Р. БЕТТИН

НАВЕДЕНИЕ В КОСМОСЕ

МАШИНОСТРОЕНИЕ

Astronautical guidance

Richard H. Battin

Deputy Associate Director
Instrumentation Laboratory
Massachusetts Institute of Technology

McGraw-Hill Book Company
New York San Francisco Toronto London

РИЧАРД БЭТТИН

Наведение в космосе

Перевод с английского
под редакцией
д-ра техн. наук *И. А. БОГУСЛАВСКОГО*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МАШИНОСТРОЕНИЕ»
Москва 1966

УДК 629.19.04-20

В книге достаточно широко и на современном уровне знаний рассмотрены оригинальные методы статистической обработки автономной информации и формирования команд коррекции космических траекторий. Изложены основы небесной механики, необходимые для разработки теории наведения.

Книга представляет большой интерес для широкого круга специалистов, вместе с тем она будет полезна студентам втузов.

Перевод выполнен
инж. **С. А. Никитиным** и канд. техн. наук **В. Б. Соколовым**

3-4-3
222-66

Предисловие к русскому изданию

В последние годы практика освоения космоса — полеты беспилотных автоматических станций и пилотируемых космических кораблей — поставила перед наукой ряд сложнейших задач по управлению полетом в космосе. Для успешного решения этих задач потребовались глубокие теоретические и экспериментальные исследования в области навигации, наведения и управления, при которых учитывались бы специфические особенности космического полета:

— сложные гравитационные и аэродинамические (при входе в атмосферу Земли или другой планеты) силы, вследствие чего точное прогнозирование движения объекта должно производиться численными методами;

— необходимость всемерной экономии топлива для двигателей, откуда возникает требование применять энергетически оптимальные способы наведения;

— значительную (при использовании двигателей большой тяги) длительность участков неуправляемого полета и, как следствие, необходимость высокой точности наведения в конце коротких участков управляемого полета и последующей коррекции движения;

— огромное расстояние объекта от Земли при межпланетных перелетах, в результате чего команды управления необходимо формировать не только по данным системы радиоизмерений, но и по данным источников автономной информации.

Предлагаемая вниманию читателя книга Р. Бэттина — известного американского ученого, работающего в области автоматического управления, является монографией, в которой последовательно излагаются результаты разработки некоторых разделов теории управления движением центра масс объекта в космическом полете, полученные автором и его сотрудниками по Приборной лаборатории Массачусетского Технологического института. Для понимания материала монографии не требуется предварительного знакомства с элементами небесной механики и теорией статистической обработки информации. Все необходимые специальные сведения читатель получает при последовательном изучении книги, и в особенности при решении многочисленных интересных задач. Следует отметить, что некоторые задачи не только способствуют усвоению материала, но и представляют самостоятельный научный интерес как логическое дополнение соответствующей главы.

Первые четыре главы книги, излагающие в основном различные аспекты задачи двух тел, носят вводный характер. Однако некоторые результаты (например, универсальное уравнение Кеплера в гл. II) представляют несомненный интерес и для специалиста.

Основной теоретический и практический интерес, с нашей точки зрения, имеют гл. VI—IX, в которых излагается теория коррекции траекторий и определяются параметры движения центра масс объекта путем статистической обработки результатов измерений, производимых автономными (бортовыми) датчиками. Исключительное внимание, уделяемое автором вопросам использования автономной информации, и в особенности астроинформации для решения навигационных задач, представляется вполне оправданным, так как, по-видимому, только этот вид информации позволит при дальних межпланетных перелетах получить значительную точность управления в районе планеты назначения, а при пилотируемых полетах обеспечит высокую надежность управления. Следует отметить также систематическое употребление автором рекуррентной формы статистической обработки информации, восходящей к Р. Калману, которая при некоррелированных первичных ошибках измерений не требует обращения матриц и хорошо приспособлена для реализации в алгоритмах бортовой вычислительной машины.

Вопросы коррекции и статистической обработки информации излагаются автором в рамках линейной теории, т. е. в предположении, что достаточно учитывать лишь первые члены разложения в ряд текущих параметров фактической траектории по степеням их отклонений от номинальных параметров, вычисленных в некоторый фиксированный (например, начальный) момент времени. В ряде случаев (например, при рассмотрении задачи облета Луны) это предположение может оказаться несправедливым. Тогда предлагаемую автором теорию следует рассматривать как теорию построения первого приближения, используемого в соответствующем итерационном процессе.

Гл. X носит обзорный характер и посвящается некоторым вопросам наведения лунного космического корабля с непрерывно работающим двигателем малой тяги.

В целом книга представляет несомненный интерес для читателя, желающего познакомиться с навигацией и наведением космических летательных аппаратов.

Переводчики стремились привести терминологию оригинала в соответствие с общепринятой в советской литературе. Там, где невозможно было это сделать по тем или иным причинам, даны подстрочные примечания.

Список дополнительной литературы, помещенный после библиографии, приведенной автором, не охватывает многих работ по небесной механике, динамике космического полета и статистической обработке информации, опубликованных в СССР, а включает лишь те работы, на которые сделаны ссылки в примечаниях.

И. А. Богуславский

Предисловие автора

Бурное развитие астронавтики позволяет всерьез планировать самые, казалось бы, невероятные операции по исследованию космоса. По мере усложнения задач, которые ставятся перед космическими полетами, требования к навигации и наведению будут становиться все более и более жесткими. Слежение за первыми космическими летательными аппаратами осуществлялось с помощью наземных радиолокационных станций, а команды наведения передавались по телеметрическим каналам. Однако, если корабль значительно удален от Земли и находится в окрестности другой планеты или Луны, то навигационные измерения могут быть выполнены более точно, когда применяются бортовые приборы. К тому же большие межпланетные расстояния могут приводить к нарушению прежде достаточно надежной связи с Землей, которая необходима для обработки основной навигационной информации и передачи на борт корабля команд наведения. При этих обстоятельствах обработка информации должна проводиться дискретными бортовыми счетно-решающими устройствами. Таким образом, космические корабли будущего, по-видимому, должны иметь полностью автономные системы навигации и наведения.

Цель настоящей книги состоит в том, чтобы дать научным работникам, а также студентам необходимые основы для понимания проблем, связанных с наведением в космосе, причем особое внимание будет уделяться автономным системам. Хотя главная роль отводится здесь математической стороне предмета, это вовсе не делает наш подход чисто теоретическим, не имеющим практического применения. Каждая из рассматриваемых задач в достаточной степени обосновывается, а ее решение отвечает потребностям инженера, занимающегося космонавтикой.

Основой данной книги послужил курс лекций, прочитанных автором на факультете астронавтики и аэронавтики Массачусетского Технологического института (МТИ). Этот курс лекций был построен на отчетах и статьях, написанных автором и его коллегами по Приборной лаборатории МТИ. Для объяснения выбора темы книги следует вкратце остановиться на истории исследований по космическому наведению, проводимых в МТИ при участии автора.

В 1958 г. Приборная лаборатория приступила к предварительному проектированию беспилотного исследовательского аппарата с фотокамерами на борту, предназначенного для полета к планете

Марс. Рассматривалась задача перевода этого корабля с Земли на заранее определенную гелиоцентрическую орбиту пассивного полета. Орбита выбиралась так, чтобы корабль прошел в нескольких тысячах километров от поверхности Марса и, в конце концов, вернулся к Земле, причем аппаратура с научными данными должна была выдержать нагрузку при входе в земную атмосферу. Автор совместно с Дж. Лэнингом занимался подробным исследованием системы наведения и навигации для такого полета.

Хотя этот проект так никогда и не был осуществлен, наша деятельность привлекла внимание вновь организованного Национального Управления по авиации и космонавтике (NASA). Следствием этого явился небольшой контракт на исследование межпланетного наведения, который позволил продолжить разработку и уточнение возникших ранее идей.

Примерно в то же самое время, в конце 1960 г., отделение перспективных исследований фирмы Avco Corporation заручилось поддержкой Приборной лаборатории для проектирования системы наведения корабля с электроракетным дуговым двигателем малой тяги, который должен был совершить перелет с геоцентрической орбиты на селеноцентрическую. Метод наведения для такой задачи был разработан Дж. Миллером в его докторской диссертации под научным руководством автора. Это исследование составило гл. X настоящей книги.

В 1961 г. NASA предложило Приборной лаборатории МТИ разработать систему наведения и навигации для космического корабля «Apollo» в порядке выполнения национальной программы высадки человека на Луну. В настоящее время автор является руководителем части этого проекта, относящейся к анализу наведения в космосе.

В первых пяти главах книги автор счел необходимым изложить основы небесной механики. Хотя небесная механика за последние несколько сот лет разработана достаточно основательно, современная точка зрения существенно отличается от классической. Инженер, занимающийся космонавтикой, не имеет дела с движением планет, Луны и астероидов. Зато ему приходится предсказывать движение новых небесных объектов и управлять ими для успешного выполнения полета. Многие разделы небесной механики идеально соответствуют новым задачам, а другие совершенно не подходят для их решения. Автор отобрал те вопросы, которые кажутся наиболее существенными для насущных целей, и привел их, опираясь на классические положения, к современному уровню.

Гл. I представляет собой краткое введение в небесную механику, достаточное по своему охвату, чтобы служить основой для понимания последующего материала. Серьезному читателю следует дополнить это изложение тщательным изучением одного или нескольких классических трудов, перечисленных в конце книги.

В гл. II, III и IV выводятся различные методы решения так называемой задачи двух тел. Так как на движение космического корабля в солнечной системе в любой момент времени преобладающее влияние оказывает только одно гравитационное поле, то модель двух тел является хорошим первым приближением к реальному движению. Это обстоятельство оправдывает то сравнительно большое внимание, которое уделяется здесь задаче двух тел.

Хотя вопросы, рассматриваемые в первых четырех главах, относятся скорее к классической небесной механике, автору и его коллегам удалось получить много новых результатов, которые здесь и излагаются. В частности, можно указать на универсальную формулировку задачи двух тел, оригинальный подход к геометрическим и аналитическим свойствам конических сечений, связывающих две точки в пространстве, новую трактовку теоремы Ламберта, ее обобщений и приложений, геометрию схода с круговой орбиты и, наконец, на принцип наведения корабля с включенным двигателем для орбитальных маневров.

Цели полета и характеристики космического корабля определяют допустимые траектории. Эти траектории, в свою очередь, коренным образом влияют на проблему навигации и наведения. Поэтому в гл. V и VI рассматриваются способы определения траекторий различного назначения. Задачи определения лунных и межпланетных траекторий решаются оригинальными методами, имеющими широкий диапазон применения.

В иллюстративных целях были вычислены отдельные траектории для реальных дат запуска. Понятно, что некоторые из представленных здесь дат неизбежно устареют. Однако, так как общие характеристики траекторий остаются неизменными, автор полагал, что добавленная к изложению доза реализма вполне компенсирует возможное старение результатов.

Теория лунных возмущений является мощным средством для расчета точных траекторий, а также для решения задачи наведения и навигации при пассивном полете. Гл. VI предоставляет в распоряжение читателя необходимые основы для анализа возмущений и соответствующие иллюстрации из обеих указанных областей. В эту главу входит новое обобщение так называемого метода вариаций орбитальных элементов, которое свободно от трудностей, связанных с вырожденностью и свойственных классическому методу.

В гл. VII, VIII и IX рассматриваются задачи навигации и наведения космического корабля в свободном полете. Основу настоящего подхода составляет принцип номинальной траектории. Для линеаризации задачи в полной мере используются методы возмущений, вследствие чего необходимые навигационные засечки и коррекция скорости определяются по отношению к номинальной орбите. В гл. VII исследуются различные навигационные измерения, выполняемые на борту, которые могут использоваться для расчета положения космического корабля. Излагается метод статистических оценок, известный под названием метода максимума правдоподобия, который применяется для решения задачи навигационных засечек.

В гл. VIII разрабатываются и сравниваются между собой два принципа наведения. При анализе ошибок наведения и навигации широко используются статистические методы; для иллюстрации эффективности этих методов приводится целый ряд практических примеров. Последняя часть главы VIII и глава IX посвящаются дальнейшему расширению и уточнению этих принципов. Таким образом, читатель постепенно перейдет от сравнительно элементарных идей гл. VII и первой части гл. VIII к полностью разработанной теории, изложенной в гл. IX. Окончательные результаты отличаются математическим изяществом и простотой применения.

Отличительной чертой предлагаемой книги является наличие большого числа задач. Некоторые из них представляют собой простые упражнения, приводимые для самопроверки читателем усвоения наиболее важных положений. Однако большинство задач расширяет научный горизонт читателя, дополняя тем самым основной текст, и дает возможность выработать инженерный подход к изучаемому предмету.

Уместно сделать несколько замечаний относительно принятых обозначений. Векторы-столбцы любой размерности записываются строчными буквами с чертой. Модуль вектора обозначается такой же буквой без черты. Матрицы записываются прописными буквами с чертой и могут быть как прямоугольными, так и квадратными. Транспонирование вектора или матрицы обозначается верхним индексом «T». Таким образом, скалярное произведение двух векторов может быть записано либо как $\bar{a}\cdot\bar{b}$, либо $\bar{a}^T\bar{b}$. Аналогично квадратичная форма, связанная с матрицей $\bar{A}$, обозначается как $\bar{X}^T\bar{A}\bar{X}$.

Автор хотел бы поблагодарить издательства Academic Press, Pergamon Press и др. за их любезное разрешение воспроизвести графики и таблицы, включенные в настоящую книгу.

Автор считает себя глубоко обязанным своим студентам и коллегам по Приборной лаборатории МТИ за их справедливую критику и многочисленные предложения, равно как и за непосредственное участие в большей части представленной здесь работы. Автор особенно благодарен им за составление библиографических обзоров, помещенных в конце каждой главы. Автор искренне признателен Дж. Уард и А. Крамеру, умело и тщательно подготовившим рукопись в ее окончательном виде, а также Дж. Штейнкеру, который отредактировал книгу и проверил решения всех задач.

Ричард Бэттин

ГЛАВА I

Введение в небесную механику

Математическая теория движения небесных тел составляет предмет *небесной механики*. Фундамент науки заложил Исаак Ньютон, опубликовав три закона движения, образующих основы механики, и закон всемирного тяготения. В результате работы Ньютона задачи небесной механики можно формулировать с помощью системы дифференциальных уравнений второго порядка.

Хотя ньютоновский закон тяготения установлен для частиц, можно показать, что тела, обладающие сферической симметрией, притягиваются друг другом так, как если бы их массы были сосредоточены в их центрах. Для большинства планет солнечной системы влияние несферичности быстро уменьшается с расстоянием и может не учитываться при решении многих задач. Однако на движении спутников около планеты, сплющенной у полюсов, этот эффект может заметно сказываться.

Из механики Ньютона следует простой вывод трех законов Кеплера, описывающих движение планет. Эти законы, полученные Кеплером эмпирическим путем после тщательного изучения орбиты Марса, можно сформулировать следующим образом:

1. Орбита каждой планеты есть эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце.
2. Прямая, соединяющая планету и Солнце, ометает равные площади в равные промежутки времени.
3. Квадраты периодов обращения планет пропорциональны кубам их средних расстояний от Солнца.

Эти законы являются частными результатами решения так называемой *задачи двух тел*. Третий закон не вполне точен, но может считаться приближенно справедливым, если масса планеты пренебрежимо мала по сравнению с массой Солнца.

Исследование движения планет солнечной системы представляет собой задачу многих тел, каждое из которых притягивается ко всем остальным в соответствии с законом тяготения. Однако во многих важных случаях решение задачи двух тел дает очень хорошее приближение к истинному движению. Если необходимы приближения более высокого порядка, в большинстве случаев удобно рассматривать движение в отклонениях от решения задачи двух тел, причем подобные отклонения называются *возмущениями*.

В этой главе сначала рассматривается закон всемирного тяготения и его распространение на тела конечных размеров. Затем записывается задача n-тел в виде системы дифференциальных уравнений и получаются все известные интегралы. Далее исследуется относительное движение двух тел, возмущенное присутствием других тел. Для частного случая движения трех тел вводится важное понятие сферы влияния. После этого будет излагаться единственная полностью решенная задача небесной механики — задача об относительном движении двух тел. Здесь же рассматриваются специальные обозначения и системы координат для этой задачи. В заключение приводятся два элементарных примера определения орбиты в задаче двух тел. Соотношение между положением на орбите и временем будет обсуждаться в гл. II.

1.1. Закон всемирного тяготения

Закон всемирного тяготения Ньютона гласит:

Частица P_1 с массой m_1 притягивает частицу P_2 с массой m_2 с силой, действующей по прямой, соединяющей частицы P_1 и P_2, прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними.

Для аналитического описания взаимодействия системы n частиц $P_1, P_2, \ldots, P_n$ с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$ обозначим через

$$\bar{r}_i = x_i \bar{i}_x + y_i \bar{i}_y + z_i \bar{i}_z$$

вектор положения частицы P_i, записанный в неускоряющейся системе координат. Система координат является правой и ортогональной с единичными векторами $\bar{i}_x$, $\bar{i}_y$, $\bar{i}_z$, параллельными осям отсчета. Кроме того, расстояние между частицами P_i и P_j обозначим как

$$r_{ij} = |\bar{r}_j - \bar{r}_i| = [(\bar{r}_j - \bar{r}_i) \cdot (\bar{r}_j - \bar{r}_i)]^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда в соответствии с законом Ньютона сила притяжения $\bar{f}_i$, действующая на точку P_i, определяется выражением

$$\bar{f}_i = Gm_i \sum_{j=1}^{n}{}' \frac{m_j}{r_{ij}^3} (\bar{r}_j - \bar{r}_i), \tag{1.1}$$

где коэффициент пропорциональности G называют *постоянной тяготения* (штрих у знака суммы указывает на отсутствие члена, для которого $j = i$).

Гравитационный потенциал V_i в точке P_i определим следующим образом:

$$V_i = G \sum_{j=1}^{n}{}' \frac{m_j}{r_{ij}}. \tag{1.2}$$

Поскольку потенциальная функция зависит только от расстояния между P_i и другими точками, то она не зависит от выбора системы координат. Важное свойство потенциала заключается в том, что градиент V_i есть сила притяжения, действующая на частицу с единичной массой, находящуюся в точке P_i.

Таким образом, имеем

$$\bar{f}_i = m_i \overline{\nabla}_i V_i. \tag{1.3}$$

Здесь векторный оператор

$$\overline{\nabla}_i = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_i \\ \partial/\partial y_i \\ \partial/\partial z_i \end{pmatrix}$$

представляет собой градиент по компонентам вектора $\bar{r}_i$.

Вообще говоря, тела солнечной системы притягивают друг друга как точечные массы. Однако на движение спутников по близким к планете орбитам конечные размеры притягивающей массы оказывают существенное влияние. Понятие потенциальной функции представляет собой удобное средство анализа гравитационных сил, порождаемых телами конечных размеров.

1.2. Потенциал распределенной массы

Понятие гравитационного потенциала легко распространить на непрерывно распределенную массу. Если x, y, z — прямоугольные координаты точки P, то потенциал в точке P, вызываемый распределенной массой с плотностью D, определяется выражением

$$V(x, y, z) = G \iiint \frac{D(\xi, \eta, \zeta)}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \, d\xi d\eta d\zeta, \tag{1.4}$$

причем интегрирование производится по всему объему притягивающего тела. Тогда составляющие силы на единицу массы в точке $P(x, y, z)$ находятся как частные производные от V по переменным x, y, z.

При любом распределении притягивающей массы потенциал можно выразить в виде бесконечного ряда сферических функций*. С этой целью удобно использовать сферическую систему координат r, Φ, θ и предположить, что точка $P(r, \Phi, \theta)$, в которой требуется отыскать потенциал, находится на большем расстоянии от начала координат, чем какая-либо точка притягивающего тела.

---

* Используемые в дальнейшем результаты из теории сферических функций и ее приложения к теории потенциала подробно изложены в работе [65] (*прим. ред.*).

Из рассмотрения рис. 1. 1, обозначая через ϱ, β, λ сферические координаты элемента массы

$$dm = D(\rho,\ \beta,\ \lambda)\,\rho^2 \sin\beta\, d\rho\, d\beta\, d\lambda,$$

будем иметь

$$V(r,\ \Phi,\ \theta) = G \iiint \frac{D(\rho,\ \beta,\ \lambda)\,\rho^2 \sin\beta\, d\rho\, d\beta\, d\lambda}{[r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos\gamma]^{\frac{1}{2}}}.$$

Угол γ связан с другими переменными по теореме косинусов сферической тригонометрии:

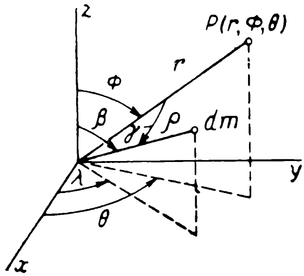


Рис. 1. 1. Сферические координаты

$$\cos\gamma = \cos\Phi\cos\beta + \sin\Phi\sin\beta\cos(\theta - \lambda).$$

Величину, обратную знаменателю подынтегрального выражения, можно разложить в ряд по степеням ϱ/r:

$$(r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos\gamma)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{r}\right)^k P_k(\cos\gamma),$$

где коэффициенты $P_k(\cos\gamma)$ — полиномы от $\cos\gamma$, известные как *полиномы Лежандра* (см. задачи 1. 1—1. 3). Выпишем несколько первых полиномов Лежандра:

$$P_0(\nu) = 1,\quad P_1(\nu) = \nu,\quad P_2(\nu) = \frac{1}{2}(3\nu^2 - 1),\quad P_3(\nu) = \frac{1}{2}(5\nu^3 - 3\nu).$$

Полиномы более высоких порядков можно найти из рекуррентного уравнения

$$kP_k(\nu) - (2k-1)\nu P_{k-1}(\nu) + (k-1)P_{k-2}(\nu) = 0$$

или по явной *формуле Родрига*

$$P_k(\nu) = \frac{1}{2^k \cdot k!}\ \frac{d^k(\nu^2 - 1)^k}{d\nu^k}.$$

Согласно теореме наложения для сферических функций $P_k(\cos\gamma)$ можно выразить в виде

$$P_k(\cos\gamma) = P_k(\cos\Phi)\,P_k(\cos\beta) + 2\sum_{j=1}^{k}\frac{(k-j)!}{(k+j)!}\cos j(\theta - \lambda)\times$$

$$\times P_k^j(\cos\Phi)\,P_k^j(\cos\beta),$$

где $P_k^j(\nu) = (1 - \nu^2)^{\frac{j}{2}}\ \frac{d^j}{d\nu^j}\,P_k(\nu)$ — *присоединенная функция Лежандра* первого рода степени k порядка j.

Используя эти соотношения, потенциальную функцию V можно записать как бесконечный ряд

$$V(r, \Phi, \theta)=\frac{Gm}{r}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{r^{k+1}}P_k(\cos\Phi)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k}\frac{B_k^j}{r^{k+1}}P_k^j(\cos\Phi)\cos j\theta+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k}\frac{C_k^j}{r^{k+1}}P_k^j(\cos\Phi)\sin j\theta. \quad (1.5)$$

Для вычисления постоянных коэффициентов служат формулы

$$A_k=G\iiint\rho^{k+2}D(\rho, \beta, \lambda)P_k(\cos\beta)\sin\beta d\rho d\beta d\lambda,$$

$$B_k^j=2G\frac{(k-j)!}{(k+j)!}\iiint\rho^{k+2}D(\rho, \beta, \lambda)P_k^j(\cos\beta)\cos j\lambda\sin\beta\, d\rho d\beta d\lambda,$$

$$C_k^j=2G\frac{(k-j)!}{(k+j)!}\iiint\rho^{k+2}D(\rho, \beta, \lambda)P_k^j(\cos\beta)\sin j\lambda\sin\beta d\rho d\beta d\lambda.$$

Величина m в первом члене уравнения (1. 5) представляет собой полную массу притягивающего тела:

$$m=\iiint D(\rho, \beta, \lambda)\rho^2\sin\beta d\rho d\beta d\lambda.$$

Последние зависимости сильно упрощаются, если масса распределена симметрично относительно оси z. В этом важном случае плотность есть функция только ϱ и β, откуда следует, что интегрирование по λ можно производить независимо. Так как

$$\int_0^{2\pi}\sin j\lambda d\lambda=\int_0^{2\pi}\cos j\lambda d\lambda=0 \quad \text{при } j=1, 2, \ldots,$$

то коэффициенты B_k^j и C_k^j тождественно равны нулю.

Если в дополнение к осевой симметрии начало системы координат совпадает с центром масс, то постоянная A_1 тождественно равна нулю. Для доказательства достаточно отметить, что постоянная

$$A_1=G\iiint\rho\cos\beta dm$$

и, таким образом, пропорциональна первому моменту массы m относительно плоскости xy.

Наконец, отметим, что если масса распределена однородными концентрическими слоями, то A_k тождественно равна нулю для всех k. В этом случае плотность есть функция только ϱ, а величина A_k равна

$$A_k = 2\pi G \int\limits_0^R \rho^{k+2} D(\rho)\, d\rho \int\limits_0^\pi P_k(\cos\beta) \sin\beta d\beta,$$

где R — радиус тела сферической формы.

Второй интеграл, как показано в задаче 1.3, равен нулю. В выражении (1.5) для потенциала остается только первый член, откуда видно, что распределенная таким образом масса в результате оказывает такое же влияние на точку P, как если бы вся масса была сосредоточена в центре тела.

Для многих практических задач допущение об осевой симметрии тел в солнечной системе справедливо. Внешний потенциал обычно записывается в виде

$$V(r, \Phi) = \frac{Gm}{r}\left[1 - \sum_{k=2}^{\infty} J_k \left(\frac{r_{eq}}{r}\right)^k P_k(\cos\Phi)\right], \tag{1.6}$$

где экваториальный радиус тела обозначен через r_{eq}. Коэффициенты J_k легко отождествить с коэффициентами A_k; однако явное определение их численных значений интегрированием, очевидно, невозможно. Значения этих коэффициентов должны находиться опытным путем с помощью соответствующих экспериментов, например наблюдений за орбитами спутников. Нечетные члены антисимметричны относительно экваториальной плоскости и равны нулю для симметричных тел. Значения коэффициентов J_k для Земли приведены в приложении.

Сила притяжения, действующая на единичную массу в точке $P(r, \Phi, 0)$, вычисляется как градиент V. Если направить единичный вектор $\bar{i}_r$ от центра притягивающей массы к точке P, а единичный вектор $\bar{i}_z$ вдоль оси симметрии, то

$$\cos\Phi = \bar{i}_r \cdot \bar{i}_z.$$

Применяя два векторных тождества

$$\overline{\nabla} r \equiv \bar{i}_r,$$

$$\overline{\nabla}(\bar{i}_r \cdot \bar{r}_z) \equiv \frac{1}{r}[\bar{i}_z - (\bar{i}_r \cdot \bar{i}_z)\bar{i}_r],$$

которые можно получить, решив задачу 1.5, и рекуррентную формулу

$$P'_{k+1}(\nu) - \nu P'_k(\nu) = (k+1) P_k(\nu),$$

которую можно найти в результате решения задачи 1. 1, получим выражение для градиента от потенциала

$$\overline{\nabla} V=-\frac{Gm}{r^2}\left\{\overline{i}_r-\sum_{k=2}^{\infty}{}' J_k\left(\frac{r_{eq}}{r}\right)^k\left[P'_{k+1}(\cos\Phi)\,\overline{i}_r-P'_k(\cos\Phi)\,\overline{i}_z\right]\right\}. \tag{1.7}$$

Производные от полиномов Лежандра удобно вычислять по рекуррентной формуле

$$(k-1)\,P'_k(\nu)-(2k-1)\,\nu P'_{k-1}(\nu)+kP'_{k-2}(\nu)=0$$

с начальными значениями $P'_0\ (\nu)=0$ и $P'_1\ (\nu)=1$. Эта формула также входит в условия задачи 1. 1.

1.3. Задача n-тел

Рассмотрим снова систему n точек $P_1, P_2, \ldots, P_n$. В соответствии с уравнением (1. 1) уравнение движения точки P_i запишется

$$m_i\frac{d^2\overline{r}_i}{dt^2}=G\sum_{j=1}^{n}{}'\frac{m_i m_j}{r_{ij}^3}(\overline{r}_j-\overline{r}_i). \tag{1.8}$$

Во многих случаях удобнее переписать уравнение движения следующим образом:

$$m_i\frac{d^2\overline{r}_i}{dt^2}=\overline{\nabla}_i U, \tag{1.9}$$

где $\overline{\nabla}_i$ — оператор градиента по компонентам вектора $\overline{r}_i$.

Функция U, имеющая вид

$$U=\frac{G}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}{}'\frac{m_i m_j}{r_{ij}}, \tag{1.10}$$

называется *силовой функцией;* она равна полной работе, произведенной гравитационными силами при переходе системы n точечных масс из состояния с бесконечно большими взаимными расстояниями в состояние с заданной конфигурацией. Тогда *потенциальная энергия* системы равна — U.

Для полного решения задачи n-тел требуется найти $6n$ интегралов. Хотя только 10 из них можно получить, эти известные интегралы имеют важный физический смысл. Выведем далее эти 10 интегралов и затем покажем, что, когда на систему не действуют внешние силы, полное количество движения и момент количества движения, а также полная энергия такой системы остаются неизменными.

Закон сохранения количества движения

Суммируя все уравнения вида (1. 8), получим

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2\bar{r}_i}{dt^2} = G \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n}{}' \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} (\bar{r}_j - \bar{r}_i) = 0,$$

откуда после интегрирования

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{r}_i = \bar{c}_1 t + \bar{c}_2. \tag{1.11}$$

Так как радиус-вектор центра масс системы $\bar{r}_{cm}$ равен

$$\bar{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \tag{1.12}$$

то уравнение (1. 11) показывает, что центр масс системы движется с постоянной скоростью.

Закон сохранения момента количества движения

Умножим обе части каждого из уравнений вида (1. 8) векторно на $\bar{r}_i$ и сложим все n получившихся уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2\bar{r}_i}{dt^2} \times \bar{r}_i = G \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n}{}' \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} (\bar{r}_j - \bar{r}_i) \times \bar{r}_i = 0.$$

После интегрирования получим

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\bar{r}_i \times \frac{d\bar{r}_i}{dt} \right) = \bar{c}_3. \tag{1.13}$$

Отсюда видно, что полный момент количества движения системы n точек постоянен по величине и направлению.

В небесной механике часто применяется термин *инвариантная плоскость;* так называется плоскость, проходящая через центр масс $\bar{r}_{cm}$, нормаль к которой совпадает с направлением вектора полного момента количества движения $\bar{c}_3$.

Закон сохранения энергии

Умножим обе части каждого из уравнений вида (1. 9) скалярно на dr_i/dt и снова сложим полученные n уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2\bar{r}_i}{dt^2} \cdot \frac{d\bar{r}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \nabla_i U \cdot \frac{d\bar{r}_i}{dt} = \frac{dU}{dt}.$$

В результате интегрирования найдем

$$T-U=c, \tag{1.14}$$

где

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\bar{r}_i}{dt}\cdot\frac{d\bar{r}_i}{dt} \tag{1.15}$$

— *кинетическая энергия* системы, а c — постоянная. Таким образом, сумма полной кинетической энергии системы T и полной потенциальной энергии — U остается постоянной.

Как известно, другие интегралы для задачи n-тел получить невозможно. Компоненты трех векторов $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$, $\bar{c}_3$ и скалярная постоянная c составляют десять постоянных интегрирования.

1.4. Возмущенное движение двух тел

Во многих задачах небесной механики требуется знать движение одного тела относительно другого, причем было бы неудобно находить результат, вычисляя разность двух движений, когда каждое из них задано относительно фиксированной инерциальной системы отсчета. В этом разделе мы выведем уравнения относительного движения двух тел в форме, удобной для его изучения численными или аналитическими методами.

На основании уравнения (1.8) при $i=1$ и $i=2$ можно записать

$$\frac{d^2\bar{r}_1}{dt^2}=G\frac{m_2}{r_{12}^3}(\bar{r}_2-\bar{r}_1)+G\sum_{j=3}^{n}\frac{m_j}{r_{1j}^3}(\bar{r}_j-\bar{r}_1);$$

$$\frac{d^2\bar{r}_2}{dt^2}=G\frac{m_1}{r_{21}^3}(\bar{r}_1-\bar{r}_2)+G\sum_{j=3}^{n}\frac{m_j}{r_{2j}^3}(\bar{r}_j-\bar{r}_2).$$

Обозначив

$$\bar{r}=\bar{r}_2-\bar{r}_1,\quad \bar{\rho}_j=\bar{r}_j-\bar{r}_1,\quad \bar{d}_j=\bar{r}-\bar{\rho}_j, \tag{1.16}$$

после вычитания первого дифференциального уравнения из второго будем иметь

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}+\frac{\mu}{r^3}\bar{r}=-G\sum_{j=3}^{n}\left(\frac{m_j}{d_j^3}\bar{d}_j+\frac{m_j}{\rho_j^3}\bar{\rho}_j\right), \tag{1.17}$$

где

$$\mu=G(m_1+m_2). \tag{1.18}$$

Правую часть уравнения (1.17) часто записывают в иной, более удобной форме. Легко проверить справедливость соотношения

$$\frac{\bar{d}_j}{d_j^3}+\frac{\bar{\rho}_j}{\rho_j^3}=-\nabla\left(\frac{1}{d_j}-\frac{1}{\rho_j^3}\bar{r}\cdot\bar{\rho}_j\right),$$

где $\overline{\nabla}$ — оператор градиента по компонентам вектора $\bar{r}$. Поэтому, если ввести обозначение

$$R_j = Gm_j \left(\frac{1}{d_j} - \frac{1}{\rho_j^3} \bar{r} \cdot \bar{\rho}_j \right), \tag{1.19}$$

то получим следующее уравнение:

$$\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3} \bar{r} = \overline{\nabla} \sum_{j=3} R_j. \tag{1.20}$$

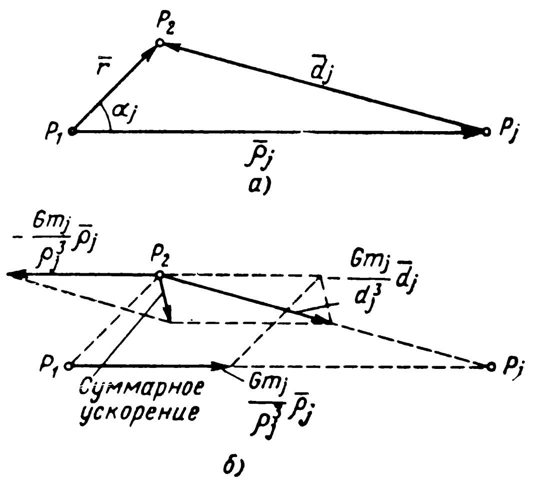


Рис. 1.2. Геометрия образования возмущающего ускорения:

а — схема векторов положения; *б* — схема векторов ускорения

Скалярная величина R_j называется *возмущающей функцией*, связанной с возмущающим телом P_j.

Для описания движения тела P_2 относительно тела P_1 можно использовать либо уравнение (1.17), либо уравнение (1.20). Однако, если $r \ll \rho_j$, ни одно из этих уравнений не подходит для интегрирования численными или аналитическими методами. Этот случай показан на рис. 1.2. Из рисунка видно, что возмущающее действие тела P_j на движение тела P_2 относительно P_1 определяется разностью двух почти равных векторов. Существуют различные методы, позволяющие обойти эту трудность и получить необходимые результаты без потери точности. Два из них описываются ниже.

Разложение возмущающей функции

Используя результаты разд. 1.2, можно разложить d_j^{-1} в ряд по степеням r/ρ_j:

$$\frac{1}{d_j}=\frac{1}{\rho_j}\left[1-2\frac{r}{\rho_j}\cos\alpha_j+\left(\frac{r}{\rho_j}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\rho_j}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r}{\rho_j}\right)^k P_k(\cos\alpha_j),$$

где α_j — угол между векторами $\bar{r}$ и $\bar{\rho}_j$, т. е.

$$\cos\alpha_j=\frac{\bar{r}\cdot\bar{\rho}_j}{r\rho_j}. \tag{1.21}$$

Следовательно, возмущающую функцию можно выразить в виде

$$R_j=\frac{Gm_j}{\rho_j}\left[1+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{r}{\rho_j}\right)^k P_k(\cos\alpha_j)\right]. \tag{1.22}$$

Наконец, подставляя последнее выражение в уравнение (1.20), получим

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}+\frac{\mu}{r^3}\bar{r}=\sum_{j=3}^{n}\frac{Cm_j}{\rho_j^2}\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{r}{\rho_j}\right)^{k-1}[P_k'(\cos\alpha_j)\bar{i}_{\rho_j}-$$

$$-P_{k-1}'(\cos\alpha_j)\bar{i}_r], \tag{1.23}$$

где $\bar{i}_r$ и $\bar{i}_{\rho_j}$ — единичные векторы в направлениях $\bar{r}$ и $\bar{\rho}_j$.

Если $(r/\rho_j)\ll 1$, то бесконечный ряд (1.23) сходится довольно быстро, поэтому во многих случаях требуется всего несколько членов для обеспечения удовлетворительной точности.

Непосредственный расчет возмущающего ускорения

Следующий метод может служить средством разрешения трудностей, возникающих при вычислении правой части уравнения (1.17) без разложения ее в ряд. Если записать

$$\frac{\bar{d}_j}{d_j^3}+\frac{\bar{\rho}_j}{\rho_j^3}=\frac{1}{d_j^3}\left[\bar{r}+\left(\frac{d_j^3}{\rho_j^3}-1\right)\bar{\rho}_j\right],$$

то становится очевидным, что потенциальная опасность таится в вычислении разности, заключенной в круглые скобки. Эту разность можно выразить следующим образом:

$$\frac{d_j^3}{\rho_j^3}-1=f(q_j),$$

где
$$q_j = \frac{r}{\rho_j}\left(\frac{r}{\rho_j} - 2\cos\alpha_j\right),$$
$$f(q_j) = (1+q_j)^{\frac{3}{2}} - 1. \qquad (1.24)$$

При вычислении $f(q_j)$ применяется обычный способ, заключающийся в разложении в ряд $(1+q_j)^{\frac{3}{2}}$ по степеням q_j; однако возможна и конечная схема расчета. Для этой цели запишем $f(q_j)$ в виде
$$f(q_j) = \frac{(1+q_j)^3 - 1}{1 + (1+q_j)^{\frac{3}{2}}}, \qquad (1.25)$$
отсюда
$$f(q_j) = \frac{3 + 3q_j + q_j^2}{1 + (1+q_j)^{\frac{3}{2}}}\, q_j.$$

При такой записи схема вычисления $f(q_j)$ явно нечувствительна к величине q_j и, следовательно, не приводит к потере точности результатов.

Итак, уравнение (1. 17), описывающее относительное движение двух тел, можно окончательно записать в виде
$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3}\bar{r} = -\sum_{j=3}^{n} \frac{Gm_j}{d_j^3}\left[\bar{r} + f(q_j)\bar{\rho}_j\right]. \qquad (1.26)$$

В гл. VI будут рассмотрены некоторые методы, важные с точки зрения численного интегрирования уравнения (1. 26).

1. 5. Сфера влияния*

При рассмотрении возмущенного движения тела P_2 относительно тела P_1 может представлять интерес величина радиуса-вектора $\bar{r}$, при которой возмущающее ускорение, вызываемое присутствием тел $P_3, P_4, \ldots, P_n$, становится равным ускорению от тела P_1. Для простоты рассмотрим одно возмущающее тело P_3 и запишем уравнение (1. 23) в виде
$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -\frac{G(m_1+m_2)}{r^2}\bar{i}_r + \frac{Gm_3}{\rho^2}\frac{r}{\rho}(3\cos\alpha\bar{i}_\rho - \bar{i}_r).$$

---

* Далее всюду сохранен применяемый автором термин «сфера влияния». Однако в отечественной литературе в данном случае обычно употребляется термин «сфера действия» [66], [67]. Сферой влияния в работе [68] предлагается называть сферу вокруг планеты, величина радиуса которой выбирается из условия минимизации некоторой средней ошибки вычисления константы интеграла Якоби в ограниченной круговой задаче трех тел *(прим. ред.)*.

Здесь все члены, содержащие степени r/ϱ выше первой, отброшены и опущены индексы при ϱ и α. Приравнивая далее величины основного и возмущающего ускорений, найдем

$$\frac{r}{\rho}=(1+3\cos^2\alpha)^{-\frac{1}{6}}\left(\frac{m_1+m_2}{m_3}\right)^{\frac{1}{3}}. \qquad (1.27)$$

Этот результат справедлив при условии $(m_1+m_2)\ll m_3$. Уравнение (1.27) определяет поверхность вокруг тела P_1, на границе которой возмущающее ускорение равно основному ускорению.

В несколько более общем смысле понятие границы, называемой *сферой влияния,* было предложено Лапласом. При рассмотрении движения одного тела P_2 в присутствии двух других тел P_1 и P_3 для вычислений важно уметь выбрать одно из тел, по отношению к которому следует описывать движение P_2. Иными словами, возникает вопрос: какое из двух движений, уравнения которых приводятся ниже, является преобладающим и когда нужно переходить к другому началу координат. Движение тела P_2 относительно P_1 описывается уравнением

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}+\frac{G(m_1+m_2)}{r^3}\bar{r}=-Gm_3\left(\frac{\bar{d}}{d^3}+\frac{\bar{\rho}}{\rho^3}\right),$$

в то время как движение тела P_2 относительно P_3 определяется уравнением

$$\frac{d^2\bar{d}}{dt^2}+\frac{G(m_2+m_3)}{d^3}\bar{d}=-Gm_1\left(\frac{\bar{r}}{r^3}-\frac{\bar{\rho}}{\rho^3}\right).$$

Согласно Лапласу, предпочтение одному из этих уравнений отдается в зависимости от отношения возмущающей силы к соответствующей центральной силе притяжения. Выбирается то из уравнений, которое обеспечивает наименьшую величину указанного отношения. Оказывается, что при $r\ll\varrho$ граничная поверхность, на которой два отношения сил равны между собой, является почти сферической.

В случае движения тела P_2 относительно P_1 (первое уравнение) отношение возмущающей силы к основной силе притяжения легко находится и равно

$$\frac{m_3}{m_1+m_2}\left(\frac{\frac{r}{\rho}}{\frac{d}{\rho}}\right)^2\left[1-2\left(\frac{d}{\rho}\right)\left(1-\frac{r}{\rho}\cos\alpha\right)+\left(\frac{d}{\rho}\right)^4\right]^{\frac{1}{2}},$$

где
$$\frac{d}{\rho}=\left[1-2\frac{r}{\rho}\cos\alpha+\left(\frac{r}{\rho}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Во втором случае это отношение равно

$$\frac{m_1}{m_2+m_3}\left(\frac{r}{\rho}\right)^{-2}\left[1-2\frac{r}{\rho}\cos\alpha+\left(\frac{r}{\rho}\right)^2\right]\left[1-2\left(\frac{r}{\rho}\right)^2\cos\alpha+\left(\frac{r}{\rho}\right)^4\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Приравнивая эти отношения, получим неявное выражение, определяющее переменную r/ϱ как функцию масс и угла α:

$$\left(\frac{r}{\rho}\right)^4=\frac{m_1(m_1+m_2)}{m_3(m_2+m_3)}\left(\frac{d}{\rho}\right)^4\left(\frac{1-2\left(\frac{r}{\rho}\right)^2\cos\alpha+\left(\frac{r}{\rho}\right)^4}{1-2\left(\frac{d}{\rho}\right)\left[1-\frac{r}{\rho}\cos\alpha\right]+\left(\frac{d}{\rho}\right)^4}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

В предположении, что $r\ll\varrho$, можно получить явное выражение для r/ϱ, если отбросить члены, содержащие высокие степени r/ϱ. Если в биномиальном разложении знаменателя последнего множителя оставить члены с $(r/\varrho)^3$, то члены нулевого и первого порядка взаимно уничтожаются; остается произведение $(r/\varrho)^2$ на множитель, содержащий член нулевого порядка и член первого порядка. Отбрасывая далее члены выше первого порядка, получим

$$\left(\frac{r}{\rho}\right)^5=\frac{m_1(m_1+m_2)}{m_3(m_2+m_3)}\,\frac{1-4\left(\frac{r}{\rho}\right)\cos\alpha}{(1+3\cos^2\alpha)^{\frac{1}{2}}}\left(1-\frac{4\left(\frac{r}{\rho}\right)\cos\alpha}{1+3\cos^2\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Разложим теперь в биномиальный ряд последний множитель, сохранив при этом только члены первого порядка:

$$\frac{r}{\rho}=\left(\frac{m_1(m_1+m_2)}{m_3(m_2+m_3)}\right)^{\frac{1}{5}}(1+3\cos^2\alpha)^{-\frac{1}{10}}\left[1-2\frac{r}{\rho}\cos\alpha\left(\frac{1+6\cos^2\alpha}{1+3\cos^2\alpha}\right)\right]^{\frac{1}{5}}.$$

Снова разложим последний множитель в биномиальный ряд и отбросим члены с r/ϱ выше первого порядка. Разрешая полученное выражение относительно r/ϱ, найдем окончательное выражение

$$\frac{r}{\rho}=\left[\left(\frac{m_1(m_1+m_2)}{m_3(m_2+m_3)}\right)^{\frac{1}{5}}(1+3\cos^2\alpha)^{\frac{1}{10}}-\frac{2}{5}\cos\alpha\left(\frac{1+6\cos^2\alpha}{1+3\cos^2\alpha}\right)\right]^{-1}. \quad (1.28)$$

Во многих представляющих интерес случаях массой m_2 можно пренебречь по сравнению с m_1 и m_3. Кроме того, если m_1 много больше, чем m_3, то вторым членом в уравнении (1.28) также можно пренебречь. Отметим далее, что член $(1+3\cos^2\alpha)^{\frac{1}{10}}$ не превышает

1,15. Поэтому, если этот множитель заменить единицей, то получим в результате уравнение поверхности

$$\frac{r}{\rho} = \left(\frac{m_1}{m_3}\right)^{\frac{2}{5}}, \tag{1.29}$$

которая представляет собой сферу, описанную вокруг P_1 и называемую сферой влияния P_1 по отношению к P_3. Внутри этой сферы принято определять движение P_2 относительно P_1 в качестве цен-

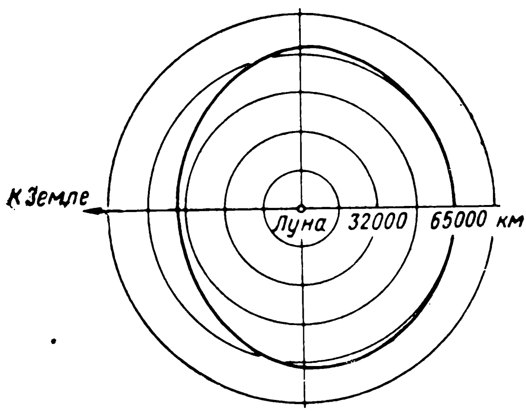


Рис. 1.3. Поверхность влияния Луны

трального тела, в то время как вне ее началом координат будет служить P_3.

Значения радиусов сфер влияния для различных планет солнечной системы даны в табл. 1 в приложении. В этой таблице m_1 — масса планеты, m_3 — масса Солнца.

Если в качестве трех тел P_1, P_2 и P_3 взять Луну, космический корабль и Землю, то, поскольку отношение массы Луны к массе Земли не очень мало, уравнение (1.29) не дает хорошую приближенную зависимость для граничной поверхности. Сечение этой поверхности плоскостью, содержащей Землю и Луну, вычисленное по уравнению (1.28), показано на рис. 1.3. Из рисунка видно, что радиус этой поверхности меняется от величины порядка 52 000 *км* в направлении Земли до 66 000 *км* в противоположном направлении. В этих точках отношения значений ускорения равны примерно 0,5; 0,4 и 0,6 соответственно.

Для сравнения радиусы соответствующей поверхности вокруг Земли для системы Земля — Солнце равны 804 000, 925 000 и 808 000 *км*, а отношения ускорений 0,1; 0,08 и 0,1.

1.6. Задача двух тел

Как указывалось выше, в задаче n-тел известны только 10 интегралов. Поэтому лишь для задачи об относительном движении двух тел, требующей шести интегралов, возможно общее аналитическое решение. В этом разделе общее решение будет получено теми же методами, что применялись в разд. 1. 3. Затем в гл. II эта важная задача будет рассматриваться в более общей постановке.

Уравнение (1. 20) описывает относительное движение двух тел P_1 и P_2 в системе n-тел. Если наличие объектов $P_3, P_4, \ldots, P_n$ не принимать во внимание, то уравнение движения приводится к виду

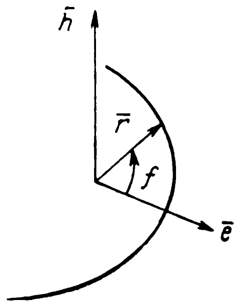


Рис. 1. 4. Коническое сечение

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}+\frac{\mu}{r^3}\bar{r}=0. \tag{1.30}$$

Умножим векторно последнее уравнение на $\bar{r}$:

$$\frac{d}{dt}\left(\bar{r}\times\frac{d\bar{r}}{dt}\right)=0,$$

откуда следует, что вектор

$$\bar{h}=\bar{r}\times\frac{d\bar{r}}{dt}\text{ — постоянный.} \tag{1.31}$$

Из уравнения (1. 30), таким образом, имеем

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\times\bar{h}=-\frac{\mu}{r^3}\bar{r}\times\bar{h}=-\frac{\mu}{r^3}\bar{r}\times\left(\bar{r}\times\frac{d\bar{r}}{dt}\right)=\frac{\mu}{r^3}\left[r^2\frac{d\bar{r}}{dt}-\right.$$

$$\left.-\left(\bar{r}\cdot\frac{d\bar{r}}{dt}\right)\bar{r}\right]=\mu\frac{d}{dt}\left(\frac{\bar{r}}{r}\right).$$

Интегрируя обе части уравнения, найдем

$$\frac{d\bar{r}}{dt}\times\bar{h}=\frac{\mu}{r}\left(\bar{r}+r\bar{e}\right), \tag{1.32}$$

где $\bar{e}$ — постоянный вектор. Следовательно,

$$\bar{r}\cdot\frac{d\bar{r}}{dt}\times\bar{h}=\bar{r}\times\frac{d\bar{r}}{dt}\cdot\bar{h}=h^2=\mu\,(r+re\cos f).$$

Здесь f — угол между векторами $\bar{r}$ и $\bar{e}$, как показано на рис. 1. 4. Разрешая последнее выражение относительно r, получим уравнение орбиты

$$r=\frac{\dfrac{h^2}{\mu}}{1+e\cos f}. \tag{1.33}$$

Вектор $\bar{h}$ представляет собой момент количества движения, отнесенный к единице массы. Итак, этот момент количества движения системы есть постоянный вектор, а относительное движение происходит в постоянной плоскости:

$$\bar{h} \cdot \bar{r} = 0.$$

В уравнении (1.33) нетрудно узнать обычное уравнение конического сечения в полярной системе координат с началом в одном из фокусов. *Полуфокальный параметр* или просто *параметр* конического сечения определяется как

$$p = \frac{h^2}{\mu}. \tag{1.34}$$

Постоянная e, называемая *эксцентриситетом*, определяет природу конического сечения в соответствии со следующей классификацией:

окружность $e = 0$, парабола $e = 1$,

эллипс $0 < e < 1$, гипербола $e > 1$.

Вектор $\bar{e}$ в уравнении (1.32) направлен из фокуса в наименее удаленную от фокуса точку орбиты.

Векторы $\bar{h}$ и $\bar{e}$ полностью определяют размеры, форму и ориентацию конического сечения относительно принятой системы отсчета. Они дают возможность получить только пять независимых постоянных интегрирования уравнений движения, поскольку $\bar{h} \cdot \bar{e} = 0$. Для полного решения необходимо получить зависимость положения тела P_2 относительно P_1 от времени.

В уравнении (1.31) $d\bar{r}/dt$ выразим в полярной системе координат

$$r^2 \frac{df}{dt} = h. \tag{1.35}$$

Тогда, исключая с помощью последнего соотношения r из уравнения (1.33), найдем

$$\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}\, dt = \frac{df}{(1 + e \cos f)^2}. \tag{1.36}$$

Интегрируя это уравнение, получим f как функцию времени и недостающую постоянную интегрирования. Обычно в качестве этой постоянной интегрирования выбирается тот момент времени τ, в который оба тела находятся в наиболее близких друг от друга точках. Обсуждение интеграла от уравнения (1.36) отложим до гл. II.

1.7. Орбитальные элементы и системы координат

В небесной механике в задаче определения орбиты двух тел шесть постоянных интегрирования или различные их функции называются *элементами* орбиты. Например, p, e, τ — три возможных орбитальных элемента. Они определяют коническое сечение безотносительно к выбранной системе отсчета. Для пространственной ориентации орбиты требуется задать еще три величины. Классический вариант выбора трех недостающих элементов — хорошо известные *углы Эйлера*. Прежде чем вводить эти углы, рассмотрим некоторые типичные системы координат и терминологию, принятую в небесной механике.

Для тел солнечной системы в зависимости от того, где находится начало отсчета, принято делить системы координат на *гелиоцентрические* (с центром в Солнце) и *геоцентрические* (с центром в Земле). Иногда начало системы координат помещают в центре какой-либо планеты или Луны. В двух последних случаях говорят о *планетоцентрической* и *селеноцентрической* системах координат.

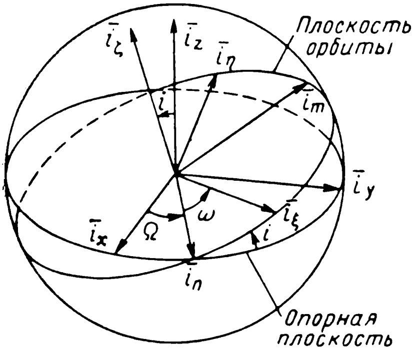


Рис. 1.5. Системы координат

В небесной механике применяются две основные системы координат: *эклиптическая* и *экваториальная*. Опорной плоскостью в эклиптической системе координат является плоскость земной орбиты, в экваториальной системе координат — плоскость экватора Земли. Угол наклона плоскости эклиптики к плоскости экватора называется *наклонением эклиптики*. В обеих системах в качестве опорного направления выбрано направление на точку *весеннего равноденствия*, определяемую как точка на пересечении опорных плоскостей, в которой Солнце переходит экватор с юга на север в своем кажущемся ежегодном движении по эклиптике. Полярные координаты в эклиптической системе называются *долготой* и *широтой*, а в экваториальной системе — *прямым восхождением* и *склонением*. В прямоугольной системе координат ось x направлена на точку весеннего равноденствия, ось z нормальна к опорной плоскости и направлена на север, а ось y выбирается так, чтобы система координат была правой. Единичные векторы в этих трех направлениях обозначим: $\bar{i}_x$, $\bar{i}_y$, $\bar{i}_z$.

Рассмотрим далее движение тела под действием притяжения Солнца. Линия пересечения плоскости, в которой происходит движение, с плоскостью эклиптики называется *линией узлов*. *Восходящий узел* есть точка, в которой тело пересекает эклиптику с положительной составляющей скорости в направлении оси z. *Долгота восходящего узла* измеряется от направления на точку весеннего равноденствия и обозначается Ω. *Наклонение* плоскости орбиты тела к эклиптике обозначается через i.

Для задания местонахождения тела используется другая система гелиоцентрических координат. Оси ξ и η выбираются в плоскости орбиты тела, причем положительным для оси ξ считается направление на *перигелий* — точку, в которой тело наиболее близко подходит к Солнцу. Ось ξ часто называют *линией апсид.* Направления осей η и ζ выбираются так, чтобы система координат была правой, как это показано на рис. 1.5. С этими тремя осями связаны единичные векторы $\bar{i}_\xi$, $\bar{i}_\eta$, $\bar{i}_\zeta$. Ось ξ составляет с направлением на восходящий узел угол ω, называемый *аргументом перигелия.* Три угла Ω, i, ω являются углами Эйлера.

Обычно сумму углов $\Omega+\omega$ называют *долготой перигелия* и обозначают ϖ. Следует отметить, однако, что это не долгота в обычном понимании, так как эти углы измеряются в двух различных плоскостях.

Очевидно, подобные же величины можно определить и для экваториальной системы координат. В этом случае точка на орбите, наиболее близкая к Земле, носит название *перигей.* Для произвольной системы координат употребляется термин *перицентр.* К этому следует добавить, что для эллиптической орбиты наиболее удаленная от центра точка называется соответственно *афелий, апогей* и *апоцентр.*

Для задания положения тела на орбите используются обычно следующие понятия: *аргумент широты* $\theta=\omega+f$ и *истинная долгота* $L=\varpi+f$.

Переход от системы координат ξ, η, ζ к системе x, y, z осуществляется с помощью матрицы поворота

$$\overline{R}=\begin{pmatrix} \bar{i}_x\cdot\bar{i}_\xi & \bar{i}_x\cdot\bar{i}_\eta & \bar{i}_x\cdot\bar{i}_\zeta \\ \bar{i}_y\cdot\bar{i}_\xi & \bar{i}_y\cdot\bar{i}_\eta & \bar{i}_y\cdot\bar{i}_\zeta \\ \bar{i}_z\cdot\bar{i}_\xi & \bar{i}_z\cdot\bar{i}_\eta & \bar{i}_z\cdot\bar{i}_\zeta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix}. \qquad (1.37)$$

Так, если q_x, q_y, q_z и q_ξ, q_η, q_ζ — компоненты вектора $\bar{q}$ в каждой из двух систем координат, то

$$\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix}=\overline{R}\begin{pmatrix} q_\xi \\ q_\eta \\ q_\zeta \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы поворота, представляющие собой направляющие косинусы, можно определить с помощью правила косинусов сферической тригонометрии. Например, угол между единичными векторами $\bar{i}_x$ и $\bar{i}_\xi$ образует одну сторону сферического треугольника, у которого две другие стороны составляют углы Ω и ω. Внутренний угол между этими сторонами равен $\pi-i$. Следовательно, применяя правило косинусов, доказанное, в частности, в задаче 1.4, получим

$$l_1=\bar{i}_x\cdot\bar{i}_\xi=\cos\Omega\cos\omega+\sin\Omega\sin\omega\cos(\pi-i)=$$
$$=\cos\Omega\cos\omega-\sin\Omega\sin\omega\cos i.$$

Остальные направляющие косинусы находятся подобным же образом:

$$\left.\begin{aligned}
l_1&=\cos\Omega\cos\omega-\sin\Omega\sin\omega\cos i,\\
l_2&=-\cos\Omega\sin\omega-\sin\Omega\cos\omega\cos i,\\
l_3&=\sin\Omega\sin i,\\
m_1&=\sin\Omega\cos\omega+\cos\Omega\sin\omega\cos i,\\
m_2&=-\sin\Omega\sin\omega+\cos\Omega\cos\omega\cos i,\\
m_3&=-\cos\Omega\sin i,\\
n_1&=\sin\omega\sin i,\\
n_2&=\cos\omega\sin i,\\
n_3&=\cos i.
\end{aligned}\right\}\qquad(1.38)$$

Другой вывод элементов матрицы поворота составляет содержание задачи 1.11.

1.8. Определение орбиты

С точки зрения астронома, задача определения орбиты заключается в вычислении орбитальных элементов небесного тела по данным наблюдений, произведенных с поверхности Земли. В этом разделе будут рассмотрены две тесно связанные между собой задачи. Для каждой мы выведем общепринятую систему орбитальных элементов не непосредственно из данных наблюдений, а из некоторых очевидных геометрических и динамических условий. Элементы, которые позволяют связать положение тела на орбите со временем, будут рассматриваться ниже.

Определение орбиты по начальному положению и скорости

Зная составляющие вектора положения $\bar{r}_0$ и вектора скорости $\bar{v}_0$ в данный момент времени, можно полностью описать движение одного тела относительно другого. На самом деле, эти составляющие можно использовать как орбитальные элементы, и в некоторых случаях это будет наиболее естественный выбор. Покажем теперь, как эти элементы связаны с описанными ранее орбитальными элементами.

Момент количества движения выражается следующим образом:

$$\bar{h}=\bar{r}_0\times\bar{v}_0.$$

Тем самым определяется единичный вектор $\bar{i}_\zeta$, так как он имеет то же самое направление, что и вектор $\bar{h}$. Кроме того, зная модуль вектора $\bar{h}$, по уравнению (1.34) получим параметр орбиты.

Если уравнение орбиты (1.33) продифференцировать, то, используя уравнение (1.35), найдем выражение для радиальной составляющей скорости

$$\frac{dr}{dt}=\frac{\mu e}{h}\sin f. \tag{1.39}$$

Из последнего уравнения, а также из уравнения орбиты (1.33) получим

$$\mu e \sin f_0=\frac{h}{r_0}\bar{r}_0\cdot\bar{v}_0,$$

$$\mu e \cos f_0=\frac{h^2}{r_0}-\mu.$$

Найдем теперь соотношение для эксцентриситета, возведя каждое уравнение в квадрат и складывая:

$$e^2=\left(\frac{h^2}{\mu r_0}-1\right)^2+\left(\frac{h}{\mu r_0}\bar{r}_0\cdot\bar{v}_0\right)^2. \tag{1.40}$$

Единичный вектор $\bar{i}_\xi$ в направлении перицентра равен

$$\bar{i}_\xi=\frac{1}{r_0}\left[\bar{r}_0\cos f_0-(\bar{i}_\zeta\times\bar{r}_0)\sin f_0\right]$$

или, иначе,

$$\bar{i}_\xi=\frac{1}{\mu e}\left[\left(v_0^2-\frac{\mu}{r_0}\right)\bar{r}_0-(\bar{r}_0\cdot\bar{v}_0)\,\bar{v}_0\right]. \tag{1.41}$$

Единичный вектор $\bar{i}_\xi$ получаем из уравнения

$$\bar{i}_\eta=\bar{i}_\zeta\times\bar{i}_\xi,$$

и, таким образом, геометрия орбиты определена полностью.

Когда эксцентриситет орбиты очень мал, направление на перицентр слабо выражено. Эту трудность можно обойти, если выбрать другие единичные векторы в плоскости орбиты: $\bar{i}_n$ — в направлении восходящего узла, а $\bar{i}_m$, равным

$$\bar{i}_m=\bar{i}_\zeta\times\bar{i}_n,$$

как показано на рис. 1.5.

Если в качестве орбитальных элементов использовать векторы начального положения $\bar{r}_0$ и скорости $\bar{v}_0$, то можно вывести зависимости $\bar{r}$ и $\bar{v}$ от этих элементов. Прежде всего отметим, что вектор положения тела на орбите как функцию угла f, измеряемого от направления на перицентр, можно выразить через проекции этого вектора на направления ξ и η:

$$\bar{r}=r\cos f\cdot\bar{i}_\xi+r\sin f\cdot\bar{i}_\eta. \tag{1.42}$$

Дифференцируя это уравнение и принимая во внимание уравнения

(1.35), (1.34) и (1.39), получим выражение для вектора текущей скорости

$$\bar{v}=\sqrt{\frac{\mu}{p}}\,[-\sin f\cdot\bar{i}_\xi+(e+\cos f)\,\bar{i}_\eta]. \tag{1.43}$$

Два последних уравнения, конечно, справедливы и в начальной точке с векторами положения и скорости $\bar{r}_0$ и $\bar{v}_0$. Тогда, преобразуя эти уравнения, запишем единичные векторы через векторы начального положения и скорости

$$\bar{i}_\xi=\frac{e+\cos f_0}{p}\,\bar{r}_0-\frac{r_0}{\sqrt{\mu p}}\sin f_0\cdot\bar{v}_0,$$

$$\bar{i}_\eta=\frac{\sin f_0}{p}\,\bar{r}_0+\frac{r_0}{\sqrt{\mu p}}\cos f_0\cdot\bar{v}_0.$$

Подставляя эти выражения обратно в уравнения (1.42) и (1.43), найдем следующие уравнения для векторов текущего положения и текущей скорости r и v в зависимости от r_0, v_0 и разности углов $(f-f_0)$:

$$\bar{r}=\left\{1-\frac{r}{p}[1-\cos(f-f_0)]\right\}\bar{r}_0+\frac{rr_0}{\sqrt{\mu p}}\sin(f-f_0)\,\bar{v}_0, \tag{1.44}$$

$$\bar{v}=\left\{\frac{\bar{r}_0\cdot\bar{v}_0}{pr_0}\,[1-\cos(f-f_0)]-\frac{1}{r_0}\sqrt{\frac{\mu}{p}}\sin(f-f_0)\right\}\bar{r}_0+$$
$$+\left\{1-\frac{r_0}{p}[1-\cos(f-f_0)]\right\}\bar{v}_0. \tag{1.45}$$

Радиальное расстояние r в уравнении (1.44) удобно вычислять следующим образом. Из уравнения орбиты легко получается

$$r=\frac{p}{1+e\cos f_0\cos(f-f_0)-e\sin f_0\sin(f-f_0)}.$$

Тогда, исключая $e\cos f_0$ и $e\sin f_0$ с помощью уравнения орбиты и уравнения для радиальной скорости в начальной точке, будем иметь

$$r=\frac{p}{1+\left(\frac{p}{r_0}-1\right)\cos(f-f_0)-\frac{1}{r_0}\sqrt{\frac{p}{\mu}}\,\bar{r}_0\cdot\bar{v}_0\sin(f-f_0)}. \tag{1.46}$$

Полученные уравнения (1.44)—(1.46) будут иметь в дальнейшем весьма важное значение.

Определение орбиты по трем векторам положения

Если три заданных вектора последовательных положений тела на орбите $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$ компланарны, т. е. $\bar{r}_1\times\bar{r}_2\cdot\bar{r}_3=0$, то элементы этой орбиты могут быть определены следующим образом. Из уравнения орбиты имеем

$$r_i=\frac{p}{1+e\cos f_i}, \quad i=1,\ 2,\ 3.$$

Используя это уравнение при $i=1$ и $i=3$, а также очевидное равенство

$$f_3=(f_3-f_1)+f_1,$$

получим

$$e\cos f_1=\frac{p-r_1}{r_1},$$

$$e\sin f_1=\frac{r_3(p-r_1)\cos(f_3-f_1)-r_1(p-r_3)}{r_1r_3\sin(f_3-f_1)}.$$

Два последних уравнения позволяют определить e как функцию параметра p.

Для того чтобы найти p, заметим, что последнее уравнение остается справедливым при замене индекса 3 на индекс 2. Отсюда, приравнивая друг другу два варианта правых частей последнего уравнения и разрешая полученное соотношение относительно p, найдем

$$p=\frac{r_1r_2r_3[\sin(f_2-f_3)+\sin(f_3-f_1)+\sin(f_1-f_2)]}{r_2r_3\sin(f_2-f_3)+r_1r_3\sin(f_3-f_1)+r_1r_2\sin(f_1-f_2)}.$$

Ясно, что точность вычислений значительно ухудшается, когда углы между векторами положения становятся малыми.

Единичный вектор $\bar{i}_\xi$ направления на перицентр можно выразить в виде линейной комбинации любой пары векторов положения. Например,

$$\bar{i}_\xi=\alpha\bar{r}_1+\beta\bar{r}_3.$$

Умножая скалярно единичный вектор $\bar{i}_\xi$ поочередно на $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_3$, получим

$$\bar{i}_\xi\cdot\bar{r}_1=\alpha r_1^2+\beta r_1r_3\cos(f_3-f_1),$$

$$\bar{i}_\xi\cdot\bar{r}_3=\alpha r_1r_3\cos(f_3-f_1)+\beta r_3^2.$$

Но из уравнения орбиты следует

$$\bar{i}_\xi\cdot\bar{r}_1=r_1\cos f_1=\frac{1}{e}(p-r_1),$$

$$\bar{i}_\xi\cdot\bar{r}_3=r_3\cos f_3=\frac{1}{e}(p-r_3).$$

Отсюда, разрешая относительно α и β, получим

$$\alpha=\frac{1}{er_1\sin^2(f_3-f_1)}\left[\left(\frac{p}{r_1}-1\right)-\left(\frac{p}{r_3}-1\right)\cos(f_3-f_1)\right],$$

$$\beta=\frac{1}{er_3\sin^2(f_3-f_1)}\left[\left(\frac{p}{r_3}-1\right)-\left(\frac{p}{r_1}-1\right)\cos(f_3-f_1)\right].$$

Наконец, направление вектора момента количества движения можно определить из выражения

$$\bar{i}_\zeta = \frac{\bar{r}_1 \times \bar{r}_2}{|\bar{r}_1 \times \bar{r}_2|}.$$

Третий единичный вектор находится как векторное произведение $\bar{i}_\zeta$ и $\bar{i}_\xi$.

Напомним, что при малом эксцентриситете направление на перицентр слабо выражено. В этом случае можно, как и ранее, вместо единичных векторов $\bar{i}_\xi$ и $\bar{i}_\eta$ использовать $\bar{i}_n$ и $\bar{i}_m$.

Задачи

1. 1. Функция $(1-2\nu x+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ называется *производящей функцией* для полиномов Лежандра $P_k(\nu)$. Действительно, функции $P_k(\nu)$ можно определить как коэффициенты степенного ряда

$$(1-2\nu x+x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\nu)\, x^k.$$

а) Из тождества

$$[1-2(-\nu)x+x^2]^{-\frac{1}{2}} = [1-2\nu(-x)+(-x)^2]^{-\frac{1}{2}}$$

вывести свойство полиномов Лежандра

$$P_k(-\nu) = (-1)^k P_k(\nu).$$

б) Показать, что

$$P_k(1) = 1.$$

в) Дифференцируя обе части разложения производящей функции по x, умножая на $(1-2\nu x+x^2)$ и приравнивая коэффициенты при x^k, вывести рекуррентную формулу для полиномов Лежандра, используемую в разд. 1. 2.

г) Используя промежуточные результаты, полученные в п. «в», и дифференцируя обе части разложения в ряд производящей функции по ν, вывести рекуррентную формулу, которая применялась при выводе уравнения (1. 7).

д) Дифференцируя формулу, полученную в п. «в», и используя формулу, полученную в п. «г», вывести рекуррентную формулу для производных от полиномов Лежандра.

1. 2. Используя формулу Родрига, вычислить первые четыре полинома Лежандра.

1. 3. Используя формулу Родрига, показать, что

$$\int_0^{\pi} P_k(\cos\beta)\sin\beta\, d\beta = \int_{-1}^{1} P_k(\nu)\, d\nu = 0.$$

1.4. Рассмотрим сферу единичного радиуса и три единичных вектора $\bar{i}_A$, $\bar{i}_B$, $\bar{i}_C$, направленных из центра сферы к трем вершинам сферического треугольника на ее поверхности. Пусть A, B, C — углы при вершинах, a, b, c — противолежащие им стороны. Тогда, раскрывая надлежащим образом обе части векторного равенства

$$(\bar{i}_A \times \bar{i}_B)\cdot(\bar{i}_A \times \bar{i}_C) = (\bar{i}_B\cdot\bar{i}_C) - (\bar{i}_A\cdot\bar{i}_C)\cdot(\bar{i}_A\cdot\bar{i}_B),$$

вывести правило косинусов сферической тригонометрии

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

1.5. Из равенства

$$2\bar{\nabla}(\bar{u}\cdot\bar{v}) = (\bar{u}\cdot\bar{\nabla})\,\bar{v} + (\bar{v}\cdot\bar{\nabla})\,\bar{u} + \bar{u}\times(\bar{\nabla}\times\bar{v}) + \bar{v}\times(\bar{\nabla}\times\bar{u})$$

установить векторное тождество, использованное при выводе уравнения (1.7).

1.6. Если расстояние r от центра притяжения велико по сравнению с размерами притягивающего тела, то потенциал можно приближенно выразить в виде

$$V = \frac{G}{r}\iiint \sum_{k=0}^{2}\left(\frac{\rho}{r}\right)^k P_k(\cos\gamma)\,dm.$$

а) Показать, что потенциал можно записать следующим образом:

$$V = \frac{Gm}{r} + \frac{G}{2r^3}(A + B + C - 3I),$$

где m — полная масса тела; A, B, C — три главных момента инерции; I — момент инерции тела относительно прямой, соединяющей центр притяжения с точкой, в которой вычисляется потенциал. Это уравнение известно как *формула Маккаллаха.*

Форма Луны хорошо моделируется трехосным эллипсоидом, а экспериментально определенные значения моментов инерции A, B, C даны в приложении.

Отметим, что

$$A = \iiint (\eta^2 + \zeta^2)\,dm,$$

$$B = \iiint (\xi^2 + \zeta^2)\,dm,$$

$$C = \iiint (\xi^2 + \eta^2)\,dm,$$

$$I = \iiint \rho^2 \sin^2\gamma\,dm,$$

$$A + B + C = 2\iiint \rho^2\,dm.$$

б) Показать, что если оси декартовой системы координат совпадают с главными осями инерции, то

$$I=(\bar{i}_r\cdot\bar{i}_x)^2 A+(\bar{i}_r\cdot\bar{i}_y)^2 B+(\bar{i}_r\cdot\bar{i}_z)^2 C.$$

Вычислить $\overline{\nabla} V$.

1.7. Вывести уравнение движения тела P_1 относительно общего центра масс P_1 и P_2 в виде

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}+\frac{Gm_2^3}{(m_1+m_2)^2r^3}\bar{r}=0,$$

где $\bar{r}=\bar{r}_1-\bar{r}_{cm}^{*}$.

1.8. В задачах, связанных с Луной, учитываются в основном три тела: Земля, Луна и Солнце. Пусть их массы равны соответственно m_E, m_M и m_S; точкой B обозначим общий центр притяжения, или *барицентр* Земли и Луны. Определим вектор $\bar{r}_{EM}$ как вектор положения Луны относительно Земли; подобным же образом определяются и относительные векторы $\bar{r}_{ES}$, $\bar{r}_{MS}$ и $\bar{r}_{BS}$.

а) Вывести уравнения движения Луны относительно Земли и движения Солнца относительно барицентра в виде

$$\frac{d^2\bar{r}_{EM}}{dt^2}+\frac{G(m_E+m_M)}{r_{EM}^3}\bar{r}_{EM}=\frac{Gm_S(m_E+m_M)}{m_Em_M}\overline{\nabla}_{EM}F,$$

$$\frac{d^2\bar{r}_{BS}}{dt^2}=\frac{G(m_E+m_M+m_S)}{m_E+m_M}\overline{\nabla}_{BS}F,$$

где $F=\dfrac{m_M}{r_{MS}}+\dfrac{m_E}{r_{ES}}$.

Операторы градиента $\overline{\nabla}_{EM}$ и $\overline{\nabla}_{BS}$ относятся соответственно к координатам векторов $\bar{r}_{EM}$ и $\bar{r}_{BS}$.

б) Получить разложение

$$F=\frac{m_E+m_M}{r_{BS}}+\frac{m_Em_M}{m_E+m_M}\cdot\frac{1}{r_{BS}}\left[\left(\frac{r_{EM}}{r_{BS}}\right)^2P_2(\cos\alpha)+\frac{m_E-m_M}{m_E+m_M}\left(\frac{r_{EM}}{r_{BS}}\right)^3P_3(\cos\alpha)+\frac{m_E^2-m_Em_M+m_M^2}{(m_E+m_M)^2}\left(\frac{r_{EM}}{r_{BS}}\right)^4P_4(\cos\alpha)+\cdots\right],$$

где $\cos\alpha=\dfrac{\bar{r}_{EM}\cdot\bar{r}_{BS}}{r_{EM}r_{BS}}$.

---

* Радиус-вектор общего центра масс (*прим. ред.*).

в) Показать, что отношение второго члена к первому в этом разложении равно приблизительно 8×10^{-8}. Следовательно, движение Солнца относительно барицентра Земля—Луна является по существу эллиптическим:

$$\frac{d^2\bar{r}_{BS}}{dt^2}+\frac{G(m_E+m_M+m_S)}{r_{BS}^3}\,r_{BS}=0.$$

1. 9. Так называемая *ограниченная задача трех тел* состоит в том, чтобы определить движение тела бесконечно малой массы P_3 в поле тяготения двух тел конечных масс P_1 и P_2, которые обращаются одно относительно другого по круговым орбитам. Поместим начало координат в центре масс системы. В качестве единицы массы выберем сумму всех масс, поэтому массы m_1 и m_2 можно записать соответственно $(1-\mu)$ и μ, где $\mu\leqslant1/2$. За единицу дальности примем постоянное расстояние между телами конечной массы, а единицу времени выберем так, чтобы выполнялось условие $G=1$.

а) Показать, что при таком выборе единиц измерения постоянная угловая скорость обращения тел конечной массы относительно их общего центра равна единице.

б) Показать, что уравнение движения тела P_3 во вращающейся системе координат, в которой ось x направлена по прямой, соединяющей центры тел P_1 и P_2, а плоскость xy совпадает с плоскостью движения тел P_1 и P_2, имеет вид

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}+2\overline{M}_1\frac{d\bar{r}}{dt}=\overline{M}_2\bar{r}-\frac{1-\mu}{r_1^3}\bar{r}_1-\frac{\mu}{r_2^3}\bar{r}_2,$$

где $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$ и $\bar{r}$ — векторы положения P_3 по отношению к P_1, P_2 и центру масс P_1 и P_2, а

$$\overline{M}_1=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \overline{M}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

в) Получить интеграл энергии, называемый *интегралом Якоби*,

$$v^2=x^2+y^2+\frac{2(1-\mu)}{r_1}+\frac{2\mu}{r_2}-C,$$

где C — постоянная, а x, y, z — координаты тела P_3. Полагая $v=0$, можно получить поверхности нулевой относительной скорости при различных значениях C.

1. 10. Умножая векторно $\bar{h}$ на обе части уравнения (1.32), показать, что скорость в любой момент времени есть сумма двух векторов, постоянных по величине. Один из них длиной μ/h нормален к радиусу-вектору $\bar{r}$, а другой длиной $e\mu/h$ нормален к $\bar{e}$ или к оси орбиты. Исходя из этого показать, что годограф движения есть окружность радиуса μ/h, центр которой отстоит от начала координат на $e\mu/h$. Построить годографы для движения по эллипсу, параболе и гиперболе.

1.11. Показать, что матрицу поворота, определенную в разд. 1.7, можно получить как произведение трех отдельных матриц поворота

$$\overline{R} = \overline{R}_{\Omega}\overline{R}_{i}\overline{R}_{\omega},$$

где

$$\overline{R}_{\Omega} = \begin{pmatrix} \cos\Omega & -\sin\Omega & 0 \\ \sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\overline{R}_{i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix},$$

$$\overline{R}_{\omega} = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega & 0 \\ \sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и представить результаты геометрически.

1.12. Пусть начало системы координат находится в центре Земли. Обозначим через λ и β долготу и широту точки в эклиптической системе координат, а через α и δ прямое восхождение и склонение той же точки в экваториальной системе. Показать, что

$$\cos\delta\cos\alpha = \cos\beta\cos\lambda,$$

$$\cos\delta\sin\alpha = \cos\beta\sin\lambda\cos\varepsilon - \sin\beta\sin\varepsilon,$$

$$\sin\delta = \cos\beta\sin\lambda\sin\varepsilon + \sin\beta\cos\varepsilon,$$

где ε — наклонение эклиптики.

1.13. Выразить углы Эйлера Ω, i, ω в виде векторной комбинации единичных векторов $\bar{i}_x$, $\bar{i}_y$, $\bar{i}_z$ и $\bar{i}_\xi$, $\bar{i}_\eta$, $\bar{i}_\zeta$.

1.14. Показать, что если γ — угол между радиусом-вектором $\bar{r}$ и вектором скорости $\bar{v}$, то эксцентриситет можно вычислить с помощью выражения

$$e^2 = 1 + \frac{v^4 r^2 \sin^2\gamma}{\mu^2} - \frac{2v^2 r \sin^2\gamma}{\mu}.$$

1.15. Показать, что если v_r и v_θ — радиальная и трансверсальная составляющие вектора скорости точки, находящейся на расстоянии r от центра притяжения, то эксцентриситет e можно вычислить по формуле

$$e^2=\left[\left(\frac{v_\theta}{v_c}\right)^2-1\right]^2+\left(\frac{v_\theta}{v_c}\right)^2\left(\frac{v_r}{v_c}\right)^2,$$

где v_c — скорость тела на круговой орбите радиуса r.

1. 16. Показать, что

$$\bar{r}=r\begin{pmatrix}\cos\Omega\cos\theta-\sin\Omega\sin\theta\cos i\\ \sin\Omega\cos\theta+\cos\Omega\sin\theta\cos i\\ \sin\theta\sin i\end{pmatrix},$$

$$\bar{v}=\frac{\mu}{h}\begin{pmatrix}-\cos\Omega(\sin\theta+e\sin\omega)-\sin\Omega(\cos\theta+e\cos\omega)\cos i\\ -\sin\Omega(\sin\theta+e\sin\omega)+\cos\Omega(\cos\theta+e\cos\omega)\cos i\\ (\cos\theta+e\cos\omega)\sin i\end{pmatrix},$$

где $\theta=\omega+f$.

1. 17. Космический корабль приближается к планете, гравитационная постоянная которой равна μ. Показать, что вектор положения перицентра $\bar{r}_p$, измеряемый от центра планеты, можно вычислять по формуле

$$\bar{r}_p=\frac{e+\cos f_0}{1+e}\bar{r}_0-\frac{hr_0\sin f_0}{\mu(1+e)}\bar{v}_0,$$

где $\bar{r}_0$, $\bar{v}_0$ — векторы положения и скорости корабля относительно планеты;

$$h^2=(\bar{r}_0\times\bar{v}_0)\cdot(\bar{r}_0\times\bar{v}_0),$$

$$e^2=\left(\frac{h^2}{\mu r_0}-1\right)^2+\left(\frac{h}{\mu r_0}\bar{r}_0\cdot\bar{v}_0\right)^2,$$

$$\cos f_0=\frac{\left(\frac{h^2}{\mu}\right)-r_0}{er_0}.$$

1. 18 Космический корабль приближается к планете, гравитационная постоянная которой равна μ.

а) Показать, что вектор скорости можно выразить в виде

$$\bar{v}=\sqrt{\frac{\mu}{r_p(1+e)}}\left[-\sin f\cdot\bar{i}_\xi+(e+\cos f)\bar{i}_\eta\right],$$

где r_p — модуль радиуса-вектора перицентра.

б) Требуется произвести малые изменения δe и δf эксцентриситета e и угла f, отсчитываемого от направления на перицентр. Используя уравнение орбиты в виде

$$r=\frac{r_p(1+e)}{1+e\cos f},$$

показать, что если r и r_p остаются неизменными, то δe и δf должны быть связаны соотношением

$$(1-\cos f)\,\delta e+e(1+e)\sin f\,\delta f=0.$$

в) Показать, что соответствующее изменение вектора скорости $\delta\bar{v}$, при котором r_p остается инвариантным, определяется выражением

$$\delta\bar{v}=\frac{e}{2(1-\cos f)}\sqrt{\frac{\mu}{r_p(1+e)}}\left[(1-\cos f)^2\bar{i}_\xi-(2+e-\cos f)\sin f\,\bar{i}_\eta\right]\delta f.$$

Следовательно, в первом приближении направление, вдоль которого скорость может меняться без изменения высоты перицентра, совпадает с направлением вектора:

$$(1-\cos f)^2\bar{i}_\xi-(2+e-\cos f)\sin f\cdot\bar{i}_\eta.$$

Указание: в первом приближении

$$\delta\bar{i}_\xi=-\bar{i}_\eta\delta f,\quad \delta\bar{i}_\eta=\bar{i}_\xi\delta f.$$

Библиография

Небесной механике посвящены книги Бэйкера и Мейкемсона [4], Денби [20], Хэргета [27], Хэррика [29], Мультона [47], Пламмера [51], Смарта [56] и [57], Уиттекера [63] и Уинтнера [64]. Книги Мультона и Пламмера стали классическими. Формулировку классических задач с помощью современной векторной записи, а также очень ясное изложение практических вопросов, связанных с расчетом орбит, можно найти в известной книге Хэргета. На более современном уровне, но более элементарно, изложена небесная механика в работе Денби, причем здесь также используется векторная запись. Из двух книг Смарта работу [57] можно рекомендовать как хорошее введение к прикладным задачам наблюдательной астрономии. Материал нескольких первых глав книги Смарта [56] во многом совпадает с двумя первыми главами настоящей книги. В книге Уинтнера небесная механика представлена в очень усложненной форме, что делает эту книгу малодоступной для читателя, не имеющего специальной математической подготовки.

Формулировку законов Кеплера и Ньютона можно, конечно, найти в любом учебнике по механике. При написании раздела о потенциале распределенной массы автор использовал работу Макроберта [41]. Вывод потенциальной функции несимметричного трехосевого тела, подобного Луне, приписывается Маккаллаху [36] и может быть найден в более современной трактовке у Денби [20], а также у Бэйкера и Мейкемсона [4].

Задача n-тел и возмущенное движение двух тел хорошо изложены у Мультона [47], Денби [20] и Смарта [56]. Разложение возмущающей функции, представленное в разд. 1.4, значительно более подробно исследуется в книге Смарта [56]. Способ явного расчета возмущающей силы, не вызывающий никаких затруднений, связанных с вычислениями, был разработан д-ром Дж. Поттером из Приборной лаборатории МТИ.

Понятие «сфера влияния» планеты принадлежит Лапласу. Изучая движение кометы вблизи планеты Юпитер, Лаплас пришел к выводу, что более удобно связать это движение с центром планеты, а солнечное притяжение рассматривать в качестве возмущающей силы. В результате было найдено удобное аналитическое соотношение, используемое в качестве критерия выбора начала координат. Вывод уравнения поверхности влияния, предложенный д-ром Дж. Миллером из Приборной лаборатории МТИ, можно найти в приложении к работе Бэттина и Миллера [13].

Орбитальные элементы и системы координат наиболее подробно рассматриваются в книгах Смарта [57] и Бэйкера и Мейкемсона [4]. Рассмотрение более тонких вопросов, связанных с точным определением координатных осей, как это требуется в астрономии, выходит за рамки настоящей книги. Эти вопросы обсуждаются в книгах Смарта [57], Бэйкера и Мейкемсона [4], а также в «Приложении к Морскому календарю» [21]. Мы будем считать наши системы координат заданными и неподвижными в инерциальном пространстве, что полностью удовлетворяет поставленным задачам.

Уиттекер [63], так же как и другие авторы работ по небесной механике, рассматривает задачу трех тел достаточно полно. Поэтому в настоящей книге этому вопросу уделено внимание только в задачах 1.8 и 1.9.

ГЛАВА II

Положение и скорость на орбите в задаче двух тел

В гл. I относительное движение двух тел рассматривалось без учета связи положения и скорости на орбите со временем. Оказалось возможным проинтегрировать уравнения движения таким образом, чтобы время не входило явно в решение. В результате было получено геометрическое описание траектории путем установления функциональной зависимости между расстоянием от центра притяжения и углом ориентации радиуса-вектора этого расстояния относительно выбранного опорного направления.

В этой главе решение будет дополнено определением функциональной зависимости положения и скорости от времени, отсчитываемого от некоторой эпохи. Однако перед этим мы считаем уместным рассмотреть свойства конических сечений, чтобы снабдить читателя полезным материалом справочного характера.

Понятие большой полуоси орбиты анализируется только в настоящей главе, поскольку при геометрическом описании орбиты оно не имело существенного значения. Но когда вводятся обобщенные определения периода на эллиптической орбите и орбитальной энергии, без понятия большой полуоси уже нельзя обойтись.

Далее будет систематически рассмотрена зависимость положения и скорости на орбите от времени для параболической, эллиптической и гиперболической орбит в указанном порядке. Затем мы выведем как аналитическим, так и геометрическим способами уравнение Кеплера и покажем различные методы решения этого фундаментального уравнения.

В заключение весь материал данной главы будет обобщен путем вывода универсальных формул, применяемых ко всем типам конических сечений. Эти формулы имеют преимущество по сравнению со своим классическим первоисточником, так как при их применении вовсе не обязательно знать тип конического сечения. К тому же переход от одного типа конического сечения к другому становится непрерывным без неопределенностей и особых случаев.

2.1. Конические сечения

Окружность, эллипс, параболу и гиперболу часто называют *коническими сечениями,* поскольку все эти кривые могут быть получены как результат пересечения правильного кругового конуса с плоскостью. Тип конического сечения зависит от угла между секущей плоскостью и основанием конуса. Так, если секущая плоскость параллельна основанию, то получаем *окружность*. Если секущая плоскость наклонена к основанию конуса, а угол наклона меньше угла между образующими конуса и его основанием, то сечение есть *эллипс*. Если секущая плоскость параллельна одной из образующих, то в результате пересечения получится *парабола*. И, наконец, если секущая плоскость наклонена к основанию под еще большим углом, то она будет также пересекать и ту часть конуса, которая получится, если продлить образующие. В результате будем иметь сечение, состоящее из двух частей и называемое *гиперболой*.

Уравнение кривых второго порядка в прямоугольной системе координат имеет вид

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

Путем параллельного переноса и поворота осей координат это уравнение можно свести к одному из следующих видов:

$$A_1x^2+B_1y^2+C_1=0,$$

$$y^2+D_1x=0.$$

Если C_1 не равно нулю, а A_1, B_1, C_1 имеют различные знаки, то геометрическое место точек, определяемых первым уравнением, представляет собой окружность, эллипс или гиперболу. Начало системы координат называется *центром* конического сечения, а оси координат — *осями симметрии*. С другой стороны, если D_1 не равно нулю, то второе уравнение дает параболу. В этом случае начало системы координат носит название *вершины*, а ось x есть *ось* параболы.

Уравнение эллипса или гиперболы с центром в начале координат в нормальной форме записывается следующим образом:

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{2.1}$$

где a и b — положительные константы ($a>b$), которые соответственно называются *большой полуосью* и *малой полуосью*. Знак «плюс» характеризует эллипс, при знаке «минус» получаем гиперболу. Окружность — частный случай эллипса, когда a равно b. Если аналогичный случай, т. е. a равно b, имеет место для гиперболы, то она называется *равнобочной*.

Можно дать и такое определение эллипса: эллипс есть геометрическое место точек, для которых сумма их расстояний от двух фиксированных точек постоянна. Две указанные фиксированные точки называются фокусами эллипса. Если c—расстояние от одного из фокусов до центра, то отношение c/a называется *эксцентриситетом.*

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Эксцентриситет эллипса всегда меньше единицы и равен нулю, когда эллипс вырождается в окружность. По мере увеличения e увеличивается отношение большой оси эллипса к малой и эллипс принимает все более и более вытянутую форму.

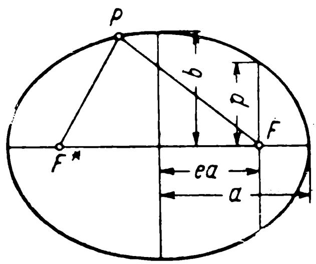


Рис. 2. 1. Эллипс:
$PF + PF^* = 2a$

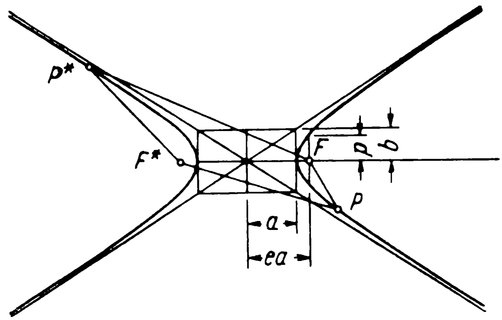


Рис. 2. 2. Гипербола:
$PF^* - PF = 2a;\ P^*F - P^*F^* = 2a$

Гиперболу можно определить как геометрическое место точек, для которых постоянна разность расстояний до двух фиксированных точек, называемых *фокусами.* Снова обозначая через c расстояние от фокуса до центра, назовем отношение

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

эксцентриситетом гиперболы. Эксцентриситет гиперболы всегда больше единицы. Прямая, проходящая через оба фокуса гиперболы, называется *действительной осью;* она пересекает гиперболы в двух точках — *вершинах,* отстоящих от центра на величину a. Вторая ось, проходящая через центр и не пересекающая гиперболу, называется *мнимой.* Проходящие через центр две прямые, определяемые уравнением

$$y = \pm \frac{b}{a} x,$$

называются *асимптотами* гиперболы.

Можно иначе определить конические сечения как геометрическое место точек, для которых отношение расстояний от фиксированной точки до заданной прямой линии постоянно. Это определение непосредственно приводит к уравнению конических сечений в полярных координатах. Фиксированная точка в данном определении есть фокус, заданная прямая — *директриса,* а постоянное отношение представляет собой эксцентриситет. Помещая фокус в начало координат, легко вывести общее уравнение конических сечений в виде

$$r = \frac{p}{1 + e\cos f}, \tag{2.2}$$

где r и f — обычные полярные координаты, а p — так называемый *параметр.* Если k — расстояние от фокуса до директрисы, то

$$p = ke.$$

Хорда, проходящая через начало координат, перпендикулярная к большой оси и равная по величине $2p$, называется *фокальным параметром* конического сечения. Поэтому величину p часто называют *полуфокальным параметром.* Нетрудно показать, что

$$p = \begin{cases} a & \text{для окружности,} \\ a(1-e^2) & \text{для эллипса,} \\ 2q & \text{для параболы,} \\ a(e^2-1) & \text{для гиперболы,} \end{cases} \tag{2.3}$$

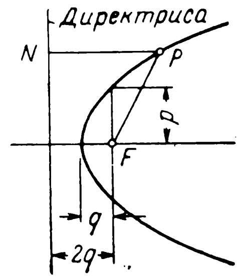


Рис. 2.3. Парабола: $PF = PN$

где q — расстояние между фокусом и вершиной параболы. Эллипс, гипербола и парабола показаны на рис. 2. 1—2. 3.

В предельных случаях для эллипса или гиперболы, когда эксцентриситет равен единице, орбита превращается в прямые линии. Вырожденный эллипс представляет собой просто отрезок, соединяющий оба фокуса. Вырожденная гипербола состоит из двух полупрямых, идущих из фокусов в бесконечность. Вырожденная парабола ($q=0$) — линия вдоль действительной оси, идущая из фокуса в бесконечность.

2.2. Большая полуось и интеграл энергии

Нетрудно показать, что при движении тела по конической орбите его радиус-вектор $\bar{r}$ ометает площадь A с секторной скоростью

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{df}{dt}.$$

Сравнивая последнее уравнение с уравнением (1. 35), найдем, что момент количества движения h равен удвоенной секторной скорости. Поскольку h — постоянная величина, это справедливо и для dA/dt. Тем самым доказывается *второй закон Кеплера,* сформулированный во введении к гл. I.

Период эллиптического движения можно определить как время, необходимое для того, чтобы радиус-вектор описал всю площадь, ограниченную эллипсом. Отсюда следует, что

$$2\frac{\pi ab}{P}=h.$$

Здесь P — период обращения, a и b — большая и малая полуоси эллипса. Так как

$$b=a\sqrt{1-e^2},$$

то

$$h=na^2\sqrt{1-e^2}, \tag{2.4}$$

где

$$n=\frac{2\pi}{P} \text{ —} \tag{2.5}$$

так называемое *среднее угловое движение*. Кроме того, из уравнения (1.34) имеем

$$h^2=\mu p=\mu a(1-e^2). \tag{2.6}$$

Комбинируя уравнения (2.4) и (2.6), получим очень важный результат, известный под названием *третьего закона Кеплера*:

$$\mu=n^2a^3. \tag{2.7}$$

Преобразуя уравнение (2.7), получим период обращения тела по эллиптической орбите

$$P=2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}. \tag{2.8}$$

Таким образом, период обращения не зависит от элементов орбиты, кроме большой полуоси. По исторически сложившейся традиции большую полуось орбиты называют *средним расстоянием*, хотя она не равна средней длине радиуса-вектора за определенный период времени (см. задачу 2.5). В астрономии большая полуось земной орбиты часто выбирается в качестве единицы длины и называется *астрономической единицей* (а. е.).

Интеграл энергии (иногда его называют *интегралом живой силы*) можно получить следующим образом. Запишем сначала уравнение относительного движения (1.30) в виде

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}=\mu\overline{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Затем, принимая во внимание соотношения

$$\frac{d\bar{r}}{dt}\cdot\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\cdot\frac{d\bar{r}}{dt}\right)=\mu\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right)$$

и интегрируя уравнение относительного движения, получим

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{\mu}{r} + c,$$

где c — постоянная интегрирования.

Выразим постоянную интегрирования через элементы орбиты. Для этого продифференцируем общее уравнение орбиты (2. 2), а затем, используя уравнение (1. 35), получим выражения для составляющих вектора скорости в полярных координатах

$$\frac{dr}{dt} = \frac{h}{p} e \sin f,$$

$$r \frac{df}{dt} = \frac{h}{r} = \frac{h}{p} (1 + e \cos f).$$

Тогда

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r \frac{df}{dt}\right)^2 = \frac{h^2}{p^2} (1 + 2e \cos f + e^2).$$

Следовательно, при $f = 0$ имеем

$$r = \frac{p}{1 + e}, \qquad v^2 = \left[\frac{h}{p} (1 + e)\right]^2.$$

Отсюда найдем постоянную интегрирования

$$c = -\mu \frac{(1 - e^2)}{2p}.$$

Таким образом, в зависимости от типа конического сечения интеграл энергии выражается следующим образом:

$$v^2 = \begin{cases} \mu \left(\dfrac{2}{r} - \dfrac{1}{a}\right) & \text{для эллипса,} \\ \mu \dfrac{2}{r} & \text{для параболы,} \\ \mu \left(\dfrac{2}{r} + \dfrac{1}{a}\right) & \text{для гиперболы,} \end{cases} \tag{2.9}$$

Отметим, что энергия орбиты, так же как и период обращения, зависит только от большой полуоси.

Уравнение (2. 9) позволяет утверждать следующее: если тело P_2 начало двигаться из точки на расстоянии r от P_1, то большая полуось орбиты результирующего движения зависит только от начального взаиморасположения тел P_1 и P_2 и начальной скорости и не зависит от направления движения. Сравнивая численные значения v^2 и $2\mu/r$, определяют тип конической орбиты. Для этой цели, а также для некоторых других задач, удобно приписывать большой полуоси гиперболы отрицательное значение. Имея это в виду, можно записать единую формулу для a:

$$a=\left(\frac{2}{r}-\frac{v^2}{\mu}\right)^{-1}, \tag{2.10}$$

а тип конической орбиты определять по знаку результата. Полученное соотношение будет использоваться в дальнейшем там, где это целесообразно для вывода необходимых положений.

2.3. Положение и скорость на параболической орбите

Задача определения положения тела на орбите в заданный момент времени наиболее проста в случае параболической траектории. Уравнение параболы в полярных координатах имеет вид

$$r=\frac{p}{1+\cos f}=\frac{p}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{f}{2}\right). \tag{2.11}$$

Отсюда с учетом закона сохранения момента количества движения

$$r^2\frac{df}{dt}=\sqrt{\mu p}$$

следует

$$4\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}\,dt=\sec^4\frac{f}{2}\,df.$$

Интегрируя, получим

$$2\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}(t-\tau)=\operatorname{tg}\frac{f}{2}+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{f}{2}, \tag{2.12}$$

где τ — момент времени, когда тело проходит через вершину параболы.

Для того чтобы разрешить уравнение (2. 12) относительно f при заданном t, требуется решить кубическое уравнение относительно $\operatorname{tg}(f/2)$. Легко показать, что при этом существует один и только один действительный корень. Для нахождения решения сравним уравнение (2. 12) с равенством

$$\frac{1}{3}\left(\lambda^3-\frac{1}{\lambda^3}\right)=\lambda-\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{3}\left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)^3.$$

Тогда, если записать

$$\operatorname{tg}\frac{f}{2}=\lambda-\frac{1}{\lambda},$$

то будем иметь

$$2\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}\,(t-\tau)=\frac{1}{3}\left(\lambda^3-\frac{1}{\lambda^3}\right).$$

Обозначим

$$\lambda = -\operatorname{tg} w, \quad \lambda^3 = -\operatorname{tg} s.$$

Отсюда следует

$$\operatorname{ctg} 2s = 3\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}\,(t-\tau),$$

$$\operatorname{tg}^3 w = \operatorname{tg} s,$$

$$\operatorname{tg}\frac{f}{2} = 2\operatorname{ctg} 2w.$$

Последние три уравнения позволяют без труда вычислить f с помощью тригонометрических таблиц.

Векторы положения и скорости можно определить тем же способом, что применялся при выводе уравнений (1.42) и (1.43). Пусть $\bar{i}_\xi$ и $\bar{i}_\eta$ — единичные векторы в плоскости параболической орбиты в соответствии с обозначениями, принятыми в разд. 1.7. Начало координат поместим в фокусе, а единичный вектор $\bar{i}_\xi$ направим к вершине параболы. Отсюда

$$\bar{r} = \frac{p}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{f}{2}\right)\bar{i}_\xi + p\operatorname{tg}\frac{f}{2}\,\bar{i}_\eta, \tag{2.13}$$

$$\bar{v} = -\frac{\sqrt{\mu p}}{r}\operatorname{tg}\frac{f}{2}\,\bar{i}_\xi + \frac{\sqrt{\mu p}}{r}\,\bar{i}_\eta, \tag{2.14}$$

причем $\operatorname{tg}(f/2)$ определяется так, как было показано выше.

2.4. Орбитальные аномалии и уравнение Кеплера

За исключением окружности или параболы, для которых $e=0$ и $e=1$, непосредственное интегрирование уравнения (1.36) не приводит к удобному выражению, связывающему время и угловое положение на орбите. Угол f обычно заменяют новой переменной, а пояснить геометрический смысл этой вспомогательной переменной можно с помощью следующего построения для эллиптической орбиты.

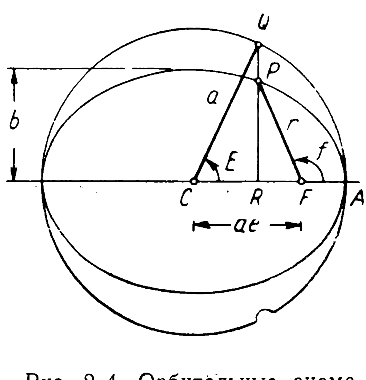


Рис. 2.4. Орбитальные аномалии для эллиптического движения

Пусть C — центр, а F — фокус эллипса, который изображен на рис. 2.4. Из центра C проведем вспомогательную окружность радиуса a. Пусть P — положение тела на эллиптической орбите, а Q — точка, в которой перпендикуляр к большой оси эллипса, проходящий через P, пересекает вспомогательную окружность. Угол PFA называется *истинной аномалией* и обозначается через f, а угол QCA — *эксцентрической аномалией* и обозначается через E.

Нетрудно показать, что расстояние от фокуса F до тела на орбите выражается формулой

$$r=a(1-e\cos E). \tag{2.15}$$

Сравнивая последнее уравнение с уравнением эллипса в полярных координатах

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f},$$

получим следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned} \cos f&=\frac{\cos E-e}{1-e\cos E}, & \cos E&=\frac{e+\cos f}{1+e\cos f}, \\ \sin f&=\frac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{1-e\cos E}, & \sin E&=\frac{\sqrt{1-e^2}\sin f}{1+e\cos f}. \end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

Из этих равенств следует, что

$$\operatorname{tg}\frac{f}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}. \tag{2.17}$$

Уравнение (2. 17), по-видимому, наиболее удобным образом связывает между собой углы f и E, поскольку $f/2$ и $E/2$ всегда находятся в одном и том же квадранте.

Возвращаясь к интегрированию уравнения (1. 36), запишем

$$1+e\cos f=\frac{(1-e^2)}{1-e\cos E}$$

и

$$df=\frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos E}dE.$$

Итак, уравнение (1. 36) эквивалентно следующему уравнению:

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\,dt=(1-e\cos E)\,dE.$$

Последнее уравнение легко интегрируется, а результат наиболее часто выражают в форме

$$M=E-e\sin E. \tag{2.18}$$

Постоянная интегрирования включена в величину M, называемую *средней аномалией*:

$$M = n(t - \tau), \tag{2.19}$$

где n — среднее угловое движение, определяемое либо по уравнению (2. 5), либо по формуле

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}, \tag{2.20}$$

а τ — момент прохождения через перицентр.

Величину M можно представить как угловую координату тела, движущегося с постоянной угловой скоростью по вспомогательной окружности. Соотношение (2. 18) между средней аномалией и эксцентрической аномалией называется *уравнением Кеплера.*

Как отмечалось в разд. 1. 7, постоянную интегрирования можно рассматривать в качестве одного из шести орбитальных элементов. Однако часто вместо τ используют другую связанную с ней величину. В разд. 1. 7 истинная долгота тела на орбите была определена следующим образом:

$$L = \bar{\omega} + f.$$

По аналогии определим *среднюю долготу*

$$l = \bar{\omega} + M.$$

В момент времени $t = 0$, называемый *эпохой*, средняя долгота равна

$$\varepsilon = \bar{\omega} - n\tau.$$

Тогда величина ε — *средняя долгота в эпоху* может быть использована в качестве орбитального элемента вместо τ. В этом случае средняя аномалия находится из соотношения

$$M = nt + \varepsilon - \bar{\omega}. \tag{2.21}$$

Уравнение (2. 18) можно вывести и геометрическим способом. С этой целью напомним, что на основании второго закона Кеплера можно записать

$$\frac{\text{площадь } PFA}{t - \tau} = \frac{h}{2} = \frac{nab}{2}.$$

Из рис. 2. 4 найдем соотношения между площадями:

$$\text{пл. } PFA = \text{пл. } PRA - \text{пл. } PFR$$

и далее

$$\text{пл. } PFR = \frac{1}{2} a(e - \cos E)\, b \sin E,$$

$$\text{пл. } PRA = \frac{b}{a} \text{ пл. } QRA =$$

$$= \frac{b}{a} (\text{пл. } QCA - \text{пл. } QCR) =$$

$$= \frac{b}{a} \left(\frac{1}{2} a^2 E - \frac{1}{2} a^2 \cos E \sin E \right).$$

Следовательно,

$$\text{пл. } PFA = \frac{1}{2} ab (E - e \sin E).$$

Из сравнения первого и последнего уравнений для площади PFA непосредственно получается уравнение Кеплера.

2.5. Методы решения уравнения Кеплера

Ввиду трансцендентности уравнения Кеплера* относительно E эта величина при заданном M не может быть выражена конечным числом членов. Существует, однако, одно и только одно решение уравнения Кеплера, что можно показать следующими рассуждениями. Рассмотрим функцию

$$F(E) = E - e \sin E - M$$

и предположим, что $k\pi \leqslant M < (k+1)\pi$, где k — некоторое целое число. Тогда, так как

$$F(k\pi) = k\pi - M \leqslant 0$$

и

$$F[(k+1)\pi] = (k+1)\pi - M > 0,$$

то $F(E)$ по крайней мере один раз на интервале $k\pi \leqslant E < (k+1)\pi$ обращается в нуль. Но производная $F'(E)$ всегда положительна, поэтому функция $F(E)$ равна нулю только при единственном значении E. Рассмотрим теперь некоторые из методов решения уравнения Кеплера, число которых буквально составляет несколько сотен.

Разложение в ряд Фурье — Бесселя

Дифференцируя уравнение Кеплера, получим

$$dE = \frac{dM}{1 - e \cos E}.$$

Функция $\frac{1}{1 - e \cos E}$ является периодической относительно M с периодом 2π, и поэтому можно записать

* Различные методы решения уравнения Кеплера описаны в работе [69] *(прим. ред.)*.

$$\frac{1}{1-e\cos E}=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cos kM,$$

где $A_0, A_1, A_2, \ldots$ — обычные коэффициенты Фурье:

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dM}{1-e\cos E}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dE=1,$$

$$A_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos kM}{1-e\cos E}\,dM=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\left[k\left(E-e\sin E\right)\right]dE=2J_k(ke),$$

где

$$J_k(\nu)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{\nu}{2}\right)^{k+2n}}{n!\,(n+k)!}\text{ —}$$

функция Бесселя первого рода k-го порядка (см. задачи 2.20—2.22). Таким образом, интегрируя уравнение Кеплера в дифференциальном виде с правой частью, выраженной рядом Фурье, получим необходимый результат:

$$E=M+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}J_k(ke)\sin kM. \tag{2.22}$$

При малых значениях e, характерных для большинства планет солнечной системы, ряд сходится довольно быстро (коэффициенты этого ряда для планет Меркурий, Венера, Земля и Марс приведены в приложении). Если члены порядка e^6 и выше отбросить, то в уравнении (2.22) останется только три ненулевых коэффициента Бесселя:

$$J_1(e)=\frac{1}{2}e\left(1-\frac{1}{8}e^2+\frac{1}{192}e^4\right),$$

$$J_2(2e)=\frac{1}{2}e^2\left(1-\frac{1}{3}e^2\right),$$

$$J_3(3e)=\frac{9}{16}e^3\left(1-\frac{9}{16}e^2\right).$$

Метод последовательных приближений

Уравнение Кеплера можно решить также с помощью простого итерационного процесса. Рассмотрим бесконечную последовательность

$$\left.\begin{array}{l} E_1=0, \\ E_2=M+e\sin E_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ E_{k+1}=M+e\sin E_k. \end{array}\right\} \tag{2.23}$$

Тогда из соотношений

$$E_{k+1}-E_k=e\,(\sin E_k-\sin E_{k-1})=$$
$$=2e\sin\frac{E_k-E_{k-1}}{2}\cos\frac{E_k+E_{k-1}}{2}=$$
$$=e\,(E_k-E_{k-1})\,\frac{\sin\frac{1}{2}(E_k-E_{k-1})}{\frac{1}{2}(E_k-E_{k-1})}\cos\frac{E_k+E_{k-1}}{2}$$

следует, что $|E_{k+1}-E_k|\leqslant e\,|E_k-E_{k-1}|\leqslant e^{k-1}\,|E_2-E_1|=e^{k-1}M$. Если значение e меньше единицы, то последовательность сходится к величине E, равной

$$E=\lim_{k\to\infty}E_k.$$

Это можно показать следующим путем:

$$|E-E_{k+1}|=\Big|\sum_{m=k+1}^{\infty}(E_{m+1}-E_m)\Big|\leqslant\sum_{m=k+1}^{\infty}|E_{m+1}-E_m|\leqslant$$
$$\leqslant M\sum_{m=k+1}^{\infty}e^{m-1}=M\frac{e^k}{1-e}.$$

Рассматриваемый процесс весьма эффективен при малых значениях e. Однако для случая орбиты, близкой к параболической, должны быть предусмотрены другие методы.

Разложение в ряд истинной аномалии

Истинную аномалию f можно непосредственно выразить в виде ряда Фурье через среднюю аномалию M. Результат аналогичен уравнению (2.22), но коэффициенты ряда несколько более сложны. Здесь приводится вывод этих коэффициентов, поскольку он отсутствует в обычных руководствах по небесной механике.

Используя равенства (2.16), легко показать, что

$$df=\frac{\sqrt{1-e^2}\,dM}{(1-e\cos E)^2}.$$

Так как функция $(1-e\cos E)^{-2}$ — периодическая относительно M, ее можно записать в виде

$$\frac{1}{(1-e\cos E)^2}=B_0+\sum_{k=1}^{\infty}B_k\cos kM,$$

где

$$B_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dM}{(1-e\cos E)^2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dE}{1-e\cos E}=\frac{1}{\sqrt{1-e^2}},$$

$$B_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos kM}{(1-e\cos E)^2}\,dM=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos[k(E-e\sin E)]}{1-e\cos E}\,dE=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\exp[ik(E-e\sin E)]}{1-e\cos E}\,dE.$$

Для вычисления интеграла B_k перейдем к комплексной переменной

$$z=e^{iE},\qquad dE=\frac{dz}{iz},$$

$$\cos E=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\quad \sin E=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right).$$

Это позволяет выразить B_k контурным интегралом

$$B_k=\frac{2i}{\pi e}\oint_C\frac{z^k\exp\left[-\frac{1}{2}ke\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]}{(z-\alpha)(z-\beta)}\,dz,$$

где

$$\alpha=\frac{1+\sqrt{1-e^2}}{e},\qquad \beta=\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e},$$

а контур интегрирования C есть окружность единичного радиуса в комплексной плоскости z.

На основании равенства, доказываемого в задаче 2. 20 для бесселевых функций, можно записать

$$\exp\left[-\frac{ke}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(-ke)\,z^n,$$

откуда

$$B_k=\frac{2i}{\pi e}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{J_n(-ke)}{\alpha-\beta}\left(\oint_C\frac{z^{n+k}}{z-\alpha}\,dz-\oint_C\frac{z^{n+k}}{z-\beta}\,dz\right).$$

Интегралы в последнем выражении вычисляются с помощью теоремы о вычетах теории функций комплексного переменного. Так как $\alpha\beta=1$, то $\alpha>1$, а $\beta<1$. Таким образом,

$$\oint_C\frac{z^{n+k}}{z-\alpha}\,dz=-\oint_C z^{n+k}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{z}{\alpha^2}+\ldots\right)dz=\begin{cases}-2\pi i\alpha^{n+k} & n+k<0\\ 0 & n+k\geqslant 0\end{cases};$$

$$\oint\limits_C \frac{z^{n+k}}{z-\beta}\,dz = \oint\limits_C z^{n+k}\left(\frac{1}{z}+\frac{\beta}{z^2}+\ldots\right)dz = \begin{cases} 0 & n+k<0 \\ 2\pi i\beta^{n+k} & n+k\geqslant 0 \end{cases}$$

и выражение относительно B_k принимает простой вид

$$B_k = \frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\left[\sum_{n=-\infty}^{-(k+1)} J_n(-ke)\alpha^{n+k} + \sum_{n=-k}^{\infty} J_n(-ke)\beta^{n+k}\right].$$

Используя равенство

$$J_{-n}(-ke) = J_n(ke)$$

и меняя порядок суммирования, получим

$$B_k = \frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\left[\sum_{n=1}^{\infty} J_{n+k}(ke)\alpha^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{0} J_{k+n}(ke)\beta^{-n}\right]$$

или, так как $\alpha = \frac{1}{\beta}$,

$$B_k = \frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{k+n}(ke)\beta^{|n|}.$$

В таком случае искомое выражение для f получается интегрированием исходного разложения в ряд Фурье

$$f = M + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{k+n}(ke)\,\beta^{|n|}\right]\sin kM, \tag{2.24}$$

где

$$\beta = \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e}$$

и есть величина порядка $e/2$.

2.6. Положение и скорость на эллиптической орбите

В разд. 1.8 было показано, что векторы положения и скорости можно непосредственно определить через их начальные значения $\bar{r}_0$ и $\bar{v}_0$. Можно также получить удобные выражения для векторов положения и скорости как функций времени в зависимости от $\bar{r}_0$ и $\bar{v}_0$. Для этого выразим сначала векторы положения и скорости в системе координат ξ, η прямо через эксцентрическую аномалию E:

$$\bar{r} = a(\cos E - e)\bar{i}_\xi + \sqrt{ap}\sin E\bar{i}_\eta, \tag{2.25}$$

$$\bar{v} = -\frac{\sqrt{\mu a}}{r}\sin E\cdot\bar{i}_\xi + \frac{\sqrt{\mu p}}{r}\cos E\bar{i}_\eta. \tag{2.26}$$

Пусть E_0 обозначает эксцентрическую аномалию, соответствующую вектору положения $\bar{r}_0$. Тогда, если в уравнениях (2.25) и (2.26) заменить E на E_0, то в результате получим соотношения, связывающие $\bar{r}_0$ и $\bar{v}_0$ с единичными векторами $\bar{i}_\xi$ и $\bar{i}_\eta$:

$$\bar{i}_\xi = \frac{\cos E_0}{r_0}\bar{r}_0 - \sqrt{\frac{a}{\mu}}\sin E_0 \bar{v}_0,$$

$$\bar{i}_\eta = \sqrt{\frac{a}{p}}\frac{\sin E_0}{r_0}\bar{r}_0 + \frac{a}{\sqrt{\mu p}}(\cos E_0 - e)\bar{v}_0.$$

Если теперь эти выражения подставить в уравнения (2.25) и (2.26), то получим зависимости для $\bar{r}$ и $\bar{v}$ от $\bar{r}_0$ и $\bar{v}_0$. Но прежде чем перейти к окончательному выражению, запишем сначала уравнение Кеплера для случая, когда t представляет собой интервал времени, соответствующий разности эксцентрических аномалий $E—E_0$. Тогда $\bar{r}_0$ будет обозначать положение тела на орбите в эпоху, т. е. в момент времени $t=0$.

Для этого случая уравнение Кеплера имеет вид

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\,t = (E - E_0) - e(\sin E - \sin E_0),$$

или в эквивалентной форме

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\,t = (E - E_0) + e\sin E_0[1 - \cos(E - E_0)] - e\cos E_0 \sin(E - E_0).$$

Нетрудно показать, что

$$e\cos E_0 = \left(1 - \frac{r_0}{a}\right),$$

$$e\sin E_0 = \frac{\bar{r}_0\cdot\bar{v}_0}{\sqrt{\mu a}}.$$

Таким образом, получим уравнение

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\,t = (E - E_0) + \frac{\bar{r}_0\cdot\bar{v}_0}{\sqrt{\mu a}}[1 - \cos(E - E_0)] - \left(1 - \frac{r_0}{a}\right)\sin(E - E_0), \tag{2.27}$$

которое необходимо разрешить относительно $(E—E_0)$ при заданном интервале времени t.

После того как разность $(E-E_0)$ определена, векторы положения и скорости находятся из следующих уравнений:

$$\bar{r}(t)=\left\{1-\frac{a}{r_0}\left[1-\cos\left(E-E_0\right)\right]\right\}\bar{r}_0+$$
$$+\left\{t-\frac{(E-E_0)-\sin\left(E-E_0\right)}{\sqrt{\mu/a^3}}\right\}\bar{v}_0, \qquad (2.28)$$

$$\bar{v}(t)=-\frac{\sqrt{\mu a}}{rr_0}\sin(E-E_0)\bar{r}_0+\left\{1-\frac{a}{r}\left[1-\cos(E-E_0)\right]\right\}\bar{v}_0. \qquad (2.29)$$

Читателю следует сравнить эти результаты с уравнениями (1.44) и (1.45), где в качестве переменной выступает разность истинных аномалий $(f-f_0)$.

2.7. Положение и скорость на гиперболической орбите

Можно распространить разработанный выше подход для эллиптических орбит на случай гиперболической орбиты. Однако оказывается, что при этом аналогом эксцентрической аномалии будет некоторая площадь, а не угол. Вспомогательная окружность, использовавшаяся при анализе эллиптических орбит, заменяется равнобочной гиперболой, имеющей ту же самую большую ось, что и гиперболическая орбита, о которой идет речь.

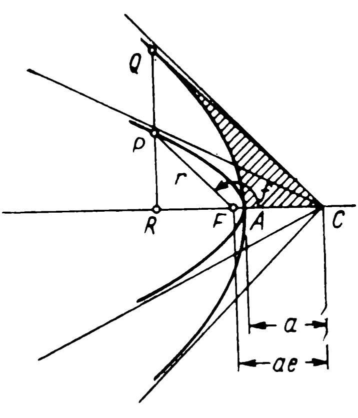


Рис. 2.5. Орбитальные соотношения для гиперболического движения

Обратимся к рис. 2.5, где точками C и F обозначены центр и фокус гиперболы, а точкой A — положение вершины или перицентра. Пусть точка P есть положение тела на гиперболической орбите, а Q — точка, в которой перпендикуляр к большой оси пересекает вспомогательную равнобочную гиперболу. Тогда, если a и b — большая и малая полуоси, можем записать

$$\left(\frac{CR}{a}\right)^2-\left(\frac{PR}{b}\right)^2=1$$

или в функции параметра H

$$CR=a\,\mathrm{ch}\,H,\ PR=b\,\mathrm{sh}\,H.$$

Легко показать, что площадь CAQ, ограниченная прямыми CA и CQ и дугой AQ вспомогательной гиперболы, равна

$$\text{пл. } CAQ = \frac{a^2}{2} H,$$

а расстояние от фокуса до тела

$$r = a(e \operatorname{ch} H - 1). \tag{2.30}$$

Выражения, связывающие полярный угол f с параметром H, получим, сравнивая (2.30) с уравнением гиперболы в полярных координатах:

$$r = \frac{a(e^2-1)}{1+e\cos f}.$$

Таким образом,

$$\cos f = \frac{e - \operatorname{ch} H}{e \operatorname{ch} H - 1}, \quad \operatorname{ch} H = \frac{e + \cos f}{1 + e\cos f}, \tag{2.31}$$

$$\sin f = \frac{\sqrt{e^2-1}\,\operatorname{sh} H}{e \operatorname{ch} H - 1}, \quad \operatorname{sh} H = \frac{\sqrt{e^2-1}\,\sin f}{1 + e\cos f}$$

и

$$\operatorname{tg}\frac{f}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\operatorname{th}\frac{H}{2}. \tag{2.32}$$

Точно тем же способом, что применялся при выводе уравнения (2.18), можно получить аналог уравнения Кеплера для гиперболического движения

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t-\tau) = e \operatorname{sh} H - H. \tag{2.33}$$

Для геометрического вывода этого результата целесообразно применить выкладки, аналогичные сделанным в разд. 2.6.

На основании закона сохранения момента количества движения имеем

$$\frac{\text{пл. } PFA}{t-\tau} = \frac{h}{2} = \frac{\sqrt{\mu p}}{2}.$$

Далее из рис. 2.5 установим соотношения

$$\text{пл. } PFA = \text{пл. } PRA - \text{пл. } PFR,$$

$$\text{пл. } PFR = \frac{1}{2} a(\operatorname{ch} H - e)\, b \operatorname{sh} H,$$

$$\text{пл. } PRA = \frac{b}{a}\,\text{пл. } QRA = \frac{b}{a}(\text{пл. } QCR - \text{пл. } QCA) =$$

$$= \frac{b}{a}\left(\frac{1}{2}a^2 \operatorname{ch} H \operatorname{sh} H - \frac{1}{2}a^2 H\right),$$

которые непосредственно приводят к уравнению (2.33).

Гиперболический вариант уравнения Кеплера при заданном t разрешается относительно H с помощью итерационных методов; однако обсуждение этого вопроса мы отложим до разд. 2. 8.

Нетрудно найти выражения для векторов положения и скорости в системе координат ξ и η, лежащей в плоскости орбиты:

$$\bar{r}=a(e-\operatorname{ch} H)\bar{i}_\xi+\sqrt{ap}\operatorname{sh} H\bar{i}_\eta, \tag{2.34}$$

$$\bar{v}=-\frac{\sqrt{\mu a}}{r}\operatorname{sh} H\bar{i}_\xi+\frac{\sqrt{\mu p}}{r}\operatorname{ch} H\bar{i}_\eta. \tag{2.35}$$

И, наконец, можно вывести уравнения, полностью аналогичные уравнениям (2. 27)—(2. 29). Векторы положения и скорости $\bar{r}(t)$ и $\bar{v}(t)$ выражаются через их начальные значения $\bar{r}_0$ и $\bar{v}_0$ следующим образом:

$$\bar{r}(t)=\left\{1-\frac{a}{r_0}\left[\operatorname{ch}(H-H_0)-1\right]\right\}\bar{r}_0+$$
$$+\left\{t-\frac{\operatorname{sh}(H-H_0)-(H-H_0)}{\sqrt{\mu/a^3}}\right\}\bar{v}_0, \tag{2.36}$$

$$\bar{v}(t)=-\frac{\sqrt{\mu a}}{rr_0}\operatorname{sh}(H-H_0)\bar{r}_0+\left\{1-\frac{a}{r}\left[\operatorname{ch}(H-H_0)-1\right]\right\}\bar{v}_0, \tag{2.37}$$

где разность $H—H_0$ находится как решение уравнения

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\,t=-(H-H_0)+\frac{\bar{r}_0\cdot\bar{v}_0}{\sqrt{\mu a}}\left[\operatorname{ch}(H-H_0)-1\right]+$$
$$+\left(1+\frac{r_0}{a}\right)\operatorname{sh}(H-H_0). \tag{2.38}$$

2.8. Универсальные формулы для конических орбит

В предыдущих разделах этой главы мы были вынуждены использовать тригонометрические функции для описания движения тела по эллиптической и параболической орбитам и гиперболические функции для описания движения по гиперболической орбите. Можно обобщить задачу, введя две новые трансцендентные функции. Применение этих функций позволяет вывести универсальные формулы, одинаково справедливые для эллипса, параболы и гиперболы. На выбор соответствующей пары трансцендентных функций повлияло стремление использовать одинаковые функции для рассмотрения до известной степени различных орбитальных задач, которые будут излагаться в следующей главе.

Задачу, для которой ищется обобщенное решение, можно сформулировать таким образом: даны векторы положения и скорости $\bar{r}_0$ и $\bar{v}_0$ одного тела относительно другого в некоторый момент времени; найти векторы положения и скорости по истечении интервала времени t.

Две трансцендентные функции, через которые будет выражаться решение, имеют вид

$$S(x)=\frac{1}{3!}-\frac{x}{5!}+\frac{x^2}{7!}-\ldots=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-\sin\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^3}, & x>0,\\[2ex] \dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{-x}-\sqrt{-x}}{(\sqrt{-x})^3}, & x<0,\end{cases} \tag{2.39}$$

$$C(x)=\frac{1}{2!}-\frac{x}{4!}+\frac{x^2}{6!}-\ldots=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{x}, & x>0,\\[2ex] \dfrac{\operatorname{ch}\sqrt{-x}-1}{-x}, & x<0.\end{cases} \tag{2.40}$$

Графики этих функций показаны на рис. 2. 6.

Из определений легко получить следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dS}{dx}=\frac{1}{2x}\,[C(x)-3S(x)],\\ &\frac{dC}{dx}=\frac{1}{2x}\,[1-xS(x)-2C(x)],\\ &[1-xS(x)]^2=C(x)\,[2-xC(x)]=2C(4x).\end{aligned}\right\} \tag{2.41}$$

Возвращаясь к основной задаче, следует напомнить, что для большой полуоси выше были установлены определенные знаки: $a>0$ для эллипса и $a<0$ для гиперболы. Уравнение Кеплера в форме (2. 27) сохраняется неизменным:

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\,t=(E-E_0)+\frac{\bar{r}_0\cdot\bar{v}_0}{\sqrt{\mu a}}\,[1-\cos(E-E_0)]-$$
$$-\left(1-\frac{r_0}{a}\right)\sin(E-E_0).$$

Однако соответствующее уравнение (2. 38) для гиперболы должно быть теперь записано в виде

$$\sqrt{\frac{\mu}{-a^3}}\,t=-(H-H_0)+\frac{\bar{r}_0\cdot\bar{v}_0}{\sqrt{-\mu a}}\,[\operatorname{ch}(H-H_0)-1]+$$
$$+\left(1-\frac{r_0}{a}\right)\operatorname{sh}(H-H_0).$$

В обоих случаях a вычисляется по уравнению (2. 10). Для удобства записи введем величину $\alpha_0 = \frac{1}{a}$. Тогда

$$\alpha_0 = \frac{2}{r_0} - \frac{v_0^2}{\mu}.$$

Теперь, если принять для эллипса

$$x = \frac{E - E_0}{\sqrt{\alpha_0}},$$

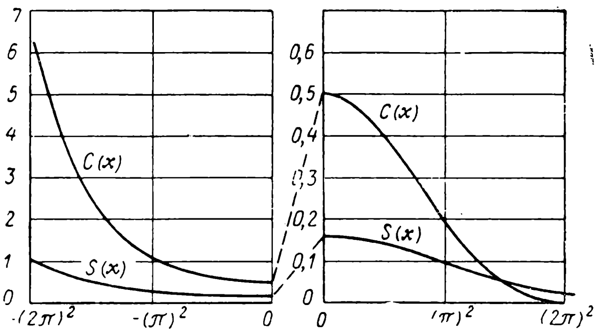


Рис. 2. 6. Специальные трансцендентные функции

а для гиперболы

$$x = \frac{H - H_0}{\sqrt{-\alpha_0}},$$

то две формы уравнения Кеплера превращаются в одну. Универсальное уравнение Кеплера выглядит следующим образом:

$$\sqrt{\mu}\, t = \frac{\overline{r}_0 \cdot \overline{v}_0}{\sqrt{\mu}} x^2 C(\alpha_0 x^2) + (1 - r_0\alpha_0) x^3 S(\alpha_0 x^2) + r_0 x. \qquad (2.42)$$

Легко видеть, что это уравнение справедливо также и для параболы, для которой $\alpha_0 = 0$ *.

Для нахождения x при заданном t вполне может быть применен итерационный метод Ньютона. Если x_n — приближенное решение, то улучшенное приближение находится по выражению

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\sqrt{\mu}\, t_n - \sqrt{\mu}\, t}{\left(\sqrt{\mu}\frac{dt}{dx}\right)_{x=x_n}},$$

* Определение аргумента x в уравнении (2. 42) для случая параболы автор вынес в задачу (2. 27) *(прим. ред.)*.

где производная вычисляется с учетом уравнений (2. 41):

$$\sqrt{\mu}\,\frac{dt}{dx}=\left\{\frac{\bar{r}_0\cdot\bar{v}_0}{\sqrt{\mu}}\left[x-\alpha_0x^3S(\alpha_0x^2)\right]+(1-r_0\alpha_0)\,x^2C(\alpha_0x^2)+r_0\right\}.$$

После нахождения x векторы положения и скорости могут быть вычислены по формулам

$$\bar{r}(t)=\left[1-\frac{x^2}{r_0}C(\alpha_0x^2)\right]\bar{r}_0+\left[t-\frac{x^3}{\sqrt{\mu}}S(\alpha_0x^2)\right]\bar{v}_0, \tag{2.43}$$

$$\bar{v}(t)=\frac{\sqrt{\mu}}{rr_0}\left[\alpha_0x^3S(\alpha_0x^2)-x\right]\bar{r}_0+\left[1-\frac{x^2}{r}C(\alpha_0x^2)\right]\bar{v}_0. \tag{2.44}$$

Эти формулы вытекают из соответствующих частных формул (2. 28) и (2. 29) для эллипса и (2. 36), (2. 37) для гиперболы; при этом способ их получения до известной степени сходен с выводом уравнения (2. 42).

Задачи

2. 1. Найти фокусы, центр, директрисы и эксцентриситет для кривой, описываемой уравнением

$$x^2+4y^2+4x-8y+4=0.$$

2. 2. Показать, что прямые, соединяющие фокусы с какой-либо точкой на эллипсе или гиперболе, образуют с касательной в этой точке равные углы.

2. 3. Окружность деформируется таким образом, что все расстояния от всех ее точек до фиксированного диаметра изменяются в одинаковом отношении. Показать, что в результате получается эллипс.

2. 4. Показать, что касательная в любой точке параболы образует с прямой, соединяющей эту точку с фокусом, и прямой, параллельной оси параболы, равные углы.

2. 5. Доказать, что среднее значение модуля радиуса-вектора при движении по эллиптической орбите равно

$$a\left(1+\frac{1}{2}e^2\right)\ \text{и}\ a\sqrt{1-e^2}$$

при осреднении по времени и истинной аномалии.

2. 6. Зная большие полуоси орбит Меркурия и Юпитера и период обращения Юпитера, найти период обращения Меркурия.

2. 7. Пренебрегая массой первого спутника Юпитера, выразить массу этой планеты через массу Земли, располагая следующими данными:

Период обращения первого спутника: 1 день, 18 *час*, 28 *мин*.

Среднее расстояние первого спутника от центра Юпитера: 430 000 *км*.

Радиус Земли: 6378,4 *км*.

Ускорение силы тяжести на поверхности Земли: 9,83 *м/сек²*.

2. 8. Показать, что если v_p и v_a — значения скорости планеты в перигелии и афелии, то

$$(1-e)\,v_p=(1+e)\,v_a.$$

2. 9. Показать, что при скорости v в данной точке период обращения P по эллиптической орбите можно выразить в виде

$$P=P_c\left[2-\left(\frac{v}{v_c}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}},$$

где P_c и v_c — соответственно период обращения и скорость для круговой орбиты, проходящей через ту же точку.

2. 10. Модуль радиуса-вектора перицентра для параболической орбиты равен r_p. Показать, что интервал времени t, в течение которого орбита находится внутри сферы радиуса r_s с центром в фокусе, определяется по формуле

$$t=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2(r_s-r_p)}{\mu}}\,(r_s+2r_p),$$

где μ — гравитационная постоянная.

2. 11. Вывести следующие равенства:

$$\sqrt{r}\cos\frac{f}{2}=\sqrt{a(1-e)}\cos\frac{E}{2}, \tag{2.45}$$

$$\sqrt{r}\sin\frac{f}{2}=\sqrt{a(1+e)}\sin\frac{E}{2}, \tag{2.46}$$

$$\sqrt{r_1r_2}\cos\frac{f_2-f_1}{2}=a\cos\frac{E_2-E_1}{2}-ae\cos\frac{E_2+E_1}{2}, \tag{2.47}$$

$$\sqrt{r_1r_2}\cos\frac{f_2+f_1}{2}=a\cos\frac{E_2+E_1}{2}-ae\cos\frac{E_2-E_1}{2}, \tag{2.48}$$

$$e\cos\frac{f_2+f_1}{2}=\frac{p}{\sqrt{r_1r_2}}\cos\frac{E_2-E_1}{2}-\cos\frac{f_2-f_1}{2}, \tag{2.49}$$

$$e\cos\frac{f_2-f_1}{2}=\frac{p}{\sqrt{r_1r_2}}\cos\frac{E_2+E_1}{2}-\cos\frac{f_2+f_1}{2}. \tag{2.50}$$

2. 12. Показать, что

$$\frac{r_1+r_2}{a}=2-2e\cos\frac{E_2-E_1}{2}\cos\frac{E_2+E_1}{2}. \tag{2.51}$$

Используя равенства (2.47) и (2.51), получить соотношение

$$\frac{1}{a}=\frac{2\sin^2\frac{1}{2}(E_2-E_1)}{r_1+r_2-2\sqrt{r_1r_2}\cos\frac{1}{2}(E_2-E_1)\cos\frac{1}{2}(f_2-f_1)}. \quad (2.52)$$

2.13. Показать, что

$$p\,\frac{r_1+r_2}{r_1\cdot r_2}=2+2e\cos\frac{f_2+f_1}{2}\cos\frac{f_2-f_1}{2}. \quad (2.53)$$

Используя уравнения (2.49) и (2.53), получить соотношение

$$p=\frac{2r_1r_2\sin^2\frac{1}{2}(f_2-f_1)}{r_1+r_2-2\sqrt{r_1r_2}\cos\frac{1}{2}(f_2-f_1)\cos\frac{1}{2}(E_2-E_1)}. \quad (2.54)$$

2.14. Доказать соотношение

$$\operatorname{tg}\gamma=\frac{p}{re\sin f}=\frac{\sqrt{\mu p}}{\bar{r}\cdot\bar{v}},$$

где γ — угол, образуемый вектором скорости $\bar{v}$ по отношению к радиусу-вектору $\bar{r}$.

2.15. Используя определение *трохоиды*, разработать графический метод решения уравнения Кеплера.

2.16. Доказать, что выражение

$$E=M+\frac{e\sin M}{1-e\cos M}-\frac{1}{2}\left(\frac{e\sin M}{1-e\cos M}\right)^3$$

есть решение уравнения Кеплера, если пренебречь членами, содержащими e в степени выше третьей.

2.17. Предполагая, что точки равноденствий находятся на концах фокального параметра орбиты Земли (что близко к истине), а эксцентриситет орбиты Земли равен 1/60, показать, что интервал времени от точки весеннего равноденствия до точки осеннего равноденствия на 7,6 дней больше интервала времени от точки осеннего равноденствия до точки весеннего равноденствия.

2.18. Для движения по эллиптической орбите вблизи центра притяжения найти отношение времени перемещения между концами малой оси к полному периоду обращения.

2.19. По схеме последовательных приближений, рассмотренной в разд. 2.5, разность между точным решением уравнения Кеплера и $(k+1)$-ым приближением ограничена сверху следующим образом:

$$|E-E_{k+1}|\leqslant M\frac{e^k}{1-e}.$$

С помощью теоремы о среднем из дифференциального исчисления можно найти другие верхние пределы.

а) Показать, что

$$E - E_{k+1} = (E - E_1) \prod_{m=1}^{k} F' [E_m + \beta_m (E - E_m)],$$

где
$$F(E) = M + e \sin E, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant 1,$$
откуда следует, что

$$|E - E_{k+1}| \leqslant (M+e) e^k .$$

б) Показать, что если задана точность K, т. е.

$$|E - E_{k+1}| \leqslant K, \text{ то}$$

k следует выбирать таким образом:

$$k \geqslant \min (k_1, k_2),$$

где
$$k_1 = \frac{\log [K(1-e)/M]}{\log e}, \quad k_2 = \frac{\log [K/(M+e)]}{\log e}.$$

в) Какое количество итераций потребуется для достижения точности 10^{-4}, если $M = \pi$, $e = 0{,}5$.

2. 20. Получить соотношение

$$\exp \left[\frac{\nu}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right) \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\nu) x^k,$$

используя разложение

$$\exp \left(\frac{\nu x}{2} \right) \exp \left(-\frac{\nu}{2x} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{\nu}{2} \right)^{j+n}}{j! n!} x^{j-n},$$

для чего заменить в последнем j на $k+n$, где k — новый индекс суммирования. Определить коэффициент при x^k в полученном ряде.

Функция $\exp \left[\frac{1}{2} \nu \left(x - \frac{1}{x} \right) \right]$ называется *производящей* для функций Бесселя $J_k(\nu)$.

2. 21. Заменив в разложении производящей функции x на $(-x^{-1})$, показать, что

$$J_{-k}(\nu) = (-1)^k J_k(\nu).$$

Подобным же образом показать, что

$$J_{-k}(-\nu) = J_k(\nu).$$

2. 22. Полагая в разложении производящей функции $x = \exp(i\theta)$, умножая затем все члены ряда на $\exp(-im\theta)$ и интегрируя обе части по θ в пределах от 0 до 2π, вывести формулу для интеграла Бесселя:

$$J_k(\nu) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(k\theta - \nu \sin\theta)\, d\theta.$$

2. 23. Показать, что уравнение (2. 24) до членов порядка e^4 имеет вид

$$f = M + \left(2e - \frac{1}{4} e^3\right) \sin M + \left(\frac{5}{4} e^2 - \frac{11}{24} e^4\right) \sin 2M +$$
$$+ \frac{13}{12} e^3 \sin 3M + \frac{103}{96} e^4 \sin 4M.$$

2. 24. Показать, что

$$\frac{a}{r} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_k(ke) \cos kM,$$

$$\cos f = -e + \frac{2(1-e^2)}{e} \sum_{k=1}^{\infty} J_k(ke) \cos kM.$$

2. 25. Доказать справедливость уравнений

$$\bar{i}_t = \frac{h}{pv} [e \sin f \cdot \bar{i}_r + (1 + e \cos f) \bar{i}_\theta],$$
$$\bar{i}_n = \frac{h}{pv} [-(1 + e \cos f) \bar{i}_r + e \sin f \cdot \bar{i}_\theta],$$

где

$$\frac{pv}{h} = \sqrt{1 + 2e \cos f + e^2},$$

если $\bar{i}_t$ и $\bar{i}_n$ — касательный и нормальный единичные векторы при движении тела по орбите, а $\bar{i}_r$ и $\bar{i}_\theta$ — соответствующие радиальный и трансверсальный единичные векторы.

2. 26. Доказать следующие равенства для специальных трансцендентных функций, определенных в разд. 2. 8:

$$2C(4x) = C(x)[2 - xC(x)] = [1 - xS(x)]^2,$$
$$4S(4x) = C(x) + S(x) - xS(x)\, C(x),$$

$$\frac{d^n S(x)}{dx^n} = \frac{1}{2x} \left[\frac{d^{n-1} C(x)}{dx^{n-1}} - (2n+1) \frac{d^{n-1} S(x)}{dx^{n-1}} \right],$$

$$\frac{d^n C(x)}{dx^n} = -\frac{1}{2x} \left[2n \frac{d^{n-1} C(x)}{dx^{n-1}} + (n-1) \frac{d^{n-2} S(x)}{dx^{n-1}} + \right.$$
$$\left. + x \frac{d^{n-1} S(x)}{dx^{n-1}} \right].$$

2.27. Подставляя в формулы разд. 2.3 величину

$$x = \sqrt{p}\left(\operatorname{tg}\frac{f}{2} - \operatorname{tg}\frac{f_0}{2}\right),$$

показать, что универсальные формулы, полученные в разд. 2.8, справедливы для описания движения по параболической орбите.

2.28. Показать, что обобщенная форма уравнений (2.15) и (2.30) имеет вид

$$r = r_0 + (1 - r_0\alpha_0)\, x^2 C(\alpha_0 x^2) + \frac{\bar{r}_0 \cdot \bar{v}_0}{\sqrt{\mu}}\left[x - \alpha_0 x^3 S(\alpha_0 x^2)\right].$$

2.29. Если интервал времени t мал, то уравнения, связывающие $\bar{r}(t)$ и $\bar{v}(t)$ с начальными значениями этих векторов $\bar{r}_0$ и $\bar{v}_0$, можно получить с помощью разложения в ряд Тейлора. Таким образом, до членов порядка t^3 можем записать

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + t\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)_0 + \frac{t^2}{2!}\left(\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right)_0 + \frac{t^3}{3!}\left(\frac{d^3\bar{r}}{dt^3}\right)_0 + \ldots$$

Из уравнения движения

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3}\bar{r} = 0$$

и производных от него можно вывести следующие соотношения:

$$\bar{r}(t) = \left[1 - \frac{\mu t^2}{2r_0^3} + \frac{\mu t^3}{2r_0^5}(\bar{r}_0\cdot\bar{v}_0) + \ldots\right]\bar{r}_0 + \left(t - \frac{\mu t^3}{6r_0^3} + \ldots\right)\bar{v}_0,$$

$$\bar{v}(t) = \left[-\frac{\mu t}{r_0^3} + \frac{3\mu t^2}{2r_0^5}(\bar{r}_0\cdot\bar{v}_0) + \ldots\right]\bar{r}_0 + \left(1 - \frac{\mu t^2}{2r_0^3} + \ldots\right)\bar{v}_0.$$

Библиография

Аналитическая геометрия конических сечений должна быть в общем знакома читателям. К тому же для удобства пользования в разд. 2.1 приведен без доказательств соответствующий материал справочного характера. Интеграл энергии, описанный в разд. 2.2 и называемый иногда интегралом живой силы, следует из формулировки закона сохранения полной энергии, который можно найти в любом руководстве по механике.

Уравнение, связывающее положение и время на параболической орбите, часто называется *формулой Баркера,* а решение этого уравнения в элементарных тригонометрических функциях можно найти у Мультона [47] или Пламмера [51].

Геометрический вывод уравнения Кеплера для эллипса и гиперболы в том виде, как он дан в разд. 2.4 и 2.7, имеется также в книге Макмиллана [40]. Известно несколько сотен методов решения уравнения Кеплера, в связи с чем интересно отметить, что попытки отыскания новых решений этой фундаментальной задачи способствовали появлению на свет ряда новых отраслей математики. Один из наилучших методов решения — разложение в ряд Фурье — Бесселя (см. разд. 2. 5) — можно найти во многих работах, например в книгах Уиттекера [63] и Смарта [56]. Одно из доказательств сходимости метода последовательных приближений заимствовано у Шапиро [54], тогда как другому доказательству посвящена задача (2. 19). С другой стороны, вывод метода разложения в ряд истинной аномалии с помощью интегрирования по комплексной переменной в обычных руководствах по небесной механике отсутствует. Этот вывод принадлежит автору. Разложения в ряды иного типа, например, подобного рассмотренному в задаче 2. 24, можно найти у Смарта [56] и Пламмера [51].

Формулы, выражающие векторы положения и скорости через положение и скорость в некоторую эпоху редко встречаются в опубликованных работах. Они приводятся в готовящейся к печати книге Хэррика [29], а для эллипса эти формулы даны в статье Пайнса [50]. Подобная формулировка задачи двух тел наиболее удобна в применениях к космическим полетам.

Сведение различных частных формул для конических орбит к универсально применимой формуле привлекло внимание автора в связи с работой Хэррика. Однако при ознакомлении с этой работой автор обнаружил, что для обобщения задачи Ламберта, рассматриваемой также в гл. III настоящей книги, более удобны несколько иные трансцендентные функции. Оригинальный вывод приведен в работе [8]. Автор признателен Ларри Броку из Приборной лаборатории МТИ за подготовку графического материала к гл. II и III, связанного с этой задачей. Соотношения для специальных функций $S(x)$ и $C(x)$ (задача 2. 26) были предложены д-ром Поттером и д-ром Миллером.

ГЛАВА III

Определение орбит в задаче двух тел

Во многих задачах механики космического полета требуется найти орбиту космического корабля, которая бы удовлетворяла определенным граничным условиям. В случае межпланетного полета положение корабля в момент отправления от планеты непосредственно определяется по известному положению этой планеты. Если к тому же указано время встречи с планетой-целью, то время полета космического корабля и вектор положения его в конце полета также может быть найден.

Анализируя полет космического корабля, всегда удобно и часто оправдано в первом приближении считать, что на его движение в течение каждого конкретного периода времени влияет лишь одно небесное тело. Если исходить из этого предположения, то можно использовать весь аналитический аппарат, изложенный в гл. II. Более точное решение реальной задачи всегда требует применения итерационного процесса; при этом решение задачи двух тел является очень хорошей отправной точкой.

Из рассмотрения общих свойств конических сечений в гл. II видно, что для определения конической орбиты требуется удовлетворить некоторым пяти условиям. Если заданы только начальная и конечная точки конической дуги относительно центра притяжения, то через них можно провести бесконечное число конических сечений. Однако, когда задано еще и время полета, то, вообще говоря, орбита становится однозначно определенной.

Данная глава целиком посвящена этому частному классу орбитальных краевых задач. Сначала будет рассмотрена чисто геометрическая задача определения различных конических кривых, связывающих две фиксированные точки и имеющих фокус, совпадающий с фиксированным центром притяжения. Затем будут получены аналитические выражения для орбитального параметра и времени перелета, причем вопрос о времени полета излагается на основе теоремы Ламберта.

Оказалось удобным аналогично выкладкам гл. II обобщить основные формулы таким образом, чтобы они стали применимы к любому типу конического сечения. Это дает возможность получать все семейство решений рассматриваемой задачи.

Глава завершается обсуждением нескольких различных методов расчета орбит, начиная с хорошо известного метода Гаусса. Из трех других приводимых методов только метод Хэррика широко освещен в литературе.

3.1. Геометрические соотношения

Рассмотрим две фиксированные точки P и Q и фиксированный центр притяжения в точке F. В параболическом случае этих трех точек достаточно для определения двух парабол с фокусом в точке F, соединяющих P и Q. Однако для однозначного определения эллиптических и гиперболических траекторий необходимы дополнительные условия. Исследуем сначала геометрические свойства различных семейств конических траекторий.

Эллиптическая орбита

Имеются три точки F, P, Q (рис. 3. 1). Требуется найти эллипс с фокусом в точке F, проходящий через точки P и Q. Если положение второго фокуса F^* (называемого иногда *свободным фокусом*) известно, то задача решается и траектория, следовательно, опре-

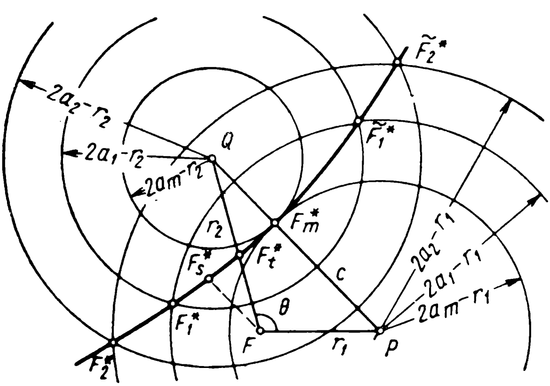


Рис. 3. 1. Геометрическое место свободных фокусов для эллиптических орбит

делена. Поскольку положение точки F^* нельзя выбрать произвольно, то было бы интересно найти геометрическое место фокусов всех возможных эллипсов, удовлетворяющих условиям задачи.

С этой целью введем следующие обозначения для отрезков прямых, соединяющих точки P, Q и F на рис. 3. 1:

$$FP=r_1,\ FQ=r_2,\ PQ=c.$$

(В данном случае будем предполагать, что $r_2>r_1$; изменение знака неравенства на обратный приведет к достаточно очевидным результатам. Случай $r_1=r_2$ — совершенно особый и фактически почти тривиальный). Так как обе точки P и Q должны лежать на эллипсе, то точка F^* выбирается так, чтобы выполнялось равенство

$$PF^*+PF=QF^*+QF=2a,$$

или эквивалентно

$$PF^*=2a-r_1,\ QF^*=2a-r_2.$$

Таким образом, если большая ось эллипса равна $2a$, то F^* находится как точка пересечения двух окружностей с центрами в точках P и Q и радиусами $2a-r_1$ и $2a-r_2$. На рис. 3.1 построено несколько таких окружностей для различных величин большой оси $2a$.

Непосредственно можно сделать несколько интересных наблюдений:

1. Если величину $2a$ выбрать слишком малой, то окружности не пересекутся. Следовательно, существует наименьшее значение $2a_m$, при котором эллиптическая траектория еще возможна. Когда $a=a_m$ окружности соприкасаются и точка касания F_m^* лежит на линии PQ. Тогда a_m определяется из соотношения

$$(2a_m-r_2)+(2a_m-r_1)=c,$$

откуда

$$2a_m=\frac{1}{2}(r_1+r_2+c), \tag{3.1}$$

т. е. величина $2a_m$ равна половине периметра треугольника FPQ. Для удобства введем обозначение

$$2s=r_1+r_2+c, \tag{3.2}$$

отсюда

$$2a_m=s.$$

Точка F_m^* делит прямую PQ на отрезки

$$PF_m^*=s-r_1,\quad QF_m^*=s-r_2.$$

2. При $a>a_m$ окружности пересекаются в двух точках F^* и $\tilde{F}^*$. Тогда, вообще говоря, существуют две различные эллиптические траектории, связывающие P и Q с одной и той же большой осью, но с разными свободными фокусами, равноотстоящими по обе стороны от линии PQ. При любой величине $2a$ фокус $\tilde{F}^*$ находится на бо́льшем расстоянии от F, чем соответствующий сопряженный фокус F^*. Следовательно, эллипс с фокусом в $\tilde{F}^*$ имеет больший эксцентриситет и меньший фокальный параметр, чем эллипс с той же самой большой осью и фокусом в точке F^*.

Величины a_1 и a_2, используемые в построениях на рис. 3.1, определяются из равенств

$$2a_1=2a_m+r_1/2,\ 2a_2=2a_m+r_1.$$

3. Каждый свободный фокус расположен таким образом, что разность расстояний от него до точек P и Q постоянна и равна $r_2 - r_1$. Таким образом, геометрическое место свободных фокусов образует гиперболу; P и Q — фокусы этой гиперболы, $(r_2 - r_1)$ — длина большой оси, а $\frac{c}{r_2 - r_1}$ — эксцентриситет. Наклон асимптот гиперболы равен

$$\pm \frac{2}{r_2 - r_1} \sqrt{(s - r_1)(s - r_2)} = \pm \frac{2\sqrt{r_1 r_2}}{r_2 - r_1} \sin \frac{\theta}{2}. \qquad (3.3)$$

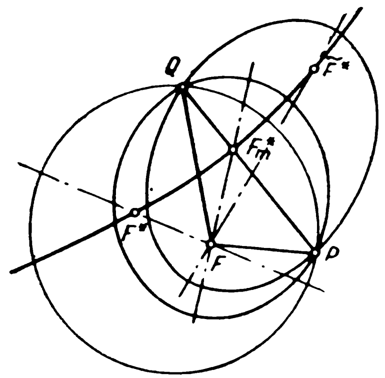


Рис. 3. 2. Однопараметрическое семейство эллиптических орбит

Вторая форма выражения (3. 3) показывает, как деформируется гипербола, образованная свободными фокусами F^*, при изменении угла между отрезками FP и FQ.

Геометрическое место свободных фокусов, два типичных эллипса, имеющие одинаковую большую ось, а также эллипс минимальной энергии представлены на рис. 3. 2.

Некоторые важные случаи заслуживают более подробного рассмотрения.

Эллипс минимальной энергии

Точка F_m^* определяет так называемую эллиптическую *траекторию минимальной энергии* перехода между P и Q. Кинетическая энергия тела, движущегося по эллиптической дуге, пропорциональна величине $(1/r - 1/2a)$, где r — расстояние от центра притяжения. Таким образом, в любой точке кинетическая энергия минимальна, когда длина большой оси траектории равна минимальной величине $2a_m$. Параметр p_m и эксцентриситет e_m эллиптической траектории минимальной энергии можно найти следующим образом.

Так как

$$FF_m^* = 2e_m a_m,$$

то из рис. 3. 1 имеем

$$(2e_m a_m)^2 = [(s - r_2) \sin \angle PQF]^2 + [r_2 - (s - r_2) \cos \angle PQF]^2.$$

Используя тригонометрическое равенство

$$\cos \angle PQF = \frac{2s(s - r_1)}{r_2 c} - 1,$$

получим

$$(2e_m a_m)^2 = s^2 - \frac{4s}{c}(s - r_1)(s - r_2).$$

С другой стороны, для эллипса справедливо равенство

$$(2ea)^2 = 4a(a - p),$$

откуда

$$(2e_m a_m)^2 = s^2 - 2sp_m.$$

Окончательно

$$p_m = \frac{2}{c}(s - r_1)(s - r_2) = \frac{r_1 r_2}{c}(1 - \cos\theta). \tag{3.4}$$

Эксцентриситет e_m можно теперь найти по формуле

$$e_m^2 = 1 - \frac{2p_m}{s}.$$

Касательный эллипс

Точка Q совпадает с апоцентром эллипса, чей фокус F_t^* находится как точка пересечения гиперболы, образованной свободными фокусами, и линии QF. Все эллиптические траектории между точками P и Q с фокусами, лежащими справа от прямой QF, достигают апоцентра до точки Q, тогда как траектории, имеющие фокусы слева от этой прямой, достигают апоцентра после прохождения точки Q. Так как траектория с фокусом в F_t^* касается в точке Q окружности радиуса r_2 с центром в F, то для обозначения такой орбиты будем использовать термин *касательный эллипс*. Выражения для большой оси $2a_t$, эксцентриситета e_t и параметра p_t находятся с помощью простых геометрических соотношений.

Из определения эллипса в обозначениях рис. 3. 1 следует равенство

$$QF_t^* + QF = PF + PF_t^* = 2a_t.$$

Однако, поскольку Q, F, F_t^* лежат на одной прямой, то

$$QF_t^* = r_2 - 2e_t a_t = 2a_t - r_2,$$

откуда

$$PF_t^* = 2r_2 - 2e_t a_t - r_1.$$

Рассматривая далее треугольник FPF_t^* и используя обычные тригонометрические соотношения, получим

$$\frac{r_2[r_2 - (2r_2 - 2e_t a_t - r_1)]}{r_1(2e_t a_t)} = \frac{1 + \cos\theta}{2},$$

$$2e_t a_t = \frac{2r_2(r_2 - r_1)}{2r_2 - r_1(1 + \cos\theta)}.$$

Но

$$2a_t = 2r_2 - 2e_t a_t,$$

откуда

$$a_t = \frac{r_2}{1 + \dfrac{r_2 - r_1}{r_2 - r_1 \cos\theta}}. \qquad (3.5)$$

Теперь легко находится соответствующее выражение для параметра

$$p_t = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1 \cos\theta}(1 - \cos\theta). \qquad (3.6)$$

Наконец, сравнивая формулы (3. 4) и (3. 6), получим следующее интересное соотношение:

$$p_m = p_t \cos \angle PQF.$$

Симметричный эллипс

Чтобы закончить обсуждение свойств эллиптических орбит, рассмотрим эллипс, фокус которого F_s^* определяется как точка пересечения гиперболы, образованной свободными фокусами, и прямой, проведенной из F параллельно PQ. Подобная траектория представляет некоторый интерес ввиду ее симметрии; точка P лежит на том же удалении от перицентра, что и точка Q от апоцентра. Элементы симметричного эллипса $2a_s$, e_s и p_s легко определяются, поскольку многоугольник PQF_s^*F — равнобедренная трапеция:

$$2a_s = r_1 + r_2, \qquad (3.7)$$

$$p_s = \frac{r_1 r_2 (r_1 + r_2)}{c^2}(1 - \cos\theta) = \frac{r_1 + r_2}{c} p_m. \qquad (3.8)$$

Гиперболические орбиты

Обратимся теперь к рис. 3. 3 и снова рассмотрим точки F, P и Q. Задача ставится следующим образом: найти гиперболу с фокусом в точке F, которая бы соединяла точки P и Q. Как и прежде, решение задачи сводится к нахождению местоположения второго фокуса F^*. Однако, поскольку фокус F совпадает с центром притяжения, интерес представляет только та ветвь гиперболы, которая вогнута относительно F.

Точки P и Q должны лежать на вогнутой ветви гиперболы, поэтому фокус F^* необходимо выбрать таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$PF^* - PF = QF^* - QF = 2a.$$

Тогда для гиперболы, имеющей большую ось $2a$, точка F^* определяется пересечением двух окружностей с центрами в P и Q и радиусами $2a + r_1$ и $2a + r_2$. На рис. 3. 3 показаны три пары таких окружностей: для значений $a=0$, $a=a_1$ и $a=a_2$, причем a_1 и a_2 выбраны из условия

$$2a_1=\frac{r_1}{2}, \quad 2a_2=r_1.$$

Отсюда следуют выводы:

1. Все точки пересечения пар окружностей расположены вне круга радиуса r_1 с центром в точке P. Нетрудно удостовериться в том, что для выпуклых относительно фокуса F гиперболических траекторий, проходящих от точки P к точке Q, все свободные фокусы F^* лежат внутри этого круга.

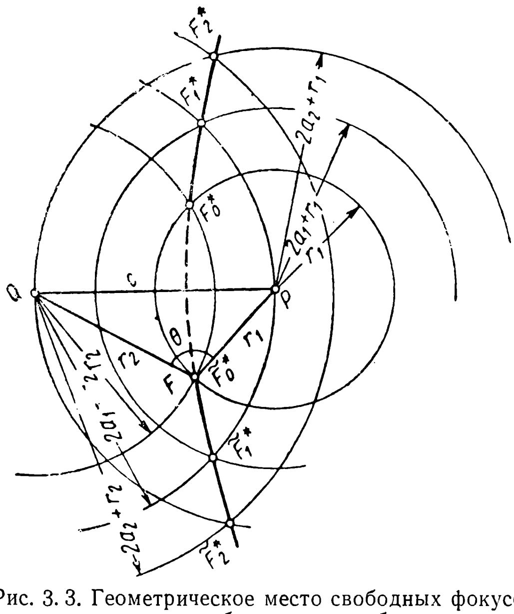


Рис. 3. 3. Геометрическое место свободных фокусов для гиперболических орбит

2. Две окружности пересекаются в двух точках F^* и $\tilde{F}^*$, поэтому существуют две различные гиперболические траектории, связывающие точки P и Q и имеющие одну и ту же большую ось, а их свободные фокусы равно отстоят по обе стороны от прямой PQ. При любом значении $2a$ гипербола с фокусом в точке F^* имеет бо́льший эксцентриситет и бо́льший фокальный параметр, чем гипербола с фокусом в $\tilde{F}^*$.

3. Разность расстояний от каждого свободного фокуса до точек P и Q постоянна и равна $r_2—r_1$. Таким образом, геометрическое место этих фокусов есть ветвь гиперболы, сопряженная с геометрическим местом свободных фокусов для рассмотренных ранее эллиптических траекторий.

Фокусы F_0^* и $\tilde{F}_0^*$, соответствующие большой оси нулевой длины, представляют собой предельные случаи, когда для движения по таким траекториям требуются бесконечно большие скорости. При этом траектория со свободным фокусом в F_0^* — прямая линия от P к Q, т. е. гипербола, у которой $a=0$ и $e=\infty$, а траектория с фокусом в $\bar{F}_0^*$ составлена из двух отрезков прямых от P к Q и является гиперболой, у которой $a=0$, $e=\sec\frac{\theta}{2}$.

Параболические орбиты

Существуют две параболические траектории с фокусом в F, связывающие точки P и Q. Прежде чем определять оси этих парабол, найдем сначала положение их директрис. Для этой цели воспользуемся рис. 3.4 и определением параболы, откуда получим

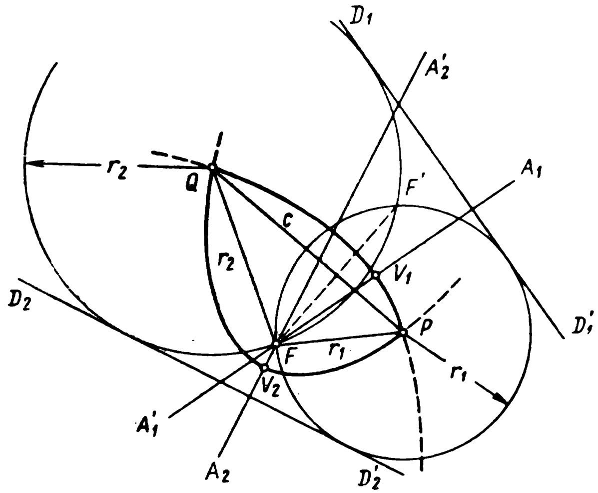


Рис. 3.4. Геометрия параболических орбит

директрисы D_1D_1' и D_2D_2' как общие касательные к двум окружностям с центрами в точках P и Q и радиусами r_1 и r_2. Осями A_1A_1' и A_2A_2' парабол являются перпендикуляры к соответствующим директрисам, проходящие через фокус F. Вершины V_1 и V_2 делят пополам расстояния вдоль осей от фокуса до директрис. Элементарными геометрическими построениями можно показать, что оси A_1A_1' и A_2A_2' параллельны асимптотам гипербол, представляющих собой геометрические места свободных фокусов для рассмотренных ранее эллиптических и гиперболических орбит (см. задачу 3. 3). Следовательно, уравнение (3. 3) дает наклон этих осей относительно прямой PQ.

Таким образом, для каждой параболы параметр или, что то же самое, расстояние от фокуса до директрисы, определяется с помощью простых геометрических соотношений

$$p_1 = 2FV_1 = \frac{4(s-r_1)(s-r_2)}{c^2}\left(\sqrt{\frac{s}{2}} + \sqrt{\frac{s-c}{2}}\right)^2, \qquad (3.9)$$

$$p_2 = 2FV_2 = \frac{4(s-r_1)(s-r_2)}{c^2}\left(\sqrt{\frac{s}{2}} - \sqrt{\frac{s-c}{2}}\right)^2. \qquad (3.10)$$

3.2. Параметр и эксцентриситет

Хотя и были найдены возможности получать параметр и эксцентриситет для некоторых частных конических траекторий путем геометрических построений, тем не менее нецелесообразно использовать подобный метод в общем случае. Поэтому попытаемся вывести аналитическое функциональное соотношение между параметром и большой осью конического сечения.

Поскольку точки P и Q лежат на конической траектории, то из уравнения (2. 2) будем иметь

$$e\cos f_1 = \frac{p}{r_1} - 1,$$

$$e\cos(f_1 + \theta) = \frac{p}{r_2} - 1.$$

Подставив эти выражения в тригонометрическое равенство

$$\cos^2(f_1 + \theta) - 2\cos(f_1 + \theta)\cos f_1 \cos\theta + \cos^2 f_1 - \sin^2\theta = 0,$$

получим

$$ar_1^2(p - r_2)^2 - 2ar_1r_2(p - r_2)(p - r_1)\cos\theta +$$
$$+ ar_2^2(p - r_1)^2 - r_1^2r_2^2(a \mp p)\sin^2\theta = 0.$$

Выбор знака в последнем члене определяется тем, является ли коническая траектория эллипсом (верхний знак) или гиперболой (нижний знак). Если теперь сгруппировать члены с равными степенями p (коэффициент при p^2 равен просто ac^2) и сделать далее обычные алгебраические упрощения, то получим квадратное уравнение относительно параметра p:

$$ac^2p^2 - r_1r_2(1 - \cos\theta)[2a(r_1 + r_2) \mp r_1r_2(1 + \cos\theta)]\,p +$$
$$+ ar_1^2r_2^2(1 - \cos\theta)^2 = 0.$$

Используя величину s, которая была определена уравнением (3. 2), заключенное в квадратные скобки выражение можно переписать в виде

$$2a(r_1 + r_2) \mp r_1r_2(1 + \cos\theta) = 2a(2s - c) \mp 2s(s - c) =$$
$$= \mp 2s(s - c \mp 2a) - 2ac.$$

Далее будем рассматривать эллипс и гиперболу по отдельности.

В случае эллипса удобно ввести обозначения

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{r_1+r_2+c}{4a}}=\sqrt{\frac{s}{2a}}, \tag{3.11}$$

$$\sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{r_1+r_2-c}{4a}}=\sqrt{\frac{s-c}{2a}}, \tag{3.12}$$

что позволяет записать

$$s-c-2a=-2a\cos^2\frac{\beta}{2},$$

$$s=2a\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

$$c=2a\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\beta}{2}\right).$$

Следовательно,

$$-2s(s-c-2a)-2ac=8a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}-4a^2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\beta}{2}\right)=$$

$$=4a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\beta+4a^2\sin^2\frac{\beta}{2}=2a^2\left(\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

Подставим последнее выражение в квадратное уравнение для p и, принимая во внимание равенство

$$r_1r_2(1-\cos\theta)=2(s-r_1)(s-r_2),$$

получим

$$ac^2p^2-4a^2(s-r_1)(s-r_2)\left(\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right)p+$$

$$+4a(s-r_1)^2(s-r_2)^2=0.$$

Наконец, умножая все члены последнего уравнения на c^2/a и используя равенство

$$c=2a\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

придем к окончательному виду квадратного уравнения:

$$c^4p^2-4a(s-r_1)(s-r_2)\left(\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right)c^2p+$$

$$+16a^2(s-r_1)^2(s-r_2)^2\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}=0.$$

Решение этого уравнения дает два корня

$$p=\frac{4a(s-r_1)(s-r_2)}{c^2}\sin^2\frac{\alpha\pm\beta}{2}\quad\text{(эллипс)}. \tag{3.13}$$

Аналогично в случае гиперболы обозначим

$$\operatorname{sh}\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{r_1+r_2+c}{4a}}=\sqrt{\frac{s}{2a}}, \tag{3.14}$$

$$\operatorname{sh}\frac{\delta}{2}=\sqrt{\frac{r_1+r_2-c}{4a}}=\sqrt{\frac{s-c}{2a}}. \tag{3.15}$$

Тогда можем записать

$$s-c+2a=2a\operatorname{ch}^2\frac{\delta}{2},$$

$$s=2a\operatorname{sh}^2\frac{\gamma}{2},$$

$$c=2a\left(\operatorname{sh}^2\frac{\gamma}{2}-\operatorname{sh}^2\frac{\delta}{2}\right),$$

откуда

$$2s(s-c+2a)-2ac=2a^2\left(\operatorname{sh}^2\frac{\gamma+\delta}{2}+\operatorname{sh}^2\frac{\gamma-\delta}{2}\right).$$

Подставим, как и ранее, это выражение в исходное квадратное уравнение для p и используем равенство

$$c=2a\operatorname{sh}\frac{\gamma+\delta}{2}\operatorname{sh}\frac{\gamma-\delta}{2}.$$

Решение полученного в результате уравнения имеет вид

$$p=\frac{4a(s-r_1)(s-r_2)}{c^2}\operatorname{sh}^2\frac{\gamma\pm\delta}{2}\ \text{(гипербола)}. \tag{3.16}$$

Аналитические и геометрические результаты совпадают: каждому значению a соответствуют два эллипса или две гиперболы, которые удовлетворяют условиям задачи. Кроме того, в случае эллипса условие минимума энергии, выражаемое уравнением (3. 1), означает, что в уравнении (3. 11) $\alpha=\pi$. К тому же в силу выполнения неравенств

$$0\leqslant\beta\leqslant\alpha\leqslant\pi$$

имеем

$$\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}\geqslant\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Следовательно, если обозначить в зависимости от выбранного знака корни уравнения (3. 13) через p_+ и p_-, то справедливо неравенство

$$p_+\geqslant p_-.$$

Расстояние между фокусами эллипса можно записать в виде

$$L=2\sqrt{a(a-p)},$$

откуда следует

$$L_+ \leqslant L_-.$$

Нижние индексы имеют очевидный смысл. Таким образом, в уравнении (3. 13) верхний знак соответствует фокусу F^*, а нижний — фокусу $\bar{F}^*$ (см. рис. 3. 1).

Аналогично в случае гиперболы

$$0 \leqslant \delta \leqslant \gamma,$$

поэтому

$$\mathrm{sh}^2 \frac{\gamma+\delta}{2} \geqslant \mathrm{sh}^2 \frac{\gamma-\delta}{2}.$$

Обозначая снова через p_+ и p_- корни уравнения (3. 16), имеем

$$p_+ \geqslant p_-.$$

Расстояние L между фокусами гиперболы равно

$$L = 2\sqrt{a(a+p)},$$

откуда

$$L_+ \geqslant L_-.$$

Следовательно, в уравнении (3. 16) верхний знак соответствует фокусу F^*, а нижний — фокусу $\bar{F}^*$ (см. рис. 3. 3).

Можно сравнить общую формулу для параметра с частными результатами, полученными ранее геометрическим путем. Например, для случая эллипса минимальной энергии, когда $a_m = s/2$, имеем

$$\alpha_m = \pi, \quad \sin \frac{\beta_m}{2} = \sqrt{\frac{s-c}{s}}.$$

Подстановка этих равенств в уравнение (3. 13) дает то же самое выражение для p_m, что и (3. 4). Найденные из (3. 13) корни одинаковы, что указывает на существование только одной траектории минимальной энергии, соединяющей точки P и Q.

Для симметричного эллипса согласно уравнению (3. 7) величина большой оси выражается соотношениями

$$a_s = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{2s-c}{2},$$

откуда сразу видно, что соответствующие значения α и β связаны равенством

$$\alpha_s + \beta_s = \pi.$$

Выражение (3. 8) для p_s следует непосредственно из общего соотношения для p, если в уравнении (3. 13) выбрать верхний знак.

В заключение сделаем одно существенное замечание. Используя соотношения (3 11) и (3. 12), уравнение (3. 13) можно записать в виде

$$p = \frac{4(s-r_1)(s-r_2)}{c^2} \times$$

$$\times \left[\sqrt{\frac{s}{2}\left(1-\frac{s-c}{2a}\right)} \pm \sqrt{\left(1-\frac{s}{2a}\right)\left(\frac{s-c}{2}\right)} \right]^2.$$

Найдем пределы p при стремлении a к бесконечности и сравним их с p_1 и p_2, определяемыми (3. 9) и (3. 10):

$$\lim_{a\to\infty} p_+ = p_1, \quad \lim_{a\to\infty} p_- = p_2.$$

Отсюда видно, что параболические траектории от P к Q представляют собой предельные случаи эллиптических траекторий, когда величина большой оси стремится к бесконечности. Если аналогичным образом записать уравнение (3. 16) и перейти затем к пределу при стремлении a к бесконечности, то можно также показать, что те же самые параболы являются предельными случаями гипербол, когда величина большой оси стремится к бесконечности.

Наконец, рассмотрим с аналитической точки зрения предельную форму гипербол при стремлении a к нулю. Вычисляя предельный наклон асимптот

$$\lim_{a\to 0} \frac{b}{a} = \lim_{a\to 0} \sqrt{\frac{p}{a}},$$

можно удостовериться в справедливости результатов для гиперболических орбит, доказанных в конце разд. 3. 1.

3.3. Теорема Ламберта о времени полета

Конические сечения обладают многими интересными и часто неожиданными свойствами. Например, едва ли можно было заранее предположить, что период обращения для эллипса зависит, как было показано в разд. 2. 2, только от большой оси эллипса и совсем не зависит от эксцентриситета. Другой пример, показывающий еще более интересное свойство конических сечений: при движении тела по конической орбите величина скорости является функцией только расстояния от центра притяжения и большой оси. Здесь снова видна независимость от эксцентриситета.

В этой связи, по-видимому, наиболее замечательное свойство устанавливает теорема о времени движения по эллиптической орбите, сформулированная впервые Ламбертом и аналитически доказанная затем Лагранжем. Ламберт показал, что время перелета зависит только от длины большой оси, суммы расстояний начальной и конечной точек дуги от центра притяжения и длины хорды, соединяющей эти точки (фактически теорема справедлива для любого конического сечения). Если обозначить через t время движения по орбите от P к Q и использовать принятые ранее обозначения, то теорема Ламберта устанавливает следующую зависимость:

$$t=t(a, r_1+r_2, c).$$

Заметим, что и здесь эксцентриситет ни на что не влияет.

Справедливость утверждения Ламберта можно доказать следующим образом. Пусть точкам P и Q соответствуют эксцентрические аномалии E_1 и E_2. Тогда из уравнения Кеплера время движения по орбите от P к Q определяется по выражению

$$t = 2\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\left(\frac{E_2-E_1}{2} - e\sin\frac{E_2-E_1}{2}\cos\frac{E_2+E_1}{2}\right). \qquad (3.17)$$

Эксцентрические аномалии E_1 и E_2 входят в это выражение только в виде суммы или разности. Эти комбинации могут быть найдены в принципе из достаточно очевидных соотношений

$$c^2 = 4a^2\sin^2\frac{E_2-E_1}{2}\left(1-e^2\cos^2\frac{E_2+E_1}{2}\right), \qquad (3.18)$$

$$r_1+r_2 = 2a\left(1-e\cos\frac{E_2+E_1}{2}\cos\frac{E_2-E_1}{2}\right). \qquad (3.19)$$

Если из соотношений (3.18) и (3.19) выразить величины $^1/_2(E_2+E_1)$ и $^1/_2(E_2-E_1)$ через a, r_1+r_2 и c, а результаты подставить в выражение (3.17), то теорема Ламберта будет доказана. Подобным же образом показывается справедливость теоремы для любого конического сечения.

Вместо того чтобы использовать выражения (3.17)—(3.19) для вывода функционального соотношения Ламберта в строго аналитической форме, проще и удобнее пойти несколько иным путем. Рассмотрим сначала часть эллиптической орбиты от точки P до точки Q, точнее, ту часть, для которой свободный фокус F^* лежит на нижней ветви гиперболического места свободных фокусов, показанного на рис. 3.1. Согласно теореме Ламберта, если точки P и Q фиксированы, то форма эллипса может изменяться путем перемещения фокусов F и F^* без изменения времени полета, конечно, при условии, что r_1+r_2 и a при этом не меняются. Геометрическое место допустимых положений фокуса F является эллипсом с фокусами в точках P и Q и большой осью, равной r_1+r_2. Аналогично этому геометрическое место фокусов F^* есть эллипс с большой осью $4a-(r_1+r_2)$, софокусный с эллиптическим геометрическим местом фокусов F. Таким образом, как показано на рис. 3.5, фокус F может переместиться в положение F_1, а фокус F^* — в положение F_1^*: время движения по новой кривой от P к Q останется тем же, что и для прежней. Продолжая перемещать фокус F против часовой стрелки, а F^* по часовой стрелке, будем делать эллипс все более сжатым. В конечном счете, когда фокусы займут положения F_2 и F_2^*, получим предельный случай — эллипс вырождается в прямую, совпадающую с большой осью. При этом орбита становится прямолинейной, рассматриваемая дуга совпадает с хордой c, а время t может быть вычислено с помощью элементарных методов. Поскольку теперь все движение происходит вдоль прямолинейной траектории, используем уравнение (2.9) в виде

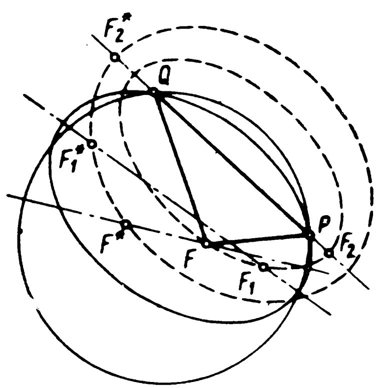


Рис. 3.5. Геометрический смысл теоремы Ламберта

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

и перепишем его следующим образом:

$$dt = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \cdot \frac{rdr}{\sqrt{2r - \frac{r^2}{a}}}.$$

Конечные точки кривой расположены так, что выполняются равенства

$$QF_2 + PF_2 = r_1 + r_2, \quad QF_2 - PF_2 = c.$$

Поэтому $PF_2 = s - c$, $QF_2 = s$.

Следовательно,

$$t = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int\limits_{s-c}^{s} \frac{rdr}{\sqrt{2r - \frac{r^2}{a}}}.$$

Введем вспомогательные углы α и β, определяемые уравнениями (3.11) и (3.12), и сделаем замену переменной интегрирования:

$$r = a(1 - \cos\psi),$$

тогда получим

$$t = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \int\limits_{\beta}^{\alpha} (1 - \cos\psi)\, d\psi.$$

Проинтегрировав последнее соотношение и введя период обращения P из уравнения (2.8), будем иметь

$$t = \frac{P}{2\pi} \left[(\alpha - \sin\alpha) - (\beta - \sin\beta)\right] \text{ (эллипс).} \qquad (3.20)$$

Результат будет несколько иным, когда часть эллиптической орбиты, связывающей точки P и Q, имеет свободный фокус $\bar{F}^*$

на верхней ветви гиперболического места точек (см. рис. 3.1). На рис. 3.6 показаны различные положения кривой перелета при перемещении фокуса F к F_2, а фокуса $\widetilde{F}^*$ к $\widetilde{F}_2^*$. Тогда в пределе время перелета t будет равно времени движения по вырожденному эллипсу сначала от P к $\widetilde{F}_2^*$, а затем обратно от $\widetilde{F}_2^*$ к Q. Таким образом, чтобы найти $\tilde{t}$, нужно к t, определяемому по (3.20), прибавить удвоенное время прохождения расстояния $\widetilde{F}_2^*Q$:

$$\tilde{t} = t + \frac{2}{\sqrt{\mu}} \int\limits_s^{2a} \frac{rdr}{\sqrt{2r - \frac{r^2}{a}}} =$$

$$= t + 2\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \int\limits_\alpha^\pi (1 - \cos\psi)\, d\psi.$$

Следовательно,

$$\tilde{t} = P - \frac{P}{2\pi}\left[(\alpha - \sin\alpha) + \right.$$

$$\left. + (\beta - \sin\beta)\right] \text{ (эллипс)}. \quad (3.21)$$

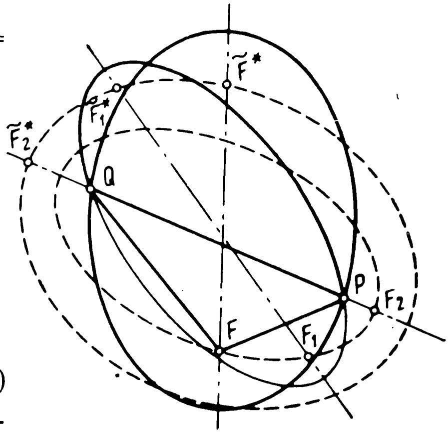


Рис. 3.6. Геометрический смысл теоремы Ламберта

Для случая траектории минимальной энергии уравнения (3.20) и (3.21) дают одинаковый результат

$$t_m = \tilde{t}_m = \frac{P_m}{2\pi}\left[\pi - (\beta_m - \sin\beta_m)\right],$$

где

$$P_m = \pi\sqrt{\frac{s^3}{2\mu}}, \quad \sin\frac{\beta_m}{2} = \sqrt{\frac{s-c}{s}}.$$

В случае симметричного эллипса выражение для времени полета имеет простой вид

$$t_s = \frac{P_s}{2\pi}(2\alpha_s - \pi) = \frac{P_s}{2\pi}(\pi - 2\beta_s),$$

где

$$P_s = \pi\sqrt{\frac{(r_1 + r_2)^3}{2\mu}}, \quad \cos\beta_s = -\cos\alpha_s = \frac{c}{r_1 + r_2}.$$

Точно таким же способом можно получить аналитическое выражение для времени движения по гиперболической дуге. Рассмотрим сначала гиперболу, соединяющую точки P и Q, у которой свободный фокус F^* лежит на верхней ветви гиперболического места точек, показанного на рис. 3. 3. Для вычисления времени движения t по этой дуге устремим e к единице таким образом, чтобы a, r_1+r_2 и c сохранились неизменными. В пределе, когда орбита становится прямой линией, получим, используя уравнение (2. 9),

$$t=\frac{1}{\sqrt{\mu}}\int\limits_{s-c}^{s}\frac{rdr}{\sqrt{2r+\frac{r^2}{a}}}.$$

Введем вспомогательные углы γ и δ, определяемые уравнениями (3. 14) и (3. 15), и сделаем замену переменной интегрирования:

$$r=a(\operatorname{ch}\psi-1).$$

Интегрируя, найдем

$$t=\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\,[(\operatorname{sh}\gamma-\gamma)-(\operatorname{sh}\delta-\delta)] \text{ (гипербола)}. \tag{3.22}$$

Гипербола, у которой свободный фокус $\tilde{F}^*$ лежит на нижней ветви гиперболического места точек (см. рис. 3. 3), в пределе вырождается в прямолинейную орбиту от P к F и от F к Q. Поэтому время $\tilde{t}$ вычисляется по формуле

$$\tilde{t}=t+\frac{2}{\sqrt{\mu}}\int\limits_{0}^{s-c}\frac{rdr}{\sqrt{2r+\frac{r^2}{a}}}.$$

Следовательно,

$$\tilde{t}=\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\,[(\operatorname{sh}\gamma-\gamma)+(\operatorname{sh}\delta-\delta)] \text{ (гипербола)}. \tag{3.23}$$

На основании сказанного выше параболические траектории перелета из точки P в точку Q можно рассматривать как предельные случаи либо эллиптических, либо гиперболических орбит при стремлении большой оси к бесконечности. Если вычислить пределы t и $\tilde{t}$ при a, стремящейся к бесконечности, то можно найти время t_1 и t_2 перемещения по параболическим кривым, показанным на рис. 3. 4. Действительно, из уравнений (3. 22) и (3. 23) найдем

$$t_1=\lim_{a\to\infty}t=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\mu}}\,[s^{\frac{3}{2}}-(s-c)^{\frac{3}{2}}] \text{ (парабола)}, \tag{3.24}$$

$$t_2=\lim_{a\to\infty}\tilde{t}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\mu}}\,[s^{\frac{3}{2}}+(s-c)^{\frac{3}{2}}] \text{ (парабола)}. \tag{3.25}$$

Такое же выражение для t_1 можно получить, используя уравнение (3. 20). С другой стороны, парабола PV_2Q на рис. 3. 4 получается при возрастании a как предел нижней ветви эллиптической кривой со свободным фокусом $\bar{F}^*$. Таким образом, при выводе формулы для t_2 из выражения для времени полета по эллиптиче-

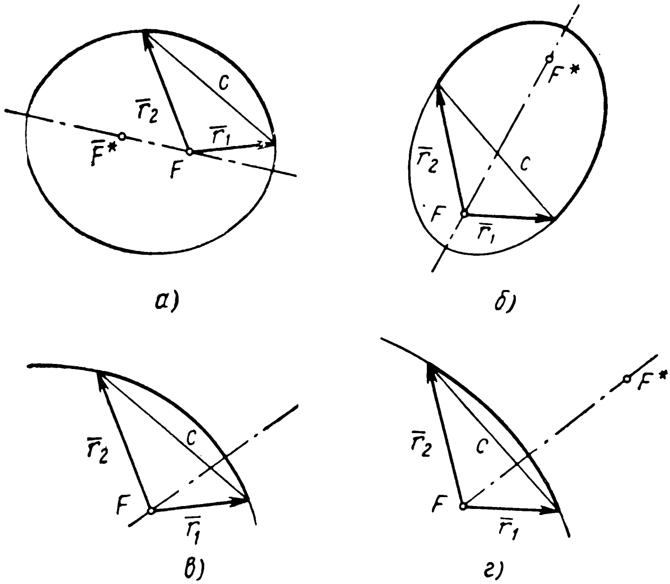


Рис. 3.7. Конические траектории для углов перелета меньше 180°:

a—эллипс, $t < t_m$,

$$\sqrt{\mu}\, t = \sqrt{a^3}\,[(\alpha - \sin\alpha) - (\beta - \sin\beta)],$$

$$p = \frac{4a\,(s - r_1)\,(s - r_2)}{c^2} \sin^2\frac{\alpha + \beta}{2};$$

$б$—эллипс, $t > t_m$,

$$\sqrt{\mu}\, t = \sqrt{a^3}\,[2\pi - (\alpha - \sin\alpha) - (\beta - \sin\beta)],$$

$$p = \frac{4a\,(s - r_1)\,(s - r_2)}{c^2} \sin^2\frac{\alpha - \beta}{2};$$

$в$—парабола

$$\sqrt{\mu}\, t = \frac{\sqrt{2}}{3}\,[s^{3/2} - (s - c)^{3/2}],$$

$$p = \frac{2\,(s - r_1)\,(s - r_2)}{c^2}\,(\sqrt{s} + \sqrt{s - c})^2,$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s}{2a}};\ \sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s - c}{2a}},\ \pi \geqslant \alpha \geqslant \beta \geqslant 0;$$

$г$—гипербола

$$\sqrt{\mu}\, t = \sqrt{-a^3}\,[(\operatorname{sh}\gamma - \gamma) - (\operatorname{sh}\delta - \delta)],$$

$$p = -\frac{4a\,(s - r_1)\,(s - r_2)}{c^2}\,\operatorname{sh}^2\frac{\gamma + \delta}{2}$$

$$\operatorname{sh}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s}{-2a}},\ \operatorname{sh}\frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{s - c}{-2a}},\quad \gamma \geqslant \delta \geqslant 0$$

ской траектории необходимо использовать дополнительную форму уравнения (3.21), полученную вычитанием t из периода обращения P.

На рис. 3.7 и 3.8 для удобства читателя приведены все рассмотренные частные случаи. Примем здесь условие $a>0$ для эл-

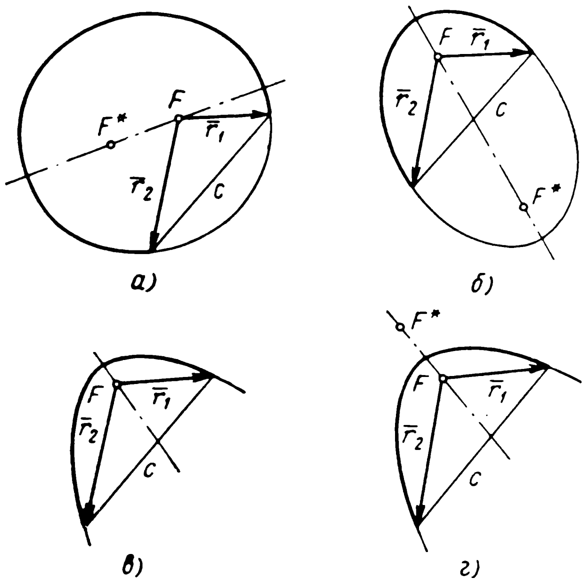


Рис. 3.8. Конические траектории для углов перелета больше 180°:

а—эллипс, $t > t_m$,

$$\sqrt{\mu} t = \sqrt{a^3}[2\pi - (\alpha - \sin\alpha) + (\beta - \sin\beta)],$$

$$p = \frac{4a(s - r_1)(s - r_2)}{c^2}\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2};$$

б—эллипс, $t < t_m$,

$$\sqrt{\mu} t = \sqrt{a^3}[(\alpha - \sin\alpha) + (\beta - \sin\beta)],$$

$$p = \frac{4a(s - r_1)(s - r_2)}{c^2}\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2};$$

в—парабола

$$\sqrt{\mu} t = \frac{\sqrt{2}}{3}[s^{3/2} + (s-c)^{3/2}],$$

$$p = \frac{2(s - r_1)(s - r_2)}{c^2}(\sqrt{s} - \sqrt{s-c})^2;$$

г—гипербола

$$\sqrt{\mu} t = \sqrt{-a^3}[(\operatorname{sh}\gamma - \gamma) + (\operatorname{sh}\delta - \delta)],$$

$$p = -\frac{4a(s - r_1)(s - r_2)}{c^2}\operatorname{sh}^2\frac{\gamma-\delta}{2}$$

липса и $a<0$ для гиперболы, которое будет использоваться в дальнейшем. Следует, однако, помнить, что полуфокальный параметр или просто параметр конического сечения p — всегда величина положительная. Во всех случаях через F и F^* обозначены соответственно занятый и свободный фокусы, а через μ — гравитационная постоянная, соответствующая притягивающей массе в точке F. Остальные обозначения ясны из рисунков.

3.4. Определение траектории космического корабля*

Материал, изложенный в предыдущих разделах этой главы, можно положить в основу метода вычисления номинальной орбиты космического корабля. Рассмотрим, в частности, ту часть межпланетного перелета, когда предполагается, что на движение корабля влияет только притяжение Солнца. Такая траектория будет хорошим первым приближением к действительной траектории, за исключением, возможно, участков внутри сфер влияния планеты отправления и планеты назначения. Влияние этих планет будет полностью рассмотрено в гл. VI, а здесь оно не учитывается.

Вектор положения $\bar{r}_1$ планеты отправления известен, если задано время запуска. Если далее считать заданным время полета t, то известен также вектор положения $\bar{r}_2$ планеты назначения. Тем самым определен базовый треугольник PQF, и остается найти параметры орбиты, зная время полета. Очевидно, что непосредственное вычисление a при заданном t невозможно, если учесть трансцендентный характер соотношений, в которые входит a. Подробнее этот вопрос будет рассмотрен в разд. 3. 5.

Вследствие целого ряда обстоятельств возникают определенные практические трудности, которые следует учитывать. Во-первых, необходимо различать случаи, когда угол между радиусами-векторами $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$ меньше и когда больше 180°. Во-вторых, необходимо сравнивать t с временем движения по параболической кривой, связывающей концы радиусов-векторов $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$. Если, с одной стороны, t меньше времени движения по параболической кривой, то требуемая траектория есть гипербола. С другой стороны, если t больше времени движения по параболе, то требуемая траектория есть один из двух возможных эллипсов. Как было показано в разд. 3. 1, при фиксированных $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$ время полета по эллиптической траектории является двузначной функцией a. Поэтому необходимо дальнейшее уточнение с целью получения соответствующего выражения для времени полета, которое будет использоваться в итерационном процессе. Это можно сделать путем сравнения времени t с временем t_m, необходимым для перехода от $\bar{r}_1$ к $\bar{r}_2$ по траектории минимальной энергии. К сожалению, производная от t по a стре-

---

* Исчерпывающее рассмотрение этого вопроса можно найти в работах [67], [70], [71] (*прим. ред.*).

мится к бесконечности при значении a, соответствующем траектории минимальной энергии. Следовательно, если не принять особых мер предосторожности, могут возникнуть различного рода трудности *. Как избежать большинства этих трудностей, будет показано в разд. 3. 5.

На рис. 3. 9 построено время полета t в годах для перелета Земля—Марс в зависимости от большой полуоси a (в астрономических единицах) при различных значениях гелиоцентрического угла перелета θ. Рассматривались только эллиптические траектории; однако не исключалась возможность, что до встречи с Марсом космический корабль сделает N полных оборотов вокруг Солнца. Если угол θ меньше 360° ($N=0$), то a определяется как однозначная функция t. Поэтому, если эллиптическая траектория, связывающая точки P и Q, возможна при заданном значении t, то она же является единственной. С другой стороны, интересно отметить, что если угол θ больше 360°, но меньше 720° ($N=1$), то a—двузначная функция t. Таким образом, каждому значению t, достаточно большому, чтобы обеспечить выполнение задачи, будут соответствовать две траектории.

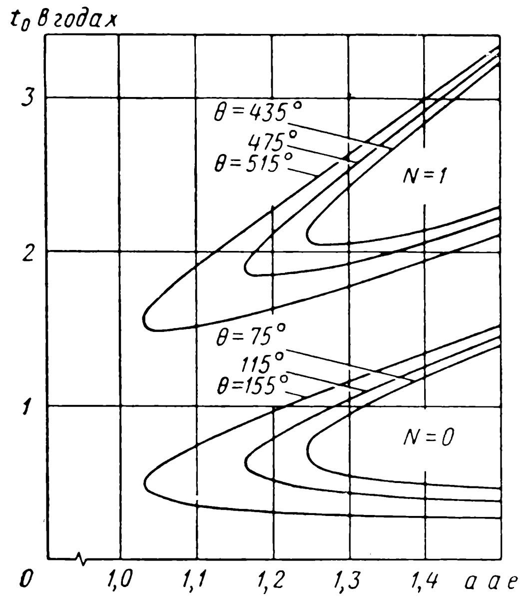


Рис. 3. 9. Время перелета Земля—Марс в зависимости от большой полуоси переходного эллипса и угла перелета θ

В разд. 3. 2 было описано, как, зная большую полуось a, рассчитать параметр траектории p. Остается вычислить вектор скорости $\bar{v}_1$. Наиболее просто это можно сделать, используя уравнение (1. 44). Несколько меняя обозначения в этом уравнении, запишем

$$\bar{v}_1 = \frac{\sqrt{\mu p}}{r_1 r_2 \sin\theta} \left\{ \bar{r}_2 - \left[1 - \frac{r_2}{p} (1-\cos\theta) \right] \bar{r}_1 \right\}. \tag{3.26}$$

За исключением параметра p, все величины в последнем уравнении зависят только от вида треугольника FPQ.

* Связанные со сходимостью итерационного процесса (*прим. ред.*).

Вектор скорости $\bar{v}_1$ может быть выражен прямо через большую полуось орбиты a, и тогда необходимость предварительного вычисления параметра p отпадает. Из различных формул для p, приведенных на рис. 3.7 и 3.8, легко найти следующую формулу:

$$p = \frac{2s(s-r_1)(s-r_2)(s-c)}{c^2} \times$$

$$\times \left[\sqrt{\frac{1}{s-c} - \frac{1}{2a}} \pm \operatorname{sgn}(t_m - t)\sqrt{\frac{1}{s} - \frac{1}{2a}}\right]^2.$$

Здесь выбор верхнего или нижнего знака зависит от того, меньше или больше 180° угол θ. Тогда, используя обычные тригонометрические соотношения, выражение для p можно записать в любом из двух вариантов:

$$p = \frac{1}{2}\left\{\frac{r_1 r_2 \sin\theta}{c} \times\right.$$

$$\left.\times \left[\sqrt{\frac{1}{s-c} - \frac{1}{2a}} \pm \operatorname{sgn}(t_m - t)\sqrt{\frac{1}{s} - \frac{1}{2a}}\right]\right\}^2,$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2}\left\{\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} \times\right.$$

$$\left.\times \left[\sqrt{\frac{1}{s-c} - \frac{1}{2a}} \mp \operatorname{sgn}(t_m - t)\sqrt{\frac{1}{s} - \frac{1}{2a}}\right]\right\}^2.$$

Подставляя теперь два последних выражения для p в уравнение (3.26) и вводя два единичных вектора

$$\bar{i}_{r_1} = \frac{\bar{r}_1}{r_1}, \quad \bar{i}_c = \frac{\bar{r}_2 - \bar{r}_1}{c},$$

окончательно получим

$$\bar{v}_1 = \sqrt{\frac{\mu}{2}}\,[A(\bar{i}_c + \bar{i}_{r_1}) + B(\bar{i}_c - \bar{i}_{r_1})], \tag{3.27}$$

где

$$A = \pm\sqrt{\frac{1}{s-c} - \frac{1}{2a}}.$$

$$B = \operatorname{sgn}(t_m - t)\sqrt{\frac{1}{s} - \frac{1}{2a}}.$$

3.5. Универсальные формулы для теоремы Ламберта

Используя специальные трансцендентные функции, определенные в разд. 2.8, решение орбитальной задачи, рассматриваемой в этой главе, можно свести к одной простой формуле, равно применимой к эллипсу, параболе и гиперболе.

Формулы времени перелета по двум эллипсам, изображенным на рис. 3. 7, можно объединить в одно выражение, применение которого не вызовет трудностей, связанных с упоминавшейся выше бесконечной производной. Для этой цели отметим, что вспомогательную величину α можно рассматривать в качестве независимой переменной вместо a, поскольку α и β связаны соотношением

$$\frac{1-\cos\alpha}{s}=\frac{1-\cos\beta}{s-c}, \quad s-c\neq 0.$$

Теперь можно ввести новую переменную $\lambda=\alpha$ при $t<t_m$ и $\lambda=2\pi-\alpha$ при $t>t_m$. Тогда, если считать λ независимой переменной, обе формулы для времени перелета становятся идентичными. Таким образом, имеем

$$\sqrt{\mu}t=\left(\frac{s}{1-\cos\lambda}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot(\lambda-\sin\lambda)-\left(\frac{s-c}{1-\cos\beta}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot(\beta-\sin\beta), \quad \begin{cases}0\leqslant\lambda\leqslant 2\pi,\\ 0\leqslant\beta\leqslant\lambda,\\ 0\leqslant\beta\leqslant\pi,\end{cases}$$

где

$$s(1-\cos\beta)=(s-c)(1-\cos\lambda), \quad s-c\neq 0.$$

В этом выражении t — монотонно возрастающая функция λ, которая не имеет разрывов в окрестности траектории минимальной энергии при $\lambda=\pi$. Теперь для заданного значения t соответствующее значение λ можно найти с помощью итерационного процесса. После этого величина большой полуоси a определяется по выражению, которое следует из определения α, когда λ рассматривается в качестве независимой переменной:

$$a=\frac{s}{1-\cos\lambda}.$$

Аналогично в формуле для времени перелета по гиперболической траектории, приведенной на рис. 3. 7, независимой переменной можно считать γ. Тогда будем иметь

$$\sqrt{\mu}t=\left(\frac{s}{\operatorname{ch}\gamma-1}\right)^{\frac{3}{2}}(\operatorname{sh}\gamma-\gamma)-\left(\frac{s-c}{\operatorname{ch}\delta-1}\right)^{\frac{3}{2}}(\operatorname{sh}\delta-\delta), \quad 0\leqslant\delta\leqslant\gamma<\infty,$$

где

$$s(\operatorname{ch}\delta-1)=(s-c)(\operatorname{ch}\gamma-1), \quad s-c\neq 0.$$

Большая полуось связана с γ соотношением

$$a=\frac{s}{1-\operatorname{ch}\gamma}.$$

Нетрудно убедиться в том, что уравнения к рис. 3.8 можно подвергнуть подобным же преобразованиям, если принять следующие условия:

$$\text{при угле перелета } \theta < 180^\circ, \quad \begin{cases} \beta > 0, \\ \delta > 0, \end{cases}$$

$$\text{при угле перелета } \theta > 180^\circ, \quad \begin{cases} \beta < 0, \\ \delta < 0. \end{cases}$$

С помощью специальных функций, определенных уравнениями (2.39) и (2.40), формулы для эллиптических и гиперболических траекторий можно преобразовать в одно выражение. Обозначая

$$x = \lambda^2, \quad -x = \gamma^2,$$

$$y = \beta^2, \quad -y = \delta^2,$$

придем к следующей универсальной формуле для времени перелета:

$$\sqrt{\mu} t = \left(\frac{s}{C(x)}\right)^{\frac{3}{2}} S(x) \mp \left(\frac{s-c}{C(y)}\right)^{\frac{3}{2}} S(y), \quad \begin{cases} -\infty \leqslant x \leqslant (2\pi)^2, \\ -\infty \leqslant y \leqslant x, \\ -\infty \leqslant y \leqslant \pi^2, \end{cases} \tag{3.28}$$

$$syC(y) = (s-c)\, xC(x), \quad s - c \neq 0. \tag{3.29}$$

Выбор знака зависит от величины угла θ между радиусами-векторами $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$: верхний знак соответствует θ меньше 180°, нижний θ больше 180°.

Если величина t задана, то из уравнений (3.28) и (3.29) можно найти x и y. Отсюда легко установить тип конического сечения: эллипс, парабола и гипербола соответствуют положительным, нулевым и отрицательным значениям x и y. В этом случае большая полуось вычисляется по формуле

$$a = \frac{s}{xC(x)} = \frac{s-c}{yC(y)}, \tag{3.30}$$

а скорость находится по уравнению (3.27). Полезно отметить, что при вычислении скорости член $\operatorname{sgn}(t_m - t)$ можно заменить членом $\operatorname{sgn}(\pi^2 - x)$.

Решение получается с помощью двух итерационных процессов: 1) по заданному x находится y и 2) по заданному t находится x. Для этой цели можно применить обычный метод Ньютона. Используя равенства (2.41), нетрудно вывести следующие рекуррентные формулы:

$$y_{n+1} = y_n - \frac{2}{[1 - y_n S(y_n)]} \left[y_n C(y_n) - \frac{s-c}{s} xC(x) \right];$$

$$x_{n+1} = x_n \left(1 - \frac{\sqrt{\mu}\, t_n - \sqrt{\mu}\, t}{\sqrt{\mu} \left[x \dfrac{dt}{dx} \right]_{x = x_n}} \right),$$

где

$$2\sqrt{\mu}x\frac{dt}{dx} = \frac{1}{C(x)^{\frac{1}{2}}}\times$$

$$\times\left[s^{\frac{3}{2}} \mp \sqrt{2 - xC(x)}\left(\frac{(s-c)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2 - yC(y)}} - \frac{3}{2}\sqrt{\mu}\,t\right)\right].$$

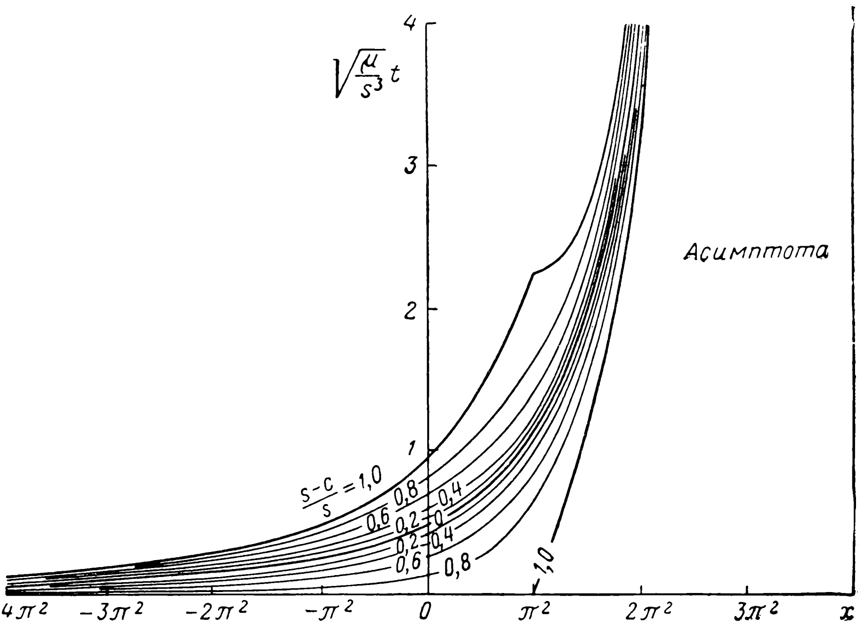


Рис. 3.10. Семейство решений задачи Ламберта

На рис. 3.10 показано семейство решений задачи Ламберта. Безразмерная величина $\sqrt{\frac{\mu}{s^3}}\,t$ построена как функция независимой переменной x при различных значениях параметра $\frac{s-c}{s}$. Каждому значению этого параметра между нулем и единицей соответствуют две кривые: одна кривая для угла перелета больше 180°, а другая — меньше 180°. Параметр $\frac{s-c}{s}$ равен нулю, когда угол перелета равен точно 180°; на графике это соответствует кривой, разделяющей семейство решений на две части.

3.6. Другие методы определения орбит

Рассмотрим четыре других метода решения центральной задачи этой главы. За исключением последнего метода, мы ограничимся эллиптическим случаем, а читателям предоставляем возможность в качестве упражнения обобщить результаты на остальные конические сечения.

Метод Гаусса

Важной величиной при определении орбит методом Гаусса является отношение (обозначим его через y) площади сектора, ограниченного радиусами r_1 и r_2 и дугой орбиты, к площади треугольника со сторонами r_1, r_2 и c. Поскольку площадь сектора равна $1/2\ ht$, а площадь треугольника $1/2\ r_1 r_2 \sin\theta$, то это отношение можно записать в виде

$$y = \frac{\sqrt{\mu p}\, t}{r_1 r_2 \sin\theta}. \tag{3.31}$$

Если в уравнении (2.54) обозначить

$$z = \frac{E_2 - E_1}{2}$$

и учесть, что $\theta = f_2 - f_1$, то получим

$$p = \frac{2 r_1 r_2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{r_1 + r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2}\cos\frac{\theta}{2}\cos z}. \tag{3.32}$$

Исключая p из уравнений (3.31) и (3.32) и используя обозначения Гаусса

$$l = \frac{r_1 + r_2}{4\sqrt{r_1 r_2}\cos\frac{\theta}{2}} - \frac{1}{2},$$

$$m^2 = \frac{\mu t^2}{\left[2\sqrt{r_1 r_2}\cos\frac{\theta}{2}\right]^3},$$

найдем

$$y^2 = \frac{m^2}{l + \sin^2\frac{z}{2}}. \tag{3.33}$$

Величины l и m определяются исходя из геометрии треугольника PQF и интервала времени t. Таким образом, уравнение (3.33) представляет собой соотношение между двумя неизвестными y и z.

Для того чтобы получить второе независимое соотношение, из уравнений (2. 52) и (2. 54) найдем

$$\frac{1}{a} = \frac{p \sin^2 z}{r_1 r_2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}.$$

Следовательно, если с помощью уравнения (3. 31) выразить p через y

$$p = \frac{(y r_1 r_2 \sin \theta)^2}{\mu t^2}, \tag{3.34}$$

то будем иметь

$$\frac{1}{a} = \frac{r_1 r_2}{\mu t^2} \left(2y \sin z \cos \frac{\theta}{2}\right)^2. \tag{3.35}$$

Далее, исключаем величину $e \cos {}^1/_2 (E_2 + E_1)$ из уравнений (3. 17) и (2. 47):

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\, t = 2z - \sin 2z + 2 \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{a} \sin z \cos \frac{\theta}{2}. \tag{3.36}$$

Наконец, исключая a из уравнений (3. 35) и (3. 36), найдем второе соотношение, связывающее y и z:

$$y^3 - y^2 = m^2 \frac{2z - \sin 2z}{\sin^3 z}. \tag{3.37}$$

Для определения y и z уравнения (3. 33) и (3. 37) должны быть решены любым приближенным методом.

Чтобы предотвратить возможное уменьшение точности при вычислении орбитального параметра p, следует вместо уравнения (3. 32) использовать уравнение (3. 34), поскольку в расчет знаменателя выражения (3. 32) входит операция вычитания, которая может привести к ненужной потере значащих цифр.

Метод Гоудела

Для тех случаев, когда нет оснований опасаться возможной потери точности, отмеченной в предыдущем параграфе, Гоудел показал, что время полета t и величину z можно связать с помощью одного соотношения.

В соответствии с уравнением (2. 52) большую полуось орбиты a можно выразить через z:

$$a = \frac{r_1 + r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2} \cos z \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 z} =$$

$$= \left(\sqrt{\mu} \frac{A}{2}\right)^{\frac{2}{3}} (B - \cos z) \operatorname{cosec}^2 z.$$

Здесь величины A и B определяются выражениями

$$A = 2\mu^{-\frac{1}{2}} (r_1 r_2)^{\frac{3}{4}} \cos^{\frac{3}{2}} \frac{\theta}{2}, \quad B = \frac{r_1 + r_2}{2\sqrt{r_1 r_2} \cos \frac{\theta}{2}}$$

и зависят только от вида треугольника FPQ. Тогда, если предыдущее выражение для a подставить в уравнение (3. 36), получим искомое соотношение

$$t = A\sqrt{B - \cos z}\left[1 + \frac{(B - \cos z)(2z - \sin 2z)}{2\sin^3 z}\right], \tag{3.38}$$

из которого путем итерационного процесса находится z. Когда переменная z известна, параметр орбиты вычисляется по формуле

$$p = \frac{\sqrt{r_1 r_2} \sin^2 \frac{\theta}{2}}{(B - \cos z) \cos \frac{\theta}{2}}. \tag{3.39}$$

Метод Хэррика

В основе метода, предложенного Хэрриком и Лиу, лежит итерационный процесс определения орбитального параметра p. Если p известно, тригонометрические функции истинных аномалий f_1 и f_2 могут быть вычислены по соотношениям

$$e \cos f_j = \frac{p}{r_j} - 1, \quad j = 1, 2,$$

$$e \sin f_2 = \frac{e \cos f_1 - e \cos f_2 \cos \theta}{\sin \theta},$$

$$e \sin f_1 = \frac{e \cos f_1 \cos \theta - e \cos f_2}{\sin \theta},$$

откуда

$$e^2 = (e \cos f_1)^2 + (e \sin f_1)^2.$$

Тогда эксцентрические аномалии E_1 и E_2 определяются следующим путем:

$$\cos E_j = \frac{r_j}{p} (\cos f_j + e), \quad \sin E_j = \frac{r_j}{p} \sqrt{1 - e^2} \sin f_j,$$

а средние аномалии M_1 и M_2 — из уравнения

$$M_j = E_j - e \sin E_j,$$

где

$$E_j = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin E_j}{\cos E_j}\right).$$

Следовательно, если a вычислять по формуле

$$a = \frac{p}{1 - e^2},$$

то время полета по орбите от точки P к точке Q находится следующим образом:

$$t = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} (M_2 - M_1).$$

Окончательный результат будет несколько отличаться от начального интервала времени, поскольку значение параметра p должно уточняться до тех пор, пока не будет достигнута приемлемая точность.

Метод Дейста

Метод, предложенный Дейстом, основан на универсальных формулах, приведенных в гл. II, и использует в качестве основной переменной итерационного процесса разность орбитальных аномалий, соответствующих граничным положениям радиуса-вектора. Как было показано в разд. 2.8, для этой цели удобно применять обобщенную переменную $\alpha_1 x^2$.

В итерационном процессе принимает участие следующая система равенств, которая может быть установлена сравнением скалярных коэффициентов уравнений (1.44) и (1.45) с коэффициентами в уравнениях (2.43) и (2.44) и очевидным изменением обозначений:

$$x^2 C(\alpha_1 x^2) = \frac{r_1 r_2}{p} (1 - \cos\theta), \tag{3.40}$$

$$x^3 S(\alpha_1 x^2) = \sqrt{\mu}\, t - \frac{r_1 r_2}{\sqrt{p}} \sin\theta, \tag{3.41}$$

$$\frac{\sqrt{\mu}}{r_1 r_2} [\alpha_1 x^3 S(\alpha_1 x^2) - x] = \frac{\bar{r}_1 \cdot \bar{v}_1}{p r_1} (1 - \cos\theta) - \frac{1}{r_1} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin\theta. \tag{3.42}$$

Другой основной величиной, необходимой для данного метода, является угол γ_1, образуемый вектором скорости $\bar{v}_1$ с радиусом-вектором $\bar{r}_1$. Действительно, на основании решения задачи 2.14 будем иметь

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{\sqrt{\mu p}}{\bar{r}_1 \cdot \bar{v}_1}.$$

В итоге из уравнения (1.46) найдем соотношение, связывающее γ_1 и p:

$$\operatorname{ctg} \gamma_1 = \frac{1}{\sin\theta} \left[\frac{r_1}{p} (1 - \cos\theta) + \cos\theta - \frac{r_1}{r_2} \right]. \tag{3.43}$$

Нетрудно показать, что α_1, определенная как величина, обратная большой полуоси, также может быть выражена через γ_1 и p:

$$\alpha_1 = \frac{2}{r_1} - \frac{p}{r_1^2}(1 + \operatorname{ctg}^2 \gamma_1). \tag{3.44}$$

Определение орбиты состоит в нахождении величин p, α_1 и x, удовлетворяющих уравнениям (3.40)—(3.44), по заданным значениям r_1, r_2, θ и t. Последующая часть параграфа будет посвящена рассмотрению практически пригодного вычислительного алгоритма.

Прежде всего отметим, что скалярное произведение $\bar{r}_1 \cdot \bar{v}_1$ можно исключить из уравнения (3.42), используя определение угла γ_1 и уравнение (3.43). Действительно, уравнение (3.42) превратится в соотношение только между p и $\alpha_1 x^2$, если множитель x исключить из левой части этого уравнения, выразив его с помощью (3.40) следующим образом:

$$x = \left(\frac{r_1 r_2 (1 - \cos\theta)}{pC(\alpha_1 x^2)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Если вместо p использовать переменную

$$y = \frac{r_1 r_2 (1 - \cos\theta)}{p},$$

то получим зависимость y от $\alpha_1 x^2$:

$$y = r_1 + r_2 - A \operatorname{sgn}(\pi^2 - \alpha_1 x^2) \sqrt{2 - \alpha_1 x^2 C(\alpha_1 x^2)}. \tag{3.45}$$

При выводе этого уравнения использовалось третье равенство (2.41). Здесь

$$A = \operatorname{sgn}(\pi - \theta) \sqrt{r_1 r_2 (1 + \cos\theta)}.$$

Теперь итерационная схема формулируется достаточно просто. По первому приближению $\alpha_1 x^2$ находится величина y из уравнения (3.45) и величина x из соотношения

$$x = \sqrt{\frac{y}{C(\alpha_1 x^2)}}. \tag{3.46}$$

Затем результат проверяется по уравнению (3.41), которое можно записать в виде

$$\sqrt{\mu}\, t = x^3 S(\alpha_1 x^2) + A\sqrt{y}. \tag{3.47}$$

Далее величина $\alpha_1 x^2$ уточняется, и процесс повторяется до тех пор, пока проверочное равенство (3.41) не будет удовлетворяться с приемлемой точностью.

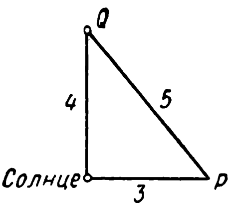
Наконец, вектор скорости $\bar{v}_1$ может быть вычислен по формуле (3. 26), которую перепишем в более удобном виде

$$\bar{v}_1=\frac{1}{A}\sqrt{\frac{\mu}{y}}\left[\bar{r}_2+\left(\frac{y}{r_1}-1\right)\bar{r}_1\right]. \qquad (3.48)$$

Задачи

3. 1. Рассмотрим треугольник (см. эскиз) со сторонами, измеренными в астрономических единицах.

а) Найти эксцентриситет и соответствующее время полета для двух эллиптических траекторий, связывающих точки P и Q, если длина их большой оси равна 9 астрономическим единицам.



б) Найти эксцентриситет и время полета для траектории минимальной энергии перелета от P к Q. Вычислить скорость в точках P и Q для этой траектории в астрономических единицах в год.

3. 2. Показать, что если эксцентриситет гиперболического геометрического места свободных фокусов всех эллиптических траекторий, связывающих P и Q и имеющих фокус в F, обозначить через $\sec\Phi$, то расстояние между свободными фокусами для двух любых траекторий с одинаковой большой осью $2a$ равно

$$4a\sin\Phi\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}.$$

3. 3. Показать, что две параболические траектории с фокусом в точке F, связывающие P и Q, имеют оси, параллельные асимптотам гиперболического геометрического места свободных фокусов для эллиптических и гиперболических траекторий. Получить, используя только геометрические методы, выражения (3. 9) и (3. 10) для полуфокального параметра или, что то же самое, для расстояния от фокуса до директрисы.

Указание: для параболы с вершиной в V_2 на рис. 3. 4 показать, что

$$p=r_1-r_1\sin(\varepsilon-\nu),$$

где $\varepsilon=\angle FPQ$, $2\nu=\angle A_2FA_1'$.

Результат будет следовать из равенств

$$\sin\nu=\frac{r_2-r_1}{c}, \quad \cos\nu=\frac{2}{c}\sqrt{(s-r_1)(s-r_2)},$$

$$\sin\varepsilon=\frac{2}{r_1c}\sqrt{s(s-r_1)(s-r_2)(s-c)}, \quad \cos\varepsilon=\frac{r_1^2+c^2-r_2^2}{2r_1c}$$

после соответствующих алгебраических преобразований.

3. 4. Аппарат движется по эллиптической траектории минимальной энергии с фокусом в F между точками P и Q. Показать, что если γ_{1m} — угол между радиусом-вектором и вектором скорости в точке P, то

$$\gamma_{1m}=\frac{1}{2}(\pi-\angle FPQ),$$

т. е. вектор скорости $\bar{v}_{1m}$ делит пополам угол, образованный хордой PQ и продолжением прямой FP.

3. 5. Используя свойство эллипсов, установленное в задаче 2. 2, показать, что углы в точках P и Q, образованные двумя эллиптическими траекториями, связывающими эти точки и имеющие одинаковую большую ось, делятся пополам эллипсом минимальной энергии. Схема, поясняющая задачу, изображена на рис. 3. 2.

3. 6. Обозначив через $\operatorname{tg}\Phi$ наклон асимптот гиперболического геометрического места свободных фокусов для эллиптических траекторий от P к Q, показать, что эксцентриситет семейства эллипсов можно записать в виде

$$e^2=1-\sin^2\Phi\sin^2\frac{\alpha\pm\beta}{2}.$$

3. 7. Приближенное решение задачи определения орбиты можно получить с помощью разложения в ряд Тейлора. Таким образом, до членов порядка t^3 имеем

$$\bar{r}=\bar{a}+\bar{b}t+\bar{c}t^2+\bar{d}t^3.$$

Используя уравнение движения

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}+\frac{\mu}{r^3}\bar{r}=0$$

и дифференцируя ряд, найдем

$$-\frac{\mu}{r^3}\bar{r}=2\bar{c}+6\bar{d}t.$$

а) Показать, что

$$\bar{r}_1=\bar{a},$$

$$\bar{r}_2=\bar{a}+\bar{b}t+\bar{c}t^2+\bar{d}t^3,$$

$$-\frac{\mu}{r_1^3}\bar{r}_1=2\bar{c},$$

$$-\frac{\mu}{r_2^3}\bar{r}_2=2\bar{c}+6\bar{d}t,$$

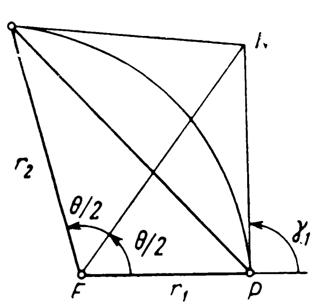
$$\bar{v}_1=\bar{b},$$

б) Исключая постоянные векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$ из записанных выше пяти выражений, получить уравнение для $\bar{v}_1$ в зависимости от $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$ и t.

3. 8. а) Показать, что касательные к орбите в точках P и Q и биссектриса центрального угла θ (см. эскиз) имеют общую точку пересечения.

Указание: пусть касательные в точках P и Q пересекаются с биссектрисой угла в точках N_1 и N_2 соответственно. Положение «а» будет доказано, если установить, что $FN_1 = FN_2 = FN$. Из рисунка с помощью правила синусов нужно установить, что

$$FN_1 = \frac{r_1 \sin \gamma_1}{\sin\left(\gamma_1 - \frac{\theta}{2}\right)} = \frac{r_1}{\cos \frac{\theta}{2} - \operatorname{ctg} \gamma_1 \sin \frac{\theta}{2}}$$



и использовать решение задачи 2. 14.

б) Используя промежуточные результаты предыдущего пункта «а», показать, что

$$FN = \frac{p}{\cos \frac{1}{2}(f_2 - f_1) + e \cos \frac{1}{2}(f_2 + f_1)}$$

и, далее, что

$$FN \cos z = \sqrt{r_1 r_2},$$

где

$$z = \frac{1}{2}(E_2 - E_1).$$

в) Исключая FN из первого и последнего уравнений, показать, что

$$\operatorname{ctg} \gamma_1 = \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \cos z \operatorname{cosec} \frac{\theta}{2}.$$

3. 9. Показать, что если P — вершина параболической орбиты, связывающей точки P и Q, то выражения для орбитальных элементов в методе Гоудела останутся справедливыми при z, тождественно равной нулю. Для этого случая показать, что выражение (3. 38) для времени полета приводится к виду (2. 12).

3. 10. Универсально применимую формулу для времени полета, выраженную в виде ряда Тейлора по a^{-1}, можно вывести следующим образом:

а) Показать, что функция

$$F(x) = S(x)\, C(x)^{-\frac{3}{2}}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{2}{3} w \frac{dF}{dw} + F = \frac{2}{3}(2 - w)^{-\frac{1}{2}},$$

где $w = xC(x)$.

б) Подставить степенной ряд

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} F_n w^n$$

в дифференциальное уравнение для F, разложить $(2-w)^{-1/2}$ в ряд по формуле бинома и, приравнивая соответствующие коэффициенты при w, получить

$$F_0=\frac{\sqrt{2}}{3}, \quad F_1=\frac{\sqrt{2}}{20}, \ldots$$

$$F_n=\frac{\sqrt{2}}{2n+3}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{2n}n!}.$$

в) Показать, что уравнение (3.28) можно записать в виде

$$\sqrt{\mu}t=F(x)\,s^{\frac{3}{2}} \mp F(y)(s-c)^{\frac{3}{2}},$$

где

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} F_n\left(\frac{s}{a}\right)^n, \quad F(y)=\sum_{n=0}^{\infty} F_n\left(\frac{s-c}{a}\right)^n.$$

г) Наконец, получить разложение

$$\sqrt{\mu}t=\sum_{n=0}^{\infty}\left[s^{n+\frac{3}{2}} \mp (s-c)^{n+\frac{3}{2}}\right]\frac{F_n}{a^n}$$

и сравнить его первый член с уравнениями (3.25) и (3.24). Определить область сходимости этого ряда.

3.11. Используя уравнение (3.26), показать, что параметр конического сечения, связывающего две точки с радиусами-векторами $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$, когда угол γ_2 между $\bar{r}_2$ и вектором скорости $\bar{v}_2$ задан, находится по выражению

$$p=\frac{r_1 r_2 \sin\gamma_2(1-\cos\theta)}{r_2\sin\gamma_2-r_1\sin(\gamma_2+\theta)}.$$

Сравнить это выражение с уравнением (3.6) для частного случая $\gamma_2=90°$.

3.12. Показать, что уравнение (3.27) может быть записано в виде

$$\bar{v}_1=\sqrt{\frac{2\mu}{r_1 c}}\,(A'\bar{i}_{c+r_1}+B'\bar{i}_{c-r_1}),$$

где $$A'=\pm\sqrt{(s-r_1)\left(1-\frac{s-c}{2a}\right)},$$

$$B' = \operatorname{sgn}(t_m - t)\sqrt{(s - r_2)\left(1 - \frac{s}{2a}\right)},$$

а $\bar{i}_{c+r_1}$, $\bar{i}_{c-r_1}$ — ортогональные единичные векторы в направлениях соответственно $\bar{i}_c + \bar{i}_{r_1}$ и $\bar{i}_c - \bar{i}_{r_1}$. Рассмотреть предельную форму этого уравнения, когда угол перелета достигает 180°.

Библиография

Разд. 3. 1—3. 3 полностью основаны на работах автора [5] и [6]. Несколько лет назад, когда были написаны эти работы, автор не подозревал о том, что Пламмер уже рассмотрел различные частные случаи уравнения Ламберта для времени полета. Полученные здесь результаты принадлежат автору и основаны частично на работе Лагранжа [34].

Выводы геометрических свойств местоположения свободных фокусов конических орбит, связывающих две точки, принадлежат автору, так же как и выражение для параметра конического сечения в разд. 3. 2.

На метод вычисления потребной скорости на орбите (см. разд. 3. 4), связывающей два положения, когда параметр известен, указал автору Дж. Дейст из Приборной лаборатории МТИ. Другое выражение для вектора скорости в зависимости от большой полуоси принадлежит автору.

Универсальную формулировку задачи Ламберта можно найти в работе [8]. Формулы были тщательно проверены коллегами автора по Приборной лаборатории, а сделанные ими многочисленные полезные замечания заслуживают высокой оценки.

Метод Гаусса решения основной задачи этой главы является классическим и был разработан им для определения орбиты только что открытого астероида Церера. Материалы, изложенные в разд. 3. 6, не исчерпывают, однако, всего метода, поскольку Гаусс работал только с результатами угловых наблюдений и не имел непосредственной информации о положениях астероида. Полное изложение метода можно найти у Мультона [47] и Хэргета [27]. Пламмер [51] распространил метод Гаусса на гиперболические орбиты.

Метод, предложенный Гоуделом в работе [25], был, несомненно, известен еще Гауссу, но для его целей этот метод не обеспечивал требуемой точности. Метод Хэррика и Лиу описан в книге Бэйкера и Мэйкемсона [4]; этот метод удобен для решения многих задач определения космических траекторий, когда эксцентриситет не слишком мал, но и не слишком близок к единице. Хотя метод Хэррика и Лиу рассмотрен здесь в применении к эллиптическим орбитам, совершенно аналогичную схему можно разработать для гиперболических орбит.

Четвертый метод, рассмотренный в разд. 3.6, принадлежит Дж. Дейсту из Приборной лаборатории МТИ. Схема расчета основана на обобщенных формулах для конических сечений и потому применима без изменений ко всем типам конических орбит.

Автор выражает свою признательность Денби [20] за приближенный способ определения орбиты, описанный в задаче 3.7. На интересное свойство биссектрисы и касательных к орбите указал автору Гоудел [24], хотя доказательство, приведенное в задаче 3.8, принадлежит автору. Наконец, разложение в задаче 3.10 было выведено на основе работы Хэргета [27], однако это было сделано всего лишь для нахождения возможной альтернативы универсальным формулам автора.

ГЛАВА IV

Межорбитальные перелеты в задаче двух тел

В настоящей главе обсуждаются вопросы [72], связанные с изменением орбиты космического корабля с целью выполнения поставленной задачи путем одного или нескольких дискретных изменений скорости. Сначала рассматривается идеализированное импульсное изменение скорости, которое, хотя и физически неосуществимо, тем не менее представляет собой достаточно хорошее приближение к решению многих задач, если при этом время работы двигателя мало по сравнению с полным временем полета. В последнем разделе главы уделяется внимание и более реальным задачам наведения на активном участке полета. Излагается универсальный метод наведения, определяющий направление вектора тяги ракетного двигателя во время активного маневра и применимый для целого ряда космических операций.

Почти все задачи об орбитальных перелетах связаны с необходимостью минимизации некоторого критерия. Обычно объектом минимизации служит сумма потребных импульсных изменений скорости, часто называемая *характеристической скоростью*. Например, можно потребовать, чтобы при данном положении корабля на начальной орбите переход на новую орбиту, проходящую через заданную точку, совершался под действием импульса скорости наименьшей величины. Задачу можно расширить, если включить в рассмотрение еще одно изменение скорости в конечной точке с целью перевода космического корабля на другую орбиту. Затем следует так выбирать орбиту перелета, чтобы сумма двух изменений скорости была минимальной.

Задачи такого рода неизбежно приводят к алгебраическому уравнению достаточно высокой степени, которое можно решить только с помощью довольно громоздких численных методов. Однако во многих случаях нетрудно подметить некоторые геометрические свойства решения, которые имеют характер достаточно общих результатов и зачастую способствуют более глубокому пониманию существа рассматриваемых явлений. Поэтому на тематику данной главы наложило отпечаток стремление автора прежде всего отобрать те задачи, которые можно описать геометрически.

Несколько первых разделов главы посвящены одно- и двухимпульсным перелетам описанного выше типа. Они находят применение в целом ряде таких космических операций, как встреча спутников, перехват спутников, запуск баллистических снарядов, определение межпланетных траекторий. Поскольку некоторые из этих задач удобно решать или, по крайней мере, представлять в плоскости годографа, в главу включен раздел об анализе годографов.

Два раздела относятся к задаче схода с круговой орбиты пассивного полета. Здесь требуется найти скорость, которую необходимо иметь в некоторой точке орбиты для последующего достижения заданной гиперболической скорости. Оптимальная задача сводится к нахождению соответствующей точки на орбите, в которой должен прикладываться импульс схода. При этом полностью учитываются реальные ограничения, накладываемые на начальную пассивную орбиту.

4.1. Граница достижимости

В разд. 3.1 было показано, что эллиптическая орбита с фокусом F может соединять точки P и Q только в том случае, если большая полуось a по своей длине не меньше минимальной величины a_m. Свободный фокус F_m^*, соответствующий орбите с минимумом a, лежит на хорде PQ и расположен так, что выполняются равенства

$$QF_m^* = s - r_2, \qquad F_m^*P = s - r_1,$$

где r_1, r_2 — длины радиусов FP и FQ, а s — половина периметра треугольника FPQ. Величина вектора скорости в точке P орбиты определяется по формуле

$$v_{1m}^2 = 2\mu\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{s}\right). \tag{4.1}$$

Если тело начинает двигаться из точки P с начальной скоростью v_1, меньшей v_{1m}, то при любом направлении движения оно не достигнет точки Q. Важная задача, которую попытаемся теперь решить, состоит в определении геометрического места точек Q, которые еще достижимы из точки P при фиксированной начальной скорости v_1.

Для любой точки Q, еще достижимой из фиксированной точки P, скорость v_1 должна соответствовать траектории минимальной энергии от P к Q. Из уравнения (4.1) получается, что точка Q должна быть расположена таким образом, чтобы величина полупериметра s оставалась постоянной. Из равенства

$$QP = QF_m^* + F_m^*P$$

следует, что

$$QP = 2s - r_1 - r_2 = 2s - r_1 - QF,$$

откуда

$$QP + QF = 2s - r_1 = \text{const}.$$

Тем самым установлено, что геометрическое место точек Q есть эллипс с фокусами в центре притяжения F и в начальной точке P и большой осью $2a_l$:

$$2a_l = \frac{2\mu + r_1 v_1^2}{2\mu - r_1 v_1^2} r_1. \tag{4.2}$$

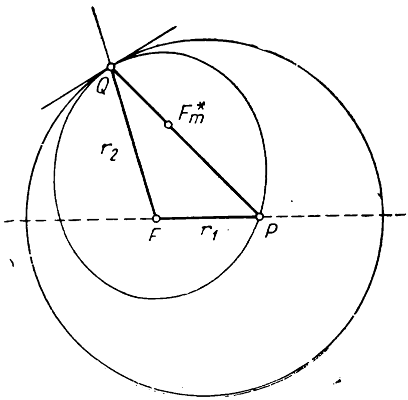


Рис. 4. 1. Граница достижимости

Этот эллипс показан на рис. 4. 1.

Касательная к эллиптическому геометрическому месту точек в точке Q делит пополам угол, образованный продолжением прямых QP и FQ; это следует из свойства эллипсов, выведенного в задаче 2. 2. С другой стороны, из результата задачи 3. 4 следует, что касательная к эллиптической орбите минимальной энергии делит пополам тот же самый угол. Таким образом, геометрическое место достижимых точек Q и соответствующие орбиты минимальной энергии от P к Q касаются в точке Q. Следовательно, эллиптическое геометрическое место точек представляет собой огибающую всех возможных орбит, выходящих из точки P, а ее внутренняя область охватывает все точки, достижимые из P при начальной скорости v_1.

4.2. Одноимпульсный компланарный перелет между круговыми орбитами

Понятие границы достижимости, рассмотренное в предыдущем разделе, применимо только в том случае, если начальная точка P не перемещается относительно центра притяжения F. Однако почти во всех задачах механики космического полета ракета или космический корабль обладают некоторой начальной скоростью по отношению к центру притяжения, поэтому целесообразно сконцентрировать наше внимание на дополнительной скорости, которую нужно прибавить к начальной для выполнения поставленной задачи.

По-видимому, наиболее простой задачей такого типа является следующая: начальная скорость космического корабля равна круговой орбитальной скорости относительно центра притяжения; требуется определить приращение скорости, которое обеспечит перевод космического корабля на новую орбиту, проходящую через заданную точку пространства. Для практического применения решения этой задачи можно принять упрощенную модель солнечной системы, считая, что планеты обращаются вокруг Солнца по компланарным круговым орбитам. Космический корабль, отправляющийся от Земли, будет иметь начальную скорость относительно Солнца, которая равна орбитальной скорости Земли. Кроме того, чтобы анализировать полет в рамках задачи двух тел, необходимо предполагать, что импульс скорости осуществляется в точке, достаточно удаленной от гравитационного поля Земли, чтобы можно было учитывать только солнечное притяжение. На первый взгляд может показаться, что эта модель до такой степени упрощена, что теряет физический смысл. Однако многие существенные стороны межпланетного полета при этом остаются, а результаты анализа при их надлежащем истолковании будут способствовать лучшему пониманию более реальной задачи.

В качестве первого шага получим выражения для радиальной и трансверсальной составляющих скорости v_r и v_θ космического корабля, движущегося по конической орбите:

$$\left.\begin{aligned} v_r^2 &= \mu\left(\frac{2r-p}{r^2} - \frac{1}{a}\right), \\ v_\theta^2 &= \frac{\mu p}{r^2}. \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

Здесь большая полуось орбиты a положительна или отрицательна в зависимости от того, эллиптическая или гиперболическая траектория имеется в виду. Однако для определенности, а также для того чтобы потребная энергетика оставалась в разумных пределах, ограничимся здесь рассмотрением начальных скоростей, необходимых для выполнения межорбитальных перелетов только по эллиптическим траекториям.

Обратимся к рис. 4.2 и рассмотрим космический корабль на круговой орбите радиуса r_1 от центра притяжения. Начальная скорость v_0 определяется из соотношения

$$v_0^2 = \frac{\mu}{r_1}.$$

Если в точке P космическому кораблю придать надлежащим образом приращение скорости $\Delta\bar{v}_1$, то он покинет в точке P со скоростью $\bar{v}_1$ свою первоначальную орбиту и будет двигаться по эллиптической траектории к точке Q, находящейся на расстоянии r_2 от центра притяжения. Определим зависимость величины приращения скорости Δv_1 от гелиоцентрического угла перелета θ от точки P к точке Q. В частности, представляет интерес определить минимальное значение скорости, необходимое для выполнения любой данной операции.

После приращения скорости $\Delta\bar{v}_1$ космический корабль будет иметь скорость $\bar{v}_1$, составляющие которой в полярных координатах v_{1r} и $v_{1\theta}$ находятся по формулам (4.3). Так как Δv_1 определяется из выражения

$$\Delta v_1^2 = v_{1r}^2 + (v_{1\theta} - v_0)^2,$$

то получим

$$\Delta v_1^2 = v_0^2\left(3 - \frac{r_1}{a} - 2\sqrt{\frac{p}{r_1}}\right). \tag{4.4}$$

Введем безразмерную величину

$$\Delta E = \left(\frac{\Delta v_1}{v_0}\right)^2,$$

которая представляет собой меру количества энергии, необходимой космическому кораблю для перехода в точке P с круговой орбиты на эллиптическую, проходящую через точку Q. Тогда из уравнения

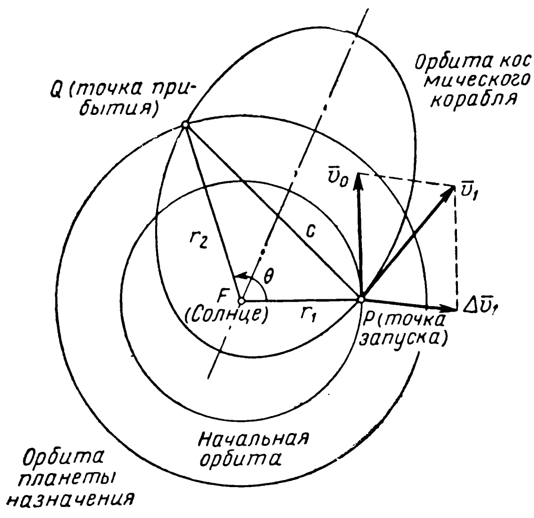


Рис. 4.2. Потребная скорость для межорбитального перелета.

(3.13) с помощью простого тригонометрического преобразования найдем

$$\Delta E = 3 - \frac{r_1}{a} - 4\frac{\sqrt{ar_2}}{c}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2}.$$

Используя определения α и β из (3.11) и (3.12), ΔE можно записать иначе:

$$\Delta E = 3 - \frac{r_1}{a} - \frac{r_2\sqrt{2r_1}}{c}\sin\theta\left(\sqrt{\frac{1}{s-c} - \frac{1}{2a}} \pm \sqrt{\frac{1}{s} - \frac{1}{2a}}\right). \tag{4.5}$$

Из анализа производной

$$\frac{d(\Delta E)}{da} = \frac{r_1}{a^2}\left[1 - \frac{r_2\sin\theta}{2c\sqrt{2r_1}}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(s-c)} - \frac{1}{2a}}} \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{s} - \frac{1}{2a}}}\right)\right]$$

и уравнения (4.5) следует:

1. ΔE — двузначная функция a, имеющая бесконечную производную по a при $a=a_m=\frac{s}{2}$ — наименьшем значении a, при котором еще возможна эллиптическая траектория перелета от P к Q.

2. Если обозначить через ΔE_+ и ΔE_- две ветви кривой ΔE, соответствующие верхнему и нижнему знакам в уравнении (4. 5), то выполняется соотношение

$$\Delta E_+ \leqslant \Delta E_-,$$

причем равенство имеет место только при $a=a_m$.

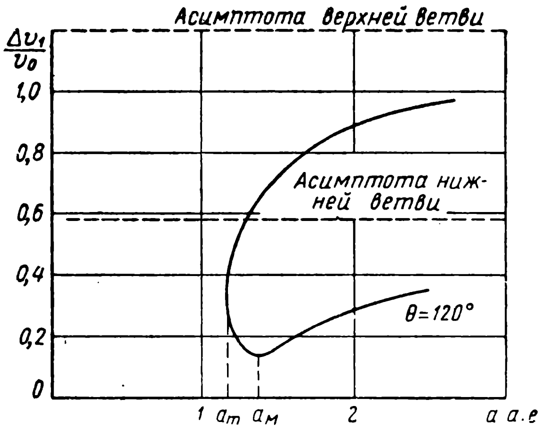


Рис. 4. 3. Начальная скорость для перелета Земля—Марс в зависимости от большой полуоси переходного эллипса при $\theta=120°$:

a_m—траектория минимальной энергии;
a_M—траектория с минимальной начальной скоростью

3. По мере увеличения a кривая ΔE асимптотически приближается к прямым с ординатами

$$3-\frac{r_2\sqrt{2r_1}}{c}\sin\theta\left(\frac{1}{\sqrt{s-c}}\pm\frac{1}{\sqrt{s}}\right).$$

4. Наклон верхней ветви ΔE_- всегда положителен, тогда как наклон нижней ветви ΔE_+ отрицателен при значениях a, близких к a_m. Вопрос о том, может ли ветвь ΔE_+ иметь минимум при конечных значениях a, будет кратко рассмотрен ниже.

На рис. 4. 3 изображена зависимость $\sqrt{\Delta E}$ от a. Для примера выбран полет от Земли к Марсу, поэтому в качестве r_1 и r_2 взяты средние расстояния этих планет от Солнца. Гелиоцентрический угол перелета θ был принят равным 120°. Ордината $\Delta v_1/v_0$ непосредственно показывает дополнительную скорость, которую необходимо обеспечить для перелета в долях скорости Земли v_0

относительно Солнца. Так как орбитальная скорость Земли равна почти 30 000 *м/сек*, то значения Δv_1 сразу нетрудно приближенно переводить в метры в секунду. По оси абсцисс отложены значения большой полуоси a в астрономических единицах.

На рис. 4. 4 показаны нижние ветви кривых начальных скоростей для различных значений θ, а на рис. 4. 5 — соответствующие времена перелета.

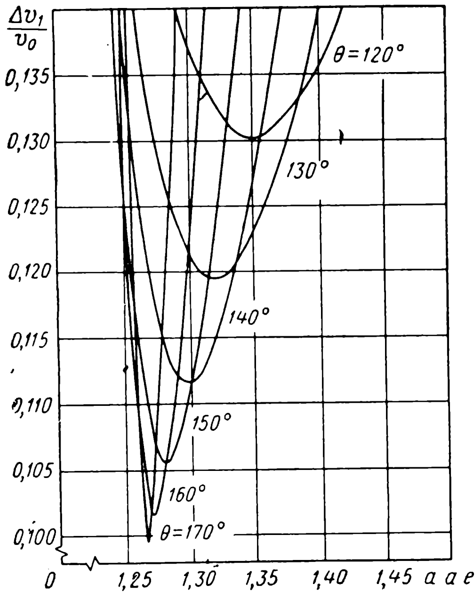


Рис. 4. 4. Начальная скорость для перелета Земля—Марс в зависимости от большой полуоси переходного эллипса

Траекторию минимальной энергии, рассмотренную в разд. 4. 1, не следует путать с траекторией минимальной потребной начальной скорости. Действительно, для частного случая, показанного на рис. 4. 3, дополнительная скорость, которую нужно прибавить к орбитальной скорости для перелета по траектории минимальной энергии $(a=a_m)$, почти вдвое превышает минимальную дополнительную скорость. Немаловажно отметить, что существует единственная траектория, которая минимизирует как скорость относительно Солнца, так и скорость относительно планеты отправления. Эта траектория носит название *эллипса Хомана*. Хомановская орбита характерна тем, что она касательна как к орбите планеты отправления, так и к орбите планеты назначения.

Потребную энергетику для хомановской траектории нельзя найти прямо из уравнения (4. 5), так как при этом полярный угол θ равен π и уравнение становится неопределенным. Однако простая геометрия орбиты позволяет непосредственно вычислить элементы эллипса Хомана, а затем, используя уравнение (4. 4), определить потребную энергию орбиты ΔE.

Точки отправления и назначения для хомановской траектории соответствуют перигелию и афелию. Таким образом, если a_H, p_H и e_H — соответственно большая полуось, параметр и эксцентриситет орбиты Хомана, то будем иметь

$$a_H(1-e_H)=r_1, \quad a_H(1+e_H)=r_2,$$

откуда

$$a_H = \frac{1}{2}(r_1 + r_2), \qquad p_H = 2\,\frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2}.$$

Наконец, из уравнения (4. 4) следует

$$\Delta E_H = 3 - \frac{2r_1}{r_1 + r_2} - 2\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}}. \qquad (4.6)$$

Интересно сравнить эти соотношения с уравнениями (3. 1) и (3. 4) — (3. 8). Нетрудно видеть, что хомановская орбита, эллипс минимальной энергии, касательный эллипс и симметричный эллипс совпадают между собой при $\theta = \pi$.

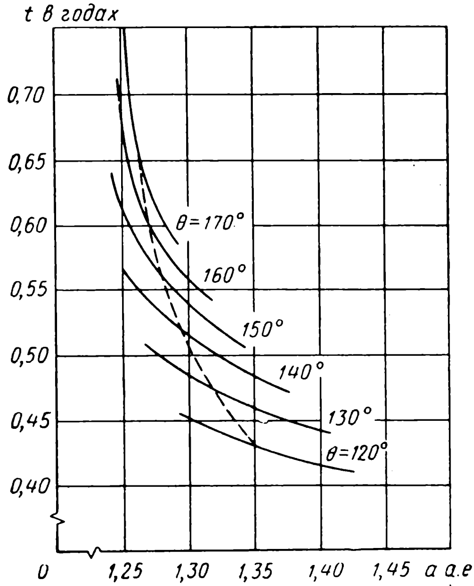


Рис. 4. 5. Время перелета Земля—Марс в зависимости от большой полуоси переходного эллипса:

– – – – время перелета по траектории минимальной начальной скорости

Хомановская орбита не всегда является идеалом траектории межпланетного перелета. Один из очевидных недостатков использования хомановской траектории — необходимость вполне определенного положения планеты отправления относительно планеты назначения в момент запуска. Другие недостатки, как будет показано в гл. V, являются следствием того, что солнечная система на самом деле трехмерна. Таким образом, основное значение хомановской орбиты состоит в том, что она определяет в используемой нами простой модели солнечной системы нижнюю границу энергетических потребностей любой космической операции: иными словами, при фиксированных r_1 и r_2 справедливо соотношение

$$\Delta E_H \leqslant \Delta E.$$

При этом равенство имеет место только в случае, когда $\theta = \pi$ и $a = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$.

Очевидно, что при планировании межпланетного перелета выгодно располагать возможностью широко варьировать время старта. Поэтому интересно проанализировать потребную энергетику траектории ΔE для произвольного взаимного расположения планеты отправления и планеты назначения. С этой целью для фиксированных r_1, r_2 и θ найдем условия, при которых ΔE, определяемое по уравнению (4.5), имеет минимум, соответствующий конечному значению a.

Выше отмечалось, что наклон нижней ветви ΔE_+ кривой ΔE отрицателен при значениях a, близких к a_m. Из выражения для производной видно, что ΔE_+ будет иметь положительный наклон при значениях a, для которых справедливо неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{s-c}-\frac{1}{2a}}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{s}-\frac{1}{2a}}}<\frac{2c\sqrt{2r_1}}{r_2\sin\theta}.$$

Ясно, что разность между левой частью предыдущего неравенства и $\sqrt{s-c}+\sqrt{s}$ можно сделать сколь угодно малой, выбирая a достаточно большим. Таким образом, мы приходим к необходимости определения условий, при которых справедливо неравенство

$$\sqrt{s-c}+\sqrt{s}<\frac{2c\sqrt{2r_1}}{r_2\sin\theta}. \tag{4.7}$$

Для этой цели запишем следующие выражения:

$$(\sqrt{s-c}+\sqrt{s})^2=2\sqrt{r_1r_2}\cos\frac{\theta}{2}+r_1+r_2\leqslant(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2})^2$$

и

$$\left(\frac{2c\sqrt{2r_1}}{r_2\sin\theta}\right)^2\geqslant 8r_1.$$

Следовательно, достаточным условием для того, чтобы ΔE_+ имело минимум, является выполнение неравенства

$$1+\sqrt{\frac{r_2}{r_1}}<2\sqrt{2}. \tag{4.8}$$

Если $r_2<r_1$, то неравенство (4.8) справедливо. Итак, для внутренних планет солнечной системы всегда существует эллиптическая траектория с минимальной потребной начальной скоростью. Кроме того, видно, что это условие справедливо также в случае перелета Земля—Марс. С другой стороны, для остальных внешних планет солнечной системы последнее неравенство не выполняется и поэтому следует ожидать, что должны найтись такие значения θ, для которых траектория минимальной начальной скорости будет уже параболической. Действительно, на первый взгляд это довольно неожиданное условие в большой степени распространяется на Юпитер и последующие планеты.

Следует отметить, однако, что условие (4.7) будет всегда удовлетворяться, если $\sin\theta$ достаточно мал. Так, даже для внешних планет существуют секторы вблизи значений $\theta=0$ и $\theta=\pi$, для которых возможна еще эллиптическая траектория минимальной начальной скорости. Правда, чем дальше от Солнца, тем все меньше становятся эти секторы.

Значение a, при котором ΔE_+ достигает своего минимума (предполагается, что этот минимум существует), находится как корень уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{s-c}-\frac{1}{2a}}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{s}-\frac{1}{2a}}}=\frac{2c\sqrt{2r_1}}{r_2\sin\theta},$$

которое после приведения его к нормальному виду станет уравнением четвертой степени от a. Для практических целей решение этого уравнения легко получить следующим образом. Сначала перепишем уравнение в эквивалентном виде

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{s}-\frac{1}{2a}+\frac{c}{s(s-c)}}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{s}-\frac{1}{2a}}}=\frac{2c\sqrt{2r_1}}{r_2\sin\theta}.$$

Затем введем новую переменную ζ:

$$\operatorname{tg}\zeta=\frac{\sqrt{\frac{1}{s}-\frac{1}{2a}}}{\sqrt{\frac{c}{s(s-c)}}},\quad 0\leqslant\zeta<\frac{\pi}{2}, \tag{4.9}$$

тогда решаемое уравнение примет вид

$$\cos\zeta+\operatorname{ctg}\zeta=\frac{2c}{r_2\sin\theta}\sqrt{\frac{2cr_1}{s(s-c)}},$$

или

$$\cos\zeta+\operatorname{ctg}\zeta=\frac{4\left(\frac{c}{r_2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\sin\theta\sqrt{1+\cos\theta}}. \tag{4.10}$$

Уравнение (4. 10) можно разрешить относительно ζ почти сразу с помощью таблицы тригонометрических функций. Далее, зная величину ζ, по уравнению (4. 9) находим соответствующее значение большой оси

$$2a_M=\frac{r_1r_2(1+\cos\theta)}{r_1+r_2-c(\sec^2\zeta+\operatorname{tg}^2\zeta)}. \tag{4.11}$$

Наконец, изменение энергии ΔE_M, необходимое для этой траектории находим подстановкой последнего выражения в уравнение (4.5). После некоторых упрощений получим

$$\Delta E_M = 3 - 2\,\frac{r_1 + r_2 - c\,[(\sec\zeta - \operatorname{tg}\zeta)^2 - 2\sec\zeta\operatorname{tg}\zeta]}{r_2(1+\cos\theta)} \text{(конечное } a_M). \quad (4.12)$$

Если ΔE_+ — монотонно убывающая функция a, то минимум имеет место при бесконечном a. В этом случае траектория является параболической, а выражение для ΔE_M принимает вид

$$\Delta E_M = 3 - \frac{\sqrt{2r_2}}{c}\sin\theta\left(\sqrt{\frac{r_1}{s-c}} + \sqrt{\frac{r_1}{s}}\right) \text{(бесконечное } a_M). \quad (4.13)$$

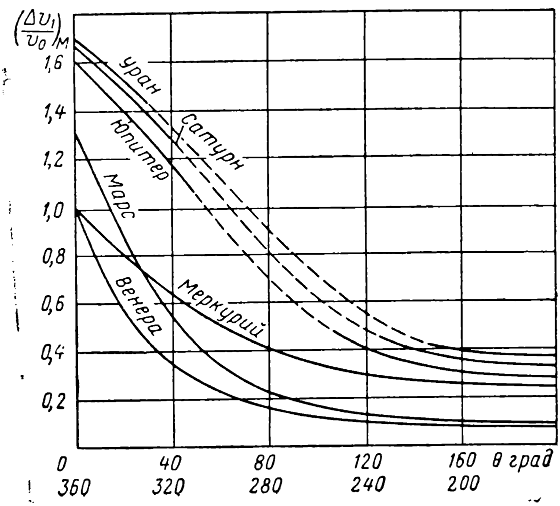


Рис. 4.6. Минимальная начальная скорость в функции угла перелета:

——— эллиптическая траектория;
— — — параболическая траектория

Для частного случая $\theta = \pi$ траектория становится траекторией гомановского типа, а минимальное значение ΔE_+ равно ΔE_H, которое определяется из уравнения (4.6).

На рис. 4.6 показаны зависимости $(\Delta v_1/v_0)_M = \sqrt{\Delta E_M}$ от θ для перелетов от Земли к другим планетам солнечной системы. Зависимости для двух наиболее удаленных планет — Нептуна и Плутона — не показаны, так как при используемом здесь масштабе эти кривые не отличаются от кривой для Урана. Части кривых для Юпитера, Сатурна и Урана, соответствующие параболическим траекториям минимальной начальной скорости, показаны пунктиром.

При углах перелета θ больше 180° параболические траектории оптимальны лишь условно, поскольку траектории движения от P

к Q против часовой стрелки в данном случае не замкнуты. Это положение станет несколько более понятным после следующего раздела.

4.3. Одноимпульсный перелет между некруговыми орбитами

Положения предыдущего раздела наиболее просто можно распространить на задачу отправления с некруговых орбит с помощью геометрических рассуждений.

В гл. III были подробно изучены геометрические свойства конических орбит с фокусом в F, связывающих точки P и Q. Можно геометрически описать еще одно свойство таких траекторий, относящееся к векторам скорости в конечных точках P и Q. Выведем сначала это свойство, которое затем будет использовано при решении задачи перелета между некруговыми орбитами.

Из уравнения конической орбиты в полярных координатах имеем

$$e\cos f_1 = \frac{h^2}{\mu r_1} - 1,$$

$$e\cos(f_1+\theta) = \frac{h^2}{\mu r_2} - 1.$$

Учитывая соотношение

$$e\cos(f_1+\theta) = e\cos f_1\cos\theta - e\sin f_1\sin\theta = \left(\frac{h^2}{\mu r_1} - 1\right)\cos\theta - \frac{hv_{1r}}{\mu}\sin\theta,$$

получим

$$\left(\frac{h^2}{\mu r_1} - 1\right)\cos\theta - \frac{hv_{1r}}{\mu}\sin\theta = \frac{h^2}{\mu r_2} - 1,$$

где

$$v_{1r} = \frac{\mu e}{h}\sin f_1.$$

Подставляя $r_1 v_{1\theta}$ вместо h, найдем

$$v_{1\theta}^2\left(\frac{r_1}{r_2} - \cos\theta\right) + v_{1r}v_{1\theta}\sin\theta = \frac{\mu}{r_1}(1-\cos\theta). \qquad (4.14)$$

Уравнение (4. 14) выражает те требования, которые накладываются на составляющие вектора скорости v_{1r} и $v_{1\theta}$ в точке P, если траектория должна проходить через точку Q. Поскольку остальные величины в этом уравнении постоянные, то оно является уравнением гиперболы с центром в P.

Если обозначить теперь через Φ_1 внешний угол треугольника FPQ с вершиной в точке P, т. е. угол $\pi - \angle FPQ$, то этот угол можно будет найти из соотношения

$$\operatorname{tg}\Phi_1 = \frac{\sin\theta}{\cos\theta - \dfrac{r_1}{r_2}},$$

в силу которого уравнение (4. 14) можно записать в виде

$$v_{1r}v_{1\theta}-v_{1\theta}^2\operatorname{ctg}\Phi_1=\frac{\mu}{r_1}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}.$$

Уравнение гиперболы может быть приведено к нормальной форме (2. 1) путем поворота координатных осей против часовой стрелки на угол $\Phi_1/2$. Если обозначить через v'_{1r} и $v'_{1\theta}$ проекции скорости на повернутые оси, то будем иметь

$$\frac{v'^2_{1r}}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\Phi_1}{2}\right)}-\frac{v'^2_{1\theta}}{\operatorname{tg}\left(\frac{\Phi_1}{2}\right)}=\frac{2\mu}{r_1}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}.$$

Таким образом, наклон асимптот равен $\pm\operatorname{tg}\frac{\Phi_1}{2}$, откуда следует, что асимптоты являются продолжением линий FP и PQ. Кроме того, большая полуось гиперболы равна корню квадратному из величины

$$\frac{2\mu}{r_1}\operatorname{ctg}\frac{\Phi_1}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\frac{2\mu}{r_1}\,\frac{s-r_1}{s}.$$

Сравнение последнего выражения с уравнением (4. 1) показывает, что большая полуось гиперболического годографа скоростей равна v_{1m} — модулю вектора скорости в точке P для орбиты перелета с минимальной энергией.

Гиперболический годограф показан на рис. 4. 7. Через точки P и Q могут проходить две параболические траектории и соответствующие им векторы скорости $\bar{v}_{1p}$ и $\tilde{\bar{v}}_{1p}$ показаны на рисунке, причем

$$v_{1p}^2=\tilde{v}_{1p}^2=\frac{2\mu}{r_1}.$$

Одинаковые по величине векторы скорости для эллиптических траекторий встречаются попарно и образуют одинаковые углы с вектором $\bar{v}_{1m}$. Часть гиперболического годографа, обозначенная пунктиром, соответствует гиперболическим скоростям. Правые части пунктирных кривых на рисунке соответствуют траекториям перелета от Q к P и, следовательно, не являются решением поставленной задачи.

Нижняя ветвь гиперболического годографа соответствует коническим орбитам перелета от P к Q по часовой стрелке. В этом случае угол перелета равен $2\pi-\theta$, а не θ.

Возвращаясь теперь к задаче о перелете между орбитами, обозначим через $\bar{v}_0$ начальную скорость космического корабля в точке P. Тогда $\Delta\bar{v}_1=\bar{v}_1-\bar{v}_0$ есть потребный импульс скорости. Таким образом, задача определения величины минимального импульса скорости Δv_{1M} сводится к выбору такой точки на гиперболическом годографе, показанном на рис. 4. 7, в которой соответствующий вектор $\Delta\bar{v}_1$ перпендикулярен к гиперболе *. Попытка выразить это условие аналитически снова ведет к решению алгебраического уравнения четвертой степени (см. задачу 4.3). Однако найти настолько же удобный метод решения такого уравнения, как в предыдущем разделе, не представляется возможным.

В заключение этого раздела следует отметить, что случай, когда вектор начальной скорости $\bar{v}_0$ не лежит в плоскости орбиты перелета, не вызывает трудностей. Составляющие векторов $\bar{v}_0$ и $\Delta\bar{v}$, лежащие вне плоскости орбиты перелета, должны взаимно уничтожаться. Тогда с оставшимися составляющими этих векторов, лежащими в плоскости орбиты, следует поступать описанным выше способом.

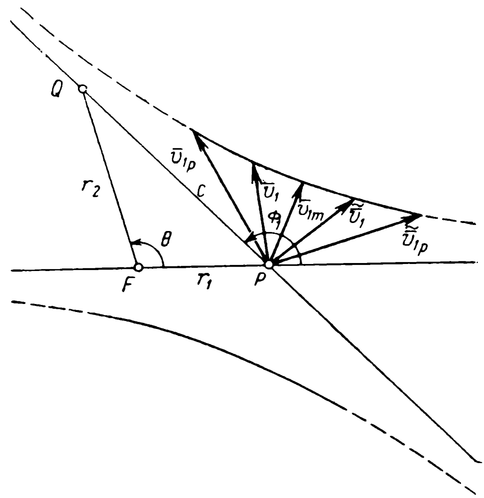


Рис. 4.7. Годограф вектора скорости для межорбитальных перелетов

4.4. Условия совместимости в конечных положениях

Для доказательства некоторых положений в данном и последующем разделах обычно более удобно вместо радиальной и трансверсальной составляющих орбитальной скорости использовать ее проекции на оси некоторой косоугольной системы координат. Для орбиты, соединяющей точки P и Q, спроектируем, как показано на рис. 4.8, векторы скорости в этих точках $\bar{v}_1$ и $\bar{v}_2$ на направление хорды, связывающей начальную и конечную точки, и на направления соответствующих радиусов-векторов. Проекции векторов скорости на эти направления обозначим через v_{1c}, $v_{1\varrho}$ и v_{2c}, $v_{2\varrho}$. (Следует обратить внимание читателей на то, что v_ϱ не равна общепринятой радиальной составляющей скорости v_r.) Тогда через единичные векторы $\bar{i}_{r_1}$, $\bar{i}_{r_2}$ и $\bar{i}_c$, определяемые равенствами

$$\bar{i}_{r_1}=\frac{\bar{r}_1}{r_1}, \quad \bar{i}_{r_2}=\frac{\bar{r}_2}{r_2}, \quad \bar{i}_c=\frac{\bar{r}_2-\bar{r}_1}{c},$$

* Следует иметь в виду, что в данном случае вектор импульса скорости $\Delta\bar{v}_1$ должен проводиться с конца вектора $\bar{v}_0$ *(прим. ред.)*.

векторы скорости в конечных точках запишутся в виде

$$\bar{v}_1 = v_{1c}\bar{i}_c + v_{1\rho}\bar{i}_{r_1}, \quad \bar{v}_2 = v_{2c}\bar{i}_c + v_{2\rho}\bar{i}_{r_2}.$$

Из уравнения (3.27) и аналогичного уравнения для $\bar{v}_2$ видно, что величины проекций векторов скорости в конечных точках P и Q на направления хорды и радиусов-векторов этих точек равны между собой:

$$v_{1c} = v_{2c} = v_c, \; v_{1\varrho} = -v_{2\varrho} = v_\varrho \; .$$

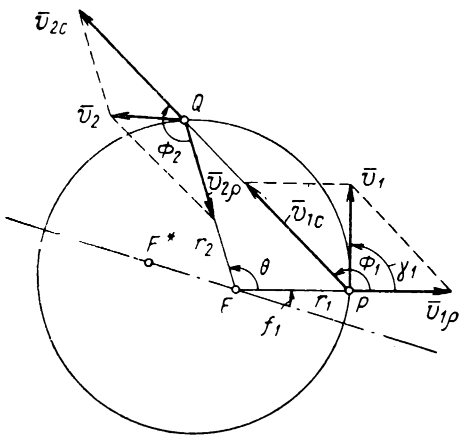


Рис. 4.8. Проекции векторов скорости в граничных точках на направления хорды и радиусов-векторов

Тогда

$$v_c = \sqrt{\frac{\mu}{2}}\left(\pm\sqrt{\frac{1}{s-c} - \frac{1}{2a}} + \operatorname{sgn}(t_m - t)\sqrt{\frac{1}{s} - \frac{1}{2a}}\right), \quad (4.15)$$

$$v_\rho = \sqrt{\frac{\mu}{2}}\left(\pm\sqrt{\frac{1}{s-c} - \frac{1}{2a}} - \operatorname{sgn}(t_m - t)\sqrt{\frac{1}{s} - \frac{1}{2a}}\right). \quad (4.16)$$

Равенство составляющих скоростей в конечных точках можно также доказать непосредственно на основе законов сохранения, что было бы весьма полезно сделать. Например, равенство проекций скоростей на направление хорды сразу следует из постоянства момента количества движения

$$h = r_1(v_{1c} \sin \Phi_1) = r_2(v_{2c} \sin \Phi_2)$$

и теоремы синусов, примененной к треугольнику FPQ:

$$\frac{r_1}{\sin \Phi_2} = \frac{r_2}{\sin \Phi_1} .$$

Для того чтобы доказать равенство между собой радиальных составляющих векторов скорости в граничных точках, будем перемещать векторный параллелограмм вдоль хорды параллельно самому себе до тех пор, пока точка Q не совпадет с P, как показано на рис. 4.9. Обозначим через A, B, C, D соответствующие концы векторов $\bar{v}_2$, $\bar{v}_1$, $\bar{v}_{1\varrho}$, $\bar{v}_{2\varrho}$. Четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом, так как его две стороны BC и AD равны v_c и параллельны хорде PQ. Кроме того, угол CPD равен $\pi-\theta$, поэтому равенство радиальных составляющих будет доказано, если показать, что угол DCP равен $\theta/2$.

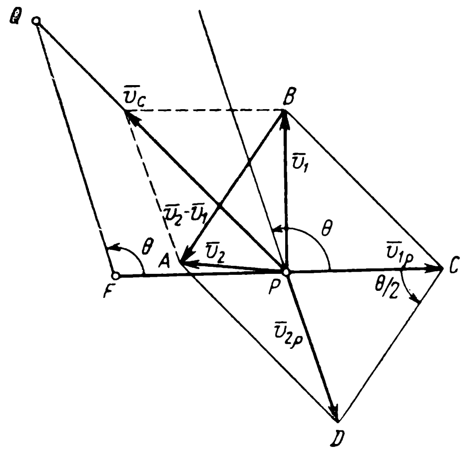


Рис. 4.9. Доказательство равенства радиальных составляющих граничных векторов скоростей

Для этой цели используем уравнение движения (1.30) в виде

$$d\bar{v}=-\frac{\mu}{hr}\bar{r}\,df,$$

интегрируя которое от P до Q, получим

$$\frac{h}{\mu}(\bar{v}_2-\bar{v}_1)=-\int\limits_{f_1}^{f_1+\theta}(\cos f\cdot\bar{i}_\xi+\sin f\cdot\bar{i}_\eta)df=$$

$$=-2\sin\frac{\theta}{2}\left[\cos\left(f_1+\frac{\theta}{2}\right)\bar{i}_\xi+\sin\left(f_1+\frac{\theta}{2}\right)\bar{i}_\eta\right].$$

Отсюда видно, что вектор изменения скорости $\bar{v}_2-\bar{v}_1$ параллелен биссектрисе угла перелета θ. Поэтому прямая AB образует с продолжением прямой CP угол $\theta/2$. Искомый результат очевиден, поскольку AB параллельна CD.

Можно также получить простое соотношение, связывающее v_ϱ и v_c. Из рис. 4.9 видно, что составляющие $v_{1\varrho}$ и $v_{2\varrho}$ представляют

собой две стороны равнобедренного треугольника с основанием $|\bar{v}_2-\bar{v}_1|$ и углами при основании $\theta/2$.
Таким образом, имеем

$$|\bar{v}_2-\bar{v}_1|=2v_\rho\cos\frac{\theta}{2}.$$

Сравнивая два последних уравнения, найдем

$$v_\rho=\frac{\mu}{h}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}.$$

С другой стороны,

$$h=v_c d,$$

где d — длина перпендикуляра, опущенного из F на хорду. Исключая h, получим

$$v_c v_\rho=\frac{\mu}{d}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}. \tag{4.17}$$

Итак, получен важный результат, который состоит в том, что произведение $v_c v_\varrho$ зависит только от взаимного положения P и Q относительно F и не зависит от выбора траектории между этими точками. Конечно, уравнение (4. 17) можно было бы также вывести, просто перемножая уравнения (4. 15) и (4. 16).

4.5. Двухимпульсный перелет между компланарными орбитами

Положения, рассмотренные в предыдущем разделе, особенно удобны для анализа оптимального двухимпульсного перелета между двумя данными компланарными орбитами. Как и раньше, считаем, что до того, как космический корабль получит импульс скорости, его скорость в точке P равна $\bar{v}_0$. Сразу же после импульсного изменения скорости скорость космического корабля мгновенно становится равной $\bar{v}_1$, и он начинает двигаться по орбите, проходящей через точку Q. Когда космический корабль окажется в точке Q, его скорость будет равна $\bar{v}_2$, и теперь требуется произвести второе импульсное изменение скорости, чтобы непосредственно после этого скорость космического корабля стала равной $\bar{v}_3$. Задача состоит в выборе такой орбиты перелета, чтобы сумма модулей векторных приращений скорости была минимальной.

Если спроектировать $\bar{v}_0$ и $\bar{v}_3$ на направления хорды и радиусов-векторов, как было показано в разд. 4. 4, то приращение скорости составит в точке P

$$\Delta v_1=|\bar{v}_1-\bar{v}_0|=[(v_c-v_{0c})^2+(v_\rho-v_{0\rho})^2+$$
$$+2(v_c-v_{0c})(v_\rho-v_{0\rho})\cos\Phi_1]^{\frac{1}{2}},$$

а в точке Q

$$\Delta v_2 = |\bar{v}_3 - \bar{v}_2| = [(v_{3c} - v_c)^2 + (v_{3\rho} - v_\rho)^2 + 2(v_{3c} - v_c)(v_{3\rho} - v_\rho)\cos\Phi_2]^{\frac{1}{2}}.$$

Теперь сразу становится очевидным преимущество такого подхода: в качестве переменных остаются только v_c и v_ρ, которые в свою очередь достаточно просто связаны между собой с помощью уравнения (4. 17). В этом случае оптимальная орбита перелета находится путем приравнивания нулю производной от $\Delta v_1 + \Delta v_2$ по v_c или v_ρ. К сожалению, получающееся в результате алгебраическое уравнение является уравнением одиннадцатой степени относительно одной из переменных.

Несмотря на сложность аналитического решения, для оптимального перелета тем не менее возможно простое геометрическое построение, которое может оказать существенную помощь при выполнении необходимых расчетов. Искомое геометрическое свойство следует из определения необходимого условия оптимальности для заданной орбиты перелета.

Предположим, что имеются радиальная составляющая $v_{M\rho}$ и составляющая вдоль хорды v_{Mc} для оптимальной орбиты перелета*. Пусть произошло малое изменение оптимальной орбиты, при котором векторы скорости изменились в граничных точках на $\delta\bar{v}_1$ и $\delta\bar{v}_2$. Тогда из равенства

$$\delta\left[(\Delta\bar{v}_1 \cdot \Delta\bar{v}_1)^{\frac{1}{2}} + (\Delta\bar{v}_2 \cdot \Delta\bar{v}_2)^{\frac{1}{2}}\right] = 0$$

следует, что

$$\frac{(\bar{v}_{1M} - \bar{v}_0) \cdot \delta\bar{v}_1}{\Delta v_{1M}} = \frac{(\bar{v}_3 - \bar{v}_{2M}) \cdot \delta\bar{v}_2}{\Delta v_{2M}}.$$

Таким образом, векторы $\delta\bar{v}_1$ и $\delta\bar{v}_2$ должны иметь равные проекции на направления $\Delta\bar{v}_{1M}$ и $\Delta\bar{v}_{2M}$. С другой стороны, для того чтобы $\delta\bar{v}_1$ и $\delta\bar{v}_2$ относились к допустимым изменениям скорости в граничных точках (так как измененная орбита должна удовлетворять условиям совместимости разд. 4. 4), необходимо выполнение условия

$$\frac{\delta v_c}{v_c} = -\frac{\delta v_\rho}{v_\rho},$$

которое следует из уравнения (4. 17). Это положение поясняется на рис. 4. 10 для граничной точки P. Параллелограмм со сторонами $\bar{v}_{1Mc}$ и $\bar{v}_{1M\rho}$ подобен бесконечно малому параллелограмму со сторонами $\delta\bar{v}_{1c}$ и $\delta\bar{v}_{1\rho}$. Таким образом, чтобы вариация $\delta\bar{v}_1$ была

* Хотя далее для обозначения условий оптимального перелета используется, как и ранее, индекс M, читателю следует помнить, что оптимальная двухимпульсная орбита отличается от одноимпульсной *(прим. автора)*.

допустимой, она должна быть направлена вдоль вектора $\bar{v}_{1M\rho}-\bar{v}_{1Mc}$, т. е. параллельно той диагонали большого параллелограмма, которая не совпадает с $\bar{v}_{1M}$. Те же рассуждения справедливы и для граничной точки Q. Отсюда следует, что

$$\frac{\delta v_1}{|\bar{v}_{1Mc}-\bar{v}_{1M\rho}|}=\frac{\delta v_{1\rho}}{v_{1M\rho}}=\frac{\delta v_\rho}{v_{M\rho}}=\frac{\delta v_{2\rho}}{v_{2M\rho}}=\frac{\delta v_2}{|\bar{v}_{2Mc}-\bar{v}_{2M\rho}|},$$

иными словами, модули допустимых изменений скорости δv_1 и δv_2 пропорциональны диагоналям $|\bar{v}_{1Mc}-\bar{v}_{1M\rho}|$ и $|\bar{v}_{2Mc}-\bar{v}_{2M\rho}|$.

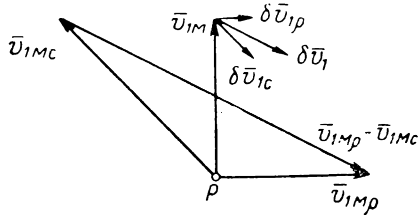


Рис. 4. 10. Допустимые вариации векторов скоростей в граничных точках

Теперь нетрудно увидеть геометрическое свойство оптимальной орбиты перелета. Для оптимальной орбиты перелета разности между составляющими векторов скоростей в граничных точках в направлениях хорды и радиусов должны иметь равные проекции на соответствующие векторы приращения скоростей. Это условие можно записать следующим образом:

$$\frac{(\bar{v}_{1M}-\bar{v}_0)\cdot(\bar{v}_{1Mc}-\bar{v}_{1M\rho})}{\Delta v_{1M}}=\frac{(\bar{v}_3-\bar{v}_{2M})\cdot(\bar{v}_{2Mc}-\bar{v}_{2M\rho})}{\Delta v_{2M}}. \quad (4.18)$$

Казалось бы, на первый взгляд, оптимальная орбита перелета должна касаться как начальной орбиты, проходящей через точку P, так и конечной орбиты, проходящей через точку Q. Если угол перелета θ равен 180°, а начальная и конечная орбиты — окружности, то оптимальная орбита перелета действительно касается начальной и конечной орбит, как это было впервые показано Хоманом. Это свойство оптимального перелета справедливо даже в том случае, когда орбиты некруговые, при условии, что их линии апсид совпадают, а перелет происходит между перицентром и апоцентром. Однако в общем случае при $\theta\neq 180°$ касание орбиты перелета с начальной и конечной орбитами не означает ее оптимальности, как это можно легко показать из только что полученного необходимого условия оптимальности.

С этой целью предположим, что векторы $\bar{v}_{1M}$ и $\bar{v}_0$ параллельны. Такое же предположение сделаем относительно векторов $\bar{v}_{2M}$ и $\bar{v}_3$. Тогда проекции диагоналей параллелограмма на векторы приращения скоростей равны их проекциям на $\bar{v}_{1M}$ и $\bar{v}_{2M}$.
Таким образом, имеем

$$\frac{\bar{v}_{1M}}{v_{1M}}\cdot(\bar{v}_{1Mc}-\bar{v}_{1M\rho})=\frac{\bar{v}_{2M}}{v_{2M}}\cdot(\bar{v}_{2Mc}-\bar{v}_{2M\rho})$$

или

$$\frac{v_{Mc}^2 - v_{M\rho}^2}{v_{1M}} = \frac{v_{Mc}^2 - v_{M\rho}^2}{v_{2M}}.$$

Отсюда следует, что орбита перелета, касательная к начальной и конечной орбитам, может быть оптимальной только в том случае, если $v_{1M}=v_{2M}$, т. е. если $r_1=r_2$. То же самое заключение справедливо и для случая, когда угол перелета $\theta=180°$, если только при этом линии апсид начальной и конечной орбит не совпадают. Это положение мы предлагаем читателю самостоятельно доказать в ходе решения задачи 4. 6.

4.6. Анализ орбитального перелета с помощью годографа скорости

Представление движения по конической орбите с помощью годографа скорости было описано в задаче 1. 10. Во многих случаях определение траектории в задаче двух тел может быть проделано графически в плоскости годографа скорости. Хотя подобные методы имеют явно ограниченную численную точность, они тем не менее служат удобным средством проверки аналитических выкладок, а также позволяют глубже понять основные принципы, лежащие в основе явления.

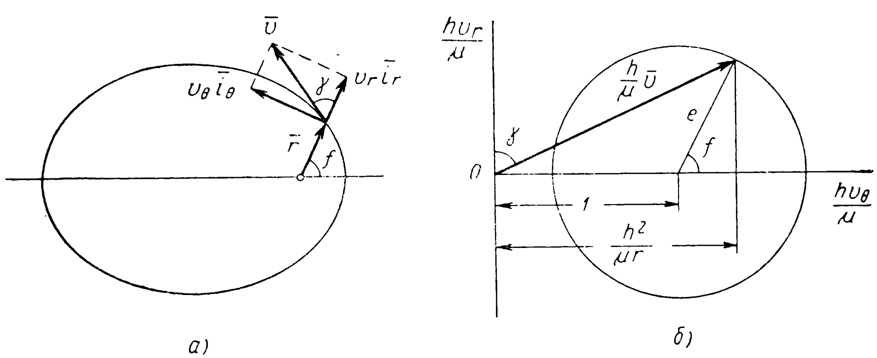


Рис. 4.11. Представление параметров движения с помощью годографа скорости:

а—плоскость естественных параметров;
б—плоскость годографа

В этом разделе для описания движения с помощью годографа удобно использовать безразмерные переменные. Так, если по оси ординат откладывать величину hv_r/μ, а по оси абсцисс hv_θ/μ, то это позволяет достаточно явно представить параметры траектории, как это показано на рис. 4. 11. Существует взаимно однозначное соответствие между точками траектории полета и точками в плоскости годографа, расположенными на окружности радиуса e с центром с координатами (1, 0). Вектор длиной hv/μ проводится из начала координат под углом γ к оси ординат в точку, лежащую на окружности. Движение конца нормализованного вектора скорости по окружности в плоскости годографа строго соответствует движению конца радиуса-вектора $\bar{r}$ по конической орбите в плоскости естественных параметров. Предоставим читателям возможность проверить соотношения, указанные на рисунке.

Рассмотрим теперь некоторые применения метода годографа к задачам об орбитальных перелетах.

Один импульс скорости

Для того чтобы получить удобное графическое решение задачи нахождения траектории, которая получится после импульсного изменения скорости, рассмотрим следующие два векторных равенства:

$$\frac{h_1}{\mu}\bar{v}_1 = \frac{h_1}{h_0}\left(\frac{h_0}{\mu}\bar{v}_0 + \frac{h_0}{\mu}\Delta\bar{v}_1\right),$$

$$\frac{h_0}{\mu}\bar{v}_0 = \frac{h_0}{h_1}\left(\frac{h_1}{\mu}\bar{v}_1 - \frac{h_1}{\mu}\Delta\bar{v}_1\right),$$

где $\bar{v}_0$ — начальная скорость, $\bar{v}_1$ — скорость непосредственно после приложения импульса $\Delta\bar{v}_1$. Согласно первому равенству вектор $h_1\bar{v}_1/\mu$ находится в два приема: сначала обычным способом складываются векторы $h_0\bar{v}_0/\mu$ и $h_0\Delta\bar{v}_1/\mu$, а затем полученная векторная сумма умножается на скалярный коэффициент h_1/h_0. Эти две операции показаны графически на рис. 4. 12. Конец вектора начальной скорости находится в точке A, операция векторного сложения перемещает его в точку B, в результате умножения на скалярный коэффициент конец нового вектора перемещается в точку C.

С другой стороны, если выполнять эти операции в обратном порядке, вычитая из скорости $\bar{v}_1$ приращение $\Delta\bar{v}_1$, то мы вернемся к скорости $\bar{v}_0$. Второе равенство позволяет представить все эти операции графически: сначала вычитаем из вектора $h_1\bar{v}_1/\mu$ вектор $h_1\Delta\bar{v}_1/\mu$; при этом конец вектора переместится из точки C в точку D. Затем полученную векторную разность умножаем на скалярный коэффициент h_0/h_1, что приведет к перемещению конца вектора обратно в точку A. Далее, так как справедливы соотношения

$$\frac{h_0}{\mu}v_{1\theta} = \frac{h_0 h_1}{\mu r_1}, \quad \frac{h_1}{\mu}v_{0\theta} = \frac{h_1 h_0}{\mu r_1},$$

то отсюда следует, что точки B и D имеют одинаковые абсциссы. Поэтому, чтобы получить вектор $h_1\bar{v}_1/\mu$ из векторов $h_0\bar{v}_0/\mu$ и $\Delta\bar{v}_1$ нужно сделать следующие построения:

1. Сложив векторы $h_0\bar{v}_0/\mu$ и $h_0\Delta\bar{v}_1/\mu$, найти точку B.

2. Найти точку D как пересечение перпендикуляра, опущенного из точки B, с продолжением линии OA.

3. Провести через D прямую, параллельную AB, до пересечения в точке C с продолжением линии OB.

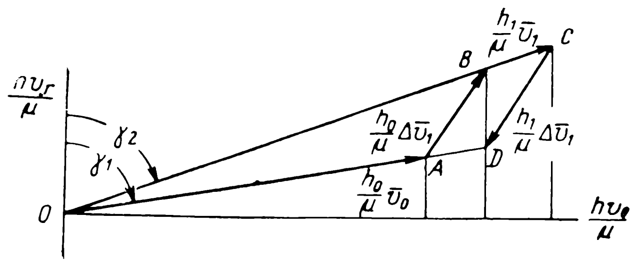


Рис. 4. 12. Интерпретация приложения импульса скорости в плоскости годографа

Значения новых орбитальных элементов находятся непосредственно из построения. Новый момент количества движения определяется по формуле

$$h_1 = h_0 \frac{\text{абсцисса } B}{\text{абсцисса } A},$$

а угол поворота линии апсид равен разности между истинными аномалиями f_0 и f_1.

Это построение следует видоизменить в случае, когда приращение $\Delta\bar{v}_1$ прикладывается в направлении первоначального движения $\bar{v}_0$. Точка B находится, как и раньше, однако умножение на скалярный коэффициент для нахождения местоположения точки C необходимо делать расчетным путем, используя приведенное выше соотношение для момента количества движения.

Переход на заданную орбиту

Рассмотрим теперь задачу о переходе из заданного положения P с начальной орбиты, имеющей элементы e_0 и h_0, на новую орбиту с элементами e_1 и h_1. В этом случае положение точки A известно, а точка C определяется из того условия, что она должна лежать на окружности радиуса e_1 и иметь абсциссу:

$$\text{Абсцисса точки } C = \frac{h_1^2}{h_0^2} \text{ (абсцисса точки } A).$$

Затем графически найдем точки B и D, потребовав, чтобы они имели равные абсциссы, а линии AB и CD были параллельны. Зная положение точки B, можно определить приращение скорости $\Delta\bar{v}_1$, необходимое для выполнения заданного перехода.

Переход с круговой орбиты на гиперболическую орбиту

Предположим, что космический корабль, первоначально обращавшийся по круговой орбите спутника планеты, получает импульс скорости $\Delta\bar{v}_1$, направленный по касательной к орбите и такой величины, что после этого он начинает двигаться от планеты по гиперболической траектории с предельной скоростью v_∞, достигаемой асимптотически по мере увеличения расстояния от планеты. Скорость v_∞ часто называют *избыточной гиперболической скоростью*; имеется в виду конечное превышение скорости над начальной скоростью, которая обеспечила бы уход от планеты по параболической орбите.

Из уравнения (2. 9) следует, что v_∞ связана с большой полуосью гиперболы следующим соотношением:

$$v_\infty^2 = \frac{\mu}{a}.$$

Сразу после приложения импульса скорости $\Delta\bar{v}_1$ будем иметь

$$\frac{r_1 v_1^2}{\mu} = 2 + \frac{r_1 v_\infty^2}{\mu}. \tag{4. 19}$$

Поскольку исходная орбита — круговая, а приращение скорости направлено по касательной к орбите, последнее уравнение принимает вид

$$\frac{h_1 v_{1\theta}}{\mu} = 2 + \frac{r_1 v_\infty^2}{\mu}.$$

Теперь задача может быть решена графически с помощью следующих построений:

1. Абсцисса конца вектора нормализованной начальной скорости $h_0\bar{v}_0/\mu$ равна единице. Поэтому точка A совпадает с центром концентрических окружностей, соответствующих орбитам постоянного эксцентриситета, как показано на рис. 4. 13. Конец C вектора нормализованной скорости $h_1\bar{v}_1/\mu$ имеет абсциссу $(2+r_1 v_\infty^2/\mu)$ и нулевую ординату. Так как r_1 и v_∞ известны, точку C можно считать найденной.
2. Из центра A описываем окружность радиусом $(1+r_1 v_\infty^2/\mu)$ до пересечения с осью ординат. Эта окружность отображает условия полета по гиперболической орбите.
3. Ордината точки пересечения равна $h_1 v_\infty/\mu$, откуда определяем момент количества движения h_1 для гиперболы. Тогда промежуточная точка B, которая является концом вектора $h_0\Delta\bar{v}_1/\mu$ и лежит на горизонтальной оси, находится по выражению

$$\frac{h_0 \Delta v_{1\theta}}{\mu} = \frac{h_0}{h_1}\left(\frac{h_1 v_{1\theta}}{\mu}\right) - 1.$$

Таким образом, потребное приращение скорости Δv_1 найдено. Точка P, в которой космическому кораблю придается импульс скорости, часто называется *точкой схода*. В плоскости годографа непосредственно определяется также угол θ, на который поворачи-

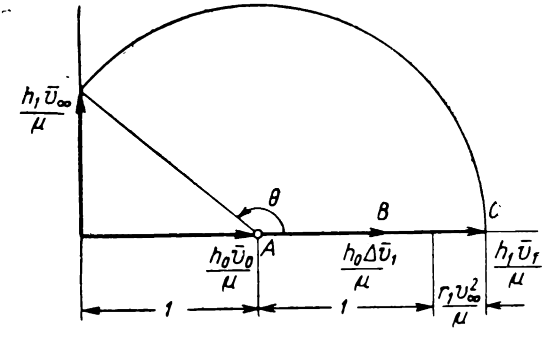


Рис. 4. 13. Представление схода с орбиты в плоскости годографа

вается радиус-вектор космического корабля, начиная с точки схода с орбиты до точки, в которой достигаются асимптотические условия.

4.7. Скорость схода в заданном положении

Следует указать, что общая задача об орбитальном переходе, если поставлена цель достичь заданных условий полета по гиперболической траектории, значительно сложнее, чем задача, кратко рассмотренная в предыдущем разделе. Трудности возникают из-за того, что направление и величину вектора избыточной гиперболической скорости необходимо обеспечить единственным импульсом скорости. В этом разделе мы будем определять вектор скорости $\bar{v}_1$ (соответствующий данному вектору положения $\bar{r}_1$), при котором будет достигаться заданная асимптотическая гиперболическая скорость $\bar{v}_\infty$.

Начнем вывод с того, что запишем уравнение (1. 44) в виде

$$\bar{i}_r = \left\{\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\left[1 - \cos(f - f_1)\right]\right\}\bar{r}_1 + \frac{r_1}{\sqrt{\mu p}}\sin(f - f_1)\,\bar{v}_1,$$

где $\bar{i}_r$ — единичный вектор в направлении радиуса-вектора $\bar{r}$, который в свою очередь образует угол f с действительной осью гиперболы. По мере того как космический корабль движется по гиперболе, радиальное расстояние увеличивается и вектор $\bar{i}_r$ в конечном счете принимает направление вектора $\bar{v}_\infty$. Пусть $\bar{i}_\infty$ — единичный вектор в этом направлении, а через θ обозначим угол между единичными векторами $\bar{i}_\infty$ и $\bar{i}_{r_1}$. Переходя к пределу (асимптотические условия: $\frac{1}{r} \to 0,\ f - f_1 \to \theta$), последнее уравнение можно записать следующим образом:

$$\bar{v}_1 = \frac{\sqrt{\mu p}}{r_1 \sin\theta}\,\bar{i}_\infty + \sqrt{\frac{\mu}{p}}\,\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\,\bar{i}_{r_1}. \tag{4.20}$$

Так как $\bar{r}_1$, соответствующий ему единичный вектор $\bar{i}_{r_1}$ и $\bar{i}_\infty$ известны, остается найти параметр p гиперболической орбиты.

К определению p необходимо подойти с некоторой осторожностью, чтобы избежать чрезмерного обилия алгебраических выкладок. Прежде всего заметим, что угол γ_1 между векторами $\bar{v}_1$ и $\bar{r}_1$ связан с p соотношением

$$p = \frac{1}{\mu}\,(r_1 v_1 \sin\gamma_1)^2 \tag{4.21}$$

и поэтому определение параметра p эквивалентно нахождению угла γ_1. Далее заметим, что вектор $\bar{v}_1$ выражается с помощью уравнения (4.20) в виде линейной комбинации векторов $\bar{i}_\infty$ и $\bar{i}_{r_1}$, вследствие чего это уравнение можно записать по другому:

$$\bar{v}_1 = \frac{v_1 \sin\gamma_1}{\sin\theta}\,\bar{i}_\infty + v_1\left(\cos\gamma_1 - \frac{\sin\gamma_1\cos\theta}{\sin\theta}\right)\bar{i}_{r_1}. \tag{4.22}$$

Приравнивая теперь коэффициенты при векторах $\bar{i}_\infty$ из уравнений (4.20) и (4.22), получим уже имеющееся соотношение (4.21). Однако, если приравнять коэффициенты при векторах $\bar{i}_{r_1}$, то получим новое соотношение

$$\sqrt{\frac{\mu}{p}}\,\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = v_1\left(\sqrt{1-\sin^2\gamma_1} - \frac{\sin\gamma_1\cos\theta}{\sin\theta}\right).$$

Исключая $\sin\gamma_1$ с помощью уравнения (4.21), получим уравнение, в котором p является единственной неизвестной:

$$\sqrt{\frac{\mu}{p}}\,\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sqrt{\mu p}}{r_1}\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = v_1\sqrt{1 - \frac{\mu p}{r_1^2 v_1^2}}. \tag{4.23}$$

Модуль вектора скорости схода v_1 определяется через r_1 и v_∞ в соответствии с уравнением (4.19).

Если избавиться от квадратных корней, то выражение (4.23) преобразуется в квадратное уравнение относительно p. Однако к желаемому результату можно прийти несколько более простым путем. Возводя в квадрат уравнение (4.23) и прибавляя к обеим частям $\frac{\mu}{r_1}\left(\frac{p}{r_1} - 2\right)$, получим

$$\left(\frac{\sqrt{\mu p}}{r_1\sin\theta} - \sqrt{\frac{\mu}{p}}\,\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 = v_\infty^2.$$

Сравнивая далее последнее выражение с уравнением (4.20), видим, что коэффициенты в линейной комбинации

$$\bar{v}_1 = A\bar{i}_\infty + B\bar{i}_{r_1}$$

связаны между собой следующим образом:

$$(A-B)^2=v_\infty^2.$$

С другой стороны, имеем

$$AB=\frac{\mu}{r_1(1+\cos\theta)}.$$

Теперь запишем A и B в виде

$$A=A_1+B_1,\ B=A_1-B_1.$$

Тогда

$$A_1^2=\frac{v_\infty^2}{4}+\frac{\mu}{r_1(1+\cos\theta)},\quad B_1^2=\frac{v_\infty^2}{4}.$$

И, в конце концов, получим вектор скорости схода

$$\bar{v}_1=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{4\mu}{r_1v_\infty^2(1+\cos\theta)}}+1\right)\bar{v}_\infty+$$
$$+\frac{v_\infty}{2r_1}\left(\sqrt{1+\frac{4\mu}{r_1v_\infty^2(1+\cos\theta)}}-1\right)\bar{r}_1. \qquad (4.24)$$

Если сход с орбиты происходит в перицентре гиперболы, то угол θ можно вычислить из соотношения

$$\bar{i}_{r_1}\cdot\bar{v}_1=A\cos\theta+B=0,$$

откуда

$$\cos\theta=-\frac{1}{1+r_1v_\infty^2/\mu}. \qquad (4.25)$$

Подставляя предыдущее уравнение в уравнение (4.24), получим следующую формулу для вектора скорости схода в перицентре:

$$\bar{v}_1=\left(1+\frac{\mu}{r_1v_\infty^2}\right)\bar{v}_\infty+\frac{\mu}{r_1^2v_\infty}\bar{r}_1. \qquad (4.26)$$

4.8. Сход с круговых орбит

Рассмотрим случай, когда космический корабль запущен с фиксированной точки поверхности Земли на круговую орбиту пассивного полета. Предполагаем, что межпланетная эллиптическая траектория перелета от Земли до планеты назначения определена методом, описанным в разд. 3.4. Задача заключается в определении точки на пассивной круговой орбите, где космический корабль, получив минимальное импульсное изменение скорости, начнет двигаться от Земли по гиперболе, имеющей вектор асимптотической скорости $\bar{v}_\infty$. В первом приближении для простоты удобно предполагать, что в качестве номинального времени схода выбран момент пересечения межпланетной орбитой орбиты Земли, а скорость $\bar{v}_\infty$

равна вектору скорости космического корабля относительно Земли в этот момент.

Считаем, что космический корабль запущен на круговую пассивную орбиту из точки на земной поверхности, широта которой равна Φ_L, а азимут угла запуска, измеряемого от направления на север, равен α_L. Эти две величины определяют угол наклонения i_0 плоскости пассивной орбиты к экваториальной плоскости. Эти углы связаны между собой соотношением

$$\cos i_0 = \cos \Phi_L \sin \alpha_L, \tag{4.27}$$

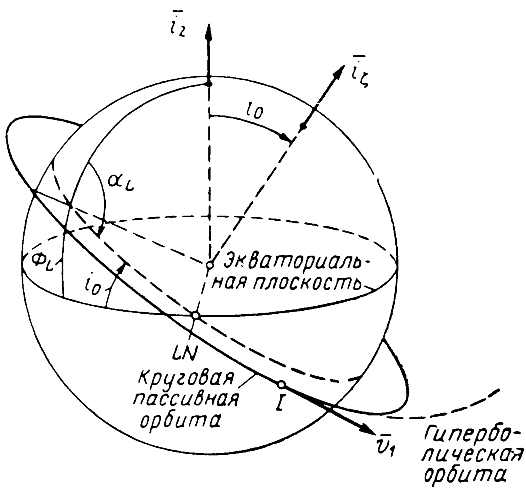


Рис. 4.14. Расположение пассивной круговой орбиты

которое очевидно из рассмотрения рис. 4.14. Время запуска определяет долготу восходящего узла. Будем предполагать, что фактическое время запуска может отличаться на ± 12 *час* от своего номинального значения без серьезного влияния на параметры межпланетной траектории. Это допущение позволяет произвольно поворачивать плоскость пассивной круговой орбиты вокруг полярной оси Земли, предоставляя тем самым важную дополнительную степень свободы, необходимую для оптимизации импульса скорости схода. Как только будет найдена точка схода на пассивной орбите, не трудно будет определить ее географическое положение относительно фиксированной точки запуска на поверхности Земли.

Опираясь на предыдущее обсуждение, приступим к геометрическому анализу задачи схода. Если r_1 — радиус круговой пассивной орбиты, а μ — гравитационная постоянная Земли, то начальная орбитальная скорость равна

$$v_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}.$$

В ходе определения межпланетной траектории находится вектор асимптотической относительной скорости $\bar{v}_\infty$. Следовательно, согласно уравнению (4.19) модуль вектора скорости непосредственно после получения космическим кораблем импульса схода выражается формулой

$$v_1=\sqrt{\frac{2\mu}{r_1}+v_\infty^2}\,.$$

Поскольку векторы $\bar{v}_0$ и $\bar{v}_1$ фиксированы по величине, то приращение скорости $\Delta\bar{v}_1=\bar{v}_1-\bar{v}_0$ минимизируется выбором как можно меньшего угла ψ между ними.

Если на пассивной орбите может быть найдена такая точка, в которой векторы $\bar{r}_1$, $\bar{v}_0$ и $\bar{v}_\infty$ компланарны, то ясно, что при этом оптимальная точка схода будет находиться в перигее гиперболической орбиты ухода от Земли. Задача значительно усложняется, если такой точки не существует. Однако, если ввести произвольное ограничение, положив, что вектор приращения скорости $\Delta\bar{v}_1$ должен находиться в местной горизонтальной плоскости, то задача минимизации импульса схода решается с помощью относительно простых геометрических построений. Численные исследования показали, что для достаточно большого диапазона значений вектора асимптотической скорости $\bar{v}_\infty$ оптимальный импульс схода никогда не отклоняется вверх от горизонтальной плоскости. В большинстве случаев, если допускается небольшая составляющая импульса скорости, направленная вниз, то импульсы получаются несколько меньшими. Поскольку в любых обстоятельствах уменьшение скорости, по-видимому, будет невелико, если только потребный импульс сам по себе не слишком велик для реализации, то будем считать сход с орбиты горизонтальным, что существенно упрощает задачу. В этом случае ψ станет углом между плоскостью круговой орбиты и плоскостью гиперболической орбиты.

Пусть $\bar{i}_\zeta$ — единичный вектор, нормальный к плоскости пассивной круговой орбиты, а ν — угол между векторами $\bar{v}_1$ и $\bar{v}_\infty$. Разлагая вектор $\bar{v}_\infty$ на составляющие параллельно и нормально направлению вектора положения точки схода $\bar{r}_1$, найдем

$$\bar{i}_\zeta\cdot\bar{v}_\infty=v_\infty\cos\nu\sin\psi,$$

где в соответствии с уравнением (4.25)

$$\sin\nu=\frac{1}{1+\dfrac{r_1v_\infty^2}{\mu}}\,. \tag{4.28}$$

Отсюда $|\psi|$ минимизируется по мере того, как угол между единичным вектором $\bar{i}_\zeta$ и вектором $\bar{v}_\infty$ приближается к 90°.

Пусть β — угол между вектором $\bar{v}_\infty$ и единичным вектором в направлении Северного полюса $\bar{i}_z$. Тогда, поскольку i_0 — угол между единичными векторами $\bar{i}_\zeta$ и $\bar{i}_z$, то угол ψ может быть равен нулю только в том случае, если $\beta + i_0 \geqslant 90°$ *. Теперь необходимо различать два случая: когда это неравенство удовлетворяется и когда не удовлетворяется. Рассмотрим сначала наиболее простой с аналитической точки зрения случай, когда $\psi \neq 0$.

Некасательный сход с орбиты ($\beta + i_0 < 90°$)

Случай, когда ψ не равен нулю, показан на рис. 4.15. Угол ψ достигает минимального значения, если векторы $\bar{i}_\zeta$, $\bar{i}_z$ и $\bar{v}_\infty$ компланарны. Вектор $\bar{i}_\zeta$, как нетрудно видеть, находится по формуле

$$\bar{i}_\zeta = \frac{\cos i_0 - \cos(i_0 + \beta)}{\sin^2 \beta} \left(\bar{i}_z - \frac{\bar{v}_\infty}{v_\infty} \right), \tag{4.29}$$

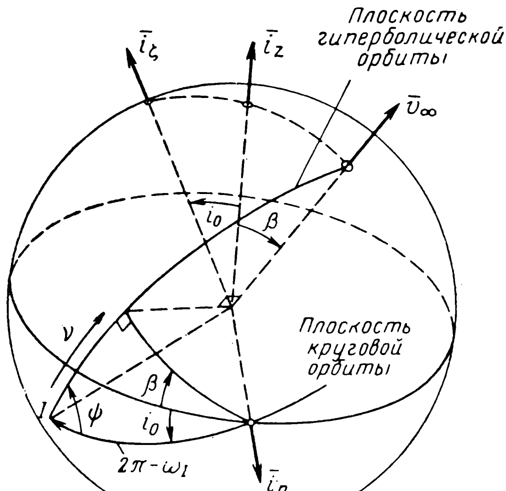


Рис. 4.15. Геометрические соотношения для некасательного схода с орбиты

откуда единичный вектор в направлении восходящего узла пассивной круговой орбиты равен

$$\bar{i}_n = \frac{\bar{i}_z \times \bar{i}_\zeta}{\sin i_0}. \tag{4.30}$$

* Имеется в виду, что при $\beta + i_0 \geqslant 90°$ всегда можно назначить такую долготу узла пассивной орбиты, которая бы обеспечивала равенство нулю угла ψ *(прим. ред.)*.

Тогда полярный угол точки схода ω_{I}, измеряемый в плоскости пассивной круговой орбиты от направления на восходящий узел, запишется в виде

$$\omega_{\mathrm{I}} = 2\pi - \arcsin\left(\frac{\sin\nu}{\sin(i_0+\beta)}\right). \tag{4.31}$$

(Здесь и в последующих уравнениях этого раздела имеются в виду главные значения всех обратных тригонометрических функций.) Угол ψ между начальной и конечной орбитальными плоскостями равен

$$\psi = \arcsin\left(\frac{\cos(i_0+\beta)}{\cos\nu}\right). \tag{4.32}$$

Ясно, что если неравенство $i_0+\beta \geqslant \nu$ не выполняется, то горизонтальный сход вообще невозможен. Среди межпланетных траекторий, которые будут рассматриваться в гл. V не встречаются случаи, когда горизонтальный сход был бы невозможен.

Касательный сход с орбиты ($\beta+i_0 \geqslant 90°$)

Когда $\beta+i_0$ превышает 90°, существуют две различные плоскости круговых орбит, содержащие вектор $\bar{v}_\infty$. Этот случай показан на рис 4.16. Долготы соответствующих восходящих узлов,

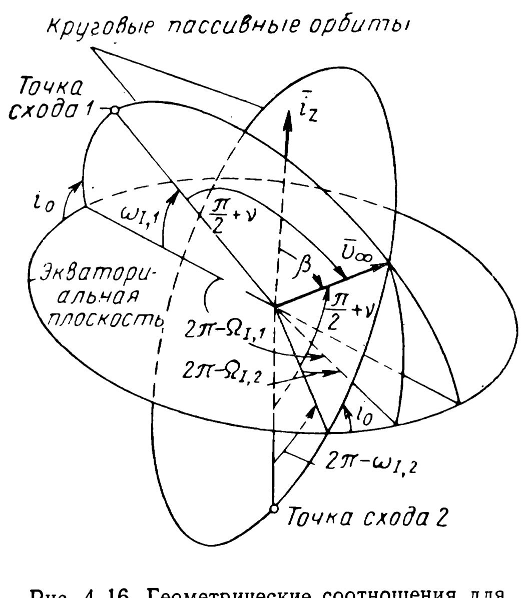


Рис. 4.16. Геометрические соотношения для касательного схода с орбиты

измеряемые от проекции вектора $\bar{v}_\infty$ на экваториальную плоскость, определяются формулами

$$\left.\begin{aligned}\Omega_{\mathrm{I},1}&=\pi+\arcsin\left(\frac{\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{tg} i_0}\right),\\ \Omega_{\mathrm{I},2}&=2\pi-\arcsin\left(\frac{\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{tg} i_0}\right).\end{aligned}\right\} \tag{4.33}$$

Тогда полярные углы точек схода, измеряемые от направлений на восходящие узлы, вычисляются по соотношению

$$\cos(\omega_\mathrm{I}+\nu)=\frac{\cos\beta}{\sin i_0}.$$

Отсюда следует

$$\left.\begin{aligned}\omega_{\mathrm{I},1}&=\arccos\left(\frac{\cos\beta}{\sin i_0}\right)-\nu,\\ \omega_{\mathrm{I},2}&=-\arccos\left(\frac{\cos\beta}{\sin i_0}\right)-\nu.\end{aligned}\right\} \tag{4.34}$$

4.9. Наведение на активном участке полета

Рассмотренные до сих пор в этой главе орбитальные перелеты требовали для своего осуществления идеализированных импульсных изменений скорости. Предполагалось, что скорость, необходимая для выполнения какой бы то ни было космической операции, приобретается мгновенно. Это допущение часто можно оправдать во время предварительного анализа, но оно совершенно не подходит для решения общей задачи о наведении на активном участке полета. Тем не менее принцип импульсного изменения скорости можно использовать для выработки удобного закона управления ориентацией ракетного двигателя, применимого для целого ряда орбитальных маневров.

Задача наведения и управления, как она ставится в данном разделе, не связывается непосредственно со схемой или переходными характеристиками физических элементов, входящих в бортовую систему наведения. Предполагается, что система наведения включает в себя инерциальные датчики, способные измерять ускорения от тяги по трем взаимно ортогональным невращающимся осям. Измеренный вектор ускорения $\bar{a}_T$ определяется как ускорение космического корабля вследствие совместного действия силы тяги ракетного двигателя и аэродинамических сил, если эти силы существуют. Вектор $\bar{a}_T$ должен быть равен нулю, когда космический корабль движется только под действием гравитационных сил. Сумма вектора $\bar{a}_T$ и вектора гравитационного ускорения $\bar{g}$ определяет полное ускорение космического корабля относительно инерциальной системы отсчета.

Определим вектор потребной скорости $\bar{v}_r$, соответствующий текущему положению космического корабля $\bar{r}$, как мгновенную скорость, необходимую для удовлетворения совокупности поставленных перед космическим кораблем задач. Тогда разность скоростей

$$\bar{v}_d = \bar{v}_r - \bar{v} \tag{4.35}$$

определяет необходимое мгновенное приращение скорости. Здесь $\bar{v}$ — текущая скорость космического корабля. Так как движение корабля описывается уравнением

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{g} + \bar{a}_T,$$

то скорость изменения разности $\bar{v}_d$ выражается в виде

$$\frac{d\bar{v}_d}{dt} = \frac{d\bar{v}_r}{dt} - \bar{g} - \bar{a}_T. \tag{4.36}$$

Удобный и эффективный закон наведения получится, если учесть, что для одновременного сведения к нулю всех трех составляющих вектора $\bar{v}_d$ можно воспользоваться совмещением вектора скорости изменения $\bar{v}_d$ с самим вектором $\bar{v}_d$. Математически это условие состоит в таком выборе направления вектора $\bar{a}_T$, чтобы выполнялось равенство *

$$\frac{d\bar{v}_d}{dt} \times \bar{v}_d = 0.$$

Если вектор $\bar{v}_r$ выражается в аналитической форме, то может быть вычислен вектор

$$\bar{b} = \frac{d\bar{v}_r}{dt} - \bar{g}. \tag{4.37}$$

Следовательно, направление вектора ускорения от тяги должно быть определено из уравнения (4.36) таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$\bar{a}_T \times \bar{i}_d = \bar{b} \times \bar{i}_d, \tag{4.38}$$

где $\bar{i}_d$ — единичный вектор в направлении вектора $\bar{v}_d$.

---

* Указанное равенство не определяет однозначно направление $\bar{v}_d$, а следовательно, и a_T. Для того чтобы $\bar{v}_d$ уменьшалось, необходимо дополнительно потребовать, чтобы выполнялось неравенство $\frac{d\bar{v}_d}{dt}\,\bar{v}_d < 0$. Если допустить дросселирование двигателя, то можно, например, потребовать:

$$T\,\frac{d\bar{v}_d}{dt} + \bar{v}_d = 0,$$

где T — желаемая постоянная времени системы сведения к нулю $\bar{v}_d$ (*прим. ред.*).

Умножая векторно справа уравнение (4.38) на i_d, получим

$$\bar{a}_T = \bar{b} + (q - \bar{i}_d \cdot \bar{b})\,\bar{i}_d. \qquad (4.39)$$

Скалярную величину

$$q = \bar{a}_T \cdot \bar{i}_d$$

можно найти возведением в квадрат обеих частей уравнения (4.39):

$$q = \sqrt{a_T^2 - b^2 + (\bar{i}_d \cdot \bar{b})^2}. \qquad (4.40)$$

Поскольку a_T измеряется акселерометрами, ориентированными относительно инерциального пространства, направление вектора $\bar{a}_T$ определяется из уравнения (4.39).

Как видно из уравнения (4.40), если a_T недостаточно велико, то совместить вектор $\bar{v}_d$ с его производной невозможно. Для типичных химических ракетных двигателей, время работы которых сравнительно мало, такая логика наведения не вызывает затруднений. Однако у электроракетных двигателей малой тяги ускорение от тяги может быть настолько малым, что положительность подкоренного выражения в уравнении (4.40) не будет всегда обеспечиваться. Различные методы наведения для такого вида двигателей рассматриваются в гл. X.

В заключение этого раздела рассмотрим в качестве примеров две конкретные космические операции и в каждом случае найдем формулы для векторов $\bar{b}$.

Наведение при выводе на межпланетную орбиту

Скорость, необходимая для того, чтобы космический корабль из положения $\bar{r}$ начал двигаться по гиперболической траектории и достиг в пределе скорости $\bar{v}_\infty$, определяется по формуле, вытекающей из уравнения (4.24):

$$\bar{v}_r = \frac{v_\infty}{2}\left[(D+1)\,\bar{i}_\infty + (D-1)\,\bar{i}_r\right], \qquad (4.41)$$

где

$$D = \sqrt{1 + \frac{4\mu}{r v_\infty^2\left(1 + \bar{i}_r \cdot \bar{i}_\infty\right)}}.$$

Чтобы получить соответствующий вектор $\bar{b}$, запишем сначала очевидные равенства

$$\frac{dr}{dt} = \bar{i}_r \cdot \bar{v},$$

$$\frac{d\bar{i}_r}{dt} = \frac{1}{r}\left[\bar{v} - (\bar{i}_r \cdot \bar{v})\,\bar{i}_r\right].$$

Следовательно,

$$\frac{dD}{dt} = -\frac{v_\infty^2 (D^2 - 1)^2}{8\mu D}\left(\bar{i}_\infty + \bar{i}_r\right) \cdot \bar{v}.$$

Отсюда

$$\frac{d\bar{v}_r}{dt}=\frac{v_\infty(D-1)}{2r}\left[\bar{v}-(\bar{i}_r\cdot\bar{v})\,\bar{i}_r\right]-$$
$$-\frac{v_\infty^3(D^2-1)^2}{16\mu D}\left[(\bar{i}_\infty+\bar{i}_r)\cdot\bar{v}\right](\bar{i}_\infty+\bar{i}_r).$$

В правой части этого уравнения сделаем замену

$$\bar{v}=\bar{v}_r-\bar{v}_d$$

и заметим, что члены, содержащие $\bar{v}_r$, следует отбросить, поскольку они в точности равны вектору гравитационного ускорения $\bar{g}$. Отметим, кроме того, что члены с $\bar{v}_d$ в качестве коэффициента также не войдут в выражение для вектора $\bar{b}$, поскольку $\bar{b}$ используется только в комбинации $\bar{b}\times\bar{v}_d$. Таким образом, получим

$$\bar{b}=\frac{v_\infty(D-1)}{2r}(\bar{i}_r\cdot\bar{v}_d)\bar{i}_r+$$
$$+\frac{\mu}{r^2v_\infty D\left(1+\bar{i}_r\cdot\bar{i}_\infty\right)^2}\left[(\bar{i}_\infty+\bar{i}_r)\cdot\bar{v}_d\right](\bar{i}_\infty+\bar{i}_r). \qquad (4.42)$$

Наведение при переводе космического корабля на круговую орбиту

Рассмотрим задачу наведения космического корабля при переводе его на круговую планетоцентрическую орбиту с помощью тормозного ракетного двигателя, включаемого на траектории подхода к планете. Вектор скорости $\bar{v}_r$ можно в данном случае определить как скорость, которую должен иметь космический корабль при движении по круговой орбите на расстоянии r от планеты, когда плоскость круговой орбиты задается единичной нормалью $\bar{i}_n$. Тогда, если μ — гравитационная постоянная планеты, а $\bar{i}_r$ — единичный вектор в направлении $\bar{r}$, имеем

$$\bar{v}_r=\sqrt{\frac{\mu}{r}}\,\bar{i}_r\times\bar{i}_n. \qquad (4.43)$$

С помощью приведения вектора $\bar{v}_d$ к нулю можно управлять формой и ориентацией конечной орбиты, но прямо регулировать радиус орбиты таким способом нельзя. Однако, поскольку существует эмпирическое соотношение между радиусом конечной орбиты и перицентром траектории подхода, желаемый радиус конечной орбиты может быть установлен соответствующим выбором траектории подхода. Теперь нетрудно получить формулу для соответствующего вектора $\bar{b}$:

$$\bar{b}=\sqrt{\frac{\mu}{r^3}}\left[\bar{v}-(\bar{i}_r\cdot\bar{v})\,\bar{i}_r\right]\times\bar{i}_n\Big]-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{r^3}}(\bar{i}_r\cdot\bar{v})(\bar{i}_r\times\bar{i}_n)+$$
$$+\frac{\mu}{r^2}\bar{i}_r=\sqrt{\frac{\mu}{r^3}}\left[\bar{v}-\frac{3}{2}(\bar{i}_r\cdot\bar{v})\,\bar{i}_r\right]\times\bar{i}_n+\frac{\mu}{r^2}\,\bar{i}_r.$$

Но, учитывая соотношение

$$\bar{v}=\sqrt{\frac{\mu}{r}}\,\bar{i}_r\times\bar{i}_n-\bar{v}_d,$$

можем записать

$$\bar{b}=\frac{\mu}{r^2}\left[(\bar{i}_r\times\bar{i}_n)\times\bar{i}_n+\bar{i}_r\right]-\sqrt{\frac{\mu}{r^3}}\left[\bar{v}_d-\frac{3}{2}(\bar{i}_r\cdot\bar{v}_d)\,\bar{i}_r\right]\times\bar{i}_n,$$

или окончательно

$$\bar{b}=\frac{\mu}{r^2}(\bar{i}_r\cdot\bar{i}_n)\,\bar{i}_n-\sqrt{\frac{\mu}{r^3}}\left[\bar{v}_d-\frac{3}{2}(\bar{i}_r\cdot\bar{v}_d)\,\bar{i}_r\right]\times\bar{i}_n. \qquad (4.44)$$

Задачи

4. 1. Баллистическая ракета, запускаемая с поверхности Земли, располагает характеристической скоростью $\bar{v}_1$. Считая Землю невращающейся сферой радиуса r_1 и пренебрегая атмосферным сопротивлением, показать, что максимальная дальность, которая представляет собой длину дуги большого круга, выражается формулой

$$r_1\theta=2r_1\arcsin\left(\frac{r_1v_1^2}{2\mu-r_1v_1^2}\right),$$

и что для достижения такой дальности угол γ, образуемый вектором скорости с вертикалью, должен определяться соотношением

$$\gamma=\frac{1}{4}(\pi+\theta),$$

где θ — угловая дальность*; μ — гравитационная постоянная Земли.

4. 2. Рассмотрим снова треугольник, показанный на эскизе к задаче 3. 1. Предположим, что космический корабль обращается вокруг Солнца по круговой орбите радиусом в 3 астрономические единицы. В точке P космический корабль получает импульс скорости для перехода на орбиту, проходящую через точку Q. Найти величину минимального импульса скорости, который будет удовлетворять условиям задачи.

4. 3. Выразив аналитически условие перпендикулярности $\Delta\bar{v}_1$ к гиперболическому годографу векторов скорости для орбит перелета, соединяющих две точки, показать, что трансверсальная составляющая вектора минимальной скорости отправления $\bar{v}_{1M}$ получается как решение следующего алгебраического уравнения:

$$\operatorname{cosec}^2\Phi_1 v_{1M\theta}^4-(v_{0\theta}+v_{0r}\operatorname{ctg}\Phi_1)\,v_{1M}^3+$$

$$+\frac{\mu}{r_1}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\left(v_{0r}v_{1M\theta}-\frac{\mu}{r_1}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)=0,$$

* Центральный угол *(прим. ред.)*.

после чего радиальная составляющая находится по формуле

$$v_{1Mr}=\frac{1}{v_{1M\theta}}\left(\frac{\mu}{r_1}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+v_{1M\theta}^2\operatorname{ctg}\Phi_1\right),$$

где v_{0r} и $v_{0\theta}$ — радиальная и трансверсальная составляющие вектора начальной скорости $\bar{v}_0$.

4.4. Показать, что гиперболический годограф векторов скорости можно описать уравнением

$$r_1 v_1^2 \sin\gamma_1 \sin(\Phi_1-\gamma_1)=\mu\sin\Phi_1\operatorname{tg}\frac{\theta}{2},$$

а затем вывести уравнение (4.17), раскрывая надлежащим образом члены этого уравнения.

4.5. Применяя правило синусов к треугольнику на рис. 4.8, показать, что

$$r_2=\frac{r_1}{\cos\theta-\operatorname{ctg}\Phi_1\,\sin\theta}.$$

Затем, исключая $\operatorname{ctg}\Phi_1$ из последнего выражения с помощью решения задачи 4.4, получить соотношение

$$r=\frac{r_1^2 v_1^2\sin^2\gamma_1}{\mu(1-\cos\theta)-r_1 v_1^2\sin\gamma_1\sin(\theta-\gamma_1)},$$

в котором индекс при r_2 опущен. Таким образом, получится явное выражение для r в функции разности истинных аномалий θ при начальных условиях в точке P, соответствующих $\theta=0$. Сравнить его с уравнением (1.46).

4.6. Траектория с фокусом в F соединяет точки P и Q. Если центральный угол равен 180°, то, используя обычные радиальную и нормальную составляющие орбитальной скорости, показать, что

а) величины радиальных составляющих одинаковы в точках P и Q;

б) величины нормальных составляющих в точках P и Q не зависят от выбора траектории:

$$v_{1n}^2=\frac{2\mu}{r_1+r_2}\cdot\frac{r_2}{r_1},\quad v_{2n}^2=\frac{2\mu}{r_1+r_2}\cdot\frac{r_1}{r_2},$$

где $r_1=FP$, $r_2=FQ$; μ — гравитационная постоянная;

в) орбита перелета, касательная к начальной и конечной орбитам и имеющая центральный угол 180°, не является в общем случае оптимальной, если линии апсид начальной и конечной орбит не совпадают.

4.7. Космический корабль обращается по орбите вокруг точки F и имеет в точке P скорость $\bar{v}_0$. В точке P космический корабль получает минимальный импульс скорости $\Delta\bar{v}_{1M}$, переводящий его на орбиту, проходящую через точку Q, которая расположена таким образом, что линия FP перпендикулярна к PQ. Если $\bar{v}_{1M}$ — скорость космического корабля сразу после импульса, то показать, что сумма углов, образованных векторами $\bar{v}_{1M}$ и $\Delta\bar{v}_{1M}$ с продолжением прямой FP, равна 90°.

Указание: показать, что $(\bar{v}_{1M}-\bar{v}_0)\cdot\delta\bar{v}_1=0$, и представить результат геометрически.

4. 8. Рассмотрим три компланарных софокусных эллипса, у которых большие полуоси и расстояния от центров до фокуса равны соответственно a_0, a_1, a_2 и c_0, c_1, c_2. Пусть γ_{ij} — угол между большими осями эллипсов i и j.

а) Показать, что расстояние между центрами любой пары эллипсов равно

$$d_{ij}=\sqrt{c_i^2-2c_ic_j\cos\gamma_{ij}+c_j^2}.$$

б) Показать, что каждая пара эллипсов 0,1 и 0,2 будет иметь единственную точку касания тогда и только тогда, когда

$$d_{10}^2=(a_1-a_0)^2,$$

$$d_{20}^2=(a_2-a_0)^2.$$

Указание: вывести условие, при котором два эллипса имели бы только одну общую точку.

в) Показать, что геометрическое место центров всех возможных эллипсов перелета, касательных к эллипсам *1* и *2* (в предположении, что они не пересекаются), также представляет собой эллипс, фокусы которого совпадают с центрами двух граничных эллипсов, а большая полуось a и эксцентриситет e определяются выражением

$$a=\frac{|a_1-a_2|}{2},\qquad e=\frac{d_{12}}{|a_1-a_2|}.$$

4. 9. Рассмотрим задачу оптимального перелета между двумя круговыми орбитами радиусов r_1 и r_2, причем $r_1<r_2$.

а) Для хомановского перелета, осуществляемого двумя импульсами скорости $\Delta\bar{v}_1$ и $\Delta\bar{v}_2$, приложенными касательно к начальной и конечной орбитам и разделенными центральным углом 180°, показать, что

$$\frac{\Delta v_1+\Delta v_2}{v_0}=\left(1-\frac{1}{R_{21}}\right)\sqrt{\frac{2R_{21}}{1+R_{21}}}+\frac{1}{\sqrt{R_{21}}}-1,$$

где

$$R_{21}=\frac{r_2}{r_1},\quad v_0=\sqrt{\frac{\mu}{r_1}}.$$

б) *Биэллиптический перелет* осуществляется с помощью трех импульсов скорости $\Delta\bar{v}_1$, $\Delta\bar{v}_i$, $\Delta\bar{v}_2$, прикладываемых касательно к орбитам в следующем порядке: 1) импульс $\Delta\bar{v}_1$ выполняется касательно к начальной орбите для достижения после 180° перелета с нулевой радиальной скоростью промежуточной точки, расположенной на окружности радиуса $r_i > r_2$; 2) импульс $\Delta\bar{v}_i$ применяется снова для достижения после 180° перелета точки, расположенной на конечной орбите; 3) импульс $\Delta\bar{v}_2$ применяется для достижения соответствующей конечной скорости. Показать, что

$$\frac{\Delta v_1 + \Delta v_i + \Delta v_2}{v_0} = \sqrt{\frac{2R_{i1}}{1+R_{i1}}} -$$

$$-1 + \sqrt{\frac{2}{R_{i1}}}\left(\sqrt{\frac{R_{21}}{R_{21}+R_{i1}}} - \frac{1}{\sqrt{1+R_{i1}}}\right) + \frac{1}{\sqrt{R_{21}}}\left(\sqrt{\frac{2R_{i1}}{R_{i1}+R_{21}}} - 1\right),$$

где

$$R_{i1} = \frac{r_i}{r_1}.$$

в) Показать, что если отношение R_{21} достаточно велико, то всегда можно так выбрать R_{i1}, чтобы биэллиптический перелет был более экономичным, чем перелет типа Хомана.

4. 10. Рассмотрим задачу одноимпульсного перехода космического корабля с круговой орбиты на новую траекторию, проходящую через фиксированную точку пространства. Пусть $\bar{r}_1$ — радиус круговой орбиты, а $\bar{r}_2$ — радиус-вектор точки назначения. Кроме того, пусть Φ — широта точки назначения над плоскостью исходной круговой орбиты.

а) Показать, что

$$(\Delta\nu_1)^2 = 1 + \nu_{1\theta}^2 - 2\nu_{1\theta}\cos i + \nu_{1r}^2,$$

$$\sin i = \frac{\sin\Phi}{\sin\theta},$$

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{\nu_{1\theta}^2}{1 + \left(\nu_{1\theta}^2 - 1\right)\cos\theta - \nu_{1\theta}\nu_{1r}\sin\theta},$$

где i — угол между плоскостью круговой орбиты и плоскостью орбиты перелета; θ — центральный угол перелета, а

$$R_{12} = \frac{r_1}{r_2}, \qquad \Delta\nu_1 = \frac{\Delta v_1}{v_0},$$

$$\nu_{1r} = \frac{v_{1r}}{v_0}, \qquad v_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}.$$

$$\nu_{1\theta} = \frac{v_{1\theta}}{v_0}.$$

б) Три уравнения п. «а» определяют $\Delta\nu_1$ как функцию двух параметров: $\nu_{1\theta}$ и θ. Вывести алгебраические соотношения для $\nu_{1\theta}$ и θ, соответствующих минимальной величине $\Delta\nu_1$.

в) Показать, что если $\Phi=90°$, то оптимум Δv_1 имеет место при $\theta=90°$ и что

$$v_{1\theta}=(1+R_{12}^2)^{-1/4},$$

$$\Delta v_{1M}^2=2(1+R_{12}^2)^{1/2}+1-2R_{12}.$$

4. 11. Рассмотреть в плоскости годографа решение задачи об одноимпульсном переходе с круговой орбиты с элементами e_0 и h_0 на новую орбиту с элементами e_1 и h_1 таким образом, чтобы линия апсид не поворачивалась. В частности, показать, как определяется положение, в котором прикладывается импульс.

4. 12. Космический корабль приближается к планете по гиперболической траектории. Пусть v_∞ — скорость в бесконечности, а r_0 — минимальное расстояние, на которое космический корабль подходит к центру планеты. В момент, когда космический корабль наиболее близко подходит к планете, к нему прикладывается импульс скорости Δv в направлении, противоположном первоначальному движению, с целью перевода его на эллиптическую орбиту вокруг планеты с эксцентриситетом e. Показать, что

$$\Delta v=\sqrt{v_\infty^2+\frac{2\mu}{r_0}}-\sqrt{\frac{\mu(1+e)}{r_0}},$$

где μ — гравитационная постоянная планеты.

4. 13. Космический корабль находится на эллиптической орбите с большой осью $2a_0$, центром притяжения в точке F и свободным фокусом в точке F_0^*. Корабль-цель находится на другой эллиптической орбите относительно того же центра притяжения, имеющей свободный фокус в F_2^* и большую ось $2a_2$ и не пересекающей исходную орбиту. Космический корабль получает импульс скорости в точке P первой орбиты для перехвата цели в точке Q. Показать, что если орбитой перелета является эллипс, касающийся начальной орбиты в точке P и конечной орбиты в точке Q, то свободный фокус орбиты перелета расположен на эллипсе, имеющем фокусы F_0^* и F_2^* и большую ось $|2a_2-2a_0|$. Разработать графический способ нахождения точки Q, когда точка P задана.

4. 14. Показать, что если P — период обращения космического корабля на орбите, то малое увеличение δa большой полуоси a приведет к увеличению периода обращения на величину $3P\delta a/2a$.

4. 15. Спутник обращается вокруг Земли по эллиптической орбите. Максимальная и минимальная высоты спутника относительно поверхности Земли равны $r_{\max}$ и $r_{\min}$. На максимальной высоте спутник внезапно получает небольшой импульс скорости δv. Показать, что при этом минимальная высота увеличится на величину

$$\delta r_{\min}=\frac{2P}{\pi}\sqrt{\frac{r_E+r_{\min}}{r_E+r_{\max}}}\,\delta v,$$

где r_E — радиус Земли (считается постоянным),

P — период обращения спутника.

4. 16. Спутник находится на эллиптической орбите. Внезапно он получает небольшой импульс скорости δv в направлении касательной к орбите. Показать, что эксцентриситет e изменится на величину

$$\delta e = \frac{2p}{rv} \cos E \, \delta v,$$

откуда следует, что эксцентриситет увеличится в первом и четвертом квадрантах и уменьшится во втором и третьем.

4. 17. Спутник находится на эллиптической орбите. Внезапно он получает небольшой импульс скорости δv в направлении касательной к орбите. Показать, что при этом линия апсид повернется на угол

$$\delta\omega = \frac{2}{ev} \sin f \delta v,$$

причем вращение направлено вперед по движению, если v_r положительна, и назад, если v_r — отрицательна.

4. 18. В некоторой точке на эллиптической орбите гравитационная постоянная μ внезапно меняется на небольшую величину. Показать, что если при этом эксцентриситеты исходной и новой орбит одинаковы, то точка, в которой произошло изменение μ, обязательно должна находиться на одной из концов малой оси.

4. 19. Скорость, необходимая для перелета по конической орбите из положения $\bar{r}$ в положение цели $\bar{r}_T$, определяется по формуле

$$\bar{v}_r = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \left[A(\bar{i}_c + \bar{i}_r) + B(\bar{i}_c - \bar{i}_r)\right],$$

где

$$A = \pm \sqrt{\frac{1}{s-c} - \frac{1}{2a}};$$

$$B = \operatorname{sgn}(t_m - t) \sqrt{\frac{1}{s} - \frac{1}{2a}},$$

что соответствует результатам, полученным в разд. 3. 4. Единичные векторы $\bar{i}_r$ и $\bar{i}_c$ определяются соотношениями

$$\bar{i}_r = \frac{\bar{r}}{r}, \quad \bar{i}_c = \frac{\bar{r}_T - \bar{r}}{c},$$

где c — линейное расстояние между $\bar{r}$ и $\bar{r}_T$. Величина s представляет собой полупериметр треугольника, образованного двумя векторами положения.

Требуется путем орбитального маневра с помощью тяги вывести космический корабль на траекторию перехвата фиксированной цели $\bar{r}_T$. Считая мгновенную величину большой полуоси a постоянной, показать, что вектор наведения $\bar{b}$ имеет вид

$$\bar{b}=\sqrt{\frac{\mu}{2}}\left\{\frac{1}{4A(s-c)^2}\left[(\bar{i}_c+\bar{i}_r)\cdot\bar{v}_d\right](\bar{i}_c+\bar{r}_r)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4Bs^2}\left[(\bar{i}_c-\bar{i}_r)\cdot\bar{v}_d\right](\bar{i}_c-\bar{i}_r)-\frac{A+B}{c}(\bar{i}_c\cdot\bar{v}_d)\bar{i}_c+\frac{A-B}{r}(\bar{i}_r\cdot\bar{v}_d)\bar{i}_r\right\},$$

где $\bar{v}_d$ — разность между векторами потребной и текущей скорости космического корабля.

4.20. Используя результаты, полученные в разд. 4.4, показать, что векторы положения и скорости $\bar{r}$ и $\bar{v}$ на конической орбите можно выразить через начальные значения этих векторов $\bar{r}_0$, $\bar{v}_0$ и центральный угол θ следующим образом:

$$\bar{r}=\bar{r}_0+\frac{r_0^2}{h\,\mathrm{ctg}\,\theta-\bar{r}_0\cdot\bar{v}_c}\bar{v}_c,\quad \bar{v}=\bar{v}_c-v_\varrho\bar{i}_r,$$

где

$$h^2=(\bar{r}_0\times\bar{v}_0)\cdot(\bar{r}_0\times\bar{v}_0),$$

$$v_\varrho=\frac{\mu}{h}\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2},$$

$$\bar{v}_c=\bar{v}_0-v_\varrho\bar{i}_{r_0},$$

и сравнить эти соотношения с уравнениями (1.44)—(1.46).

Библиография

Обширная литература, посвященная орбитальным переходам, сильно усложняет автору его задачу — вкратце описать состояние предмета. Автору трудно обосновать предпринятый им отбор материала любыми иными доводами, кроме личного интереса. Однако все рассмотренные здесь темы представляют тем не менее общий интерес либо своеобразием геометрического подхода, либо с точки зрения четкости и полезности аналитического описания.

Материал первого раздела, посвященный границе достижимости, по-видимому, хорошо известен специалистам в области внешней баллистики. Бекнер [14] подробно рассмотрел этот вопрос, а Денби [20] привел геометрический вывод.

Материал разд. 4.2 об одноимпульсном компланарном переходе между круговыми орбитами взят автором из собственной работы [5]. Геометрическое решение задачи перехода между некруговыми орбитами, описанное в разд. 4.3, приписывается Штарку [59]. Однако прием гиперболического годографа скоростей еще раньше изложил Гоудел [24] и его приоритет в данном случае бесспорен.

Условия совместимости в граничных положениях и необходимые условия оптимальности двухимпульсного перелета, изложенные в разд. 4.4 и 4.5, взяты из доклада Гоудела [24]. К сожалению, Гоудел излагает этот вопрос слишком сжато для среднего студента и последовательность рассуждений не всегда легко воспринимается. Автор надеется, что изложение этого вопроса здесь восполнит некоторые из указанных пробелов.

Анализ методом годографа (см. разд. 4.6) скорее всего будет иметь весьма ограниченное практическое применение. С другой стороны, этот метод поистине изящен и его можно использовать как идеальный прием в преподавательской практике. Приводимые здесь примеры отобраны из работы Боксенбома [16], в которой анализ методом годографа описан более подробно.

Формулу для скорости схода, выведенную в разд. 4.7, автор впервые обнаружил в статье Зауэра [52]. Правда, Зауэр не приводит подробного доказательства, и из его конспективного описания получить эту формулу, по-видимому, довольно трудно. Представленный здесь вывод более прост и целиком принадлежит автору.

Задача о геометрии точки включения двигателя (см. разд. 4.8) разработана Дж. Лэнингом из Приборной лаборатории МТИ и вошла в одну из глав книги [46]. Однако упрощенный вывод формулы для геометрических мест точек включения при касательном сходе сделан автором настоящей книги.

Метод наведения на активном участке полета, приведенный в разд. 4.9, разработан в сотрудничестве с коллегами автора по Приборной лаборатории МТИ Дж. Лэнингом, Э. Коппсом и Р. Мартином.

Наконец, укажем на источники, из которых заимствованы некоторые задачи в конце гл. IV. Задача 4.3 взята из статьи Штарка [59]. Задачи 4.4—4.7 основаны на материале двух статей Гоудела [24] и [25]. Задача 4.8 о геометрическом месте центров сокасательных орбит перелета взята у Ли-Шу Вена [38], который рассмотрел целый ряд частных случаев перелетов такого типа.

Материал задачи 4.9 о так называемом биэллиптическом перелете заимствован из работы Хелькера и Зильбера [30], а задача 4.10 об одноимпульсном переходе на траекторию, плоскость которой не совпадает с плоскостью исходной круговой орбиты, — из статьи Тамплмана [61]. Задача 4.13 на геометрические свойства орбиты перелета для перехвата цели взята у Гедсона [23]. Задачи 4.14—4.18 являются классическими.

ГЛАВА V

Задачи космических полетов и межпланетные траектории

Первое поколение межпланетных космических кораблей было предназначено главным образом для исследования космической среды. С точки зрения наведения эти операции были сравнительно простыми, поэтому осуществляемые с Земли слежение и управление вполне отвечали предъявляемым требованиям. Однако по мере расширения исследуемого пространства необходимость в автономности космических кораблей будет становиться все более очевидной. Автономные бортовые системы навигации, совсем или почти не нуждающиеся в связи с Землей, должны будут обеспечить в этом случае возможность решения более сложных задач наведения.

В первой части настоящей главы обсуждаются некоторые наиболее перспективные межпланетные операции с точки зрения ограничений, налагаемых геометрией солнечной системы на задачу выбора траектории полета. Рассматривается целый ряд задач, стоящих перед космическими полетами, в том числе вывод корабля на орбиту вокруг планеты назначения, запуск зондов для исследования атмосферы планеты и проведение беспосадочных исследовательских перелетов с возвращением.

Задача определения космических траекторий значительно упрощается, если решать ее в два этапа. Первый этап состоит в получении простого приближения к желаемой траектории путем соединения частей конических орбит в целую траекторию. Полученная таким образом кусочная кривая во многих важных случаях представляет собой удивительно хорошее приближение к точной траектории. Действительно, подобная кривая обеспечивает точное первое приближение для использования в качестве основы соответствующего итерационного процесса, который обычно применяется при определении окончательной траектории с учетом различного рода возмущений.

В данной главе рассматривается только первый этап, т. е. определяются космические траектории для межпланетных и лунных операций, состоящие из частей конических орбит. Далее, в гл. VI будет описан удобный метод расчета точных траекторий.

Траектории полета в окололунном пространстве составляют предмет второй части главы. Первоначальное исследование Луны пилотируемыми космическими кораблями вполне может быть выполнено с помощью траекторий облета, которые гарантируют возвращение на Землю без какого-либо маневрирования, за исключением необходимых навигационных коррекций. В случае отказа какой-либо системы космического корабля операция по выходу на селеноцентрическую орбиту или прилунению может быть прервана, двигатель в окрестности Луны не будет включаться, а космический корабль сможет свободно возвратиться к Земле только благодаря гравитационным силам.

Начальная часть орбиты облета Луны может быть аппроксимирована эллипсом с фокусом в центре Земли. Когда космический корабль приблизится к Луне на расстояние примерно 65 000 *км*, то дальнейшее движение относительно Луны происходит в основном по гиперболе, в фокусе которой находится Луна. После облета Луны на этапе возврата траектория снова аппроксимируется эллипсом. Для каждого из этих трех участков делается допущение о том, что одновременно на движение космического корабля может влиять только один источник притяжения.

Хотя кусочно-коническая аппроксимация, вероятно, недостаточно точна для навигационных целей, тем не менее она является эффективным средством исследования целого ряда начальных и конечных условий как в точке местонахождения Земли, так и в точке местонахождения планеты назначения или Луны. Этот расчет на современной цифровой вычислительной машине займет около нескольких секунд вычислительного времени. Для сравнения укажем, что время вычисления точной траектории может составлять несколько долей часа.

При определении точной траектории на основе приближенной, составленной из частей конических орбит, некоторые величины остаются инвариантными: полное время полета, векторы положения точки схода с начальной орбиты и перигея орбиты возвращения. Таким образом, приближенное решение довольно тесно связано с точной орбитой. Вычисление точной орбиты производится постепенной корректировкой скорости схода с начальной орбиты и скорости возврата.

5.1. Межпланетные траектории

Начальный этап планирования большинства межпланетных операций заключается в выборе подходящей траектории полета космического корабля. В настоящее время межпланетные исследовательские полеты должны от начала до конца представлять собой по существу свободное движение только под действием сил притяжения Солнца и планет, хотя появление двигательных установок с практически непрерывной тягой может значительно изменить это положение. Таким образом, в подготовку космической операции входит как целая часть предварительный расчет номинальной траектории. Если бы запуск космического корабля осуществлялся точно в соответствии с номинальной траекторией, то он должен был бы теоретически достичь места назначения без использования двигателя. Однако отклонения от этой расчетной траектории вызывают необходимость коррекции, для которой следует предусмотреть двигательную установку. Чтобы обеспечить успешное выполнение космической операции, нельзя допускать значительных отклонений от запланированной программы полета из-за ограниченности энергетических ресурсов, которые может нести космический корабль. К сожалению, до тех пор, пока в нашем распоряжении не окажутся более мощные источники энергии, чем используемые в настоящее время химические топлива, космические операции, по общему мнению, придется ограничивать траекториями пассивного полета.

Определение соответствующей номинальной траектории осложняется тем, что точка старта и точка назначения обращаются по орбитам вокруг Солнца. Угловые скорости планет отправления и назначения * не только различны, но и непрерывно изменяются с течением времени. К тому же, хотя движение каждой из планет происходит по существу в постоянной плоскости, тем не менее плоскости их орбит не совпадают между собой. Правда, относительные углы наклонения малы, но влияние некомпланарности этих плоскостей может оказаться значительным.

Понятно, что траектория пассивного полета полностью определяется начальными условиями, т. е. вектором скорости космического корабля в момент отправления от Земли. До схода с орбиты Земли космический корабль имеет относительно Солнца скорость несколько менее 30 *км/сек*, равную орбитальной скорости Земли. В этом случае задача состоит в определении импульса скорости, необходимого для перехода на такую межпланетную орбиту, чтобы космический корабль пересек орбиту планеты назначения в заранее вычисленной точке пространства и времени.

Полная потребная энергетика, необходимая для межпланетного полета, определяется в основном следующими слагаемыми:

1. Потребная энергетика отрыва от планеты отправления.
2. Энергетика перехода от начальной орбиты на орбиту, проходящую через точку встречи с планетой назначения.
3. Энергетические затраты на торможение скорости вблизи планеты назначения, если предполагается посадить космический корабль на планету или перевести его на орбиту обращения вокруг планеты.
4. Потребная энергетика, необходимая для навигационных коррекций.

Основная задача анализа межпланетных траекторий заключается в выборе такой из них, для которой потребная энергетика является минимальной и которая в остальном полностью соответствует общим целям перелета.

Как было показано в разд. 4. 2, можно запустить космический корабль от Земли в направлении Марса или Венеры со скоростью отправления или избыточной гиперболической скоростью, которая

---

* Имеются в виду угловые скорости поворота радиусов-векторов планет относительно Солнца (*прим. ред.*).

лишь ненамного будет превышать минимальную скорость убегания *. Бо́льшую часть траектории занимает участок свободного полета под действием притяжения Солнца — периоды движения с ускорением от тяги двигателя и вблизи планет незначительны по сравнению с полной продолжительностью перелета. Как правило, влияние притяжения различных планет на траекторию космического корабля пренебрежимо мало. Поэтому полет в основном происходит почти по строго эллиптической орбите.

Как описано в разд. 4.2 и показано на рис. 5.1, хомановская орбита перелета зонда для исследования Марса представляет собой эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце. Перигелий этого эллипса есть точка его касания с орбитой Марса. Если бы при этом орбиты планет являлись компланарными и круговыми, то такая схема перелета обеспечивала бы наименьший расход топлива.

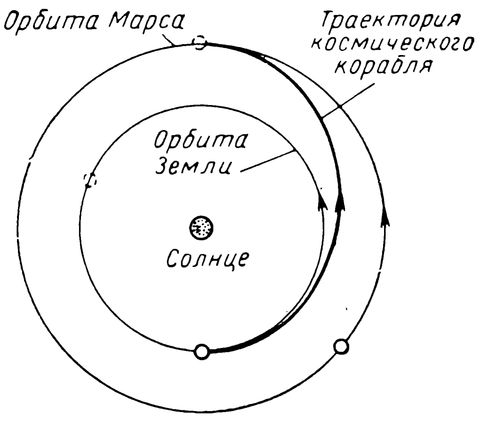


Рис. 5.1. Траектория перелета Земля — Марс с минимальным расходом топлива

Однако плоскости орбит Земли и Марса не компланарны, и хотя угол между ними равен всего лишь 1,85°, учет некомпланарности существенно сказывается на потребной начальной скорости. При движении космического корабля только под действием солнечного притяжения плоскость траектории должна включать точку положения Земли в момент отправления, точку положения планеты — цели в момент прибытия и Солнце как центр притяжения. Если точки отправления и прибытия находятся друг от друга на угловом расстоянии, близком к 180° (в вершине угла помещается Солнце), то плоскость траектории может образовывать большой угол наклонения к плоскости эклиптики, что обычно и происходит**. Для такой орбиты потребная скорость космического корабля относительно Земли сравнима с собственной скоростью Земли относительно Солнца. Орбиты такого рода поэтому требуют чрезмерно больших энергетических затрат при отправлении, несмотря на то, что

* В отечественной литературе скорость убегания обычно называют второй космической скоростью. Напомним, что первой космической скоростью, соответствующей некоторой точке пространства, принято называть скорость близкого спутника Земли на круговой орбите, радиус которой численно равен модулю радиуса-вектора этой точки *(прим. ред.)*.

** За исключением того случая, когда точки отправления и прибытия лежат на линии узлов (*прим. ред.*).

в упрощенной двумерной модели перелета они в этом отношении являются оптимальными.

Помимо указанного выше следствия трехмерности, еще одним недостатком сокасательного эллипса перелета является то, что если его продолжить за точку назначения, он не обеспечит подходящей траектории возврата к Земле. При одностороннем полете это не имеет значения; однако для зонда, который возвращается к Земле, или для пилотируемого космического корабля этот момент существенно важен. Полет до Марса по такой траектории займет 8—9 месяцев. Если космический корабль продолжает полет, не располагая дополнительной энергетикой, то он может вернуться в исходную точку только в том случае, когда Земля находится почти на противоположной стороне от Солнца. Поэтому либо космический корабль должен находиться вблизи Марса в ожидании, когда наступит соответствующий момент для обратного полета, либо первоначальная траектория должна быть изменена таким образом, чтобы космический корабль встретился с Землей при возврате на земную орбиту. Как будет показано в следующем разделе, требуется иметь возможность изменять скорость более чем на 1400 *м/сек* для перехода на орбиту обращения вокруг Марса и для последующего перехода на траекторию возвращения. Однако космическому кораблю по существу не потребуется дополнительного топлива для возвращения на Землю, если нет необходимости в промежуточном торможении.

В зависимости от возможных целей научных экспедиций могут иметь значение как односторонние траектории, так и траектории с возвращением. Если расстояние между планетой назначения и Землей в момент прибытия космического корабля к планете назначения допускает радиосвязь, то даже односторонняя траектория может обеспечить выполнение поставленной задачи. С увеличением мощности ракет-носителей становится все более и более реальной возможность доставки на орбиту вокруг планеты назначения аппаратуры, предназначенной для сбора научных данных, которые будут ретранслироваться затем на Землю с помощью средств радиосвязи. Однако значительный объем полезной информации можно получить и просто во время прохождения космического корабля вблизи исследуемой планеты. В этом случае космический корабль смог бы вернуться в окрестность Земли, сокращая тем самым протяженность линий связи. Кроме того, возможен и непосредственный доступ к научной информации, если контейнер с аппаратурой будет сохранен на этапе входа в атмосферу.

5.2. Односторонние межпланетные траектории

При обсуждении межпланетных траекторий будем предполагать, что космический корабль запускается с мыса Кеннеди на круговую орбиту спутника Земли. Затем в соответствующей точке схода на траектории включается двигатель и космический корабль начинает удаляться в общем по гиперболической орбите относительно Земли. Асимптотическая величина вектора относительной скорости представляет собой скорость отправления космического корабля от Земли. Сфера влияния Земли, вычисленная по уравнению (1. 29), простирается на расстояние примерно 800 000 *км*, и за ее пределами действие земного притяжения быстро уменьшается. И только тогда гравитационное поле Солнца является источником силы, которая определяющим образом влияет на траекторию космического корабля.

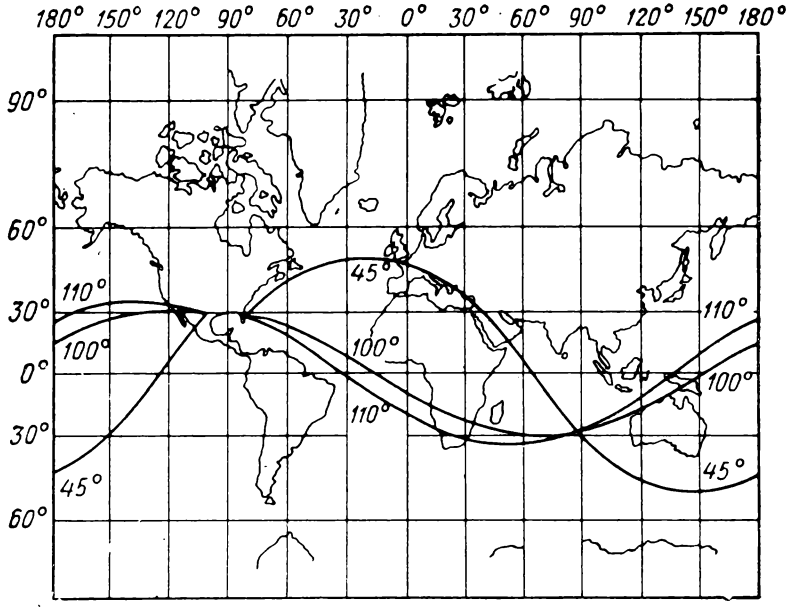


Рис. 5. 2. Геометрическое место точек схода

Метод расчета гелиоцентрических траекторий перехода был подробно описан в разд. 3. 4. Кроме того, в разд. 4. 8 была рассмотрена задача схода с круговой пассивной орбиты, на которую космический корабль запускается с мыса Кеннеди. На рис. 5. 2 схематически изображена карта Земли, на которую нанесены проекции трех допустимых пассивных орбит с азимутами запуска 45, 100 и 110°. Произвольно выбирать азимут запуска нельзя из-за ограничений, связанных с безопасностью. Предполагается, что сход с каждой из этих орбит путем мгновенного изменения скорости происходит в плоскости местного горизонта. Вообще говоря, из географических соображений придется ограничивать выбор точек схода. Однако будем считать, что для случая, рассматриваемого в данном разделе, подобных ограничений не существует. Точка схода была рассчитана по методу, изложенному в разд. 4. 8, с дополнительным предположением, что сход осуществляется во время первого оборота вокруг Земли по пассивной орбите.

Для исследования диапазона допустимых межпланетных траекторий перелета к Марсу и Венере целесообразно производить систе-

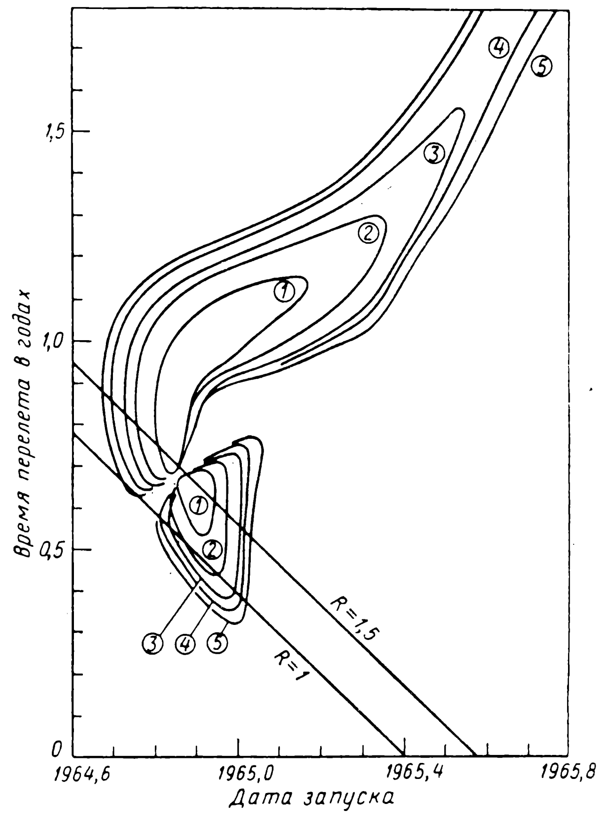


Рис. 5. 3. Контуры постоянной скорости схода. Полет на Марс; азимут запуска 110°:

1—11,6 *км/сек*; *2*—11,9 *км/сек*; *3*—12,2 *км/сек*; *4*—12,5 *км/сек*; *5*—12,8 *км/сек*

матический поиск с использованием в качестве независимых переменных даты запуска и времени перелета. Этот поиск наиболее эффективен, если все орбитальные вычисления как для космического корабля, так и для планет делаются при допущении эллиптических траекторий относительно Солнца. Конечно, при этом желательно использовать полную трехмерную модель солнечной системы.

Система контурных графиков является идеальным средством представления характеристик межпланетных траекторий наиболее наглядным способом, обобщающим основную информацию о возможностях этих траекторий. На таких графиках по осям координат откладываются даты запусков и время перелета. В плоскости этих координат могут быть построены контуры постоянных значений для

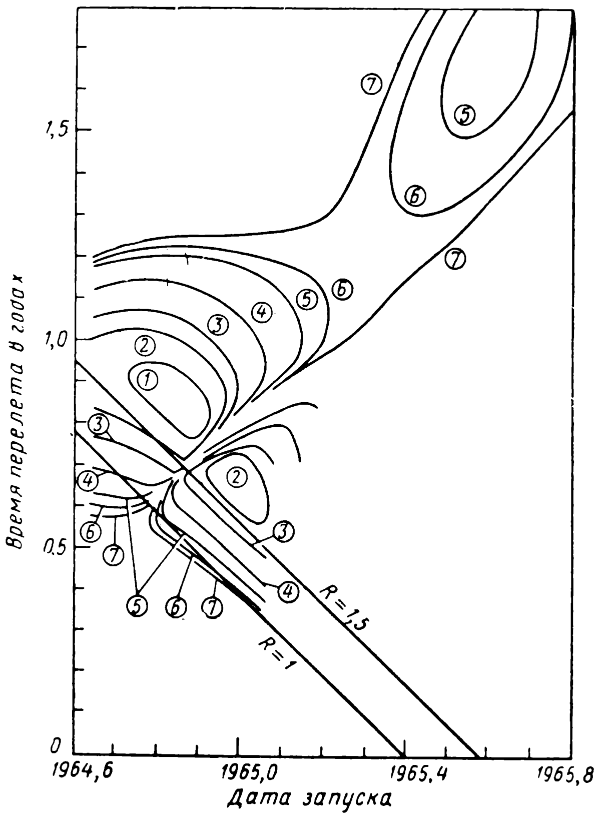


Рис. 5.4. Контуры постоянной скорости относительно Марса:

1—3,05 *км/сек*; *2*—3,81 *км/сек*; *3*—4,57 *км/сек*; *4*—6,10 *км/сек*; *5*—7,62 *км/сек*; *6*—9,15 *км/сек*; *7*—10,67 *км/сек*

таких величин как скорость схода, координаты точки схода, скорость космического корабля относительно планеты назначения.

На рис. 5.3—5.6 показаны в качестве примера контурные графики, относящиеся к возможным вариантам полета на Марс в период со второй половины 1964 г. по первую половину 1965 г. Контуры соответствуют отдельным постоянным значениям скорости схода, асимптотической скорости относительно Марса при подходе к нему космического корабля по гиперболической траектории, а также первому и второму значениям долготы точки схода при азимуте запуска 110°. Скорость схода зависит от азимута запуска только в случае некасательного схода; если же импульс схода прикладывается в направлении вектора скорости, соответствующего движению по круговой орбите, то величина этого импульса зависит только от потребной величины скорости отправления. Как было найдено,

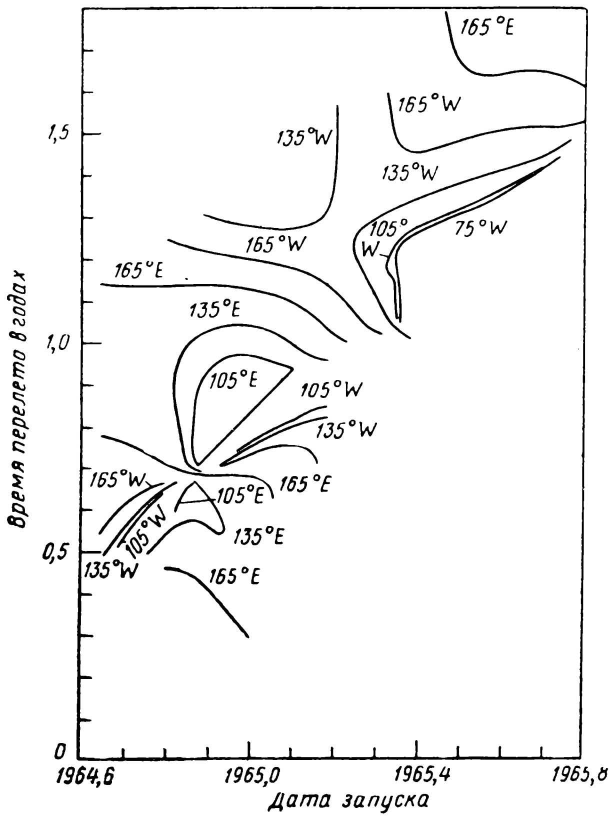


Рис. 5. 5. Контуры постоянной долготы точки схода (вариант 1).
Полет на Марс; азимут запуска 110°

сход с начальных круговых орбит для полетов на Марс должен быть в общем случае касательным. Контуры постоянных значений на рис. 5. 3—5. 6 распадаются на две по существу не связанные между собой области, которые различаются полным центральным углом, описываемым радиусом-вектором космического корабля при его полете вокруг Солнца от Земли к Марсу. Нижняя область соответствует относительно быстрым перелетам, при которых угол перелета должен быть меньше 180°.

Заметим, кстати, что орбиты, требующие более одного полного оборота вокруг Солнца, здесь не рассматриваются. Орбиты, относящиеся к зоне, которая разделяет контуры на две области и где углы перелета достаточно близки к 180°, из-за трехмерного характера движения обычно существенно отклоняются от плоскости

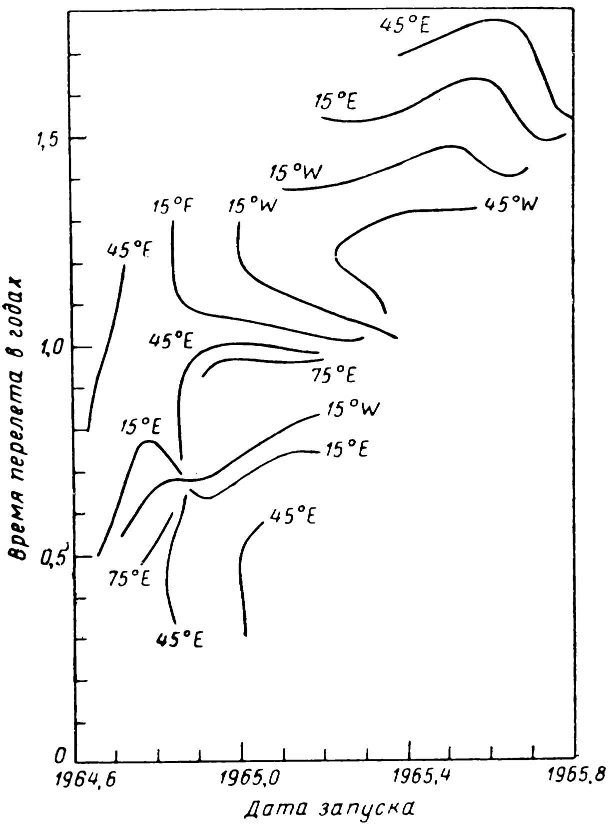


Рис. 5. 6. Контуры постоянной долготы точки схода (вариант 2).
Полет на Марс; азимут запуска 110°

эклиптики. Потребные скорости отправления от Земли в этом случае выше, как это видно из более плотного расположения контуров равной скорости схода в этой зоне. Кроме того, здесь вектор скорости отправления настолько отклоняется от экваториальной плоскости, что сход становится существенно отличным от касательного. Поэтому контуры постоянной скорости схода при различных значениях азимута запуска отличаются главным образом в области, где углы перелета близки к 180°.

Скорости относительно планеты назначения, показанные на рис. 5.4, были вычислены из условия движения по эллиптической гелиоцентрической орбите*, т. е. они равны скоростям, которые достигались бы асимптотически при движении по гиперболе подхода к планете. Указанные скорости представляют интерес не только для определения возможности входа в атмосферу планеты назначения или перевода космического корабля на орбиту спутника планеты, но также постольку, поскольку они влияют на связь между точностью навигации и расходом топлива на конечном этапе сближения с планетой. С точки зрения каждого из этих соображений выгодно уменьшать относительную скорость сближения. Поэтому неожиданно благоприятным оказывается тот факт, что в случае полетов на Марс области малых значений относительной скорости более или менее совпадают с областью сравнительно низких скоростей схода для выхода на межпланетную орбиту. К сожалению, эти области совершенно не совпадают с зоной, которой соответствуют малые расстояния между Землей и Марсом в момент прибытия.

Когда сравнивают автономные навигационные системы с системами, работающими в основном по командам с Земли, то учитывают возможность радиосвязи при достижении космическим кораблем планеты назначения. Ясно, что для тех орбит, для которых радиосвязь в районе встречи с планетой назначения сильно затруднена, наиболее вероятно применение автономной системы. Когда линия связи все-таки необходима в момент встречи или в течение некоторого близкого к нему периода, то и в этом случае критическая роль линии связи может быть до некоторой степени ослаблена, если требуется передавать только медленно меняющуюся научную информацию, а сама линия связи в это время не занимает жизненно важного места в управлении космическим кораблем. Поэтому при подготовке полета имеет смысл учитывать требования на дальность от Земли до планеты назначения и на видимое угловое расстояние корабля от Солнца.

Эти две величины зависят исключительно от взаимного расположения планет в момент достижения космическим кораблем планеты назначения. Вследствие этого расстояние R от Земли до Марса или Венеры и угол A_s, образованный прямыми, проведенными от Солнца к Земле и планете назначения, удобно выразить в зависимости от даты прибытия. Графики R и A_s для полета на Марс показаны на рис. 5.7. Чтобы связать эти кривые с контурными графиками, достаточно иметь в виду, что линия постоянной даты прибытия на контурном графике представляет собой прямую с наклоном — 45°; для примера прямые, соответствующие значениям $R=1{,}0$ и $R=1{,}5$ астрономических единиц, нанесены на контуры постоянных скоростей схода (см. рис. 5.3) и контуры постоянных относительных ско-

* Имеются в виду относительные скорости, найденные до момента достижения космическим кораблем сферы влияния планеты назначения *(прим. ред.)*.

ростей (см. рис. 5.4)*. Из этих рисунков видно, что для очень немногих траекторий длина линии связи составляет менее одной астрономической единицы, причем для этих траекторий характерны сравнительно высокие скорости схода. В самом деле, ни одна из траекторий с наименьшей скоростью схода не входит в пределы относительно узкой полосы, заключенной между прямыми $R=1{,}0$ и $R=1{,}5$**.

На рис. 5.8 и 5.9 показаны две траектории полета к Марсу с примерно одинаковыми скоростями схода, но существенно различ-

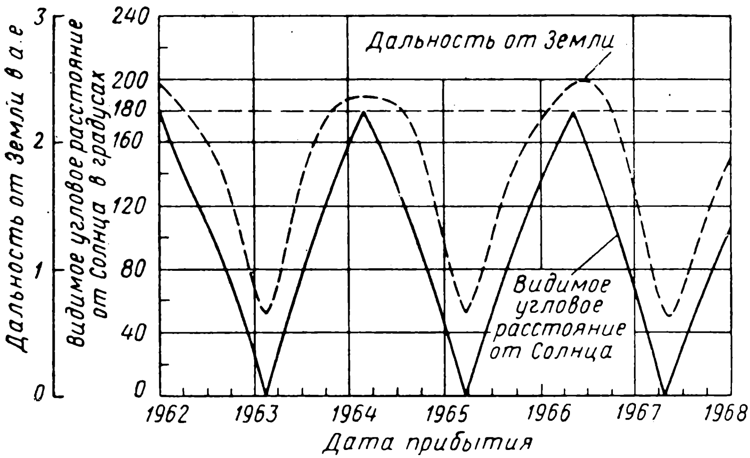


Рис. 5.7. Дальность корабля от Земли и угловое расстояние от Солнца во время прибытия к Марсу

ными скоростями сближения с планетой. На рисунках, помимо орбиты космического корабля, изображены также орбиты Венеры, Земли и Марса. Траектории показаны сплошными линиями, когда соответствующие орбитальные плоскости расположены выше плоскости эклиптики, и пунктирными линиями, когда плоскости орбит лежат ниже плоскости эклиптики. Для точек запуска и прибытия указаны соответствующие даты. Взаимное расположение космического корабля и планет соответствует календарным датам, приведенным на рисунках. Земля в момент контакта космического корабля с Марсом обозначается заштрихованным кружком. Основные характеристики этих траекторий перечислены в табл. 5. 1.

Различного рода причины приводят к тому, что соответствующая задача о траектории полета к Венере несколько отлична от рассмотренной ранее задачи для Марса. Прежде всего Венера — наша

* Дата прибытия на графике соответствует точке пересечения прямой с осью абсцисс *(прим. ред.)*.

** По-видимому, для обоснования этого положения нужно ссылаться не на указанную автором полосу, а скорее на область, лежащую ниже прямой $R=1{,}0$ *(прим. ред.)*.

Таблица 5.1

Траекторные данные

Перелет / Параметры	Земля — Марс		Земля — Венера	
	1	2	1	2
Дата отправления	5.XI—1964 г.	24.XI—1964 г.	19.IV—1964 г.	10.IV—1964 г.
Время перелета в годах	0,85	0,50	0,45	0,30
Скорость схода в *м/сек*	11432,6	11667,8	11410,0	11841,9
Избыточная гиперболическая скорость у Земли в *м/сек*	3040,2	4125,4	2954,8	4332,8
Составляющие избыточной гиперболической скорости в эклиптической системе координат в *м/сек*	—2585,8 1307,8 919,9	—3900,3 1108,1 760,4	—786,5 2843,8 155,6	1121,8 3498,7 —2296,3
Большая полуось в а. е.	1,24466	1,40745	0,84580	0,87093
Эксцентриситет	0,20788	0,30040	0,18806	0,17330
Избыточная гиперболическая скорость у планеты назначения в *м/сек*	2786,2	7704,6	5598,8	4068,4
Расстояние до Земли в момент контакта с планетой назначения в а. е.	1,79539	1,07767	0,95173	0,53476
Азимут запуска, отсчитываемый от меридиана, проходящего через мыс Кеннеди	100°	110°	100°	100°
Долгота точки схода	125° E	144° E	128° E	1° E
Широта точки схода	16°S	5°N	15°S	10°S

ближайшая соседка: среднее расстояние до нее равно примерно 0,723 астрономических единицы, тогда как среднее расстояние до Марса — 1,523 астрономических единицы. Поэтому в случае полета к Венере минимальная потребная скорость отправления будет несколько меньшей. Однако этот выигрыш частично уравновешивается тем, что наклонение плоскости орбиты Венеры к плоскости эклиптики более чем в два раза превышает наклонение плоскости орбиты Марса.

Вторая отличительная черта касается времени полета. При полете от Земли к внутренней планете абсолютная скорость космического корабля будет увеличиваться по мере приближения его к Солнцу. Оказывается, что при одинаковой скорости отправления и оди-

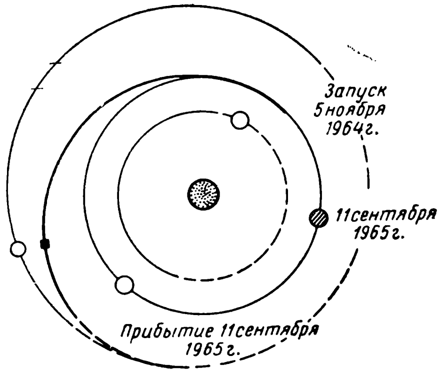


Рис. 5.8. Первая траектория перелета на Марс (7 мая 1965 г.)

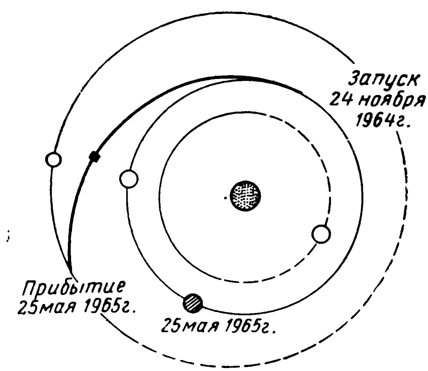


Рис. 5.9. Вторая траектория перелета на Марс (14 марта 1965 г.)

наковом угле перелета время полета от Земли к Венере составляет менее половины времени, необходимого для полета к Марсу.

Возможности, связанные с полетом к Венере в течение первой половины 1964 г., демонстрируют контуры постоянной скорости схода и постоянной скорости относительно планеты назначения, показанные на рис. 5. 10 и 5. 11 для азимута запуска 100° от меридиана

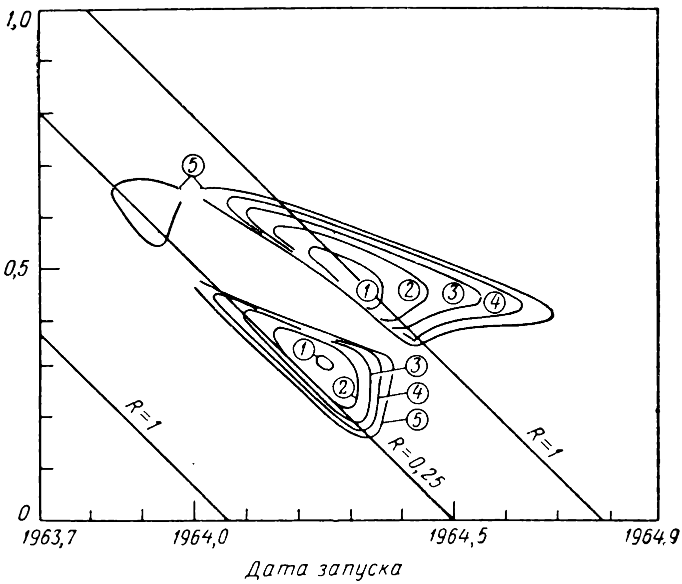


Рис. 5. 10. Контуры постоянной скорости схода. Траектории полета к Венере; азимут запуска 100°:

1—11,6 *км/сек*; *2*—11,9 *км/сек*; *3*—12,2 *км/сек*; *4*—12,5 *км/сек*; *5*—12,8 *км/сек*

мыса Кеннеди. Отметим, что для орбит полета к Венере несколько более характерны некасательные случаи схода с пассивной круговой орбиты. Дальность корабля от Земли и угловое расстояние от Солнца в момент прибытия к Венере построены на рис. 5. 12 в функции даты прибытия. По сравнению с орбитами полета на Марс большинство траекторий перелетов к Венере попадают внутрь области, для которой расстояние от Земли не превышает одной астрономической единицы.

На рис. 5. 13 и 5. 14 показаны примеры траекторий перелета к Венере: одна с относительно коротким, а другая — с продолжительным временем полета. Характеристики этих траекторий приведены в табл. 5. 1.

Интересно сравнить некоторые величины, относящиеся к операции перевода космического корабля на орбиту спутника Марса и Венеры. Пусть v_∞ — относительная скорость космического корабля на настолько большом расстоянии от планеты, что гравитационное поле этой планеты еще не оказывает заметного влияния на скорость. Когда космический корабль находится в наиболее близкой к планете точке, он получает тормозной импульс скорости, величина которого, как указано в задаче 4.12, является функцией скорости подхода, минимального расстояния до планеты и эксцентриситета желаемой орбиты спутника. В табл. 5.2 для трех различных скоро-

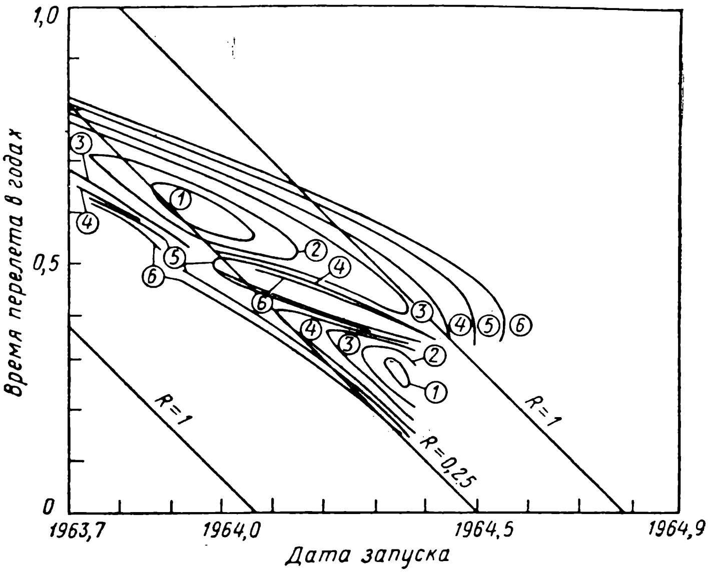


Рис. 5.11. Контуры постоянной скорости относительно Венеры: *1*—3,81 *км/сек*; *2*—4,57 *км/сек*; *3*—6,10 *км/сек*; *4*—7,62 *км/сек*; *5*—9,15 *км/сек*; *6*—10,67 *км/сек*

стей подхода даны значения потребных изменений скорости, которые необходимо произвести на высоте 8000 *км* над поверхностью Марса для перевода космического корабля на орбиты спутников Марса с различными эксцентриситетами. Последняя строка в таблице, соответствующая эксцентриситету, равному единице, приведена только для сравнения. Из таблицы видно, что для значительной экономии топлива следует переходить на орбиты вокруг Марса с бо́льшим эксцентриситетом при меньшей скорости подхода.

Поскольку гравитационная постоянная для Венеры почти в восемь раз больше, чем для Марса, задачи перевода корабля на орбиты спутников этих планет существенно различны. Путем сравнения табл. 5.2 и 5.3 можно подобрать несколько таких сочетаний скорости подхода и желаемого эксцентриситета, для которых потребная энергетика при переходе на орбиту вокруг Венеры будет на 50% ниже, чем для случая орбиты вокруг Марса.

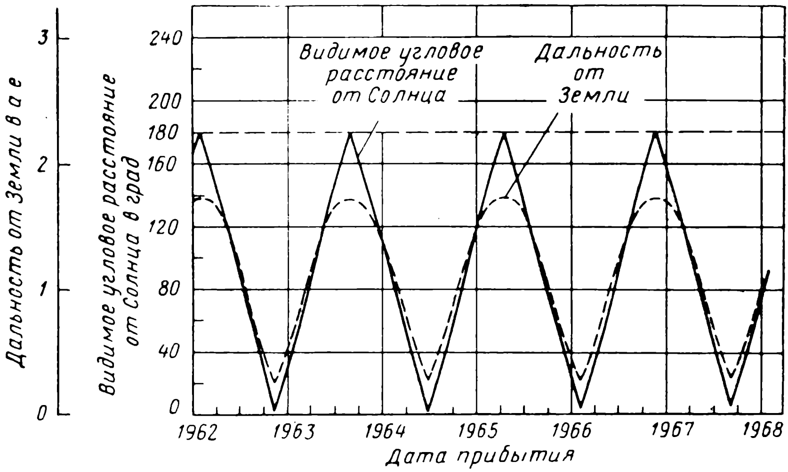


Рис. 5. 12. Дальность корабля от Земли и угловое расстояние от Солнца во время прибытия к Венере

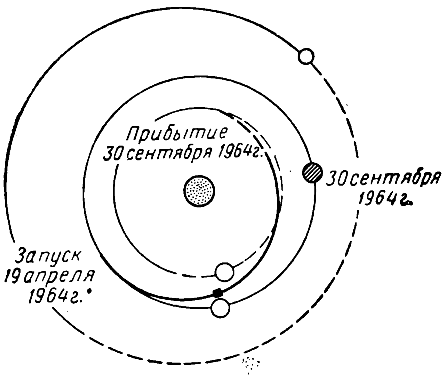


Рис. 5. 13. Третья траектория перелета на Венеру (1 июля 1964 г.)

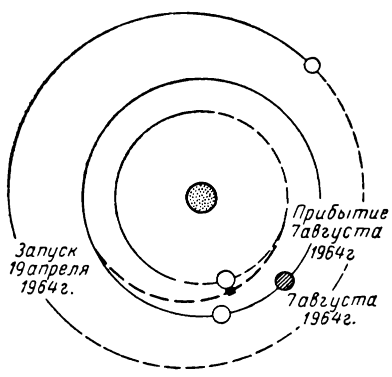


Рис. 5. 14. Четвертая траектория перелета на Венеру (1 июля 1964 г.)

Таблица 5.2

Потребное изменение скорости на высоте 8000 *км* для перехода на орбиту вокруг Марса

Эксцентриситет	v_∞=3050 *м/сек*	v_∞=6100 *м/сек*	v_∞=9150 *м/сек*
0,0	2162	4749	7613
0,2	1977	4564	7428
0,4	1807	4394	7258
0,6	1649	4235	7099
0,8	1500	4087	6951
1,0	1359	3946	6810

Таблица 5.3

Потребное изменение скорости на высоте 8000 *км* для перехода на орбиту вокруг Венеры

Эксцентриситет	v_∞=3050 *м/сек*	v_∞=6100 *м/сек*	v_∞=9150 *м/сек*
0,0	2638	4325	6795
0,2	2181	3869	6139
0,4	1761	3449	5719
0,6	1370	3058	5328
0,8	1003	2691	4960
1,0	655	2343	4613

5.3. Траектории подхода вблизи планеты назначения

Когда космический корабль находится в окрестности планеты назначения, на его движение по гелиоцентрической орбите воздействуют возмущения по скорости, которые зависят от скорости космического корабля относительно планеты и от расстояния до планеты в точке наибольшего сближения. Если на движение космического корабля влияет только гравитационное поле планеты, то он будет сближаться с планетой по гиперболической траектории. На самом деле период времени, в течение которого преобладает притяжение планеты, мал по сравнению с полным временем полета. К тому же в течение этого времени расстояние между космическим кораблем и планетой мало по сравнению с расстоянием от космического корабля до Солнца. В результате в течение короткого периода контакта притяжение Солнца действует на космический корабль и на планету по существу в равной степени. Поэтому при обсуждении вопроса о сближении с планетой назначения притяжением Солнца можно пренебречь, полагая, что это не окажет существенного влияния на результаты анализа. В данном разделе будут отдельно рассмотрены задачи о пролете вблизи планеты и о попадании на поверхность планеты.

Пролет вблизи планеты назначения

На значительном удалении от планеты назначения движение космического корабля относительно планеты происходит почти по асимптоте к гиперболе подхода. Обратимся к рис. 5. 15 и обозначим

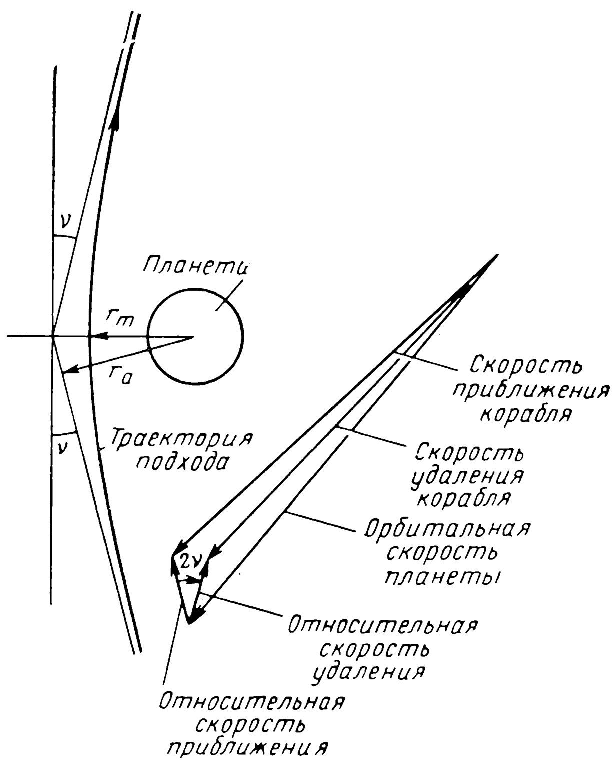


Рис. 5. 15. Движение космического корабля в окрестности планеты

через ν угол между асимптотой и мнимой осью гиперболической траектории сближения. Понятно, что вершина гиперболы находится в точке, где космический корабль наиболее близко подходит к планете. Полное изменение скорости космического корабля после прохождения вблизи планеты, очевидно, находится простым поворотом вектора относительной скорости сближения $\bar{v}_{\infty i}$ на угол 2ν в плоскости движения. Абсолютная скорость космического корабля может увеличиваться или уменьшаться в зависимости от направления поворота, которое в свою очередь зависит от ориентации плоскости относительного движения. При этом модуль вектора относительной скорости удаления $v_{\infty 0}$ равен модулю вектора относительной скорости приближения.

Пусть e и a — эксцентриситет и большая полуось гиперболической орбиты, а r_m обозначает расстояние между вершиной и фокусом гиперболы. Поскольку вершина находится в точке, где космический корабль наиболее близко подходит к планете, то имеет место соотношение

$$r_m = a(e-1) = \frac{\mu}{v_\infty^2}(e-1),$$

где μ — гравитационная постоянная планеты.

Разрешая последнее соотношение относительно e и замечая, что $e = \operatorname{cosec} \nu$, получим

$$\sin \nu = \frac{1}{1 + \dfrac{r_m \bar{v}_\infty^2}{\mu}}. \tag{5.1}$$

Точно такое же соотношение было найдено в разд. 4.8 в виде уравнения (4.48) с помощью несколько иных рассуждений.

Для навигационных целей более важен не вектор точки наиболее близкого подхода к планете $\bar{r}_m$, а показанный на рис. 5.15 вектор $\bar{r}_a$. Этот вектор* направлен из фокуса гиперболической орбиты перпендикулярно вектору скорости $\bar{v}_{\infty i}$. Конец вектора $\bar{r}_a$ можно считать *точкой прицеливания* при подходе. Так как модуль $\bar{r}_a$ выражается соотношением

$$r_a = ea \cos \nu$$

и, следовательно, равен малой полуоси гиперболы, имеется другое выражение для угла поворота ν на этот раз в зависимости от расстояния r_a:

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{\mu}{r_a v_\infty^2}. \tag{5.2}$$

Окончательно, исключая ν из уравнений (5.1) и (5.2), получим

$$r_a = r_m \sqrt{1 + \frac{2\mu}{r_m v_\infty^2}}. \tag{5.3}$$

На рис. 5.16 и 5.17 для Марса и Венеры показаны зависимости r_a от r_m при различных значениях v_∞. Количественную оценку

* В работе [73] вектор $\overline{r_a}$ назван прицельной дальностью (*прим. ред.*).

влияния возмущений на скорость можно сделать по рис. 5. 18 и 5. 19. На этих рисунках показаны модули разности между векторами относительных скоростей приближения и удаления как функ-

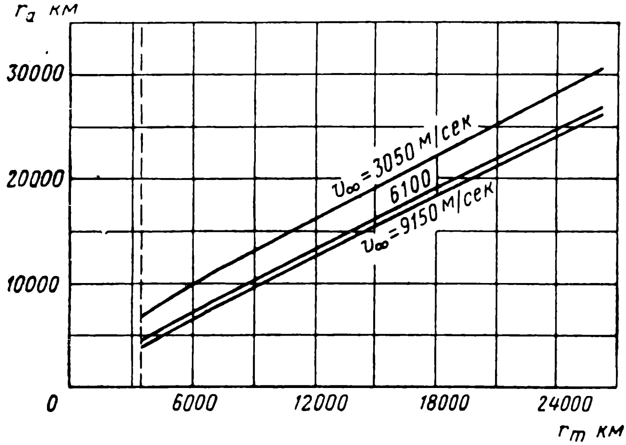


Рис. 5. 16. Дальность до точки прицеливания в зависимости от минимального промаха для Марса

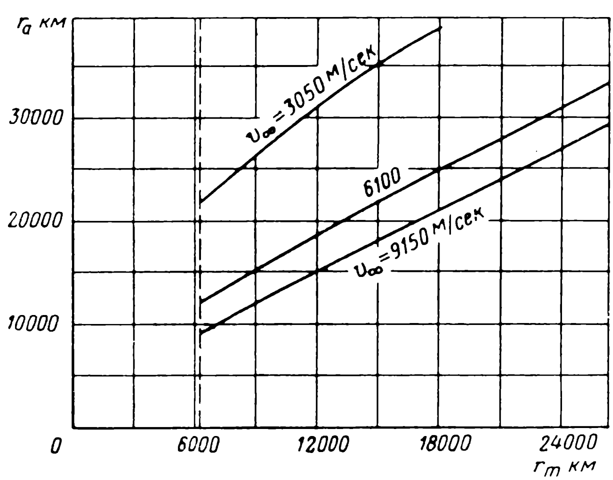


Рис. 5. 17. Дальность до точки прицеливания в зависимости от минимального промаха для Венеры

ции минимального расстояния пролета от центров Марса и Венеры при различных значениях относительной скорости:

$$|\bar{v}_{\infty 0}-\bar{v}_{\infty i}|=2v_\infty \sin \nu=\frac{2v_\infty}{1+\frac{r_m v_\infty^2}{\mu}}.$$

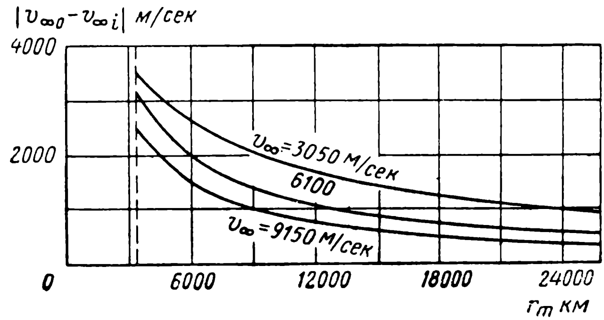


Рис. 5. 18. Изменение скорости в зависимости от минимального промаха для Марса

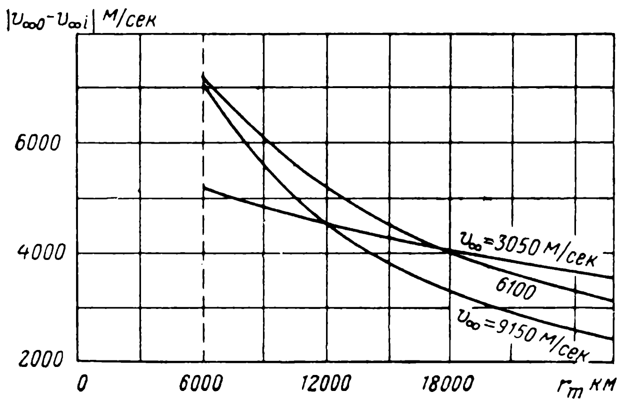


Рис. 5. 19. Изменение скорости в зависимости от минимального промаха для Венеры

Попадание на поверхность планеты назначения

Обратимся теперь к задаче о направлении космического корабля по такой траектории, которая обеспечивала бы его попадание в заданную точку на поверхности планеты назначения. Для простоты последующих выкладок предположим, что точка попадания на поверхность лежит в плоскости, образованной полярной осью планеты и направлением вектора относительной скорости. Тогда рассматриваемая задача сведется к попаданию на заданную широту. В общем случае с помощью небольшой коррекции орбиты можно изменить время прибытия, регулируя тем самым желаемую долготу точки попадания. Из рис. 5.20 видно, что для определения угла β и радиуса-вектора точки попадания $\bar{r}_s$ вполне достаточно знать широту Φ и вектор относительной скорости сближения $\bar{v}_{\infty i}$. Если $\bar{v}_{\infty i}$ выразить в планетоцентрической экваториальной системе координат, то будем иметь

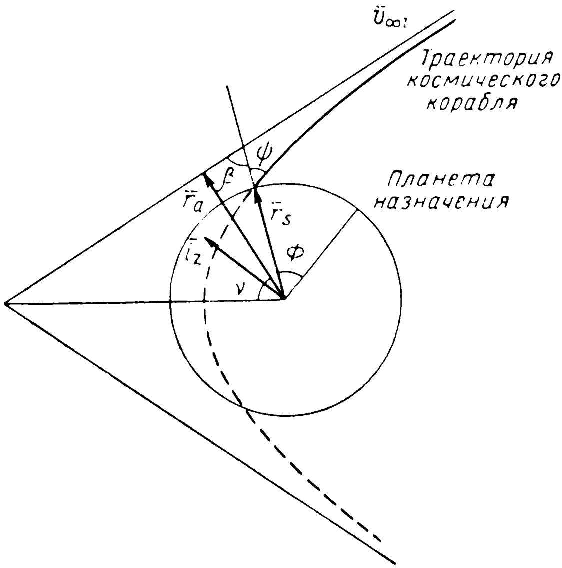


Рис. 5.20. Попадание в планету назначения

$$\sin(\beta - \Phi) = \frac{\bar{i}_z \cdot \bar{v}_{\infty i}}{v_\infty}, \tag{5.4}$$

где $\bar{i}_z$ — единичный вектор в направлении полярной оси планеты на север.

Для определения дальности до точки прицеливания отметим сначала, что параметр гиперболической орбиты выражается формулой

$$p = a(e^2 - 1) = \frac{\mu \operatorname{ctg}^2 \nu}{v_\infty^2}.$$

Тогда найдем

$$r_s = \frac{p}{1 + e \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta + \nu\right)} = \frac{\mu \operatorname{ctg}^2 \nu / v_\infty^2}{1 + \operatorname{ctg} \nu \sin \beta - \cos \beta}.$$

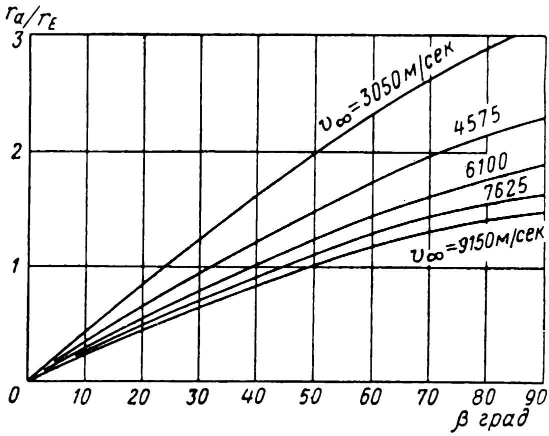


Рис. 5.21. Дальность до точки прицеливания в зависимости от угла ориентации β для случая попадания на поверхность Земли

Используя уравнение (5.2), получим следующее квадратное уравнение, выражающее r_a через β и v_∞:

$$r_a^2 - r_a r_s \sin \beta - \frac{\mu}{v_\infty^2} r_s (1 - \cos \beta) = 0. \tag{5.5}$$

Зависимости r_a (в единицах радиуса планеты) от угла β при различных значениях v_∞ приведены для Земли на рис. 5.21.

Показанный на рис. 5.20 угол падения ψ важен для задачи входа в атмосферу и может быть найден по формуле

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{p}{r_s e \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta + \nu\right)} = \frac{r_a^2}{r_s\left(r_a \cos \beta + \mu \sin \beta / v_\infty^2\right)}. \tag{5.6}$$

Зависимости угла ψ от β для Земли при различных значениях v_∞ представлены на рис. 5.22.

Для этого семейства кривых был выбран диапазон изменения угла β от 0 до 90°. На самом деле этот угол может быть больше 90°, причем его верхний предел определяется выбором v_∞^2. Предположим, что v_∞^2 задана, а угол β равен нулю. Тогда из уравнений (5. 5) и (5. 6) найдем $\psi=0$. По мере увеличения β будет увеличиваться ψ, приближаясь к своему предельному значению $\psi=90°$, что произойдет при некотором значении β, которое должно быть, очевидно,

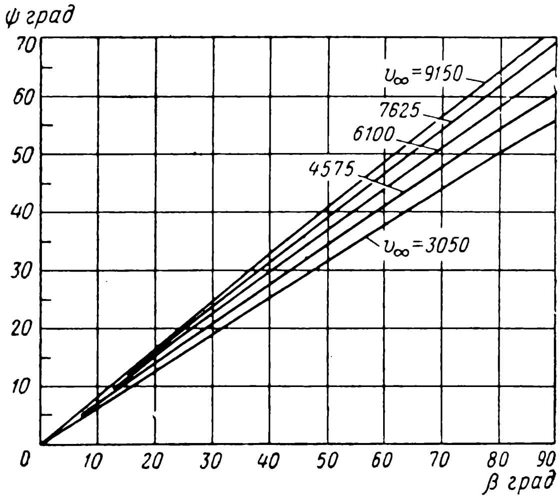


Рис. 5. 22. Угол падения ψ в зависимости от угла ориентации β для случая попадания на поверхность Земли

больше 90°. Для любых больших значений β решение не имеет физического смысла.

Уравнения (5. 5) и (5. 6) могут быть использованы для определения вектора скорости космического корабля непосредственно перед входом в атмосферу планеты назначения. После этого путем численного интегрирования уравнений движения космического корабля с учетом сопротивления атмосферы может быть найдено вызываемое этим сопротивлением максимальное отрицательное ускорение во время прохождения атмосферы. На рис. 5. 23 и 5. 24 представлены графики зависимости максимального отрицательного ускорения от невозмущенного расстояния до точки прицеливания r_a при различных значениях относительной скорости подхода для Марса и Венеры.

В этом случае снова очевидны преимущества медленного подхода к планете назначения. Допустимые ошибки наведения при заданном верхнем пределе перегрузки значительно увеличиваются для траекторий с меньшей скоростью подхода. Например, при скорости

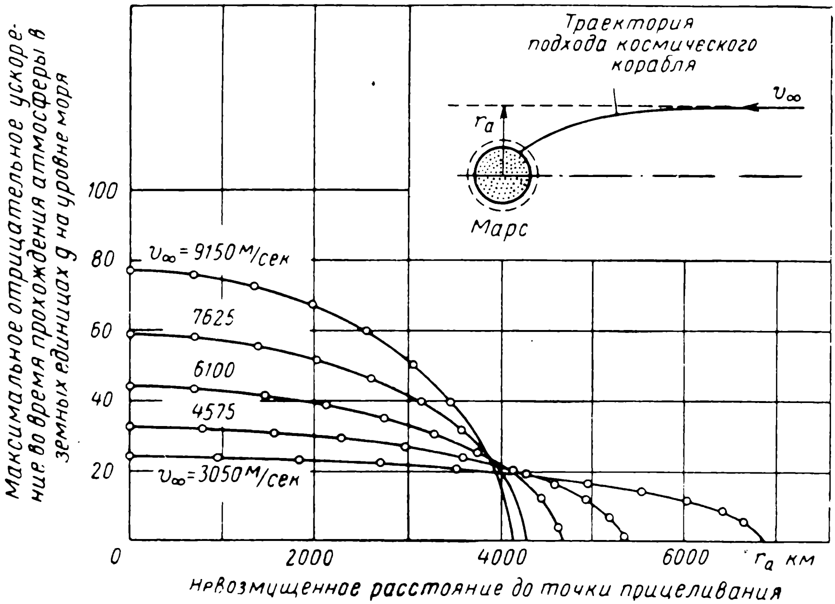


Рис. 5.23. Максимальное отрицательное ускорение во время прохождения атмосферы Марса

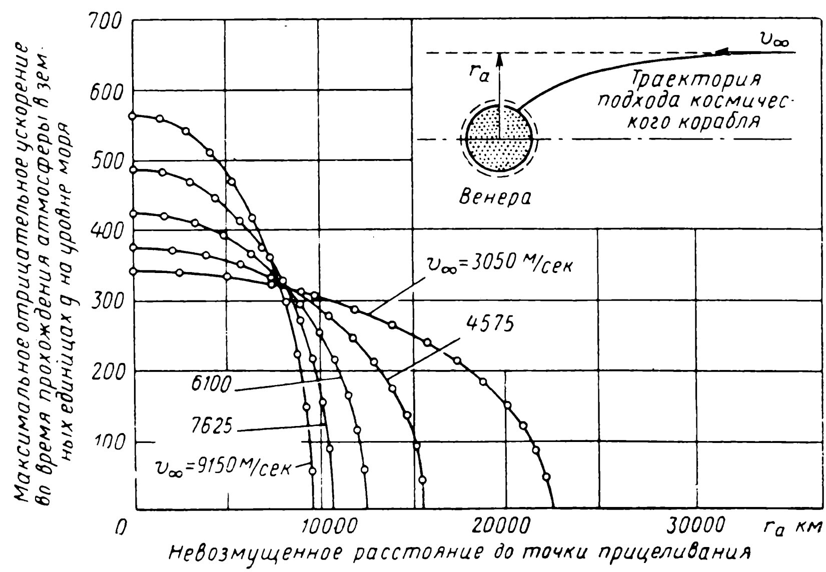


Рис. 5.24. Максимальное отрицательное ускорение во время прохождения атмосферы Венеры

подхода 3050 *м/сек* и пределе максимальной отрицательной перегрузки $10g$ можно допустить отклонение от r_a примерно в 185 *км* при $r_a \approx 6470$ *км*. Если же скорость подхода увеличивается до 4570 *м/сек*, допустимые отклонения уменьшаются более чем в 2 раза при том же пределе отрицательной перегрузки. С другой стороны, величины отрицательной перегрузки на рис. 5.24, которые могут возникнуть при попытке исследования атмосферы Венеры или мягкой посадки на ее поверхность, в большинстве случаев обескураживают. Требования к допустимой точности в данном случае по меньшей мере являются на порядок более жесткими, чем в соответствующей задаче для Марса.

5.4. Исследовательские межпланетные траектории с возвращением

Рассмотрим в качестве частной задачи обеспечение движения космического корабля по орбите, которая проходит в нескольких тысячах километров от другой планеты и впоследствии приводит корабль обратно к Земле. Задача определения соответствующей односторонней траектории обсуждалась в разд. 5.2. Дополнительное усложнение, вызываемое требованием возврата корабля к Земле без специальной тормозной двигательной установки (за исключением той, которая необходима для коррекции навигационных ошибок), не должно было бы существенно затруднять решение, если бы не отклонение орбиты, вызываемое гравитационным полем планеты назначения во время пролета мимо нее космического корабля. Тем не менее на основе материала, изложенного в двух предыдущих разделах, можно следующим образом сформулировать схему вычислений, необходимую для определения пассивных беспосадочных межпланетных траекторий с возвращением.

Траектория отправления * определяется так же, как и односторонняя траектория. После этого может быть вычислена абсолютная скорость космического корабля, и тогда его скорость относительно планеты назначения станет известной. Поскольку гравитационное поле планеты может только поворачивать вектор этой скорости, космический корабль должен покидать планету для возвращения к Земле с определенной относительной скоростью и в определенное время. Задача нахождения траектории возвращения решается, по сути дела, с помощью итерационного процесса. Процесс заключается в формировании и систематическом уточнении оценки момента времени, при котором возможно возвращение к Земле. Для каждой такой оценки вычисляется новая траектория и процесс повторяется

---

* Здесь и далее для случая орбит с возвращением термин «траектория отправления» будет применяться для обозначения траектории полета от Земли до планеты назначения (outbound portion of the round-trip trajectory), а термин «траектория возвращения» будет обозначать траекторию полета от планеты назначения обратно к Земле (inbound portion of the round-trip trajectory) *(прим. ред.)*.

до тех пор, пока одна из этих траекторий не будет соответствовать величине вектора скорости относительно планеты назначения.

Может, конечно, случиться, что не существует траектории возвращения, соответствующей требуемым моменту отлета и величине относительной скорости. Если же подходящие траектории отправления и возвращения определены, то остается сделать последний шаг. Следует определить, может ли произойти необходимое изменение скорости корабля за период пролета вблизи планеты назначения исключительно благодаря гравитационному полю планеты. Потребный угол поворота 2ν нетрудно вычислить, зная векторы относительной скорости приближения и удаления:

$$\sin 2\nu = \frac{\left|\bar{v}_{\infty 0} \times \bar{v}_{\infty i}\right|}{v_{\infty}^{2}}. \tag{5.7}$$

Тогда минимальная дальность пролета определяется по формуле

$$r_m = \frac{\mu(\operatorname{cosec}\nu - 1)}{v_{\infty}^{2}}. \tag{5.8}$$

Если величина r_m находится в разумных пределах, то задача полностью решена и удовлетворительную траекторию с возвращением можно считать определенной.

Наиболее простой траекторией с возвращением была бы орбита с периодом обращения, кратным периоду обращения Земли. Рассмотрим сначала возможную орбиту космического корабля с периодом обращения в 1 год, которая пересекает как орбиту Земли, так и орбиту планеты назначения. Чтобы космический корабль вышел из сферы действия гравитационного поля Земли, для полета на Марс (см. задачу 5.2) необходима минимальная скорость запуска более 15 000 *м/сек*. Однако для полета к Венере за счет небольшого времени обратного полета и ее значительной силе притяжения создаются условия, более близкие к тем, которые необходимы для одногодичной траектории с возвращением. В обычных условиях период орбиты, соответствующей траектории отправления, будет чуть меньше 0,8 года, тогда как орбита, соответствующая траектории возвращения, будет иметь период около одного года. Типичная траектория с возвращением займет приблизительно 1,2 года, из которых около 0,4 года составит полет от Земли к Венере и 0,8 года пойдет на обратный путь.

В силу того, что жесткие требования к двигательной установке исключают одногодичный полет к Марсу с возвращением, остается возможность применения орбиты с периодом обращения 2 года. Пример такой траектории показан на рис. 5. 25.

Скорость отправления при выходе на межпланетную траекторию полета к Марсу составляет 5550 *м/сек*, и траектория отправления занимает 1,5293 года. Пролетев на расстоянии 12 706 *км* от поверхности Марса с относительной избыточной гиперболической скоростью 8800 *м/сек*, космический корабль возвратится к Земле через 0,3673 года после контакта* с планетой.

Класс двухгодичных траекторий полета на Марс с возвращением, естественно, делить на два типа. В случае траекторий типа изображенной на рис. 5. 25, контакт с планетой осуществляется при вторичном пересечении орбиты Марса. Запуская корабль на несколько месяцев раньше, можно получить двухгодичные траектории с возвращением, при которых контакт с планетой происходит во время первого пересечения. В качестве примера рассмотрим полет космического корабля, запущенного 6 ноября 1962 г. с начальной скоростью 5600 *м/сек*. Через 0,3985 года космический корабль пролетит в 6506 *км* от поверхности Марса с относительной избыточной гиперболической скоростью 9846 *м/сек* и через 1,6957 года после контакта возвратится к Земле.

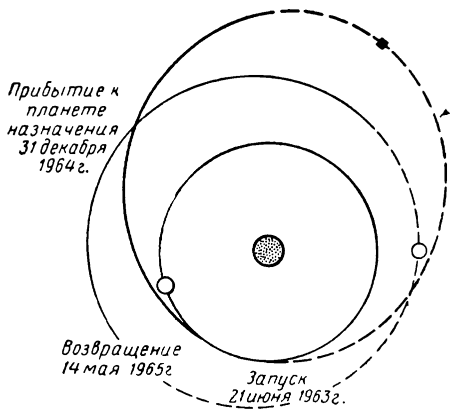


Рис. 5. 25. Траектория для исследования Марса с периодом 2 года (9 апреля 1964 г.)

К сожалению, на двухгодичные траектории полета к Марсу с возвращением налагаются ограничения со стороны даты запуска. Хотя можно ожидать, что для такого класса траекторий возможные даты запуска будут следовать друг за другом почти с синодическим периодом Марса (780 дней), продолжительность периода благоприятных дат запуска, которым соответствуют приемлемые скорости и условия пролета вблизи Марса, составляет примерно один месяц.

Требования к точности наведения для одногодичной траектории полета к Венере и трехгодичной траектории полета к Марсу являются значительно менее жесткими. При трехгодичном исследовательском полете к Марсу космический корабль делает два оборота вокруг Солнца, в то время как Земля делает три. Таким образом, либо для траектории полета от Земли к Марсу, либо для траектории возвращения, но не для обеих одновременно, гелиоцентрический угол перелета будет превышать 360°.

Исследовалась часть класса траекторий с возвращением, даты запуска которых приходились на 1962—1963 гг. Некоторые результаты этого исследования, систематизированные в соответствии с оп-

---

* Напомним, что, как правило, и в данном случае термин «контакт с планетой назначения» автор употребляет в смысле взаимодействия космического корабля с ее гравитационным полем *(прим. ред.)*.

ределенными геометрическими свойствами, представлены графически на рис. 5.26—5.29. Для экономии места представление графических данных для Марса ограничивалось прямыми траекториями отправления и непрямыми траекториями возвращения *.

Используется двузначная классификация траекторий, причем правая цифра связана с траекторией отправления, левая цифра —

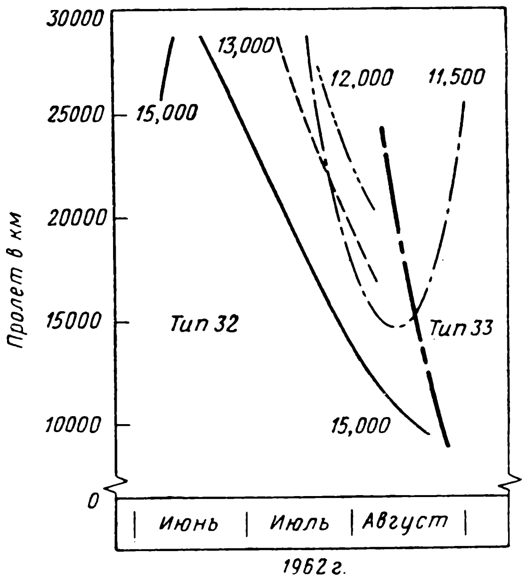


Рис. 5.26. Величина пролета мимо Венеры в зависимости от даты отправления

с траекторией возвращения. По числу, определяющему тип траектории, можно узнать знак радиальной составляющей вектора скорости космического корабля в точках отправления, прибытия и возвращения, а также число полных оборотов, которое космический корабль совершит вокруг Солнца за время движения по каждой части траектории. Если в точке отправления или назначения радиальная составляющая скорости положительна, то для обозначения типа траектории используется термин *радиально-положительная;* в противном случае, когда радиальная составляющая скорости отрицательна, траектория называется *радиально-отрицательной.* Расшифровка численных обозначений дана в табл. 5.4. Например, траектория типа 53 является радиально-отрицательной как по отправлению, так и по прибытию, а движению космического корабля

* Прямыми траекториями называются траектории с углом перелета меньше 360°, а непрямым траекториям соответствуют углы перелета больше 360° *(прим. ред.).*

Таблица 5.4

Типы исследовательских траекторий с возвращением

Условная цифра	Отправление	Прибытие	Число полных оборотов
0	радиально-положительная	радиально-положительная	0
1	„ -отрицательная	„ -положительная	0
2	„ -положительная	„ -отрицательная	0
3	„ -отрицательная	„ -отрицательная	0
4	„ -положительная	„ -положительная	1
5	„ -отрицательная	„ -положительная	1
6	„ -положительная	„ -отрицательная	1
7	„ -отрицательная	„ -отрицательная	1

на первом этапе полета соответствует гелиоцентрический угол перелета менее 360°. Тогда на траектории возвращения, радиально-отрицательной при отправлении, космический корабль сделает более одного полного оборота вокруг Солнца и при возвращении к Земле траектория станет радиально-положительной. На рисунках показаны зависимости величины пролета от даты отправления при различных значениях скорости отправления. На рис. 5.26—5.27 эти зависимости приведены для полетов к Венере, на рис. 5.28—5.29 — для полетов к Марсу. Жирные линии на графиках разделяют типы траекторий, и их можно считать геометрическим местом точек, соответствующих траекториям с нулевой радиальной скоростью при отправлении.

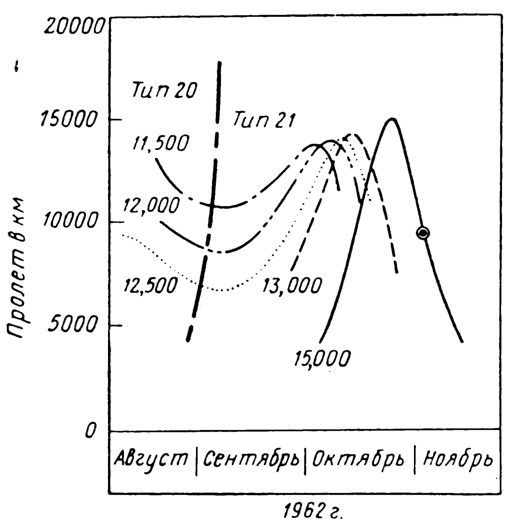


Рис. 5.27. Величина пролета мимо Венеры в зависимости от даты отправления

Сначала рассмотрим траектории полета к Венере. При запуске в начале июня возможны траектории с возвращением типа 32 со скоростью отправления 4570 *м/сек*. Как видно из рис. 5.26, максимум кривой приходится на середину июня. В то же самое время угол θ проходит через значение 180°, которое, как уже говорилось, является критическим. Указанные траектории возможны и при отправлении на всем протяжении июля и августа, причем, как видно, в случае скорости отправления 3500 *м/сек* кривая имеет минимум около середины августа. Примерно около того же времени индекс типа траектории изменяется с 32 на 33, и в точке отправления траектория космического корабля становится касательной к орбите Земли. Эта специфическая особенность — стремление к нулю радиальной составляющей скорости отправления вблизи минимума кривой пролета — является, по-видимому, характерным свойством всех кривых такого рода как для Венеры, так и для Марса.

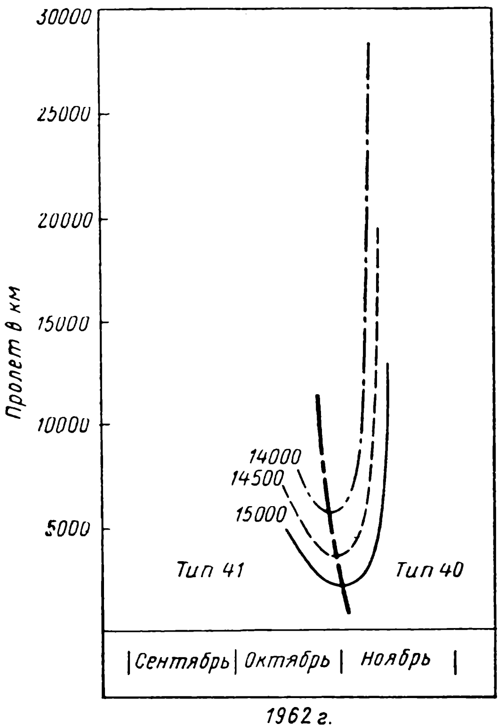


Рис. 5.28. Величина пролета мимо Марса в зависимости от даты отправления

Следует отметить и другое интересное явление: эти кривые часто пересекают одна другую, указывая тем самым на возможность пролета на одинаковом расстоянии от планеты назначения двух космических кораблей, запущенных в один и тот же день, но с различными скоростями отправления.

Еще одно любопытное свойство траекторий полета к Венере заключается в том, что все они требуют по существу одинакового полного времени перелета (1, 2 года), причем возвращение занимает примерно в два раза больше времени, чем полет к планете назначения. То же самое явление наблюдается для траекторий полета к Марсу, где полное время перелета составляет приблизительно 3,1—3,2 года.

Переходя теперь к случаю облета Марса, видим из рис. 5.28, что существование траекторий типа 41 и 40 возможно при отправлении в октябре и в начале ноября. На основании рис. 5.29 можно сделать вывод о возможности существования траекторий типа 53 при тех же датах отправления. Траектории последнего типа остаются возможными на всем протяжении ноября и большей части декабря до тех пор, когда для больших скоростей величина пролета становится отрицательной. На протяжении этого периода величина θ проходит через значение 180°.

При дальнейшем сдвиге даты отправления каждая из кривых постоянной скорости на рис. 5.29 достигает своего минимума и ин-

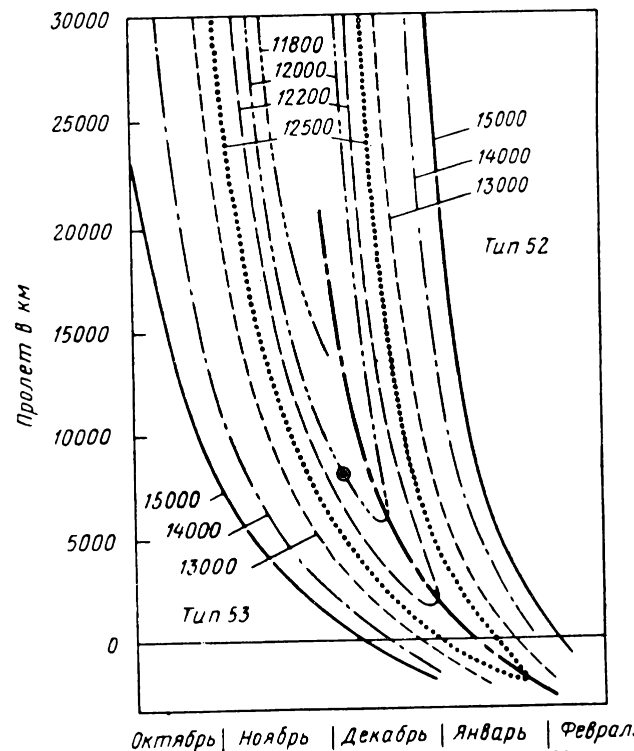


Рис. 5.29. Величина пролета мимо Марса в зависимости от даты отправления

декс типа траектории меняется с 53 на 52. Наиболее интересное явление, наблюдаемое при этом, — двузначность кривых. Поэтому при одной и той же дате отправления и одинаковой скорости отправления могут существовать как радиально-положительная, так и радиально-отрицательная траектории облета планеты с различными значениями пролета.

Типичная исследовательская траектория полета к Венере с возвращением показана на рис. 5.30. Маленький кружок на рис. 5.27 указывает точку графика, соответствующую этой траектории, чтобы выделить ее из других возможных траекторий. В рассматриваемом примере скорость космического корабля относительно Земли после отправления равна 4570 *м/сек*. По истечении 0,3940 года космический корабль пролетает на расстоянии 9550 *км* от поверхности планеты с относительной скоростью сближения 7650 *м/сек* и затем через 0,8635 года возвращается и входит в атмосферу со скоростью 15 475 *м/сек*. На рис. 5.31 показано движение космического корабля относительно Венеры в период контакта, а также направление движения планеты по орбите и гиперболическая траектория космического корабля.

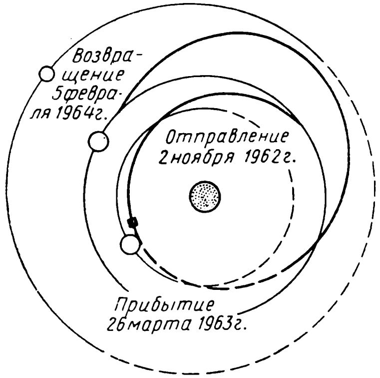


Рис. 5.30. Траектория для исследования Венеры; тип 21 (20 февраля 1963 г.)

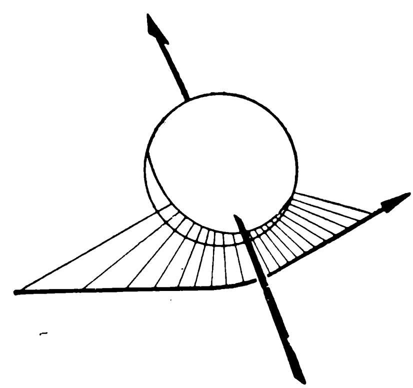


Рис. 5.31. Ориентация траектории космического корабля относительно орбиты Венеры во время контакта (26 марта 1963 г.); тип 21

Выбранная в качестве иллюстрации трехгодичная исследовательская траектория полета к Марсу с возвращением отмечена на рис. 5.29 маленьким кружком. Орбита Земля—Марс представлена на рис. 5.32, а траектория возвращения — на рис. 5.34. Скорость отправления равна 3660 *м/сек*, и полет к Марсу продолжается 1,1970 года. После того как космический корабль пролетит на расстоянии 7894 *км* от поверхности планеты с относительной скоростью сближения 6578 *м/сек*, он сделает один полный оборот вокруг Солнца и возвратится к Земле через 1,9131 года после контакта, войдя в атмосферу со скоростью 12 177 *м/сек*. Относительное движение космического корабля в период контакта с планетой показано на рис. 5.33. В этом примере гравитационное поле Марса учетверяет составляющую гелиоцентрической скорости космического корабля, лежащую вне плоскости относительного движения, вызывая тем самым поворот плоскости траектории возвращения примерно на 30° относительно линии узлов первоначальной орбиты.

В целях сравнения на рис. 5.35—5.37 дан пример траектории непрямого полета к Марсу и прямого возвращения. Траектория, принадлежащая к типу 17, имеет скорость отправления 4570 *м/сек* и время полета до контакта с планетой 2,4223 года. После того как космический корабль пролетит от поверхности Марса на расстоянии 7456 *км* с довольно низкой скоростью сближения 3474 *м/сек,* он вернется к Земле через 0,8006 года. Интересно сравнить геометрию относительного движения в период контакта с Марсом на рис. 5.36 с предыдущим примером, показанным на рис. 5.33.

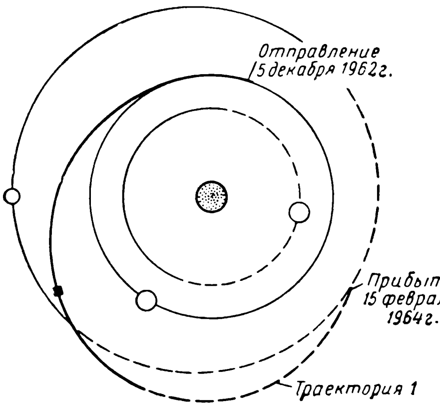


Рис. 5.32. Исследовательская траектория полета к Марсу продолжительностью 3 года, тип 53 — траектория отправления (состояние на 19 мая 1963 г.)

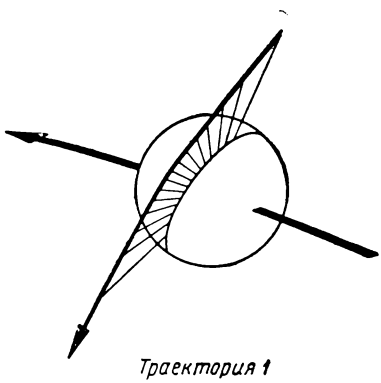


Рис. 5.33. Ориентация траектории космического корабля относительно орбиты Марса во время контакта (15 февраля 1964 г.); тип 53

Возвращаясь на время к исследовательской траектории полета к Венере (см. рис. 5.30), любопытно отметить, что увеличения скорости, вызываемого притяжением Венеры, достаточно для перевода космического корабля на траекторию возвращения, проходящую примерно в 1,35 астрономических единиц от Солнца. Поскольку в перигелии Марс находится на расстоянии всего 1,38 астрономических единиц от Солнца, возникает интересная возможность двойного контакта с обеими планетами, причем полное время полета по траектории с возвращением будет немногим превышать 1 год. Это было бы явным прогрессом по сравнению с облетом только Марса, продолжительность которого составила бы 3,2 года. Принципиальный недостаток такого двойного облета заключается в том, что возможные для него даты отправления наступают не часто. Синодические периоды Венеры и Марса составляют 584 дня и 780 дней. Следовательно, можно считать, что благоприятные условия для полета с возвращением к каждой планете в отдельности повторяются в соответствии с синодической частотой. С другой стороны, требуется ждать примерно 2340 дней, прежде чем какое-либо расположение трех планет — Земли, Венеры и Марса — приблизительно повторится. Даже в таком случае маловероятно, что в ближайшем будущем возникнет нужное расположение планет, которое позволило бы осуществить двойную космическую операцию.

Тем не менее 9 июня 1972 г. возникнет эта идеальная ситуация. В этот день космический корабль, который предварительно будет запущен с мыса Кеннеди с азимутом 110° на промежуточную орби-

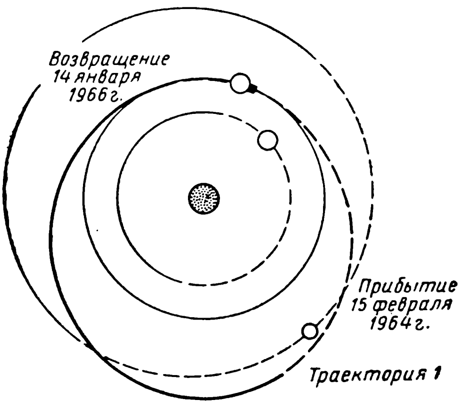


Рис. 5.34. Исследовательская траектория полета к Марсу продолжительностью 3 года. Тип 53 — траектория возвращения (состояние на 5 декабря 1965 г.)

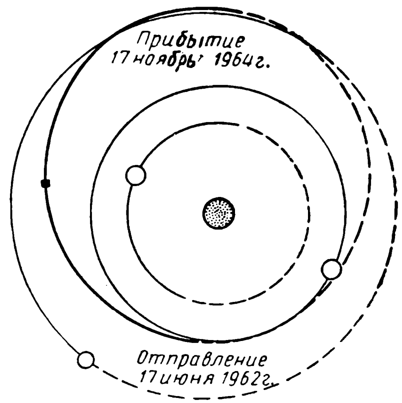


Рис. 5.35. Исследовательская траектория полета к Марсу продолжительностью 3 года. Тип 17 — траектория отправления (состояние на 29 августа 1963 г.)

ту, может быть переведен с нее в точке с географическими координатами 5° западной долготы и 18° южной широты на траекторию двойного облета со скоростью схода 11 832 *м/сек*. После выхода из сферы действия Земли корабль будет иметь относительно Земли скорость 4570 *м/сек*. Первая встреча произойдет с Венерой после 0,4308 года полета. Космический корабль пролетит на расстоянии 7126 *км* от поверхности Венеры и получит благодаря гравитационному полю приращение скорости для продолжения полета в направлении к Марсу. Вторая часть пути займет 0,3949 года, после чего космический корабль войдет в контакт с Марсом, пролетев на минимальном расстоянии 2475 *км* от его поверхности. Полет от Марса к Земле займет дополнительно 0,4348 года, и 13 сентября 1973 г. космический корабль возвратится к Земле. Эта поистине замечательная траектория показана на рис. 5.38.

Исходя из предыдущих рассуждений можно было бы ожидать, что подобные условия создадутся примерно на 6,5 лет раньше. Действительно, на траекторию, приведенную на рис. 5.39, космический корабль может быть выведен уже 6 февраля 1966 г., и эта траектория будет подобна рассмотренной ранее во всех отношениях, кроме одного. Имея скорость отправления свыше 5000 *м/сек*, космический корабль войдет через 0,4196 года в контакт с Венерой, а затем через 0,5454 года полета — с Марсом, пролетев от поверхности этих планет на расстояниях соответственно 2602 и 12 099 *км*. Теперь, однако, встреча с Марсом произойдет достаточно далеко

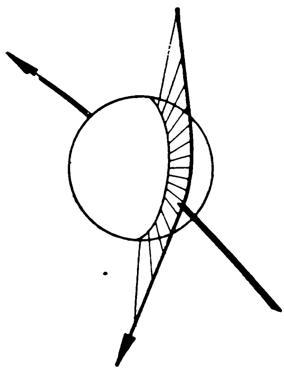


Рис. 5.36. Ориентация траектории космического корабля относительно орбиты Марса во время контакта (17 ноября 1964 г.); тип 17

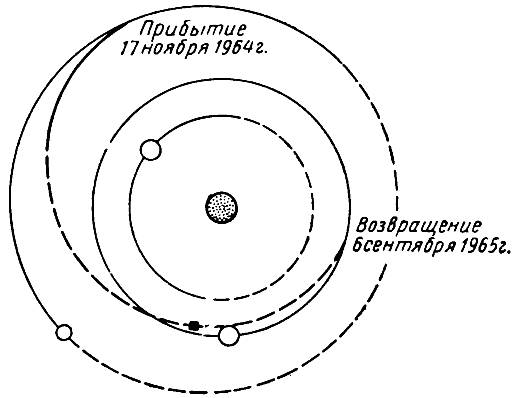


Рис. 5.37. Исследовательская траектория полета к Марсу продолжительностью 3 года. Тип 17 — траектория возвращения (состояние на 25 июня 1965 г.)

от его перигелия. Поэтому, чтобы догнать Землю, космический корабль должен еще раз пересечь земную орбиту, в результате чего возвращение с Марса потребует 0,8950 года.

Грустно признаваться в том, что эти двойные исследовательские траектории стоят немногим более, чем обычные астрономические парадоксы. К сожалению, диапазон дат запуска, по-видимому, слишком ограничен, чтобы им можно было воспользоваться при современном уровне техники. Непредвиденные задержки при подготовке старта даже на несколько дней неизбежно повлекут за собой шестилетнюю отсрочку в выполнении операции.

5.5. Траектории облета Луны

Движение летательного аппарата в окололунном пространстве определяется главным образом гравитационными полями Земли и Луны. Влияние притяжения Солнца и возмущения, возникающие вследствие несферичности притягивающих тел, важно учитывать в окончательном анализе, а для приближенного расчета конических траекторий этими факторами можно пренебречь.

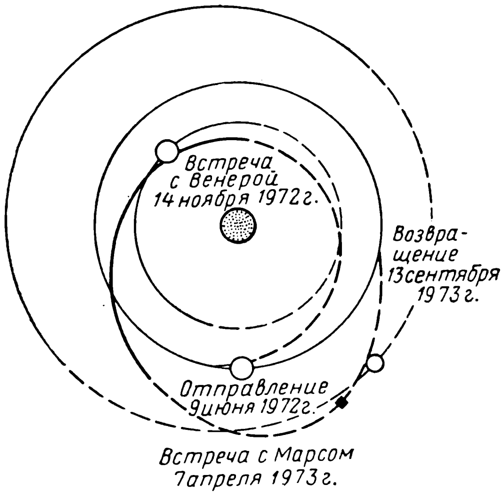


Рис. 5.38. Двойная исследовательская траектория (18 июня 1973 г.)

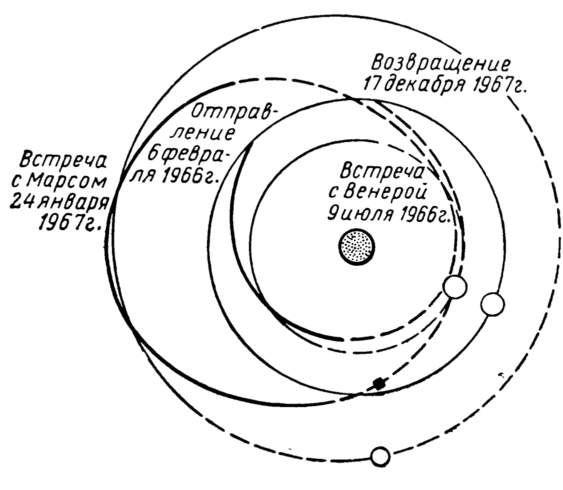


Рис. 5.39. Двойная исследовательская траектория (1 сентября 1967 г.)

Расчет траектории облета Луны более сложен, чем вычисление межпланетных траекторий, ввиду того, что время полета в пределах сферы влияния Луны составляет значительную долю от полного времени полета. Поэтому не может быть и речи о том, чтобы учитывать влияние Луны импульсным изменением направления скорости космического корабля, как это делалось в предыдущем разделе.

Адэкватная приближенная траектория может быть найдена сопряжением как положения, так и скорости в точках стыка частей следующих кривых: 1) эллипса от Земли до границы сферы влияния Луны, фокус которого находится в центре Земли, 2) гиперболы вокруг Луны и 3) эллипса от границы сферы влияния Луны до Земли. Если в качестве независимых переменных выбрать подходящие параметры движения, то такая упрощенная задача, хотя и она сама по себе достаточно сложна, тем не менее поддается решению. Ясно, что при расчете межпланетных траекторий могла быть использована аналогичная процедура, если бы требовалось получить более точное приближение, чем найденное в результате описанного ранее упрощенного способа. Здесь удобно в качестве независимых переменных выбрать следующие параметры:

1) r_m — высота перилуния или минимальное расстояние пролета. Этот параметр непосредственно связан с полным временем перелета;

2) t_A — момент достижения границы сферы влияния Луны* на траектории отправления. Эта величина задается в юлианских днях. Было решено фиксировать этот момент, а не момент схода, так как время полета от точки схода до границы сферы влияния является параметром, который будет изменяться в ходе итерационного процесса. Таким образом, поскольку положение Луны не изменяется с изменением времени полета, нет нужды в процессе итераций непрерывно перевычислять это положение;

3) i_L — угол наклонения плоскости траектории отправления относительно экваториальной плоскости Земли. Этот параметр нельзя выбирать произвольно, поскольку он до некоторой степени зависит от широты точки схода. Например, если плоскость орбиты ожидания проходит по широте мыса Кеннеди, то угол наклонения не может быть меньше этой широты;

4) i_R — угол наклонения плоскости траектории возвращения относительно экваториальной плоскости Земли. Этот параметр в основном влияет на широту точки входа в атмосферу;

5) r_L — величина радиуса-вектора перигея траектории отправления. При вычислении траекторий облета Луны считается, что сход с орбиты ожидания происходит в перигее эллипса отправления;

6) r_R — величина радиуса-вектора условного перигея траектории возвращения. Этот параметр соответствует перигею, который имел

* В расчетах учитывается действительное положение Луны, так как нет необходимости использовать упрощенную модель лунной орбиты *(прим. автора)*.

бы эллипс возвращения при отсутствии у Земли атмосферы. Он влияет на угол входа в атмосферу и, следовательно, не может выбираться произвольно.

Если шесть этих величин заданы, то они полностью определяют траекторию. Кроме того, необходимо задать еще четыре параметра, которые должны определить ориентацию плоскостей орбит отправления и возвращения. Эта задача будет подробно рассмотрена ниже.

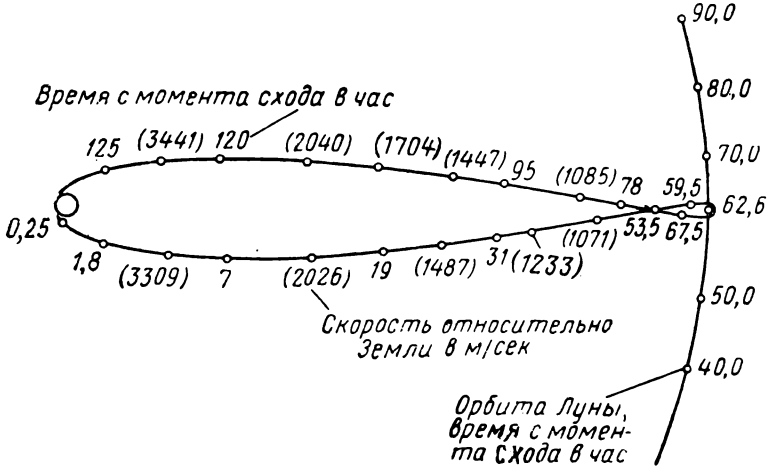


Рис. 5. 40. Траектория облета Луны

На рис. 5.40 показана точная траектория облета Луны, для которой независимые переменные конической аппроксимации имеют следующие значения: *

$r_m = 1899{,}8$ *км*, $\quad i_R = 35°$,

$t_A = 555{,}125$ юлианских дней, $r_L = 6564$ *км*,

$i_L = 28{,}3°$, $\quad r_R = 6453$ *км*.

Траектория вычерчена в масштабе и спроектирована на плоскость лунной орбиты в невращающейся системе координат, начало которой совпадает с центром Земли. Время, измеряемое в часах от момента схода, и скорость относительно Земли в метрах в секунду указаны для некоторых точек траектории. На рис. 5.41 показаны часть траектории вблизи Земли и часть гиперболической орбиты относительно Луны. В последнем случае скорости указываются относительно Луны.

---

* Величина t_A дана в средних солнечных сутках, если считать от полуночи, предшествующей 31 декабря 1966 г. (эфемеридное время) (*прим. автора*).

Общий подход*, принятый здесь при разработке метода расчета, состоит в получении сначала двух эллиптических орбит с фокусами в центре Земли — орбиты отправления и орбиты возвращения, которые удовлетворяют заданным конечным условиям и которым, кроме того, на границе сферы влияния Луны соответствуют векторы относительной скорости, ориентированные определенным образом относительно центра Луны. Регулируя время полета по каждой траектории, можно добиться того, чтобы модули обоих векторов ско-

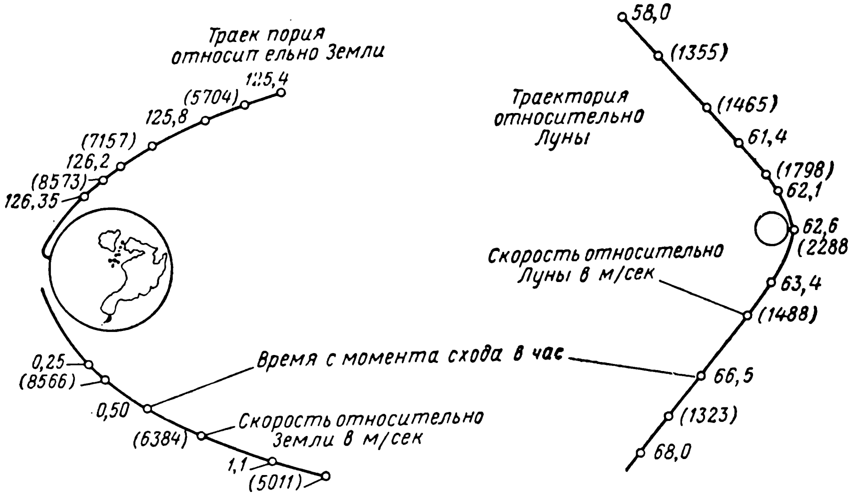


Рис. 5.41. Части траектории вблизи Луны и вблизи Земли в увеличенном масштабе

рости стали бы равны требуемой величине. Если предположить, что движение космического корабля в пределах сферы влияния можно рассматривать в рамках задачи двух тел, то действие притяжения Луны выразится просто в повороте вектора относительной скорости сближения в плоскости относительного движения. Два вектора относительной скорости определяют плоскость этого движения. Таким образом, существует возможность найти реальную гиперболическую траекторию облета Луны путем перемещения этих векторов в общей плоскости с целью получить такое их расположение относительно Луны, чтобы космический корабль пролетел мимо нее на расстоянии, которое совместимо как с величинами векторов относительных скоростей, так и с углом между ними.

Рассмотрим теперь в общих чертах вычислительную схему. Некоторые наиболее важные математические детали будут описаны в следующем разделе.

1. При заданных t_A, i_L и r_L выбирается точка на сфере влияния Луны и время полета t_{FL} от точки схода до этой точки. Пусть $\bar{r}_T$ —

* Метод выбора траекторий облета Луны, основанный на результатах расчетов нескольких семейств траекторий, описан в работе [74] (*прим. ред.*).

вектор, направленный от центра Земли в выбранную точку на сфере влияния. На основании этих величин может быть вычислена эллиптическая траектория отправления и определены векторы положения и скорости космического корабля $\bar{r}_{TM}$ и $\bar{v}_{TM}$ относительно Луны на границе сферы влияния.

2. Векторы $\bar{r}_{TM}$ и $\bar{v}_{TM}$ полностью определяют гиперболическую траекторию с фокусом в центре Луны. Тем самым получаем модуль радиуса-вектора перилуния r_m и величину перпендикуляра r_a, опущенного из центра Луны на асимптоту гиперболы. При прохождении границы сферы влияния относительное движение космического корабля происходит в основном по этой асимптоте, поэтому r_a является расстоянием, на котором космический корабль пролетел бы от центра Луны, если бы не было притяжения Луны. Подробная схема показана на рис. 5.42.

3. Изменяя затем вектор $\bar{r}_T$ путем перемещения* его конца по границе сферы влияния и повторяя шаги 1 и 2, получим траекторию, для которой r_a равен нулю, а вектор относительной скорости $\bar{v}_{TM}$ направлен в центр Луны. Итерационный процесс основан на том, что сначала систематически перемещается вектор $\bar{r}_T$ по границе сферы влияния до тех пор, пока вычисленное значение r_m не станет меньше некоторой наперед заданной величины. (Величина 32 000 *км* является вполне удовлетворительной для начала второй итерации.) Затем, поскольку перемещение конца вектора положения $\bar{r}_T$ по границе сферы влияния на малую величину незначительно изменяет величину или направление вектора $\bar{v}_{TM}$, уточненный вектор $\bar{r}_T$ можно определить из выражения

$$\bar{r}_T = \bar{r}_{EM} - r_s \frac{\bar{v}_{TM}}{v_{TM}},$$

где $\bar{r}_{EM}$ — вектор положения Луны относительно Земли, а r_s — радиус сферы влияния. Обычно достаточно четырех или пяти итераций, чтобы величина r_a уменьшилась до значения менее 1,5 *км*.

4. Используя вычисленное значение величины v_{TM} и первоначально заданное расстояние пролета r_m, можно рассчитать интервал времени t_s, в течение которого космический корабль находился бы в пределах сферы влияния Луны, если бы направление и величина вектора $\bar{v}_{TM}$ соответствовали этому r_m. Тогда $t_A + t_s$ есть момент времени, когда космический корабль покидает сферу влияния и переходит на траекторию возвращения.

---

* При заданных t_A, t_{FL} географическая долгота точки схода задана, и при фиксированном t_L плоскость орбиты полета к Луне определена [см. уравнение (5.6)]. В течение итерационного процесса конец вектора $\bar{r}_T$ перемещается по линии пересечения этой плоскости с поверхностью сферы влияния. Автор добивается направленности вектора $\bar{v}_{TML}$ на центр Луны, чтобы, обеспечив то же самое на шаге 5 для вектора скорости $\bar{v}_{TMR}$ орбиты возвращения, получить возможность провести через оба вектора плоскость относительного движения (так как в этом случае гарантируется, что оба вектора скорости будут лежать в общей плоскости, проходящей через центр Луны) *(прим. ред.)*.

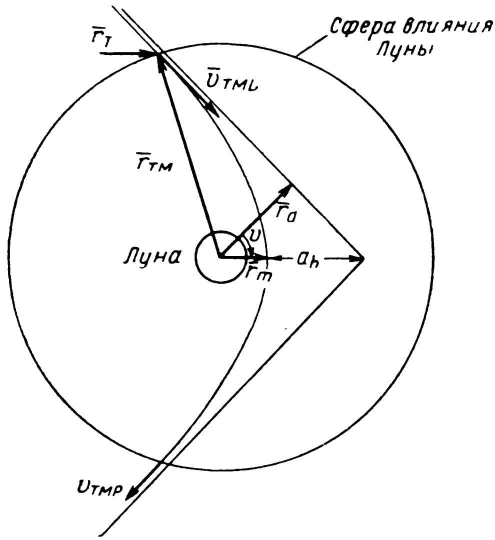


Рис. 5. 42. Гиперболическая траектория облета Луны

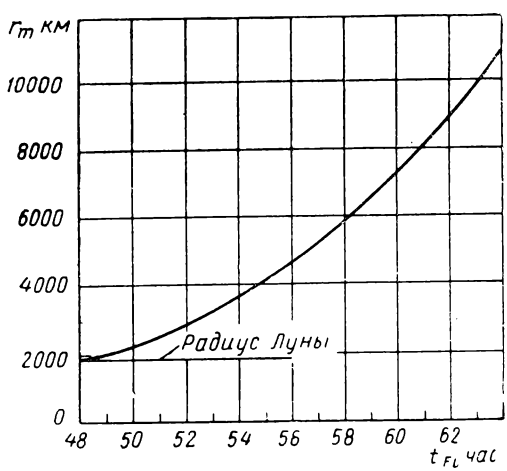


Рис. 5. 43. Минимальная величина пролета относительно центра Луны в зависимости от времени перелета от точки схода до границы сферы влияния Луны

Интервал времени t_s наиболее просто вычислить следующим образом. Большая полуось гиперболы a_h зависит только от v_{TM}. Действительно, из уравнения (2.9) имеем

$$a_h=\left(\frac{v_{TM}^2}{\mu_M}-\frac{2}{r_s}\right)^{-1}, \tag{5.9}$$

где μ_M — гравитационная постоянная Луны. Потребный угол поворота 2ν вектора $\bar{v}_{TM}$ тогда может быть вычислен, как показано в разд. 5.3, по формуле

$$\sin\nu=\frac{1}{1+\frac{r_m}{a_h}}. \tag{5.10}$$

Далее, поскольку эксцентриситет гиперболы равен просто $\operatorname{cosec}\nu$, из уравнений (2.33) и (2.30) следует

$$t_s=2\sqrt{\frac{a_h^3}{\mu_M}}(\operatorname{cosec}\nu\,\operatorname{sh}H-H). \tag{5.11}$$

Здесь аргумент H находится по формуле

$$\operatorname{ch}H=\left(1+\frac{r_s}{a_h}\right)\sin\nu. \tag{5.12}$$

5. Шаги 1, 2 и 3 повторяются с заданными значениями t_A+t_s, i_R и r_R и выбранной величиной времени полета t_{FR} от сферы влияния до перигея траектории возвращения.

6. Величина t_{FR} систематически уточняется и шаг 5 повторяется до тех пор, пока модули двух векторов $\bar{v}_{TML}$ и $\bar{v}_{TMR}$ не станут равны между собой. Угол 2ν между этими векторами находится из соотношения

$$\sin 2\nu=\frac{|\bar{v}_{TML}\times\bar{v}_{TMR}|}{v_{TM}^2}, \tag{5.13}$$

а расстояние пролета* r_m — по формуле

$$r_m=a_h(\operatorname{cosec}\nu-1). \tag{5.14}$$

Читателю следует сравнить это выражение с уравнением (5.8). Хотя в данном случае предполагалось, что движение происходит в основном по асимптоте гиперболы подхода, результаты давали бы большую ошибку, если при вычислении r_m использовалась бы скорость в бесконечности.

7. Величина t_{FL} систематически уточняется, и шаги 1—6 повторяются до тех пор, пока вычисленное значение r_m не совпадет с первоначально заданным значением. Типичный пример изменения величины пролета от времени полета по траектории отправления показан на рис. 5.43.

---

* Имеется в виду фиктивный пролет. Фактический пролет в результате шагов 3, 5 сводится к нулю *(прим. ред.)*.

8. Векторы $\bar{r}_{TML}$ и $\bar{r}_{TMR}$ изменяются в плоскости, определяемой векторами $\bar{v}_{TML}$ и $\bar{v}_{TMR}$, регулируя каждый из векторов относительной скорости через величину r_a, равную

$$r_a = a_h \operatorname{ctg} \nu. \tag{5.15}$$

Этот шаг* также связан с итерационным процессом. Хотя векторы $\bar{v}_{TML}$ и $\bar{v}_{TMR}$ при перемещении векторов $\bar{r}_{TML}$ и $\bar{r}_{TMR}$ изменяются по направлению незначительно, влияние этих изменений на r_a превышает допустимые пределы. Правда, при этом изменение величины относительной скорости составляет менее 0,3 *м/сек*.

9. Для каждого из вновь найденных векторов скорости снова рассчитывается величина r_m как последняя проверка правильности расчета на шаге 8. В любом случае, как показывает опыт, ошибка в r_m составляет менее 1,5 *км*.

5.6. Схема расчета конических орбит

Математические подробности, знание которых необходимо для автоматизации процесса вычислений, описанного в общих чертах в разд. 5.5, большей частью просты. В настоящем разделе рассматриваются те пункты вычислительного процесса, которые, на первый взгляд, возможно, и не очевидны.

Основная задача, упомянутая в п. 1 предыдущего раздела, состоит в определении векторов положения $\bar{r}_L$ и скорости $\bar{v}_L$ при сходе в точке перигея траектории отправления, которые обеспечат полет по дуге эллиптической орбиты с перигеем r_L, причем для достижения заданного положения $\bar{r}_T$ требуется время t_{FL}. Плоскость этой орбиты образует с экваториальной плоскостью Земли угол i_L.

Вообще говоря, как показано на рис. 5.44, существуют две плоскости, удовлетворяющие заданным условиям, за исключением двух случаев: 1) при наклонении 90° существует только одна такая плоскость; 2) решение невозможно, если желаемый угол наклонения меньше широты положения цели относительно плоскости земного экватора. Пусть L и λ — широта и долгота конца вектора $\bar{r}_T$. Когда существуют две возможные плоскости орбит, долготы их восходящих узлов Ω_1 и Ω_2 определяются по соотношениям

$$\Omega_1 = \lambda - \sigma, \quad \Omega_2 = \lambda + \sigma + \pi,$$

где

$$\sin \sigma = \frac{\operatorname{tg} L}{\operatorname{tg} i_L}.$$

Любая из двух плоскостей может быть использована для траектории отправления. Поскольку те же самые условия справедливы и для траектории возвращения, потенциально возможны четыре раз-

* При реализации шага 8 i_L и i_R, по-видимому, уже не останутся заданными (*прим. ред.*).

личных орбиты облета Луны, удовлетворяющих условиям задачи.

Кроме ограничений геометрического характера, налагаемых на угол наклонения плоскости траектории, необходимо исследовать еще одно ограничение. Так как задается только радиус перигея r_L, то центральный угол θ, соответствующий полету космического корабля от $\bar{r}_L$ до $\bar{r}_T$, должен быть выбран с учетом данного времени полета. Время t_{FL} и соответствующий угол θ не могут выбираться

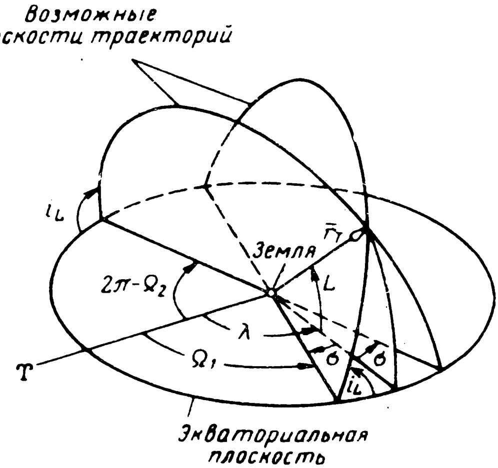


Рис. 5.44. Плоскости траекторий

произвольно, если орбиты отправления и возвращения должны быть эллиптическими.

Траектория перелета от $\bar{r}_L$ до $\bar{r}_T$ была названа в разд. 3.1 касательным эллипсом, большая полуось которого a определяется по уравнению (3.5). В применяемых здесь обозначениях имеем

$$a=\frac{r_L(r_L-r_T\cos\theta)}{2r_L-r_T(1+\cos\theta)}. \tag{5.16}$$

Следовательно, для эллиптической орбиты ($0<a<\infty$) должно выполняться условие

$$1+\cos\theta<\frac{2r_L}{r_T}.$$

Когда знаменатель уравнения (5.16) равен нулю, т. е. при $\theta=\theta_p$, где

$$\cos\theta_p=\frac{2r_L}{r_T}-1,$$

необходимая коническая орбита представляет собой параболу, а соответствующее время полета $t_{FL(p)}$ вычисляется по формуле, полученной в задаче 2.10:

$$t_{FL(p)}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2(r_T-r_L)}{\mu_E}}(r_T+2r_L).$$

Для эллиптической траектории заданное значение t_{FL} должно превышать $t_{FL(p)}$.

Таким образом, резюмируем: задача определения траектории отправления решается только в том случае, если выполняются неравенства

$$i_L>L,\ t_{FL}>t_{FL(p)}.$$

Аналогичный вывод справедлив и для траектории возвращения.

Если ориентация плоскости траектории известна, остается решить задачу вычисления центрального угла θ, после чего из уравнения (5.16) и соотношения

$$e=1-\frac{r_L}{a} \tag{5.17}$$

находятся орбитальные элементы a и e. Один из способов расчета состоит в использовании теоремы Ламберта для времени полета по дуге эллиптической орбиты в форме (3.20) и (3.21). Перепишем эти уравнения в виде

$$t_{FL}=\sqrt{\frac{a^3}{\mu_E}}\{\pi+\operatorname{sgn}(\sin\theta)[(\alpha-\sin\alpha-\pi)-(\beta-\sin\beta)]\}, \tag{5.18}$$

где

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{s}{2a}},\ \sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{s-c}{2a}},$$

$$s=1/2(r_L+r_T+c),$$

а c — расстояние по прямой от перигея до $\bar{r}_T$:

$$c^2=r_L^2+r_T^2-2r_Lr_T\cos\theta.$$

Из уравнения (5.16) a определяется как функция θ, поэтому уравнение (5.16) выражает время полета t_{FL} через единственную переменную θ. Для типичного случая на рис. 5.45 показана зависимость t_{FL} от угла θ.

Ввиду трансцендентности уравнения (5.18) невозможно выразить θ через t, используя конечное число элементарных функций. Однако простой метод Ньютона обеспечивает достаточно быструю сходимость итерационного процесса в данном случае. Для этой цели потребуется производная $\dfrac{dt_{FL}}{d\theta}$:

$$\frac{dt_{FL}}{d\theta}=\frac{3}{2}\frac{t_{FL}}{a}\frac{da}{d\theta}+\sqrt{\frac{a}{\mu_E}}\operatorname{sgn}(\sin\theta)\left[\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(\frac{ds}{d\theta}-\frac{s}{a}\cdot\frac{da}{d\theta}\right)+\right.$$

где

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{r_L r_T}{2c} \sin\theta;$$

$$\frac{1}{a}\frac{da}{d\theta} = -\frac{2r_T(a - r_L)\sin\theta}{r_L^2 + c^2 - r_T^2}.$$

К сожалению, правая часть выражения для производной неопределенна при $\theta = \pi$. Однако можно показать, что

$$\lim_{\theta\to\pi} \frac{\sin\theta}{\sin\alpha} = \sqrt{\frac{r_L}{r_T}\left(1 + \frac{r_L}{r_T}\right)},$$

откуда

$$\left.\frac{dt_{FL}}{d\theta}\right|_{\theta=\pi} = \sqrt{\frac{r_T^3(r_L + r_T)}{2\mu_E r_L}}.$$

Для шага 2 описанной ранее вычислительной схемы требуется знать векторы положения и скорости относительно Луны $\bar{r}_{TM}$ и $\bar{v}_{TM}$ на границе сферы влияния. Эти векторы могут быть вычислены следующим образом.

Уравнения (1.38) при $i = i_L$ и $\Omega = \Omega_1$ или $\Omega = \Omega_2$ определяют направляющие косинусы нормали $\bar{i}_\zeta$ к плоскости эллиптической траектории:

$$\bar{i}_\zeta = \begin{pmatrix} \sin\Omega\sin i_L \\ -\cos\Omega\sin i_L \\ \cos i_L \end{pmatrix}.$$

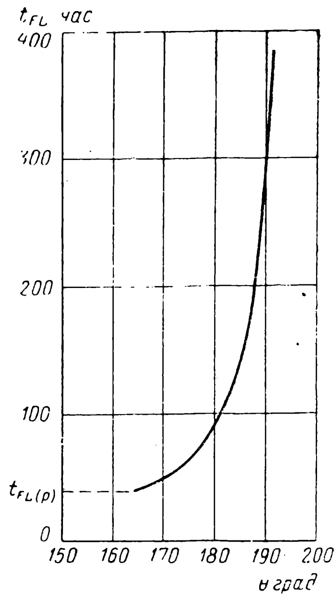


Рис. 5.45. Зависимость времени полета от истинной аномалии

Тогда вектор скорости относительно Земли в точке с положением $\bar{r}_T$ определяется по выражению

$$\bar{v}_T = \frac{1}{r_T}\left(\sqrt{\frac{\mu_E}{p}}\, e\sin\theta\cdot\bar{r}_T + \frac{\sqrt{\mu_E p}}{r_T}\,\bar{i}_\zeta\times\bar{r}_T\right),$$

где p — параметр данной орбиты. Заметим, что вектор положения точки схода легко находится из соотношения

$$\bar{r}_L = \frac{r_L}{r_T}\left(\cos\theta\cdot\bar{r}_T - \sin\theta\,\bar{i}_\zeta\times\bar{r}_T\right).$$

Наконец, если $\bar{r}_{EM}$ и $\bar{v}_{EM}$ — векторы положения и скорости Луны относительно Земли в момент времени t_A, то справедливы равенства

$$\bar{r}_{TM}=\bar{r}_T-\bar{r}_{EM}, \quad \bar{v}_{TM}=\bar{v}_T-\bar{v}_{EM}.$$

Чтобы определить с приемлемой точностью расстояние пролета от Луны, достаточно предположить, что вектор скорости $\bar{v}_{TM}$ направлен вдоль асимптоты гиперболы подхода. Тогда единичный вектор $\bar{i}_a$, лежащий в плоскости гиперболы и нормальный к ее асимптоте, вычисляется по формуле

$$\bar{i}_a=\frac{\bar{v}_{TM}\times(\bar{r}_{TM}\times\bar{v}_{TM})}{|\bar{v}_{TM}\times(\bar{r}_{TM}\times\bar{v}_{TM})|},$$

а отклонение или дальность прицеливания r_a равна

$$r_a=\bar{r}_{TM}\cdot\bar{i}_a.$$

Минимальное расстояние пролета r_m вычисляется с помощью уравнения (5.14), когда угол ν определен по уравнению (5.15). Отсюда вектор положения перилуния $\bar{r}_m$ нетрудно найти по формуле

$$\bar{r}_m=r_m\left(\cos\nu\,\bar{i}_a+\frac{\sin\nu}{v_{TM}}\,\bar{v}_{TM}\right).$$

Задачи

5.1. Космический корабль обращается вокруг Солнца по круговой орбите радиусом в одну астрономическую единицу. С помощью импульса скорости космический корабль переводится на орбиту перелета с периодом 1,5 года, которая пересекает орбиту Марса после прохождения гелиоцентрического угла 140°. Предполагая, что космический корабль пролетает на минимальном расстоянии 4800 *км* от поверхности Марса впереди планеты, определить период обращения новой орбиты. Принимается упрощенная модель солнечной системы.

5.2. Определить минимальную скорость отправления для перевода космического корабля с геоцентрической орбиты на межпланетную орбиту перелета к Марсу с периодом в 1 год. Показать, что такая орбита перелета является эллипсом, касательным к орбите Марса и что сход с геоцентрической орбиты должен происходить в точке, соответствующей концу малой оси гелиоцентрической орбиты.

5.3. С целью анализа ошибок желательно определить ожидаемые отклонения величины приращения скорости за счет контакта с планетой назначения в зависимости от отклонений вектора точки прицеливания. Для простоты предположим, что величина скорости сближения v_∞ не изменяется при изменении r_a.

Показать, что

$$\frac{d\,|\bar{v}_{\infty 0}-\bar{v}_{\infty i}\,|}{dr_a}=-\frac{v_\infty}{r_m}(1-\sin\nu)\sin 2\nu.$$

5.4. Величину $r_s\left(\frac{d\beta}{dr_a}\right)$ можно представить как линейный коэффициент промаха для корабля, входящего в атмосферу планеты. Действительно, на этот коэффициент следует умножить ошибку в расстоянии до точки прицеливания r_a, чтобы получить соответствующую ошибку в момент попадания на поверхность планеты. Показать, что

$$\frac{d\beta}{dr_a}=\frac{1}{r_a}\left(2-\frac{r_s}{r_a}\sin\beta\right)\operatorname{tg}\psi.$$

Снова предполагается, что изменение r_a не влияет на v_∞.

5.5. Показать, что знак радиальной составляющей вектора скорости $\bar{v}_1$ для орбиты перелета, соединяющей концы радиусов-векторов $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$ при центральном угле θ, совпадает со знаком величины

$$\sin\theta\left[\left(1-\frac{p}{r_2}\right)r_1r_2-\left(1-\frac{p}{r_1}\right)\bar{r}_1\cdot\bar{r}_2\right],$$

где p — параметр орбиты.

5.6. Для исследовательских траекторий полета к Марсу с возвращением, показанных на рис. 5.32—5.34, скорость подхода при возвращении к Земле, выраженная в геоцентрической эллиптической системе координат, записывается в виде

$$\bar{v}_\infty=3238{,}8\bar{i}_x+2953\bar{i}_y+1980\bar{i}_z\ \text{м/сек}.$$

Считая желательным попадание космического корабля в район Мексиканского залива, вычислить величину расстояния до точки прицеливания r_a, угол падения ψ и линейный коэффициент промаха, определенный в задаче 5.4. Среднюю широту для Мексиканского залива можно принять равной 28°.

5.7. В схеме расчета, описанной в разд. 5.6, можно для тех же целей использовать уравнение Кеплера в виде

$$t_{FL}=\sqrt{\frac{a^3}{\mu_E}}\left[E-\left(1-\frac{r_L}{a}\right)\sin E\right],$$

где E — эксцентрическая аномалия положения цели $\bar{r}_T$.

Показать, что

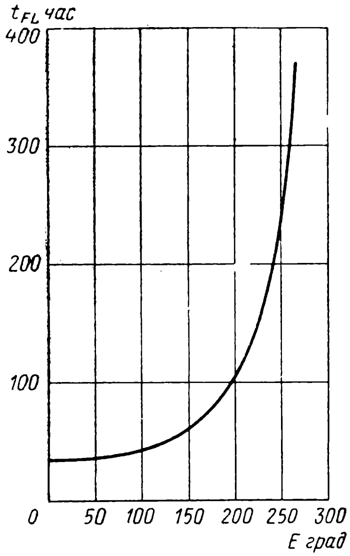
$$a=\frac{r_T-r_L\cos E}{1-\cos E}.$$

Тогда выражение

$$t_{FL}=\sqrt{\frac{r_T-r_L\cos E}{\mu_E(1-\cos E)^3}}\,[(r_T-r_L\cos E)E-(r_T-r_L)\sin E]$$

будет определять t_{FL} как функцию единственной переменной E. Показать, что соответствующая производная, необходимая для итерационного процесса, имеет вид

$$\frac{dt_{FL}}{dE}=t_{FL}\left[\frac{1}{2}\frac{r_L\sin E}{r_T-r_L\cos E}+\right.$$
$$+\frac{r_T(1-\cos E)+r_L E\sin E}{(r_T-r_L\cos E)E-(r_T-r_L)\sin E}-$$
$$\left.-\frac{3}{2}\frac{\sin E}{1-\cos E}\right].$$



Зависимость времени полета от эксцентрической аномалии

На соответствующем рисунке показана зависимость t_{FL} от E.

Сравнение с рис. 5.45 указывает на некоторые потенциальные преимущества использования выражения Ламберта для времени полета по сравнению с уравнением Кеплера. В интересующей нас области относительная нечувствительность t_{FL} к изменениям E может привести к некоторым затруднениям при обеспечении быстрой сходимости итерационного процесса нахождения E.

Библиография

Материал, представленный в настоящей главе, обобщает исследования по космическим траекториям, проводившиеся в Приборной лаборатории МТИ в течение нескольких последних лет. Изложенные здесь данные по межпланетным траекториям основаны на статьях Лэнинга, Фрея, Трегезера [36], Бэттина [5] и Бэттина и Лэнинга [11], а также на некоторых главах из двух многотомных отчетов МТИ [45], [46].

Разд. 5.1, 5.2 и 5.4 почти полностью совпадают с работой Бэттина и Лэнинга [11]. Односторонние межпланетные траектории рассматривались в отчете МТИ [46]; здесь изложены результаты исследований, проводившихся д-ром Лэнингом и автором. Графики отрицательной перегрузки, возникающей во время входа в атмосферу планеты, взяты из работы Р. Шолтена и из того же отчета МТИ.

Исторически работа над межпланетными траекториями с возвращением предшествовала исследованиям односторонних траекторий и была подробно изложена Лэнингом и Бэттином в отчете МТИ [45]. Большая часть материалов разд. 5.3 и 5.4 основана на этом исследовании.

Применять двойные исследовательские траектории, обсуждавшиеся в конце разд. 5.4, впервые предложил Крокко [19]. К сожалению, траектории Крокко требуют избыточной гиперболической скорости, превышающей 11 600 *м/сек*, что объясняется, главным образом, выбором Марса в качестве первой исследуемой планеты. Если изменить порядок облета и использовать сначала гравитационное поле Венеры, то задача может быть выполнена с избыточной скоростью всего лишь 4750 *м/сек*.

Последние два раздела главы, посвященные расчетам траекторий облета Луны, основаны на работе д-ра Дж. Миллера и автора настоящей книги, результаты которой впервые были опубликованы в совместно подготовленной статье [13].

ГЛАВА VI

Методы возмущений

В предшествующих главах было уделено много внимания решению космических траекторных проблем с помощью методов, разработанных для задачи двух тел. Как уже упоминалось в гл. I, только задача двух тел может быть полностью исследована аналитически. Одно лишь это обстоятельство не могло бы еще служить достаточным основанием, чтобы оправдать такую большую роль, отводимую задаче двух тел. Однако, как мы уже неоднократно замечали, аппроксимация истинных орбит коническими сечениями не только достаточно хорошо представляет реальное движение, но также может использоваться как основа для методов точного определения траекторий [69], [71], [75].

Полные уравнения движения были выведены в гл. I; здесь же будут рассмотрены несколько численных методов их решения. Один из основных разделов небесной механики посвящен так называемым *методам возмущений*. Принято различать два класса методов возмущений — *методы общих возмущений* и *методы специальных возмущений*. Первые из них состоят в расчете влияния возмущений путем разложения интересующих нас величин в ряды и их почленного интегрирования. К последнему классу относятся все численные методы определения возмущенных орбит с помощью непосредственного интегрирования либо прямоугольных координат, либо совокупности так называемых *оскулирующих орбитальных элементов*.

В нашу задачу не входит рассмотрение всех или даже большинства известных методов, которые были когда-либо разработаны для конкретных применений. Более того, если не считать единственного элементарного примера в разд. 6.3, мы вовсе исключаем из рассмотрения методы общих возмущений. Вместо этого предметом нашего изучения будут служить методы специальных возмущений, которые найдены наиболее удобными для расчета космических траекторий.

Необходимо отметить, что методы учета возмущений, приводимые в первых четырех разделах этой главы, не являются приближенными. Напротив, уравнения для возмущений содержат в себе точно такую же информацию, как и исходные уравнения движения. Приближения начинаются только на том этапе, когда для получения численного решения выбирается та или иная схема численного интегрирования. Основное достоинство методов возмущений состоит в том, что они позволяют получать уравнения, очень мало чувствительные к ошибкам округления при последующем их решении. Таким образом, заданная точность может быть достигнута с помощью меньшего числа значащих цифр, чем это потребовалось бы для менее сложных способов.

Во второй части главы будет исследоваться проблема возмущений несколько иного сорта. В противоположность общепринятым методам небесной механики метод *линеаризованных возмущений,* рассматриваемый в разд. 6.5—6.7, не обеспечивает точного описания движения. В общих чертах этот подход состоит в линеаризации уравнений движения путем разложения их в ряд относительно *номинальной* или *опорной орбиты* и отбрасывания членов выше первого порядка. Конечно, для того чтобы результаты оставались справедливыми, необходимо ограничить величину отклонений от номинальной траектории. Когда метод линеаризации применим в конкретном случае, он дает массу преимуществ. Прежде всего получающиеся в результате уравнения намного проще. Но, пожалуй, еще большее значение имеет то обстоятельство, что становится возможным применить метод суперпозиции. Вследствие этого для решения широкого класса задач становятся доступными все приемы линейного анализа. Материал, содержащийся в разд. 6.5, действительно составляет основу навигационных теорий, приводимых в гл. VIII и IX.

Матрицы возмущений, рассматриваемые в разд. 6.5, часто называют *коэффициентами чувствительности,* поскольку они в удобной форме описывают распространение ошибок вдоль данной опорной орбиты. Следовательно, эти матрицы полезны не только для навигации в окрестности опорной орбиты; они могут быть использованы и при выборе самой опорной орбиты.

Большинство орбит космических кораблей должно удовлетворять некоторым граничным условиям, и линейные методы возмущений в этом случае особенно удобны. Пример использования таких методов в процессе определения точных траекторий облета Луны содержится в разд. 6.6. Для решения этой задачи, равно как и для решения задач наведения, формулируемых в последующих главах, весьма существенную помощь оказывает так называемый *метод сопряженных уравнений.* Одна система уравнений в возмущениях описывает распространение ошибок в прямом направлении вдоль орбиты. Сопряженные уравнения, с другой стороны, определяют распространение ошибок в обратном направлении, т. е. соответствуют движению, которое получилось бы, если пустить корабль вдоль орбиты обратно. Существует целая область математики, связанная с теорией сопряженных дифференциальных уравнений, и нам нередко придется к ней обращаться.

6.1. Оскулирующая орбита

В разд. 1.4 были выведены уравнения движения тела P_2 относительно тела P_1, учитывающие эффект присутствия других дополнительных тел P_3, . . , P_n. Основное уравнение может быть записано в виде

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}+\frac{\mu}{r^3}\bar{r}=\bar{a}_d,$$

где $\bar{r}$ — вектор положения P_2 относительно P_1, а $\bar{a}_d$ — вектор ускорения вследствие присутствия возмущающих тел. На самом деле, конечно, $\bar{a}_d$ можно понимать в гораздо более общем смысле и учитывать с его помощью все возможные силы, из-за которых относительное движение P_2 не совершается по строго конической орбите с фокусом в P_1. Предположим, например, что P_2 — это космический корабль, а P_1 — Земля. Тогда, кроме центральной гравитационной силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния, на корабль будут действовать другие факторы, в различной степени влияющие на его движение. Источниками этих возмущений могут быть: 1) несферическая форма Земли; 2) атмосферное сопротивление и подъемная сила; 3) Солнце и другие планеты Солнечной системы; 4) давление солнечного излучения; 5) ускорения от тяги двигателей космического корабля.

Если в какой-то момент времени t_0 все факторы, учитываемые вектором $\bar{a}_d$, внезапно прекратят оказывать какое бы то ни было влияние на движение, то орбита превратится в коническое сечение, а положение и скорость можно будет точно вычислять с помощью формул задачи двух тел, выведенных в разд. 2.8. Иначе говоря, в любой момент времени t_0 векторы положения и скорости P_2 относительно P_1 могут быть использованы для определения конической орбиты. Термин «оскулирующая орбита» используется для наименования именно этой мгновенной конической орбиты, соответствующей моменту t_0. На самом деле, конечно, тело P_2 ни в коем случае не движется по оскулирующей орбите; однако, если возмущающие силы малы по сравнению с притяжением центрального тела, то на коротких интервалах времени истинное положение P_2 будет отличаться от аналогичного положения на оскулирующей орбите на соответственно малую величину.

Пусть, в частности, векторы $\bar{r}(t)$, $\bar{v}(t)$ представляют истинные положение и скорость тела, а $\bar{r}_{\text{оск}}(t)$, $\bar{v}_{\text{оск}}(t)$ — соответствующие положение и скорость на оскулирующей орбите как функции времени. В момент t_0 имеем

$$\bar{r}(t_0)=\bar{r}_{\text{оск}}(t_0),\ \ \bar{v}(t_0)=\bar{v}_{\text{оск}}(t_0),$$

так что для последующего момента времени $t_1=t_0+\Delta t$ можно записать

$$\bar{r}(t_1)=\bar{r}(t_0)+\bar{v}(t_0)\,\Delta t+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right)_{t=t_0}(\Delta t)^2+\ldots,$$

$$\bar{r}_{\text{оск}}(t_1)=\bar{r}(t_0)+\bar{v}(t_0)\,\Delta t+\left(\frac{d^2\bar{r}_{\text{оск}}}{dt^2}\right)_{t=t_0}(\Delta t)^2+\ldots$$

Таким образом, определяя $\bar{\delta}(t)$ как вектор разности $\bar{r}(t)$ и $\bar{r}_{\text{оск}}(t)$ и производя вычитание, получим

$$\bar{\delta}(t_1)=\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}-\frac{d^2\bar{r}_{\text{оск}}}{dt^2}\right)_{t=t_0}(\Delta t)^2+\ldots$$

или

$$\bar{\delta}(t_1)=\frac{1}{2}\bar{a}_d(t_0)(\Delta t)^2+\ldots \tag{6.1}$$

Аналогично, если $\bar{\nu}(t)$ — разность векторов $\bar{v}(t)$ и $\bar{v}_{\text{оск}}(t)$, то будем иметь

$$\bar{\nu}(t_1)=\bar{a}_d(t_0)\,\Delta t+\ldots \tag{6.2}$$

Принципом оскулирующей орбиты можно успешно пользоваться для расчета возмущенных орбит. Наиболее простой метод определения положения и скорости корабля $\bar{r}(t)$ и $\bar{v}(t)$, когда орбита не является конической, состоит в непосредственном численном интегрировании уравнений движения в прямоугольных координатах. Схема, известная в небесной механике как *метод Коуэлла*, целесообразна в тех случаях, когда порядок ускорения a_d тот же или выше порядка ускорения от центрального гравитационного поля. С другой стороны, если a_d мало, то этот метод неэффективен. Метод Коуэлла часто требует сравнительно малой длины интервала для обеспечения заданной точности независимо от величины a_d. Однако, если интегрировать не все ускорение, а только его приращения, то одинаковая точность может быть достигнута при большем интервале, когда a_d мало. Такой процесс, именуемый *методом Энке*, будет рассмотрен сейчас более подробно.

В момент t_0 векторы положения и скорости $\bar{r}(t_0)$ и $\bar{v}(t_0)$ определяют оскулирующую орбиту. Легко видеть, что вектор разности $\bar{\delta}(t)$ должен удовлетворять следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2\bar{\delta}}{dt^2}=\frac{\mu}{r_{\text{оск}}^3}\left[\left(1-\frac{r_{\text{оск}}^3}{r^3}\right)\bar{r}-\bar{\delta}\right]+\bar{a}_d \tag{6.3}$$

и начальным условиям

$$\bar{\delta}(t_0)=0,\qquad \frac{d\bar{\delta}}{dt}(t_0)=\bar{\nu}(t_0)=0.$$

Вычислительные трудности, возникающие при оценке коэффициента при $\bar{r}$ в уравнении (6.3), можно обойти, применяя способ, описанный во втором подразделе разд. 1.4. Поскольку справедливо равенство

$$\bar{r}(t)=\bar{r}_{\text{оск}}(t)+\bar{\delta}(t),$$

то можно записать

$$1-\frac{r_{\text{оск}}^3}{r^3}\equiv -f(q)=1-(1+q)^{3/2},$$

где

$$q = \frac{(\bar{\delta} - 2\bar{r}) \cdot \bar{\delta}}{r^2}.$$

Вычисление $f(q)$ производится согласно разд. 1.4, откуда

$$f(q) = q\,\frac{3 + 3q + q^2}{1 + (1 + q)^{3/2}}.$$

Теперь метод Энке можно сформулировать следующим образом:

1. Вычисляется положение тела на оскулирующей орбите в соответствии с уравнениями (2.42) и (2.43) по формуле

$$\bar{r}_{\text{оск}}(t) = \left[1 - \frac{x^2}{r(t_0)}\,C(\alpha_0 x^2)\right]\bar{r}(t_0) + \left[(t - t_0) - \frac{x^3}{\sqrt{\mu}}\,S(\alpha_0 x^2)\right]\bar{v}(t_0),$$

где

$$\alpha_0 = \frac{2}{r(t_0)} - \frac{v(t_0)^2}{\mu},$$

а x определяется из выражения

$$\sqrt{\mu}(t - t_0) = \frac{\bar{r}(t_0) \cdot \bar{v}(t_0)}{\sqrt{\mu}}\,x^2 C(\alpha_0 x^2) + [1 - r(t_0)\,\alpha_0]\,x^3 S(\alpha_0 x^2) + r(t_0)\,x.$$

2. Затем отклонения получаются численным интегрированием уравнения

$$\frac{d^2\bar{\delta}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3_{\text{оск}}}\,[f(q)\,\bar{r}(t) + \bar{\delta}(t)] + \bar{a}_d(t).$$

Первый член в правой части уравнения должен оставаться малым, т. е. того же порядка, что и $\bar{a}_d(t)$, иначе метод не будет достаточно эффективным. По мере того как модуль вектора отклонений $\bar{\delta}$ возрастает, этот член обычно также увеличивается. Поэтому, для того чтобы сохранить эффективность метода, нужно, зная истинные положение и скорость, определить новую оскулирующую орбиту. Процесс выбора новой конической орбиты, для которой нужно будет вновь вычислять отклонения, называется *спрямлением*. Когда спрямление выполнено, начальные условия для дифференциального уравнения относительно $\bar{\delta}$ снова становятся нулевыми, а правая часть уравнения содержит теперь только возмущающее ускорение $\bar{a}_d$ в момент спрямления.

6.2. Вариации орбитальных элементов

С каждой точкой истинной орбиты можно связать оскулирующую орбиту, чьи орбитальные элементы определяются векторами истинного положения и скорости. Справедливо и обратное утверждение:

элементы оскулирующей орбиты однозначно определяют векторы положения и скорости. Следовательно, имеется возможность описывать истинное движение тела через поведение во времени элементов непрерывно изменяющейся оскулирующей орбиты. Если возмущающие силы настолько малы, что отклонения от конической орбиты остаются малыми в течение длительных периодов времени, то мгновенные значения элементов будут изменяться медленно. Преимущества, обеспечиваемые таким способом описания движения, сравнимы с теми, что дает метод Энке. В настоящем разделе выводятся формулы, выражающие скорость изменения элементов оскулирующей орбиты, которое вызывается истинным движением тела.

Для того чтобы различать оскулирующие элементы в двух соседних положениях $\bar{r}(t_0)$ и $\bar{r}(t_1)=\bar{r}(t_0+\Delta t)$, будем использовать обозначения a_0, e_0, ... и a_1, e_1, ... Выведем теперь обычным путем выражения для производных от этих элементов по времени.

Вариация длины большой оси

Выпишем прежде всего уравнение (2.9) для интеграла энергии в виде

$$ra\bar{v}\cdot\bar{v}=\mu(2a-r),$$

причем правило знаков для a нам уже известно. В момент t_1 для оскулирующей орбиты, определенной в момент t_0, имеем

$$r_{\text{оск}}(t_1)\,a_0\,\bar{v}_{\text{оск}}(t_1)\cdot\bar{v}_{\text{оск}}(t_1)=\mu\,[2a_0-r_{\text{оск}}(t_1)],$$

в то время как для истинной орбиты

$$r(t_1)\,a_1\,\bar{v}(t_1)\cdot\bar{v}(t_1)=\mu\,[2a_1-r(t_1)].$$

Подставим во второе из этих уравнений *

$$\bar{r}(t_1)=\bar{r}_{\text{оск}}(t_1)+\bar{\delta}' \quad \text{и} \quad \bar{v}(t_1)=\bar{v}_{\text{оск}}(t_1)+\bar{\nu}$$

и вычтем из него первое. В результате получим

$$r_{\text{оск}}(t_1)(a_1-a_0)\,[\bar{v}_{\text{оск}}(t_1)\cdot\bar{v}_{\text{оск}}(t_1)]+2a_1 r_{\text{оск}}(t_1)\,\bar{v}_{\text{оск}}(t_1)\cdot\bar{\nu}+$$
$$+r_{\text{оск}}(t_1)\,a_1\bar{\nu}\cdot\bar{\nu}+\delta' a_1\bar{v}(t_1)\bar{v}(t_1)=2\mu(a_1-a_0)-\mu\delta'.$$

Разделим теперь результат на Δt и перейдем к пределу при Δt, стремящемуся к нулю. Учитывая уравнения (6.1) и (6.2) и записывая

$$\frac{da}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{a_1-a_0}{\Delta t},$$

будем иметь

$$r\frac{da}{dt}v^2+2ar\bar{v}\cdot\bar{a}_d=2\mu\frac{da}{dt}$$

* Точный вид δ' здесь не имеет значения. Достаточно указать, что $\delta'=0(\Delta t)$ (*прим. автора*).

или

$$\frac{da}{dt}=\frac{2a^2}{\mu}\bar{v}\cdot\bar{a}_d. \qquad (6.4)$$

Следует отметить, что уравнение (6.4) можно получить формальным путем из интеграла энергии в соответствии с общими правилами дифференцирования, если рассматривать r как постоянную величину, а a как переменную и заменить скорость изменения во времени вектора $\bar{v}$ на $\bar{a}_d$. Как будет показано ниже, это удобное правило справедливо и в более общем случае.

Вариация модуля момента количества движения

Согласно уравнению (1.31) модуль момента количества движения h определяется из выражения

$$h^2=(\bar{r}\times\bar{v})\cdot(\bar{r}\times\bar{v}).$$

Действуя тем же способом, как и в случае большой полуоси, запишем

$$h_0^2=[\bar{r}_{\text{оск}}(t_1)\times\bar{v}_{\text{оск}}(t_1)]\cdot[\bar{r}_{\text{оск}}(t_1)\times\bar{v}_{\text{оск}}(t_1)];$$

$$h_1^2=\{[\bar{r}_{\text{оск}}(t_1)+\bar{\delta}]\times[\bar{v}_{\text{оск}}(t_1)+\bar{\mathrm{v}}]\}\cdot\{[\bar{r}_{\text{оск}}(t_1)+\bar{\delta}]\times$$
$$\times[\bar{v}_{\text{оск}}(t_1)+\bar{\mathrm{v}}]\}$$

и после вычитания получим

$$h_1^2-h_0^2=2[\bar{r}_{\text{оск}}(t_1)\times\bar{\mathrm{v}}(t_1)]\cdot[\bar{r}_{\text{оск}}(t_1)\times\bar{v}_{\text{оск}}(t_1)]+0(\Delta t).$$

Разделим снова найденную разность на Δt и перейдем к пределу. Следовательно,

$$\frac{dh}{dt}=\frac{1}{h}(\bar{r}\times\bar{a}_d)\cdot(\bar{r}\times\bar{v})$$

или в другой записи

$$\frac{dh}{dt}=\frac{1}{h}\left[r^2(\bar{v}\cdot\bar{a}_d)-(\bar{r}\cdot\bar{v})(\bar{r}\cdot\bar{a}_d)\right]. \qquad (6.5)$$

Здесь, как и раньше, результат формально получается обычным дифференцированием, причем h считается переменной, а r — постоянной и $d\bar{v}/dt$ заменяется на $\bar{a}_d$.

Вариация эксцентриситета

Скорость изменения эксцентриситета нетрудно получить, дифференцируя выражение

$$h^2=\mu a(1-e^2).$$

В результате этого будем иметь

$$2h\frac{dh}{dt}=\frac{h^2}{a}\cdot\frac{da}{dt}-2\mu ae\frac{de}{dt}.$$

Используя уравнения (6. 4) и (6. 5), окончательно найдем

$$\frac{de}{dt}=\frac{1}{\mu ae}\left[(pa-r^2)(\bar{v}\cdot\bar{a}_d)+(\bar{r}\cdot\bar{v})(\bar{r}\cdot\bar{a}_d)\right]. \tag{6.6}$$

Вариация наклонения и долготы восходящего узла

Вектор момента количества движения $\bar{h}$ нормален к плоскости оскулирующей орбиты, так что можно записать

$$\bar{h}=\bar{r}\times\bar{v}=h\bar{i}_\zeta.$$

Условимся, что в дальнейших выкладках система координат принимается невращающейся. Тогда компоненты единичной нормали $\bar{i}_\zeta$ суть l_3, m_3, n_3 и выражаются уравнениями (1. 38), откуда имеем

$$\bar{r}\times\bar{v}=h\begin{pmatrix}\sin\Omega\sin i\\ -\cos\Omega\sin i\\ \cos i\end{pmatrix},$$

где i — наклонение, а Ω — долгота восходящего узла оскулирующей орбитальной плоскости относительно исходных координатных осей. Формально применяя правило дифференцирования, получим

$$(\bar{r}\times\bar{a}_d)=\begin{pmatrix}\cos\Omega & -\sin\Omega\cos i & \sin\Omega\sin i\\ \sin\Omega & \cos\Omega\cos i & -\cos\Omega\sin i\\ 0 & \sin i & \cos i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\sin i\,\dfrac{d\Omega}{dt}\\ -h\,\dfrac{di}{dt}\\ \dfrac{dh}{dt}\end{pmatrix}. \tag{6.7}$$

Наконец, разрешая уравнение относительно вектора производных, найдем

$$\begin{pmatrix}h\sin i\left(\dfrac{d\Omega}{dt}\right)\\ -h\left(\dfrac{di}{dt}\right)\\ \dfrac{dh}{dt}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\Omega & \sin\Omega & 0\\ -\sin\Omega\cos i & \cos\Omega\cos i & \sin i\\ \sin\Omega\sin i & -\cos\Omega\sin i & \cos i\end{pmatrix}(\bar{r}\times\bar{a}_d). \tag{6.8}$$

Здесь подразумевается, что $\bar{r}\times\bar{a}_d$ представляет собой вектор-столбец, чьи компоненты являются его проекциями на оси фиксированной системы координат, относительно которой измеряются Ω и i.

Вариации аномалий

До сих пор все формулы были одинаково справедливы как для гиперболических, так и для эллиптических оскулирующих орбит. В этом подразделе мы будем рассматривать только эллиптические орбиты и предоставим читателю в качестве упражнения самостоятельно исследовать гиперболу с помощью аналогичных рассуждений.

Когда положение корабля определяется вектором $\bar{r}(t_0)$, истинная, эксцентрическая и средняя аномалии, связанные с оскулирующей орбитой, будут обозначаться через f_0, E_0 и M_0. В следующий момент времени $t_1 = t_0 + \Delta t$ вектор положения становится равным $\bar{r}(t_1)$ и выбирается новая оскулирующая орбита с соответствующими аномалиями f_1, E_1 и M_1. Разности аномалий

$$\left.\begin{aligned} f_1(t_1) - f_0(t_1) &= \eta(t_1), \\ E_1(t_1) - E_0(t_1) &= \beta(t_1), \\ M_1(t_1) - M_0(t_1) &= \gamma(t_1) \end{aligned}\right\} \tag{6.9}$$

представляют собой величины, которые равны нулю при $t_1 = t_0$, но чьи скорости изменения в момент t_0 необходимо исследовать. С этой целью запишем уравнение эллиптической орбиты

$$r(1 + e\cos f) = \frac{h^2}{\mu}$$

дважды для каждой из оскулирующих орбит и вычтем из одного уравнения другое. В результате получим

$$[r_{\text{оск}}(t_1) + \delta'] \{1 + e_1 \cos[f_0(t_1) + \eta(t_1)]\} -$$
$$- r_{\text{оск}}(t_1)[1 + e_0 \cos f_0(t_1)] = \frac{1}{\mu}(h_1^2 - h_0^2).$$

Далее, действуя уже испытанным способом, найдем

$$re\sin f \frac{d\eta}{dt} = r\cos f \frac{de}{dt} - \frac{2h}{\mu}\frac{dh}{dt}, \tag{6.10}$$

где $\frac{de}{dt}$ и $\frac{dh}{dt}$ вычисляются с помощью уравнений (6.6) и (6.5).

Здесь снова применяется формальное правило дифференцирования с одним дополнительным требованием — заменить df/dt на $d\eta/dt$. Таким образом, $d\eta/dt$ выражает скорость изменения истинной аномалии единственно за счет изменения орбитальных элементов, а не за счет движения вдоль орбиты.

Из равенства, найденного ранее для эксцентрической аномалии,

$$\cos E = \frac{\cos f + e}{1 + e\cos f}$$

получим подобным же образом вариацию эксцентрической аномалии

$$\sqrt{1 - e^2}\frac{d\beta}{dt} = \frac{r}{a}\frac{d\eta}{dt} - \frac{r\sin f}{p}\frac{de}{dt}. \tag{6.11}$$

Для нахождения вариации средней аномалии воспользуемся уравнением Кеплера

$$E - e\sin E = M$$

и получим после формального дифференцирования

$$\frac{d\gamma}{dt} = (1 - e\cos E)\frac{d\beta}{dt} - \sin E\,\frac{de}{dt}. \tag{6.12}$$

Теперь можно перейти к дифференциальным уравнениям для аномалий, описывающим истинное движение тела. Например, к левой части первого из уравнений (6.9) прибавим и вычтем $f_0(t_0)$, разделим затем все на Δt и перейдем к пределу

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{f_1(t_1) - f_0(t_0)}{\Delta t} - \frac{f_0(t_1) - f_0(t_0)}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\eta(t_1)}{\Delta t}.$$

Отсюда будем иметь

$$\frac{df}{dt} = \frac{df_0}{dt} + \frac{d\eta}{dt}$$

или после учета второго закона Кеплера

$$\frac{df}{dt} = \frac{h}{r^2} + \frac{d\eta}{dt}. \tag{6.13}$$

Выполнение аналогичных операций с остальными двумя уравнениями (6.9) приводит к следующим результатам:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{na}{r} + \frac{d\beta}{dt}, \tag{6.14}$$

$$\frac{dM}{dt} = n + \frac{d\gamma}{dt}. \tag{6.15}$$

Можно вывести более удобное выражение для $d\eta/dt$, чем уравнение (6.10). Из равенства

$$\mu re\sin f = h\bar{r}\cdot\bar{v}$$

получим обычным путем

$$re\cos f\,\frac{d\eta}{df} = -r\sin f\,\frac{de}{dt} + \frac{p}{h}\left(\bar{r}\cdot\bar{a}_d + \bar{r}\cdot\bar{v}\,\frac{1}{h}\,\frac{dh}{dt}\right). \tag{6.16}$$

Теперь умножим уравнение (6.10) на $\sin f$, а уравнение (6.16) на $\cos f$ и сложим их. Отсюда найдем

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{reh}\left[p\cos f\,(\bar{r}\cdot\bar{a}_d) - (p + r)\sin f\,\frac{dh}{dt}\right]. \tag{6.17}$$

Прежде чем закончить рассмотрение вариаций аномалий, целесообразно сделать следующие замечания:

1. Величина $d\eta/dt$ может геометрически интерпретироваться как отрицательная скорость вращения мгновенной линии апсид, когда возмущающие силы лежат в оскулирующей плоскости, т. е.,

$$\frac{d}{dt}(\omega+\eta)=0, \quad \text{если } \bar{a}_d\cdot\bar{i}_\zeta=0.$$

2. Величина $d\gamma/dt$ есть скорость изменения мгновенной средней аномалии в эпоху, т. е. для уравнения Кеплера в виде

$$E-e\sin E=nt+\sigma$$

будем иметь

$$\frac{d\sigma}{dt}=\frac{d\gamma}{dt}.$$

Вариация аргумента перицентра

Если $\bar{i}_n$ — единичный вектор в направлении восходящего узла оскулирующей орбитальной плоскости, то можно записать

$$\bar{i}_n\cdot\bar{r}=r\cos(\omega+f).$$

Вектор $\bar{i}_n$ в опорной системе координат имеет составляющие $\cos\Omega$, $\sin\Omega$, 0, так что справедливо равенство

$$(\cos\Omega \quad \sin\Omega \quad 0)\bar{r}=r\cos(\omega+f),$$

где $\bar{r}$, конечно, вектор-столбец. Опять применим формальное правило дифференцирования

$$(-\sin\Omega \quad \cos\Omega \quad 0)\,\bar{r}\,\frac{d\Omega}{dt}=-r\sin(\omega+f)\left(\frac{d\omega}{dt}+\frac{d\eta}{dt}\right).$$

Вектор положения $\bar{r}$ выражается через координаты в опорной системе в соответствии с уравнением, приведенным в задаче 1.16. Подставляя это уравнение в предыдущее, окончательно получим

$$\frac{d\omega}{dt}=-\cos i\,\frac{d\Omega}{dt}-\frac{d\eta}{dt}. \tag{6.18}$$

Уравнение (6.18) сводится к виду

$$\frac{d(\omega+\eta)}{dt}=0,$$

когда составляющая $\bar{a}_d$, нормальная к оскулирующей плоскости исчезает, так как на Ω влияет только эта составляющая. Нужно добавить, кроме того, что уравнение (6.18) можно вывести целиком из геометрических соображений.

6.3. Применение метода вариаций

Среди большого числа уравнений в вариациях, выведенных в предыдущем разделе, можно выбрать любую удобную и достаточную систему для описания истинного движения. Например, можно использовать следующую систему уравнений:

$$\frac{da}{dt}=\frac{2a^2}{\mu}\bar{v}\cdot\bar{a}_d,$$

$$\frac{dh}{dt}=\frac{1}{h}\left[r^2(\bar{v}\cdot\bar{a}_d)-(\bar{r}\cdot\bar{v})(\bar{r}\cdot\bar{a}_d)\right],$$

$$\begin{pmatrix} h\sin i\,\dfrac{d\Omega}{dt} \\ -h\,\dfrac{di}{dt}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\Omega & \sin\Omega & 0 \\ -\sin\Omega\cos i & \cos\Omega\cos i & \sin i\end{pmatrix}(\bar{r}\times\bar{a}_d),$$

$$\frac{d\eta}{dt}=\frac{1}{reh}\left[p\cos f\,(\bar{r}\cdot\bar{a}_d)-(p+r)\sin f\,\frac{dh}{dt}\right],$$

$$\frac{d\omega}{dt}=-\cos i\,\frac{d\Omega}{dt}-\frac{d\eta}{dt},$$

$$\frac{df}{dt}=\frac{h}{r^2}+\frac{d\eta}{dt}$$

совместно с алгебраическими уравнениями

$$p=\frac{h^2}{\mu},\quad e=\left(1-\frac{p}{a}\right)^{1/2}$$

$$r=\frac{h^2/\mu}{1+e\cos f}$$

и уравнениями, выведенными в задаче 1.16 для векторов $\bar{r}$ и $\bar{v}$. При использовании такой системы компоненты вектора возмущающего ускорения $\bar{a}_d$ должны представлять собой проекции этого вектора на оси невращающейся опорной системы координат.

Если заданы начальные условия для параметров a, h, Ω, i, ω, f (начальное значение η равно нулю), то дифференциальные уравнения могут быть проинтегрированы любым доступным численным методом. В общем случае, когда возмущающие силы малы, можно использовать сравнительно большой шаг интегрирования для всех уравнений, кроме того, которое выражает скорость изменения истинной аномалии. Для полного использования преимуществ метода вариации элементов особое внимание нужно обратить на проблему выбора эффективного способа нахождения истинной аномалии. Мы не будем останавливаться здесь на этом вопросе, поскольку его можно будет просто обойти, применяя другой метод, излагаемый в следующем разделе.

Далее необходимо отметить, что при таком частном выборе орбитальных элементов преимущества метода вариаций теряются для орбит с малым наклонением или небольшим эксцентриситетом. В любом из указанных особых случаев скорости изменения некоторых из эйлеровых углов будут велики, несмотря на то, что возмущающее ускорение мало. Отдельные способы разрешения этих проблем рассматриваются в задачах в конце главы. Кроме того, метод, излагаемый в следующем разделе, свободен от упомянутых недостатков, так как в нем используется другая система орбитальных элементов.

Для многих задач удобно выразить компоненты возмущающего ускорения в местной системе координат. Пусть, например, a_{dr} и $a_{d\theta}$ — компоненты $\bar{a}_d$ в плоскости орбиты, направленные вдоль радиуса-вектора и перпендикулярно к нему, а $a_{d\zeta}$ — составляющая, нормальная к орбитальной плоскости. Тогда для формул, выведенных в предыдущем разделе, будем иметь следующие соотношения:

$$\bar{r}\cdot\bar{a}_d = r a_{dr},$$

$$\bar{v}\cdot\bar{a}_d = \frac{\mu e \sin f}{h} a_{dr} + \frac{h}{r} a_{d\theta}.$$

Особое внимание следует обратить на те уравнения, куда входит произведение $\bar{r}\times\bar{a}_d$. Проблема перехода к новой системе координат наиболее удобным образом разрешается, если умножить слева обе части уравнения (6.7) на матрицу поворота $\overline{R}^{-1}$, где $\overline{R}$ определяется уравнением (1.37); только угол ω нужно заменить на $\omega+f$, т. е. на угол, измеряемый в орбитальной плоскости от восходящего узла до мгновенного радиуса-вектора тела. Так как матрица $\overline{R}$ — ортогональная, то ее обращение равносильно транспонированию. После умножения и разрешения относительно вектора производных получим

$$\begin{pmatrix} h\sin i\,\dfrac{d\Omega}{dt} \\ -h\,\dfrac{di}{dt} \\ \dfrac{dh}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega+f) & -\sin(\omega+f) & 0 \\ \sin(\omega+f) & \cos(\omega+f) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (\bar{r}\times\bar{a}_d).$$

В этом уравнении вектор $\bar{r}\times\bar{a}_d$ должен выражаться через местные полярные координаты

$$\bar{r}\times\bar{a}_d = r\begin{pmatrix} 0 \\ -a_{d\zeta} \\ a_{d\theta} \end{pmatrix}.$$

С учетом приведенных выражений для векторных и скалярных произведений уравнения вариаций орбитальных элементов в полярной системе координат могут быть теперь переписаны в следующем виде:

$$\frac{da}{dt}=\frac{2a^2}{h}\left(e\sin f\cdot a_{dr}+\frac{p}{r}a_{d\theta}\right),$$

$$\frac{de}{dt}=\frac{p}{h}\left\{\sin f\cdot a_{dr}+\left[\cos f+\frac{r}{p}(\cos f+e)\right]a_{d\theta}\right\},$$

$$\frac{d\eta}{dt}=\frac{1}{eh}[p\cos f\cdot a_{dr}-(p+r)\sin f\cdot a_{d\theta}],$$

$$\frac{dh}{dt}=ra_{d\theta},$$

$$\frac{d\sigma}{dt}=\frac{1}{na^2e}[(p\cos f-2re)a_{dr}-(p+r)\sin f\cdot a_{d\theta}],$$

$$\frac{d\Omega}{dt}=\frac{r\sin(\omega+f)}{h\sin i}a_{d\zeta},$$

$$\frac{di}{dt}=\frac{r\cos(\omega+f)}{h}a_{d\zeta}.$$

Уравнения для других элементов и аномалий остаются без изменений.

В качестве интересного и важного примера применения изложенных принципов исследуем влияние на близкий спутник Земли возмущающего ускорения, вызываемого асимметрией Земли относительно ее оси. Если бы Земля была сферически симметричной, то согласно разд. 1.2 сила притяжения должна быть направлена прямо к ее центру, а движение спутника должно было бы происходить в постоянной плоскости (при отсутствии, конечно, всех других источников возмущений). Однако на самом деле гравитационное поле Земли не является ни центральным, ни обратно пропорциональным квадрату расстояния.

В соответствии с уравнением (1.7) возмущающее ускорение, вызываемое несферичностью Земли, имеет вид

$$\bar{a}_d=\frac{\mu}{r^2}\sum_{k=2}^{\infty}J_k\left(\frac{r_{eq}}{r}\right)^k\left[P'_{k+1}(\cos\Phi)\bar{i}_r-P'_k(\cos\Phi)\bar{i}_z\right],$$

где μ — гравитационная постоянная Земли, а r_{eq} — экваториальный радиус. В сферических координатах r, θ, ζ, где $\theta=\omega+f$, имеем

$$\cos\Phi=\sin\theta\sin i,$$

$$\bar{i}_z=\begin{pmatrix}\sin\theta\sin i\\ \cos\theta\sin i\\ \cos i\end{pmatrix}.$$

Поэтому, если рассматривать только вторую гармонику, то получим

$$\begin{pmatrix} a_{dr} \\ a_{d\theta} \\ a_{d\zeta} \end{pmatrix} = -\frac{3\mu J_2 r_{eq}^2}{2r^4} \begin{pmatrix} 1 - 3\sin^2\theta \sin^2 i \\ \sin 2\theta \sin^2 i \\ \sin\theta \sin 2i \end{pmatrix}.$$

Для примера займемся вариацией долготы восходящего узла Ω. Тогда из последнего уравнения найдем

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3\mu J_2 r_{eq}^2 \cos i \sin^2\theta}{hr^3}$$

или с учетом второго закона Кеплера и полярного уравнения эллиптической орбиты

$$\frac{d\Omega}{df} = -\frac{3\mu J_2 r_{eq}^2 \cos i}{h^2 p}(1 + e\cos f)\sin^2(\omega + f).$$

Такая форма записи позволяет вычислить среднюю скорость изменения Ω за один период обращения спутника следующим образом:

$$\overline{\Delta\Omega} = \frac{1}{P}\int_{f_0}^{f_0+2\pi} \frac{d\Omega}{df}\,df = -\frac{3}{2} J_2 \left(\frac{r_{eq}}{p}\right)^2 n\cos i,$$

где n — среднее движение. Если орбита спутника близка к круговой орбите радиуса r_0, полученный результат можно переписать в виде

$$\overline{\Delta\Omega} \doteq -10{,}05\left(\frac{r_{eq}}{r_0}\right)^{3,5}\cos i \quad \textit{град/день}. \tag{6.19}$$

(Значение J_2 дано в приложении.) Итак, плоскость орбиты вращается вокруг полярной оси в направлении, противоположном движению спутника и со средней скоростью вращения, выраженной формулой (6.19).

Аналогичным способом получим среднюю скорость вращения линии апсид

$$\overline{\Delta\omega} = -\frac{3}{4} J_2 \left(\frac{r_{eq}}{p}\right)^2 n(1 - 5\cos^2 i)$$

или в случае круговой орбиты

$$\overline{\Delta\omega} = -5{,}0\left(\frac{r_{eq}}{r_0}\right)^{3,5}(1 - 5\cos^2 i) \quad \textit{град/день}. \tag{6.20}$$

Отсюда видно, что если $i > 63°26',7$, то линия апсид будет двигаться назад, а если $i < 63°26',7$ — вперед.

Совершенно так же можно исследовать вариации других элементов.

6.4. Обобщение метода вариаций

Как уже отмечалось в предыдущем разделе, в процессе применения метода вариации орбитальных элементов возникает множество проблем. Этот метод является наиболее мощным при медленном изменении оскулирующих элементов. Трудности могут возникать в том случае, когда орбита близка к круговой и вследствие этого перицентр слабо выражен. Точно так же, когда мало наклонение орбиты, становится неопределенным положение линии узлов. Если же орбита близка к параболической, то может слишком быстро изменяться большая полуось.

Известны способы борьбы с каждым из этих затруднений. Проблема близости к круговой орбите рассматривается в задаче 6.5, вопрос о малом наклонении нетрудно исключить, переопределив опорную систему координат, а проблема близости орбиты к параболической решается путем использования в качестве орбитальных элементов параметра и эксцентриситета вместо большой полуоси.

Более серьезный недостаток, чрезвычайно неприятный при расчетах, особенно на автоматических цифровых машинах, связан с дополнительным дифференциальным уравнением, необходимым для нахождения истинной аномалии. К счастью и эту проблему можно обойти, выбрав систему орбитальных элементов, которая не зависит от положения перицентра.

Новая система элементов, которую предложил Пайнс, состоит из начальных векторов положения и скорости, и такой выбор, помимо всего прочего, приводит к дополнительному улучшению метода. При использовании системы элементов Пайнса не только отпадает необходимость в дифференциальном уравнении для истинной аномалии, но также исчезает большая часть из перечисленных вырожденных случаев. Исключение составляет случай орбиты, близкой к параболической. Однако, если использовать универсальные формулы разд. 2.8 и далее с их помощью модифицировать способ Пайнса, то появляется возможность одновременно производить расчет для эллиптических, параболических и гиперболических оскулирующих орбит и совершать непрерывный переход от одного типа к другому. Для этого, в частности, понадобятся формулы (2.42)—(2.44) и (1.46). Орбитальными элементами теперь являются векторы $\bar{r}_0$ и $\bar{v}_0$. Уравнения (2.43) и (2.44) можно разрешить относительно $\bar{r}_0$ и $\bar{v}_0$, если просто заменить t на $-t$, x на $-x$ и поменять местами $\bar{r}_0$, $\bar{v}_0$ с $\bar{r}$, $\bar{v}$. Тогда будем иметь следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \bar{r}_0 &= F^*\bar{r} + G^*\bar{v}, \\ \bar{v}_0 &= F_t^*\bar{r} + G_t^*\bar{v}, \end{aligned}\right\} \qquad (6.21)$$

где

$$F^* = 1 - \frac{x^2}{r} C(\alpha x^2),$$

$$G^* = -\left[t - \frac{x^3}{\sqrt{\mu}} S(\alpha x^2)\right],$$

$$F_t^* = \frac{\sqrt{\mu}}{rr_0} [x - \alpha x^3 S(\alpha x^2)],$$

$$G_t^* = 1 - \frac{x^2}{r_0} C(\alpha x^2)$$

и

$$\alpha = \frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu}. \tag{6.22}$$

После аналогичного преобразования уравнение Кеплера (2.42) принимает вид

$$\sqrt{\mu} t = (1 - r\alpha) x^3 S(\alpha x^2) + rx - \frac{\bar{r} \cdot \bar{v}}{\sqrt{\mu}} x^2 C(\alpha x^2). \tag{6.23}$$

Уравнение, выведенное в задаче 2.28, также понадобится для того, чтобы выразить модуль r_0 через мгновенные положения и скорость. Таким образом, будем иметь

$$r_0 = r + (1 - r\alpha) x^2 C(\alpha x^2) - \frac{\bar{r} \cdot \bar{v}}{\sqrt{\mu}} [x - \alpha x^3 S(\alpha x^2)]. \tag{6.24}$$

Схема вывода уравнений в вариациях для $\bar{r}_0$ и $\bar{v}_0$ представляет собой непосредственное приложение формального правила дифференцирования, изложенного в разд. 6.2. Обычным способом получаются производные $\bar{r}_0$ и $\bar{v}_0$ из уравнения (6.21), причем $\bar{r}$ и t считаются постоянными, $d\bar{v}/dt$ заменяется на $\bar{a}_d$, а dx/dt на $d\xi/dt$, где ξ так же связана с x, как η, β, γ связаны с f, E, M. Иначе говоря, ξ представляет собой изменение x, вызываемое только изменениями $\bar{r}_0$ и $\bar{v}_0$.

Необходимая модификация, которая позволяет проходить через параболический случай, заключается в выводе производных от возмущений для $\alpha\bar{r}_0$ и $\alpha\bar{v}_0$ вместо того, чтобы делать это для $\bar{r}_0$ и $\bar{v}_0$, а также в определении α из дифференциального уравнения, полученного формально из уравнения (6.22):

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{2}{\mu} \bar{v} \cdot \bar{a}_d. \tag{6.25}$$

Следовательно, если умножить уравнение (6.21) на α, применить правило дифференцирования и использовать уравнение (2.41) для прозводных от S и C, то будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \frac{d(\alpha\bar{r}_0)}{dt} &= \frac{d(\alpha F^*)}{dt}\bar{r} + \frac{d(\alpha G^*)}{dt}\bar{v} + \alpha G^* \bar{a}_d, \\ \frac{d(\alpha\bar{v}_0)}{dt} &= \frac{d(\alpha F_t^*)}{dt}\bar{r} + \frac{d(\alpha G_t^*)}{dt}\bar{v} + \alpha G_t^* \bar{a}_d, \end{aligned}\right\} \tag{6.26}$$

где

$$\frac{d(\alpha F^*)}{dt}=\frac{1}{\mu}\left(\frac{xr_0F_t^*}{\sqrt{\mu}}-2\right)\bar{v}\cdot\bar{a}_d-\frac{r_0F_t^*}{\sqrt{\mu}}\left(\alpha\frac{d\xi}{dt}\right),$$

$$\frac{d(\alpha G^*)}{dt}=-\frac{1}{\mu}\left[\frac{xr(1-F^*)}{\sqrt{\mu}}-(3t+G^*)\right]\bar{v}\cdot\bar{a}_d+$$

$$+\frac{r(1-F^*)}{\sqrt{\mu}}\left(\alpha\frac{d\xi}{dt}\right),$$

$$\frac{d\left(\alpha F_t^*\right)}{dt}=\frac{1}{rr_0\sqrt{\mu}}\left[\alpha\sqrt{\mu}\,(G^*+t)+\alpha xr\,(1-F^*)-2x\right]\bar{v}\cdot\bar{a}_d+$$

$$+\frac{\sqrt{\mu}}{rr_0}\left[1-\alpha r\,(1-F^*)\right]\left(\alpha\frac{d\xi}{dt}\right)-\frac{F_t^*}{r_0}\left(\alpha\frac{dr_0}{dt}\right),$$

$$\frac{d\left(\alpha G_t^*\right)}{dt}=\frac{1}{\mu}\left(\frac{xrF_t^*}{\sqrt{\mu}}-2\right)\bar{v}\cdot\bar{a}_d-\frac{rF_t^*}{\sqrt{\mu}}\left(\alpha\frac{d\xi}{dt}\right)+$$

$$+\frac{r(1-F^*)}{r_0^2}\left(\alpha\frac{dr_0}{dt}\right).$$

Остается определить производные от возмущений ξ и r_0. Применяя формальное правило дифференцирования к уравнению (6. 23) и видя, что согласно (6. 24) коэффициент при $d\xi/dt$ равен просто r_0, найдем

$$\alpha\frac{d\xi}{dt}=\frac{1}{\mu r_0}\left[x(r+r_0)-2\sqrt{\mu}t-\sqrt{\mu}(1+r\alpha)\,(G^*+t)\right]\bar{v}\cdot\bar{a}_d+$$

$$+\frac{\alpha r(1-F^*)}{r_0\sqrt{\mu}}\bar{r}\cdot\bar{a}_d. \tag{6. 27}$$

Аналогично, дифференцируя уравнение (6. 24), получим

$$\alpha\frac{dr_0}{dt}=\frac{1}{\mu}\left[2r(1-F^*)+\alpha x\sqrt{\mu}t+\alpha\bar{r}\cdot\bar{v}\,(G^*+t)-\right.$$

$$\left.-\alpha x^2r\right]\bar{v}\cdot\bar{a}_d-\frac{\alpha rr_0F_t^*}{\mu}\bar{r}\cdot\bar{a}_d+\left(x-\alpha\sqrt{\mu}t-\frac{\bar{r}\cdot\bar{v}}{\sqrt{\mu}}\right)\left(\alpha\frac{d\xi}{dt}\right). \tag{6. 28}$$

При соответствующих начальных условиях, заданных для α, $\alpha\bar{r}_0$ и $\alpha\bar{v}_0$, уравнения (6. 25) и (6. 26) могут быть проинтегрированы любым подходящим к данному случаю численным методом. Для каждого шага по времени соответствующая величина x определяется из решения обобщенного уравнения Кеплера (2. 42). Затем вычисляются мгновенные векторы положения и скорости с помощью формул (2. 43) и (2. 44). Конечно, представленные уравнения громоздки и сложны в алгебраическом отношении, но при расчете на быстродействующих машинах этот недостаток, по-видимому, с избытком компенсируется тем, что они являются совершенно общими и свободными от всяких неопределенностей и вырожденных случаев.

6.5. Фундаментальные матрицы возмущений

Основой решения задач космической навигации, которые будут обсуждаться в гл. VIII и IX, является некоторая совокупность матриц. В настоящем разделе мы определим эти матрицы, укажем на ту роль, которую они могут играть в теории навигации, и покажем, как их можно получить с помощью решения системы дифференциальных уравнений. Затем в разд. 6.7 будет описан прямой метод вычисления этих матриц в случае, когда исходные траектории являются идеальными коническими сечениями.

Хотя излагаемые здесь принципы являются совершенно общими, их гораздо легче пояснять на примере какой-то конкретной задачи. Рассмотрим для определенности летательный аппарат, выходящий на орбиту в момент t_L и движущийся под влиянием одного или нескольких гравитационных полей до прихода в точку цели в момент t_A. Пусть $\bar{r}_0(t)$ и $\bar{v}_0(t)$ — векторы положения и скорости в момент t аппарата, летящего вдоль номинальной кривой, которая соединяет начальную и конечную точки. В результате начальных ошибок, возникающих из-за невозможности вывода аппарата на точную орбиту при запуске, истинные векторы положения и скорости $\bar{r}(t)$ и $\bar{v}(t)$ будут отличаться от соответствующих номинальных величин. Будем предполагать, что эти отклонения от опорной траектории всегда малы. Это позволит применять методы линеаризации.

Свяжем с положением $\bar{r}$ в произвольный момент времени t вектор $\bar{v}^*$, который представляет собой скорость, необходимую для перелета аппарата под действием только гравитации из данного положения в точку цели[1]. Поскольку при фиксированном t вектор $\bar{v}^*$ есть функция $\bar{r}$, можно разложить $\bar{v}^*(\bar{r};\ t)$ в ряд Тэйлора относительно точки $\bar{r}_0(t)$. Если обозначить

$$\delta\bar{r}(t)=\bar{r}(t)-\bar{r}_0(t)$$

и пренебречь членами, содержащими степени $\delta\bar{r}$ выше первой, то разложение Тэйлора может быть выражено достаточно просто:

$$\bar{v}^*(\bar{r};\ t)=\bar{v}_0(\bar{r}_0;\ t)+\bar{C}^*(\bar{r}_0;\ t)\,\delta\bar{r}(t), \qquad (6.29)$$

где $\bar{C}^*(\bar{r}_0;\ t)$ — матрица частных производных составляющих $\bar{v}^*$ по составляющим $\bar{r}$, найденных в точке $\bar{r}_0$. Пусть для определенности выбрана какая-то система ортогональных осей. Записывая $\bar{r}$ и $\bar{v}^*$ как векторы-столбцы в виде

$$\bar{r}=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}, \quad \bar{v}^*=\begin{pmatrix} v_x^* \\ v_y^* \\ v_z^* \end{pmatrix},$$

[1] К этому следует добавить, что время перелета в точку цели считается заданным *(прим. ред.)*.

можно определить матрицу C^* следующим образом:

$$\bar{C}^*(r_0;\ t)=\left\|\frac{\partial\bar{v}^*}{\partial\bar{r}}\right\|=\begin{pmatrix} \frac{\partial v_x^*}{\partial r_x} & \frac{\partial v_x^*}{\partial r_y} & \frac{\partial v_x^*}{\partial r_z} \\ \frac{\partial v_y^*}{\partial r_x} & \frac{\partial v_y^*}{\partial r_y} & \frac{\partial v_y^*}{\partial r_z} \\ \frac{\partial v_z^*}{\partial r_x} & \frac{\partial v_z^*}{\partial r_y} & \frac{\partial v_z^*}{\partial r_z} \end{pmatrix}. \qquad (6.30)$$

Подразумевается, что частные производные вычисляют в точке $\bar{r}_0$.

В пределах допущений, вытекающих из линейной теории, уравнение (6.29) обеспечивает простую схему вычисления потребной скорости. Так как $\bar{v}_0(\bar{r}_0;\ t)$ и $\bar{C}^*(\bar{r}_0;\ t)$ известны, то вектор $\delta\bar{r}$, который получается методами, рассматриваемыми ниже в гл. VII, полностью определяет скорость, потребную для встречи с целью[1].

Очевидно, что система навигации для определения потребной коррекции скорости должна найти $\bar{v}(t)$ — истинную скорость космического аппарата, когда его положение определяется вектором $\bar{r}(t)$. В частном случае, для которого $\bar{v}(t)$ — скорость, достигнутая в свободном полете аппаратом, движущимся из фиксированного стартового положения $\bar{r}$, за время $t—t_L$, вектор $\bar{v}$ будет функцией только $\bar{r}$ и t. Следовательно, для фиксированного t можно разложить $\bar{v}(\bar{r};\ t)$ в ряд Тэйлора относительно точки $\bar{r}_0(t)$. Пренебрегая членами высших порядков по сравнению с $\delta\bar{r}$, имеем

$$\bar{v}(\bar{r};\ t)=\bar{v}_0(\bar{r}_0;\ t)+\bar{C}(\bar{r}_0;\ t)\,\delta\bar{r}(t), \qquad (6.31)$$

где $\bar{C}(\bar{r}_0;\ t)$ — матрица частных производных составляющих $\bar{v}$ по составляющим $\bar{r}$, вычисляемая в точке $\bar{r}_0$. Если обозначить

$$\bar{v}=\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix},$$

то матрица $\bar{C}$ определяется следующим образом:

$$\bar{C}(\bar{r}_0;\ t)=\left\|\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{r}}\right\|, \qquad (6.32)$$

причем частные производные вычисляются в точке $\bar{r}_0$.

Определим теперь новый вектор

$$\Delta\bar{v}(t)=\bar{v}^*(t)-\bar{v}(t), \qquad (6.33)$$

представляющий собой изменение скорости, необходимое для перевода в момент t летательного аппарата на новую орбиту, которая

[1] См. примечание на стр. 218 (*прим. ред.*).

приведет его в точку встречи к моменту t_A. Тогда из уравнений (6. 29) и (6. 31) будем иметь

$$\Delta\bar{v}(t) = \left[\bar{C}^*(t) - \bar{C}(t)\right]\delta\bar{r}(t). \qquad (6.34)$$

(Функциональная зависимость матриц $\bar{C}$ и $\bar{C}^*$ от параметров опорной траектории всюду подразумевается, но далее в индексах отражаться не будет.)

Итак, получен простой переход от ошибок по положению к коррекции скорости, которую нужно произвести для выполнения поставленной задачи.

Допустим, что космический аппарат начиная с момента отправления находился в свободном полете и что в момент t его отклонение от опорной траектории достигло $\delta\bar{r}$. При таких обстоятельствах вектор положения корабля $\bar{r}$ в момент t зависит только от скорости в момент отправления $\bar{v}(t_L)$. Если ввести обозначение

$$\delta\bar{v}(t_L) = \bar{v}(t_L) - \bar{v}_0(t_L),$$

то можно записать

$$\bar{r}\left[\bar{v}(t_L);\ t\right] = \bar{r}_0\left[\bar{v}_0(t_L);\ t\right] + \bar{R}\left[\bar{v}_0(t_L);\ t\right]\delta\bar{v}(t_L), \qquad (6.35)$$

пренебрегая членами, чей порядок выше, чем $\delta\bar{v}(t_L)$. Элементы матрицы $\bar{R}[\bar{v}_0(t_L);\ t]$ являются частными производными составляющих $\bar{r}$ по составляющим $\bar{v}(t_L)$, т. е.

$$\bar{R}\left[\bar{v}_0(t_L);\ t\right] = \left\| \frac{\partial\bar{r}}{\partial\bar{v}(t_L)} \right\|, \qquad (6.36)$$

причем подразумевается, что частные производные вычислены при $\bar{v}(t_L) = \bar{v}_0(t_L)$.

Из уравнения (6. 35) имеем

$$\delta\bar{r}(t) = \bar{R}(t)\,\delta\bar{v}(t_L). \qquad (6.37)$$

Подстановка (6. 37) в (6. 34) дает соотношение

$$\Delta\bar{v}(t) = \bar{\Lambda}(t)\,\delta\bar{v}(t_L), \qquad (6.38)$$

где матрица $\bar{\Lambda}(t) = [\bar{C}^*(t) - \bar{C}(t)]\bar{R}(t)$ связывает отклонение скорости в момент запуска с необходимым из-за этой ошибки изменением скорости в момент t.

Если космический аппарат будет лететь не по опорной траектории от момента запуска до прихода в точку встречи, то естественно, что в момент прибытия t_A его скорость будет отличаться от номинальной. Обозначим эту разность скоростей через

$$\delta\bar{v}(t_A) = \bar{v}(t_A) - \bar{v}_0(t_A)$$

и будем искать связь между $\delta\bar{v}(t_A)$ и $\delta\bar{v}(t_L)$. Используя уже применявшиеся соображения, нетрудно показать, что вектор положения $\bar{r}$

будет функцией только $\bar{v}(t_A)$, и это позволяет выразить $\bar{r}[\bar{v}(t_A); t]$ следующим образом:

$$\bar{r}\left[\bar{v}(t_A);\ t\right]=\bar{r}_0\left[\bar{v}_0(t_A);\ t\right]+\bar{R}^*\left[\bar{v}_0(t_A);\ t\right]\delta\bar{v}(t_A), \tag{6.39}$$

сохраняя лишь члены первого порядка по $\delta\bar{v}(t_A)$. Здесь использована новая матрица

$$\bar{R}^*\left[\bar{v}_0(t_A);\ t\right]=\left\|\frac{\partial\bar{r}}{\partial\bar{v}(t_A)}\right\|, \tag{6.40}$$

а частные производные, входящие в нее, вычисляются при $\bar{v}(t_A)=\bar{v}_0(t_A)$. Так как, очевидно, выполняется соотношение

$$\delta\bar{r}(t)=\bar{R}^*(t)\,\delta\,\bar{v}(t_A), \tag{6.41}$$

то, учитывая (6.37), нетрудно получить искомое выражение

$$\bar{R}^*(t)\,\delta\bar{v}(t_A)=\bar{R}(t)\,\delta\bar{v}(t_L)$$

или, записывая его по-другому,

$$\delta\bar{v}(t_A)=\bar{R}^*(t)^{-1}\bar{R}(t)\,\delta\bar{v}(t_L). \tag{6.42}$$

Для дальнейшей работы понадобятся дополнительно еще две матрицы. При фиксированном $\bar{r}(t_L)$ как вектор положения летательного аппарата в момент t, так и его текущая скорость $\bar{v}$ могут рассматриваться зависящими только от начальной скорости. Вследствие этого обстоятельства имеем

$$\bar{v}\left[\bar{v}(t_L);\ t\right]=\bar{v}_0\left[v_0(t_L);\ t\right]+\bar{V}\left[\bar{v}_0(t_L);\ t\right]\delta\bar{v}(t_L). \tag{6.43}$$

Это уравнение похоже на уравнение (6.35). Далее, используя те же приемы, которые привели к уравнению (6.39), можем записать

$$\bar{v}^*\left[\bar{v}(t_A);\ t\right]=\bar{v}_0\left[\bar{v}_0(t_A);\ t\right]+\bar{V}^*\left[\bar{v}_0(t_A); t\right]\delta\bar{v}(t_A). \tag{6.44}$$

Матрицы $\bar{V}$ и $\bar{V}^*$ определяются аналогично матрицам $\bar{R}$ и $\bar{R}^*$, т. е.

$$\bar{V}\left[\bar{v}_0(t_L);\ t\right]=\left\|\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{v}(t_L)}\right\|, \tag{6.45}$$

$$\bar{V}^*\left[\bar{v}_0(t_A);\ t\right]=\left\|\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{v}(t_A)}\right\|. \tag{6.46}$$

Ясно, что матрицы $\bar{R}$, $\bar{V}$ и $\bar{C}$ не являются независимыми. Действительно, из уравнений (6.32), (6.36) и (6.45) имеем соотношение

$$\bar{V}(t)=\bar{C}(t)\,\bar{R}(t). \tag{6.47}$$

Точно так же и для матриц со звездочками

$$\bar{V}^*(t)=\bar{C}^*(t)\,\bar{R}^*(t). \tag{6.48}$$

С помощью соотношения (6.47) можно определить матрицу $\overline{\Lambda}$

$$\overline{\Lambda}(t) = \overline{C}^*(t)\,\overline{R}(t) - \overline{V}(t) \tag{6.49}$$

и аналогичную матрицу со звездочкой

$$\overline{\Lambda}^*(t) = \overline{C}(t)\,\overline{R}^*(t) - \overline{V}^*(t), \tag{6.50}$$

которая появится в дальнейших выкладках.

Систему матриц $\overline{R}$, $\overline{R}^*$, $\overline{V}$, $\overline{V}^*$ или в других случаях систему $\overline{C}$, $\overline{C}^*$, $\overline{\Lambda}$, $\overline{\Lambda}^*$ будем называть фундаментальными матрицами возмущений. Покажем теперь, что они могут быть легко получены в виде решения некоторых матричных дифференциальных уравнений. Предположим для простоты, что на движение оказывает влияние только одно гравитационное поле, обратно пропорциональное квадрату расстояния. Переход к более общим случаям нетруден и его мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Чтобы получить дифференциальные уравнения для матриц $\overline{R}$ и $\overline{V}$, подставим (6.35) и (6.43) в основные уравнения движения

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v}; \quad \frac{d\bar{v}}{dt} = -\frac{\mu}{r^3}\bar{r},$$

в результате чего будем иметь

$$\frac{d\bar{r}_0}{dt} + \frac{d\overline{R}}{dt}\,\delta\bar{v}(t_L) = \bar{v}_0 + \overline{V}\delta\bar{v}(t_L),$$

$$\frac{d\bar{v}_0}{dt} + \frac{d\overline{V}}{dt}\,\delta\bar{v}(t_L) = -\frac{\mu}{r^3}\left[\bar{r}_0 + \overline{R}\delta\bar{v}(t_L)\right].$$

С точностью до первого порядка $\delta\bar{r}$ можем записать

$$\frac{1}{r^3} = \left[(\bar{r}_0 + \delta\bar{r})\cdot(\bar{r}_0 + \delta\bar{r})\right]^{-3/2}$$

$$= \left(r_0^2 + 2\bar{r}_0^T\delta\bar{r}\right)^{-3/2}$$

$$= \frac{1}{r_0^3} - 3\,\frac{\bar{r}_0^T\delta\bar{r}}{r_0^5}.$$

Подставив сюда $\delta\bar{r}$ из соотношения (6.37), получим

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{r_0^3} - \frac{3}{r_0^5}\,\bar{r}_0^T\overline{R}\delta\bar{v}(t_L)$$

и с учетом этого приближенного выражения найдем

$$\frac{d\bar{v}_0}{dt} + \frac{d\overline{V}}{dt}\,\delta\bar{v}(t_L) = -\mu\left(\frac{\bar{r}_0}{r_0^3} + \frac{\overline{R}\delta\bar{v}(t_L)}{r_0^3} - 3\,\frac{\bar{r}_0\bar{r}_0^T\overline{R}\delta\bar{v}(t_L)}{r_0^5}\right).$$

Здесь опущены члены, содержащие высшие степени $\delta\bar{v}(t_L)$. В результате, вводя определение новой матрицы

$$\bar{G}=\frac{\mu}{r_0^5}\left(3\bar{r}_0\bar{r}_0^T-r_0^2\bar{I}\right)=$$

$$=\frac{\mu}{r_0^5}\begin{pmatrix}3r_{0x}^2-r_0^2 & 3r_{0x}r_{0y} & 3r_{0x}r_{0z}\\ 3r_{0y}r_{0x} & 3r_{0y}^2-r_0^2 & 3r_{0y}r_{0z}\\ 3r_{0z}r_{0x} & 3r_{0z}r_{0y} & 3r_{0z}^2-r_0^2\end{pmatrix}, \tag{6.51}$$

где $\bar{I}$ — единичная матрица размерности (3×3), имеем

$$\frac{d\bar{v}_0}{dt}+\frac{d\bar{V}}{dt}\delta\bar{v}(t_L)=-\frac{\bar{r}_0}{r_0^3}+\bar{G}\bar{R}\delta\bar{v}(t_L).$$

Наконец, нетрудно видеть, что так как векторы положения и скорости для номинальной траектории удовлетворяют основным векторным уравнениям движения, то должны выполняться соотношения

$$\frac{d\bar{R}}{dt}\delta\bar{v}(t_L)=\bar{V}\delta\bar{v}(t_L),$$

$$\frac{d\bar{V}}{dt}\delta\bar{v}(t_L)=\bar{G}\bar{R}\delta\bar{v}(t_L).$$

Поскольку эти соотношения справедливы для любых возмущений $\delta\bar{v}(t_L)$, то отсюда следует, что матрицы $\bar{R}$ и $\bar{V}$ могут быть получены как решения следующих уравнений:

$$\frac{d\bar{R}}{dt}=\bar{V}, \tag{6.52}$$

$$\frac{d\bar{V}}{dt}=\bar{G}\bar{R}. \tag{6.53}$$

Для нахождения решений нужно использовать соответствующие начальные условия

$$\bar{R}(t_L)=\bar{0},\quad \bar{V}(t_L)=\bar{I},$$

где $\bar{0}$ — нулевая матрица размерности (3×3), в чем можно убедиться на основании уравнений (6.36) и (6.45).

Пользуясь совершенно аналогичной аргументацией, нетрудно показать, что $\bar{R}^*$ и $\bar{V}^*$ могут быть получены из уравнений

$$\frac{d\bar{R}^*}{dt}=\bar{V}^*, \tag{6.54}$$

$$\frac{d\bar{V}^*}{dt}=\bar{G}\bar{R}^*, \tag{6.55}$$

удовлетворяющих начальным условиям

$$\overline{R}^*(t_A)=\overline{0},\ \overline{V}^*(t_A)=\overline{I}.$$

Хотя матрицы $\overline{C}$ и $\overline{C}^*$ можно получить из уравнений (6.47) и (6.48):

$$\overline{C}(t)=\overline{V}(t)\overline{R}(t)^{-1},$$

$$\overline{C}^*(t)=\overline{V}^*(t)\overline{R}^*(t)^{-1},$$

интересно показать, что и они также могут быть представлены непосредственно в виде решений дифференциальных уравнений. Продифференцировав обе части уравнения (6.47) по t, получим

$$\frac{d\overline{V}}{dt}=\overline{C}\frac{d\overline{R}}{dt}+\frac{d\overline{C}}{dt}\overline{R}.$$

Подставив сюда (6.52) и (6.53) и умножив результат справа на $\overline{R}^{-1}$, будем иметь

$$\frac{d\overline{C}}{dt}+\overline{C}^2=\overline{G}. \tag{6.56}$$

Аналогично получается и второе уравнение

$$\frac{d\overline{C}^*}{dt}+\overline{C}^{*2}=\overline{G}. \tag{6.57}$$

Трудности при вычислении $\overline{C}$ и $\overline{C}^*$ непосредственным интегрированием уравнений (6.56) и (6.57) начинаются с попыток назначить соответствующие начальные условия. Если исходить из начальных значений матриц $\overline{R}$ и $\overline{R}^*$, то отсюда следует, что как $\overline{C}(t_L)$, так и $\overline{C}^*(t_A)$ стремятся к бесконечности. Если же иметь дело прямо с дифференциальными уравнениями для матриц $\overline{C}^{-1}$ и $\overline{C}^{*-1}$, то эти затруднения отпадают.

Дифференцируя выражение

$$\overline{C}(t)^{-1}\overline{V}(t)=\overline{R}(t),$$

учитывая уравнения (6.52) и (6.53) и умножая результат справа на $\overline{V}^{-1}$, получим

$$\frac{d\overline{C}^{-1}}{dt}+\overline{C}^{-1}\overline{G}\overline{C}^{-1}=\overline{I}. \tag{6.58}$$

Соответствующее уравнение для C^{*-1} получается в той же последовательности:

$$\frac{d\overline{C}^{*-1}}{dt}+\overline{C}^{*-1}\overline{G}\overline{C}^{*-1}=\overline{I}. \tag{6.59}$$

Уравнениями (6.58) и (6.59) можно воспользоваться для демонстрации любопытного свойства матриц $\bar{C}$ и $\bar{C}^*$. Если уравнение движения имеет вид

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}=\bar{g},$$

где $\bar{g}$ — вектор ускорения, вызываемого консервативным силовым полем, тогда матрица

$$\bar{G}=\left\|\frac{\partial\bar{g}}{\partial\bar{r}}\right\|$$

будет всегда симметрической. Поэтому из уравнений для $\bar{C}$ и $\bar{C}^*$ сразу следует, что эти матрицы будут симметрическими для любого t в интервале $(t_L,\ t_A)$, если они симметрические для какого-либо одного момента времени. Но так как в силу начальных условий

$$\bar{C}(t_L)^{-1}=\bar{0}\qquad \bar{C}^*(t_A)^{-1}=\bar{0},$$

то $\bar{C}$ и $\bar{C}^*$ — симметрические для $t=t_L$ и $t=t_A$ соответственно. Следовательно, матрицы $\bar{C}(t)$ и $\bar{C}^*(t)$ — симметрические для всех t на интервале от точки отправления до точки прибытия.

Совершенно тем же способом можно вывести дифференциальные уравнения для $\bar{\Lambda}$ и $\bar{\Lambda}^*$. Дифференцируя соотношения (6.48) и (6.50) и учитывая дифференциальные уравнения для $\bar{R}$, $\bar{V}$, $\bar{R}^*$, $\bar{V}^*$, нетрудно получить

$$\frac{d\bar{\Lambda}}{dt}+\bar{C}^*\bar{\Lambda}=\bar{0} \tag{6.60}$$

и

$$\frac{d\bar{\Lambda}^*}{dt}+\bar{C}\bar{\Lambda}^*=\bar{0}, \tag{6.61}$$

где

$$\bar{\Lambda}(t_L)=-\bar{I},\ \bar{\Lambda}^*(t_A)=-\bar{I}.$$

Элементы матриц $\bar{R}$ и $\bar{V}$ представляют собой отклонения положения и скорости от номинальных, возникающие в результате некоторых определенных отклонений начальной скорости от ее номинального значения. Например, первые столбцы этих матриц суть не что иное как векторы отклонений в момент t за счет единичного изменения первой составляющей скорости в момент t_L. Соответствующий смысл можно придать и другим столбцам. Подобным же образом раскрывается физическое значение элементов матриц $\bar{R}^*$ и $\bar{V}^*$. Покажем теперь, что отклонения положения и скорости от соответствующих номинальных значений в любой момент времени, которые вызываются заданными отклонениями положения и скорости в любой другой момент, могут быть представлены как линейные комбинации матриц $\bar{R}$, $\bar{R}^*$, $\bar{V}$, $\bar{V}^*$.

С этой целью запишем

$$\bar{r}(t)=\bar{r}_0(t)+\delta\bar{r}(t),\quad \bar{v}(t)=\bar{v}_0(t)+\delta\bar{v}(t)$$

и используем векторные дифференциальные уравнения движения, чтобы показать, что $\delta\bar{r}(t)$ и $\delta\bar{v}(t)$ можно получить, решая линеаризованные дифференциальные уравнения

$$\frac{d}{dt}(\delta\bar{r})=\delta\bar{v},\quad \frac{d}{dt}(\delta\bar{v})=\bar{G}\delta\bar{r},$$

если пренебречь членами порядка выше $\delta\bar{r}$ и $\delta\bar{v}$.

Тогда, если записать

$$\delta\bar{r}(t)=\bar{R}(t)\bar{c}+\bar{R}^*(t)\bar{c}^*,\tag{6.62}$$

$$\delta\bar{v}(t)=\bar{V}(t)\bar{c}+\bar{V}^*(t)\bar{c}^*,\tag{6.63}$$

где $\bar{c}$ и $\bar{c}^*$ — произвольные постоянные векторы, то из уравнений (6.52)—(6.55) следует, что эти выражения удовлетворяют дифференциальным уравнениям для возмущений. Кроме того, в них содержится ровно столько неизвестных постоянных, чтобы удовлетворялась любая физически возможная система начальных или граничных условий. Таким образом, выражения (6.62) и (6.63) представляют собой наиболее общее решение задачи возмущений.

Для того чтобы более полно осветить это утверждение, рассмотрим случай, когда $\delta\bar{r}_1$ и $\delta\bar{v}_1$ — отклонения по положению и скорости в момент t_1, а $\bar{R}_1$, $\bar{R}_1^*$, $\bar{V}_1$ и $\bar{V}_1^*$ — соответствующие значения фундаментальных матриц. Тогда $\bar{c}$ и $\bar{c}^*$ должны получаться как решения следующих уравнений:

$$\delta\bar{r}_1=\bar{R}_1\bar{c}+\bar{R}_1^*\bar{c}^*,$$

$$\delta\bar{v}_1=\bar{V}_1\bar{c}+\bar{V}_1^*\bar{c}^*.$$

Умножив первое уравнение на $\bar{R}_1^{-1}$, получим

$$\bar{c}=\bar{R}_1^{-1}(\delta\bar{r}_1-\bar{R}_1^*\bar{c}^*).$$

Далее, подставляя $\bar{c}$ во второе уравнение, найдем

$$\bar{c}^*=\bar{\Lambda}_1^{*-1}(\bar{C}_1\delta\bar{r}_1-\delta\bar{v}_1).$$

Окончательно после некоторых упрощений будем иметь

$$\bar{c}=\bar{\Lambda}_1^{-1}(\bar{C}_1^*\delta\bar{r}_1-\delta\bar{v}_1).$$

Теперь, зная $\bar{c}$ и $\bar{c}^*$, можно найти с помощью выражений (6.62) и (6.63) отклонения по положению и скорости в любой другой момент времени t.

Пусть теперь $\delta\bar{r}_1$ и $\delta\bar{r}_2$ — отклонения по положению в два различных момента времени t_1 и t_2, а $\bar{R}_1$, $\bar{R}_1^*$, $\bar{R}_2$, $\bar{R}_2^*$ — матрицы $\bar{R}$

в эти же моменты. В этом случае векторы $\bar{c}$ и $\bar{c}^*$ определяются как решения уравнений

$$\delta\bar{r}_1 = \bar{R}_1\bar{c} + \bar{R}_1^*\bar{c}^*, \quad \delta\bar{r}_2 = \bar{R}_2\bar{c} + \bar{R}_2^*\bar{c}^*.$$

Действуя тем же способом, что и раньше, найдем

$$\bar{c} = \bar{R}_1^{-1}\left(\bar{R}_2\bar{R}_1^{-1} - \bar{R}_2^*\bar{R}_1^{*-1}\right)^{-1}\left(\delta\bar{r}_2 - \bar{R}_2^*\bar{R}_1^{*-1}\delta\bar{r}_1\right),$$

$$\bar{c}^* = \bar{R}_1^{*-1}\left(\bar{R}_2^*\bar{R}_1^{*-1} - \bar{R}_2\bar{R}_1^{-1}\right)^{-1}\left(\delta\bar{r}_2 - \bar{R}_2\bar{R}_1^{-1}\delta\bar{r}_1\right).$$

И опять, зная $\bar{c}$ и $\bar{c}^*$, можно по соотношениям (6. 62) и (6. 63) определить отклонение положения и скорости от номинальных условий в любой момент времени t.

6. 6. Применение полученных результатов к расчету траекторий облета Луны

Материал, изложенный в предыдущих разделах настоящей главы, дает возможность завершить описание метода определения точных межпланетных и лунных траекторий. В гл. V исследовалась задача получения приближенной траектории путем составления ее из отрезков конических сечений. Этот способ представляет собой первый шаг итерационного процесса, который в конце концов приведет к получению точной траектории с учетом воздействия возмущающих ускорений.

Рассмотрим сначала уже знакомую нам задачу нахождения орбиты, связывающей точки с векторами положения $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$ и требующей для перелета между ними времени t. При отсутствии каких-либо сил, кроме силы притяжения центрального поля, орбита будет представлять собой коническое сечение, способы расчета которых подробно рассматривались в гл. III. Зная такую орбиту, можно начиная с положения $\bar{r}_1$ и вычисленной скорости на конической орбите $\bar{v}_1$ интегрировать уравнения движения, учитывая всевозможные возмущения любым из описанных в этой главе методом. В конце временно́го интервала t вектор положения будет, конечно, отличаться от $\bar{r}_2$. Однако, если возмущающие силы малы, как это и будет на самом деле, то можно ожидать, что разность $\delta\bar{r}_2^{(1)}$, т. е. новый конечный вектор положения минус заданный вектор $\bar{r}_2$, тоже будет мала.

Следующий шаг состоит в замене $\bar{r}_2$ на $\bar{r}_2^{(1)} = \bar{r}_2 - \delta\bar{r}_2^{(1)}$ и повторении процесса. Вычисляется коническая орбита, связывающая конец вектора $\bar{r}_1$ с новой точкой $\bar{r}_2^{(1)}$ и требующая для перелета между ними того же времени t. Используя новую скорость на конической орбите в точке $\bar{r}_1$ в качестве начального условия, снова интегрируем полные уравнения движения на интервале времени t. На этот раз разность $\delta\bar{r}_2^{(2)}$ между новым вектором положения и заданным вектором положения $\bar{r}_2$ должна быть по величине меньше предыдущей. Если она все же остается больше допустимой, то принимается $\bar{r}_2^{(2)} = \bar{r}_2^{(1)} - \delta\bar{r}_2^{(2)}$ и процесс повторяется до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность. Обычно для большинства задач достаточно трех или четырех итераций.

Этот метод вместе с матрицами возмущений, введенными в предыдущем разделе, может быть с успехом использован для определения точной траектории облета Луны на основе кусочно-конического приближения, вычисляемого методами разд. 5. 5. Во время итерационного процесса будут оставаться инвариантными следующие величины: 1) $\bar{r}_L$ — вектор положения в момент запуска; 2) t_L — время запуска; 3) t_A — момент попадания на границу сферы влияния Луны; 4) $t_D = t_A + t_S$ — момент выхода из сферы влияния Луны; 5) $\bar{r}_R$ — вектор положения в момент возвращения; 6) t_R — момент возвращения:

Пусть $\bar{r}_{TA}$ и $\bar{r}_{TD}$ — векторы, направленные от центра Земли в точки на границе сферы влияния Луны, в которых с ней пересекаются траектории отправления и возвращения. В процессе расчета эти векторы будут меняться, но вначале они берутся из кусочно-конического приближения. Тогда при фиксированных $\bar{r}_L$ и $\bar{r}_{TA}$ точная траектория, связывающая эти точки через время $t_{FL} = t_A - t_L$, легко получается с помощью только что описанной процедуры. Подобным же путем определяются еще две точные траектории: одна, связывающая $\bar{r}_R$ с $\bar{r}_{TD}$ через интервал времени $t_{FR} = t_R - t_D$, и другая, соединяющая концы $\bar{r}_{TML}$ и $\bar{r}_{TMR}$ — векторов положения относительно Луны на границе сферы влияния за интервал времени t_S нахождения внутри этой сферы.

В результате получается кусочно-непрерывная точная траектория облета Луны, имеющая разрывы скорости на границе сферы влияния. Эти два разрыва скорости можно исключить с помощью матриц возмущений следующим образом.

Предположим, что $\bar{r}_{TA}$ и $\bar{r}_{TD}$ изменяются соответственно на $\delta\bar{r}_A$ и $\delta\bar{r}_D$. Векторы скорости на внешней границе сферы должны при этом измениться на величины

$$\delta\bar{v}_L(t_A) = \bar{C}_L(t_A)\,\delta\bar{r}_A;\quad \delta\bar{v}_R(t_D) = \bar{C}_R^*(t_D)\,\delta\bar{r}_D,$$

если $\bar{r}_L$, $\bar{r}_R$ и интервалы времени полета остаются неизменными. Здесь $\bar{C}_L(t_A)$ — матрица $\bar{C}$ для траектории отправления, вычисленная в момент t_A. Аналогично $\bar{C}_R^*(t_D)$ — матрица $\bar{C}^*$ для траектории возвращения, вычисленная в момент t_D. Векторы скорости на внутренней границе сферы будут также меняться. Как видно, задача состоит в определении таких $\delta\bar{r}_A$ и $\delta\bar{r}_D$, чтобы окончательные изменения скорости полностью устранили первоначальные разности скоростей в точках разрыва.

С этой целью рассмотрим гиперболическую кривую, по которой совершается движение от момента t_A до t_D, лежащую в пределах сферы влияния. Пусть $\bar{R}_h$, $\bar{R}_h^*$, $\bar{C}_h$, $\bar{C}_h^*$ — матрицы возмущений, соответствующие этой траектории. Тогда изменения векторов скорости на внутренней границе сферы будут равны

$$\delta\bar{v}_h(t_A)=\bar{R}_h^{-1}(t_D)\,\delta\bar{r}_D+\bar{C}_h^*(t_A)\,\delta\bar{r}_A,$$

$$\delta\bar{v}_h(t_D)=\bar{C}_h(t_D)\,\delta\bar{r}_D+\bar{R}_h^{*-1}(t_A)\,\delta\bar{r}_A,$$

если время полета инвариантно.

Начальное рассогласование скорости в точке $\bar{r}_{TA}$ составляет

$$\Delta\bar{v}_A=\bar{v}_{TML}-\bar{v}_h(t_A)$$

и в точке $\bar{r}_{TD}$

$$\Delta\bar{v}_D=\bar{v}_h(t_D)-\bar{v}_{TMR}.$$

Поэтому приращения $\delta\bar{r}_A$ и $\delta\bar{r}_D$ необходимо выбирать так, чтобы выполнялись равенства

$$\delta\bar{v}_L(t_A)-\delta\bar{v}_h(t_A)+\Delta\bar{v}_A=0,$$

$$\delta\bar{v}_h(t_D)-\delta\bar{v}_R(t_D)+\Delta\bar{v}_D=0.$$

Окончательное решение может быть записано в виде

$$\delta\bar{r}_A=-\bar{R}_h^*(t_A)\left[\bar{B}(t_D)+\bar{R}_h(t_D)\bar{A}^{-1}(t_A)\bar{R}_h^*(t_A)\right]^{-1}\bar{R}_h(t_D)\,\Delta\bar{v}_A-$$
$$-\bar{A}(t_A)\left[\bar{A}(t_A)+\bar{R}_h^*(t_A)\bar{B}^{-1}(t_D)\bar{R}_h(t_D)\right]^{-1}\bar{R}_h^*(t_A)\,\Delta\bar{v}_D, \qquad (6.64)$$

$$\delta\bar{r}_D=\bar{B}(t_D)\left[\bar{B}(t_D)+\bar{R}_h(t_D)\bar{A}^{-1}(t_A)\bar{R}_h^*(t_A)\right]^{-1}\bar{R}_h(t_D)\,\Delta\bar{v}_A-$$
$$-\bar{R}_h(t_D)\left[\bar{A}(t_A)+\bar{R}_h^*(t_A)\bar{B}^{-1}(t_D)\bar{R}_h(t_D)\right]^{-1}\bar{R}_h^*(t_A)\,\Delta\bar{v}_D. \qquad (6.65)$$

Здесь для удобства записи введены новые матрицы

$$\bar{A}(t_A)=\bar{C}_h^{*-1}(t_A)\left[\bar{C}_h^{*-1}(t_A)-\bar{C}_L^{-1}(t_A)\right]^{-1}\bar{C}_L^{-1}(t_A),$$

$$\bar{B}(t_D)=\bar{C}_R^{*-1}(t_D)\left[\bar{C}_R^{*-1}(t_D)-\bar{C}_h^{-1}(t_D)\right]^{-1}\bar{C}_h^{-1}(t_D).$$

Когда $\delta\bar{r}_A$ и $\delta\bar{r}_D$ вычислены по уравнениям (6.64) и (6.65), векторы положения $\bar{r}_{TA}$ и $\bar{r}_{TD}$ заменяются на $\bar{r}_{TA}+\delta\bar{r}_A$ и $\bar{r}_{TD}+\delta\bar{r}_D$. Затем рассчитываются три новые точные траектории, связывающие между собой попарно точки: 1) $\bar{r}_L$ с $\bar{r}_{TA}+\delta\bar{r}_A$; 2) $\bar{r}_{TML}+\delta\bar{r}_A$ с $\bar{r}_{TMR}+\delta\bar{r}_D$; 3) $\bar{r}_{TD}+\delta\bar{r}_D$ с $\bar{r}_R$. Скачки скорости на границе сферы влияния, конечно, останутся, но теперь они уже должны быть меньше по величине, чем во время предыдущей итерации. Процесс полностью повторяется до тех пор, пока не будет достигнута удовлетворительная непрерывность изменения скорости[1].

Пример того, насколько удовлетворительно работает эта схема на практике, приведен в табл. 6.1. Расчет начинался с

---

[1] Описанный процесс, строго говоря, не сохраняет инвариантными времена t_A и t_D (моменты входа траектории в сферу влияния и выхода из нее), так как концы получающихся в результате векторов $\bar{r}_{TA}$ и $\bar{r}_{TD}$ в общем случае уже не будут лежать на границе сферы влияния Луны *(прим. ред.)*.

кусочно-конической траектории с параметрами, имеющимися в разд. 5.5, после чего вычислялась точная траектория с помощью только что описанного метода. Для того чтобы скачок скорости на границе сферы влияния стал меньше 2 *м/сек*, потребовалось семь итераций. В таблице показаны составляющие разности скоростей и соответствующие изменения векторов положения (по составляющим) на границе сферы влияния, которые использовались на каждом шаге итерационного процесса.

Таблица 6. 1

Пример итерационного процесса вычисления точной траектории облета Луны на основе кусочно-конического приближения

№ итерации	Траектория отправления						Траектория возвращения					
	скачок скорости *м/сек*			изменение положения *км*			скачок скорсти *м/сек*			изменение положения *км*		
1	—41,2	—15,3	—13,1	—294	—187	—179	43	—20,1	—20,1	1005	—243	—541
2	—22,3	—13,1	—6,4	—113	—68	—32	23,2	—14,6	—11,6	500	—265	—290
3	—13,4	—7,6	—3,7	—77	—45	—18	13,7	—8,5	—6,7	288	—151	—166
4	—7,9	—4,6	—2,1	—53	—29	—11	7,9	—4,9	—4,0	167	—88	—95
5	—4,6	—2,7	—0,9	—34	—19	—8	4,6	—3,0	—2,1	96	—50	—55
6	—2,7	—1,2	—0,9	—21	—11	—5	2,7	—1,8	—1,2	55	—29	—32
7	—1,8	—0,9	—0,3	—13	—8	—3	1,2	—0,9	—0,9	32	—16	—18

В результате изменений положения на границе сферы влияния и соответствующих изменений скорости в момент отправления и возвращения величина радиуса-вектора перилуния уменьшилась от первоначальной величины 1900 *км* до 1791 *км* или до высоты 53 *км* от лунной поверхности. С другой стороны величины радиусов-векторов условного перигея для запуска и возвращения изменились лишь ненамного по сравнению с их первоначальными значениями.

Наконец, интересно сравнить скорость в моменты запуска и возвращения для кусочно-конического приближения и для окончательной точной траектории. Эти данные приведены в табл. 6. 2. Разности между начальными скоростями весьма малы; однако скорости в момент возвращения различаются по величине на 192 *м/сек*. Эту асимметрию разностей, по-видимому, можно объяснить изменением высоты перилуния примерно на 110 *км*.

Таблица 6.2

Сравнение точных и кусочно-конических траекторий

	Скорость в *м/сек*		
Траектория отправления			
Конические сечения	10894,0	—545,0	—1041,9
Точная	10893,4	—566,4	—1031,8
Разность	0,6	—21,4	10,1
Траектория возвращения			
Конические сечения	—9712,1	4431,0	—2853,3
Точная	—9468,7	4656,7	—3271,7
Разность	243,4	255,7	—418,4

6.7. Явное вычисление матриц возмущений

Фундаментальные матрицы возмущений $\overline{R}$, $\overline{R}^*$, $\overline{V}$, $\overline{V}^*$, предложенные в разд. 6.5, должны удовлетворять, как было показано, некоторым матричным дифференциальным уравнениям. Однако начальные условия для матриц $\overline{R}$ и $\overline{V}$ заданы в точке отправления, в то время как для матриц $\overline{R}^*$ и $\overline{V}^*$ начальные условия заданы в точке прибытия. Поэтому, чтобы определить значения элементов этих матриц в некоторый момент t внутри интервала $t_L < t < t_A$, решая дифференциальные уравнения, придется решить совместно 18 уравнений относительно $\overline{R}$ и $\overline{V}$, начиная с t_L и интегрируя вперед к моменту t. После этого надо будет повторить процесс для $\overline{R}^*$ и $\overline{V}^*$, начиная с t_A и интегрируя назад к моменту t. Кроме того, поскольку для таких расчетов необходимо знать номинальные векторы положения и скорости, то понадобится проинтегрировать еще 6 дифференциальных уравнений как в прямом, так и в обратном направлениях. Это дает в общей сложности 48 совместных дифференциальных уравнений, которые нужно проинтегрировать для получения необходимой информации. В настоящем разделе описывается другой метод выполнения указанного процесса для частного случая идеальных конических орбит, который не требует решения дифференциальных уравнений.

С этой целью запишем уравнения (2.43) и (2.44) в виде

$$\left.\begin{aligned} \bar{r}(t) &= F(t)\bar{r}_L + G(t)\bar{v}_L, \\ \bar{v}(t) &= F_t(t)\bar{r}_L + G_t(t)\bar{v}_L. \end{aligned}\right\} \qquad (6.66)$$

Скалярные коэффициенты F, G, F_t, G_t найти нетрудно. Обозначив через $\bar{\bar{\nabla}}$ векторный оператор

$$\bar{\nabla}=\left(\frac{\partial}{\partial \bar{v}_L}\right),$$

легко видеть, что справедлива запись

$$\overline{\overline{R}}(t)=\bar{\nabla}\bar{r}(t)=\bar{r}_L(\bar{\nabla}F)^T+G\bar{\bar{I}}+\bar{v}_L(\bar{\nabla}G)^T, \tag{6.67}$$

$$\overline{\overline{V}}(t)=\bar{\nabla}\bar{v}(t)=\bar{r}_L(\bar{\nabla}F_t)^T+G_t\bar{\bar{I}}+\bar{v}_L(\bar{\nabla}G_t)^T. \tag{6.68}$$

Непосредственно применяя оператор к коэффициентам, получим

$$\bar{\nabla}F=\frac{x^2}{\alpha\mu r_L}\left[1-\alpha x^2 S(\alpha x^2)-2C(\alpha x^2)\right]\bar{v}_L-$$

$$-\frac{x}{r_L}\left[1-\alpha x^2 S(\alpha x^2)\right]\bar{\nabla}x,$$

$$\bar{\nabla}G=\frac{x^3}{\alpha\mu^{3/2}}\left[C(\alpha x^2)-3S(\alpha x^2)\right]\bar{v}_L-\frac{x^2}{\mu^{1/2}}C(\alpha x^2)\bar{\nabla}x,$$

$$\bar{\nabla}F_t=\frac{\mu^{1/2}}{rr_L}\left\{\frac{x^3}{\mu}\left[S(\alpha x^2)-C(\alpha x^2)\right]\bar{v}_L+\right.$$

$$\left.+\left[\alpha x^2 C(\alpha x^2)-1\right]\bar{\nabla}x\right\}-\frac{F_t}{r^2}\overline{\overline{R}}^T\bar{r},$$

$$\bar{\nabla}G_t=\frac{r_L}{r}\bar{\nabla}F+\frac{x^2}{r^3}C(\alpha x^2)\overline{\overline{R}}^T\bar{r}.$$

Вектор $\bar{\bar{\nabla}}x$ определяется путем применения оператора градиента к уравнению (2.42):

$$\bar{\nabla}x=\frac{1}{\alpha\mu}\left\{x-\frac{\mu^{1/2}}{D}\left[\alpha r_L(t-G)+3t-G-\frac{xr_L}{\mu^{1/2}}\right]\right\}\bar{v}_L-$$

$$-\frac{1}{D}\frac{r_L}{\mu^{1/2}}(1-F)\bar{r}_L,$$

где

$$D=\frac{\bar{r}_L\cdot\bar{v}_L}{\mu^{1/2}}\left[x-\alpha\mu^{1/2}(t-G)\right]+(1-r_L\alpha)r_L(1-F)+r_L.$$

Такая же процедура[1] с успехом проводится для матриц $\overline{\overline{R}}^*$ и $\overline{\overline{V}}^*$,

[1] Задание матриц $\overline{\overline{R}}$, $\overline{\overline{V}}$, $\overline{\overline{R}}^*$, $\overline{\overline{V}}^*$, очевидно, равноценно заданию матрицы изохронных производных, простые формулы для элементов которой приведены, например, в работах [71], [76] для случая, когда номинальная траектория — коническое сечение, а вариации вычисляются относительно орбитальной (вращающейся) системы координат. Предлагаемые автором формулы, как видно из текста, сложны для вычислений и, по-видимому, их единственное достоинство состоит в применимости к любым, в том числе и параболическим, орбитам *(прим. ред.)*.

если просто поменять соответствующим образом ролями точку старта и точку встречи. Формально это будет означать замену $\bar{r}_L$ на $\bar{r}_A$, $\bar{v}_L$ на $\bar{v}_A$ и t на $t-(t_A-t_L)$.

Задачи

6. 1. Показать, что максимальное отклонение движения Земли от эллипса вследствие возмущения от Юпитера не превышает 1600 *км* за 1 месяц.

6. 2. Вывести дифференциальное уравнение для метода Энке, когда независимой переменной вместо t является x. Рассмотреть возможные преимущества такого построения процесса интегрирования.

6. 3. Для метода Энке показать, что выражение

$$1-\frac{r_{\text{оск}}^3}{r^3}=1-(1+q)^{-3/2}=q\,\frac{3+3q+q^2}{(1+q)^{3/2}+(1+q)^3}$$

при

$$q=\frac{(\bar{\delta}+2\bar{r}_{\text{оск}})\cdot\bar{\delta}}{r_{\text{оск}}^2}$$

обеспечивает еще один способ вычисления коэффициента при $\bar{r}$ в уравнении (6. 3). Показать далее, что этот коэффициент может быть выражен степенным рядом по q в виде

$$1-\frac{r_{\text{оск}}^3}{r^3}=3\,\frac{q}{2}\left[1-\frac{5}{2}\,\frac{q}{2}+\frac{5\cdot7}{2\cdot3}\left(\frac{q}{2}\right)^2-\frac{5\cdot7\cdot9}{2\cdot3\cdot4}\left(\frac{q}{2}\right)^3+\ldots\right]$$

и определить диапазон значений q, для которых ряд сходится. Разложение в степенной ряд является классическим способом, который используется для расчетов по схеме интегрирования Энке.

6. 4. Пусть a_{dt} и a_{dn} — составляющие возмущающего ускорения в плоскости орбиты вдоль вектора скорости и перпендикулярно к нему. Используя решение задачи 2. 25, показать, что скалярные произведения вектора ускорения на векторы положения и скорости имеют вид

$$\bar{r}\cdot\bar{a}_d=\frac{\mu re\sin f}{vh}\,a_{dt}-\frac{h}{v}\,a_{dn},$$

$$\bar{v}\cdot\bar{a}_d=va_{dt}.$$

Показать, что в этом случае уравнения для орбитальных элементов в вариациях могут быть записаны следующим образом:

$$\frac{da}{dt}=\frac{2a^2v}{\mu}\,a_{dt},$$

$$\frac{de}{dt}=\frac{1}{v}\left[2\,(e+\cos f)\,a_{dt}-\frac{r}{a}\sin f\cdot a_{dn}\right],$$

$$\frac{d\eta}{dt}=-\frac{1}{ev}\left[2\sin f\cdot a_{dt}+\left(2e+\frac{r}{a}\cos f\right)a_{dn}\right],$$

$$\frac{dh}{dt}=\frac{rh}{pv}\left(\frac{p}{r}a_{dt}+e\sin f\cdot a_{dn}\right),$$

$$\frac{d\sigma}{dt}=-\frac{\sqrt{1-e^2}}{ev}\left[2\left(1+\frac{re^2}{p}\right)\sin f\cdot a_{dt}+\frac{r}{a}\cos f\cdot a_{dn}\right].$$

Уравнения, выражающие вариации других элементов и аномалий, совпадают с соответствующими уравнениями разд. 6.2 и 6.3.

6.5. Уравнения, приведенные в задаче 6.4, вырождаются, когда эксцентриситет равен нулю. Если взять другую систему переменных, то эту трудность можно обойти. Например, обозначим

$$e_x=e\cos\omega,\quad e_y=e\sin\omega.$$

Теперь, используя уравнения задачи 6.4 и подставляя $\theta=\omega+f$, достаточно доказать справедливость уравнений

$$\frac{de_x}{dt}=\frac{2}{v}(e_x+\cos\theta)a_{dt}-\frac{1}{v}\left(2e_y+\frac{r}{a}\sin\theta\right)a_{dn}+$$
$$+\frac{re_y}{h}\frac{\sin\theta}{\operatorname{tg} i}a_{d\zeta},$$

$$\frac{de_y}{dt}=\frac{2}{v}(e_y+\sin\theta)a_{dt}+\frac{1}{v}\left(2e_x+\frac{r}{a}\cos\theta\right)a_{dn}-$$
$$-\frac{re_x}{h}\frac{\sin\theta}{\operatorname{tg} i}a_{d\zeta},$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{h}{r^2}-\frac{r\sin\theta}{h\operatorname{tg} i}a_{d\zeta},$$

$$\frac{da}{dt}=\frac{2a^2v}{\mu}a_{dt},$$

$$\frac{di}{dt}=\frac{r\cos\theta}{h}a_{d\zeta},$$

$$\frac{d\Omega}{dt}=\frac{r\sin\theta}{h\sin i}a_{d\zeta},$$

$$r=\frac{a\left(1-e_x^2-e_y^2\right)}{1+e_x\cos\theta+e_y\sin\theta},$$

$$h=\sqrt{\mu a\left(1-e_x^2-e_y^2\right)},$$

$$e=\sqrt{e_x^2+e_y^2},$$

$$\operatorname{tg}\omega=\frac{e_y}{e_x}.$$

6. 6. Учитывая только вторые гармоники, показать, что средняя скорость изменения большой полуоси орбиты близкого спутника Земли, вызываемого асимметрией Земли относительно ее оси, за один период обращения равна нулю.

6. 7. Предположим, что номинальная траектория вместе с полной системой матриц возмущений была вычислена между точкой отправления и точкой прибытия, которым соответствуют моменты времени t_L и t_A. Пусть требуется сдвинуть точку прибытия вдоль номинальной траектории так, чтобы встреча с планетой-целью происходила в более ранний момент времени t'_A . Матрицы $\overline{R}$ и $\overline{V}$, конечно, останутся прежними, так как они связаны с моментом t_L.

Показать, что новые матрицы со звездочками $\overline{\widetilde{R}}{}^*$ и $\overline{\widetilde{V}}{}^*$ можно получить по следующим формулам:

$$\overline{\widetilde{R}}{}^*(t) = -\overline{R}(t)\overline{\Lambda}^{-1}(t'_A) - \overline{R}^*(t)\overline{\Lambda}^{*-1}(t'_A),$$

$$\widetilde{V}^*(t) = -\overline{V}(t)\overline{\Lambda}^{-1}(t'_A) - \overline{V}^*(t)\overline{\Lambda}^{*-1}(t'_A).$$

6. 8. Более отчетливому пониманию скрытого механизма, на котором основан метод разд. 6. 6, может помочь следующий, несколько искусственный пример.

Летательный аппарат движется в бессиловом поле, причем движение начинается из начала координат в момент t_L со скоростью

$$\overline{v}_L = \frac{4\overline{i}_x + 3\overline{i}_y}{t_A - t_L}.$$

В точке с координатами (4, 3), соответствующей моменту t_A , скорость изменяется и становится равной

$$\overline{v}_h = \frac{4\overline{i}_x - \overline{i}_y}{t_D - t_A}.$$

Затем в точке с координатами (8, 2), соответствующей моменту t_D, скорость снова изменяется, на этот раз до величины

$$\overline{v}_R = \frac{4\overline{i}_x - 2\overline{i}_y}{t_R - t_D},$$

так что в момент t_R положение аппарата определяется координатами (12, 0). Совершенно очевидно, что точка (12, 0) может быть достигнута из точки (0, 0) за время $t_R - t_L$ без скачков скорости в моменты t_A и t_D, если скорость аппарата будет равна $\dfrac{12\overline{i}_x}{t_R - t_L}$.

а) Показать, что в данном случае матрицы возмущений имеют вид

$$\overline{C}_L(t_A)=\frac{1}{t_A-t_L}\overline{I},\quad \overline{C}_R^*(t_D)=\frac{1}{t_D-t_R}\overline{I};$$

$$\overline{R}_h(t_D)=-\overline{R}_h^*(t_A)=\overline{C}_h^{-1}(t_D)=-\overline{C}_h^{*-1}(t_A)=(t_D-t_A)\overline{I},$$

где $\overline{I}$ — двумерная единичная матрица.

б) Для случая, когда все временные интервалы равны между собой, т. е.

$$t_A-t_L=t_D-t_A=t_R-t_D=T,$$

показать, что

$$\Delta\overline{v}_A=\frac{4\overline{i}_y}{T},\quad \Delta\overline{v}_D=\frac{\overline{i}_y}{T},$$

и использовать уравнения (6. 64) и (6. 65) для получения выражений

$$\delta\overline{r}_A=-3\overline{i}_y,\quad \delta\overline{r}_D=-2\overline{i}_y.$$

Библиография

Методы интегрирования орбитальных элементов Коуэлла и Энке, изложенные в разд. 6. 1, являются классическими и довольно широко известны. Они представлены почти во всех учебниках по небесной механике. Здесь, однако, приведены две модификации стандартной схемы, связанной с методом Энке. Во-первых, вычисление оскулирующих орбит производится с помощью универсальных траекторных формул Бэттина [8], описанных в гл. II. Вторая модификация состоит в способе расчета члена $1-(r_{\text{оск}}/r)^3$. Во всех стандартных работах этот член вычисляется путем разложения в степенной ряд, вид которого показан в задаче 6. 3. Однако метод Поттера, использованный в гл. I для явного вычисления возмущающей силы, в равной степени применим и здесь, что позволяет обойтись без степенного ряда.

Существует множество способов вывода уравнений для вариаций орбитальных элементов. Классический подход обязан своим происхождением Лагранжу и может быть найден в книгах Смарта [56] и Мультона [47]. Метод Лагранжа и метод Гамильтона-Якоби не приводят прямо к уравнениям разд. 6. 2 и планетные уравнения Лагранжа являются, конечно, более общими. В других, менее известных методах силовые функции выражаются как частные производные возмущающих функций по орбитальным элементам. Эти средства хороши для решения задачи общих возмущений, но для наших целей такая степень усложнения не является необходимой. Использованный здесь метод вывода во многом основан на статье Андерсона [2]. В книге Хэргета [27] содержится аналогичный подход, однако его трактовкой вариации аномалии нелегко воспользоваться. Автор настоящей книги полагает, что вывод, изложенный в разд. 6.2, будет наиболее понятным для читателя, обладающего знанием современного математического аппарата.

Применение метода вариаций к анализу возмущений близкого спутника Земли в разд. 6.3 является элементарным примером метода вариации параметров. Эта задача более полно рассматривается во многих статьях, наиболее типичной из которых является работа Энтони и Фосдика [3]. Между прочим, их подход не связан с методом вариаций.

Принцип выбора других систем орбитальных элементов для исключения особенностей в конкретных приложениях выдвигали Хэррик [28] и другие авторы. Задача 6.5 представляет собой пример одного из таких приемов для разрешения проблем, связанных с крайне малым эксцентриситетом.

Обобщение метода вариаций в разд. 6.4 во многом заимствовано у Пайнса [50]. Однако способ исключения особенностей, возникающих при переходе через случай параболического движения, является оригинальным и принадлежит автору данной книги.

Материал разд. 6.5 по фундаментальным матрицам возмущений взят из части трудов МТИ [45], написанной автором. Имеется, конечно, множество эквивалентных подходов к описанию отклонений от номинальной орбиты. Многие авторы предпочитают начинать прямо с переходной матрицы (разд. 9.1) и отсюда выводить все необходимые частные матрицы. Автор настоящей книги считает свой подход наиболее целесообразным с точки зрения обучения, а также обеспечивающим наилучшее понимание механизма явлений. В частности, проводимые в разд. 6.6 вычисления точной траектории облета Луны являются достаточно понятными именно благодаря этим фундаментальным матрицам.

Автор хотел бы поблагодарить д-ра Миллера за значительный вклад, сделанный им во время разработки практического метода расчета точных траекторий на основе кусочно-конических приближений. Оригинальный подход, описанный Бэттином и Миллером [13], который состоит в подгонке точных орбит путем изменения высоты перилуния, нашел свое отражение в методе разд. 6.6. Новый способ исключает некоторые проблемы, связанные со сходимостью, которые являлись источником всяческих неприятностей для предыдущих методов. Практическое применение этой схемы выполнил У. Маршер из Приборной лаборатории МТИ.

Наконец, способ явного вычисления матриц возмущений для конических орбит взят из отчета автора [8]. Описанные вычисления представляют собой значительный шаг вперед по сравнению с первоначальным методом, также разработанным автором и изложенным в трудах МТИ [45].

ГЛАВА VII

Астронавигация

Излагая теорию наведения, прежде всего рассмотрим, как определяется положение космического корабля с помощью астрономических засечек. Для того чтобы операция определения положения была полностью автономной, она должна содержать последовательность любых измерений, производимых совместно или по отдельности и принадлежащих к одному из следующих типов:

1) определение угла между линиями визирования выбранной пары небесных тел;

2) наблюдение затмений звезд;

3) измерение углового диаметра планеты.

Радиолокационные измерения, конечно, также возможны, но они выходят за рамки настоящей работы. Тем не менее, ниже будут вкратце рассмотрены такие измерения, производимые с помощью наземных средств.

В навигационную засечку положения входит и еще одна операция — запись времени, указываемого часами, установленными на борту космического корабля. Результаты всех этих измерений должны служить для определения координат местоположения корабля, а также для корректирования текущих показаний часов. Здесь будут описаны некоторые из возможных схем необходимых вычислений, а также найдена связь между окончательными ошибками в оценках положения и времени и ошибками первичных измерений.

В первой части главы астрономические засечки будем изучать главным образом с геометрической точки зрения. Затем для удобства вычислений предположим, что положение космического корабля и текущее время уже приблизительно известны, что дает возможность применить методы возмущений. Для большинства важнейших практических случаев это допущение не представляет собой серьезного ограничения, так как отклонения от выбранной опорной траектории все равно должны удерживаться в малых пределах, чтобы задача полета выполнялась с приемлемым расходом топлива. Таким образом, в частности, будем считать, что существует номинальное время проведения засечки $\bar{t}$ и номинальный вектор положения космического корабля $\bar{r}$ в момент $\bar{t}$. Кроме того, будем полагать, что положение и скорость всех необходимых астрономических объектов в момент $\bar{t}$ точно известны.

Вторичные явления, возникающие из-за конечной скорости света, конечного расстояния до звезд и т. д., в настоящем анализе полностью игнорируются. Поправки, вытекающие из учета указанных явлений, можно вводить одновременно все сразу в каждой конкретной точке на номинальной траектории для модификации номинальных значений различых углов, которые в этой точке должны измеряться.

Сначала астрономические засечки будут исследоваться при допущении о том, что число измерений является всего лишь достаточным для однозначного определения местоположения корабля. Затем применим статистический подход, известный под названием *метода максимума правдоподобия,* что позволяет вводить в расчет избыточные измерения для компенсации приборных погрешностей. Эффективность метода иллюстрируется несколькими частными примерами. Для того чтобы должным образом подготовить читателя, в главу включен обзор основных положений статистического анализа.

7.1. Геометрическое описание навигационной засечки

Измерение угла, в вершине которого находится космический корабль, между линией визирования ближнего тела, т. е. Солнца или планеты, и линией визирования звезды устанавливает положение корабля на поверхности конуса с вершиной в точке места ближнего небесного тела. Ось конуса параллельна линии визирования звезды, а угол при вершине конуса равен удвоенному дополнению измеряемого угла до прямого.

Второе угловое измерение, включающее то же самое ближнее тело и другую звезду, устанавливает второй конус положений с другой осью и другим углом при вершине. Пересечение конусов дает две прямые линии, одна из которых является линией положений космического корабля. Измерение угла визирования третьей звезды по отношению к тому же ближнему небесному телу должно было бы служить просто для того, чтобы различить между собой уже найденные линии положений, но при этом оно не дало бы никакой новой информации. На практике эту возможную неопределенность можно легко разрешить и без этого измерения, поскольку линии положения обычно достаточно широко разнесены и приближенного знания места корабля будет вполне довольно, чтобы определить, которая из линий положений является истинной

Для определения дальности от корабля до ближнего тела необходимо третье измерение. Например, если выбрать второе ближнее тело, то угол между линиями визирования обоих тел образовал бы еще одну поверхность положений — так называемый *навоид.* Эта поверхность образуется вращением дуги окружности вокруг линии, соединяющей два небесных тела. Конечными точками дуги служат положения обоих тел, центр окружности лежит на перпендикуляре, восставленном из середины стягивающей хорды, а радиус зависит от величины измеряемого угла и расстояния между телами. Пересечение третьей поверхности положений с уже полученной линией положений устанавливает *засечку,* и положение корабля относительно ближнего небесного тела становится определенным. Этот частный пример выполнения засечки показан на рис. 7. 1.

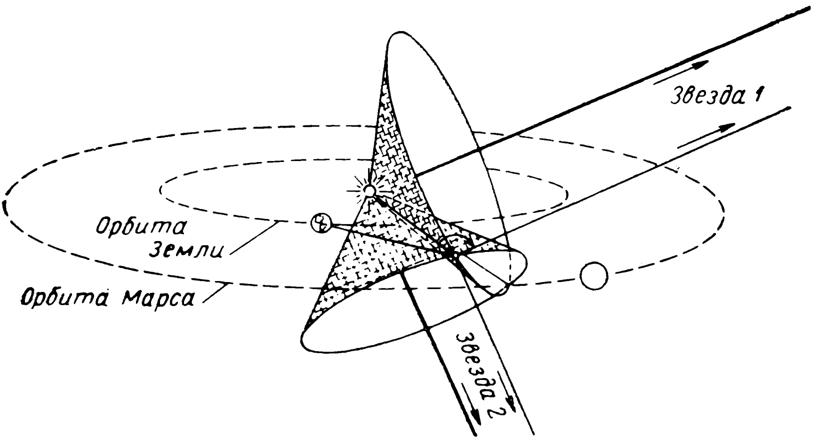


Рис. 7. 1. Геометрия навигационной засечки в космическом пространстве

Расчеты, связанные с описанным выше геометрическим построением, достаточно просты. Пусть $\bar{r}$ — неизвестный вектор положения космического корабля, начало которого для определенности будем помещать в центре Солнца. Пусть также $\bar{r}_p$ будет известным положением планеты, а $\bar{i}_1$ и $\bar{i}_2$ — двумя единичными векторами в направлении двух выбранных звезд. Три измерения дают три угла A_1, A_2, A_3. Следовательно, вектор положения корабля должен одновременно удовлетворять следующим трем нелинейным уравнениям:

$$\bar{r}\cdot\bar{i}_1 = -r\cos A_1,$$

$$\bar{r}\cdot\bar{i}_2 = -r\cos A_2,$$

$$\bar{r}\cdot\bar{r}_p = r^2 - r\,|\bar{r}_p - \bar{r}|\cos A_3.$$

Решение этих уравнений относительно составляющих вектора $\bar{r}$ дает засечку места космического корабля.

В другом методе определения дальности до ближнего тела может использоваться третья коническая поверхность положений, устанавливаемая измерением угла между линиями визирования второго ближнего тела и звезды. Пересечение этой поверхности с ранее найденной линией положений указывает на местонахождение корабля.

К совершенно другому типу наблюдений относится измерение видимого углового диаметра диска ближайшей планеты. Таким путем получают сферическую поверхность положений. Наблюдение *затмения* звезд ближайшей планетой определяет цилиндрическую поверхность положений, чья ось представляет собой направление на звезду, а диаметр равен диаметру планеты. Измерение углового диаметра и наблюдение затмения звезд являются практическими средствами навигации, когда корабль находится сравнительно близко от рассматриваемого небесного тела.

Методы точного определения положения, описанные в этом разделе, страдают множеством различных недостатков. Прежде всего, окончательные алгебраические уравнения, которые приходится решать, всегда являются нелинейными, что сильно затрудняет применение их в бортовых вычислительных устройствах. Во-вторых, эти методы требуют одновременного проведения измерений, а это почти всегда невозможно. И, наконец, последний и, по-видимому, наиболее важный из всех недостатков состоит в том, что в данном случае неизвестно ни одного удовлетворительного способа объединения избыточных измерений для компенсации приборных погрешностей.

Все эти недостатки можно исправить, если определять истинное положение космического корабля относительно известного и близкого номинального положения. Когда такой случай имеет место, можно воспользоваться мощными средствами линейного анализа возмущений. Оставшаяся часть главы как раз и будет посвящена использованию линейной теории для получения навигационных засечек.

7.2. Навигационные измерения

Здесь более или менее подробно рассматриваются математические процессы, связанные с определением положения космического корабля с помощью как астрономических наблюдений, так и радиолокационных измерений с Земли. Повсюду предполагается, что положение и скорость корабля уже приближенно известны и что могут быть применены методы возмущений.

В первой части анализа допускаем, что часы космического корабля являются точными, вследствие этого все измерения выполняются в известные моменты времени. Методы учета временны́х ошибок в вычислениях подробно обсуждаются в разд. 7.4.

Как будет показано ниже, каждое измерение устанавливает одну составляющую положения космического корабля вдоль некоторого направления в пространстве. Если q — величина, которую надо измерить, а δq — разность между ее истинным и номинальным значениями, то, как будет доказано в дальнейшем, вне зависимости от типа измерения существует следующее соотношение между δq и отклонением корабля по положению $\delta\bar{r}$:

$$\delta q = \bar{h} \cdot \delta\bar{r}. \tag{7.1}$$

Таким образом, тип измерения характеризуется только вектором $\bar{h}$.

Измерение «Солнце—планета»

Первым рассматриваемым типом измерений будет измерение угла между линиями визирования Солнца и планеты. Пусть S_0 и P_0 обозначают соответственно номинальные положения космического корабля и планеты в момент измерения (см. рис. 7·2). Пусть также $\bar{r}$ обозначает вектор дальности от Солнца до точки S_0, а $\bar{z}$ — вектор дальности от S_0 до P_0. Для угла A между направлениями на Солнце и на планету имеем выражение

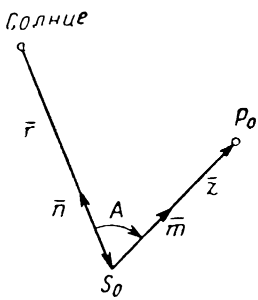


Рис. 7.2. Измерение угла между направлениями на Солнце и на планету

$$\cos A = -\frac{\bar{r}\cdot\bar{z}}{rz}.$$

Изображая все изменения дифференциалами первого порядка, можем записать

$$\delta(rz\cos A) = -\bar{r}\cdot\delta\bar{z} - \bar{z}\delta\bar{r}.$$

Раскрывая левую часть этого уравнения и учитывая очевидные соотношения

$$\delta r = \frac{\bar{r}\cdot\delta\bar{r}}{r}, \quad \delta z = \frac{\bar{z}\cdot\delta\bar{z}}{z}, \quad \delta\bar{z} = -\delta\bar{r},$$

получим

$$\delta A = \left(\frac{\bar{m} - (\bar{n}\cdot\bar{m})\,\bar{n}}{r\sin A} + \frac{\bar{n} - (\bar{n}\cdot\bar{m})\,\bar{m}}{z\sin A}\right)\cdot\delta\bar{r}.$$

Здесь $\bar{n}$ — единичный вектор направления от S_0 к Солнцу, а $\bar{m}$ — единичный вектор от S_0 к P_0.

Когда результат переписан в виде

$$\delta A = \left(\frac{\bar{n}_1}{r} + \frac{\bar{n}_2}{z}\right)\cdot\delta\bar{r} \tag{7.2}$$

нетрудно заметить, что векторы $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$ также являются единичными. В частности, $\bar{n}_1$ — это вектор, лежащий в плоскости измерения (т. е. в плоскости, определяемой положениями корабля и планеты и направлением на Солнце) и нормальный к линии визирования Солнца. Аналогично $\bar{n}_2$ лежит в плоскости измерения и нормален к линии визирования планеты. Очевидно, что полученное соотношение остается справедливым, если измеряется угол между направлениями на две планеты. При этом в уравнении (7. 2) достаточно лишь изменить обозначения.

Измерение «планета—звезда»

Измерение угла между линиями визирования планеты и звезды может рассматриваться как частный случай измерения «Солнце—планета». Устремляя r к бесконечности в уравнении (7. 2), получим соотношение следующего вида:

$$\delta A = \frac{\bar{n} \cdot \delta \bar{r}}{z}. \tag{7.3}$$

Здесь также очевидно, что $\bar{n}$ — снова единичный вектор в плоскости измерения, перпендикулярный к линии визирования планеты. Ясно, что такого же рода соотношение можно получить и в случае, когда ближним объектом является Солнце.

Измерение диаметра планеты

Согласно рис. 7. 3, видимый угловой диаметр A находится с помощью выражения

$$\sin \frac{A}{2} = \frac{D}{2z},$$

где D — истинный диаметр планеты.

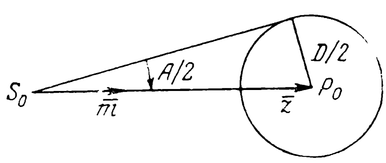


Рис. 7. 3. Измерение углового диаметра планеты

Взяв, как и раньше, дифференциалы, получим

$$\delta A = \frac{D\bar{m} \cdot \delta \bar{r}}{z^2 \cos \frac{A}{2}}. \tag{7.4}$$

Здесь опять $\bar{m}$ — единичный вектор, направленный от S_0 к планете

Измерение, связанное с затмением звезды

Рассмотрим следующий тип измерений, заключающийся в определении времени, когда звезда заслоняется планетой. Вновь обозначим через $\bar{z}$ — вектор дальности от S_0 до P_0, через $\bar{r}$ — вектор от Солнца до S_0, а $\bar{n}$ будет означать единичный вектор направления на звезду, затмение которой должно произойти. Обозначив также через γ угол между направлениями на звезду и на планету (рис. 7.4), будем иметь в номинальный момент затмения

$$\bar{n}\cdot\bar{z}=z\cos\gamma.$$

Вычисляя дифференциалы первого порядка, получим

$$\bar{n}\cdot\delta\bar{z}=\cos\gamma\delta z-z\sin\gamma\delta\gamma=\cos\gamma\bar{m}\cdot\delta\bar{z}-z\sin\gamma\delta\gamma.$$

Здесь $\bar{m}$ — единичный вектор направления от S_0 на P_0. Угловое отклонение $\delta\gamma$ вычисляется как дифференциал первого порядка из соотношения

$$2z\sin\gamma=D.$$

Взяв этот дифференциал, получим

$$\delta\gamma=-\frac{D\bar{m}\cdot\delta\bar{z}}{2z^2\cos\gamma}.$$

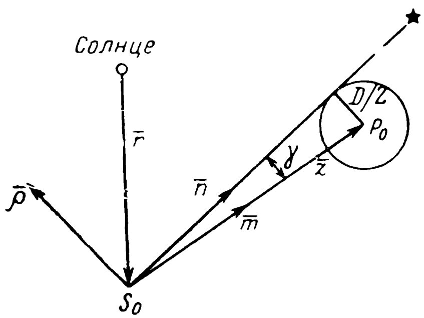


Рис. 7.4. Измерение момента затмения звезды

Далее, если $\bar{v}_p$ и $\bar{v}$ — векторы скорости планеты и космического корабля, и если δt — разность между наблюдаемым и номинальным моментами затмения, то будем иметь между ними следующее соотношение:

$$\delta\bar{z}=\bar{v}_p\delta t-(\delta\bar{r}+\bar{v}\delta t)=-\delta\bar{r}-\bar{v}_r\delta t,$$

где $\bar{v}_r$ — скорость космического корабля относительно планеты. Объединяя эти соотношения, окончательно найдем *

$$\delta t=-\frac{\bar{\rho}\cdot\delta\bar{r}}{\bar{\rho}\cdot\bar{v}_r}, \tag{7.5}$$

где $\bar{\varrho}$ — единичный вектор, перпендикулярный к $\bar{n}$ и лежащий в плоскости, которая определяется линиями визирования планеты и звезды.

---

* При выводе формулы (7.5) в отличие от предыдущего и последующего материала $\delta\bar{z}$ означает разность векторов $\bar{z}$ в фактический и номинальный моменты затмения, между тем как $\delta\bar{r}$ — по-прежнему разность векторов $\bar{r}$ в номинальный момент затмения звезды на истинной и номинальной орбитах *(прим. ред.)*.

Измерение высоты звезды

В качестве следующего измерения рассмотрим угол между линиями визирования звезды и кромки диска планеты. Из рис. 7.5 имеем

$$\bar{n}\cdot\bar{z}=z\cos(A+\gamma),$$

где A — угол, о котором идет речь. Снова взяв дифференциалы, учитывая, что

$$\delta\bar{r}=-\delta\bar{z},$$

и используя уравнения (7.2) и (7.4), получим

$$\frac{1}{z}\bar{n}_2\cdot\delta\bar{r}=\delta A+\delta\gamma=\delta A+\frac{D\bar{m}\cdot\delta\bar{r}}{2z^2\cos\gamma}=$$

$$=\delta A+\frac{\operatorname{tg}\gamma}{z}\bar{m}\cdot\delta\bar{r}$$

или окончательно

$$\delta A=\frac{1}{z}(\bar{n}_2-\operatorname{tg}\gamma\cdot\bar{m})\cdot\delta\bar{r}=$$

$$=\frac{\bar{\rho}\cdot\delta\bar{r}}{z\cos\gamma}. \qquad (7.6)$$

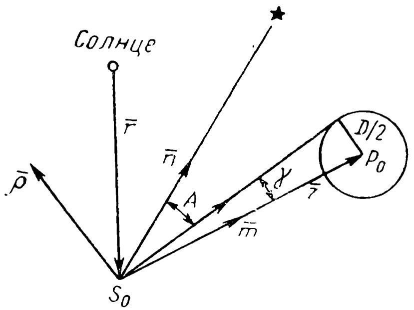


Рис. 7.5. Измерение высоты звезды над диском планеты

Можно видеть, что величина $z\cos\gamma$ представляет собой просто расстояние от S_0 до края планеты. Единичный вектор $\bar{\rho}$ лежит в плоскости измерения и перпендикулярен линии визирования кромки планеты.

Измерение «звезда—ориентир»

Для измерения углового расстояния между ориентиром на поверхности планеты и звездой направим единичный вектор $\bar{\rho}$ перпендикулярно к линии визирования ориентира в плоскости измерения. Тогда, если $\bar{p}$ — вектор положения ориентира относительно центра планеты, можно записать

$$\delta A=\frac{\bar{\rho}\cdot\delta\bar{r}}{|\bar{z}+\bar{p}|}. \qquad (7.7)$$

Радиолокационные измерения дальности, азимута и угла возвышения

Предположим, что радиолокатор расположен в начале системы координат, которая является декартовой и выбрана так, что ее ось z направлена от центра Земли к месту размещения локатора, ось x представляет собой направление, от которого отсчитывается азимут, а ось y дополняет систему координат до правой. Тогда можно записать

$$\overline{r}=r\begin{pmatrix}\cos\beta\cos\theta\\ \cos\beta\sin\theta\\ \sin\beta\end{pmatrix},$$

где r — дальность, θ — угол азимута, а β — угол возвышения летательного аппарата по отношению к месту расположения радиолокатора. Взяв дифференциалы раздельно для каждой из трех переменных, получим

$$\frac{\partial\overline{r}}{\partial r}\delta r=\begin{pmatrix}\cos\beta\cos\theta\\ \cos\beta\sin\theta\\ \sin\beta\end{pmatrix}\delta r,$$

$$\frac{\partial\overline{r}}{\partial\beta}\delta\beta=r\begin{pmatrix}-\sin\beta\cos\theta\\ -\sin\beta\sin\theta\\ \cos\beta\end{pmatrix}\delta\beta,$$

$$\frac{\partial\overline{r}}{\partial\theta}\delta\theta=r\begin{pmatrix}-\cos\beta\sin\theta\\ \cos\beta\cos\theta\\ 0\end{pmatrix}\delta\theta.$$

Эти выражения можно переписать в виде, соответствующем уравнению (7.1)*:

$$\left.\begin{aligned}&\delta r=(\cos\beta\cos\theta\quad\cos\beta\sin\theta\quad\sin\beta)\,\delta\overline{r},\\ &\delta\beta=\frac{1}{r}\,(-\sin\beta\cos\theta\quad-\sin\beta\sin\theta\quad\cos\beta)\,\delta\overline{r},\\ &\delta\theta=\frac{1}{r\cos\beta}\,(-\sin\theta\quad\cos\theta\quad 0)\,\delta\overline{r}.\end{aligned}\right\}\qquad(7.8)$$

Коэффициенты в этих уравнениях можно рассматривать как единичные векторы, каждый из которых направлен в сторону увеличения одного из параметров r, β, θ.

Три любые независимые измерения могут быть использованы для выполнения навигационной засечки. Так как для каждого из различных типов измерений уравнения, связывающие $\delta\overline{q}$ и $\delta\overline{r}$, линейны, то результат трех измерений можно представить в матричном виде

$$\delta\overline{q}=\overline{H}\delta\overline{r},\qquad(7.9)$$

где $\overline{H}$ — матрица размерности (3×3), каждая строка которой состоит из компонентов вектора $\overline{h}$, соответствующих отдельному из-

* Формулы (7.8) справедливы вследствие взаимной ортогональности векторов, на которые в приведенных выше соотношениях умножаются величины δr, $\delta\beta$ и $\delta\theta$ *(прим. ред.)*.

мерению. Трехмерный вектор — столбец $\delta\bar{q}$ составлен из отклонений наблюдаемых величин от соответствующих им номинальных значений. Если все три измерения, представленные матрицей $\bar{H}$, действительно независимы, то вектор отклонений по положению космического корабля от номинальной орбиты в момент измерения можно вычислить по формуле

$$\delta\bar{r} = \bar{H}^{-1}\,\delta\bar{q}. \tag{7.10}$$

7.3. Математический анализ навигационной засечки

Как было показано в предыдущем разделе, трех независимых и точных угловых измерений, выполненных в известный момент времени, достаточно для однозначного определения положения летательного аппарата. Из-за присутствия приборных ошибок будет существовать неопределенность, связанная с засечкой положения. Наилучший выбор измерений в любой момент времени зависит от геометрического расположения космического корабля в солнечной системе. Для того чтобы наглядно продемонстрировать эффективность различных систем измерений, выведем аналитические выражения для среднеквадратичных ошибок, порождаемых разными совокупностями замеров.

При этом потребуется отличать друг от друга измеренные и истинные значения величин $\delta\bar{q}$, а также оцениваемые и истинные значения вариаций положения $\delta\bar{r}$. Для измеренного отклонения $\bar{q}$ от номинала будет использоваться обозначение $\delta\tilde{\bar{q}}$, а для истинного отклонения оставим символ $\delta\bar{q}$. Аналогично оценку или предполагаемое значение отклонения $\bar{r}$ от номинальной величины будем обозначать через $\delta\hat{\bar{r}}$, в то время как $\delta\bar{r}$ будет означать истинное отклонение. Теперь можно записать

$$\delta\tilde{\bar{q}} = \delta\bar{q} + \bar{\alpha},$$

$$\delta\hat{\bar{r}} = \delta\bar{r} + \bar{\varepsilon},$$

Здесь $\bar{\alpha}$ и $\bar{\varepsilon}$ представляют собой ошибки, сделанные при измерениях и при оценке.

Истинные отклонения $\delta\bar{q}$ и $\delta\bar{r}$, очевидно, удовлетворяют уравнению (7. 10). Тогда, если рассматривать только достаточное число измерений, то для несмещенной оценки должно выполняться соотношение

$$\delta\hat{\bar{r}} = \bar{H}^{-1}\,\delta\tilde{\bar{q}}. \tag{7.11}$$

Следовательно, векторы ошибок $\bar{\alpha}$ и $\bar{\varepsilon}$ также должны быть связаны через эту матрицу

$$\bar{\varepsilon} = \bar{H}^{-1}\,\bar{\alpha}. \tag{7.12}$$

Модуль вектора ошибки $\bar{\varepsilon}$ является просто квадратным корнем из величины

$$\varepsilon^2 = \bar{\varepsilon}^T \bar{\varepsilon} = \bar{\alpha}^T \bar{H}^{T-1} \bar{H}^{-1} \bar{\alpha}, \tag{7.13}$$

в которой нетрудно узнать *положительно определенную квадратичную форму* из составляющих вектора измерительных ошибок $\bar{\alpha}$. Мы сейчас рассмотрим три различные комбинации измерений и найдем ошибку оценки, получающейся в результате применения каждой из них.

Измерение «планета—звезда, планета—звезда, диаметр планеты»

Выберем для удобства выкладок систему координат x, y, z, связанную с космическим кораблем, и направим ее ось z в сторону планеты, как показано на рис. 7. 6. Обозначим через $\bar{n}_1$ единичный вектор, лежащий в плоскости измерения угла между первой звездой и планетой, а через $\bar{n}_2$ — единичный вектор в плоскости второго измерения, причем оба они нормальны к направлению от корабля к планете. Эти векторы будут лежать в плоскости xy, причем $\bar{n}_1$ можно взять вдоль положительного направления оси x. Тогда, если θ — угол между $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$, имеем

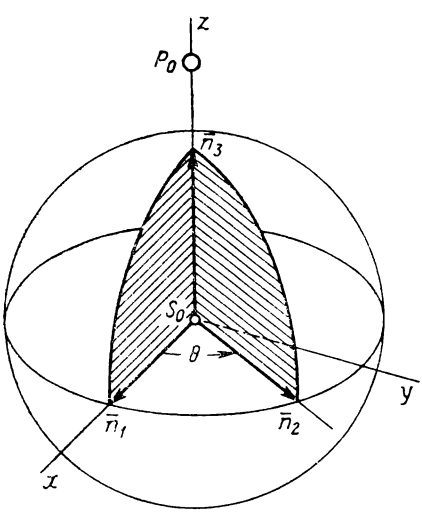


Рис. 7. 6. Геометрия измерения «планета—звезда, планета—звезда, диаметр планеты»

$$\bar{H} = \begin{vmatrix} \frac{1}{z} & 0 & 0 \\ \frac{\cos\theta}{z} & \frac{\sin\theta}{z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s} \end{vmatrix},$$

где

$$s = \frac{z^2}{D} \cos\frac{A}{2} = \frac{z}{2D} \sqrt{4z^2 - D^2}.$$

Обратная матрица имеет вид

$$\bar{H}^{-1} = \begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ -z\operatorname{ctg}\theta & z\operatorname{cosec}\theta & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix}$$

и поэтому можно переписать уравнение (7. 13) следующим образом:

$$\varepsilon^2 = \bar{\alpha}^T \begin{pmatrix} z^2 \operatorname{cosec}^2 \theta & -z^2 \operatorname{cosec} \theta \operatorname{ctg} \theta & 0 \\ -z^2 \operatorname{cosec} \theta \operatorname{ctg} \theta & z^2 \operatorname{cosec}^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & s^2 \end{pmatrix} \bar{\alpha}.$$

Матрица этого уравнения может быть приведена к диагональному виду поворотом системы координат на 45° вокруг оси z. Обозначив через $\bar{\alpha}'$ вектор ошибок в повернутой системе, получим

$$\bar{\alpha}' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \bar{\alpha}.$$

Таким образом, выражение для квадрата ошибки, получающейся в результате трех измерений, принимает вид

$$\varepsilon^2 = z^2 \operatorname{cosec} \theta (\operatorname{cosec} \theta + \operatorname{ctg} \theta) \alpha_1'^2 + z^2 \operatorname{cosec} \theta (\operatorname{cosec} \theta - \operatorname{ctg} \theta) \alpha_2'^2 + s^2 \alpha_3'^2.$$

Ясно, что ошибка будет минимальной, если удастся найти такие две звезды, для которых $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$ взаимно ортогональны. В этом случае

$$\min \varepsilon^2 = z^2 \left[\alpha_1'^2 + \alpha_2'^2 + \left(\frac{z^2}{D^2} - \frac{1}{4} \right) \alpha_3'^2 \right]. \quad (7.14)$$

Отметим в заключение, что ошибка уменьшается, по мере того как сокращается расстояние между космическим кораблем и планетой.

Измерение «планета—звезда, планета—звезда, Солнце—звезда»

Выберем ориентированную, как в предыдущем случае, систему координат, которая показана на рис. 7. 7. Пусть $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$ — единичные векторы, определенные так же, как и в предшествующей системе измерений, и пусть $\bar{n}_3$ — единичный вектор в плоскости измерения «Солнце—звезда», нормальный к направлению от космического корабля к Солнцу. Тогда из геометрических соотношений имеем

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 & 0 \\ \frac{\cos \theta}{z} & \frac{\sin \theta}{z} & 0 \\ \frac{\cos \gamma \cos \beta}{r} & \frac{\cos \gamma \sin \beta}{r} & \frac{\sin \gamma}{r} \end{pmatrix}.$$

Обратив матрицу, получим

$$\overline{H}^{-1}=\begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ -z\operatorname{ctg}\theta & z\operatorname{cosec}\theta & 0 \\ z\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{cosec}\theta\sin(\beta-\theta) & -z\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{cosec}\theta\sin\beta & r\operatorname{cosec}\gamma \end{pmatrix}.$$

Хотя всегда существует возможность повернуть координатные оси таким образом, чтобы матрицы $\overline{H}'^{-1}$ и $\overline{H}^{-1}$ стали диагональными, тем не менее необходимые выкладки в данном случае являются слишком громоздкими. Однако можно получить легко обозримый результат, если вместо абсолютных ошибок иметь дело с осредненными ошибками.

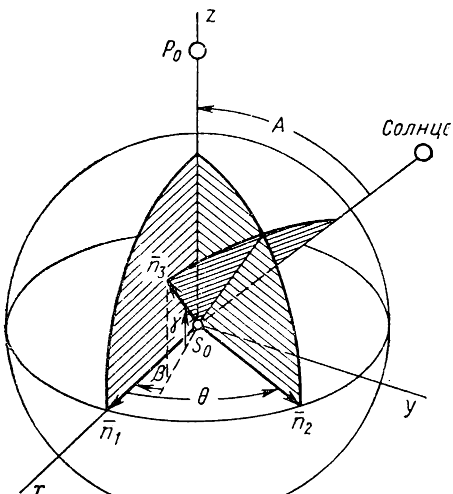


Рис. 7.7. Геометрия измерения «планета—звезда, планета—звезда, Солнце—звезда»

Допустим, что средняя приборная ошибка равна нулю и что каждая ошибка измерений не зависит от другой, т. е.

$$\overline{\alpha}=0, \quad \overline{\alpha_1\alpha_2}=\overline{\alpha_1\alpha_3}=\overline{\alpha_2\alpha_3}=0.$$

Тогда, как нетрудно видеть, средний квадрат ошибки засечки будет выражаться соотношением

$$\overline{\varepsilon^2}=z^2\operatorname{cosec}^2\theta\,[1+\operatorname{ctg}^2\gamma\sin^2\times$$
$$\times(\beta-\theta)]\overline{\alpha_1^2}+z^2\operatorname{cosec}^2\theta\,(1+$$
$$+\operatorname{ctg}^2\gamma\sin^2\beta)\,\overline{\alpha_2^2}+r^2\operatorname{cosec}^2\gamma\overline{\alpha_3^2}.$$

Очевидно, что наилучшей звездой, которую надлежит выбрать для измерения совместно с Солнцем, будет такая звезда, которая лежит в одной плоскости с кораблем, Солнцем и планетой — для нее угол γ примет свое максимальное значение, равное углу A между линиями визирования планеты и Солнца.

Оптимальную величину β для минимизации $\overline{\varepsilon^2}$ найдем, требуя, чтобы частная производная $\overline{\varepsilon^2}$ по β равнялась нулю. Если $\overline{\alpha_1^2}=\overline{\alpha_2^2}$, то отсюда следует, что угол β должен составлять ровно половину θ. Поэтому, если звезда для измерения «Солнце—звезда» выбрана оптимально, то две наилучшие звезды для измерений «звезда—планета» должны быть такими, чтобы угол между их плоскостями измерений делился пополам плоскостью измерения «Солнце—звезда». В результате использования такой совокупности измерений ошибка станет функцией только угла θ и выражение для нее примет вид

$$\min\overline{\varepsilon^2}(\theta)=z^2\operatorname{cosec}^2\theta\,[2+\operatorname{ctg}^2 A\cdot(1-\cos\theta)]\,\overline{\alpha_1^2}+r^2\operatorname{cosec}^2 A\cdot\overline{\alpha_3^2}.$$

Оптимальная величина θ, которую обозначим через θ_0, определяется как решение уравнения

$$\cos^2\theta_0 - 2(1+2\operatorname{tg}^2 A)\cos\theta_0 + 1 = 0,$$

откуда можно найти угол

$$\cos\theta_0 = \frac{1-\sin A}{1+\sin A}$$

и соответствующий средний квадрат ошибки

$$\min\overline{\varepsilon^2} = \operatorname{cosec}^2 A\left[\frac{z^2}{2}(1+\sin A)^2\overline{\alpha_1^2} + r^2\overline{\alpha_3^2}\right]. \tag{7.15}$$

Полностью аналогичные результаты получаются, когда засечка определяется тремя измерениями типа «Солнце—звезда», «Солнце—звезда» и «планета—звезда». Для этого достаточно в уравнениях поменять местами r и z.

Измерение «планета—звезда, планета—звезда, планета—Солнце»

Особый интерес представляет совокупность трех наблюдений, состоящая в измерении углов между линиями визирования ближайшей планеты и 1) звезды, 2) другой звезды и 3) Солнца. Как мы увидим впоследствии, если планета находится гораздо ближе к космическому кораблю, чем Солнце, то матрицу $\overline{H}$ не всегда можно обратить обычными способами. Для того чтобы найти пути преодоления этой трудности, нужно прежде всего исследовать элементы матрицы $\overline{H}$.

С этой целью определим единичные векторы $\bar{n}_1$, $\bar{n}_2$, $\bar{n}_3$ и $\bar{n}_4$ следующим образом:

$\bar{n}_1$ — лежит в плоскости измерения «планета—звезда 1» и нормален к направлению от корабля к планете;

$\bar{n}_2$ — лежит в плоскости измерения «планета—звезда 2» и нормален к направлению от корабля к планете;

$\bar{n}_3$ — лежит в плоскости измерения «планета—Солнце» и нормален к направлению от корабля к планете;

$\bar{n}_4$ — лежит в плоскости измерения «планета—Солнце» и нормален к направлению от корабля к Солнцу.

Теперь, если r и z — дальности соответственно до Солнца и до планеты, то согласно результатам, полученным в разд. 7.2, матрица $\overline{H}$ определяется выражением

$$\overline{H} = \begin{pmatrix} \dfrac{\bar{n}_1^T}{z} \\ \dfrac{\bar{n}_2^T}{z} \\ \dfrac{\bar{n}_3^T}{z} + \dfrac{\bar{n}_4^T}{r} \end{pmatrix}.$$

Так как все векторы $\bar{n}_1$, $\bar{n}_2$ и $\bar{n}_3$ перпендикулярны к одному и тому же направлению, то они не могут быть независимыми. Следовательно, если $z \ll r$, то определитель матрицы $\bar{H}$ будет близок к нулю.

Встретившись с таким препятствием, введем две скалярные величины a и b, удовлетворяющие соотношению

$$\bar{n}_3 = a\bar{n}_1 + b\bar{n}_2.$$

Теперь матрицу $\bar{H}$ можно переписать в виде

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} & 0 \\ \frac{a}{z} & \frac{b}{z} & \frac{1}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{n}_1^T \\ \bar{n}_2^T \\ \bar{n}_4^T \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты a и b определятся из выражений

$$a = \frac{(\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_3) - (\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2)(\bar{n}_2 \cdot \bar{n}_3)}{1 - (\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2)^2},$$

$$b = \frac{(\bar{n}_2 \cdot \bar{n}_3) - (\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2)(\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_3)}{1 - (\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2)^2}.$$

Поскольку векторы $\bar{n}_1$, $\bar{n}_2$ и $\bar{n}_4$ взаимно независимы, обращение второго сомножителя в уравнении, определяющем матрицу $\bar{H}$, не составляет особой проблемы. Первый же сомножитель можно обратить непосредственно. Следовательно, имеем

$$\bar{H}^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{n}_1^T \\ \bar{n}_2^T \\ \bar{n}_4^T \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ -ar & -br & r \end{pmatrix},$$

что и представляет собой искомый результат.

Обратимся теперь к рис. 7.8 и выберем такую же систему координат, как и раньше. Тогда матрицу $\bar{H}$ можно переписать в следующем виде:

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} & 0 \\ \frac{a}{z} & \frac{b}{z} & \frac{1}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\cos A \cos\beta & -\cos A \sin\beta & \sin A \end{pmatrix},$$

где

$$a = \frac{\sin(\theta - \beta)}{\sin\theta}, \quad b = \frac{\sin\beta}{\sin\theta}.$$

Обратная матрица выглядит следующим образом:

$$\overline{H}^{-1} = \begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ -z\operatorname{ctg}\theta & -z\operatorname{cosec}\theta & 0 \\ az\operatorname{ctg}A - ar\operatorname{cosec}A & bz\operatorname{ctg}A - br\operatorname{cosec}A & r\operatorname{cosec}A \end{pmatrix}.$$

Если, как и прежде, считать ошибки измерений взаимно независимыми и полагать, что $\overline{\alpha_1^2} = \overline{\alpha_2^2}$, то для среднего квадрата будем иметь

$$\overline{\varepsilon^2} = \Big[2z^2\operatorname{cosec}^2\theta + (z\operatorname{ctg}A - r\operatorname{cosec}A)^2\left(\frac{\sin^2(\theta-\beta) + \sin^2\beta}{\sin^2\theta}\right)\Big] \times \overline{\alpha_1^2} + r^2\operatorname{cosec}^2 A\overline{\alpha_3^2}.$$

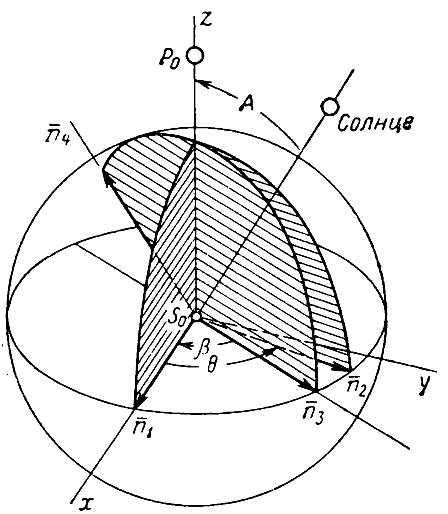


Рис. 7.8. Геометрия измерения «планета—звезда, планета—звезда, планета—Солнце»

И опять оптимальное значение β равно половине угла θ, так что минимальная ошибка в функции θ записывается в виде

$$\min \overline{\varepsilon^2}(\theta) = \left[2z^2\operatorname{cosec}^2\theta + \frac{(z\operatorname{ctg}A - r\operatorname{cosec}A)^2}{1+\cos\theta}\right]\overline{\alpha_1^2} + r^2\operatorname{cosec}^2 A\cdot\overline{\alpha_3^2}.$$

Оптимум $\theta = \theta_0$ найдем, решив уравнение

$$\frac{4z^2\cos\theta_0}{(1-\cos\theta_0)^2} = (z\operatorname{ctg}A - r\operatorname{cosec}A)^2,$$

в результате чего получим

$$\cos\theta_0 = \frac{\sqrt{1-2p\cos A + p^2} - \sin A}{\sqrt{1-2p\cos A + p^2} + \sin A}.$$

Здесь для краткости введено обозначение $p = r/z$.

После подстановки этого значения θ выражение для среднего квадрата ошибки примет вид

$$\min\overline{\varepsilon^2} = \frac{z^2}{2}\operatorname{cosec}^2 A\,(\sin A + \sqrt{1-2p\cos A + p^2})^2\overline{\alpha_1^2} + r^2\operatorname{cosec}^2 A\cdot\overline{\alpha_3^2}. \tag{7.16}$$

Как и раньше, меняя местами r и z, получим аналогичные результаты для системы измерений «Солнце—звезда, Солнце—звезда, Солнце—планета».

7.4. Метод коррекции временных ошибок

Операция выполнения навигационной засечки состоит из последовательности астрономических наблюдений описанного выше типа. Добавление к ней четвертого независимого наблюдения дает возможность не только определить координаты космического корабля в пространстве, но также и ввести поправку на показания бортовых часов. В данном разделе будет разработана необходимая для этой цели схема вычислений и, кроме того, предложен метод учета неодновременности выполнения измерений, составляющих засечку.

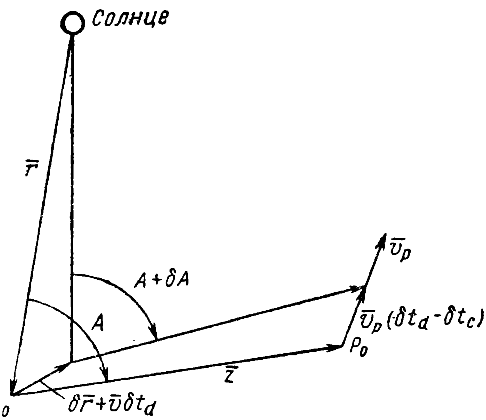


Рис. 7.9. Измерение угла между линиями визирования Солнца и планеты

Для начала предположим, что процесс визирования начинается в тот момент, когда бортовые часы показывают номинальное время t_0. Пусть при этом часы ошибаются на величину δt_c, так что истинное время начала визирования составляет $t_0-\delta t_c$. Далее, так как процесс визирования занимает ненулевое время, будем ставить в соответствие каждому угловому измерению отрезок времени δt_d, представляющий собой время, которое проходит с момента начала визирования до момента, когда этот конкретный угол уже измерен. Следовательно, истинный момент измерения равен $t_0-\delta t_c+\delta t_d$. Отметим, что величина δt_d точно известна и может быть введена в бортовое вычислительное устройство, чего нельзя сделать с величиной δt_c.

Здесь будет рассматриваться лишь один из типов измерений, перечисленных в первом подразделе разд. 7.2, а именно — измерение угла между линиями визирования Солнца и планеты. Рассмотрение остальных типов измерений предоставляется читателю в качестве упражнений.

Как и прежде, P_0 и S_0 обозначают номинальные положения планеты и космического корабля в момент t_0; $\bar{r}$ — вектор положения корабля относительно Солнца, а $\bar{z}$ — вектор положения планеты относительно корабля. Обозначив через A угол от линии визирования Солнца до линии визирования планеты, как показано на рис. 7.9, выведем формулу для изменения этого угла δA, которое вызывается следующими причинами:

1) движением планеты в течение интервала $\delta t_d — \delta t_c$ между номинальным временем и истинным временем измерения;

2) начальным смещением положения космического корабля $\delta \bar{r}$ по отношению к S_0 в момент $t_0 — \delta t_c$, когда начинается процесс визирования;

3) наличием вектора расстояния $\bar{v} \delta t_d$, проходимого аппаратом со скоростью $\bar{v}$ с начала засечки до момента окончания замера A.

Заметим, что начальное смещение $\delta \bar{r}$ может возникать частично из-за движения корабля в интервале времени δt_c и частично в результате его отклонения от номинального положения S_0 в момент t_0. Одна из основных задач анализа навигационной информации — соответствующим образом разделить эти составляющие.

Угол A выражается через скалярное произведение

$$\cos A = -\frac{\bar{r} \cdot \bar{z}}{r \cdot z}.$$

Как обычно, все отклонения будем рассматривать в виде дифференциалов, что позволяет записать

$$\delta (rz \cos A) = -(\bar{r} \cdot \delta \bar{z} + \bar{z} \cdot \delta \bar{r}'),$$

где

$$\delta \bar{r}' = \delta \bar{r} + \bar{v} \delta t_d,$$

$$\delta \bar{z} = \bar{v}_p \, (\delta t_d - \delta t_c) - \delta \bar{r}',$$

а $\bar{v}_p$ — вектор скорости планеты в момент t_0.

Разлагая дифференциалы на соответствующие направления и учитывая соотношения

$$\delta r = \frac{\bar{r} \cdot \delta \bar{r}'}{r}, \quad \delta z = \frac{\bar{z} \cdot \delta \bar{z}}{z},$$

можно получить для δA следующее выражение:

$$\delta A = \left(\frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{v}}{r} + \frac{\bar{n}_2 \cdot (\bar{v} - \bar{v}_p)}{z} \right) \delta t_d +$$

$$+ \left(\frac{\bar{n}_1}{r} + \frac{\bar{n}_2}{z} \right) \cdot \delta \bar{r} + \frac{\bar{n}_2 \cdot \bar{v}_p}{z} \delta t_c. \quad (7.17)$$

Определения векторов $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$ приведены в первой части разд. 7.2

Коэффициент при δt_d в уравнении (7.17) зависит только от номинальных условий в момент t_0. Таким образом, если величина δt_d известна, можно прямо вводить поправку δA каждый раз, когда измерение угла будет выполнено. Будем предполагать, что здесь имеет место именно этот случай и далее всюду члены, связанные с δt_d, будут опускаться.

Для удобства обозначений целесообразно пользоваться четырехмерным * вектором отклонений $\delta\bar{x}_4$:

$$\delta\bar{x}_4 = \begin{pmatrix} \delta\bar{r} \\ \delta t_c \end{pmatrix}.$$

Это позволит аналогично предыдущим случаям выразить измеренное (угловое) отклонение в виде

$$\delta A = \bar{h}_4 \cdot \delta\bar{x}_4.$$

Теперь, конечно, вектор $\bar{h}$ — четырехмерный. Для конкретного типа измерения, который здесь обсуждается, имеем

$$\bar{h}_4 = \begin{pmatrix} \dfrac{\bar{n}_1}{r} + \dfrac{\bar{n}_2}{z} \\ \dfrac{\bar{n}_2 \cdot \bar{v}_p}{z} \end{pmatrix}.$$

Тогда в матричной форме можно достаточно просто записать выражение, аналогичное уравнению (7.9):

$$\delta\bar{q}_4 = \bar{H}_{44}\delta\bar{x}_4,$$

где $\bar{H}_{44}$ в данном случае матрица размерности (4×4), каждая строка которой состоит из компонентов четырехмерных векторов $\bar{h}$ для каждого из четырех отдельных измерений. Как и прежде, вектор $\delta\bar{q}_4$ составляется из отклонений наблюдаемых величин от их номинальных значений и в данном случае также является четырехмерным. Если матрица $\bar{H}_{44}$ неособенная, т. е. если измерения дают независимую информацию, то можно записать

$$\delta\bar{x}_4 = \bar{H}_{44}^{-1}\delta\bar{q}_4.$$

Измеренные, истинные и оценочные величины будем различать с помощью тех же обозначений, что и в разд. 7.3. Таким образом, будем иметь соотношение

$$\delta\hat{\bar{x}}_4 = \bar{H}_{44}^{-1}\delta\tilde{\tilde{q}}_4.$$

Ввиду наличия соответствующей информации становится возможной более правильная оценка $\delta\bar{r}$. Действительно, после того как получена оценка δt_c, можно внести поправку в оценку отклонения положения, учитывающую ошибку во времени начала засечки. Это делается добавлением к оценке положения вектора расстояния,

* Размерность вектора будет отмечаться соответствующим индексом только в тех случаях, когда она больше трех *(прим. автора)*.

пройденного космическим кораблем за время $\hat{\delta t_c}$. Тогда наилучшая оценка четырехмерного вектора отклонений получится из выражения

$$\delta\hat{\bar{x}}_4 = \bar{X}_{44}\bar{H}_{44}^{-1}\delta\tilde{\bar{q}}_4, \tag{7.18}$$

где

$$\bar{X}_{44} = \begin{pmatrix} \bar{I} & & \bar{v} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а $\bar{I}$ — трехмерная единичная матрица.

7.5. Оценка методом максимума правдоподобия

Описанный выше процесс определения отклонений по положению и коррекции показаний бортовых часов называется *детерминированным,* потому что для однозначного нахождения параметров предполагалось использование лишь достаточного числа измерений. Если измерения были точными, то вычисленные таким способом отклонения также должны быть точными в пределах допущений, свойственных линейному анализу. Однако существуют погрешности приборов, так что имеет смысл включить в засечку избыточные измерения. Это позволило бы уменьшить неопределенность знания измеренных величин по сравнению с той точностью, которой можно добиться, используя лишь минимальное количество информации. Когда используется избыточная информация, задача становится по своей природе статистической и для ее решения, т. е. для определения интересующих нас параметров, удобно применять методы теории статистических оценок.

Для облегчения дальнейшего обсуждения кажется целесообразным изложить некоторые основы статистического анализа, которые потребуются для общего понимания приводимого метода. Некоторое предварительное знакомство с предметом предполагается, так что следующий ниже короткий обзор должен лишь ориентировать читателя на конкретные приложения, рассматриваемые здесь и в дальнейших главах.

Множество всех возможных случайных исходов статистического эксперимента называется *пространством выборок.* Для наименования действительнозначной функции α, чья величина определяется исходом случайного эксперимента, используется термин *случайная переменная.* Со случайной переменной α связывается *функция распределения вероятности:*

$$P(a) = \text{вероятность } (\alpha \leqslant a),$$

поэтому для каждого a имеется соответствующая вероятность $P(a)$ того, что результатом эксперимента явится величина α, которая не превышает a. Если функция $P(a)$ дифференцируема, то определяется так называемая *функция плотности распределения вероятности* или просто *плотность распределения*

$$p(a)=\frac{dP(a)}{da},$$

откуда следует

$$P(a)=\int_{-\infty}^{a} p(\alpha)\,d\alpha,$$

$$\text{вероятность } (a \leqslant \alpha \leqslant b)=\int_{a}^{b} p(\alpha)\,d\alpha,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\alpha)\,d\alpha=1.$$

Статистическое среднее значение, или *математическое ожидание* $\overline{\alpha}$ случайной переменной α определяется выражением

$$\overline{\alpha}=\int_{-\infty}^{\infty} \alpha p(\alpha)\,d\alpha,$$

а ее *средний квадрат* вычисляется по формуле

$$\overline{\alpha^2}=\int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2 p(\alpha)\,d\alpha.$$

Для осредненного квадрата отклонения α от ее математического ожидания применяется название *дисперсия* α. Дисперсия получается следующим образом:

$$\sigma^2=\overline{(\alpha-\overline{\alpha})^2}=\overline{\alpha^2}-(\overline{\alpha})^2.$$

Квадратный корень из дисперсии σ называется *стандартным отклонением*, или *среднеквадратичным отклонением (СКО)*.

Все эти понятия можно распространить на две и более случайные переменные. Для двух переменных α_1 и α_2 *совместная функция распределения* $P(a_1, a_2)$ определяется выражением

$$P(a_1, a_2)=\text{вероятность } (\alpha_1 \leqslant a_1 \text{ и } \alpha_2 \leqslant a_2),$$

а *совместная плотность распределения*

$$p(a_1, a_2)=\frac{\partial^2 P(a_1, a_2)}{\partial a_1 \partial a_2}.$$

Две случайные переменные называются *статистически независимыми*, если выполняется равенство

$$P(a_1, a_2)=P_1(a_1)P_2(a_2)$$

или эквивалентное равенство

$$p(a_1, a_2) = p_1(a_1)\, p_2(a_2).$$

Если α_1 и α_2 независимы, то, как можно показать,

$$\overline{\alpha_1\alpha_2} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha_1\alpha_2 p(\alpha_1, \alpha_2)\, d\alpha_1 d\alpha_2 = \bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2.$$

С другой стороны, соотношение

$$\overline{\alpha_1 + \alpha_2} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\alpha_1 + \alpha_2)\, p(\alpha_1, \alpha_2)\, d\alpha_1 d\alpha_2 = \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2$$

является справедливым, невзирая на то, являются ли α_1 и α_2 независимыми или нет. Все эти положения очевидным способом распространяются на случай более двух случайных переменных.

Пусть имеется m случайных переменных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ с нулевыми математическими ожиданиями. Их совместное распределение называется *m-мерным нормальным распределением,* если выполняется условие

$$p(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m\, |\bar{A}_{mm}|}} \exp\left(-\frac{1}{2}\,\bar{\alpha}_m^T \bar{A}_{mm}^{-1} \bar{\alpha}_m\right), \qquad (7.19)$$

где $\bar{\alpha}_m$ — m-мерный вектор с компонентами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, а $\bar{A}_{mm}$ — матрица распределения, обычно называемая *корреляционной матрицей:*

$$\bar{A}_{mm} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1^2} & \overline{\alpha_1\alpha_2} & & \overline{\alpha_1\alpha_m} \\ \overline{\alpha_2\alpha_1} & \overline{\alpha_2^2} & \ldots & \overline{\alpha_2\alpha_m} \\ \overline{\alpha_m\alpha_1} & \overline{\alpha_m\alpha_2} & & \overline{\alpha_m^2} \end{pmatrix}. \qquad (7.20)$$

Символ $|\bar{A}_{mm}|$ обозначает определитель матрицы $\bar{A}_{mm}$.

Вернемся теперь к проблеме избыточных измерений и предположим, что для одной навигационной засечки было сделано всего m измерений, где $m > 3$. Пример засечки, состоящей из шести измерений, показан на рис. 7.10. Первые три измерения включают ближайшую планету, от линии визирования которой отсчитываются углы до направлений на Солнце и на две звезды. Четвертое измерение связано с Солнцем и звездой, а пятое — с Солнцем и второй ближней планетой. Наконец, шестое измерение относится к угловому диаметру ближайшей планеты.

Как всегда, имеем соотношение между истинными значениями измеряемых величин и отклонений положения, которое может быть записано в виде

$$\delta\bar{q}_m = \bar{H}_{m3}\delta\bar{r},$$

где $\overline{H}_{m3}$ — прямоугольная матрица из m строк и трех столбцов. Из выражения

$$\delta\overline{\tilde{\tilde{q}}}_m = \delta\overline{q}_m + \overline{\alpha}_m$$

следует

$$\overline{\alpha}_m = \delta\overline{\tilde{\tilde{q}}}_m - \overline{H}_{m3}\delta\overline{r}. \qquad (7.21)$$

Поставленная задача состоит в оценке $\delta\overline{r}$, когда задана совокупность измерений $\delta\overline{\tilde{\tilde{q}}}_m$. Будем полагать, что компоненты $\overline{\alpha}_m$ представляют собой случайные переменные с нормальным совместным распределением. Оценка $\delta\hat{\overline{r}}$ детерминированным методом ($m=3$)

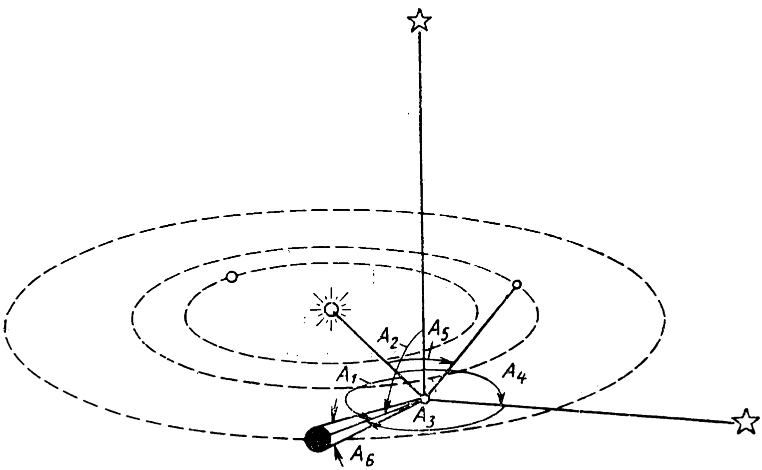


Рис. 7.10. Пример навигационной засечки с избыточным числом измерений

в соответствии с уравнением (7.11) производилась так, будто $\overline{\alpha}_3=0$. Иначе говоря, при отсутствии какого-либо известного смещения наилучшая оценка ошибки измерения была нулевой. Такая оценка, по-видимому, максимизирует плотность распределения, выражаемую формулой (7.19), и является в некотором смысле наиболее правдоподобной величиной $\overline{\alpha}_3$ для любой типичной системы измерений. При наличии избыточных измерений уже нельзя выбирать оценку $\delta\overline{r}$, приводящую к нулевой оценке всех приборных погрешностей. С другой стороны, существует возможность так оценить $\delta\overline{r}$, чтобы соответствующий вектор $\overline{\alpha}_m$ также максимизировал свою функцию плотности распределения вероятности. Получающаяся в результате оценка $\delta\hat{\overline{r}}$ известна под названием *оценки методом максимума правдоподобия* и определяется следующим образом.

Подставляя уравнение (7.21) в (7.19), получим некоторую функцию $\delta\tilde{\tilde{q}}_m$ при данной совокупности измерений:

$$L(\delta\bar{r}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m |\bar{A}_{mm}|}} \exp \times$$

$$\times \left[-\frac{1}{2} (\delta\tilde{\tilde{\bar{q}}}_m - \bar{H}_{m3}\delta\bar{r})^T \bar{A}_{mm}^{-1} (\delta\tilde{\tilde{\bar{q}}}_m - \bar{H}_{m3}\delta\bar{r}) \right],$$

которая называется *функцией правдоподобия*. Для того чтобы максимизировать $L(\delta\bar{r})$, нужно просто приравнять нулю три ее частные производные по трем составляющим $\delta\bar{r}$. В результате будем иметь

$$\left(\delta\tilde{\tilde{\bar{q}}}_m - \bar{H}_{m3}\delta\bar{r}\right)^T \bar{A}_{mm}^{-1} \bar{H}_{m3} = 0.$$

Следовательно, оценка методом максимума правдоподобия получается как решение уравнения

$$\bar{H}_{3m}\bar{A}_{mm}^{-1}\bar{H}_{m3}\delta\hat{\bar{r}} = \bar{H}_{3m}\bar{A}_{mm}^{-1}\delta\tilde{\tilde{\bar{q}}}_m, \tag{7.22}$$

где

$$\bar{H}_{3m} = \bar{H}_{m3}^T.$$

Можно, конечно, расширить этот способ, если ввести оценку коррекции на показания часов. Однако при наличии избыточной информации приходится рассматривать в качестве одного из измерений время в соответствии с показаниями бортовых часов. Непосредственное измерение $\delta\tilde{t}_c$ есть нуль, так как при отсутствии какой-либо информации о неисправности часов обычно считают, что они указывают точное время. Если τ — ошибка часов, то

$$\delta\tilde{t}_c = \delta t_c + \tau = 0.$$

Далее опишем обычную схему вычислений для оценки методом максимума правдоподобия вектора $\delta\bar{r}$ и ошибки δt_c. Введем два вектора-столбца — m-мерный $\delta\bar{q}_m$ и четырехмерный $\delta\bar{x}_4$:

$$\delta\bar{q}_m = \begin{pmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \delta q_3 \\ \delta t_c \\ \delta q_5 \\ \dots \\ \delta q_m \end{pmatrix}, \quad \delta\bar{x}_4 = \begin{pmatrix} \delta\bar{r} \\ \delta t_c \end{pmatrix}.$$

Это позволяет записать

$$\delta\overline{q}_m = \overline{H}_{m4}\delta\overline{x}_4.$$

Удобно разделять матрицу $\overline{H}_{m4}$ на две:

$$\overline{H}_{m4} = \begin{pmatrix} \overline{H}_{44} \\ \overline{H}_{r4} \end{pmatrix},$$

где $\overline{H}_{44}$ — четырехмерная квадратная матрица, а $\overline{H}_{r4}$ — прямоугольная матрица с числом строк, равным числу избыточных измерений. Заметим, что все элементы последней строки $\overline{H}_{44}$ равны нулю, за исключением крайнего правого элемента, который равен единице.

Первых трех измерений достаточно для однозначного определения $\delta\overline{r}$. Четвертое измерение — показание часов — не дает никакой информации, пока не будет сделано дополнительное или пятое измерение. Строго говоря, четвертое измерение является первым из избыточных, так как пятое измерение нужно для оценки ошибки бортовых часов.

Измеренные отклонения от номинальных значений $\delta\tilde{\overline{q}}_m$ и соответствующие ошибки измерений выражаются векторами

$$\delta\tilde{\overline{q}}_m = \begin{pmatrix} \delta\tilde{q}_1 \\ \delta\tilde{q}_2 \\ \delta\tilde{q}_3 \\ 0 \\ \delta\tilde{q}_5 \\ \dots \\ \delta\tilde{q}_m \end{pmatrix}, \quad \overline{\alpha}_m = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ -\delta t_c \\ \alpha_5 \\ \dots \\ \alpha_m \end{pmatrix}.$$

Если компоненты $\overline{\alpha}_m$ — случайные переменные, распределенные по нормальному закону, то применение метода максимума правдоподобия дает

$$\delta\hat{\overline{x}}_4 = \overline{F}_{4m}\delta\tilde{\overline{q}}_m, \tag{7.23}$$

где

$$\overline{F}_{4m} = \overline{X}_{44}(\overline{H}_{4m}\overline{A}_{mm}^{-1}\overline{H}_{m4})^{-1}\,\overline{H}_{4m}\overline{A}_{mm}^{-1}. \tag{7.24}$$

Матрица $\overline{X}_{44}$ используется, как описано в разд. 7.4, для внесения поправки в оценку $\delta\overline{r}$ на смещение времени измерений $\delta\hat{t}_c$.

Окончательная оценка, характеризуемая уравнением (7.23), может быть приведена к более удобному виду для частного случая, когда отдельные ошибки измерений составляют систему статистически независимых случайных переменных. В этом случае корреляционная матрица $\overline{A}_{mm}$ является диагональной, а ее диагональные элементы представляют собой дисперсии соответствующих ошибок измерений. Поэтому можно разбить матрицу на следующие блоки:

$$\overline{A}_{mm}=\begin{pmatrix}\overline{A}_{44}\overline{O}_{4r} & \\ \overline{O}_{r4}\overline{A}_{rr} & \end{pmatrix}.$$

Затем, если дополнительно ввести две квадратные матрицы

$$\overline{P}_{44}=\overline{H}_{44}^{-1}\ \overline{A}_{44}\overline{H}_{44}^{T-1},$$

$$\overline{Q}_{rr}=\overline{A}_{rr}+\overline{H}_{r4}\overline{P}_{44}\overline{H}_{4r},$$

то можно непосредственно доказать *, что

$$(\overline{H}_{4m}\overline{A}_{mm}^{-1}\overline{H}_{m4})^{-1}=\overline{P}_{44}-\overline{P}_{44}\overline{H}_{4r}\overline{Q}_{rr}^{-1}\overline{H}_{r4}\overline{P}_{44}.$$

Затем, подставляя это соотношение в уравнение (7.24), получим после некоторых преобразований**

$$\overline{F}_{4m}=\overline{X}_{44}\overline{H}_{44}^{-1}[(\overline{I}_{44}\quad \overline{O}_{4r})+\overline{Z}_{4r}\quad \overline{Q}_{rr}^{-1}(-\overline{Y}_{r4}\ \ \overline{I}_{rr})], \tag{7.25}$$

где две новые прямоугольные матрицы обозначают следующее:

$$\overline{Y}_{r4}=\overline{H}_{r4}\overline{H}_{44}^{-1},$$

$$\overline{Z}_{4r}=\overline{A}_{44}\overline{Y}_{4r}.$$

---

* Действительно, положив

$$\overline{H}_{4r}\overline{A}_{rr}^{-1}\overline{H}_{r4}=\overline{B}_{44},$$

получим

$$(\overline{H}_{4m}A_{mm}^{-1}\overline{H}_{m4})^{-1}=(\overline{P}_{44}^{-1}+\overline{B}_{44})^{-1}=\overline{P}_{44}+(\overline{P}_{44}^{-1}+\overline{B}_{44})^{-1}-\overline{P}_{44}=$$

$$=\overline{P}_{44}-\overline{P}_{44}(\overline{I}_{44}+\overline{B}_{44}\overline{P}_{44})^{-1}\overline{B}_{44}\overline{P}_{44}=\overline{P}_{44}-\overline{P}_{44}\overline{H}_{4r}\overline{Q}_{rr}^{-1}\overline{H}_{r4}\overline{P}_{44}.$$ (*прим. ред.*)

** Для доказательства уравнения (7.25) следует учесть, что

$$(\overline{P}_{44}-\overline{P}_{44}\overline{H}_{4r}Q_{rr}^{-1}\overline{H}_{r4}\overline{P}_{44})\ \overline{H}_{4r}\overline{A}_{rr}^{-1}=\overline{P}_{44}\overline{H}_{4r}\ (\overline{A}_{rr}^{-1}-$$

$$-\overline{Q}_{rr}^{-1}\overline{H}_{r4}\overline{P}_{44}\overline{H}_{4r}\overline{A}_{rr}^{-1})=\overline{P}_{44}\overline{H}_{4r}\overline{Q}_{rr}^{-1}.$$

Тогда

$$(\overline{H}_{4m}\overline{A}_{mm}^{-1}\overline{H}_{m4})^{-1}\overline{H}_{4m}\overline{A}_{mm}^{-1}=(\overline{H}_{4m}\overline{A}_{mm}^{-1}\overline{H}_{m4})\times$$

$$\times\,\|\,\overline{H}_{44}^{T}\overline{A}_{44}^{-1}\quad \overline{H}_{4r}\overline{A}_{rr}^{-1}\,\|=\|\,\overline{H}_{44}^{-1}-\overline{P}_{44}\overline{H}_{4r}\overline{Q}_{rr}^{-1}H_{r4}\overline{H}_{44}^{-1}\quad \overline{P}_{44}\overline{H}_{4r}\overline{Q}_{rr}^{-1}\,\|=$$

$$=\|\,\overline{H}_{44}^{-1}\,\|\,\overline{I}_{44}-\overline{Z}_{4r}\overline{Q}_{rr}^{-1}\overline{Y}_{r4}\quad \overline{Z}_{4r}\overline{Q}_{rr}^{-1}\,\|$$ (*прим. ред.*).

Матрица $\overline{Q}_{rr}$ может быть выражена через $\overline{Y}_{r4}$ и $\overline{Z}_{4r}$:

$$\overline{Q}_{rr}=\overline{A}_{rr}+\overline{Y}_{r4}\overline{Z}_{4r}.$$

Матрица $\overline{F}_{4m}$, связывающая между собой $\delta\hat{\overline{x}}_4$ и $\delta\tilde{\tilde{q}}_m$ и записанная в виде (7.25), имеет большое преимущество перед соответствующей матрицей вида (7.24). В варианте (7.25) не возникает никаких вычислительных затруднений, связанных с допущением о том, что какое-либо из отдельных измерений является совершенно точным. Это допущение приводит к особенной матрице $\overline{A}_{mm}$, которую нельзя обратить, как этого требует уравнение вида (7.24). В то же время в уравнении (7.25) такого обращения делать не нужно. Кроме того, из (7.25) сразу видно, к чему приводит добавление избыточных измерений.

При вычислениях по формуле (7.25) требуется обращать две матрицы: $\overline{H}_{44}$ и $\overline{Q}_{rr}$. Благодаря специальному виду $\overline{H}_{44}$, т. е.

$$\overline{H}_{44}=\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc:c} & & & h_{14} \\ & \overline{H}_{33} & & h_{24} \\ & & & h_{34} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

эта операция сводится к обращению матрицы размерности всего лишь (3×3). В результате обращения получим

$$\overline{H}_{44}^{-1}=\left(\begin{array}{c:c} \overline{H}_{33}^{-1} & -\overline{H}_{33}^{-1}\begin{pmatrix} h_{14} \\ h_{24} \\ h_{34} \end{pmatrix} \\ \hdashline 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{array}\right).$$

Порядок матрицы $\overline{Q}_{rr}$ равен числу избыточных измерений. Так как она состоит из суммы двух матриц, одна из которых диагональная, то необходимое обращение должно происходить без каких-либо затруднений, если не считать совершенно особые или искусственные случаи.

7.6. Анализ ошибок и примеры

Для проведения статистического анализа навигационной засечки нужно иметь аналитическое выражение для корреляционной матрицы ошибок оценки. С этой целью обозначим четырехмерный вектор ошибок оценки через $\overline{e}_4$, т. е.

$$\overline{e}_4=\begin{pmatrix} \overline{\varepsilon} \\ \tau \end{pmatrix}$$

и поэтому

$$\delta\hat{\overline{x}}_4=\delta\overline{x}_4+\overline{e}_4.$$

Теперь, подставляя это выражение в уравнение (7.23) и замечая, что истинные отклонения удовлетворяют (7.23) тождественно, получим

$$\overline{e}_4 = \overline{F}_{4m}\overline{\alpha}_m.$$

Корреляционная матрица $\overline{E}_{44}$ ошибок оценки имеет вид

$$\overline{E}_{44} = \overline{\overline{e}_4\overline{e}_4^T} = \overline{F}_{4m}\overline{A}_{mm}\overline{F}_{m4}, \tag{7.26}$$

где $\overline{A}_{mm}$ — корреляционная матрица ошибок измерений вида (7.20).

Матрицу $\overline{E}_{44}$ можно разбить на блоки следующим образом:

$$\overline{E}_{44} = \begin{pmatrix} \overline{\varepsilon\ \varepsilon^T} & \overline{\varepsilon\tau} \\ \overline{\tau\varepsilon^T} & \overline{\tau^2} \end{pmatrix}.$$

Здесь правый нижний элемент представляет собой средний квадрат ошибки оценки погрешности показаний бортовых часов. Квадратная матрица вверху слева есть не что иное, как корреляционная матрица ошибок оценки положения. След этой матрицы, записываемый в виде

$$tr\left(\overline{\varepsilon\ \varepsilon^T}\right) = \overline{\varepsilon_1^2} + \overline{\varepsilon_2^2} + \overline{\varepsilon_3^2},$$

инвариантен относительно ортогонального преобразования координат, и, следовательно, квадратный корень из него является удобной мерой ошибки оценки. Будем называть этот след *средним квадратом ошибки положения,* а квадратный корень из него — *среднеквадратичной ошибкой положения.*

Главная цель выбора конкретной совокупности измерений для навигационной засечки состоит в получении наименьшей возможной среднеквадратичной ошибки. Анализ, проведенный в разд. 7.3, представляет в основном лишь теоретический интерес, так как в нем предполагается, что звезды всегда могут быть выбраны оптимально. Из практических соображений приходится ограничиваться использованием для измерений только самых ярких звезд. Аналитические методы оптимизации, хотя несомненно и являются желательными, тем не менее не могут быть вполне приспособлены к задачам выбора измерений при наличии такого рода физических ограничений. Поэтому оставшаяся часть раздела будет посвящена описанию наряду с числовыми примерами вычислительной схемы, которая показала себя полезной при анализе задачи практических измерений.

Была составлена программа для универсальной цифровой вычислительной машины, предназначенная для выполнения расчетов, связанных с навигационной засечкой. Начальные условия состояли из информации о номинальной траектории и предполагаемых стратегий выбора соответствующих измеряемых углов. На выходе машины получалась наилучшая (в пределах наложенных ограничений) совокупность измерений, которая обеспечивала минимальную среднеквадратичную ошибку. Вычислялись среднеквадратичные ошибки положения и ошибки по времени для системы трех измерений, выбранной в качестве основной, а также те же самые ошибки по мере добавления каждого избыточного измерения. Это позволило в явном виде исследовать влияние дополнительных измерений.

Было сформулировано шесть различных стратегий выбора астрономических объектов для получения навигационных засечек. Эти стратегии применялись для каждой из четырех отобранных межпланетных траекторий. Подробно стратегии приводятся ниже.

Стратегия 1

Основные измерения:

1 и 2 — ближайшая видимая планета и две наилучшие звезды;

3 — ближайшая видимая планета и Солнце.

Избыточные измерения:

4 и 5 — вторая ближняя видимая планета и две наилучшие звезды;

6 — вторая ближняя видимая планета и Солнце или угловой диаметр ближайшей видимой планеты.

Стратегия 2

Основные измерения:

1 и 2 — ближайшая видимая планета и две наилучшие звезды;

3 — ближайшая видимая планета и Солнце.

Избыточные измерения:

4 и 5 — Солнце и две наилучшие звезды;

6 — ближайшая видимая планета и Солнце.

Если планета расположена настолько близко, что измерение ее углового диаметра дает существенную информацию, то избыточная система для стратегии 2 состоит из следующих измерений:

4 — Солнце и звезда, наилучшая в том смысле, что она оптимизирует первые четыре измерения;

5 — Солнце и вторая ближняя видимая планета;

6 — угловой диаметр ближайшей видимой планеты.

Стратегия 3

Основные измерения:

1 и 2 — Солнце и две наилучшие звезды;

3 — Солнце и ближайшая видимая планета.

Избыточные измерения:

4 и 5 — ближайшая видимая планета и две наилучшие звезды;

6 — вторая ближняя видимая планета и Солнце или угловой диаметр ближайшей видимой планеты.

Стратегия 4

Основные измерения:

1 и 2 — Солнце и две наилучшие звезды;

3 — ближайшая видимая планета и наилучшая звезда для оптимизации первых трех измерений.

Избыточные измерения.

4 — ближайшая видимая планета и наилучшая звезда с точки зрения оптимальности первых четырех измерений;

5 — Солнце и ближайшая видимая планета;

6 — Солнце и вторая ближайшая видимая планета или угловой диаметр ближайшей видимой планеты.

Стратегия 5

Основные измерения:

1 и 2 — Солнце и две наилучшие звезды;

3 — Солнце и ближайшая видимая планета.

Избыточные измерения:

4 — ближайшая видимая планета и наилучшая звезда, оптимизирующая первые четыре измерения;

5 — ближайшая видимая планета и наилучшая звезда, оптимизирующая первые пять измерений;

6 — Солнце и вторая ближняя видимая планета или угловой диаметр ближайшей видимой планеты.

Стратегия 6

Основные измерения:

1 и 2 — вторая ближняя видимая планета:

3 — ближайшая видимая планета и наилучшая звезда. оптимизирующая первые три измерения.

Избыточные измерения:

4 — Солнце и вторая ближняя видимая планета;

5 — ближайшая видимая планета и наилучшая звезда. оптимизирующая первые пять измерений;

6 — Солнце и ближайшая видимая планета или угловой диаметр ближайшей видимой планеты.

Для объяснения некоторых терминов, встречающихся в приведенных выше стратегиях, нужно сделать несколько замечаний:

1. Планета называется видимой, если угол между линиями визирования планеты и Солнца превышает 15°. Тот же критерий распространяется и на звезды, и для измерений выбираются только видимые звезды.

2. Если ближайшей видимой планетой является Земля, то в качестве второй ближней планеты выбирается Луна при условии, что угол между линиями визирования Земли и Луны превышает 3°.

3. Измерение углового диаметра ближайшей видимой планеты является более предпочтительным по сравнению с другими измерениями, когда планета достаточно близко расположена, чтобы это измерение имело смысл.

4. Для двух измерений, относящихся к телу, расположенному на конечном расстоянии от корабля, и двум звездам, те звезды называются «наилучшими», плоскости измерений которых взаимно ортогональны. (Под плоскостью измерения подразумевается плоскость, в которой измеряется угол.)

5. Верхний предел общего числа допустимых измерений был произвольно установлен равным шести.

В расчетах использовались всего 10 наиболее ярких звезд. Перечислим их в порядке яркости:

Название	Звездная величина
Сириус	—1,58
Канопус	—0,86
Альфа Центавра	0,06
Вега	0,14
Капелла	0,21
Арктур	0,24
Ригель	0,34
Процион	0,48
Ахернар	0,60
Бэта Центавра	0,86

Предполагалось, что ошибки измерений образуют систему статистически независимых случайных переменных с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратичным отклонением, равным 0,05 миллирадиан или 10,3 угловых секунд. Предполагалось также, что смещение показаний часов происходит на постоянную относительную величину, среднеквадратичное значение которой равно одной стотысячной от измеренного времени.

Из гл. V, где проводилось исследование возможных орбит, были взяты четыре траектории в качестве образцов для анализа шести стратегий — две траектории полета на Марс (см. рис. 5. 8 и 5. 9) и две траектории полета на Венеру (см. рис. 5. 13 и 5. 14). Сравнение шести стратегий выполнения астрономических засечек приведено в табл. 7. 1—7. 4. В эти таблицы были включены лишь выборочные данные, полная совокупность которых позволила выбрать наиболее удачные стратегии, приводящие к единственной системе «оптимальных» измерений для различных траекторий. Наилучшие из полученных среднеквадратичных ошибок положения и ошибок определения времени в функции времени, прошедшего с момента запуска, приведены в табл. 7. 5—7. 8. Слова «нет 2-й планеты» указывают в таблице на то обстоятельство, что лишь для одной планеты ее линия визирования отклоняется от линии визирования Солнца больше, чем на 15°. Таким образом, в этот момент стратегия выполнения засечки, в которой используются две планеты, становится непригодной (если, конечно, в качестве порога видимости принят угол в 15°).

Некоторые выводы, сделанные при рассмотрении табл. 7. 1—7. 4, следует прокомментировать:

1. Использование Луны с навигационными целями значительно уточняет засечку положения, когда космический корабль находится в окрестности Земли. В некоторых случаях наблюдается уменьшение ошибки положения более чем в три раза.

2. Нельзя предпочесть какую-либо одну стратегию для выбранных объектов, т. е. конкретная комбинация измерений, взятая в соответствии с одной системой правил, может быть лучшей в один момент времени и худшей в некоторый другой момент.

Таблица 7.1

Сравнение стратегий выполнения навигационной засечки для 1-й траектории полета на Марс. Состояние через 0,04 года после отправления

Стратегии	Первый объект	Второй объект	Среднеквадратичная ошибка в положении *км*	Среднеквадратичная ошибка во времени *час*
1	Земля	Вега		
	Земля	Капелла		
	Земля	Солнце	10385	0,0035
	Луна	Сириус	4138	0,0035
	Луна	А Центавра	2756	0,0035
	Земля	Диаметр	2752	0,0035
2	Земля	Вега		
	Земля	Капелла		
	Земля	Солнце	10385	0,0035
	Солнце	Арктур	6519	0,0035
	Солнце	Луна	2059	0,0035
	Земля	Диаметр	2059	0,0035
3	Солнце	Сириус		
	Солнце	Арктур		
	Солнце	Земля	10500	0,0035
	Земля	Вега	7720	0,0035
	Земля	Капелла	6200	0,0035
	Земля	Диаметр	6162	0,0035
4	Солнце	Сириус		
	Солнце	Арктур		
	Земля	Капелла	10690	0,0035
	Земля	Вега	7698	0,0035
	Солнце	Земля	6200	0,0035
	Земля	Диаметр	6162	0,0035

Продолжение

Стратегии	Первый объект	Второй объект	Среднеквадратичная ошибка в положении *км*	Среднеквадратичная ошибка во времени *час*
5	Солнце	Сириус		
	Солнце	Арктур		
	Солнце	Земля	10500	0,0035
	Земля	А Центавра	7705	0,0035
	Земля	Арктур	6056	0,0035
	Земля	Диаметр	6022	0,0035
6	Луна	Сириус		
	Луна	А Центавра		
	Земля	Капелла	3086	0,0035
	Солнце	Луна	2297	0,0035
	Земля	Арктур	1825	0,0035
	Земля	Диаметр	1823	0,0035

Таблица 7.2

Сравнение стратегий выполнения навигационной засечки для 2-й траектории полета на Марс. Состояние через 0,06 года после отправления

Стратегии	Первый объект	Второй объект	Среднеквадратичная ошибка в положении *км*	Среднеквадратичная ошибка во времени *час*
1	Земля	Сириус		
	Земля	А Центавра		
	Земля	Солнце	10790	0,0053
	Марс	Сириус	10778	0,0053
	Марс	Б Центавра	10610	0,0053
	Земля	Диаметр	10600	0,0053

Продолжение

Стратегии	Первый объект	Второй объект	Среднеквадратичная ошибка в положении *км*	Среднеквадратичная ошибка во времени *час*
2	Земля	Сириус		
	Земля	А Центавра		
	Земля	Солнце	10790	0,0053
	Солнце	Аркгур	6598	0,0053
	Солнце	Марс	5140	0,0053
	Земля	Диаметр	5138	0,0053
3	Солнце	Процион		
	Солнце	Ахернар		
	Солнце	Земля	10630	0,0053
	Земля	Сириус	7795	0,0053
	Земля	А Центавра	6343	0,0053
	Земля	Диаметр	6341	0,0053
4	Солнце	Процион		
	Солнце	Ахернар		
	Земля	Капелла	11167	0,0053
	Земля	Вега	7848	0,0053
	Солнце	Земля	6323	0,0053
	Земля	Диаметр	6321	0,0053
5	Солнце	Процион		
	Солнце	Ахернар		
	Солнце	Земля	10630	0,0053
	Земля	Ахернар	7768	0,0053
	Земля	Капелла	6495	0,0053
	Земля	Диаметр	6493	0,0053

Продолжение

Стратегии	Первый объект	Второй объект	Среднеквадратичная ошибка в положении *км*	Среднеквадратичная ошибка во времени *час*
6	Марс	Сириус		
	Марс	Б Центавра		
	Земля	Б Центавра	54610	0,0053
	Солнце	Марс	14200	0,0053
	Земля	Ригель	8256	0,0053
	Земля	Диаметр	8251	0,0053

Таблица 7.3

Сравнение стратегий выполнения навигационной засечки для 3-й траектории полета на Венеру. Состояние через 0,42 года после отправления

Стратегии	Первый объект	Второй объект	Среднеквадратичная ошибка в положении *км*	Среднеквадратичная ошибка во времени *час*
1	Венера	А Центавра		
	Венера	Ригель		
	Венера	Солнце	10916	0,0368
	Меркурий	Процион	3518	0,0309
	Меркурий	Б Центавра	3475	0,0300
	Венера	Диаметр	3475	0,0300
2	Венера	А Центавра		
	Венера	Ригель		
	Венера	Солнце	10916	0,0368
	Солнце	Ригель	7802	0,0365
	Солнце	Меркурий	5005	0,0200
	Венера	Диаметр	5000	0,0200
3	Солнце	Сириус		
	Солнце	Капелла		
	Солнце	Венера	9555	0,0368
	Венера	А Центавра	8803	0,0330
	Венера	Ригель	7819	0,0330
	Венера	Диаметр	7801	0,0329

Продолжение

Стратегии	Первый объект	Второй объект	Среднеквадратичная ошибка в положении *км*	Среднеквадратичная ошибка во времени *час*
4	Солнце	Сириус		
	Солнце	Капелла		
	Венера	Б Центавра	10610	0,0368
	Венера	Арктур	8724	0,0330
	Солнце	Венера	7780	0,0330
	Венера	Диаметр	7759	0,0329
5	Солнце	Сириус		
	Солнце	Капелла		
	Солнце	Венера	9548	0,0368
	Венера	Б Центавра	8802	0,0330
	Венера	Процион	7753	0,0330
	Венера	Диаметр	7740	0,0329
6	Меркурий	Процион		
	Меркурий	Б Центавра		
	Венера	Процион	8097	0,0368
	Солнце	Меркурий	5530	0,0262
	Венера	Капелла	3703	0,0237
	Венера	Диаметр	3701	0,0237

Таблица 7.4

Сравнение стратегий выполнения навигационной засечки для 4-й траектории полета на Венеру. Состояние через 0,20 года после отправления

Стратегии	Первый объект	Второй объект	Среднеквадратичная ошибка в положении *км*	Среднеквадратичная ошибка во времени *час*
1	Венера	Ригель		
	Венера	Б Центавра		
	Венера	Солнце	20080	0,0175
	Земля	Капелла	2687	0,0175
	Земля	Процион	2200	0,0175
	Солнце	Земля	1717	0,0170

Продолжение

Стратегии	Первый объект	Второй объект	Среднеквадратичная ошибка в положении *км*	Среднеквадратичная ошибка во времени *час*
2	Венера	Ригель		
	Венера	Б Центавра		
	Венера	Солнце	20080	0,0175
	Солнце	Капелла	18100	0,0169
	Солнце	Ригель	11665	0,0166
	Солнце	Земля	2270	0,0166
3	Солнце	Капелла		
	Солнце	Ригель		
	Солнце	Венера	14820	0,0175
	Венера	Ригель	13350	0,0169
	Венера	Б Центавра	11665	0,0166
	Солнце	Земля	2270	0,0166
4	Солнце	Капелла		
	Солнце	Ригель		
	Венера	Сириус	16440	0,0175
	Венера	Капелла	15085	0,0166
	Солнце	Венера	11625	0,0166
	Солнце	Земля	2303	0,0166
5	Солнце	Капелла		
	Солнце	Ригель		
	Солнце	Венера	14830	0,0175
	Венера	Ахернар	13305	0,0171
	Венера	Процион	11470	0,0167
	Солнце	Земля	3072	0,0168
6	Земля	Капелла		
	Земля	Процион		
	Венера	Арктур	3687	0,0175
	Солнце	Земля	2644	0,0171
	Венера	Б Центавра	1868	0,0171
	Солнце	Венера	1694	0,0170

Таблица 7. 5

Ошибки при выполнении астрономических засечек в положении и времени для 1-й траектории полета на Марс

Время *годы*	Среднеквадратичная ошибка в положении *км*	Среднеквадратичная ошибка во времени *час*	Время *годы*	Среднеквадратичная ошибка в положении *км*	Среднеквадратичная ошибка во времени *час*
0,001	16	0,0000	0,425	4702	0,0359
0,002	22,5	0,0002	0,450	5248	0,0380
0,003	32	0,0003	0,475	6019	0,0401
0,004	45	0,0004	0,500	6803	0,0419
0,005	63	0,0004	0,525	7960	0,0436
0,006	82	0,0005	0,550	9325	0,0452
0,007	106	0,0006	0,575	10730	0,0464
0,008	140	0,0007	0,600	10920	0,0500
0,009	180	0,0008	0,625	10945	0,0520
0,010	230	0,0009	0,650	10815	0,0543
0,025	2077	0,0022	0,675	9406	0,0586
0,050	3904	0,0044	0,700	8165	0,0594
0,075	4660	0,0066	0,725	7063	0,0589
0,100	5550	0,0088	0,750	6242	0,0571
0,125	6465	0,0109	0,775	5810	0,0545
0,150	6040	0,0129	0,800	9858	0,0670
0,175	10310	0,0151	0,825	9722	0,0689
0,200	8120	0,0170	0,840	4643	0,0617
0,225	12300	0,0200	0,841	3877	0,0607
0,250	Нет 2-й планеты		0,842	3158	0,0600
0,275	Нет 2-й планеты		0,843	2470	0,0594
0,300	3858	0,0254	0,844	1859	0,0590
0,325	3760	0,0274	0,845	1346	0,0588
0,350	3830	0,0295	0,846	958	0,0587
0,375	3994	0,0316	0,847	714	0,0587
0,400	4232	0,0338	0,848	609	0,0586

Таблица 7.6

Ошибки при выполнении астрономических засечек в положении и времени для 2-й траектории полета на Марс

Время *годы*	Средне-квадратичная ошибка в положении *км*	Средне-квадратичная ошибка во времени *час*	Время *годы*	Средне-квадратичная ошибка в положении *км*	Средне-квадратичная ошибка во времени *час*
0,001	16	0,0001	0,250	Нет 2-й планеты	
0,002	14,5	0,0002	0,275	4370	0,0234
0,003	18	0,0003	0,300	4235	0,0255
0,004	34	0,0004	0,325	4500	0,0277
0,005	79	0,0004	0,350	4823	0,0298
0,006	191	0,0005	0,375	5344	0,0320
0,007	513	0,0006	0,400	6065	0,0341
0,008	907	0,0007	0,425	7036	0,0365
0,009	714	0,0008	0,450	8217	0,0382
0,010	604	0,0009	0,475	9675	0,0400
0,025	1228	0,0022	0,490	10477	0,0420
0,050	5480	0,0044	0,491	10395	0,0421
0,075	5286	0,0066	0,492	10206	0,0421
0,100	5522	0,0087	0,493	9824	0,0422
0,125	7878	0,0109	0,494	9138	0,0423
0,150	109[illegible]0	0,0130	0,495	7926	0,0423
0,175	9865	0,0149	0,496	6119	0,0424
0,200	13020	0,0174	0,497	3980	0,0425
0,225	Нет 2-й планеты		0,498	2120	0,0408

Таблица 7.7

Ошибки при выполнении астрономических засечек в положении и времени для 3-й траектории полета на Венеру

Время *годы*	Средне-квадратичная ошибка в положении *км*	Средне-квадратичная ошибка во времени *час*	Время *годы*	Средне-квадратичная ошибка в положении *км*	Средне-квадратичная ошибка во времени *час*
0,001	31	0,0001	0,004	19	0,0004
0,002	16	0,0002	0,005	27	0,0004
0,003	14	0,0003	0,006	39	0,0005

Продолжение

Время годы	Средне-квадратичная ошибка в положении км	Средне-квадратичная ошибка во времени час	Время годы	Средне-квадратичная ошибка в положении км	Средне-квадратичная ошибка во времени час
0,007	53	0,0006	0,300	2999	0,0238
0,008	71	0,0007	0,325	3155	0,0249
0,009	88	0,0008	0,350	5870	0,0285
0,010	109	0,0009	0,375	4723	0,0259
0,025	971	0,0022	0,400	3787	0,0277
0,050	3202	0,0044	0,425	3447	0,0239
0,075	6974	0,0066	0,440	4582	0,0329
0,100	8895	0,0088	0,441	4672	0,0329
0,125	11750	0,0109	0,442	4590	0,0330
0,150	20540	0,0131	0,443	4388	0,0330
0,175	34600	0,0149	0,444	3997	0,0328
0,200	3654	0,0170	0,445	3381	0,0325
0,225	3008	0,0190	0,446	2583	0,0321
0,250	2840	0,0208	0,447	1754	0,0317
0,275	2884	0,0224	0,448	1074	0,0300

Таблица 7.8

Ошибки при выполнении астрономических засечек в положении и времени для 4-й траектории полета на Венеру

Время годы	Средне-квадратичная ошибка в положении км	Средне-квадратичная ошибка во времени час	Время годы	Средне-квадратичная ошибка в положении км	Средне-квадратичная ошибка во времени час
0,001	16	0,0001	0,050	6138	0,0044
0,002	23	0,0002	0,075	3189	0,0066
0,003	35	0,0003	0,100	2484	0,0087
0,004	55	0,0004	0,125	2054	0,0109
0,005	79	0,0004	0,150	1770	0,0129
0,006	109	0,0005	0,175	1650	0,0150
0,007	146	0,0006	0,200	1695	0,0170
0,008	187	0,0007	0,225	2163	0,0188
0,009	233	0,0008	0,250	3014	0,0203
0,010	285	0,0009	0,275	4172	0,0219
0,025	2692	0,0022	0,290	3942	0,0241

Время *годы*	Среднеквадратичная ошибка в положении *км*	Среднеквадратичная ошибка во времени *час*	Время *годы*	Среднеквадратичная ошибка в положении *км*	Среднеквадратичная ошибка во времени *час*
0,291	3641	0,0241	0,295	1659	0,0240
0,292	3263	0,0241	0,296	1128	0,0239
0,293	2788	0,0241	0,297	706	0,0240
0,294	2235	0,0240	0,298	445	0,0241

3. Анализ количественного влияния избыточных измерений на уменьшение среднеквадратичных ошибок положения может существенно помочь определить, какие измерения имеют наиболее важное значение. Прежде чем окончательно остановиться на какой-то системе измерений, кажется целесообразным тщательно выяснить влияние каждого отдельного измерения на точность засечки.

4. Если космический корабль находится в окрестности Земли в то время, когда видима Луна, то измерение углового диаметра Земли практически не дает информации. Поэтому при подготовке данных для навигационной программы в таких случаях измерение диаметра Земли заменялось на другое возможное измерение, указанное в списке стратегий.

Задачи

7. 1. Космический корабль и два ближайших к нему небесных тела соответственно расположены в точках S, P_1 и P_2. Система координат xy образована таким образом, что ее начало совпадает с P_1, ось x направлена вдоль линии, соединяющей P_1 и P_2, а ось y лежит в плоскости, содержащей S, P_1 и P_2. Показать, что уравнение геометрического места точек в плоскости xy, для которых угол $A = \angle P_1SP_2$ постоянен, имеет вид

$$(x-c)^2+(y-c\operatorname{ctg}A)^2=(c\operatorname{cosec}A)^2,$$

где $2c$ — расстояние между P_1 и P_2. Поверхности навоидов, описываемые в разд. 7. 1, образуются вращением этих кривых вокруг линии, соединяющей P_1 и P_2.

7. 2. Делается засечка с помощью планеты и двух звезд. Одним из измерений является видимый диаметр планеты. В качестве двух других измерений можно использовать: 1) угол между звездами и центром планеты, 2) высоту звезд над горизонтом планеты или 3) углы между звездами и ориентиром на поверхности планеты. Сравнить эффективность каждого из трех вариантов.

7. 3. Используя способ, изложенный во втором и третьем подразделе разд. 7. 3, исследовать эффективность засечек, получаемых измерением углов между двумя звездами и планетой и наблюдением затмения звезд той же планетой. Как должны быть ориентированы звезды, чтобы минимизировалась среднеквадратичная ошибка засечки?

7. 4. Определить геометрическое место точек в плоскости $p—A$, для которых системы измерений «планета—звезда, планета—звезда, Солнце—звезда» и «планета—звезда, планета—звезда, планета—Солнце» дают одинаковые среднеквадратичные ошибки. Иными словами, определить соотношение между p и A, для которого $\min \overline{\varepsilon^2}$, вычисленные по уравнениям (7. 15) и (7. 16), равны между собой. В какой части плоскости $p—A$ одна система измерений лучше другой?

7. 5. Для измерения углового диаметра, когда δt_c — ошибка часов, а δt_d — запаздывание по сравнению с номинальным временем засечки, показать, что вариация угла

$$\delta A = \frac{D\overline{m} \cdot \left(\delta\overline{r} + \overline{v}_p\, \delta t_c + \overline{v}_r \delta t_d\right)}{z^2 \cos \dfrac{A}{2}},$$

где $\overline{v}_p$ — вектор скорости планеты относительно Солнца;

$\overline{v}_r$ — скорость космического корабля относительно планеты.

7. 6. Показать, что, когда ошибки измерений являются независимыми случайными переменными с нулевыми математическими ожиданиями, оценка методом максимума правдоподобия эквивалентна определению $\delta\hat{\overline{r}}$ из условия, при котором взвешенная сумма квадратов невязок

$$\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\overline{h}_k^T \delta\hat{\overline{r}} - \delta\tilde{q}_k}{\sigma_k} \right)^2,$$

где σ_k — среднеквадратичная ошибка k-го измерения, была минимальной.

7. 7. Космический корабль летит к Марсу и через одну десятую года после отправления с Земли векторы положения корабля и обеих планет составляют (в астрономических единицах):

$$\overline{r} = 0{,}104\,\overline{i}_x + 0{,}998\overline{i}_y + 0{,}018\overline{i}_z,$$

$$\overline{r}_E = 0{,}155\overline{i}_x + 0{,}972\,\overline{i}_y,$$

$$\overline{r}_M = -1{,}076\,\overline{i}_x + 1{,}251\,\overline{i}_y + 0{,}053\,\overline{i}_z$$

в гелиоцентрической эклиптической системе координат.

а) Выполняется навигационная засечка измерением следующих углов:

1) угла между линиями визирования Марса и Сириуса;

2) угла между линиями визирования Марса и Бэта Центавра;

3) угла между линиями визирования Земли и Бэта Центавра.

Определить среднеквадратичную ошибку по положению в километрах при допущении о том, что среднеквадратичная ошибка измерений составляет 0,05 миллирадиан. Для простоты будем полагать, что все измерения производятся одновременно и строго в номинальный момент времени.

Линии визирования Сириуса и Бэта Центавра заданы следующей системой направляющих косинусов:

Сириус: (—0,1800; 0,749; —0,637),

Бэта Центавра: (—0,430; —0,575; —0,696).

б) Определить уменьшение среднеквадратичной ошибки по положению, когда дополнительно к основным измерениям делается измерение угла между линиями визирования Солнца и Марса.

7.8. *Совместная характеристическая функция* $\Phi(\bar{s}_m)$ системы m случайных переменных $\bar{\alpha}_m$ определяется соотношением

$$\Phi(\bar{s}_m)=\overline{\exp(i\bar{s}_m^T\bar{\alpha}_m)}=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty} p(\bar{\alpha}_m)\exp(i\bar{s}_m^T\bar{\alpha}_m)\,d\bar{\alpha}_m,$$

где $i=\sqrt{-1}$, а обозначение $d\bar{\alpha}_m$ соответствует $d\alpha_1, d\alpha_2, \ldots, d\alpha_m$, так что берется по сути дела m-кратный интеграл. Показать, что совместная характеристическая функция m-мерного нормального распределения с нулевым математическим ожиданием имеет вид

$$\Phi\left(\bar{s}_m\right)=\exp\left(-\frac{1}{2}\bar{s}_m^T\bar{A}_{mm}\bar{s}_m\right),$$

где $\bar{A}_{mm}$ — корреляционная матрица случайных переменных $\bar{\alpha}_m$.

Указание: так как $\bar{A}_{mm}$ — положительно определенная матрица, то существует такое ортогональное преобразование $\bar{P}_{mm}$, при котором выполняется соотношение

$$\bar{P}_{mm}\bar{A}_{mm}\bar{P}_{mm}^T=\bar{D}_{mm},$$

где $\bar{D}_{mm}$ — диагональная матрица;

$$\bar{D}_{mm}=\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \mu_m \end{pmatrix}.$$

Кроме того, $|\bar{A}_{mm}|=\mu_1\mu_2\ldots\mu_m$.

Следовательно, заменой переменных

$$\bar{\alpha}_m'=\bar{P}_{mm}\bar{\alpha}_m$$

можно разделить переменные интегрирования.

7. 9. Используя результат решения задачи 7. 8, показать, что совокупность случайных переменных $\overline{\varepsilon}$ будет иметь нормальное распределение с корреляционной матрицей

$$\overline{E} = \overline{H}_{3m}\overline{A}_{mm}\overline{H}_{m3},$$

если

$$\overline{\varepsilon} = \overline{H}_{3m}\overline{a}_m,$$

где $\overline{a}_m$ — система случайных переменных с нормальным совместным распределением.

Указание: покажите, что

$$\Phi(\overline{t}) = \overline{\exp(i\overline{t}^T\overline{\varepsilon})} = \exp\left(-\frac{1}{2}\overline{t}^T\overline{E}\overline{t}\right),$$

производя следующую замену переменных:

$$\overline{s_m} = \overline{H}_{m3}\overline{t}.$$

7. 10. Согласно теореме, доказываемой при решении задачи 7.9, плотность распределения ошибок оценки при засечке имеет вид

$$p(\overline{\varepsilon}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3|\overline{E}|}}\exp\left(-\frac{1}{2}\overline{\varepsilon}^T\overline{E}^{-1}\overline{\varepsilon}\right).$$

Поверхности равной вероятности получаются из выражения

$$\overline{\varepsilon}^T\overline{E}^{-1}\overline{\varepsilon} = k^2,$$

где k — постоянная. Такие поверхности называются *эллипсоидами вероятности.*

а) Показать, что три главные полуоси эллипсоида вероятности равны $k\lambda_1$, $k\lambda_2$, $k\lambda_3$, где λ — корни уравнения

$$|\overline{E} - \lambda^2\overline{I}| = 0.$$

б) Показать, что для любой засечки вероятность нахождения вектора ошибки $\overline{\varepsilon}$ внутри эллипсоида вероятности равна

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^k r^2e^{-r^2/2}\,dr$$

и определяется интегрированием плотности распределения $p(\overline{\varepsilon})$ по всему объему эллипсоида. Показать далее, что вероятности попадания оценки внутрь эллипсоида, чьи главные оси равны одной, двум и трем главным среднеквадратичным ошибкам оценки, составят 0,20; 0,79 и 0,97 соответственно.

7. 11. Показать, что объем эллипсоида вероятности равен

$$\frac{4}{3}\pi k^3\sqrt{|\overline{E}|}.$$

Используя этот результат, показать, что для засечки, состоящей из трех измерений, минимальный объем эллипсоида достигается при максимальном значении определителя $|\overline{H}|$. Этот определитель вычисляется просто как тройное скалярное произведение векторов-строк $\bar{h}_1$, $\bar{h}_2$ и $\bar{h}_3$. Таким образом, если длины векторов $\bar{h}$ заданы, то объем эллипсоида вероятности можно минимизировать, выбирая направления векторов как можно ближе к ортогональным.

Библиография

Навигационная засечка, получаемая с помощью астрономических наблюдений на борту космического корабля, во многих отношениях аналогична задаче, решаемой морскими и авиационными штурманами. Главные отличия состоят в следующем: 1) для космического корабля задача всегда является трехмерной и 2) силы, влияющие на движение космического корабля, гораздо лучше известны, чем перемещения масс морской воды или воздуха. Таким образом, хотя первое различие усложняет задачу, однако второе делает ее более легко разрешимой и позволяет выполнять окончательные расчеты и экстраполяцию с бо́льшей точностью.

Дополнительную информацию о геометрии астрономических засечек, которая является предметом изучения в разд. 7.1, читатель найдет в работах Лэнинга, Фрея и Трегезера [36], Хоака и Уэлча [26], а также Штерна [60]. Анализ возмущений для различных типов навигационных измерений, приводящий к линейным соотношениям между отклонениями измеренных величин и вектором отклонений от номинального положения, взят из статьи автора [9].

Материал разд. 7.3 представляет собой часть трудов МТИ [46], принадлежащую автору. В этой работе имелась ошибка при рассмотрении измерения «планета—звезда, планета—звезда, Солнце—звезда», которая исправлена в настоящем издании. Автор благодарен м-ру Г. Хинцу из Грумман Эйркрафт Компани, который указал ему на эту ошибку.

Метод коррекции ошибки часов с помощью навигационных измерений принадлежит д-ру Лэнингу и впервые был опубликован в отчете МТИ [45]. Другая формулировка этого метода с использованием более компактных обозначений была предложена автором в совместной работе Бэттина и Лэнинга [10] и в отчете МТИ [46].

Метод оценки на основе максимума правдоподобия рассматривался во многих книгах по статистике, например в книге Крамера [18]. Этот метод широко применялся для оценки траекторий баллистических снарядов и космических летательных аппаратов, и читателю рекомендуется обратиться к книге Шапиро [54], где указанные вопросы изложены весьма удачно. Для необходимого знакомства с основами статистического анализа можно порекомендовать первые главы книги Лэнинга и Бэттина [35]. Выражение для оценки методом максимума правдоподобия в конце разд. 7. 5, в котором разделены основные и избыточные измерения и не требуется обращения корреляционной матрицы ошибок измерений, взято из принадлежащей автору части отчета МТИ [46]. Анализ ошибок и примеры разд. 7. 6 также взяты из этой работы.

Материал относительно эллипсоидов вероятности, содержащийся в задачах 7. 8—7. 11, заимствован из книг Крамера [18], Шапиро [54] и Штерна [60].

ГЛАВА VIII

Межпланетное наведение и навигация с помощью астрономических засечек

В первой части настоящей главы исследуются два метода наведения, применяемые для управления космическим кораблем, который запускается с Земли и выводится на гелиоцентрическую орбиту свободного полета, проходящую через точку встречи с планетой-целью. Представленная здесь теория наведения основывается на допущении о том, что на корабль во время его полета действуют только гравитационные силы, за исключением лишь коротких периодов ускорения от тяги, связанного с навигационными коррекциями скорости. Таким образом, эта теория неприменима непосредственно к летательным аппаратам, движущимся под непрерывным действием малой тяги на протяжении всего полета. Задача такого типа подробно рассматривается в гл. X.

Здесь предполагается, что к моменту начала рассматриваемого полета основные двигательные ступени ракеты-носителя уже отработали и, следовательно, нет необходимости решать задачу наведения при выводе на орбиту вокруг Земли, если не считать того, что это наведение должно обеспечить вывод с заданной точностью. Во всех же прочих отношениях задача наведения решается начиная с момента, когда корабль покидает Землю, и кончая моментом достижения цели полета.

Для минимизации требований к системе навигации здесь не делается попытки решать траекторную задачу в течение полета. Вместо этого выбран метод навигации, основанный на теории возмущений, где используются только отклонения по положению от опорной траектории в некоторые заданные моменты времени. Итак, проблема навигации решается на борту корабля с помощью: 1) последовательности оптических измерений углов между линиями визирования различных небесных объектов; 2) бортовых часов; 3) дискретного вычислительного устройства, определяющего отклонения по положению на основе астрономических наблюдений и вычисляющего как потребные коррекции скорости, так и поправки, которые нужно внести в показания часов; 4) двигательной установки для выполнения малых изменений скорости корабля, вычисленных счетно-решающим устройством.

Из-за начальных ошибок, вызываемых ошибками вывода космического корабля на номинальную гелиоцентрическую орбиту, положение и скорость корабля будут отличаться от соответствующих номинальных значений. В процессе компенсации этих начальных ошибок делаются новые ошибки, которые в свою очередь придется корректировать, когда они возрастут до заметного уровня. Следовательно, потребуется множество *проверочных точек,* в которых будут измеряться отклонения параметров движения от номинальных для последующего вычисления соответствующих коррекций скорости. Серьезная проблема при выборе проверочных точек состоит не только в том, чтобы в назначенные моменты времени можно было сделать хорошие астрономические засечки, но также и в том, чтобы в эти моменты траектория была наименее чувствительна к ошибкам по положению и скорости*.

Задача навигации в окрестности планеты назначения может формулироваться точно таким же образом, как и задача навигации на среднем участке траектории. При нахождении корабля вблизи планеты-цели имеются два обстоятельства, которые оказывают противоположные воздействия на систему навигации. С одной стороны, по мере приближения к объекту измерения точность получения засечек возрастает. С другой стороны, ввиду того, что на коррекцию ошибки по положению остается сравнительно немного времени, может случиться, что для этого потребуется недопустимо большие импульсы скорости. Правда, при умелом выборе проверочных точек на среднем участке траектории всегда имеется возможность выдерживать эти конечные коррекции скорости в разумных пределах.

В начале анализа будем полагать, что в любой из проверочных точек может быть приложен импульс скорости какой угодно величины и направления. Далее в разд. 8.4 обращается внимание на выбор проверочных точек с точки зрения учета в статистическом смысле влияния на расход топлива и точность наведения следующих источников ошибок: 1) начальных ошибок по скорости после окончания работы основных двигателей, за которые ответственна система наведения на участке вывода; 2) ошибок оптических измерений; 3) ошибок реализации командных коррекций скорости; 4) ошибок за счет ухода бортовых часов. Результаты этого статистического анализа применяются к рассмотрению траекторий полета на Марс и Венеру, которые уже использовались в иллюстративных целях в гл. VII.

Последние два раздела посвящены способам улучшения оценок положения и скорости путем использования большего числа засечек, чем минимально необходимое. Рассматриваются методы получения как смещенных, так и несмещенных оценок. Разрабатываемые здесь принципы образуют основу метода рекуррентной навигации, излагаемого в гл. IX.

---

* Здесь, по-видимому, имеется в виду, что в назначенные моменты времени ошибки корректирующих импульсов тяги не должны приводить к последующим значительным отклонениям траектории от номинальной *(прим. ред.)*.

8.1. Теория наведения с закрепленным временем перелета

Здесь повсюду предполагается, что космический корабль не отклоняется существенно от выбранной номинальной траектории. На среднем участке траектории максимальные ожидаемые отклонения могут составлять около одного процента астрономической единицы; в общем случае они должны быть много меньшими. Когда корабль находится вблизи планеты, следует выдерживать отклонения в пределах процента или около того от дальности до планеты, чтобы исключить необходимость применения чрезмерно больших коррекций скорости. Результаты расчетов, приводимые в разд. 8.4, демонстрируют возможность достижения такой точности. Таким образом, предполагается, что для анализа указанных отклонений могут быть применены методы возмущений.

Наша задача прежде всего состоит в том, чтобы получить удобные для использования в бортовом вычислительном устройстве корабля выражения для соответствующих коррекций скорости через отклонения по положению от номинальной траектории. Вслед за этим будут найдены явные выражения для коррекций скорости через ошибки измерений и реализации. Затем в разд. 8.3 с целью анализа точности наведения выводятся соотношения, связывающие конечные отклонения по положению и скорости с ошибками измерений и реализации.

В разд. 6.5 было показано, что отклонения по положению и скорости $\delta\bar{r}$ и $\delta\bar{v}$ от номинальной траектории удовлетворяют линейным дифференциальным уравнениям, чьи общие решения, выраженные через матрицы возмущений (см. разд. 6.5), имеют вид

$$\delta\bar{r}(t)=\bar{R}(t)\bar{c}+\bar{R}^*(t)\bar{c}^*, \tag{8.1}$$

$$\delta\bar{v}(t)=\bar{V}(t)\bar{c}+\bar{V}^*(t)\bar{c}^*, \tag{8.2}$$

где $\bar{c}$ и $\bar{c}^*$ — произвольные постоянные векторы. Эти уравнения являются основными для различных методов наведения и навигации, разрабатываемых в данной главе.

Обращаясь сначала к задаче навигации, заметим, что поскольку на борту корабля практически можно измерять лишь положение, то скорость, следовательно, нужно получать каким-то косвенным образом. Одна из схем оценки скорости корабля и будет сейчас рассмотрена.

Допустим, что в моменты t_{n-1} и t_n выполнения двух последовательных засечек имеются оценки отклонений $\hat{\delta r}_{n-1}$ и $\hat{\delta r}_n$ от соответствующих номинальных величин. Тогда уравнение (8.1) можно записать дважды, подставляя вместо t моменты времени t_{n-1} и t_n. Отсюда, используя обозначения $\bar{R}_n=\bar{R}(t_n)$ и т. д., получим

$$\hat{\delta\bar{r}}_{n-1}=\bar{R}_{n-1}\bar{c}+\bar{R}^*_{n-1}\bar{c}^*, \quad \hat{\delta\bar{r}}_n=\bar{R}_n\bar{c}+\bar{R}^*_n\bar{c}^*.$$

Решив эти уравнения относительно постоянных векторов $\bar{c}$ и $\bar{c}^*$, будем иметь

$$\bar{c}=\bar{R}_{n-1}^{-1}\left(\bar{A}_n^{-1}-\bar{A}_n^{*-1}\right)^{-1}\left(\delta\hat{\bar{r}}_n-\bar{A}_n^{*-1}\delta\hat{\bar{r}}_{n-1}\right).$$

Здесь для удобства введено обозначение

$$\bar{A}_n=\bar{R}_{n-1}\bar{R}_n^{-1}.$$

Заменив все матрицы со звездочками на соответствующие матрицы без звездочек и наоборот, получим выражение для c^*. Это свойство взаимности справедливо для многих последующих уравнений. Поэтому, чтобы обойтись без ненужных повторений, будем далее приводить каждый раз только одно выражение. Взаимное ему выражение можно получить, пользуясь указанным выше правилом.

В момент t_n, непосредственно предшествующий коррекции скорости, отклонение по скорости согласно уравнению (8.2) можно записать в виде[1]

$$\delta\hat{\bar{v}}_n^-=\bar{V}_n\bar{c}+\bar{V}_n^*\bar{c}^*.$$

Подставляя $\bar{c}$ и $\bar{c}^*$, получим

$$\delta\hat{\bar{v}}_n^-=(\bar{B}_n+\bar{B}_n^*)\delta\hat{\bar{r}}_n+(\bar{\Gamma}_n+\bar{\Gamma}_n^*)\,\delta\hat{\bar{r}}_{n-1}. \tag{8.3}$$

Здесь для компактности записи введены обозначения

$$\bar{\Gamma}_n=\bar{C}_n(\bar{A}_n-\bar{A}_n^*)^{-1},\quad \bar{B}_n=-\bar{\Gamma}_n\bar{A}_n^*.$$

Матрица $\bar{C}_n=\bar{V}_n\bar{R}_n^{-1}$ была определена в разд. 6.5.

Уравнение (8.3) дает возможность оценивать скорость корабля в момент t_n исходя из информации о положении в моменты t_n и t_{n-1}. Остается определить из этих данных корректирующее приращение скорости $\Delta\hat{\bar{v}}_n$, которое, будучи добавлено к вычисленному отклонению скорости $\delta\hat{\bar{v}}_n^-$, обеспечит прибытие космического корабля к планете назначения. С этой целью вообразим планету-цель точкой с радиусом-вектором $\bar{r}_0(t_A)$, фиксированной в пространстве и во времени. Тогда, если корабль перемещается[2] в точку встречи из его настоящего положения, то в момент прибытия его скорость будет отличаться от номинальной, и эта разница связана с $\delta\bar{r}_n$ уравнением

$$\delta\bar{r}_n=\bar{R}_n^*\delta\bar{v}(t_A).$$

---

[1] Верхние индексы «—» и «+» используются для того, чтобы различать скорость непосредственно перед коррекцией и скорость сразу же после коррекции *(прим. автора)*.

[2] Подразумевается перемещение корабля после коррекции вектора скорости, обеспечивающей его прибытие в точку $\bar{r}_0(t_A)$ в момент t_A *(прим. ред.)*.

Соответствующее отклонение по скорости в момент t_n равно

$$\delta\overline{v}_n^{+}=\overline{V}_n^{*}\delta\overline{v}(t_A)=\overline{V}_n^{*}\overline{R}_n^{*-1}\delta\overline{r}_n=\overline{C}_n^{*}\delta\overline{r}_n$$

и согласно определению $\overline{C}_n^{*}$ в разд. 6. 5 оно точно такое, каким должно быть отклонение по скорости[1] в момент t_n. Объединяя полученное выражение с формулой (8. 3), найдем оценку коррекции

$$\Delta\hat{\overline{v}}_n=\overline{C}_n^{*}\delta\hat{\overline{r}}_n-\delta\hat{\overline{v}}_n^{-}=\overline{H}_n\delta\hat{\overline{r}}_n-\overline{P}_n\delta\hat{\overline{r}}_{n-1}, \qquad (8.4)$$

где матрицы $\overline{H}_n$ и $\overline{P}_n$ определяются выражениями

$$\overline{H}_n=\overline{C}_n^{*}-(\overline{B}_n+\overline{B}_n^{*}),\ \overline{P}_n=\overline{\Gamma}_n+\overline{\Gamma}_n^{*}.$$

Уравнение (8. 4) является фундаментальным уравнением наведения, закладываемым в счетно-решающее устройство космического корабля. Так как входящие в него матрицы зависят только от номинальной траектории и моментов времени, соответствующих проверочным точкам, то их можно считать вычисленными заранее. Следовательно, когда счетно-решающее устройство корабля выполнит две последовательные засечки положения, вычислить потребную коррекцию скорости будет не сложнее, чем произвести несколько простых операций умножения и сложения.

Перед тем как закончить этот раздел, выведем соотношение, дающее явную зависимость коррекции скорости в момент t_n от начальных ошибок по скорости при запуске, ошибок засечки положения и ошибок реализации коррекций скорости в предыдущих проверочных точках. Это выражение послужит основой для статистического анализа в разд. 8. 4.

С этой целью обозначим через $\Delta\overline{v}_n$ и $\overline{\eta}_n$ истинное приращение скорости, сообщенное кораблю в момент t_n, и ошибку приложения вычисленной коррекции $\Delta\hat{\overline{v}}_n$. Тогда

$$\Delta\hat{\overline{v}}_n=\Delta\overline{v}_n+\overline{\eta}_n.$$

Аналогично определим $\overline{\varepsilon}_n$ и $\overline{\delta}_n$ как векторные разности между вычисленными и истинными отклонениями по положению и по скорости в момент t_n, т. е.

$$\delta\hat{\overline{r}}_n=\delta\overline{r}_n+\overline{\varepsilon}_n,\quad \delta\hat{\overline{v}}_n^{-}=\delta\overline{v}_n^{-}+\overline{\delta}_n.$$

Таким образом, из соотношения (8. 3) следует

$$\overline{\delta}_n=(\overline{B}_n+\overline{B}_n^{*})\overline{\varepsilon}_n+(\overline{\Gamma}_n+\overline{\Gamma}_n^{*})\overline{\varepsilon}_{n-1}. \qquad (8.5)$$

[1] Имеется в виду отклонение вектора скорости после коррекции относительно вектора скорости на номинальной траектории *(прим. ред.)*.

Далее, из (8.4) имеем

$$\Delta\bar{v}_n = \bar{C}_n^*\delta\bar{r}_n - \delta\bar{v}_n^- + \bar{H}_n\bar{\varepsilon}_n - \bar{P}_n\bar{\varepsilon}_{n-1} - \bar{\eta}_n. \tag{8.6}$$

Теперь остается выразить $\bar{C}_n^*\delta\bar{r}_n - \delta\bar{v}_n^-$ через векторы ошибок в данной и предыдущей проверочных точках. Для этого заметим, что в момент t_n^- выполняются согласно уравнениям (8.1) и (8.2) следующие соотношения:

$$\delta\bar{r}_n = \bar{R}_n\bar{c} + \bar{R}_n^*\bar{c}^*,$$

$$\delta\bar{v}_n^- = \bar{V}_n\bar{c} + \bar{V}_n^*\bar{c}^*.$$

Умножая первое из них на $\bar{C}_n^*$ и вычитая второе, получим

$$\bar{C}_n^*\delta\bar{r}_n - \delta\bar{v}_n^- = \bar{\Lambda}_n\bar{c},$$

где

$$\bar{\Lambda}_n = \bar{C}_n^*\bar{R}_n - \bar{V}_n$$

в соответствии с уравнением (6.49). Постоянный вектор $\bar{c}$ определяется из уравнений (8.1) и (8.2) после подстановки момента времени t_{n-1}^+:

$$\bar{c} = \bar{\Lambda}_{n-1}^{-1}(\bar{C}_{n-1}^*\delta\bar{r}_{n-1} - \delta\bar{v}_{n-1}^+).$$

Теперь, учитывая, что $\delta\bar{v}_{n-1}^+ = \delta\bar{v}_{n-1}^- + \Delta\bar{v}_{n-1}$, будем иметь

$$\bar{C}_n^*\delta\bar{r}_n - \delta\bar{v}_n^- = \bar{\Lambda}_n\bar{\Lambda}_{n-1}^{-1}(\bar{C}_{n-1}^*\delta\bar{r}_{n-1} - \delta\bar{v}_{n-1}^- - \Delta\bar{v}_{n-1}).$$

Но уравнение (8.6) выполняется в каждой проверочной точке. Так, в частности, в момент t_{n-1}, получим

$$\Delta\bar{v}_{n-1} + \delta\bar{v}_{n-1}^- - \bar{C}_{n-1}^*\delta\bar{r}_{n-1} = \bar{H}_{n-1}\bar{\varepsilon}_{n-1} - \bar{P}_{n-1}\bar{\varepsilon}_{n-2} - \bar{\eta}_{n-1}.$$

Следовательно, подставляя в выражение (8.6) последние два уравнения, можно привести его к виду

$$\begin{aligned}\Delta\bar{v}_n = \bar{H}_n\bar{\varepsilon}_n &- (\bar{P}_n + \bar{\Lambda}_n\bar{\Lambda}_{n-1}^{-1}\bar{H}_{n-1})\bar{\varepsilon}_{n-1} + \\ &+ \bar{\Lambda}_n\bar{\Lambda}_{n-1}^{-1}\bar{P}_{n-1}\bar{\varepsilon}_{n-2} - \bar{\eta}_n + \bar{\Lambda}_n\bar{\Lambda}_{n-1}^{-1}\bar{\eta}_{n-1}.\end{aligned} \tag{8.7}$$

Формула (8.7) представляет собой явное выражение импульса скорости, действительно приложенного в момент t_n, через настоящие и прошлые ошибки измерений и ошибки в управлении прилагаемой коррекцией. Интересно отметить, что в случае измерений положения коррекция скорости зависит от ошибок засечек в данной и в двух предыдущих проверочных точках.

Для статистического анализа наиболее предпочтительным критерием является среднеквадратичное значение суммы модулей всех приращений скорости. Однако оно не может быть вычислено без достаточно подробного задания статистических характеристик ошибок; и даже в том случае, когда статистики ошибок известны, этот расчет весьма сложен. Здесь будет использоваться средний квадрат изменения скорости $\overline{\Delta v_n^2}$ в каждой проверочной точке, вычислять который несколько проще. Если определить корреляционную матрицу $\overline{N}_n$ как

$$\overline{N}_n = \overline{\bar{\eta}_n \bar{\eta}_n^T}$$

и принять допущение о независимости ошибок визирования, то можно будет записать

$$\overline{\Delta v_n^2} = tr[\overline{H}_n \overline{E}_n \overline{H}_n^T + (\overline{P}_n + \overline{\Lambda}_n \overline{\Lambda}_{n-1}^{-1} \overline{H}_{n-1}) \overline{E}_{n-1} (\overline{P}_n +$$
$$+ \overline{\Lambda}_n \overline{\Lambda}_{n-1}^{-1} \overline{H}_{n-1})^T + \overline{\Lambda}_n \overline{\Lambda}_{n-1}^{-1} \overline{P}_{n-1} \overline{E}_{n-2} \overline{P}_{n-1}^T \overline{\Lambda}_{n-1}^{T-1} \overline{\Lambda}_n^T +$$
$$+ \overline{N}_n + \overline{\Lambda}_n \overline{\Lambda}_{n-1}^{-1} \overline{N}_{n-1} \overline{\Lambda}_{n-1}^{T-1} \overline{\Lambda}_n^T].$$

Здесь $\overline{E}_n$, $\overline{E}_{n-1}$, $\overline{E}_{n-2}$ — корреляционные матрицы ошибок оценки положения в моменты t_n, t_{n-1} и t_{n-2} согласно определениям, данным в гл. VII.

В качестве иллюстрации к описанной выше схеме наведения рассмотрим гипотетический перелет с Земли на Венеру, показанный на рис. 5. 30. 2 ноября 1962 г. космический корабль находился на орбите со скоростью 12 148 *м/сек*. После выхода из сферы влияния Земли скорость корабля относительно Земли снизилась до 4575 *м/сек*. В момент, когда бортовые часы показывают время t_1, производится засечка и информация обрабатывается изложенным в гл. VII методом, в результате чего получается расчетное значение $\delta\hat{\bar{r}}_1$. Принимая $\delta\hat{\bar{r}}_0$ равным нулю (или вводя поправку на движение Земли в течение долей часа, которые занимает этап вывода), решают уравнение (8. 4) при $n=1$ и находят расчетный вектор коррекции скорости $\Delta\hat{\bar{v}}_1$. Матрицы $\overline{H}_1$ и $\overline{P}_1$ состоят из имеющихся в запоминающем устройстве корабля постоянных, связанных с первой проверочной точкой.

В нашем примере будем считать, что первая навигационная засечка делается через 8 *час* после старта. Предположим далее, что среднеквадратичная ошибка углового измерения составляет 0,05 миллирадиан или 10,3″, а среднеквадратичная скорость ухода часов равна одной стотысячной. Когда измеряются углы между линиями визирования Земли и (1) Солнца, (2) Альфа Центавра и (3) Арктура, то положение космического корабля может быть оценено с точностью до 13 742 *км*. Если добавить в качестве избыточных измерений углы между линиями визирования Солнца и (1) Венеры и (2) Арктура, то погрешность оценки положения уменьшится до 6143 *км*. Наконец, когда измеряется еще и угловой диаметр Земли, ошибка становится равной всего лишь 114 *км*.

Вычисленная коррекция скорости реализуется двигательной установкой, которой управляет бортовое счетно-решающее устройство. В результате первой коррекции устраняется бо́льшая часть начальной ошибки по скорости. В рассматриваемом примере начальную среднеквадратичную ошибку по скорости считаем равной 12,2 *м/сек,* что соответствует точности наведения 0,1%*. Среднеквадратичную ошибку реализации коррекции примем равной 1% от прилагаемого изменения скорости. При этих условиях истинная среднеквадратичная коррекция скорости, приложенная в первой проверочной точке, будет составлять 32,6 *м/сек.*

В момент t_2 предпринимается вторая засечка, приводящая к получению оценки $\delta\hat{\bar{r}}_2$. Используя $\delta\hat{\bar{r}}_2$ и записанную в запоминающем устройстве после первой засечки оценку $\delta\hat{\bar{r}}_1$, а также имеющиеся в запоминающем устройстве вычислителя матрицы $\bar{H}_2$ и $\bar{P}_2$, вычисляют новую коррекцию скорости $\Delta\hat{\bar{v}}_2$. Если вторая засечка в нашем примере производится через 0,175 года после отправления и измеряются те же самые углы, что и в момент t_1, то ошибка в оценке положения составляет 3511 *км.* Угловой диаметр Земли не измеряется ввиду большого расстояния до нее. В этой проверочной точке среднеквадратичная ошибка знания точного времени равна 0,0148 *час.* Среднеквадратичное значение действительно приложенной коррекции составляет 13,4 *м/сек.*

Процесс целиком повторяется в третьей проверочной точке, которая, как предполагается, наступает через 0,36 года после запуска. Эта засечка выполняется с использованием Венеры и Меркурия. Если измеряются углы между линиями визирования Венеры и (1) Солнца, (2) Альфа Центавра и (3) Арктура, то положение космического корабля определяется со среднеквадратичной ошибкой 14 518 *км.* Если же добавляются измерения углов между линиями визирования Солнца и (1) Меркурия и (2) Арктура, то ошибка уменьшается до 8811 *км.* Соответствующая среднеквадратичная коррекция скорости в третьей проверочной точке равна 17 *м/сек.*

Последняя засечка делается через 0,3875 года после старта, когда корабль находится приблизительно в 1 450 000 *км* от Венеры. В это время Венера расположена достаточно близко, чтобы имело смысл измерять ее угловой диаметр. Когда при выполнении третьей засечки измеряются те же самые углы, неопределенность знания положения составляет 13 160 *км.* Добавка измерения углового диаметра уменьшает среднеквадратичную ошибку до 8151 *км.* Когда до прибытия остается сравнительно немного времени — около 53 *час,* среднеквадратичная коррекция скорости становится больше, чем все три предыдущие коррекции вместе взятые, и равна 75,3 *м/сек.*

Корабль прибывает к Венере 26 марта 1963 г. Среднеквадратичное отклонение скорости от ожидаемой в момент прибытия должно

* По-видимому, автор считает, что ошибки этапа разгона корабля до скорости 12 148 *м/сек* состоят лишь из ошибки в величине этой скорости, а погрешность ее ориентации отсутствует *(прим. ред.).*

составлять 69,5 *м/сек*. Среднеквадратичный промах равен 237 *км*. Эти конечные ошибки вычислены по методу, который будет рассмотрен в разд. 8.3.

8.2. Теория наведения с незакрепленным временем перелета

В этом разделе излагается теория наведения, несколько отличная от теории, рассмотренной выше. В новом подходе главной целью является минимизация расхода топлива двигательной установкой без ухудшения общей точности выполнения задачи. Уменьшение потребного количества топлива достигается за счет того, что время перелета до контакта с планетой-целью принимается переменным и выбирается так, чтобы коррекция скорости в каждой проверочной точке имела наименьшую возможную величину. Так же как и в схеме наведения с закрепленным временем перелета, корабль управляется в окрестности номинальной межпланетной траектории. После того как основные двигательные ступени ракеты-носителя прекращают работу, корабль оказывается на гелиоцентрической орбите с неточной начальной скоростью, что объясняется ошибками системы наведения при выводе. В каждой из нескольких проверочных точек во время полета определяются отклонения по положению от расчетной номинальной траектории из астрономических наблюдений. На основании этой информации вычисляются коррекции скорости. Если допускается некоторая свобода относительно точного времени прибытия к планете назначения, то нужно прикладывать лишь часть коррекции скорости для направления корабля в номинальную точку перелета.

Для вычисления коррекций скорости при незакрепленном времени перелета посмотрим, что произойдет, если время перелета t_A изменится на малую величину δt. Пусть $\bar{r}_p(t)$ и $\bar{v}_p(t)$ обозначают векторы положения и скорости планеты-цели. Тогда радиус-вектор новой точки встречи будет равен $\bar{r}_p(t_A+\delta t)$. Так как скорость космического корабля относительно планеты-цели в номинальное время прибытия составляет

$$\bar{v}_r(t_A)=\bar{v}(t_A)-\bar{v}_p(t_A),$$

то для прихода в новую точку встречи отклонение корабля от $\bar{r}_p(t_A)$ в момент t_A должно быть равно $-\bar{v}_r(t_A)\,\delta t$. Чтобы привести корабль в новую точку встречи в момент $t_A+\delta t$, достаточно выбрать точку с радиусом-вектором $\bar{r}_p(t_A)-\bar{v}_r(t_A)\,\delta t$ в качестве места, куда корабль должен попасть в момент t_A, если допущения о линейности справедливы. Действуя таким способом, можно в конечном счете выполнить задачу обнуления ошибок по положению, но не в номинальное время прибытия.

Потребная скорость для перехода в новую точку цели из n-й проверочной точки получится, если использовать уравнение (8.1) с подстановкой времени t_A для вычисления постоянного вектора $\bar{c}$. Отсюда

$$-\bar{v}_r(t_A)\,\delta t = \bar{R}_A \bar{c},$$

так как $\bar{R}_A^* = \bar{0}$. Кроме того, в момент t_n^+ имеем

$$\delta\hat{\bar{r}}_n = \bar{R}_n \bar{c} + \bar{R}_n^* \bar{c}^*,$$

$$\delta\hat{\bar{v}}_n^+ = \bar{V}_n \bar{c} + \bar{V}_n^* \bar{c}^*,$$

откуда можно исключить $\bar{c}^*$ и подставить в предыдущее выражение $\bar{c}$, в результате чего получим

$$\delta\hat{\bar{v}}_n^+ = \bar{\Lambda}_n \bar{R}_A^{-1}\,\bar{v}_r(t_A)\,\delta t + \bar{C}_n^* \delta\hat{\bar{r}}_n.$$

Если теперь обозначить через $\Delta\hat{\bar{v}}_n'$ оценку коррекции скорости, которую нужно приложить в момент t_n, то можно записать

$$\Delta\hat{\bar{v}}_n' = \Delta\hat{\bar{v}}_n + \bar{\nu}_n \delta t, \tag{8.8}$$

где $\Delta\hat{\bar{v}}_n$ — оценка коррекции в случае закрепленного времени прибытия, а $\bar{\nu}_n$ определяется выражением

$$\bar{\nu}_n = \bar{\Lambda}_n \bar{R}_A^{-1} \bar{v}_r(t_A). \tag{8.9}$$

При подборе приращения δt с целью минимизации величины $\Delta\hat{\bar{v}}_n'(\delta t)$, очевидно, наилучшим выбором будет такое δt, при котором вектор коррекции нормален к $\bar{\nu}_n$. Обозначая это отклонение времени через $\delta\hat{t}_A$, будем иметь согласно (8.8).

$$\delta\hat{t}_A = -\frac{\Delta\hat{\bar{v}}_n \cdot \bar{\nu}_n}{\bar{\nu}_n \cdot \bar{\nu}_n}. \tag{8.10}$$

В виде следствия из полученного выражения найдем простое соотношение, связывающее с $\Delta\hat{\bar{v}}_n$ вектор коррекции скорости $\Delta\hat{\bar{v}}_n'$, который имеет наименьшую величину:

$$\min \Delta\hat{\bar{v}}_n' = \bar{M}_n \Delta\hat{\bar{v}}_n. \tag{8.11}$$

Матрица $\bar{M}_n$ представляет собой пример *проективного оператора* и имеет следующий вид:

$$\bar{M}_n = \bar{I} - \frac{\bar{\nu}_n \bar{\nu}_n^T}{\bar{\nu}_n \cdot \bar{\nu}_n}. \tag{8.12}$$

Таким образом, коррекция при незакрепленном времени перелета является всего лишь составляющей коррекции при закрепленном времени перелета.

Проводя анализ в той же последовательности, что и в разд. 8. 1, выведем явное соотношение между коррекцией скорости в момент t_n и начальными ошибками по скорости при выводе на орбиту, ошибками засечки положения и ошибками реализации командных коррекций скорости в предыдущих проверочных точках. Для этого обозначим через $\Delta\bar{v}'_n$ и $\bar{\eta}_n$ истинный импульс скорости, приложенный в момент t_n, и ошибку реализации командной коррекции. Тогда имеем

$$\Delta\hat{\bar{v}}'_n = \Delta\bar{v}'_n + \bar{\eta}_n.$$

Как и в разд. 8. 1, $\bar{\varepsilon}_n$ и $\bar{\delta}_n$ будут обозначать векторы разностей между расчетными и истинными отклонениями по положению и скорости в момент t_n. Из уравнений (8. 4) и (8. 11) следует

$$\Delta\bar{v}'_n + \bar{\eta}_n = \bar{M}_n[\bar{C}^*_n(\delta\bar{r}_n + \bar{\varepsilon}_n) - (\delta\bar{v}^-_n + \bar{\delta}_n)].$$

С помощью уравнения (8. 5) можем записать

$$\Delta\bar{v}'_n = \bar{M}_n(\bar{C}^*_n\delta\bar{r}_n - \delta\bar{v}^-_n) + \bar{M}_n(\bar{H}_n\bar{\varepsilon}_n - \bar{P}_n\bar{\varepsilon}_{n-1}) - \bar{\eta}_n.$$

Выражение $\bar{C}^*_n\,\delta\bar{r}_n - \delta\bar{v}^-_n$ через векторы ошибок в настоящей и предыдущих проверочных точках получается точно таким же, как и в случае закрепленного времени перелета и результат не изменится, если $\Delta\bar{v}_{n-1}$ заменить на $\Delta\bar{v}'_{n-1}$. Отсюда

$$\bar{C}^*_n\delta\bar{r}_n - \delta\bar{v}^-_n = \bar{\Lambda}_n\bar{\Lambda}^{-1}_{n-1}(\bar{C}^*_{n-1}\delta\bar{r}_{n-1} - \delta\bar{v}^-_{n-1} - \Delta\bar{v}'_{n-1}).$$

Начиная с этого места, наши выкладки начнут отличаться от аналогичных построений для случая закрепленного времени перелета в силу присутствия множителя $\bar{M}_n$ в уравнении для $\Delta\bar{v}'_n$. Однако последнее уравнение можно использовать как рекуррентную формулу и в результате ее последовательного применения будем иметь

$$\bar{C}^*_n\delta\bar{r}_n - \delta\bar{v}^-_n = -\bar{\Lambda}_n\sum_{k=0}^{n-1}\bar{\Lambda}^{-1}_k\Delta\bar{v}'_k, \tag{8. 13}$$

где

$$\Delta\bar{v}'_0 - \delta\bar{v}(t_L) = -\bar{\eta}_0$$

— ошибка в начальной скорости при выводе на орбиту. Следовательно, $\Delta\bar{v}'_n$ выражается рекуррентным соотношением

$$\Delta\bar{v}'_n = \bar{M}_n(\bar{H}_n\bar{\varepsilon}_n - \bar{P}_n\bar{\varepsilon}_{n-1}) - \bar{\eta}_n - \bar{M}_n\bar{\Lambda}_n\sum_{k=0}^{n-1}\bar{\Lambda}^{-1}_k\Delta\bar{v}'_k. \tag{8. 14}$$

Для того чтобы выразить $\Delta\bar{v}'_n$ непосредственно через ошибки, придется на некоторое время отвлечься и доказать вспомогательное положение.

Лемма: Если последовательность векторов $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ записывается в виде

$$\bar{a}_0 = \bar{b}_0,$$

$$\bar{a}_1 = \bar{b}_1 + \bar{\Psi}_1 \bar{\Omega}_0 \bar{a}_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\bar{a}_n = \bar{b}_n + \bar{\Psi}_n \sum_{k=0}^{n-1} \bar{\Omega}_k \bar{a}_k, \quad n \geqslant 2,$$

где $\bar{b}_0, \ldots, \bar{b}_n$; $\bar{\Psi}_1, \ldots, \bar{\Psi}_n$; $\bar{\Omega}_0, \ldots, \bar{\Omega}_{n-1}$ — произвольные последовательности векторов и матриц, то общий член рассматриваемой последовательности имеет вид

$$\bar{a}_n = \bar{b}_n + \bar{\Psi}_n \bar{\Omega}_{n-1} \bar{b}_{n-1} + \bar{\Psi}_n \sum_{k=0}^{n-2} \prod_{j=n-1}^{k+1} (\bar{I} + \bar{\Omega}_j \bar{\Psi}_j) \bar{\Omega}_k \bar{b}_k, \quad n \geqslant 2,$$

где сомножители в произведении берутся в убывающем порядке в соответствии с нижними индексами.

Доказательство: Если определить новый вектор

$$\bar{d}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{\Omega}_k \bar{a}_k, \quad n \geqslant 2,$$

то будем иметь

$$\bar{a}_n = \bar{b}_n + \bar{\Psi}_n \bar{d}_n.$$

Следовательно,

$$\bar{d}_{n+1} = \bar{d}_n + \bar{\Omega}_n \bar{a}_n = \bar{d}_n + \bar{\Omega}_n (\bar{b}_n + \bar{\Psi}_n \bar{d}_n) = (\bar{I} + \bar{\Omega}_n \bar{\Psi}_n) \bar{d}_n + \bar{\Omega}_n \bar{b}_n$$

есть разностное уравнение относительно $\bar{d}_n$. Нетрудно показать, что выражение

$$\bar{d}_n = \bar{\Omega}_{n-1} \bar{b}_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \prod_{j=n-1}^{k+1} (\bar{I} + \bar{\Omega}_j \bar{\Psi}_j) \bar{\Omega}_k \bar{b}_k, \quad n \geqslant 2$$

представляет собой его решение, удовлетворяющее необходимым начальным условиям при $n=2$, т. е.

$$\bar{d}_2 = \bar{\Omega}_1 \bar{b}_1 + (\bar{I} + \bar{\Omega}_1 \bar{\Psi}_1) \bar{\Omega}_0 \bar{b}_0 = \bar{\Omega}_1 \bar{a}_1 + \bar{\Omega}_0 \bar{a}_0.$$

Итак, лемма доказана.

Полученная лемма применима к нашей задаче, если использовать следующие обозначения:

$$\bar{a}_n \sim \Delta\bar{v}'_n, \quad \bar{b}_n \sim \bar{M}_n(\bar{H}_n\bar{\varepsilon}_n - \bar{P}_n\bar{\varepsilon}_{n-1}) - \bar{\eta}_n,$$
$$\bar{\Psi}_n \sim -\bar{M}_n\bar{\Lambda}_n, \quad \bar{\Omega}_n \sim \bar{\Lambda}_k^{-1}.$$

Тогда, введя определение

$$\bar{X}_{k,n} = \begin{cases} \bar{I} & \text{при } k = n-1, \\ \prod\limits_{j=n-1}^{k+1} (\bar{I} - \bar{\Lambda}_j^{-1}\bar{M}_j\bar{\Lambda}_j) & \text{при } k \leqslant n-2, \end{cases}$$

можно воспользоваться доказанной леммой для того, чтобы переписать уравнение (8. 14) в виде

$$\Delta\bar{v}'_n = \bar{M}_n(\bar{H}_n\bar{\varepsilon}_n - \bar{P}_n\bar{\varepsilon}_{n-1}) - \bar{\eta}_n -$$
$$- \bar{M}_n\bar{\Lambda}_n \sum_{k=0}^{n-1} \bar{X}_{k,n}\bar{\Lambda}_k^{-1}[\bar{M}_k(\bar{H}_k\bar{\varepsilon}_k - \bar{P}_k\bar{\varepsilon}_{k-1}) - \bar{\eta}_k].$$

При суммировании, указанном в последнем уравнении, все члены с $k \leqslant n-2$ имеют множитель

$$\bar{M}_n\bar{\Lambda}_n(\bar{I} - \bar{\Lambda}_{n-1}^{-1}\bar{M}_{n-1}\bar{\Lambda}_{n-1}).$$

Используя (8. 9) и (8. 12), можно переписать этот множитель следующим образом:

$$\frac{1}{v_{n-1}^2}\bar{M}_n\bar{\Lambda}_n\bar{\Lambda}_{n-1}^{-1}\bar{\nu}_{n-1}\bar{\nu}_{n-1}^T\bar{\Lambda}_{n-1} =$$
$$= \frac{1}{v_{n-1}^2}\bar{M}_n\bar{\Lambda}_n\bar{\Lambda}_{n-1}^{-1}\bar{\Lambda}_{n-1}\bar{R}_A^{-1}\bar{v}_r(t_A)\bar{v}_r^T(t_A)\bar{R}_A^{T-1}\bar{\Lambda}_{n-1}^T\bar{\Lambda}_{n-1} =$$
$$= \frac{1}{v_{n-1}^2}\bar{M}_n[\bar{\Lambda}_n\bar{R}_A^{-1}\bar{v}_r(t_A)\bar{v}_r^T(t_A)\bar{R}_A^{T-1}\bar{\Lambda}_n^T]\bar{\Lambda}_n^{T-1}\bar{\Lambda}_{n-1}^T\bar{\Lambda}_{n-1} =$$
$$= \frac{1}{v_{n-1}^2}\bar{M}_n\bar{\nu}_n\bar{\nu}_n^T\bar{\Lambda}_n^{T-1}\bar{\Lambda}_{n-1}^T\bar{\Lambda}_{n-1} =$$
$$= \frac{v_n^2}{v_{n-1}^2}\bar{M}_n(\bar{I} - \bar{M}_n)\bar{\Lambda}_n^{T-1}\bar{\Lambda}_{n-1}^T\bar{\Lambda}_{n-1}.$$

Далее, из того, что $\bar{M}_n$ — проективный оператор, следует

$$\bar{M}_n(\bar{I} - \bar{M}_n) = \bar{0}.$$

Итак, все члены суммы, для которых $k \leqslant n-2$, тождественно равны нулю, в результате чего можно записать

$$\Delta \overline{v}'_n = \overline{M}_n \overline{H}_n \overline{\varepsilon}_n - (\overline{M}_n \overline{P}_n + \overline{M}_n \overline{\Lambda}_n \overline{\Lambda}_{n-1}^{-1} \overline{M}_{n-1} \overline{H}_{n-1}) \overline{\varepsilon}_{n-1} +$$
$$+ \overline{M}_n \overline{\Lambda}_n \overline{\Lambda}_{n-1}^{-1} \overline{M}_{n-1} \overline{P}_{n-1} \overline{\varepsilon}_{n-2} - \overline{\eta}_n + \overline{M}_n \overline{\Lambda}_n \overline{\Lambda}_{n-1}^{-1} \overline{\eta}_{n-1}. \qquad (8.15)$$

Таким образом, получено явное соотношение, выражающее импульс скорости, действительно приложенный в момент t_n, через настоящие и предыдущие ошибки измерений, а также через ошибки реализации коррекций. Отметим, что соответствующее выражение для случая навигации с закрепленным временем перелета получается из формулы (8.15), если заменить матрицы $\overline{M}_n$ и $\overline{M}_{n-1}$ единичными матрицами.

8.3. Анализ ошибок навигации и наведения

Для учета в статистическом анализе точностей навигации и наведения в этом разделе будут выведены различные выражения, позволяющие определить причинно-следственные связи для отклонений и неопределенностей знания положения, скорости и времени. Затем в разд. 8.4 некоторые из полученных результатов будут использованы для сопоставления эффективности двух схем наведения, описанных в двух предыдущих разделах.

Ошибка реализации коррекции скорости

Погрешности в приложении командной коррекции скорости $\Delta\hat{\overline{v}}$ происходят из-за ошибок как по величине, так и по направлению. В дальнейшем эти две ошибки будут предполагаться независимыми случайными переменными с нулевым математическим ожиданием.

Рассмотрим систему координат, в которой расчетный вектор коррекции скорости лежит вдоль одной из осей. Тогда, если $\overline{T}$ — матрица преобразования, которая связывает выбранную систему осей с первоначальной системой координат, то можно записать

$$\Delta\hat{\overline{v}} = \Delta\hat{v}\overline{T}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Введем теперь случайную переменную k, удовлетворяющую выражению

$$\Delta v = (1+k)\,\Delta\hat{v},$$

и обозначим через γ случайный угол между $\Delta\hat{\overline{v}}$ и $\Delta\overline{v}$. Будем полагать, что k и γ—малые величины и, следовательно, их степенями и произведениями можно пренебречь по сравнению с единицей. Истинный вектор коррекции скорости примет вид

$$\Delta\bar{v} = (1+k)\,\Delta\hat{v}\bar{T}\begin{pmatrix}\gamma\cos\beta\\ \gamma\sin\beta\\ 1\end{pmatrix},$$

где полярный угол β измеряется от координатной оси до проекции $\Delta\bar{v}$ в плоскости, нормальной к $\Delta\hat{\bar{v}}$. Следовательно, вектор неопределенности $\bar{\eta}$ выражается соотношением

$$\bar{\eta} = \Delta\hat{\bar{v}} - \Delta\bar{v} = -\Delta\hat{v}\bar{T}\left[\gamma\begin{pmatrix}\cos\beta\\ \sin\beta\\ 0\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right].$$

Допустим, что k, γ, β — статистически независимые случайные переменные с нулевыми математическими ожиданиями. Предположим далее, что случайный угол β однородно распределен в интервале от $-\pi$ до π. Тогда для корреляционной матрицы неопределенностей коррекции скорости будем иметь выражение

$$\bar{N} = \overline{\bar{\eta}\bar{\eta}^T} = \overline{k^2}\,\overline{\Delta\hat{\bar{v}}\Delta\hat{\bar{v}}^T} + \frac{\overline{\gamma^2}}{2}\,\overline{\Delta\hat{v}^2}\,\bar{T}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\bar{T}^T,$$

откуда

$$\bar{N} = \overline{k^2}\,\overline{\Delta\hat{\bar{v}}\Delta\hat{\bar{v}}^T} + \frac{\overline{\gamma^2}}{2}\left(\overline{\Delta\hat{\bar{v}}^T\Delta\hat{\bar{v}}}\,\bar{I} - \overline{\Delta\hat{\bar{v}}\Delta\hat{\bar{v}}^T}\right), \tag{8.16}$$

где $\bar{I}$ — единичная матрица, а $\overline{k^2}$ и $\overline{\gamma^2}$ — средние квадраты величин k и γ.

Анализ расхода топлива

Для того чтобы исследовать влияние ошибок наведения на расход топлива, вычисляется средний квадрат изменения скорости $\overline{\Delta v_n^2}$, приложенного в каждой проверочной точке $n=1, 2, \ldots, N$. Это можно сделать в соответствии с разд. 8.1, если принять допущение о том, что $\bar{\varepsilon}_{-1}=\bar{\varepsilon}_{-2}=\bar{0}$ и согласиться с тем, что ошибка в начальной скорости имеет вид $\Delta\bar{v}_0=-\bar{\eta}_0$.

Корреляционные матрицы ошибок оценки, подставляемые в уравнение относительно $\overline{\Delta v^2}$, определяются согласно изложенному в гл. VII. При расчете $\overline{\Delta v_n^2}$ вычисляются сначала все члены, кроме $tr\bar{N}_n$; затем этот член получают по уравнению (8.16). Величина $tr\bar{N}_0$, используемая в расчете Δv_1^2, представляет собой средний квадрат ошибки по скорости в момент отправления от Земли (после схода с промежуточной орбиты).

Статистический анализ временных ошибок

Если для получения поправки к показанию бортовых часов используются астрономические измерения, то одна из возможных моделей ошибок часов представляет собой следующую. Допустим, что в промежутке между моментами t_{n-1} и t_n двух последовательных проверок часы космического корабля уходят вперед или отстают с постоянной скоростью, причем скорость эта случайна и статистически не зависит от предшествующего поведения часов. Другими словами, предполагается, что если σ_c — среднеквадратичное отклонение скорости ухода часов, то средний квадрат ошибки часов δt_{cn} в момент t_n равен

$$\overline{\delta t_{cn}^2} = \sigma_c^2 (t_n - t_{n-1})^2 + \overline{\tau_{n-1}^2},$$

где τ_{n-1} — ошибка оценки времени в $(n-1)$-й проверочной точке. Резонно предположить, что δt_{cn} статистически не зависит от ошибок измерений.

Отклонение по скорости в точке встречи

Приложение коррекций скорости в каждой из проверочных точек вызовет отклонение скорости от номинальной в момент достижения планеты-цели, даже если отклонение по положению от цели будет полностью устранено. Для многих задач эта ошибка по скорости может не иметь большого значения. Однако, если рассматривается траектория облета планеты с возвращением, то очевидно, что ошибка в точке встречи с планетой приведет к ошибке вывода корабля на соответствующую траекторию для обратного полета. Эти ошибки по скорости можно скорректировать в непосредственной близости от планеты, а можно оставить коррекцию возникающих ошибок по положению и скорости до первой проверочной точки на обратном пути.

Для проведения статистического анализа отклонения скорости прибытия от номинала $\delta\bar{v}(t_A)$ можно выразить через совместное влияние коррекций скорости в различных проверочных точках. Более конкретно предположим ,что в момент t_n к кораблю, летевшему до этого вдоль номинальной траектории, внезапно приложен импульс скорости $\Delta\bar{v}_n$. Наша задача состоит в том, чтобы проэкстраполировать влияние этого импульса до момента t_A. Затем, учитывая допущение о линейности и вытекающий из него принцип суперпозиции, можно просуммировать полученные результаты.

С этой целью запишем уравнения (8.1) и (8.2) для момента времени $t=t_n$, подставив туда $\delta\bar{r}(t_n)=0$ и $\delta\bar{v}(t_n)=\Delta\bar{v}_n$ или $\delta\bar{v}(t_n)=\Delta\bar{v}_n'$, в зависимости от схемы наведения.

Решая уравнения относительно $\bar{c}$ и $\bar{c}^*$, найдем

$$\bar{c} = -\bar{\Lambda}_n^{-1}\,\Delta\bar{v}_n, \quad \bar{c}^* = -\bar{\Lambda}_n^{*-1}\,\Delta\bar{v}_n.$$

Затем, если $\delta\bar{v}_n(t_A)$ — отклонение скорости в момент t_A за счет импульса скорости, приложенного в момент t_n, то из уравнения (8. 2) следует

$$\delta\bar{v}_n(t_A)=\bar{V}_A\bar{c}+\bar{c}^*,$$

так как $\bar{V}_A^*=\bar{I}$. Полагая теперь, что имеется всего N проверочных точек, найдем на основании принципа суперпозиции общее отклонение скорости

$$\delta\bar{v}(t_A)=-\sum_{n=0}^{N}(\bar{V}_A\bar{\Lambda}_n^{-1}+\bar{\Lambda}_n^{*-1})\Delta\bar{v}_n.$$

Можно получить другой вариант последней формулы, если учесть соотношение

$$\bar{\Lambda}_n^{*-1}\bar{\Lambda}_n=(\bar{C}_n\bar{R}_n^*-\bar{V}_n^*)^{-1}\bar{\Lambda}_n=[(\bar{V}_n-\bar{V}_n^*\bar{R}_n^{*-1}\bar{R}_n)\bar{R}_n^{-1}\bar{R}_n^*]^{-1}\Lambda_n=$$
$$=\bar{R}_n^{*-1}\bar{R}_n(\bar{V}_n-\bar{C}_n^*\bar{R}_n)^{-1}\bar{\Lambda}_n=-\bar{R}_n^{*-1}\bar{R}_n.$$

Отсюда

$$\delta\bar{v}(t_A)=\sum_{n=0}^{N}(\bar{R}_n^{*-1}\bar{R}_n-\bar{V}_A)\bar{\Lambda}_n^{-1}\Delta\bar{v}_n. \quad (8.17)$$

Здесь, конечно, — $\Delta\bar{v}_0$ — начальная ошибка по скорости при выводе на орбиту. С помощью зависимостей (8. 7) или (8. 15) $\Delta\bar{v}(t_A)$ можно выразить через ошибки $\bar{\varepsilon}$ и $\bar{\eta}$.

Пролет мимо планеты-цели

Для того чтобы определить отклонение по положению в номинальный момент прибытия, используем уравнения (8. 1) и (8. 2), записанные в виде

$$\delta\bar{r}(t_A)=\bar{R}_A\bar{c},$$
$$\delta\bar{r}_N=\bar{R}_N\bar{c}+\bar{R}_N^*\bar{c}^*,$$
$$\delta\bar{v}_N^+=\bar{V}_N\bar{c}+\bar{V}_N^*\bar{c}^*,$$

полагая, что t_N — момент последней коррекции скорости. Тогда, исключая $\bar{c}$ и $\bar{c}^*$, получим

$$\delta\bar{r}(t_A)=\bar{R}_A\bar{\Lambda}_N^{-1}(\bar{C}_N^*\delta\bar{r}_N-\delta\bar{v}_N^--\Delta\bar{v}_N'),$$

если коррекции скорости вычисляются по схеме для незакрепленного времени перелета. Подстановка сюда уравнения (8. 13) при $n=N$ дает

$$\delta\bar{r}(t_A)=-\bar{R}_A\sum_{k=0}^{N}\bar{\Lambda}_k^{-1}\Delta\bar{v}_k'.$$

Отклонение по положению в номинальное время прибытия является не лучшим критерием точности наведения. Лишь составляющая $\delta\bar{r}(t_A)$, перпендикулярная к направлению движения корабля относительно планеты-цели может представлять интерес при определении действительного пролета. Другая составляющая вдоль направления движения больше сказывается на ошибке в расчетном времени прибытия. Поэтому критерий величины пролета, используемый далее, основывается на понятии вектора точки прицеливания $\bar{r}_a$, предложенного в разд. 5. 3. Отклонение вектора $\bar{r}_a$ от номинала, обозначаемое через $\delta\bar{r}_a$, можно вычислить, зная $\delta\bar{r}(t_A)$, по формуле

$$\delta\bar{r}_a = \overline{M}_a \delta\bar{r}(t_A),$$

где матрица $\overline{M}_a$ представляет собой проективный оператор

$$\overline{M}_a = \bar{I} - \frac{\bar{v}_r(t_A)\,\bar{v}_r^T(t_A)}{\bar{v}_r(t_A)\cdot\bar{v}_r(t_A)}.$$

Вектор $\bar{v}_r(t_A)$ в свою очередь вычисляется как скорость корабля относительно планеты в номинальное время прибытия в предположении, что гравитационное поле планеты не влияет на движение корабля. Для планет, имеющих сравнительно малую сферу влияния, $\bar{v}_r(t_A)$ не будет, по сути дела, отличаться от скорости асимптотического приближения $\bar{v}_{\infty i}$.

Из опыта анализа ошибок межпланетного наведения известно, что отклонение $\delta\bar{r}(t_A)$ может быть весьма большим и составлять от 1000 до 3000 *км*, в то время как соответствующие значения $\delta\bar{r}_a$ обычно значительно меньше 150 *км*

На первый взгляд может показаться, что величина пролета мимо планеты-цели должна являться функцией ошибок измерений и реализации во всех предыдущих проверочных точках. Действительно, отклонение по положению от номинальной точки встречи зависит от всех прошлых ошибок, но на составляющую $\delta\bar{r}_a$ влияют только ошибки измерений в двух последних проверочных точках и последняя ошибка реализации. Для доказательства этого утверждения используем уравнение (8. 14), которое при $n=N$ позволяет записать *

$$\delta\bar{r}(t_A) = -\bar{R}_A\bar{\Lambda}_N^{-1}\overline{M}_N(\overline{H}_N\bar{\varepsilon}_N - \overline{P}_N\bar{\varepsilon}_{N-1}) + \bar{R}_A\bar{\Lambda}_N^{-1}\bar{\eta}_N -$$

$$-\bar{R}_A(\bar{I} - \bar{\Lambda}_N^{-1}\overline{M}_N\bar{\Lambda}_N)\sum_{k=0}^{N-1}\bar{\Lambda}_k^{-1}\,\Delta\bar{v}_k'.$$

После применения к полученному вектору проективного оператора $\overline{M}_a$ коэффициент перед знаком суммы становится тождественно

* На самом деле автор использует разность уравнений (8. 13) и (8. 14) при $n=N$ *(прим. ред.)*.

равным нулю, так как, используя определения (8.9) и (8.12), имеем

$$\overline{M}_a\overline{R}_A(\overline{I}-\overline{\Lambda}_N^{-1}\overline{M}_N\overline{\Lambda}_N)=\frac{1}{v_N^2}\overline{M}_a\overline{R}_A\overline{\Lambda}_N^{-1}\overline{v}_N\overline{v}_N'\overline{\Lambda}_N=$$

$$=\frac{1}{v_N^2}\overline{M}_a\overline{R}_A\overline{\Lambda}_N^{-1}\overline{\Lambda}_N\overline{R}_A^{-1}\overline{v}_r(t_A)\overline{v}_r^T(t_A)\overline{R}_A^{T-1}\overline{\Lambda}_N^{T-1}\overline{\Lambda}_N=$$

$$=\frac{v_r(t_A)^2}{v_N^2}\overline{M}_a(\overline{I}-\overline{M}_a)\overline{R}_A^{T-1}\overline{\Lambda}_N^{T-1}\overline{\Lambda}_N,$$

а из того, что $\overline{M}_a$ — проективный оператор, следует

$$\overline{M}_a(\overline{I}-\overline{M}_a)=\overline{0}.$$

Таким образом, выражение для вектора пролета мимо планеты-цели упрощается и принимает вид

$$\delta\overline{r}_a=-\overline{M}_a\overline{R}_A\overline{\Lambda}_N^{-1}[\overline{M}_N(\overline{H}_N\overline{\varepsilon}_N-\overline{P}_N\overline{\varepsilon}_{N-1})-\overline{\eta}_N]. \tag{8.18}$$

Соответствующее выражение при наведении по схеме для незакрепленного времени перелета получится, если заменить $\overline{M}_N$ единичной матрицей.

Отклонение от заданного времени прибытия

Из соотношения (8.10) видно, что в каждой проверочной точке оптимальный сдвиг во времени прибытия от номинального значения t_A зависит от коррекции скорости $\Delta\hat{\overline{v}}_n$, которую нужно было бы приложить, чтобы корабль пришел в номинальную точку встречи с вектором положения $\overline{r}(t_A)$. Если в каждой из предыдущих проверочных точек коррекции прикладывались по схеме незакрепленного времени перелета, то вектор коррекции $\Delta\hat{\overline{v}}_n$ будет функцией всех предыдущих ошибок измерений и реализации. Точное соотношение получается следующим образом.

Из уравнения (8.6) имеем

$$\Delta\hat{\overline{v}}_n=(\overline{C}_n^*\delta\overline{r}_n-\delta\overline{v}_n)+\overline{H}_n\overline{\varepsilon}_n-\overline{P}_n\overline{\varepsilon}_{n-1},$$

откуда после подстановки уравнения (8.13) получим

$$\Delta\hat{\overline{v}}_n=\overline{H}_n\overline{\varepsilon}_n-\overline{P}_n\overline{\varepsilon}_{n-1}-\overline{\Lambda}_n\sum_{k=0}^{n-1}\overline{\Lambda}_k^{-1}\Delta\overline{v}_k',$$

где $\Delta\overline{v}_k'$ выражается через $\overline{\varepsilon}$ и $\overline{\eta}$ с помощью формулы (8.15). Окончательная оценка отклонения от расчетного времени прибытия получается из соотношения (8.10) при $n=N$:

$$\delta\hat{t}_A=\frac{1}{v_N^2}\left[\overline{v}_N^T(\overline{H}_N\overline{\varepsilon}_N-\overline{P}_N\overline{\varepsilon}_{N-1}-\overline{\Lambda}_N\sum_{k=0}^{N-1}\overline{\Lambda}_k^{-1}\Delta\overline{v}_k')\right]. \tag{8.19}$$

Ошибка оценки времени прибытия

Для дальнейшего обсуждения полезно обратиться к рис. 8.1. По мере того как корабль приближается к планете-цели составляющая вектора отклонения по положению, лежащая вдоль вектора относительной скорости, меняется, но составляющая, нормальная к этому направлению, по сути дела, остается неизменной. Когда проекция векторной разности между радиусами-векторами

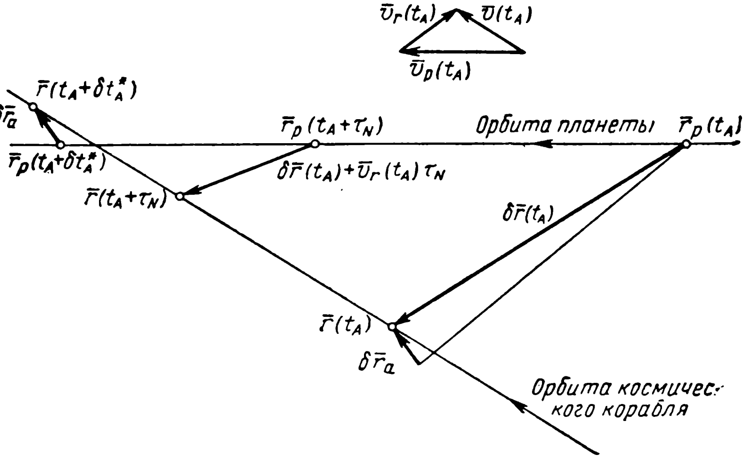


Рис. 8.1. Относительное движение вблизи планеты-цели

корабля и планеты на направление вектора относительной скорости станет равной нулю, корабль попадает на плоскость, которую будем называть «плоскостью цели». Из предыдущего обсуждения очевидно, что время попадания на плоскость цели не совпадает со временем t_A. Однако, если обозначить через δt_A^* разность между временем, когда корабль действительно проходит через плоскость цели, и временем t_A, то δt_A^* можно вычислять исходя из требования перпендикулярности вектора относительной скорости $\bar{v}_r(t_A)$ к вектору $\delta\bar{r}(t_A)+\bar{v}_r(t_A)\,\delta t_A^*$ Таким образом, имеем

$$\delta t_A^* = -\frac{\bar{v}_r(t_A)\cdot\delta\bar{r}(t_A)}{v_r(t_A)^2}.$$

Из-за ошибок при измерении времени приращение времени δt_A не является полной ошибкой оценки времени попадания на плоскость цели. В последней проверочной точке $t=t_N$ ошибка определения точного времени равна τ_N. Если допустить отсутствие ухода часов за период от последней засечки до окончательного контакта с планетой, то, когда часы показывают время t_A, истинное время будет равно $t_A+\tau_N$. В этот момент отклонение по положению составит $\delta\bar{r}(t_A)+\bar{v}_r(t_A)\tau_N$, так что, определяя δt_{EA} как ошибку оценки времени попадания на плоскость цели, можем записать

$$\delta t_{EA}=\delta t_A^*-\tau_N.$$

Далее, используя уравнение для $\delta\bar{r}(t_A)$, выведенное в пятом подразделе, обычным путем вычисляют $\overline{\delta t_{EA}^2}$.

При обсуждении вопроса о моментах прибытия подразумевалось, что ожидаемое время попадания на плоскость цели есть t_A. Однако, если последняя коррекция, выполняемая в момент t_N, осуществлялась в соответствии со схемой незакрепленного времени перелета, то ожидаемое время прибытия равно $t_A+\delta\hat{t}_A$, где $\delta\hat{t}_A$ выражается соотношением (8.10). В этот момент отклонение по положению равно $\delta\bar{r}(t_A)+\bar{v}_r(t_A)\delta t_A$ и ошибка оценки времени прохождения через плоскость цели вычисляется по формуле

$$\delta t_{EA}=-\frac{\bar{v}_r(t_A)\cdot\delta\bar{r}(t_A)}{v_r(t_A)^2}+\frac{\Delta\bar{v}_N\cdot\bar{v}_N}{v_N^2}-\tau_N. \tag{8.20}$$

Ошибка δt_{EA} представляет собой величину, с точностью до которой бортовое вычислительное устройство будет предсказывать интервал времени от последней проверочной точки до момента прибытия на планету. Эта ошибка особенно интересна в случае облета Марса или Венеры, так как она будет соответствовать ошибке отсчета времени для сбора научных данных без навигационного визирования планеты в течение контакта. Кроме того, такая ошибка представляет интерес при возвращении на Землю, потому что она явится источником отклонения к западу или к востоку от точки посадки из-за вращения Земли.

Изменение ошибок в течение контакта с планетой

При анализе полета с возвратом к Земле можно рассматривать траектории отправления и возвращения независимо друг от друга, причем единственным связующим звеном между ними будет служить случайная ошибка в начальной скорости для траектории возвращения. Эта ошибка вызывает появление вектора $\overline{\eta_0^2}$ для траектории возвращения и играет ту же роль, что и ошибка в начальной скорости вывода для траектории отправления. Если назначить проведение засечки весьма близко от планеты, то допущение о том, что полет обратно начинается при точном знании положения и времени, является достаточно справедливым. Неопределенность знания точного времени, составляющая в типичных условиях около 4 *мин,* приводит к соответствующей неопределенности положения, что объясняется движением планеты.

При анализе ошибок необходимо иметь выражение для отклонений вектора относительной скорости при подлете к планете, соответствующих вариациям вектора относительной скорости на траектории возвращения и вектора точки прицеливания во время контакта с планетой.

Из рассмотрения рис. 5. 15 можно видеть, что справедливо следующее выражение:

$$\bar{v}_{\infty 0}=\cos 2\nu\bar{v}_{\infty i}-v_{\infty}\frac{\sin 2\nu}{r_a}\bar{r}_a.$$

Переходя к вариациям, получим

$$\delta\bar{v}_{\infty 0}=\cos 2\nu\delta\bar{v}_{\infty i}-v_{\infty}\frac{\sin 2\nu}{r_a}\delta\bar{r}_a-\frac{\sin 2\nu\bar{r}_a}{r_a}\delta v_{\infty}+$$

$$+v_{\infty}\frac{\sin 2\nu}{r_a^2}\bar{r}_a\delta r_a-2\left(\sin 2\nu\cdot\bar{v}_{\infty i}+v_{\infty}\frac{\cos 2\nu}{r_a}\bar{r}_a\right)\delta\nu.$$

Но из уравнения (5. 2) имеем

$$\delta\nu=-\frac{\sin 2\nu}{2}\left(\frac{\delta r_a}{r_a}+2\frac{\delta v_{\infty}}{v_{\infty}}\right).$$

Кроме того,

$$\delta r_a=\frac{\bar{r}_a\cdot\delta\bar{r}_a}{r_a},\qquad \delta v_{\infty}=\frac{\bar{v}_{\infty i}\cdot\delta\bar{v}_{\infty i}}{v_{\infty}}.$$

Объединяя все эти выражения, получим

$$\delta\bar{v}_{\infty 0}=\bar{K}\delta\bar{v}_{\infty i}+\bar{L}\delta\bar{r}_a, \tag{8.21}$$

где матрицы $\bar{K}$ и $\bar{L}$ определяются соотношениями

$$\bar{K}=\cos 2\nu\bar{I}+2\frac{\sin^2 2\nu}{v_{\infty}^2}\bar{v}_{\infty i}\bar{v}_{\infty i}^T+\frac{\sin 2\nu}{v_{\infty}r_a}(2\cos 2\nu-1)\bar{r}_a\bar{v}_{\infty i}^T,$$

$$\bar{L}=-v_{\infty}\frac{\sin 2\nu}{r_a}\bar{I}+\frac{\sin^2 2\nu}{r_a^2}\bar{v}_{\infty i}\bar{r}_a^T+v_{\infty}\frac{\sin 2\nu}{r_a^3}(1+\cos 2\nu)\bar{r}_a\bar{r}_a^T.$$

Другое, несколько менее сложное выражение было получено в результате решения задачи 5. 3, где рассматривались только вариации величины приращения скорости за счет вариаций модуля вектора точки прицеливания.

Вариация вектора точки попадания на поверхность планеты

Аналогичным образом можно исследовать вариацию радиуса-вектора точки на поверхности планеты назначения, куда должен попасть корабль. Из рассмотрения рис. 5. 20 видно, что

$$\bar{r}_s=r_s\frac{\sin\beta}{r_a}\bar{r}_a-r_s\frac{\cos\beta}{v_{\infty}}\bar{v}_{\infty i}.$$

Переходя, как и раньше, к вариациям, получим

$$\delta\bar{r}_s = r_s \frac{\sin\beta}{r_a}\delta\bar{r}_a - r_s\frac{\cos\beta}{v_\infty}\delta\bar{v}_{\infty i} - r_s\frac{\sin\beta}{r_a^2}\bar{r}_a\delta r_a +$$

$$+ r_s\frac{\cos\beta}{v_\infty^2}\bar{v}_{\infty i}\delta v_\infty + r_s\left(\frac{\sin\beta}{v_\infty}\bar{v}_{\infty i} + \frac{\cos\beta}{r_a}\bar{r}_a\right)\delta\beta.$$

Далее, из уравнений (5. 5) и (5. 6) будем иметь

$$\delta\beta = \frac{\operatorname{tg}\psi}{r_a^2}\left[(2r_a - r_s\sin\beta)\delta r_a + 2\frac{\mu r_s}{v_\infty^3}(1-\cos\beta)\delta v_\infty\right],$$

Объединяя полученные выражения, придем к окончательной формуле

$$\delta\bar{r}_s = \bar{P}\delta\bar{v}_{\infty i} + \bar{Q}\delta\bar{r}_a, \tag{8.22}$$

где

$$\bar{P} = -r_s\frac{\cos\beta}{v_\infty}\bar{I} + r_s\frac{\cos\beta}{v_\infty^3}\bar{v}_{\infty i}\bar{v}_{\infty i}^T +$$

$$+ 2r_s\frac{\operatorname{tg}\psi}{r_a v_\infty^2}(r_a - r_s\sin\beta)\left(\frac{\cos\beta}{r_a}\bar{r}_a + \frac{\sin\beta}{v_\infty}\bar{v}_{\infty i}\right)\bar{v}_{\infty i}^T,$$

$$\bar{Q} = r_s\frac{\sin\beta}{r_a}\bar{I} - r_s\frac{\sin\beta}{r_a^3}\bar{r}_a\bar{r}_a^T +$$

$$+ r_s\frac{\operatorname{tg}\psi}{r_a^3}(2r_a - r_s\sin\beta)\left(\frac{\cos\beta}{r_a}\bar{r}_a + \frac{\sin\beta}{v_\infty}\bar{v}_{\infty i}\right)\bar{r}_a^T.$$

В задаче 5. 4 получено другое выражение, где рассматриваются вариации вектора точки контакта с поверхностью только за счет изменений модуля вектора точки прицеливания.

8.4. Численные примеры

Те же четыре траектории, которые использовались в качестве примеров в гл. VII, были выбраны также и для иллюстрации анализировавшихся выше схем наведения с закрепленным и незакрепленным временем перелета. Для этих траекторий в табл. 7. 5—7. 8 приведены наименьшие среднеквадратичные ошибки по положению и времени в функции времени, прошедшего с момента старта.

Для сопоставления схем наведения проводилось статистическое моделирование, в ходе которого вычислялось большое количество реализаций траекторий при различных комбинациях моментов приложения корректирующих импульсов скорости. Были приняты следующие ошибки наведения: среднеквадратичные ошибки в скорости схода — 12,2 *м/сек,* среднеквадратичные ошибки реализации коррекций скорости — 1% от величины импульса. Ошибка в скорости схода относится к моменту отсечки топлива двигателей ракеты-носителя. Поэтому для нахождения среднеквадратичной ошибки по скорости после достижения скорости убегания нужно умножить ошибку в скорости схода на величину $[1+(v_{esc}/v_h)^2]$. Здесь v_{esc} — скорость убегания, а v_h — избыточная гиперболическая скорость космического корабля. Кроме того, предполагалось, что между моментами двух последовательных засечек часы корабля уходят с постоянной скоростью, величина которой является случайной и статистически не зависит от скорости ухода в другие промежутки времени.

В каждой реализации предусматривалось проведение четырех засечек и соответственно четырех коррекций скорости. Моменты времени, принятые в качестве проверочных точек, подбирались следующим путем для каждой траектории.

Из возможных моментов выполнения засечек, перечисленных в табл. 7. 5—7. 8, были отобраны четыре группы моментов времени. Затем производился случайный выбор моментов засечек по одному из каждой группы для каждой реализации. Ниже приведен состав отдельных групп.

1-я траектория полета на Марс

Группа 1: 0,001; 0,002; 0,003; 0,004; 0,005; 0,006.
Группа 2: 0,300; 0,325; 0,350; 0,375; 0,400; 0,425.
Группа 3: 0,725; 0,750; 0,775; 0,840.
Группа 4: 0,843; 0,844; 0,845; 0,846; 0,847; 0,848.

2-я траектория полета на Марс

Группа 1: 0,001; 0,002; 0,003; 0,004; 0,005.
Группа 2: 0,025; 0,050; 0,075; 0,100.
Группа 3: 0,275; 0,300; 0,325; 0,350; 0,400; 0,425.
Группа 4: 0,493; 0,494; 0,495; 0,496; 0,497; 0,498.

3-я траектория полета на Венеру

Группа 1: 0,001; 0,002; 0,003; 0,004; 0,005; 0,006.
Группа 2: 0,025; 0,050; 0,200; 0,225.
Группа 3: 0,250; 0,275; 0,300; 0,325; 0,375; 0,400.
Группа 4: 0,443; 0,444; 0,445; 0,446; 0,447; 0,448.

4-я траектория полета на Венеру

Группа 1: 0,001; 0,002; 0,003; 0,004; 0,005; 0,008.
Группа 2: 0,025; 0,075; 0,100; 0,125; 0,150; 0,175.
Группа 3: 0,200; 0,225; 0,250.
Группа 4: 0,293; 0,294; 0,295; 0,296; 0,297; 0,298.

Таким способом было подготовлено пятьдесят наборов из моментов засечек для каждой траектории. Результат каждой реализации представлен точкой на рис. 8. 2—8. 5, где конечные среднеквадратичные ошибки положения построены по суммарной величине коррекций скорости. Огибающие этих точек, показанные на рисунках, могут служить важными критериями при планировании полета. Эти кривые выражают предельную точность, достижимую на различных траекториях, если оптимизировать величину промаха по сумме коррекций скорости. Подробная статистическая история наведения во время каждого полета, изображенного точкой на огибающей, приведена в табл. 8. 1—8. 4.

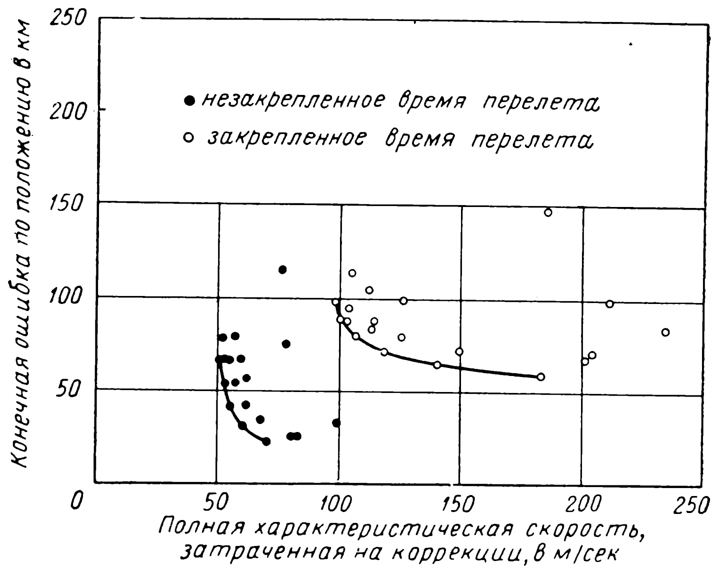


Рис. 8.2. Результаты наведения для 1-й траектории перелета на Марс:

полет на Марс (отправление 5 ноября 1964 г., время полета 0,85 года)

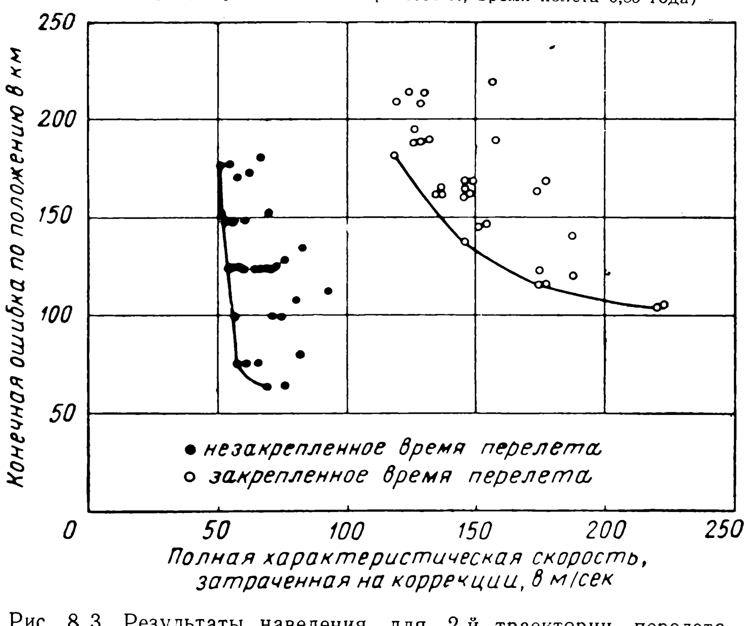


Рис. 8.3. Результаты наведения для 2-й траектории перелета на Марс:

полет на Марс (отправление 24 ноября 1964 г., время полета 0,50 года)

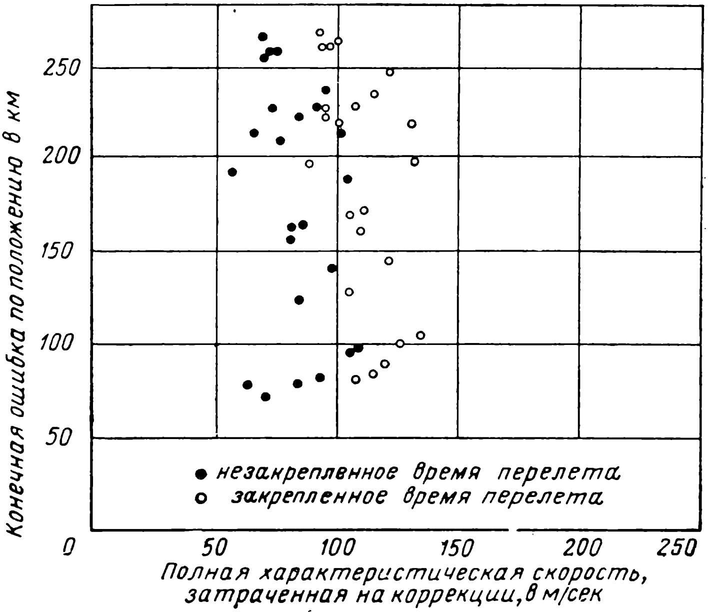


Рис. 8.4. Результаты наведения для 3-й траектории перелета на Венеру:

полет на Венеру (отправление 19 апреля 1964 г., время полета 0,45 года)

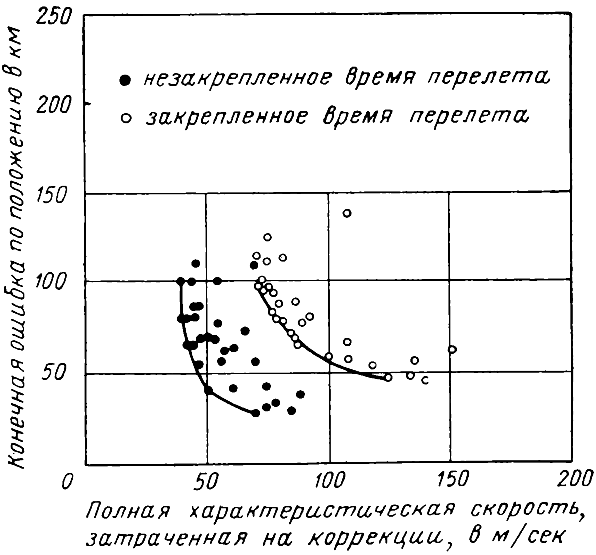


Рис. 8.5. Результаты наведения для 4-й траектории перелета на Венеру:

полет на Венеру (отправление 19 апреля 1964 г., время полета 0,30 года)

Таблица 8.1

Результаты наведения для 1-й траектории полета на Марс*

Наведение с незакрепленным временем перелета				Наведение с закрепленным временем перелета			
время засечки	коррекция скорости	конечная ошибка по скорости	конечная ошибка по положению	время засечки	коррекция скорости	конечная ошибка по скорости	конечная ошибка по положению
0,001	38,4			0,004	47,6		
0,425	1,2			0,300	2,1		
0,775	4,3			0,775	12,8		
0,844	7,0			0,843	35,7		
Всего	50,9	72,8	66	Всего	98,2	34,5	98
0,004	38,7			0,002	47,3		
0,375	0,6			0,400	2,7		
0,775	3,4			0,775	9,2		
0,845	9,5			0,844	41,1		
Всего	52,2	73,2	53	Всего	100,3	38,7	88
0,002	38,4			0,005	47,9		
0,375	0,6			0,300	2,1		
0,775	3,4			0,775	12,4		
0,846	11,9			0,844	40,2		
Всего	54,3	73,4	42	Всего	102,6	38,7	87
0,006	39,3			0,004	47,6		
0,400	0,9			0,375	2,4		
0,775	4,0			0,775	8,5		
0,847	15,3			0,845	47,9		
Всего	59,5	74,1	31	Всего	106,4	45,4	79
0,005	39,0			0,002	47,3		
0,325	0,6			0,375	2,4		
0,775	4,0			0,775	8,5		

* В табл. 8.1—8.4 время указано в годах, коррекция скорости и конечная ошибка по скорости — в *м/сек*, а конечная ошибка по положению — в *км* (*прим. ред.*).

Продолжение

Наведение с незакрепленным временем перелета				Наведение с закрепленным временем перелета			
время засечки	коррекция скорости	конечная ошибка по скорости	конечная ошибка по положению	время засечки	коррекция скорости	конечная ошибка по скорости	конечная ошибка по положению
0,848	25,9			0,846	59,5		
Всего	69,5	77,1	23	Всего	117,7	56,7	71
				0,006	47,9		
				0,400	3,1		
				0,775	9,1		
				0,847	80,2		
				Всего	140,3	77,4	64
				0,005	47,9		
				0,325	2,1		
				0,775	10,7		
				0,848	122,3		
				Всего	183,0	119,6	58

Таблица 8.2

Результаты наведения для 2-й траектории полета на Марс

Наведение с незакрепленным временем перелета				Наведение с закрепленным временем перелета			
время засечки	коррекция скорости	конечная ошибка по скорости	конечная ошибка по положению	время засечки	коррекция скорости	конечная ошибка по скорости	конечная ошибка по положению
0,003	29,0			0,001	35,4		
0,025	1,5			0,025	1,8		
0,400	11,3			0,350	11,6		
0,494	10,4			0,494	70,2		
Всего	52,2	40,2	150	Всего	119,0	69,2	180

Наведение с незакрепленным временем перелета				Наведение с закрепленным временем перелета			
время засечки	коррекция скорости	конечная ошибка по скорости	конечная ошибка по положению	время засечки	коррекция скорости	конечная ошибка по скорости	конечная ошибка по положению
0,001	29,0			0,001	35,4		
0,025	1,5			0,100	2,7		
0,350	7,3			0,350	13,1		
0,494	16,5			0,495	84,1		
Всего	54,3	41,1	146	Всего	135,3	81,7	161
0,004	29,0			0,002	35,4		
0,025	1,5			0,025	1,8		
0,400	11,9			0,400	18,6		
0,495	12,2			0,496	90,8		
Всего	54,6	40,8	124	Всего	146,6	88,9	135
0,002	29,0			0,001	35,4		
0,025	1,5			0,025	1,8		
0,400	11,0			0,425	23,8		
0,496	15,3			0,497	114,0		
Всего	56,8	41,4	98	Всего	175,0	111,3	116
0,001	29,0			0,003	35,4		
0,025	1,5			0,075	2,7		
0,425	13,7			0,400	25,0		
0,497	15,5			0,498	158,5		
Всего	59,7	42,4	74	Всего	221,6	154,5	103
0,004	29,0						
0,025	1,5						
0,425	15,5						
0,498	22,9						
Всего	68,9	46,3	63				

Таблица 8.3

Результаты наведения для 3-й траектории полета на Венеру

Наведение с незакрепленным временем перелета				Наведение с закрепленным временем перелета			
время засечки	коррекция скорости	конечная ошибка по скорости	конечная ошибка по положению	время засечки	коррекция скорости	конечная ошибка по скорости	конечная ошибка по положению
0,006	40,0			0,006	49,1		
0,225	1,5			0,225	2,1		
0,400	6,8			0,400	7,9		
0,443	8,5			0,443	29,9		
Всего	56,8	38,1	188	Всего	89,0	28,1	196
0,002	39,3			0,002	48,5		
0,200	1,8			0,200	2,4		
0,400	11,6			0,400	13,4		
0,447	17,4			0,477	42,7		
Всего	70,1	41,8	71	Всего	107,0	40,6	79

Таблица 8.4

Результаты наведения для 4-й траектории полета на Венеру

Наведение с незакрепленным временем перелета				Наведение с закрепленным временем перелета			
время засечки	коррекция скорости	конечная ошибка по скорости	конечная ошибка по положению	время засечки	коррекция скорости	конечная ошибка по скорости	конечная ошибка по положению
0,003	28,1			0,004	34,1		
0,175	1,5			0,100	1,8		
0,250	2,1			0,225	7,0		
0,293	7,3			0,294	29,9		
Всего	39,0	35,4	101	Всего	72,8	27,1	98

Продолжение

Наведение с незакрепленным временем перелета				Наведение с закрепленным временем перелета			
время засечки	коррекция скорости	конечная ошибка по скорости	конечная ошибка по положению	время засечки	коррекция скорости	конечная ошибка по скорости	конечная ошибка по положению
0,002	28,1			0,004	34,1		
0,150	1,2			0,125	1,5		
0,250	2,7			0,250	7,0		
0,294	8,5			0,295	36,3		
Всего	40,5	35,7	82	Всего	78,9	32,9	80
0,001	27,8			0,001	33,8		
0,150	1,5			0,100	1,8		
0,250	2,7			0,200	5,2		
0,295	10,4			0,296	43,9		
Всего	42,4	36,0	66	Всего	84,7	41,4	72
0,005	28,4			0,001	33,8		
0,125	1,5			0,075	2,4		
0,250	4,3			0,225	11,6		
0,296	12,8			0,296	39,9		
Всего	47,0	36,6	56	Всего	87,7	36,9	68
0,006	28,4			0,001	33,8		
0,150	1,8			0,075	2,4		
0,250	2,1			0,225	11,6		
0,297	17,1			0,298	76,8		
Всего	49,4	38,1	42	Всего	124,6	73,4	47
0,003	28,1			0,001	33,8		
0,075	2,4			0,025	4,0		
0,250	11,3			0,225	29,6		
0,298	27,5			0,298	72,2		
Всего	69,3	42,4	29	Всего	139,6	69,8	45

Как видно из рисунков, для 1-й траектории полета на Марс обеспечивается бо́льшая точность наведения, чем для 2-й траектории. По-видимому, этот результат можно объяснить тем, что в случае 1-й траектории скорость корабля относительно Марса значительно меньше. Те же мысли возникают при сравнении 3 и 4-й траекторий полета на Венеру. Точки на рис. 8.4 для 3-й траектории полета на Венеру настолько разбросаны, что не представляется возможным найти их огибающую исходя только из располагаемых данных.

В результате проведенного исследования непосредственно очевидны следующие выводы. Совершенно ясно, что при любой схеме наведения точность наведения (по положению) может быть улучшена в общем случае только за счет дополнительного расхода топлива. Далее, схема с незакрепленным временем перелета более чем вдвое лучше наведения с закрепленным временем как по точности конечного относительного положения, так и в смысле полной потребной коррекции скорости. Для односторонних траекторий полета на планету преимущества схемы с незакрепленным временем, по-видимому, полностью компенсируют те потенциальные неудобства, которые связаны с неопределенностью знания точного времени встречи с планетой назначения.

Проблему определения наилучших проверочных точек можно исследовать и с другой стороны. Данные, приведенные в табл. 8.5, представляют собой результаты полетов с наведением по одной засечке. Для вычислений такого типа предполагалось, что корабль покидает Землю без начальной ошибки по скорости. В назначенное для единственной засечки время прикладывается приращение скорости, основанное на определении положения с какой-то ошибкой. В результате корабль пролетает мимо планеты-цели с промахом, среднеквадратичное значение которого может быть найдено. Таким образом можно найти влияние всевозможных проверочных точек на точность наведения.

Для получения данных, приводимых в табл. 8.5, из материала гл. V были выбраны три межпланетные траектории с возвращением. Табулировались следующие величины: 1) время, когда выполняется засечка, в годах, отсчитываемое от момента старта с планеты отправления; 2) среднеквадратичная ошибка визирования в *км*, вычисляемая как корень квадратный из следа матрицы $\bar{E}$; 3) среднеквадратичная коррекция скорости в *м/сек*, вычисляемая по формуле (8.7); 4) среднеквадратичный пролет мимо планеты-цели в *км*, определяемый с помощью соотношения (8.18).

Для каждой засечки предусматривалась система измерений углов между линиями визирования следующих объектов (P_1 и P_2 обозначают видимые планеты в порядке близости их расположения к кораблю): 1) Солнца и P_1; 2) Альфа Центавра и P_1; 3) Сириуса или Арктура и P_1, причем из этих двух звезд выбирается такая, для которой плоскость измерения ближе к ортогональной по отношению к плоскости угла, измеряемого в п. 2; 4) Солнца и звезды,

Таблица 8.5

Результаты наведения с одной засечкой

Время с момента отправления *годы*	Среднеквадратичная ошибка визирования *км*	Среднеквадратичная коррекция скорости *м/сек*	Среднеквадратичный пролет *км*
	Траектория полета на Венеру (21)		
Полет в сторону Венеры			
0,00114	129	3,4	125663
0,00200	326	5,2	200896
0,025	12698	19,2	620765
0,100	2938	2,1	31194
0,120	3140	6,1	25918
0,122	31585	13,1	25411
0,124	3173	208,9	24881
0,125	3178	24,1	24616
0,126	3184	13,4	24350
0,200	3763	1,5	11732
0,300	6055	2,1	6419
0,365	9361	10,1	2582
0,375	13594	22,6	289
0,38900	5612	35,7	74
0,3940*			
Полет обратно			
0,00100	240	7,6	816691
0,00150	536	11,6	1222533
0,025	11473	17,7	1567404
0,050	10362	9,5	674696
0,100	13623	11,6	373322
0,200	11747	3,0	123632
0,300	20045	4,3	129438
0,400	20383	3,7	81335
0,500	17609	3,0	43261
0,600	15065	3,0	24915
0,700	12310	5,8	25900
0,750	15487	4,6	9136

Продолжение

Время с момента отправления *годы*	Среднеквадратичная ошибка визирования *км*	Среднеквадратичная коррекция скорости *м/сек*	Среднеквадратичный пролет *км*
0,800	17704	8,8	5664
0,8580	11688	67,4	117
0,8635*			
Траектория полета на Марс (53)			
Полет в сторону Марса			
0,00125	82	2,1	348588
0,100	6611	3,0	369099
0,200	11571	22,0	204684
0,450	16371	1,5	39707
0,600	15090	1,8	27494
0,800	7684	2,4	24889
1,000	13470	1,5	6078
1,18800	17785	61,9	119
1,1970*			
Полет обратно			
0,00100	320	10,0	488981
0,00274	2378	27,4	1324485
0,300	12419	2,7	79820
0,425	15338	32,3	112912
0,435	13586	93,9	77687
0,440	13647	207,4	77893
0,445	13729	50,9	78156
0,450	13827	29,6	78474
0,500	16722	14,6	95842
0,520	17705	62,8	179973
0,530	18260	48,8	143379
0,540	18859	16,5	96791
0,800	17576	0,61	27898
1,000	31278	1,5	33532
1,300	16464	38,4	46273
1,400	16252	5,5	130767
1,500	17168	23,5	457954
1,800	12855	2,7	4733

Продолжение

Время с момента отправления *годы*	Среднеквадратичная ошибка визирования *км*	Среднеквадратичная коррекция скорости *м/сек*	Среднеквадратичный пролет *км*
1,90000	7637	16,5	130
1,90800	2352	14,0	48
1,9130*			
Траектория полета на Марс (17)			
Полет в сторону Марса			
0,00114	106	3,0	508138
0,050	9844	7,0	1057872
0,100	7686	5,2	418432
0,200	7800	2,7	246846
0,300	16897	19,5	345490
0,400	9634	1,2	109252
0,600	15266	2,7	64524
0,650	18608	10,1	90527
0,675	21000	121,0	774387
0,700	21830	11,0	78966
0,875	24273	22,0	35169
0,900	23628	389,2	34244
0,925	22379	19,8	30154
1,200	16400	1,5	9815
1,400	13382	1,5	29977
1,500	21801	17,1	290849
1,525	22925	363,9	5723073
1,550	24283	19,8	282918
2,050	12593	1,5	17354
2,175	16752	8,2	65589
2,200	18709	38,7	240849
2,225	20703	7,3	34297
2,41000	9821	25,0	87
2,4223*			

Продолжение

Время с момента отправления, *годы*	Среднеквадратичная ошибка визирования *км*	Среднеквадратичная коррекция скорости *м/сек*	Среднеквадратичный пролет *км*
Полет обратно			
0,00100	88	3,1	222896
0,200	12596	4,3	142587
0,400	10733	2,4	35769
0,600	6543	0,9	5802
0,79600	4270	29,3	64
0,8006*			

* Время прибытия (*прим. автора*).

выбранной для измерения п. 3; 5) Солнца и P_2 при условии, что вторая планета также является видимой. В качестве объекта шестого измерения использовался угловой диаметр P_2, если он превышал 1 миллирадиан. Таким образом, измерялись минимум четыре угла, если, по крайней мере, одна планета являлась видимой.

Проверочные точки, приведенные в табл. 8. 5, были выбраны несколько неравномерно, чтобы более подробно охарактеризовать те области, в которых параметры изменяются быстрее. Как видно из результатов, время от времени появляется острый пик в величине коррекции скорости, не сопровождающийся сколько-нибудть существенными ошибками визирования, например, в точках $t=0{,}440$ и $t=0{,}520$ для обратной части траектории (53) полета на Марс. Явление объясняется тем, что указанные моменты соответствуют точкам на траектории корабля, которые отстоят по центральному углу на целое число градусов, кратное 180°, от точки отправления или прибытия. В произвольной точке S изменение скорости в направлении, нормальном к плоскости орбиты, вызывает вращение орбитальной плоскости вокруг линии, соединяющей Солнце и S. Поэтому в точках, отстоящих от S на 180°, 360° и т. д. положение корабля остается неизменным. Рассмотрим, например, точку $t=0{,}520$: корабль после отправления от Марса прошел 178° по центральному углу. При наличии ошибок наблюдений вычисляется смещение положения, которое имеет составляющую в несколько тысяч километров в направлении нормали к плоскости движения. Смещение такой величины в любом другом направлении вполне возможно; в этом же частном направлении его приходится объяснять только наличием большой ошибки по скорости в том же направлении в момент старта от Марса. В результате подается команда на большой импульс скорости для компенсации этой несуществующей ошибки.

8.5. Теория навигации при большом числе засечек с несмещенными оценками

Для двух теорий наведения, изложенных ранее в настоящей главе, способы навигации были идентичны. Описанный метод был, по сути дела, минимально необходимым и элементарным. Положение определялось с помощью последовательных астрономических измерений в различные моменты времени, а скорость вычислялась на основании двух засечек положения и времени, прошедшего между моментами выполнения этих засечек. Таким образом, если не считать возможности избыточных измерений при выполнении засечки, метод являлся детерминированным.

В данном и в следующем разделах будет развит более сложный подход к задаче навигации. Мы исследуем возможность оценки положения и скорости с помощью последовательности засечек положения. В силу этого будет уделено большее внимание динамической взаимосвязи между положением и скоростью, что позволит улучшить получаемые оценки.

При наличии дополнительной информации из большого числа засечек задача становится переопределенной, а это требует разработки метода взвешивания информации. Для получения критерия при выборе соответствующих весовых множителей представляется удобным использовать метод минимизации средних квадратов ошибок.

Рассмотрим сначала способ оценки положения на основе совокупности из N засечек положения. Суть задачи состоит в оценке неизвестной линейной комбинации известных функций в присутствии случайного шума. Оцениваемой функцией является отклонение по положению

$$\delta\bar{r}(t)=\bar{R}(t)\,\bar{c}+\bar{R}^*(t)\,\bar{c}^*$$

и для нее известна последовательность «измеряемых» величин

$$\delta\tilde{\bar{r}}_n=\bar{R}_n\bar{c}+\bar{R}_n^*\bar{c}^*+\bar{\varepsilon}_n,$$

где $\bar{\varepsilon}_n$ — случайная ошибка, соответствующая n-му измерению. (На самом деле, конечно, $\delta\tilde{\bar{r}}_n$ не получают непосредственно из измерений, а вычисляют исходя из основных астрономических наблюдений. Однако, так как это положение не влияет на проводимое доказательство, а также чтобы избежать путаницы в обозначениях, будем использовать знак «$\sim$» для оценки при единственной засечке, а знак „$\wedge$» сохраним для окончательной оценки, производимой на основе N таких засечек.)

Для линейной оценки вектора отклонений по положению $\delta\hat{\bar{r}}(t)$

выразим его в виде линейной комбинации измерений $\tilde{\delta r}_1, \tilde{\delta r}_2, \ldots, \tilde{\delta r}_N$. Таким образом,

$$\hat{\overline{\delta r}}(t) = \sum_{n=1}^{N} \overline{W}_n \tilde{\overline{\delta r}}_n, \tag{8.23}$$

где $\overline{W}_1, \overline{W}_2, \ldots, \overline{W}_N$ — последовательность матриц, состоящих из весовых множителей, которые будут определяться так, чтобы минимизировалась в среднеквадратичном смысле ошибка оценки

$$\overline{e}(t) = \hat{\overline{\delta r}}(t) - \overline{\delta r}(t).$$

Эту ошибку можно выразить через более общие величины

$$\overline{e}(t) = \sum_{n=1}^{N} \overline{W}_n \overline{\varepsilon}_n - \left[\overline{R}(t) - \sum_{n=1}^{N} \overline{W}_n \overline{R}_n\right] \overline{c} - \left[\overline{R}^*(t) - \sum_{n=1}^{N} \overline{W}_n \overline{R}_n^*\right] \overline{c}^*. \tag{8.24}$$

Далее можно пойти двумя независимыми путями. В первом из них предполагается отсутствие какого-либо знания природы постоянных $\bar{c}$ и $\bar{c}^*$. Этот случай является предметом обсуждения в настоящем разделе. Второй случай, где та же задача решается с привлечением некоторой статистической информации относительно этих постоянных, рассматривается ниже в разд. 8.6.

В первом случае, так как коэффициенты $\bar{c}$ и $\bar{c}^*$ совершенно неизвестны, ошибки оценки вектора $\delta\bar{r}(t)$ могут быть сколь угодно большими, если члены уравнения (8.24), заключенные в квадратные скобки, не равны нулю. Если же это имеет место, то оценка не содержит ошибки, независимо от того, насколько велики $\bar{c}$ и $\bar{c}^*$. Такие оценки называются *несмещенными*, а требования

$$\left.\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} \overline{W}_n \overline{R}_n &= \overline{R}(t), \\ \sum_{n=1}^{N} \overline{W}_n \overline{R}_n^* &= \overline{R}^*(t) \end{aligned}\right\} \tag{8.25}$$

называются *условиями связи*. Таким образом приходим к задаче определения таких весовых матриц $\overline{W}_n$, которые одновременно минимизируют $\overline{e^2(t)}$ и удовлетворяют соотношениям (8.25).

Эту задачу наиболее удобно решать с помощью метода *множителей Лагранжа*. Если ввести матрицы множителей Лагранжа $\overline{M}$ и $\overline{M}^*$, то задача минимизации со связями становится эквивалентной задаче без связей, когда минимизируется выражение

$$J(\overline{W}_n) = \overline{e(t)^2} + 2tr\left[\left(\overline{R}(t) - \sum_{n=1}^{N} \overline{W}_n \overline{R}_n\right) \overline{M}^T + \right.$$
$$\left. + \left(\overline{R}^*(t) - \sum_{n=1}^{N} \overline{W}_n \overline{R}_n^*\right) \overline{M}^{*T}\right],$$

где

$$\overline{e(t)^2} = tr\left[\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} \overline{W}_n \overline{\overline{\delta\tilde{r}_n \delta\tilde{r}_m^T}}\, \overline{W}_m^T - \right.$$

$$\left. - 2\sum_{n=1}^{N} \overline{W}_n \overline{\delta\tilde{r}_n \delta\bar{r}(t)^T} + \overline{\delta\bar{r}(t)\,\delta\bar{r}(t)^T}\right].$$

Для получения необходимых и достаточных условий минимума J применим обычные методы вариационного исчисления. Дадим $\overline{W}_n$ вариацию $\delta\overline{W}_n$, тогда

$$\delta J = tr\left\{2\sum_{n=1}^{N} \delta\overline{W}_n \left[\sum_{m=1}^{N} \overline{\overline{\delta\tilde{r}_n \delta\tilde{r}_m^T}}\, \overline{W}_m^T - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \overline{\delta\tilde{r}_n \delta\bar{r}(t)^T} - \overline{R}_n \overline{M}^T - \overline{R}_n^* \overline{M}^{*T}\right]\right\}.$$

Следовательно, для того чтобы δJ равнялась нулю для всех вариаций $\delta\overline{W}_n$, должно выполняться равенство

$$\sum_{m=1}^{N} \overline{W}_m \overline{\overline{\delta\tilde{r}_m \delta\tilde{r}_n^T}} = \overline{M}\,\overline{R}_n^T + \overline{M}^* \overline{R}_n^{*T} + \overline{\delta\bar{r}(t)\,\delta\tilde{r}_n^T},$$

$$n = 1, 2, \ldots, N.$$

Это необходимое условие, которому должны удовлетворять оптимальные матричные весовые множители $\overline{W}_1, \overline{W}_2, \ldots, \overline{W}_N$. Если положить далее, что ошибки измерений $\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \ldots, \bar{\varepsilon}_N$ имеют нулевые математические ожидания и некоррелированы от засечки к засечке, т. е.

$$\overline{\bar{\varepsilon}_n} = 0, \quad \overline{\bar{\varepsilon}_n \bar{\varepsilon}_m^T} = 0, \quad n \neq m,$$

тогда необходимое условие приобретает достаточно простой вид

$$\overline{W}_n = \left(\overline{M}\,\overline{R}_n^T + \overline{M}^* \overline{R}_n^{*T}\right) \overline{E}_n^{-1},$$

$$n = 1, 2, \ldots, N, \tag{8.26}$$

где $\overline{E}_n$ — корреляционная матрица ошибок измерений в n-й засечке:

$$\overline{E}_n = \overline{\bar{\varepsilon}_n \bar{\varepsilon}_n^T}.$$

Для доказательства того, что это условие является также и достаточным, заменим оптимальную матрицу $\overline{W}_n$ другой весовой матрицей вида $\overline{W}_n - \overline{Y}_n$. В результате получим

$$J\left(\overline{W}_n - \overline{Y}_n\right) = J\left(\overline{W}_n\right) + 2tr\left[\sum_{n=1}^{N}\left(\overline{Y}_n \overline{R}_n \overline{M}^T + \overline{Y}_n \overline{R}_n^* \overline{M}^{*T}\right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=1}^{N} \overline{Y}_n \overline{E}_n \overline{W}_n^T\right] + tr\sum_{n=1}^{N} \overline{Y}_n \overline{E}_n \overline{Y}_n^T.$$

Таким образом, если уравнение (8.26) удовлетворяется, то будем иметь

$$J(\overline{W}_n-\overline{Y}_n)=J(\overline{W}_n)+tr\sum_{n=1}^{N}\overline{Y}_n\overline{E}_n\overline{Y}_n^T.$$

Но

$$tr\overline{Y}_n\overline{E}_n\overline{Y}_n^T=\overline{\overline{\varepsilon}_n^T\overline{Y}_n^T\overline{Y}_n\overline{\varepsilon}_n}\geqslant 0,$$

так что величина J не уменьшается при изменении $\overline{W}_n$, если $\overline{W}_n$ определена из уравнения (8.26).

Для нахождения матричных множителей Лагранжа $\overline{M}$ и $\overline{M}^*$ используем уравнения связи. Подставив (8.26) в (8.25), получим

$$\left.\begin{aligned}\overline{M}&=[\overline{R}(t)\,\overline{B}^{-1}\overline{A}^*-\overline{R}^*(t)]\,\overline{D},\\ \overline{M}^*&=[\overline{R}^*(t)\,\overline{B}^{*-1}\overline{A}-\overline{R}(t)]\,\overline{D}^T.\end{aligned}\right\}\qquad(8.27)$$

Здесь для удобства выкладок введены обозначения

$$\overline{A}=\sum_{n=1}^{N}\overline{R}_n^T\overline{E}_n^{-1}\overline{R}_n,$$

$$\overline{A}^*=\sum_{n=1}^{N}\overline{R}_n^{*T}\overline{E}_n^{-1}\overline{R}_n^*,$$

$$\overline{B}=\overline{B}^{*T}=\sum_{n=1}^{N}\overline{R}_n^{*T}\overline{E}_n^{-1}\overline{R}_n,$$

$$\overline{D}=(\overline{A}\overline{B}^{-1}\overline{A}^*-\overline{B}^*)^{-1}.$$

Итак, оптимальные весовые матрицы $\overline{W}_n$ полностью определены.

Наконец, минимальную среднеквадратичную ошибку оценки отклонения по положению можно выразить в следующем удобном виде:

$$\overline{e^2}=tr\sum_{n=1}^{N}\overline{W}_n\overline{E}_n\overline{W}_n^T=tr\sum_{n=1}^{N}(\overline{M}\overline{R}_n^T+\overline{M}^*\overline{R}_n^{*T})\,\overline{W}_n^T=$$

$$=tr\,[\overline{M}\overline{R}(t)^T+\overline{M}^*\overline{R}^*(t)^T].\qquad(8.28)$$

Аналогичный процесс может быть использован для оптимального определения отклонений по скорости, т. е. если оценка отклонений по скорости в момент t определяется выражением

$$\delta\hat{\overline{v}}(t)=\sum_{n=1}^{N}\overline{X}_n\delta\tilde{\overline{r}}_n,\qquad(8.29)$$

то можно найти, что

$$\overline{X}_n=(\overline{N}\overline{R}_n^T+\overline{N}^*\overline{R}_n^{*T})\,\overline{E}_n^{-1}, \tag{8.30}$$

где

$$\begin{aligned}\overline{N}&=[\overline{V}(t)\,\overline{B}^{-1}\overline{A}^*-\overline{V}^*(t)]\,\overline{D},\\ \overline{N}^*&=[\overline{V}^*(t)\,\overline{B}^{*-1}\overline{A}-\overline{V}(t)]\,\overline{D}^T.\end{aligned} \tag{8.31}$$

Оценка приращения скорости, потребного в момент t для коррекции по схеме закрепленного времени перелета, имеет вид

$$\Delta\hat{\overline{v}}(t)=\overline{C}^*(t)\,\delta\hat{\overline{r}}(t)-\delta\hat{\overline{v}}(t)=\sum_{n=1}^{N}[\overline{C}^*(t)\,\overline{W}_n-\overline{X}_n]\,\delta\tilde{\overline{r}}_n$$

или после небольших преобразований

$$\Delta\hat{\overline{v}}(t)=\overline{\Lambda}(t)\sum_{n=1}^{N}(\overline{B}^{-1}\overline{A}^*\overline{D}\overline{R}_n^T-\overline{D}^T\overline{R}_n^{*T})\,\overline{E}_n^{-1}\delta\tilde{\overline{r}}_n, \tag{8.32}$$

где $\overline{\Lambda}(t)$ определяется уравнением (6.49). Интересно отметить, что в уравнение (8.32) для оценки коррекции скорости момент выполнения коррекции входит только через множитель $\overline{\Lambda}(t)$, на который умножаются члены, зависящие только от моментов выполнения засечек.

Эффективность навигации с большим числом засечек численно иллюстрируется табл. 8.6. В таблице приведены окончательные

Таблица 8.6

Точность навигации по схеме нескольких засечек. (Использовались последовательные проверочные точки на 1-й траектории полета на Марс)

Время *годы*	Среднеквадратичная ошибка по положению в *км*			Среднеквадратичная ошибка по скорости в *м/сек*		
	2 точки	3 точки	4 точки	2 точки	3 точки	4 точки
0,001						
0,002	23			0,9		
0,003	32	26		1,2	0,6	
0,004	45	37	31	1,8	0,6	0,3
0,005	63	52	42	2,4	0,9	0,6
0,006	82	69	58	3,4	1,5	0,6
0,007	108	92	77	4,3	1,8	0,9
0,008	138	112	100	5,5	2,4	1,2
0,009	179	153	130	7,3	3,1	1,8

Продолжение

Время *годы*	Среднеквадратичная ошибка по положению в *км*			Среднеквадратичная ошибка по скорости в *м/сек*		
	2 точки	3 точки	4 точки	2 точки	3 точки	4 точки
0,010	228	196	166	9,2	4,0	2,1
0,025	2079	1783	1282	4,3	3,7	2,4
0,050	3891	3126	2917	5,5	2,4	2,1
0,075	4653	3598	3022	7,6	2,7	1,5
0,100	5492	4688	3826	9,2	4,3	1,8
0,125	6322	5576	4853	10,7	4,9	2,7
0,150	6059	5419	4912	11,3	4,9	3,1
0,175	1018	7628	6224	14,9	6,4	3,7
0,200	8132	7112	6129	16,8	5,8	3,3
0,225	11800	6525	5577	18,3	7,9	3,7
0,300	3810	3792	3697	5,19	2,1	1,8
0,325	3718	3211	2964	6,7	3,4	1,5
0,350	3794	3430	3083	6,7	3,4	2,4
0,375	3974	3576	3226	7,0	3,4	2,1
0,400	4212	3748	3359	7,3	3,7	2,1
0,425	4687	4149	3683	7,9	4,0	2,4
0,450	5236	4646	4106	8,8	4,3	2,4
0,475	5994	5271	4648	10,1	4,3	2,7
0,500	6774	5998	5306	11,6	5,3	3,4
0,525	7921	6973	6143	13,1	6,1	3,7
0,550	9298	8147	7152	15,6	7,3	4,3
0,575	10750	9377	8177	18,0	8,3	4,3
0,600	10623	9531	8476	19,2	8,8	5,2
0,625	10544	9427	8377	18,9	9,2	5,5
0,650	10323	9256	8250	18,6	9,2	5,5
0,675	8518	7866	7179	17,1	8,2	5,2
0,700	7751	7115	6476	14,6	7,9	4,9
0,725	6994	6429	5913	13,1	6,7	4,6
0,750	6240	5766	5317	11,9	6,1	4,0
0,775	5640	5216	4825	10,7	5,5	3,7

Продолжение

Время годы	Среднеквадратичная ошибка по положению в *км*			Среднеквадратичная ошибка по скорости в *м/сек*		
	2 точки	3 точки	4 точки	2 точки	3 точки	4 точки
0,800	8891	7195	6098	13,4	6,7	4,0
0,825	8615	7707	6736	15,6	6,1	4,0
0,840	4615	4329	4122	20,7	7,6	3,4
0,841	2970	3034	2926	128,1	18,3	7,0
0,842	2693	4632	2297	131,5	142,1	17,1
0,843	3604	1712	2510	181,8	51,2	55,5

среднеквадратичные неопределенности положения и скорости, получающиеся при объединении информации о положении от двух, трех и четырех последовательных засечек на 1-й траектории полета на Марс, исследовавшейся в разд. 8.4. Уменьшение ошибки по положению приблизительно согласуется с грубой моделью предсказаний, предложенной в задаче 8.7. Преимущества метода становятся особенно очевидными из-за существенного уменьшения ошибки оценки скорости.

8.6. Теория навигации при большом числе засечек со смещенными оценками

Задача оценки, сформулированная в разд. 8.5, состоит в определении $\delta\bar{r}(t)$ и $\delta\bar{v}(t)$ на основе косвенных измерений $\delta\bar{r}$ в дискретные моменты времени в прошлом. Функции, чьи значения должны оцениваться в момент t, представляют собой линейные комбинации зависящих от времени матриц, которые точно известны постольку, поскольку известна номинальная траектория. В настоящем разделе будем предполагать, что имеется априорная статистическая информация относительно векторных коэффициентов при этих матрицах. Таким образом, данная задача отличается от рассмотренной ранее тем, что теперь можно не налагать условия несмещенности, выражаемые уравнениями (8.25).

Прежде чем перейти к решению задачи, исследуем природу статистического поведения этих векторных коэффициентов. С помощью уравнений (8.1) и (8.2) можно выразить постоянные $\bar{c}$ и $\bar{c}^*$ через отклонения по положению и скорости $\delta\bar{r}_L$ и $\delta\bar{v}_L$ в начальный момент t_L:

$$\bar{c} = -\overline{C_L^*}\delta\bar{r}_L + \delta\bar{v}_L,$$

$$\bar{c}^* = \overline{R_L^{*-1}}\delta\bar{r}_L.$$

Допустим теперь, что $\delta\bar{r}_L$ и $\delta\bar{v}_L$ являются случайными переменными, совместная корреляционная матрица которых известна и имеет вид

$$\overline{X}_L=\overline{\begin{pmatrix}\delta\bar{r}_L\\ \delta\bar{v}_L\end{pmatrix}\left(\delta\bar{r}_L^T\delta\bar{v}_L^T\right)}=\begin{pmatrix}\overline{\delta\bar{r}_L\delta\bar{r}_L^T} & \overline{\delta\bar{r}_L\delta\bar{v}_L^T}\\ \overline{\delta\bar{v}_L\delta\bar{r}_L^T} & \overline{\delta\bar{v}_L\delta\bar{v}_L^T}\end{pmatrix}.$$

Эту матрицу можно получить, анализируя точность наведения при сходе с геоцентрической орбиты. Векторные коэффициенты $\bar{c}$ и $\bar{c}^*$ также будут случайными переменными с совместной корреляционной матрицей

$$\overline{\Gamma}=\begin{pmatrix}\overline{\Gamma}_1 & \overline{\Gamma}_2\\ \overline{\Gamma}_3 & \overline{\Gamma}_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{\bar{c}\bar{c}^T} & \overline{\bar{c}\bar{c}^{*T}}\\ \overline{\bar{c}^*\bar{c}^T} & \overline{\bar{c}^*\bar{c}^{*T}}\end{pmatrix}.$$

Нетрудно теперь установить связь между $\overline{X}_L$ и $\overline{\Gamma}$:

$$\overline{\Gamma}=\begin{pmatrix}-\overline{C}_L^* & \bar{I}\\ \bar{R}_L^{*-1} & \bar{0}\end{pmatrix}\overline{X}_L\begin{pmatrix}-\overline{C}_L^* & \bar{R}_L^{*T-1}\\ \bar{I} & \bar{0}\end{pmatrix}. \qquad (8.33)$$

Возвращаясь к основной задаче, рассмотрим, как и раньше, метод оценки положения на основе совокупности из N засечек положения. Для ошибки оценки остается справедливой формула (8.24). Будем снова считать, что ошибки измерений $\bar{\varepsilon}_n$ не коррелированы от засечки к засечке и имеют нулевые математические ожидания. Предположим далее, что $\bar{\varepsilon}_n$ и случайные векторные коэффициенты $\bar{c}$ и $\bar{c}^*$ не коррелированы. Тогда средний квадрат интересующей нас ошибки выразится соотношением

$$\overline{e(t)^2}=tr\Big\{\sum_{n=1}^{N}\overline{W}_n\overline{E}_n\overline{W}_n^T+\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\overline{W}_n\overline{P}_{nm}\overline{W}_m^T-2\sum_{n=1}^{N}\overline{W}_n\overline{Q}_n(t)+$$

$$+\left[\bar{R}(t)\overline{\Gamma}_1+\bar{R}^*(t)\overline{\Gamma}_3\right]\bar{R}(t)^T+\left[\bar{R}(t)\overline{\Gamma}_2+\bar{R}^*(t)\overline{\Gamma}_4\right]\bar{R}^*(t)^T\Big\},$$

где

$$\overline{P}_{nm}=\bar{R}_n\left(\overline{\Gamma}_1\bar{R}_m^T+\overline{\Gamma}_2\bar{R}_m^{*T}\right)+\bar{R}_n^*\left(\overline{\Gamma}_3\bar{R}_m^T+\overline{\Gamma}_4\bar{R}_m^{*T}\right);$$

$$\overline{Q}_n(t)=\bar{R}_n\left[\overline{\Gamma}_1\bar{R}(t)^T+\overline{\Gamma}_2\bar{R}^*(t)^T\right]+\bar{R}_n^*\left[\overline{\Gamma}_3\bar{R}(t)^T+\overline{\Gamma}_4\bar{R}^*(t)^T\right].$$

Используя для решения настоящей задачи тот же ход доказательства, что и в разд. 8.5, найдем необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять $\overline{W}_1, \overline{W}_2, \ldots, \overline{W}_N$ для оптимального решения задачи минимизации $\overline{e(t)^2}$ — матрицы $\overline{W}_n$ являются решениями следующей системы N линейных алгебраических уравнений:

$$\overline{E}_n\overline{W}_n^T+\sum_{m=1}^{N}\overline{P}_{nm}\overline{W}_m^T=\overline{Q}_n(t),$$

$$n=1, 2, \ldots, N. \qquad (8.34)$$

Тогда минимальный средний квадрат ошибки оценки будет записываться в виде

$$\overline{e(t)^2} = tr\left\{[\overline{R}(t)\overline{\Gamma}_1 + \overline{R}^*(t)\overline{\Gamma}_3]\,\overline{R}(t)^T + \right.$$
$$\left. + [\overline{R}(t)\overline{\Gamma}_2 + \overline{R}^*(t)\overline{\Gamma}_4]\,\overline{R}^*(t)^T - \sum_{n=1}^{N} \overline{W}_n \overline{Q}_n(t)\right\},$$

или в эквивалентном виде

$$\overline{e(t)^2} = tr\left\{[\overline{R}(t)\overline{\Gamma}_1 + \overline{R}^*(t)\overline{\Gamma}_3]\left[\overline{R}(t)^T - \sum_{n=1}^{N} \overline{R}_n^T \overline{W}_n^T\right] + \right.$$
$$\left. + [\overline{R}(t)\overline{\Gamma}_2 + \overline{R}^*(t)\overline{\Gamma}_4]\left[\overline{R}^*(t)^T - \sum_{n=1}^{N} \overline{R}_n^{*T} \overline{W}_n^T\right]\right\}. \qquad (8.35)$$

Нетрудно теперь провести аналогию с формулой (8.28). Члены $-[\overline{R}(t)\overline{\Gamma}_1 + \overline{R}^*(t)\overline{\Gamma}_3]$ и $-[\overline{R}(t)\overline{\Gamma}_2 + \overline{R}^*(t)\overline{\Gamma}_4]$ играют роль, аналогичную множителям Лагранжа $\overline{M}$ и $\overline{M}^*$. Кроме того, в формуле (8.35) имеются еще два дополнительных члена, которые можно приписать систематической ошибке*. Это явствует из того факта, что при $\overline{E}_n = \overline{0}$ оптимальная оценка не является точной. В случае, рассмотренном в разд. 8.5, эти члены отсутствуют, поскольку требования, налагаемые условиями несмещенности, исключали наличие систематической ошибки.

Совершенно аналогичный процесс может быть использован для нахождения смещенной оценки отклонения скорости $\delta\hat{\overline{v}}(t)$. Последнюю можно затем объединить с $\delta\hat{\overline{r}}(t)$ для получения оценки коррекции скорости, как это было сделано в конце предыдущего раздела. Однако мы не будем останавливаться на этом вопросе, оставляя его читателю в качестве упражнения.

Прежде чем закончить обсуждение, хотелось бы сделать несколько замечаний относительно решения уравнения (8.39) — нахождения весовых матриц $\overline{W}_1, \overline{W}_2, \ldots, \overline{W}_N$. Матрица коэффициентов этого уравнения имеет размерность $3N \times 3N$ и выглядит следующим образом:

$$\overline{F}_{3N,3N} = \begin{pmatrix} \overline{E}_1 + \overline{P}_{11} & \overline{P}_{12} & \overline{P}_{1N} \\ \overline{P}_{21} & \overline{E}_2 + \overline{P}_{22} & \overline{P}_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{P}_{N1} & \overline{P}_{N2} & \overline{E}_N + \overline{P}_{NN} \end{pmatrix},$$

причем каждый из ее элементов представляет собой матрицу размерности (3×3). Если для оценки использовалось $N+1$ засечек, где

* Речь идет здесь об ошибке, систематической в данной реализации (*прим. ред.*).

первые N были теми же, что и для предыдущей оценки по N засечкам, то матрицу коэффициентов $\bar{F}_{3N+3,\ 3N+3}$ можно представить состоящей из следующих блоков:

$$\bar{F}_{3N+3,\ 3N+3}=\begin{pmatrix} \bar{F}_{3N,\ 3N} & \bar{F}_{3N,\ 3} \\ \bar{F}_{3,\ 3N} & \bar{F}_{3,\ 3} \end{pmatrix}.$$

(Двойные индексы матриц F указывают соответственно число строк и столбцов.) Итак, новая матрица коэффициентов уравнения образуется присоединением к старой матрице (для случая N засечек) дополнительных строк и столбцов. Следовательно, если для случая N засечек задача решена, то известна матрица $\bar{F}^{-1}_{3N,\ 3N}$. Матрицу $\bar{F}^{-1}_{3N+3,\ 3N+3}$ можно вычислить с помощью операций сложения и умножения матриц, а обращение потребуется только одно — матрицы размерности (3×3). Нетрудно показать, что если матрица

$$\bar{K}_{3N+3,\ 3N+3}=\begin{pmatrix} \bar{K}_{3N,\ 3N} & \bar{K}_{3N,\ 3} \\ \bar{K}_{3,\ 3N} & \bar{K}_{3,\ 3} \end{pmatrix}$$

является обратной по отношению к $\bar{F}_{3N+3,\ 3N+3}$, то блоки этой обратной матрицы можно найти по следующим формулам:

$$\bar{K}_{33}=(\bar{F}_{33}-\bar{F}_{3,\ 3N}\bar{F}^{-1}_{3N,\ 3N}\bar{F}_{3N,\ 3})^{-1}$$

$$\bar{K}_{3,\ 3N}=-\bar{K}_{33}\bar{F}_{3,\ 3N}\bar{F}^{-1}_{3N,\ 3N},$$

$$\bar{K}_{3N,\ 3N}=\bar{F}^{-1}_{3N,\ 3N}\ (\bar{I}_{3N,\ 3N}-\bar{F}_{3N,\ 3}\bar{K}_{3,\ 3N}),$$

$$\bar{K}_{3N,\ 3}=-\bar{F}^{-1}_{3N,\ 3N}\bar{F}_{3N,\ 3}\bar{K}_{33}.$$

В действительности матрица коэффициентов является симметрической, т. е. $\bar{F}_{3N,3}=\bar{F}^{T}_{3\ ,N}$ и поэтому соответствующие блоки обратной матрицы $\bar{K}_{3,\ 3N}$ и $\bar{K}_{3N,\ 3}$ являются транспонированными по отношению друг к другу.

Подводя итоги, можно сказать, что матрицу коэффициентов следует вычислять рекуррентным способом по мере того, как к оценке подключаются дополнительные засечки. На каждом шаге потребуется обращать лишь одну трехмерную матрицу.

Задачи

8.1. Для окончательной коррекции скорости может понадобиться выбрать новое время прибытия так, чтобы минимизировать сумму модулей коррекции и отклонения по скорости в момент встречи с планетой-целью. Показать, что если t_N — момент приложения последней коррекции, то сдвиг δt номинального времени прибытия определяется в результате решения следующего уравнения:

$$\frac{\bar{\nu}_N^T\left(\bar{\nu}_N\delta t+\Delta\hat{\bar{v}}_N\right)}{\sqrt{\Delta\hat{\bar{v}}_N^2+\bar{\nu}_N^T\left(\bar{\nu}_N\delta t+2\Delta\hat{\bar{v}}_N\right)\delta t}}+$$

$$+\frac{\bar{\lambda}_N^T\left(\bar{\lambda}_N\delta t-\bar{R}_N^{*-1}\delta\hat{\bar{r}}_N\right)}{\sqrt{\delta\hat{\bar{r}}_N^T\bar{R}_N^{*T-1}\bar{R}_N^{*-1}\delta\hat{\bar{r}}_N+\bar{\lambda}_N^T\left(\bar{\lambda}_N\delta t-2\bar{R}_N^{*-1}\delta\hat{\bar{r}}_N\right)\delta t}}=0,$$

где

$$\bar{\lambda}_N=(\bar{V}_A\bar{\Lambda}_N^{-1}+\bar{\Lambda}_N^{*-1})\,\bar{\nu}_N,$$

а $\Delta\hat{\bar{v}}_N$ — оценка коррекции скорости для закрепленного времени перелета.

8.2. Корабль выведен на параболическую орбиту в однородном гравитационном поле. Следовательно, если $\bar{r}(t)$ — вектор положения, а $\bar{v}(t)$ — вектор скорости корабля, то имеем

$$\frac{d\bar{r}}{dt}=\bar{v},\quad \frac{d\bar{v}}{dt}=\bar{g},$$

где $\bar{g}$ — постоянный вектор гравитационного ускорения.

а) Допустим, что делается две засечки положения в моменты t_n и t_{n-1}, в результате которых получаем оценки отклонений от номинальной траектории $\delta\hat{\bar{r}}_n$ и $\delta\hat{\bar{r}}_{n-1}$. Показать, что коррекция скорости $\Delta\hat{\bar{v}}_n$, которую нужно приложить в момент t_n, чтобы вывести корабль в номинальную точку цели (фиксированную в пространстве и во времени), определяется по формуле

$$\Delta\hat{\bar{v}}_n=-\frac{t_f-t_{n-1}}{(t_f-t_n)(t_n-t_{n-1})}\delta\hat{\bar{r}}_n+\frac{1}{t_n-t_{n-1}}\delta\hat{\bar{r}}_{n-1},$$

где t_f — номинальное время полета.

б) Предположим, что имеется последовательность засечек положения, выполняемых в моменты $t_1, t_2, \ldots, t_N$, и соответствующие коррекции скорости вычисляются по приведенной выше формуле. Пусть $\bar{\varepsilon}_n$ — векторное расстояние между предполагаемым и истинным положением в n-й проверочной точке, а $\bar{\eta}_n$ — ошибка реализации расчетной коррекции $\Delta\hat{\bar{v}}_n$. Показать, что истинная коррекция скорости, приложенная в момент t_n, определяется выражением

$$\Delta\bar{v}_n=\frac{t_f-t_{n-1}}{(t_f-t_n)(t_n-t_{n-1})(t_{n-1}-t_{n-2})}\left[-(t_{n-1}-t_{n-2})\bar{\varepsilon}_n+\right.$$

$$\left.+(t_n-t_{n-2})\bar{\varepsilon}_{n-1}-(t_n-t_{n-1})\bar{\varepsilon}_{n-2}\right]-\bar{\eta}_n+\frac{t_f-t_{n-1}}{t_f-t_n}\bar{\eta}_{n-1}.$$

в) Предположим, что корабль выведен на орбиту с ошибкой в начальной скорости и что выполняется только одна засечка положения и соответственно одна коррекция скорости. Показать, что если среднеквадратичная ошибка определения положения не зависит от времени засечки, то оптимальное время (измеряемое с момента старта) выполнения засечки для минимизации величины прикладываемой коррекции скорости будет меньше, чем $t_f/2$.

8.3. Корабль находится на параболической орбите в однородном гравитационном поле. Векторы положения и скорости $\bar{r}(t)$ и $\bar{v}(t)$ удовлетворяют следующим векторным дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d\bar{r}}{dt}=\bar{v}, \quad \frac{d\bar{v}}{dt}=-g\bar{i}_y,$$

при начальных условиях

$$\bar{r}(0)=0, \quad \bar{v}(0)=\frac{g}{2}\,t_f(\bar{i}_x+\bar{i}_y).$$

Здесь $\bar{i}_x$ и $\bar{i}_y$ — ортонормированные векторы системы координат, а t_f — номинальное время полета. Пусть цель движется с постоянной скоростью

$$\bar{v}_p=\frac{gt_f}{2}\,\bar{i}_x.$$

а) При допущении о том, что неопределенности положения и коррекции скорости являются равномерно распределенными и статистически независимыми случайными переменными, показать, что среднеквадратичная потребная коррекция скорости в любой проверочной точке при наведении с незакрепленным временем перелета составляет ровно $\sqrt{2/3}$ от среднеквадратичной потребной коррекции при закрепленном времени перелета.

б) Пусть $\sigma_{\varepsilon,n}$ и $\sigma_{\eta,n}$ — среднеквадратичные ошибки оценок положения и коррекции скорости в n-й проверочной точке. Показать, что средний квадрат пролета мимо цели равен

$$\frac{2}{3}\left[\left(\frac{t_f-t_{N-1}}{t_N-t_{N-1}}\right)^2\sigma^2_{\varepsilon,N}+\left(\frac{t_f-t_N}{t_N-t_{N-1}}\right)^2\sigma^2_{\varepsilon,N-1}+(t_f-t_N)^2\sigma^2_{\eta,N}\right]$$

как для закрепленного, так и для незакрепленного времени перелета (здесь N — общее количество проверочных точек).

в) Показать, что отклонение скорости в номинальное время прибытия определяется выражением

$$\delta\bar{v}(t_f)=\sum_{n=0}^{N}\Delta\bar{v}'_n,$$

где $\Delta\bar{v}'_0$ — начальная ошибка по скорости при выводе, а $\Delta\bar{v}'_n$ для $n>0$ есть коррекция скорости, приложенная в n-й проверочной точке.

г) Полагая, что наведение производится по схеме незакрепленного времени перелета и имеется лишь одна проверочная точка, показать, что средний квадрат изменения времени перелета равен

$$\frac{4}{3g^2}\left(\frac{\sigma_\varepsilon^2}{t_1^2}+\sigma_\eta^2\right),$$

где σ_ε — среднеквадратичная ошибка оценки положения в момент засечки, а σ_η — начальная среднеквадратичная ошибка в скорости.

8. 4. Несмещенная многоточечная оценка отклонения скорости в момент t_n на основе засечек в моменты t_n и t_{n-1} получается по формуле (8. 29) и может быть записана в виде

$$\delta\hat{\overline{v}}_n=\overline{X}_n\delta\tilde{\overline{r}}_n+\overline{X}_{n-1}\delta\tilde{\overline{r}}_{n-1}.$$

Показать с помощью непосредственных преобразований, что этот результат идентичен получаемому по формуле (8. 3).

Указание: Доказательство можно проводить в следующем порядке.

а) Показать, что искомый результат эквивалентен тождественному выполнению равенств

$$\overline{X}_n\overline{R}_n+\overline{X}_{n-1}\overline{R}_{n-1}=\overline{V}_n,$$

$$\overline{X}_n\overline{R}_n^*+\overline{X}_{n-1}\overline{R}_{n-1}^*=\overline{V}_n^*.$$

б) Для этого необходимо доказать равенство

$$\overline{X}_n\overline{R}_n+\overline{X}_{n-1}\overline{R}_{n-1}=\overline{N}\overline{A}+\overline{N}^*\overline{B}.$$

в) Показать, что для любой невырожденной матрицы $\overline{Z}$ справедливо соотношение

$$(\overline{I}-\overline{Z})^{-1}+(\overline{I}-\overline{Z}^{-1})^{-1}=\overline{I},$$

а затем, используя результаты пп. «б» и «в», получить первое уравнение п. «а». Аналогичным способом доказывается второе уравнение.

Метод разд. 8. 1 является детерминированным в том смысле, что двух засечек положения в различные моменты времени достаточно для однозначного нахождения скорости. Следовательно, утверждение о том, что коэффициенты $\overline{X}_n$ и $\overline{X}_{n-1}$ не должны зависеть от корреляционных матриц $\overline{E}_n$ и $\overline{E}_{n-1}$, согласуется с решением этой задачи.

8. 5. Несмещенную оценку отклонения по положению в момент t можно получить на основе N наблюдений, выполненных в различные моменты времени. Показать, что если эту оценку представить в виде

$$\delta\hat{\overline{r}}(t)=\sum_{n=1}^{N}\overline{W}_n\delta\tilde{\overline{q}}_n,$$

где $\overline{W}_1, \overline{W}_2, \ldots, \overline{W}_N$ — трехмерные весовые векторы, то оптимальные весовые векторы, минимизирующие средний квадрат оценки, определяются по формуле

$$\overline{W}_n = \frac{1}{\sigma_n^2} (\overline{R}(t) \quad \overline{R}^*(t)) \overline{P}^{-1} \begin{pmatrix} \overline{R}_n^T \\ \overline{R}_n^{*T} \end{pmatrix} \overline{h}_n,$$

где

$$\overline{P} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sigma_n^2} \begin{pmatrix} \overline{R}_n^T \\ \overline{R}_n^{*T} \end{pmatrix} \overline{h}_n \overline{h}_n^T (\overline{R}_n \quad \overline{R}_n^*).$$

Здесь σ_n^2 — дисперсия ошибки n-го измерения, а $\overline{h}_n$ — вектор, связывающий вариацию n-го измерения с вариацией положения в момент t_n:

$$\delta q_n = \overline{h}_n^T \delta \overline{r}_n.$$

Подобные выражения можно получить для оптимальной оценки отклонения скорости, заменив матрицы $\overline{R}$ и $\overline{R}^*$ на $\overline{V}$ и $\overline{V}^*$.

Показать далее, что средний квадрат ошибки оценки отклонения по положению в момент t можно выразить следующей удобной формулой:

$$\overline{e(t)^2} = tr \left[(\overline{R}(t) \quad \overline{R}^*(t)) \overline{P}^{-1} \begin{pmatrix} \overline{R}^T(t) \\ \overline{R}^*(t)^T \end{pmatrix} \right].$$

Получить аналогичную формулу для ошибки оценки отклонения по скорости.

8.6. Космический корабль выведен на орбиту в однородном гравитационном поле для перехвата цели через время полета $t_f = 10$. В моменты $t=1$ и $t=3$ выполнены засечки положения, позволившие определить следующие отклонения от номинальной траектории:

$$\delta \overline{r}_1 = 3\overline{i}_x + 2\overline{i}_y - 8\overline{i}_z,$$
$$\delta \overline{r}_3 = 7\overline{i}_x - 14\overline{i}_y,$$

а) Каково отклонение по скорости в момент $t=3$?

б) Какими будут отклонения по положению и скорости в номинальное время перехвата, если не производятся коррекции?

в) Какую коррекцию скорости нужно приложить в момент $t=3$, чтобы свести к нулю ошибку положения при $t=t_f$?

г) Какое получится в результате этого отклонение по скорости при $t=t_f$?

д) Какую коррекцию скорости нужно было бы приложить в $t=3$, чтобы уменьшить до нуля отклонение по скорости при $t=t_f$ и чему равнялось бы при этом отклонение по положению?

8.7. Оптимальное распределение N моментов засечек для оценки отклонений по положению можно исследовать аналитически, если гравитационное поле, в котором движется корабль, является однородным и если корреляционная матрица ошибок засечек не изменяется от одной засечки до другой.

а) Приняв эти допущения, доказать следующие равенства:

$$\overline{A}=\left(\sum_{n=1}^{N} t_n^2\right)\overline{E}^{-1},$$

$$\overline{A}^*=\left(\sum_{n=1}^{N} (t_n-t_A)^2\right)\overline{E}^{-1},$$

$$\overline{B}=\overline{B}^{*T}=\left(\sum_{n=1}^{N} t_n(t_n-t_A)\right)\overline{E}^{-1},$$

$$\overline{D}=\frac{\sum\limits_{n=1}^{N} t_n(t_n-t_A)}{\sum\limits_{n=1}^{N-1}\sum\limits_{m=n+1}^{N} t_A^2(t_n-t_m)^2}\overline{E}.$$

б) Используя эти равенства, доказать справедливость выражения для среднего квадрата ошибки оценки положения по N засечкам:

$$\overline{e_N^2}=\frac{\sum\limits_{n=1}^{N}(t-t_n)^2}{\sum\limits_{n=1}^{N-1}\sum\limits_{m=n+1}^{N}(t_n-t_m)^2}\,tr\overline{E}.$$

в) Показать, что если $t=t_N$ и если засечки выполняются через равные провежутки времени, то

$$\overline{e_2^2}=tr\overline{E},$$

$$\overline{e_3^2}=0{,}833tr\overline{E},$$

$$\overline{e_4^2}=0{,}700tr\overline{E},$$

$$\overline{e_5^2}=0{,}600tr\overline{E}.$$

г) При $t=t_N$ и $N=3$ показать, что средний квадрат ошибки оценки минимизируется, если выбрать t_1, t_2, t_3 таким образом, чтобы величина $\dfrac{t_3-t_2}{t_3-t_1}$ имела минимальное значение.

Библиография

Часть настоящей книги, относящаяся к навигации и наведению, посвящена в основном автономным системам. Такое направление объясняется отчасти субъективным отношением автора и отчасти его непрерывной связью с Приборной лабораторией МТИ. Кроме того, поскольку приверженцы наземных систем слежения и управления, главным образом, представляют «Джет Пропалшн Лэборэтри», автору было бы не вполне удобно пытаться разрабатывать свой подход, основываясь на их работах. Вместо этого он рекомендует читателям в качестве наиболее типичных работ отличные отчеты Нотона [48], Нотона, Каттинга и Бернса [49], а также Джейтса, Скулла и Уоткинза [22] и оставляет в стороне всякие попытки связывать их исследования со своими.

Теория наведения с закрепленным временем перелета, рассмотренная в разд. 8.1, основана на работе Бэттина и Лэнинга [10], а также на отчете МТИ [45], в то время как теория незакрепленного времени перелета (разд. 8.2) взята из статьи автора [7]. Различные подразделы разд. 8.3, связанные с анализом ошибок, написаны на основе множества источников. Сюда входят работы Бэттина [9], Бэттина и Лэнинга [10], Бэттина [7] и раздел автора в отчете МТИ [45]. Весьма глубокое рассмотрение понятия пролета можно найти в докладе Кизнера [33].

Численные примеры заимствованы из статей Бэттина [7], Бэттина и Лэнинга [10], а также из раздела автора в отчете МТИ [46]. Вырожденные случаи наведения (см. конец разд. 8.4), возникающие при определенном геометрическом расположении корабля относительно точки запуска или точки цели, более полно исследовал Штерн [60]. Он нашел интересный дополнительный вид особенностей, которые возникают только тогда, когда космический корабль отстоит от точки встречи более чем на 360°. Существование этой особенности можно объяснить с помощью верхней группы кривых на рис. 3.9: когда кораблю остается пройти до точки встречи более 360°, могут существовать две траектории с одинаковым временем полета. Особая точка имеет место в том случае, когда время до встречи и оставшийся центральный угол совпадают с минимумом кривой времени полета по большой полуоси.

Метод Монте-Карло, применение которого к определению моментов коррекции скорости описано в разд. 8.4, является единственным практическим методом, известным в данном случае автору. Однако при некотором упрощении математической модели в какой-то степени возможно и аналитическое исследование задачи. Брейкуэлл [17] нашел для двумерной номинальной траектории хомановского типа следующее простое правило. После выполнения коррекции нужно ждать, пока не пройдет две трети оставшегося до конца полета времени, прежде чем прикладывать следующую коррекцию. Кроме того, в несколько искусственном случае однородного гравитационного поля также возможны некоторые теоретические результаты (см. задачи 8.2, 8.3 и 8.7).

Материал разд. 8.5 и 8.6 весьма близок по своему содержанию к разд. 8.2 и 8.3 книги Лэнинга и Бэттина [35]. Основное различие заключается в том, что в настоящем случае оценки основаны на дискретной информации, в то время как в более ранней работе источник информации и шум считались непрерывными. Численные данные разд. 8.5 были получены под руководством автора тремя студентами: Скоттом, Янушкой и Уиллесом в их дипломной работе [53].

По поводу задач настоящей главы автор хотел бы особо поблагодарить м-ра Р. Штерна (задачи 8.5 и 8.6) и Скотта, Янушку и Уиллеса (задача 8.7).

ГЛАВА IX

Рекуррентная теория навигации

В настоящей главе выполнение оптимальной линейной оценки представлено в виде рекуррентной операции, когда текущая наилучшая оценка объединяется со вновь поступающей информацией для получения новой улучшенной оценки. Разработка приводимого здесь материала началась под влиянием работ Р. Калмана, но в дальнейшем вылилась в самостоятельное исследование. Основное достоинство рекуррентной формулировки навигационной задачи состоит в идеальной приспособленности вычислений такого рода к автоматической работе бортового вычислительного устройства. Информация, поступающая от измерительных устройств, может по мере ее появления последовательно добавляться к уже имеющейся, причем отпадает необходимость в обработке всей располагаемой совокупности информации, как это требуется при независимых навигационных засечках. Исключается также необходимость в обращении больших матриц со всеми вытекающими из этого обращения вычислительными неудобствами. Наконец, сам процесс обработки является весьма гибким и допускает использование информации от самых разнообразных источников измерений.

Первые два раздела главы подготавливают читателя к очень простому выводу оптимальной линейной операции, в которой используется для оценки всего лишь обычный метод наименьших квадратов, аналогичный методам гл. VIII. Остальная часть настоящей главы посвящена в основном трем задачам: 1) выбору наилучших источников информации из числа доступных для навигационной системы космического корабля; 2) определению оптимальных линейных операций по обработке информации с учетом целей полета; 3) минимизации как общего потребного количества навигационной информации, так и числа потребных корректирующих маневров без неоправданного ухудшения точности выполнения задачи полета.

На всем протяжении главы будем иметь дело исключительно с дискретной информацией; наблюдения и коррекции скорости выполняются в отдельных точках, которые называются *точками принятия решений* или *решающими точками*. Интервал между решающими точками не обязательно постоянен и может выбираться в какой-то степени произвольно. Например при подготовке вычислительных данных, приведенных в разд. 9.5, величина интервала выбиралась исходя из необходимости точного численного интегрирования траекторных уравнений.

В процессе «оптимизации» навигации может быть сделана статистическая оценка множества альтернативных способов действия. Некоторые из альтернатив, образующих основу решающего процесса, состоят в разрешении следующих вопросов:

1. Какая комбинация звезд и планет обеспечивает «наилучшее» из возможных наблюдений?

2. Приводит ли наилучшее наблюдение к достаточному уменьшению предсказанной ошибки относительно цели, чтобы имело смысл выполнять такое измерение?

3. Является ли неопределенность вычисления коррекции скорости достаточно малой по сравнению с величиной самой коррекции, чтобы оправдалась необходимость включения двигателя и расхода топлива?

В разд. 9.5 представлены числовые результаты, иллюстрирующие эффективность такого подхода к решению задачи космической навигации.

Математическая задача определения оптимальной плоскости, в которой следует измерять угол между звездой и планетой, решается в разд. 9.6. Далее, в следующем разделе разрабатывается процесс, дающий возможность оптимизировать всю программу навигационных измерений.

В разд. 9.8 выводится способ учета взаимной корреляции случайных ошибок измерений при выборе оптимальной линейной операции. Наконец, в последнем разделе предлагается метод анализа, позволяющий исследовать влияние неверных моделей ошибок на определение оптимальной линейной оценки положения и скорости. С помощью такого метода можно, например, узнать чувствительность оценки к пренебрежению истинными дисперсиями измерений и их взаимной корреляцией.

9.1. Переходная матрица

Благодаря наличию динамической взаимосвязи между положением и скоростью зачастую удобно ставить задачу, используя понятие шестимерного фазового пространства, чьи координаты представляют собой компоненты отклонений по положению и скорости корабля от номинальной траектории, зависящие от времени. Каждая точка этого пространства определяется своим шестимерным вектором отклонения

$$\delta\bar{x}(t)=\begin{pmatrix}\delta\bar{r}(t)\\ \delta\bar{v}(t)\end{pmatrix}. \tag{9.1}$$

Вектор $\delta\bar{x}(t)$ определяет динамическое или *фазовое состояние* космического корабля в момент t. Переход от одного состояния к другому можно представить как матричную операцию над фазовым вектором. Матрицу этой операции

$$\overline{\Phi}_{n+1,\,n}=\overline{\Phi}\,(t_{n+1},\,t_n)$$

часто называют *переходной матрицей*. Соотношение между $\delta\bar{x}_{n+1}$ и $\delta\bar{x}_n$ с ее помощью записывается весьма просто:

$$\delta\bar{x}_{n+1}=\bar{\Phi}_{n+1,\,n}\,\delta\bar{x}_n. \tag{9.2}$$

Элементы шестимерной переходной матрицы можно выразить через фундаментальные матрицы возмущений. Для этого запишем уравнения (8.1) и (8.2) в следующем виде:

$$\delta\bar{x}(t)=\begin{pmatrix}\bar{R}(t) & \bar{R}^*(t)\\ \bar{V}(t) & \bar{V}^*(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{c}\\ \bar{c}^*\end{pmatrix}.$$

Обратное соотношение нетрудно получить, если вспомнить прием, предложенный в конце разд. 6.5:

$$\begin{pmatrix}\bar{c}\\ \bar{c}^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{\Lambda}(t)^{-1}\bar{C}^*(t) & -\bar{\Lambda}(t)^{-1}\\ \bar{\Lambda}^*(t)^{-1}\bar{C}(t) & -\bar{\Lambda}^*(t)^{-1}\end{pmatrix}\delta\bar{x}(t).$$

Подставляя теперь $t=t_{n+1}$ в прямое соотношение и $t=t_n$ в обратное, исключим постоянные векторы $\bar{c}$ и $\bar{c}^*$, в результате чего будем иметь

$$\bar{\Phi}_{n+1,\,n}=\begin{pmatrix}\bar{R}_{n+1}\bar{R}^*_{n+1}\\ \bar{V}_{n+1}\bar{V}^*_{n+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(\bar{C}_n^{*-1}\bar{V}_n-\bar{R}_n)^{-1} & \bar{0}\\ \bar{0} & (\bar{C}_n^{-1}\bar{V}_n^*-\bar{R}_n^*)^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\bar{I}\bar{C}_n^{*-1}\\ -\bar{I}\bar{C}_n^{-1}\end{pmatrix}. \tag{9.3}$$

Данная форма второго и третьего матричных множителей, которую легко получить из уравнений (6.49) и (6.50), выбрана для того, чтобы исключить всевозможные кажущиеся вырожденности, связанные с начальной и конечной точками траектории.

Нетрудно показать, что переходная матрица, рассматриваемая как непрерывная функция второй граничной точки, может вычисляться непосредственно как решение шестимерного матричного дифференциального уравнения

$$\frac{d\bar{\Phi}(t,t_n)}{dt}=\bar{F}(t)\,\bar{\Phi}(t,t_n). \tag{9.4}$$

Начальное условие состоит в том, что $\bar{\Phi}(t_n,\,t_n)$ равна шестимерной единичной матрице. Матрица $\bar{F}(t)$ имеет вид

$$\bar{F}(t)=\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{I}\\ \bar{G}(t) & \bar{0}\end{pmatrix},$$

где матрица $\bar{G}(t)$ согласно разд. 6.5 есть градиент гравитации по координатам положения. Для доказательства представленного результата следует использовать матричные дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют фундаментальные матрицы $\bar{R}$, $\bar{R}^*$, $\bar{V}$, $\bar{V}^*$. Переходная матрица является представителем класса, известного под названием класса *симплектических матриц*. Матрица четной размерности $\bar{A}$ называется симплектической, если выполняется равенство

$$\bar{A}^T \bar{J} \bar{A} = \bar{J}, \tag{9.5}$$

где

$$\bar{J} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{I} \\ -\bar{I} & \bar{0} \end{pmatrix}.$$

Так как $\bar{J}^2 = -\bar{I}$, то можно считать матрицу $\bar{J}$ аналогичной мнимой единице $\sqrt{-1}$ в комплексной алгебре.

Из определения (9.5) видно, что симплектическая матрица обладает такими же свойствами по отношению к матрице $\bar{J}$, как и ортогональная матрица по отношению к матрице $\bar{I}$. Напомним, что если $\bar{P}$ — ортогональная матрица, то

$$\bar{P}^T \bar{I} \bar{P} = \bar{I}.$$

Принадлежность переходной матрицы к классу симплектических матриц важна в том смысле, что это облегчает ее обращение. Умножив уравнение (9.5) справа на $\bar{A}^{-1}$ и слева на $\bar{J}$, найдем

$$\bar{A}^{-1} = -\bar{J} \bar{A}^T \bar{J}, \tag{9.6}$$

так что обращение симплектической матрицы сводится просто к перестановке ее элементов. Вспомним, что обращение ортогональной матрицы эквивалентно ее транспонированию.

Для того чтобы показать, что $\bar{\Phi}(t, t_n)$ является симплектической, заметим следующее:

$$\bar{\Phi}(t_n, t_n)^T \bar{J} \bar{\Phi}(t_n, t_n) = \bar{J},$$

так как $\bar{\Phi}(t_n, t_n)$ равна единичной матрице. Следовательно, необходимое доказательство будет получено, если удастся показать, что

$$\frac{d}{dt}\left[\bar{\Phi}(t, t_n)^T \bar{J} \bar{\Phi}(t, t_n)\right] = \bar{0}.$$

С этой целью используем уравнение (9.4) и запишем

$$\frac{d}{dt}\left[\bar{\Phi}(t, t_n)^T \bar{J} \bar{\Phi}(t, t_n)\right] = \bar{\Phi}(t, t_n)^T \bar{F}(t)^T \bar{J} \bar{\Phi}(t, t_n) +$$

$$+ \bar{\Phi}(t, t_n)^T \bar{J} \bar{F}(t) \bar{\Phi}(t, t_n) = \bar{\Phi}(t, t_n)^T \begin{pmatrix} -\bar{G}(t)^T & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{I} \end{pmatrix} \bar{\Phi}(t, t_n) +$$

$$+ \bar{\Phi}(t, t_n)^T \begin{pmatrix} \bar{G}(t) & \bar{0} \\ \bar{0} & -\bar{I} \end{pmatrix} \bar{\Phi}(t, t_n) = \bar{0}.$$

Справедливсть последнего шага вытекает из того, что $\bar{G}(t) = \bar{G}(t)^T$, т. е. матрица гравитационного градиента является симметрической.

Наконец, если переходную матрицу разбить на блоки таким образом

$$\overline{\Phi}_{n+1,\, n}=\begin{pmatrix}\overline{\Phi}_1 & \overline{\Phi}_2\\ \overline{\Phi}_3 & \overline{\Phi}_4\end{pmatrix},$$

то ее обращение выполнится по формуле

$$\overline{\Phi}_{n+1,\, n}^{-1}=\overline{\Phi}_{n,\, n+1}=\begin{pmatrix}\overline{\Phi}_4^T & -\overline{\Phi}_2^T\\ -\overline{\Phi}_3^T & \overline{\Phi}_1^T\end{pmatrix}, \tag{9.7}$$

как можно видеть из формулы (9.6).

В качестве примера использования переходной матрицы рассмотрим детерминированную задачу получения шестимерной засечки с помощью последовательности отдельных астрономических наблюдений, выполненных в шесть дискретных моментов времени. При допущениях линейной теории одно наблюдение служит для засечки положения корабля по одной координате. Например, как показано в гл. VII, если A_n — угол, измеряемый в момент t_n и образуемый линиями визирования звезды и ближайшего небесного тела с корабля, то положение корабля определяется вдоль линии, нормальной к направлению на ближнее тело и лежащей в плоскости измерения. В общем случае это можно записать через шестимерный вектор отклонения $\delta\overline{x}$ следующим образом:

$$\delta q_n=\overline{b}_n^T\delta\overline{x}_n, \tag{9.8}$$

где

$$\overline{b}_n=\begin{pmatrix}\overline{h}_n\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Вектор $\overline{h}_n$, описанный в гл. VII, зависит от взаимного геометрического расположения соответствующих астрономических объектов в момент t_n и от конкретного типа выполняемого измерения.

Теперь, объединяя уравнения (9.2) и (9.8), будем иметь

$$\delta q_n=\overline{b}_n^T\overline{\Phi}_{n+1,\, n}^{-1}\delta\overline{x}_{n+1},$$

откуда видно, что наблюдение, сделанное в момент t_n, позволяет найти в момент t_{n+1} составляющую шестимерного вектора отклонения в направлении, определяемом вектором $\overline{\Phi}_{n+1,n}^{T-1}\overline{b}_n$. Шесть наблюдений, выполненных в различные моменты времени, дадут систему из шести уравнений такого рода. Если ни одна пара направлений, вдоль которых определяются составляющие, не является параллельной, то вектор отклонения можно будет получить после обращения шестимерной матрицы коэффициентов.

В качестве другого примера использования переходной матрицы рассмотрим задачу расчета распространения ошибок оценки. Предположим, что каким-то способом была получена оценка вектора отклонения $\delta\bar{x}_n$ и пусть $\bar{e}_n$ — ошибка этой оценки. Если записать

$$\delta\hat{\bar{x}}_n = \delta\bar{x}_n + \bar{e}_n, \tag{9.9}$$

то

$$\bar{e}_n = \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_n \\ \bar{\delta}_n \end{pmatrix}, \tag{9.10}$$

где $\bar{\varepsilon}_n$ и $\bar{\delta}_n$ обозначают ошибки по положению и скорости. Корреляционная матрица ошибок имеет вид

$$\bar{E}_n = \overline{\bar{e}_n \bar{e}_n^T} = \begin{pmatrix} \overline{\bar{\varepsilon}_n \bar{\varepsilon}_n^T} & \overline{\bar{\varepsilon}_n \bar{\delta}_n^T} \\ \overline{\bar{\delta}_n \bar{\varepsilon}_n^T} & \overline{\bar{\delta}_n \bar{\delta}_n^T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{E}_n^{(1)} & \bar{E}_n^{(2)} \\ \bar{E}_n^{(3)} & \bar{E}_n^{(4)} \end{pmatrix}. \tag{9.11}$$

Если не делается новых наблюдений, то оценка $\delta\hat{\bar{x}}_n$ экстраполируется на более поздний момент времени t_{n+1} следующим образом:

$$\delta\hat{\bar{x}}'_{n+1} = \bar{\Phi}_{n+1,\,n}\delta\hat{\bar{x}}_n. \tag{9.12}$$

(В дальнейшем важно различать новую оценку $\delta\hat{\bar{x}}_{n+1}$, полученную при добавлении новой информации из наблюдений в момент t_{n+1}, и оценку, полученную простой экстраполяцией предыдущей. Для последней применяется обозначение $\delta\hat{\bar{x}}'_{n+1}$.) Так как вектор истинных отклонений и оценка для последующих моментов определяются через переходную матрицу, то согласно выражению (9.9) это справедливо и для вектора ошибок. Экстраполированный вектор ошибок имеет вид

$$\bar{e}'_{n+1} = \bar{\Phi}_{n+1,n}\bar{e}_n, \tag{9.13}$$

так что, учитывая формулу (9.11), экстраполированную корреляционную матрицу $\bar{E}'_{n+1}$ можно связать с $\bar{E}_n$ соотношением

$$\bar{E}'_{n+1} = \bar{\Phi}_{n+1,\,n}\bar{E}_n\bar{\Phi}^T_{n+1,\,n}. \tag{9.14}$$

9.2. Рекуррентная формулировка навигационной задачи

В этом разделе мы снова будем рассматривать задачу смещенной оценки, уже обсуждавшуюся в разд. 8.6, чтобы на этот раз показать, как оптимальная линейная оценка может быть представлена в виде рекуррентной операции, которая объединяет текущую новую оценку со вновь полученной информацией для образования новой и лучшей оценки. Более конкретно, пусть $\delta\hat{\bar{x}}_N$ — оценка вектора отклонений в момент t_N, получаемая оптимальным линейным взвешиванием засечек положения в моменты $t_1, t_2, \ldots, t_N$. Тогда

$$\delta\hat{\bar{x}}_N = \sum_{n=1}^{N} \overline{W}_n^{(N)} \delta\tilde{\bar{r}}_n. \tag{9.15}$$

Здесь уже весовые множители $\overline{W}_n^{(N)}$ представляют собой прямоугольные матрицы размерности (6×3). Верхний индекс (N) указывает на то, что оптимальные весовые множители основываются на N засечках.

Если в момент t_{N+1} делается новое измерение и получается новая оценка на основе всех предыдущих данных, то будем иметь

$$\delta\hat{\bar{x}}_{N+1} = \sum_{n=1}^{N+1} \overline{W}_n^{(N+1)} \delta\tilde{\bar{r}}_n, \tag{9.16}$$

причем $\overline{W}_n^{(N+1)}$ представляют собой совершенно новую систему весовых матричных множителей. Наша задача состоит в выводе соотношения между $\delta\hat{\bar{x}}_{N+1}$ и $\delta\hat{\bar{x}}_N$.

Некоторое изменение в обозначениях вызвано желанием расширить рамки задачи, включив в нее одновременно и положение и скорость с помощью шестимерного вектора отклонений. Ранее мы выражали вектор измеренных отклонений по положению $\delta\tilde{\bar{r}}_n$ следующим образом:

$$\delta\tilde{\bar{r}}_n = \overline{R}_n\bar{c} + \overline{R}_n^*\bar{c}^* + \bar{\varepsilon}_n.$$

Однако в настоящем случае удобнее записывать

$$\delta\tilde{\bar{r}}_n = \overline{K}^T\overline{\Phi}_n \begin{pmatrix} \bar{c} \\ \bar{c}^* \end{pmatrix} + \bar{\varepsilon}_n, \tag{9.17}$$

где

$$\overline{\Phi}_n = \begin{pmatrix} \overline{R}_n & \overline{R}_n^* \\ \overline{V}_n & \overline{V}_n^* \end{pmatrix}, \tag{9.18}$$

а

$$\overline{K} = \begin{pmatrix} \overline{I} \\ \bar{0} \end{pmatrix}$$

— прямоугольная матрица из шести строк и трех столбцов. Здесь нам представится случай использовать свойство

$$\overline{\Phi}_{n+1,\,n} = \overline{\Phi}_{n+1}\overline{\Phi}_n^{-1}, \tag{9.19}$$

которое было найдено в предыдущем разделе.

Постановка и решение настоящей задачи совершенно аналогичны схеме, применявшейся в разд. 8.6. Оптимальные весовые множители определяются как решения уравнений

$$\overline{E}_n \overline{W}_n^{(N)\,T} + \sum_{m=1}^{N} \overline{P}_{nm} \overline{W}_m^{(N)\,T} = \overline{Q}_n^{(N)},$$

$$n = 1, 2, \ldots, N, \tag{9.20}$$

где $\overline{E}_n$ — корреляционная матрица ошибок n-й засечки, а

$$\overline{P}_{nm} = \overline{K}^T \overline{\Phi}_n \overline{\Gamma}\, \overline{\Phi}_m^T \overline{K},$$

$$\overline{Q}_n^{(N)} = \overline{K}^T \overline{\Phi}_n \overline{\Gamma}\, \overline{\Phi}_N^T.$$

Матрица $\overline{\Gamma}$, введенная в разд. 8.6, представляет собой совместную корреляционную матрицу случайных векторов $\bar{c}$ и $\bar{c}^*$.

Простота конечного результата, к которой мы стремимся, зависит от рекуррентных свойств матриц $\overline{P}_{nm}$ и $\overline{Q}_n^{(N)}$. Для оценки, основанной на $N+1$ засечках, матрицы $\overline{Q}_n^{(N+1)}$ выражаются следующим образом:

$$\overline{Q}_n^{(N+1)} = \overline{K}^T \overline{\Phi}_n \overline{\Gamma}\, \overline{\Phi}_{N+1}^T = \overline{K}^T \overline{\Phi}_n \overline{\Gamma}\, \overline{\Phi}_N^T \overline{\Phi}_N^{T-1} \overline{\Phi}_{N+1}^T =$$

$$= \overline{K}^T \overline{\Phi}_n \overline{\Gamma}\, \overline{\Phi}_N^T \overline{\Phi}_{N+1,\,N}^T = \overline{Q}_n^{(N)} \overline{\Phi}_{N+1,\,N}^T.$$

Подобным же способом можно показать, что

$$\overline{P}_{n,\,N+1} = \overline{Q}_n^{(N)} \overline{\Phi}_{N+1,\,N}^T \overline{K}.$$

Соответствующую систему уравнений для определения $N+1$ весовых множителей $\overline{W}_n^{(N+1)}$ получим из (9.20):

$$\overline{E}_n \overline{W}_n^{(N+1)} + \sum_{m=1}^{N+1} \overline{P}_{nm} \overline{W}_m^{(N+1)\,T} = \overline{Q}_n^{(N+1)},$$

$$n = 1, 2, \ldots, N+1.$$

Отделим первые N уравнений

$$\overline{E}_n \overline{W}_n^{(N+1)\,T} + \sum_{m=1}^{N} \overline{P}_{nm} \overline{W}_m^{(N+1)\,T} + \overline{P}_{n,\,N+1} \overline{W}_{N+1}^{(N+1)\,T} = \overline{Q}_n^{(N+1)},$$

которые благодаря рекуррентным свойствам $\overline{P}_{nm}$ и $\overline{Q}_n^{(N)}$ можно записать в виде

$$\overline{E}_n \overline{W}_n^{(N+1)\,T} + \sum_{m=1}^{N} \overline{P}_{nm} \overline{W}_m^{(N+1)\,T} = \overline{Q}_n^{(N)} \overline{\Phi}_{N+1,\,N}^T \left(\overline{I} - \overline{K}\, \overline{W}_{N+1}^{(N+1)\,T}\right),$$

$$n = 1, 2, \ldots, N.$$

Сравнивая теперь эти уравнения с (9. 20), найдем следующую зависимость между весовыми множителями для случая N засечек и первыми N весовыми множителями для случая $N+1$ засечки:

$$\overline{W}_n^{(N+1)T} = \overline{W}_n^{(N)\,T} \overline{\Phi}_{N+1,\,N}^T \left(\overline{I} - \overline{K}\, \overline{W}_{N+1}^{(N+1)\,T}\right),$$

$$n = 1, 2, \ldots, N. \qquad (9.21)$$

Возвращаясь к уравнению (9. 16) для оценки $\delta\bar{x}_{N+1}$, можно записать

$$\delta\hat{\bar{x}}_{N+1} = \sum_{n=1}^{N} \overline{W}_n^{(N+1)} \delta\tilde{\bar{r}}_n + \overline{W}_{N+1}^{(N+1)} \delta\tilde{\bar{r}}_{N+1}.$$

Отсюда, используя (9. 21), получим

$$\delta\hat{\bar{x}}_{N+1} = \left(\overline{I} - \overline{W}_{N+1}^{(N+1)} \overline{K}^T\right) \overline{\Phi}_{N+1,\,N} \sum_{n=1}^{N} \overline{W}_m^{(N)\,T} \delta\tilde{\bar{r}}_n + \overline{W}_{N+1}^{(N+1)} \delta\tilde{\bar{r}}_{N+1}.$$

В проводящемся в этом уравнении суммировании нетрудно узнать оценку $\delta\bar{x}_N$ на основе N засечек. Следовательно, будем окончательно иметь

$$\delta\hat{\bar{x}}_{N+1} = \overline{\Phi}_{N+1,\,N}\, \delta\hat{\bar{x}}_N + \overline{W}_{N+1}^{(N+1)} \left(\delta\tilde{\bar{r}}_{N+1} - \overline{K}^T \overline{\Phi}_{N+1,\,N} \delta\hat{\bar{x}}_N\right). \qquad (9.22)$$

Так как $\overline{\Phi}_{N+1,\,N}\delta\hat{\bar{x}}_N$ — всего лишь наилучшая оценка в момент t_N, экстраполированная на момент t_{N+1}, то рекуррентное соотношение (9. 22) приобретает важный физический смысл: оптимальная линейная оценка в общем виде получается прибавлением к экстраполированной предыдущей оптимальной оценке взвешенной разности между вектором измеренных отклонений по положению и экстраполированной оценкой вектора отклонений по положению.

Конечно, для получения окончательного решения нужно найти еще весовой множитель $\overline{W}_{N+1}^{(N+1)}$; однако мы не будем отыскивать этот неизвестный множитель. Нами уже получен достаточно важный результат — установлен вид оптимальной оценки. В следующем разделе мы вновь приступим к этой задаче уже с точки зрения нахождения весового множителя и на этот раз придем к полному и окончательному решению. Задача, правда, будет несколько изменена тем, что вместо полной засечки положения в качестве основной единицы информации будет принято отдельное измерение.

9.3. Оптимальная линейная оценка при некоррелированных ошибках измерений

Как показано в предыдущем разделе, оптимальная линейная оценка вектора отклонений может быть выражена в виде рекуррентной формулы. Допустим, что $\delta\hat{\bar{x}}_{n-1}$ и $\overline{E}_{n-1}$ известны, и в момент t_n выполняется единственное измерение типа описанных в гл. VII. Наблюдаемое отклонение измеряемой величины q_n равно $\delta\tilde{q}_n$, а наилучшая оценка δq_n получается экстраполяцией $\delta\hat{\bar{x}}_{n-1}$:

$$\delta\hat{q}'_n=\bar{b}_n^T\delta\hat{\bar{x}}'_n,$$

где

$$\delta\hat{\bar{x}}'_n=\overline{\Phi}_{n,\,n-1}\delta\hat{\bar{x}}_{n-1},$$

а вектор $\bar{b}_n$ определен в разд. 9. 1. Тогда линейная оценка вектора отклонений $\delta\bar{x}_n$ в момент t_n может быть выражена как линейная комбинация экстраполированной оценки $\delta\bar{x}_{n-1}$ и разности между наблюдаемым и оцененным отклонением измеряемой величины q_n. Следовательно, при отсутствии корреляции между ошибками измерений можно записать выражение

$$\delta\hat{\bar{x}}_n=\delta\hat{\bar{x}}'_n+\overline{w}_n\left(\delta\tilde{q}-\delta\hat{q}'_n\right), \tag{9.23}$$

где вектор $\overline{w}_n$ представляет собой весовой множитель, который будет выбираться так, чтобы минимизировать средний квадрат ошибки оценки.

Как и прежде, будем делать различие между измеряемой величиной q_n и ее истинной величиной. Запишем

$$\delta\tilde{q}_n=\delta q_n+\alpha_n.$$

Здесь α_n — ошибка измерения. В данном случае возможность взаимной корреляции ошибок измерений исключается. Ниже в разд. 9. 8 мы снимем это ограничение и среднее $\overline{\alpha_n\alpha_m}$ будет в общем отличаться от $\overline{\alpha}_n\overline{\alpha}_m$.

Для решения оптимальной задачи представим вектор ошибок в следующем виде:

$$\bar{e}_n(\overline{w}_n)=\delta\hat{\bar{x}}_n-\delta\bar{x}_n=\delta\hat{\bar{x}}'_n+\overline{w}_n\left(\delta q_n+\alpha_n-\delta\hat{q}'_n\right)-\delta\bar{x}_n=$$

$$=\left(\bar{I}-\overline{w}_n\bar{b}_n^T\right)\left(\delta\hat{\bar{x}}'_n-\delta\bar{x}_n\right)+\overline{w}_n\alpha_n=\left(\bar{I}-\overline{w}_n\bar{b}_n^T\right)\bar{e}'_n+\overline{w}_n\alpha_n, \tag{9.24}$$

где $\bar{I}$ — шестимерная единичная матрица. Теперь корреляционную матрицу $\overline{E}_n$, определенную уравнением (9. 11), можно записать как функцию весового вектора $\overline{w}_n$:

$$\overline{E}_n(\overline{w}_n)=\left(\bar{I}-\overline{w}_n\bar{b}_n^T\right)\overline{E}'_n\left(\bar{I}-\bar{b}_n\overline{w}_n^T\right)+\overline{w}_n\overline{w}_n^T\overline{\alpha_n^2}. \tag{9.25}$$

Средние квадраты ошибок в оценках отклонений по положению и скорости $\overline{\varepsilon_n^2}$ и $\overline{\delta_n^2}$ представляют собой просто следы субматриц

$\overline{E}_n^{(1)}$ и $\overline{E}_n^{(4)}$. Если шестимерный весовой вектор $\overline{w}_n$ разбить на два трехмерных вектора

$$\overline{w}_n = \begin{pmatrix} \overline{w}_n^{(1)} \\ \overline{w}_n^{(2)} \end{pmatrix},$$

то из соотношения (9.25) легко показать, что

$$\overline{E}_n^{(1)} = \left(\overline{I} - \overline{w}_n^{(1)} \overline{h}_n^T\right) \overline{E}_n^{(1)\prime} \left(\overline{I} - \overline{h}_n \overline{w}_n^{(1)\,T}\right) + \overline{w}_n^{(1)} \overline{w}_n^{(1)\,T} \overline{\alpha_n^2},$$

$$\overline{E}_n^{(4)} = \left(\overline{w}_n^{(2)} \, \overline{h}_n^T \overline{E}_n^{(1)\prime} - \overline{E}_n^{(3)\prime}\right) \overline{h}_n \overline{w}_n^{(2)\,T} + \overline{w}_n^{(2)} \overline{w}_n^{(2)\,T} \overline{\alpha_n^2}.$$

Таким образом, поскольку $\overline{E}_n^{(1)}$ зависит только от $\overline{w}_n^{(1)}$, а $\overline{E}_n^{(4)}$ является функцией только $\overline{w}_n^{(2)}$, для удобства последующих выкладок будем рассматривать средний квадрат ошибки оценки $\overline{e_n^2 \, (\overline{w}_n)}$ как след шестимерной корреляционной матрицы $\overline{E}_n(\overline{w}_n)$. Трехмерные векторы, входящие в оптимальный весовой вектор $\overline{w}_n$, будут, следовательно, оптимальны — первый по отношению к оценке отклонения по положению, а второй по отношению к оценке отклонения по скорости *.

Для нахождения оптимального весового вектора можно использовать обычные методы вариационного исчисления. Придадим $\overline{w}_n$ вариацию $\delta\overline{w}_n$ и получим из уравнения (9.25)

$$\delta\overline{e_n^2 (\overline{w}_n)} = 2tr \left[-\delta\overline{w}_n \overline{b}_n^T \overline{E}_n' \left(\overline{I} - \overline{b}_n \overline{w}_n^T\right) + \delta\overline{w}_n \overline{w}_n^T \overline{\alpha_n^2} \right].$$

Для того чтобы вариация $\delta e_n^2 \, (\overline{w}_n)$ была равна нулю при любых вариациях $\delta\overline{w}_n$, должно выполняться условие

$$a_n \overline{w}_n = \overline{E}_n' \overline{b}_n, \tag{9.26}$$

где положительная скалярная величина a_n определяется следующим образом:

$$a_n = \overline{b}_n^T \overline{E}_n' \overline{b}_n + \overline{\alpha_n^2}. \tag{9.27}$$

Легко можно показать, что вектор $\overline{w}_n$, найденный из уравнения (9.26), действительно минимизирует $\overline{e_n^2 \, (\overline{w}_n)}$. Допустим, что оптимальный $\overline{w}_n$ заменен другим весовым множителем $\overline{w}_n - \overline{y}_n$. Тогда согласно уравнению (9.25)

$$\overline{e_n^2 (\overline{w}_n - \overline{y}_n)} = tr \left[\overline{E}_n' - 2\left(\overline{w}_n - \overline{y}_n\right) \overline{b}_n^T \overline{E}_n' + a_n \left(\overline{w}_n - \overline{y}_n\right)\left(\overline{w}_n^T - \overline{y}_n^T\right) \right]$$

---

* Оптимальный вектор $\overline{w}_n^{(1)}$ должен минимизировать след матрицы $\overline{E}_n^{(1)}$, а оптимальный вектор $\overline{w}_n^{(2)}$ — след матрицы $\overline{E}_n^{(4)}$ *(прим. ред.)*.

и при использовании уравнения (9.26) будем иметь

$$\overline{e_n^2(\bar{w}_n-\bar{y}_n)}=tr\,[\bar{E}'_n-a_n(\bar{w}_n-\bar{y}_n)(\bar{w}_n^T+\bar{y}_n^T)],$$

откуда

$$\overline{e_n^2(\bar{w}_n-\bar{y}_n)}=\overline{e_n^2(\bar{w}_n)}+a_n tr\,(\bar{y}_n\bar{y}_n^T).$$

Итак, средний квадрат ошибок не уменьшается при изменении $\bar{w}_n$, если справедливо уравнение (9.26).

Зная оптимальный весовой вектор, можно переписать выражение для корреляционной матрицы ошибок оценки $\bar{E}_n$ [см. уравнение (9.25)] в более удобном виде. Так, из определения (9.27) величины a_n получим

$$\bar{E}_n=\bar{E}'_n(\bar{I}-\bar{b}_n\bar{w}_n^T)-\bar{w}_n\bar{b}_n^T\bar{E}'_n+a_n\bar{w}_n\bar{w}_n^T.$$

Подставляя сюда (9.26), найдем окончательное выражение

$$\bar{E}_n=\bar{E}'_n-a_n^{-1}\bar{E}'_n\bar{b}_n\bar{b}_n^T\bar{E}'_n. \qquad (9.28)$$

Уравнения (9.23) и (9.28) далее служат рекуррентными формулами для получения улучшенных оценок отклонений по положению и скорости в каждый из моментов измерения t_1, t_2, ...

Выведем теперь важное свойство оптимальной оценки, которое понадобится для развития методов статистического анализа, изложенных в разд. 9.4. Это свойство может быть кратко записано следующим образом:

$$\overline{\bar{e}_n\delta\hat{\bar{x}}_n^T}=\bar{0}, \qquad (9.29)$$

если $\delta\hat{\bar{x}}_n$ — оптимальная оценка; иначе говоря, оптимальная оценка и соответствующая ошибка оценки не коррелированы между собой.

Для доказательства используем уравнения (9.26) и (9.27):

$$\bar{w}_n\overline{\alpha_n^2}-(\bar{I}-\bar{w}_n\bar{b}_n^T)\bar{E}'_n\bar{b}_n=0$$

или

$$\bar{w}_n\overline{\alpha_n^2}-\overline{[(\bar{I}-\bar{w}_n\bar{b}_n^T)\bar{e}'_n]\,\bar{e}'^T_n}\,\bar{b}_n=0.$$

Заменяя величину в квадратных скобках с помощью уравнения (9.24), получим

$$\bar{w}_n\overline{\alpha_n^2}+\overline{(\bar{w}_n\alpha_n-\bar{e}_n)\,\bar{e}'^T_n}\,\bar{b}_n=0.$$

Но, так как $\overline{\alpha_n\bar{e}'^T_n}=0$, имеем

$$(\bar{w}_n\overline{\alpha_n)\,\alpha_n}-\overline{\bar{e}_n\bar{e}'^T_n}\,\bar{b}_n=0.$$

Вновь подставляя $\bar{w}_n\alpha_n$ из уравнения (9.24), запишем

$$\overline{[\bar{e}_n-(\bar{I}-\bar{w}_n\bar{b}_n^T)\,\bar{e}'_n]\,\alpha_n}-\overline{\bar{e}_n\bar{e}'^T_n}\,\bar{b}_n=0$$

или

$$\overline{\bar{e}_n(\alpha_n - \bar{e}_n'^T\, \bar{b}_n)} = 0.$$

Следовательно, $\bar{e}_n$ и скаляр $\alpha_n - \bar{e}_n'^T \bar{b}_n$ не коррелированы между собой. Отсюда

$$\overline{\bar{e}_n[\bar{w}_n^T(\alpha_n - \bar{e}_n'^T \bar{b}_n)]} = \bar{0}$$

или из уравнения (9.24)

$$\overline{\bar{e}_n(\bar{e}_n^T - \bar{e}_n'^T)} = \bar{0}.$$

Таким образом, имеем

$$\overline{\bar{e}_n[\delta\bar{x}_n^T + \bar{e}_n^T - (\delta\bar{x}_n^T + \bar{e}_n'^T)]} = \bar{0}$$

или

$$\overline{\bar{e}_n \delta\hat{\bar{x}}_n^T} = \overline{\bar{e}_n \delta\hat{\bar{x}}_n'^T}.$$

Основываясь на последнем соотношении, нетрудно показать, что $\bar{e}_n$ и $\delta\hat{\bar{x}}_n$ не коррелированы, так как если подставить в него (9.24) и (9.12), то получим

$$\overline{\bar{e}_n \delta\hat{\bar{x}}_n^T} = \overline{\left[\left(\bar{I} - \bar{w}_n \bar{b}_n^T\right) \bar{\Phi}_{n,n-1}\bar{e}_{n-1} + \bar{w}_n \alpha_n\right] \delta\hat{\bar{x}}_{n-1}^T \bar{\Phi}_{n,n-1}^T} =$$

$$= (\bar{I} - \bar{w}_n \bar{b}_n^T)\, \bar{\Phi}_{n,n-1}\, \overline{\bar{e}_{n-1} \delta\hat{\bar{x}}_{n-1}^T}\, \bar{\Phi}_{n,n-1}^T.$$

Далее, продолжая редукцию к $\bar{e}_{n-1}\delta\hat{\bar{x}}_{n-1}^T$, придем, наконец, к тому, что произведение $\overline{\bar{e}_n \delta\hat{\bar{x}}_n^T}$ связано с $\overline{\bar{e}_L \delta\hat{\bar{x}}_L}$, которое равно нулю. Итак, уравнение (9.29) получено и доказательство тем самым закончено.

9.4. Статистический анализ процесса наведения

В разд. 8.1 было показано, что оценка коррекции скорости для закрепленного времени перелета, которая должна быть приложена в момент t_n, равна

$$\Delta\hat{\bar{v}}_n = \bar{C}_n^* \delta\hat{\bar{r}}_n - \delta\hat{\bar{v}}_n.$$

Для того, чтобы привести это выражение в соответствие с принятыми нами обозначениями, введем прямоугольную матрицу

$$\bar{B}_n = (\bar{C}_n^* \quad -\bar{I})$$

из трех строк и шести столбцов. Это позволит выразить оценку коррекции через шестимерный вектор отклонений:

$$\Delta\hat{\bar{v}}_n=\bar{B}_n\delta\hat{\bar{x}}'_n\,. \tag{9.30}$$

Для статистического исследования задачи наведения нам потребуется найти удобное выражение для корреляционной матрицы вектора коррекции скорости. Как сейчас будет показано, эту корреляционную матрицу можно выразить непосредственно через корреляционную матрицу ошибок оценки $\bar{E}_n$ и корреляционную матрицу вектора истинных отклонений. Последняя матрица имеет вид

$$\bar{X}_n=\overline{\delta\bar{x}_n\delta\bar{x}_n^T} \tag{9.31}$$

и может быть вычислена с помощью рекуррентного соотношения

$$\bar{X}_n=\bar{\Phi}_{n,n-1}\bar{X}_{n-1}\bar{\Phi}^T_{n,n-1}.$$

В начале полета, т. е. в момент вывода на орбиту

$$\delta\hat{\bar{x}}_L=\delta\bar{x}_L+\bar{e}_L=0,$$

так что равенство

$$\bar{X}_L=\bar{E}_L$$

определяет начальные условия для матрицы $\bar{X}$.

Согласно выражению (9.30) имеем

$$\Delta\hat{\bar{v}}_n=\bar{B}_n(\delta\bar{x}'_n+\bar{e}'_n),$$

откуда

$$\overline{\Delta\hat{\bar{v}}_n\Delta\hat{\bar{v}}_n^T}=\bar{B}_n\left(\overline{\delta\bar{x}'_n\delta\bar{x}'^T_n}+\overline{\bar{e}'_n\delta\bar{x}'^T_n}+\overline{\delta\bar{x}'_n\,\bar{e}'^T_n}+\bar{E}'_n\right)\bar{B}^T_n.$$

С другой стороны,

$$\delta\hat{\bar{x}}'^T_n=\delta\bar{x}'^T_n+\bar{e}'^T_n$$

и отсюда в соответствии с теоремой, доказанной в конце разд. 9.3,

$$\overline{\bar{e}'_n\delta\hat{\bar{x}}^T_n}=\overline{\bar{e}'_n\delta\bar{x}'^T_n}+\bar{E}'_n=\bar{0}.$$

Следовательно,

$$\overline{\Delta\hat{\bar{v}}_n\Delta\hat{\bar{v}}_n^T}=\bar{B}_n(\bar{X}'_n-\bar{E}'_n)\bar{B}^T_n. \tag{9.32}$$

Для проведения полного статистического моделирования наведения необходимо запоминать след от обеих корреляционных матриц $\bar{E}$ и $\bar{X}$, экстраполировать их далее от одной решающей точки к другой и учитывать соответствующие изменения в их элементах в результате предпринимаемых действий. Изменение матрицы $\bar{E}$ в результате проведения измерений было описано в разд. 9.3. Ясно, что матрица $\bar{X}$ никак не изменится, пока к траектории не будет приложена коррекция скорости. Для учета коррекции скорости в момент t_n можно предложить следующую схему модификации матрицы $\bar{X}$.

Как в разд. 8.1, определим вектор $\bar{\eta}_n$ как ошибку реализации импульсной коррекции скорости в момент t_n. Истинное изменение вектора отклонения скорости $\delta\bar{v}_n$ составит

$$\Delta\bar{v}_n = \bar{B}_n \delta\hat{\bar{x}}'_n - \bar{\eta}_n.$$

Для того чтобы перейти к привычным нам обозначениям, образуем матрицу связи $\bar{M}$ из шести строк и трех столбцов:

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{I} \end{pmatrix}.$$

Тогда в точке приложения коррекции будем иметь

$$\delta\bar{x}_n = \delta\bar{x}'_n + \bar{M}\bar{B}_n \delta\hat{\bar{x}}'_n - \bar{M}\bar{\eta}_n = (\bar{I} + \bar{M}\bar{B}_n)\delta\bar{x}'_n + \bar{M}\bar{B}_n \bar{e}'_n - \bar{M}\bar{\eta}_n.$$

Таким образом*,

$$\begin{aligned} \overline{\delta\bar{x}_n \delta\bar{x}_n^T} = {} & (\bar{I} + \bar{M}\bar{B}_n)\, \overline{\delta\bar{x}'_n \delta\bar{x}'^T_n}\, (\bar{I} + \bar{M}\bar{B}_n)^T + \\ & + \bar{M}\bar{B}_n \bar{E}'_n (\bar{M}\bar{B}_n)^T + \bar{M}\bar{N}_n\bar{M}^T + \\ & + (\bar{I} + \bar{M}\bar{B}_n)\, \overline{\delta\bar{x}'_n \bar{e}'^T_n}\, (\bar{M}\bar{B}_n)^T + \\ & + \bar{M}\bar{B}_n\, \overline{\bar{e}'_n \delta\bar{x}'^T_n}\, (\bar{I} + \bar{M}\bar{B}_n)^T, \end{aligned}$$

где $\bar{N}_n$ — корреляционная матрица ошибок реализации, определенная в разд. 8.1. Это выражение можно еще более упростить, используя свойство (9.29). В результате получим

$$\begin{aligned} \bar{X}_n = {} & (\bar{I} + \bar{M}\bar{B}_n)(\bar{X}'_n - \bar{E}'_n)(\bar{I} + \bar{M}\bar{B}_n)^T + \bar{M}\bar{B}_n \bar{E}'_n (\bar{M}\bar{B}_n)^T + \\ & + \bar{M}\bar{N}_n\bar{M}^T. \end{aligned} \tag{9.33}$$

В матрице $\bar{E}$ также произойдут изменения, так как коррекция скорости реализуется с ошибками. Ошибка оценки изменится следующим образом:

$$\bar{e}_n = \bar{e}'_n + \bar{M}\bar{\eta}_n,$$

---

* Формула для $\overline{\delta\bar{x}_n \delta\bar{x}_n^T}$ выведена в предположении о том, что векторы $\delta\bar{x}'_n$ и $\bar{\eta}_n$ не коррелированы между собой. Поэтому в случае, когда структура $\bar{\eta}_n$ определяется соотношениями разд. 8.3, эту формулу нельзя считать точной *(прим. ред.)*.

а это вызовет изменение корреляционной матрицы

$$\overline{E}_n=\overline{E}'_n+\overline{M}\overline{N}_n\overline{M}^T.$$

В итоге для статистического моделирования наведения космического корабля потребуется следующий набор рекуррентных формул:

$$\overline{E}_n=\begin{cases}\overline{E}'_n-a_n^{-1}\overline{E}'_n\overline{b}_n\overline{b}_n^T\overline{E}'_n & \text{(измерение)}\\ \overline{E}'_n+\overline{M}\overline{N}_n\overline{M}^T & \text{(коррекция)}\\ \overline{E}'_n & \text{(не предпринималось никаких действий)}\end{cases}\tag{9.34}$$

$$\overline{X}_n=\begin{cases}(\overline{I}+\overline{M}\overline{B}_n)(\overline{X}'_n-\overline{E}'_n)(\overline{I}+\overline{M}\,\overline{B}_n)^T+\overline{M}\overline{B}_n\overline{E}'_n(\overline{M}\overline{B}_n)^T+\overline{M}\overline{N}_n\overline{M}^T & \text{(коррекция)}\\ \overline{X}'_n & \text{(полет без коррекции),}\end{cases}\tag{9.35}$$

причем в момент схода $\overline{X}_L=\overline{E}_L$.

Для бортового счетно-решающего устройства, в дополнение к (9.34), должны быть запрограммированы следующие рекуррентные формулы:

$$\delta\hat{\overline{x}}_n=\begin{cases}\delta\hat{\overline{x}}'_n+a_n^{-1}\,\overline{E}'_n\overline{b}_n(\delta\tilde{q}_n-\delta\hat{q}'_n) & \text{(измерение)}\\ (\overline{I}+\overline{M}\overline{B}_n)\,\delta\hat{\overline{x}}'_n & \text{(коррекция)}\\ \delta\hat{\overline{x}}'_n & \text{(не принималось никаких действий)}\end{cases}\tag{9.36}$$

при $\delta\hat{\overline{x}}_L=0$.

Нужно, однако, подчеркнуть, что формулы (9.36) для статистического моделирования не обязательны.

Средний квадрат оценки коррекции скорости определяется как след матрицы $\overline{\Delta\hat{\overline{v}}_n\Delta\hat{\overline{v}}_n^T}$, вычисляемой по формуле (9.32). Для применения теории решений иногда важно знать точность оценки. Ясно, что коррекцию скорости при большой неопределенности ее оценки не стоит прикладывать, если есть возможность существенно улучшить оценку путем будущих наблюдений. Неопределенность $\overline{d}_n$ оценки $\Delta\hat{\overline{v}}_n$ выражается достаточно просто

$$\overline{d}_n=\Delta\hat{\overline{v}}_n-\overline{B}_n\delta\overline{x}_n=\overline{B}_n\overline{e}'_n.$$

Таким образом, средний квадрат неопределенности можно найти как след матрицы

$$\overline{\overline{d}_n\overline{d}_n^T}=\overline{B}_n\overline{E}'_n\overline{B}_n^T.\tag{9.37}$$

Обращаясь, наконец, к проблеме точности наведения, будем определять вектор отклонения по положению в номинальное время прибытия в точку встречи с целью, экстраполируя вектор отклонения из точки последней коррекции скорости. Итак, если t_N — время последней коррекции, а $\delta\bar{x}_A$ — вектор отклонения в момент прибытия t_A, то

$$\delta\bar{x}_A = \bar{\Phi}_{A,N}\delta\bar{x}_N^+.$$

Но из уравнения (9.3) и конечных условий для навигационных матриц имеем

$$\bar{\Phi}_{A,N} = \begin{pmatrix} \bar{R}_A\bar{\Lambda}_N^{-1} & 0 \\ \bar{V}_A\bar{\Lambda}_N^{-1} & \bar{\Lambda}_N^{*-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{C}_N^* & -\bar{I} \\ \bar{C}_N & -\bar{I} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, вектор отклонения по положению в точке встречи $\delta\bar{r}_A$ можно записать в виде

$$\delta\bar{r}_A = \bar{R}_A\bar{\Lambda}_N^{-1}\bar{B}_N\delta\bar{x}_N^+.$$

Аналогичное выражение можно получить также и для отклонения по скорости в момент t_A.

Ошибку по положению в точке встречи, в конечном счете, можно выразить через вектор ошибок $\bar{e}_N$, действуя в такой самоочевидной последовательности:

$$\delta\bar{r}_A = \bar{R}_A\bar{\Lambda}_N^{-1}\bar{B}_N(\delta\bar{x}_N^- + \bar{M}\Delta\bar{v}_N) = \bar{R}_A\bar{\Lambda}_N^{-1}(\bar{B}_N\delta\bar{x}_N^- - \Delta\bar{v}_N) =$$
$$= -\bar{R}_A\bar{\Lambda}_N^{-1}(\bar{B}_N\bar{e}_N' - \bar{\eta}_N) = -\bar{R}_A\bar{\Lambda}_N^{-1}\bar{B}_N\bar{e}_N. \qquad (9.38)$$

Средний квадрат ошибки по положению в точке встречи вычисляется после этого как след матрицы $\overline{\delta\bar{r}_A\delta\bar{r}_A^T}$.

9.5. Применение теории к навигации при облете Луны

Для практического применения схемы наведения и навигации, сформулированной в настоящей книге, следует прежде всего принять некоторые правила относительно вида операций, которые должны предприниматься в каждой из решающих точек. Каким-то способом необходимо управлять частотой и количеством наблюдений — в идеальном случае должно быть правило принятия решений, тесно связанное как с целями полета, так и с возможностями измерительных устройств. Если принято решение производить наблюдение, то тут же требуется решить, какой тип измерения и какие небесные объекты надо для этого использовать. Далее придется прикладывать периодические коррекции скорости, причем здесь выбору подлежит число импульсов и моменты приложения коррекций.

После того как правила принятия решений заданы, необходимо проверить их эффективность в соответствии с некоторым критерием качества. Типичным критерием является величина пролета мимо цели, когда задача состоит в ее минимизации. Однако уменьшение пролета обычно требует либо увеличения потребного числа измерений, либо повышения расхода топлива на коррекции, либо, наконец, того и другого одновременно. В свете таких противоречивых требований становится видна необходимость компромиссных решений, причем статистическое моделирование дает средства достижения приемлемого равновесия.

Желая минимизировать число реализаций траекторий, постараемся по возможности избегать применения методов Монте-Карло. Как указано в разд. 9.4, для исследования эффективности конкретных совокупностей правил принятия решений вовсе не обязательно вычислять истинную траекторию космического корабля, как это нужно было бы при монтекарловском моделировании. Оценка $\delta\hat{\bar{x}}_n$, зависящая от истинной измеряемой информации, не входит ни в один из статистических расчетов*.

Ниже приводится частный пример системы правил принятия решений, которые должны применяться в каждой решающей точке.

1. По формулам (9.32) и (9.37) вычисляется средний квадрат оценки коррекции $\overline{\Delta v_n^2}$ и средний квадрат неопределенности оценки $\overline{d_n^2}$. Если величина

$$R_v = \sqrt{\frac{\overline{d_n^2}}{\overline{\Delta v_n^2}}}$$

меньше заданного значения $R_{v(\min)}$, то коррекция скорости прикладывается в момент t_n.

2. Если условие выполнения коррекции не удовлетворяется, то исследуется необходимость измерения. С этой целью заранее составляется сокращенный каталог звезд и отдельных планет. Для исследования эффективности каждой из комбинаций измеряемых звезд и планет производится соответствующий анализ, выясняющий возможную степень уменьшения неопределенности положения в точке встречи. Затем в качестве потенциально наилучшего из-

---

* Ниже автор формулирует некоторые статистически рациональные «в среднем» (рациональные для всего множества космических полетов, а не для полета с данной оценкой $\delta\hat{x}_n$) правила принятия решений, вследствие чего при статистических испытаниях ему не требуется воспроизводить множество $\delta\hat{x}_n$. Энергетические затраты на коррекцию можно уменьшить, а ее точность можно увеличить, если пользоваться статистически рациональными для данной $\delta\hat{x}_n$ и, следовательно, зависящими от конкретной оценки $\delta\hat{x}_n$ правилами принятия решений. Ряд вопросов выбора статистически оптимальной стратегии коррекции рассмотрен в работе [77]. Построение оптимальной стратегии выбора импульсов, являющихся линейной функцией результатов измерений, проведено в работе [78] (*прим. ред.*).

мерения выбирается та комбинация планет и звезд, которая приводит к наибольшему уменьшению среднего квадрата неопределенности. Пусть $\overline{\delta r_A^{2+}}$ и $\overline{\delta r_A^{2-}}$ обозначают средние квадраты неопределенностей положения в точке встречи соответственно при потенциально наилучшем наблюдении и без наблюдения.

Тогда, если величина

$$R_p = \sqrt{\frac{\overline{\delta r_A^{2-}} - \overline{\delta r_A^{2+}}}{\overline{\delta r_A^{2-}}}}$$

больше, чем заданное значение $R_{p(\max)}$, то потенциально наилучшее измерение производится в момент t_n. Иными словами, для того чтобы измерение выполнялось, оно должно приводить к значительному уменьшению потенциально возможной величины пролета. С другой стороны, если и последний критерий не удовлетворяется, то в решающей точке t_n не предпринимается никаких действий.

Для иллюстрации применим эти правила принятия решений к задаче навигации при облете Луны. В процессе работы было обнаружено, что критерий приложения коррекций скорости вполне оправдывает себя при определении моментов коррекции на среднем участке траектории, за исключением последней коррекции. По мере приближения к цели потребное приращение скорости довольно быстро возрастает и момент приложения последней коррекции становится весьма критическим фактором.

В настоящем примере использовалась траектория, изображенная на рис. 5.40. Номинальное полное время полета с момента схода составляло 126,4 часа, а точка наибольшего приближения отстояла на 97 *км* от лунной поверхности. Для получения корреляционной матрицы ошибок схода $\overline{E}_L$ принимались следующие среднеквадратичные ошибки:

По высоте	По горизонтальной дальности	По наклонной дальности
3 *км* 4,6 *м/сек*	4,6 *км* 1,8 *м/сек*	1,5 *км* 1,2 *м/сек*

В качестве возможных объектов измерений рассматривалось 20 наиболее ярких звезд. Для простоты измерялась только высота звезды над освещенным горизонтом Земли или Луны. Таким образом, в каждой решающей точке исследовалось и оценивалось в соответствии с решающим критерием 40 возможных измерений. Минимальное время между наблюдениями было установлено равным 15 *мин.* На измерения налагались некоторые практические ограничения, что позволило исключить физически нереализуемые наблюдения. Например, чтобы ограничить поле зрения разумными пределами, углы между линиями визирования звезд и горизонтом не должны были превышать 70°. Кроме того, измерение не выполнялось, если линия визирования звезды или горизонта планеты отстояла от линии визирования Солнца менее чем на 15°. Далее, если кромка Земли, от которой должна отсчитываться высота звезды, наблюдалась на фоне освещенной стороны Луны, такое измерение отменялось.

Предполагалось, что у используемого оптического измерительного устройства систематические ошибки отсутствуют, а дисперсии случайных ошибок определяются выражениями:

$$\sigma_E^2 = (0{,}00005)^2 + \left(\frac{1{,}6}{r_{SE}}\right)^2 \ \textit{рад} \quad \text{для Земли},$$

$$\sigma_M^2 = (0{,}00005)^2 + \left(\frac{0{,}8}{r_{SM}}\right)^2 \ \textit{рад} \quad \text{для Луны},$$

где r_{SE} и r_{SM} — дальности в *км* от космического корабля до Земли и до Луны соответственно. Таким образом учитывалось, что будет совершаться бо́льшая ошибка в определении горизонта, когда корабль находится ближе к планете. На больших расстояниях среднеквадратичная ошибка составляет около 0,05 миллирадиан.

Ошибка по величине прикладываемой коррекции скорости считалась изотропной и пропорциональной величине самой коррекции. Для вычисления дисперсии ошибки реализации была принята формула

$$\overline{\eta_n^2} = 0{,}0001 \overline{\Delta\hat{v}_n^2},$$

в силу которой среднеквадратичная ошибка составляла один процент от среднеквадратичной величины коррекции. Ошибка ориентации тяги при коррекции принималась равной 0,01 *рад*.

Предварительные результаты анализа выборочной траектории приведены в прилагаемых таблицах. Моделировалось множество реализаций наведения, для которых назначались различные значения параметров стратегии R_v и R_p. Затем для оценки влияния на навигационную информацию изменения времени года образовывалась система псевдотраекторий простым поворотом направления с Земли на Солнце. Считалось, что сама траектория при этом не меняется — допущение вполне приемлемое для предварительного анализа. Таким образом, получалось, что с корабля видны в различной степени освещенные части Земли и Луны, и это приводило к различным измерениям.

Количество коррекций скорости, так же как и моменты их приложения, естественно, регулировались величиной R_v. С другой стороны, число измерений оказалось не очень чувствительным к вариациям этого параметра. Для примера в табл. 9. 1 приведены навигационные данные для траектории Земля—Луна при двух значениях относительной неопределенности коррекций R_r. Хотя конечная неопределенность знания положения уменьшилась примерно до 3 *км*, отклонения от номинальной траектории при этом составляли около 20 *км*. Такая большая разница объясняется тем, что информация от измерений поступала даже после конечной коррекции скорости, в результате чего точность знания орбиты продолжала повышаться, хотя не делалось попыток на основе этой информации уменьшить ошибку в точке встречи. Нужно сказать, что если назначить устранение конечного отклонения с помощью коррекции скорости за 1/10 часа до номинального момента прибытия, то на это потребуется 46,3 *м/сек* характеристической скорости в первом случае и 30,5 *м/сек* во втором. Причем такая коррекция будет сопровождаться увеличением отклонений в конечной скорости соответственно на 22,9 и 23,2 *м/сек*.

Таблица 9.1

Зависимость навигационных данных от коэффициента неопределенности коррекции для полета Земля—Луна*

Коэффициент неопределенности коррекции	Число измерений	Время приложения коррекций *час*	Полная скорость, затраченная на коррекции *м/сек*	Конечная неопределенность знания положения *км*	Конечное отклонение по положению *км*	Конечная неопределенность знания скорости *м/сек*	Конечное отклонение по скорости *м/сек*
0,2	39	7,0 18,0 61,8	47,9	4,0	20,1	5,0	35,7
0,3	40	5,5 11,5 26,0 61,4	34,4	2,9	19,3	2,0	17,4

* Коэффициент уменьшения пролета равен 0,1 от старта до 8 *час* полета, затем изменяется до 0,5 от 8 до 62,5 *час*; угол линии направления на Солнце равен 250°.

В табл. 9.2 приведены навигационные данные для траектории Земля—Луна в зависимости от коэффициента уменьшения пролета R_p, когда коррекции скорости выполняются через 5, 20, 52 и 61,5 *час* после старта. В общем случае по мере возрастания R_p каждое измерение приобретает все большую значимость в смысле уменьшения потенциальной ошибки в точке встречи, причем общее потребное число измерений уменьшается. При этом, конечно, могут возникать потери точности оценки окончательного положения и скорости в точке встречи. В процессе подготовки программы измерений необходимо добиться приемлемого компромисса.

Таблица 9.2

Зависимость навигационных данных от коэффициента уменьшения пролета для траектории Земля—Луна*

Коэффициент уменьшения пролета	Число измерений	Полная скорость, затраченная на коррекции *м/сек*	Конечная неопределенность знания положения *км*	Конечная неопределенность знания скорости *м/сек*	Конечное отклонение по положению *км*	Конечное отклонение по скорости *м/сек*
0,2	115	23,2	1,13	0,76	6,3	7,3
0,3	77	25,0	1,77	1,65	11,4	10,4
0,4	55	26,5	1,77	1,65	14,0	11,6
0,5**	40	34,8	1,93	1,80	17,7	26,8

* Коэффициент уменьшения пролета для времени от 0 до 8 *час* постоянен и равен 0,1; коррекции скорости реализуются в моменты 5; 20; 52; 61,5 *час;* угол линии направления на Солнце равен 250°. Изменение коэффициента уменьшения пролета относится к времени с 8 до 62,5 *час* с момента запуска.

Исследовалось также влияние относительной величины освещенной части поверхности планеты на качество навигации. Для этого была выбрана определенная совокупность значений R_p и моментов приложения коррекций, а направление на Солнце изменялось с шагом 60°. Кроме того, были выделены углы 70 и 250°, так как эти направления почти перпендикулярны к линии Земля—Луна в момент старта. В табл. 9.3 приведены результаты расчетов для траектории полета на Луну, откуда видно, что случаи 70 и 180° приводят к наибольшим неопределенностям. Полная характеристическая скорость, затрачиваемая на коррекции, максимальна при 120° и равна 50,9 *м/сек*. Однако ее можно уменьшить, так как моменты, выбранные для реализации коррекций, не являются оптимальными во всех случаях.

Для всех вариантов последняя коррекция скорости, прикладываемая непосредственно перед прохождением перилуния, значительно превышает по величине две предыдущие коррекции на среднем участке полета. Это приводит к весьма большому отклонению скорости от номинальной в точке встречи. Для обратного полета это, в свою очередь, вызывает большую первую коррекцию скорости. Если в задачу полета не входит прохождение корабля через заданное положение перилуния, то очевидно, что суммарный расход топлива на полет с возвращением можно уменьшить.

Наконец, в табл. 9.4 приведены полные результаты для одной из траекторий Земля—Луна. Этот вариант отмечен двумя звездочками в табл. 9.2.

Таблица 9.3

Навигационные данные в зависимости от начального направления на Солнце для псевдотраекторий Земля—Луна*

Направление на Солнце *град*	Число измерений	Полная скорость, затраченная на коррекции *м/сек*	Конечная неопределенность знания положения *км*	Конечная неопределенность знания скорости *м/сек*	Конечное отклонение по положению *км*	Конечное отклонение по скорости *м/сек*
0	41	30,5	2,1	1,2	4,8	13,7
70	39	28,7	10,4	7,9	12,9	17,4
120	39	50,9	2,6	1,2	19,3	41,2
180	40	29,6	8,4	9,4	19,3	21,4
250	40	34,8	1,9	1,8	17,7	26,9
300	39	39,3	1,9	1,8	6,4	20,4

* Коэффициент уменьшения пролета равен 0,1 с момента старта до 8 *час*; затем изменяется до 0,5 от 8 до 62,5 *час*; коррекции скорости реализуются в моменты 5; 20; 52; 61,5 *час*.

Таблица 9.4

Типичные навигационные данные для перелета Земля—Луна

Время *час*	Наблюдение	Коррекция скорости *м/сек*	Уменьшение неопределенности знания положения в точке встречи *км*	Неопределенность знания положения в точке встречи *км*	Расчетная коррекция скорости *м/сек*	Неопределенность знания коррекции скорости *м/сек*	Неопределенность знания текущего положения *км*	Неопределенность знания текущей скорости *м/сек*	Отклонение по положению *км*	Отклонение по скорости *м/сек*
0,6	Луна, Антарес		421	4078	0	5,36	7,7	4,87	7,9	4,91
0,9	Земля, Фамальгаут		3265	2417	0,56	5,76	7,2	3,54	11,9	5,06
1,2	Земля, Денеб		859	2258	4,91	4,12	8,5	3,54	16,7	5,36
1,5	Земля, Альдебаран		662	2158	5,57	4,12	10,5	3,38	22,4	5,67
1,8	Земля, Альдебаран		595	2073	6,25	4,12	13,9	3,38	28,3	6,03
2,2	Земля, Альдебаран		656	1969	6,92	4,24	17,1	3,38	37,2	6,52
2,6	Земля, Поллукс		733	1827	7,56	4,27	19,3	3,23	46,5	6,91

Продолжение

Время *час*	Наблюдение	Коррекция скорости *м/сек*	Уменьшение неопределенности знания положения в точке встречи *км*	Неопределенность знания положения в точке встречи *км*	Расчетная коррекция скорости *м/сек*	Неопределенность знания коррекции скорости *м/сек*	Неопределенность знания текущего положения *км*	Неопределенность знания текущей скорости *м/сек*	Отклонение по положению *км*	Отклонение по скорости *м/сек*
3,0	Земля, Процион		828	1630	8,16	4,12	21,2	3,05	56,6	7,31
3,4	Земля, Процион		651	1493	8,81	3,90	23,5	2,90	66,2	7,68
3,8	Земля, Поллукс		685	1327	9,35	3,72	24,4	2,68	78,3	7,98
4,5	Земля, Процион		647	1156	10,18	3,57	27,3	2,50	98,9	8,53
5,0		10,8								
5,5	Земля, Поллукс		699	921	0	3,11	29,6	2,20	112,6	3,47
6,0	Земля, Процион		448	810	2,04	2,87	29,4	1,95	111,5	3,38
6,5	Земля, Поллукс		392	709	2,56	2,59	29,1	1,83	111,0	3,35
7,0	Луна, Антарес		315	635	2,90	2,38	29,3	1,65	111,1	3,35
7,5	Земля, Поллукс		299	560	3,23	2,20	28,8	1,53	111,8	3,35
8,5	Луна, Антарес		301	472	3,63	2,10	29,4	1,34	114,8	3,38
9,5	Луна, Антарес		254	398	3,90	1,83	29,4	1,22	119,6	3,44
10,0	Земля, Поллукс		217	334	4,15	1,62	27,5	1,07	122,5	3,47
10,5	Луна, Антарес		172	288	4,33	1,37	25,7	0,95	126,0	3,54
12,0	Луна, Антарес		153	243	4,70	1,31	26,9	0,79	138,0	3,72
12,5	Земла, Поллукс		125	209	4,82	1,13	25,6	0,76	142,7	3,75
13,5	Луна, Антарес		109	179	5,06	1,04	25,1	0,67	152,6	3,84
15,0	Луна, Антарес		90	154	5,36	0,88	25,7	0,58	169,3	3,96
16,0	Земля, Поллукс		77	134	5,64	0,79	25,7	0,55	181,4	4,06

Время *час*	Наблюдение	Коррекция скорости *м/сек*	Уменьшение неопределенности знания положения в точке встречи *км*	Неопределенность знания положения в точке встречи *км*	Расчетная коррекция скорости *м/сек*	Неопределенность коррекции скорости *м/сек*	Неопределенность знания текущего положения *км*	Неопределенность знания текущей скорости *м/сек*	Отклонение по положению *км*	Отклонение по скорости *м/сек*
17,0	Луна, Антарес		66	116	5,82	0,76	25,2	0,49	194,0	4,15
19,5	Луна, Антарес		58	100	6,40	0,70	27,2	0,46	228,2	4,39
20,0		6,50								
22,0	Земля, Поллукс		51	87	0	0,67	29,3	0,40	221,0	2,04
23,5	Луна, Антарес		45	76	0,27	0,64	29,0	0,37	210,9	1,95
28,5	Луна, Антарес		37	64	0,49	0,64	32,5	0,30	180,8	1,80
29,5	Земля, Поллукс		32	56	0,64	0,58	32,5	0,30	175,4	1,74
37,0	Луна, Антарес		27	48	0,88	0,70	37,5	0,27	138,6	1,62
40,5	Земля, Поллукс		24	42	1,07	0,70	39,6	0,21	124,4	1,56
52,0		2,41								
53,5	Луна, Антарес		21	35	0	1,53	46,2	0,18	87,5	2,29
57,5	Земля. Регулус		18	31	1,25	2,29	45,8	0,12	65,8	2,20
60,0	Луна, Регулус		16	27	3,05	3,90	29,3	0,30	57,1	2,14
60,5	Земля, Процион		14	23	4,97	3,45	21,2	0,37	55,8	2,23
61,4	Луна, Регулус		13	18	9,45	3,88	19,2	0,30	53,5	2,99
61,8		14,97								
62,1	Луна, Альдебаран		16	6	0	11,00	13,5	1,95	37,9	16,22
62,4	Луна, Альфа Креста		6	2	26,81	10,15	2,1	1,07	24,0	22,93
62,56							1,9	1,74	18,0	26,90

9.6. Оптимальный выбор навигационных измерений

В разд. 9.3 был разработан оптимальный линейный метод обработки информации, получаемой от измерений. Цель настоящего раздела — решить близкую к указанной задачу выбора таких измерений, которые являются в некотором смысле наиболее эффективными. Может потребоваться, например, выбрать измерения, выполняемые в момент t_n, которые приводят к максимальному уменьшению среднего квадрата неопределенности знания положения или скорости в момент t_n. Но, по-видимому, наибольшее значение будет иметь требование выбора таких измерений, которые минимизируют неопределенность знания некоторой линейной комбинации из отклонений по положению и скорости. В частности, можно искать измерения, минимизирующие неточность знания потребной коррекции скорости.

Рассмотрим для начала простейший случай, т. е. минимизацию среднего квадрата неопределенности положения в момент t_n. С помощью уравнения (9.28) эта величина выражается следующим образом:

$$\overline{\varepsilon_n^2} = tr\overline{E}_n^{(1)'} - \frac{\overline{h}_n^T\overline{E}_n^{(1)'}\,\overline{E}_n^{(1)'}\,\overline{h}_n}{\overline{h}_n^T\overline{E}_n^{(1)'}\,\overline{h}_n + \overline{\alpha_n^2}}. \tag{9.39}$$

При полном отсутствии ошибок измерений $(\overline{\alpha_n^2} = 0)$ задача минимизации среднего квадрата ошибки оценки эквивалентна выбору направления вектора $\overline{h}_n$, которое максимизирует отношение двух квадратичных форм. Геометрическая интерпретация такого случая очевидна. Поскольку собственные направления $\overline{E}_n^{(1)'}$ и $\overline{E}_n^{(1)'}\overline{E}_n^{(1)'}$ одинаковы, то оптимальное направление для $\overline{h}_n$ совпадает с главным собственным направлением $\overline{E}_n^{(1)'}$.

Задача минимизации среднего квадрата неопределенности скорости в момент t_n соответствующим выбором вектора $\overline{h}_n$ решается и интерпретируется не так просто. Запишем опять с помощью уравнения (9.28) средний квадрат ошибки определения скорости

$$\overline{\delta_n^2} = tr\overline{E}_n^{(4)'} - \frac{\overline{h}_n^T\overline{E}_n^{(2)'}\,\overline{E}_n^{(3)'}\,\overline{h}_n}{\overline{h}_n^T\overline{E}_n^{(1)'}\,\overline{h}_n + \overline{\alpha_n^2}}. \tag{9.40}$$

Обозначим через p и q две квадратичные формы

$$p = \overline{h}_n^T\overline{E}_n^{(2)'}\overline{E}_n^{(3)'}\overline{h}_n, \quad q = \overline{h}_n^T\overline{E}_n^{(1)'}\,\overline{h}_n.$$

Согласно теории квадратичных форм, существует ортогональное преобразование, приводящее q к диагональному виду. Итак,

$$\overline{h}_n = \overline{Q}\overline{d},$$

откуда

$$q=\overline{d}^T\overline{Q}^T\overline{E}_n^{(1)'}\,\overline{Q}\overline{d}=\mu_1 d_1^2+\mu_2 d_2^2+\mu_3 d_3^2,$$

где μ_1, μ_2, μ_3 — корни характеристического уравнения матрицы $\overline{E}_n^{(1)'}$, а столбцы матрицы $\overline{Q}$ — соответствующие характеристические единичные векторы. Так как $\overline{E}_n^{(1)'}$ — положительно определенная матрица, то характеристические корни положительны и дальнейшее преобразование

$$\overline{f}=\overline{D}\,\overline{d}$$

дает

$$q=\overline{f}^T\overline{f}=f_1^2+f_2^2+f_3^2,$$

где $\overline{D}$ — диагональная матрица с диагональными элементами

$$\sqrt{\mu_1},\ \sqrt{\mu_2},\ \sqrt{\mu_3}.$$

То же преобразование $\overline{h}_n$ в $\overline{f}$ применим к квадратичной форме p:

$$p=\overline{f}^T\overline{D}^{-1}\overline{Q}^T\overline{E}_n^{(2)'}\,\overline{E}_n^{(3)'}\overline{Q}\overline{D}^{-1}\overline{f}.$$

Наконец, последнее ортогональное преобразование $\overline{f}$ приведет p к диагональному виду

$$\overline{f}=\overline{S}\overline{m},$$

в результате чего будем иметь

$$p=\lambda_1 m_1^2+\lambda_2 m_2^2+\lambda_3 m_3^2.$$

Столбцы матрицы $\overline{S}$ — характеристические единичные векторы матрицы $\overline{D}^{-1}\overline{Q}^T\overline{E}_n^{(2)}\overline{E}_n^{(3)'}\overline{Q}\,\overline{D}^{-1}$, а λ_1, λ_2, λ_3 — соответствующие корни характеристического уравнения. То же преобразование $\overline{f}$ в $\overline{m}$, примененное к диагональному варианту q, дает

$$q=\overline{m}^T\overline{S}^T\overline{S}\overline{m}=m_1^2+m_2^2+m_3^2,$$

так как $\overline{S}$ — ортогональная матрица.

В итоге преобразование

$$\overline{h}_n=\overline{Q}\overline{D}^{-1}\overline{S}\overline{m} \tag{9.41}$$

приводит к следующему отношению двух квадратичных форм в уравнении (9.40):

$$\frac{p}{q}=\frac{\lambda_1 m_1^2+\lambda_2 m_2^2+\lambda_3 m_3^2}{m_1^2+m_2^2+m_3^2}. \tag{9.42}$$

Кроме того, если матрица $\overline{E}_n^{(2)'}$ — неособенная, то произведение $\overline{E}_n^{(2)'}\overline{E}_n^{(3)'}=\overline{E}_n^{(2)'}\,\overline{E}_n^{(2)'T}$ является положительно определенным, откуда должно следовать, что все корни λ_1, λ_2, λ_3 — действительные и положительные.

Теперь задача максимизации p/q легко решается. Так как считается, что ошибки измерений отсутствуют, то ничего, кроме направления оптимального вектора $\bar{h}_n$ или, что эквивалентно, оптимального m, определить не удастся. Следовательно, можно принять, что $\bar{m}$ — единичный вектор. Пусть

$$\lambda_k = \max(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

Тогда оптимум $\bar{m}$ определяется следующим образом:

$$m_j = \begin{cases} 1 & j = k. \\ 0 & j \neq k. \end{cases}$$

Тот же способ можно применить для выбора такого направления $\bar{h}_n$, которое минимизирует неопределенность знания некоторой линейной комбинации отклонений по положению и скорости. В частности, рассмотрим выбор измерения, минимизирующего неопределенность коррекции скорости, когда коррекция должна выполняться немедленно вслед за измерением.

Корреляционная матрица ошибок вычисления коррекции имеет вид

$$\overline{\bar{d}_n \bar{d}_n^T} = \bar{B}_n \bar{E}_n \bar{B}_n^T,$$

а средний квадрат этих ошибок можно выразить следующим образом:

$$\overline{d_n^2} = tr\,(\bar{B}_n \bar{E}'_n \bar{B}_n^T) - \frac{\bar{h}_n^T \bar{W}_n \bar{h}_n}{\bar{h}_n^T \bar{E}_n^{(1)'} \bar{h}_n + \overline{\alpha_n^2}}. \tag{9.43}$$

Здесь $\bar{W}_n$ — симметрическая матрица,

$$\bar{W}_n = (\bar{E}_n^{(1)'} \quad \bar{E}_n^{(2)'})\, \bar{B}_n^T \bar{B}_n \begin{pmatrix} \bar{E}_n^{(1)'} \\ \bar{E}_n^{(2)'T} \end{pmatrix}$$

и поэтому, если $(\bar{E}_n^{(1)'} \quad \bar{E}_n^{(2)'})\bar{B}_n^T$ — неособенная матрица, то матрица $\bar{W}_n$ будет положительно определенной. При этих обстоятельствах, учитывая идентичность матриц

$$\bar{E}_n^{(2)'} \sim (\bar{E}_n^{(1)'} \quad \bar{E}_n^{(2)'})\, \bar{B}_n^T,$$

можно применить в точности тот же прием для выбора оптимального направления $\bar{h}_n$, который использовался выше для минимизации среднего квадрата неопределенности скорости.

Во всех случаях, представляющих практический интерес, оптимальное направление вектора $\bar{h}_n$ должно определяться с учетом некоторых ограничений или связей. Например, может потребоваться выбрать «наилучшую» звезду для измерения угла между линией визирования центра планетного диска и линией визирования звезды. Для такого измерения вектор $\bar{h}_n$ должен быть перпендикулярен линии визирования планеты. Если $\bar{z}_n$ — вектор положения планеты относительно космического корабля, то должно выполняться условие

$$\bar{h}_n^T \bar{z}_n = 0.$$

Применяя преобразование (9.41), будем иметь

$$\bar{m}^T \bar{S}^T \bar{D}^{-1} \bar{Q}^T \bar{z}_n = 0.$$

Обозначим через $\bar{p}$ единичный вектор в направлении $\bar{S}^T \bar{D}^{-1} \bar{Q}^T \bar{z}_n$. Тогда задача выбора оптимального направления для $\bar{h}_n$ или эквивалентно для $\bar{m}$ сведется к максимизации величины

$$\lambda_1 m_1^2 + \lambda_2 m_2^2 + \lambda_3 m_3^2$$

с учетом уравнений связи

$$\bar{m}^T \bar{p} = 0, \quad \bar{m}^T \bar{m} = 1.$$

Вводя множители Лагранжа ϱ и σ, придем к эквивалентной задаче нахождения безусловного максимума величины

$$\sum_{j=1}^{3} \lambda_j m_j^2 - 2\varrho \sum_{j=1}^{3} p_j m_j - \sigma \left(\sum_{j=1}^{3} m_j^2 - 1 \right).$$

Приравнивая нулю частные производные по каждому m_j, получим

$$m_j = \frac{\varrho p_j}{\lambda_j - \sigma}, \quad j = 1, 2, 3, \tag{9.44}$$

ϱ и σ определяются из уравнений связи.

Условие ортогональности $\bar{m}$ к $\bar{p}$ приводит к квадратному уравнению относительно σ:

$$\sigma^2 - [p_1^2(\lambda_2 + \lambda_3) + p_2^2(\lambda_1 + \lambda_3) + p_3^2(\lambda_1 + \lambda_2)]\,\sigma +$$
$$+ p_1^2 \lambda_2 \lambda_3 + p_2^2 \lambda_1 \lambda_3 + p_3^2 \lambda_1 \lambda_2 = 0. \tag{9.45}$$

Если λ_j расположены в порядке $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, то два корня σ_1 и σ_2 соотносятся с λ следующим образом: $\lambda_1 < \sigma_1 < \lambda_2 < \sigma_2 < \lambda_3$. Второй множитель Лагранжа определяется из того условия, что $\bar{m}$ — единичный вектор. Когда найден оптимальный вектор $\bar{m}$, то соответствующий вектор $\bar{h}_n$ вычисляется по формуле (9.41).

Легко показать, что σ_2 обеспечивает искомый максимум, в то время как σ_1 соответствует минимуму. Из уравнения (9.44) получим

$$\sum_{j=1}^{3} \lambda_j m_j^2 - \sigma \sum_{j=1}^{3} m_j^2 = \varrho \sum_{j=1}^{3} p_j m_j.$$

Из этого соотношения и уравнений связи следует

$$\sigma = \sum_{j=1}^{3} \lambda_j m_j^2.$$

Таким образом, σ_1 представляет собой минимум, а σ_2 — максимум первоначального максимизируемого выражения.

9.7. Оптимизация программы измерений

Очевидно, что неопределенности знания положения и скорости в точке встречи зависят от всей программы измерений. Задача выбора оптимальной программы гораздо более сложна, чем оптимизация одиночного измерения, когда используется лишь та информация, которая доступна в настоящий момент. Последняя задача обсуждалась в предыдущем разделе. Программа измерений, полученная в соответствии с изложенными здесь принципами, может оказаться удовлетворительной со многих точек зрения, но у нас нет оснований полагать, что она будет при этом оптимальной. В данном разделе предлагается метод, который может быть использован для итерационного улучшения программы измерений, в результате чего конечные погрешности будут уменьшаться.

Для того чтобы задача оказалась разрешимой, придется пренебречь влиянием всех ошибок реализации коррекций скорости. Если считать это допущение справедливым, то задачи навигации и наведения перестают быть связанными друг с другом и точность навигации становится не зависящей от точности реализации наведения. Далее для простоты будем полагать, что моменты времени, в которые должны выполняться измерения, заданы заранее и что корреляция между ошибками измерений отсутствует. В рамках приведенных постулатов задача будет включать только корреляционную матрицу ошибок по положению и скорости, которая согласно (9.28) и (9.27) удовлетворяет рекуррентной формуле

$$\overline{E}_n = \overline{E}'_n - a_n^{-1} \overline{E}'_n \overline{b}_n \overline{b}_n^T \overline{E}'_n, \tag{9.46}$$

где

$$a_n = \overline{b}_n^T \overline{E}'_n \overline{b}_n + \overline{\alpha_n^2}. \tag{9.47}$$

Изменение точности измерений, происходящее в соответствии с формулой (9.46) в момент t_n, распространится и на корреляционную матрицу в точке встречи $\overline{E}_A$; однако рекуррентное вычисление этой матрицы утомительно и непрактично. К счастью, имеется возможность выразить изменение элементов $\overline{E}_A$ непосредственно через изменения $\overline{b}_n$, что исключает необходимость непрерывного применения рекуррентной формулы (9.46). При таком подходе можно разработать схему систематического улучшения выбранных элементов $\overline{E}_A$ варьированием каждого из векторов измерений $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_N$.

Малое изменение $\delta\bar{b}_n$ в измерении, выполняемом в момент t_n, будет вызывать изменение $\delta\bar{E}_n$ в момент t_n, равно как и во все последующие моменты времени. Распространение этих изменений можно исследовать, вычисляя полный дифференциал уравнения (9.46):

$$\delta\bar{E}_n = \delta\bar{E}'_n + a_n^{-2}\bar{E}'_n\bar{b}_n(\delta\bar{b}_n^T\bar{E}'_n\bar{b}_n + \bar{b}_n^T\delta\bar{E}'_n\bar{b}_n +$$
$$+\bar{b}_n^T\bar{E}'_n\delta\bar{b}_n)\bar{b}_n^T\bar{E}'_n - a_n^{-1}\delta\bar{E}'_n\bar{b}_n\bar{b}_n^T\bar{E}'_n -$$
$$-a_n^{-1}\bar{E}'_n\delta\bar{b}_n\bar{b}_n^T\bar{E}'_n - a_n^{-1}\bar{E}'_n\bar{b}_n\delta\bar{b}_n^T\bar{E}'_n - a_n^{-1}\bar{E}'_n\bar{b}_n\bar{b}_n^T\delta\bar{E}'_n. \qquad (9.48)$$

Предположим теперь, что имеется матрица $\bar{L}_n$, называемая *присоединенной* к матрице $\bar{E}_n$, обладающая следующими свойствами:

$$\bar{L}'_n = \bar{\Phi}_{n,n-1}^{T-1}\bar{L}_{n-1}\bar{\Phi}_{n,n-1}^{-1},$$
$$tr\,(\bar{L}_n\delta\bar{E}_n - \bar{L}'_n\,\delta\bar{E}'_n) = \bar{\lambda}_n\cdot\delta\bar{b}_n. \qquad (9.49)$$

Тогда, поскольку

$$\delta\bar{E}'_n = \bar{\Phi}_{n,n-1}\delta\bar{E}_{n-1}\bar{\Phi}^T_{n,n-1},$$

будем иметь

$$tr\,(\bar{L}'_n\delta\bar{E}'_n) = tr\,(\bar{\Phi}_{n,n-1}^{T-1}\bar{L}_{n-1}\bar{\Phi}_{n,n-1}^{-1}\bar{\Phi}_{n,n-1}\,\delta\bar{E}_{n-1}\bar{\Phi}^T_{n,n-1}) =$$
$$= tr\,(\bar{\Phi}_{n,n-1}^{T-1}\bar{L}_{n-1}\delta\bar{E}_{n-1}\bar{\Phi}^T_{n,n-1}) =$$
$$= tr\,(\delta\bar{E}_{n-1}\bar{\Phi}^T_{n,n-1}\bar{\Phi}_{n,n-1}^{T-1}\bar{L}_{n-1}) =$$
$$= tr\,(\delta\bar{E}_{n-1}\bar{L}_{n-1}) = tr\,(\bar{L}_{n-1}\,\delta\bar{E}_{n-1}).$$

Эти преобразования справедливы благодаря свойству

$$tr\,(\bar{A}\bar{B}) = tr(\bar{B}\bar{A})$$

при любых двух матрицах $\bar{A}$ и $\bar{B}$. Теперь согласно (9.49) будем иметь

$$tr\,(\bar{L}_A\delta\bar{E}_A) = \sum_{n=1}^{N}\bar{\lambda}_n\cdot\delta\bar{b}_n, \qquad (9.50)$$

так как $\delta\bar{E}'_L = \bar{0}$.

Удобно то, что конечный вид матрицы L можно выбирать по своему усмотрению. Выбирая, например,

$$\bar{L}_A = \begin{pmatrix}\bar{I} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix},$$

мы свяжем посредством уравнения (9.50) изменения в неопределенности знания конечного положения с изменениями в программе измерений. Здесь возможны самые различные варианты, в силу чего можно выбирать разнообразные комбинации минимизируемых конечных условий.

Допуская на время, что матрица $\bar{L}_n$, обладающая необходимыми свойствами, может быть найдена, исследуем смысл выражения (9.50). Знания номинальной траектории вместе с заданной программой измерений достаточно для определения векторов $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_N$. Эти векторы, в свою очередь, определяют чувствительность конечных погрешностей к небольшим изменениям в геометрии измерений. Например, если первоначальная программа предусматривает измерение, связывающее звезду и ориентир на поверхности планеты в момент t_n, можно исследовать, как повлияет использование другого, близко расположенного ориентира или другой звезды, или, наконец, того и другого одновременно. Единственное ограничение свободы выбора состоит в том, что эти изменения должны быть настолько малыми, чтобы линеаризация, применявшаяся при выводе выражения для $tr(\bar{\bar{L}}_A \delta \bar{E}_A)$, оставалась справедливой. После выполнения малого изменения наблюдений в моменты $t_1, t_2, \ldots, t_N$, получим новую программу. Далее можно вновь вычислить векторы $\bar{\lambda}_n$ и повторять вес процесс столько раз, сколько это необходимо.

Рассмотрим теперь задачу нахождения соответствующих матриц $\bar{L}_n$. Умножая уравнение (9.48) слева на $\bar{L}_n$, вычисляя след и используя его коммутативное свойство, получим

$$\begin{aligned} tr(\bar{L}_n \delta \bar{E}_n) = {} & tr[(\bar{L}_n + a_n^{-2} \bar{b}_n \bar{b}_n^T \bar{E}'_n \bar{L}_n \bar{E}'_n \bar{b}_n \bar{b}_n^T - \\ & - a_n^{-1} \bar{b}_n \bar{b}_n^T \bar{E}'_n \bar{L}_n - a_n^{-1} \bar{L}_n \bar{E}'_n \bar{b}_n \bar{b}_n^T) \delta \bar{E}'_n] + \\ & + tr[(a_n^{-2} \bar{E}'_n \bar{b}_n \bar{b}_n^T \bar{E}'_n \bar{L}_n \bar{E}'_n \bar{b}_n - a_n^{-1} \bar{E}'_n \bar{L}_n \bar{E}'_n \bar{b}_n + \\ & + a_n^{-2} \bar{E}'_n \bar{b}_n \bar{b}_n^T \bar{E}'_n \bar{L}_n^T \bar{E}'_n \bar{b}_n - a_n^{-1} \bar{E}'_n \bar{L}_n^T \bar{E}'_n \bar{b}_n) \delta \bar{b}_n^T]. \end{aligned}$$

Вычтем из этого уравнения $tr(\bar{L}'_n \delta \bar{E}'_n)$ и потребуем затем, чтобы коэффициент при $\delta \bar{E}'_n$ тождественно равнялся нулю. Таким образом, придем к следующей рекуррентной формуле относительно $\bar{L}_n$:

$$\bar{L}'_n = \bar{L}_n - \bar{Q}_n \bar{L}_n - \bar{L}_n \bar{Q}_n^T + \bar{Q}_n \bar{L}_n \bar{Q}_n^T, \qquad (9.51)$$

где

$$\bar{Q}_n = a_n^{-1} \bar{b}_n \bar{b}_n^T \bar{E}'_n.$$

Формула (9.51) дает возможность нахождения $\bar{L}_{n-1}$, если известна $\bar{L}_n$; таким образом, вычисление должно начинаться в конечной точке и продолжаться назад, к начальной точке. Используя первое из уравнений (9.49), будем иметь

$$\bar{L}_{n-1} = \bar{\Phi}_{n,n-1}^T (\bar{L}_n - \bar{Q}_n \bar{L} - \bar{L}_n \bar{Q}_n^T + \bar{Q}_n \bar{L}_n \bar{Q}_n^T) \bar{\Phi}_{n,n-1}, \qquad (9.52)$$

причем подразумевается, что выбрана соответствующая начальная матрица $\bar{L}_A$.

Из уравнения (9.52) очевидно, что $\bar{L}$ — симметрическая матрица, и поэтому векторные коэффициенты чувствительности $\bar{\lambda}_n$ могут быть определены с помощью выражения

$$\bar{\lambda}_n^T = 2a_n^{-1}(a_n^{-1}\bar{E}_n'\bar{b}_n\bar{b}_n^T - \bar{I})\,\bar{E}_n'\bar{L}_n\,\bar{E}_n'\bar{b}_n. \tag{9.53}$$

9.8. Оптимальная линейная оценка при коррелированных ошибках измерений

Когда учитывается взаимная корреляция ошибок измерений, удобно использовать дополненный вектор отклонений, состоящий из семи компонентов и определенный следующим образом:

$$\delta\bar{x}_n = \begin{pmatrix} \delta\bar{r}_n \\ \delta\bar{v}_n \\ \alpha_n \end{pmatrix}. \tag{9.54}$$

Так как в данном случае ошибка измерения в момент t_n может быть предсказана на основе предыдущих наблюдений, можно записать наилучшую оценку ошибки, ожидаемой при измерении q_n в виде

$$\hat{\alpha}_n = \alpha_n + \beta_n. \tag{9.55}$$

Член β_n представляет собой ошибку в оценке ошибки измерения. Вектор ошибок $\bar{e}_n$ будет, конечно, также семимерным:

$$\bar{e}_n = \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_n \\ \bar{\delta}_n \\ \beta_n \end{pmatrix}. \tag{9.56}$$

Соответствующая ему корреляционная матрица выглядит таким образом:

$$\bar{E}_n = \begin{pmatrix} \overline{\bar{\varepsilon}_n\bar{\varepsilon}_n^T} & \overline{\bar{\varepsilon}_n\bar{\delta}_n^T} & \overline{\bar{\varepsilon}_n\beta_n} \\ \overline{\bar{\delta}_n\bar{\varepsilon}_n^T} & \overline{\bar{\delta}_n\bar{\delta}_n^T} & \overline{\bar{\delta}_n\beta_n} \\ \overline{\beta_n\bar{\varepsilon}_n^T} & \overline{\beta_n\bar{\delta}_n^T} & \overline{\beta_n^2} \end{pmatrix}. \tag{9.57}$$

С иллюстративными целями рассмотрим следующую модель коррелированных ошибок измерений. Пусть ошибка в момент t_n состоит из двух частей:

$$\alpha_n = \alpha_{n-1}\exp\left[-\lambda(t_n - t_{n-1})\right] + \zeta_n, \tag{9.58}$$

где α_{n-1} и ζ_n — независимые случайные числа, λ — положительная постоянная, а математическое ожидание ζ_n равно нулю. Для того чтобы связать эту модель с физической ситуацией, можно предположить, что такие явления, как температура, вызывают случайный сдвиг при тарировке устройства для измерения углов. Этот сдвиг приводит к ошибке, которая накладывается на случайную ошибку реального наблюдения, вызываемую неточным определением горизонта или другими источниками измерительных погрешностей. Составляющая ухода в момент t_n есть $\alpha_{n-1}\exp[-\lambda(t_n-t_{n-1})]$, а составляющая самого наблюдения равна ζ_n, так что суммарная ошибка α_n выражается формулой (9.58).

Для того чтобы придать физический смысл параметру модели λ, рассмотрим частный случай, когда $\overline{\zeta_n^2}=\overline{\zeta^2}$ и $t_n-t_{n-1}=\Delta t$, причем обе величины — постоянные. Тогда, возводя в квадрат и осредняя (9.58), будем иметь

$$\overline{\alpha_n^2}=\overline{\alpha_{n-1}^2}e^{-2\lambda\Delta t}+\overline{\zeta^2}.$$

Таким образом, мы получили разностное уравнение, решение которого, как нетрудно показать, имеет вид *

$$\overline{\alpha_n^2}=\frac{\overline{\zeta^2}\,e^{-2\lambda\Delta t}}{1-e^{-2\lambda\Delta t}}+\overline{\zeta^2}.$$

В настоящем примере средний квадрат составляющей ошибки за счет ухода постоянен. Если средние квадраты случайной ошибки измерения и установившегося ухода измерительного устройства можно определить путем эксперимента, то параметр λ для этой модели будет нетрудно вычислить.

Переходную матрицу для преобразований семимерного вектора отклонений получим, дополняя обыковенную переходную матрицу $\overline{\Phi}_{n+1,n}$. Так как одной из фазовых переменных является α_n, то из уравнения модели (9.58) следует

$$\delta\overline{x}_n=\overline{P}_{n,n-1}\delta\overline{x}_{n-1}+\overline{\zeta}_n, \tag{9.59}$$

где $\overline{\zeta_n}$ — семимерный вектор, все составляющие которого равны нулю, за исключением последней, представляющей собой случайную ошибку измерения ζ_n. Дополненная переходная матрица имеет вид

$$\overline{P}_{n,n-1}=\begin{pmatrix}\overline{\Phi}_{n,n-1} & 0\\ 0\cdots 0 & \exp\left[-\lambda(t_n-t_{n-1})\right]\end{pmatrix}. \tag{9.60}$$

Далее, поскольку $\hat{\zeta}_n=0$, то наилучшая оценка вектора отклонений экстраполируется следующим образом:

$$\delta\hat{\overline{x}}_n'=\overline{P}_{n,n-1}\delta\hat{\overline{x}}_{n-1}.$$

* Это решение разностного уравнения справедливо только в том случае, если вначале предположить, что $\overline{a_n^2}$ не зависит от n (прим. ред.).

Сравнивая это соотношение с (9.59), можно видеть, что вектор ошибок изменяется в соответствии с выражением

$$\bar{e}'_n = \bar{P}_{n,n-1}\bar{e}_{n-1} - \bar{\zeta}_n.$$

Следовательно, дополненная экстраполированная корреляционная матрица будет вычисляться по формуле

$$\bar{E}'_n = \bar{P}_{n,n-1}\bar{E}_{n-1}\,\bar{P}^T_{n,n-1} + \overline{\bar{\zeta}_n\bar{\zeta}^T_n}. \tag{9.61}$$

Когда ошибки измерений коррелированы между собой, вывод оптимальной линейной оценки вектора отклонений лишь ненамного отличается от случая отсутствия корреляции. Линейная оценка семимерного вектора отклонений $\delta\bar{x}_n$ в момент t_n также представляет собой линейную комбинацию экстраполированной оценки $\delta\bar{x}_{n-1}$ и разности между наблюдаемыми и оцениваемыми отклонениями в измеряемой величине q_n. Однако оценка отклонения q_n должна теперь включать оценку ошибки наблюдения. Итак, будем иметь формулу

$$\delta\hat{\bar{x}}_n = \delta\hat{\bar{x}}'_n + \bar{w}_n[\delta\tilde{q}_n - (\delta\hat{q}'_n + \hat{\alpha}'_n)],$$

где весовой вектор $\bar{w}_n$ в данном случае семимерный.

Формула оценки может быть приведена к несколько более удобному виду путем соответствующего дополнения вектора $\bar{b}_n$. Таким образом, если определить

$$\bar{b}_n = \begin{pmatrix} \bar{h}_n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{9.62}$$

то в результате получим

$$\delta\hat{\bar{x}}_n = \delta\hat{\bar{x}}'_n + \bar{w}_n(\delta\tilde{q}_n - \bar{b}^T_n\delta\hat{\bar{x}}'_n). \tag{9.63}$$

Далее, измеренную величину $\delta\tilde{q}_n$ можно выразить в виде

$$\delta\tilde{q}_n = \delta q_n + \alpha_n = \bar{b}^T_n\delta\bar{x}_n.$$

Следовательно, ошибка оценки равна просто

$$\bar{e}_n = \delta\hat{\bar{x}}_n - \delta\bar{x}_n = (\bar{I} - \bar{w}_n\bar{b}^T_n)\,\bar{e}'_n,$$

а корреляционная матрица выражается как функция весового вектора $\bar{w}_n$:

$$\bar{E}_n(\bar{w}_n) = (\bar{I} - \bar{w}_n\,\bar{b}^T_n)\,\bar{E}'_n\,(\bar{I} - \bar{b}_n\bar{w}^T_n).$$

Снова требуя равенства нулю $\overline{\delta e^2(\overline{w}_n)}$ для любых вариаций $\delta\overline{w}_n$, нетрудно показать, что

$$a_n\overline{w}_n=\overline{E}'_n\overline{b}_n, \tag{9.64}$$

где

$$a_n=\overline{b}^T_n\overline{E}'_n\overline{b}_n. \tag{9.65}$$

При выбранном оптимальном весовом векторе рекуррентное выражение для матрицы $\overline{E}_n$ принимает вид

$$\overline{E}_n=\overline{E}'_n-a_n^{-1}\overline{E}'_n\overline{b}_n\overline{b}^T_n\overline{E}'_n. \tag{9.66}$$

Итак, оптимальная линейная оценка найдена, а формулы (9.63) и (9.66) служат парой рекуррентных соотношений для расчета шаг за шагом оценки $\delta\hat{\overline{x}}_n$.

9.9. Анализ влияния параметров ошибок на точность навигации

Результаты статистического анализа точности навигации несомненно будут весьма сильно зависеть от некоторых величин, чьи среднеквадратичные значения не всегда точно известны. Предположим, например, что заданная величина среднего квадрата ошибки измерения составляет $\overline{\alpha_n^{*2}}$, хотя на самом деле она равна $\overline{\alpha_n^2}$. Если измерения коррелированы, то полученная величина λ^* параметра взаимной корреляции будет намного отличаться от действительной. В этом разделе предлагается метод исследования влияния неточного задания параметров ошибок на точность оценки.

Влияние неточного задания дисперсии измерений

Предположим, что отклонение $\delta\tilde{q}_n$, измеренное на борту космического корабля в момент t_n, состоит из трех частей:

$$\delta\tilde{q}_n=\delta q_n+\alpha_n+\gamma, \tag{9.67}$$

где α_n — случайная переменная с нулевым математическим ожиданием, не зависящая статистически от ошибок предыдущих измерений, а γ — постоянное, но случайное смещение с ненулевым математическим ожиданием, статистически не зависящее от α_n. Предположим далее, что в бортовом вычислительном устройстве космического корабля производится процесс оценки, при котором полная ошибка измерения считается равной α_n^* — случайной переменной с нулевым математическим ожиданием, не коррелированной с ошибками других измерений. Тогда получаемая на борту оценка будет соответствовать следующим уравнениям:

$$\delta\hat{\overline{x}}^*_n=\delta\hat{\overline{x}}^{*\prime}_n+\overline{w}^*_n(\delta\tilde{q}_n-\delta\hat{q}^{*\prime}_n), \tag{9.68}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \overline{w}_n^* &= a_n^{*-1} \overline{E}_n^{*\prime} \overline{b}_n, \\ a_n^* &= \overline{b}_n^T \overline{E}_n^{*\prime} \overline{b}_n + \overline{\alpha_n^{*2}}, \\ \overline{E}_n^* &= \overline{E}_n^{*\prime} - a_n^{*-1} \overline{E}_n^{*\prime} \overline{b}_n \overline{b}_n^T \overline{E}_n^{*\prime}. \end{aligned}\right\} \tag{9.69}$$

Матрица $\overline{E}_n^*$ не соответствует корреляции реальных ошибок оценки, поскольку при ее вычислении использовалась неправильная величина $\overline{\alpha_n^2}$. На самом деле реальные ошибки оценки будут равны

$$\overline{e}_n^{**} = \delta\hat{\overline{x}}_n^* - \delta\overline{x}_n,$$

и наша задача состоит в отыскании рекуррентного соотношения для корреляционной матрицы

$$\overline{E}_n^{**} = \overline{\overline{e}_n^{**} \overline{e}_n^{**T}}.$$

Выразим реальную ошибку оценки через основные величины

$$\overline{e}_n^{**} = \delta\hat{\overline{x}}_n^{*\prime} + \overline{w}_n^* (\overline{b}_n^T \delta\overline{x}_n + \alpha_n + \gamma - \overline{b}_n^T \delta\hat{\overline{x}}_n^{*\prime}) - \delta\overline{x}_n =$$

$$= (\overline{I} - \overline{w}_n^* \overline{b}_n^T) \overline{e}_n^{**\prime} + \overline{w}_n^* (\alpha_n + \gamma),$$

откуда

$$\overline{E}_n^{**} = (\overline{I} - \overline{w}_n^* \overline{b}_n^T) \overline{E}_n^{**\prime} (\overline{I} - \overline{b}_n \overline{w}_n^{*T}) +$$

$$+ \overline{w}_n^* \overline{\Phi}_n^{\prime T} (\overline{I} - \overline{b}_n \overline{w}_n^{*T}) + (\overline{I} - \overline{w}_n^* \overline{b}_n^T) \overline{\Phi}_n^{\prime} \overline{w}_n^{*T} +$$

$$+ \overline{w}_n^* \overline{w}_n^{*T} (\overline{\alpha_n^2} + \overline{\gamma^2}), \tag{9.70}$$

где

$$\overline{\Phi}_n = \overline{\gamma \overline{e}_n^{**\prime}}.$$

Рекуррентную формулу для вектора $\overline{\Phi}_n$ получим, умножив $\overline{e}_n^{**}$ на γ и затем произведя сравнение:

$$\overline{\Phi}_n = (\overline{I} - \overline{w}_n^* \overline{b}_n^T) \overline{\Phi}_n^{\prime} + \overline{w}_n^* \overline{\gamma^2}. \tag{9.71}$$

Статистический анализ далее производим, как и раньше, выполняя рекуррентные вычисления по уравнениям (9.69) с учетом уравнений (9.70) и (9.71). Начальные условия для $\overline{E}_n^{**}$ и $\overline{\Phi}_n$:

$$\overline{E}_L^{**} = \overline{\delta\overline{x}_L \delta\overline{x}_L^T} = \overline{X}_L,$$

$$\overline{\Phi}_L = 0.$$

Затем получаем средние квадраты истинных ошибок оценки в любой момент как элементы главной диагонали матрицы $\overline{E}_n^{**}$.

Влияние неточных параметров модели взаимной корреляции ошибок

Аналогичный метод можно применить для анализа влияния неправильного задания параметров λ и $\overline{\zeta_n^2}$ при наличии взаимной корреляции между ошибками измерений. В частном случае при $\lambda^*=\infty$ метод, который будет изложен ниже, можно применять непосредственно для определения окончательных ошибок оценки, если предположить, что ошибки измерений не коррелированы, когда на самом деле некоторая корреляция существует.

Метод анализа во многом подобен методу предыдущего подраздела при одном важном исключении. Принятая переходная матрица $\overline{P}^*_{n,n-1}$ отличается от истинной переходной матрицы $\overline{P}_{n,n-1}$ элементом в правом углу за счет неправильно задаваемого закона изменения ошибок измерений:

$$\alpha_n^{*'}=\alpha_{n-1}^*\exp[-\lambda^*(t_n-t_{n-1})].$$

Учитывая это, преобразуем истинную ошибку оценки следующим путем:

$$\begin{aligned}\overline{e}_n^{**}&=\delta\hat{\overline{x}}_n^*-\delta\overline{x}_n=\overline{P}^*_{n,n-1}\delta\hat{\overline{x}}^*_{n-1}+\overline{w}_n^*(\overline{b}_n^T\delta\overline{x}_n-\overline{b}_n^T\overline{P}^*_{n,n-1}\delta\hat{\overline{x}}^*_{n-1})-\\&-\delta\overline{x}_n=(\overline{I}-\overline{w}_n^*\overline{b}_n^T)[\overline{P}^*_{n,n-1}\delta\hat{\overline{x}}^*_{n-1}-(\overline{P}^*_{n,n-1}\delta\overline{x}_{n-1}+\overline{\zeta}_n)]=\\&=(\overline{I}-\overline{w}_n^*\overline{b}_n^T)\overline{P}^*_{n,n-1}\overline{e}_{n-1}^{**}+(\overline{I}-\overline{w}_n^*\overline{b}_n^T)[(\overline{P}^*_{n,n-1}-\\&-\overline{P}_{n,n-1})\delta\overline{x}_{n-1}-\overline{\zeta}_n]=\\&=\overline{A}_{n,n-1}\overline{e}_{n-1}^{**}+\overline{B}_{n,n-1}\delta\overline{x}_{n-1}-\overline{D}_n\overline{\zeta}_n.\end{aligned}$$

Здесь для компактности записи введены обозначения:

$$\begin{aligned}&\overline{D}_n=(\overline{I}-\overline{w}_n^*\overline{b}_n^T),\\&\overline{A}_{n,n-1}=\overline{D}_n\overline{P}^*_{n,n-1},\\&\overline{B}_{n,n-1}=\overline{D}_n(\overline{P}^*_{n,n-1}-\overline{P}_{n,n-1}).\end{aligned}$$

Удобно объединить $\overline{e}_n^{**}$ с $\delta\overline{x}_n$ и определить 14-мерный вектор $\overline{y}_n$ следующим образом:

$$\overline{y}_n=\begin{pmatrix}\overline{e}_n^{**}\\ \delta\overline{x}_n\end{pmatrix}=\overline{S}_{n,n-1}\overline{y}_{n-1}+\overline{S}_n\overline{\zeta}_n, \tag{9.72}$$

где

$$\overline{S}_{n,n-1}=\begin{pmatrix}\overline{A}_{n,n-1} & \overline{B}_{n,n-1}\\ \overline{0} & \overline{P}_{n,n-1}\end{pmatrix}$$

и

$$\bar{S}_n = \begin{pmatrix} -\bar{D}_n \\ \bar{I} \end{pmatrix}$$

— прямоугольная матрица из 14 строк и семи столбцов. Следовательно, 14-мерная корреляционная матрица $\bar{Y}_n$ вектора $\bar{y}_n$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\bar{Y}_n = \bar{S}_{n,n-1} \bar{Y}_{n-1} \bar{S}^T_{n,n-1} + \bar{S}_n \overline{\bar{\zeta}_n \bar{\zeta}^T_n}\, \bar{S}^T_n. \tag{9.73}$$

Разбивая $\bar{Y}_n$ на семимерные блоки, получим в левом верхнем углу искомую корреляционную матрицу действительных ошибок оценки. Далее статистический анализ производится, как и прежде, если добавить рекуррентную формулу для $\bar{Y}_n$ к полученным ранее уравнениям, необходимым для численного моделирования.

Задачи

9. 1. Показать, что определитель симплектической матрицы равен ± 1, и использовать это положение для дедуктивного доказательства равенства

$$|\bar{\Phi}_{n+1,n}| = 1.$$

Показать далее, что определитель корреляционной матрицы ошибок оценки в интервале между измерениями остается постоянным.

9. 2. Матрица $\bar{A}$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\bar{A}}{dt} = \bar{B}(t)\bar{A}.$$

Показать, что ее определитель удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d|\bar{A}|}{dt} = tr(\bar{B})\,|\bar{A}|$$

и использовать этот результат для другого доказательства равенства определителя переходной матрицы единице.

9. 3. Дана шестимерная матрица

$$\bar{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} \bar{R}(t) & \bar{R}^*(t) \\ \bar{V}(t) & \bar{V}^*(t) \end{pmatrix}.$$

Учитывая определение $\bar{F}(t)$, приведенное в разд. 9. 1, вывести уравнения

$$\frac{d\bar{\Phi}(t)}{dt} = \bar{F}(t)\bar{\Phi}(t), \quad \frac{d\bar{\Phi}(t)^{-1}}{dt} = -\bar{\Phi}(t)^{-1}\bar{F}(t)$$

и показать, что равенство

$$\overline{\Phi}(t_{n+1}, t_n) = \overline{\Phi}(t_{n+1})\,\overline{\Phi}(t_n)^{-1}$$

выполняется независимо от начальных условий для $\overline{\Phi}(t)$.

9.4. Исходя из уравнений

$$\frac{d^2\overline{R}}{dt^2} = \overline{G}\overline{R}, \quad \frac{d^2\overline{R}^*}{dt^2} = \overline{G}\overline{R}^*$$

доказать справедливость следующего уравнения:

$$\overline{R}^{*T}\frac{d^2\overline{R}}{dt^2} - \frac{d^2\overline{R}^{*T}}{dt^2}\overline{R} = \overline{0}.$$

Затем, интегрируя его по частям, вывести соотношение

$$\overline{R}^*(t)^T\overline{\Lambda}(t) = -\overline{\Lambda}^*(t)^T\overline{R}(t) = \text{const}.$$

Наконец, используя этот результат, показать, что

$$\overline{R}^*(t_L)^T = -\overline{R}(t_A).$$

9.5. В разд. 9.2 было показано, что оптимальная линейная оценка вектора отклонений $\delta\overline{x}$ имеет вид

$$\delta\hat{\overline{x}}_n = \delta\hat{\overline{x}}_n' + \overline{W}_n(\delta\tilde{\overline{r}}_n - \overline{K}^T\delta\hat{\overline{x}}_n'),$$

когда основным источником информации в момент t_n является засечка положения. Найти

$$\delta\tilde{\overline{r}}_n = \delta\overline{r}_n + \overline{\varepsilon}_n,$$

$$\tilde{\overline{E}}_n = \overline{\overline{\varepsilon}_n\overline{\varepsilon}_n^T},$$

$$\overline{e}_n = \delta\hat{\overline{x}}_n - \delta\overline{x},$$

$$\overline{E}_n = \overline{\overline{e}_n\overline{e}_n^T} = \begin{pmatrix} \overline{E}_n^{(1)} & \overline{E}_n^{(2)} \\ \overline{E}_n^{(3)} & \overline{E}_n^{(4)} \end{pmatrix}$$

и показать, что оптимальная весовая матрица $\overline{W}_n$ получается с помощью выражения

$$\overline{W}_n^T = (\overline{E}_n^{(1)'} + \tilde{\overline{E}}_n)^{-1}\quad(\overline{E}_n^{(1)'}\ \overline{E}_n^{(2)'}).$$

Показать далее, что $\overline{E}_n$ удовлетворяет следующему рекуррентному уравнению:

$$\overline{E}_n = \overline{E}_n' - \overline{E}_n'\overline{K}\,(\overline{E}_n^{(1)'} + \tilde{\overline{E}}_n)^{-1}\overline{K}^T\,\overline{E}_n'.$$

9.6. Процесс оптимальной линейной оценки, разработанный в разд. 9.3, очевидно, не зависит от размерности задачи. Рассмотрим для простоты двумерный вектор отклонений и переходную матрицу, равную единичной. Два абсолютно точных измерения выполняются в моменты t_1 и t_2 и соответствующие векторы $\bar{b}$ имеют вид

$$\bar{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \bar{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Непосредственными преобразованиями показать, что корреляционная матрица $\bar{E}_2$ в момент t_2 будет тождественно равна нулевой матрице, независимо от начальной матрицы $\bar{E}_L$. То же будет справедливо при любой размерности, просто выкладки несколько усложнятся.

9. 7. Показать, что в промежутке между измерениями вектор ошибок $\bar{e}(t)$ изменяется в соответствии с уравнением

$$\frac{d\bar{e}(t)}{dt} = \bar{F}(t)\bar{e}(t),$$

и использовать этот результат для вывода уравнения

$$\frac{d\bar{E}(t)}{dt} = \bar{F}(t)\bar{E}(t) + \bar{E}(t)\bar{F}(t)^T.$$

9. 8. Показать, что если основным источником информации является скорость изменения дальности, измеряемая наземной радиолокационной установкой, то шестимерный вектор $\bar{b}$ должен иметь следующий вид:

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} \bar{r} \times (\bar{v} \times \bar{r})/r^3 \\ \bar{r}/r \end{pmatrix}.$$

9. 9. Показать, что изменение конечных погрешностей благодаря вариации дисперсии ошибок измерений $\overline{\alpha_n^2}$ определяется выражением

$$tr(\bar{L}_A \delta \bar{E}_A) = \sum_{n=1}^{N} \mu_n \overline{\delta\alpha_n^2},$$

где

$$\mu_n = a_n^{-2} \bar{b}_n^T \bar{E}'_n \bar{L}_n \bar{E}'_n \bar{b}_n,$$

а вид матрицы $\bar{L}_n$ можно найти в разд. 9.7.

9. 10. Пусть требуется оптимизировать программу навигационных измерений таким образом, чтобы минимизировалась неопределенность знания коррекции скорости, которую надо приложить в момент t_c. Показать, что матрица $\bar{L}$ в этот момент должна иметь вид

$$\bar{L}_c = \begin{pmatrix} \bar{C}_c^{*2} & -\bar{C}_c^* \\ -\bar{C}_c^* & \bar{I} \end{pmatrix}.$$

9.11. Из-за погрешностей вычислений может оказаться, что после многократных расчетов корреляционная матрица $\bar{E}_n$ перестанет быть положительно определенной. Для разрешения этой проблемы можно разработать другую схему вычислений, в которой корреляционная матрица будет представлена как произведение некоторой матрицы на транспонированную по отношению к ней же. В результате будет гарантироваться, по крайней мере, полуопределенность.

а) Полагая, что матрица $\bar{W}_n$ представляет собой корень квадратный из корреляционной матрицы $\bar{E}_n$, т. е.

$$\bar{E}_n = \bar{W}_n \bar{W}_n^T,$$

показать, что формула оценки фазового вектора из разд. 9.3 может быть переписана следующим образом:

$$\delta\hat{\bar{x}}_n = \delta\hat{\bar{x}}'_n + a_n^{-1}(\delta\tilde{q}_n - \delta\tilde{q}'_n)\bar{W}'_n\bar{z}_n,$$

где

$$\bar{W}'_n = \bar{\Phi}_{n,n-1}\bar{W}_{n-1},$$

$$\bar{z}_n = \bar{W}'^T_n \bar{b}_n,$$

$$a_n = \bar{z}_n^T \bar{z}_n + \overline{\alpha_n^2}.$$

б) Показать, что рекуррентная формула (9.28) для корреляционной матрицы принимает в этом случае вид

$$\bar{W}_n \bar{W}_n^T = \bar{W}'_n(\bar{I} - a_n^{-1}\bar{z}_n\bar{z}_n^T)\bar{W}'^T_n.$$

в) Показать, что

$$(\bar{I} - a_n^{-1}\bar{z}_n\bar{z}_n^T) = \left(\bar{I} - \frac{\bar{z}_n\bar{z}_n^T}{a_n(1+c_n)}\right)\left(\bar{I} - \frac{\bar{z}_n\bar{z}_n^T}{a_n(1+c_n)}\right)^T,$$

где

$$c_n = \sqrt{\frac{\overline{\alpha_n^2}}{\bar{z}_n^T\bar{z}_n + \overline{\alpha_n^2}}}$$

и вывести из этого соотношения рекуррентную формулу для матрицы $\bar{W}_n$ в виде

$$\bar{W}_n = \bar{W}'_n\left(\bar{I} - \frac{\bar{z}_n\bar{z}_n^T}{a_n(1+c_n)}\right).$$

Библиография

Оригинальное применение теории Калмана [31] к задачам космической навигации нашел Шмидт [43] и его сотрудники в Эймсском научно-исследовательском центре. Автор крайне признателен д-ру С. Шмидту, который в свое время указал ему на блестящую работу д-ра Р. Калмана, а также Дж. Смиту за участие в плодотворных дискуссиях по этому вопросу. Читателю стоит познакомиться с отличным отчетом Смита, Шмидта и Макги [58]. Исследование, описанное в настоящей главе, было выполнено, когда автор еще не знал о подробностях работы, проводимой в Эймсе, в результате чего появилось несколько новых и интересных идей.

Материал разд. 9. 1, посвященный переходным матрицам, основан главным образом на статье автора [9]. На принадлежность переходных матриц к классу симплектических указал автору д-р Дж. Поттер. За подробностями читателя можно отослать к работам Зигеля [55] и Уинтнера [64]. Правда, Уинтнер не употребляет термин «симплектическая матрица».

Разд. 9. 2, где связываются воедино вопросы, разбираемые в гл. VIII и IX, обязан своим появлением дипломной работе Скотта, Янушки и Уайлса [53]. Разд. 9. 3—9. 6 взяты из статьи [9]. Автор хотел бы поблагодарить Р. Шольтена и П. Филлио из Приборной Лаборатории МТИ за подготовку численных данных для разд. 9. 5, потребовавшую большого труда. Остальные численные результаты получили Кинен и Регенхардт в ходе написания дипломной работы в МТИ [32]. Они исследовали возможность использования затмения звезд в качестве источника навигационной информации и нашли, что конечные ошибки при этом уменьшаются в 2—3 раза.

Изящный метод оптимизации программы измерений, изложенный в разд. 9. 7, принадлежит У. Дэнхему из Рэйтеон Компани. Однако первоначальный вариант метода Дэнхема был пересмотрен из-за наличия двух ошибок в анализе. Такой подход к решению задачи представляет собой пример так называемого метода наискорейшего спуска, столь успешно применяемого д-ром А. Брайсоном из Гарвардского университета и его коллегами в Рэйтеон. Одно из первых применений этого метода к задаче оптимизации систем управления читатель может найти в работе Лэнинга и Бэттина [35].

Распространение оптимальной линейной оценки на случай коррелированных ошибок измерений было опубликовано в статье автора [9]. Автор благодарен Дж. Смиту из Эймса и д-ру Р. Ситтлеру из Аркона, исправившим серьезную ошибку в первоначальной трактовке задачи со взаимно коррелированными ошибками.

Метод анализа влияния параметров ошибок, описанный в разд. 9. 9, взят из отчета Аркона [1], который был написан по субконтракту с Приборной лабораторией.

Метод исключения вычислительных трудностей при расчете корреляционной матрицы (задача 9. 11) предложил д-р Дж. Поттер.

ГЛАВА X

Теория наведения летательного аппарата для исследования Луны с непрерывно работающим двигателем малой тяги*

В настоящей главе рассматриваются задачи определения траекторий, а также вопросы управления и наведения, связанные с лунным исследовательским кораблем с непрерывно работающим двигателем малой тяги. В технической литературе встречается немало работ, посвященных оптимизации межпланетных траекторий полета аппаратов с двигателями малой тяги, где используются вариационные методы. С другой стороны, проблемам наведения фактически не уделяется никакого внимания. Что касается оптимизации траекторий, то полученные в этом направлении результаты, бесспорно, представляют академический интерес, однако, судя по всему, до сих пор не была еще решена сколько-нибудь серьезная задача с учетом более одного гравитационного поля.

Настоящий подход основывается на той предпосылке, что формирование схемы наведения и выбор наилучшей траектории являются тесно связанными задачами, которые должны решаться одновременно. Основным свойством наилучшего метода наведения должна быть его простота, в то время как наилучшая траектория характеризуется максимальной полезной нагрузкой при удовлетворительном времени перелета. Эти требования не всегда совместимы и отсюда вытекает неизбежность компромиссных решений. Любой подход, при котором оптимизируется одно условие и игнорируется другое, не может считаться реализуемым.

Методы наведения различны для разных этапов полета, перечисленных ниже: многовитковая спираль вокруг Земли на малых высотах; последние обороты вокруг Земли, предшествующие пассивному полету в район Луны; траектория приближения к Луне, состоящая из большого числа оборотов по спирали вокруг Луны с постепенным уменьшением радиуса; маневр окончательного регулирования орбиты. Здесь также представлены результаты моделирования типичных траекторий полета, которые демонстрируют возможности системы наведения, основанной на излагаемых принципах.

---

* Содержание этой главы основано на материале статьи, написанной автором совместно с д-ром Джеймсом Миллером из Приборной лаборатории МТИ. Работа представляет собой обзор докторской диссертации Дж. Миллера (*прим. автора*).

10.1. Введение

Рассматриваемая здесь частная задача наведения состоит в переводе летательного аппарата с заданной орбиты спутника Земли на заданную селеноцентрическую орбиту. Достаточно очевидны сложности, связанные с формированием осуществимой схемы наведения, которая являлась бы в принципе простой, способной противостоять возмущениям и ошибкам, и при этом не противоречила бы основным целям полета. Нами была сделана попытка обойтись без общепринятого метода опорной траектории, который лежит в основе большинства систем наведения для космических кораблей, длительное время летящих с выключенными двигателями. В нашем случае аппарат с двигателем малой тяги, если не считать возможного короткого пассивного участка, непрерывно ускоряется вследствие совместного действия гравитационных сил и тяги двигателя. Величина ускорения от тяги двигателя на несколько порядков меньше гравитационного ускорения Земли, поэтому для того, чтобы работа двигателя оказала заметное влияние на траекторию корабля, требуются значительные периоды времени. Вследствие этого возможность отклонений от расчетного режима работы двигателя и ошибок ориентации тяги делает нереальным предположение о том, что траектория полета корабля будет мало отличаться от заданной номинальной траектории.

Задача наведения, естественно, делится на отдельные части, соответствующие различным этапам полета; отдельные из них схематически показаны на рис. 10.1. Здесь они описываются вкратце и более подробно будут рассмотрены ниже. Во-первых, в течение периода раскрутки от Земли корабль должен управляться таким образом, чтобы в конце этого участка вектор скорости корабля соответствовал условиям встречи с Луной. Для большей части витков спирали скорость возрастания радиуса крайне мала, и если начальная геоцентрическая орбита круговая, то мгновенная орбита корабля будет также почти круговой. На протяжении этого этапа полета относительное расположение корабля и Луны не имеет большого значения, так как орбитальный период корабля составляет всего лишь несколько часов и весьма мал по сравнению с периодом обращения Луны, занимающим один месяц. Зато на малых высотах большую роль играет несферичность Земли, которая вызывает вращение траекторной плоскости вокруг полярной оси Земли. Противодействие этому неизбежному вращению с помощью определенного выбора направления тяги здесь не предусматривается. Задача системы наведения на первом участке, называемом *участком раскрутки,* состоит просто в обеспечении наискорейшего возрастания энергии корабля и одновременно в предотвращении больших отклонений от номинальной вращающейся плоскости движения.

Когда корабль удалится от Земли на много тысяч километров, его расположение относительно Луны будет изменяться гораздо медленнее, орбитальный период возрастет до нескольких дней и скорость изменения геоцентрического радиуса станет значительной. В это время относительное положение корабля и Луны начинает играть существенную роль, а в задачу системы наведения входит обеспечение таких начальных условий пассивного полета к Луне, которые неизбежно приведут к контакту с Луной, если пассивный участок будет продолжаться до самой Луны. Здесь последовательно используются два различных режима разворота вектора тяги.

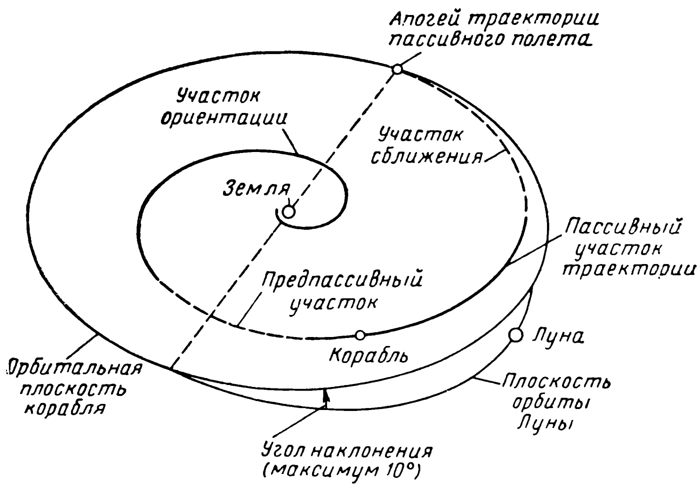


Рис. 10. 1. Этапы наведения

Участки, на которых каждый из этих режимов применяется, будем для удобства называть *участком ориентации* и *предпассивным участком.*

Когда положение и скорость корабля достигнут таких значений, что станет возможным свободный полет в окрестность Луны, двигатели выключаются для экономии топлива и начинается пассивный полет, который может продолжаться в течение нескольких дней. В это время скорость относительно Луны будет постепенно уменьшаться, однако она все же не станет настолько малой, чтобы можно было надеяться на автоматический захват корабля притяжением Луны. Поэтому за некоторое время до конца полета двигатели снова включаются и начинается наведение на *участке сближения.* В действительности принцип работы схемы ближнего наведения таков, что она может использоваться немедленно после предпассивного участка без промежуточного пассивного периода. Таким образом, если повторное включение двигателей представляет собой слишком серьезную проблему, то пассивный участок можно вообще исключить без существенных потерь топлива.

Схемы наведения для различных этапов полета описываются в следующих разделах главы. Они обсуждаются в последовательности, обратной порядку их применения, так как способность системы наведения противостоять ошибкам и возмущениям на каком-либо этапе полета определяет требования к предыдущему этапу. Предлагаемые принципы проверялись с помощью численного моделирования на цифровой вычислительной машине и полученные при этом результаты кажутся весьма обнадеживающими.

Для методов наведения данной главы предполагается знание положения и скорости космического корабля в дискретные моменты времени или в непрерывной зависимости от времени. В случае автономной системы навигации положение может определяться с помощью методов, рассмотренных в гл. VII. Информацию о скорости получить несколько труднее. Если не считать короткого пассивного участка, ускорение от тяги прикладывается непрерывно и вариации характеристик двигателей вместе с ошибками ориентации вектора тяги будут приводить к значительным отклонениям корабля от расчетной траектории. Поэтому для получения надежной информации о скорости, по-видимому, придется численно интегрировать уравнение движения в цифровом вычислительном устройстве системы наведения. Чтобы минимизировать ошибки, которые будут возникать из-за длительного интегрирования без обратной связи, можно использовать данные, получаемые в результате текущих засечек положения, что улучшит качество информации о скорости. Методы осуществления таких поправок описываются в разд. 10.7.

10.2. Наведение на участке сближения

Полет космического корабля начинается с орбиты спутника Земли и продолжается по раскручивающейся спирали с помощью тяги, приложенной, например, по касательной к траектории. Через некоторое время корабль достигнет точки, из которой может происходить его свободный полет в окрестность Луны. В этот момент двигатели выключаются и начинается пассивный полет, длящийся несколько дней. На расстоянии около 80 000 *км* от Луны двигатели вновь включаются и начинается этап сближения, целью которого является вывод корабля на заданную селеноцентрическую орбиту.

Основные принципы работы схемы ближнего наведения можно описать следующим образом: вычисляемая на борту скорость корабля относительно Луны сравнивается с запрограммированной скоростью, которая вычисляется заранее и хранится в запоминающем устройстве в виде функции дальности до Луны и величины ускорения от тяги. Разность скоростей в комбинации с номинальной программой изменения ускорения используется для определения ориентации тяги.

Судя по этому краткому описанию, можно подумать, что корабль будет все время стремиться к возвращению на номинальную траекторию полета к Луне. В том, что это не так, позволит убедиться последующее, более подробное рассмотрение.

Для получения упомянутых выше программ изменения скорости и ускорения рассмотрим спиральную орбиту движения вокруг Луны корабля, захваченного ее гравитационным полем. Будем называть ее «псевдономинальной траекторией», чтобы подчеркнуть, что это не номинальная траектория в общепринятом смысле слова. Такую псевдотраекторию получают, начиная расчет с круговой селеноцентрической орбиты заданной высоты и вычисляя полную массу корабля на основе оценки его конечной массы в момент

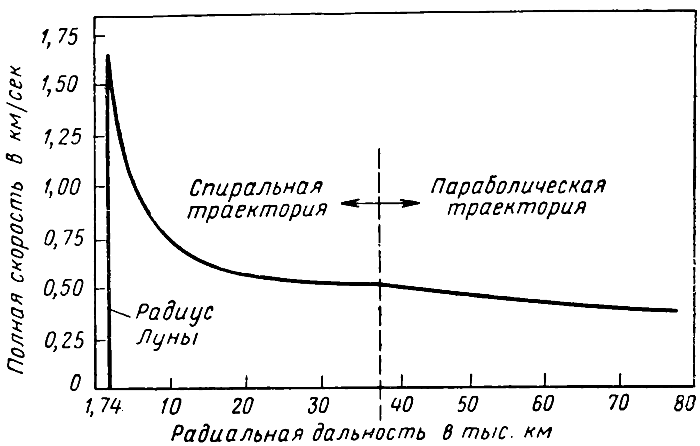


Рис. 10.2. Полная командная скорость на участке сближения с Луной

окончания полета. Для этого, считая, что тяга приложена тангенциально, а секундный расход топлива отрицателен, вычисляют в обратном порядке раскручивающуюся спиральную траекторию. В этом расчете учитывается только центральное гравитационное поле Луны, так что траектория лежит в постоянной плоскости, но ее ориентация в этой плоскости является произвольной. Вычисления продолжаются до тех пор, пока не будет достигнута вторая космическая скорость для Луны. Далее псевдотраектория рассматривается как параболическая, уходящая в бесконечность.

Благодаря круговой симметрии составляющие векторов скорости и ускорения могут считаться функциями просто дальности до Луны. Если вычисления повторяются для различных значений параметров, составляющие этих векторов становятся функциями как линейного расстояния до Луны, так и величины ускорения от тяги. Будем называть их командными векторами скорости и ускорения и обозначать через $\bar{v}_c$ и $\bar{a}_c$. Итак, для известного расстояния от Луны и известной величины тяги существуют однозначные $\bar{v}_c$

и $\bar{a}_c$, не зависящие от времени, которые могут лежать в любой заданной плоскости. Ориентация плоскости, в которой лежат эти векторы, определяется углом наклонения по отношению к плоскости орбиты Луны заданной «целевой» орбиты.

На рис. 10.2 и 10.3 показано изменение полной командной скорости и радиальной командной скорости с изменением радиального расстояния до Луны для одного частного значения конечной массы космического корабля — в рассматриваемом примере 1435 *кг*. Эти кривые были получены описанным выше способом об-

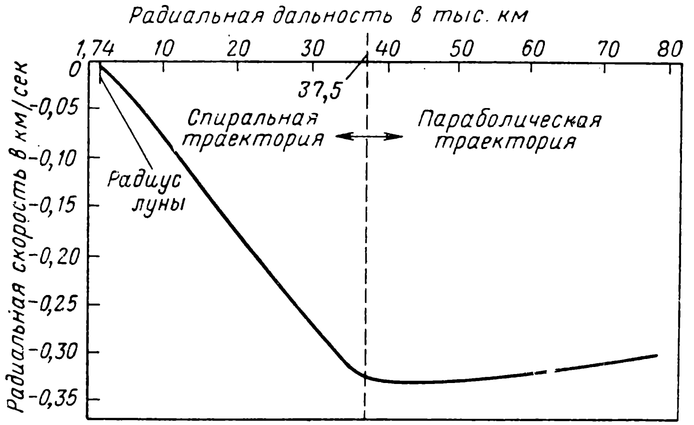


Рис. 10.3. Радиальная составляющая командной скорости на участке сближения с Луной

ратного интегрирования, которое начиналось с круговой селеноцентрической орбиты высотой 160 *км*. Тяга считалась равной 0,45 *кг* и направленной вдоль вектора скорости; удельный импульс был принят равным 1000 *сек*. Для дальнейших расчетов начиная из точки, где достигаются (при обратном движении) условия, соответствующие скорости убегания, были выбраны профили скоростей, совпадающие со скоростью параболической траектории, которая продолжается на бесконечное расстояние от Луны.

Для вывода программы ориентации тяги предположим, что в некоторый момент t реальный корабль и «псевдокорабль» одновременно расположены в одной и той же точке пространства. Полагаем далее, что псевдокорабль движется вдоль псевдотраектории и, следовательно, имеет скорость $\bar{v}_c$. При отсутствии возмущений на него действует гравитационное ускорение $\bar{g}$, а также командный вектор ускорения $\bar{a}_c$. С другой стороны, реальный корабль летит со скоростью $\bar{v}$ под действием гравитационного ускорения $\bar{g}$ и ускорения от тяги двигателей $\bar{a}_T$. За интервал времени Δt оба корабля разойдутся на расстояние, определяемое вектором

$$\Delta\bar{r} = (\bar{v} - \bar{v}_c)\,\Delta t,$$

а скорость каждого из них изменится на величину

$$\Delta\bar{v}_c = (\bar{a}_c + \bar{g})\,\Delta t \quad \text{для псевдокорабля,}$$

$$\Delta\bar{v} = (\bar{a}_T + \bar{g})\,\Delta t \quad \text{для реального корабля.}$$

Вообразим, что в конце этого интервала времени путем мгновенного перемещения псевдокорабля вновь достигнуто совпадение местонахождения кораблей, причем положение настоящего корабля не изменилось. Изменение положения псевдокорабля должно сопровождаться соответствующим изменением его скорости, если кинематические условия, наложенные на псевдокорабль, продолжают выполняться. Необходимое изменение скорости можно выразить следующей зависимостью:

$$\Delta\bar{v}_c = \bar{M}\,(\bar{v} - \bar{v}_c)\,\Delta t,$$

где элементы матрицы $\bar{M}$ представляют собой производные составляющих командной скорости $\bar{v}_c$ по компонентам вектора положения $\bar{r}$. Таким образом,

$$\bar{M} = \left\| \frac{\partial\bar{v}_c}{\partial\bar{r}} \right\|.$$

Полное изменение $\bar{v}_c$ в результате двух указанных шагов составит

$$\Delta\bar{v}_c = (\bar{a}_c + \bar{g})\,\Delta t + \bar{M}\,(\bar{v} - \bar{v}_c)\,\Delta t.$$

Разницу в параметрах движения реального корабля и псевдокорабля удобнее выражать через векторную разность

$$\bar{v}_d = \bar{v}_c - \bar{v}.$$

Тогда

$$\Delta\bar{v}_d = (\bar{a}_c - \bar{a}_T)\,\Delta t - \bar{M}\,\bar{v}_d\,\Delta t.$$

Теперь после перестановок разделим обе части уравнения на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$. В результате получим следующее уравнение для вектора ускорения от тяги двигателей космического корабля:

$$\bar{a}_T = \bar{a}_c - \frac{d\bar{v}_d}{dt} - \bar{M}\bar{v}_d. \qquad (10.1)$$

Уравнение (10. 1) можно использовать как основное для множества различных программ наведения корабля. Например, можно так направлять ускорение от тяги, чтобы скорость изменения вектора $\bar{v}_d$ была пропорциональна самому вектору $\bar{v}_d$, т. е.

$$\frac{d\bar{v}_d}{dt} = -\frac{\bar{v}_d}{T_c},$$

где T_c — фиксированная постоянная времени.

Тогда уравнение наведения примет вид

$$\bar{a}_T=\bar{a}_c+\frac{\bar{v}_d}{T_c}-\overline{M}\bar{v}_d. \qquad (10.2)$$

Важно отметить, что все величины в правой части уравнения (10. 2) зависят только от положения, скорости и ускорения от тяги реального корабля. Если они известны, то вектор $\bar{a}_T$ определен как по величине, так и по направлению. В рассматриваемых приложениях ускорение от тяги не может быть полностью произвольным. Резонно предположить, что, хотя направление $\bar{a}_T$ может быть установлено каким угодно, его величина определенным образом ограничена характеристиками двигателя и соображениями, связанными с к. п. д. Тогда можно потребовать, чтобы управление производилось только через направление $\bar{a}_T$, а величина тяги оставалась постоянной.

Уравнение (10. 2) не может быть удовлетворено в общем случае при наличии каких угодно ограничений на величину ускорения $\bar{a}_T$, Однако возможен целый ряд схем наведения, совместимых с ограниченной тягой. Например, можно использовать уравнение (10. 2) для определения направления ускорения $\bar{a}_T$, а его величину оставить неуправляемой. Поскольку векторы $\bar{a}_c$ и $\bar{v}_c$, а также матрица $\overline{M}$ являются функциями не только положения корабля, но и модуля тяги, влияние ограничения, налагаемого на достижимое ускорение, косвенно и частично учитывается.

Будем сначала использовать наиболее простое уравнение наведения, имея в виду, что при необходимости его можно усовершенствовать. Поскольку уравнение (10. 2) при произвольных условиях не может точно удовлетворяться, по-видимому, нецелесообразно точно вычислять его правую часть. Поэтому, собираясь упростить уравнение наведения, исследуем в достаточной степени приближенным способом порядки величин членов уравнения (10. 2).

На больших дальностях от Луны поле скоростей $\bar{v}_c$ является вполне локально однородным, вследствие чего элементы матрицы $\overline{M}$ малы. Далее, на таких расстояниях псевдотраектория представляет собой параболу, командный вектор ускорения $\bar{a}_c$, следовательно, равен нулю, а командный вектор скорости $\bar{v}_c$ мал. Интуитивно можно предположить, что наиболее подходящей программой наведения на больших дальностях будет такая программа, которая направляет вектор тяги противоположно скорости корабля относительно Луны. Уравнение (10. 2) должно обеспечивать наведение такого типа. Пренебрегая малыми членами, приближенно запишем

$$\bar{a}_T=-\frac{\bar{v}}{T_c}.$$

Теперь, если модуль $\bar{v}_d$ может достаточно уменьшиться, прежде чем элементы матрицы $\overline{M}$ приобретут ощутимые значения, резонно предположить, что выражение

$$\overline{a}_T = \overline{a}_c + \frac{\overline{v}_d}{T_c} \tag{10.3}$$

будет отвечать требованиям, предъявляемым к уравнению ориентации тяги для всего участка сближения.

Работа такой схемы наведения на участке сближения иллюстрируется рис. 10.4. В произвольный момент времени t вектор положения корабля относительно Луны есть $\overline{r}$. В соответствии с рас-

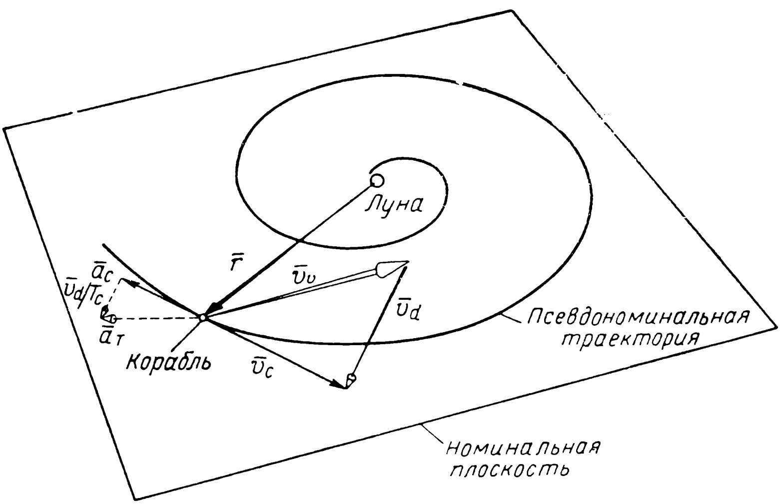


Рис. 10.4. Наведение на участке сближения $\overline{a}_T = \overline{a}_c + \overline{v}_d/T_c$

сматриваемым методом наведения выбрана номинальная плоскость, в которой находится космический корабль и Луна. Командные векторы ускорения $\overline{a}_c$ и скорости $\overline{v}_c$ лежат в этой плоскости и однозначно определены в виде табличных функций r и модуля ускорения от тяги двигателей. Используя векторы скорости корабля $\overline{v}$, вычисляют разность скоростей $\overline{v}_d$ и определяют направление вектора тяги двигателя, как показано на рисунке.

Когда применяется номинальная траектория с зависимостью от ускорения, космический корабль будет двигаться вдоль спиральной кривой, которая соответствует номинальной возможной тяге двигателя. За исключением этапа ориентации, от двигателя ни разу не потребуется развивать тягу больше номинальной из-за уменьшения удельного импульса, которое неизбежно произойдет при постоянной ограниченной мощности источника энергии. Однако при этом метод наведения не исключает возможности уменьшения модуля тяги. На рис. 10. 5 изображены окружности, которые представляют собой геометрические места концов номинальных векторов ускорения. Конец вектора $\bar{a}_c$ должен лежать на такой окружности вследствие выбора псевдономинальной траектории. Направление $\bar{a}_T$ всегда определяется направлением вектора $\bar{a}_c + \bar{v}_d/T_c$; однако, когда эта векторная сумма по модулю превышает $a_{T(\text{ном})}$, то команда подается лишь на номинальную величину тяги. Если же суммарный вектор лежит внутри окружности, то прикладывается тяга, величина которой меньше номинальной.

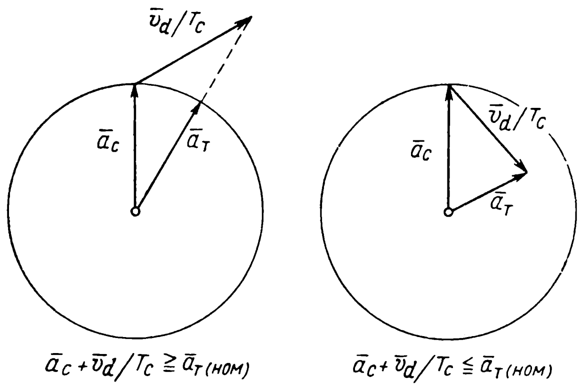


Рис. 10. 5. Программа наведения

Адэкватность программы наведения для этапа приближения к Луне проверялась цифровым моделированием. Пробные вычисления выполнялись в двумерной инерциальной селеноцентрической системе координат, причем Земля учитывалась в качестве возмущающего тела. Данные в конечной точке траектории, вычислявшейся начиная с момента отправления с геоцентрической орбиты, были использованы для составления начальных условий настоящего расчета участка приближения. Начальное положение Луны выбиралось так, чтобы время ее движения до точки, в которой пассивно летящий корабль достиг бы апогея своей орбиты при отсутствии лунного притяжения, было тем же самым, что и время полета корабля до этой точки.

Наиболее эффективная траектория из вычислявшихся ранее имела пассивный участок до дальности 80 000 *км* от центра Луны; в этой точке начинала работать программа наведения, показанная на рис. 10. 5, при $T_c = 2000$ *сек*. В момент окончания пассивного участка, длящегося 2,5 дня, корабль имел селеноцентрическую скорость 369 *м/сек* и эксцентриситет 1,03. По истечении еще 6,9 дней корабль находился в 1930 *км* от центра Луны; его масса составляла 1435 *кг,* скорость 1592 *м/сек* и эксцентриситет 0,0046; во время спуска он совершил восемь оборотов вокруг Луны. Последние два оборота вокруг Земли и часть управляемой траектории сближения с Луной показаны на рис. 10.6 и 10.7.

На рис. 10.8 показана траектория, которая получается, если пассивный полет длится слишком долго. Наведение не начиналось в этом случае до тех пор, пока дальность корабля от центра Луны не достигала 37 600 *км*. Этот расчет позволил лишний раз убедиться в способности системы наведения противостоять даже таким

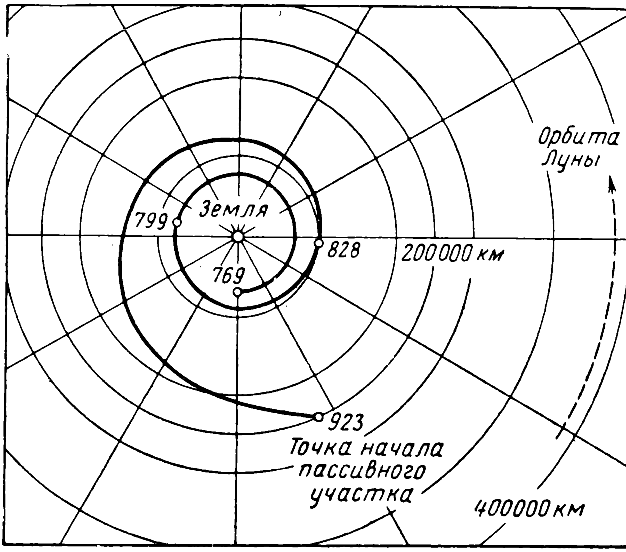


Рис. 10.6. Последние два оборота корабля с включенными двигателями вокруг Земли перед началом пассивного участка
(Время указано в часах)

большим ошибкам, какие показаны на рисунке; однако за избыточное маневрирование пришлось расплачиваться потерей около 36 *кг* массы.

Рис. 10.9 иллюстрирует влияние угловой ошибки определения положения Луны * в момент, когда точка апогея оскулирующей орбиты корабля при раскрутке его вокруг Земли оказывается расположенной на орбите Луны. Траектории, из которых были взяты приведенные данные, отличаются от обсуждавшихся выше отсутствием пассивного участка; наведение начиналось немедленно при

---

* Под ошибкой определения положения Луны автор понимает отличие от номинального угла между радиусом-вектором Луны и радиусом-вектором точки апогея пассивной орбиты корабля. Номинальной считается та величина этого угла, при которой произошла бы встреча Луны и корабля в точке апогея, если бы корабль двигался по пассивной траектории *(прим. ред.)*.

достижении критического мгновенного апогея. Эти цифры показывают максимальные возможности системы наведения корабля по уменьшению ошибок. То, что приводимые величины не относятся к наиболее выгодной траектории, можно видеть из разницы между конечной массой в случае пассивного полета до 80 000 *км* (1425 *кг*) и конечной массой для нулевой ошибки при отсутствии пассивного участка (1334 *кг*). Однако эти же величины показывают, что система наведения космического корабля может выполнить свою задачу

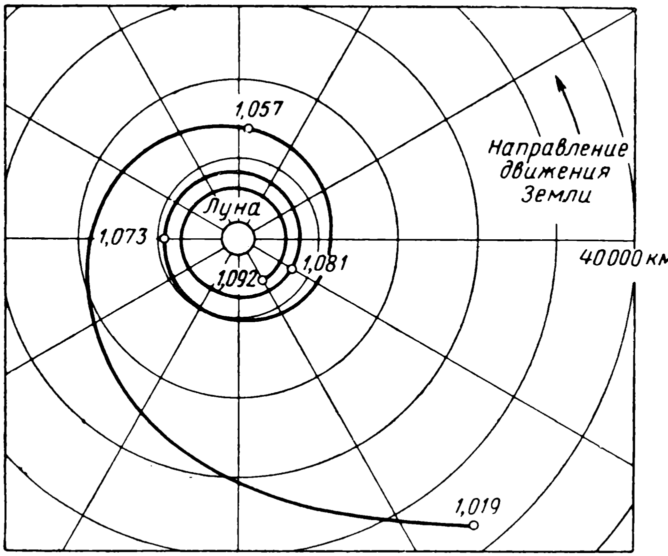


Рис. 10.7. Часть управляемой траектории сближения с Луной, начинающейся с относительной дальности 80 000 *км* сразу же после пассивного участка (Время указано в часах)

при относительной ошибке по начальному углу «Луна—Земля—корабль» в начале пассивного участка $\pm(10 \div 15)^\circ$ с потерями топлива, не превышающими 18 *кг*.

Возникновению такой ошибки могут способствовать две различные причины: космический корабль с номинальными характеристиками может быть запущен не в расчетное время или же характеристики корабля будут отличаться от номинальных. Если наведение не зависит от относительного положения Земли, Луны и корабля, то вполне возможно, что малые отклонения параметров двигателя вызовут угловую ошибку ориентации радиуса-вектора вплоть до $\pm 180^\circ$ по отношению к Луне в момент, когда точка мгновенного апогея окажется на орбите Луны. Эта проблема будет обсуждаться ниже.

В заключение анализа ближнего наведения остается рассмотреть задачу определения номинальной плоскости, показанной на рис. 10.4. Эта плоскость включает в себя Луну и текущее местонахождение корабля и ориентирована так, что угол ее наклонения по отношению к орбитальной плоскости Луны соответствует наклонению заданной орбиты. В общем случае, как видно из рис. 10.10, су-

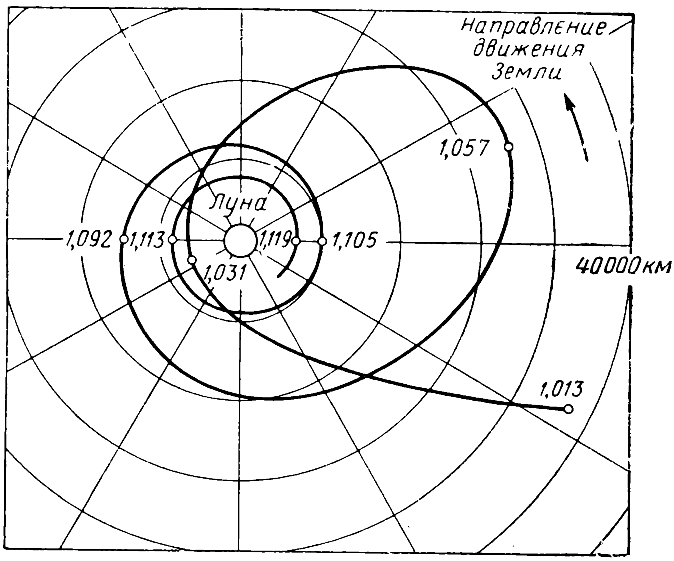


Рис. 10.8. Часть управляемой траектории сближения с Луной, начинающейся с относительной дальности 37 600 *км* сразу же после пассивного участка (Время указано в часах)

ществуют две плоскости, которые одновременно удовлетворяют необходимым условиям, за исключением следующих обстоятельств:

1) при наклонении 90° имеется лишь одна такая плоскость;

2) заданный угол наклонения не может быть меньшим, чем широта космического корабля над плоскостью орбиты Луны. Если необходимое наклонение не равно 90° и больше широты корабля, то из двух номинальных плоскостей выбирается та, которая обеспечивает наименьшую разность скоростей $\bar{v}_d$. С другой стороны, если вообще не существует номинальной плоскости, удовлетворяющей необходимым условиям, то используется временная номинальная плоскость, наклонение которой равно по величине широте корабля.

В настоящей работе было принято, что заданный угол наклонения достаточно велик для того, чтобы номинальная плоскость могла быть определена описанным выше способом. Верхняя граница широты корабля была найдена следующим образом. Орбитальная плоскость Луны наклонена приблизительно на 5°8′ к плоскости эк-

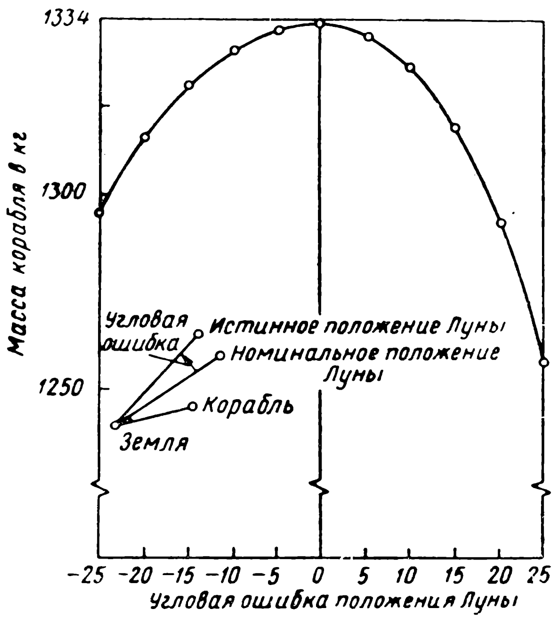


Рис. 10.9. Масса корабля на пассивном участке в зависимости от угловой ошибки положения Луны в начале пассивного участка

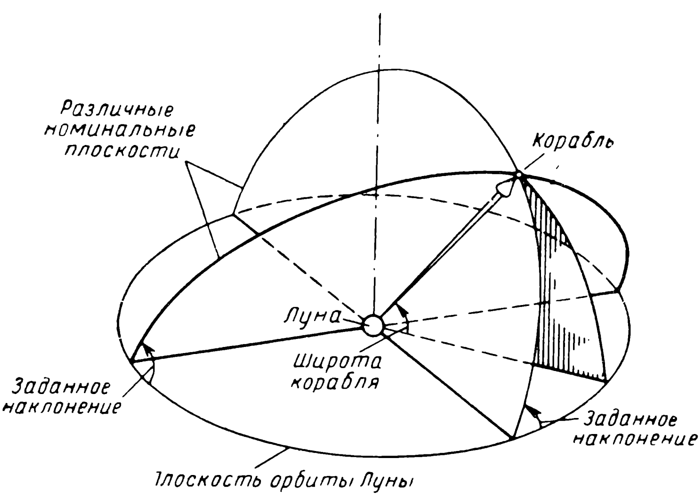


Рис. 10.10. Номинальные плоскости ближнего наведения

липтики, а соответствующая линия узлов совершает попятное движение (регрессию) с периодом 18,6 лет. Следовательно, по отношению к экваториальной плоскости Земли наклонение орбиты Луны может изменяться от 28,5 до 18,5°. Тогда, если начальная плоскость орбиты корабля проходит через мыс Кеннеди, то наименьшее возможное наклонение будет равно широте этой точки, т. е. 28,5°. Отсюда угол между орбитальными плоскостями корабля и Луны не должен превышать 10°. По мере приближения корабля к Луне максимальная широта, измеряемая относительно плоскости орбиты Луны, становится равной 27,3°. Эта величина определяется с учетом указанного наклонения, равного 10°, и геоцентрических скоростей Луны и корабля, которые составляют около 1000 и 760 *м/сек*.

10.3. Наведение на предпассивном участке

Двигаясь вдоль раскручивающейся спиральной траектории от первоначальной геоцентрической орбиты, корабль приходит в точку, называемую здесь точкой отправления, откуда начинается пассивный полет. Говоря более точно, это та точка, в которой соответствующая мгновенная эллиптическая орбита вокруг Земли обладает радиусом апогея, равным дальности до орбиты Луны. При тех параметрах двигателя, которые рассматриваются в настоящем примере, точка отправления лежит примерно на половине пути между Землей и орбитой Луны.

Для последней четверти оборота перед достижением точки отправления можно сформировать схему наведения, в которой не будут использоваться никакие заранее вычисленные данные. Любому положению в окололунном пространстве соответствует в принципе точка на лунной орбите, в которую может прийти корабль при свободном полете вдоль эллиптической кривой (если пренебречь притяжением Луны) через то же время, которое потребуется для этого Луне. Кроме того, эта кривая будет единственной, если рассматриваемая нами точка на орбите Луны задана как апогей орбиты пассивного полета. Определение такой орбиты подробно изложено в гл. III и требует итераций по одной переменной, которые на практике оказываются быстро сходящимися.

Принцип работы системы предпассивного наведения иллюстрируется рис. 10.11. Определяются две геоцентрические орбиты, проходящие через точку местонахождения корабля: 1) потребная мгновенная траектория пассивного полета и 2) располагаемая мгновенная траектория пассивного полета. Понятно, что орбитальные плоскости обеих траекторий не обязательно совпадают. Скорость $\bar{v}_d$ представляет собой разность между истинной скоростью корабля $\bar{v}$ и скоростью $\bar{v}_r$, необходимой для пассивного перелета в точку апогея на лунной орбите. Задача программы наведения состоит в ориентации вектора тяги таким образом, чтобы свести эту разность скоростей к нулю.

В задаче 10.5 показано, что тяга, направленная вдоль $\bar{v}_d$, приводит к наиболее быстрому уменьшению v_d. Однако, судя по результатам моделирования, направление тяги вдоль $\bar{v}_d$ представляет собой не самую эффективную программу наведения. Если в начале предпассивного участка корабль уже находится на расчетной тра-

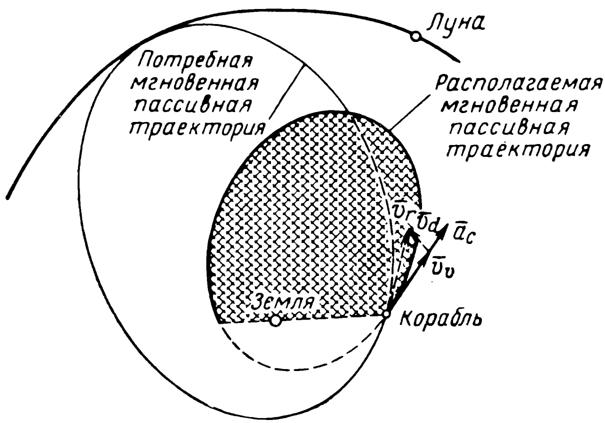


Рис. 10.11. Наведение на предпассивном участке
$\bar{a}_r = \bar{a}_c + K\bar{v}_d/v_d^2$

ектории, то тяга, направленная по касательной к траектории, будет отвечать поставленной задаче. Однако при этом вычисленная разность скоростей вовсе не совпадает по направлению с вектором истинной скорости корабля. Даже при наличии весьма значительных ошибок кажется наиболее выгодным направлять тягу вдоль вектора скорости в течение примерно половины предпассивного маневра. Действительно, оказывается, что наиболее эффективная ориентация тяги состоит в комбинации направлений $\bar{v}$ и $\bar{v}_d$, причем ориентация по касательной к траектории должна превалировать в начале маневра, а ориентация вдоль $\bar{v}_d$ должна играть все большую роль по мере приближения к точке отправления.

При цифровом моделировании направление тяги выбиралось вдоль векторной суммы $\bar{a}_c + K(\bar{v}_d/v_d^2)$, где $\bar{a}_c$ — ускорение, соответствующее тяге, равной 0,45 *кг* и направленной вдоль вектора скорости, а K — постоянная.

Очевидно, что на длительность предпассивного участка будут налагаться геометрические ограничения. Когда корабль отстоит от номинальной точки контакта с лунной орбитой намного более 180°, потребная мгновенная траектория пассивного полета не может быть определена указанным способом. Следовательно, ранее чем за половину оборота перед достижением Луны рассмотренная программа наведения не может работать без некоторой модификации.

Было проведено трехмерное пробное моделирование схемы предпассивного наведения: угол между плоскостью траектории корабля и орбитальной плоскостью Луны составлял 10°. Луна находилась в таком положении, что тангенциально направленная тяга

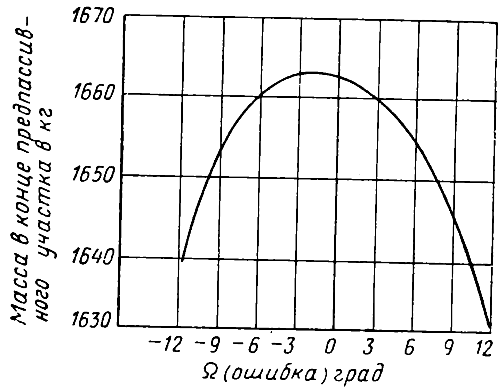


Рис. 10.12. Зависимость массы корабля в конце предпассивного участка от начальной ошибки в долготе узла:

$$\bar{a}_r = \bar{a}_c + 5\bar{v}d/v_d^2$$

$$\Omega = \Omega\ (\text{ном}) + \Omega\ (\text{ошибка})$$

должна была приводить к контакту с Луной. Для того чтобы оценить работу схемы наведения в присутствии ошибок, несколько расчетов было проделано при повороте плоскости траектории корабля вокруг полярной оси лунной орбитальной плоскости до 12° в обоих направлениях. При моделировании остановились на коэффициенте $K=5$, причем выбор был сделан скорее на основании эмпирических данных, чем по каким-либо теоретическим причинам. Результаты моделирования показаны на рис. 10.12, где масса корабля в начале пассивного участка построена для различных величин углового смещения узла траекторной плоскости. Каждая точка на кривой соответствует успешному выполнению задачи и, как видно из результатов, система может работать при наличии ошибок, составляющих по крайней мере $\pm 12°$ с потерями топлива, не превышающими 30 *кг*.

Можно было бы ожидать, что максимум кривой придется на номинальное расположение траектории. Однако это не так, и приписать такое смещение следует тому, что программа наведения не обеспечивает команды на касательное направление тяги при первоначально определенном положении Луны. Напрашивается вывод, что номинальное начальное положение Луны нужно переместить примерно на 3°.

10.4. Наведение на этапе ориентации

Во время раскрутки, которая длится около месяца, корабль совершает несколько сот оборотов вокруг Земли. При этом положение Луны не играет никакой роли и поэтому не учитывается в системе наведения. В результате, когда относительное положение Луны впервые вводится в расчеты, связанные с наведением, может появиться значительное рассогласование между истинными и номинальными параметрами движения корабля, вызванное отклонениями характеристик двигателей и влиянием неучтенных возмущений. Этап ориентации предназначен для того, чтобы уменьшить эту ошибку до величины, приемлемой с точки зрения последующего предпассивного участка.

Принцип работы системы на участке ориентации можно описать следующим образом. Предположим, что корабль достиг заранее определенной дальности от Земли, которая выбрана так, чтобы до начала пассивного полета оставалось лишь несколько оборотов. В этот момент могут встретиться ошибки трех типов: ошибка по скорости, угловое отклонение корабля в мгновенной плоскости движения относительно линии узлов (если угол между плоскостями движения корабля и Луны не равен нулю, то встреча с Луной может произойти только вблизи линии узлов) и угловая ошибка положения мгновенной плоскости движения, которая рассматривается только как ошибка в долготе узла. Вторая из этих ошибок может иметь какое угодно значение, т. е. в момент достижения заданной дальности начала этапа ориентации корабль может оказаться в любой точке окружности, радиус которой равен начальной дальности, практически с равной степенью вероятности.

Если бы можно было на короткое время выключить двигатель, то проще всего было бы допустить некоторый пассивный участок длительностью до одного оборота для уменьшения угловой ошибки в плоскости траектории. Если при этом эксцентриситет орбиты корабля мал, то результатом явилось бы просто вращение оставшейся части спирали отправления вокруг оси, перпендикулярной мгновенной плоскости движения. Кроме того, потребовалось бы заранее предусмотреть прецессию орбиты для компенсации дополнительного движения Луны за время пассивного полета.

Ввиду того что повторное включение двигателя обычно считается нежелательным, будем считать в период ориентации тягу непрерывной, но отличающейся от номинальной. Составляющая вектора тяги в плоскости движения выбирается так, чтобы она вызывала изменение оставшегося числа оборотов, которое в свою очередь обеспечит приход корабля на орбиту Луны на линии узлов. В то же время должна прикладываться тяга, нормальная к плоскости движения для поворота линии узлов, чем будет компенсироваться неноминальное время прибытия в эту точку. На рис. 10.13 показана схема расположения номинальной и регулируемой траекторий.

На рис. 10.14 приведены различные данные для двумерной модели участка ориентации при следующих значениях параметров: ориентация начинается за 1,9 оборота до перехода к пассивному

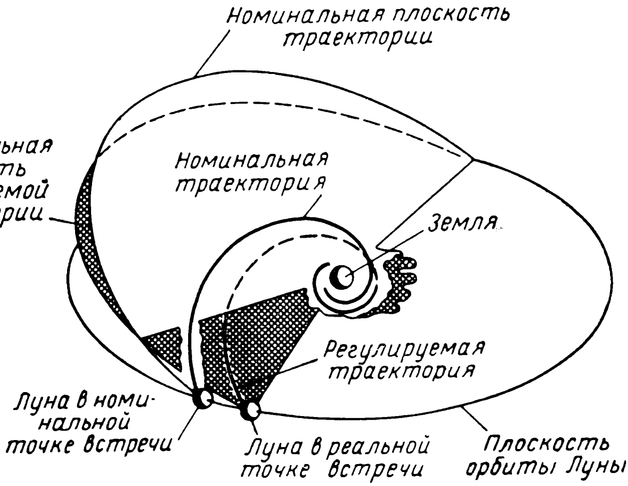


Рис. 10.13. Геометрия участка ориентации

полету; двигатель работает с постоянной мощностью, когда тяга выше номинальной (0,45 *кг*) и с постоянным удельным импульсом, когда тяга составляет менее 0,45 *кг*. (Трехмерная модель этого участка здесь рассматриваться не будет ввиду ее чрезвычайной сложности.) Сплошные кривые дополнительного числа оборотов и потерь массы по величине тяги показывают, как влияет дросселирование тяги на номинальную траекторию, которая рассматривается здесь как продолженная до точки встречи с Луной.

Пунктирная кривая демонстрирует влияние движения Луны на кривые дополнительных оборотов: например, когда для увеличения числа оборотов тяга уменьшается, время полета возрастает, что вызывает уменьшение абсолютного числа дополнительных оборотов относительно Луны. Окончательное число добавочных оборотов, определенных таким образом, указывает величину касательной тяги, которая должна быть в данном случае приложена.

Для того чтобы определить необходимое направление дросселирования тяги (уменьшение ее или увеличение), используется построение, показанное на рис. 10.14. Зададим, например, максимально допустимые потери массы таким образом, чтобы разница между конечными точками модифицированной кривой добавочных оборотов составляла ровно один оборот. Тогда из приведенного примера станет ясно, что с точки зрения экономичности работы

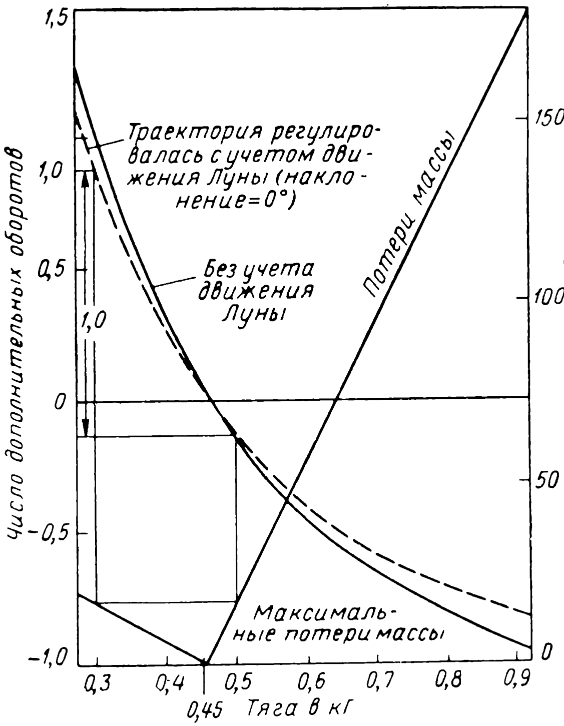


Рис. 10. 14. Потери массы и необходимое дополнительное число оборотов по сравнению с траекторией, выполняющейся при величине тяги 0,45 *кг*. Маневр начинается после 205,4 оборотов вокруг Земли

двигателя можно исключить только примерно 0,1 оборота из оставшихся до номинала, в то время как максимальное число оборотов, которые могут быть добавлены к номинальному количеству, составляет 0,9.

10.5. Наведение на этапе раскрутки

Выводящийся на селеноцентрическую орбиту летательный аппарат, рассматриваемый здесь в качестве примера, начинает свое движение с круговой или почти круговой геоцентрической орбиты высотой около 480 *км*. Прикладывается тангенциально направленная непрерывная малая тяга, и корабль летит вдоль медленно раскручивающейся спиральной траектории. При начальной тяговооруженности, скажем, 1/7000 и удельном импульсе 1000 *сек* мгновенная или оскулирующая орбита будет почти круговой до тех пор, пока корабль не достигнет высоты 50 000—65 000 *км*. В течение времени раскрутки, которое составит около месяца, корабль сделает свыше 200 оборотов вокруг Земли. На этих высотах потребуется еще два-три дополнительных оборота для придания кораблю такого количества добавочной энергии, чтобы он смог далее совершить пассивный перелет в окрестность Луны.

Известно, что если оскулирующая орбита является квазикруговой, то разница между воздействием на корабль тангенциального и трансверсального ускорения несущественна. На больших высотах, где потенциальная энергия мала, очевидно, что тангенциальная тяга становится более эффективной в смысле набора энергии. Хотя могут быть и другие программы тяги, обладающие некоторыми преимуществами по сравнению с чисто тангенциальным направлением в отношении экономичности, тем не менее чувствуется, что эти преимущества будут незначительными. Поэтому за основное направление тяги примем направление вдоль вектора скорости *. Исключения из этого правила, по-видимому, будут иметь место в случаях, когда системе наведения потребуется выдавать команды на корректирующие маневры.

Задача программирования траектории спиральной раскрутки от Земли непременно должна включать в себя учет трехмерного характера движения. В данной ситуации имеется несколько источников сил, возмущающих орбиту близкого спутника Земли: 1) атмосферное сопротивление, 2) сжатие Земли у полюсов, 3) асимметрия Земли относительно ее осей или относительно экваториальной плоскости, 4) магнитное поле Земли и 5) притяжение Солнца, Луны и других планет. Однако, как нетрудно показать, учет влияния притяжения спутника Солнцем и Луной изменяет величину радиуса-вектора лишь на 0,3—0,6 *м* и поворачивает плоскость орбиты менее чем на 0,1° в год. Влияние прочих планет на несколько порядков величин меньше. Асимметрия и магнитные поля оказывают незначительное воздействие на орбиты с малым периодом, в то время как сопротивление атмосферы пренебрежимо мало на больших высотах. С другой стороны, сжатие Земли имеет первостепенное значение. Действительно, при начальной высоте 480 *км* возмущающее ускорение за счет несферичности в десятки раз превышает располагаемое ускорение от тяги.

Как показано в разд. 6.3, несферичность Земли вызывает вращение плоскости орбиты вокруг полярной оси Земли в сторону, противоположную направлению движения корабля. Средняя скорость вращения орбитальной плоскости приближенно выражается уравнением (6.19). Таким образом, для корабля, находящегося на круговой орбите высотой 480 *км*, скорость вращения орбитальной плоскости может составлять почти 8° в день, умноженные на косинус угла наклонения. Должно пройти около 350 *час* полета

---

* Метод управления на этапе раскрутки, не требующий знания текущей плоскости оскулирующей орбиты, описан в работе [79] (*прим. ред.*).

с ускорением, прежде чем корабль достигнет высоты двух земных радиусов, на которой величина скорости вращения орбитальной плоскости станет меньше 1° в день, умноженного на косинус угла наклонения.

На рис. 10.15—10.17 построены в функции времени некоторые важнейшие параметры, связанные с раскручивающейся спиральной траекторией. Как видно из графиков, в течение первых 775 *час* траектория в любой момент лишь ненамного отличается от геоцентрической круговой орбиты. Однако согласно рис. 10.16 ориентация

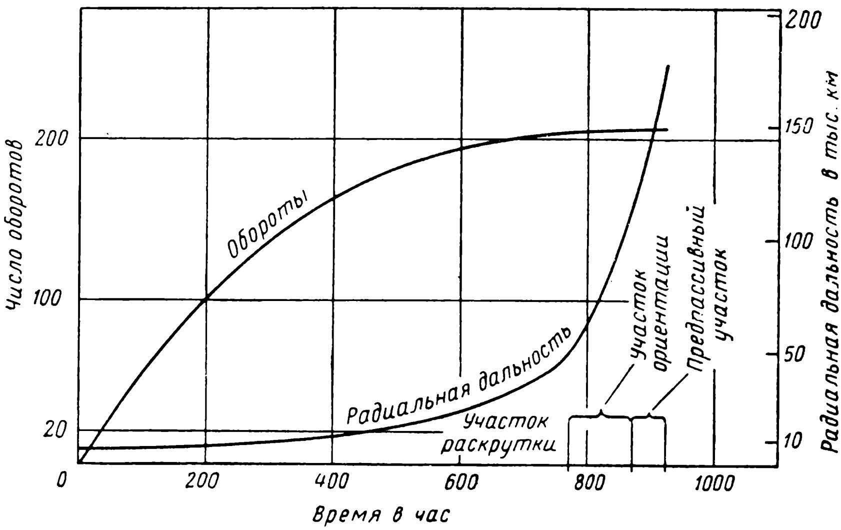


Рис. 10.15. Номинальные условия отправления от Земли с момента схода до конца предпассивного участка

мгновенной плоскости траектории претерпевает существенные изменения и в сумме поворачивается примерно на 48,5°.

Поскольку на начальных высотах порядка 480 *км* возмущающее ускорение за счет несферичности Земли значительно превышает располагаемое ускорение от тяги, траекторию корабля не удастся удерживать в инерциально фиксированной плоскости в течение первых нескольких недель полета, даже если бы это и требовалось. Для этапа раскрутки в запоминающем устройстве бортового вычислителя записываются табличные значения предсказанной долготы узла и запрограммированного времени полета в функции величины радиуса-вектора апогея мгновенной пассивной орбиты. Эти таблицы получают заранее в результате цифрового моделирования пассивных неуправляемых траекторий с учетом возмущений от несферичности Земли. В каждый момент времени табличные величины используются для расчета необходимой долготы узла, причем в расчете учитывается предсказанная прецессия узлов за счет несферичности и вводится поправка на движение Луны, если корабль опережает программу или отстает от нее. Затем прикладывается ускорение $-\bar{a}_n$, нормальное к мгновенной орбитальной плоскости корабля, для уменьшения разности между необходимым и существующим направлениями линии узлов. Нормальная составляющая тяги

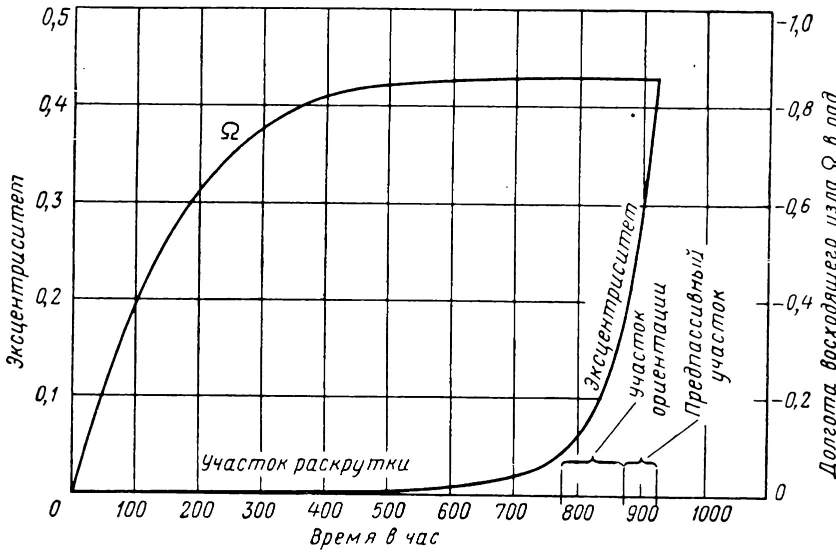


Рис. 10.16. Номинальные условия отправления от Земли с момента схода до конца предпассивного участка

ограничивается заданным процентным отношением к общей тяге, вследствие чего основная задача этапа раскрутки — набор энергии и высоты — сможет, несмотря ни на что, эффективно выполняться. Например, если в направлении нормали допускается приложение не более 20% тяги, то касательная составляющая будет при этом равна, по крайней мере, 98% от всей располагаемой тяги. Геометрия наведения на этом участке показана на рис. 10.18.

10.6. Результаты моделирования траекторий

При разработке описанных выше методов наведения для оценки летных характеристик широко использовалось цифровое моделирование. Хотя в процессе работы было составлено и применялось множество программ, все они были направлены к тому, чтобы как можно более полно промоделировать полет в целом. Ввиду того, что в конце концов удалось осуществить успешное моделирование всего полета, представляется нецелесообразным описывать предварительные программы, хотя их вклад в окончательные результаты явился весьма ощутимым. Таким образом, обсуждение будет

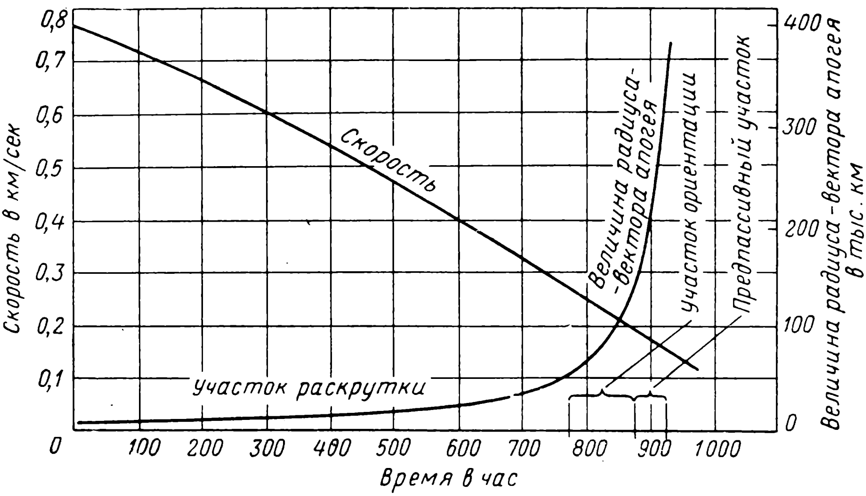


Рис. 10.17. Номинальные условия отправления от Земли с момента схода до конца предпассивного участка

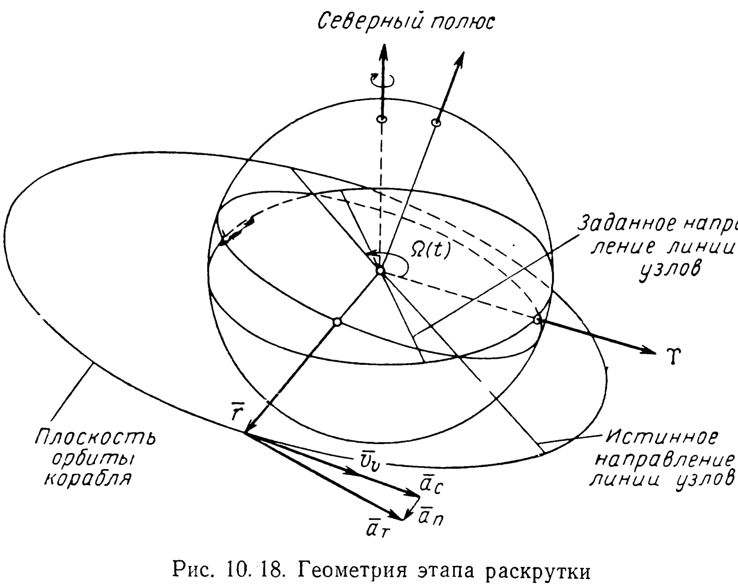


Рис. 10.18. Геометрия этапа раскрутки

ограничено программой моделирования полета в целом и соответствующими результатами.

Начальная орбита корабля принималась почти круговой с эксцентриситетом 0,0003 и высотой 480 *км*. Вес корабля составлял 3180 *кг*, тяга 0,45 *кг*, массовый расход топлива 1,63 *кг/час* и скорость истечения — 9820 *м/сек* (за исключением особо отмеченных случаев).

Долгота узла начальной орбиты номинально устанавливалась так, чтобы предсказанная прецессия плоскости за время раскрутки, вызываемая несферичностью, в конце концов приводила к совпадению линии узлов орбиты корабля с линией узлов орбиты Луны; такое положение орбитальной плоскости корабля соответствует минимальному наклонению ее по отношению к плоскости орбиты Луны, т. е. в нашем примере 10°. Ортогональная составляющая корректирующей тяги была ограничена 14% полной тяги, что оказалось достаточным в данном случае для того, чтобы окончательная ошибка в долготе узла составляла всего лишь 1 миллирадиан.

Управляемый полет на участке раскрутки продолжался 32,4 дня и за это время была достигнута заданная величина радиуса-вектора апогея, равная 59 730 *км*. В течение раскрутки было совершено 206,5 оборотов вокруг Земли и израсходовано 1270 *кг* топлива. К концу раскрутки эксцентриситет вырос с 0,0003 до 0,038, а длина большой полуоси от 6860 до 57 480 *км*.

В начале этапа ориентации потребное число дополнительных оборотов составляло 0,41, а угол прецессии линии узлов (—0,51) *рад*; необходимые составляющие тяги в тангенциальном и ортогональном направлениях были равны 0,335 и 0,09 *кг*. К концу ориентации радиальная дальность до корабля возросла до 145 000 *км*, величина радиуса-вектора мгновенного пассивного апогея — до 190 000 *км*, эксцентриситет увеличился до 0,215, а полный расход топлива составил 1463 *кг* (т. е. на участок ориентации было истрачено 193 *кг*).

Предпассивный участок начался при наличии разности скоростей $v_d=480$ *м/сек*, когда корабль находился в 304 000 *км* от Луны. При $K=5$ скорость v_d была снижена до установленного порога (0,30 *м/сек*) за 1,6 дня и в течение этого времени было израсходовано 63,5 *кг* топлива. В конце предпассивного участка величина радиуса-вектора корабля составляла 207 400 *км*, а от Луны корабль отделяло 162 100 *км*.

Пассивный полет начался через 39,7 дня после включения двигателей и управление перешло к системе ближнего наведения. В это время было проведено преобразование системы координат корабля из геоцентрической в селеноцентрическую. Корабль оказался на гиперболической траектории относительно Луны с эксцентриситетом 6,62. Возмущающее ускорение за счет притяжения Земли составляло 0,00935 *м/сек*^{2}, т. е. было в 2,3 раза больше номинального ускорения от тяги, которую развивали бы, будучи включенными, двигатели корабля. Находясь в пассивном полете, который длился 2,4 дня, корабль достиг заданного расстояния 80 000 *км* от Луны, после чего двигатели были вновь включены. За время пассивного полета влияние возмущения от гравитационного поля Земли уменьшило эксцентриситет до 0,967, а само возмущающее ускорение снизилось до 0,00157 *м/сек*^{2}, что в 2,5 раза меньше начального ускорения от тяги. Начальное значение v_d составляло 206 *м/сек* для выбранной номинальной плоскости сближения, наклоненной к лунной орбитальной плоскости на 80°; для второй номинальной плоскости разность v_d была равна 246 *м/сек*. За время, в течение которого дальность уменьшилась до 48 000 *км*, v_d стала меньше 0,3 *м/сек*; так как ускорение a_c в параболической области равно нулю, тяга двигателя была уменьшена до своего минимального значения, составляющего 0,23 *кг*. Задача полета была выполнена спустя 49,5 дней после старта с общим расходом топлива 1804 *кг*. Конечная масса корабля составила 1376 *кг*, эксцентриситет был равен $9{,}7 \cdot 10^{-5}$ и корабль находился в пределах 65 *м* от заданной конечной селеноцентрической орбиты радиуса 1900 *км*.

Для оценки способности системы наведения справляться с непредусмотренными возмущениями или отклонениями тяги от номинального режима было просчитано несколько траекторий с большими и малыми значениями удельного импульса. В частности, вычислялись траектории при отклонении удельного импульса на ± 5 и $\pm 10\%$, так что «номинальная» тяга на столько же отличалась от запланированной в предварительных расчетах. Номинальный расход топлива при этом оставался равным 1,64 *кг/час*. Отдельные характеристики для этих четырех траекторий, а также для описанной выше номинальной траектории приведены в табл. 10. 1.

Приведенные результаты отчетливо иллюстрируют замечательную приспосабливаемость метода наведения. Так, например, успешное выполнение полета оказывается возможным для траекторий, чьи центральные углы относительно Земли, проходимые за период раскрутки, отличаются на 34 оборота, а разница в общем времени полета превышает 5 дней. Последнее особенно важно, если учесть, что разница во времени прибытия, равная 5 дням, означает смещение Луны по своей орбите примерно на 65°, т. е. на величину, которую никак нельзя ввести в систему наведения в начале полета.

Можно видеть, что от варианта к варианту конечная масса значительно меняется и что траектории полета с меньшей тягой приводят к большим потерям топлива. То, что система наведения непричастна к этим потерям, становится очевидным хотя бы из рассмотрения расхода топлива на участок раскрутки. Каждый случай раскрутки происходит под действием ускорения, равного не менее 98% от номинальной тяги и направленного по касательной к траектории, что, как было показано, лишь ненамного хуже

Таблица 10.1

Влияние удельного импульса на характеристики траекторий

Характеристика	Удельный импульс в *сек*				
Время выполнения этапа раскрутки в днях	35,2	33,7	32,4	31,3	30,4
Топливо, истраченное на раскрутку, в *кг*	1383	1324	1271	1228	1195
Число оборотов за время раскрутки	227	216	207	199	193
Дополнительное число оборотов этапа ориентации	0,78	0,36	0,41	1,06	1,15
Прецессия за время ориентации в *рад*	0,01	—0,54	—0,51	0,12	0,20
Время ориентации в днях	7,0	5,5	5,7	8,1	8,4
Топливо, истраченное на ориентацию, в *кг*	205	197	193	196	192
Продолжительность предпассивного участка в днях	2,0	1,6	1,6	1,3	1,3
Топливо, затраченное на предпассивном участке, в *кг*	76,6	63,1	63,6	51,3	52,7
Время пассивного полета в днях	3,4	2,5	2,4	2,5	2,4
Время сближения в днях	10,9	10,0	9,8	9,9	9,8
Топливо, истраченное на сближение, в *кг*	276	280	277	273	258
Общее время полета в днях	55,1	50,8	49,5	50,6	50,0
Общий расход топлива в *кг*	1941	1864	1806	1750	1706

абсолютного оптимума. Таблица показывает, что из 235 *кг* разницы в конечных массах 189 *кг* следует отнести к этапу раскрутки, который совершается в каждом варианте близким к оптимальному способом и лишь оставшиеся 44 *кг* приходятся в основном на дальнейшее движение с управлением по другим схемам наведения. Аналогичным же образом спуск на окончательную селеноцентрическую орбиту требует большего расхода топлива при меньшей тяге, так что характеристики системы наведения, очевидно, мало связаны с потерями; большую часть потерь скорее всего невозможно уменьшить.

Две траектории вычислялись специально для оценки чувствительности расхода топлива к запаздыванию вывода на начальную орбиту. Для этого долгота узла на начальной геоцентрической орбите смещалась на углы 15 и 30°, что соответствовало задержкам в 1 и 2 часа. В обоих случаях заданные конечные условия полета были выполнены; конечная масса составила в первом варианте 1334 *кг* и во втором — 1317 *кг*.

10.7. Компенсация приборных ошибок

Для каждой из различных схем наведения, обсуждавшихся в настоящей главе, требуется знание положения и скорости корабля относительно Земли или Луны. Исследования не простирались настолько далеко, чтобы установить, как должна поступать эта информация — дискретно через значительные интервалы времени или же почти непрерывно во времени. Положение корабля можно определить в пределах точности используемых приборов с помощью, например, методов гл. VII. Ввиду того что на корабль практически непрерывно действует ускорение от тяги, в данном случае представляется необходимым для получения удовлетворительной информации о скорости, позволяющей осуществлять точное наведение, интегрировать уравнения движения, используя для этой цели бортовое вычислительное устройство.

Будем предполагать для дальнейшего обсуждения, что корабль оборудован стабилизированной платформой и одним или несколькими акселерометрами. Не следует из этого делать вывод, что такая система является рекомендуемой, так как той же цели могут служить и менее сложные средства. Тем не менее, пока проблема не будет более подробно изучена, эта частная система вместе с относящейся к ней схемой вычислений, которая будет описана ниже, послужит верхним пределом потребной сложности оборудования.

Информация о скорости будет поступать с ошибками, происходящими из нескольких источников. Предположим, что для внесения поправок в измеренный вектор скорости могут использоваться только те данные, которые получаются в момент выполнения навигационной засечки. Рассмотрим далее схему уменьшения ошибок по скорости, вызываемых уходом платформы и ошибками в начальных условиях.

Уход платформы

В любой проверочной точке можно получить достаточные астрономические данные для повторной выставки инерциальной платформы. Предположим, что это сделано в n-й проверочной точке. Будем полагать далее, что ускорение от тяги измеряется идеальными акселерометрами и что ошибка в его измерении вызывается только ошибкой ориентации платформы, на которой акселерометры установлены. Задача состоит в том, чтобы определить поправку к измеренной скорости в следующей проверочной точке через измерение ошибки в ориентации платформы.

Пусть $\bar{r}$, $\bar{v}$ и $\bar{a}_T$ — истинные векторы положения, скорости и ускорения от тяги, а $\tilde{\bar{r}}$, $\tilde{\bar{v}}$ и $\tilde{\bar{a}}_T$ — соответствующие векторы, полученные с помощью инерциальной системы измерений. Тогда, если $\bar{g}$ — вектор гравитационного ускорения, движение корабля будет описываться уравнениями

$$\frac{d\bar{r}}{dt}=\bar{v},\ \frac{d\bar{v}}{dt}=\bar{g}+\bar{a}_T.$$

Обозначим через $\delta\bar{r}$, $\delta\bar{v}$, $\delta\bar{a}$ векторы ошибок по положению, скорости и ускорению за счет ухода платформы:

$$\tilde{\bar{r}}=\bar{r}+\delta\bar{r},$$

$$\tilde{\bar{v}}=\bar{v}+\delta\bar{v},$$

$$\tilde{\bar{a}}_T=\bar{a}_T+\delta\bar{a}.$$

В результате получим соотношения

$$\frac{d(\delta\bar{r})}{dt}=\delta\bar{v},\ \frac{d(\delta\bar{v})}{dt}=\delta\bar{a}$$

при условии, что разностью между истинным и вычисленным векторами гравитационного ускорения можно пренебречь.

Допустим, что ложный вектор $\delta\bar{a}$, который отвечает за ошибки измерений векторов положения и скорости, возникает вследствие ухода гироскопов. В частности, если γ_1, γ_2, γ_3 — углы поворота платформы относительно входных осей гироскопов и если a_{T1}, a_{T2}, a_{T3} — составляющие ускорения корабля вдоль этих входных осей, то ошибка вектора ускорения определяется выражением

$$\delta\bar{a}=\bar{A}\bar{\gamma}, \tag{10. 4}$$

где

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} 0 & a_{T3} & -a_{T2} \\ -a_{T3} & 0 & a_{T1} \\ a_{T2} & -a_{T1} & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$\bar{\gamma}=\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}.$$

Представим две матрицы $\bar{E}$ и $\bar{D}$ в виде решений следующих матричных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\bar{E}}{dt}=\bar{D},\quad \frac{d\bar{D}}{dt}=\bar{A}(t-t_n) \tag{10. 5}$$

с начальными условиями

$$\overline{E}(t_n)=\overline{0},\quad \overline{D}(t_n)=\overline{0},$$

где t_n — время n-й засечки. Тогда, если платформа уходит с постоянной угловой скоростью $\overline{\omega}$, в момент t_{n+1} имеем

$$\left.\begin{aligned}\delta\overline{r}(t_{n+1})&=\overline{E}(t_{n+1})\,\overline{\omega},\\ \delta\overline{v}(t_{n+1})&=\overline{D}(t_{n+1})\,\overline{\omega}.\end{aligned}\right\}\tag{10.6}$$

В результате астрономических измерений, сделанных в $(n+1)$-й проверочной точке, угол ухода $\overline{\gamma}(t_{n+1})$ может быть определен. Затем достаточно просто вычисляется угловая скорость ухода

$$\overline{\omega}=\frac{\overline{\gamma}(t_{n+1})}{t_{n+1}-t_n}.$$

Бортовое вычислительное устройство может непрерывно решать дифференциальные уравнения (10.5) * и таким образом получать $\overline{E}(t_{n+1})$ и $\overline{D}(t_{n+1})$. Для определения поправок к измеренным положению и скорости служат уравнения (10.6).

Начальная ошибка по скорости

Поправка на начальную ошибку по скорости вносится после поправки на уход платформы. Поэтому далее будем полагать, что ускорения измеряются идеальными акселерометрами на точно выставленной платформе, т. е. $\tilde{\overline{a}}_T\equiv\overline{a}_T$.

Пусть $\overline{r}_{MV}$ и $\overline{v}_{MV}$ — векторы положения и скорости корабля, скажем, в селеноцентрической системе координат. Если μ_E и μ_M — гравитационные постоянные Земли и Луны, то эти векторы связаны между собой следующими дифференциальными уравнениями:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\overline{r}_{MV}}{dt}&=\overline{v}_{MV},\\ \frac{d\overline{v}_{MV}}{dt}&=-\frac{\mu_M\overline{r}_{MV}}{r_{MV}^3}-\frac{\mu_E\overline{r}_{EV}}{r_{EV}^3}-\frac{\mu_E\overline{r}_{ME}}{r_{ME}^3}+\overline{a}_T,\end{aligned}\right\}\tag{10.7}$$

где обозначения $\overline{r}_{EV}$ и $\overline{r}_{ME}$ используются соответственно для векторов дальности от Земли до корабля и от Луны до Земли, так что

$$\overline{r}_{EV}=\overline{r}_{MV}-\overline{r}_{ME}.$$

---

* Матричное обозначение здесь применяется просто для удобства записи. В действительности матричные дифференциальные уравнения (10.5) состоят просто из шести отдельных обыкновенных дифференциальных уравнений *(прим. автора)*.

Пусть $\tilde{\bar{r}}_{MV}$ и $\tilde{\bar{v}}_{MV}$ — векторы положения и скорости, полученные на выходе бортового вычислительного устройства. В n-й проверочной точке t_n вектор $\tilde{\bar{r}}_{MV}(t_n)$ определяется непосредственно из засечки положения с помощью астрономических измерений, а скорость $\tilde{\bar{v}}_{MV}(t_n)$ вычисляется по схеме, которая будет изложена ниже. В случае, если положение определяют путем бортовых измерений, $\bar{r}_{MV}(t_n) = \tilde{\bar{r}}_{MV}(t_n)$. Однако в оценку скорости может входить ошибка, т. е.

$$\tilde{\bar{v}}_{MV}(t_n) = \bar{v}_{MV}(t_n) + \delta\bar{v}_{MV}(t_n).$$

В последующий момент t_{n+1} определение $\delta\bar{v}_{MV}(t_n)$ производится с помощью засечки положения. Так, разлагая в ряд Тейлора оценку $\tilde{\bar{v}}_{MV}(t)$, будем иметь

$$\tilde{\bar{v}}_{MV}(t_n) = \bar{v}_{MV}(t_n) + \bar{V}(t)\,\delta\bar{v}_{MV}(t_n), \tag{10.8}$$

при условии, что малость $\delta\bar{v}_{MV}(t_n)$ позволяет пренебречь членами высших порядков. Элементы матрицы $\bar{V}(t)$ представляют собой частные производные составляющих скорости корабля в момент t по составляющим скорости в момент t_n (см. гл. VI).

Ввиду наличия ошибки оценки скорости в момент t_n, векторы $\bar{r}_{MV}$ и $\tilde{\bar{r}}_{MV}$ теперь уже не будут равны между собой. Для того чтобы отметить это отклонение, будем писать

$$\tilde{\bar{r}}_{MV}(t) = \bar{r}_{MV}(t) + \delta\bar{r}_{MV}(t)$$

или после разложения в ряд Тейлора

$$\tilde{\bar{r}}_{MV}(t) = \bar{r}_{MV}(t) + \bar{R}(t)\,\delta\bar{v}_{MV}(t_n). \tag{10.9}$$

Матрица $\bar{R}(t)$ состоит из частных производных компонентов положения корабля в момент t по составляющим скорости в момент t_n

Векторы $\tilde{\bar{r}}_{MV}$ и $\tilde{\bar{v}}_{MV}$ формируются в вычислительном устройстве системы наведения путем решения дифференциальных уравнений (10. 7), в которых векторы заменяются соответствующими оценками. Как было показано в разд. 6. 5, матрицы $\bar{R}$ и $\bar{V}$ суть не что иное как решения матричных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\bar{R}}{dt} = \bar{V}, \quad \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{G}\bar{R},$$

где в данном случае

$$\bar{G} = \frac{\mu_M}{r_{MV}^5}\left(3\bar{r}_{MV}\bar{r}_{MV}^T - r_{MV}^2\bar{I}\right) + \frac{\mu_E}{r_{EV}^5}\left(3\bar{r}_{EV}\bar{r}_{EV}^T - \bar{r}_{EV}^2 I\right),$$

$$\bar{R}(t_n) = \bar{0}, \quad \bar{V}(t_n) = \bar{I}.$$

В момент t_{n+1} делается другая засечка положения, и из соотношения (10.9) будем иметь

$$\delta\overline{r}_{MV}(t_{n+1})=\overline{R}(t_{n+1})\,\delta\overline{v}_{MV}(t_n).$$

Полученная отсюда оценка $\delta\overline{v}_{MV}(t_n)$ может быть подставлена в формулу (10.8) для определения поправки к $\overset{\approx}{v}_{MV}(t_{n+1})$. Итак,

$$\delta\overline{v}_{MV}(t_{n+1})=\overline{V}(t_{n+1})\,\overline{R}^{-1}(t_{n+1})\,\delta\overline{r}_{MV}(t_{n+1})=$$
$$=\overline{C}(t_{n+1})\,\delta\overline{r}_{MV}(t_{n+1}). \qquad (10.10)$$

Вместо того чтобы вычислять $\overline{R}(t)$ и $\overline{V}(t)$ по отдельности, удобнее использовать дифференциальное уравнение для непосредственного расчета $\overline{C}(t)$. Однако, поскольку элементы $\overline{C}(t_n)$ стремятся к бесконечности, нужно прямо работать с обратной матрицей $\overline{C}^{-1}(t)$. Дифференциальное уравнение для обратной матрицы, выведенное в разд. 6.5, имеет вид

$$\frac{d\overline{C}^{-1}}{dt}+\overline{C}^{-1}\overline{G}\,\overline{C}^{-1}=\overline{I} \qquad (10.11)$$

при начальных условиях

$$\overline{C}^{-1}(t_n)=\overline{0}.$$

Вычислительное устройство системы наведения может непрерывно решать дифференциальное уравнение (10.11), получая $\overline{C}(t_{n+1})$. Затем следует использовать формулу (10.10) для определения поправки к вычисленной скорости.

Заметим, что из рассмотрения матричного дифференциального уравнения (10.11) с учетом симметричности матрицы $\overline{G}$ нетрудно убедиться в симметричности матрицы $\overline{C}$. Таким образом, для нахождения элементов матрицы $\overline{C}$ достаточно решить всего лишь шесть обыкновенных дифференциальных уравнений.

Задачи

10.1. Пусть положение летательного аппарата на орбите вокруг планеты задано полярными координатами r и θ. Если a_{Tr} и $a_{T\theta}$ — проекции ускорения от тяги ракетного двигателя на радиальное и трансверсальное направления, то уравнения движения корабля имеют вид

$$\frac{d^2r}{dt^2}=r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2-\frac{\mu}{r^2}+a_{Tr}, \qquad (10.12)$$

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)=ra_{T\theta}, \qquad (10.13)$$

где μ — гравитационная постоянная планеты.

Предполагается, что корабль в начальный момент находится на круговой орбите радиуса r_0 и что начиная с момента $t=0$

прикладывается постоянное радиальное ускорение от тяги до тех пор, пока не будет достигнута скорость убегания.

а) Интегрируя уравнения (10. 12) и (10. 13) и учитывая равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dr}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=\frac{d^2r}{dt^2},$$

показать, что радиальная скорость в функции величины радиуса-вектора определяется следующим выражением:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=2(r-r_0)a_{T_r}+\frac{\mu}{r}\left(2-\frac{r_0}{r}-\frac{r}{r_0}\right). \qquad (10.14)$$

б) Корабль достигнет скорости убегания в момент выполнения равенства

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]-\frac{\mu}{r}=0.$$

Показать, что в этот момент радиальная дальность до корабля r_e определяется формулой

$$r_e=r_0\left(1-\frac{\mu}{2r_0^2a_{T_r}}\right)$$

и найти радиальную и трансверсальную составляющие скорости для этого случая.

в) Используя уравнение (10. 14), показать, что время, необходимое для разгона корабля до скорости убегания, может быть выражено через эллиптические интегралы F и E соответственно первого и второго рода:

$$F(k, \arcsin x)=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}};$$

$$E(k, \arcsin x)=\int_0^x\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx.$$

10. 2. Корабль находится вначале на круговой орбите радиуса r_0 и начиная с момента $t=0$ к нему приложено постоянное трансверсальное ускорение от тяги.

а) Исключая θ из уравнений (10. 12) и (10. 13), показать, что r представляет собой решение дифференциального уравнения третьего порядка

$$\frac{d}{dt}\left(r^3\frac{d^2r}{dt^2}+\mu r\right)^{1/2}=ra_{T\theta} \qquad (10.15)$$

с начальными условиями $r=r_0$, $\left(\frac{dr}{dt}\right)_0=\left(\frac{d^2r}{dt^2}\right)_0=0.$

б) При очень малых значениях $a_{T\theta}$ радиальное ускорение корабля будет весьма малым. Показать, что, пренебрегая величиной $r^3(d^2r/dt^2)$ по сравнению с μr, можно записать

$$r=\frac{r_0}{\left(1-a_{T\theta}t\sqrt{\frac{r_0}{\mu}}\right)^2}.$$

в) При допущении, принятом в п. «б», доказать справедливость уравнений

$$\frac{dr}{dt}=\frac{2a_{T\theta}\sqrt{\frac{r_0^3}{\mu}}}{\left(1-a_{T\theta}t\sqrt{\frac{r_0}{\mu}}\right)^3},$$

$$r\frac{d\theta}{dt}=\sqrt{\frac{\mu}{r_0}}\left(1-\sqrt{\frac{r_0}{\mu}}a_{T\theta}t\right),$$

откуда выражение для времени разгона до скорости убегания будет иметь вид

$$t_e=\frac{\sqrt{\frac{\mu}{r_0}}}{a_{T\theta}}\left[1-\left(\frac{2r_0^2a_{T\theta}}{\mu}\right)^{1/4}\right]. \qquad (10.16)$$

10. 3. Корабль находится вначале на круговой орбите радиуса r_0 и начиная с момента $t=0$ к нему прикладывается постоянное тангенциальное ускорение от тяги a_{Tt}. Если γ — угол между радиусом-вектором и вектором скорости, то уравнения движения корабля записываются следующим образом:

$$\frac{dv}{dt}=a_{Tt}-\frac{\mu}{r^2}\cos\gamma, \qquad (10.17)$$

$$\frac{v^2}{\varrho}=\frac{\mu}{r^2}\sin\gamma, \qquad (10.18)$$

где v — модуль вектора скорости, а ϱ — мгновенный радиус кривизны орбиты. Если ψ есть угол между вектором скорости и фиксированным направлением, от которого отсчитывается полярный угол θ, то

$$\psi=\theta+\gamma$$

и

$$\varrho=\frac{ds}{d\psi},$$

где s — дальность вдоль дуги, по которой движется корабль.

а) Используя соотношения

$$(ds)^2=(dr)^2+(r\,d\theta)^2$$

и

$$\frac{ds}{dt}=v,$$

показать, что уравнения движения (10.17) и (10.18) могут быть записаны в виде

$$v\frac{dv}{ds}=a_{Tt}-\frac{\mu}{r^2}\frac{dr}{ds}. \qquad (10.19)$$

$$\frac{v^2}{\varrho}=\frac{\mu}{r}\frac{d\theta}{ds}, \qquad (10.20)$$

т. е. s можно рассматривать в качестве независимой переменной вместо t.

б) Показать, что уравнение (10.20) может быть преобразовано к виду

$$v^2=\frac{\mu}{r}\frac{ds}{d\psi}\frac{d\theta}{ds}=\frac{\mu}{r}\left(\frac{d\psi}{d\theta}\right)^{-1}=\frac{\mu}{r}\frac{1-\left(\frac{dr}{ds}\right)^2}{1-\left(\frac{dr}{ds}\right)^2-r\frac{d^2r}{ds^2}}. \qquad (10.21)$$

в) Интегрируя уравнение (10.19), получить

$$v^2=2sa_{Tt}+\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{r_0}\right). \qquad (10.22)$$

Объединяя далее (10.22) с (10.21), получить следующее дифференциальное уравнение относительно $r(s)$:

$$\left[2sa_{Tt}+\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{r_0}\right)\right]r\frac{d^2r}{ds^2}=\left[2sa_{Tt}+\right.$$

$$\left.+\mu\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)\right]\left[1-\left(\frac{dr}{ds}\right)^2\right]. \qquad (10.23)$$

г) В момент достижения условий убегания скорость будет соответствовать параболической орбите. Используя уравнение (10.22), показать, что полное расстояние, пройденное кораблем, будет выражаться формулой

$$s_e=\frac{\mu}{2r_0a_{Tt}}.$$

Затем, пользуясь уравнением (10.23), показать, что в момент достижения скорости убегания справедливо следующее уравнение:

$$2r\frac{d^2r}{ds^2}=1-\left(\frac{dr}{ds}\right)^2. \qquad (10.24)$$

д) Полагая, что ускорение a_{Tt} весьма мало, так что производная d^2r/ds^2 близка к нулю, найти приближенное решение уравнения (10.23) в виде

$$r = \frac{r_0}{1 - 2r_0 s a_{Tt}/\mu}$$

и приближенную формулу для полного числа оборотов вокруг планеты к моменту разгона до скорости убегания

$$N_e = \frac{1}{2\pi}\int_0^{s_e} \frac{ds}{r} = \frac{\mu}{8\pi r_0^2 a_{Tt}}.$$

е) Показать, что если приближенное решение п. «д» удовлетворяет уравнению (10.24), то при этом должно быть справедливым выражение

$$s_e = \frac{\mu}{2r_0 a_{Tt}}\left[1 - 20^{1/4}\left(\frac{r_0^2 a_{Tt}}{\mu}\right)^{1/2}\right].$$

Используя это значение s_e, проинтегрировать уравнение (10.22) и найти время разгона до скорости убегания

$$t_e = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{r_0}}}{a_{Tt}}\left[1 - 20^{1/4}\left(\frac{r_0^2 a_{Tt}}{\mu}\right)^{1/2}\right]. \qquad (10.25)$$

Сравнивая полученный результат с уравнением (10.16), можно видеть, что тангенциальная тяга несколько более эффективна, чем трансверсальная.

10.4. Двигатель корабля, обращающегося по эллиптической орбите вокруг планеты, может развивать непрерывную малую тягу. Требуется перевести корабль на круговую орбиту радиуса r_0. Это можно выполнить, сравнивая истинную скорость корабля $\bar{v}$ с командной скоростью $\bar{v}_c$ и ориентируя вектор тяги в направлении векторной разности скоростей $\bar{v}_d = \bar{v}_c - \bar{v}$. Командную скорость $\bar{v}_c$ можно определить как скорость, которую корабль должен был бы иметь при его настоящем положении $\bar{r}$, находясь на эллиптической орбите вокруг планеты с заданной величиной радиуса-вектора перицентра r и с минимально возможным эксцентриситетом.

а) Показать, что этот минимальный эксцентриситет равен

$$\frac{r - r_0}{r + r_0}.$$

б) Показать, что командная скорость подчиняется следующему выражению:

$$\bar{v}_c = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{2\mu r_0}{r(r + r_0)}}\,\bar{r} \times \bar{n},$$

где $\bar{n}$ — единичный вектор, нормальный к орбитальной плоскости.

10. 5. Используя уравнение (10. 1), доказать справедливость уравнения

$$\frac{dv_d}{dt} = -\frac{1}{v_d}\left[(\bar{a}_T - \bar{a}_c)\cdot \bar{v}_d + \bar{v}_d \cdot (\bar{M}\bar{v}_d)\right].$$

Иначе говоря, требуется показать, что скорость уменьшения v_d в любой момент времени будет максимальной, если ускорение $\bar{a}_T$ направлено параллельно $\bar{v}_d$.

Библиография

Практические электроракетные двигатели малой тяги с большими удельными импульсами в настоящее время интенсивно разрабатываются для будущих космических полетов. Тяга таких двигателей значительно меньше веса космического корабля, поэтому полет с электроракетными двигателями может начинаться только после того, как корабль выведен на орбиту. Траектории, по которым будут летать эти корабли, весьма отличны от траекторий полета кораблей с большой тягой; точно так же будут крайне специфичными и проблемы, связанные с наведением аппаратов малой тяги.

Много внимания было уделено задаче оптимизации траекторий малой тяги для минимизации времени перелета. Ярким примером исследований такого рода является работа Лоудена [37]. В этой главе мы не касались проблем оптимизации и лишь вкратце затронули их в разделе задач. Задачи 10. 1 и 10. 2 построены на материале статьи Цзяна [62], а задача 10. 3 взята из работы Бенни [15].

Очень мало внимания уделялось до сих пор вопросам наведения космических кораблей с двигателями малой тяги. Кроме докторской диссертации Дж. Миллера [44], автор не знает ни одного глубокого исследования в этой области.

Материал настоящей главы основан на совместной статье д-ра Миллера и автора [12]. Работа проводилась по заказу Исследовательского отделения фирмы Авко Корпорэйшн.

Метод наведения, упомянутый в задаче 10. 4, принадлежит д-ру Лэнингу.

Приложение

Постоянные и физические параметры

Цель настоящего приложения — снабдить читателя минимально необходимыми справочными данными о наиболее важных постоянных и физических параметрах Солнечной системы. Мы не пытаемся давать здесь совершенно точные с точки зрения астрономии формулировки. Если читатель захочет более подробно ознакомиться с астрономическими обозначениями и определениями, можно порекомендовать ему обратиться к книге Смарта [57] и «Справочному дополнению к эфемеридам» [21]. Большинство приводимых ниже данных взято из последнего справочника. Постоянные, относящиеся к форме Земли и Луны, взяты из работы Мейкемсона, Бэйкера и Уэстрома [42].

Земля

Экваториальный радиус	6378 *км*
Полярный радиус	6357 *км*
Нормальное гравитационное ускорение (g)	$9{,}812-0{,}024\cos 2\Phi$ *м/сек*^{2} (Ф — геодезическая широта)
Наклонение экватора к эклиптике	23°27′
Среднее расстояние от Солнца до Земли	149 500 000 *км*
Отношение масс:	
Солнце/Земля	333 432
Солнце/(Земля+Луна)	329 100
Средняя орбитальная скорость	107 160 *км/час*
Скорость вращения	15″,041067 за среднюю солнечную секунду
Период прецессии точки равноденствия	~25 725 лет
Скорость на экваторе	1673 *км/час*
Гравитационная постоянная (G, умноженная на массу Земли)	398606,6 *км*^{3}/*сек*^{2}

Коэффициенты потенциальной функции ($\times 10^6$)

$J_2 = 1082{,}28 \pm 0{,}03$

$J_3 = -2{,}3 \pm 0{,}2$

$J_4 = -2{,}12 \pm 0{,}05$

$J_5 = -0{,}2 \pm 0{,}1$

$J_6 = 1{,}0 \pm 0{,}8$

Луна

Средний радиус	1738 *км*
Гравитационное ускорение на поверхности	0,16 g

Среднее расстояние от Земли	384 402 *км*
Средний эксцентриситет орбиты	0,05490
Среднее наклонение орбиты к эклиптике . . .	5°09′
Среднее наклонение орбиты к лунному экватору	6°41′
Пределы склонения	±29°
Период вращения линии узлов	6798 дней
Период обращения перигея	3232 дня
Отношение масс Земля/Луна	81,31
Средняя орбитальная скорость	3685 *км/час*

Фигуру Луны хорошо представляет трехосный эллипсоид с полуосями a, b и c, где a направлена к Земле, c — вдоль оси вращения, а b — образует с a и c ортогональную систему координат. Величины этих осей:

$$a = 1738{,}57 \pm 0{,}07 \text{ км},$$

$$b = 1738{,}31 \pm 0{,}07 \text{ км},$$

$$c = 1737{,}58 \pm 0{,}07 \text{ км}.$$

Моменты инерции относительно главных осей A, B и C определяются из выражений

$$\frac{C - A}{C} = 0{,}0006269 \pm 0{,}0000027,$$

$$\frac{B - A}{C} = 0{,}000209 \pm 0{,}000001,$$

$$C = 0{,}334 \pm 0{,}002 \text{ (масса Луна)} \times \text{(радиус Луны)}^2.$$

Если за единицу массы взять массу Солнца, за единицу длины — астрономическую единицу, а за единицу времени — эфемеридный день, то величина универсальной гравитационной постоянной составит $G = 0{,}000\,295\,912\,208\,286$.

Значения G можно, конечно, получить и для других единиц измерения, но их точность будет ограничена той точностью, с которой новые единицы длины, массы и времени известны по отношению к первоначальным основным единицам. Например, так как

$$\text{масса Солнца} = 1{,}99 \times 10^{30} \text{ кг}$$

и точно известны лишь две цифры после запятой, применение более привычных для инженера единиц существенно понизит точность.

Для грубых расчетов часто удобно иметь дело с астрономической единицей, годом и массой Солнца, а далее пренебрегать всеми другими массами по сравнению с массой Солнца. В этом случае $G \approx 4\pi^2$.

В табл. 1 приведены данные о размерах, характеристиках вращения и притяжении различных планет, а также радиусы лапласовых сфер влияния. В случае Луны вторым телом, используемым при вычислении сферы влияния, является Земля.

Таблица 1

Физические параметры планет

Планета	Отношение радиуса к радиусу Земли	Отношение масс планета/Солнце m_1/m_3	Гравитационное ускорение на поверхности ед. g	Период вращения	Наклонение экватора к орбите	Радиус сферы влияния *км*
Меркурий	0,39	0,00000017	0,36	88 суток	?	111 780
Венера	0,97	0,00000245	0,87	?	32°	616 960
Земля	1,00	0,000002999	1,00	23 *часа* 56 *мин* 04 *сек*	23°27′	924 820
Луна	0,27	0,000000037	0,16	27,32166 суток	6°41′	66 282
Марс	0,53	0,00000032	0,38	24 *часа* 37 *мин* 23 *сек*	23°59′	577 630
Юпитер	11,19	0,000954786	2,64	9 *час* 50 *мин* 30 *сек*	3°04′	48 141 000
Сатурн	9,47	0,000285584	1,13	10 *час* 14 *мин*	26°44′	54 744 000
Уран	3,69	0,000043727	1,07	10 *час* 49 *мин*	97°53′	51 755 000
Нептун	3,50	0,000051776	1,41	14 *час*?	28°48′	86 925 000

Орбитальные элементы планет

В астрономических расчетах принято отсчитывать астрономические дни начиная с гринвичского полудня 1 января 4713 года до нашей эры. Величина, присваиваемая каждому такому дню, называется *числом юлианских дней* и означает количество дней, прошедших к гринвичскому полудню настоящего дня, начиная с эпохи. Юлианский год содержит точно 365,25 юлианских дней, а юлианский век — 36 525 юлианских дней. В «Морском календаре» указывается связь между числом юлианских дней и обычными календарными днями.

В табл. 2 приведены средние орбитальные элементы планет на эпоху 1960 янв. 1,5 по эфемеридному времени, соответствующему 2 436 935 юлианским дням. Эти данные могут быть использованы для нахождения истинных орбит с точностью примерно до угловой минуты. Если требуется большая точность, следует обратиться к стандартным таблицам.

Таблица 2

Средние орбитальные элементы планет на эпоху 1960 янв. 1,5 эфемеридного времени

Планета	Наклонение i	Средняя долгота узла Ω	Средняя долгота перигелия w	Средняя долгота в эпоху ξ	Эксцентриситет e
Меркурий	7°,00399	47°,85714	76°,83309	222°,62165	0,205627
Венера	3,39423	76,31972	131,00831	174,29431	0,006793
Земля	0,0	0,0	102,25253	100,15815	0,016726
Марс	1,84991	49,24903	335,32269	258,76729	0,093368
Юпитер	1,30536	100,04444	13,67823	259,83112	0,048435
Сатурн	2,48991	113,30747	92,26447	280,67135	0,055682
Уран	0,77306	73,79630	170,01083	141,30496	0,047209
Нептун	1,77375	131,33980	44,27395	216,94090	0,008575

	Среднее расстояние a	Сидерический период	Синодический период	Среднее дневное движение n	Орбитальная скорость *км/сек*
Меркурий	0,387099	0,24085	115^d,88	4°,092339	47,8
Венера	0,723322	0,61521	583,92	1,602131	34,9
Земля	1,000000	1,00004		0,985609	29,8
Марс	1,523691	1,88089	779,94	0,524033	24,1
Юпитер	5,202803	11,86223	398,88	0,083091	13,0
Сатурн	9,538843	29,45772	378,09	0,033460	9,6
Уран	19,181951	84,01331	369,66	0,011732	6,8
Нептун	30,057779	164,79345	367,48	0,005981	5,5

В этой таблице также помещены так называемые *синодические периоды* обращения планет. Синодический период определяется как интервал времени между двумя последовательными совпадениями гелиоцентрических долгот планеты и Земли.

Коэффициенты ряда Фурье—Бесселя для разложения

$$E = M + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin kM$$

Меркурий

$C_1 = 0{,}204541$; $C_2 = 0{,}020845$; $C_3 = 0{,}003184$;

$C_4 = 0{,}000576$; $C_5 = 0{,}000114$; $C_6 = 0{,}000024$;

$C_7 = 0{,}000005$; $C_8 = 0{,}000001$.

Венера

$$C_1=0{,}006793; \quad C_2=0{,}000023.$$

Земля

$$C_1=0{,}016726; \quad C_2=0{,}000140; \quad C_3=0{,}000002.$$

Марс

$$C_1=0{,}093264; \quad C_2=0{,}004346; \quad C_3=0{,}000304;$$

$$C_4=0{,}000025; \quad C_5=0{,}000002.$$

Приблизительное положение Луны

В 1920 г. Браун опубликовал необычайно полную систему таблиц движения Луны. В его теории рассматривались около 1500 отдельных членов, учитывающих возмущения, влияющие на движение Луны вследствие таких факторов, как присутствие Солнца и планет, эллипсоидную геометрию Земли и вековое ускорение Луны. Начиная с 1923 г. и до недавнего времени таблицы Брауна использовались для вычислений, результаты которых публиковались в «Морском календаре».

Разложения в ряды Брауна в сокращенном виде могут быть с успехом применены для приближенного расчета положения Луны в функции времени. В настоящем приложении будут описаны необходимые вычисления и проведено сравнение их точности с эфемеридами.

Пусть l_M, w_M, Ω_M — геоцентрические средние долготы Луны, перигея и восходящего узла ее орбиты. Обозначим также геоцентрические средние долготы Солнца и перигея его орбиты через l_s и w_S. Введем далее величины

$$A=l_M-l_S \qquad C=l_S-w_S$$

$$B=l_M-w_M \qquad D=l_M-\Omega_M$$

и присвоим им следующие наименования:

A — половина аргумента «вариации»,

B — аргумент главного эллиптического члена,

C — аргумент «годового уравнения»,

D — аргумент главного члена широты.

Обозначим через r расстояние от Луны до центра Земли, через λ — истинную аномалию, измеряемую в плоскости эклиптики, и через β — широту над плоскостью эклиптики. Как известно, r, $\lambda - l_M$ и β могут быть выражены в виде суммы периодических членов, чьи аргументы в свою очередь будут представлять собой алгебраические суммы четырех углов A, B, C и D с постоянными коэффициентами. Вместо расстояния r принято использовать величину, называемую «горизонтальным параллаксом» и равную половине углового диаметра Земли, наблюдаемой с Луны.

В нашем случае выражения для долготы, широты и параллакса взяты из «Записок королевского Астрономического общества» *. В этих выражениях учитывается влияние лишь солнечных возмущений. Кроме того, для долготы и широты оставлены только те члены, коэффициенты которых превышают по величине 60 угловых секунд. В выражении для параллакса нижний предел принят равным 1 *сек*. Ниже приводятся указанные разложения в угловых секундах:

Долгота $= l_M + 22\,639{,}500 \sin B - 4\,586{,}426 \sin(B-2A) + 2\,369{,}902 \sin 2A + 769{,}016 \sin 2B - 668{,}111 \sin C - 411{,}608 \sin 2D - 211{,}656 \sin(2B-2A) - 205{,}962 \sin(B+C-2A) - 125{,}154 \sin A + 191{,}953 \sin(B+2A) - 165{,}145 \sin(C-2A) + 147{,}693 \sin(B-C) - 109{,}667 \sin(B+C)$.

Широта $= 18\,461{,}480 \sin D + 1\,010\,180 \sin(B+D) - 999{,}695 \sin(D-B) - 623{,}658 \sin(D-2A) + 117{,}262 \sin(D+2A) + 199{,}485 \sin(D+2A-B) - 166{,}577 \sin(B+D-2A) + 61{,}913 \sin(2B+D)$.

Параллакс $= 34\,22{,}7000 + 1\,86{,}5398 \cos B + 34{,}3117 \cos(B-2A) + 28{,}2\,333 \cos 2A + 10{,}1\,657 \cos 2B + 3{,}0861 \cos(B+2A) + 1{,}9202 \cos(C-2A) + 1{,}4455 \cos(B+C-2A) + 1{,}1542 \cos(B-C)$.

Основные аргументы этих уравнений являются функциями времени и приведены в «Таблицах движения Луны» Брауна. Время t_c выражается в юлианских веках по 36 525 дней начиная с эпохи 1900,0.

Уравнения Брауна для указанных величин имеют вид

$$l_M = 270°26'\,11'',71 + 1\,336^r 307°53'26'',06\ t_c + 7,14''\ t_c^2 + 0'',0068\ t_c^3,$$

$$\varpi_M = 334°19'46'',40 + 11^r 109°02'02'',52\ t_c - 37'',17\ t_c^2 - 0'',045\ t_c^3,$$

$$\Omega_M = 259°10'59'',79 - 5^r 134°08'31'',23\ t_c + 7'',48\ t_c^2 + 0'',008\ t_c^3,$$

$$A = 350°44'23'',67 + 1\,236^r 307°07'17'',93\ t_c + 6'',05\ t_c^2 + 0'',0068\ t_c^3,$$

$$B = 296°06'25'',31 + 1\,325^r 198°51'23'',54\ t_c + 44'',31\ t_c^2 + 0'',0518\ t_c^3,$$

$$C = 358°28'33'',0 + 99^r 359°02'59'',10\ t_c - 0'',54\ t_c^2 - 0'',0120\ t_c^3,$$

$$D = 11°15'11'',92 + 1\,342^r 82°1\,57'',29\ t_c - 0'',34\ t_c^2 - 0'',0012\ t_c^3.$$

На гринвичский средний полдень 0 янв. 1900 приходится 2 415 020 юлианских дней, так что t_c можно выражать в виде

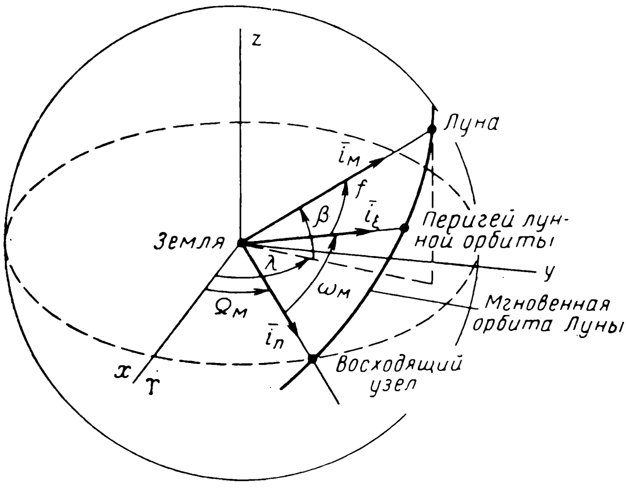
$$t_c = \frac{\text{число юлианских дней} - 2\,415\,020}{36\,525}.$$

Примечание. Юлианский день начинается в полдень, тогда как календарный день начинается в полночь. Например, календарная дата 7,0 января 1958 г. эквивалентна юлианской дате 2 436 210,5.

---

* Memoirs of the Royal Astronomical Society, vol. LVII, pp. 109—145.

Для выяснения точности приближенных расчетов долгота, широта и параллакс были вычислены с 10-дневным интервалом для 1958 г. начиная с 7,0 января и сравнивались с данными, взятыми из справочника «Американские эфемериды и Морской календарь». Результаты сравнения приведены в табл. 3. Максимальное расхождение по долготе составило около 3 угловых минут, по широте — около 2 *мин* и по параллаксу — около 2 угловых секунд.



Геометрия относительного расположения Луны и Земли

Для вычисления положения Луны обратимся к рисунку, где x, y, z — геометрическая эклиптическая прямоугольная система координат, чья ось x направлена в точку весеннего равноденствия. Тогда, если $\bar{i}_x$, $\bar{i}_y$, $\bar{i}_z$ — орты выбранной системы координат, то единичный вектор $\bar{i}_M$, указывающий направление на Луну, выражается через широту и долготу следующим образом:

$$\bar{i}_M = \cos\beta\cos\lambda\cdot\bar{i}_x + \cos\beta\sin\lambda\cdot\bar{i}_y + \sin\beta\cdot\bar{i}_z.$$

Далее введем два единичных вектора: $\bar{i}_n$ в направлении на восходящий узел и $\bar{i}_\xi$ в направлении перигея орбиты Луны. Обозначив через i_M угол наклонения лунной орбиты к эклиптике, а через ω_M долготу перигея, отсчитываемую от восходящего узла, найдем

$$\bar{i}_n = \cos\Omega_M\bar{i}_x + \sin\Omega_M\bar{i}_y,$$

$$\bar{i}_\xi = (\cos\Omega_M\cos\omega_M - \sin\Omega_M\sin\omega_M\cos i_M)\,\bar{i}_x + \\ + (\sin\Omega_M\cos\omega_M + \cos\Omega_M\sin\omega_M\cos i_M)\bar{i}_y + \\ + \sin\omega_M\sin i_M\,\bar{i}_z,$$

Таблица 3

Сравнение аппроксимированного положения Луны с данными эфемерид на 1958 г.

Дата	Аппроксимированное положение			Положение согласно эфемеридам		
	долгота	широта	горизонтальный параллакс	долгота	широта	горизонтальный параллакс
7 января	121°35′42″,2	—5°00′14″,0	59′29″,50	121°35′16″,4	—5°00′20″,5	59′29″,21
17 „	261°40′54″,5	+3°30′47″,6	56′59″,50	261°42′03″,9	+3°31′13″,6	56′57″,65
27 „	24°34′41″,8	+0°59′23″,2	54′25″,17	24°34′29″,5	+0°58′22″,8	54′25″,69
6 февраля	159°51′18″,7	—4°07′13″,9	60′46″,23	159″53′13″,1	—4°06′13″,2	60′46″,58
16 „	296°55′41″,3	+4°59′30″,6	55′21″,82	296°57′49″,1	+5°00′10″,1	55′21″,25
26 февраля	56°57′00″,1	—2°04′46″,2	55′16″,48	56°59′34″,4	—2°06′18″,7	55′17″,06
8 марта	128°28′33″,5	—1°14′00″,7	60′55″,20	198°30′59″,7	—1°12′39″,7	60′55″,81
18 „	330°38′45″,8	+4°32′31″,2	54′17″,32	330°39′24″,5	+4°32′27″,0	54′16″,89
28 „	91°05′21″,3	—4°31′27″,2	56′39″,22	91°08′31″,5	—4°32′27″,1	56′38″,34
7 апреля	236°19′39″,2	+2°14′09″,4	59′54″,00	236°19′57″,1	+2°14′31″,2	59′54″,46
17 апреля	3°15′58″,6	+2°29′55″,6	53′58″,59	3°15′13″,6	+2°29′29″,9	53′57″,74
27 „	127°29′07″,1	—5°15′40″,7	58′10″,56	127°30′22″,8	—5°15′55″,6	58′08″,96
7 мая	272°40′36″,1	+4°38′09″,1	58′09″,54	272°40′07″,0	+4°38′20″,3	58′11″,07
17 „	35°34′27″,6	—0°23′41″,6	54′27″,93	35°34′07″,2	—0°23′49″,5	54′27″,54
27 „	165°46°46″,1	—3°41′27″,7	59′15″,58	165°47′22″,7	—3°41′33″,8	59′15″,91
6 июня	307°16′49″,7	+5°06′14″,4	56′20″,77	307°16′42″,6	+5°07′13″,1	56′23″,25
16 „	68°34′26″,3	—3°10′40″,5	55′42″,77	68°35′29″,0	—3°11′13″,2	55′43″,16
26 „	204°57′58″,6	—0°22′22″,8	59′24″,66	204°57′52″,7	—0°22′23″,1	59′26″,63
6 июля	340°17′50″,1	+3°43′19″,2	54′58″,10	340°17′41″,4	+3°44′21″,8	54′59″,60
16 „	103°09′44″,8	—4°50′39″,3	57′32″,08	103°10′53″,4	—4°51′47″,6	57′32″,45

где

$$\cos i_M = \frac{|\bar{i}_n \times \bar{i}_M \cdot \bar{i}_z|}{|\bar{i}_n \times \bar{i}_M|} =$$

$$= \frac{\cos\beta \sin|\lambda - \Omega_M|}{\sqrt{1 - \cos^2\beta \cos^2(\lambda - \Omega_M)}}.$$

Истинная аномалия Луны f может определяться из выражения

$$\cos f = \bar{i}_\xi \cdot \bar{i}_M = \cos\beta \cos\omega_M \cos(\lambda - \Omega_M) +$$

$$+ \cos\beta \sin\omega_M \cos i_M \sin(\lambda - \Omega_M) + \sin\beta \sin\omega_M \sin i_M.$$

Знак $\sin f$ тот же, что и знак произведения $\bar{i}_\xi \times \bar{i}_M \cdot \bar{i}_z$, откуда

$$\sin f = \operatorname{sgn}[\cos\omega_M \sin(\lambda - \Omega_M) -$$

$$- \sin\omega_M \cos i_M \cos(\lambda - \Omega_M)] \sqrt{1 - \cos^2 f}.$$

Наконец, расстояние r_{EM} от Луны до центра Земли вычисляется по формуле

$$r_{EM} = \frac{r_{eq}}{\sin(\text{параллакс})},$$

где r_{eq} — экваториальный радиус Земли.

Литература

1. Advanced Research Consultants: Some Aspects of Midcourse Guidance, Rept. R62—5, Lexington, Mass, July, 1962.

2. Andersson S., On the Change with Time in the Disturbed Motion of Two Bodies, Ark. Astron., vol. 1, pp. 207—214, May, 1950.

3. Anthony M. L., and Fosdick G. E., Satellite Motions about an Oblate Planet, J. Aerospace Sci., vol. 28, pp. 789—802, October, 1961.

4. Baker R. M. L. Jr. and Makemson M. W., An Introduction to Astrodynamics, Academic Press, Inc., New York, 1960.

5. Battin R. H., The Determination of Round-trip Planetary Reconnaissance Trajectories, J. Aerospace Sci., vol. 26, pp. 545—567, September, 1959.

6. Battin R. H., Interplanetary Trajectory Analysis, Navigation and Control, Inertial Guidance—Terrestrial and Interplanetary, chap. IX, MIT Department of Aeronautics and Astronautics, Cambridge, Mass., 1960.

7. Battin R. H., A Comparison of Fixed and Variable Time of Arrival Navigation for Interplanetary Flight, Proc. 5th AFBMD/STL Aerospace Symp. Ballistic Missile Space Technol., pp. 3—31, Academic Press, Inc., New York, 1960.

8. Battin R. H., Universal Formulae for Conic Trajectory Calculations, MIT Instrumentation Lab. Rept. R—382, Cambridge, Mass., September, 1962.

9. Battin R. H., A Statistical Optimizing Navigation Procedure for Space Flight, ARS J., vol. 32, pp. 1681—1696, November, 1962. (Русский перевод: „Ракетная техника и космонавтика",1962, № 11).

10. Battin R. H. and Laning J. H. Jr., A Navigation Theory for Round-trip Reconnaissance Missions to Venus and Mars, Planetary Space Sci, vol. 7, pp. 40—56, Pergamon Press, New York, 1961.

11. Battin R. H. and Laning J. H. Jr., The Trajectory Problem as It Relates to the Mission for Interplanetary Flight, in Sidney Less (ed.), Air, Space and Insrtuments, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1963.

12. Battin R. H. and Miller J. S., Trajectories and Guidance Theory for a Continuous Low Thrust Lunar Reconnaissance Vehicle, Proc. 6th Symp. Ballistic Missile Aerospace Technol., vol. 2, pp. 3—37, Academic Press, New York, 1961.

13. Battin R. H. and Miller J. S., Circumlunar Trajectory Calculations, MIT Instrumentation Lab. Rept. R—353, Cambridge, Mass., April, 1962.

14. Beckner F. L., Regions Accessible to a Ballistic Weapon, Proc. 5th AFBMD/STL Aerospace Symp., vol. 111, pp. 317—366, Academic Press, New York, 1960.

15. Benny D. J., Escape from a Circular Orbit Using Tangential Thrust, Jet Propulsion, vol. 28, pp. 28, 67—169, March, 1958.

16. Boksenbom A. S., A Method of Graphical Trajectory Analysis, IAS Proc Natl. Specialists Meeting on Guidance of Aerospace Vehicles, pp. 209—221, May, 1960.

17. Breakwell J. V., The Spacing of Corrective Thrusts in Interplanetary Navigation, Advances Astronaut. Sci., vol. 5, pp. 53—65, Plenum Press, Inc., New York, 1960.

18. Cramer H., Mathematical Methods of Statistics, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1946. (Русский перевод: Г. Крамер, Математические методы статистики, ИЛ, 1948).

19. Crocco G. A., One Year Exploration Trip Earth-Mars-Venus-Earth, Proc. 7th Intern. Astronaut. Congr., Rome, 1956.

20. Danby J. M. A., Fundamentals of Celestial Mechanics, The Macmillan Company, New York, 1962.

21. Explanatory Supplement to the Astronautical Ephemeris and The American Ephemeris and Nautical Almanac, Her Majesty's Stationery Office, London, 1961.

22. Gates C. R., Scull J. R., and Watkins K. W., Space Guidance, Astronautics, vol. 6, pp. 24—27, 64—72, November, 1961.

23. Gedeon G. S., Orbital Mechanics of Satellites, Proc. Am. Astronaut. Soc., paper 19, August, 1958.

24. Godal Th., Conditions of Compatibility of Terminal Positions and Velocities, Proc. 11st Intern. Astronaut. Congr., Stockholm, pp. 40—44, 1960.

25. Godal Th., Method for Determining the Initial Velocity Corresponding to a Given Time of Free Flight Transfer between Given Points in a Simple Gravitational Field, Astronautics, February, 1961.

26. Haake H. B., and Welch J. D., A Self-contained Interplanetary Navigator, IRE Trans. Aerospace Navigational Electron., vol. ANE—8 No. 1, pp. 28—41, March, 1961.

27. Herget P., The Computation of Orbits, published privately by the author, Ann Arbor, Mich., 1948.

28. Herrick S., A Modification of the Variation of Constants Method for Special Perturbations, Publ. Astron. Soc. Pacific, vol. 60, pp. 321—323, 1948,

29. Herrick S., Astrodynamics, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., in press.

30. Hoelker R. E. and Silber R., The Bi-elliptical Transfer between Coplanar Circular Orbits, Proc. 4th AFBMD/STL Symp., vol. 3, pp. 164—175, Pergamon Press, New York, 1961.

31. Kalman R. E., A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, J. Basic Eng., Trans. Am. Soc. Mech. Engrs., vol. 82D, pp. 35—45. March, 1960.

32. Keenan R. V. and Regenhardt J. D., Star Occultion Measurements as an Aid to Navigation in Cis-lunar Space, MIT Instrumentation Lab. Rept. T—297, Cambridge, Mass., May, 1962.

33. Kizner W., A Method of Describing Miss Distances for Lunar and Interplanetary Trajectories, Proc. 4th AFBMD/STL Symp., vol. 3, pp. 125—131, Pergamon Press, New York, 1961.

34. Lagrange J. L., Oeuvres de Lagrange, vol IV, p. 559, 1778.

35. Laning J. L Jr. and Battin R. H., Random Processes in Automatic Control, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1956. (Русский перевод: Дж. Лэнинг и Р. Бэттин, Случайные процессы в задачах автоматического управления, ИЛ, 1958).

36. Laning J. H. Jr., Frey E. J. and Trageser M. B., Preliminary Considerations on the Instrumentation of a Photographic Reconnaissance of Mars, Vistas Astron., vol. 2, pp. 63—94, Pergamon Press, New York, 1959.

37. Lawden D. F., Optimal Escape from a Circular Orbit, Astronaut Acta, vol. IV, pp. 218—233, 1958.

38. Li-Shu Wen W., A Study of Cotangential Elliptical Transfer Orbits in Space Flight, J. Aerospace Sci., vol. 28, pp. 411—417, May, 1961.

39. MacCullagh J., On the Attraction of Ellipsoids with a New Demonstration of Clairaut's Theorem, Trans. Roy. Irish.

40. MacMillan W. D., Statics and the Dynamics of a Particle, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1927.

41. MacRobert T. M., Spherical Harmonics, Dover Publications, Inc., New York, 1948.

42. Makemson M., Baker R. L. M. and Westrom G. B., Analysis and Standardizations of Astrodynamic Constants, presented at the 7th Annual Meeting of AAS, Dallas, Tex., January, 1961.

43. McLean J. D., Schmidt S. F. and McGee L. A., Optimal Filtering and Linear Prediction Applied to a Space Navigation System for the Circumlunar Mission, NASA TN D—1208, March, 1962.

44. Miller J. S., Trajectory and Guidance Theory for a Low-thrust Lunar Reconnaissance Vehicle, MIT Instrumentation Lab. Rept. T—292, Cambridge, Mass., August, 1961.

45. MIT Instrumentation Laboratory Staff: A Recoverable Interplanetary Space Probe, Rept. R—235, Jyly, 1959.

46. MIT Instrumentation Laboratory Staff: Interplanetary Navigation System Study, Rept. R—273, April, 1960.

47. Moulton F. R., Celestial Mechanics, The Macmillan Company, New York, 1914. (Русский перевод: Мультон Ф, Введение в небесную механику, ОНТИ, 1935).

48. Noton A. R. M., Interplanetary Post-injection Guidance, JPL External Publ. 635, June, 1959.

49. Noton A. R. M., Cutting E. and Barnes F. L., Analysis of Radiocommand Mid-course Guidance, JPL Tech. Rept. 32—28, September, 1960.

50. Pines S., Variation of Parameters for Elliptic and Near Circular Orbits, Astron. J., vol. 66, pp. 5—7, February 1961.

51. Plummer H. C., An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy, Dover Publications, Inc., New York, 1960.

52. Sauer C. G. Jr. Interplanetary Injection Guidance, Proc. 5th AFBMD/STL Aerospace Symp., vol. 111, pp. 55—71, Academic Press, Inc., New York, 1960.

53. Scott D. R., Januska C. J. and Willes R. E., Optimum Statistical Operations with Celestial Fix Data for Interplanetary Navigation, MIT Instrumentation Lab. Rept. T—298, Cambridge, Mass., May, 1962.

54. Shapiro I. I., The Prediction of Ballistic Missile Trajectories from Radar Observations, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York., 1958. (Русский перевод: И. И. Шапиро, Расчет траекторий баллистических снарядов по данным радиолокационных наблюдений, ИЛ, 1961).

55. Siegel C. L., Vorlesungen Über Himmelsmechanik, Springer-Verlag OHG, Berlin, 1956. (Русский перевод: К. Зигель, „Лекции по небесной механике", ИЛ, 1959).

56. Smart W. M., Celestial Mechanics, Longmans, Green & Co., Inc., New York, 1953. (Русский перевод: У. Смарт, Небесная механика, изд. „Мир", 1965).

57. Smart W. M., Text-book on Spherical Astronomy, Cambridge University Press, New York, 1956.

58. Smith G. L., Schmidt S. F. and McGee L. A., Application of Statistical Filter Theory to the Optimal Estimation of Position and Velocity on Board a Circumlunar Vehicle, NASA TR R—135, 1962.

59. Stark H. M., Optimum Trajectories between Two Terminals in Space, ARS J., vol. 31, pp. 261—263, February, 1961.

60. Stern R. G., Interplanetary Midcourse Guidance Analysis, MIT Doctoral thesis, June, 1963.

61. Templeman W. H., Minimum-energy Intercepts Originating from a Circular Orbit, J. Aerospace Sci., vol. 28, pp. 924—929, December, 1961.

62. Tsien H. S., Take-off from Satellite Orbit, ARS J., Vol. 23, pp. 233—236, July—August, 1953.

63. Whittaker E. T., A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies, Cambridge University Press, New York, 1937.

64. Wintner A., Analytical Foundation of Celestial Mechanics, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1941.

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ ПЕРЕВОДЕ

65. Дубошин Г. Н., Теория тяготения, Физматгиз, 1963.

66. Субботин М. Ф., Курс небесной механики, т. I, ГТТИ, Л.—М., 1933.

67. Балк М. Б., Элементы динамики космического полета, изд. «Наука», 1965.

68. Кислик М. Д., Сферы влияния больших планет и Луны, «Космические исследования», изд. «Наука», 1964, т. II, вып. 6.

69. Дубошин Г. Н., Небесная механика. Основные задачи и методы, Физматгиз, 1963.

70. Эльясберг П. Е., Определение орбиты по двум положениям, сб. «Искусственные спутники Земли», изд. АН СССР, 1962, вып. 13.

71. Эльясберг П. Е., Введение в теорию полета искусственных спутников Земли, изд. «Наука», 1965.

72. Пономарев В. М., Теория управления движением космических аппаратов, изд. «Наука», 1965.

73. Аким Э. Л., Энеев Т. М., Определение параметров движения космического летательного аппарата по данным траекторных измерений, «Космические исследования», изд. «Наука», 1963, т. I, вып. 1.

74. Лидов М. Л., Охоцимский Д. Е., Тесленко Н. М., Исследование одного класса траекторий ограниченной задачи трех тел, «Космические исследования», изд. «Наука», 1964, т. II, вып. 6.

75. Охоцимский Д. Е., Энеев Т. М., Таратынова Г. Л., Определение времени существования искусственного спутника Земли и исследование вековых возмущений его орбиты, «Успехи физических наук», 1957, т. LXIII, вып. 1а.

76. Чарный В. И., Об изохронных производных, сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 16, изд. АН СССР, 1963, вып. 16.

77. Богуславский И. А., О статистически оптимальной импульсной коррекции космического полета, «Кибернетика», 1966, № 1.

78. Ярошевский В. А., Парышева Г. В., Оптимальное распределение корректирующих импульсов при однопараметрической коррекции, «Космические исследования» изд. «Наука», 1965, т. III, вып. 6.

79. Богуславский И. А., Иващенко О. И., Шепелев Ю. Г., Об управлении космическим аппаратом с двигателями малой тяги на участке разгона при отсутствии информации о текущем векторе скорости, «Космические исследования», изд. «Наука», 1966, т. IV, вып. 2.

Предметный и именной указатель

Числа в скобках указывают номер задачи. Число, стоящее перед скобками, соответствует номеру страницы, с которой начинается задача.

Г

Л

М

П

Р

С

Т

У

Оглавление

Ричард Бэттин

НАВЕДЕНИЕ В КОСМОСЕ

Редактор *Л. И. Шейнфайн* Техн. редактор *Н. Н. Скотникова*

Подписано в печать 26/X 1966 г. Учетно-изд. л. 24,12
Формат бумаги 60×90[1]/16=14 бум. л.—28 печ. л.
Цена 1 р. 97 к. Тираж 4000 экз. Тем. план 1966 г. № 222 Заказ 597/1211

Московская типография № 8 Главполиграфпрома
Государственного комитета Совета Министров СССР по печати
Хохловский пер., 7

Замеченные опечатки

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
51	9, 13, 15, 17 снизу	$\bar{\omega}$	$\boldsymbol{w}$

Заказ 597/1211