \xi + \frac{m_2}{M} A, \quad y = \eta, \quad z = \zeta. \quad (83)$$

Тогда

$$\begin{aligned} ds^2 = & \left[1 - \frac{2\gamma}{c^2} \left(\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} \right) - \frac{N^2}{c^2} \left(x^2 + y^2 - 2\frac{m_2}{M} Ax + \frac{m_2^2}{M^2} A^2 \right) + \right. \\ & + \frac{2\gamma^2}{c^4} \left(\frac{m_1^2}{\rho_1^2} + \frac{m_2^2}{\rho_2^2} \right) - \frac{2\gamma^2 M}{c^4 A^3} \left(\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} \right) \left(x^2 + y^2 - 2\frac{m_2}{M} Ax + \right. \\ & \left. \left. + \frac{m_2^2}{M^2} A^2 \right) + \frac{\gamma^2 m_1 m_2}{c^4} \left(\frac{4}{\rho_1 \rho_2} + \frac{2m_1 - m_2}{M A \rho_1} + \frac{2m_2 - m_1}{M A \rho_2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\gamma^2 m_1 m_2}{c^4 M A} \left(\frac{m_2}{\rho_1^3} + \frac{m_1}{\rho_2^3} \right) y^2 - \frac{7\gamma^2 m_1 m_2}{c^4 A^2} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \left(x - \frac{m_2}{M} A \right) \right] c^2 dt^2 + \\ & + 2N \left[1 + \frac{2\gamma}{c^2} \left(\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} \right) \right] y dx dt - \\ & - 2N \left\{ \left[1 + \frac{2\gamma}{c^2} \left(\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} \right) \right] \left(x - \frac{m_2}{M} A \right) + \right. \\ & \left. + \frac{4\gamma m_1 m_2}{c^2 M} A \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \right\} dy dt - \\ & - \left[1 + \frac{2\gamma}{c^2} \left(\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} \right) \right] (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (84) \end{aligned}$$

причем

$$\rho_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \rho_2 = \sqrt{(x - A)^2 + y^2 + z^2}. \quad (85)$$

В новых переменных уравнения движения и силовая функция будут:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} - 2N\dot{y} &= \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial \dot{x}}, \\ \ddot{y} + 2N\dot{x} &= \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial \dot{y}}, \\ \ddot{z} &= \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial \dot{z}} \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

и

$$\begin{aligned}
 W = & \frac{1}{2} N^2 (x^2 + y^2) + \gamma \left(\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} \right) - \frac{m_2}{M} N^2 A x + \\
 & + \frac{\gamma m_1}{c^3 \rho_1} \left[- \frac{3m_2^2 + 2m_1 m_2}{2M^2} N^2 A^2 + \frac{1}{2} \frac{m_2}{M} N^2 A x + \right. \\
 & + \frac{3}{2} N^2 (x^2 + y^2) + \frac{m_1}{M} N A \dot{y} + 3N (x\dot{y} - y\dot{x}) + \\
 & + \left. \frac{3}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \right] + \frac{\gamma m_2}{c^2 \rho_2} \left[\frac{3m_2^2 + 5m_1 m_2 + m_1^2}{2M^2} N^2 A^2 - \right. \\
 & - \frac{6m_2 + 7m_1}{2M} N^2 A x + \frac{3}{2} N^2 (x^2 + y^2) - \\
 & - \left. \frac{3m_1 + 4m_1}{M} N A \dot{y} + 3N (x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{3}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \right] - \\
 & - \frac{\gamma^2 m_1 m_2}{c^3 \rho_1 \rho_2} - \frac{\gamma^2}{2c^2} \left(\frac{m_1^2}{\rho_1^2} + \frac{m_2^2}{\rho_2^2} \right) - \frac{\gamma m_1 m_2}{2c^3 M^2} N^2 A^2 \left(\frac{m_2}{\rho_1^3} + \frac{m_1}{\rho_2^3} \right) y^2 + \\
 & + \frac{1}{8c^2} \left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + 2N (x\dot{y} - y\dot{x} - \frac{m_2}{M} A \dot{y}) + \right. \\
 & \left. + N^2 \left(x^2 + y^2 - 2 \frac{m_2}{M} A x + \frac{m_2^2}{M^2} A^2 \right) \right]^2. \quad (87)
 \end{aligned}$$

Уравнения (86) описывают движение в общем случае ограниченной круговой задачи трех тел. В частности, они могут быть применены в планетном случае, когда изучается, например, движение малой планеты под действием Солнца m_1 и Юпитера m_2 . Однако в планетных задачах, как уже говорилось выше, в настоящее время вполне достаточно учитывать лишь шварцшильдовские члены. Поэтому уравнения (86) здесь применяются только в спутниковом случае, когда масса планеты (Земли) m_1 значительно меньше массы Солнца m_2 , так что величиной m_1/m_2 в W можно пренебречь, а выражение (75) переписывается тогда в виде

$$N = \frac{\sqrt{\gamma m_2}}{A^{3/2}} \left(1 - \frac{3}{2} \sigma \right), \quad \sigma = \frac{\gamma m_1}{c^2 A} = \frac{N^2 A^2}{c^2}. \quad (88)$$

Разлагая W в ряд по степеням ρ_1/A , получим

$$\begin{aligned}
 W = & \frac{\gamma m_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} N^2 (3x^2 - z^2) + \frac{N^2}{A} \left[x^3 - \frac{3}{2} x (y^2 + z^2) \right] + \dots \\
 & \dots + \sigma \left\{ \left[- \frac{5}{2} \frac{\gamma m_1}{\rho_1} - \frac{1}{2} \frac{\gamma m_1}{\rho_1^3} y^2 + \frac{7}{4} \dot{x}^2 + \frac{9}{4} \dot{y}^2 + \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{7}{4} \dot{z}^2 + 5N\dot{x}\dot{y} + \frac{1}{4} N^2 (9x^2 - 7z^2) \Big] + \\
& + \frac{1}{NA} \left[\left(\dot{y} - \frac{1}{2} N\dot{x} \right) \frac{\gamma m_1}{\rho_1} - \left(\frac{1}{2} \dot{y} - N\dot{x} \right) (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \right. \\
& \quad \left. - N\dot{y} (x\dot{y} - y\dot{x}) - \frac{1}{2} N^2 \dot{y} (x^2 - 3z^2) \right] + \\
& + \frac{1}{N^2 A^2} \left[\frac{3}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \frac{\gamma m_1}{\rho_1} - \frac{1}{2} \frac{\gamma^2 m_1^2}{\rho_1^2} + \right. \\
& + \frac{1}{8} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^2 + 3N (x\dot{y} - y\dot{x}) \frac{\gamma m_1}{\rho_1} + \\
& \left. + \frac{1}{2} N (x\dot{y} - y\dot{x}) (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \dots \right] + \dots \Big\}. \quad (89)
\end{aligned}$$

При условии, что ρ_1/A и $\dot{\rho}_1^2/N^2 A^2$ — величины одного порядка малости (1/400 и 1/750 в случае движения Луны), в релятивистской части W сохранены члены до порядка $(\rho_1/A) \cdot (|\dot{\rho}_1|/NA)$ включительно относительно главных релятивистских членов.

Самый крупный вековой релятивистский эффект в рассматриваемой задаче обусловлен геодезической прецессией, в силу которой узел и перигей Луны движутся со скоростью

$$\omega = \frac{3}{2} N\dot{\rho}_1, \quad (90)$$

а вековое неравенство средней долготы в эпоху примерно в четыре раза больше вековых неравенств узла и перигея. Прежде чем приступить к последовательному решению уравнений (86), полезно рассмотреть этот эффект отдельно.

При $A^{-1} = 0$ уравнения (86) можно, заменяя вторые производные в релятивистских членах их ньютоновыми значениями, привести к виду:

$$\left. \begin{aligned}
\ddot{x} - 2N\dot{y} + \frac{\gamma m_1}{\rho_1^3} x - 3N^2 x &= \sigma \left(-2N\dot{y} - 6N^2 x + \right. \\
&\quad \left. + 6 \frac{\gamma m_1}{\rho_1^3} x + \frac{3}{2} \frac{\gamma m_1}{\rho_1^5} x y^2 \right), \\
\ddot{y} + 2N\dot{x} + \frac{\gamma m_1}{\rho_1^3} y &= \sigma \left(4N\dot{x} + 6 \frac{\gamma m_1}{\rho_1^3} y + \frac{3}{2} \frac{\gamma m_1}{\rho_1^5} y^3 \right), \\
\ddot{z} + \frac{\gamma m_1}{\rho_1^3} z + N^2 z &= \sigma \left(6 \frac{\gamma m_1}{\rho_1^3} z + \frac{3}{2} \frac{\gamma m_1}{\rho_1^5} z y^2 \right).
\end{aligned} \right\} \quad (91)$$

Если перейти к геоцентрической невращающейся системе координат Ξ , H , Z и отбросить в релятивистских частях уравнений все члены, зависящие от массы m_1 , то получим чрезвычайно простую систему:

$$\begin{aligned} \ddot{\Xi} + \frac{\gamma m_1}{\rho_1^3} \Xi - \frac{1}{2} N^2 \Xi - \frac{3}{2} N^2 (\Xi \cos 2Nt + H \sin 2Nt) = \\ = -2\omega \dot{H} + N\sigma [(\dot{H} - 4N\Xi) \cos 2Nt - (\dot{\Xi} + 4NH) \sin 2Nt], \\ \ddot{H} + \frac{\gamma m_1}{\rho_1^3} H - \frac{1}{2} N^2 H - \frac{3}{2} N^2 (\Xi \sin 2Nt - H \cos 2Nt) = \\ = 2\omega \dot{\Xi} + N\sigma [(\dot{H} - 4N\Xi) \sin 2Nt + (\dot{\Xi} + 4NH) \cos 2Nt], \\ \ddot{Z} + \frac{\gamma m_1}{\rho_1^3} Z + N^2 Z = 0. \end{aligned}$$

Если, далее, в релятивистских частях отбросить члены, содержащие тригонометрические функции аргумента $2Nt$ и приводящие лишь к периодическим возмущениям, то релятивистские члены справа сведутся к компонентам кориолисовой силы, возникающей в системе, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω относительно оси Z . Этим оставшимся членам, описывающим эффект геодезической прецессии, соответствует пертурбационная функция

$$R = -\omega (\Xi \dot{H} - H \dot{\Xi}) = -\omega n a^2 \sqrt{1 - e^2} \cos i. \quad (92)$$

Ограничиваясь нахождением лишь вековых членов, имеем по формулам (63) гл. 1 для оскулирующих элементов

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{d\pi}{dt} = \omega, \quad \frac{de}{dt} = (1 + 3\sqrt{1 - e^2}) \omega. \quad (93)$$

За сто лет перемещения узла и перигея Луны вследствие геодезической прецессии составят $1''{,}91$, а ее сидерический период обращения уменьшится на $13^s{,}95$.

§ 5. Релятивистские эффекты в движении Луны

Перейдем теперь к более детальному анализу уравнений (86). Для построения решения этих уравнений можно применить хорошо разработанный аппарат теории

движения Луны Хилла—Брауна. При этом в первую очередь определяются неравенства, зависящие лишь от среднего движения Солнца, затем от первых степеней параллакса Солнца, эксцентриситета и наклона орбиты Луны и т. д. Поскольку σ рассматривается как произвольный малый параметр (не связанный с A), то получающийся при $A^{-1}=0$ релятивистский вариант задачи Хилла теряет свою классическую физическую интерпретацию — удаление Солнца в бесконечность с одновременным увеличением его массы. Действительно, при этом, например, обращаются в нуль и шварцшильдовские члены (три члена в W , содержащие в знаменателе величину $N^2 A^2$), характеризующие влияние Земли на Луну. Однако при $A^{-1} = 0$ выделяются именно основные релятивистские члены силовой функции, и это представляет собой значительное математическое удобство.

Релятивистскую часть функции W , не зависящую от A , можно существенно упростить, исключая соответствующие вторые производные из правых частей уравнений (86) с помощью их ньютоновых значений и совершая целесообразную замену переменных.

Введем новые параметры

$$\left. \begin{aligned} \kappa &= \frac{\gamma m_1}{(n-N)^2}, \\ \tilde{m} &= \left(1 - \frac{3}{2} \sigma\right) \frac{N}{n-N}, \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

новую независимую переменную

$$\tau = (n - N) (t - t_0), \quad (95)$$

где n и t_0 — произвольные постоянные, и новые неизвестные функции:

$$\left. \begin{aligned} u &= (1 + 2\sigma)x + \sqrt{-1} \left(1 + \frac{5}{2} \sigma\right) y, \\ s &= (1 + 2\sigma)x - \sqrt{-1} \left(1 + \frac{5}{2} \sigma\right) y, \\ q &= (1 + 2\sigma)z. \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

Тогда уравнения (8б) преобразуются к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 u}{d\tau^2} + 2\sqrt{-1}\tilde{m} \frac{du}{d\tau} &= 2 \left(\frac{\partial\Omega}{\partial s} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial\Omega}{\partial \frac{ds}{d\tau}} \right), \\ \frac{d^2 s}{d\tau^2} - 2\sqrt{-1}\tilde{m} \frac{ds}{d\tau} &= 2 \left(\frac{\partial\Omega}{\partial u} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial\Omega}{\partial \frac{du}{d\tau}} \right), \\ \frac{d^2 q}{d\tau^2} &= \frac{\partial\Omega}{\partial q} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial\Omega}{\partial \frac{dq}{d\tau}} \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

с силовой функцией

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{\kappa}{r} + \frac{3}{8}\tilde{m}^2(1+\sigma)(u+s)^2 - \frac{1}{2}\tilde{m}^2(1+3\sigma)q^2 + \\ &+ \frac{\tilde{m}^2}{A} \left[\frac{5}{16}(u^3+s^3) + \frac{3}{16}us(u+s) - \frac{3}{4}(u+s)q^2 \right] + \dots \\ &\dots + \frac{\sigma}{\tilde{m}A} \left\{ \frac{1}{4}\sqrt{-1} \left(\frac{du}{d\tau} - \frac{ds}{d\tau} \right) \left[-\frac{2\kappa}{r} + \frac{du}{d\tau} \frac{ds}{d\tau} + \right. \right. \\ &+ \left. \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2 \right] + \frac{1}{4}\tilde{m}(u+s) \left[-\frac{\kappa}{r} + \frac{du}{d\tau} \frac{ds}{d\tau} + 2 \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2 \right] + \\ &+ \frac{1}{4}\tilde{m} \left[u \left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2 + s \left(\frac{du}{d\tau} \right)^2 \right] - \frac{1}{8}\tilde{m}^2\sqrt{-1} \left[u^2 \frac{ds}{d\tau} - \right. \\ &- s^2 \frac{du}{d\tau} + 6 \left(\frac{du}{d\tau} - \frac{ds}{d\tau} \right) q^2 \left. \right] - \tilde{m}^3 \left[\frac{31}{32}(u^3+s^3) + \right. \\ &+ \left. \frac{9}{32}us(u+s) - \frac{15}{8}(u+s)q^2 \right] \left. \right\} + \frac{\sigma}{\tilde{m}^2 A^2} \left\{ \frac{3}{2} \left[\frac{du}{d\tau} \frac{ds}{d\tau} + \right. \right. \\ &+ \left. \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2 \right] \frac{\kappa}{r} - \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{r^2} + \frac{1}{8} \left[\frac{du}{d\tau} \frac{ds}{d\tau} + \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2 \right]^2 + \\ &+ \frac{1}{4}\tilde{m}\sqrt{-1} \left(u \frac{ds}{d\tau} - s \frac{du}{d\tau} \right) \left[\frac{6\kappa}{r} + \frac{du}{d\tau} \frac{ds}{d\tau} + \right. \\ &\left. \left. + \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2 \right] + \dots \right\} + \dots, \quad (98) \end{aligned}$$

причем через r обозначена величина

$$r = \sqrt{us + q^2}. \quad (99)$$

Интеграл Якоби в новых переменных принимает вид

$$\frac{du}{d\tau} \frac{ds}{d\tau} + \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2 - 2(\Omega_0 - \Omega_2 - 2\Omega_3 - 3\Omega_4) = -C, \quad (100)$$

где Ω_i по аналогии с (82) обозначает часть функции Ω , имеющую i -й порядок относительно скоростей.

В переменных u, s, q релятивистская часть функции Ω , не зависящая от A , имеет ту же простую структуру, что и ньютонова часть. Интересно отметить, что если в ньютоновой задаче не пренебрегать отношением массы Земли к массе Солнца, то основные поправочные члены будут иметь ту же структуру, что и рассматриваемые здесь релятивистские члены.

В силу такой простой структуры основной части функции Ω вся методика Хилла—Брауна оказывается легко применимой к уравнениям (97). Сначала находится плоское частное периодическое решение, зависящее от двух произвольных постоянных и обобщающее вариационную кривую Хилла. Доказательство существования такого решения легко провести методом Ляпунова. Используя это частное периодическое решение, нетрудно построить уравнения Хилла для определения вековых движений перигея и узла Луны. Вообще, вся дальнейшая процедура нахождения релятивистских поправок ничем не отличается от методики Брауна для ньютонова случая. После нахождения поправок от σ , входящего явно в функцию Ω , нужно затем в ньютоновских по форме членах учесть значение параметра \tilde{m} , определяемое формулой (94), и получить, таким образом, все релятивистские эффекты. При этом, поскольку в ньютоновой теории движения Луны произвольная постоянная n — среднее движение Луны — определяется непосредственно из наблюдений, то и в релятивистском случае надо придавать этой величине то же самое значение. Аналогично известным из наблюдений надо считать и среднее движение Солнца N . Опуская все промежуточные выкладки, которые можно найти в работе (Брумберг, 1958), приведем лишь окончательные результаты.

Общее решение задачи о движении Луны с учетом лишь первых степеней эксцентриситета и наклона орбиты Луны

представляется в виде:

$$\left. \begin{aligned} x + \sqrt{-1} y &= a \sum_{i=-\infty}^{\infty} a'_i \zeta^{i+1} + \\ &+ ae \sum_{i=-\infty}^{\infty} (\beta_i \zeta^{2i+g+1} + \beta'_i \zeta^{2i-g+1}), \\ \sqrt{-1} z &= aK \sum_{i=-\infty}^{\infty} K'_i (\zeta^{2i+h} - \zeta^{-2i-h}), \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

где

$$\zeta = \exp \sqrt{-1} \tau,$$

но под ζ^g и ζ^h нужно понимать

$$\begin{aligned} \zeta^g &= \exp \sqrt{-1} g (\tau - \tau_1), & \zeta^h &= \exp \sqrt{-1} h (\tau - \tau_2), \\ \tau_k &= (n - N) (t_k - t_0) & (k &= 1, 2). \end{aligned}$$

Величины n, e, K, t_0, t_1, t_2 являются произвольными постоянными рассматриваемого решения, причем n, e, K фиксируются тем, что всегда

$$a'_0 = 1, \quad \beta_0 - \beta'_0 = 1, \quad K'_0 = 1. \quad (102)$$

Остальные коэффициенты $a, a'_i, \beta_i, \beta'_i$ и K'_i зависят только от средних движений и средних расстояний Луны и Солнца. Обозначая

$$m = \frac{N}{n - N}$$

и определяя величины a_0 и A_0 формулами

$$n^2 a_0^3 = f m_1, \quad N^2 A_0^3 = f m_2,$$

находим

$$A = A_0 (1 - \sigma),$$

а ньютоново значение величины a будет

$$a_0 = a_0 \left(1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{3} m^3 + \dots \right).$$

Отношение a_0/A_0 обозначим через α .

Релятивистские поправки к ньютоновским значениям коэффициентов с точностью до членов порядка m^3 (или αm , α^2/m) включительно имеют вид

$$\frac{\delta a}{a_0} = -\frac{9}{4} + m - \frac{83}{64} m^2 + \frac{1}{12} m^3 - \frac{\alpha^2}{m^2} (1 + 2m),$$

$$\delta a'_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} m \right) \frac{\alpha}{m}, \quad \delta a'_{-1} = - \left(\frac{1}{2} + 5m \right) \frac{\alpha}{m},$$

$$\delta a'_2 = -\frac{3}{8} m^2 - \frac{7}{4} m^3, \quad \delta a'_{-2} = \frac{1}{4} + \frac{19}{8} m^2 + \frac{35}{6} m^3,$$

$$\delta a'_3 = \frac{3}{8} \alpha m, \quad \delta a'_{-3} = -\frac{103}{128} \alpha m,$$

$$\delta a'_4 = 0, \quad \delta a'_{-4} = \frac{3}{64} m^2 + \frac{1}{8} m^3,$$

$$\delta \beta = \delta \beta'_0 = -\frac{45}{2^9} m - \frac{567}{2^{11}} m^2 - \frac{88041}{2^{15}} m^3,$$

$$\delta \beta_{-1} = -\frac{3}{2^4} + \frac{45}{2^4} m + \frac{24777}{2^{12}} m^2,$$

$$\delta \beta_{-2} = \frac{15}{2^7} m + \frac{277}{2^9} m^2 + \frac{39929}{3 \cdot 2^{13}} m^3,$$

$$\delta \beta_1 = -\frac{3}{2^8} m^2 - \frac{3159}{2^{11}} m^3, \quad \delta \beta_{-3} = \frac{45}{2^9} m^3,$$

$$\delta \beta'_{-1} = \frac{1}{2^4} + 0 \cdot m + \frac{7}{2^8} m^2 - \frac{551}{3 \cdot 2^9} m^3,$$

$$\delta \beta'_1 = -\frac{15}{2^4} m - \frac{14083}{2^{12}} m^2,$$

$$\delta \beta'_{-2} = \frac{3}{2^6} m^2 + \frac{27}{2^8} m^3, \quad \delta \beta'_2 = -\frac{225}{2^8} m^3$$

и, наконец,

$$\delta K'_{-1} = \frac{3}{16} m + \frac{85}{32} m^2, \quad \delta K'_1 = -\frac{3}{8} m^2 - \frac{7}{4} m^3,$$

$$\delta K'_{-2} = \frac{45}{256} m^3,$$

При определении $\delta a'_i$, $\delta a'_{-1}$, $\delta \beta_{-1}$, $\delta \beta'_1$ и $\delta K'_{-1}$ фигурирует малый аналитический делитель m^{-1} , и поэтому эти члены получены с точностью на порядок меньше, чем другие коэффициенты. Величины g и h , дающие движения перигея и узла Луны соответственно, определяются формулами

$$g = 1 + m - \frac{3}{4} m^2 - \frac{201}{32} m^3 + \dots$$

$$\dots + \sigma \left[-\frac{3}{2} m + \frac{1053}{64} m^3 - 3 \frac{\alpha^2}{m^2} (1 + 3m) + \dots \right],$$

$$h = 1 + m + \frac{3}{4} m^2 - \frac{33}{32} m^3 + \dots \\ \dots + \sigma \left[-\frac{3}{2} m + \frac{117}{64} m^3 + \dots \right].$$

Перейдем, далее, к цилиндрическим координатам ρ , V , z по формулам:

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos [V - N(t - t_0)], \\ y &= \rho \sin [V - N(t - t_0)], \\ z &= z \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

и в соответствии с общепринятыми теперь обозначениями будем писать D вместо τ . Тогда для проекции ρ радиуса-вектора ρ_1 на плоскость xu имеем

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{a_0} &= 1 + \sigma \left[-\frac{9}{4} + m - \frac{47}{32} m^2 - \frac{3}{16} m^3 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha^2}{m^2} (1 + 2m) \right] + \left(\frac{5}{16} \alpha m + \dots - \sigma \frac{7}{2} \alpha \right) \cos D + \\ &+ \left[-m^2 - \frac{7}{6} m^3 + \dots + \sigma \left(\frac{1}{4} + \frac{17}{4} m^2 + \frac{137}{24} m^3 \right) \right] \times \\ &\times \cos 2D + \left(\dots - \sigma \frac{173}{128} \alpha m \right) \cos 3D + \left[\dots + \sigma \left(\frac{7}{32} m^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{19}{48} m^3 \right) \right] \cos 4D + \dots + e \left\{ \left[-\frac{1}{2} + \frac{3}{2^3} m^2 + \right. \right. \\ &+ \frac{1311}{2^9} m^3 + \dots + \sigma \left(\frac{9}{2^3} - \frac{233}{2^8} m - \frac{1627}{2^{10}} m^2 - \frac{264877}{2^{14}} m^3 + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{m^2} (1 + 2m) \right] \cos l + \left[-\frac{17}{2^5} m^2 - \frac{49}{3 \cdot 2^5} m^3 + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \sigma \left(\frac{3}{2^4} + \frac{295}{2^7} m^2 + \frac{6961}{3 \cdot 2^{10}} m^3 \right) \right] \cos^2(2D + l) + \\ &\quad + \left[\dots + \sigma \left(\frac{85}{2^8} m^2 + \frac{419}{3 \cdot 2^8} m^3 \right) \right] \cos(4D + l) + \\ &+ \left[-\frac{15}{2^4} m - \frac{95}{2^8} m^2 - \frac{12169}{3 \cdot 2^{10}} m^3 + \dots + \sigma \left(-\frac{5}{2^4} + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{165}{2^6} m + \frac{7451}{2^{11}} m^2 \right) \right] \cos(2D - l) + \left[-\frac{255}{2^8} m^3 + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \sigma \left(\frac{45}{2^7} m + \frac{561}{2^9} m^2 + \frac{64817}{2^{13}} m^3 \right) \right] \cos(4D - l) + \\ &\quad + \left(\dots + \sigma \frac{1275}{2^{11}} m^3 \right) \cos(6D - l) + \dots \left. \right\} + \dots \quad (104) \end{aligned}$$

Истинная долгота V определяется формулой

$$\begin{aligned}
 V = n(t - t_0) + \left[-\frac{15}{8} am + \dots + \sigma \left(1 + \frac{13}{2} m \right) \frac{\alpha}{m} \right] \times \\
 \times \sin D + \left[\frac{11}{8} m^2 + \frac{13}{6} m^3 + \dots + \sigma \left(-\frac{1}{4} - \frac{11}{4} m^2 - \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{91}{12} m^3 \right) \right] \sin 2D + \left(\dots + \sigma \frac{65}{32} am \right) \sin 3D + \left[\dots + \right. \\
 \left. + \sigma \left(-\frac{11}{32} m^2 - \frac{13}{24} m^3 \right) \right] \sin 4D + \dots + e \left\{ \left[1 - \frac{75}{2^8} m^3 + \right. \right. \\
 \left. \left. + \dots + \sigma \left(\frac{15}{2^7} m + \frac{325}{2^9} m^2 + \frac{60953}{3 \cdot 2^{13}} m^3 \right) \right] \sin l + \right. \\
 \left. + \left[\frac{17}{2^4} m^2 + \frac{67}{3 \cdot 2^4} m^3 + \dots + \sigma \left(-\frac{1}{2^2} - \frac{17}{2^3} m^2 - \right. \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{27901}{3 \cdot 2^{11}} m^3 \right) \right] \sin (2D + l) + \left[\dots + \sigma \left(-\frac{39}{2^6} m^2 - \right. \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{57}{2^6} m^3 \right) \right] \sin (4D + l) + \left[\frac{15}{2^3} m + \frac{203}{2^5} m^2 + \frac{25849}{3 \cdot 2^9} m^3 + \right. \\
 \left. + \dots + \sigma \left(\frac{1}{2^2} - \frac{15}{2^4} m - \frac{9347}{2^{10}} m^2 \right) \right] \sin (2D - l) + \\
 \left. + \left[\frac{255}{2^7} m^3 + \dots + \sigma \left(-\frac{15}{2^5} m - \frac{159}{2^7} m^2 - \frac{17707}{2^{11}} m^3 \right) \right] \times \right. \\
 \left. \times \sin (4D - l) + \left(\dots - \sigma \frac{585}{2^9} m^3 \right) \sin (6D - l) + \dots \right\} + \dots
 \end{aligned} \tag{105}$$

Наконец, тангенс широты, а следовательно, с точностью до первой степени наклона и сама широта, будет

$$\begin{aligned}
 b = \frac{z}{\rho} = 2K \left\{ \left[1 - \frac{3}{2^4} m^3 + \dots + \sigma \left(\frac{3}{2^6} m + \frac{3}{2^8} m^2 + \right. \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{2255}{2^{12}} m^3 \right) \right] \sin F + \left[\frac{11}{2^4} m^2 + \frac{13}{3 \cdot 2^2} m^3 + \dots + \right. \\
 \left. + \sigma \left(-\frac{1}{2^3} - \frac{11}{2^3} m^2 - \frac{8857}{3 \cdot 2^9} m^3 \right) \right] \sin (2D + F) + \\
 \left. + \left[\dots + \sigma \left(-\frac{33}{2^7} m^2 - \frac{13}{2^5} m^3 \right) \right] \sin (4D + F) + \right. \\
 \left. + \left[\frac{3}{2^3} m + \frac{13}{2^5} m^2 + \frac{1133}{3 \cdot 2^9} m^3 + \dots + \sigma \left(\frac{1}{2^3} - \frac{3}{2^4} m - \right. \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{53}{2^5} m^2 \right) \right] \sin (2D - F) + \left[\frac{33}{2^7} m^3 + \dots + \sigma \left(-\frac{3}{2^6} m + \right. \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{31}{2^8} m^2 - \frac{5725}{3 \cdot 2^{12}} m^3 \left. \right] \sin(4D - F) + \left(\dots - \sigma \frac{99}{2^{10}} m^3 \right) \times \\ \times \sin(6D - F) + \dots \} + \dots \quad (106)$$

В этих формулах

$$l = g(D - \tau_1), \quad F = h(D - \tau_2),$$

так что l представляет собой среднюю аномалию Луны, а F — аргумент широты. По формулам

$$\frac{1}{n} \frac{d\pi}{dt} = 1 - \frac{g}{1+m}, \quad \frac{1}{n} \frac{d\Omega}{dt} = 1 - \frac{h}{1+m}$$

находим движения перигея и узла:

$$\frac{1}{n} \frac{d\pi}{dt} = \frac{3}{4} m^2 + \frac{177}{32} m^3 + \dots + \sigma \left[\frac{3}{2} m - \frac{3}{2} m^2 - \right. \\ \left. - \frac{957}{64} m^3 + 3 \frac{\alpha^2}{m^2} (1 + 2m) \right], \quad (107)$$

$$\frac{1}{n} \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3}{4} m^2 + \frac{57}{32} m^3 + \dots + \sigma \left(\frac{3}{2} m - \right. \\ \left. - \frac{3}{2} m^2 - \frac{21}{64} m^3 \right) \quad (108)$$

Если ввести отношение $\gamma = N/n$, то эти разложения можно переписать в виде

$$\frac{1}{n} \frac{d\pi}{dt} = \frac{3}{4} \gamma^2 + \frac{225}{32} \gamma^3 + \dots + \sigma \left[\frac{3}{2} \gamma - \frac{1245}{64} \gamma^3 + \right. \\ \left. + 3 \frac{\alpha^2}{\gamma^2} (1 + 0 \cdot \gamma) \right], \quad (109)$$

$$\frac{1}{n} \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3}{4} \gamma^2 + \frac{9}{32} \gamma^3 + \dots + \sigma \left(\frac{3}{2} \gamma - \frac{117}{64} \gamma^3 \right). \quad (110)$$

Здесь первые релятивистские члены представляют собой эффект геодезической прецессии, а при отсутствии возмущающего действия Солнца ($\gamma = 0$) формула (109) в пределах принятой точности приводит к шварцшильдовскому смещению перигея

$$\frac{1}{n} \frac{d\pi}{dt} = \frac{3n^2 a_0^2}{c^2}.$$

Выражения (104) — (106) можно считать окончательными. Для строгого сравнения с результатами ньютоновой теории нужно было бы установить еще, например по начальным данным, определенную связь между произвольными постоянными полученного решения и постоянными ньютонова решения. Но для оценки влияния релятивистских поправок это не играет существенной роли и поэтому всем постоянным релятивистского решения можно придать их ньютоновы значения (что уже и было сделано для величины n).

Формулы (104) — (106) дают решение спутниковой ограниченной круговой задачи трех тел. Совершенно аналогично, пользуясь методикой Брауна, можно было бы учесть эксцентриситет орбиты Солнца. Тогда в решении (104) — (106) появится еще один угловой аргумент — средняя аномалия Солнца l' . Учет эллиптичности орбиты Солнца проведен в работе Байерлейна (Baierlein, 1967). Там же исправлена арифметическая ошибка, допущенная в работе (Брумберг, 1958) при переходе от уравнения (108) к уравнению (110). Подстановка в формулы (104) — (106) и (109), (110) численных значений, соответствующих движению Луны, будет произведена в десятой главе.

§ 6. Лазерная локация Луны

Как и во всех задачах релятивистской небесной механики, вследствие неевклидовости метрики (84) величины ρ , V , b и t не совпадают с соответствующими величинами, получаемыми из наблюдений при использовании ньютоновой теории. Построив релятивистскую теорию движения в координатах x , y , z , t , надо затем связать эти координаты с непосредственно измеряемыми величинами. Поскольку наблюдения небесных тел так или иначе производятся с помощью оптических или радиосигналов, то надо построить теорию распространения световых лучей в поле, определяемом метрикой (76). Конечно, можно было бы пользоваться и более простой стационарной метрикой (84). Но эта метрика в ньютоновом приближении определяет неинерциальную систему координат и не переходит в бесконечности в галилееву метрику. Поэтому процесс распространения света описывается в этой метрике более сложными уравнениями.

Для метрики (76) уравнения распространения света следуют из результатов § 6 гл. 4. Учитывая только компоненты h_{00} и h_{ij} , получаем для функции Лагранжа выражение

$$L = \frac{1}{2} \dot{r}^2 \left(1 + \frac{4\mu_1}{\rho_1} + \frac{4\mu_2}{\rho_2} \right), \quad (111)$$

где $\mu_i = \gamma m_i/c^2$ обозначают гравитационные радиусы Земли ($i = 1$) и Солнца ($i = 2$), а $\dot{r} = (\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})$ — вектор скорости световой частицы. Уравнения движения света, соответствующие этой функции Лагранжа, имеют вид

$$\ddot{r} = \sum_{i=1}^2 \mu_i \left[4 \frac{(\rho_i \dot{r})}{\rho_i^3} \dot{r} - 2 \frac{c^2}{\rho_i^3} \rho_i \right], \quad (112)$$

где

$$\rho_i = r - r_i, \quad r = (X, Y, Z), \quad r_i = (X_i, Y_i, Z_i).$$

Все члены в правой части (112) имеют нулевой порядок малости относительно $1/c$. Учет компонент h_{0i} привел бы к появлению членов первого порядка.

Интегрирование уравнений (112) производится так же, как и в § 4 гл. 5, причем с принятой точностью можно считать координаты X_i, Y_i, Z_i неизменными. Действительно, члены, обусловленные движением Земли и Солнца, имеют более высокий порядок малости, чем учитываемые здесь основные члены. В результате такого интегрирования в поле фиксированных масс получаем

$$\dot{r}(t) = cn + c \sum_{i=1}^2 \mu_i \left[\frac{2}{d_i^2} \left(1 - \frac{\rho_i n}{\rho_i} \right) \rho_i^{(0)} + \frac{2}{d_i^2} \left(\frac{\rho_i \rho_i^{(0)}}{\rho_i} - \rho_i^{(0)} n \right) n - \frac{4}{\rho_i} n \right] \quad (113)$$

и

$$r(t) = r_0 + c(t - t_0) n + \sum_{i=1}^2 \mu_i \left\{ 2 \frac{\rho_i^{(0)} - \rho_i + c(t - t_0)}{d_i^2} \rho_i^{(0)} + 2 \left[\frac{\rho_i - \rho_i^{(0)} - c(t - t_0)}{d_i^2} \rho_i^{(0)} n - \ln \frac{\rho_i + \rho_i n}{\rho_i^{(0)} + \rho_i^{(0)} n} \right] n \right\}, \quad (114)$$

где принято

$$\begin{aligned} r(t_0) &= r_0, & \dot{r}(\infty) &= cn, & n^2 &= 1, \\ \rho_i^{(0)} &= r_0 - r_i, & d_i^2 &= (\rho^{(0)})^2 - (\rho^{(0)}n)^2. \end{aligned}$$

Эти формулы обобщают уравнения (104), (105) гл. 5 на случай задачи многих тел. Абсолютная величина скорости света будет

$$\dot{r}^2(t) = c^2 \left(1 - 4 \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_i}{\rho_i} \right). \quad (115)$$

Скалярное умножение соотношения (114) на n дает формулу для времени распространения света

$$c(t - t_0) = (r - r_0)n + 2 \sum_{i=1}^2 \mu_i \ln \frac{\rho_i + \rho_i n}{\rho_i^{(0)} + \rho_i^{(0)}n}. \quad (116)$$

Исключение величины n , аналогично задаче одного тела приводит к окончательной формуле

$$c(t - t_0) = S + 2 \sum_{i=1}^2 \mu_i \ln \frac{\rho_i + \rho_i^{(0)} + S}{\rho_i + \rho_i^{(0)} - S}, \quad (117)$$

где $S = |r - r_0|$. Применим эту формулу к вычислению времени прохождения луча света при лазерной локации Луны. Пусть в момент t_0 с точки на поверхности Земли испускается световой сигнал, достигающий поверхности Луны в момент t . Поэтому $r_0 = r_1 + R_e$, где R_e — геоцентрический радиус-вектор точки на поверхности Земли, и для времени распространения света имеем

$$c(t - t_0) = S + 2\mu_1 \ln \frac{\rho_1 + R_e + S}{\rho_1 + R_e - S} + 2\mu_2 \ln \frac{2R' + S}{2R' - S}, \quad (118)$$

причем, поскольку моменты t_0 , t близки друг к другу, за R' можно принять гелиоцентрический радиус-вектор центра инерции системы Земля — Луна в момент локации. Так как расстояние S мало по сравнению с R' , то логарифмический член, обусловленный действием Солнца можно разложить в ряд и заменить первым членом. Член, связанный с влиянием Земли, также можно упростить,

если заметить, что локация производится в положении Луны вблизи меридиана места наблюдения. Обозначая через R расстояние между центрами масс Земли и Луны в момент локации, имеем приближенно (рис. 9)

$$\rho_1 = R - R_m, \quad S = R - R_e - R_m,$$

где R_m — радиус Луны. Окончательно формула (118) запишется в виде

$$c(t - t_0) = S + 2\mu_1 \ln \frac{R - R_m}{R_e} + 2\mu_2 \frac{S}{R'}. \quad (119)$$

Для определения полного времени распространения света T в оба конца этот промежуток надо умножить на 2.

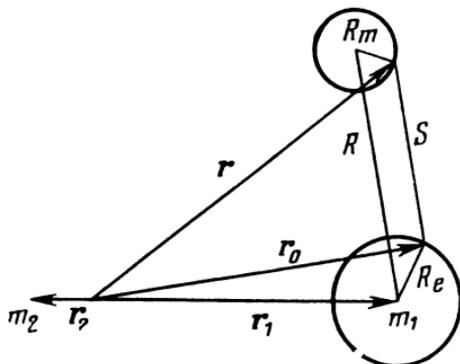


Рис. 9.

Полученный результат следует еще выразить в собственном времени станции наблюдения на Земле. Сохраняя в формуле (39) гл. 4 лишь главные члены, имеем

$$d\tau = \left(1 - \frac{\mu_1}{\rho_1} - \frac{\mu_2}{\rho_2} - \frac{v^2}{2c^2} \right) dt, \quad (120)$$

где v — скорость наблюдателя в избранной системе координат. Пренебрегая изменением подынтегральной функции за короткий промежуток времени распространения света в оба конца, находим

$$\mathcal{J} = \left(1 - \frac{\mu_1}{R_e} - \frac{\mu_2}{R'} - \frac{v^2}{2c^2} \right) T.$$

Пренебрегая, далее, отношением массы Луны к массе Земли, имеем

$$v = v' + \Delta v,$$

где v' — гелиоцентрическая скорость движения центра масс системы Земля — Луна, а Δv — геоцентрическая скорость наблюдателя на Земле. С достаточной точностью

$$v^2 = v'^2 + 2v'\Delta v,$$

и исключая v'^2 из интеграла живых сил

$$\frac{v'^2}{c^2} = \mu_2 \left(\frac{2}{R'} - \frac{1}{A} \right),$$

имеем окончательно

$$\mathcal{J} = \frac{2S}{c} \left(1 + \frac{\mu_2}{2A} - \frac{\mu_1}{R_e} - \frac{v'\Delta v}{c^2} \right) + \frac{4\mu_1}{c} \ln \frac{R - R_m}{R_e}. \quad (121)$$

Эта формула, полученная впервые Байерлейном, определяет промежуток времени распространения сигнала при лазерной локации Луны с учетом эффектов общей теории относительности. Применение этой формулы будет рассмотрено в десятой главе.

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЭФФЕКТЫ ВО ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

§ 1. Прецессия гироскопа в поле тяготения Земли

В этой главе будут рассматриваться уравнения вращательного движения сферически симметричных тел, введенные в § 4 гл. 7. Отбрасывая члены, зависящие от собственной структуры тел и моментов инерции четвертого порядка, и изменяя обозначения, перепишем эти уравнения в виде

$$\dot{S}_i = 2I_i [\omega_i \Omega_i], \quad (1)$$

где

$$S_i = 2I_i \omega_i + \frac{2I_i}{c^2} \left[\dot{r}_i^2 \omega_i - \frac{1}{2} (\dot{r}_i \omega_i) \dot{r}_i \right] + \\ + \frac{2\gamma I_i}{c^2} \sum_{j=1}^N {}^{(i)} \left\{ \frac{m_j}{|r_i - r_j|} \left(3\omega_i + \frac{1}{2|r_i - r_j|^2} (3\dot{r}_i - 4\dot{r}_j) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (r_i - r_j) \right) + \frac{2I_j}{|r_i - r_j|^3} \left[\omega_j - 3 \frac{((r_i - r_j) \omega_j)}{|r_i - r_j|^2} (r_i - r_j) \right] \right\} \quad (2)$$

и

$$\Omega_i = -\frac{1}{2c^2} (\dot{r}_i \omega_i) \dot{r}_i + \frac{\gamma}{c^2} \sum_{j=1}^N {}^{(i)} \left\{ \frac{1}{2} \frac{m_j}{|r_i - r_j|^3} [(3\dot{r}_i - 4\dot{r}_j) \times \right. \\ \left. \times (r_i - r_j)] + \frac{2I_j}{|r_i - r_j|^3} \left[\omega_j - 3 \frac{((r_i - r_j) \omega_j)}{|r_i - r_j|^2} (r_i - r_j) \right] \right\}. \quad (3)$$

Здесь m_i и I_i — масса и момент инерции тела с номером i (причем $I_i = m_i R_i^2/5$ для однородного тела радиуса R_i), r_i — барицентрический радиус-вектор его центра инерции, ω_i — угловая скорость вращения тела.

Применим эти уравнения к случаю движения гироскопа, установленного на искусственном спутнике Земли. В выражении (2) для кинетического момента гироскопа сохраним только первый ньютонов член, а в выражении (3) оставим лишь члены, относящиеся к Земле. Тогда

вращение гироскопа будет представлять собой прецессию

$$\dot{\omega} = [\omega \times \Omega] \quad (4)$$

с угловой скоростью

$$\Omega = -\frac{3}{2} \frac{\gamma m_0}{c^2 r^3} [r \times \dot{r}] + \frac{2\gamma I_0}{c^2 r^3} \left[\omega_0 - 3 \frac{(r \omega_0)}{r^2} r \right], \quad (5)$$

где m_0 , I_0 , ω_0 — масса, момент инерции и угловая скорость вращения Земли, r — геоцентрический радиус-вектор спутника. Подставляя сюда решение задачи двух тел (формулы (12) гл. 1), находим

$$\begin{aligned} \Omega = & -\frac{3}{2} \frac{\gamma m_0}{c^2} \frac{na^2 \sqrt{1-e^2}}{r^3} k + \\ & + \frac{\gamma I_0}{c^2 r^3} \{2\omega_0 - 3 [P (P\omega_0) + Q (Q\omega_0)] + 3 [Q (Q\omega_0) - \\ & - P (P\omega_0)] \cos 2V - 3 [P (Q\omega_0) + Q (P\omega_0)] \sin 2V\}. \quad (6) \end{aligned}$$

Здесь P , Q , k по-прежнему означают единичные геоцентрические векторы, направленные соответственно к перигею орбиты, по перпендикуляру к линии апсид в плоскости орбиты и по нормали к плоскости орбиты. Выражение в первой квадратной скобке можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} P (P\omega_0) + Q (Q\omega_0) &= (P\omega_0) [Q \times k] - (Q\omega_0) [P \times k] = \\ &= [\omega_0 \times Q \times P] \times k = k \times [\omega_0 \times k] = \omega_0 - (k\omega_0) k. \end{aligned}$$

Используя разложение (20) гл. 1 и ограничиваясь лишь вековыми членами, получаем следующее значение осредненной угловой скорости прецессии гироскопа:

$$\Omega = -\frac{3}{2} \frac{\gamma m_0}{c^2} \frac{n}{a(1-e^2)} k + \frac{\gamma I_0}{c^2 a^3 (1-e^2)^{3/2}} [3 (k\omega_0) k - \omega_0]. \quad (7)$$

Первый член представляет собой следствие геодезической прецессии, вызванной поступательным движением спутника вокруг Земли, второй член обусловлен вращением Земли. Основное значение при движении спутника Земли имеет первый член. Для спутника, движущегося по круговой орбите вблизи поверхности Земли, абсолютная величина угловой скорости прецессии $|\Omega|$ составляет $7 \cdot 10^{-9}$ радиан за оборот или $8''$ за год. На такую величину

отклонится в направлении движения спутника ось установленного на нем гироскопа.

Формулы (4) и (5) могут быть применены и к случаю гироскопа, находящегося на поверхности Земли. Ось гироскопа будет прецессировать и в этом случае, причем в выражении угловой скорости прецессии (5) основное значение на этот раз имеет второй член. Подставляя значение момента инерции Земли $I_0 = m_0 R_0^2/5$, получаем для второго члена формулы (5) выражение

$$\Omega = \frac{2}{5} \frac{\gamma m_0}{c^2 R_0} \left(\frac{R_0}{r} \right)^3 \left(\omega_0 - 3 \frac{r}{r} \omega_0 \cos \theta \right)$$

с абсолютной величиной

$$|\Omega| = \frac{2}{5} \frac{\gamma m_0}{c^2 R_0} \left(\frac{R_0}{r} \right)^3 \omega_0 (1 + 3 \cos^2 \theta)^{1/2}. \quad (8)$$

Через θ здесь обозначен угол между r и ω_0 , так что

$$r\omega_0 = r\omega_0 \cos \theta.$$

Ясно, что на полюсе ($\theta = 0$) прецессия по абсолютной величине в два раза больше, чем на экваторе ($\theta = \pi/2$). Но у полюса прецессия происходит в сторону вращения Земли, а у экватора — в противоположном направлении. Важно отметить, что на полюсе прецессия обусловлена лишь вращением Земли (так как первый член выражения (5) обращается в нуль) и за один год угол поворота составляет $0''$,25.

Добавим, что релятивистский гироскопический эффект был впервые исследован Шиффом (Schiff, 1960).

§ 2. Взаимосвязь вращательного и поступательного движения планет

Перейдем к более тщательному рассмотрению уравнений вращательного движения (1). В ньютоновой теории тяготения поступательное движение сферически симметричных тел и вращательное движение этих тел вокруг их центров инерции не связаны между собой. Поступательное движение тел описывается уравнениями ньютоновой небесной механики, а вращение тел может происходить с произвольной постоянной угловой скоростью. Лишь в случае отклонения формы тел от сферической

симметрии поступательное движение тел и их вращение оказываются взаимосвязанными. В теории тяготения Эйнштейна такая взаимосвязь проявляется и для сферически симметричных тел. Действительно, в выражении (2) имеются члены, пропорциональные массам m_j и не содержащие угловых скоростей. Наличие таких членов означает, что уравнения (1) не удовлетворяются при нулевых значениях угловых скоростей всех тел. Тем самым поступательное движение тел влечет за собой, вообще говоря, и их вращение. Эти члены имеют второй порядок малости относительно отношения линейных размеров тел к их взаимным расстояниям. Поэтому при составлении с той же степенью точности уравнений поступательного движения и их первых интегралов нельзя игнорировать вращения тел.

Интересны также в выражении (2) члены, зависящие от ω_j и показывающие, что вращение одного из тел вызывает вращение и всех остальных. Эти члены были впервые найдены в работе Айтекеевой и Петровой (1959). Однако в рассматриваемой ниже задаче эти члены очень малы и ими можно пренебречь.

Проведем количественную оценку релятивистских эффектов во вращательном движении тел Солнечной системы (Брумберг, 1970). Подставляя (2) в (1), используя в релятивистских членах ньютоновы уравнения

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^N {}^{(i)} \gamma m_j \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}, \quad \dot{\omega}_i = 0$$

и удерживая лишь главные релятивистские члены, находим

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_i = & [\omega_i \times \Omega_i] + \frac{\gamma}{c^2} \sum_{j=1}^N {}^{(i)} \frac{m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} \left\{ \omega_i ((\mathbf{r}_i - \dot{\mathbf{r}}_j)(5\dot{\mathbf{r}}_i - 3\dot{\mathbf{r}}_j)) - \right. \\ & - \frac{1}{2} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) (\omega_i \dot{\mathbf{r}}_i) - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_i ((\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \omega_i) + \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{r}}_j \times \dot{\mathbf{r}}_i] + \\ & + \frac{3}{2} \frac{((\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)(\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_j))}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2} [(3\dot{\mathbf{r}}_i - 4\dot{\mathbf{r}}_j) \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)] + \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N {}^{(i,j)} \gamma m_k \left[\left(3 \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|^3} - 4 \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|^3} \right) \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Пусть m_0 и r_0 — масса и радиус-вектор Солнца, m_i и r_i — массы и радиусы-векторы планет ($i = 1, 2, \dots, N$), Δ_{ij} — взаимные расстояния между планетами. Обозначая через M сумму масс всех планет и Солнца, через ρ_i — гелиоцентрические радиусы-векторы планет и через ρ — радиус-вектор ньютоновского центра инерции Солнечной системы, имеем

$$r_0 = \rho - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \rho_j, \quad r_i = \rho + \rho_i - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \rho_j. \quad (10)$$

В релятивистских членах можно полагать $\rho = 0$. Подставляя соотношения (10) в уравнения (9), записанные для задачи $N + 1$ тел, и по-прежнему сохраняя лишь основные члены, получаем уравнения вращения Солнца в форме

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_0 = [\omega_0 \times \Omega_0] + \frac{\gamma}{c^2} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j^3} \left\{ 3(\rho_j \dot{\rho}_j) \left(\omega_0 - \frac{2}{\rho_j^2} [\rho_j \times \dot{\rho}_j] \right) + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{(j)} \gamma m_k \left(\frac{3}{2\rho_k^3} - \frac{2}{\Delta_{jk}^3} \right) [\rho_k \times \rho_j] \right\} \quad (11) \end{aligned}$$

и

$$\Omega_0 = -\frac{2\gamma}{c^2} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j^3} [\rho_j \times \dot{\rho}_j]. \quad (12)$$

Для планет совершенно аналогично находим

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_i = [\omega_i \times \Omega_i] + \frac{\gamma m_0}{c^2 \rho_i^3} \left\{ \left(5 - 2 \frac{m_i}{M} \right) (\rho_i \dot{\rho}_i) \omega_i - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{m_i}{M} \right) \times \right. \\ \times (\dot{\rho}_i \omega_i) \rho_i - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{m_i}{M} \right) (\rho_i \omega_i) \dot{\rho}_i - \frac{3}{2} \left(3 + \frac{m_i}{M} \right) \frac{(\rho_i \dot{\rho}_i)}{\rho_i^2} \times \\ \times [\rho_i \times \dot{\rho}_i] \left. \right\} + 2 \frac{\gamma m_0}{c^2} \sum_{j=1}^N \frac{\gamma m_j}{\rho_j^3} \left(\frac{1}{\Delta_{ij}^3} - \frac{1}{\rho_i^3} \right) [\rho_i \times \rho_j] + \\ + \frac{\gamma}{c^2} \sum_{j=1}^{(i)} m_j \left\{ \left[\frac{(\rho_i - \rho_j) (5\dot{\rho}_i - 3\dot{\rho}_j)}{\Delta_{ij}^3} - 2 \frac{\rho_i \dot{\rho}_j}{\rho_i^3} \right] \omega_i - \right. \\ \left. - \frac{1}{2\Delta_{ij}^3} [(\omega_i \dot{\rho}_i) (\rho_i - \rho_j) + ((\rho_i - \rho_j) \omega_i) \dot{\rho}_i] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\rho_i^3} [(\omega_i \dot{\rho}_j) \rho_i + (\rho_i \omega_i) \dot{\rho}_j] + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta_{ij}^3} - \frac{1}{\rho_j^3} \right) [\rho_j \times \dot{\rho}_i] + \\
& + \frac{3}{2\Delta_{ij}^5} ((\rho_i - \rho_j) (\dot{\rho}_i - \dot{\rho}_j)) [(3\dot{\rho}_i - 4\dot{\rho}_j) \times (\rho_i - \rho_j)] - \\
& - \frac{3}{2\rho_i^5} (\rho_i \dot{\rho}_i) [\rho_i \times \dot{\rho}_j] + \frac{1}{\Delta_{ij}^3} \sum_{k=1}^N {}^{(i,j)} \gamma m_k \times \\
& \times \left[\left(\frac{3}{2} \frac{\rho_i - \rho_k}{\Delta_{ik}^3} - 2 \frac{\rho_j - \rho_k}{\Delta_{jk}^3} \right) \times (\rho_i - \rho_j) \right] \quad (13)
\end{aligned}$$

II

$$\begin{aligned}
\Omega_i = & - \frac{1}{2c^2} (\dot{\rho}_i \omega_i) \dot{\rho}_i - \frac{1}{2} \frac{\gamma m_0}{c^2 \rho_i^3} \left(3 + \frac{m_i}{M} \right) [\rho_i \times \dot{\rho}_i] + \\
& + \frac{2\gamma I_0}{c^2 \rho_i^3} \left[\omega_0 - 3 \frac{(\rho_i \omega_0)}{\rho_i^2} \rho_i \right] + \frac{\gamma}{2c^2} \sum_{j=1}^N {}^{(i)} m_j \times \\
& \times \left\{ \frac{1}{\Delta_{ij}^3} [(3\dot{\rho}_i - 4\dot{\rho}_j) \times (\rho_i - \rho_j)] - \frac{1}{\rho_i^3} [\rho_i \times \dot{\rho}_j] \right\}. \quad (14)
\end{aligned}$$

Члены, пропорциональные отношению m_i/M , сохранены в виде исключения лишь в чисто «солнечных» частях выражений (13) и (14).

В правые части уравнений (11) и (13) подставим решение ньютоновой задачи двух тел:

$$\begin{aligned}
\rho_i & = \rho_i (P_i \cos V_i + Q_i \sin V_i), \\
\dot{\rho}_i & = \frac{n_i a_i}{\sqrt{1 - e_i^2}} [-P_i \sin V_i + Q_i (\cos V_i + e_i)]
\end{aligned}$$

с прежним смыслом единичных векторов P_i , Q_i и $k_i = [P_i \times Q_i]$. В членах, обусловленных взаимодействием планет, будем считать, ради простоты, что все планеты движутся в плоскости эклиптики по круговым орбитам, т. е.

$$\rho_i = a_i \begin{pmatrix} \cos \lambda_i \\ \sin \lambda_i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\rho}_i = n_i a_i \begin{pmatrix} -\sin \lambda_i \\ \cos \lambda_i \\ 0 \end{pmatrix},$$

где λ_i — средние долготы планет. Взаимные расстояния между планетами будут тогда

$$\Delta_{ij} = [a_i^2 - 2a_i a_j \cos(\lambda_i - \lambda_j) + a_j^2]^{1/2}.$$

Единичный вектор, перпендикулярный плоскости эклиптики, обозначим через \mathbf{k} . Естественно, что все \mathbf{k}_i близки к \mathbf{k} . В окончательной форме уравнения (11) и (13) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_0 = & [\omega_0 \times \Omega_0] + \\ & + \sum_{j=1}^N \frac{\gamma m_j}{c^2 \rho_j^3} \left[\frac{3n_j a_j}{\sqrt{1-e_j^2}} \rho_j \left(\omega_0 - 2 \frac{n_j a_j^2}{\rho_j^2} \sqrt{1-e_j^2} \mathbf{k}_j \right) e_j \sin V_j + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \mathbf{k} \sum_{k=1}^N {}^{(j)} \gamma m_k \left(\frac{3}{a_k^3} - \frac{4}{\Delta_{jk}^3} \right) a_j a_k \sin(\lambda_j - \lambda_k) \right] \quad (15) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_i = & [\omega_i \times \Omega_i] + \\ & + \frac{\gamma m_0}{c^2 \rho_i^2} \frac{n_i a_i}{\sqrt{1-e_i^2}} \left\{ \left[\left(5 - 2 \frac{m_i}{M} \right) \omega_i - \left(1 - \frac{m_i}{M} \right) (\mathbf{Q}_i \omega_i) \mathbf{Q}_i - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{3}{2} \left(3 + \frac{m_i}{M} \right) \frac{n_i a_i^2}{\rho_i^2} \sqrt{1-e_i^2} \mathbf{k}_i \right] e_i \sin V_i + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{m_i}{M} \right) [(P_i \omega_i) P_i - (\mathbf{Q}_i \omega_i) \mathbf{Q}_i] \sin 2V_i - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{m_i}{M} \right) [(P_i \omega_i) \mathbf{Q}_i + (\mathbf{Q}_i \omega_i) P_i] (e_i \cos V_i + \cos 2V_i) \right\} + \\ & + \sum_{j=1}^N {}^{(i)} \frac{\gamma m_j}{c^2} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{k} \left[\left(\frac{1}{a_i^3} - \frac{1}{\Delta_{ij}^3} \right) (4n_j - n_i) n_j - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{3}{\Delta_{ij}^5} (3n_i a_i^2 + 4n_j a_j^2) (n_i - n_j) \right] a_i a_j \sin(\lambda_i - \lambda_j) + \right. \\ & \left. + \frac{3}{4} \mathbf{k} (n_i - n_j) (3n_i + 4n_j) \frac{a_i^2 a_j^2}{\Delta_{ij}^5} \sin 2(\lambda_i - \lambda_j) + \right. \\ & \left. + \omega_i \left(\frac{5n_i - 3n_j}{\Delta_{ij}^3} - \frac{2n_j}{a_i^3} \right) a_i a_j \sin(\lambda_i - \lambda_j) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2\Delta_{ij}^3} [(\rho_i - \rho_j) (\omega_i \dot{\rho}_i) + \dot{\rho}_i ((\rho_i - \rho_j) \omega_i)] + \frac{1}{2\rho_i^3} [\rho_i (\omega_i \dot{\rho}_i) + \right. \\ & \left. + \dot{\rho}_j (\rho_j \omega_i)] + \frac{\mathbf{k}}{2\Delta_{ij}^3} \sum_{k=1}^N {}^{(i,j)} \gamma m_k \left(\frac{3}{\Delta_{ik}^3} - \frac{4}{\Delta_{jk}^3} \right) [a_i a_j \sin(\lambda_i - \lambda_j) + \right. \\ & \left. + a_j a_k \sin(\lambda_j - \lambda_k) + a_k a_i \sin(\lambda_k - \lambda_i)] \right\}, \quad (16) \end{aligned}$$

причем

$$\Omega_0 = -2k \sum_{j=1}^N \frac{\gamma m_j}{c^2} \frac{n_j}{a_j} \quad (17)$$

и

$$\begin{aligned} \Omega_i = & -\frac{1}{2} \frac{\gamma m_0}{c^2} \left(3 + \frac{m_i}{M} \right) \frac{n_i a_i^2}{\rho_i^3} \sqrt{1 - e_i^2} k_i - \frac{1}{2c^2} (\omega_i \dot{\rho}_i) \dot{\rho}_i + \\ & + \frac{\gamma J_0}{c^2 \rho_i^3} \{ 3k_i (k_i \omega_0) - \omega_0 + 3 [Q_i (Q_i \omega_0) - P_i (P_i \omega_0)] \cos 2V_i - \\ & - 3 [P_i (Q_i \omega_0) + Q_i (P_i \omega_0)] \sin 2V_i \} + \\ & + \frac{1}{2} k \sum_{j=1}^N {}^{(i)} \frac{\gamma m_j}{c^2} \left[-\frac{3n_i a_i^2 + 4n_j a_j^2}{\Delta_{ij}^3} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{3n_i + 4n_j}{\Delta_{ij}^3} - \frac{n_j}{a_i^3} \right) a_i a_j \cos (\lambda_i - \lambda_j) \right]. \quad (18) \end{aligned}$$

Из уравнения (15) видно, что влияние планет на вращение Солнца совершенно ничтожно и им можно пренебречь. Однако ясно, что если в начальный момент времени угловая скорость вращения Солнца равняется нулю, то вследствие орбитального движения планет у Солнца возникает угловое ускорение, направленное перпендикулярно плоскости эклиптики.

Рассмотрим теперь уравнения (16), описывающие вращение планет. Первый член в правой части (16) соответствует прецессионному движению, аналогичному уже рассмотренному в предыдущем параграфе. Члены в первой фигурной скобке, имеющие множителем гравитационный радиус Солнца, обусловлены эллиптическим движением планеты вокруг Солнца. Члены под знаком суммы пропорциональны гравитационным радиусам планет и отражают влияние поступательного движения планет на вращение рассматриваемой планеты. Обе эти группы состоят из чисто периодических членов. Если угловые скорости планет равны нулю в начальный момент, то возникающее угловое ускорение также направлено перпендикулярно плоскости эклиптики. Вообще, если вращение происходит вокруг оси, перпендикулярной плоскости эклиптики (что приближенно реализуется для большинства планет), то возмущения в правой части (16) становятся минимальными.

Действительно, для $\omega_i = \omega_i k_i$ имеем

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_i = & \frac{\gamma m_0}{c^2 \rho_i^2} \frac{n_i a_i}{\sqrt{1 - e_i^2}} \left[\left(5 - 2 \frac{m_i}{M} \right) \omega_i - \frac{3}{2} \left(3 + \frac{m_i}{M} \right) \times \right. \\ & \times \frac{n_i a_i^2}{\rho_i^2} \sqrt{1 - e_i^2} e_i \sin V_i + \sum_{j=1}^N \frac{\gamma m_j}{c^2} \left\{ \left[\frac{1}{2} (4n_j - n_i) \times \right. \right. \\ & \times n_j \left(\frac{1}{a_i^3} - \frac{1}{\Delta_{ij}^3} \right) - \frac{3}{2\Delta_{ij}^5} (3n_i a_i^2 + 4n_j a_j^2) (n_i - n_j) + \\ & \left. \left. + \left(\frac{5n_i - 3n_j}{\Delta_{ij}^3} - \frac{2n_j}{a_i^3} \right) \omega_i \right] a_i a_j \sin (\lambda_i - \lambda_j) + \right. \\ & \left. + \frac{3}{4} (n_i - n_j) (3n_i + 4n_j) \frac{a_i^2 a_j^2}{\Delta_{ij}^5} \sin 2(\lambda_i - \lambda_j) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\Delta_{ij}^3} \sum_{k=1}^N \frac{\gamma m_k}{c^2} \left(\frac{3}{\Delta_{ik}^3} - \frac{4}{\Delta_{jk}^3} \right) [a_i a_j \sin (\lambda_i - \lambda_j) + \right. \\ & \left. + a_j a_k \sin (\lambda_j - \lambda_k) + a_k a_i \sin (\lambda_k - \lambda_i)] \right\}. \quad (19) \end{aligned}$$

Таким образом, гелиоцентрическое эллиптическое движение рассматриваемой планеты и круговые движения возмущающих планет приводят к неравномерному вращению планеты вокруг оси. При пренебрежении возмущающим действием планет и членами второго порядка относительно эксцентриситета орбиты данной планеты ее вращение будет равномерным при условии $\omega_i \approx 0,9 n_i$.

Для Земли наибольший член в (19) составляет

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} = 5 \frac{\gamma m_0}{c^2} \frac{n a e \sin V}{\rho^2 \sqrt{1 - e^2}}. \quad (20)$$

Приближенное интегрирование этого соотношения дает

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} = - \frac{5 \gamma m_0}{c^2 a (1 - e^2)} e \cos V, \quad (21)$$

откуда со значениями элементов орбиты Земли получаем

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} = - 0,85 \cdot 10^{-9} \cos V. \quad (22)$$

Итак, учет релятивистских эффектов приводит к сезонному изменению скорости вращения Земли. Этот эффект

меньше, чем измеряемые в пастоящее время сезонные вариации угловой скорости вращения Земли, вызываемые другими причинами (Veis, 1966; Gaposchkin, 1966). Однако он лежит на пороге современной точности измерения хода времени и его следует принимать во внимание.

Интересно сопоставить (22) с формулой (65) гл. 5, описывающей различие между эфемеридным временем и атомным временем при условии отождествления первого с координатным временем t задачи Шварцшильда, а второго — с собственным временем τ Земли (Aoki, 1964). Это различие тоже имеет периодический характер с периодом в один год и определяется в принятых здесь обозначениях формулой

$$\frac{dt}{d\tau} = 1 + 2 \frac{\gamma m_0}{c^2 \rho} - \frac{1}{2} \frac{\gamma m_0}{c^2 a} = 1 + 1,48 \cdot 10^{-8} + 3,3 \cdot 10^{-10} \cos V. \quad (23)$$

Но, разумеется, эффекты (22) и (23) различны по своей сущности.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА НЕБЕСНОМЕХАНИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Движение естественных тел Солнечной системы

Вопрос об экспериментальной проверке эффектов общей теории относительности является исключительно сложным. Прежде всего, эти эффекты чрезвычайно малы. Но еще более серьезная трудность состоит в том, что такая проверка достигается не путем прямых лабораторных измерений тех или иных величин и их сравнения с теоретическими данными, а лишь путем длительных рядов косвенных наблюдений, в процессе редукции которых неизбежно приходится использовать теоретические предположения. Поэтому не удивительно, что многие эффекты общей теории относительности, допускающие, хотя бы принципиально, практическую проверку, вызывают зачастую оживленную полемику. Каждый год появляются обзоры по современному состоянию экспериментальной проверки теории относительности. Из работ последних лет укажем лишь обзоры (Гинзбург, 1967; Tonnelat, 1964). В этой главе будут освещены экспериментальные возможности проверки лишь некоторых эффектов, представляющих наибольший интерес для небесной механики.

Как уже указывалось в § 1 гл. 8, релятивистские эффекты в движении больших планет Солнечной системы могут быть получены с достаточной на сегодняшний день точностью на основе задачи Шварцшильда (§§ 1—3 гл. 5). В соответствии с формулой (59) гл. 5 шварцшильдовское смещение перигелия за 100 лет составляет

$$\Delta\pi = \frac{3\mu n}{a(1-e^2)}, \quad (1)$$

где μ и a — гравитационный радиус Солнца и большая полуось орбиты планеты, выраженные в одних и тех же единицах длины, e — эксцентриситет орбиты, n — среднее движение планеты, выраженное в угловых секундах за 100 лет. Используя принятые в настоящее время

значения

$$\gamma m_{\odot} = 132\,718 \cdot 10^{16} \text{ м}^3/\text{сек}^2,$$

$$c = 299\,792,5 \cdot 10^3 \text{ м/сек},$$

находим

$$\mu = \frac{\gamma m_{\odot}}{c^2} = 1476,7 \text{ м}.$$

Учитывая, далее, величину астрономической единицы

$$1 \text{ а.е.} = 149\,600 \cdot 10^3 \text{ м},$$

получаем на основании значений средних элементов орбит внутренних планет следующие значения релятивистского векового смещения перигелиев:

	Меркурий	Венера	Земля	Марс
a , а. е.	0,38710	0,72333	1,00000	1,52369
e	0,20560	0,00684	0,01677	0,09327
n , ["/год.]	5381016	2106641	1295977	689050
$\Delta\lambda$	42",98	8",62	3",84	1",35
$e\Delta\lambda$	8",837	0",059	0",064	0",126

При обработке наблюдений с целью уточнения элементов орбит в условных уравнениях величина $\Delta\lambda$ всегда входит с множителем e . Поэтому именно произведение $e\Delta\lambda$ является характеристикой рассматриваемого эффекта.

Первые полные теории движения четырех внутренних планет были построены Леверрье в середине 19 века. Эти теории до сих пор используются для вычисления координат внутренних планет, приводимых во французском астрономическом ежегоднике — *Connaissance des Temps*. Леверрье впервые установил, что теоретическое вековое смещение перигелия Меркурия, обусловленное возмущающим действием остальных планет Солнечной системы, отличается от наблюдаемого. В конце 19 века новые теории движения внутренних планет были созданы Ньюкомом. Координаты планет, вычисляемые по теориям Ньюкома, публикуются в американском астрономическом ежегоднике — *American Ephemeris* и во многих других нацио-

нальных ежегодниках, в частности в *Астрономическом ежегоднике СССР*. Обработка нескольких десятков тысяч наблюдений с 1750 по 1892 год привела Ньюкома к заключению, что между теоретическими и наблюдательными данными имеются расхождения лишь в вековых движениях перигелиев Меркурия и Марса и узла Венеры. Для объяснения этих трех разногласий были предложены самые разнообразные гипотезы, но ни одна из них не могла быть признана удовлетворительной. В конце концов с целью устранения наибольшего разногласия — в движении перигелия Меркурия — Ньюкому пришлось включить в свои чисто гравитационные ньютоновские теории элемент эмпиризма и заменить закон Ньютона $F = \gamma m m' / r^2$ для силы притяжения между частицами с массами m и m' на закон Холла $F = \gamma m m' / r^{2+\epsilon}$, где ϵ — малое число. Наличие ϵ вызывает вековое движение перигелия орбиты и соответствующий выбор ϵ ликвидирует невязку в смещении перигелия Меркурия. В дальнейшем для уточнения ньюкомовской теории движения Марса Россу пришлось внести добавочные эмпирические поправки. История создания и развития теорий Леверрье и Ньюкома подробно изложена в курсе Шази.

В середине 20 века интерес к теориям движения внутренних планет вновь резко возрос. К этому времени накопился новый обширный наблюдательный материал и открылись новые возможности усовершенствования планетных теорий в связи с развитием электронно-вычислительной техники. Клеменсом, Морганом и Данкомом была заново проведена обработка наблюдений Меркурия, Земли и Венеры соответственно (Clemenсе, 1943; Morgan, 1945; Duncombe, 1958). В последней из этих работ установлено, что найденная Ньюкомом невязка в вековом движении узла Венеры в действительности не существует, и, по-видимому, была обусловлена большими систематическими ошибками старых наблюдений. В этой же работе приведена сводка теоретических (ньютоновых) и наблюдаемых значений вековых движений перигелиев Меркурия, Венеры и Земли. Позднее Клеменсом была создана новая гравитационная теория движения Марса (Clemenсе, 1949, 1960). В результате этих работ теории движения внутренних планет были освобождены от всех эмпирических членов и единственные расхождения между теорети-

ческими и наблюдаемыми значениями остались в вековых движениях перигелиев планет:

	Меркурий	Венера	Земля
Ньютоново значение $(C) \text{ e } \frac{d\pi}{dt}$	$1142'',741 \pm 0'',032$	$34'',474 \pm 0'',006$	$103'',520 \pm 0'',004$
Наблюдаемое значение $(O) \text{ e } \frac{d\pi}{dt}$	$1151'',603 \pm 0'',084$	$34'',529 \pm 0'',035$	$103'',604 \pm 0'',030$
$O - C$	$\text{e}\Delta\pi \quad 8'',862 \pm 0'',090$	$0'',055 \pm 0'',036$	$0'',084 \pm 0'',030$
$O - C$	$\Delta\pi \quad 43'',10 \pm 0'',44$	$8'',06 \pm 5'',28$	$5'',01 \pm 1'',79$

Для Марса предварительная оценка невязки $O - C$ в $\text{e}\Delta\pi$ составляет $0'',100 \pm 0'',025$ (Субботин, 1968).

Сравнение разностей $O - C$ с релятивистскими поправками, приведенными выше, показывает, что учет шварцшильдовского смещения перигелия полностью объясняет невязки между наблюдениями и результатами ньютоновой гравитационной теории*). Вместе с тем нельзя гарантировать, что указанные значения $O - C$ являются окончательными и никогда не выйдут за пределы, диктуемые соответствующими вероятными ошибками. На протяжении всей истории определения астрономических постоянных такие случаи неоднократно имели место. Можно указать три основных источника возможных неточностей разностей $O - C$. Прежде всего, это — неточное значение астрономических постоянных: масс планет, постоянной прецессии, величины сжатия Солнца и т. д. Во-вторых, существующие ньютоновы планетные теории все же не являются безупречными в математическом отношении. Все они построены путем последовательных приближений в предположении, что движение всех планет, влияющих на рассматриваемую планету, известно. Решение ищется в виде рядов по степеням возмущающих масс, эксцентриситетов и наклонов и трудно дать реальную оценку погрешности, обусловленной пренебрежением членами высших степеней. В настоящее время во многих небесномеханических центрах ведется интенсивная работа по усовершенствованию численных и аналитических методов вычисления планетных возмущений с целью создания

*) Недавно законченная обработка наблюдений Марса на основе теории Клеменса подтверждает этот вывод (Laubscher R. E., 1971, The Motion of Mars: 1751-1969. Astronomy and Astrophysics 13,426).

единой теории движения всех больших планет Солнечной системы. Наконец, не исключено, что используемые оптические наблюдения могут содержать неучитываемые систематические погрешности. Привлечение новых типов наблюдений — радиолокационных, лазерных, оптических наблюдений вне Земли и т. п. — тоже может привести к некоторому изменению указанных здесь значений. Однако надо надеяться, что такое изменение приведет лишь к еще большему согласию с результатами общей теории относительности.

Интересно оценить вклад отдельных возмущающих факторов в вековое движение перигелия Меркурия. Согласно работе Клеменса (Clemenсе, 1947) имеем:

Причина	Вековое движение перигелия Меркурия	Причина	Вековое движение перигелия Меркурия
Меркурий	$0,025 \pm 0,00$	Нептун	$0,042 \pm 0,00$
Венера	$277,856 \pm 0,68$	Сжатие Солнца	$0,010 \pm 0,02$
Земля	$90,038 \pm 0,08$	Прецессия	$5025,645 \pm 0,50$
Марс	$2,536 \pm 0,00$	Сумма	$5557,18 \pm 0,85$
Юпитер	$153,584 \pm 0,00$	Наблюдения	$5599,74 \pm 0,41$
Сатурн	$7,302 \pm 0,01$	$O - C$	$42,56 \pm 0,94$
Уран	$0,141 \pm 0,00$		

Отличие значения $O - C$ от указанного выше значения Данкома объясняется тем, что Данком перевычислил данные Клеменса с более новыми значениями масс и постоянной прецессии.

В последнее время совпадение невязки в движении перигелия Меркурия с релятивистским значением стало предметом оживленной дискуссии в связи с вопросом о сжатии Солнца. Гипотеза о динамическом сжатии Солнца выдвигалась давно для объяснения добавочного смещения перигелия Меркурия. Но величина сжатия Солнца, объясняющая всю невязку в $43''$ в движении перигелия, неминуемо вызвала бы существенное расхождение между теоретическим и наблюдаемым движением узла орбиты Меркурия. Поэтому эта гипотеза была со временем оставлена.

В 1967 году Дикке и Голденберг (Dicke, Goldenberg, 1967) на основании теоретических соображений о внутреннем строении Солнца и данных по измерению солнечного диска пришли к заключению о существовании сжатия Солнца с величиной $\alpha = (5,0 \pm 0,7) \cdot 10^{-5}$.

Учитывая, что коэффициент при второй зональной гармонике разложения потенциала сфероида тела приближенно равен

$$C_{20} = \frac{\omega_0^2 r_0^3}{3\gamma m_\odot} - \frac{2}{3} \alpha + \dots,$$

и принимая радиус Солнца r_0 и угловую скорость вращения ω_0 равными

$$r_0 = 696\,000 \text{ км}, \quad \omega_0 = 2,865 \cdot 10^{-6} \text{ рад/сек},$$

из уравнений (71) — (73) гл. 1 находим значения вековых скоростей эклиптических элементов орбиты Меркурия, выраженные в угловых секундах за 100 лет:

$$\frac{di}{dt} = -0'', 19, \quad \frac{d\Omega}{dt} = -0'', 26, \quad \frac{d\omega}{dt} = 3'', 60.$$

Правые части этих уравнений вычислялись со следующими исходными значениями элементов орбиты Меркурия и экватора Солнца (1900,0):

$$i = 7^\circ 0', \quad \Omega = 47^\circ 9', \quad I = 7^\circ 15', \quad \Gamma = 74^\circ 22'.$$

Из-за небольшого различия в исходных данных полученные здесь значения слегка отличаются, например, от значений, приведенных в работе (O'Connell, 1968).

Таким образом, наличие сжатия Солнца указанной величины приводит к вековому смещению перигелия Меркурия $\Delta\pi = 3'', 34$ и, следовательно, влечет за собой некоторое рассогласование невязки $O - C$ с релятивистским эффектом. Что же касается изменения i и Ω , то они лежат в пределах ошибок наблюдений. Однако до тех пор, пока сжатие Солнца не будет определено динамическим путем, вряд ли можно говорить о реальности приведенного значения α . Недавно была сделана попытка определения сжатия Солнца по движению малой планеты Икар (Lieske, Null, 1969), но она не увенчалась успехом. Но даже в случае доказательства существования такого сжатия Солнца учет релятивистского эффекта в значительной степени компенсирует невязку $O - C$, величине которой, как уже указывалось выше, нельзя придавать абсолютного значения.

До сих пор речь шла о движении внутренних планет. В движении внешних планет релятивистский эффект в

смещении перигелия, убывающий, как видно из (1), пропорционально $a^{-3/2}$, лежит за пределами точности наблюдений. В целом, в настоящее время можно констатировать, что в пределах ошибок наблюдений движение больших планет Солнечной системы совпадает с результатами ньютоновой теории тяготения с учетом релятивистского шварцшильдовского смещения перигелиев внутренних планет.

В задаче Шварцшильда, к которой сводится изучение релятивистских эффектов в движении больших планет, имеется еще вековой член в средней долготе в эпоху (§§ 2,3 гл. 5). Этот член приводит к некеплеровой зависимости между периодом обращения планеты и большой полуосью ее орбиты. Однако поскольку большие полуоси непосредственно не измеряются, то выделить этот эффект в явном виде не удастся. По существу здесь повторяется ситуация ньютоновой теории возмущений — вековой член в средней долготе в эпоху может быть компенсирован постоянной добавкой к большой полуоси (§ 3 гл. 1).

В неявной форме релятивистский вековой член в средней долготе в эпоху учитывается в радиолокационном эффекте (см., например, в § 5 гл. 5 переход от (126) к (128) при помощи (127)). Но в основном при радиолокационном эффекте проверяются релятивистские законы распространения света и, в частности, эффект отклонения световых лучей вблизи Солнца. Согласно формуле (112) гл. 5 при прохождении вблизи края солнечного диска луч света отклоняется от своего первоначального направления на угол

$$2\delta = 1'', 75 \frac{r_0}{\rho}, \quad (2)$$

где r_0 — радиус Солнца, ρ — минимальное расстояние траектории луча от центра Солнца. Эта формула согласуется с экспериментальными данными в пределах относительных ошибок наблюдений, имеющих порядок 10—20%. В самое последнее время появились возможности более точной проверки этого эффекта радиоастрономическими методами.

Что же касается релятивистского радиолокационного эффекта, то в соответствии с формулой (125) гл. 5 при радиолокации Меркурия или Венеры в верхнем соединении дополнительное (по сравнению с ньютоновым) за-

паздывание сигнала при возвращении на Землю имеет порядок

$$\Delta T \approx 4 \frac{\mu}{c} \ln \frac{4r_E r_P}{r_0^2} \approx 2 \cdot 10^{-4} \text{ сек.} \quad (3)$$

Этот эффект при радиолокации Меркурия и Венеры проверен сейчас с точностью до 20%, но в ближайшее время эта точность будет значительно повышена.

При обработке высокоточных наблюдений внутренних планет на сравнительно небольшом интервале времени могут играть роль и периодические релятивистские члены в координатах и скоростях планет. Конечно, выделение отдельных таких членов совершенно не реально, но при общей обработке наблюдений в соответствии с релятивистскими формулами они могут внести свой вклад. Первый опыт такой обработки наблюдений внутренних планет был проведен Шапиро с сотрудниками (Ash, Shapiro, Smith, 1967). Авторы произвели обработку радиолокационных измерений Меркурия и Венеры за период 1959—1966 годы и оптических наблюдений Меркурия, Венеры и Солнца, выполненных в Морской обсерватории США в 1950—1965 годах. Обработка велась независимым путем как для теории Ньютона, так и для общей теории относительности. Уравнения движения планет интегрировались численно, причем для релятивистского случая использовалась гармоническая система координат. Наблюдения были отнесены, естественно, к этой же системе координат путем учета соответствующих законов распространения света. Определялись 26 параметров — элементы орбит Меркурия, Венеры и Земли, величина астрономической единицы в километрах, радиусы Меркурия и Венеры и, наконец, массы Меркурия, Венеры, Земли, Луны и Марса. Величина

$$\varepsilon = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [(O - C)_i / \sigma_i]^2,$$

где N — число измерений, σ_i — ошибка i -го измерения, служила мерой эффективности теории. Обе теории — и теория Ньютона, и общая теория относительности — в этой обработке оказались равноценными (для теории относительности $\varepsilon = 0,63$ и для ньютоновой теории $\varepsilon = 0,65$). Лишь для отдельной обработки радиолокаци-

онных измерений Меркурия разница оказалась существенной ($\varepsilon = 0,7$ и $\varepsilon = 1,3$ соответственно).

Очень важно, что в результате общей обработки наблюдений выявилось систематическое различие между ньютоновыми и релятивистскими значениями оскулирующих больших полуосей и долгот перигелиев, отражающее влияние соответствующих релятивистских вековых эффектов в средней долготе в эпоху и в долготе перигелия. В будущем и группа Шапиро, и ряд других научных центров планируют проведение аналогичной обработки на более широкой основе, имея, в частности, в виду определение ряда дополнительных параметров (в первую очередь, сжатия Солнца). Такой путь проверки релятивистских эффектов в движении больших планет Солнечной системы представляется наиболее обоснованным и перспективным.

Релятивистские эффекты в движении малых планет и комет выявить до сих пор не удалось. В первую очередь здесь представляют интерес малые планеты с большими эксцентриситетами, типа Икара. Однако отсутствие хорошо разработанной ньютоновой теории движения таких планет и недостаточное количество точных наблюдений, охватывающих всю орбиту, не позволяет пока обнаружить такие тонкие эффекты, как релятивистские эффекты или влияние сжатия Солнца*). Еще труднее обстоит дело с движением комет, тем более, что здесь добавляются трудности, связанные с учетом иррегулярных сил. Правда, Кустьянхеймо и Лейти (Kustaanheimo, Lehti, 1963) указали на принципиальную возможность обнаружения релятивистской зависимости между большой полуосью и периодом обращения кометы, но фактическое выявление этого эффекта весьма проблематично. Во всяком случае, успех здесь также может быть достигнут лишь путем общей обработки наблюдений комет отдельно на основе ньютоновой механики и теории относительности.

Рассмотрим теперь возможности обнаружения релятивистских эффектов в движении Луны и других естественных спутников больших планет. В случае Луны наибольшие надежды возлагаются на результаты лазерной лока-

*) Лишь в самое последнее время удалось выяснить релятивистское движение Икара (Shapiro I. I., Smith W. B., Ash M. E., S. Herrick 1971 General Relativity and the Orbit of Icarus, Astron. J. 76, 588).

ции. В принципе лазерная локация Луны дает возможность измерить расстояние между точками на поверхности Земли и Луны с точностью до 10 см (правда, эта точность условна хотя бы потому, что рассчитана в предположении точного знания скорости света). К сожалению, непосредственное измерение релятивистского изменения времени лазерной локации оказывается невозможным (Baierlein, 1967). Действительно, последний логарифмический член в правой части формулы (121) гл. 8 можно в пределах принятой точности умножить на S/R , и тогда вся правая часть будет пропорциональна отношению S/c с практически постоянным множителем пропорциональности (члены, меняющиеся со временем в этом множителе, слишком малы). Поэтому влияние релятивистских членов на время распространения сигнала будет неотделимо от влияния неточности скорости света, причем сама эта погрешность по крайней мере на порядок больше релятивистской поправки. Интересно отметить, что в неэйнштейновских теориях, например, в теории Бранса — Дикке этот множитель является переменным во времени (Krogh, Baierlein, 1968). Однако результаты локации Луны должны выявить расхождение между ньютоновым и релятивистским представлением движения Луны. Если в формулах (104) — (106) гл. 8 опустить ньютоновы члены и подставить численные значения, то получим следующие релятивистские поправки к координатам Луны (без учета эксцентриситета орбиты Солнца):

$$\begin{aligned} \frac{\delta p}{a_0} = & -2,148 \cdot 10^{-8} - 8,853 \cdot 10^{-11} \cos D + 2,766 \cdot 10^{-9} \cos 2D - \\ & - 2,764 \cdot 10^{-12} \cos 3D + 1,615 \cdot 10^{-11} \cos 4D + \dots \\ & \dots + e [1,018 \cdot 10^{-8} \cos l + 2,007 \cdot 10^{-9} \cos (2D + l) + \\ & + 2,422 \cdot 10^{-11} \cos (4D + l) - 7,908 \cdot 10^{-10} \cos (2D - l) + \\ & + 3,917 \cdot 10^{-10} \cos (4D - l) + 3,241 \cdot 10^{-12} \cos (6D - l) + \dots], \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \delta V = & 9'',844 \cdot 10^{-5} \sin D - 5'',527 \cdot 10^{-4} \sin 2D + \\ & + 8'',568 \cdot 10^{-7} \sin 3D - 5'',147 \cdot 10^{-6} \sin 4D + \dots \\ & \dots + e [3'',035 \cdot 10^{-5} \sin l - 5'',411 \cdot 10^{-4} \sin (2D + l) - \\ & - 9'',050 \cdot 10^{-6} \sin (4D + l) + 2'',327 \cdot 10^{-4} \sin (2D - l) - \\ & - 1'',028 \cdot 10^{-4} \sin (4D - l) - 1'',227 \cdot 10^{-6} \sin (6D - l) + \dots], \end{aligned} \quad (5)$$

$$\delta b = 2K [8'',447 \cdot 10^{-6} \sin F - 2'',784 \cdot 10^{-4} \sin (2D + F) - \\ - 3'',860 \cdot 10^{-6} \sin (4D + F) + 2'',012 \cdot 10^{-4} \sin (2D - F) - \\ - 6'',592 \cdot 10^{-6} \sin (4D - F) - 1'',038 \cdot 10^{-7} \sin (6D - F) + \dots]. \quad (6)$$

Наибольший периодический член здесь соответствует вариационному неравенству (аргумент $2D$). Амплитуда этого члена в радиусе-векторе имеет порядок 100 см, т. е. принципиально наличие такого члена должно быть ощутимо. Разумеется, выявление релятивистских эффектов в движении Луны представляет собой труднейшую задачу. Неточное знание элементов орбиты Луны, скорости света, координат лазерной станции на Земле и отражателя на Луне, параметров фигуры и вращения Луны внесет гораздо больший вклад в невязки $O - C$ лазерной локации, чем релятивистские эффекты. Сама же обработка лазерных наблюдений Луны должна производиться примерно тем же путем, что и обработка наблюдений внутренних планет, проведенная группой Шапиро.

Чрезвычайно интересный вопрос встает и при сравнении теоретических и наблюдаемых значений вековых движений перигея и узла Луны. Последние данные в этом отношении, полученные Эккертом (Eckert, 1965), приведены в следующей таблице:

Причина	Вековое движение перигея Луны	Вековое движение узла Луны
Солнце	+14642722",8	-6967206",9
Масса Земли	- 70,3	+ 20,3
Масса Луны	- 1	0
Планеты	+ 252,9	- 137,0
Фигура Земли	+ 633,1	- 592,1
Общая теория относительности	+ 0,06	0
Сумма	+14643537,6	-6967915,7
Наблюдения	+14643534,5	-6967943,6
$O - C$ (включая влияние фигуры Луны)	- 3,1	- 27,9

Первые три строчки здесь дают основные возмущения, соответствующие задаче трех тел Солнце — Земля — Луна. Четвертая строка отражает прямое и косвенное влияние планет. Влияние несферичности Земли приведено в пятой строке. Шестая строка, содержащая

релятивистский эффект, нуждается в особом рассмотрении. Согласно формулам (109), (110), гл. 8 релятивистские вековые движения перигея и узла Луны определяются выражениями:

$$\frac{d\pi}{dt} = \frac{3n^3 a_0^2}{c^2} + \sigma n \left(\frac{3}{2} \gamma - \frac{1245}{64} \gamma^3 + \dots \right), \quad (7)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \sigma n \left(\frac{3}{2} \gamma - \frac{117}{64} \gamma^3 + \dots \right), \quad (8)$$

где n и a_0 — среднее движение и большая полуось орбиты Луны, $\gamma = N/n$ — отношение средних движений Солнца и Луны и σ — отношение гравитационного радиуса Солнца к среднему расстоянию Солнце — Земля. За 100 лет релятивистские смещения перигея и узла Луны составят

$$\Delta\pi = 1'',83, \quad \Delta\Omega = 1'',90. \quad (9)$$

Первый член формулы (7) представляет собой шварцшильдовское смещение перигея Луны, обусловленное Землей. Это смещение составляет $0'',06$ в столетие и именно оно фигурирует в данных Эккерта. Гораздо большую численную величину ($1'',91$) имеет следующий за ним член $3N\sigma/2$, не зависящий от параметров орбиты Луны и совпадающий с эффектом геодезической прецессии. По мнению Клеменса и Эккерта, эффект геодезической прецессии должен быть исключен из формул (7), (8), так как при обработке данных наблюдений учитывается наблюдаемое значение постоянной прецессии. В указанной выше работе Байерлейна этот вопрос рассмотрен вновь и сформулирован противоположный вывод. Действительно, формулы (7), (8) дают вековые движения перигея и узла, отнесенные к некоторой фиксированной системе координат. При обработке наблюдений надо учитывать движение точки весеннего равноденствия и производить редукцию наблюдений к этой фиксированной системе именно с наблюдаемым значением постоянной прецессии. Сам же эффект геодезической прецессии имеет значение, когда из наблюдаемой величины постоянной прецессии нужно получить чисто ньютоново значение, важное для динамического объяснения явления прецессии. Поэтому если придерживаться такой точки зрения, то шестую строку приведенной таблицы надо заменить значениями (9). В эту таблицу

не включено влияние несферичности фигуры Луны на движение ее перигея и узла. Проведенный Эккертом анализ показывает, что влияние фигуры Луны дается следующими формулами:

$$\Delta\Omega = -28^{\prime\prime},86 g',$$

$$\Delta\pi = (-2,591 f + 1,764)\Delta\Omega,$$

где

$$g' = \frac{3C'}{2Mb'^2}, \quad f = \frac{C' - B'}{C' - A'},$$

причем A' , B' , C' — главные центральные моменты инерции Луны, рассматриваемой как трехосный эллипсоид с полуосями a' , b' , c' , M — масса Луны. При этом $g' = 0,6$ для однородной сферы и $g' = 1$ для сферического слоя. Оказывается, что невязка в перигее практически аннулируется при значениях f в интервале $0,6 - 0,65$ (в зависимости от значения g'). Невязка же в узле уничтожается лишь при больших значениях g' ($\approx 0,97$), а при значении $g' = 0,6$ составляет $-10''$. Самые последние значения наблюдаемых вековых движений перигея и узла Луны требуют прибавления к указанным здесь значениям этих величин следующих добавок:

$$\Delta\pi = 1^{\prime\prime},11, \quad \Delta\Omega = 4^{\prime\prime},31,$$

которые несколько уменьшают невязки $O - C$ (Martin, Van Flandern, 1970). Эти невязки обращаются в нуль при $g' = 0,82$, $f = 0,65$, но такое значение g' означает, что плотность масс вблизи поверхности Луны больше, чем в ее центре. Обработка наблюдений искусственных спутников Луны дает значение $g' = 0,60$. Если это значение правильно, то в вековом движении узла Луны остается большая необъяснимая пока невязка в $-6^{\prime\prime},3$. Если к тому же учесть релятивистское движение узла согласно (9), то эта невязка увеличится до $-8^{\prime\prime},2$.

В настоящее время разными специалистами ведется работа по созданию новых, более совершенных теорий движения Луны. Эти теоретические работы совместно с лазерными измерениями Луны должны дать окончательный ответ относительно согласия между теоретическими и наблюдательными данными.

Для остальных естественных спутников планет Солнечной системы нет необходимости строить полную релятивистскую теорию движения, как в случае Луны, а достаточно к ньютоновой теории добавить релятивистские вековые члены в элементах орбит. Первая группа таких членов — это шварцшильдовское смещение перицентра (1), где на этот раз μ обозначает гравитационный радиус планеты. Для спутников Марса Фобоса и Деймоса это смещение составляет $23''$ и $2''$ соответственно. В случае спутников Юпитера V, I, II, III, IV это смещение еще больше, а именно

$$2220'', 268'', 84'', 26'', 6''$$

соответственно. Вторая группа членов вызвана собственным вращением планеты. Если i , Ω , π — наклон, долгота узла и долгота перицентра орбиты спутника, отнесенные к плоскости экватора планеты, то в соответствии с формулами (37), (38) гл. 8 изменения Ω и π за 100 лет составят

$$\begin{aligned}\Delta\Omega &= \frac{4}{5} \frac{\mu\omega_0 R^2}{a^3 (1-e^2)^{3/2}}, \\ \Delta\pi &= \frac{4}{5} \frac{\mu\omega_0 R^2}{a^3 (1-e^2)^{3/2}} (1 - 3 \cos i),\end{aligned}\quad (10)$$

где R — радиус планеты, выраженный в тех же единицах, что μ и a , а ω_0 — угловая скорость вращения планеты в угловых секундах за 100 лет. Для спутников Юпитера V и I соответствующие смещения долготы перицентра $\Delta\pi$ составляют $-224''$ и $-18''$. Наконец, третья группа членов обусловлена движением планеты вокруг Солнца (геодезическая прецессия). Если Ω и π теперь означают долготы узла и перицентра, отнесенных к плоскости гелиоцентрической орбиты планеты, то соответствующие приращения за 100 лет при круговом движении планеты будут

$$\Delta\Omega = \Delta\pi = \frac{3}{2} \frac{\mu n_0}{a_0}, \quad (11)$$

где a_0 и n_0 — радиус и частота кругового движения планеты (n_0 — в угловых секундах за 100 лет), а μ — гравитационный радиус Солнца, выраженный в тех же единицах, что и a_0 . От элементов орбиты спутника этот эффект не зависит и поэтому одинаков для всех спутников

одной и той же планеты. Для спутников Юпитера этот добавочный эффект составляет $0^{\circ},03$ в столетие. При объединении всех трех эффектов (1), (10) и (11) надо лишь иметь в виду, что в (10) и (11) употребляются разные плоскости отсчета. Приведение к одной плоскости легко совершается при помощи формул (76) — (78) гл. 1.

Как видно, релятивистские вековые эффекты в системе спутников Юпитера достигают значительной величины. Некоторые, наиболее значительные периодические релятивистские эффекты в этой системе указаны в работе (Ferraz-Mello, 1966). В системе спутников Сатурна релятивистские вековые эффекты лишь несколько меньше. Однако точность современных оптических наблюдений спутников планет все еще не достаточна для обнаружения этих эффектов, хотя несомненно, что в этом отношении в самом ближайшем будущем может быть достигнут существенный прогресс.

В литературе обсуждались еще некоторые возможности проверки релятивистских эффектов в движении естественных тел Солнечной системы, например, на основе анализа промежутков времени между двумя последовательными прохождениями Меркурия по диску Солнца (Chazy, 1928, 1930), по релятивистскому изменению времени покрытий звезд Луною (Rudkjoning, 1968) и т. д. Вполне вероятно, что некоторые из этих возможностей смогут быть реализованы в будущем.

§ 2. Небесномеханические эксперименты

С созданием первых искусственных спутников Земли в небесной механике впервые за всю историю развития этой науки появилась возможность планирования и проведения экспериментов. Это открывает совершенно новые перспективы и в области проверки релятивистских эффектов. Экспериментальные возможности небесной механики развиваются в двух направлениях. Прежде всего, — это «модернизация» естественных небесных тел путем доставки на их поверхность активных или пассивных средств связи. Примером может служить доставка уголкового отражателя на Луну для обеспечения лазерной локации. Нет сомнения, что в будущем различные средства радио- и лазерной связи будут доставлены на

большие планеты Солнечной системы, на их спутники и крупнейшие астероиды. Это существенно повысит точность наших знаний о движении этих тел и даст хорошую основу для проверки всех эффектов, рассмотренных в предыдущем параграфе. Разумеется, эта проверка может быть достигнута лишь одновременно с уточнением астрономических постоянных (массы планет, их радиусы, параметры формы тел, начальные условия движения, величина скорости света и т. д.).

Не менее важное значение имеет второе направление экспериментальной небесной механики, связанное с целенаправленным созданием искусственных небесных тел. Начиная с работы Клеменса (Clemence, 1960), предложившего использовать некоторые типы орбит искусственных небесных тел для уточнения ряда астрономических постоянных, в литературе были выдвинуты самые разнообразные проекты для проверки релятивистских эффектов. Достаточно указать работы (Davidson, 1967) по исследованию операций измерений в шварцшильдовском поле, (Brignan, 1969) по проверке релятивистских эффектов при полете космического аппарата к Юпитеру, (Laframboise, Sachs, 1969) по определению сжатия Солнца и релятивистских эффектов при помощи двух солнечных спутников и т. п. Планирование подобных экспериментов представляет собой одну из самых новых и увлекательных проблем небесной механики.

Интересно отметить, что это направление уже принесло первые плоды. Так, американским специалистам удалось измерить релятивистское изменение времени распространения радиосигнала, когда Земля и один из космических кораблей «Маринер-6» и «Маринер-7» находились на одной прямой по разные стороны от Солнца (Anderson et al., 1970). Уже предварительные результаты позволили проверить этот эффект с большей точностью, чем при радиолокации Меркурия и Венеры (благодаря усилению сигнала с Земли бортовыми средствами связи). Полная обработка нескольких тысяч доплеровских наблюдений и нескольких сотен измерений дальности для каждого из кораблей, полученных за полтора года после их сближения с Марсом, еще не закончена, но ожидается, что она даст значение релятивистского радиолокационного эффекта запаздывания сигнала с точностью в 1%. Во

время ближайших полетов такого типа эта точность может быть увеличена в 10 раз. Планируемые полеты кораблей с прохождением вблизи Венеры и Меркурия и запуски солнечных зондов типа «Гелиос» должны позволить уточнить помимо этого эффекта величину сжатия Солнца и параметры орбит планет, включая вековое движение перигелия Меркурия. Все это дает основание считать, что ближайшее десятилетие станет решающим для экспериментальной проверки неньютоновых теорий тяготения (Anderson, Esposito, 1970; Thorne, Will, 1970).

Что же касается искусственных спутников Земли, то перспективы проверки релятивистских эффектов путем исследования эволюции их орбит представляются менее оптимистическими. Сами по себе шварцшильдовское смещение перигея (1) и эффекты (10), обусловленные вращением Земли, достигают значительной величины. Для близкого искусственного спутника Земли, движущегося по орбите с небольшим эксцентриситетом, комбинация этих эффектов даст за 100 лет вековые смещения следующего порядка:

$$\begin{aligned}\Delta\omega &= 1600'' - 75'' \cos i, \\ \Delta\Omega &= 25'',\end{aligned}$$

где элементы орбиты относятся к экватору Земли. Как и для Луны, в эклиптических элементах спутников Земли присутствует еще эффект геодезической прецессии $1'',91$ в столетие. Однако из-за наличия атмосферы, воздействие которой не поддается строгому учету, и аномалий земного гравитационного поля выявление этих эффектов, по крайней мере в ближайшем будущем, практически неосуществимо. При помощи спутников Земли проверяется красное смещение (Gaposchkin, Wright, 1969), релятивистский эффект Доплера (Jenkins, 1969), возможны различные эксперименты с часами (Keswani, 1969). Однако эта область, достаточно хорошо проверенная экспериментально в лабораторных условиях на Земле, представляет меньший интерес для релятивистской небесной механики, чем эффекты, связанные с эволюцией орбит.

В настоящее время планируется проведение экспериментов по исследованию релятивистской прецессии гироскопов на Земле и на спутниках Земли. Эти эффекты,

относящиеся к вращательному движению, были рассмотрены в § 1 предыдущей главы. Заманчивым является также проведение гироскопических экспериментов на искусственных объектах, движущихся вокруг Солнца по сильно вытянутым эллиптическим орбитам. Как показывает формула (7) предыдущей главы, увеличение эксцентриситета орбиты может привести к существенному возрастанию величины эффекта.

Таковы некоторые из возможностей экспериментальной небесной механики, призванной значительно расширить современные знания о законах движения тел Солнечной системы.

ГРАВИТАЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

§ 1. Гравитационная энергия и законы сохранения

Гравитационное излучение небесных тел играет совершенно ничтожную роль и в задачах релятивистской небесной механики им вполне можно пренебречь. Тем не менее само наличие гравитационного излучения является одним из принципиальных факторов, отличающих релятивистскую небесную механику от ньютоновой. В этой главе приводятся начальные сведения теории гравитационного излучения примерно в той форме, в какой эта теория изложена в книге В. А. Фока.

В соответствии с основными положениями общей теории относительности гравитационная энергия не входит в тензор энергии — импульса, а учитывается косвенно при помощи потенциалов тяготения. Выделить гравитационную энергию в виде добавочных членов в тензоре энергии — импульса можно лишь искусственно, фиксируя координатную систему. Эти добавочные члены не являются тензорными величинами. В одной и той же точке в зависимости от выбора системы координат они могут принимать любое значение. В случае изолированной системы масс, типа Солнечной системы, вдали от масс действие гравитационного поля становится пренебрежимо малым и в пределе в бесконечности возникает однородное и изотропное галилеево пространство. В этом случае при пренебрежении излучением имеют место 10 классических интегралов. Если требование евклидовости на бесконечности не выполняется, то систему нельзя рассматривать как изолированную и интегралы, или по крайней мере часть из них, не выполняются. Именно этот случай осуществляется, например, при рассмотрении Солнечной системы в космологии. Однако подобная задача, несмотря на свой большой теоретический интерес, еще не исследовалась в достаточной степени.

Конечно, строго говоря, реальная физическая система никогда не является изолированной из-за потери энергии в виде излучения — электромагнитного и гравитационного. Но для Солнечной системы потеря электромагнитной энергии мала по сравнению с общим количеством энергии системы, а потеря энергии в виде гравитационного излучения в 10^{23} — 10^{24} раз меньше энергии электромагнитного излучения.

Тензор энергии — импульса общей теории относительности удовлетворяет соотношениям

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0$$

или в более подробной записи

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (\sqrt{-g} T^{\mu\nu}) + \Gamma_{\alpha\beta}^{\nu} T^{\alpha\beta} = 0. \quad (1)$$

Из соотношений (1) не следуют законы сохранения, так как левые части не могут быть представлены в виде дивергенций от симметричных функций. Физически, как уже указывалось, это является отражением того факта, что гравитационная энергия не входит в тензор энергии — импульса. Однако если в тензоре Эйнштейна, стоящем в левой части уравнений поля, выделить члены со вторыми производными, то после некоторых преобразований, содержащихся, например, в книге В. А. Фока, можно представить этот тензор в виде

$$-g \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} (\tilde{g}^{\alpha\mu} \tilde{g}^{\beta\nu} - \tilde{g}^{\alpha\beta} \tilde{g}^{\mu\nu}) + L^{\mu\nu}, \quad (2)$$

где

$$\tilde{g}^{\alpha\beta} = \sqrt{-g} g^{\alpha\beta},$$

а $L^{\mu\nu}$ представляют собой совокупность членов, не содержащих вторых производных от метрического тензора. Эти члены нелинейны относительно первых производных, и для их вычисления служат формулы

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial \tilde{g}^{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial \tilde{g}^{\alpha\mu}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial \tilde{g}^{\beta\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial \tilde{g}^{\alpha\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial \tilde{g}^{\beta\nu}}{\partial x^{\beta}} \right) - g \left(\Pi^{\mu, \alpha\beta} \Pi_{\alpha\beta}^{\nu} - \frac{1}{2} y^{\mu} y^{\nu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} G \right). \quad (3)$$

Здесь в соответствии с обозначениями В. А. Фока

$$y_\alpha = \Gamma_{\alpha\nu}^\nu = \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^\alpha}, \quad y^\mu = g^{\alpha\mu} y_\alpha,$$

$$\Pi^{\mu, \alpha\beta} = \frac{1}{2g} \left(\tilde{g}^{\alpha\nu} \frac{\partial \tilde{g}^{\mu\beta}}{\partial x^\nu} + \tilde{g}^{\beta\nu} \frac{\partial \tilde{g}^{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \tilde{g}^{\mu\nu} \frac{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \right),$$

$$\Pi_{\alpha\beta}^\nu = g_{\alpha\rho} g_{\beta\sigma} \Pi^{\nu, \rho\sigma},$$

а G представляет собой функцию Лагранжа для уравнений поля, уже встречающуюся ранее (формула (88) гл. 7). Эта функция может быть представлена в виде

$$G = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \Pi_{\alpha\beta}^\nu \frac{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} + \frac{1}{2} y_\nu y^\nu.$$

Подставляя теперь в (2) уравнения поля

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} = -\frac{8\pi\gamma}{c^2} T^{\mu\nu}$$

и обозначая

$$U^{\mu\nu} = -\frac{g}{c^2} T^{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi\gamma} L^{\mu\nu}, \quad (4)$$

получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} (\tilde{g}^{\alpha\beta} \tilde{g}^{\mu\nu} - \tilde{g}^{\alpha\mu} \tilde{g}^{\beta\nu}) = 16\pi\gamma U^{\mu\nu}. \quad (5)$$

Отсюда сейчас же следует

$$\frac{\partial U^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0. \quad (6)$$

Это соотношение, по сути дела, эквивалентное (1), представлено в виде дивергенции от симметричного, но не тензорного выражения. Легко проверить, что величины $L^{\mu\nu}$ можно выразить через символы Кристоффеля. Поэтому по отношению к линейным преобразованиям эти величины, а тем самым и величины $U^{\mu\nu}$ ведут себя как компоненты тензора.

В фиксированной координатной системе можно считать, что первый член в $U^{\mu\nu}$ — это тензор, описывающий энергию вещества и всех полей, кроме гравитационного, а второй член — псевдотензор гравитационного поля.

Записывая соотношения (6) отдельно для $\nu = 0$ и $\nu = i$:

$$\frac{\partial U^{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial U^{0k}}{\partial x^k} = 0, \quad \frac{\partial U^{0i}}{\partial x^0} + \frac{\partial U^{ik}}{\partial x^k} = 0,$$

умножая на элемент пространственного объема и интегрируя по области, занятой массами, находим

$$\frac{d}{dt} \int U^{00} (dx)^3 = -c \int n_k U^{0k} dS, \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt} \int U^{0i} (dx)^3 = -c \int n_k U^{ik} dS, \quad (8)$$

где dS — элемент пространственной поверхности. Так как, далее, $U^{\mu\nu}$ — симметричные величины, удовлетворяющие (6), то

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} (x^\mu U^{\alpha\nu} - x^\nu U^{\alpha\mu}) = 0. \quad (9)$$

Положим здесь $\mu = i$ и придадим ν значения $\nu = 0$ и $\nu = j$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial x^0} (x^i U^{00} - x^0 U^{0i}) + \frac{\partial}{\partial x^k} (x^i U^{0k} - x^0 U^{ik}) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^0} (x^i U^{0j} - x^j U^{0i}) + \frac{\partial}{\partial x^k} (x^i U^{jk} - x^j U^{ik}) = 0,$$

откуда после интегрирования вытекает

$$\frac{d}{dt} \int (x^i U^{00} - ct U^{0i}) (dx)^3 = -c \int n_k (x^i U^{0k} - ct U^{ik}) dS, \quad (10)$$

$$\frac{d}{dt} \int (x^i U^{0j} - x^j U^{0i}) (dx)^3 = -c \int n_k (x^i U^{jk} - x^j U^{ik}) dS. \quad (11)$$

Соотношения (7), (8), (10) и (11) представляют собой обобщение законов сохранения классической механики и показывают, что изменение полного количества рассматриваемой величины внутри некоторого объема происходит только за счет потока этой величины через поверхность, ограничивающую объем. Если этим потоком можно пренебречь, то получаются законы сохранения в узком смысле, когда рассматриваемые величины являются постоянными.

В соответствии с левыми частями соотношений (7), (8), (10) и (11) массу \bar{M} системы, ее количество движения \bar{P}^i , координаты ее центра инерции \bar{X}^i и ее момент количества движения \bar{M}^{ij} нужно определить следующим образом:

$$\bar{M} = c^2 \int U^{00} (dx)^3, \quad (12)$$

$$\bar{P}^i = c^2 \int U^{0i} (dx)^3, \quad (13)$$

$$\bar{M}^i X^i = c^2 \int x^i U^{00} (dx)^3, \quad (14)$$

$$\bar{M}^{ij} = c^2 \int (x^i U^{0j} - x^j U^{0i}) (dx)^3. \quad (15)$$

Тильда в обозначениях этих величин указывает, что в них учитывается соответствующий вклад от гравитационного поля. Разумеется, в случае необходимости все эти объемные интегралы можно преобразовать в поверхностные.

§ 2. Гравитационное излучение системы тел

Для вычисления энергии гравитационного излучения надо знать значения потенциалов тяготения в волновой зоне, т. е. на достаточно большом расстоянии от системы гравитирующих масс, в то время как в обычных задачах релятивистской небесной механики, связанных с движением тел, требуются значения потенциалов тяготения на сравнительно близких расстояниях от масс. Типичное волновое уравнение

$$\Delta \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -4\pi\tau, \quad (16)$$

допускающее точное решение

$$\psi = \int \frac{\sigma(t', r')}{|r - r'|} (dx')^3, \quad t' = t - \frac{1}{c} |r - r'|,$$

решалось в проблеме движения тел путем разложения в степенные ряды относительно $|r - r'|/c$. Ясно, что в волновой зоне для больших значений r надо строить разложения иначе. Вводя величину

$$\tau = t - \frac{r}{c},$$

можно переписать формулу для t' в виде

$$t' = \tau + \frac{1}{c} (r - |r - r'|),$$

где для волновой зоны второй член мал по сравнению с первым. С достаточной точностью можно ограничиться в разложении $|r - r'|$ первыми двумя членами

$$|r - r'| = r \left(1 - \frac{rr'}{r^2} + \dots \right),$$

и тогда предыдущая формула принимает вид

$$t' = \tau + \frac{1}{c} nr',$$

где $n = r/r$. Поэтому приближенное решение волнового уравнения (16) в волновой зоне может быть записано в форме

$$\psi = \frac{1}{r} \mu(\tau, n), \quad (17)$$

где

$$\mu(\tau, n) = \int \sigma \left(\tau + \frac{nr'}{c}, r' \right) (dx')^3. \quad (18)$$

Если, далее, обозначить

$$k_\alpha = \frac{\partial \tau}{\partial x^\alpha}, \quad (19)$$

так что

$$k_0 = \frac{1}{c}, \quad k_i = -\frac{n_i}{c},$$

то, очевидно, будет иметь место асимптотическая формула

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} = k_\alpha \psi. \quad (20)$$

Для контрвариантных составляющих четырехмерного вектора k^α при помощи галилеевых значений метрического тензора находим

$$k^\alpha = \eta^{\alpha\beta} k_\beta,$$

так что

$$k^0 = \frac{1}{c}, \quad k^i = \frac{n_i}{c}$$

и

$$k_\alpha k^\alpha = 0. \quad (21)$$

Так как начальные члены разложений ковариантных и контрвариантных компонент метрического тензора имеют вид

$$g_{00} = 1 - \frac{2U}{c^2} + \dots, \quad g_{0i} = 0, \quad g_{ij} = -\delta_{ij},$$

$$g^{00} = 1 + \frac{2U}{c^2} + \dots, \quad g^{0i} = 0, \quad g^{ij} = -\delta_{ij}$$

и

$$\sqrt{-g} = 1 + \frac{2U}{c^2} + \dots,$$

то компоненты $\tilde{g}^{\mu\nu}$ с волновыми добавками $b^{\mu\nu}$ будут

$$\tilde{g}^{00} = 1 + \frac{4U}{c^2} + b^{00}, \quad \tilde{g}^{0i} = b^{0i}, \quad \tilde{g}^{ij} = -\delta_{ij} + b^{ij}. \quad (22)$$

Поскольку добавки $b^{\mu\nu}$ удовлетворяют волновым уравнениям, то в силу (20)

$$\frac{\partial b^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = k_\alpha b^{\mu\nu},$$

и вообще, сохраняя лишь главные члены,

$$\frac{\partial \tilde{g}^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = k_\alpha \tilde{g}^{\mu\nu}.$$

Поэтому в гармонических координатах

$$k_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0$$

или после интегрирования

$$k_\mu b^{\mu\nu} = 0. \quad (23)$$

Отсюда видно, что достаточно найти лишь пространственные компоненты b^{ij} , через которые выражаются

и остальные компоненты

$$b^{00} = n_i n_j b^{ij}, \quad b^{0i} = n_j b^{ij}. \quad (24)$$

Как следует из (5), уравнения поля в гармонических координатах записываются в виде

$$\tilde{g}^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \tilde{g}^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = 16\pi\gamma U^{\mu\nu}.$$

Используя формулы (3), (4) и выражения (22), находим

$$y_\alpha = \frac{1}{2\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\partial \tilde{g}^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{2} k_\alpha \delta_\mu^\mu,$$

$$y^\alpha = \frac{1}{2} k^\alpha \delta_\mu^\mu, \quad y_\alpha y^\alpha = 0,$$

$$\Pi^{\mu, \alpha\beta} = -\frac{1}{2} (k^\alpha \delta^{\mu\beta} + k^\beta \delta^{\mu\alpha} - k^\nu \delta^{\alpha\beta}),$$

$$\Pi_{\alpha\beta}^\nu = -\frac{1}{2} (k_\alpha \delta_\beta^\nu + k_\beta \delta_\alpha^\nu - k^\nu \delta_{\alpha\beta}),$$

$$k_\nu \Pi_{\alpha\beta}^\nu = 0, \quad \Pi^{\mu, \alpha\beta} \Pi_{\alpha\beta}^\nu = \frac{1}{4} k^\mu k^\nu \delta^{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta}, \quad G = 0,$$

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{4} k^\mu k^\nu \left(\delta^{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \delta_\alpha^\alpha \delta_\beta^\beta \right),$$

так что уравнения поля сводятся к

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \tilde{g}^{\mu\nu} = \frac{8\pi\gamma}{c^2} (T^{\mu\nu} + \sigma_g k^\mu k^\nu), \quad (25)$$

причем плотность гравитационной энергии σ_g равна

$$\sigma_g = \frac{c^2}{32\pi\gamma} \left(\delta^{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \delta_\alpha^\alpha \delta_\beta^\beta \right). \quad (26)$$

Для тензора электромагнитной энергии в волновой зоне будет

$$T^{\mu\nu} = \sigma_e k^\mu k^\nu,$$

где σ_e — плотность электромагнитной энергии. Полагая $\sigma = \sigma_e + \sigma_g$, имеем окончательно

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \tilde{g}^{\mu\nu} = \frac{8\pi\gamma}{c^2} \sigma k^\mu k^\nu. \quad (27)$$

Решение этого уравнения можно искать в виде

$$b^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} + hk^{\mu}k^{\nu}, \quad (28)$$

где $h^{\mu\nu}$ удовлетворяют уравнениям (27) без правой части, а h — частное решение неоднородного уравнения

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) h = \frac{16\pi\gamma}{c^2} \sigma. \quad (29)$$

Функции $h^{\mu\nu}$, как удовлетворяющие однородному уравнению Даламбера, запишутся в виде

$$h^{\mu\nu} = \frac{2\gamma}{c^4 r} f^{\mu\nu}(\tau, \mathbf{n}), \quad (30)$$

где $f^{\mu\nu}(\tau, \mathbf{n})$ — произвольные функции своих аргументов, а числовой множитель $2\gamma/c^4$ введен для удобства. Из (23) и (28) следует, что

$$k_{\mu}h^{\mu\nu} = 0,$$

и поэтому аналогично (24)

$$f^{00} = n_i n_j f^{ij}, \quad f^{0i} = n_j f^{ij}.$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что значение σ_g не меняется от замены в (26) $b^{\mu\nu}$ на $h^{\mu\nu}$. Поэтому

$$\sigma_g = \frac{c^2}{32\pi\gamma} \left(\dot{h}^{\alpha\beta} \dot{h}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \dot{h}_{\alpha}^{\alpha} \dot{h}_{\beta}^{\beta} \right). \quad (31)$$

Подставляя сюда значения (30), находим

$$\sigma_g = \frac{1}{r^2} \sigma_g^{(0)}(\tau, \mathbf{n}), \quad (32)$$

где

$$\sigma_g^{(0)} = \frac{\gamma}{8\pi c^6} \left(\dot{f}^{\alpha\beta} \dot{f}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \dot{f}_{\alpha}^{\alpha} \dot{f}_{\beta}^{\beta} \right). \quad (33)$$

Плотность электромагнитной энергии σ_e представляется в виде, аналогичном (32), и тогда при $\sigma_0 = \sigma_e^{(0)} + \sigma_g^{(0)}$ уравнение (29) переписывается в виде

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) h = \frac{16\pi\gamma}{c^3 r} \sigma_0. \quad (34)$$

Решение этого уравнения дает вклад в потенциалы тяготения, порожденный излучением системы. Если же этим вкладом пренебречь, то значения потенциалов тяготения в волновой зоне и вблизи масс должны по мере удаления от масс переходить друг в друга. Это позволяет определить функции $f^{\mu\nu}$. Действительно, вблизи масс компонент \tilde{g}^{00} имеет вид

$$\tilde{g}^{00} = 1 + \frac{4U}{c^2} + \dots,$$

где U — ньютонов потенциал

$$U = \gamma \int \frac{\rho' (dx')^3}{|r - r'|},$$

причем интегрирование проводится по области, окружающей массы. Используя разложение

$$\frac{1}{|r - r'|} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{rr'}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{r'^2}{r^2} + \frac{3}{2} \frac{(rr')^2}{r^4} + \dots \right),$$

находим

$$U = \frac{\gamma M}{r} + \frac{1}{2} \gamma D_{ij}(t) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^i \partial x^j} + \dots,$$

где

$$D_{ij}(t) = \int \rho \left(x_i x_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} r^2 \right) (dx)^3. \quad (35)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} D_{ij} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^i \partial x^j} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\delta_{ij}}{r^3} + \frac{3x^i x^j}{r^5} \right) \times \\ &\times \int \rho' \left(x'_i x'_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} r'^2 \right) (dx')^3 = \frac{1}{2} \int \rho' \left[-\frac{r'^2}{r^3} + 3 \frac{(rr')^2}{r^5} \right] (dx')^3. \end{aligned}$$

Заметим еще, что для системы отдельных масс

$$U = \sum_a \frac{\gamma M_a}{|r - a|},$$

и тогда

$$D_{ij}(t) = \sum_a M_a \left(a_i a_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} a_k^2 \right). \quad (36)$$

Таким образом, величина \tilde{g}^{00} по мере удаления от масс принимает значение

$$\tilde{g}^{00} = 1 + \frac{4\gamma M}{c^2 r} + \frac{2\gamma}{c^2} D_{ij}(t) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^i \partial x^j} + \dots$$

С другой стороны, значение \tilde{g}^{00} для волновой зоны будет

$$\tilde{g}^{00} = 1 + \frac{4\gamma M}{c^2 r} + \frac{2\gamma}{c^2 r} f^{00}(\tau, n).$$

Если теперь положить

$$f^{ij} = \frac{d^2}{d\tau^2} D_{ij}(\tau), \quad (37)$$

то эти два значения \tilde{g}^{00} асимптотически совпадут, так как при этом

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2 r} f^{00} &= \frac{1}{c^2 r} n_i n_j \frac{d^2}{d\tau^2} D_{ij}(\tau) = \frac{1}{c^2} n_i n_j \frac{d^2}{d\tau^2} \frac{D_{ij}(\tau)}{r} = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \frac{D_{ij}}{r} = D_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

Найдем теперь значение плотности $\sigma_g^{(0)}$ в функции от моментов D_{ij} или, точнее, от их производных

$$B_{ij} = \frac{d^3}{d\tau^3} D_{ij}(\tau). \quad (38)$$

Полагая

$$B_i = n_j B_{ij}, \quad B = n_i n_j B_{ij}, \quad (39)$$

легко получим

$$\begin{aligned} \dot{f}^{ij} &= B_{ij}, \quad \dot{f}^{0i} = B_i, \quad \dot{f}^{00} = B, \\ \dot{f}_{ij} &= B_{ij}, \quad \dot{f}_{0i} = -B_i, \quad \dot{f}_{00} = B, \\ \dot{f}_0^0 &= B, \quad \dot{f}_i^j = -B_{ij}, \quad \dot{f}_i^i = -(B_{11} + B_{22} + B_{33}) = 0. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в (33), находим

$$\sigma_g^{(0)} = \frac{\gamma}{8\pi c^6} \left(\frac{1}{2} B^2 - 2B_i B_i + B_{ij} B_{ij} \right). \quad (40)$$

Если гравитационная волна распространяется, например, в направлении оси x^1 , т. е. $n_1 = 1$, $n_2 = n_3 = 0$,

то из этой формулы следует

$$\sigma_g^{(0)} = \frac{\gamma}{8\pi c^6} \left[\frac{1}{2} (B_{22} - B_{33})^2 + 2B_{23}^2 \right],$$

откуда видно, что гравитационные волны являются поперечными.

Возвратимся теперь к законам сохранения массы и количества движения. С обозначениями (12), (13) выражения (7), (8) переписываются в виде

$$\frac{d\tilde{M}}{dt} = -c^3 \int n_k U^{0k} r^2 d\omega, \quad \frac{d\tilde{P}^i}{dt} = -c^3 \int n_k U^{ik} r^2 d\omega,$$

где $d\omega$ — элемент телесного угла. Для величины $U^{\mu\nu}$ выше уже было найдено выражение

$$U^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2} \sigma k^\mu k^\nu,$$

откуда

$$U^{0k} = \frac{\sigma_0(\tau, \mathbf{n})}{c^4 r^2} n_k, \quad U^{ik} = \frac{\sigma_0(\tau, \mathbf{n})}{c^4 r^2} n_i n_k.$$

Поэтому

$$\frac{d\tilde{M}}{dt} = -\frac{1}{c} \int \sigma_0(\tau, \mathbf{n}) d\omega, \quad (41)$$

$$\frac{d\tilde{P}^{(i)}}{dt} = -\frac{1}{c} \int n_i \sigma_0(\tau, \mathbf{n}) d\omega. \quad (42)$$

Так как σ_0 является четной функцией от \mathbf{n} , то последний интеграл обращается в нуль, т. е. количество движения сохраняется при излучении. Для подсчета потери массы при гравитационном излучении надо подставить в (41) значение $\sigma_g^{(0)}$, определяемое формулой (40). Так как

$$\frac{1}{4\pi} \int n_i n_k d\omega = \frac{1}{3} \delta_{ik},$$

$$\frac{1}{4\pi} \int n_i n_k n_l n_m d\omega = \frac{1}{15} (\delta_{ik} \delta_{lm} + \delta_{il} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kl}),$$

то

$$\frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{1}{2} B^2 - 2B_i B_i + B_{ik} B_{ik} \right) d\omega = \frac{2}{5} B_{ij} B_{ij},$$

и поэтому

$$\frac{d\tilde{M}}{dt} = - \frac{\gamma}{5c^7} B_{ij}B_{ij}. \quad (43)$$

Обычно принято подсчитывать не потерю массы, а потерю энергии \tilde{W} . Эта величина дается выражением

$$\frac{d\tilde{W}}{dt} = - \frac{\gamma}{5c^5} B_{ij}B_{ij}. \quad (44)$$

Для Солнца оказывается, что потеря массы вещества при гравитационном излучении составляет всего $5 \cdot 10^{-12}$ г/сек.

Применим формулу (44) для подсчета потери энергии в задаче двух тел (двойная звезда). Предполагая, что движение происходит в плоскости $z = 0$ для координат масс m_1 и m_2 , имеем

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{m_2}{M} r \cos V, & x_2 &= \frac{m_1}{M} r \cos V, \\ y_1 &= -\frac{m_2}{M} r \sin V, & y_2 &= \frac{m_1}{M} r \sin V, \end{aligned}$$

где M — сумма масс m_1 и m_2 , r , V — радиус-вектор и истинная аномалия в относительном движении. По формуле (36)

$$D_{11} = \sum_{i=1}^2 m_i \left(x_i^2 - \frac{1}{3} r_i^2 \right) = \frac{m_1 m_2}{M} r^2 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cos 2V \right),$$

$$D_{22} = \sum_{i=1}^2 m_i \left(y_i^2 - \frac{1}{3} r_i^2 \right) = \frac{m_1 m_2}{M} r^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cos 2V \right),$$

$$D_{33} = -\frac{1}{3} \sum_{i=1}^2 m_i r_i^2 = -\frac{1}{3} \frac{m_1 m_2}{M} r^2,$$

$$D_{12} = \sum_{i=1}^2 m_i x_i y_i = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{M} r^2 \sin 2V.$$

В результате дифференцирования этих выражений находим

$$B_{11} = \frac{m_1 m_2}{M} \frac{n^3 a^4}{r^2 \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{13}{6} e \sin V + 4 \sin 2V + \frac{3}{2} e \sin 3V \right),$$

$$B_{22} = -\frac{m_1 m_2}{M} \frac{n^3 a^4}{r^2 \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{17}{6} e \sin V + 4 \sin 2V + \frac{3}{2} e \sin 3V \right),$$

$$B_{33} = \frac{m_1 m_2}{M} \frac{n^3 a^4}{r^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{2}{3} e \sin V,$$

$$B_{13} = -\frac{m_1 m_2}{M} \frac{n^3 a^4}{r^2 \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{5}{2} e \cos V + 4 \cos 2V + \frac{3}{2} e \cos 3V \right),$$

так что

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{W}}{dt} &= -\frac{\gamma}{5c^5} (B_{11}^2 + B_{22}^2 + B_{33}^2 + 2B_{12}^2) = \\ &= -\frac{\gamma}{5c^5} \left(\frac{m_1 m_2}{M} \right)^2 \frac{n^6 a^8}{r^4 (1-e^2)} \left(32 + \frac{52}{3} e^2 + 64e \cos V + \right. \\ &\quad \left. + \frac{44}{3} e^2 \cos 2V \right). \quad (45) \end{aligned}$$

Используя значения коэффициентов Ганзепе

$$X_0^{-4,0} = \left(1 + \frac{1}{2} e^2 \right) (1 - e^2)^{-5/2}, \quad X_0^{-4,1} = e (1 - e^2)^{-5/2},$$

$$X_0^{-4,2} = \frac{1}{4} e^2 (1 - e^2)^{-5/2},$$

получаем для осредненного значения потери энергии при движении по эллиптической орбите

$$\left[\frac{d\tilde{W}}{dt} \right] = -\frac{32}{5} \frac{\gamma}{c^5} \left(\frac{m_1 m_2}{M} \right)^2 \frac{n^6 a^4}{(1-e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right). \quad (46)$$

Применение к (45) разложений (19) гл. 1 позволяет легко найти тригонометрическое разложение величины $d\tilde{W}/dt$. В другой форме соответствующие результаты приведены в книге Я. Б. Зельдовича и И. Д. Новикова (1967).

Так как полная энергия задачи двух тел связана с большой полуосью соотношением

$$\tilde{W} = -\frac{\gamma m_1 m_2}{2a},$$

то, как следует из (46), гравитационное излучение приводит к уменьшению большой полуоси со скоростью

$$\dot{a} = -\frac{64}{5} \frac{\gamma^3 m_1 m_2 M}{c^5 a^3 (1-e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right). \quad (47)$$

Надо сказать, что с точки зрения небесной механики более последовательный путь вывода вариации a состоит в составлении уравнений движения задачи двух тел с учетом гравитационного излучения и в дальнейшем решении этих уравнений. Примерно такой путь был использован в работе (Infeld, Michalska-Trautman, 1969) и привел к тому же результату. Аналогичный метод, но в применении к уравнениям релятивистской гидродинамики, развит в работе (Chandrasekhar, Esposito, 1970). Наконец, следует еще раз отметить обзорную работу (Tonnelat, 1969), отражающую различные подходы к решению проблемы излучения и содержащую обширную библиографию.

Возвратимся к формуле (47). Вековое изменение a влечет за собой вековое изменение периода обращения тел. В принципе наблюдения двойных звезд должны позволить проверить этот релятивистский эффект. Правда, сейчас периоды обращения в двойных звездных системах известны в лучшем случае с 8 десятичными знаками, а релятивистский эффект сказывается лишь на 9—10 знаке. Однако, как уже указывалось, релятивистские эффекты, связанные с излучением, настолько интересны с теоретической точки зрения, что их дальнейшее изучение, несомненно, целесообразно.

В заключение надо добавить, что сейчас лабораторные опыты, проведенные Вебером, привели к первым результатам по экспериментальному обнаружению гравитационных волн. Конечно, подобные эксперименты являются чрезвычайно тонкими и потребуются еще немало времени, чтобы подтвердить и дополнить эти результаты.

§ 1. Статические решения однородной и изотропной Вселенной

Хотя в прикладных задачах релятивистской небесной механики можно отвлечься от космологического фона и рассматривать Солнечную систему как изолированную, космологические вопросы настолько важны для современной астрономии, что и небесная механика не может оставаться в стороне от этой основной области применения общей теории относительности. В этой главе будут в кратком виде изложены основные результаты, полученные для моделей однородной и изотропной Вселенной (Tolman, 1934). Новейшие проблемы космологии рассмотрены, например, в обзоре А. Л. Зельманова (1967).

Метрика однородной и изотропной Вселенной в сферических координатах определяется выражением

$$ds^2 = e^{\nu} dt^2 - e^{\lambda} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (1)$$

где ν и λ — функции лишь радиальной координаты r . Скорость света c здесь для упрощения записи положена равной единице. Этой метрической форме соответствуют следующие компоненты тензора Риччи:

$$R_{00} = e^{\nu-\lambda} \left(-\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'}{r} \right),$$

$$R_{11} = \frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'}{r},$$

$$R_{22} = e^{-\lambda} \left[1 + \frac{r}{2} (\nu' - \lambda') \right] - 1,$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta,$$

в то время как все остальные компоненты равны нулю. Штрих здесь обозначает дифференцирование по r .

В теории однородной и изотропной Вселенной вещество предполагается распределенным непрерывно и равномерно с плотностью ρ и давлением p . Тензор масс такого распределения будет

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + p) \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} - pg^{\alpha\beta}.$$

В силу отсутствия перемещения частиц вещества

$$\frac{dx^i}{ds} = 0$$

и

$$\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = e^{-\nu}.$$

Для ковариантных компонент тензора масс имеем

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} - pg_{\mu\nu}$$

или

$$T_{00} = \rho e^\nu, \quad T_{11} = pe^\lambda, \quad T_{22} = pr^2, \quad T_{33} = T_{22} \sin^2 \theta,$$

а инвариант тензора масс будет

$$T = g_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = \rho - 3p.$$

Уравнения поля с космологической постоянной Λ имеют вид

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}, \quad (2)$$

или так как $R = \kappa T + 4\Lambda$, то

$$R_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}^* + \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (3)$$

где

$$T_{\mu\nu}^* = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu}.$$

Для компонент тензора $T_{\mu\nu}^*$ получаем

$$\begin{aligned} T_{00}^* &= \frac{1}{2} (\rho + 3p) e^\nu, & T_{11}^* &= \frac{1}{2} (\rho - p) e^\lambda, \\ T_{22}^* &= \frac{1}{2} (\rho - p) r^2, & T_{33}^* &= T_{22}^* \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Используя выписанные значения компонент тензора Риччи и тензора $T_{\mu\nu}^*$, находим три независимых уравнения поля:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{v''}{2} + \frac{v'\lambda'}{4} - \frac{v'^2}{4} - \frac{v'}{r} &= -\frac{\kappa}{2}(\rho + 3p)e^\lambda + \Lambda e^\lambda, \\ \frac{v''}{2} - \frac{v'\lambda'}{4} + \frac{v'^2}{4} - \frac{\lambda'}{r} &= -\frac{\kappa}{2}(\rho - p)e^\lambda - \Lambda e^\lambda, \\ \frac{1}{r^2} + \frac{v' - \lambda'}{2r} - \frac{e^\lambda}{r^2} &= -\frac{\kappa}{2}(\rho - p)e^\lambda - \Lambda e^\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Складывая первые два уравнения и преобразуя третье уравнение, будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \lambda' + v' &= \kappa(\rho + p)e^{\lambda r}, \\ \lambda' - v' &= \kappa(\rho - p)e^{\lambda r} + \frac{2}{r} - \frac{2}{r}e^\lambda + 2\Lambda e^{\lambda r}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

откуда

$$\lambda' = \kappa r e^{\lambda r} + \frac{1}{r} - \frac{e^\lambda}{r} + \Lambda e^{\lambda r}, \quad (6)$$

$$v' = \kappa r e^{\lambda r} - \frac{1}{r} + \frac{e^\lambda}{r} - \Lambda e^{\lambda r}. \quad (7)$$

Дифференцирование (7) с использованием (6) дает далее

$$v'' = \frac{2}{r^2} - \frac{2e^\lambda}{r^2} + \frac{\lambda' + v'}{r} + \lambda'v'. \quad (8)$$

Приравнивание друг другу левых частей второго и третьего уравнений (4) с учетом (8) приводит к соотношению

$$v'(\lambda' + v') = 0 \quad (9)$$

или в силу первого из уравнений (5)

$$v'(\rho + p) = 0. \quad (10)$$

Допустим сначала, что космологическая постоянная Λ равна нулю. Из условия (10) следует, что или $\rho = p = 0$ или $v' = 0$. Но в последнем случае при $\Lambda = 0$ из первого из уравнений (4) все равно следует $\rho = p = 0$. Решение $\rho = p = 0$ является решением Шварцшильда, не представляющим интереса для космологической проблемы.

Таким образом, уравнения поля без космологической постоянной при естественных условиях $\rho > 0$, $p \geq 0$ не допускают статических решений. Исторически это и послужило основанием для введения космологического члена в уравнения поля.

Возвратимся к уравнениям поля с $\Lambda \neq 0$. Условие (10) означает осуществление одного из следующих трех случаев:

1. $v' = 0$, $\rho + p > 0$,
2. $\rho = p = 0$, $v' \neq 0$,
3. $\rho = p = 0$, $v' = 0$.

Модель, соответствующая первому случаю, носит название мира Эйнштейна. В этом случае из (7) и первого из уравнений (4) следует

$$e^\lambda = \frac{1}{1 - \Lambda r^2 + \kappa p r^2}, \quad (11)$$

$$\Lambda = \frac{\kappa}{2} (\rho + 3p) > 0. \quad (12)$$

Вводя вспомогательную постоянную

$$R^2 = \frac{1}{\Lambda - \kappa p} = \frac{1}{\frac{\kappa}{2} (\rho + p)} > 0, \quad (13)$$

перепишем (11) в виде

$$e^\lambda = \frac{1}{1 - \frac{r^2}{R^2}}. \quad (14)$$

Полагая теперь $v = 0$ (что не ограничивает общности), получим выражение метрики для мира Эйнштейна в виде

$$ds^2 = dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{R^2}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (15)$$

или после введения новой переменной ψ вместо r :

$$r = R \sin \psi, \quad (16)$$

в виде

$$ds^2 = dt^2 - R^2 [d\psi^2 + \sin^2 \psi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (17)$$

Модель, соответствующая второму случаю, называется миром де Ситтера. В этом случае $\lambda' = -\nu'$, поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $\lambda = -\nu$, и тогда интегрирование уравнения (6) или (7) дает

$$e^\nu = e^{-\lambda} = 1 - \frac{1}{3} \Lambda r^2 - \frac{2\mu}{r}, \quad (18)$$

где μ — произвольная постоянная. Отсюда метрическая форма имеет вид

$$ds^2 = \left(1 - \frac{1}{3} \Lambda r^2 - \frac{2\mu}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{1}{3} \Lambda r^2 - \frac{2\mu}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (19)$$

и соответствует решению Шварцшильда уравнений поля с космологической постоянной для одного сферического тела с гравитационным радиусом μ . Мир де Ситтера получается отсюда при $\mu = 0$ и определяется метрикой

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{R^2}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (20)$$

где

$$R^2 = \frac{3}{\Lambda}. \quad (21)$$

Наконец, последний из случаев, удовлетворяющих условию (10), влечет за собой условия $\lambda = \nu = 0$, $\Lambda = 0$ и соответствует плоскому миру Минковского

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Этот случай является тривиальным и не представляет интереса для космологии.

§ 2. Мир Эйнштейна и мир де Ситтера

Рассмотрим теперь более подробно свойства моделей Вселенной предыдущего параграфа.

Пространственная часть мира Эйнштейна в соответствии с (15) и (17) представляет собой трехмерную

поверхность с метрикой

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{R^2}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (22)$$

или

$$d\sigma^2 = R^2 [d\psi^2 + \sin^2 \psi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (23)$$

Ее можно рассматривать как погруженную в четырехмерное евклидово пространство. Действительно, если ввести координаты:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= R \cos \psi, \\ x_2 &= R \sin \psi \cos \theta, \\ x_3 &= R \sin \psi \sin \theta \cos \varphi, \\ x_4 &= R \sin \psi \sin \theta \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

($0 \leq \psi, \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$),

так что

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = R^2, \quad (25)$$

то

$$d\sigma^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$$

или после исключения dx_4

$$d\sigma^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{R^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}. \quad (26)$$

Таким образом, пространственная часть мира Эйнштейна представляет собой сферическое или эллиптическое пространство постоянной положительной кривизны (пространство Римана, § 6, гл. 2). Объем сферического пространства равен

$$V = R^3 \int_{\psi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin^2 \psi \sin \theta d\psi d\theta d\varphi = 2\pi^2 R^3, \quad (27)$$

а длина экватора, т. е. наибольшее возможное расстояние в этом пространстве, составляет

$$l = 2\pi R. \quad (28)$$

Для эллиптического пространства объем и максимально возможное расстояние, естественно, вдвое меньше.

Поскольку ось времени t в мире Эйнштейна не ограничена, то сам мир Эйнштейна можно трактовать как цилиндрический четырехмерный мир в пятимерном евклидовом пространстве.

Плотность вещества ρ и давление p в мире Эйнштейна выражаются при помощи (12) и (13) через R^2 и Λ . В частности, для $p = 0$

$$R^2 = \frac{1}{\Lambda}, \quad \rho = \frac{2\Lambda}{\kappa}, \quad V = 2\pi^2 \Lambda^{-1/2} \quad (29)$$

и полная масса вещества в мире будет

$$M = \frac{4\pi^2}{\kappa} \Lambda^{-1/2}. \quad (30)$$

Мир Эйнштейна является полностью статичным. Если в начальный момент какая-либо частица в мире имела нулевую скорость $dx^i/ds = 0$, то в силу $\Gamma_{00}^i = 0$ из уравнения геодезической сейчас же следует, что ускорение частицы также будет равно нулю.

Перейдем теперь к рассмотрению мира де Ситтера, определяемого метрической формой (20). Если космологическая постоянная $\Lambda > 0$, то $R^2 > 0$ и подстановка (16) дает

$$ds^2 = \cos^2 \psi dt^2 - R^2 [d\psi^2 + \sin^2 \psi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (31)$$

Сравнение с (17) показывает, что в этом случае пространственная часть мира де Ситтера, как и для мира Эйнштейна, представляет собой сферическое или эллиптическое пространство постоянной положительной кривизны.

Если же $\Lambda < 0$, то и $R^2 < 0$, и подстановка

$$r = \sqrt{-1} R \operatorname{sh} \chi \quad (0 \leq \chi < \infty)$$

переводит (20) в

$$ds^2 = \operatorname{ch}^2 \chi dt^2 - (-R^2) [d\chi^2 + \operatorname{sh}^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (32)$$

Здесь пространственная часть представляет собой гиперболическое пространство постоянной отрицательной кривизны (пространство Лобачевского, § 6 гл. 2). Объем этой пространственной части — бесконечно большой.

Полагая для определенности $R^2 > 0$ и вводя координаты:

$$\begin{cases} x_1 = R \sin \psi \cos \theta, \\ x_2 = R \sin \psi \sin \theta \cos \varphi, \\ x_3 = R \sin \psi \sin \theta \sin \varphi, \\ x_4 = R \cos \psi \operatorname{ch} \frac{t}{R}, \\ x_5 = R \cos \psi \operatorname{sh} \frac{t}{R} \end{cases}$$

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 = R^2),$$

получим

$$ds^2 = -dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 - dx_4^2 + dx_5^2. \quad (33)$$

Это показывает, что мир де Ситтера можно трактовать как гиперболический мир, реализуемый геометрией четырехмерного гиперboloида в пятимерном евклидовом пространстве. С другой стороны, если положить

$$\begin{aligned} z_i &= \sqrt{-1} x_i \quad (i = 1, \dots, 4), \\ z_5 &= x_5 \\ (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 &= -R^2), \end{aligned}$$

то метрическая форма станет

$$ds^2 = dz_1^2 + dz_2^2 + dz_3^2 + dz_4^2 + dz_5^2, \quad (34)$$

что позволяет интерпретировать мир де Ситтера и как сферический мир, реализуемый геометрией четырехмерной псевдосферы в пятимерном евклидовом пространстве.

Надо отметить еще, что при преобразовании

$$\left. \begin{aligned} \tilde{r} &= \frac{r}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}} \exp\left(-\frac{t}{R}\right), \\ \tilde{t} &= t + \frac{1}{2} R \ln\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

метрика мира де Ситтера теряет статическую форму и переходит в

$$ds^2 = d\tilde{t}^2 - e^{2\frac{\tilde{t}}{R}} (d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\theta^2 + \tilde{r}^2 \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (36)$$

Рассмотрим теперь движение материальных частиц и распространение света в мире де Ситтера. Предварительно снова используем решение Шварцшильда (19) для уравнений поля с космологической постоянной. Восстанавливая в явном виде скорость света c и используя (21), перепишем (19) в виде

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} - \frac{2\mu}{r} \right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{R^2} - \frac{2\mu}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (37)$$

Ясно, что действительное движение может происходить лишь в области

$$2\mu \leq r \leq R, \quad (38)$$

т. е. является ограниченным как сверху, так и снизу.

Исследование траектории произведем по образцу аналогичной задачи без космологической постоянной (§ 2 гл. 5). Будем исходить из функции Лагранжа четырехмерного движения по геодезической. Эта функция получается делением правой части соотношения (37) на ds^2 , и если, как обычно, за плоскость движения принята плоскость $\theta = \pi/2$, то имеют место три первых интеграла:

$$\left(1 - \frac{r^2}{R^2} - \frac{2\mu}{r} \right) c \frac{dt}{ds} = f \quad (f = \text{const}), \quad (39)$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = g \quad (g = \text{const}), \quad (40)$$

$$\frac{f^2}{1 - \frac{r^2}{R^2} - \frac{2\mu}{r}} - \frac{g^2}{r^2} - \frac{1}{1 - \frac{r^2}{R^2} - \frac{2\mu}{r}} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 = C, \quad (41)$$

причем постоянная C равна единице для материальной частицы и нулю — в случае распространения света. Ис-

ключая отсюда дифференциал ds , имеем

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} - \frac{2\mu}{r} \right) \frac{g}{f}, \quad (42)$$

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = c^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} - \frac{2\mu}{r} \right)^2 \times \\ \times \left[1 - \frac{1}{A} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} - \frac{2\mu}{r} \right) \left(B + \frac{1}{r^2} \right) \right], \quad (43)$$

где

$$A = \frac{f^2}{g^2}, \quad B = \frac{C}{g^2}.$$

Вводя

$$u = \frac{1}{r},$$

получаем из (42) и (43) дифференциальное уравнение траектории в виде

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = A - \left(1 - \frac{1}{R^2 u^2} - 2\mu u \right) (B + u^2) \quad (44)$$

или после дифференцирования

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = 3\mu u^2 + \mu B - \frac{B}{R^2 u^3}. \quad (45)$$

Для света $B = 0$, и, следовательно, траектория светового луча сохраняет ту же форму, что и в задаче Шварцшильда без космологической постоянной. Из (45) путем сравнения с уравнением Бине видно также, что член, обусловленный космологической постоянной, эквивалентен силе отталкивания, пропорциональной первой степени r .

Рассматривая теперь движение эллиптического типа с расстояниями в перигеентре $a(1 - e)$ и апоцентре $a(1 + e)$, запишем правую часть (44) в виде

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \frac{1}{u^2} \left[u - \frac{1}{a(1+e)} \right] \left[\frac{1}{a(1-e)} - u \right] \times \\ \times [\alpha + \beta u + (1 + \gamma) u^2 + \delta u^3]. \quad (46)$$

Почленное сравнение с (44) дает соотношения

$$\beta = 2\alpha a, \quad \gamma = -\frac{4\mu}{p}, \quad \delta = -2\mu$$

и

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{ap} + \frac{B}{R^2} &= 0, \\ \alpha a + \mu B &= \frac{1}{p} \left(1 - \frac{4\mu}{p} + \frac{\mu}{a} \right), \\ \left(1 - \frac{2a}{p} \right) \alpha - B + A &= -\frac{1}{ap} \left(1 - \frac{4\mu}{p} \right) - \frac{1}{R^2},\end{aligned}$$

где p — параметр орбиты. Из последних трех соотношений вытекает

$$\alpha = \frac{1 - \frac{4\mu}{p} + \frac{\mu}{a}}{pa - \frac{\mu}{a} R^2}.$$

Если теперь записать уравнение траектории в виде

$$u = \frac{1 + e \cos V}{p}, \quad (47)$$

то для истинной аномалии V имеем

$$\left(\frac{dV}{d\varphi} \right)^2 = 1 + \frac{\alpha}{u^2} + \frac{\beta}{u} + \gamma + \delta u$$

или приближенно

$$\frac{dV}{d\varphi} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{u^2} + \frac{\beta}{u} + \gamma + \delta u \right).$$

За один оборот приращение полярного угла φ составляет

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \int_0^{2\pi} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{u^2} + \frac{\beta}{u} + \gamma + \delta u \right) \right] dV = \\ &= 2\pi \left[1 - \frac{1}{2} \left(\alpha a^2 \sqrt{1-e^2} + \beta a \sqrt{1-e^2} + \gamma + \frac{\delta}{p} \right) \right], \quad (48)\end{aligned}$$

или после подстановки значений α , β , γ , δ будем иметь

$$\Delta\varphi = 2\pi \left(1 + \frac{3\mu}{p} + \frac{3}{2\sqrt{1-e^2}} \frac{1 - \frac{4\mu}{p} + \frac{\mu}{a}}{\frac{\mu R^2}{pa^2} - 1} \right). \quad (49)$$

Член $6\pi\mu/p$ снова дает шварцшильдовское смещение перигелия. В последнем члене в случае Солнечной системы можно в числителе пренебречь членами μ/p и μ/a по сравнению с единицей, а в знаменателе — пренебречь единицей. Тогда смещение перигелия за один оборот из-за наличия космологической постоянной $\Lambda = 3/R^2$ составит

$$\Delta\varphi = \frac{3c^2 T^2 \sqrt{1-e^2}}{4\pi R^3}, \quad (50)$$

где T — период обращения. Очевидно, что это смещение растет с увеличением расстояния планеты от Солнца. Из сравнения параметров мира Эйнштейна с наблюдательными данными следует, что $\Lambda \approx 10^{-57} \text{ см}^{-2}$ (поскольку плотность $\rho \sim 10^{-30} \text{ г/см}^3$). Для мира де Ситтера из сравнения с законом Хаббла разбегания галактик следует $\Lambda \approx 10^{-54} \text{ см}^{-2}$ ($R \sim 1,7 \cdot 10^{27} \text{ см}$). Эта оценка показывает, что даже для орбиты Плутона влияние Λ -члена совершенно ничтожно.

Положим теперь $\mu = 0$ и рассмотрим движение непосредственно в мире де Ситтера. При $r = R$ соотношения (42) и (43) показывают, что $\dot{r} = \dot{\varphi} = 0$, т. е. на горизонте $r = R$ движения нет. Дифференцирование этих выражений дает

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2\dot{r}}{r^3} \frac{cg}{f}, \quad (51)$$

$$\ddot{r} = -\frac{2r\dot{r}^2}{R^2\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)} + \frac{c^2}{f^2} \left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)^2 \left(\frac{r}{R^2} + \frac{g^2}{r^3}\right). \quad (52)$$

Если в начальный момент $\dot{r} = 0$, то всегда в дальнейшем будет $\dot{r} > 0$, т. е. частица будет удаляться от центра. Только частица, покоящаяся в центре ($r = 0$, $g = 0$), не испытывает ускорения.

При распространении света в радиальном направлении $A = \infty$ и из (43) следует

$$\dot{r} = \pm c \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right).$$

Чтобы пройти расстояние от $r = 0$ до $r = R$, нужно бесконечно большое время (по часам в центре мира $r = 0$). Таким образом, значение $r = R$ действительно является

горизонтом мира де Ситтера, никакие сигналы оттуда не поступают. Но при изменении центра мира будет и другой горизонт.

Рассмотрим теперь эффект Допплера в мире де Ситтера. Свет, испускаемый в момент t_1 с частицы на расстоянии r от центра, придет в центр в момент

$$t_2 = t_1 + \frac{1}{c} \int_0^r \frac{dr}{1 - \frac{r^2}{R^2}}.$$

Поэтому длительность периодических процессов на расстоянии r и в центре мира будет связана зависимостью

$$\delta t_2 = \left(1 + \frac{1}{1 - \frac{r^2}{R^2}} \frac{\dot{r}}{c} \right) \delta t_1,$$

где \dot{r} — радиальная скорость частицы в момент испускания светового сигнала. Собственное время движущейся частицы будет

$$\delta s_1 = \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \frac{c}{f} \delta t_1,$$

а собственное время наблюдателя в начале координат будет

$$\delta s_2 = c \delta t_2.$$

Так как величина δs_1 пропорциональна длине испускаемой световой волны λ , а величина δs_2 пропорциональна принимаемой длине волны $\lambda + \delta \lambda$, то

$$\frac{\lambda + \delta \lambda}{\lambda} = \frac{\delta s_2}{\delta s_1} = \frac{f}{1 - \frac{r^2}{R^2}} + \frac{f}{\left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^2} \frac{\dot{r}}{c}. \quad (53)$$

Но $f > 0$, поэтому преобладающим случаем в мире де Ситтера является красное смещение спектральных линий.

Заканчивая обзор статических решений уравнений поля, надо отметить, что и мир Эйнштейна, и мир де Ситтера являются очень важными предельными случаями нестатических решений, рассматриваемых ниже. По своим параметрам мир Эйнштейна не противоречит современ-

ным данным о распределении вещества во Вселенной, но в нем отсутствует принципиальная черта развития Вселенной — ее расширение, проявляющееся в наличии красного смещения. В мире де Ситтера есть красное смещение, но этот мир — «пустой», в нем нет материи. Поэтому обе эти модели неудовлетворительны, и более близкими к реальности являются нестатические модели.

§ 3. Нестатические решения однородной и изотропной Вселенной

Нестатические решения однородной и изотропной Вселенной проще всего изучать в полугеодезической системе координат (§ 8 гл. 2), где метрическая форма имеет вид

$$ds^2 = dt^2 - R^2 [d\psi^2 + \sin^2 \psi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] \quad (54)$$

с функцией $R(t)$, определяемой из уравнений поля. Полагая

$$R^2 = R_0^2 e^{g(t)} \quad (R_0 = \text{const}) \quad (55)$$

и вводя вместо ψ новую переменную r :

$$R_0 \sin \psi = \frac{r}{1 + \frac{r^2}{4R_0^2}}, \quad (56)$$

получаем

$$ds^2 = dt^2 - e^{g(t)} \frac{dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)}{\left(1 + \frac{r^2}{4R_0^2}\right)^2} \quad (57)$$

или в прямоугольных координатах

$$ds^2 = dt^2 - e^{g(t)} \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\left(1 + \frac{r^2}{4R_0^2}\right)^2}. \quad (58)$$

В соотношениях (57) и (58) часто вводят еще обозначение

$$k = \frac{1}{R_0^2}. \quad (59)$$

В зависимости от знака R_0^2 различают три случая:

1. $R_0^2 > 0$ (что может быть сведено к $k = +1$) — случай замкнутого мира в виде сферического или эллиптического пространства с положительной кривизной.

2. $R_0^2 = \infty$ (или $k = 0$) — случай открытого мира в виде евклидова пространства. В этом случае форма (54) становится неудобной и надо пользоваться метрической формой (57) или (58).

3. $R_0^2 < 0$ (или $k = -1$) — случай открытого мира в виде гиперболического пространства с отрицательной кривизной.

Во всех трех случаях пространственная часть представляет собой пространство постоянной кривизны (постоянной во всех точках, но меняющейся со временем, так как $R = R(t)$). Хотя при $R_0^2 = \infty$ кривизна постоянна во времени, но и в этом случае расстояние между точками с фиксированными пространственными координатами является функцией времени.

Определим теперь функцию R из уравнений поля. Используя форму (54) и вводя трехмерный метрический тензор γ_{ij} с компонентами

$\gamma_{11} = 1$, $\gamma_{22} = \sin^2 \psi$, $\gamma_{33} = \sin^2 \psi \sin^2 \theta$, $\gamma_{ij} = 0$ ($i \neq j$), получаем

$$g_{ij} = -R^2 \gamma_{ij}, \quad g^{ij} = -\frac{1}{R^2} \gamma_{ij}.$$

Отсюда для символов Кристоффеля имеем

$$\Gamma_{00}^0 = 0, \quad \Gamma_{0,i}^0 = 0, \quad \Gamma_{ij}^0 = R \dot{R} \gamma_{ij}, \quad \Gamma_{00}^k = 0, \quad \Gamma_{0i}^k = \frac{\dot{R}}{R} \delta_i^k, \\ \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \gamma^{kl} \left(\frac{\partial \gamma_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial \gamma_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^l} \right).$$

Компоненты тензора Риччи будут

$$R_{00} = 3 \frac{R}{R}, \quad R_{0i} = 0, \quad R_{ij} = -(R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2) \gamma_{ij}.$$

Тензор масс записывается в том же виде, что в § 1, с условиями

$$\frac{dx^i}{ds} = 0, \quad \frac{dt}{ds} = 1,$$

показывающими, что система координат является сопутствующей, т. е. движущейся вместе с веществом. Для компонент тензора масс имеем

$$T_{00} = \rho, \quad T_{0i} = 0, \quad T_{ij} = pR^2\gamma_{ij},$$

а инвариант этого тензора по-прежнему равен

$$T = \rho - 3p.$$

Уравнения поля (3) сводятся при этих значениях к двум следующим:

$$\left. \begin{aligned} 3\frac{\ddot{R}}{R} &= \Lambda - \frac{\kappa}{2}(\rho + 3p), \\ R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2 &= \left[\frac{\kappa}{2}(\rho - p) + \Lambda \right] R^2 \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

или при замене (55)

$$\left. \begin{aligned} \frac{3}{2}\ddot{g} + \frac{3}{4}\dot{g}^2 &= -\frac{\kappa}{2}(\rho + 3p) + \Lambda, \\ \frac{1}{2}\ddot{g} + \frac{3}{4}\dot{g}^2 + 2R_0^{-2}e^{-g} &= \frac{\kappa}{2}(\rho - p) + \Lambda. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Эти уравнения, разрешенные относительно p и ρ , дают

$$\kappa p = -R_0^{-2}e^{-g} - \frac{3}{4}\dot{g}^2 - \ddot{g} + \Lambda, \quad (62)$$

$$\kappa \rho = 3R_0^{-2}e^{-g} + \frac{3}{4}\dot{g}^2 - \Lambda. \quad (63)$$

Последнее соотношение эквивалентно следующему:

$$R^2 = \frac{1}{3}\kappa \rho R^2 + \frac{1}{3}\Lambda R^2 - 1. \quad (64)$$

Отметим, прежде всего, два частных решения, рассмотренных в предыдущих параграфах. Случай

$$g = 0, \quad \Lambda = \frac{\kappa}{2}(\rho + 3p), \quad R_0^{-2} = \frac{\kappa}{2}(\rho + p)$$

соответствует миру Эйнштейна. Случай

$$\rho = p = 0, \quad R_0^2 = \infty, \quad g = 2 \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda} t$$

дает, как показывает сравнение с (36), мир де Ситтера. Важным частным случаем являются также модели Вселенной с постоянной массой. Предварительно заметим, что так как в силу (62) и (63)

$$\kappa(\rho + p) = 2R_0^{-2}e^{-g} - \ddot{g}, \quad (65)$$

то дифференцирование (63) дает

$$\dot{\rho} = -\frac{3}{2}\dot{g}(\rho + p), \quad (66)$$

откуда

$$\frac{d}{dt}(\rho e^{\frac{3}{2}g}) + p \frac{d}{dt}(e^{\frac{3}{2}g}) = 0. \quad (67)$$

Пусть, далее, материя Вселенной состоит из вещества и радиации, так что в выражениях плотности и давления можно выделить соответствующие части

$$\rho = \rho_m + \rho_r, \quad p = p_m + p_r. \quad (68)$$

При этом можно считать, что $p_m = 0$ (давление вещества мало), $\rho_r = 3p_r$ (уравнение состояния). Поэтому плотность вещества $\rho_m = \rho - 3p$ удовлетворяет соотношению

$$\kappa\rho_m = 6R_0^{-2}e^{-g} + 3\dot{g}^2 + 3\ddot{g} - 4\Lambda. \quad (69)$$

Если модель принадлежит к плоскому или гиперболическому типу, то ее пространственный объем и масса бесконечны. Если же модель — замкнутая, например, представляет собой сферическое пространство, то ее объем равен

$$V = 2\pi^2 R^3, \quad (70)$$

а масса —

$$M = 2\pi^2 R^3 \rho_m = 2\pi^2 \rho R^3 - 6\pi^2 p R^3. \quad (71)$$

Дифференцирование M по времени с использованием (67) дает

$$\dot{M} = -\frac{6\pi^2}{R} \frac{d}{dt}(pR^4). \quad (72)$$

При постоянной массе M должно быть

$$\rho_m = \frac{\alpha}{R^3}, \quad p = \frac{\beta}{R^4} \quad (\alpha, \beta = \text{const}), \quad (73)$$

откуда

$$\rho = \frac{\alpha}{R^3} + \frac{3\beta}{R^4}, \quad (74)$$

а радиус кривизны R определяется уравнением

$$\dot{R}^2 = \frac{\kappa\alpha}{3R} + \frac{\kappa\beta}{R^2} + \frac{1}{3}\Lambda R^2 - 1. \quad (75)$$

Это уравнение интегрируется в эллиптических функциях. Считая, что $\dot{R} > 0$, получаем расширяющуюся Вселенную, объем которой возрастает со временем, а масса остается постоянной. Решение существует и при $\Lambda = 0$. Решение, получаемое при частном значении $\beta = 0$, носит название модели Фридмана — Леметра.

Укажем теперь общий характер поведения функции $R(t)$. Рассмотрим сначала случай $R_0^2 > 0$ ($k = +1$). Тогда из (64) следует

$$\dot{R} = \pm R \sqrt{\frac{1}{3}(\Lambda - Q)}, \quad (76)$$

где

$$Q = \frac{3}{R^2} - \kappa\rho. \quad (77)$$

Используя соотношения (66) и (67), легко установить, что $Q \rightarrow -\infty$ при $R \rightarrow 0$, а затем с возрастанием R величина Q растет, достигая максимального значения

$$Q_{\max} = \Lambda_E = \frac{1}{R^2} + \kappa\rho > 0 \quad (78)$$

при

$$R^{-2} = \frac{\kappa}{2}(\rho + p). \quad (79)$$

При дальнейшем возрастании R функция Q стремится к нулю, переходя при этом в частных случаях еще через две экстремальные точки минимума и максимума. Зная поведение Q как функции R , нетрудно теперь составить представление о качественном поведении функции $\dot{R}(t)$.

Схематически график изменения $R(t)$ представлен на рис. 10.

При $\Lambda > \Lambda_E$ подкоренное выражение в (76) положительно и R непрерывно возрастает от значения $R = 0$ (тип M_1 развития Вселенной). Вселенная выходит из особого состояния с бесконечно большой скоростью \dot{R} , любое конечное значение R достигается в конечное время, но для достижения бесконечно большого значения R требуется бесконечное время.

При $\Lambda = \Lambda_E$ существует статическое решение — мир Эйнштейна, характеризующийся зависимостями

$$\kappa\rho_E = \Lambda_E - \frac{1}{R_E^2}, \quad \kappa\rho_E = \frac{3}{R_E^2} - \Lambda_E.$$

В этом случае существуют и два нестатических решения A_1 и A_2 . Решение A_1 асимптотически приближается к E

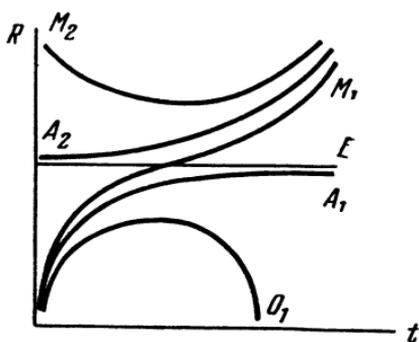


Рис. 10.

снизу, а решение A_2 развивается от E к бесконечно большому значению R . В решении A_2 отсутствует особая точка в начальный момент.

При $0 < \Lambda < \Lambda_E$ возможны два типа развития Вселенной. В первом решении радиус $R(t)$ от сжатия переходит к возрастанию (тип M_2). Во втором решении, когда начальное значение $R < R_E$, возрастание радиуса сменяется последующим сжатием (осциллирующая модель O_1).

Если же при этом функция Q имеет дополнительные минимум и максимум, то возможен другой осциллирующий тип O_2 между экстремальными значениями R , соответствующими минимуму и максимуму Q . Но при этом давление должно увеличиваться с возрастанием R , так что такое решение нужно рассматривать как чисто математическую возможность.

Наконец, при $\Lambda \leq 0$ возможен только осциллирующий тип O_1 .

При $k = 0$ и $k = -1$ вместо (76) удобнее исследовать эквивалентное уравнение

$$\frac{d}{dt} e^{\frac{1}{2}g} = \pm e^{\frac{1}{2}g} \sqrt{\frac{1}{3}(\Lambda - Q)}, \quad (80)$$

где на этот раз

$$Q = -\kappa\rho - 3\left(-\frac{1}{R_0^2}\right)e^{-g}. \quad (81)$$

С возрастанием $e^{g/2}$ от нуля до бесконечности функция Q монотонно возрастает от $-\infty$ до нуля. Здесь возможны лишь типы M_1 (при $\Lambda \geq 0$) и O_1 (при $\Lambda < 0$).

Остановимся несколько подробнее на моделях Вселенной с $\Lambda = 0$. Для закрытой модели O_1 , где $R_0^2 > 0$, будут выполняться условия (73), (74), и в частном случае $\beta = 0$ (отсутствие давления) уравнение (75) имеет решение в виде циклоиды

$$R = \frac{\kappa\alpha}{6}(1 - \cos \psi), \quad t = \frac{\kappa\alpha}{6}(\psi - \sin \psi). \quad (82)$$

Величина R здесь колеблется от $R = 0$ при $t = 0$ до $R = \kappa\alpha/3$ при $t = \pi\kappa\alpha/6$. При малых t радиус R возрастает пропорционально $t^{2/3}$.

При $R_0^2 = \infty$ имеет место плоская модель, называемая моделью Эйнштейна — де Ситтера. Для этой модели при $\rho = 0$ из (62) и (63) следует

$$e^{\frac{3}{4}g} = at + b, \quad (83)$$

где a и b — константы. Плотность ρ связана здесь с функцией $g(t)$ зависимостью

$$\frac{3}{4}\kappa\rho e^{\frac{3}{2}g} = a^2. \quad (84)$$

Наконец, для открытой модели гиперболического типа, когда $R_0^2 < 0$, решение имеет вид (82) при замене $\sin \psi$ и $\cos \psi$ на $\text{sh } \psi$ и $\text{ch } \psi$.

Рассмотрим теперь эффект Доплера для общей нестатической модели (57). Пусть по-прежнему наблюдатель находится в начале координат, а источник света — на

расстоянии r от начала. Радиальное распространение света происходит по закону

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{1}{2}g(t)} dt = \int_0^r \frac{dr}{1 + \frac{r^2}{4R_0^2}}, \quad (85)$$

где t_1 — время испускания сигнала, t_2 — время его приема. Отсюда вытекает приближенное соотношение

$$e^{-\frac{1}{2}g_2} \delta t_2 = e^{-\frac{1}{2}g_1} (1 + u_r) \delta t_1,$$

где g_1, g_2 — значения функции $g(t)$ в моменты t_1, t_2 , а u_r — радиальная скорость источника в момент t_1 :

$$u_r = \frac{e^{\frac{1}{2}g_1}}{1 + \frac{r^2}{4R_0^2}} \dot{r}.$$

Собственное время источника, движущегося со скоростью u , будет

$$\delta s_1 = \sqrt{1 - u^2} \delta t_1,$$

а собственное время наблюдателя — $\delta s_2 = \delta t_2$. Поэтому отношение принимаемой длины волны к испускаемой составит

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \frac{\delta s_2}{\delta s_1} = \frac{1 + u_r}{\sqrt{1 - u^2}} e^{\frac{1}{2}(g_2 - g_1)}.$$

Пренебрегая собственной скоростью источника, получаем отсюда

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = e^{\frac{1}{2}(g_2 - g_1)} = \frac{R_2}{R_1}$$

или

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{R_2 - R_1}{R_1}.$$

Здесь R_1 — радиус мира в момент испускания света, R_2 — в момент приема. Если за время $t_2 - t_1$ радиус R меняется

незначительно, то

$$R_1 = R, \quad R_2 = R + \dot{R} (t_2 - t_1) + \dots$$

и

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{\dot{R}}{R} (t_2 - t_1). \quad (86)$$

Найдем теперь собственное расстояние между наблюдателем и источником света. Элемент собственного расстояния равен

$$dl = \frac{e^{\frac{1}{2}g}}{1 + \frac{r^2}{4R_0^2}} dr,$$

и предполагая опять, что $g(t)$ меняется мало, получаем

$$l_{12} \approx e^{\frac{1}{2}g} \int_0^r \frac{dr}{1 + \frac{r^2}{4R_0^2}} = e^{\frac{1}{2}g} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{1}{2}g(t)} dt \approx t_2 - t_1. \quad (87)$$

Подставляя этот результат в (86), имеем окончательно

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = H l_{12}, \quad (88)$$

где

$$H = \frac{\dot{R}}{R}. \quad (89)$$

Полученное соотношение носит название закона Хаббла — красное смещение во Вселенной растет пропорционально расстоянию до источника излучения. Величина H , являющаяся функцией времени, имеет одно и то же значение во всех точках Вселенной и называется постоянной Хаббла.

Постоянная Хаббла является одной из важнейших наблюдательных характеристик современной внегалактической астрономии. Ее точное определение имеет большое значение для решения вопроса о модели мира, наиболее близкой к реальной Вселенной. В частности, для моделей

с $\Lambda = 0$ из (64) следует

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{3} \kappa \rho - H^2. \quad (90)$$

Значение плотности

$$\rho_k = \frac{3H^2}{\kappa} \approx 2 \cdot 10^{-29} \text{ г/см}^3 \quad (91)$$

является критическим для определения типа рассматриваемой модели. Если плотность $\rho > \rho_k$, то имеет место закрытая модель, случай $\rho = \rho_k$ соответствует плоской открытой модели, а $\rho < \rho_k$ — открытой модели гиперболического типа.

Важной наблюдательной характеристикой является также параметр ускорения

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -qH^2$$

или

$$q = \frac{\kappa}{6H^2} (\rho + 3p) - \frac{\Lambda}{3H^2}.$$

При $\Lambda = 0$ и $p = 0$ критическое значение $q = 1/2$ отделяет замкнутый мир ($q > 1/2$) от открытого мира ($0 < q \leq 1/2$).

Наблюдательные данные в настоящее время еще не позволяют сделать выбор в пользу той или иной модели. Надо лишь отметить, что модели с $\Lambda \neq 0$ являются более гибкими и предоставляют больше возможностей для объяснения наблюдаемых закономерностей, чем модели с $\Lambda = 0$. Например, при значении $\Lambda > 0$, соответствующем силе отталкивания, возможно существенное увеличение времени развития Вселенной за счет своеобразной «остановки», где притяжение и отталкивание уравновешивают друг друга в окрестности мира Эйнштейна и развитие Вселенной происходит чрезвычайно медленно (Kardashev, 1967).

Теоретические исследования в области релятивистской космологии сейчас ведутся главным образом в области исследования поведения Вселенной вблизи особенности $R = 0$ и изучения моделей неоднородной анизотропной Вселенной, где вся картина развития существенно усложняется.

В заключение надо отметить, что большой интерес представило бы рассмотрение задачи многих тел в той или иной космологической модели. К настоящему времени изучена лишь задача одного тела с расширяющейся Вселенной, причем наиболее полные результаты получены в работах Ярнефельта (Järnefelt, 1940, 1942). Эти работы показали, что расширение Вселенной не отражается на движении пробных частиц вокруг массивного тела, иными словами, не влияет практически на движение тел Солнечной системы. Тем не менее дальнейшее небесномеханическое исследование этого вопроса представляется заслуживающим внимания.

ЛИТЕРАТУРА

- А б д и л ь д и н. 1964. Некоторые следствия из теории тяготения Эйнштейна для космогонии Солнечной системы. Вестн. Ленингр. ун-та, Сер. матем., механ. и астрон., № 22, 19.
- А й т е к е е в а З. А., П е т р о в а Н. М. 1959. О системе сферически симметричных тел в общей теории относительности. Сб. «Исследование процессов переноса. Вопросы теории относительности» (Тр. Казах. ун-та), 209, Алма-Ата.
- А й т е к е е в а З. А. 1962. Система вращающихся тел произвольной формы в общей теории относительности. Тр. Ин-та ядерной физ. АН КазССР, 5, 164.
- Б о г о р о д с к и й А. Ф. 1962. Уравнения поля Эйнштейна и их применение в астрономии. Киев.
- Б р у м б е р г В. А. 1958. Релятивистские поправки в теории движения Луны. Бюлл. Ин-та теор. астрон. АН СССР, 6, 733.
- Б р у м б е р г В. А. 1968а. Уравнения вращательного движения планет в общей теории относительности. Астрон. ж., 45, 828.
- Б р у м б е р г В. А. 1968б. К интерпретации координат в задаче Шварцшильда. Астрон. ж., 45, 1110.
- Б р у м б е р г В. А. 1970. Взаимосвязь вращательного и поступательного движения планет в теории тяготения Эйнштейна. Бюлл. Ин-та теор. астрон. АН СССР, 12, 441.
- Г и н з б у р г В. Л. 1967. Космические исследования и теория относительности. Эйнштейновский сборник, 1967, М.
- З е л ь д о в и ч Я. Б., Н о в и к о в И. Д. 1967. Релятивистская астрофизика. М.
- З е л ь м а н о в А. Л. 1956. Хронометрические инварианты и сопутствующие координаты в общей теории относительности. Докл. АН СССР, 107, 815.
- З е л ь м а н о в А. Л. 1967. Космология. Сб. «Развитие астрономии в СССР». М.
- К у р м а к а е в З. Х. 1966. К вопросу о задаче двух вращающихся сферически симметричных тел в ОТО. Астрон. ж., 43, 1025.
- Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. 1962. Теория поля. Физматгиз. М.
- Р а ш е в с к и й П. К. 1953. Риманова геометрия и тензорный анализ. Гостехиздат, М. (2-е изд. 1964).
- С у б о т и н М. Ф. 1968. Введение в теоретическую астрономию, «Наука», М.
- Ф о к В. А. 1939. О движении конечных масс в общей теории относительности. Ж. эксп. и теор. физ., 9, 375.
- Ф о к В. А. 1955. Теория пространства, времени и тяготения. Гостехиздат. М. (2-е изд. 1961).

- Черный С. Д. 1949. Движение материальной точки под действием силы, сообщающей ей ускорение $-\mu_1 r^{-2} - 3\mu_2 r^{-4}$. Бюлл. Ин-та теор. астрон. АН СССР, 4, 287.
- Anderson J. D., Esposito P. B., Martin W., Muhleman D. O. 1970. Determination of Astrodynamical Constants and a Test of the General Relativistic Time Delay with S-Band Range and Doppler Data from Mariners 6 and 7. XIII-th Plenary Meeting of Cospar. Leningrad.
- Anderson J. D., Esposito P. B. 1970. Application of Spacecraft Tracking Data to Experimental General Relativity. AIAA Paper No. 70-1317.
- Aoki S. 1964. Note on Variability of the Time Standard Due to the Relativistic Effect. Astron. J., 69, 221.
- Ash M. E., Shapiro I. I., Smith W. B. 1967. Astronomical Constants and Planetary Ephemerides Deduced from Radar and Optical Observations. Astron. J., 72, 338.
- Baierlein R. 1967. Testing General Relativity with Laser Ranging to the Moon. Phys. Rev., 162, 1275.
- Bazanski S. 1962. The Equations of Motion and the Action Principle in General Relativity. «Recent Developments in General Relativity», 137, Pergamon Press.
- Bertotti B. 1954. On the Two-Body Problem in General Relativity. Nuovo Cim., 12, 226.
- Bogdan M., Plebanski J. 1962. A Study of Geodesic Motion in the Field of Schwarzschild's Solution. Acta Phys. Polon., 21, 239.
- Boyer R. H., Lindquist R. W. 1967. Maximal Analytic Extension of the Kerr Metric. J. Math. Phys., 8, 265.
- Brignan G. H. 1969. Possible Tests of General Relativity Conducted with a Jupiter Probe. Astronaut. Acta, 14, 151.
- Carmeli M. 1964. The EIH Equations of Motion up to the 9-th Order. Phys. Letters, 9, 132.
- Carmeli M. 1965. The Equations of Motion of Slowly Moving Particles in the General Theory of Relativity. Nuovo Cim., 37, 842.
- Chandrasekhar S. 1965. Post-Newtonian Equations of Hydrodynamics and the Stability of Gaseous Masses in General Relativity. Astroph. J., 142, 1488.
- Chandrasekhar S., Esposito F. P. 1970. The $2\frac{1}{2}$ -Post-Newtonian Equations of Hydrodynamics and Radiation Reaction in General Relativity. Astroph. J., 160, 153.
- Chazy J. 1928, 1930. La Théorie de la Relativité et la Mécanique Céleste. 1, 2. Paris.
- Clemence G. M. 1943. The Motion of Mercury 1765-1937. Astron. Papers Am. Ephemeris, 11, pt. 1.
- Clemence G. M. 1947. The Relativity Effect in Planetary Motion. Rev. Mod. Phys., 19, 361.
- Clemence G. M. 1949, 1961. Theory of Mars. Astron. Papers Am. Ephemeris, 11, pt. 2; 16, pt. 2.
- Clemence G. M. 1960. Controlled Experiments in Celestial Mechanics. Astron. J., 65, 272.
- Davidson W. 1967. Operational Identification of Schwarzschild Co-Ordinates. Nature, 216, 771.

- Deprit A., Delie A. 1963. Régularisation du Problème des Trois Corps. Arch. Ration. Mech. and Analysis, 12, 325.
- Dicke R. H., Goldenberg H. M.. 1967. Solar Oblateness and General Relativity. Phys. Rev. Letters, 18, 313.
- Duncombe R. L. 1958. Motion of Venus 1750—1949. Astron. Papers Am. Ephemeris, 16, pt. 1.
- Eckert W. J. 1965. On the Motions of the Perigee and Node and the Distribution of Mass in the Moon. Astron. J., 70, 787.
- Eddington A. S., Clark G. L. 1938. The Problem of n Bodies in General Relativity Theory. Proc. Roy. Soc., A 166, 465.
- Einstein A., Grommer J. 1927. Allgemeine Relativitätstheorie und Bewegungsgesetz. Sitzber. Preuss. Akad. Wiss., 1, 2.
- Einstein A., Infeld L., Hoffmann B. 1938. The Gravitational Equations and the Problem of Motion. Ann. Math., 39, 65.
- Einstein A., Infeld L. 1949. On the Motion of Particles in General Relativity Theory. Can. J. Math., 1, 209.
- Ferraz-Mello S. 1966. Recherches sur le Mouvement des Satellites Galiléens de Jupiter. Bull. Astron., (3), 1, 287.
- Gábos Z. 1960. Noi Contribuțiuni la Studiul Interacțiunii Gravitaționale a Două Sfere Rigide în Rotatie. Ann. Științ. Univ. Iași, (1) 6, 439.
- Gábos Z. 1961. Autoacțiunea Gravitațională a Sferei Rigide în Rotatie. *ibid.*, 7, 407.
- Gaposchkin E. M. 1966. Review of the Rotation of the Earth. Spec. Rept. Smithsonian Inst. Astrophys. Observ. No. 236, 143.
- Gaposchkin E. M., Wright J. P. 1969. Measurable Effect of General Relativity in Satellite Orbits. Nature, 221, 650.
- Haywood J. H. 1952. The Equations of Motion and Coordinate Condition in General Relativity. Proc. Phys. Soc., A 65, 170.
- Infeld L., Schild A. 1949. On the Motion of Test Particles in General Relativity. Rev. Mod. Phys., 21, 408.
- Infeld L. 1953. The Coordinate Conditions and the Equations of Motion. Can. J. Math., 5, 17.
- Infeld L. 1954. On the Motion of Bodies in General Relativity Theory. Acta Phys. Polonica, 13 187.
- Infeld L. 1957. Equations of Motion in General Relativity Theory and the Action Principle. Rev. Mod. Phys., 29, 398.
- Infeld L., Plebanski J. 1960. Motion and Relativity. Pergamon Press (русск. пер.: Л. Инфельд, Е. Плебаньски й. Движение и релятивизм, М., 1962).
- Infeld L., Michalska-Trautman R. 1969. The Two-Body Problem and Gravitational Radiation. Ann. Phys., 55, 561.
- Jarnagin M. P. 1965. Expansions in Elliptic Motion. Astron. Papers Am. Ephemeris, 18, 1.
- Järnefelt G. 1940. Zum Einkörperproblem in dem sich ausdehnenden Raume. Ann. Acad. Sci. Fennicae., Ser. A, No. 3.
- Järnefelt G. 1942. Das Einkörperproblem in dem sich ausdehnenden Raume der Einstein — de Sitter'schen Welt. *ibid.*, No. 12.
- Jenkins R. E. 1969. A Satellite Observation of the Relativistic Doppler Shift. Astron. J., 74, 960.
- Kardashev N. 1967. Lemaitre's Universe and Observations. Astrophys. J., 150, L135.

- Kerr P. R. 1963. Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics. *Phys. Rev. Letters*, **11**, 237.
- Keswani G. H. 1969. More Tests of General Relativity. *Nature*, **223**, 1264.
- Knothe H. 1969. Satellites and Riemannian Geometry. *Celest. Mech.*, **1**, 36.
- Kottler F. 1922. Gravitation und Relativitätstheorie. *Encykl. Math. Wiss.*, **6** (2), No. 22a.
- Krefetz E. 1967. Restricted Three-Body Problem in the Post-Newtonian Approximation. *Astron. J.*, **72**, 471.
- Krogh C., Baierlein R. 1968. Lunar Laser Ranging and the Brans — Dicke Theory. *Phys., Rev.*, **175**, 1576.
- Kustaanheimio P., Lehti R. 1963. A New Astronomical Effect of the General Theory of Relativity: The Dilatation of the Sideral Period of Orbits with Great Eccentricity. *Astron. J.*, **68**, 392.
- Kustaanheimio P., Stiefel E. 1965. Perturbation Theory of Kepler Motion Based on Spinor Regularization. *J. reine und angew. Math.*, **218**, 204.
- Lafraimboise J. G., Sachs M. 1969. A General Relativity Test Using Two or More Solar Satellites. *Astronaut. Acta* **15**, 65.
- Lanzano P. 1968. The Motion of Rotating Spheroidal Bodies in General Relativity. *Astrophys. Space Sci.*, **1**, 92.
- Levi-Civita T. 1937. Astronomical Consequences of the Relativistic Two-Body Problem. *Amer. J. Math.*, **59**, 225.
- Levi-Civita T. 1950. Le Problème des n Corps en Relativité Générale. *Mém. Sci. Math. fasc.*, **116**.
- Lieske J. H., Null G. W. 1969. Icarus and the Determination of Astronomical Constants. *Astron. J.*, **74**, 297.
- Martin C. F., Van Flandern T. C. 1970. Secular Changes in the Lunar Elements. *Science*, **168**, 246.
- Mas L. 1966. Étude du Problème de Deux Corps par Variation de la Métrique de Schwarzschild. *Compt. Rend.* **262** (A), 266.
- Mas L. 1967. Sur le Problème du Mouvement des Deux ou des Trois Corps en Relativité Générale. *Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. A* (N. S.), **7**, 1.
- Michalska R. 1960a. Action Principle for the Motion of Rotating Bodies in the General Theory of Relativity. *Bull. Acad. Polon. Sci, Ser. math., astr., phys.*, **8**, 233.
- Michalska R. 1960b. The Equations of Motion of Rotating Oblate Bodies in the General Theory of Relativity. *ibid.*, **247**.
- Morgan H. R. 1945. The Earth's Perihelion Motion. *Astron. J.*, **50**, 127.
- O'Connell R. F. 1968. Regression of the Node of the Orbit of Mercury Due to a Solar Quadrupole Moment. *Astrophys., J.*, **152**, L11.
- Papapetrou A. 1951. Spinning Test — Particles in General Relativity. *Proc. Roy. Soc., A* **209**, 248.
- Plebanski J., Bazanski S. 1959. The General Fokker Action Principle and Its Application in General Relativity Theory. *Acta Phys. Polonica*, **18**, 307.

- R u d k j o b i n g M. 1968. Influence of the Gravitational Deflection of Light on the Time of Occultation of a Star by the Moon. *Nuovo Cim.*, B 55, 587.
- S ä n g e r E. 1956. Zur Mechanik der Photonen-Strahlantriebe. München, (русск. пер.: Е. Зенгер. К механике фотонных ракет. М., 1958).
- S c h i f f L. I. 1960. Motion of a Gyroscope According to Einstein's Theory of Gravitation. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 46, 871.
- S h a p i r o I. I. 1966a. Testing General Relativity with Radar. *Phys. Rev.*, 141, 1219.
- S h a p i r o I. I. 1966b. Ross — Schiff Analysis of a Proposed Test of General Relativity: A Critique. *Phys. Rev.*, 145, 1005.
- d e S i t t e r W. 1916. On Einstein's Theory of Gravitation and Its Astronomical Consequences. *Mon. Notices Roy. Astron. Soc.*, 76, 699; 77, 155, 481.
- S y n g e J. L. 1936. Tensorial Methods in Dynamics. Toronto Univ. Appl. Math. Ser. No. 2 (русск. пер.: Дж. Л. Синдж. Тензорные методы в динамике. М., 1947).
- S y n g e J. L. 1960. Relativity: The General Theory. Amsterdam (русск. пер.: Дж. Л. Синг. Общая теория относительности. М., 1963).
- T a u s n e r M. J. 1966. General Relativity and Its Effects on Planetary Orbits and Interplanetary Observations. Techn. Rep. 425, Lincoln Laboratory, M. I. T.
- T o l m a n R. G. 1934. Relativity, Thermodynamics and Cosmology. Oxford.
- T h o r n e K. S., W i l l C. M. 1970. High — Precision Tests of General Relativity. *Comments Astrophys. and Space Phys.*, 2, 35.
- T o n n e l a t M. A. 1964. Les Vérifications Expérimentales de la Relativité Générale. Paris.
- T o n n e l a t M. A. 1969. Radiation Gravitationnelle et Mouvement des Sources. *Colloq. internat. Centre nat. rech. sci.*, No. 170, 73.
- T u l c z y j e w B., T u l c z y j e w W. 1962. On Multipole Formalism in General Relativity. «Recent Developments in General Relativity», 465, Pergamon Press.
- V e i s G. 1966. The Motion of the Spin Axis and the Rotation of the Earth. *Spec. Rept. Smithsonian Inst. Astrophys. Observ.* No. 236, 123.

Брумберг Виктор Александрович

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ
НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА

М., 1972 г. 384 стр. с илл.

Редактор *В. Г. Демин*

Техн. редактор *С. Я. Шкляр*

Корректор *Л. Н. Боровина*

Сдано в набор 17/II 1972 г. Подписано к печати
26/V 1972 г. Бумага $84 \times 108^{1/2}$ Физ. печ. л. 12.
Условн. печ. л. 20,16. Уч.-изд. л. 20,05.
Тираж 2760 экз. Т-07269. Цена книги 1 р. 94 к.
Заказ № 305.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической
литературы
117071, Москва В-71, Ленинский проспект, 15

2-я типография издательства «Наука»
Москва, Шубинский пер., 10

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, дом 15

ИМЕЮТСЯ В ПРОДАЖЕ:

Жарков В. Н., Трубицын В. П., Самсоненко Л. В., Физика Земли и планет. Фигуры и внутреннее строение. «Наука», 1971, 384 стр., 1 р. 99 к.

Зверев М. С. и др. Методы изучения переменных звезд, т. III, Гостехиздат, 1947, 559 стр., 25 коп.

Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., Теория тяготения и эволюция звезд, «Наука», 484 стр., 2 р. 14 к.

Ковальский М. А., Избранные работы по астрономии, Гостехиздат, 1951, 206 стр., 69 коп.

Ловелл Б., Метеорная астрономия, перев. с англ., Физматгиз, 1958, 487 стр. 1 р. 78 к.

Меррил П., Линии химических элементов в астрономических спектрах, перев. с англ., Физматгиз, 1959, 192 стр., 50 коп.

Огородников К. Ф., Динамика звездных систем, Физматгиз, 1958, 628 стр., 1 р. 74 к.

Субботин М. Ф., Введение в теоретическую астрономию, «Наука», 1968, 800 стр., 3 р. 40 к.

Цераский В. К., Избранные работы по астрономии, Гостехиздат, 1953, 195 стр., 70 коп.

Щеглов П. В., Электронная телескопия, Физматгиз, 1963, 196 стр., 63 коп.

Перечисленные выше книги можно приобрести в местных книжных магазинах, распространяющих литературу данной тематики. При отсутствии данных изданий на месте заказы можно направлять по адресу: 103050, Москва, К-50, ул. Медведева, 1, магазин № 8 Москниги «Книга-почтой». Литература будет выслана наложенным платежом, без задатка.