

THE MATHEMATICAL THEORY
OF BLACK HOLES

S. Chandrasekhar

University of Chicago

Clarendon Press Oxford
Oxford University Press New York
1983

С.Чандрасекар

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЧЕРНЫХ ДЫР

В 2-х частях

Часть 1

Перевод с английского
канд. физ.-мат. наук **В. А. Березина**
под редакцией
д-ра физ.-мат. наук **Д. В. Гальцова**



Москва «Мир» 1986



ББК 22.632
Ч 18
УДК 52 + 53

Чандрасекар С.

Ч 18 Математическая теория черных дыр: В 2-х ч. Ч. 1. Пер. с англ. — М.: Мир, 1986, 276 с., ил.

Книга известного американского астрофизика-теоретика и математика, лауреата Нобелевской премии по физике посвящена проблемам теории черных дыр. Она содержит математически строгое исследование решений Шварцшильда, Рейсснера—Нордстрема и Керра, включая анализ возмущений электромагнитного и гравитационного полей, а также теорию массивного поля со спином $1/2$ в метрике Керра. В русском переводе книга выпускается в двух частях. В ч. 1 изложены результаты, относящиеся к неврашающимся черным дырам, описываемым метриками Шварцшильда и Рейсснера—Нордстрема. В математическом введении изложены современные методы дифференциальной геометрии и формализм Ньюмена—Пенроуза в общей теории относительности.

Для специалистов и студентов старших курсов — астрофизиков, физиков-теоретиков, математиков, интересующихся вопросами теории гравитации.

Ч $\frac{1704020000-165}{041 (01)-86}$ 53-86, ч. 1

ББК 22.632

*Редакция литературы по астрономии, геофизике
и космическим исследованиям*

Originally published in English under the title
«The Mathematical Theory of Black Holes»

© Oxford University Press 1983

© перевод на русский язык, «Мир», 1986.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Имя замечательного ученого, специалиста в области математической физики и теоретической астрофизики, профессора Чикагского университета Субраманьяна Чандрасекара хорошо известно читателю не только благодаря его выдающимся научным достижениям, но и по многочисленным изданиям книг в русском переводе. В их числе «Введение в учение о строении звезд» (1939 г., перевод в 1951 г.), «Принципы звездной динамики» (1942 г., перевод в 1948 г.), «Перенос лучистой энергии» (1950 г., перевод в 1953 г.), «Эллипсоидальные фигуры равновесия» (1969 г., перевод в 1973 г.). Труды С. Чандрасекара заложили прочный математический фундамент современной теории строения и эволюции звезд, теории звездных атмосфер, они оказали большое влияние на магнитную гидродинамику и физику плазмы. Его работы стали особенно актуальными в последние десятилетия благодаря повышению точности астрофизических измерений и широкому использованию космической техники.

Закономерным признанием вклада ученого в теоретическую астрофизику стало присуждение ему в 1983 году Нобелевской премии по физике. И как бы в ответ на этот акт признания в том же году выходит новая фундаментальная монография Чандрасекара, посвященная математическим проблемам теории черных дыр.

Книга подводит итог исследованиям автора, которым были отданы последние десять лет. Обращение Чандрасекара к теории черных дыр представляется не только закономерным, но и в известной степени символичным — ведь именно он более пятидесяти лет назад предсказал драматическую судьбу массивных звезд на поздней стадии их эволюции. Изучая равновесные конфигурации белых карликов — звезд, в которых давление в основном создается вырожденным электронным газом — С. Чандрасекар обратил внимание на то, что при достаточно большой массе звезды скорость электронов в ее центральной области становится близкой к скорости света и далее расти не может. Поэтому давление газа, пропорциональное произведению импульса частиц на скорость, растет при высоких плотностях медленнее, чем при низких, и вещество уже не может противостоять гравитационному сжатию [1,2]. Вывод о существовании предельной массы устой-

чивых гравитирующих конфигураций — «чандрасекаровского предела» — казался тогда настолько парадоксальным, что даже породил среди некоторых физиков сомнения в справедливости лежащих в его основе фундаментальных представлений. И хотя спустя несколько лет теория неограниченного гравитационного сжатия была построена Оппенгеймером и Снайдером, потребовалось несколько десятилетий, чтобы идея гравитационного коллапса с образованием черной дыры была осознана как реальная физическая возможность.

Позже, когда Бааде и Цвикки и независимо Ландау высказали мысль о возможности равновесных компактных звезд, состоящих из нейтронов, Оппенгеймер и Волков рассчитали чандрасекаровский предел для нейтронной материи, обусловленный тем же физическим механизмом, но для нейтронной ферми-системы. Строгий расчет чандрасекаровского предела для реальной сверхплотной ядерной материи требует знания характера ядерных сил при плотностях выше ядерной. Модели, которые кажутся в настоящее время правдоподобными, приводят к значению предельной массы нейтронной звезды не более 2,5—3 масс Солнца [3]. Следует отметить, что все наблюдавшиеся до настоящего времени пульсары удовлетворяют этому требованию. Однако вопрос о предельной массе нейтронных звезд все же нельзя считать окончательно решенным, особенно если допустить отклонения от эйнштейновской теории гравитации. По-видимому, будут уточняться и детали картины дальнейшего сжатия, при котором достигаются плотности, соответствующие переходу ядерной материи в кварк-глюонную фазу. Тем не менее предельное значение порядка трех масс Солнца представляется достаточно обоснованной границей, за которой начинается новая физика, где в полной мере должна проявляться захватывающая красота релятивистской теории гравитации — физика черных дыр.

Поскольку книга С. Чандрасекара посвящена в основном теоретическим вопросам, остановимся вкратце на наблюдательных аспектах проблемы черных дыр.

Первый успех в поисках компактных непериодических быстро-переменных рентгеновских источников с массой, превышающей предельную, — открытие Лебеда X-1 — сменился долгим периодом разочарований. Однако в последнее время появилось несколько новых обнадеживающих кандидатов в черные дыры. Один из них — источник LMC X-3, обнаруженный в Большом Магеллановом облаке еще спутником «Ухуру». Он находится на расстоянии 52 кпс от Земли, его рентгеновская светимость непериодически изменяется от 10^{37} до $3 \cdot 10^{38}$ эрг/с. В отличие от Лебеда X-1, имеющего в качестве оптического компонента яркую звезду — сверхгигант, видимым компонентом LMC X-3 является слабая звезда главной последовательности. Оптическая светимость системы на два порядка меньше рентгеновской. К счастью, в оптическом

спектре звезды наблюдаются дискретные линии поглощения, по доплеровскому сдвигу которых удастся определить функцию масс системы. Данные показывают, что если оптическая звезда имеет нормальную для звезд данного типа массу, то масса невидимого компонента не менее 9 масс Солнца [4]. Это первый пример подобного рода среди внегалактических объектов.

Далее, уже несколько лет внимание астрономов привлекает необычный источник в созвездии Орла, излучающий в оптическом, рентгеновском и радиодиапазоне, — SS 433. Его особенностью является наличие двух узких струй, выбрасываемых в противоположных направлениях с релятивистской скоростью около 80 тыс. км/с [5]. Струи, оставаясь противоположно направленными, перемещаются в пространстве, описывая коническую поверхность за 164 дня, что по-видимому связано с прецессией аккреционного диска вокруг компактного объекта. Сами струи, вероятно, возникают в результате выметания мощным световым давлением избытка аккрецируемого вещества вдоль оси системы. Нормальная звезда в этой системе — сверхгигант с нестационарной оболочкой — не дает спектральных линий, поэтому определить параметры системы по доплер-эффекту нельзя. Анализируя с помощью ЭВМ кривую оптического блеска системы при различных предположениях о массах составляющих ее объектов, авторы работ [6] пришли к выводу, что вероятное значение массы невидимого компонента превышает 5—6 масс Солнца при массе нормальной звезды более 18 солнечных масс.

Согласно новым данным, вероятно наличие черной дыры в системе A 0620 — 00 — рентгеновской новой в созвездии Единорога.

Не исключено присутствие черной дыры в качестве невидимого компонента уникального объекта Геминги, обнаруженного как яркий периодический (с периодом 59 с) источник жестких (более 50 МэВ) гамма-квантов и позднее отождествленного со слабой звездой, излучающей в рентгеновском и оптическом диапазонах [7]. Его светимость в гамма-диапазоне на три порядка превышает рентгеновскую, оптическая — в несколько сотен раз меньше рентгеновской, а радиоизлучение отсутствует. Особенностью Геминги является быстрое увеличение периода, удваивающегося за несколько сотен лет, тогда как для рентгеновских пульсаров типично, напротив, уменьшение периода. Геминга не содержит остатка сверхновой, т. е. при коллапсе, по-видимому, не произошло сброса оболочки, и возможно родилась в 437 г.: в китайских хрониках описана яркая вспышка, наблюдавшаяся в этом году в направлении на данный участок неба. Если предположить, что система состоит из двух компактных объектов, обращающихся относительно друг друга с периодом 59 с, то при суммарной массе примерно 5 солнечных масс хорошо воспроизводится параметр замедления за счет гравитационного излучения. Поскольку видимой звездой вероятно является белый карлик, невидимый компо-

нент системы — черная дыра. В этом случае поток гравитационных волн от Геминги составит на Земле $5 \cdot 10^{-3}$ эрг/см²·с, что на много порядков превышает потоки от известных периодических источников [8].

Данные наблюдений с большой вероятностью указывают на существование сверхмассивных черных дыр в ядрах галактик и квазаров. Такие черные дыры неизбежно должны возникать в результате коллапса очень массивных звезд или компактных звездных скоплений. Аккреция на сверхмассивные черные дыры может служить источником огромного энерговыделения, наблюдаемого в ядрах активных галактик и квазаров. В пользу этой модели говорят опубликованные в конце 70-х гг. данные о высокой концентрации «темной» массы [порядка $(3-5) \cdot 10^9$ солнечных масс] в центральной области гигантской эллиптической галактики M 87 в созвездии Девы [9]. Модель черной дыры довольно естественно объясняет происхождение мощных выбросов газа и излучения из ядер галактик. Аккрецирующее на черную дыру вещество в зависимости от момента импульса может образовывать вокруг нее либо тонкий диск, либо толстый «бублик». В последнем случае в приосевых областях возникают разреженные воронки, в которых может происходить ускорение заряженных частиц и образование релятивистских струй плазмы и излучения [10]. В последнее время привлекают внимание модели, в которых активным элементом является черная дыра, погруженная во внешнее магнитное поле (такое поле должно возникать при аккреции замагниченной плазмы) [11]. Если черная дыра вращается, то благодаря фарадеевской индукции появится электрическое поле, имеющее радиальную составляющую [12, 13]. В окружающей черную дыру плазме возникают токи, посредством которых извлекается вращательная энергия черной дыры. Такая модель, в частности, привлекается и для объяснения активности центра нашей Галактики [14].

Теория не исключает возможности существования черных дыр промежуточных масс порядка 10^2-10^5 масс Солнца. Такие объекты могли бы являться конечным продуктом эволюции очень массивных короткоживущих звезд, которые могли существовать в догалактическую эпоху. Для таких звезд существует критическая масса порядка двухсот солнечных масс [15]: менее массивные звезды должны взрываться, а более массивные — коллапсировать с образованием черных дыр.

Вопрос о возможном существовании первичных черных дыр, образующихся на ранних стадиях космологического расширения [16], и их влиянии на последующую эволюцию по-прежнему стоит на повестке дня. Интерес представляют черные дыры с массой меньше 10^{15} г, которые к настоящему времени должны исчезнуть в результате хоккингского испарения. Динамика образования и распада таких дыр зависит от предположений относительно свойств элементарных частиц при сверхвысоких энергиях

вплоть до 10^{19} ГэВ. Здесь космология и физика черных дыр смыкаются с теорией элементарных частиц и оказываются той своеобразной экспериментальной лабораторией, в которой могут проверяться различные гипотезы этой теории. С современным состоянием проблемы первичных черных дыр в связи с новыми идеями в теории элементарных частиц можно ознакомиться в обзоре [17].

В связи с созданием моделей Великого объединения, предсказывающих существование легких бозонов (аксионов, фэмилонів и т. п.), которые могут быть столь же распространенными во Вселенной, как и обычные частицы, очень слабо взаимодействуя с последними, обсуждается возможность бозонных черных дыр [18]. Нетрудно оценить чандрасекаровский предел для бозонной материи. Поскольку бозоны не подчиняются принципу Паули, кинетическая энергия N бозонов в основном состоянии внутри сферы радиуса R , по порядку величины равна N/R (в ультрарелятивистском пределе $mR \ll 1$, где m — масса бозона в единицах $\hbar = c = 1$). Потенциальная энергия (для грубой оценки можно воспользоваться ньютоновским приближением) системы будет порядка $-N^2 (m/m_{PL})^2/R$, где $m_{PL} \approx 10^{-5}$ г — масса Планка. Приравнивание этих величин по модулю дает критическое число $N_{кр} \sim (m_{PL}/m)^2$ бозонов, выше которого должна возникать черная дыра. Ее гравитационный радиус будет порядка комптоновской длины волны бозона. При массе m частиц порядка 1 эВ такая черная дыра имеет гравитационный радиус $\sim 10^{-5}$ см и массу порядка 1/1000 массы Земли.

Будущее покажет, выдержат ли новые кандидаты в черные дыры, равно как и новые гипотезы, проверку временем, однако несомненно одно — представление о черных дырах прочно вошло в современную физику. Вспоминаются слова Дирака, сказанные в 1931 г. по поводу магнитного монополя: «Было бы странно, если бы Природа не использовала такую возможность». Действительно, черные дыры столь гармонично вписываются в общую физическую картину мира, что «если бы их не было, их следовало бы выдумать». Черные дыры служат, например, естественным регуляризатором энергии в классической теории гравитации. Можно ли отнять у тела столько энергии, что его оставшаяся полная энергия станет отрицательной? В ньютоновской теории это возможно — гравитационный потенциал точечной частицы отрицателен и не ограничен снизу. Сближая две точечных массы, можно сделать их энергию отрицательной и сколь угодно большой по абсолютной величине. В общей теории относительности этому препятствует образование черной дыры, вырезающей из пространства опасную область. Хотя интуитивно кажется правдоподобным, что образование черной дыры должно препятствовать возможности отрицательной полной массы, строгое доказательство этого утверждения было дано лишь недавно [19] путем обобщения известного доказательства Виттена положительности

энергии гравитирующих систем с асимптотически плоской метрикой [20] на случай присутствия горизонта событий.

Квантовая теория черных дыр, ведущая свое начало от замечательной работы Хокинга 1974 г., породила целое направление в квантовой теории поля. Черная дыра является уникальным физическим объектом, в котором органически сливаются понятия геометрии пространства-времени, квантовой теории поля и термодинамики. В евклидовом секторе (т. е. при мнимых значениях времени) внешние решения Шварцшильда и Керра с дополнительным условием периодичности по мнимому времени всюду регулярны, имеют конечное действие и таким образом играют роль инстантонов. Успешное применение для истолкования температуры и энтропии черной дыры идеи квантования гравитации с помощью континуального интегрирования послужило основой для дальнейшего развития этого подхода, получившего название метода евклидова действия. Было показано, что «теплый» вакуум пространства Минковского неустойчив относительно образования черных дыр [21]; при этом однопетлевая поправка к эффективному действию гравитационного поля на фоне шварцшильдова инстантона содержит мнимую часть, указывающую на возможность распада дыры. Эта мнимая часть обусловлена существованием отрицательного собственного значения у оператора гравитационных возмущений на шварцшильдовом фоне. Интересно, что в теории с лагранжианом, квадратичным по кривизне, отрицательная мода исчезает при достаточно малой массе черной дыры, т. е. такие черные дыры должны стабилизироваться [22].

Классические черные дыры ассоциируются с решениями либо уравнений Эйнштейна без источников, либо системы уравнений Эйнштейна—Максвелла. Однако при исследовании черных дыр на микроскопическом уровне целесообразно рассматривать и более общие теоретико-полевые модели. Здесь также имеется ряд интересных результатов. Оказалось, что представления о черных дырах нетривиально вписываются в супергравитационные теории. Это проявляется в возможности существования статических фермионных «волос» спина $3/2$ (гравитино) [23]. Имеется и точное решение уравнений расширенной-супергравитации, включающей гравитационное и электромагнитное поля, а также поле гравитино [24]. Известны точные решения системы уравнений Эйнштейна—Янга—Миллса, описывающие черные дыры с цветовыми зарядами, а также решения системы уравнений Эйнштейна—Янга—Миллса—Хиггса, описывающие точечные магнитные монополи и дайоны, скрытые под горизонтом событий (подробнее об этих решениях см. [25]).

Книга С. Чандрасекара, перевод которой предлагается читателю, отражает тот этап классической теории черных дыр, на котором было решено много красивых и сложных математических задач, возникающих при исследовании возмущений черных

дыр полями различного спина. Здесь автору принадлежит ряд оригинальных результатов: полное интегрирование системы уравнений Ньюмена—Пенроуза для вакуумных гравитационных возмущений поля Керра, разделение переменных в уравнении Дирака в метрике Керра и др. Вызывает восхищение творческая активность С. Чандрасекара, опубликовавшего за короткое время более двух десятков работ, содержащих сложнейшие математические расчеты. Описание возмущений черных дыр было доведено Чандрасекаром до подлинного математического блеска. Сам автор характеризует эту теорию как «математическое барокко», он видит красоту и совершенство геометрии Керра в удивительных свойствах симметрии и интегрируемости систем уравнений для полей различного спина, выявляющихся подчас лишь в результате громоздких и нетривиальных выкладок.

В своих библиографических замечаниях С. Чандрасекар указывает в основном литературу зарубежных авторов. На русском языке имеется достаточно много книг и обзоров, по которым читатель может познакомиться с работами советских ученых по различным аспектам теории черных дыр и проследить процесс развития этой теории.

В заключение следует заметить, что книга С. Чандрасекара в силу ее фундаментального характера не предназначена для «первого чтения». Для предварительного ознакомления с физикой черных дыр читателю можно рекомендовать популярные книги и обзоры [26], а также учебники и монографии [27]. Библиография по черным дырам вплоть до 1980 г. была составлена Детвейлером [28]; там же есть ссылки на более ранние источники. С квантовой теорией черных дыр можно ознакомиться по книгам и обзорам [29], где также имеется подробная библиография. Альтернативная теория возмущений черных дыр полями различного спина, основанная на использовании потенциалов Дебая, развита в монографии [25].

Перевод книги осуществлялся в тесном контакте с ее автором. Издательство и редактор перевода благодарят автора за присылку списка опечаток, замеченных в оригинальном издании.

23 мая 1985 г.

Д. В. Гальцов

Литература

1. Чандрасекар С. УФН, **145**, 489, 1985.
2. Chandrasekhar S. Ap. J. **74**, 81, 1931.
3. Kämpfer B. Astron. Nachr. **305**, 193, 1984.
4. Cowley A. P., Crampton D., Hutchings J. B. et al. Ap. J. **272**, 118, 1983; Pineault S. Astron. Astroph. **139**, 313, 1984.
5. Margon B. Ann. Rev. Astron. Astroph. **20**, 507, 1984.
6. Метлицкая З. Ю., Гончарский А. В., Черепашук А. М. АЖ, **61**, 124, 1984; Антохина Э. А., Черепашук А. М., Письма в АЖ, **11**, 10, 1985.

7. Caraveo P. A., Bignami G. F., Vigreux L. et al. Adv. Space Res. **3**, No. 10—12, 77, 1984.
8. Бисноватый—Коган Г. С. Препринт ИКИ № 932, 1984.
9. Young P. J., Westphal J. A., Kristian J. et al. Ap. J. **221**, 721, 1978; Sargent W. L. W., Young P. J., Boksenberg A. et al., *ibid*, p. 731.
10. Begelman M. C., Blanford R. D., Rees M. J. Rev. Mod. Phys. **56**, 255, 1984; Rees M. J. Ann. Rev. Astron. Astroph. **22**, 471, 1984.
11. Ruffini R., Wilson J. R. Phys. Rev. **12D**, 2959, 1975; Lovelace R. V. E. Nature **262**, 649, 1976; Blanford R. D., Znajek P. L. MNRAS, **179**, 433, 1977; Гальцов Д. В., Петухов В. И. ЖЭТФ, **74**, 801, 1978; Macdonald D., Thorne K. S. MNRAS, **198**, 345, 1982.
12. Гальцов Д. В. В сб. «Теоретико-групповые методы в физике» — М.: Наука, 1980, т. 2, с. 193.
13. Gal'tsov D. V., Petukhov V. I., Aliev A. N. Phys. Lett. **105A**, 346, 1984.
14. Кардашев Н. С., Новиков И. Д., Полнарев А. Г. и др. АЖ, **60**, 209, 1983; см. также: Центр Галактики. Под ред. Г. Риглера и Р. Блэндфорда. — М.: Мир, 1984.
15. Bond J. R., Arnet W. D., Carr B. J. Ap. J. **280**, 825, 1984.
16. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. АЖ, **10**, 602, 1967; Hawking S. W. MNRAS, **152**, 75, 1971.
17. Полнарев А. Г., Хлопов М. Ю. УФН, **145**, 369, 1985.
18. Thirring W. Phys. Lett. **127B**, 27, 1983; Takasugi E., Yoshimura M. Zs. Phys. **C26**, 241, 1984.
19. Horowitz G. T., Perry M. J. Phys. Rev. Lett. **48**, 371, 1982; Gibbons G. W., Hawking S. W., Horowitz G. T., Perry M. J. Comm. Math. Phys. **88**, 295, 1983.
20. Witten E. Comm. Math. Phys. **80**, 381, 1981.
21. Gross D. J., Perry M. J., Jaffe L. G. Phys. Rev. **25D**, 330, 1982; Allen B. Phys. Rev. **30D**, 1153, 1984.
22. Whitt B. Phys. Rev. **D32**, 2379, 1985.
23. Güven R. Phys. Rev. **25D**, 3117, 1982.
24. Aichelburg P. C., Güven R. Phys. Rev. Lett. **51**, 1613, 1983; Güven R. Phys. Lett. **135B**, 291, 1984.
25. Гальцов Д. В. Частицы и поля в окрестности черных дыр.—М.: МГУ, 1986.
26. Фролов В. П. Физика черных дыр от Эйнштейна до наших дней. В Эйнштейновском сб., 1975—1976. — М.: Наука, 1978; Фролов В. П. Введение в физику черных дыр. — М.: Знание, 1983; Шакура Н. И. Нейтронные звезды и черные дыры в двойных системах. — М.: Знание, 1976; Новиков И. Д. Черные дыры во Вселенной. — М.: Знание, 1977.
27. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Теория тяготения и эволюция звезд. — М.: Наука, 1971. Black holes. De Witt B. S., De Witt C. M., eds. N. Y., Gordon and Breach, 1973; Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. — М.: Мир, т. 3, 1977; Рис М., Руффини Р., Уилер Дж. Черные дыры, гравитационные волны и космология. — М.: Мир, 1977; Хокинг С., Эллис Дж. Крупномасштабная структура пространства-времени. — М.: Мир, 1977. General Relativity. An Einstein centenary survey. Ed. by S. W. Hawking, W. Israel. Cambridge Univ. Press, 1979 [имеется перевод части статей в сб.: Общая теория относительности. — М.: Мир, 1983]; Сигбатуллин Н. Р. Колебания и волны в сильных гравитационных полях. — М.: Наука, 1984; Шапиро С., Тьюколски С. Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды. В 2-х ч. — М.: Мир, 1985; Фролов В. П. УФН **118**, 473, 1976.
28. Detweiler S. Amer. J. Phys. **49**, 394, 1981.
29. Черные дыры. Сб. статей под ред. В. П. Фролова. Сер. НФФ, № 9. М.: Мир, 1978; Биррел Н. Д., Девис П. Квантованные поля в искривленном пространстве-времени. — М.: Мир, 1983.

К ЧИТАТЕЛЮ

Трепещу, низко кланяюсь и прошу слова. Трепещу, ибо на вас не угодишь, низко кланяюсь, ибо получил хорошее воспитание, прошу слова, ибо должен что-то сказать. Однако, если вы думаете услышать хорошую речь, вы жестоко обманетесь и погубите меня. Эта речь — моя собственная, ее не писал автор, и, наверное, я не скажу ничего из того, что хотел бы сказать. Итак, вот в чем дело.

У. Шекспир, «Король Генрих IV», часть II
(Перевод Б. Пастернака)

Оглавление. Оглавление составлено достаточно подробным, чтобы сразу была ясна и тематика, и структура изложения. Каждая глава начинается вводным параграфом, в котором кратко описывается ее содержание, а в заключительном разделе часто дается резюме.

Нумерация. Нумерация параграфов сквозная, так же как и нумерация таблиц и рисунков. Если дается ссылка на формулу, то формула, как правило, находится в этой же главе. Ссылки на формулы из других глав всегда оговариваются.

Обозначения. Выдержать последовательную систему обозначений по всей книге, очевидно, невозможно: для этого не хватит всех известных алфавитов. Кроме того, не хотелось портить вид уравнения или формулы и затемнять ее смысл случайным набором символов. Поэтому необходим был компромисс. Некоторыми символами, легко узнаваемыми из контекста, всюду обозначаются одни и те же величины, другие же символы используются для обозначения нескольких величин. Надеюсь, что, вернувшись к началу главы (или даже параграфа), читатель легко избежит разночтений.

Библиографические замечания. Поскольку весь материал книги (включая математические выкладки) был написан (или разработан) автором от начала до конца самостоятельно, сколько-нибудь серьезные библиографические изыскания не были им проведены. Поэтому примечания в конце каждой главы — это не более чем источники информации.

В книге излагаются взгляды автора на рассматриваемый предмет со всеми вытекающими отсюда последствиями.

БЛАГОДАРНОСТИ

В исследовании математической теории черных дыр большую помощь мне оказали мои коллеги. Я особенно признателен:

Джону Л. Фридману за критические обсуждения, постоянную поддержку, а также за помощь в написании гл. 10 (§ 102) и гл. 11 (§ 114);

Стивену Детвейлеру за активное сотрудничество в некоторых исследованиях (включенных в книгу) и за его готовность всегда быть полезным как при обсуждении вопросов, требующих ясности, так и в проведении вычислений (табл. 4, 6, 9—11, а также таблицы, помещенные в приложения, рассчитаны им);

Гаррету Туми за помощь в работе над параграфами, посвященными геодезическим в пространстве-времени Шварцшильда, Рейснера—Нордстрема и пространстве-времени Керра, а также за прекрасные иллюстрации, помещенные в гл. 3, 5 и 7;

Роберту Уолду, Роберту Героку и Джеймсу Хартлу, выступившим в качестве консультантов по различным вопросам.

Мне трудно подобрать слова, чтобы в полной мере выразить свою признательность Базилису Ксантопулосу. Он взял на себя огромный труд по прочтению всей рукописи на различных стадиях готовности и по проверке математических выкладок. Но его помощь этим не ограничилась: изложение его оригинальных работ можно найти в гл. 4 (§ 25), 5 (§ 42), 6 (§ 57), 7 (§ 60) и 11 (§ 109), а его критические советы были всегда бесценны.

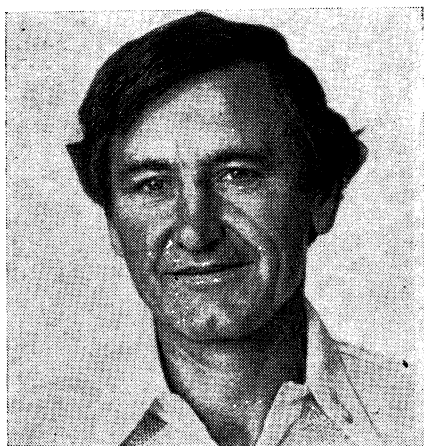
Я благодарен также г-же Мавис Такеучи-Лозано за помощь при подготовке рукописи в набор.

В период написания книги (с марта 1980 г. по январь 1982 г.) мне оказал частичную финансовую поддержку Национальный научный фонд по контракту РНУ-78-24275 с Чикагским университетом. Кроме того, в течение трех месяцев (с марта по июнь 1980 г.) я получал финансовую поддержку как стипендиат Совета регентов Смитсоновского института (Вашингтон, федеральный округ Колумбия) в Астрофизическом центре при обсерватории Гарвардского колледжа.

Наконец, я благодарен издательству Кларендон Пресс, придавшему этой книге (так же как и двум предыдущим моим книгам) блеск полиграфического мастерства, присущий всем выпускаемым этим издательством книгам.

Вряд ли я погрешу против истины, утверждая, что черные дыры — это самые совершенные макроскопические объекты во Вселенной. Ведь для их построения достаточно понятий о времени и пространстве. И поскольку общая теория относительности предсказывает, что они описываются всего одним семейством решений, эти объекты можно считать также и самыми простыми.

Единственным двухпараметрическим семейством решений, описывающим пространство-время вокруг черных дыр, является семейство Керра, открытое Роем Патриком Керром в июле 1963 г. Два параметра черной дыры — это ее масса и момент количества движения. Статическое решение с нулевым моментом количества движения было открыто Карлом Шварцшильдом в декабре 1915 г. Изучение черных дыр по существу сводится к изучению этих решений. Этим решениям и посвящена настоящая книга.



Рой Патрик Керр.



Карл Шварцшильд (1873—1916).

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ

1. Введение

Настоящая глава посвящена аналитическим методам, лежащим в основе дальнейшего изложения. К ним относятся исчисление дифференциальных форм Картана, тетрадный формализм и формализм Ньюмена—Пенроуза. Хотя ни один из этих методов сам по себе и не нов, включение этого материала в книгу позволяет сделать изложение замкнутым. Содержание § 2—6 не может, однако, заменить стандартные курсы дифференциальной геометрии — это только минимум, необходимый для вывода картановых уравнений структуры.

2. Элементы дифференциальной геометрии

Основным объектом дифференциальной геометрии является *многообразие*. Многообразие можно определить как локально евклидово пространство.

Напомним, что n -мерное евклидово пространство R^n есть множество всех наборов n действительных чисел $(x^1, \dots, x^n)$ ($-\infty < x^i < +\infty$), в котором обычным образом определены открытые и замкнутые множества (окрестности). Многообразие M локально совпадает с евклидовым пространством в том смысле, что M покрыто окрестностями $\mathcal{U}_\alpha$ (т. е. $\bigcup_\alpha \mathcal{U}_\alpha = M$) и с каждой окрестностью $\mathcal{U}_\alpha$ связано взаимно однозначное отображение ϕ_α , которое переводит каждую точку $p \in \mathcal{U}_\alpha$ в точку открытой окрестности R^n (на которую отображается окрестность $\mathcal{U}_\alpha$) с координатами $(x^1, \dots, x^n)$. Пусть далее окрестности $\mathcal{U}_\alpha$ и $\mathcal{V}_\alpha$ многообразия пересекаются по непустому множеству $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{V}_\alpha \neq \emptyset$, а ϕ_α и ψ_α — соответствующие отображения на окрестности в R^n , тогда отображение $\phi_\alpha \circ \psi_\alpha^{-1}$ переводит точку $\psi_\alpha(p)$ ($p \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{V}_\alpha$) с координатами, скажем, $(x^1, \dots, x^n)$ в точку $\phi_\alpha(p)$ с координатами $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$. По определению, чтобы M было многообразием, x^i ($i = 1, \dots, n$) должны быть *гладкими функциями* переменных $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$. (Гладкими называются функции, имеющие непрерывные частные производные всех порядков.)

Прямое произведение $M \times N$ двух многообразий M и N есть множество упорядоченных пар точек (p, q) ($p \in M, q \in N$) со структурой многообразия. Именно, если $\mathcal{U}_\alpha$ и $\mathcal{V}_\beta$ — окрест-

ности соответственно в M и N , а ϕ_α и ψ_β — связанные с этими окрестностями отображения, причем $\phi_\alpha(p) = (x^1, \dots, x^n)$, а $\psi_\beta(q) = (y^1, \dots, y^m)$ (m и n не обязательно равны), то отображение

$$(\phi_\alpha \times \psi_\beta)(p, q) = (x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^m)$$

определяет $(m+n)$ -мерное многообразие.

Рассмотрим теперь функцию f на M , определяемую отображением $f: M \rightarrow R^1$. Предположим, что комбинированное отображение $f \circ \phi_\alpha^{-1}$, которое сопоставляет точке $(x^1, \dots, x^n)$, принадлежащей R^n , действительное число в R^1 , является гладкой функцией координат $(x^1, \dots, x^n)$. Определим гладкую кривую λ на M отображением

λ : интервал $I(a < t < b) \in R^1 \rightarrow \lambda(t) = p \in M$,
причем

$$(\phi_\alpha \circ \lambda)(t) = [x^1(t), \dots, x^n(t)], \quad (1)$$

и потребуем, чтобы $x^i(t)$ ($i = 1, \dots, n$) были гладкими функциями t . Отметим, что с помощью функции f , заданной на многообразии M , можно определить функцию $f \circ \lambda$ на кривой λ , а отображение $\phi_\alpha \circ \lambda$ позволяет рассматривать функции $f(\lambda(t)) = f(x^1(t), \dots, x^n(t))$, где $(x^1(t), \dots, x^n(t))$ — координаты точки $p = \lambda(t)$ при отображении ϕ_α .

а. Касательные векторы. Пользуясь данным выше определением функции $f(x^1(t), \dots, x^n(t))$ на кривой λ , рассмотрим производную

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\lambda(t)} \Big|_{t=t_0} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1/\varepsilon) \{ f(\lambda(t_0 + \varepsilon)) - f(\lambda(t_0)) \} = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{dx^j(t)}{dt} \Big|_{t_0} \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right)_{\lambda(t_0)} = \left(\frac{dx^j}{dt} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right)_{t_0}, \end{aligned} \quad (2)$$

где в последнем равенстве предполагается суммирование по всем значениям повторяющихся индексов; это правило суммирования используется всюду в книге.

Ясно, что, рассматривая различные кривые λ , проходящие через данную точку p многообразия M , можно построить линейное векторное пространство в точке p , состоящее из линейных комбинаций частных производных:

$$\mathbf{X} = X^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad (3)$$

где X^j — любой набор n чисел. Эти *касательные векторы* возникают при рассмотрении кривых λ , заданных функциями

$$x^j(t) = x^j(p) + X^j t, \quad (j = 1, \dots, n), \quad (4)$$

где t принадлежит некоторому малому интервалу $-\varepsilon < t < +\varepsilon$.

Касательные векторы в точке p образуют линейное векторное пространство над R^1 , натянутое на координатные производные; другими словами, векторы $(\partial/\partial x^i)_p$ образуют базис этого векторного пространства, так как, во-первых, соотношение

$$(\alpha \mathbf{X} + \beta \mathbf{Y})f = \alpha (\mathbf{X}f) + \beta (\mathbf{Y}f) \quad (5)$$

выполняется для всех векторов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$, всех чисел α и β и всех функций f , и, во-вторых, векторы $(\partial/\partial x^i)_p$ линейно независимы, потому что в противном случае должны существовать числа X^j ($j = 1, \dots, n$), не все равные нулю, такие, что действие $\mathbf{X} = X^j \partial/\partial x^j$ на любую гладкую функцию должно давать тождественный нуль. Поэтому действие $\mathbf{X}$ на координатные функции x^k ($k = 1, \dots, n$) приведет к уравнениям $X^k = 0$ для всех значений k , что, очевидно, неверно.

Наконец, действие $\mathbf{X}$ на произвольную гладкую функцию f , определяемое равенством

$$\mathbf{X}f = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = X^i f_{,i} \quad (6)$$

(где запятая перед нижним индексом означает частную производную по соответствующей координате), очевидным образом удовлетворяет правилу Лейбница:

$$\mathbf{X}(fg)|_{\lambda(t)} = (f\mathbf{X}g + g\mathbf{X}f)|_{\lambda(t)}. \quad (7)$$

Фактически касательные векторы могут рассматриваться как производные по направлению.

Пространство касательных векторов (для которых принято также название *контравариантные векторы*) к n -мерному многообразию M в точке p является n -мерным векторным пространством. Это пространство, которое можно представить себе как множество всех «направлений» в точке p , называется *касательным пространством* в точке p ; для него принято обозначение $T_p(M)$ или просто T_p .

Вместо базиса, задаваемого локальными координатами, — локального базиса, можно использовать любой другой набор n линейно независимых векторов $\mathbf{e}_a$ ($a = 1, \dots, n$). Поэтому должны существовать линейные соотношения вида

$$\mathbf{e}_a = \Phi_a^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad (8)$$

причем детерминант матрицы Φ_a^k не должен быть равен нулю. Обратные соотношения имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial x^j} = \Phi_j^b \mathbf{e}_b, \quad (9)$$

где $[\Phi_j^b]$ — матрица, обратная матрице $[\Phi_a^k]$:

$$\Phi_a^k \Phi_j^a = \delta_j^k, \quad \Phi_a^k \Phi_k^b = \delta_a^b. \quad (10)$$

Если задан базис $(\mathbf{e}_j)$, то любой касательный вектор в точке p можно записать в виде

$$\mathbf{X} = X^i \mathbf{e}_j. \quad (11)$$

Величины X^i называются компонентами $\mathbf{X}$ относительно базиса $(\mathbf{e}_j)$.

б. 1-формы (ковекторы, или ковариантные векторы). 1-форма ω (дифференциальная форма степени 1) в точке p есть линейное отображение касательного пространства T_p на множество действительных чисел:

$$\omega: T_p \rightarrow R^1. \quad (12)$$

Другими словами, любому данному касательному вектору $\mathbf{X}$ в точке p 1-форма ω сопоставляет однозначным образом число $\omega(\mathbf{X})$, которое записывается также в виде

$$\omega(\mathbf{X}) = \langle \omega, \mathbf{X} \rangle. \quad (13)$$

Требуемая линейность отображения выражается соотношением

$$\langle \omega, \alpha \mathbf{X} + \beta \mathbf{Y} \rangle = \alpha \langle \omega, \mathbf{X} \rangle + \beta \langle \omega, \mathbf{Y} \rangle, \quad (14)$$

где $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ — произвольные касательные векторы, а α и β — произвольные действительные числа. Определим далее умножение форм на действительные числа и сумму форм следующими правилами:

$$(\alpha \omega)(\mathbf{X}) = \alpha \langle \omega, \mathbf{X} \rangle, \quad (\omega + \pi)(\mathbf{X}) = \langle \omega, \mathbf{X} \rangle + \langle \pi, \mathbf{X} \rangle \quad (15)$$

для произвольного касательного вектора $\mathbf{X} \in T_p$ и произвольного действительного числа α , где ω и π — две 1-формы. Если эти правила выполнены, то 1-формы образуют векторное пространство, которое будем обозначать T_p^* . Это векторное пространство называется касательным или *дуальным касательному пространству* в точке p (другие названия — *пространство форм, сопряженное пространству*). По этой причине 1-формы называются также *ковекторами* или *ковариантными векторами*.

Сопоставим базису $(\mathbf{e}_j)$ в T_p^* 1-формы $(\mathbf{e}^i)$ ($i = 1, \dots, n$), которые ставят в соответствие любому касательному вектору $\mathbf{X} = X^j \mathbf{e}_j$ его компоненты в базисе $(\mathbf{e}_j)$:

$$\mathbf{e}^i(\mathbf{X}) = \langle \mathbf{e}^i, X^j \mathbf{e}_j \rangle = X^i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (16)$$

Из последнего уравнения следует, что

$$\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = \langle \mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_j^i. \quad (17)$$

Произвольную 1-форму ω можно записать как линейную комбинацию 1-форм $\mathbf{e}^i$, заметив, что

$$\langle \omega, \mathbf{X} \rangle = \langle \omega, X^i \mathbf{e}_i \rangle = X^i \langle \omega, \mathbf{e}_i \rangle. \quad (18)$$

Вводя обозначение

$$\omega_i = \langle \omega, \mathbf{e}_i \rangle = \omega(\mathbf{e}_i) \quad (19)$$

для чисел, которые 1-форма ω сопоставляет базисным векторам ($\mathbf{e}_i$) касательного пространства T_p в точке p , можно записать

$$\langle \omega, \mathbf{X} \rangle = \omega_i X^i = \omega_i \langle \mathbf{e}^i, X^j \mathbf{e}_j \rangle = \langle \omega_j \mathbf{e}^i, \mathbf{X} \rangle. \quad (20)$$

Поскольку последнее уравнение справедливо для любого $\mathbf{X} \in T_p$, получаем

$$\omega = \omega_i \mathbf{e}^i. \quad (21)$$

Таким образом, доказано, что произвольная 1-форма ω записывается в виде линейной комбинации форм $\mathbf{e}^i$. Линейная независимость ковекторов $\mathbf{e}^i$ следует непосредственно из их определения. Следовательно, $(\mathbf{e}^i)$ есть базис пространства T_p^* . Базисы $(\mathbf{e}_i)$ и $(\mathbf{e}^i)$ называются *дуальными* базисами пространств T_p и T_p^* .

Если вместо дуальных базисов $(\mathbf{e}_i)$ и $(\mathbf{e}^i)$ выбрать другие базисы, связанные со старыми базисами невырожденными преобразованиями

$$\mathbf{e}_{i'} = \Phi_{i'}^j \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{e}^{i'} = \Phi_j^{i'} \mathbf{e}^j \quad (22)$$

и потребовать, чтобы новые базисы были дуальными, то получим

$$\delta_{i'}^{j'} = \langle \mathbf{e}^{j'}, \mathbf{e}_{i'} \rangle = \Phi_j^{j'} \Phi_{i'}^k \langle \mathbf{e}^j, \mathbf{e}_k \rangle = \Phi_j^{j'} \Phi_{i'}^k \delta_k^j = \Phi_j^{j'} \Phi_{i'}^j, \quad (23)$$

другими словами, матрицы $[\Phi_{i'}^j]$ и $[\Phi_j^{i'}]$ должны быть взаимно обратными.

Заметим, что при замене одного набора локальных координат (x^i) другим набором $(x^{i'})$ соответствующие выражения для $\Phi_{i'}^j$ и $\Phi_j^{i'}$ имеют вид

$$\Phi_{i'}^j = \left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \right)_p, \quad \Phi_j^{i'} = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \right)_p. \quad (24)$$

Функция f , заданная на многообразии, определяет 1-форму df , которая любому вектору $\mathbf{X} \in T_p$ ставит в соответствие число по следующему правилу:

$$df(\mathbf{X}) = \langle df, \mathbf{X} \rangle = \mathbf{X}f. \quad (25)$$

В локальном координатном базисе

$$\mathbf{X} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (26)$$

и по определению

$$\langle df, \mathbf{X} \rangle = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = X^i f_{,i}, \quad (27)$$

в частности,

$$\left\langle dx^j, \frac{\partial}{\partial x^i} \right\rangle = \delta_i^j. \quad (28)$$

Следовательно, 1-формы (dx^i) составляют локальный координатный базис в пространстве ковариантных векторов, дуальный локально-координатному базису $(\partial_j = \partial/\partial x^j)$ касательного пространства. Базисы (∂_j) и (dx^i) иногда называют *каноническими базисами* касательного и дуального к нему пространств.

Отметим, что если

$$df = \alpha_j dx^j, \quad (29)$$

то из соотношений

$$X^i f_{,i} = \langle df, \mathbf{X} \rangle = \langle \alpha_j dx^j, X^i \partial_i \rangle = \alpha_j X^i \langle dx^j, \partial_i \rangle = \alpha_i X^i \quad (30)$$

следует, что

$$\alpha_i = f_{,i}; \quad df = f_{,i} dx^i. \quad (31)$$

Последнее соотношение совпадает с обычной формулой для дифференциала функции.

в. Тензоры и тензорные произведения. Пусть

$$T_r^s = \underbrace{T_p^* \times \dots \times T_p^*}_r \times \underbrace{T_p \times \dots \times T_p}_s \quad (32)$$

есть прямое произведение r дуальных пространств T_p^* и s касательных пространств T_p в некоторой точке p многообразия, т. е. пространство упорядоченных наборов r 1-форм и s касательных векторов $(\omega^1, \dots, \omega^r, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_s)$. Рассмотрим полилинейное отображение $\mathbf{T}$ многообразия T_r^s на множество действительных чисел:

$$\mathbf{T}: T_r^s \rightarrow R^1. \quad (33)$$

Отображение однозначным образом сопоставляет любому данному упорядоченному набору r 1-форм и s касательных векторов действительное число:

$$\mathbf{T}(\omega^1, \dots, \omega^r, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_s) = \text{Действительное число}. \quad (34)$$

Условие полилинейности функции (34) есть $(r + s)$ условий линейности по каждому из аргументов, например:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\omega^1, \dots, \omega^r, \alpha \mathbf{X} + \beta \mathbf{Y}, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_s) = \\ = \alpha \mathbf{T}(\omega^1, \dots, \omega^r, \mathbf{X}, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_s) + \beta \mathbf{T}(\omega^1, \dots, \omega^r, \mathbf{Y}, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_s) \end{aligned} \quad (35)$$

для всех $\alpha, \beta \in R^1$ и $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T_p$. Определенное таким образом полилинейное отображение называется *тензором типа (r, s)* . Линейные комбинации тензоров данного типа (r, s) определяются правилом

$$\begin{aligned} (\alpha \mathbf{T} + \beta \mathbf{S})(\omega^1, \dots, \omega^r, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_s) = \\ = \alpha \mathbf{T}(\omega^1, \dots, \omega^r, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_s) + \beta \mathbf{S}(\omega^1, \dots, \omega^r, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_s) \end{aligned} \quad (36)$$

для всех $\alpha, \beta \in R^1$, $\omega^i \in T_p^*$ и $\mathbf{X}_j \in T_p$ ($i = 1, \dots, r$; $j = 1, \dots, s$). Из (36) следует, что тензоры типа (r, s) образуют линейное векторное пространство размерности n^{r+s} . Пространство таких тензоров называется пространством *тензорных произведений*, и для него принято обозначение

$$T_s^r(p) = \underbrace{T_p \otimes \dots \otimes T_p}_r \otimes \underbrace{T_p^* \otimes \dots \otimes T_p^*}_s. \quad (37)$$

Покажем, что базисом тензорных произведений типа (r, s) служат n^{r+s} специальных отображений, определяемых соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}(\omega^1, \dots, \omega^r, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_s) = \\ = \mathbf{e}_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}(\omega_{k_1}^1 \mathbf{e}^{k_1}, \dots, \omega_{k_r}^r \mathbf{e}^{k_r}, X_{l_1}^1 \mathbf{e}_{l_1}, \dots, X_{l_s}^s \mathbf{e}_{l_s}) = \\ = \omega_{i_1}^1 \dots \omega_{i_r}^r X_{l_1}^{j_1} \dots X_{l_s}^{j_s}. \end{aligned} \quad (38)$$

Эти отображения очевидным образом линейны по каждому аргументу и являются тензорами типа (r, s) . Другим эквивалентным определением этих отображений является следующее соотношение:

$$\mathbf{e}_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}(\mathbf{e}^{k_1}, \dots, \mathbf{e}^{k_r}, \mathbf{e}_{l_1}, \dots, \mathbf{e}_{l_s}) = \delta_{i_1}^{k_1} \dots \delta_{i_r}^{k_r} \delta_{l_1}^{j_1} \dots \delta_{l_s}^{j_s}. \quad (39)$$

Возможность выразить любой тензор типа (r, s) в виде линейной комбинации отображений (39) следует из полилинейности. Действительно,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\omega^1, \dots, \omega^r, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_s) = \mathbf{T}(\omega_{i_1}^1 \mathbf{e}^{i_1}, \dots, \omega_{i_r}^r \mathbf{e}^{i_r}, X_{j_1}^1 \mathbf{e}_{j_1}, \dots, X_{j_s}^s \mathbf{e}_{j_s}) = \\ = \omega_{i_1}^1 \dots \omega_{i_r}^r X_{j_1}^{i_1} \dots X_{j_s}^{i_s} \mathbf{T}(\mathbf{e}^{i_1}, \dots, \mathbf{e}^{i_r}, \mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_s}), \end{aligned} \quad (40)$$

и, вводя обозначения

$$\mathbf{T}(\mathbf{e}^{i_1}, \dots, \mathbf{e}^{i_r}, \mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_s}) = T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}, \quad (41)$$

приходим к искомому разложению (ср. с формулой (38))

$$\mathbf{T} = T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \mathbf{e}_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}. \quad (42)$$

Очевидно, что отображения (39) линейно независимы и, следовательно, являются базисом тензоров типа (r, s) . Число этих базисных элементов $\mathbf{e}_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$ равно n^{r+s} — размерности пространства T_s^r .

Коэффициенты $T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ в разложении (42) называются *компонентами* тензора $\mathbf{T}$ относительно выбранного базиса.

В общем случае пространства базис тензоров типа (r, s) можно записать как тензорное произведение дуальных базисов $(\mathbf{e}_i)$ и $(\mathbf{e}^i)$ пространств T_p и T_p^* соответственно:

$$\mathbf{e}_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} = \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_r} \otimes \mathbf{e}^{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{j_s}. \quad (43)$$

Действительно, тензорное произведение

$$\mathbf{Y}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{Y}_r \otimes \mathbf{\Omega}^1 \otimes \dots \otimes \mathbf{\Omega}^s \quad (44)$$

r касательных векторов и s 1-форм есть такой элемент пространства T_s^r , который сопоставляет элементу пространства $(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s)$ число

$$\langle \omega^1, Y_1 \rangle \dots \langle \omega^r, Y_r \rangle \langle \Omega^1, X_1 \rangle \dots \langle \Omega^s, X_s \rangle. \quad (45)$$

В частности,

$$\begin{aligned} & (e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s}) (\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) = \\ & = \langle \omega^1, e_{i_1} \rangle \dots \langle \omega^r, e_{i_r} \rangle \langle e^{j_1}, X_1 \rangle \dots \langle e^{j_s}, X_s \rangle = \\ & = \omega_{i_1}^1 \dots \omega_{i_r}^r X_1^{j_1} \dots X_s^{j_s} = e_{i_1}^{j_1} \dots e_{i_r}^{j_s} (\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s), \end{aligned} \quad (46)$$

что оправдывает выражение (43).

Если вместо дуальных базисов (e_i) и (e^j) выбрать другие дуальные базисы $(e_{i'})$ и $(e^{j'})$, то из соотношений (22) следует, что компоненты тензора относительно нового базиса

$$e_{i'_1} \otimes \dots \otimes e_{i'_r} \otimes e^{j'_1} \otimes \dots \otimes e^{j'_s}$$

связаны с компонентами тензора относительно прежнего базиса соотношениями

$$T_{j'_1 \dots j'_s}^{i'_1 \dots i'_r} = \Phi_{i_1}^{i'_1} \dots \Phi_{i_r}^{i'_r} \Phi_{j_1}^{j'_1} \dots \Phi_{j_s}^{j'_s} T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}. \quad (47)$$

Свертка тензора типа (r, s) , имеющего компоненты $T_{i_1 \dots i_s}^{j_1 \dots j_r}$ по контравариантному индексу i_p и ковариантному индексу j_q , есть тензор типа $(r-1, s-1)$:

$$\begin{aligned} & T_{j_1 \dots j_{q-1} k j_{q+1} \dots j_s}^{i_1 \dots i_{p-1} k i_{p+1} \dots i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_{p-1}} \otimes e_{i_{p+1}} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes \\ & \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_{q-1}} \otimes e^{j_{q+1}} \otimes \dots \otimes e^{j_s}, \end{aligned} \quad (48)$$

компоненты этого тензора получаются из компонент исходного тензора суммированием по всем совпадающим значениям k контравариантного индекса i_p и ковариантного индекса j_q . С помощью соотношений (23) и (47) легко проверить, что процесс свертки не зависит от выбора базиса.

Тензор типа $(0, 2)$ называется *симметричным*, если

$$T(X, Y) = T(Y, X), \quad (49a)$$

и *антисимметричным*, если

$$T(X, Y) = -T(Y, X) \quad (49b)$$

для всех X и Y в T_p . Из соотношений (49) следуют соотношения для компонент:

$$T_{ij} = T_{ji} \quad \text{или} \quad T_{ij} = -T_{ji}. \quad (50)$$

В общем случае тензор типа (r, s) называется симметричным или антисимметричным по ковариантным индексам i и j , если

$$\mathbf{T}(\omega^1, \dots, \omega^i, \dots, \omega^j, \dots, \omega^r, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_s) = \pm \mathbf{T}(\omega^1, \dots, \omega^j, \dots, \omega^i, \dots, \omega^r, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_s) \quad (51)$$

для всех ω и $\mathbf{X}$. Подобным же образом определяются симметрия и антисимметрия по контравариантным индексам.

3. Дифференциальные формы

Один класс тензоров вследствие его важности следует рассмотреть особо. Это класс *полностью антисимметричных тензоров*, т. е. ковариантные тензоры типа $(0, s)$, полностью антисимметричные по каждой паре аргументов:

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_i, \dots, \mathbf{X}_j, \dots, \mathbf{X}_s) = -\mathbf{T}(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_j, \dots, \mathbf{X}_i, \dots, \mathbf{X}_s) \quad (52)$$

для всех пар индексов i и j и всех $\mathbf{X}$. Полностью антисимметричный тензор можно построить, подействовав на произвольный тензор типа $(0, s)$ оператором антисимметризации A , определяемым следующим образом:

$$A\mathbf{T}(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_s) = (1/s!) \sum_{j_1, \dots, j_s} \text{sgn}(j_1, \dots, j_s) \mathbf{T}(\mathbf{X}_{j_1}, \dots, \mathbf{X}_{j_s}), \quad (53)$$

где суммирование производится по всем $s!$ перестановкам s целых чисел $(1, \dots, s)$, а $\text{sgn}(j_1, \dots, j_s) = \pm 1$ в зависимости от того, четное или нечетное число перестановок нужно сделать, чтобы из набора $(j_1, \dots, j_s)$ получить набор $(1, \dots, s)$. Соотношение (53) должно выполняться при любом наборе векторов $(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_s)$.

Ясно, что если $\mathbf{T}$ — полностью антисимметричный тензор, то в результате действия оператора A снова получится тензор $\mathbf{T}$. Если же $s > n$ (n — размерность векторного пространства), то при действии A на $\mathbf{T}$ получится нуль; другими словами, не существует полностью антисимметричного тензора типа $(0, s)$ при $s > n$.

Полностью антисимметричные тензоры типа $(0, s)$ называются *s-формами*. Поскольку значение s -формы при совпадении любых двух аргументов должно быть равно нулю, размерность векторного пространства, образуемого s -формами, равна $n!/s!$ ($n - s$)!. Для этого пространства принято обозначение $\Lambda^s T_p^*$.

Пусть $T_{j_1, \dots, j_s}$ — компоненты тензора типа $(0, s)$ относительно базиса

$$\mathbf{e}^{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{i_s}.$$

Тогда, если тензор $T_{j_1, \dots, j_s}$ полностью антисимметричен, то его $n!/s!$ ($n - s$)! существенных компонент можно получить, располагая индексы в монотонно убывающей последовательности:

$$T_{j_1, \dots, j_s}, \quad j_1 > j_2 > \dots > j_s. \quad (54)$$

Базис пространства $\Lambda^s T_p^*$ можно получить действием оператора антисимметризации A на базисные элементы тензорного произведения:

$$A(\mathbf{e}^{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{j_s}).$$

Построенные таким образом базисные элементы можно записать в виде *внешнего произведения* форм $\mathbf{e}^i$:

$$\mathbf{e}^{i_1} \wedge \mathbf{e}^{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^{i_s} \quad (j_1 > j_2 > \dots > j_s). \quad (55)$$

В общем случае s -форма имеет следующее разложение:

$$\Omega = \Omega_{j_1 \dots j_s} \mathbf{e}^{i_1} \wedge \mathbf{e}^{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^{i_s}, \quad (56)$$

где суммирование производится теперь только по всевозможным монотонно убывающим последовательностям чисел $j_1 > j_2 > \dots > j_s$.

Перестановка пары индексов эквивалентна перестановке соответствующих элементов во внешнем произведении. Отсюда следует, что перестановка элементов во внешнем произведении должна сопровождаться изменением знака:

$$\mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^k = -\mathbf{e}^k \wedge \mathbf{e}^i. \quad (57)$$

Разложение s -формы в локальном координатном базисе имеет следующий вид:

$$\Omega = \Omega_{j_1 \dots j_s} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_s}. \quad (58)$$

Пусть даны произвольные p -форма Ω^1 и q -форма Ω^2 . Можно определить их внешнее произведение правилом

$$\Omega^1 \wedge \Omega^2 = A(\Omega^1 \otimes \Omega^2). \quad (59)$$

Внешнее произведение p -формы и q -формы есть $(p+q)$ -форма (следовательно, она должна тождественно равняться нулю, если $p+q > n$).

Внешнее произведение форм явным образом удовлетворяет ассоциативному и дистрибутивному законам, но, вообще говоря, не коммутативно. Действительно, по определению произведения

$$\Omega^1 \wedge \Omega^2 = (\Omega_{i_1 \dots i_p}^1 \mathbf{e}^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^{i_p}) \wedge (\Omega_{k_1 \dots k_q}^2 \mathbf{e}^{k_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^{k_q}), \quad (60)$$

где $(j_1 \dots j_p)$ и $(k_1 \dots k_q)$ — монотонно убывающие последовательности. Имеем отсюда

$$\begin{aligned} \Omega^1 \wedge \Omega^2 &= (-1)^{pq} (\Omega_{k_1 \dots k_q}^2 \mathbf{e}^{k_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^{k_q}) (\Omega_{i_1 \dots i_p}^1 \mathbf{e}^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^{i_p}) = \\ &= (-1)^{pq} \Omega^2 \wedge \Omega^1, \end{aligned} \quad (61)$$

поскольку, чтобы получить требуемый порядок 1-форм, нужно каждый из q базисных элементов $\mathbf{e}^{k_1}, \dots, \mathbf{e}^{k_q}$ подвергнуть p перестановкам.

До сих пор тензоры и дифференциальные формы были определены в точке многообразия. Расширим теперь основные определения так, чтобы иметь возможность рассматривать *поля*, определенные на многообразии M . Будем говорить, что на M задано гладкое *тензорное поле* $T_s^r(M)$ (или просто T_s^r) типа (r, s) , если в каждой точке $p \in M$ задан элемент из $T_s^r(p)$, и компоненты T_s^r относительно любого локального координатного базиса — гладкие функции координат. Такое расширение основных определений необходимо для формулировки понятий, связанных с дифференцированием.

В дальнейшем будут рассматриваться только гладкие тензорные поля, и это будет подразумеваться, даже если слова «гладкое» и «поле» будут опущены.

а. Внешнее дифференцирование. Операция d внешнего дифференцирования превращает p -форму в $(p+1)$ -форму при выполнении следующих правил:

а. Действуя на функцию (нуль-форму) f оператором d , получаем 1-форму df , определяемую соотношением

$$df(\mathbf{X}) = \langle df, \mathbf{X} \rangle = \mathbf{X}f$$

для каждого $\mathbf{X} \in T_0^1$. В частности, в локальном координатном базисе

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

б) Если $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ — две p -формы, то

$$d(\alpha \mathbf{A}_1 + \beta \mathbf{A}_2) = \alpha d\mathbf{A}_1 + \beta d\mathbf{A}_2 \quad (\alpha, \beta \in R^1).$$

в) Если $\mathbf{A}$ — p -форма, а $\mathbf{B}$ — q -форма, то

$$d(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = d\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} + (-1)^p \mathbf{A} \wedge d\mathbf{B}.$$

г) Справедлива лемма Пуанкаре:

$$d(d\mathbf{A}) = 0$$

для любой p -формы $\mathbf{A}$.

Необходимо убедиться, что оператор d , подчиняющийся вышеприведенным правилам, хорошо определен. Рассмотрим сначала внешнюю производную p -формы $\mathbf{A}$, учитывая правила а, б и г:

$$\begin{aligned} d\mathbf{A} &= d(A_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}) = dA_{i_1 \dots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = \\ &= \frac{\partial A_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}. \end{aligned} \quad (62)$$

Нужно убедиться в том, что форма $d\mathbf{A}$, задаваемая соотношением (62), не зависит от выбора локального координатного базиса. Действительно, если вместо локальных координат (x^i)

выбрать другой набор локальных координат $(x^{i'})$, то из соотношений (24) и (47) следует, что

$$A_{j'_1 \dots j'_p} = A_{j_1 \dots j_p} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \dots \frac{\partial x^{j_p}}{\partial x^{j'_p}}, \quad (63)$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} d(A_{j'_1 \dots j'_p} dx^{j'_1} \wedge \dots \wedge dx^{j'_p}) &= \\ &= d\left(A_{j_1 \dots j_p} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \dots \frac{\partial x^{j_p}}{\partial x^{j'_p}} dx^{j'_1} \wedge \dots \wedge dx^{j'_p}\right) = \\ &= \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \dots \frac{\partial x^{j_p}}{\partial x^{j'_p}} dA_{j_1 \dots j_p} \wedge dx^{j'_1} \wedge \dots \wedge dx^{j'_p} + \\ &+ \frac{\partial^2 x^{j_1}}{\partial x^{k'} \partial x^{j'_1}} \frac{\partial x^{j_2}}{\partial x^{j'_2}} \dots \frac{\partial x^{j_p}}{\partial x^{j'_p}} A_{j_1 \dots j_p} dx^{k'} \wedge dx^{j'_1} \wedge \dots \wedge dx^{j'_p} + \dots + \\ &+ \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \dots \frac{\partial x^{j_{p-1}}}{\partial x^{j'_{p-1}}} \frac{\partial^2 x^{j_p}}{\partial x^{k'} \partial x^{j'_p}} A_{j_1 \dots j_p} dx^{k'} \wedge dx^{j'_1} \wedge \dots \wedge dx^{j'_p}. \end{aligned} \quad (64)$$

Все члены в правой части соотношения (64), в которые входят вторые производные функций x^{j_i} ($i = 1, \dots, p$), равны нулю вследствие симметрии вторых производных по индексам k' и j'_i и антисимметрии по тем же самым индексам базисных элементов во внешнем произведении, и единственный не исчезающий член в (64) есть первый член, равный

$$dA_{j_1 \dots j_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} = d(A_{j_1 \dots j_p} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}).$$

Следовательно,

$$d(A_{j'_1 \dots j'_p} dx^{j'_1} \wedge \dots \wedge dx^{j'_p}) = d(A_{j_1 \dots j_p} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}), \quad (65)$$

что доказывает независимость $d\mathbf{A}$ от выбора локального координатного базиса.

Убедимся теперь, что правило в) совместно с выражением (62) для $d\mathbf{A}$. Действительно, используя правила а), б), и г), получаем

$$\begin{aligned} d(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) &= d(A_{j_1 \dots j_p} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} \wedge B_{k_1 \dots k_q} dx^{k_1} \wedge \dots \wedge \\ &\wedge dx^{k_q}) = \frac{\partial A_{j_1 \dots j_p}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} \wedge \\ &\wedge B_{k_1 \dots k_q} dx^{k_1} \wedge \dots \wedge dx^{k_q} + A_{j_1 \dots j_p} \frac{\partial B_{k_1 \dots k_q}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{k_1} \wedge \dots \wedge dx^{k_q} &= d\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} + (-1)^p A_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \\ &\wedge dx^{i_p} \wedge \left(\frac{\partial B_{k_1 \dots k_q}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{k_1} \wedge \dots \wedge dx^{k_q} \right) = \\ &= d\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} + (-1)^p \mathbf{A} \wedge d\mathbf{B}. \end{aligned} \quad (66)$$

Наконец, из (62) имеем

$$\begin{aligned} d(d\mathbf{A}) &= d \left(\frac{\partial A_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 A_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^i \partial x^k} dx^i \wedge dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \equiv 0, \end{aligned} \quad (67)$$

что доказывает непротиворечивость правила г). Следовательно, оператор d действительно хорошо определен.

б. Скобка Ли и производная Ли. Скобка Ли $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ любых двух векторных полей $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ определяется соотношением

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]f = (\mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}\mathbf{X})f = \mathbf{X}(\mathbf{Y}f) - \mathbf{Y}(\mathbf{X}f). \quad (68)$$

Скобка Ли двух касательных векторов есть снова касательный вектор, поскольку

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}](\alpha f + \beta g) = \alpha [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]f + \beta [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]g, \quad (69)$$

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}](fg) = g[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]f + f[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]g \quad (70)$$

для любых двух функций f и g и любых двух действительных чисел α и β . Первое из этих двух равенств очевидно, доказательство второго требует несложных выкладок:

$$\begin{aligned} [\mathbf{X}, \mathbf{Y}](fg) &= \mathbf{X}(\mathbf{Y}fg) - \mathbf{Y}(\mathbf{X}fg) = \mathbf{X}(g\mathbf{Y}f + f\mathbf{Y}g) - \mathbf{Y}(g\mathbf{X}f + f\mathbf{X}g) = \\ &= g\mathbf{X}\mathbf{Y}f + (\mathbf{X}g)(\mathbf{Y}f) + (\mathbf{X}f)(\mathbf{Y}g) + f\mathbf{X}\mathbf{Y}g - \\ &- \{g\mathbf{Y}\mathbf{X}f + (\mathbf{X}f)(\mathbf{Y}g) + (\mathbf{Y}f)(\mathbf{X}g) + f\mathbf{Y}\mathbf{X}g\} = g[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]f + f[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]g. \end{aligned} \quad (71)$$

Соотношение (69) показывает, что скобка Ли есть линейный оператор, а из соотношения (70) следует, что скобка Ли — некоторая операция дифференцирования.

Легко проверить, что скобка Ли удовлетворяет тождеству Якоби

$$[[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]\mathbf{Z}] + [[\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]\mathbf{X}] + [[\mathbf{Z}, \mathbf{X}]\mathbf{Y}] = 0. \quad (72)$$

Выше было показано, что скобка Ли двух касательных векторов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ есть также касательный вектор. Компоненты этого вектора относительно локального координатного базиса можно получить, подействовав скобкой Ли на функции x^i :

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]^i = (\mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}\mathbf{X})x^i = \mathbf{X}\mathbf{Y}^i - \mathbf{Y}\mathbf{X}^i = X^k Y^i_{,k} - Y^k X^i_{,k}, \quad (73)$$

где, как уже указывалось выше, запятая перед индексом обозначает частную производную по локальной координате, имеющей тот же индекс.

Очевидно, что скобка Ли $[\partial_k, \partial_j]$ тождественно равна нулю.

Скобка Ли $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$, рассматриваемая как операция дифференцирования, называется *производной Ли вектора $\mathbf{Y}$ по направлению $\mathbf{X}$* . Имеем

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = -[\mathbf{Y}, \mathbf{X}] = -\mathcal{L}_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}. \quad (74)$$

В общем случае производная Ли $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{T}$ тензорного поля $\mathbf{T}$ данного типа есть тензор того же типа, удовлетворяющий следующим правилам:

а) производная Ли скалярного поля f равна

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}f = \mathbf{X}f = df(\mathbf{X}), \quad (75)$$

б) производная Ли векторного поля $\mathbf{Y}$ равна

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \quad (76)$$

в) на тензорных полях производная Ли есть линейный оператор, действие которого на тензорное произведение определяется правилом Лейбница:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\mathbf{S} \otimes \mathbf{T}) = \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{S} \otimes \mathbf{T} + \mathbf{S} \otimes \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{T}, \quad (77)$$

где $\mathbf{S}$ и $\mathbf{T}$ — произвольные тензорные поля.

Последнее правило позволяет определить действие $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}$ на тензор произвольного типа. Например, производная Ли 1-формы ω может быть определена следующим образом. Рассмотрим соотношение

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\omega \otimes \mathbf{Y}) = (\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\omega) \otimes \mathbf{Y} + \omega \otimes \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \quad (78)$$

в свернутой форме

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\langle \omega, \mathbf{Y} \rangle = \langle \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\omega, \mathbf{Y} \rangle + \langle \omega, \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} \rangle \quad (79)$$

для произвольного вектора $\mathbf{Y}$. Расписывая соотношение (79) через компоненты в локальном координатном базисе, имеем

$$X^k(\omega_j Y^j)_{,k} = (\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\omega)_j Y^j + \omega_j (\mathcal{L}_{\mathbf{X}}Y^j)_j. \quad (80)$$

Используя (73), приходим к следующему соотношению:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\omega)_j Y^j &= X^k(\omega_{j,k} Y^j + \omega_j Y^j_{,k}) - \omega_j (X^k Y^j_{,k} - Y^k X^j_{,k}) = \\ &= (X^k \omega_{j,k} + \omega_k X^j_{,j}) Y^j, \end{aligned} \quad (81)$$

которое справедливо для произвольного вектора $\mathbf{Y}$, и, следовательно,

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\omega)_j = \omega_{j,k} X^k + \omega_k X^j_{,j}. \quad (82)$$

Уравнение (79) может быть записано в альтернативной форме:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}[\omega(\mathbf{Y})] = (\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\omega)(\mathbf{Y}) + \omega(\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}). \quad (83)$$

Правило в) позволяет обобщить (83) на случай произвольного тензора типа (r, s) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X[T(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s)] &= (\mathcal{L}_X T)(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s) + \\ &+ T(\mathcal{L}_X \omega^1, \omega^2, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s) + \dots + \\ &+ T(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, \mathcal{L}_X Y_s). \end{aligned} \quad (84)$$

В этом уравнении все члены, кроме первого члена в правой части, могут быть вычислены с помощью соотношений (73), (75) и (82). Следовательно, уравнение (84) позволяет получить компоненты $\mathcal{L}_X T$.

Полезно для дальнейшего использования вывести простое тождество, связывающее внешнюю производную 1-формы с производными Ли. С помощью выражения (82) можно записать следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_X \omega, Y \rangle - Y \langle \omega, X \rangle &= (\omega_{j, k} X^k + \omega_k X^k_{, j}) Y^j - \\ - Y^j (\omega_{k, j} X^k + \omega_k X^k_{, j}) &= (\omega_{j, k} - \omega_{k, j}) X^k Y^j = 2 d\omega(X, Y). \end{aligned} \quad (85)$$

С помощью (79) получаем искомое равенство

$$d\omega(X, Y) = 1/2 \{ X \langle \omega, Y \rangle - Y \langle \omega, X \rangle - \langle \omega, [X, Y] \rangle \}, \quad (86)$$

где вместо производной Ли $\mathcal{L}_X Y$ написана скобка Ли $[X, Y]$.

4. Ковариантное дифференцирование

Настоящий параграф посвящен другому типу дифференцирования, введение которого, в отличие от внешнего дифференцирования и дифференцирования Ли требует, чтобы многообразие было наделено дополнительной структурой. Этой дополнительной структурой является *аффинная связность* ∇ , которая для каждого векторного поля X на многообразии M задает дифференциальный оператор ∇_X , отображающий произвольное векторное поле Y в векторное поле $\nabla_X Y$. Аффинная связность должна удовлетворять следующим условиям:

а) векторное поле $\nabla_X Y$ линейно по аргументу X , т. е.

$$\nabla_{fX+gY} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z \quad (X, Y, Z \in T_0^1), \quad (87)$$

где f и g — любые две функции, определенные на M ;

б) векторное поле $\nabla_X Y$ линейно по аргументу Y , т. е.

$$\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z \quad (X, Y, Z \in T_0^1); \quad (88)$$

$$\text{в) } \nabla_X f = Xf, \quad (89)$$

где f — произвольная функция на M , и наконец,

$$\text{г) } \nabla_X (fY) = (\nabla_X f) Y + f \nabla_X Y. \quad (90)$$

Следует отметить, что в соответствии с (89) в локальном координатном базисе (∂_k) результат действия оператора ∇_{∂_k} на функции совпадает с частной производной по координате x^k .

С помощью оператора ∇_X , действующего на векторное поле Y ($\in T_0^1$) и подчиняющегося правилам а) — г), можно определить ковариантную производную ∇Y вектора Y как тензорное поле типа $(1, 1)$, отображающее контравариантное векторное поле X в поле $\nabla_X Y$, т. е.

$$\nabla Y(X) = \langle \nabla Y, X \rangle = \nabla_X Y \quad (91)$$

для каждого $X \in T_0^1$. В этих обозначениях соотношение (90) принимает вид

$$\nabla(fY) = df \otimes Y + f \nabla Y. \quad (92)$$

Полезно переписать $\nabla_X Y$ относительно некоторого выбранного базиса (e_i) и дуального к нему базиса (e^j) , чтобы пояснить, что означает задание аффинной связности. Пользуясь правилами а) — г), запишем

$$\nabla_X Y = \nabla_X (Y^j e_j) = (X Y^j) e_j + Y^j \nabla_X e_j. \quad (93)$$

Поскольку $\nabla_X e_j$ при фиксированном e_j есть тензор типа $(1, 0)$, должно существовать представление вида

$$\nabla_X e_j = \omega_j^l(X) e_l, \quad (94)$$

где ω_j^l — 1-формы (зависящие от l и j). Поэтому

$$\nabla_X Y = (X Y^j) e_j + Y^j \omega_j^l(X) e_l. \quad (95)$$

С другой стороны, соотношение (93) можно переписать следующим образом:

$$\nabla_X Y = (X Y^j e_j) + Y^j \nabla_{X^k e_k} e_j = (X Y^j) e_j + Y^j X^k \nabla_{e_k} e_j, \quad (96)$$

или, используя (94),

$$\nabla_X Y = (X Y^j) e_j + Y^j X^k \omega_j^l(e_k) e_l. \quad (97)$$

Обозначим через

$$\omega_j^l(e_k) = \omega_{jk}^l \quad (98)$$

коэффициенты при e^k в разложении ω_j^l по базису (e^k) . Из вышеизложенного можно заключить, что задание аффинной связности ∇ означает задание n^2 1-форм ω_j^l или, что эквивалентно, n^3 скалярных полей ω_{jk}^l .

Возвращаясь к соотношению (95) и переписывая его в виде

$$\nabla_X Y = [X Y^j + \omega_j^l(X) Y^l] e_j, \quad (99)$$

находим выражения для компонент:

$$(\nabla_X Y)^j = X Y^j + \omega_j^l(X) Y^l. \quad (100)$$

В локальном координатном базисе (∂_k, dX^l) соотношение (100) принимает вид

$$(\nabla_{\partial_k} \mathbf{Y})^j = \partial_k Y^j + Y^l \omega_{lk}^j = Y^j_{,k} + Y^l \omega_{lk}^j. \quad (101)$$

Отметим, что в локальном координатном базисе принято писать

$$\Gamma_{lk}^j \text{ вместо } \omega_{lk}^j. \quad (102)$$

Используя точку с запятой для обозначения ковариантной производной (в отличие от запятой, обозначающей обычную частную производную), получаем стандартную формулу:

$$Y^j_{;k} = Y^j_{,k} + Y^l \Gamma_{lk}^j. \quad (103)$$

В общем случае определение ковариантных производных векторных полей может быть распространено на тензорные поля, если потребовать, чтобы операция ∇ удовлетворяла правилу Лейбница при действии на тензорные произведения. Потребуем поэтому, чтобы

$$\nabla(\mathbf{S} \otimes \mathbf{T}) = \nabla \mathbf{S} \otimes \mathbf{T} + \mathbf{S} \otimes \nabla \mathbf{T} \quad (104)$$

для любых двух тензорных полей $\mathbf{S}$ и $\mathbf{T}$. Непосредственным следствием этого требования является соотношение (ср. с формулой (84))

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{X}} \{ \mathbf{T}(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s) \} = & (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{T})(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s) + \\ & + \mathbf{T}(\nabla_{\mathbf{X}} \omega^1, \omega^2, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s) + \dots + \\ & + \mathbf{T}(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_{s-1}, \nabla_{\mathbf{X}} Y_s). \end{aligned} \quad (105)$$

Таким образом, если Ω есть 1-форма, то для каждого векторного поля $\mathbf{Y}$ предыдущее уравнение дает

$$\nabla_{\mathbf{X}}(\Omega(\mathbf{Y})) = (\nabla_{\mathbf{X}} \Omega)_j (Y)^j + \Omega(\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}), \quad (106)$$

разлагая по компонентам в локальных базисах $(\mathbf{e}_i)$ и $(\mathbf{e}^j)$, имеем

$$\nabla_{\mathbf{X}}(\Omega_j Y^j) = (\nabla_{\mathbf{X}} \Omega)_j Y^j + \Omega_j (\nabla_{\mathbf{X}} Y)^j. \quad (107)$$

Используя правило в) и уравнение (100), находим

$$\begin{aligned} (\nabla_{\mathbf{X}} \Omega)_j Y^j &= (\mathbf{X} \Omega_j) Y^j + \Omega_j (\mathbf{X} Y^j) - \Omega_j [\mathbf{X} Y^j + Y^l \omega_{lk}^j(\mathbf{X})] = \\ &= (\mathbf{X} \Omega_j) Y^j - \Omega_l \omega_{lk}^j(\mathbf{X}) Y^j. \end{aligned} \quad (108)$$

Следовательно,

$$(\nabla_{\mathbf{X}} \Omega)_j = \mathbf{X} \Omega_j - \Omega_l \omega_{lk}^j(\mathbf{X}), \quad (109)$$

или

$$\nabla_{\mathbf{X}} \Omega = [\mathbf{X} \Omega_j - \Omega_l \omega_{lk}^j(\mathbf{X})] \mathbf{e}^j. \quad (110)$$

Для специального случая $\Omega = \mathbf{e}^j$ получаем формулу

$$\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{e}^j = -\omega_l^j(\mathbf{X}) \mathbf{e}^l, \quad (111)$$

которую нужно сопоставить с формулой (94). Уравнение (111) показывает, что если принимается правило Лейбница для тен-

зорных произведений, то задания n^2 1-форм ω_j^l достаточно также и для определения ковариантных производных 1-форм.

Заметим, что в локальном координатном базисе уравнение (109) принимает вид

$$\Omega_{j; k} = \Omega_{j, k} - \Omega_l \Gamma_{jk}^l. \quad (112)$$

Применим соотношения (109) и (112) к 1-форме df . Поскольку компоненты df в локальном координатном базисе равны $f_{,j}$,

$$f_{; jk} = f_{, jk} - f_{, l} \Gamma_{jk}^l; \quad (113)$$

переставляя в этом уравнении индексы j и k , получим

$$f_{; kj} = f_{, kj} - f_{, l} \Gamma_{kj}^l. \quad (114)$$

Частные производные от функций перестановочны, поэтому вычитание уравнения (114) из уравнения (113) дает

$$f_{; jk} - f_{; kj} = -f_{, l} (\Gamma_{jk}^l - \Gamma_{kj}^l). \quad (115)$$

Правая часть уравнения (115) не равна нулю, только если аффинные связности несимметричны. В этом случае существует общепринятое обозначение

$$T_{jk}^l = -(\Gamma_{jk}^l - \Gamma_{kj}^l). \quad (116)$$

Используя это обозначение, перепишем соотношение (115):

$$f_{; jk} - f_{; kj} = T_{jk}^l f_{, l}. \quad (117)$$

Из уравнения (115) следует, что T_{jk}^l — компоненты тензора типа (1, 2). Этот тензор называется *тензором кручения*. Общее определение тензора кручения будет дано в § 5.

Возвращаясь к уравнению (105), заметим, что с помощью уравнений (99) и (109) легко выписать ковариантную производную произвольного тензорного поля. Например,

$$S_{k; l}^{ij} = S_{k, l}^{ij} + S_k^{mj} \Gamma_{ml}^i + S_k^{im} \Gamma_{ml}^j - S_m^{ij} \Gamma_{kl}^m. \quad (118)$$

а. Параллельный перенос и геодезические. Пусть $\mathbf{Y}$ — контравариантное векторное поле. Рассмотрим его изменение вдоль кривой λ на M . Изменение векторного поля вдоль кривой $\delta \mathbf{Y}$ можно рассматривать как перенос вектора $\mathbf{Y}$ вдоль кривой, вызванный изменением параметра $t \rightarrow t + \delta t$ на кривой λ . Приращение вектора $\delta \mathbf{Y}$ в локальной координатной системе (x^k) равно

$$(\delta \mathbf{Y})^j = Y^j_{, k} \frac{dx^k(\lambda(t))}{dt} \delta t. \quad (119)$$

В евклидовой геометрии в декартовой системе координат вектор $\mathbf{Y}$ «переносится параллельно» вдоль кривой λ , если $\delta \mathbf{Y} = 0$. В общем случае дифференцируемого многообразия существует

аналогичное определение: вектор $\mathbf{Y}$ переносится параллельно вдоль кривой λ , если

$$(D\mathbf{Y})^i = (\nabla_{\partial_k} \mathbf{Y})^i \frac{dx^k(\lambda(t))}{dt} \delta t = Y^i_{;k} \frac{dx^k(\lambda(t))}{dt} \delta t = 0, \quad (120)$$

или иначе

$$(Y^i_{;k} + Y^l \Gamma^i_{lk}) \frac{dx^k(\lambda(t))}{dt} \delta t = 0. \quad (121)$$

Другими словами, при таком определении изменение вектора $\mathbf{Y}$ при параллельном переносе вдоль кривой λ равно (ср. с соотношением (119))

$$(\delta \mathbf{Y})^i = -Y^l \Gamma^i_{lk} \frac{dx^k(\lambda(t))}{dt} \delta t. \quad (122)$$

В частности, чтобы касательный вектор $dx^i(\lambda(t))/dt$ к кривой λ параллельно переносился вдоль λ , необходимо выполнение следующего равенства:

$$\delta \left(\frac{dx^i(\lambda(t))}{dt} \right) = -\Gamma^i_{lk} \frac{dx^l(\lambda(t))}{dt} \frac{dx^k(\lambda(t))}{dt} \delta t. \quad (123)$$

Кривая λ на M называется *геодезической*, если касательный вектор к этой кривой при параллельном переносе остается пропорциональным самому себе, т. е.

$$\begin{aligned} \frac{dx^i(\lambda(t))}{dt} - \Gamma^i_{lk} \frac{dx^l(\lambda(t))}{dt} \frac{dx^k(\lambda(t))}{dt} \delta t = \\ = [1 - \phi(t) \delta t] \left(\frac{dx^i(\lambda(t))}{dt} + \frac{d^2 x^i(\lambda(t))}{dt^2} \delta t \right), \end{aligned} \quad (124)$$

где $\phi(t)$ — некоторая функция t . В пределе $\delta t \rightarrow 0$ получается следующее уравнение геодезической:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{lk} \frac{dx^l}{dt} \frac{dx^k}{dt} = \phi(t) \frac{dx^i}{dt}. \quad (125)$$

Легко проверить, что если вместо параметра t вдоль кривой λ ввести новый параметр

$$s = \int dt'' \exp \left\{ \int^t dt' \phi(t') \right\}, \quad (126)$$

то уравнение (125) примет более простой вид:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{lk} \frac{dx^l}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0. \quad (127)$$

Параметр s , при котором уравнение геодезической принимает вид (127), называется *аффинным*. Следует отметить, что аффинный параметр определен однозначно с точностью до сдвига начала отсчета и постоянного масштабного фактора.

5. Формы кривизны и уравнения структуры Картана

Если многообразие наделено связностью, то можно построить два отображения:

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \quad (128)$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \nabla_{\mathbf{X}}\nabla_{\mathbf{Y}} - \nabla_{\mathbf{Y}}\nabla_{\mathbf{X}} - \nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]}, \quad (129)$$

где $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ — два контравариантных векторных поля. Первое из этих отображений называется *кручением*, а второе — *кривизной*. Как видно из определений, оба отображения антисимметричны по своим аргументам.

Рассмотрим сначала кручение. Нетрудно убедиться в том, что отображение $\mathbf{T}$ линейно по аргументам $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$:

$$\mathbf{T}(\mathbf{X} + \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Z}) + \mathbf{T}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \quad (\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in T^1_0), \quad (130)$$

а также

$$\mathbf{T}(f\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = f\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \quad (131)$$

где f — произвольная функция. (Для доказательства утверждения (131) нужно воспользоваться тождеством

$$[f\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = f[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] - (\mathbf{Y}f)\mathbf{X}.)$$

Соотношения (130) и (131) показывают, что отображение

$$\mathbf{T}: T^1_0 \times T^1_0 \rightarrow T^1_0 \quad (132)$$

является полилинейным. Следовательно, $\mathbf{T}$ есть тензорное поле типа (1, 2).

Пусть $(\mathbf{e}_j)$ и $(\mathbf{e}^i)$ — дуальные базисы для T_p и T_p^* . Тогда, как было показано выше (уравнение (100)),

$$(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y})^j = \mathbf{X}\mathbf{Y}^j + \mathbf{Y}^l\omega_l^j(\mathbf{X}) = \mathbf{X}\mathbf{e}^j(\mathbf{Y}) + \mathbf{e}^l(\mathbf{Y})\omega_l^j(\mathbf{X}), \quad (133)$$

поэтому

$$\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} = [\mathbf{X}\mathbf{e}^j(\mathbf{Y}) + \omega_l^j(\mathbf{X})\mathbf{e}^l(\mathbf{Y}) - \mathbf{Y}\mathbf{e}^j(\mathbf{X}) - \omega_l^j(\mathbf{Y})\mathbf{e}^l(\mathbf{X})]\mathbf{e}_j. \quad (134)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^j(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = & \langle \mathbf{e}^j, \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \rangle = \mathbf{X}\langle \mathbf{e}^j, \mathbf{Y} \rangle - \mathbf{Y}\langle \mathbf{e}^j, \mathbf{X} \rangle - \\ & - \langle \mathbf{e}^j, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \rangle + \omega_l^j(\mathbf{X})\mathbf{e}^l(\mathbf{Y}) - \omega_l^j(\mathbf{Y})\mathbf{e}^l(\mathbf{X}), \end{aligned} \quad (135)$$

откуда, используя тождество (86), получаем

$${}_{1/2}\mathbf{T}^j(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = (d\mathbf{e}^j + \omega_l^j \wedge \mathbf{e}^l)(\mathbf{X}, \mathbf{Y}). \quad (136)$$

Поскольку это уравнение справедливо для любых векторных полей $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$,

$${}_{1/2}\mathbf{T}^j = d\mathbf{e}^j + \omega_l^j \wedge \mathbf{e}^l = \Omega^j. \quad (137)$$

Это уравнение называется *первым картановым уравнением структуры*, а величины Ω^i — *формами Картана*. В важном специальном случае, когда кручение отсутствует, уравнение (137) сводится к уравнению

$$de^j + \omega_l^j \wedge e^l = 0. \quad (137')$$

В локальном координатном базисе $de^j = 0$ (поскольку $e^j = dx^j$), и для кручения получаем уравнение

$$T^j = 2\Gamma_{lk}^j dx^k \wedge dx^l = (\Gamma_{lk}^j - \Gamma_{kl}^j) dx^k \wedge dx^l. \quad (138)$$

Исследуем теперь кривизну. По определению кривизны

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z. \quad (139)$$

Выражение в правой части (139) явным образом линейно по X , Y и Z . Более того, нетрудно убедиться, что

$$R(fX, Y)Z = R(X, fY)Z = fR(X, Y)Z, \quad (140a)$$

$$R(X, Y)fZ = fR(X, Y)Z \quad (140b)$$

для произвольной функции f . Следовательно, отображение

$$R: T_0^1 \times T_0^1 \times T_0^1 \rightarrow T_0^1 \quad (141)$$

является полилинейной функцией своих аргументов, а R — тензорное поле типа (1, 3). Это тензорное поле называется *тензором Римана*.

Используя далее известные соотношения, имеем

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y Z &= \nabla_X \{ Y e^j(Z) + \omega_k^j(Y) e^k(Z) \} e_j = \\ &= [Y e^l(Z) + \omega_k^l(Y) e^k(Z)] \nabla_X e_l + [X Y e^j(Z) + X \{ \omega_l^j(Y) e^l(Z) \}] e_j = \\ &= [Y e^l(Z) + \omega_k^l(Y) e^k(Z)] \omega_l^j(X) e_j + [X Y e^j(Z) + e^l(Z) X \omega_l^j(Y) + \\ &+ \omega_l^j(Y) X e^l(Z)] e_j = [X Y e^l(Z) + \omega_l^j(Y) X e^l(Z) + e^l(Z) X \omega_l^j(Y) + \\ &+ \omega_l^j(X) Y e^l(Z) + \omega_l^j(X) \omega_k^l(Y) e^k(Z)] e_j, \end{aligned} \quad (142)$$

откуда следует соотношение

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z &= \{ [X \omega_l^j(Y) - Y \omega_l^j(X) + \omega_k^j(X) \omega_l^k(Y) - \\ &- \omega_k^j(Y) \omega_l^k(X)] e^l(Z) + [X, Y] e^j(Z) \} e_j. \end{aligned} \quad (143)$$

Поскольку

$$\nabla_{[X, Y]} Z = \{ [X, Y] e^j(Z) + \omega_l^j([X, Y]) e^l(Z) \} e_j, \quad (144)$$

приходим к следующему соотношению:

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \{ X \langle \omega_l^j, Y \rangle - Y \langle \omega_l^j, X \rangle - \langle \omega_l^j, [X, Y] \rangle + \\ &+ \omega_k^j(X) \omega_l^k(Y) - \omega_k^j(Y) \omega_l^k(X) \} e^l(Z) e_j, \end{aligned} \quad (145)$$

которое можно переписать, используя тождество (86), следующим образом:

$${}^1_2 R(X, Y)Z = (d\omega_l^j + \omega_k^j \wedge \omega_l^k)(X, Y) e^l(Z) e_j. \quad (146)$$

Далее для любой 1-формы ω выполняется равенство

$$\begin{aligned} R(\omega, Z, X, Y) &= R_{lkm}^j [e_j \otimes e^l \otimes (e^k \wedge e^m)](\omega, Z, X, Y) = \\ &= (R_{lkm}^j e^k \wedge e^m)(X, Y) e^l(Z) e_j(\omega). \end{aligned} \quad (147)$$

Сравнивая теперь уравнения (146) и (147), получаем соотношение

$$1/2 R_{lkm}^j e^k \wedge e^m = d\omega_l^j + \omega_k^j \wedge \omega_l^k. \quad (148)$$

Определив далее 2-форму

$$\Omega_l^j = d\omega_l^j + \omega_k^j \wedge \omega_l^k, \quad (149)$$

получаем уравнение

$$1/2 R_{lkm}^j e^k \wedge e^m = \Omega_l^j, \quad (150)$$

которое называется *вторым картановым уравнением структуры*.

В локальном координатном базисе

$$\omega_l^j = \Gamma_{lm}^j dx^m, \quad (151)$$

поэтому

$$d\omega_l^j = \Gamma_{lm, n}^j dx^n \wedge dx^m = 1/2 (\Gamma_{lm, n}^j - \Gamma_{ln, m}^j) dx^n \wedge dx^m; \quad (152)$$

$$\omega_k^j \wedge \omega_l^k = \Gamma_{kn}^j \Gamma_{lm}^k dx^n \wedge dx^m = 1/2 (\Gamma_{kn}^j \Gamma_{lm}^k - \Gamma_{km}^j \Gamma_{ln}^k) dx^n \wedge dx^m, \quad (153)$$

и, следовательно, второе картаново уравнение структуры эквивалентно обычному определению тензора Римана:

$$R_{lnm}^j = \Gamma_{lm, n}^j - \Gamma_{ln, m}^j + \Gamma_{kn}^j \Gamma_{lm}^k - \Gamma_{km}^j \Gamma_{ln}^k. \quad (154)$$

Выше мы исследовали тензор Римана, следуя Картану. Интересно сравнить картанов подход с более привычным, основанным на прямом вычислении правой части уравнения (139) в локальном координатном базисе. Вычислим прежде всего первое слагаемое, используя уравнение (103):

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y Z &= \nabla_X (Y^k Z_{;k}^j e_j) = Y^k \nabla_X (Z_{;k}^j e_j) + Z_{;k}^j e_j \nabla_X Y^k = \\ &= Y^k X^l Z_{;kl}^j e_j + Y_{;l}^k X^l Z_{;k}^j e_j. \end{aligned} \quad (155)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z &= Y^k X^l (Z_{;kl}^j - Z_{;lk}^j) e_j + [Y_{;l}^k X^l - X_{;l}^k Y^l] Z_{;k}^j e_j = \\ &= Y^k X^l (Z_{;kl}^j - Z_{;lk}^j) e_j + [X, Y]^k Z_{;k}^j e_j + X^l Y^n (\Gamma_{nl}^k - \Gamma_{ln}^k) Z_{;k}^j e_j. \end{aligned} \quad (156)$$

Поскольку последнее слагаемое в (139) равно

$$\nabla_{[X, Y]} Z = [X, Y]^k Z_{;k}^j e_j, \quad (157)$$

получаем

$$R(X, Y)Z = (Z_{;kl}^j - Z_{;lk}^j + T_{lk}^n Z_{;n}^j) X^l Y^k e_j = R_{ilk}^j X^l Y^k e_j, \quad (158)$$

откуда следует соотношение

$$Z_{;kl}^j - Z_{;lk}^j = -R_{ilk}^j X^l + T_{kl}^n Z_{;n}^j, \quad (159)$$

называемое *тождеством Риччи*. В отсутствие кручения тождество Риччи обычно является исходным пунктом для введения тензора Римана.

Интересно сопоставить уравнение (159) с уравнением

$$f_{;kl} - f_{;lk} = T_{kl}^n f_{;n}, \quad (160)$$

выведенным в § 4 (уравнение (117)).

Полезный результат следует из уравнения (129) (ср. с соотношением (114)):

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})f &= \nabla_{\mathbf{X}}(Y^i f_{;i}) - \nabla_{\mathbf{Y}}(X^i f_{;i}) - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]^i f_{;i} = \\ &= (X^l Y^i_{;l} - Y^l X^i_{;l}) f_{;i} + Y^i X^l (f_{;i;l} - f_{;l;i}) - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]^i f_{;i} = \\ &= X^l Y^n (\Gamma_{nl}^i - \Gamma_{ln}^i) f_{;i} + X^l Y^i (-\Gamma_{jl}^n + \Gamma_{lj}^n) f_{;n} = 0. \end{aligned} \quad (161)$$

До сих пор мы рассматривали действие отображения $\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ только на контравариантные векторные поля и на скалярные поля. Рассмотрим теперь его действие на произвольные тензорные поля.

Используя правило Лейбница при ковариантном дифференцировании тензорных произведений, находим

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})(\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q}) = \mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q} + \mathbf{P} \otimes \mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Q}, \quad (162)$$

где $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ — произвольные тензорные поля. Теперь несложно найти правило, по которому $\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ действует, например, на 1-форму Ω . Действительно, если $\mathbf{Z}$ — произвольное контравариантное векторное поле, то из уравнения (162) следует, что

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})(\Omega_j Z^j) = [\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\Omega]_j Z^j + \Omega_j [\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})Z]^j. \quad (163)$$

Но отображение $\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, действуя на скаляр, дает нуль (в силу уравнения (161)), поэтому

$$[\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\Omega]_j Z^j = -\Omega_j R^i_{jlk} Z^l X^k Y^j = -\Omega_i R^i_{jlk} Z^j X^l Y^k. \quad (164)$$

Следовательно,

$$[\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\Omega]_j = -R^i_{jlk} \Omega_i X^l Y^k. \quad (165)$$

С другой стороны, прямое вычисление действия $\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ на Ω в локальном координатном базисе (следуя процедуре, описанной при выводе уравнения (158)) дает

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\Omega = X^l Y^k [\Omega_{j;kl} - \Omega_{j;lk} + T_{lk}^n \Omega_{j;n}] e^j. \quad (166)$$

Объединяя уравнения (165) и (166), получаем

$$\Omega_{j;kl} - \Omega_{j;lk} = R^i_{jkl} \Omega_i + T_{kl}^n \Omega_{j;n}. \quad (167)$$

Рассмотрим теперь действие отображения $\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ на тензор типа $(2, 0)$. Снова используем уравнения (161) и (162) и получим

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})[S^i e_i \otimes e_j] &= \mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})S^i e_i \otimes e_j + e_i \otimes \mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})S^j e_j = \\ &= (R^i_{lmn} S^{lj} + R^j_{lmn} S^l) X^m Y^n e_i \otimes e_j, \end{aligned} \quad (168)$$

откуда заключаем, что

$$S_{;kl}^{ij} - S_{;lk}^{ij} = -R_{mkl}^i S^{mj} - R_{mkl}^j S^{im} + T_{kl}^n S_{;n}^{ij}. \quad (169)$$

Подобным же образом находим действие $\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ на тензор типа $(0, 2)$:

$$S_{ij;kl} - S_{ij;lk} = R_{jkl}^m S_{im} + R_{ikl}^m S_{mj} + T_{kl}^n S_{ij;n}. \quad (170)$$

Теперь ясно, как записать соответствующие формулы для тензоров произвольного типа.

Если свернуть тензор Римана (154) по контравариантному индексу и второму (или третьему) из ковариантных индексов, то получим *тензор Риччи* (или соответственно тензор Риччи с обратным знаком):

$$R_{ij}^i = -R_{lmj}^i = R_{lm}. \quad (171)$$

В локальном координатном базисе компоненты тензора Риччи равны (ср. с формулой (154))

$$R_{lm} = \Gamma_{lm,j}^j - \Gamma_{lj,m}^j + \Gamma_{kj}^j \Gamma_{lm}^k - \Gamma_{km}^j \Gamma_{lj}^k. \quad (172)$$

а. Циклическое тождество и тождества Бианки в отсутствие кручения. Рассмотрим важный частный случай, когда кручение отсутствует. Тогда из определения кручения (уравнение (128)) следует

$$\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Q} + \nabla_{\mathbf{Q}} \mathbf{X} = [\mathbf{X}, \mathbf{Q}] \quad (\mathbf{X}, \mathbf{Q} \in T_0^1), \quad (173)$$

вследствие чего тензор кривизны, как будет сейчас показано, удовлетворяет двум важным тождествам.

Убедимся прежде всего, что вследствие соотношения (173) справедливо равенство

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{X}} [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}] + \nabla_{\mathbf{Y}} [\mathbf{Z}, \mathbf{X}] + \nabla_{\mathbf{Z}} [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] &= (\nabla_{\mathbf{X}} \nabla_{\mathbf{Y}} - \nabla_{\mathbf{Y}} \nabla_{\mathbf{X}}) \mathbf{Z} + \\ &+ (\nabla_{\mathbf{Z}} \nabla_{\mathbf{X}} - \nabla_{\mathbf{X}} \nabla_{\mathbf{Z}}) \mathbf{Y} + (\nabla_{\mathbf{Y}} \nabla_{\mathbf{Z}} - \nabla_{\mathbf{Z}} \nabla_{\mathbf{Y}}) \mathbf{X}. \end{aligned} \quad (174)$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \mathbf{Z} + \mathbf{R}(\mathbf{Z}, \mathbf{X}) \mathbf{Y} + \mathbf{R}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \mathbf{X} &= \nabla_{\mathbf{X}} [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}] + \nabla_{\mathbf{Y}} [\mathbf{Z}, \mathbf{X}] + \\ &+ \nabla_{\mathbf{Z}} [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] - \nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]} \mathbf{Z} - \nabla_{[\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]} \mathbf{X} - \nabla_{[\mathbf{Z}, \mathbf{X}]} \mathbf{Y}. \end{aligned} \quad (175)$$

С другой стороны, если в уравнении (173) положить $\mathbf{Q} = [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]$, то

$$\nabla_{\mathbf{X}} [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}] - \nabla_{[\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]} \mathbf{X} = [\mathbf{X}, [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]]. \quad (176)$$

Соответственно уравнение (175) вследствие тождества Якоби принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \mathbf{Z} + \mathbf{R}(\mathbf{Z}, \mathbf{X}) \mathbf{Y} + \mathbf{R}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \mathbf{X} &= \\ &= [\mathbf{X}, [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]] + [\mathbf{Y}, [\mathbf{Z}, \mathbf{X}]] + [\mathbf{Z}, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]] = 0. \end{aligned} \quad (177)$$

Соотношение (177), записанное в локальном координатном базисе, и есть искомое *циклическое тождество*:

$$R_{ikm}^j + R_{kml}^j + R_{mlk}^j = 0. \quad (178)$$

Рассмотрим далее внешнюю производную 2-формы Картана Ω_l^j (см. уравнение (149)). Имеем

$$\begin{aligned} d\Omega_l^j &= d\omega_k^j \wedge \omega_l^k - \omega_k^j \wedge d\omega_l^k = \\ &= (\Omega_k^j - \omega_m^j \wedge \omega_k^m) \wedge \omega_l^k - \omega_k^j \wedge (\Omega_l^k - \omega_m^k \wedge \omega_l^m). \end{aligned} \quad (179)$$

Нетрудно показать, что тройные внешние произведения 1-форм сокращаются, вследствие чего получаем соотношения

$$d\Omega_l^j - \Omega_k^j \wedge \omega_l^k + \omega_k^j \wedge \Omega_l^k = 0, \quad (180)$$

называемые *тождествами Бианки*. В стандартном виде тождества Бианки можно получить, записав уравнение (180) в локальном координатном базисе. Подставляя выражения для Ω_l^j и ω_l^k в локальном координатном базисе

$$\Omega_l^j = \frac{1}{2} R_{lpq}^j dx^p \wedge dx^q, \quad \omega_l^k = \Gamma_{lr}^k dx^r \quad (181)$$

в уравнение (180), получаем

$$(R_{lpq, r}^j - R_{kpq}^j \Gamma_{lr}^k + \Gamma_{kr}^j R_{lpq}^k) dx^p \wedge dx^q \wedge dx^r = 0. \quad (182)$$

Поскольку в отсутствие кручения коэффициенты связности Γ_{kr}^j симметричны по индексам k и r , равенство (182) эквивалентно следующему соотношению:

$$(R_{lpq, r}^j - R_{kpq}^j \Gamma_{lr}^k + \Gamma_{kr}^j R_{lpq}^k - R_{lkq}^j \Gamma_{pr}^k - R_{lpk}^j \Gamma_{qr}^k) dx^p \wedge dx^q \wedge dx^r = 0. \quad (183)$$

Но выражение в скобках есть не что иное, как ковариантная производная R_{lpq}^j по x^r , следовательно,

$$R_{lpq; r}^j + R_{lqr; p}^j + R_{lrp; q}^j = 0. \quad (184)$$

Это и есть тождества Бианки в стандартной форме.

6. Метрика и метрическая связность.

Риманова геометрия и уравнения Эйнштейна

Метрическим тензором g называется поле несингулярного симметричного тензора типа $(0, 2)$. Это означает:

а) $g: T_0^1 \times T_0^1 \rightarrow R^1$;

б) $g(X, Y) = g(Y, X)$ для любых $X, Y \in T_1^0$; (185)

в) если $g(X, Y) = 0$ для любого $Y \in T_1^0$, то $X = 0$.

Условие б) гарантирует симметричность тензора g , а условие в) — его несингулярность.

В локальном базисе метрический тензор имеет вид

$$g = g_{ij} e^i \otimes e^j, \quad g_{ij} = g_{ji}. \quad (186)$$

Если же локальный базис является координатным, то

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j, \quad g_{ij} = g_{ji}. \quad (187)$$

Условие несингулярности метрического тензора, записанного в компонентах, эквивалентно требованию, чтобы детерминант матрицы $[g_{ij}]$ не обращался в нуль ни в одной точке многообразия. В этом случае матрица $[g_{ij}]$ имеет однозначно определяемую обратную матрицу. Обозначая элементы обратной матрицы g^{ij} , имеем

$$g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i; \quad (188)$$

последнее равенство гарантирует, что g^{ij} можно рассматривать как компоненты тензорного поля g^{-1} типа $(2, 0)$, представление которого в базисе $e_i \otimes e_j$ (дуальном базису, использованному в уравнении (186)) имеет вид

$$g^{-1} = g^{ij} e_i \otimes e_j. \quad (189)$$

Метрический тензор используется для определения длины L вдоль кривой λ на M от точки $\lambda(a)$ до точки $\lambda(b)$:

$$L = \int_a^b \left| g_{ij} \frac{dx^i(\lambda(t))}{dt} \frac{dx^j(\lambda(t))}{dt} \right|^{1/2} dt. \quad (190)$$

В согласии с этим определением принято писать

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad (191)$$

а ds^2 обычно рассматривают как квадрат интервала ds между близлежащими точками многообразия.

Пусть T — тензорное поле типа (r, s) . С помощью метрического тензора можно свернуть тензоры $g \otimes T$ и $g^{-1} \otimes T$ относительно одного из индексов метрического тензора (или обратного тензора), в результате чего получаются соответственно тензоры $(r-1, s+1)$ и $(r+1, s-1)$. Компоненты свернутых тензоров равны

$$g_{ij} T^{ab \dots i \dots p}_{cd \dots q} = T^{a \dots i \dots p}_{cd \dots q}, \quad (192a)$$

$$g^{ij} T^{ab \dots p}_{cd \dots i \dots q} = T^{ab \dots p}_{cd \dots i \dots q}. \quad (192b)$$

Ясно, что процесс этот можно повторять. Мы рассматриваем тензоры, полученные *поднятием* и *опусканием* индексов, как единую геометрическую величину, потому что, сначала поднимая индекс, а затем опустив его, мы восстановим первоначальный тензор.

С метрическим тензором связана важная величина — его *сигнатура*. Сигнатура метрического тензора определяется как разность чисел положительных и отрицательных коэффициентов тензора g_{ij} (в некоторой точке) после приведения тензора к диагональному виду. Можно показать, что сигнатура, таким образом определенная, одна и та же во всех точках (связного) многообра-

зия. Метрика называется евклидовой, если сигнатура численно равна размерности многообразия. Метрика называется лоренцевой или метрикой Минковского, если сигнатура равна $\pm(n-2)$, где n — размерность многообразия (знак плюс или минус — вопрос соглашения).

а. Метрическая связность. До сих пор метрика на многообразии вводилась независимо от того, наделено ли многообразие связностью. Покажем теперь, что если на многообразии задан метрический тензор, то на нем можно ввести симметричную связность без кручения, которая однозначно определяется требованием

$$\nabla g = 0. \quad (193)$$

В этом случае для любого тензорного поля T

$$\nabla(g \otimes T) = g \otimes \nabla T. \quad (194)$$

Основное преимущество метрической связности состоит в том, что операция поднятия и опускания индексов коммутирует с операцией ковариантного дифференцирования.

Вывод формулы для симметричной связности начнем с вычисления ковариантной производной $\nabla_X g$, причем g запишем в виде (186). Требование (193) означает, что

$$\nabla_X g_{ij} e^i \otimes e^j = X g_{ij} e^i \otimes e^j + g_{ij} [(\nabla_X e^i) \otimes e^j + e^i \otimes (\nabla_X e^j)] = 0. \quad (195)$$

Используя формулу (111), получаем

$$[X g_{ij} - g_{lj} \omega_i^l(X) - g_{il} \omega_j^l(X)] e^i \otimes e^j = 0, \quad (196)$$

откуда следует равенство

$$(dg_{ij} - g_{lj} \omega_i^l - g_{il} \omega_j^l)(X) = 0. \quad (197)$$

Полагая теперь $X = \partial_k$ в локальном координатном базисе, получаем

$$g_{ij,k} = g_{lj} \Gamma_{ik}^l + g_{il} \Gamma_{jk}^l, \quad (198)$$

причем Γ -символы симметричны по своим «ковариантным» индексам, так как кручение по предположению отсутствует. Уравнения (198) нетрудно разрешить относительно коэффициентов связности. В результате получаем

$$g_{il} \Gamma_{jk}^l = 1/2 \left(\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ih}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} \right), \quad (199)$$

или

$$\Gamma_{jk}^i = 1/2 g^{il} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lh}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jh}}{\partial x^l} \right). \quad (200)$$

Таким образом, задание метрического тензора однозначно определяет связность. Эта связность лежит в основании *римановой геометрии*.

Г-символы (200), получаемые из метрического тензора g , называются *символами Кристоффеля*, а сама связность называется *метрической связностью* или *связностью Кристоффеля*.

Получим два следствия условия (193), т. е. условия того, что связность является метрической.

Во-первых, *скалярное произведение* $(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y})$ двух контравариантных векторных полей $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$, определяемое формулой

$$g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = (\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}) = g_{ij} X^i Y^j, \quad (201)$$

остаётся неизменным при параллельном переносе векторов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ вдоль кривой λ на M . Действительно, в силу определений (120) и (121)

$$D(g_{ij} X^i Y^j) = (Dg_{ij}) X^i Y^j + g_{ij} (Y^j DX^i + X^i DY^j) = 0, \quad (202)$$

поскольку $Dg_{ij} = 0$ по условию $\nabla g = 0$ (связность метрическая), а DX^i и DY^j равны нулю по условию параллельного переноса вдоль λ .

Во-вторых, уравнение геодезической (127), выведенное в § 4 из требования, чтобы касательный вектор к кривой λ при параллельном переносе вдоль этой кривой оставался пропорциональным самому себе, теперь может получаться как уравнение Эйлера—Лагранжа для задачи на экстремум функционала. Действительно, рассмотрим интеграл (ср. с уравнением (190))

$$I = \int_a^b L ds, \quad L = g_{ij} \frac{dx^i(\lambda(s))}{ds} \frac{dx^j(\lambda(s))}{ds}, \quad (203)$$

где кривая λ параметризована длиной дуги s вдоль λ . Уравнение Эйлера—Лагранжа для задачи на экстремум функционала I имеет вид

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^j} = 0, \quad \dot{x}^j = \frac{dx^j(\lambda(s))}{ds}. \quad (204)$$

Вычисляя

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j} = 2g_{ij} \dot{x}^i, \quad \frac{\partial L}{\partial x^j} = g_{ik,j} \dot{x}^i \dot{x}^k, \quad (205)$$

получаем уравнение

$$g_{ij} \ddot{x}^i + (g_{ij,k} - \frac{1}{2} g_{ik,j}) \dot{x}^i \dot{x}^k = 0, \quad (206)$$

которое можем переписать в виде

$$g_{ij} \ddot{x}^i + \frac{1}{2} (g_{ij,k} + g_{kj,i} - g_{ik,j}) \dot{x}^i \dot{x}^k = 0. \quad (207)$$

Свертывая последнее уравнение с g^{il} , приходим к уравнению геодезической:

$$\ddot{x}^l + \Gamma_{ik}^l \dot{x}^i \dot{x}^k = 0. \quad (208)$$

Полезно записать уравнение геодезической в другом виде — через «скорости»:

$$u^j = \dot{x}^j = dx^j/ds. \quad (209)$$

Тогда

$$\ddot{x}^j = u^j_{;k} u^k, \quad (210)$$

и уравнение геодезической принимает особенно простой вид:

$$(u^j_{;k} + \Gamma^j_{ik} u^i) u^k = u^j_{;k} u^k = 0. \quad (211)$$

Если параметр вдоль геодезической не является аффинным, то уравнение геодезической имеет вид (ср. с уравнением (125))

$$u^j_{;k} u^k = \phi u^j, \quad (212)$$

где ϕ — некоторая скалярная функция.

Нетрудно убедиться (свертывая с u_j) в том, что уравнение (211) имеет интеграл $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = \text{const}$ в согласии с тем фактом, что $\mathbf{u}$ переносится параллельно вдоль геодезической.

б. Некоторые свойства тензора Римана и тензора Риччи в случае римановой связности. Тензоры Римана и Риччи, построенные на основе римановой связности, имеют дополнительные свойства симметрии. Например, если в уравнение (170) вместо S_{ij} подставить g_{ij} , то получим

$$g_{im} R^m_{jkl} + g_{mj} R^m_{ikl} = 0, \quad (213)$$

$$R_{ijkl} + R_{jikl} = 0. \quad (214)$$

Следовательно, полностью ковариантный тензор Римана антисимметричен также и по первой паре индексов. Другую симметрию можно получить посредством следующих преобразований, используя циклическое тождество (см. уравнение (178))

$$R_{jkmn} + R_{jmnk} + R_{jnk m} = 0, \quad (215)$$

а также известную антисимметрию по первой и второй парам индексов:

$$\begin{aligned} R_{jkmn} &= -(R_{jmnk} + R_{jnk m}) = R_{mjnk} + R_{njkm} = \\ &= -(R_{mnkj} + R_{mkjn}) - (R_{nk m j} + R_{nmjk}) = \\ &= 2R_{mnjk} + (R_{kmjn} + R_{kn m j}) = 2R_{mnjk} - R_{k j n m} = 2R_{mnjk} - R_{j k m n}. \end{aligned} \quad (216)$$

Значит,

$$R_{jkmn} = R_{mnjk}, \quad (217)$$

т. е. тензор Римана не изменяется при одновременной перестановке первой и второй пар индексов. Можно показать, что свойства симметрии тензора Римана уменьшают число его независимых компонент до $n^2(n^2 - 1)/12$ (т. е. тензор Римана четырехмерного многообразия имеет 20 независимых компонент).

Симметрия тензора Риччи является следствием свойств симметрии тензора Римана:

$$R_{ij} = g^{kl} R_{ikjl} = g^{lk} R_{ljki} = R_{ji}. \quad (218)$$

Симметричность тензора Риччи становится очевидной в локальном координатном базисе. Но сначала заметим, что

$$\Gamma_{jk}^i = 1/2 g^{il} (g_{lj, k} + g_{lk, j} - g_{jk, l}) = 1/2 g^{il} g_{lj, k} = (\ln |g|^{1/2})_{, k}, \quad (219)$$

где $|g|$ — абсолютная величина детерминанта матрицы $[g_{ij}]$. Уравнение (172) можно переписать теперь в виде

$$R_{lm} = \Gamma_{lm, j}^j - \frac{\partial^2 \ln |g|^{1/2}}{\partial x^l \partial x^m} + \frac{\partial \ln |g|^{1/2}}{\partial x^k} \Gamma_{lm}^k - \Gamma_{lm}^j \Gamma_{lj}^k. \quad (220)$$

в. Тензор Эйнштейна. Тензор Эйнштейна G_{ij} строится из тензора Риччи и метрического тензора следующим образом:

$$G_{ij} = R_{ij} - 1/2 g_{ij} R, \quad (221)$$

где

$$R = R_j^j = g^{ij} R_{ij} \quad (222)$$

есть свернутый тензор Риччи (*скалярная кривизна*).

Важнейшим свойством тензора Эйнштейна является его консервативность, т. е. равенство нулю ковариантной дивергенции:

$$G_{ij}^{; i} = 0. \quad (223)$$

Это тождество следует из тождества Бианки (184). Действительно, свертывая соотношение

$$R_{jkl; m} - g^{ip} R_{jplm; k} + R_{jmk; l} = 0 \quad (224)$$

по индексам i и k , получаем

$$R_{jl; m} - g^{kp} R_{jplm; k} - R_{jm; l} = 0. \quad (225)$$

Поднимая теперь индекс j и свертывая с m , имеем

$$R_{l; j}^j + R_{l; k}^k - R_{, l} = 0, \quad (226)$$

$$(R_l^j - 1/2 \delta_l^j R)_{, j} = 0, \quad (227)$$

что и требовалось доказать.

г. Тензор Вейля. Мы видели, что тензор Римана R_{ijkl} антисимметричен по обеим парам индексов (ij) и (kl) и, кроме того, не меняется при одновременной перестановке двух пар индексов (ij) и (kl) . Вследствие этих симметрий единственную нетривиальную свертку можно получить, только если поднять один из индексов, а затем свернуть его с любым из оставшихся ковариантных индексов. При этом с точностью до знака мы получим тензор Риччи. Удобно поэтому разложить тензор Римана на «бесследовую» часть и часть, связанную с тензором Риччи. Такое разложение достигается с помощью тензора Вейля:

$$C_{ijkl} = R_{ijkl} - (n-2)^{-1} (g_{ik} R_{jl} + g_{jl} R_{ik} - g_{jk} R_{il} - g_{il} R_{jk}) + \\ + (n-1)^{-1} (n-2)^{-1} (g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk}) R. \quad (228)$$

Очевидно, что этот тензор имеет те же свойства симметрии, что и тензор Римана, но

$$g^{il}C_{ijkl} = 0, \quad (229a)$$

тогда как

$$g^{il}R_{ijkl} = R_{ik}. \quad (229b)$$

Другое отличие состоит в том, что тензор Римана может быть введен, если многообразие наделено только связностью, а тензор Вейля не может быть построен без метрики.

Важная роль, которую играет тензор Вейля в дифференциальной геометрии (и общей теории относительности), связана с конформной инвариантностью этого тензора, т. е. с инвариантностью относительно преобразования $g \rightarrow \Omega^2 g$, где Ω — некоторая скалярная функция, но мы не будем касаться этих проблем в нашей книге.

д. Пространство-время как четырехмерное многообразие; уравнения Эйнштейна. До сих пор в своем кратком введении в дифференциальную геометрию мы не делали никаких ограничений ни на размерность многообразия, ни на сигнатуру метрического тензора, (возможно) заданного на многообразии. Однако пространство-время в общей теории относительности рассматривается как четырехмерное дифференцируемое многообразие, наделенное метрикой с лоренцевой сигнатурой, и все наше последующее обсуждение в настоящей главе (и всюду в этой книге) будет ограничено именно этим случаем. В данном разделе мы заново выпишем основные уравнения теории применительно к пространству-времени, примем соглашения о знаках и введем обозначения, которыми в дальнейшем будем пользоваться.

Условимся работать с отрицательной сигнатурой, т. е. после приведения метрического тензора к диагональному виду (в любой точке пространства-времени) разность между числом положительных и числом отрицательных метрических коэффициентов равна -2 ; в частности, в плоском пространстве-времени метрика Минковского имеет вид

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (230)$$

где c — скорость света (выберем систему единиц, в которой $c = 1$).

Метрика пространства-времени с лоренцевой сигнатурой не является положительно определенной в том смысле, что $g(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ может быть положительным, нулевым или отрицательным. Будем называть вектор *времениподобным*, если $g(\mathbf{X}, \mathbf{X}) > 0$, *изотропным*, если $g(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = 0$, и *пространственноподобным*, если $g(\mathbf{X}, \mathbf{X}) < 0$. Частицы вещества с отличной от нуля массой покоя могут описывать только *времениподобные траектории* (т. е. кривые, касательный вектор к которым всегда времениподобен), тогда как

безмассовые частицы (фотоны, гравитоны, нейтрино *) имеют *изотропные траектории* (т. е. кривые, касательные векторы к которым всегда изотропны).

Свободно падающие массивные частицы движутся по времени-подобным геодезическим, а безмассовые частицы — по изотропным геодезическим. Очевидно, что в качестве параметра на изотропных геодезических нельзя выбрать длину дуги, хотя, как следует из уравнения (126), аффинный параметр существует и в этом случае. Уравнения геодезических (как времениподобных, так и изотропных), записанные через 4-скорости $\mathbf{u}$, всегда можно привести к виду (211) и (212). Вдоль времениподобных геодезических $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = 1$, а вдоль изотропных геодезических $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = 0$.

Заметим, что мы определили тензор Римана так, что тождество Риччи имеет вид

$$R^i{}_{jkl}Z_i = Z_{j;kl} - Z_{j;lk}, \quad (231)$$

тензор Риччи определяется следующей сверткой:

$$g^{il}R_{ijkl} = R_{ik}, \quad (232)$$

а тензор Вейля связан теперь с тензором Римана и тензором Риччи соотношением

$$C_{ijkl} = R_{ijkl} - \frac{1}{2}(g_{ik}R_{jl} + g_{jl}R_{ik} - g_{jk}R_{il} - g_{il}R_{jk}) + \\ + \frac{1}{6}(g_{ik}g_{jl} - g_{jk}g_{il})R. \quad (233)$$

Тензор Римана имеет 20 независимых компонент, а тензор Вейля и тензор Риччи — по 10 компонент каждый. Тождества Бианки

$$R_{ij[kl;m]} = \frac{1}{3}(R_{ijkl;m} + R_{ijlk;m} + R_{ijmk;l}) = 0 \quad (234)**$$

в четырехмерном случае приводят к 24 различным уравнениям, соответствующим шести различным парам индексов ($i, j, i \neq j$), причем каждой паре соответствуют четыре уравнения с $k \neq l \neq m$. Однако только 20 из этих 24 уравнений линейно-независимы — легко проверить, что следующие четыре линейные комбинации тождественно равны нулю вследствие свойств симметрии тензора Римана (включая симметрии циклического соотношения):

$$\begin{aligned} R_{12[34;1]} - R_{13[41;2]} + R_{14[12;3]} &= 0, \\ R_{23[41;2]} - R_{24[12;3]} + R_{21[23;4]} &= 0, \\ R_{34[12;3]} - R_{31[23;4]} + R_{32[34;1]} &= 0, \\ R_{41[23;4]} - R_{42[34;1]} + R_{43[41;2]} &= 0. \end{aligned} \quad (235)$$

* В настоящее время есть некоторые экспериментальные свидетельства в пользу существования массы покоя нейтрино. — *Прим. ред.*

** Если группа индексов заключена в квадратные скобки, то это означает, что соответствующая величина «антисимметризована» по этим индексам посредством действия оператора антисимметризации A (см. уравнение (53)).

Геометрия пространства-времени описывается уравнениями Эйнштейна *

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = - (8\pi G/c^4) T_{ij}, \quad (236)$$

где T_{ij} — тензор энергии-импульса вещества и полей (кроме гравитационного), G — гравитационная постоянная (которую, как и скорость света c , мы положим равной 1, выбрав соответствующим образом систему единиц). Уравнения Эйнштейна можно записать и в другом виде:

$$R_{ij} = - (8\pi G/c^4) (T_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}T) \quad (T = g^{ij}T_{ij}). \quad (236')$$

В пустоте (т. е. в области пространства-времени, где $T_{ij} = 0$) уравнения Эйнштейна сводятся к

$$G_{ij} = 0, \quad (237a)$$

или, что эквивалентно,

$$R_{ij} = 0, \quad (237b)$$

причем тензор Римана совпадает с тензором Вейля.

Уравнения Эйнштейна обычно рассматриваются как уравнения для определения метрики (точнее, как уравнения для определения десяти метрических коэффициентов g_{ij}). Ясно, что вследствие тождества (223)

$$G^i_i = 0 \quad (238)$$

любое решение уравнений Эйнштейна должно содержать четыре произвольные функции. Свобода в выборе этих функций есть калибровочная свобода, обусловленная «общей ковариантностью» теории. И эта свобода в выборе калибровки позволяет наложить на метрику четыре координатных условия.

Наконец, следует отметить, что в пустоте число тождеств Бианки уменьшается с 20 до 16, потому что четыре из них, включенные в уравнения (238), тождественно удовлетворяются в силу уравнений поля (237).

7. Тетрадный формализм

Стандартный способ решения задач общей теории относительности заключается в использовании локального координатного базиса, причем координаты выбираются так, чтобы максимально упростить решение. В последние годы, однако, появился другой способ исследования, имеющий ряд преимуществ. Он состоит в том, что выбирается подходящий тетрадный базис из четырех линейно независимых векторных полей, все нужные величины проектируются на выбранный базис и исследуются уравнения,

* Знак в правой части (236) отличается от принятого в советской научной литературе (см., Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля. — М.: Наука, 1973, с. 353). Это, однако, компенсируется (также нетрадиционным) выбором знака в определении T_{ij} электромагнитного поля (334); другие виды материи в книге не рассматриваются. — Прим. ред.

которым удовлетворяют эти величины. Этот формализм называется *тетрадным формализмом*.

В приложениях выбор тетрадного базиса зависит от тех свойств симметрии, которыми, по предположению, обладает исследуемое пространство-время, и этот выбор является в некоторой степени частью решения задачи. Кроме того, не всегда ясно, какие уравнения являются в данном случае нужными и какие связи могут быть между ними. Поэтому мы опишем здесь лишь основные идеи без каких-либо предварительных предположений и получим различные уравнения, которые затем окажутся нужными для приложений.

а. Тетрадное представление. В каждой точке пространства-времени расположим базис из четырех контравариантных векторов

$$e_{(a)}^i \quad (a = 1, 2, 3, 4), \quad (239)$$

где индекс в скобках нумерует векторы тетрады и называется *тетрадным индексом* в отличие от тензорных индексов, которые пишутся без скобок. (Как правило, мы будем использовать для тетрадных индексов начальные буквы латинского алфавита (a, b и т. д.), а буквы i, j и т. д. зарезервируем для тензорных индексов.) С контравариантными векторами (239) связаны ковариантные векторы

$$e_{(a)i} = g_{ik} e_{(a)}^k, \quad (240)$$

где g_{ik} — метрический тензор. Кроме того, определим матрицу $[e_{(a)}^{(b)}]$ как обратную матрицу $[e_{(a)}^i]$ (верхний индекс нумерует столбцы, а нижний — строки), так что

$$e_{(a)}^i e_i^{(b)} = \delta_{(a)}^{(b)}, \quad e_{(a)}^i e_j^{(a)} = \delta_j^i, \quad (241)$$

где предполагается (здесь и всюду далее), что два типа индексов подчиняются правилу суммирования независимо. Предположим также (как часть определения), что

$$e_{(a)}^i e_{(b)i} = \eta_{(a)(b)}, \quad (242)$$

где

$$\eta_{(a)(b)} \text{ — постоянная симметричная матрица.} \quad (243)$$

Чаще всего предполагается, что базисные векторы $e_{(a)}^i$ составляют *ортонормированную* тетраду, в этом случае $\eta_{(a)(b)}$ — диагональная матрица с элементами $+1, -1, -1, -1$. Мы не будем накладывать условие ортонормированности. Следует отметить, что можно развить более общий формализм, чем подробно рассматриваемый здесь. Обобщение состоит в том, что элементы матрицы $\eta_{(a)(b)}$ могут быть функциями на многообразии. Мы кратко рассмотрим такое обобщение в пункте д) настоящего параграфа. Пока же будем считать, что $\eta_{(a)(b)}$ — постоянные величины.

Введем в рассмотрение матрицу $\eta^{(a)(b)}$, обратную матрице $[\eta_{(a)(b)}]$:

$$\eta^{(a)(b)}\eta_{(b)(c)} = \delta_{(c)}^{(a)}. \quad (244)$$

Нетрудно показать, что

$$\eta_{(a)(b)}e_i^{(a)} = e_{(b)i}, \quad \eta^{(a)(b)}e_{(a)i} = e_i^{(b)}, \quad (245)$$

и получить очень важное соотношение:

$$e_{(a)i}e_j^{(a)} = g_{ij}. \quad (246)$$

Проектируя векторное или тензорное поле на тетраду, получаем *тетрадные компоненты* вектора

$$\begin{aligned} A_{(a)} &= e_{(a)i}A^i = e_{(a)}^i A_i, \\ A^{(a)} &= \eta^{(a)(b)}A_{(b)} = e_j^{(a)}A^j = e^{(a)i}A_i, \\ A^i &= e_{(a)}^i A^{(a)} = e^{(a)i}A_{(a)} \end{aligned} \quad (247)$$

и тензора

$$\begin{aligned} T_{(a)(b)} &= e_{(a)}^i e_{(b)}^j T_{ij} = e_{(a)}^i T_{i(b)}, \\ T_{ij} &= e_i^{(a)} e_j^{(b)} T_{(a)(b)} = e_i^{(a)} T_{(a)j}. \end{aligned} \quad (248)$$

Соотношения (241), (242), (244) и (245) показывают, что: а) от тензорных индексов легко перейти к тетрадным индексам и обратно; б) тетрадные индексы поднимаются и опускаются матрицами $\eta^{(a)(b)}$ и $\eta_{(a)(b)}$ независимо от операций с тензорными индексами с помощью метрического тензора; в) появление величин с индексами двух типов не вносит никакой неопределенности; г) результат свертки тензора не зависит от того, по каким индексам произведена свертка — тетрадным или тензорным.

б. Производные по направлению и коэффициенты вращения Риччи. Контравариантные векторы $e_{(a)}$, рассматриваемые как касательные векторы, позволяют определить производные по направлению (ср. с формулой (8)):

$$e_{(a)} = e_{(a)}^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (249)$$

и мы введем обозначение

$$\phi_{, (a)} = e_{(a)}^i \frac{\partial \phi}{\partial x^i} = e_{(a)}^i \phi_{, i}, \quad (250)$$

где ϕ — произвольное скалярное поле. В более общем случае имеем

$$\begin{aligned} A_{(a), (b)} &= e_{(b)}^i \frac{\partial}{\partial x^i} A_{(a)} = e_{(b)}^i \frac{\partial}{\partial x^i} e_{(a)}^j A_j = \\ &= e_{(b)}^i \nabla_{\partial_i} [e_{(a)}^j A_j] = e_{(b)}^i [e_{(a)}^j A_{j; i} + A_{(a)}^k e_{(b); i}^k]. \end{aligned} \quad (251)$$

Используя правила, сформулированные в конце предыдущего раздела, и коммутативность операций поднятия и опускания

(тензорных) индексов и ковариантного дифференцирования, получаем

$$A_{(a), (b)} = e_{(a)}^i A_{j; i} e_{(b)}^j + e_{(a) k; i} e_{(b)}^i e_{(c)}^k A^{(c)}. \quad (252)$$

Введя определение

$$\gamma_{(c) (a) (b)} = e_{(c)}^k e_{(a) k; i} e_{(b)}^i, \quad (253)$$

можно переписать соотношение (252) в виде

$$A_{(a), (b)} = e_{(a)}^i A_{j; i} e_{(b)}^j + \gamma_{(c) (a) (b)} A^{(c)}. \quad (254)$$

Величины $\gamma_{(c) (a) (b)}$ называются *коэффициентами вращения Риччи*. Эквивалентное определение этих коэффициентов дается соотношением

$$e_{(a) k; i} = e_{(c)}^{(c)} \gamma_{(c) (a) (b)} e_i^{(b)}. \quad (255)$$

Коэффициенты вращения Риччи антисимметричны по первым двум индексам:

$$\gamma_{(c) (a) (b)} = -\gamma_{(a) (c) (b)}. \quad (256)$$

Этот факт становится очевидным, если расписать тождество

$$0 = \eta_{(a) (b), i} = [e_{(a) k} e_{(b)}^k]_{; i}. \quad (257)$$

(Заметим, что мы не могли бы получить этот результат, если бы величины $\eta_{(a) (b)}$ не были постоянными). Свойство антисимметричности позволяет переписать уравнение (255) в другом виде:

$$e_{(a) k; i} = -\gamma_{(a) i}^k. \quad (258)$$

Возвращаясь к уравнению (254), запишем его в альтернативной форме:

$$e_{(a)}^i A_{j; i} e_{(b)}^j = A_{(a), (b)} - \eta^{(n) (m)} \gamma_{(n) (a) (b)} A_{(m)}. \quad (259)$$

Величина в правой части этого уравнения называется *внутренней производной* $A_{(a)}$ по направлению $e_{(b)}$ и обозначается $A_{(a) | (b)}$. Имеем

$$A_{(a) | (b)} = e_{(a)}^i A_{j; i} e_{(b)}^j, \quad \text{или} \quad A_{i; j} = e_i^{(a)} A_{(a) | (b)} e_j^{(b)}. \quad (260)$$

Производная по направлению и внутренняя производная от вектора связаны, таким образом, соотношением

$$A_{(a) | (b)} = A_{(a), (b)} - \eta^{(n) (m)} \gamma_{(n) (a) (b)} A_{(m)}. \quad (261)$$

Из определений (260) следует, что можно легко переходить от внутренних производных к ковариантным производным и обратно.

Понятие внутренней производной векторного поля очевидным образом распространяется на тензорные поля. Например, внутренняя производная от тензора Римана равна

$$R_{(a) (b) (c) (d) | (f)} = R_{ijkl; m} e_{(a)}^i e_{(b)}^j e_{(c)}^k e_{(d)}^l e_{(f)}^m. \quad (262)$$

Расписывая соотношение

$$R_{(a) (b) (c) (d) | (f)} = [R_{ijkl} e_{(a)}^i e_{(b)}^j e_{(c)}^k e_{(d)}^l]_{; m} e_{(f)}^m \quad (263)$$

и заменяя ковариантные производные от различных базисных векторов соответствующими коэффициентами вращения Риччи (см. уравнение (258)), получаем (аналогично уравнению (261))

$$R_{(a) \ (b) \ (c) \ (d) \ | \ (f)} = R_{(a) \ (b) \ (c) \ (d), \ (f)} - \gamma_{(n) \ (m)}^{(n) \ (m)} [\gamma_{(n) \ (a) \ (f)} R_{(m) \ (b) \ (c) \ (d)} + \\ + \gamma_{(n) \ (b) \ (f)} R_{(a) \ (m) \ (c) \ (d)} + \gamma_{(n) \ (c) \ (f)} R_{(a) \ (b) \ (m) \ (d)} + \\ + \gamma_{(n) \ (d) \ (f)} R_{(a) \ (b) \ (c) \ (m)}]. \quad (264)$$

Наконец, важно отметить, что вычисление коэффициентов вращения Риччи не требует вычисления ковариантных производных (и, следовательно, вычисления символов Кристоффеля). Действительно, введем определение

$$\lambda_{(a) \ (b) \ (c)} = e_{(b) \ i, \ j} [e_{(a)}^i e_{(c)}^j - e_{(a)}^j e_{(c)}^i]. \quad (265)$$

Перепишав его в виде

$$\lambda_{(a) \ (b) \ (c)} = [e_{(b) \ i, \ j} - e_{(b) \ j, \ i}] e_{(a)}^i e_{(c)}^j \quad (266)$$

и заметив, что в (266) можно заменить обычные производные ковариантными (в силу уравнения (115) для симметричных связностей), получаем

$$\lambda_{(a) \ (b) \ (c)} = [e_{(b) \ i, \ j} - e_{(b) \ j, \ i}] e_{(a)}^i e_{(c)}^j = \gamma_{(a) \ (b) \ (c)} - \gamma_{(c) \ (b) \ (a)}. \quad (267)$$

Уравнения (267) можно разрешить относительно $\gamma_{(a) \ (b) \ (c)}$:

$$\gamma_{(a) \ (b) \ (c)} = 1/2 [\lambda_{(a) \ (b) \ (c)} + \lambda_{(c) \ (a) \ (b)} - \lambda_{(b) \ (c) \ (a)}], \quad (268)$$

откуда и следует, что для вычисления $\gamma_{(a) \ (b) \ (c)}$ требуется вычислить только обычные производные. Заметим также, что λ -символы антисимметричны по первому и третьему индексам:

$$\lambda_{(a) \ (b) \ (c)} = -\lambda_{(c) \ (b) \ (a)}. \quad (269)$$

в. *Коммутационные соотношения и структурные константы.* Скобка Ли $[\mathbf{e}_{(a)}, \mathbf{e}_{(b)}]$ базисных касательных векторов, играющая важную роль в теории, сама является касательным вектором и поэтому может быть разложена по этому же базису $\mathbf{e}_{(a)}$. Таким образом, должно существовать разложение вида

$$[\mathbf{e}_{(a)}, \mathbf{e}_{(b)}] = C_{(a) \ (b)}^{(c)} \mathbf{e}_{(c)}. \quad (270)$$

Коэффициенты этого разложения $C_{(a) \ (b)}^{(c)}$ называются *структурными константами*; нетрудно видеть, что в общем случае имеются 24 константы и что они антисимметричны по индексам (a) и (b) .

Структурные константы можно выразить через коэффициенты вращения Риччи. Чтобы показать это, рассмотрим действие скобки Ли на скалярное поле f :

$$[\mathbf{e}_{(a)}, \mathbf{e}_{(b)}] f = e_{(a)}^i [e_{(b)}^j f, _j]_{, i} - e_{(b)}^i [e_{(a)}^j f, _j]_{, i} = \\ = [e_{(a)}^i e_{(b)}^j ; _i ; _j - e_{(b)}^i e_{(a)}^j ; _i ; _j] f, _j = [-\gamma_{(a)}^j{}^j{}_{(a)} + \gamma_{(a)}^j{}^j{}_{(b)}] f, _j = \\ = [-\gamma_{(b)}^{(c)}{}_{(a)} + \gamma_{(a)}^{(c)}{}_{(b)}] e_{(c)}^i f, _j. \quad (271)$$

Сравнение этого соотношения с уравнением (270) показывает, что

$$C_{(a)(b)}^{(c)} = \gamma_{(b)(a)}^{(c)} - \gamma_{(a)(b)}^{(c)}. \quad (272)$$

Если в уравнение (270) подставить вместо структурных констант их выражения через коэффициенты вращения Риччи, то получим *коммутационные соотношения*, число которых равно 24.

г. *Тождества Риччи и тождества Бианки*. Проектируя тождество Риччи (уравнение (231))

$$e_{(a)i};_{kl} - e_{(a)i};_{lk} = R_{mikl}e_{(a)}^m \quad (273)$$

на тетрадный базис, получаем

$$R_{(a)(b)(c)(d)} = R_{mikl}e_{(a)}^me_{(b)}^le_{(c)}^ke_{(d)}^l = \\ = \{ -[\gamma_{(a)(f)(g)}e_i^{(f)}e_k^{(g)}];_{l \vdash [\gamma_{(a)(f)(g)}e_i^{(f)}e_l^{(g)}];_{k \vdash } e_{(b)}^ie_{(c)}^ke_{(d)}^l \}. \quad (274)$$

Раскрывая квадратные скобки в правой части и снова заменяя ковариантные производные базисных векторов соответствующими коэффициентами вращения Риччи, получаем

$$R_{(a)(b)(c)(d)} = -\gamma_{(a)(b)(c), (d)} + \gamma_{(a)(b)(d), (c)} + \\ + \gamma_{(b)(a)(f)}[\gamma_{(c)}^{(f)}(d) - \gamma_{(d)}^{(f)}(c)] + \gamma_{(f)(a)(c)}\gamma_{(b)}^{(f)}(d) - \\ - \gamma_{(f)(a)(d)}\gamma_{(b)}^{(f)}(c). \quad (275)$$

Вследствие антисимметричности коэффициентов вращения Риччи по первым двум индексам и явной антисимметричности выражения тетрадных компонент тензора Римана через эти коэффициенты существует всего 36 уравнений (275).

Наконец, тождество Бианки (234), выраженное через внутренние производные и тетрадные компоненты, имеет следующий вид:

$$R_{(a)(b)[(c)(d)](f)} = 1/6 \sum_{[(c)(d)(f)]} \{ R_{(a)(b)(c)(d), (f)} - \\ - \eta^{(n)(m)}[\gamma_{(n)(a)(f)}R_{(m)(b)(c)(d)} + \gamma_{(n)(b)(f)}R_{(a)(m)(c)(d)} + \\ + \gamma_{(n)(c)(f)}R_{(a)(b)(m)(d)} + \gamma_{(n)(d)(f)}R_{(a)(b)(c)(m)}] \}. \quad (276)$$

Как отмечалось в § 6, д, имеется всего 20 линейно независимых тождеств.

Основными уравнениями в тетрадном формализме являются коммутационные соотношения (270) (24 соотношения), 36 тождеств Риччи (275) и 20 линейно независимых тождеств Бианки. Неясно, сколько из них независимы, как их следует упорядочить или применять, наконец, для чего они полезны. Все эти вопросы будут обсуждаться ниже.

д. *Обобщенный тетрадный формализм*. До сих пор мы предполагали (и явным образом использовали), что величины $\eta_{(a)(b)}$, определенные уравнением (242), составляют постоянную матрицу.

Если бы величины $\eta_{(a)(b)}$ являлись функциями пространственно-временных координат, мы не смогли бы доказать антисимметричность коэффициентов вращения Риччи по первым двум индексам, а вместо условия антисимметричности получили бы (ср. с уравнением (257))

$$\gamma_{(a)(b)(c)} - \gamma_{(b)(a)(c)} = \eta_{(a)(b), (c)}. \quad (277)$$

Кроме того, более важным является то обстоятельство, что процесс поднятия и опускания тетрадных индексов с помощью матриц $\eta^{(a)(b)}$ и $\eta_{(a)(b)}$ не коммутировал бы с операциями дифференцирования по направлению и внутреннего дифференцирования. Тщательный анализ результатов предыдущего раздела показывает, что, хотя правильное выражение для структурных констант, заменяющее уравнение (272), имеет теперь вид

$$C^{(c)}_{(a)(b)} = \gamma_{(a)}^{(c)}{}_{(b)} - \gamma_{(b)}^{(c)}{}_{(a)}, \quad (278)$$

тождества Риччи и Бианки, выражаемые уравнениями (275) и (276), остаются справедливыми.

8. Формализм Ньюмена—Пенроуза

Формализм Ньюмена—Пенроуза — это тетрадный формализм в специально выбранном базисе. Именно, тетрада Ньюмена—Пенроуза состоит из четверки изотропных векторов l , n , m и $\bar{m}$, причем l и n — действительные векторы, а m и $\bar{m}$ — взаимно комплексно сопряженные векторы. Этот формализм был предложен Ньюменом и Пенроузом в 1962 г., и его новизна как раз и состояла в выборе изотропного базиса *, а не привычного в то время ортонормированного базиса. Пенроуз исходил из того, что существенным элементом структуры пространства-времени является структура его световых конусов, позволяющая ввести спинорный базис. Оказывается, структура световых конусов, соответствующая решениям уравнений Эйнштейна, описывающих черные дыры, такова, что формализм Ньюмена—Пенроуза наиболее эффективно выявляет присущие этим решениям свойства симметрии. Такая приспособленность формализма Ньюмена—Пенроуза к нахождению и исследованию решений, описывающих черные дыры, связана с тем, что они являются решениями «типа D», а также с теоремой Гольдберга—Сакса (эти вопросы мы будем рассматривать в § 9 настоящей главы и в последующих главах).

а. Изотропный базис и спиновые коэффициенты. В основе формализма Ньюмена—Пенроуза, как уже упоминалось, лежит выбор изотропного базиса, состоящего из пары действительных изотропных векторов l и n и пары комплексно сопряженных

* Первоначально Пенроуз рассматривал изотропный базис для введения в общую теорию относительности спинорного анализа. В гл. 10 (§ 102) мы кратко рассмотрим альтернативный подход к формализму Ньюмена — Пенроуза.

изотропных векторов $\mathbf{m}$ и $\bar{\mathbf{m}}$. Требуется, чтобы эти векторы удовлетворяли *условиям ортогональности*:

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{l} \cdot \bar{\mathbf{m}} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{m}} = 0 \quad (279)$$

и, разумеется, условиям изотропности:

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{l} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = \bar{\mathbf{m}} \cdot \bar{\mathbf{m}} = 0. \quad (280)$$

Кроме того, на базисные векторы обычно налагают следующие *условия нормировки*:

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{n} = 1, \quad \mathbf{m} \cdot \bar{\mathbf{m}} = -1. \quad (281)$$

Строго говоря, нет необходимости налагать эти условия нормировки (ср. с § 7, д). Например, Пенроуз в некоторых последующих работах предпочитал не накладывать условия (281), что лучше согласуется с его представлениями о пространстве-времени как о структуре световых конусов. Но для целей настоящей книги преимущества дополнительной свободы выбора базисных векторов не настолько велики, чтобы забыть о недостатках, связанных с потерей антисимметричности коэффициентов вращения Риччи по первым двум индексам и, что более серьезно, с потерей свойства перестановочности операции поднятия и опускания тетрадных индексов с операциями дифференцирования по направлению и внутреннего дифференцирования. По этой причине мы сохраним нормировочные условия (281). Тогда фундаментальная матрица из величин $\eta_{(a)(b)}$ есть постоянная симметричная матрица вида

$$[\eta_{(a)(b)}] = [\eta^{(a)(b)}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (282)^*$$

если мы примем следующую нумерацию векторов тетрады (ср. § 7, а):

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{l}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{n}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{m}, \quad \mathbf{e}_4 = \bar{\mathbf{m}}. \quad (283)$$

Соответствующий ковариантный базис имеет вид

$$\mathbf{e}^1 = \mathbf{e}_2 = \mathbf{n}, \quad \mathbf{e}^2 = \mathbf{e}_1 = \mathbf{l}, \quad \mathbf{e}^3 = -\mathbf{e}_4 = -\bar{\mathbf{m}}, \quad \mathbf{e}^4 = -\mathbf{e}_3 = -\mathbf{m}. \quad (284)$$

Базисные векторы, рассматриваемые как производные по направлению, в формализме Ньюмена—Пенроуза имеют специальные обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}^2 = D; & \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}^1 = \Delta; \\ \mathbf{e}_3 &= -\mathbf{e}^4 = \delta; & \mathbf{e}_4 &= -\mathbf{e}^3 = \delta^*. \end{aligned} \quad (285)$$

* В дальнейшем мы будем опускать скобки, с помощью которых отличали тетрадные индексы, когда это не будет приводить к недоразумениям.

Различные коэффициенты вращения Риччи, которые теперь называются *спиновыми коэффициентами*, также имеют специальные обозначения:

$$\begin{aligned}\kappa &= \gamma_{311}; & \rho &= \gamma_{314}; & \varepsilon &= \frac{1}{2}(\gamma_{211} + \gamma_{341}); \\ \sigma &= \gamma_{313}; & \mu &= \gamma_{243}; & \gamma &= \frac{1}{2}(\gamma_{212} + \gamma_{342}); \\ \lambda &= \gamma_{214}; & \tau &= \gamma_{312}; & \alpha &= \frac{1}{2}(\gamma_{214} + \gamma_{344}); \\ \nu &= \gamma_{242}; & \pi &= \gamma_{211}; & \beta &= \frac{1}{2}(\gamma_{213} + \gamma_{343}).\end{aligned}\quad (286)$$

Очевидно, что комплексно сопряженные величины будут получаться заменой индекса 3 всюду, где он встречается, на индекс 4, и наоборот. Это общее правило.

б. Представление тензора Вейля, тензора Риччи и тензора Римана в формализме Ньюмена—Пенроуза. Тензор Вейля вводится как бесследовая часть тензора Римана, поэтому его тетрадные компоненты определяются из соотношения (ср. с уравнением (233))

$$R_{abcd} = C_{abcd} + \frac{1}{2}(\eta_{ac}R_{bd} - \eta_{bc}R_{ad} - \eta_{ad}R_{bc} + \eta_{bd}R_{ac}) - \frac{1}{6}(\eta_{ac}\eta_{bd} - \eta_{ad}\eta_{bc})R, \quad (287)$$

где R_{ab} — тетрадные компоненты тензора Риччи, а R — скалярная кривизна:

$$R_{ac} = \eta^{bd}R_{abcd}, \quad R = \eta^{ab}R_{ab} = 2(R_{12} - R_{34}). \quad (288)$$

Условие равенства нулю следа тензора Вейля сводится к уравнению

$$\eta^{ad}C_{abcd} = C_{1bc2} + C_{2bc1} - C_{3bc1} - C_{4bc3} = 0. \quad (289)$$

Кроме того, нужно потребовать, чтобы

$$C_{1231} + C_{1342} + C_{1423} = 0. \quad (290)$$

Если условие (289) выписать явно для случая $b = c$, то получим

$$C_{1314} = C_{2321} = C_{1322} = C_{1442} = 0, \quad (291)$$

тогда как это же условие при $b \neq c$ вместе с условием цикличности (290) дает

$$\begin{aligned}C_{1231} &= C_{1334}; & C_{1211} &= C_{1443}; & C_{1232} &= C_{2343}; & C_{1242} &= C_{2434}; & C_{1212} &= C_{3434}; \\ C_{1342} &= \frac{1}{2}(C_{1212} - C_{1234}) = \frac{1}{2}(C_{3434} - C_{1234}).\end{aligned}\quad (292)$$

Используя эти результаты, получим следующие соотношения между различными компонентами тензора Римана и компонентами тензоров Вейля и Риччи:

$$\begin{aligned}R_{1212} &= C_{1212} + R_{12} - \frac{1}{6}R; & R_{1324} &= C_{1324} + \frac{1}{12}R; & R_{1234} &= C_{1234}; \\ R_{3434} &= C_{3434} - R_{34} - \frac{1}{6}R; & R_{1313} &= C_{1213}; & R_{2323} &= C_{2323}; \\ R_{1314} &= \frac{1}{2}R_{11}; & R_{2324} &= \frac{1}{2}R_{22}; & R_{3132} &= -\frac{1}{2}R_{33}; & R_{1213} &= C_{1213} + \frac{1}{2}R_{13}; \\ R_{1334} &= C_{1334} + \frac{1}{2}R_{13}; & R_{1223} &= C_{1223} - \frac{1}{2}R_{23}; & R_{2334} &= C_{2334} + \frac{1}{2}R_{23};\end{aligned}\quad (293)$$

а также комплексно сопряженные соотношения, получаемые заменой индекса 3 индексом 4 и обратно.

В формализме Ньюмена—Пенроуза десять независимых компонент тензора Вейля описываются пятью комплексными скалярами:

$$\begin{aligned}\Psi_0 &= -C_{1313} = -C_{pqrs} l^p m^q l' m^s, \\ \Psi_1 &= -C_{1213} = -C_{pqrs} l^p n^q l' m^s, \\ \Psi_2 &= -C_{1342} = -C_{pqrs} l^p m^q \bar{m}' n^s, \\ \Psi_3 &= -C_{1242} = -C_{pqrs} l^p n^q \bar{m}' n^s, \\ \Psi_4 &= -C_{2424} = -C_{pqrs} n^p \bar{m}' n^r \bar{m}^s.\end{aligned}\quad (294)$$

Из общих соображений очевидно, что компоненты тензора Вейля полностью определяются пятью комплексными скалярами $\Psi_0, \dots, \Psi_4$. Удобно, однако, иметь и общую формулу, явным образом выражающую компоненты тензора Вейля через эти пять скаляров. Эта формула может быть получена следующим образом.

Введем символ, обозначающий построение из произведений четырех величин такой их линейной комбинации, которая обладает всеми основными свойствами симметрии тензоров Римана и Вейля:

$$\begin{aligned}\{\omega_p x_q y_r z_s\} &= \omega_p x_q y_r z_s - \omega_p x_q z_r y_s - x_p \omega_q y_r z_s + x_p \omega_q z_r y_s + y_p z_q \omega_r x_s - \\ &\quad - y_p z_q x_r \omega_s - z_p y_q \omega_r x_s + z_p y_q x_r \omega_s.\end{aligned}\quad (295)$$

Такая линейная комбинация явным образом антисимметрична по индексам (p, q) и (r, s) и не меняется при одновременной перестановке пар индексов (p, q) и (r, s) . Ясно, что компоненты тензора Вейля должны иметь следующее представление:

$$\begin{aligned}C_{pqrs} &= Q_{1212} \{l_p n_q l_r n_s\} + Q_{3434} \{m_p \bar{m}_q m_r \bar{m}_s\} + Q_{1234} \{l_p n_q m_r \bar{m}_s\} + \\ &\quad + Q_{1314} \{l_p m_q l_r \bar{m}_s\} + Q_{2324} \{n_p m_q n_r \bar{m}_s\} + [Q_{1313} \{l_p m_q l_r m_s\} + \\ &\quad + Q_{2323} \{n_p m_q n_r m_s\} + Q_{1213} \{l_p n_q l_r m_s\} + Q_{1223} \{l_p n_q n_r m_s\} + \\ &\quad + Q_{1323} \{l_p m_q n_r m_s\} + Q_{1324} \{l_p m_q n_r \bar{m}_s\} + Q_{1334} \{l_p m_q m_r \bar{m}_s\} + \\ &\quad + Q_{2334} \{n_p m_q m_r \bar{m}_s\} + \text{комплексно сопряженные}],\end{aligned}\quad (296)$$

где $Q\dots$ — некоторые коэффициенты, а комплексное сопряжение восьми величин в квадратных скобках получается заменой всюду m на $\bar{m}$ и индекса 3 индексом 4 и обратно.

Выражения для коэффициентов $Q\dots$ через скаляры Ψ_i в представлении (296) можно получить сверткой обеих частей уравнения с подходящими произведениями компонент векторов l, n, m и $\bar{m}$. Например, при свертке с произведением $l^p m^q l' m^s$ в левой части уравнения (296) получаем по определению $-\Psi_0$, а в правой части «выживает» лишь член с коэффициентом Q_{2424} — следовательно, $Q_{2424} = -\Psi_0$. Подобным же образом получаем, что при

свертке с произведением $l^p m^q l^r \bar{m}^s$ в правой части «выживает» только член с коэффициентом Q_{2423} , который должен быть равен нулю, потому что в левой части мы имеем компоненту C_{1314} , равную нулю (см. уравнение (291)). Проводя всевозможные свертки и используя определения и соотношения (291), (292) и (294), получаем следующий результат:

$$\begin{aligned} Q_{1324} &= \Psi_2; \quad Q_{1212} = Q_{3134} = -(\Psi_2 + \Psi_2^*); \quad Q_{1234} = (\Psi_2 - \Psi_2^*); \\ Q_{1313} &= -\Psi_4; \quad Q_{2_{21}} = -\Psi_0; \quad Q_{1213} = -Q_{1334} = \Psi_3; \quad Q_{1224} = Q_{2143} = \\ &= -\Psi_1; \quad Q_{1314} = Q_{2324} = Q_{1323} = Q_{1424} = 0. \end{aligned} \quad (297)$$

В результате

$$\begin{aligned} C_{pqrs} &= -(\Psi_2 + \Psi_2^*) [\{l_p n_q l_r n_s\} + \{m_p \bar{m}_q m_r \bar{m}_s\}] + \\ &+ (\Psi_2 - \Psi_2^*) \{l_p n_q m_r \bar{m}_s\} + (-\Psi_0 \{n_p \bar{m}_q n_r \bar{m}_s\} - \Psi_4 \{l_p m_q l_r m_s\} + \\ &+ \Psi_2 \{l_p m_q n_r \bar{m}_s\} - \Psi_1 [\{l_p n_q n_r \bar{m}_s\} + \{n_p \bar{m}_q \bar{m}_r m_s\}] + \\ &+ \Psi_3 [\{l_p n_q l_r m_s\} - \{l_p m_q m_r \bar{m}_s\}]) + \text{комплексно сопряженные).} \end{aligned} \quad (298)$$

В частности,

$$\begin{aligned} C_{1334} &= \Psi_1; \quad C_{2443} = \Psi_3; \\ C_{1212} &= C_{3434} = -(\Psi_2 + \Psi_2^*); \quad C_{1234} = (\Psi_2 - \Psi_2^*). \end{aligned} \quad (299)$$

Учитывая комплексно сопряженные члены, а также равенство нулю четырех компонент (291), приходим к выводу, что уравнения (294) и (299) определяют все различные компоненты тензора Вейля.

Обратимся теперь к тензору Риччи. Десять независимых компонент тензора Риччи в формализме Ньюмена—Пенроуза определяются заданием следующих четырех действительных и трех комплексных скаляров:

$$\begin{aligned} \Phi_{00} &= -\frac{1}{2}R_{11}; \quad \Phi_{22} = -\frac{1}{2}R_{22}; \quad \Phi_{02} = -\frac{1}{2}R_{33}; \quad \Phi_{20} = -\frac{1}{2}R_{44}; \\ \Phi_{11} &= -\frac{1}{4}(R_{12} + R_{34}); \quad \Phi_{01} = -\frac{1}{2}R_{13}; \quad \Phi_{10} = -\frac{1}{2}R_{14}; \\ \Phi_{12} &= -\frac{1}{2}R_{23}; \quad \Phi_{21} = -\frac{1}{2}R_{24}; \quad \Lambda = \frac{1}{24}R = \frac{1}{12}(R_{12} - R_{34}). \end{aligned} \quad (300)$$

в. Коммутационные соотношения и структурные константы.
В этом разделе мы продолжаем выписывать в явном виде различные уравнения теории.

Рассмотрим сначала коммутационные соотношения (см. уравнения (270) и (272)):

$$[e_{(a)}, e_{(b)}] = (\gamma_{cba} - \gamma_{cab}) e^{(c)} = C_{ab}^c e_{(c)}. \quad (301)$$

Разберем подробно конкретный случай:

$$\begin{aligned} [\Delta, D] &= [n, l] = [e_2, e_1] = (\gamma_{c12} - \gamma_{c21}) e^c = \\ &= -\gamma_{121} e^1 + \gamma_{212} e^2 + (\gamma_{312} - \gamma_{321}) e^3 + (\gamma_{412} - \gamma_{421}) e^4 = \\ &= -\gamma_{121} \Delta + \gamma_{212} D - (\gamma_{312} - \gamma_{321}) \delta^* - (\gamma_{412} - \gamma_{421}) \delta. \end{aligned} \quad (302)$$

Это коммутационное соотношение, записанное с использованием введенных ранее обозначений спинных коэффициентов, принимает следующий вид:

$$\Delta D - D \Delta = (\gamma + \gamma^*) D + (\varepsilon + \varepsilon^*) \Delta - (\tau^* + \pi) \delta - (\tau + \pi^*) \delta^*. \quad (303)$$

Подобным же образом получаем

$$\delta D - D \delta = (\alpha^* + \beta - \pi^*) D + \kappa \Delta - (\rho^* + \varepsilon - \varepsilon^*) \delta - \sigma \delta^*, \quad (304)$$

$$\delta \Delta - \Delta \delta = -\nu^* D + (\tau - \alpha^* - \beta) \Delta + (\mu - \gamma + \gamma^*) \delta + \lambda^* \delta^*, \quad (305)$$

$$\delta^* \delta - \delta \delta^* = (\mu^* - \mu) D + (\rho^* - \rho) \Delta + (\alpha - \beta^*) \delta + (\beta - \alpha^*) \delta^*. \quad (306)$$

Сравнивая уравнения (303)—(306) с уравнением (301), получаем следующую таблицу, в которой структурные константы выражены через спинные коэффициенты:

$$\begin{aligned} C_{21}^1 &= +(\gamma + \gamma^*); & C_{31}^1 &= +(\alpha^* + \beta - \pi^*); & C_{32}^1 &= -\nu^*; \\ C_{43}^1 &= \mu^* - \mu; & C_{21}^2 &= +(\varepsilon + \varepsilon^*); & C_{31}^2 &= +\kappa; & C_{32}^2 &= \tau - \alpha^* - \beta; \\ C_{43}^2 &= \rho^* - \rho; & C_{21}^3 &= -(\tau^* + \pi); & C_{31}^3 &= -(\rho^* + \varepsilon - \varepsilon^*); \\ C_{32}^3 &= \mu - \gamma + \gamma^*; & C_{43}^3 &= \alpha - \beta^*; & C_{21}^4 &= -(\tau + \pi^*); \\ C_{31}^4 &= -\sigma; & C_{32}^4 &= +\lambda^*; & C_{43}^4 &= \beta - \alpha^*. \end{aligned} \quad (307)$$

г. *Тождества Риччи и приведенные уравнения.* Выясним, как выглядят тождества Риччи в формализме Ньюмена—Пенроуза. Для этого в качестве примера рассмотрим компоненту (1313) уравнения (275). Используя соотношения (293)¹, получаем

$$\begin{aligned} -\Psi_0 &= C_{1313} = R_{1313} = \gamma_{133,1} - \gamma_{131,3} + \\ &+ \gamma_{133} (\gamma_{121} + \gamma_{431} - \gamma_{413} + \gamma_{431} + \gamma_{134}) - \\ &- \gamma_{131} (\gamma_{433} + \gamma_{123} - \gamma_{213} + \gamma_{231} + \gamma_{132}). \end{aligned} \quad (308)$$

Используя введенные обозначения для производных по направлению и спинных коэффициентов, приведем это соотношение к следующему виду:

$$\begin{aligned} D\sigma - \delta\kappa &= \sigma (3\varepsilon - \varepsilon^* + \rho + \rho^*) + \\ &+ \kappa (\pi^* - \tau - 3\beta - \alpha^*) + \Psi_0. \end{aligned} \quad (309)$$

Как уже упоминалось при описании стандартного тетрадного формализма в § 7, г, можно, рассматривая различные компоненты уравнения (275), получить 36 уравнений. При использовании формализма Ньюмена—Пенроуза достаточно записать вдвое меньше уравнений, опустив комплексно сопряженные уравнения. Ниже мы выпишем систему 18 уравнений так, как они пер-

воначально были введены Ньюменом и Пенроузом в 1962 г., и укажем в каждом случае компоненту тензора Римана, которая приводит к данному уравнению:

$$D\rho - \delta^*\kappa = (\rho^2 + \sigma\sigma^*) + \rho(\varepsilon + \varepsilon^*) - \kappa^*\tau - \kappa(3\alpha + \beta^* - \pi) + \Phi_{00}, \quad [R_{1314}], \quad (310a)$$

$$D\sigma - \delta\kappa = \sigma(\rho + \rho^* + 3\varepsilon - \varepsilon^*) - \kappa(\tau - \pi^* + \alpha^* + 3\beta) + \Psi_0, \quad [R_{1313}], \quad (310б)$$

$$D\tau - \Delta\kappa = \rho(\tau + \pi^*) + \sigma(\tau^* + \pi) + \tau(\varepsilon - \varepsilon^*) - \kappa(3\gamma + \gamma^*) + \Psi_1 + \Phi_{01}, \quad [R_{1312}], \quad (310в)$$

$$D\alpha - \delta^*\varepsilon = \alpha(\rho + \varepsilon^* - 2\varepsilon) + \beta\sigma^* - \beta^*\varepsilon - \kappa\lambda - \kappa^*\gamma + \pi(\varepsilon + \rho) + \Phi_{10}, \quad [1/2(R_{3414} - R_{1214})], \quad (310г)$$

$$D\beta - \delta\varepsilon = \sigma(\alpha + \pi) + \beta(\rho^* - \varepsilon^*) - \kappa(\mu + \gamma) - \varepsilon(\alpha^* - \pi^*) + \Psi_1, \quad [1/2(R_{1213} - R_{3413})], \quad (310д)$$

$$D\gamma - \Delta\varepsilon = \alpha(\tau + \pi^*) + \beta(\tau^* + \pi) - \gamma(\varepsilon + \varepsilon^*) - \varepsilon(\gamma + \gamma^*) + \tau\pi - \nu\kappa + \Psi_2 + \Phi_{11} - \Lambda, \quad [1/2(R_{1212} - R_{3412})], \quad (310е)$$

$$D\lambda - \delta^*\pi = (\rho\lambda + \sigma^*\mu) + \pi(\pi + \alpha - \beta^*) - \nu\kappa^* - \lambda(3\varepsilon - \varepsilon^*) + \Phi_{20}, \quad [R_{2441}], \quad (310ж)$$

$$D\mu - \delta\pi = (\rho^*\mu + \sigma\lambda) + \pi(\pi^* - \alpha^* + \beta) - \mu(\varepsilon + \varepsilon^*) - \nu\kappa + \Psi_2 + 2\Lambda, \quad [R_{2431}], \quad (310з)$$

$$D\nu - \Delta\pi = \mu(\pi + \tau^*) + \lambda(\pi^* + \tau) + \pi(\gamma - \gamma^*) - \nu(3\varepsilon + \varepsilon^*) + \Psi_3 + \Phi_{21}, \quad [R_{2421}], \quad (310и)$$

$$\Delta\lambda - \delta^*\nu = -\lambda(\mu + \mu^* + 3\gamma - \gamma^*) + \nu(3\alpha + \beta^* + \pi - \tau^*) - \Psi_4, \quad [R_{2442}], \quad (310к)$$

$$\delta\rho - \delta^*\sigma = \rho(\alpha^* + \beta) - \sigma(3\alpha - \beta^*) + \tau(\rho - \rho^*) + \kappa(\mu - \mu^*) - \Psi_1 + \Phi_{01}, \quad [R_{3143}], \quad (310л)$$

$$\delta\alpha - \delta^*\beta = (\mu\rho - \lambda\sigma) + \alpha\alpha^* + \beta\beta^* - 2\alpha\beta + \gamma(\rho - \rho^*) + \varepsilon(\mu - \mu^*) - \Psi_2 + \Phi_{11} + \Lambda, \quad (310м)$$

$$[1/2(R_{1234} - R_{3434})],$$

$$\delta\lambda - \delta^*\mu = \nu(\rho - \rho^*) + \pi(\mu - \mu^*) + \mu(\alpha + \beta^*) + \lambda(\alpha^* - 3\beta) - \Psi_3 + \Phi_{21}, \quad [R_{2443}], \quad (310н)$$

$$\delta\nu - \Delta\mu = (\mu^2 + \lambda\lambda^*) + \mu(\gamma + \gamma^*) - \nu^*\pi + \nu(\tau - 3\beta - \alpha^*) + \Phi_{22}, \quad [R_{2423}], \quad (310о)$$

$$\delta\gamma - \Delta\beta = \gamma(\tau - \alpha^* - \beta) + \mu\tau - \sigma\nu - \varepsilon\nu^* - \\ - \beta(\gamma - \gamma^* - \mu) + \alpha\lambda^* + \Phi_{12}, \quad [^{1/2}(R_{1232} - R_{3432})], \quad (310п)$$

$$\delta\tau - \Delta\sigma = (\mu\sigma + \lambda^*\rho) + \tau(\tau + \beta - \alpha^*) - \\ - \sigma(3\gamma - \gamma^*) - \kappa\nu^* + \Phi_{02}, \quad [R_{1332}], \quad (310р)$$

$$\Delta\rho - \delta^*\tau = -(\rho\mu^* + \sigma\lambda) + \tau(\beta^* - \alpha - \tau^*) + \\ + \rho(\gamma + \gamma^*) + \nu\kappa - \Psi_2 - 2\Lambda, \quad [R_{1324}], \quad (310с)$$

$$\Delta\alpha - \delta^*\gamma = \nu(\rho + \varepsilon) - \lambda(\tau + \beta) + \alpha(\gamma^* - \mu^*) + \\ + \gamma(\beta^* - \tau^*) - \Psi_3, \quad [^{1/2}(R_{1242} - R_{3442})]. \quad (310т)$$

Каждое из этих уравнений содержит один или более скаляров Вейля или скаляров Риччи, однако ясно, что, исходя из этой системы, можно получить 16 действительных уравнений, в которые входят только спинные коэффициенты. Дело в том, что, хотя правая часть уравнения (275), из которого была получена вся система уравнений (310), антисимметрична по первой и по второй паре индексов, она не обладает инвариантностью тензора Римана (в левой части) при одновременной перестановке первой и второй пар индексов. А именно эта инвариантность (плюс циклическое тождество) снижает число независимых компонент тензора Римана с 36 до 20. По этой же причине имеется возможность исключить тензор Римана из 16 уравнений, входящих в систему из 36 уравнений (275) [и (310)]. Такая процедура исключения может быть выполнена прямо на выписанных уравнениях. Например, мнимая часть уравнения (310а) не содержит Φ_{00} , так как Φ_{00} — действительный скаляр. Подобным же образом из уравнений (310в), (310д) и уравнения, комплексно сопряженного уравнению (310г), мы легко исключим Ψ_1 и Φ_{01} ($= \Phi_{10}^*$) и получим одно комплексное уравнение, содержащее только спинные коэффициенты. Продолжая систематически исключать скаляры Ψ_i и Φ_{ij} , мы придем к следующей системе четырех действительных и шести комплексных уравнений:

$$D(\rho - \rho^*) + \delta\kappa^* - \delta^*\kappa = (\rho - \rho^*)(\rho + \rho^* + \varepsilon + \varepsilon^*) + \\ + \kappa(\tau^* + \pi - 3\alpha - \beta^*) - \kappa^*(\tau + \pi^* - 3\alpha^* - \beta), \quad (311а)$$

$$D(\mu - \mu^*) + \delta(\alpha + \beta^* - \pi) - \delta^*(\alpha^* + \beta - \pi^*) = \\ = (\gamma + \gamma^*)(\rho - \rho^*) + \alpha(\pi^* - 2\beta) - \alpha^*(\pi - 2\beta^*) + \\ + \kappa^*\nu^* - \kappa\nu + \beta\pi - \beta^*\pi^* + (\rho + \rho^*)(\mu - \mu^*), \quad (311б)$$

$$D(\mu - \mu^* - \gamma + \gamma^*) + \Delta(\varepsilon - \varepsilon^*) - \delta\pi + \delta^*\pi^* = \\ = (\varepsilon + \varepsilon^*)(\mu^* - \mu) + \tau^*(\alpha^* + \pi^* - \beta) - \\ - \tau(\alpha + \pi - \beta^*) + \lambda\sigma - \lambda^*\sigma^* + \rho^*\mu - \rho\mu^* + \\ + 2(\varepsilon\gamma - \varepsilon^*\gamma^*), \quad (311в)$$

$$\Delta (\mu^* - \mu) + \delta v - \delta^* v^* = (\mu - \mu^*) (\mu + \mu^* + \gamma + \gamma^*) + \\ + v (\tau - 3\beta - \alpha^* + \pi^*) - v^* (\tau^* + \pi - 3\beta^* - \alpha), \quad (311г)$$

$$D (\tau - \alpha^* - \beta) - \Delta \kappa + \delta (\varepsilon + \varepsilon^*) = \\ = \rho (\tau + \pi^*) + \kappa^* \lambda^* + \sigma (\tau^* - \alpha - \beta^*) + \\ + \varepsilon (\tau - \pi^*) - \rho^* (\beta + \alpha^* + \pi^*) + \\ + \varepsilon^* (2\alpha^* + 2\beta - \tau - \pi^*) + \kappa (\mu - 2\gamma), \quad (311д)$$

$$\delta (\rho - \varepsilon + \varepsilon^*) - \delta^* \sigma + D (\beta - \alpha^*) = \\ = \rho (\alpha^* + \beta + \tau) - \rho^* (\tau - \beta + \alpha^* + \pi^*) + \\ + (\varepsilon^* - \varepsilon) (2\alpha^* - \pi^*) + \sigma (\pi - 2\alpha) + \\ + \kappa (\gamma^* - \gamma - \mu^*) + \kappa^* \lambda^*, \quad (311е)$$

$$D\lambda + \Delta \sigma^* - \delta^* (\tau^* + \pi) = \sigma^* (3\gamma^* - \gamma + \mu - \mu^*) + \\ + (\pi + \tau^*) (\pi - \tau^* + \alpha) + \lambda (\rho - \rho^* - 3\varepsilon + \varepsilon^*) - \\ - \beta\pi - \tau^* \beta^*, \quad (311ж)$$

$$Dv + \Delta (\alpha + \beta^* - \pi) - \delta^* (\gamma + \gamma^*) = \\ = v (\rho - 2\varepsilon) + \lambda (\pi^* - \alpha^* - \beta) + \mu (\pi + \tau^*) - \\ - \mu^* (\alpha + \beta^* + \tau^*) + \gamma (\pi - \tau^*) + \\ + \gamma^* (2\alpha + 2\beta^* - \pi - \tau^*) + \sigma^* v^*, \quad (311з)$$

$$\Delta (\beta^* - \alpha) + \delta \lambda + \delta^* (\gamma - \gamma^* - \mu) = \\ = v (\varepsilon^* - \varepsilon - \rho^*) + \lambda (\tau - 2\beta) + \alpha (\mu + \mu^*) - \\ - \mu^* (\pi + \tau^* + \beta^*) + \mu (\pi + \beta^*) + \\ + (\gamma - \gamma^*) (\tau^* - 2\beta^*) + \sigma^* v^*, \quad (311и)$$

$$D\mu + \Delta \rho - \delta \pi - \delta^* \tau = \rho^* \mu - \rho \mu^* + \\ + \pi (\pi^* - \alpha^* + \beta) + \tau (\beta^* - \alpha - \tau^*) + \\ + \rho (\gamma + \gamma^*) - \mu (\varepsilon + \varepsilon^*). \quad (311к)$$

д. Тождества Бианки. Как мы установили в § 7, г, существует всего 20 линейно независимых тождеств Бианки. Полное множество состоит из восьми комплексных тождеств

$$R_{13[13|4]} = 0; \quad R_{13[21|4]} = 0; \quad R_{13[13|2]} = 0; \quad R_{13[43|2]} = 0; \\ R_{42[13|4]} = 0; \quad R_{42[21|4]} = 0; \quad R_{42[13|2]} = 0; \quad R_{42[43|2]} = 0 \quad (312)$$

и четырех действительных тождеств, которые следуют из

$$\eta^{bc} (R_{ab} - \frac{1}{2} \eta_{ab} R)_{|c} = 0. \quad (313)$$

Расписав уравнения (313) в явном виде, получим два действительных уравнения

$$R_{11|2} + R_{34|1} - R_{13|4} - R_{14|3} = 0, \quad R_{22|1} + R_{34|2} - R_{23|4} - R_{24|3} = 0 \quad (314)$$

и одно комплексное уравнение

$$R_{33|4} + R_{12|3} - R_{31|2} - R_{32|1} = 0. \quad (315)$$

Наша задача — записать тождества Бианки через спинные коэффициенты. В качестве примера рассмотрим первое из тождеств (312). Имеем

$$R_{1313|4} + R_{1334|1} + R_{1341|3} = 0. \quad (316)$$

Используя уравнения (293), можно переписать это соотношение следующим образом:

$$C_{1313|4} + (C_{1334} + \frac{1}{2}R_{13})_{|1} - \frac{1}{2}R_{11|3} = 0. \quad (317)$$

Для членов, содержащих тензор Вейля, имеем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} C_{1313|4} &= C_{1313,4} - \eta^{nm}(\gamma_{n14}C_{m313} + \gamma_{n34}C_{1m13} + \gamma_{n14}C_{13m3} + \gamma_{n34}C_{131m}) = \\ &= C_{1313,4} - 2(\gamma_{211} + \gamma_{344})C_{1313} + 2\gamma_{314}(C_{1213} + C_{4313}) = \\ &= -\delta^*\Psi_0 + 4\alpha\Psi_0 - 4\rho\Psi_1, \end{aligned} \quad (318)$$

$$\begin{aligned} C_{1334|1} &= C_{1334,1} - \eta^{nm}[\gamma_{n11}C_{m334} + \gamma_{n31}(C_{1m34} + C_{13m4}) + \\ &+ \gamma_{n41}C_{133m}] = C_{1334,1} - [(\gamma_{211} + \gamma_{341})C_{1334} + \gamma_{131}(C_{1234} - \\ &- C_{3434}) + \gamma_{231}C_{1314} + \gamma_{141}C_{1332} + \gamma_{131}C_{1324} + \gamma_{241}C_{1331}] = \\ &= D\Psi_1 - 2\varepsilon\Psi_1 + 3\kappa\Psi_2 - \pi\Psi_0. \end{aligned} \quad (319)$$

Подобным же образом находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(R_{13|1} - R_{11|3}) &= \\ &= -D\Phi_{01} + \delta\Phi_{00} + 2(\varepsilon + \rho^*)\Phi_{01} + 2\sigma\Phi_{10} - 2\kappa\Phi_{11} - \kappa^*\Phi_{02} + \\ &+ (\pi^* - 2\alpha^* - 2\beta)\Phi_{00}. \end{aligned} \quad (320)$$

Комбинируя уравнения (318)—(320), получим искомое явное выражение для тождества (316). Остальные тождества получаются таким же путем. Ниже дана сводка восьми комплексных тождеств (312), выраженных через спинные коэффициенты:

$$\begin{aligned} -\delta^*\Psi_0 + D\Psi_1 + (4\alpha - \pi)\Psi_0 - 2(2\rho + \varepsilon)\Psi_1 + 3\kappa\Psi_2 + [\text{Риччи}] &= 0, \\ R_{13[13|4]} &= 0, \end{aligned} \quad (321a)$$

$$\begin{aligned} +\delta^*\Psi_1 - D\Psi_2 - \lambda\Psi_0 + 2(\pi - \alpha)\Psi_1 + 3\rho\Psi_2 - 2\kappa\Psi_3 + [\text{Риччи}] &= 0, \\ R_{13[21|4]} &= 0, \end{aligned} \quad (321b)$$

$$\begin{aligned} -\delta^*\Psi_2 + D\Psi_3 + 2\lambda\Psi_1 - 3\pi\Psi_2 + 2(\varepsilon - \rho)\Psi_3 + \kappa\Psi_4 + [\text{Риччи}] &= 0, \\ R_{42[13|4]} &= 0, \end{aligned} \quad (321b)$$

$$\begin{aligned} +\delta^*\Psi_3 - D\Psi_4 - 3\lambda\Psi_2 + 2(2\pi + \alpha)\Psi_3 - (4\varepsilon - \rho)\Psi_4 + [\text{Риччи}] &= 0, \\ R_{42[21|4]} &= 0, \end{aligned} \quad (321r)$$

$$\begin{aligned} -\Delta\Psi_0 + \delta\Psi_1 + (4\gamma - \mu)\Psi_0 - 2(2\tau + \beta)\Psi_1 + 3\sigma\Psi_2 + [\text{Риччи}] &= 0, \\ R_{13[13|2]} &= 0, \end{aligned} \quad (321d)$$

$$-\Delta \Psi_1 + \delta \Psi_2 + \nu \Psi_0 + 2(\gamma - \mu) \Psi_1 - 3\tau \Psi_2 + 2\sigma \Psi_3 + [\text{Риччи}] = 0, \\ R_{13}{}_{[43]2]} = 0, \quad (321\text{е})$$

$$-\Delta \Psi_2 + \delta \Psi_3 + 2\nu \Psi_1 - 3\mu \Psi_2 + 2(\beta - \tau) \Psi_3 + \sigma \Psi_4 + [\text{Риччи}] = 0, \\ R_{42}{}_{[13]2]} = 0, \quad (321\text{ж})$$

$$-\Delta \Psi_3 + \delta \Psi_4 + 3\nu \Psi_2 - 2(\gamma + 2\mu) \Psi_3 - (\tau - 4\beta) \Psi_4 + [\text{Риччи}] = 0, \\ R_{42}{}_{[43]2]} = 0, \quad (321\text{з})$$

где члены, относящиеся к тензору Риччи (обозначенные [Риччи]), равны следующим выражениям (буквенный индекс этих уравнений соответствует буквенному индексу уравнений (321)):

$$-D\Phi_{01} + \delta\Phi_{00} + 2(\varepsilon + \rho^*)\Phi_{01} + 2\sigma\Phi_{10} - 2\kappa\Phi_{11} - \\ - \kappa^*\Phi_{02} + (\pi^* - 2\alpha^* - 2\beta)\Phi_{00}, \quad (321'\text{а})$$

$$+ \delta^*\Phi_{01} - \Delta\Phi_{00} - 2(\alpha + \tau^*)\Phi_{01} + 2\rho\Phi_{11} + \\ + \sigma^*\Phi_{02} - (\mu^* - 2\gamma - 2\gamma^*)\Phi_{00} - 2\tau\Phi_{10} - 2D\Lambda, \quad (321'\text{б})$$

$$-D\Phi_{21} + \delta\Phi_{20} + 2(\rho^* - \varepsilon)\Phi_{21} - 2\mu\Phi_{10} + 2\pi\Phi_{11} - \\ - \kappa^*\Phi_{22} - (2\alpha^* - 2\beta - \pi^*)\Phi_{20} - 2\delta^*\Lambda, \quad (321'\text{в})$$

$$-\Delta\Phi_{20} + \delta^*\Phi_{21} + 2(\alpha - \tau^*)\Phi_{21} + 2\nu\Phi_{10} + \\ + \sigma^*\Phi_{22} - 2\lambda\Phi_{11} - (\mu^* + 2\gamma - 2\gamma^*)\Phi_{20}, \quad (321'\text{г})$$

$$-D\Phi_{02} + \delta\Phi_{01} + 2(\pi^* - \beta)\Phi_{01} - 2\kappa\Phi_{12} - \lambda^*\Phi_{00} + \\ + 2\sigma\Phi_{11} + (\rho^* + 2\varepsilon - 2\varepsilon^*)\Phi_{02}, \quad (321'\text{д})$$

$$\Delta\Phi_{01} - \delta^*\Phi_{02} + 2(\mu^* - \gamma)\Phi_{01} - 2\rho\Phi_{12} - \nu^*\Phi_{00} + \\ + 2\tau\Phi_{11} + (\tau^* - 2\beta^* + 2\alpha)\Phi_{02} + 2\delta\Lambda, \quad (321'\text{е})$$

$$-D\Phi_{22} + \delta\Phi_{21} + 2(\pi^* + \beta)\Phi_{21} - 2\mu\Phi_{11} - \\ - \lambda^*\Phi_{20} + 2\pi\Phi_{12} + (\rho^* - 2\varepsilon - 2\varepsilon^*)\Phi_{22} - 2\Delta\Lambda, \quad (321'\text{ж})$$

$$\Delta\Phi_{21} - \delta^*\Phi_{22} + 2(\mu^* + \gamma)\Phi_{21} - 2\nu\Phi_{11} - \nu^*\Phi_{20} + \\ + 2\lambda\Phi_{12} + (\tau^* - 2\alpha - 2\beta^*)\Phi_{22}. \quad (321'\text{з})$$

Свернутые тождества (314) и (315) принимают в формализме Ньюмена — Пенроуза следующий вид:

$$\delta^*\Phi_{01} + \delta\Phi_{10} - D(\Phi_{11} + 3\Lambda) - \Delta\Phi_{00} = \\ = \kappa^*\Phi_{12} + \kappa\Phi_{21} + (2\alpha + 2\tau^* - \pi)\Phi_{01} + \\ + (2\alpha + 2\tau - \pi^*)\Phi_{10} - 2(\rho + \rho^*)\Phi_{11} - \sigma^*\Phi_{02} - \\ - \sigma\Phi_{20} + [\mu + \mu^* - 2(\gamma + \gamma^*)]\Phi_{00}, \quad (322\text{и})$$

$$\delta^*\Phi_{12} + \delta\Phi_{21} - \Delta(\Phi_{11} + 3\Lambda) - D\Phi_{22} = \\ = -\nu\Phi_{01} - \nu^*\Phi_{10} + (\tau^* - 2\beta^* - 2\pi)\Phi_{12} + \\ + (\tau - 2\beta - 2\pi^*)\Phi_{21} + 2(\mu + \mu^*)\Phi_{11} - \\ - (\rho + \rho^* - 2\varepsilon - 2\varepsilon^*)\Phi_{22} + \lambda\Phi_{02} + \lambda^*\Phi_{20}, \quad (322\text{к})$$

$$\begin{aligned}
& \delta (\Phi_{11} - 3\Lambda) - D\Phi_{12} - \Delta\Phi_{01} + \delta^*\Phi_{02} = \\
& = \kappa\Phi_{22} - \nu^*\Phi_{00} + (\tau^* - \pi + 2\alpha - 2\beta^*)\Phi_{02} - \sigma\Phi_{21} + \\
& + \lambda^*\Phi_{10} + 2(\tau - \pi^*)\Phi_{11} - (2\rho + \rho^* - 2\varepsilon^*)\Phi_{12} + \\
& + (2\mu^* + \mu - 2\gamma)\Phi_{01}. \quad (322\text{л})
\end{aligned}$$

В пустоте скаляры Риччи равны нулю, и соответствующие тождества Бианки — это восемь комплексных уравнений (321а)—(321з), в которых члены [Риччи] положены равными нулю. В этом случае не нужно также рассматривать свернутые тождества (322). В общем случае, однако, члены [Риччи] должны быть включены в уравнения (321), причем в формализме Ньюмена — Пенроуза они заменяются компонентами тензора энергии-импульса в соответствии с уравнениями Эйнштейна:

$$R_{ij} = - (8\pi G/c^4) (T_{ij} - 1/2 g_{ij}T). \quad (323)$$

Основными уравнениями формализма Ньюмена — Пенроуза являются коммутационные соотношения (303)—(306), тождества Риччи (310а)—(310т), приведенные уравнения (311а)—(311к) и тождества Бианки (уравнения (321) и (322)). Как уже отмечалось, не ясно, что именно описывают эти уравнения и в каком точно смысле они заменяют уравнения Эйнштейна или эквивалентны им.

г. Уравнения Максвелла. В формализме Ньюмена — Пенроуза вместо антисимметричного максвелловского тензора электромагнитного поля F_{ij} используются три комплексных скаляра:

$$\begin{aligned}
\phi_0 &= F_{13} = F_{ij}l^i m^j, \\
\phi_1 &= 1/2 (F_{12} + F_{43}) = 1/2 F_{ij}(l^i n^j + \bar{m}^i m^j), \quad \phi_2 = F_{42} = F_{ij}\bar{m}^i n^j, \quad (324)
\end{aligned}$$

а уравнения Максвелла

$$F_{[ij; k]} = 0, \quad g^{ik}F_{ij; k} = 0, \quad (325)$$

выраженные в тетрадных компонентах и внутренних производных

$$F_{[ab|c]} = 0, \quad \eta^{nm}F_{an|m} = 0, \quad (326)$$

заменяются следующими уравнениями:

$$\phi_{1|1} - \phi_{0|4} = 0, \quad \phi_{2|1} - \phi_{1|4} = 0, \quad \phi_{1|3} - \phi_{0|2} = 0, \quad \phi_{2|3} - \phi_{1|2} = 0. \quad (327)$$

Найдем явный вид этих уравнений в терминах спиновых коэффициентов. Вычислим, например, $\phi_{1|1}$:

$$\begin{aligned}
\phi_{1|1} &= 1/2 [F_{12,1} - \eta^{nm}(\gamma_{n11}F_{m2} + \gamma_{n21}F_{1m}) + F_{43,1} - \eta^{nm}(\gamma_{n41}F_{m3} + \\
& + \gamma_{n31}F_{4m})] = \phi_{1,1} - (\gamma_{131}F_{42} + \gamma_{241}F_{13}) = D\phi_1 + \kappa\phi_2 - \pi\phi_0. \quad (328)
\end{aligned}$$

Подобным же образом получим

$$\phi_{0|4} = \delta^*\phi_0 - 2\alpha\phi_0 + 2\rho\phi_1. \quad (329)$$

Первое из уравнений Максвелла (327), таким образом, выглядит следующим образом:

$$D\phi_1 - \delta^*\phi_0 = (\pi - 2\alpha)\phi_0 + 2\rho\phi_1 - \kappa\phi_2, \quad (330)$$

остальные уравнения имеют вид

$$D\phi_2 - \delta^*\phi_1 = -\lambda\phi_0 + 2\pi\phi_1 + (\rho - 2\varepsilon)\phi_2, \quad (331)$$

$$\delta\phi_1 - \triangle\phi_0 = (\mu - 2\gamma)\phi_0 + 2\tau\phi_1 - \sigma\phi_2, \quad (332)$$

$$\delta\phi_2 - \triangle\phi_1 = -\nu\phi_0 + 2\mu\phi_1 + (\tau - 2\beta)\phi_2. \quad (333)$$

Компоненты тензора энергии-импульса максвелловского поля

$$T_{ab} = \eta^{cd}F_{ac}F_{bd} - 1/4\eta_{ab}F^{ef}F_{ef}, \quad (334)$$

выраженные через максвелловские скаляры, ϕ_0 , ϕ_1 и ϕ_2 равны

$$\begin{aligned} -1/2T_{11} &= \phi_0\phi_0^*; & -1/2T_{13} &= \phi_0\phi_1^*; \\ -1/4(T_{12} + T_{34}) &= \phi_1\phi_1^*; & -1/2T_{23} &= \phi_1\phi_2^*; \\ -1/2T_{22} &= \phi_2\phi_2^*; & -1/2T_{33} &= \phi_0\phi_2^*, \end{aligned} \quad (335)$$

причем след T_{ab} , конечно же, равен нулю. Можно в соответствии с уравнениями (300) и (323) положить

$$\Lambda = 0 \quad (336)$$

и заменить Φ_{mn} на $\phi_m\phi_n^*$ с учетом коэффициента пропорциональности $-8\pi G/c^4$.

Члены [Риччи] (321'а)—(321'з) в тождествах Бианки (321а)—(321з) можно значительно упростить, если использовать уравнения Максвелла (330)—(334). Например, рассматривая в уравнении (321'а) члены, содержащие производные скаляров Риччи, имеем

$$\begin{aligned} -D\Phi_{01} + \delta\Phi_{00} &\rightarrow -D(\phi_0\phi_1^*) + \delta(\phi_0\phi_0^*) = -\phi_0(D\phi_1^* - \delta\phi_0^*) - \\ &- \phi_1^*D\phi_0 + \phi_0^*\delta\phi_0 = -\phi_0\{(\pi^* - 2\alpha^*)\phi_0^* + 2\rho^*\phi_1^* - \kappa^*\phi_2^*\} - \\ &- \phi_1^*D\phi_0 + \phi_0^*\delta\phi_0. \end{aligned} \quad (337)$$

Подставляя затем последнее выражение в (321'а), получаем

$$-\phi_1^*D\phi_0 + \phi_0^*\delta\phi_0 + 2(\varepsilon\phi_0\phi_1^* + \sigma\phi_1\phi_0^* - \kappa\phi_1\phi_1^* - \beta\phi_0\phi_0^*). \quad (338)$$

Другие уравнения в системе (321') допускают такое же упрощение, причем члены [Риччи] для уравнений Эйнштейна — Максвелла принимают следующий вид (с точностью до коэффициента пропорциональности):

$$-\phi_1^*D\phi_0 + \phi_0^*\delta\phi_0 + 2(\varepsilon\phi_0\phi_1^* + \sigma\phi_1\phi_0^* - \kappa\phi_1\phi_1^* - \beta\phi_0\phi_0^*), \quad (339a)$$

$$+\phi_1^*\delta^*\phi_0 - \phi_0^*\triangle\phi_0 + 2(-\alpha\phi_0\phi_1^* + \rho\phi_1\phi_1^* + \gamma\phi_0\phi_0^* - \tau\phi_1\phi_0^*), \quad (339б)$$

$$-\phi_1^*D\phi_2 + \phi_0^*\delta\phi_2 + 2(-\varepsilon\phi_2\phi_1^* - \mu\phi_1\phi_0^* + \beta\phi_2\phi_0^* + \pi\phi_1\phi_1^*), \quad (339в)$$

$$-\phi_0^*\triangle\phi_2 + \phi_1^*\delta^*\phi_2 + 2(\alpha\phi_2\phi_1^* + \nu\phi_1\phi_0^* - \gamma\phi_2\phi_0^* - \lambda\phi_1\phi_1^*), \quad (339г)$$

$$-\phi_2^* D\phi_0 + \phi_1^* \delta\phi_0 + 2(-\kappa\phi_1\phi_2^* - \beta\phi_0\phi_1^* + \sigma\phi_1\phi_1^* + \varepsilon\phi_0\phi_2^*), \quad (339д)$$

$$+\phi_1^* \Delta\phi_0 - \phi_2^* \delta^*\phi_0 + 2(-\rho\phi_1\phi_2^* - \gamma\phi_0\phi_1^* + \tau\phi_1\phi_1^* + \alpha\phi_0\phi_2^*), \quad (339е)$$

$$-\phi_2^* D\phi_2 + \phi_1^* \delta\phi_2 + 2(-\varepsilon\phi_2\phi_2^* - \mu\phi_1\phi_1^* + \beta\phi_2\phi_1^* + \pi\phi_1\phi_2^*), \quad (339ж)$$

$$+\phi_1^* \Delta\phi_2 - \phi_2^* \delta^*\phi_2 + 2(-\alpha\phi_2\phi_2^* - \nu\phi_1\phi_1^* + \gamma\phi_2\phi_1^* + \lambda\phi_1\phi_2^*). \quad (339з)$$

В силу того что равенство нулю дивергенции тензора энергии-импульса выполняется автоматически вследствие уравнений Максвелла, уравнения (322) не будут рассматриваться.

ж. Преобразования тетрад. Выбрав поле тетрад — ортонормированных, как в обычном тетрадном формализме, или изотропных, как в формализме Ньюмена — Пенроуза, — можно подвергнуть тетрады преобразованию Лоренца в некоторой точке и распространить это преобразование на все пространство-время так, чтобы его параметры изменялись непрерывно от точки к точке. Соответственно шести параметрам группы лоренцевых преобразований мы имеем шесть степеней свободы для вращения выбранного поля тетрад. Общее лоренцево преобразование базисных векторов $\mathbf{l}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{m}$ и $\bar{\mathbf{m}}$ удобно разделить на три класса:

а) вращения класса I, оставляющие неизменным вектор $\mathbf{l}$;

б) вращения класса II, оставляющие неизменным вектор $\mathbf{n}$;

в) вращения класса III, оставляющие неизменными направления $\mathbf{l}$ и $\mathbf{n}$, поворачивающие вектор $\mathbf{m}$ (и $\bar{\mathbf{m}}$) на угол θ в плоскости $(\mathbf{m}, \bar{\mathbf{m}})$.

Выпишем в явном виде преобразования, соответствующие каждому из этих трех классов и сохраняющие условия ортогональности и нормировки:

$$\text{I. } \mathbf{l} \rightarrow \mathbf{l}, \mathbf{m} \rightarrow \mathbf{m} + a\mathbf{l}, \bar{\mathbf{m}} \rightarrow \bar{\mathbf{m}} + a^*\mathbf{l}, \mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n} + a^*\mathbf{m} + a\bar{\mathbf{m}} + aa^*\mathbf{l};$$

$$\text{II. } \mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}, \mathbf{m} \rightarrow \mathbf{m} + b\mathbf{n}, \bar{\mathbf{m}} \rightarrow \bar{\mathbf{m}} + b^*\mathbf{n}, \mathbf{l} \rightarrow \mathbf{l} + b^*\mathbf{m} + b\bar{\mathbf{m}} + bb^*\mathbf{n};$$

$$\text{III. } \mathbf{l} \rightarrow A^{-1}\mathbf{l}, \mathbf{n} \rightarrow A\mathbf{n}, \mathbf{m} \rightarrow e^{i\theta}\mathbf{m}, \bar{\mathbf{m}} \rightarrow e^{-i\theta}\bar{\mathbf{m}},$$

где a и b — две комплексные функции, а A и θ — две действительные функции на многообразии.

Нетрудно найти действие вращения из класса I на различные величины в формализме Ньюмена — Пенроуза. Вейлевский скаляр Ψ_0 , например, остается инвариантным при таком вращении:

$$\begin{aligned} -\Psi_0 &= C_{1313} \rightarrow C_{pqrs} l^p (m^q + al^q) l^r (m^s + al^s) = \\ &= C_{pqrs} l^p m^q l^r m^s = -\Psi_0, \end{aligned} \quad (340)$$

тогда как скаляр Ψ_1 преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} -\Psi_1 &= C_{1213} \rightarrow C_{pqrs} l^p (n^q + a^*m^q + a\bar{m}^q + aa^*l^q) l^r (m^s + al^s) = \\ &= C_{pqrs} l^p (n^q + a^*m^q) l^r m^s = C_{1213} + a^*C_{1313} = -(\Psi_1 + a^*\Psi_0). \end{aligned} \quad (341)$$

При упрощении этого выражения, помимо очевидных свойств симметрии тензора Вейля использовано равенство $C_{1413} = 0$

(см. уравнение (291)). Подобным же образом найдем действие преобразования из класса I на другие вейлевские скаляры:

$$\begin{aligned}\Psi_0 &\rightarrow \Psi_0, & \Psi_1 &\rightarrow a^* \Psi_0, \\ \Psi_2 &\rightarrow \Psi_2 + 2a^* \Psi_1 + (a^*)^2 \Psi_0, \\ \Psi_3 &\rightarrow \Psi_3 + 3a^* \Psi_2 + 3(a^*)^2 \Psi_1 + (a^*)^3 \Psi_0, \\ \Psi_4 &\rightarrow \Psi_4 + 4a^* \Psi_3 + 6(a^*)^2 \Psi_2 + 4(a^*)^3 \Psi_1 + (a^*)^4 \Psi_0.\end{aligned}\quad (342)$$

Приведем таблицу действия преобразований из класса I на спино-вые коэффициенты:

$$\begin{aligned}\kappa &\rightarrow \kappa; & \sigma &\rightarrow \sigma + a\kappa; & \rho &\rightarrow \rho + a^*\kappa; & \varepsilon &\rightarrow \varepsilon + a^*\kappa; \\ \tau &\rightarrow \tau + a\rho + a^*\sigma + aa^*\kappa; \\ \pi &\rightarrow \pi + 2a^*\varepsilon + (a^*)^2\kappa + Da^*; \\ \alpha &\rightarrow \alpha + a^*(\rho + \varepsilon) + (a^*)^2\kappa; \\ \beta &\rightarrow \beta + a\varepsilon + a^*\sigma + aa^*\kappa; \\ \gamma &\rightarrow \gamma + a\alpha + a^*(\beta + \tau) + aa^*(\rho + \varepsilon) + \\ &\quad + (a^*)^2\sigma + a(a^*)^2\kappa; \\ \lambda &\rightarrow \lambda + a^*(2\alpha + \pi) + (a^*)^2(\rho + 2\varepsilon) + \\ &\quad + (a^*)^3\kappa + \delta^*a^* + a^*Da^*; \\ \mu &\rightarrow \mu + a\pi + 2a^*\beta + 2aa^*\varepsilon + (a^*)^2\sigma + \\ &\quad + a(a^*)^2\kappa + \delta a^* + aDa^*; \\ \nu &\rightarrow \nu + a\lambda + a^*(\mu + 2\gamma) + (a^*)^2(\tau + 2\beta) + \\ &\quad + (a^*)^3\sigma + aa^*(\pi + 2\alpha) + \\ &\quad + a(a^*)^2(\rho + 2\varepsilon) + a(a^*)^3\kappa + \\ &\quad + (\Delta + a^*\delta + a\delta^* + aa^*D)a^*.\end{aligned}\quad (343)$$

Скаляры, описывающие максвелловское поле, преобразуются следующим образом:

$$\phi_0 \rightarrow \phi_0, \quad \phi_1 \rightarrow \phi_1 + a^*\phi_0, \quad \phi_2 \rightarrow \phi_2 + 2a^*\phi_1 + (a^*)^2\phi_0. \quad (344)$$

Действие вращения из класса II легко находится из предыдущих формул. Так, подстановка I вместо n приводит к следующим заменам:

$$\begin{aligned}\Psi_0 &\rightleftharpoons \Psi_4^*, & \Psi_1 &\rightleftharpoons \Psi_3^*, & \Psi_2 &\rightleftharpoons \Psi_2^*, & \phi_0 &\rightleftharpoons -\phi_2^*, & \phi_1 &\rightleftharpoons -\phi_1^*, \\ \kappa &\rightleftharpoons -\nu^*, & \rho &\rightleftharpoons -\mu^*, & \sigma &\rightleftharpoons -\lambda^*, & \alpha &\rightleftharpoons -\beta^*, & \varepsilon &\rightleftharpoons -\gamma^*, & \pi &\rightleftharpoons -\tau^*.\end{aligned}\quad (345)$$

В частности, вращение из класса II действует на вейлевские скаляры следующим образом:

$$\begin{aligned}\Psi_0 &\rightarrow \Psi_0 + 4b\Psi_1 + 6b^2\Psi_2 + 4b^3\Psi_3 + b^4\Psi_4, \\ \Psi_1 &\rightarrow \Psi_1 + 3b\Psi_2 + 3b^2\Psi_3 + b^3\Psi_4,\end{aligned}\quad (346)$$

$$\begin{aligned} -\Psi_2 &\rightarrow \Psi_2 + 2b\Psi_3 + b^2\Psi_4, \\ \Psi_3 &\rightarrow \Psi_3 + b\Psi_4, \quad \Psi_4 \rightarrow \Psi_4. \end{aligned}$$

Наконец, выпишем действие вращения из класса III на различные величины:

$$\begin{aligned} \Psi_0 &\rightarrow A^{-2}e^{2i\theta}\Psi_0, \quad \Psi_1 \rightarrow A^{-1}e^{i\theta}\Psi_1, \\ \Psi_2 &\rightarrow \Psi_2, \quad \Psi_3 \rightarrow Ae^{-i\theta}\Psi_3, \quad \Psi_4 \rightarrow A^2e^{-2i\theta}\Psi_4; \\ \phi_0 &\rightarrow A^{-1}e^{i\theta}\phi_0, \quad \phi_1 \rightarrow \phi_1, \quad \phi_2 \rightarrow Ae^{-i\theta}\phi_2; \\ \kappa &\rightarrow A^{-2}e^{i\theta}\kappa, \quad \sigma \rightarrow A^{-1}e^{2i\theta}\sigma, \quad \rho \rightarrow A^{-1}\rho, \quad \tau \rightarrow e^{i\theta}\tau, \quad \pi \rightarrow e^{-i\theta}\pi, \\ \lambda &\rightarrow Ae^{-2i\theta}\lambda, \quad \mu \rightarrow A\mu, \quad \nu \rightarrow A^2e^{-i\theta}\nu, \\ \gamma &\rightarrow A\gamma - \frac{1}{2}\Delta A + \frac{1}{2}iA\Delta\theta, \\ \varepsilon &\rightarrow A^{-1}\varepsilon - \frac{1}{2}A^{-2}DA + \frac{1}{2}iA^{-1}D\theta, \\ \alpha &\rightarrow e^{-i\theta}\alpha + \frac{1}{2}ie^{-i\theta}\delta^*\theta - \frac{1}{2}A^{-1}e^{-i\theta}\delta^*A, \\ \beta &\rightarrow e^{i\theta}\beta + \frac{1}{2}ie^{i\theta}\delta\theta - \frac{1}{2}A^{-1}e^{i\theta}\delta A. \end{aligned} \quad (347)$$

На этом мы закончим изложение формализма Ньюмена — Пенроуза.

9. Оптические скаляры, классификация Петрова и теорема Гольдберга—Сакса

Физический смысл спиновых коэффициентов, введенных в § 8 в рамках формализма Ньюмена — Пенроуза, становится ясным, если рассмотреть перенос базисных векторов вдоль векторов **l** или **n**. Приращение линейной части базисного вектора $\mathbf{e}_{(a)}$ при бесконечно малом смещении ξ по определению равно

$$\delta e_{(a) i} = e_{(a) i}; \quad j\xi^j = e_i^{(b)}\gamma_{(b)(a)(c)}e_j^{(c)}\xi^j = -\gamma_{(a)(b)(c)}e_i^{(b)}\xi^{(c)}, \quad (348)$$

поэтому изменение $\delta e_{(a)(c)}$ вектора $\mathbf{e}_{(a)}$ при перемещении в направлении c равно

$$\delta e_{(a)(c)} = -\gamma_{(a)(b)(c)}e^{(b)}. \quad (349)$$

В частности, для приращения вектора **l** при единичном перемещении вдоль вектора **l** имеем (см. уравнение (284))

$$\begin{aligned} \delta l(1) &= -\gamma_{1(b)1}e^{(b)} = -\gamma_{121}e^{(2)} - \gamma_{131}e^{(3)} - \gamma_{141}e^{(4)} = \\ &= -\gamma_{121}l + \gamma_{131}\bar{m} + \gamma_{141}m, \end{aligned} \quad (350)$$

или, записывая через спиновые коэффициенты,

$$\delta l(1) = (\varepsilon + \varepsilon^*)l - \kappa\bar{m} - \kappa^*m. \quad (351)$$

Подобным же образом находим

$$\delta n(1) = -\gamma_{2(b)1}e^{(b)} = -(\varepsilon + \varepsilon^*)n + \pi m + \pi^*\bar{m}, \quad (352)$$

$$\delta m(1) = -\gamma_{3(b)1}e^{(b)} = +(\varepsilon - \varepsilon^*)m + \pi^*l - \kappa n. \quad (353)$$

Из уравнений (351)—(353) вытекает несколько важных следствий. Переписывая уравнения (351) в виде (см. уравнение (348))

$$l_{i;j}l^j = (\varepsilon + \varepsilon^*)l_i - \kappa\bar{m}_i - \kappa^*m_i \quad (354)$$

и из уравнений (211) и (212) заключаем, что векторы l образуют конгруэнцию изотропных геодезических тогда и только тогда, когда $\kappa = 0$ и вдобавок параметр вдоль этих геодезических является аффинным тогда и только тогда, когда $\text{Re } \varepsilon = 0$. Если $\kappa = 0$, условие аффинной параметризации ($\varepsilon = 0$) может быть достигнуто вращением из класса III, описанным в § 8, e (см. уравнения (347)), которое не меняет ни направления вектора l , ни значения κ , первоначально равного нулю.

Если векторы l с самого начала определены так, что они составляют конгруэнцию изотропных геодезических с аффинной параметризацией, так что $\kappa = \varepsilon = 0$, то вращением из класса I (которое не действует на l и не меняет нулевых значений κ и ε) можно добиться, чтобы $\pi = 0$. Получившиеся после такого преобразования векторы n , m и $\bar{m}$ не будут (как следует из уравнений (352) и (353)) изменяться при смещении вдоль вектора l . Другими словами, все базисные векторы l , n , m и $\bar{m}$ будут оставаться неизменными при параллельном переносе вдоль вектора l .

а. Оптические скаляры. Некоторые другие свойства конгруэнции изотропных геодезических можно получить, если выписать явно сумму в правой части уравнения

$$l_{i;j} = e_i^{(a)}\gamma_{(a)1}e_j^{(b)} \quad (355)$$

в виде

$$\begin{aligned} l_{i;j} = & (\varepsilon + \varepsilon^*)l_in_j + (\gamma + \gamma^*)l_lj - (\alpha^* + \beta)l_i\bar{m}_j - (\alpha + \beta^*)l_im_j - \\ & - \kappa\bar{m}_in_j - \kappa^*m_in_j + \sigma\bar{m}_i\bar{m}_j + \sigma^*m_im_j - \tau\bar{m}_il_j - \tau^*m_il_j + \\ & + \rho\bar{m}_im_j + \rho^*m_i\bar{m}_j. \end{aligned} \quad (356)$$

Заметим, что свертка с l^j дает уравнение (354). Поскольку векторы l образуют конгруэнцию изотропных геодезических с аффинным параметром, $\kappa = \varepsilon = 0$ и уравнение (356) принимает вид

$$\begin{aligned} l_{i;j} = & (\gamma + \gamma^*)l_lj - (\alpha^* + \beta)l_i\bar{m}_j - (\alpha + \beta^*)l_im_j - \tau\bar{m}_il_j + \sigma\bar{m}_i\bar{m}_j + \\ & + \sigma^*m_im_j + \rho\bar{m}_im_j + \rho^*m_i\bar{m}_j - \tau^*m_il_j. \end{aligned} \quad (357)$$

Из последнего уравнения находим

$$l_{[i;j]} = -(\alpha^* + \beta - \tau)l_{[i}\bar{m}_{j]} - (\alpha + \beta - \tau^*)l_{[i}m_{j]} + (\rho - \rho^*)\bar{m}_{[i}m_{j]}, \quad (358)$$

$$l_{[i;j]k]} = (\rho - \rho^*)\bar{m}_{[i}m_{j]}l_{k]}. \quad (359)$$

Из стандартных теорем (см. ссылки на литературу в конце главы) следует, что конгруэнция изотропных геодезических ортогональна семейству гиперповерхностей (т. е. вектор l пропорционален гра-

диенту скалярного поля) тогда и только тогда, когда спинový коэффициент ρ является действительным; и вектор $\mathbf{l}$ равен градиенту скалярного поля тогда и только тогда, когда вдобавок $\alpha^* + \beta = \tau$.

Из уравнений (357)–(359) получаем

$${}^{1/2}l^i_{;i} = -1/2(\rho + \rho^*) = \theta, \quad (360)$$

$${}^{1/2}l_{[i;j]}l^{i;j} = -1/4(\rho - \rho^*)^2 = \omega^2, \quad (361)$$

$${}^{1/2}l_{(i;j)}l^{i;j} = \theta^2 + |\sigma|^2. \quad (362)$$

Величины θ , ω и σ , определенные предыдущими уравнениями, были впервые введены Р. Саксом и называются *оптическими скалярами*. Скаляры θ и ω можно записать в виде

$$\theta = -\operatorname{Re} \rho, \quad \omega = \operatorname{Im} \rho. \quad (363)$$

Для выяснения геометрического смысла оптических скаляров напомним сначала, что $\mathbf{l}$ — касательный вектор к некоторому изотропному лучу N , а $\mathbf{m}$ — комплексный вектор, ортогональный вектору $\mathbf{l}$. В точке P луча N действительная часть векторов $\mathbf{m}$ и $\mathbf{l}$ определяет двумерную плоскость. Рассмотрим теперь небольшую окружность с центром в точке P на луче N , лежащую в двумерной плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{l}$. Если двигаться

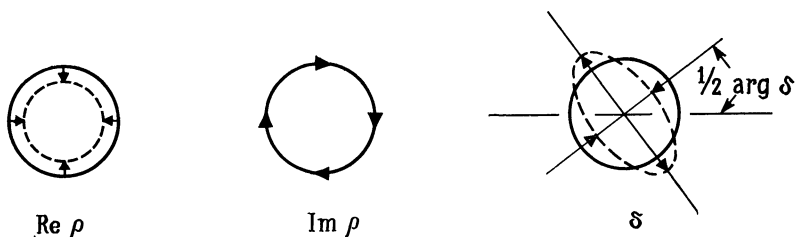


Рис. 1. Геометрическая интерпретация оптических скаляров: оптические скаляры описывают изменение небольшой окружности при движении ее перпендикулярно пучку световых лучей.

в будущее вдоль тех лучей из конгруэнции $\mathbf{l}$, которые пересекают эту окружность, то окружность может сжаться или расшириться, может поворачиваться или сплющиваться в эллипс. Расширение (или сжатие), поворот и сплющивание измеряются соответственно действительной частью ρ , взятой с обратным знаком ($-\operatorname{Re} \rho$), мнимой частью ρ ($\operatorname{Im} \rho$) и оптическим скаляром σ , причем величина сплющивания определяется модулем $|\sigma|$, а $1/2 \arg \sigma$ — угол между малой осью эллипса и заданной плоскостью (рис. 1).

Тот факт, что $\operatorname{Im} \rho$ есть мера вращения конгруэнции, согласуется с тем, что равенство нулю мнимой части ρ гарантирует существование семейства гиперповерхностей, ортогональных конгруэнции.

Спиновые коэффициенты ρ и σ играют важную роль и в описании поведения пучков световых лучей в гравитационном поле. Рассмотрим изменение вектора l в ортогональном направлении m при распространении вдоль лучей. В соответствии с уравнением (349) имеем

$$\delta l(3) = -\gamma_{1(b)} \epsilon^{(b)} = (\alpha^* + \beta) l - \rho^* m - \bar{\sigma} \bar{m}. \quad (364)$$

Уравнения, описывающие изменения ρ и σ вдоль геодезической, получим из уравнений (310a) и (310b), положив в них $\kappa = \epsilon = 0$:

$$D\rho = (\rho^2 + |\sigma|^2) + \Phi_{00}, \quad (365)$$

$$D\sigma = \sigma(\rho + \rho^*) + \Psi_0. \quad (366)$$

Напомним, что

$$\Phi_{00} = -\frac{1}{2}R_{11} = -\frac{1}{2}R_{ij}l^i l^j, \quad \Psi_0 = -C_{prst}l^p m_q l^r m^s. \quad (367)$$

Предыдущие уравнения можно записать и в других формах. Уравнение (366), например, можно переписать в виде

$$D\sigma = -2\theta\sigma + \Psi_0. \quad (368)$$

Аналогичное уравнение для ω получим, если возьмем мнимую часть уравнения (365) и учтем, что Φ_{00} — действительно

$$D\omega = \frac{1}{2}(\rho + \rho^*)(\rho - \rho^*) = -2\theta\omega. \quad (369)$$

Действительная часть уравнения (365) имеет вид

$$D\theta = \omega^2 - \theta^2 - |\sigma|^2 - \Phi_{00}. \quad (370)$$

Именно в такой форме эти уравнения обычно и используются.

б. Классификация Петрова. Мы видели, что относительно выбранной изотропной тетрады тензор Вейля полностью определяется пятью комплексными скалярами $\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_4$. Но значения, которые принимают эти скаляры, зависят от выбора тетрады. Кроме того, тетрада может быть подвергнута любому преобразованию из шестипараметрической группы Лоренца. Возникает вопрос, какие из этих скаляров и сколько из них можно сделать равными нулю, выбрав подходящую ориентацию тетрады. Ответ на этот вопрос приводит к алгебраической классификации возможных типов тензора Вейля. Классификация эта носит название *классификация Петрова*, а соответствующие типы тензора Вейля называются *типами Петрова*.

Пусть $\Psi_4 \neq 0$. (Если окажется, что в выбранной тетраде $\Psi_4 = 0$, то вращением из класса I можно сделать $\Psi_4 \neq 0$, если только пространство не является конформно плоским, когда все вейлевские скаляры равны нулю.) Рассмотрим теперь вращение из класса II с параметром b . В результате этого вращения вей-

левские скаляры Ψ_0 , Ψ_1 и т. д. преобразуются к виду (см. уравнение (346))

$$\begin{aligned}\Psi_0^{(1)} &= \Psi_0 + 4b\Psi_1 + 6b^2\Psi_2 + 4b^3\Psi_3 + b^4\Psi_4, \\ \Psi_1^{(1)} &= \Psi_1 + 3b\Psi_2 + 3b^2\Psi_3 + b^3\Psi_4,\end{aligned}\quad (371)$$

$$\Psi_2^{(1)} = \Psi_2 + 2b\Psi_3 + b^2\Psi_4, \quad \Psi_3^{(1)} = \Psi_3 + b\Psi_4, \quad \Psi_4^{(1)} = \Psi_4,$$

где верхний индекс (1) означает новые значения скаляров в отличие от старых. Очевидно, что вращением из класса II можно сделать $\Psi_0^{(1)}$ равным нулю, если b — корень уравнения:

$$\Psi_4 b^4 + 4\Psi_3 b^3 + 6\Psi_2 b^2 + 4\Psi_1 b + \Psi_0 = 0. \quad (372)$$

Это уравнение всегда имеет четыре корня, и соответствующие новые направления вектора $\mathbf{l}$, а именно направления $\mathbf{l} + b^*\mathbf{m} + b\overline{\mathbf{m}} + bb^*\mathbf{n}$, называются *главными изотропными направлениями* тензора Вейля. Если два или несколько корней совпадают, то тензор называется *алгебраически специальным*, в противном случае он называется *алгебраически общим*. Различные варианты совпадений корней и лежат в основе классификации Петрова.

1. *Тип I Петрова*. В этом случае все четыре корня уравнения (372) различны. Обозначим их b_1 , b_2 , b_3 и b_4 . Тогда вращением из класса II с параметром, скажем, $b = b_1$ можно сделать $\Psi_0 = 0$. Затем вращением из класса I (которое не влияет на Ψ_0) можно сделать Ψ_4 также равным нулю*. Скаляры Ψ_1 , Ψ_2 и Ψ_3 остаются отличными от нуля, причем Ψ_1 , Ψ_3 и Ψ_2 инвариантны относительно вращений из класса III (которые не влияют, однако, на равенство нулю скаляров Ψ_0 и Ψ_4).

2. *Тип II Петрова*. Пусть уравнение (372) имеет два совпадающих корня $b_1 = b_2 (\neq b_3 \neq b_4, b_3 \neq b_4)$. В этом случае не только уравнение (372), но и его производная по b

$$\Psi_4 b^3 + 3\Psi_3 b^2 + 3\Psi_2 b + \Psi_1 = 0 \quad (373)$$

имеет корень $b = b_2$. Следовательно, вращением из класса II с параметром $b = b_1 (= b_2)$ можно сделать $\Psi_0 = \Psi_1 = 0$. Затем вращением из класса I (которое не изменяет первоначального одновременного равенства нулю Ψ_0 и Ψ_1) можно сделать Ψ_4 равным нулю (см. уравнение (342)). Ненулевыми остаются только Ψ_2 и Ψ_3 , причем Ψ_2 инвариантно относительно вращений из класса III.

3. *Тип D Петрова*. Пусть уравнение имеет два различных двойных корня b_1 и b_2 . Мы покажем ниже, что вращением из класса II, а затем вращением из класса I можно сделать одновре-

* Заметим, что корни уравнения

$$\Psi_0 (a^*)^4 + 4\Psi_1 (a^*)^3 + 6\Psi_2 (a^*)^2 + 4\Psi_3 a^* + \Psi_4 = 0 \quad (372')$$

(см. уравнения (342)) обратны корням уравнения (372).

менно равными нулю скаляры Ψ_0 , Ψ_1 , Ψ_3 и Ψ_4 . Отличным от нуля остается лишь скаляр Ψ_2 .

По предположению Ψ_0 после вращения из класса II с параметром b принимает значение

$$\Psi_0^{(1)} = \Psi_4 (b - b_1)^2 (b - b_2)^2. \quad (374)$$

Значения остальных скаляров можно получить последовательным дифференцированием выражения для $\Psi_0^{(1)}$ и умножением на соответствующий коэффициент на каждом шаге для того, чтобы коэффициент при наивысшей степени b был равен Ψ_4 . Имеем

$$\begin{aligned} \Psi_1^{(1)} &= \frac{1}{2} \Psi_4 (b - b_1) (b - b_2) (2b - b_1 - b_2), \\ \Psi_2^{(1)} &= \frac{1}{3} \Psi_4 [(b - b_1) (b - b_2) + \frac{1}{2} (2b - b_1 - b_2)^2], \\ \Psi_3^{(1)} &= \frac{1}{2} \Psi_4 (2b - b_1 - b_2), \quad \Psi_4^{(1)} = \Psi_4. \end{aligned} \quad (375)$$

Выбрав $b = b_1$, получаем

$$\begin{aligned} \Psi_0^{(1)} &= \Psi_1^{(1)} = 0, \quad \Psi_2^{(1)} = \frac{1}{6} \Psi_4 (b_1 - b_2)^2, \\ \Psi_3^{(1)} &= \frac{1}{2} \Psi_4 (b_1 - b_2), \quad \Psi_4^{(1)} = \Psi_4. \end{aligned} \quad (376)$$

Подвергнем теперь тетраду вращению из класса I с параметром a^* . Новые значения вейлевских скаляров (см. уравнение (342)) равны

$$\Psi_0^{(2)} = \Psi_1^{(2)} = 0, \quad \Psi_2^{(2)} = \Psi_2^{(1)} = \frac{1}{6} \Psi_4 (b_1 - b_2)^2, \quad (377)$$

$$\begin{aligned} \Psi_3^{(2)} &= \Psi_3^{(1)} + 3a^* \Psi_2^{(1)} = \frac{1}{2} \Psi_4 (b_1 - b_2) + \frac{1}{2} \Psi_4 a^* (b_1 - b_2)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \Psi_4 (b_1 - b_2) [1 + a^* (b_1 - b_2)], \end{aligned} \quad (378)$$

$$\begin{aligned} \Psi_4^{(2)} &= \Psi_4 + 4a^* \cdot \frac{1}{2} \Psi_4 (b_1 - b_2) + 6(a^*)^2 \cdot \frac{1}{6} \Psi_4 (b_1 - b_2)^2 = \\ &= \Psi_4 [1 + a^* (b_1 - b_2)]^2. \end{aligned} \quad (379)$$

Если выбрать

$$a^* = (b_2 - b_1)^{-1}, \quad (380)$$

то можно сделать равными нулю также $\Psi_3^{(2)}$ и $\Psi_4^{(2)}$. Таким образом, вращением из класса II с параметром b_1 и последующим вращением из класса I с параметром $a^* = (b_2 - b_1)^{-1}$ мы добиваемся равенства нулю скаляров Ψ_0 , Ψ_1 , Ψ_3 и Ψ_4 . Единственный ненулевой скаляр Ψ_2 инвариантен относительно вращений из класса III.

4. *Тип III Петрова.* Если три корня уравнения (372) совпадают: $b_1 = b_2 = b_3 \neq b_4$, то вращением из класса II с параметром $b = b_1 (= b_2 = b_3)$ можно сделать Ψ_0 , Ψ_1 и Ψ_2 одновременно равными нулю, а последующим вращением из класса I добиться равенства нулю скаляра Ψ_4 (это вращение оставляет равными нулю скаляры Ψ_0 , Ψ_1 и Ψ_2). Скаляр Ψ_3 не равен нулю, но его значение может меняться при вращении из класса III.

5. *Тип N Петрова.* Все четыре корня совпадают, и вращением из класса II с параметром b , равным единственному корню

уравнения (372), можно сделать равными нулю одновременно Ψ_0 , Ψ_1 , Ψ_2 и Ψ_3 . Только скаляр Ψ_4 остается не равным нулю.

Выведем некоторые простые условия, которым должен удовлетворять вектор $\mathbf{l}$, чтобы быть главным изотропным направлением тензора Вейля разных типов Петрова.

Используя общее выражение (298) для тензора Вейля C_{pqrs} , получим

$$C_{pqrs}l^ql^r = (\Psi_2 + \Psi_2^*)l_pl_s + \Psi_0\bar{m}_p\bar{m}_s + \Psi_0^*m_pm_s - \\ - \Psi_1(l_p\bar{m}_s + l_s\bar{m}_p) - \Psi_1^*(l_pm_s + l_sm_p). \quad (381)$$

Поэтому

$$C_{pqr}[sl_t]l^ql^r = (\Psi_0^*m_p - \Psi_1^*l_p)m_{[sl_t]} + (\Psi_0\bar{m}_p - \Psi_1l_p)\bar{m}_{[sl_t]}, \quad (382)$$

$$l_{[u}C_{p]}qr[sl_t]l^ql^r = \Psi_0l_{[u}m_p]m_{[sl_t]} + \Psi_0^*l_{[u}\bar{m}_p]\bar{m}_{[sl_t]}. \quad (383)$$

Следовательно, условие того, что $\mathbf{l}$ является невырожденным главным изотропным направлением тензора Вейля типа I, имеет следующий вид:

$$l_{[u}C_{p]}qr[sl_t]l^ql^r = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } \Psi_0 = 0, \quad (384)$$

а условие двукратного вырождения главного изотропного направления тензора Вейля типа II записывается в виде

$$C_{pqr}[sl_t]l^ql^r = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } \Psi_0 = \Psi_1 = 0. \quad (385)$$

Когда Ψ_0 и Ψ_1 равны нулю,

$$C_{pqrs}l^ql^r = (\Psi_2 + \Psi_2^*)l_pl_s. \quad (386)$$

Если тензор Вейля принадлежит к типу D и $\mathbf{n}$ — второе дважды вырожденное главное изотропное направление, то помимо условия (385) мы должны иметь

$$C_{pqr}[sn_t]n^qn^r = 0, \quad (387)$$

а при $\Psi_4 = \Psi_3 = 0$

$$C_{pqrs}n^qn^r = (\Psi_2 + \Psi_2^*)n_pn_s. \quad (388)$$

Если тензор Вейля принадлежит к типу III и $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = 0$, то из уравнения (298) следует

$$C_{pqrs}l^s = [\Psi_3(l_pm_q - l_qm_p) + \Psi_3^*(l_p\bar{m}_q - l_q\bar{m}_p)]l_r \quad (389)$$

и мы заключаем, что

$$C_{pqr}[sl_t]l^r = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } \Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = 0. \quad (390)$$

Наконец, если тензор Вейля принадлежит к типу N и $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = 0$, то

$$C_{pqrs} = -\Psi_4\{l_pm_ql_r m_s\} - \Psi_4^*\{l_p\bar{m}_ql_r\bar{m}_s\}, \quad (391)$$

$C_{pqrs}l^s = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = 0. \quad (392)$$

в. Теорема Гольдберга — Сакса. Мы ограничимся рассмотрением решений уравнений Эйнштейна в пустоте, когда тензор Риччи равен нулю, а тензор Римана совпадает с тензором Вейля. В этом случае справедлива следующая теорема:

Если тензор Римана принадлежит к типу II и если изотропный базис выбран так, чтобы 1 было двойным главным изотропным направлением и $\Psi_0 = \Psi_1 = 0$, то $\kappa = \sigma = 0$; и обратно, если $\kappa = \sigma = 0$, то $\Psi_0 = \Psi_1 = 0$ и тензор Римана принадлежит к типу II.

Важность этой теоремы в том, что она связывает гравитационное поле типа II с существованием бессдвиговой (несплюснутой) конгруэнции изотропных геодезических.

Легко доказать, что при $\Psi_0 = \Psi_1 = 0$ конгруэнция, образованная вектором 1, является геодезической ($\kappa = 0$) и бессдвиговой ($\sigma = 0$). Выпишем тождества Бианки (уравнения (321а)—(321в) и (321д)—(321ж)) в случае $\Psi_0 = \Psi_1 = 0$:

$$3\kappa\dot{\Psi}_2 = 0, \quad (393а)$$

$$D\dot{\Psi}_2 = -2\kappa\dot{\Psi}_3 + 3\rho\dot{\Psi}_2, \quad (393б)$$

$$D\dot{\Psi}_3 - \delta^*\dot{\Psi}_2 = -\kappa\dot{\Psi}_4 - 2(\epsilon - \rho)\dot{\Psi}_3 + 3\pi\dot{\Psi}_2, \quad (393в)$$

$$3\sigma\dot{\Psi}_2 = 0, \quad (393д)$$

$$-\delta\dot{\Psi}_2 = -3\tau\dot{\Psi}_2 + 2\sigma\dot{\Psi}_3, \quad (393е)$$

$$\Delta\dot{\Psi}_2 - \delta\dot{\Psi}_3 = -3\mu\dot{\Psi}_2 - 2(\tau - \beta)\dot{\Psi}_3 + \sigma\dot{\Psi}_4. \quad (393ж)$$

Если пространство не является конформно плоским (т. е. не все скаляры $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$ и Ψ_4 равны нулю), то из уравнений (393а)—(393в) следует $\kappa = 0$, а из уравнений (393д)—(393ж) следует $\sigma = 0$.

Доказательство обратного утверждения, что из условия $\kappa = \sigma = 0$ следует $\Psi_0 = \Psi_1 = 0$, не столь прямолинейно. Предположим, что вращением из класса III (это не нарушает равенства нулю κ и σ) мы добились равенства нулю спинowego коэффициента ϵ . Тогда из тождеств Риччи (310а)—(310в), (310д) и (310л) при $\kappa = \sigma = 0$ следует:

$$D\rho = \rho^2, \quad (394а)$$

$$\Psi_0 = 0, \quad (394б)$$

$$D\tau = (\tau^* + \pi)\rho + \Psi_1, \quad (394в)$$

$$D\beta = \rho^*\beta + \Psi_1, \quad (394д)$$

$$\delta\rho = (\alpha^* + \beta)\rho + (\rho - \rho^*)\tau - \Psi_1, \quad (394л)$$

а тождества Бианки (321а) и (321д), если в них в соответствии с уравнением (394б) положить $\Psi_0 = 0$, имеют вид

$$D\dot{\Psi}_1 = 4\rho\dot{\Psi}_1, \quad (395а)$$

$$\delta\dot{\Psi}_1 = 2(2\tau + \beta)\dot{\Psi}_1. \quad (395д)$$

Наконец, из коммутационного соотношения (304) следует

$$D\delta - \delta D = (\pi^* - \alpha^* - \beta) D + \rho^*\delta. \quad (396)$$

Из уравнений (343) ясно, что вращением из класса I (что не влияет ни на Ψ_0 , ни на равенство нулю κ , σ или ε) можно добиться $\tau = 0$ при условии, что $\rho \neq 0$. (Если же $\rho = 0$, то из уравнения (394л) следует, что $\Psi_1 = 0$, — результат, который мы и хотим доказать.) Предполагая затем, что τ равно нулю (и $\rho \neq 0$), имеем из уравнения (395)

$$D \ln \Psi_1 = 4\rho, \quad \delta \ln \Psi_1 = 2\beta, \quad (397)$$

откуда следует, что

$$(D\delta - \delta D) \ln \Psi_1 = 2D\beta - 4\delta\rho. \quad (398)$$

Используя теперь соотношения (394д) и (394л) и вспоминая, что τ равно нулю, получаем

$$(D\delta - \delta D) \ln \Psi_1 = 2\rho^*\beta - 4(\alpha^* + \beta)\rho + 6\Psi_1. \quad (399)$$

С другой стороны, действуя коммутационным соотношением (396) на $\ln \Psi_1$, получаем с учетом уравнений (395а) и (395д)

$$\begin{aligned} (D\delta - \delta D) \ln \Psi_1 &= (\pi^* - \alpha^* - \beta) D \ln \Psi_1 + \rho^*\delta \ln \Psi_1 = \\ &= 4(\pi^* - \alpha^* - \beta)\rho + 2\beta\rho^*. \end{aligned} \quad (400)$$

Приравнявая теперь правые части уравнений (399) и (400), имеем

$$\Psi_1 = \frac{2}{3}\pi^*\rho, \quad (401)$$

а уравнение (394в) при $\tau = 0$ дает

$$\Psi_1 = -\pi^*\rho. \quad (402)$$

Поскольку мы предположили, что $\rho \neq 0$, из уравнений (401) и (402) следует, что $\Psi_1 = 0$, что и требовалось доказать.

Следствием теоремы Гольдберга — Сакса является соответствующая теорема для алгебраически вырожденного поля типа D по классификации Петрова: конгруэнции, образованные двумя главными изотропными направлениями l и n , должны быть и геодезическими, и бессдвиговыми, т. е. $\kappa = \sigma = \nu = \lambda = 0$, если $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0$, и наоборот.

Примечательным является тот факт, что все решения уравнений общей теории относительности, описывающие черные дыры, принадлежат к типу D по классификации Петрова, и поэтому их можно исследовать с использованием изотропных тетрад, для которых спинорные коэффициенты κ , σ , ν и λ , а также все вейлевские скаляры, кроме Ψ_2 , равны нулю. Именно благодаря этому обстоятельству формализм Ньюмена — Пенроуза особенно эффективен при исследовании метрик черных дыр.

Библиографические замечания

§ 1—6. Есть много хороших книг по дифференциальной геометрии, но большинство из них более специальные или более объемные, чем необходимо для наших целей. Назначение первых шести параграфов — подготовить читателя к восприя-

тию дальнейшего изложения. Ближе всего к ним по стилю и по объему следующие книги:

1. *Lovelock D., Rund H.* Tensors, Differential Forms and Variational Principles, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1975, Appendix, pp. 331—352;
2. *Hawking S. W., Ellis G. F. R.* The Large-Scale Structure of Space-Time, Cambridge, England, 1973, Ch. II, pp. 19—55. [Имеется перевод: С. Хокинг, Дж. Эллис. Крупномасштабная структура пространства-времени. — М.: Мир, 1977, гл. 2, с. 18—67.]

§ 7. Краткое изложение тетрадного формализма можно найти в книгах:

3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. — М.: Наука, 1967;
4. *Chandrasekhar S.* General Relativity — An Einstein Centenary Survey, eds. S. W. Hawking, W. Israel, Cambridge, England 1979. Ch. 7, pp. 371—391.

§ 8. Формализм Ньюмена—Пенроуза является основным в настоящей книге. Как мы увидим в гл. 8—10, он особенно хорошо подходит для исследования решений, описывающих черные дыры в рамках общей теории относительности. Основополагающая статья:

5. *Newman E. T., Penrose R. J.* Math. Phys., **3**, 566—579, 1962.

Более полно обоснованное изложение основных понятий дается в книге

6. *Penrose R.* An Analysis of the Structure of Space-Time, Cambridge University Adams Prize Essay, Cambridge, England, 1966.

Другой вариант этого формализма, использующий симметрию между базисными векторами l и n и между базисными векторами m и $\bar{m}$, изложен в статье

7. *Geroch R., Held A., Penrose R. J.* Math. Phys., **14**, 874—881, 1973.

Из практических соображений (изложенных в библиографических замечаниях к гл. 8) мы предпочли использовать первоначальную менее симметричную формулировку. Формализм Ньюмена—Пенроуза изложен также в следующих работах:

8. *Pirani F. A. E.* In Lectures on General Relativity, Brandeis Summer Institute in Theoretical Physics, Prentice Hall, Inc., Englewood, New Jersey, **1**, pp. 249—373, 1964;

9. *Breuer R. A.* Gravitational Perturbation Theory and Synchrotron Radiation, Lecture Notes in Physics, Springer Verlag, West Berlin, **44**, 1975.

См. также статью [4].

§ 9, а. Оптические скаляры были введены Р. Саксом:

10. *Sachs R. K.* Proc. Roy. Soc. (London) **A**, **264**, 309—337, 1961;
11. *Sachs R. K.* Proc. Roy. Soc. (London), **A**, **270**, 103—126, 1962.

См. также

12. *Sachs R. K.* Relativity Groups and Topology, Les Houches Summer School in Theoretical Physics, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1964, pp. 523—562.

Сжатое и ясное изложение см. в работе

13. *Penrose R.* In Perspectives in Geometry and Relativity, ed. B. Hoffmann, Indiana University Press, Bloomington, Indiana, 1966, pp. 259—274.

Важность оптических скаляров как спиновых коэффициентов была осознана, разумеется, только после создания формализма Ньюмена—Пенроуза (см. также [6]).

§ 9, б. Классификация Петрова, иногда называемая также классификацией Петрова — Пирани, была впервые описана в работах

14. Петров А. З. Ученые записки Казанского ун-та, т. 114, кн. 8, 1954;
15. *Pirani F. A. E.*, Phys. Rev., **105**, 1089—1099, 1957.

Более развернутое изложение содержится в работах

16. Петров А. З. Пространства Эйнштейна. — Физматгиз, 1960;
17. *Pirani F. A. E.* Gravitation: An Introduction to Current Research, ed. L. Witten, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1962, pp. 119—226.

См. также [8].

Изложение в настоящей книге повторяет в более развернутом виде изложение в работе [5] (см. также [4]).

§ 9, в. Теорема Гольдберга — Сакса доказана в работе

18. *Goldberg J. N., Sachs R. K.* Acta Phys. Polonica, Suppl. 13, **22**, 13—23, 1962.
- Приведенное здесь доказательство взято из работы [5].

ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ ДОСТАТОЧНО ОБЩЕЙ СТРУКТУРЫ

10. Введение

Решения уравнений общей теории относительности, описывающие черные дыры, являются или статическими и сферически симметричными, как решения Шварцшильда и Рейсснера — Нордстрема, или стационарными и аксиально-симметричными, как решения Керра и Керра — Ньюмена. Малые возмущения этих решений, исследование которых так же важно, как и исследование точных решений, не являются, вообще говоря, ни стационарными, ни аксиально-симметричными. Удобно заранее вывести необходимые формулы, записать уравнения Эйнштейна и уравнения Максвелла для пространства-времени, имеющего структуру, достаточно общую, чтобы охватить различные случаи, которые могут встретиться в процессе нашего исследования. В этой главе мы рассмотрим пространство-время, имеющее необходимую общность, и получим выражения для основных тензоров, которые позволят нам без дополнительных усилий написать уравнения в каждом отдельном случае.

11. Стационарное аксиально-симметричное пространство-время и увлечение инерциальных систем отсчета

Рассмотрим сначала метрику стационарного и аксиально-симметричного пространства-времени, прежде чем приступать к исследованию более общих многообразий, метрика которых не является ни стационарной, ни аксиально-симметричной.

Для описания стационарного аксиально-симметричного пространства-времени в качестве двух из четырех координат удобно выбрать время t ($=x^0$) и азимутальный угол φ ($=x^1$) вращения вокруг оси симметрии. Стационарность и аксиальная симметрия пространства-времени требуют, чтобы метрические коэффициенты не зависели от t и φ :

$$g_{ij} = g_{ij}(x^2, x^3), \quad (1)$$

где x^2 и x^3 — две оставшиеся пространственные координаты.

Кроме стационарности и аксиальной симметрии потребуем, чтобы пространство-время было инвариантным относительно одновременного обращения времени t и угла φ , т. е. относительно

преобразования $t \rightarrow -t$ и $\varphi \rightarrow -\varphi$. Физический смысл этого дополнительного требования в том, чтобы движение источника гравитационного поля, каков бы он ни был, было чисто вращательным движением вокруг оси симметрии, а в этом случае тензор энергии-импульса обладает требуемой дополнительной симметрией. Другими словами, рассматриваемое пространство-время связано с «вращающимся телом». Во всяком случае, инвариантность относительно одновременной инверсии времени и угла требует, чтобы

$$g_{02} = g_{03} = g_{12} = g_{13} = 0, \quad (2)$$

поскольку соответствующие члены в метрике меняют знак при преобразовании $t \rightarrow -t$ и $\varphi \rightarrow -\varphi$. Таким образом, при сделанных предположениях метрика должна иметь следующий вид:

$$ds^2 = g_{00} (dx^0)^2 + 2g_{01} dx^0 dx^1 + g_{11} (dx^1)^2 + \\ + [g_{22} (dx^2)^2 + 2g_{23} dx^2 dx^3 + g_{33} (dx^3)^2], \quad (3)$$

где все метрические коэффициенты являются функциями только x^2 и x^3 .

Дальнейшая редукция связана с использованием следующей теоремы.

Теорема. *Метрика*

$$ds^2 = g_{11} (dx^1)^2 + 2g_{12} dx^1 dx^2 + g_{22} (dx^2)^2 \quad (4)$$

двумерного пространства (x^1, x^2) с положительно- или отрицательно-определенной сигнатурой (+, + или — —) всегда может быть приведена координатным преобразованием к диагональному виду

$$ds^2 = \pm e^{2\mu} [(dx^1)^2 + (dx^2)^2], \quad (5)$$

где $e^{2\mu}$ — некоторая функция координат x^1 и x^2 .

Доказательство. Очевидно, для доказательства теоремы достаточно показать, что существуют преобразования

$$x^{1'} = \phi(x^1, x^2), \quad x^{2'} = \psi(x^1, x^2), \quad (6)$$

которые приводят метрику, записанную в контравариантной форме

$$ds^2 = g^{11} (dx_1)^2 + 2g^{12} dx_1 dx_2 + g^{22} (dx_2)^2, \quad (7)$$

к диагональному виду с равными коэффициентами при $(dx_1)^2$ и $(dx_2)^2$.

Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$g^{1'2'} = g^{11} \phi_{,1} \psi_{,1} + g^{12} (\phi_{,1} \psi_{,2} + \phi_{,2} \psi_{,1}) + g^{22} \phi_{,2} \psi_{,2} = 0, \quad (8)$$

$$g^{1'1'} - g^{2'2'} = g^{11} (\phi_{,1}^2 - \psi_{,1}^2) + 2g^{12} (\phi_{,1} \phi_{,2} - \psi_{,1} \psi_{,2}) + \\ + g^{22} (\phi_{,2}^2 - \psi_{,2}^2) = 0. \quad (9)$$

Несложно проверить, что уравнение (8) тождественно удовлетворяется подстановками

$$\begin{aligned}\phi_{,1} &= \kappa (g^{21}\psi_{,1} + g^{22}\psi_{,2}), \\ \phi_{,2} &= -\kappa (g^{11}\psi_{,1} + g^{12}\psi_{,2}),\end{aligned}\quad (10)$$

где κ — произвольная функция. Но те же подстановки в уравнение (9) приводят к условию

$$[\kappa^2 \{g^{11}g^{22} - (g^{12})^2\} - 1] [g^{11}\psi_{,1}^2 + 2g^{12}\psi_{,1}\psi_{,2} + g^{22}\psi_{,2}^2] = 0. \quad (11)$$

Если метрика положительно или отрицательно определенная, то уравнение (11) может быть удовлетворено лишь при условии

$$\kappa^2 = [g^{11}g^{22} - (g^{12})^2]^{-1} = g_{11}g_{22} - (g_{12})^2 = g, \quad (12)$$

где g — детерминант ковариантного метрического тензора. Следовательно, уравнения (8) и (9) удовлетворяются подстановками

$$\begin{aligned}\phi_{,1} &= +g^{1/2}(g^{21}\psi_{,1} + g^{22}\psi_{,2}) = +g^{1/2}g^{2k}\psi_{,k}, \\ \phi_{,2} &= -g^{1/2}(g^{11}\psi_{,1} + g^{12}\psi_{,2}) = -g^{1/2}g^{1k}\psi_{,k}.\end{aligned}\quad (13)$$

Условие интегрируемости этих уравнений

$$(g^{1/2}g^{ik}\psi_{,k})_{,i} = 0 \quad (14)$$

показывает, что ψ может быть произвольным решением уравнения Лапласа в рассматриваемом двумерном пространстве. Существование преобразований, приводящих метрику к диагональному виду с равными коэффициентами при $(dx_1)^2$ и $(dx_2)^2$ (и, следовательно, также при $(dx^1)^2$ и $(dx^2)^2$, если метрика записана в ковариантной форме), установлено.

Нелишне отметить, что ковариантная запись уравнений (13)

$$\phi_{,i} = g^{1/2}\epsilon_{ij}g^{jk}\psi_{,k} \quad (15)$$

(где ϵ_{ij} — двухиндексный антисимметричный тензор) показывает взаимную «дуальность» градиентов функций ϕ и ψ .

Из доказанной теоремы следует, что часть метрики, заключенная в уравнении (3) в квадратные скобки, может быть приведена к виду

$$\pm e^{2\mu} [(dx^2)^2 + (dx^3)^2], \quad (16)$$

где μ — некоторая функция переменных x^2 и x^3 .

Будем записывать метрику стационарного аксиально-симметричного пространства-времени в следующем виде:

$$ds^2 = e^{2\nu}(dt)^2 - e^{2\psi}(d\varphi - \omega dt)^2 - e^{2\mu_2}(dx^2)^2 - e^{2\mu_3}(dx^3)^2, \quad (17)$$

где ν , ψ , ω , μ_2 и μ_3 — функции переменных x^2 и x^3 . Следует отметить, что мы не полностью использовали возможности, предоставляемые доказанной выше теоремой в рамках требований стационарности, аксиальной симметрии и инвариантности относительно одновременной инверсии t и φ , оставив функции μ_2 и μ_3 различными. Это было сделано для того, чтобы в дальнейшем,

используя оставшуюся свободу выбора калибровки, зафиксировать вид функций μ_2 и μ_3 наиболее удобным в каждом конкретном случае образом.

а. Увлечение инерциальных систем отсчета. С метрикой (17) можно связать следующую тетраду базисных векторов:

$$\begin{aligned} e_{(0) i} &= (e^\nu, 0, 0, 0), & e_{(1) i} &= (\omega e^\psi, -e^{+\psi}, 0, 0), \\ e_{(2) i} &= (0, 0, -e^{\mu_2}, 0), & e_{(3) i} &= (0, 0, 0, -e^{\mu_3}). \end{aligned} \quad (18)$$

Им соответствуют контравариантные базисные векторы

$$\begin{aligned} e_{(0)}^i &= (e^{-\nu}, \omega e^{-\nu}, 0, 0), & e_{(1)}^i &= (0, e^{-\psi}, 0, 0), \\ e_{(2)}^i &= (0, 0, e^{-\mu_2}, 0), & e_{(3)}^i &= (0, 0, 0, e^{-\mu_3}). \end{aligned} \quad (19)$$

Легко видеть, что

$$e_{(a)}^i e_{(b) i} = \eta_{(a) (b)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}. \quad (20)$$

Таким образом, в выбранной системе отсчета метрика совпадает с метрикой Минковского; следовательно, это *локально инерциальная система отсчета*.

Рассмотрим теперь поле 4-скоростей. Пусть в некоторой точке в координатном базисе 4-скорость равна

$$u^0 = dt/ds = e^{-\nu} (1 - V^2)^{-1/2}, \quad u^1 = d\varphi/ds = \Omega u^0, \quad u^\alpha = dx^\alpha/ds = u^0 v^\alpha \quad (\alpha = 2, 3), \quad (21)$$

где

$$\Omega = d\varphi/dt, \quad v^\alpha = dx^\alpha/dt \quad (\alpha = 2, 3), \quad (22)$$

$$V^2 = e^{2(\psi-\nu)} (\Omega - \omega)^2 + e^{2(\mu_2-\nu)} (v^2)^2 + e^{2(\mu_3-\nu)} (v^3)^2. \quad (23)$$

В локально инерциальной системе отсчета 4-скорость в той же точке равна

$$u^{(a)} = e_i^{(a)} u^i = \eta^{(a) (b)} e_{(b) i} u^i, \quad (24)$$

или, как легко показать,

$$\begin{aligned} u^{(0)} &= (1 - V^2)^{-1/2}, & u^{(1)} &= e^{\psi-\nu} (\Omega - \omega) (1 - V^2)^{-1/2}, \\ u^{(\alpha)} &= (1 - V^2)^{-1/2} \exp(\mu_\alpha - \nu) v^\alpha \quad (\alpha = 2, 3). \end{aligned} \quad (25)$$

Таким образом, точка, описывающая круговую орбиту (собственной длины πe^ψ) с угловой скоростью Ω в выбранном координатном базисе в локально инерциальной системе отсчета, будет иметь угловую скорость

$$e^{\psi-\nu} (\Omega - \omega). \quad (26)$$

Соответственно точка, покоящаяся относительно локально инерциальной системы отсчета (т. е. $u^{(1)} = u^{(2)} = u^{(3)} = 0$), в коор-

динатном базисе будет иметь скорость ω . Это явление называется *увлечением инерциальной системы отсчета*. В гл. 6 мы покажем, что в асимптотически плоском пространстве-времени с метрикой (17)

$$\omega \rightarrow 2Jr^{-3}, \quad (27)$$

где J — постоянная, интерпретируемая как момент количества движения.

12. Пространство-время необходимой общности

В этом параграфе мы обобщим линейный элемент (17) таким образом, чтобы охватить случаи, когда метрика не является стационарной и аксиально-симметричной. Основная цель такого обобщения — исследование возмущений метрик, которые являются статическими и сферически симметричными или стационарными и аксиально-симметричными.

Ограничимся поначалу исследованием пространства-времени, которое остается все время аксиально-симметричным, т. е. рассмотрим метрику, зависящую от t , но не зависящую от φ . Пусть метрика в контравариантной форме имеет вид

$$g = g^{ij}\partial_i\partial_j. \quad (28)$$

Тогда по предположению все компоненты метрики g^{ij} — функции только x^0 , x^2 и x^3 . Покажем, как локальным координатным преобразованием переменных x^0 , x^2 и x^3 , не затрагивающим переменную x^1 , можно привести 3×3 -матрицу $[g^{ij}]$ ($i, j = 0, 2, 3$) к диагональному виду.

Теорема (Коттона—Дарбу). *Метрика*

$$g = g^{ij}\partial_i\partial_j \quad (i, j = 0, 1, 2) \quad (29)$$

в трехмерном пространстве (x^0, x^1, x^2) всегда может быть приведена локальным координатным преобразованием к диагональному виду.

Доказательство. Отметим прежде всего, что выбором геодезической системы координат метрика может быть приведена к виду

$$g = e^0(\partial_0)^2 + g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta \quad (e^0 = \pm 1; \alpha, \beta = 1, 2). \quad (30)$$

[Геодезическая система координат строится следующим образом: выбирается поверхность $f(x^0, x^1, x^2)$, такая, что $g^{ij}f_{,i}f_{,j} \neq 0$, геодезические, нормальные к поверхности $f = 0$, служат координатными линиями x^0 , а координаты x^1 и x^2 выбираются на поверхностях, геодезически параллельных поверхности f .]

Рассмотрим преобразование координат

$$x^{i'} = \phi^{i'}(x^0, x^1, x^2) \quad (i' = 0, 1, 2), \quad (31)$$

где $\phi^{i'}$ — функции x^0, x^1, x^2 , которые мы хотим определить, исходя из требования диагональности метрики (30) в новой системе

координат. Условия диагональности, очевидно, имеют следующий вид:

$$g^{i'j'} = e^0 \frac{\partial \phi^{i'}}{\partial x^0} \frac{\partial \phi^{j'}}{\partial x^0} + g^{\alpha\beta} \frac{\partial \phi^{i'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \phi^{j'}}{\partial x^\beta} = 0$$

$$[(i', j') = (0, 1), (1, 2), (2, 0)], \quad (32)$$

или в явном виде

$$e^0 \frac{\partial \phi^1}{\partial x^0} \frac{\partial \phi^2}{\partial x^0} = -g^{\alpha\beta} \frac{\partial \phi^1}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \phi^2}{\partial x^\beta} = K^0,$$

$$e^0 \frac{\partial \phi^2}{\partial x^0} \frac{\partial \phi^0}{\partial x^0} = -g^{\alpha\beta} \frac{\partial \phi^2}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \phi^0}{\partial x^\beta} = K^1,$$

$$e^0 \frac{\partial \phi^0}{\partial x^0} \frac{\partial \phi^1}{\partial x^0} = -g^{\alpha\beta} \frac{\partial \phi^0}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \phi^1}{\partial x^\beta} = K^2. \quad (33)$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \phi^0}{\partial x^0} = \left(\frac{K^1 K^2}{e^0 K^0} \right)^{1/2}, \quad \frac{\partial \phi^1}{\partial x^0} = \left(\frac{K^2 K^0}{e^0 K^1} \right)^{1/2}, \quad \frac{\partial \phi^2}{\partial x^0} = \left(\frac{K^0 K^1}{e^0 K^2} \right)^{1/2}. \quad (34)$$

Предположим теперь, что ϕ^0 , ϕ^1 и ϕ^2 , рассматриваемые как функции двух переменных x^1 и x^2 , заданы на поверхности, скажем, $x^0 = 0$ и что K^0 , K^1 и K^2 нигде на поверхности не равны нулю и удовлетворяют обычным условиям гладкости. Тогда, по теореме Коши—Ковалевской, существуют и однозначно определяются функции ϕ^0 , ϕ^1 и ϕ^2 , которые удовлетворяют системе уравнений (33) и на поверхности $x^0 = 0$ сводятся к заданным функциям двух переменных. Существование локальных преобразований координат, приводящих метрику в трехмерном пространстве к диагональному виду, таким образом, установлено.

Возвращаясь к метрике, соответствующей нестационарному аксиально-симметричному пространству-времени, можно в соответствии с только что доказанной теоремой положить

$$g^{02} = g^{03} = g^{23} = 0. \quad (35)$$

Диагональные коэффициенты запишем следующим образом:

$$g^{00} = e^{-2\nu}; \quad g^{22} = -e^{-2\mu_2}; \quad g^{33} = -e^{-2\mu_3}, \quad (36)$$

где ν , μ_2 и μ_3 — функции x^0 , x^2 и x^3 . Остальные коэффициенты тензора g^{ij} удобно представить в виде

$$g^{01} = \omega e^{-2\nu}, \quad g^{12} = -q_2 e^{-2\mu_2}, \quad g^{13} = -q_3 e^{-2\mu_3},$$

$$g^{11} = \omega^2 e^{-2\nu} - e^{-2\psi} - q_2^2 e^{-2\mu_2} - q_3^2 e^{-2\mu_3}, \quad (37)$$

где ω , q_2 , q_3 и ψ — также некоторые функции переменных x^0 , x^2 и x^3 .

Ковариантная форма этой метрики имеет следующий вид:

$$ds^2 = e^{2\nu} (dt)^2 - e^{2\psi} (d\phi - q_2 dx^2 - q_3 dx^3 - \omega dt)^2 -$$

$$- e^{2\mu_2} (dx^2)^2 - e^{2\mu_3} (dx^3)^2. \quad (38)$$

Сравнение показывает, что метрика (38) является в некотором смысле естественным обобщением метрики (17), допуская нестационарность. Заметим также, что теперь мы потеряли свободу калибровки, которую имели в стационарном случае, и не можем наложить дополнительное координатное условие с целью фиксировать вид функций μ_2 и μ_3 .

Метрика (38) содержит семь функций ν , ψ , μ_2 , μ_3 , q_2 , q_3 и ω . С другой стороны, поскольку уравнения Эйнштейна ковариантные и потому существует только шесть независимых уравнений для метрических коэффициентов, семь функций должны появляться в уравнениях поля только в шести независимых комбинациях. Как это должно происходить, можно понять, рассмотрев следующее преобразование:

$$[x^i = x^{i'} + f(x^{0'}, x^{2'}, x^{3'}), \quad x^i = x^{i'} \quad (i = 0, 2, 3). \quad (39)$$

Это преобразование меняет только метрические коэффициенты g_{i1} ($i = 0, 2, 3$)

$$g_{i'1'} = g_{i1} + g_{11}f_{,i}, \quad \text{или} \quad (g_{i'1'} - g_{i1})/g_{11} = f_{,i} \quad (i = 0, 2, 3). \quad (40)$$

Из условий интегрируемости этих соотношений следует, что комбинации

$$\omega_{,2} - q_{2,0}, \quad \omega_{,3} - q_{3,0}, \quad q_{2,3} - q_{3,2} \quad (41)$$

инвариантны относительно преобразования (39). Функции ω , q_2 и q_3 появляются в уравнениях поля только в комбинациях (41) (этот факт мы позднее проверим). Комбинации (41) удовлетворяют следующему тождеству:

$$(\omega_{,2} - q_{2,0})_{,3} - (\omega_{,3} - q_{3,0})_{,2} + (q_{2,3} - q_{3,2})_{,0} = 0. \quad (42)$$

Поэтому семь функций, через которые мы выразили метрические коэффициенты, появляются в уравнениях поля (как уже указывалось) в виде лишь шести независимых величин.

Метрика (38), полученная для нестационарного аксиально-симметричного пространства-времени, может быть приложима и к многообразиям, не обладающим аксиальной симметрией, метрические коэффициенты которых допускают выделение переменной x^1 ($=\varphi$), т. е. когда

$$g^{ij}(x^0, x^1, x^2, x^3) = g^{ij}(x^0, x^2, x^3) h(x^1), \quad (43)$$

где $h(x^1)$ — некоторая функция x^1 . Очевидно, что в этом случае координатным преобразованием переменных x^0 , x^2 и x^3 , оставляющим неизменной координату x^1 , можно сделать равными нулю метрические коэффициенты g^{02} , g^{03} и g^{23} : общий множитель $h(x^1)$, появляющийся при этом в уравнении (33), не повлияет, разумеется, на результат. Чтобы сделать возможным нужное обобщение на нестационарный случай, мы должны формально считать, что семь функций ν , ψ , μ_2 , μ_3 , q_2 , q_3 и ω зависят также и от переменной x^1 . В последующих главах станет ясно, что выбранная

форма метрики (38) с метрическими коэффициентами, зависящими от всех четырех переменных x^0, x^1, x^2 и x^3 , достаточно гибкая и общая и охватывает все нужные нам случаи. Следует также отметить, что и в этом, более общем случае семь функций входят в уравнения поля только в шести независимых комбинациях (см. § 13 и 14).

В остальных параграфах настоящей главы мы выпишем основные выражения и уравнения для случая метрики (38).

13. Уравнения структуры и компоненты тензора Римана

Нашей целью является запись в явном виде уравнений Эйнштейна для наиболее общей формы метрики, выбранной в предыдущем параграфе, для чего мы выразим компоненты тензора Римана через картановы уравнения структуры. При выводе соответствующих уравнений для сохранения максимальной симметрии введем следующие обозначения:

$$dt = -idx^4, \quad \partial_t = i\partial_4, \quad v = \mu_4, \quad \omega = iq_4, \quad (44)$$

в которых метрика (38) принимает вид

$$ds^2 = - \sum_A e^{2\mu_A} (dx^A)^2 - e^{2\psi} \left(dx^1 - \sum_A q_A dx^A \right)^2, \quad (45)$$

где заглавные латинские индексы ($A, B, \dots$), по которым производится суммирование, пробегает значения 2, 3, 4. Метрика, записанная в виде (45), полностью симметрична по индексам 2, 3 и 4. Следует отметить, однако, что в этой комплексной версии сигнатура имеет вид $(-, -, -, -)$. Напомним также, что ψ , μ_A и q_A — функции всех четырех переменных x^1 и x^A ($A = 2, 3, 4$).

Во избежание неопределенности суммирование по повторяющимся заглавным латинским индексам не будет подразумеваться: суммирование будет, где необходимо, указываться явно (как в уравнении (45)).

В качестве базисных 1-форм, необходимых для применения метода Картана, которые в § 5 обозначались e^i , выберем

$$\omega^A = e^{\mu_A} dx^A, \quad \omega^1 = e^{\psi} \left(dx^1 - \sum_A q_A dx^A \right). \quad (46)$$

Эти формы соответствуют выбору ортонормированной тетрады базисных векторов при сигнатуре $(-, -, -, -)$. Обратные соотношения, выражающие 1-формы dx^A и dx^1 через ω^A и ω^1 , имеют вид

$$dx^A = e^{-\mu_A} \omega^A, \quad dx^1 = e^{-\psi} \omega^1 + \sum_A e^{-\mu_A} q_A \omega^A. \quad (47)$$

В качестве первого шага при выводе картановых уравнений структуры (гл. 1, уравнения (137') и (149)) выразим внешние

производные форм ω через базисные 2-формы $\omega^i \wedge \omega^j$ ($i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3, 4$). Находим

$$\begin{aligned} d\omega^A &= \sum_B e^{\mu_A} \mu_{A,B} dx^B \wedge dx^A + e^{\mu_A} \mu_{A,1} dx^1 \wedge dx^A = \\ &= \sum_B e^{-\mu_B} \mu_{A,B} \omega^B \wedge \omega^A + e^{\mu_A} \mu_{A,1} \left[e^{-\psi} \omega^1 + \sum_B e^{-\mu_B} q_B \omega^B \right] \wedge \omega^A = \\ &= \sum_B e^{-\mu_B} (\mu_{A,B} + q_B \mu_{A,1}) \omega^B \wedge \omega^A + e^{-\psi} \mu_{A,1} \omega^1 \wedge \omega^A. \end{aligned} \quad (48)$$

Для компактной записи уравнений типа предыдущих удобно определить производную функции $f(x^1, x^2, x^3, x^4)$ по координате x^A ($A = 2, 3, 4$), которую будем обозначать $f_{:A}$:

$$f_{:A} = f_{,A} + q_A f_{,1}. \quad (49)$$

Эта операция является дифференцированием, поскольку она удовлетворяет правилу Лейбница:

$$(fg)_{:A} = f g_{:A} + g f_{:A}. \quad (50)$$

Используя новую производную, уравнение (48) можно записать в виде

$$d\omega^A = - \sum_B e^{-\mu_B} \mu_{A:B} \omega^A \wedge \omega^B - e^{-\psi} \mu_{A,1} \omega^A \wedge \omega^1. \quad (51)$$

Подобным же образом находим

$$d\omega^1 = \sum_A e^{-\mu_A} (\psi_{:A} + q_{A,1}) \omega^A \wedge \omega^1 - \sum_{A,B} e^{\psi-\mu_A-\mu_B} q_{B:A} \omega^A \wedge \omega^B. \quad (52)$$

Вследствие отсутствия кручения первое картаново уравнение структуры (гл. 1, уравнение (137)) дает

$$d\omega^1 = - \sum_A \omega_A^1 \wedge \omega^A, \quad (53)$$

$$d\omega^A = - \sum_B \omega_B^A \wedge \omega^B - \omega_1^A \wedge \omega^1. \quad (54)$$

Эти уравнения позволяют определить 1-формы связности ω_A^1 и ω_B^A , если известны формы $d\omega^1$ и $d\omega^A$. Отметим также, что, поскольку 1-формы ω^1 и ω^A являются базисными формами ортонормированной тетрады, из уравнения (197) гл. 1 следует

$$\omega_j^i = -\omega_i^j \quad (i, j = 1, 2, 3, 4). \quad (55)$$

Сравнивая уравнения (51) и (52) с уравнениями (53) и (54), заключаем, что

$$\begin{aligned} \omega_A^1 &= -\omega_1^A = e^{-\mu_A} (\psi_{:A} + q_{A,1}) \omega^1 - e^{-\psi} \mu_{A,1} \omega^A + \\ &\quad + 1/2 \sum_B e^{\psi-\mu_A-\mu_B} Q_{AB} \omega^B, \end{aligned} \quad (56)$$

$$\omega_B^A = -\omega_A^B = -1/2 e^{\psi-\mu_A-\mu_B} Q_{AB} \omega^1 + e^{-\mu_B} \mu_{A:B} \omega^A - e^{-\mu_A} \mu_{B:A} \omega^B, \quad (57)$$

где

$$Q_{AB} = q_{A:B} - q_{B:A}. \quad (58)$$

Вводя теперь обозначения

$$\Psi_A = \psi_{:A} + q_{A,1}, \quad (59)$$

получаем следующие явные выражения для различных форм связности:

$$\begin{aligned} \omega_2^1 &= e^{-\mu_2} \Psi_2 \omega^1 - e^{-\psi} \mu_{2,1} \omega^2 + 1/2 e^{\psi-\mu_2-\mu_3} Q_{23} \omega^3 + 1/2 e^{\psi-\mu_2-\mu_4} Q_{24} \omega^4, \\ \omega_3^1 &= e^{-\mu_3} \Psi_3 \omega^1 - e^{-\psi} \mu_{3,1} \omega^3 + 1/2 e^{\psi-\mu_3-\mu_4} Q_{34} \omega^4 + 1/2 e^{\psi-\mu_3-\mu_2} Q_{32} \omega^2, \\ \omega_4^1 &= e^{-\mu_4} \Psi_4 \omega^1 - e^{-\psi} \mu_{4,1} \omega^4 + 1/2 e^{\psi-\mu_4-\mu_2} Q_{42} \omega^2 + 1/2 e^{\psi-\mu_4-\mu_3} Q_{43} \omega^3, \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} \omega_3^2 &= -1/2 e^{\psi-\mu_2-\mu_3} Q_{23} \omega^1 + e^{-\mu_3} \mu_{2:3} \omega^2 - e^{-\mu_2} \mu_{3:2} \omega^3, \\ \omega_4^3 &= -1/2 e^{\psi-\mu_3-\mu_4} Q_{34} \omega^1 + e^{-\mu_4} \mu_{3:4} \omega^3 - e^{-\mu_3} \mu_{4:3} \omega^4, \\ \omega_2^4 &= -1/2 e^{\psi-\mu_4-\mu_2} Q_{42} \omega^1 + e^{-\mu_2} \mu_{4:2} \omega^4 - e^{-\mu_4} \mu_{2:4} \omega^2. \end{aligned}$$

Чтобы вычислить компоненты тензора Римана исходя из второго картанова уравнения структуры

$$1/2 R^i_{jkl} \omega^k \wedge \omega^l = \Omega_j^i = d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k, \quad (61)$$

необходимо сначала вычислить внешние производные форм связности, перечисленных в соотношениях (60). (В действительности окажется достаточным знать компоненты Ω_2^1 и Ω_3^2 , откуда можно получить все компоненты тензора кривизны, используя симметрию метрических коэффициентов по индексам 2, 3 и 4.)

Необходимые внешние производные форм ω_j^i нетрудно выписать, если воспользоваться следующей леммой, доказательство которой очевидно:

Лемма. Если F — произвольная функция аргументов x^1, x^2, x^3 и x^4 , то

$$\begin{aligned} d(F\omega^1) &= \sum_A e^{-\psi-\mu_A} \mathcal{D}_A (Fe^\psi) \omega^A \wedge \omega^1 + \\ &+ 1/2 \sum_{A,B} Fe^{\psi-\mu_A-\mu_B} Q_{AB} \omega^A \wedge \omega^B, \end{aligned} \quad (62)$$

$$d(F\omega^A) = \sum_B e^{-\mu_A-\mu_B} (e^{\mu_A} F)_{:B} \omega^B \wedge \omega^A + e^{-\psi-\mu_A} (e^{\mu_A} F)_{,1} \omega^1 \wedge \omega^A, \quad (63)$$

где $\mathcal{D}_A$ — оператор, действующий на произвольную функцию $f(x^1, \dots, x^4)$ следующим образом:

$$\mathcal{D}_A f = f_{:A} + q_{A,1} f = f_{,A} + (q_A f)_{,1}. \quad (64)$$

(Оператор $\mathcal{D}_A$ не является оператором дифференцирования. Отметим также (ср. с формулой (59)), что

$$e^{-\psi} \mathcal{D}_A (e^\psi) = \psi_{:A} + q_{A,1} = \Psi_{A,1}. \quad (65)$$

С помощью этой леммы находим

$$\begin{aligned} d\omega_2^1 = & \sum_A e^{-\Psi-\mu_A} \mathcal{D}_A (e^{\Psi-\mu_2} \Psi_2) \omega^A \wedge \omega^1 - \\ & - e^{-\Psi-\mu_2} (e^{\mu_2-\Psi} \mu_{2,1}),_1 \omega^1 \wedge \omega^2 - 1/2 e^{-\Psi-\mu_3} (e^{\Psi-\mu_2} Q_{23}),_1 \omega^3 \wedge \omega^1 - \\ & - 1/2 e^{-\Psi-\mu_4} (e^{\Psi-\mu_2} Q_{24}),_1 \omega^4 \wedge \omega^1 + \omega^2 \wedge \omega^3 \{e^{\Psi-2\mu_2-\mu_3} \Psi_2 Q_{23} + \\ & + 1/2 e^{-\mu_2-\mu_3} (e^{\Psi-\mu_2} Q_{23}),_2 + e^{-\mu_2-\mu_3} (e^{-\Psi+\mu_2} \mu_{2,1}),_3\} + \\ & + \omega^2 \wedge \omega^4 \{e^{\Psi-2\mu_2-\mu_4} \Psi_2 Q_{24} + 1/2 e^{-\mu_2-\mu_4} (e^{\Psi-\mu_2} Q_{24}),_2 + \\ & + e^{-\mu_2-\mu_4} (e^{-\Psi+\mu_2} \mu_{2,1}),_4\} + \omega^3 \wedge \omega^4 \{e^{\Psi-\mu_2-\mu_3-\mu_4} \Psi_2 Q_{34} + \\ & + 1/2 e^{-\mu_3-\mu_4} (e^{\Psi-\mu_2} Q_{24}),_3 - 1/2 e^{-\mu_4-\mu_3} (e^{\Psi-\mu_2} Q_{23}),_4\}, \quad (66) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_3^1 \wedge \omega_3^2 = & [e^{-2\mu_3} \Psi_3 \mu_{2,3} - 1/4 e^{2\Psi-2\mu_2-2\mu_3} Q_{23}^2] \omega^1 \wedge \omega^2 - \\ & - [e^{-\mu_2-\mu_3} \Psi_3 \mu_{3,2} + 1/2 e^{-\mu_2-\mu_3} \mu_{3,1} Q_{23}] \omega^1 \wedge \omega^3 + \\ & + [1/2 e^{\Psi-2\mu_2-\mu_3} Q_{23} \mu_{3,2} + e^{-\Psi-\mu_3} \mu_{3,1} \mu_{2,3}] \omega^2 \wedge \omega^3 + \\ & + 1/4 e^{2\Psi-2\mu_3-\mu_2-\mu_4} Q_{34} Q_{23} \omega^1 \wedge \omega^4 - 1/2 e^{\Psi-2\mu_3-\mu_4} Q_{34} \mu_{2,3} \omega^2 \wedge \omega^4 + \\ & + 1/2 e^{\Psi-\mu_2-\mu_3-\mu_4} Q_{34} \mu_{3,2} \omega^3 \wedge \omega^4, \quad (67) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_4^1 \wedge \omega_4^2 = & [e^{-2\mu_4} \Psi_4 \mu_{2,4} - 1/4 e^{2\Psi-2\mu_2-2\mu_4} Q_{24}^2] \omega^1 \wedge \omega^2 - \\ & - [e^{-\mu_2-\mu_4} \Psi_4 \mu_{4,2} + 1/2 e^{-\mu_2-\mu_4} \mu_{4,1} Q_{24}] \omega^1 \wedge \omega^4 + \\ & + [1/2 e^{\Psi-2\mu_2-\mu_4} Q_{24} \mu_{4,2} + e^{-\Psi-\mu_4} \mu_{4,1} \mu_{2,4}] \omega^2 \wedge \omega^4 - \\ & - 1/2 e^{\Psi-2\mu_4-\mu_2} Q_{43} \mu_{2,4} \omega^2 \wedge \omega^3 + 1/2 e^{\Psi-\mu_2-\mu_3-\mu_4} Q_{43} \mu_{4,2} \omega^4 \wedge \omega^3 + \\ & + 1/4 e^{2\Psi-2\mu_4-\mu_2-\mu_3} Q_{43} Q_{24} \omega^1 \wedge \omega^3, \quad (68) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\omega_3^2 = & -1/2 \sum_A e^{-\Psi-\mu_A} \mathcal{D}_A (e^{2\Psi-\mu_2-\mu_3} Q_{23}) \omega^A \wedge \omega^1 - \\ & - e^{-\Psi-\mu_2} (e^{\mu_2-\mu_3} \mu_{2,3}),_1 \omega^2 \wedge \omega^1 + e^{-\Psi-\mu_3} (e^{\mu_3-\mu_2} \mu_{3,2}),_1 \omega^3 \wedge \omega^1 + \\ & + \omega^2 \wedge \omega^3 \{-1/2 e^{2\Psi-2\mu_2-2\mu_3} Q_{23}^2 - e^{-\mu_2-\mu_3} (e^{\mu_2-\mu_3} \mu_{2,3}),_3 - \\ & - e^{-\mu_2-\mu_3} (e^{\mu_3-\mu_2} \mu_{3,2}),_2\} + \omega^2 \wedge \omega^4 \{-1/2 e^{2\Psi-2\mu_2-\mu_3-\mu_4} Q_{23} Q_{24} - \\ & - e^{-\mu_2-\mu_4} (e^{\mu_2-\mu_3} \mu_{2,3}),_4\} + \omega^3 \wedge \omega^4 \{-1/2 e^{2\Psi-2\mu_3-\mu_2-\mu_4} Q_{23} Q_{34} + \\ & + e^{-\mu_3-\mu_4} (e^{\mu_3-\mu_2} \mu_{3,2}),_4\}, \quad (69) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_2^1 \wedge \omega_3^1 = & [1/2 e^{\Psi-\mu_2-\mu_3-\mu_4} \Psi_2 Q_{34} - 1/2 e^{\Psi-\mu_2-\mu_3-\mu_4} \Psi_3 Q_{24}] \omega^1 \wedge \omega^4 + \\ & + [1/2 e^{\Psi-2\mu_2-\mu_3} \Psi_2 Q_{32} + e^{-\Psi-\mu_3} \Psi_3 \mu_{2,1}] \omega^1 \wedge \omega^2 + \\ & + [-1/2 e^{\Psi-\mu_2-2\mu_3} \Psi_3 Q_{23} - e^{-\Psi-\mu_2} \Psi_2 \mu_{3,1}] \omega^1 \wedge \omega^3 + \\ & + [1/4 e^{2\Psi-2\mu_2-2\mu_3} Q_{23}^2 + e^{-2\Psi} \mu_{2,1} \mu_{3,1}] \omega^2 \wedge \omega^3 + \\ & + [1/4 e^{2\Psi-2\mu_2-\mu_3-\mu_4} Q_{24} Q_{23} - 1/2 e^{-\mu_3-\mu_4} Q_{34} \mu_{2,1}] \omega^2 \wedge \omega^4 + \\ & + [1/4 e^{2\Psi-2\mu_3-\mu_2-\mu_4} Q_{23} Q_{34} + 1/2 e^{-\mu_2-\mu_4} Q_{24} \mu_{3,1}] \omega^3 \wedge \omega^4, \quad (70) \end{aligned}$$

$$\omega_4^3 \wedge \omega_2^4 = [-1/2 e^{\Psi-\mu_2-\mu_3-\mu_4} Q_{34} \mu_{4,2} - 1/2 e^{\Psi-\mu_2-\mu_3-\mu_4} Q_{42} \mu_{4,3}] \omega^1 \wedge \omega^4 +$$

$$\begin{aligned}
& + 1/2 e^{\psi-\mu_3-2\mu_4} Q_{34} \mu_{2:4} \omega^1 \wedge \omega^2 + 1/2 e^{\psi-2\mu_4-\mu_2} Q_{42} \mu_{3:4} \omega^1 \wedge \omega^3 + \\
& + e^{-2\mu_4} \mu_{3:4} \mu_{2:4} \omega^2 \wedge \omega^3 - e^{-\mu_3-\mu_4} \mu_{4:3} \mu_{2:4} \omega^2 \wedge \omega^4 + \\
& + e^{-\mu_2-\mu_4} \mu_{3:4} \mu_{4:2} \omega^3 \wedge \omega^4. \quad (71)
\end{aligned}$$

Из уравнений (55) и (61) получаем

$$1/2 R^1_{2kl} \omega^k \wedge \omega^l = \Omega^1_2 = d\omega^1_2 - \omega^1_3 \wedge \omega^2_3 - \omega^1_4 \wedge \omega^2_4. \quad (72)$$

Подставляя в это уравнение уравнения (66) — (68), можно получить компоненты R^1_{2kl} тензора Римана, просто собирая коэффициенты при $\omega^k \wedge \omega^l$. Например, для вычисления R^1_{212} нужно собрать коэффициенты при $\omega^1 \wedge \omega^2$ в выражении для Ω^1_2 . Имеем

$$\begin{aligned}
R^1_{212} = & -e^{-\psi-\mu_2} \mathcal{D}_2 (e^{\psi-\mu_2} \Psi_2) - e^{-2\mu_3} \Psi_3 \mu_{2:3} - e^{-\psi-\mu_2} (e^{\mu_2-\psi} \mu_{2,1}),_1 + \\
& + 1/4 e^{2\psi-2\mu_2-2\mu_3} Q_{23}^2 + 1/4 e^{2\psi-2\mu_2-2\mu_4} Q_{24}^2 - e^{-2\mu_4} \Psi_4 \mu_{2:4}. \quad (73)
\end{aligned}$$

Опуская индекс, получаем уравнение (75а). Уравнения (75ж), (75к) и (75у) получаются приравниванием в выражении для Ω^1_2 коэффициентов при $\omega^1 \wedge \omega^3$, $\omega^2 \wedge \omega^3$ и $\omega^3 \wedge \omega^4$ соответственно. Точно так же уравнения (75г) и (75р) получаются подстановкой уравнений (69) — (71) в уравнение

$$1/2 R^2_{3kl} \omega^k \wedge \omega^l = \Omega^2_3 = d\omega^2_3 - \omega^1_2 \wedge \omega^3_3 - \omega^3_4 \wedge \omega^2_4. \quad (74)$$

Остальные компоненты тензора Римана получаются подходящей перестановкой индексов в уравнениях (75а), (75г), (75к), (75р) и (75у) и использованием симметрии по индексам 2, 3 и 4.

$$\begin{aligned}
-R_{1212} = & -e^{-\psi-\mu_2} \mathcal{D}_2 (e^{\psi-\mu_2} \Psi_2) - e^{-2\mu_3} \Psi_3 \mu_{2:3} - e^{-2\mu_4} \Psi_4 \mu_{2:4} - \\
& - e^{-\psi-\mu_2} (e^{\mu_2-\psi} \mu_{2,1}),_1 + 1/4 e^{2\psi-2\mu_2} [e^{-2\mu_3} Q_{23}^2 + e^{-2\mu_4} Q_{24}^2]; \quad (75а)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-R_{1313} = & -e^{-\psi-\mu_3} \mathcal{D}_3 (e^{\psi-\mu_3} \Psi_3) - e^{-2\mu_2} \Psi_2 \mu_{3:2} - e^{-2\mu_4} \Psi_4 \mu_{3:4} - \\
& - e^{-\psi-\mu_3} (e^{\mu_3-\psi} \mu_{3,1}),_1 + 1/4 e^{2\psi-2\mu_3} [e^{-2\mu_2} Q_{23}^2 + e^{-2\mu_4} Q_{34}^2]; \quad (75б)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-R_{1414} = & -e^{-\psi-\mu_4} \mathcal{D}_4 (e^{\psi-\mu_4} \Psi_4) - e^{-2\mu_2} \Psi_2 \mu_{4:2} - e^{-2\mu_3} \Psi_3 \mu_{4:3} - \\
& - e^{-\psi-\mu_4} (e^{\mu_4-\psi} \mu_{4,1}),_1 + 1/4 e^{2\psi-2\mu_4} [e^{-2\mu_2} Q_{24}^2 + e^{-2\mu_3} Q_{34}^2]; \quad (75в)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-R_{2323} = & -e^{-\mu_2-\mu_3} [(e^{\mu_2-\mu_3} \mu_{2:3}):_3 + (e^{\mu_3-\mu_2} \mu_{3:2}):_2] - e^{-2\mu_4} \mu_{3:4} \mu_{2:4} - \\
& - 3/4 e^{2\psi-2\mu_2-2\mu_3} Q_{23}^2 - e^{-2\psi} \mu_{2,1} \mu_{3,1}; \quad (75г)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-R_{2424} = & -e^{-\mu_2-\mu_4} [(e^{\mu_2-\mu_4} \mu_{2:4}):_4 + (e^{\mu_4-\mu_2} \mu_{4:2}):_2] - e^{-2\mu_3} \mu_{4:3} \mu_{2:3} - \\
& - 3/4 e^{2\psi-2\mu_2-2\mu_4} Q_{24}^2 - e^{-2\psi} \mu_{2,1} \mu_{4,1}; \quad (75д)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-R_{3434} = & -e^{-\mu_3-\mu_4} [(e^{\mu_3-\mu_4} \mu_{3:4}):_4 + (e^{\mu_4-\mu_3} \mu_{4:3}):_3] - \\
& - e^{-2\mu_2} \mu_{4:2} \mu_{3:2} - 3/4 e^{2\psi-2\mu_3-2\mu_4} Q_{34}^2 - e^{-2\psi} \mu_{3,1} \mu_{4,1}; \quad (75е)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-R_{1213} = & -e^{-\psi-\mu_3} \mathcal{D}_3 (e^{\psi-\mu_2} \Psi_2) + e^{-\mu_2-\mu_3} \Psi_3 \mu_{3:2} + \\
& + 1/4 e^{2\psi-2\mu_4-\mu_2-\mu_3} Q_{43} Q_{42} + 1/2 e^{-\mu_2-\mu_3} [Q_{23,1} + Q_{23}(\mu_3 - \mu_2 + \psi),_1]; \quad (75ж)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-R_{1214} = & -e^{-\psi-\mu_4} \mathcal{D}_1 (e^{\psi-\mu_2} \Psi_3) + e^{-\mu_2-\mu_4} \Psi_4 \mu_{4:2} + \\
& + 1/4 e^{2\psi-2\mu_3-\mu_2-\mu_4} Q_{34} Q_{32} + 1/2 e^{-\mu_1-\mu_4} [Q_{24, 1} + Q_{24} (\mu_4 - \mu_2 + \psi), 1]; \quad (75з)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-R_{1314} = & -e^{-\psi-\mu_4} \mathcal{D}_4 (e^{\psi-\mu_3} \Psi_3) + e^{-\mu_3-\mu_4} \Psi_4 \mu_{4:3} + \\
& + 1/4 e^{2\psi-2\mu_2-\mu_3-\mu_4} Q_{24} Q_{23} + 1/2 e^{-\mu_3-\mu_4} [Q_{34, 1} + Q_{34} (\mu_4 - \mu_3 + \psi), 1], \quad (75и)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-R_{1223} = & e^{\psi-2\mu_2-\mu_3} Q_{23} (\Psi_2 - 1/2 \mu_{3:2}) + 1/2 e^{-\mu_2-\mu_3} (e^{\psi-\mu_2} Q_{22})_{:2} + \\
& + 1/2 e^{\psi-2\mu_4-\mu_3} Q_{43} \mu_{2:4} + e^{-\mu_2-\mu_3} (e^{-\psi+\mu_2} \mu_{2, 1})_{:3} - e^{-\psi-\mu_3} \mu_{3, 1} \mu_{2:3}, \quad (75к)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-R_{1224} = & e^{\psi-2\mu_2-\mu_4} Q_{24} (\Psi_2 - 1/2 \mu_{4:2}) + 1/2 e^{-\mu_2-\mu_4} (e^{\psi-\mu_2} Q_{24})_{:2} + \\
& + 1/2 e^{\psi-2\mu_3-\mu_4} Q_{34} \mu_{2:3} + e^{-\mu_2-\mu_4} (e^{-\psi+\mu_2} \mu_{2, 1})_{:4} - e^{-\psi-\mu_4} \mu_{4, 1} \mu_{2:4}, \quad (75л)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-R_{1334} = & e^{\psi-2\mu_3-\mu_4} Q_{34} (\Psi_3 - 1/2 \mu_{4:3}) + 1/2 e^{-\mu_3-\mu_4} (e^{\psi-\mu_3} Q_{34})_{:3} + \\
& + 1/2 e^{\psi-2\mu_2-\mu_4} Q_{24} \mu_{3:2} + e^{-\mu_3-\mu_4} (\mu^{-\psi-\mu_3} \mu_{3, 1})_{:4} - e^{-\psi-\mu_4} \mu_{4, 1} \mu_{3:4}, \quad (75м)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-R_{1332} = & e^{\psi-2\mu_3-\mu_2} Q_{32} (\Psi_3 - 1/2 \mu_{2:3}) + 1/2 e^{-\mu_3-\mu_2} (e^{\psi-\mu_3} Q_{32})_{:3} + \\
& + 1/2 e^{\psi-2\mu_4-\mu_2} Q_{42} \mu_{3:4} + e^{-\mu_3-\mu_2} (e^{-\psi+\mu_3} \mu_{3, 1})_{:2} - e^{-\psi-\mu_2} \mu_{2, 1} \mu_{3:2}, \quad (75н)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-R_{1442} = & e^{\psi-2\mu_4-\mu_2} Q_{42} (\Psi_4 - 1/2 \mu_{2:4}) + 1/2 e^{-\mu_4-\mu_2} (e^{\psi-\mu_4} Q_{42})_{:4} + \\
& + 1/2 e^{\psi-2\mu_3-\mu_2} Q_{32} \mu_{4:3} + e^{-\mu_4-\mu_2} (e^{-\psi+\mu_4} \mu_{4, 1})_{:2} - e^{-\psi-\mu_2} \mu_{2, 1} \mu_{4:2}, \quad (75о)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-R_{1443} = & e^{\psi-2\mu_4-\mu_3} Q_{43} (\Psi_4 - 1/2 \mu_{3:4}) + 1/2 e^{-\mu_4-\mu_3} (e^{\psi-\mu_4} Q_{43})_{:4} + \\
& + 1/2 e^{\psi-2\mu_2-\mu_3} Q_{23} \mu_{4:2} + e^{-\mu_4-\mu_3} (e^{-\psi+\mu_4} \mu_{4, 1})_{:3} - e^{-\psi-\mu_3} \mu_{3, 1} \mu_{4:3}, \quad (75п)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-R_{2334} = & e^{-\mu_2-\mu_4} [\mu_{3:24} + \mu_{3:2} (\mu_3 - \mu_2)_{:4} - \mu_{3:4} \mu_{4:2}] - \\
& - 3/4 e^{2\psi-\mu_2-2\mu_3-\mu_4} Q_{23} Q_{34} - 1/2 e^{-\mu_2-\mu_4} Q_{24} \mu_{3, 1}, \quad (75р)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-R_{3224} = & e^{-\mu_3-\mu_4} [\mu_{2:34} + \mu_{2:3} (\mu_2 - \mu_3)_{:4} - \mu_{2:4} \mu_{4:3}] - \\
& - 3/4 e^{2\psi-\mu_3-2\mu_2-\mu_4} Q_{32} Q_{24} - 1/2 e^{-\mu_3-\mu_4} Q_{34} \mu_{2, 1}, \quad (75с)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-R_{3442} = & e^{-\mu_3-\mu_2} [\mu_{4:32} + \mu_{4:3} (\mu_4 - \mu_3)_{:2} - \mu_{4:2} \mu_{2:3}] - \\
& - 3/4 e^{2\psi-\mu_3-2\mu_4-\mu_2} Q_{34} Q_{42} - 1/2 e^{-\mu_3-\mu_2} Q_{32} \mu_{4, 1}, \quad (75т)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-R_{1234} = & 1/2 e^{-\mu_3-\mu_4} [(e^{\psi-\mu_2} Q_{24})_{:3} - (e^{\psi-\mu_2} Q_{23})_{:4}] + \\
& + 1/2 e^{\psi-\mu_2-\mu_3-\mu_4} Q_{34} (2\Psi_2 - \mu_{3:2} - \mu_{4:2}), \quad (75у)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-R_{1423} = & 1/2 e^{-\mu_2-\mu_3} [(e^{\psi-\mu_4} Q_{43})_{:2} - (e^{\psi-\mu_4} Q_{42})_{:3}] + \\
& + 1/2 e^{\psi-\mu_2-\mu_3-\mu_4} Q_{23} (2\Psi_4 - \mu_{2:4} - \mu_{3:4}), \quad (75ф)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-R_{1342} = & 1/2 e^{-\mu_4-\mu_2} [(e^{\psi-\mu_3} Q_{32})_{:4} - (e^{\psi-\mu_3} Q_{34})_{:2}] + \\
& + 1/2 e^{\psi-\mu_2-\mu_3-\mu_4} Q_{42} (2\Psi_3 - \mu_{4:3} - \mu_{2:3}). \quad (75х)
\end{aligned}$$

Нужно заметить, что, меняя порядок индексов 2, 3, 4, можно получать формально различные выражения для одних и тех же компонент тензора Римана с точностью до свойств симметрии.

Например, подставляя уравнения (68), (70) и (71) в выражение для Ω_3^2 и собирая члены, пропорциональные $\omega^1 \wedge \omega^3$, получим

$$-R_{2313} = \frac{1}{2}e^{-\Psi-\mu_3}\mathcal{D}_3(e^{2\Psi-\mu_2-\mu_3}Q_{23}) - e^{-\Psi-\mu_3}(e^{\mu_3-\mu_2}\mu_{3;2})_{,1} + \\ + \frac{1}{2}e^{\Psi-\mu_2-2\mu_3}\Psi_3Q_{23} + e^{-\Psi-\mu_2}\Psi_2\mu_{3,1} - \frac{1}{2}e^{\Psi-2\mu_4-\mu_2}Q_{42}\mu_{3;4}. \quad (76)$$

Совсем не очевидно, что это выражение для R_{2313} лишь знаком отличается от выражения для R_{1332} (уравнение (75н)). В этом можно убедиться, расписывая оба выражения и используя определения производной (49) и оператора $\mathcal{D}_A$ (64). Не всегда легко установить подобные равенства: в процессе доказательства часто приходится пользоваться совсем не очевидными тождествами, например тождеством

$$Q_{[23;4]} - Q_{[23q_{4,1}]} = 0. \quad (77)$$

Компоненты тензоров Риччи и Эйнштейна можно получить, комбинируя соответствующим образом компоненты тензора Римана. Например,

$$-R_{11} = R_{1212} + R_{1313} + R_{1414} \text{ и т. д.,} \\ R_{12} = G_{12} = R_{1332} + R_{1442} \text{ и т. д.,} \quad (78)$$

$$-\frac{1}{2}R = R_{1212} + R_{1313} + R_{1414} + R_{2323} + R_{2424} + R_{3434}, \\ G_{11} = R_{2323} + R_{2424} + R_{3434} \text{ и т. д.}$$

Здесь мы не будем выписывать эти выражения явно: в последующих главах мы рассмотрим различные конкретные случаи.

Отметим наконец, что обратный переход от (комплексной) координаты x^4 к (действительной) пространственно-временной координате $x^0 (=t)$ осуществляется посредством следующих замен:

$$-i\partial_4 \rightarrow \partial_0; \quad \mu_4 \rightarrow \nu; \quad q_4 \rightarrow -i\omega. \quad (79)$$

14. Компоненты тетрады и коэффициенты вращения Риччи

В некоторых случаях, например при работе с уравнениями Максвелла (§ 15), удобно использовать тетрадный формализм. При этом нужно иметь коэффициенты вращения Риччи в подходящем тетрадном базисе. Тетрадный базис, который мы здесь выберем, является аналитическим продолжением на случай сигнатуры $(+, -, -, -)$ комплексного базиса, использовавшегося в § 13 при сигнатуре $(-, -, -, -)$. Явный вид ковариантных и контравариантных векторов, составляющих ортонормированный базис, следующий (ср. с уравнениями (18) и (19)):

$$e_{(0) i} = (e^\nu, 0, 0, 0), \quad e_{(1) i} = (\omega e^\Psi, -e^\Psi, q_2 e^\Psi, q_3 e^\Psi), \\ e_{(2) i} = (0, 0, -e^{\mu_2}, 0), \quad e_{(3) i} = (0, 0, 0, -e^{\mu_3}). \quad (80)$$

$$e^i_{(0)} = (e^{-\nu}, \omega e^{-\nu}, 0, 0), \quad e^i_{(1)} = (0, e^{-\Psi}, 0, 0), \\ e^i_{(2)} = (0, q_2 e^{-\mu_2}, e^{-\mu_2}, 0), \quad e^i_{(3)} = (0, q_3 e^{-\mu_3}, 0, e^{-\mu_3}). \quad (81)$$

В гл. 1 (§ 8, б) мы продемонстрировали наиболее удобный метод вычисления коэффициентов вращения Риччи с использованием λ -символов (гл. 1, уравнение (266)):

$$\lambda_{(a)(b)(c)} = e_{(a)}^i [e_{(b)i,j} - e_{(b)j,i}] e_{(c)}^j. \quad (82)$$

Результат вычислений этих символов может быть записан в компактном виде с помощью производных (формула (49)), введенных в § 13. Однако, поскольку теперь мы не хотим вводить мнимую координату $x^4 = ix^0$, заглавные латинские буквы ($A, B, \dots$) пробегают значения 0, 2, 3. Кроме того, обозначим

$$q_0 = \omega \quad (83)$$

Определения. 1. Производная (49) функции $f(x^0, x^1, x^2, x^3)$ по аргументу x^A ($A = 0, 2, 3$) равна

$$f_{:A} = f_{,A} + q_A f_{,1}. \quad (84)$$

2. Оператор $\mathcal{D}_A$, действуя на $f(x^0, x^1, x^2, x^3)$, дает

$$\mathcal{D}_A f = f_{:A} + q_{A,1} f = f_{,A} + (q_A f)_{,1}. \quad (85)$$

$$3. \quad Q_{AB} = q_{A:B} - q_{B:A}. \quad (86)$$

$$4. \quad \Psi_A = \psi_{:A} + q_{A,1} = e^{-\Psi} \mathcal{D}_A (e^{\Psi}). \quad (87)$$

В этой связи интересно отметить простую связь производных (49) с производными по направлению вдоль касательных векторов $e_{(a)}$:

$$e_{(0)} f = e^{-\Psi} f_{,0}, \quad e_{(2)} f = e^{-\mu_2} f_{,2}, \quad e_{(3)} f = e^{-\mu_3} f_{,3}, \quad e_{(1)} f = e^{-\Psi} f_{,1}. \quad (88)$$

Используя предыдущие определения, получаем для λ -символов следующие выражения:

$$\begin{aligned} \lambda_{100} &= -v_{,1} e^{-\Psi}, & \lambda_{110} &= -\Psi_0 e^{-v}, & \lambda_{223} &= -\mu_{2,3} e^{-\mu_3}, \\ \lambda_{200} &= -v_{,2} e^{-\mu_2}, & \lambda_{112} &= -\Psi_2 e^{-\mu_2}, & \lambda_{233} &= +\mu_{3,2} e^{-\mu_2}, \\ \lambda_{300} &= -v_{,3} e^{-\mu_3}, & \lambda_{113} &= -\Psi_3 e^{-\mu_3}, & \lambda_{210} &= Q_{20} e^{\Psi - \mu_2 - v}, \\ \lambda_{122} &= \mu_{2,1} e^{-\Psi}, & \lambda_{220} &= -\mu_{2,0} e^{-v}, & \lambda_{310} &= Q_{30} e^{\Psi - \mu_3 - v}, \\ \lambda_{133} &= \mu_{3,1} e^{-\Psi}, & \lambda_{330} &= -\mu_{3,0} e^{-v}, & \lambda_{213} &= Q_{23} e^{\Psi - \mu_2 - \mu_3}. \end{aligned} \quad (89)$$

Коэффициенты вращения Риччи $\gamma_{(a)(b)(c)}$ определяются по формулам (ср. с уравнением (268) гл. 1):

$$\gamma_{(a)(b)(c)} = \frac{1}{2} [\lambda_{(a)(b)(c)} + \lambda_{(c)(a)(b)} - \lambda_{(b)(c)(a)}], \quad (90)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{100} &= -v_{,1} e^{-\Psi}, & \gamma_{101} &= -\Psi_0 e^{-v}, \\ \gamma_{200} &= -v_{,2} e^{-\mu_2}, & \gamma_{121} &= -\Psi_2 e^{-\mu_2}, \\ \gamma_{300} &= -v_{,3} e^{-\mu_3}, & \gamma_{131} &= -\Psi_3 e^{-\mu_3}, \\ \gamma_{122} &= \mu_{2,1} e^{-\Psi}, & \gamma_{202} &= -\mu_{2,0} e^{-v}, \\ \gamma_{133} &= \mu_{3,1} e^{-\Psi}, & \gamma_{303} &= -\mu_{3,0} e^{-v}, \end{aligned} \quad (91)$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{233} &= \mu_{3;2} e^{-\mu_2}, & \gamma_{232} &= -\mu_{2;3} e^{-\mu_3}, \\
\gamma_{102} &= \gamma_{201} = -\gamma_{120} = \frac{1}{2} Q_{20} e^{\psi - \mu_2 - \nu}, \\
\gamma_{103} &= \gamma_{301} = -\gamma_{130} = \frac{1}{2} Q_{30} e^{\psi - \mu_3 - \nu}, \\
\gamma_{132} &= \gamma_{231} = -\gamma_{123} = \frac{1}{2} Q_{23} e^{\psi - \mu_2 - \mu_3}.
\end{aligned}$$

15. Уравнения Максвелла

Завершим главу выводом уравнений Максвелла в пространстве-времени с выбранной метрикой. Проще всего это сделать в тетрадном формализме, описанном в § 14.

Уравнения Максвелла

$$\eta^{(n)}{}^{(m)} F_{(a)}{}^{(n)}{}_{|(m)} = 0, \quad F_{[(a)}{}^{(b)}{}_{|(c)]} = 0 \quad (92)$$

в ортонормированном базисе, выбранном в предыдущем параграфе, принимают вид

$$\begin{aligned}
e^{-\nu} F_{a0;0} - e^{-\psi} F_{a1;1} - e^{-\mu_2} F_{a2;2} - e^{-\mu_3} F_{a3;3} = \\
= -F_{01}(\gamma_{0a1} - \gamma_{1a0}) - F_{02}(\gamma_{0a2} - \gamma_{2a0}) - F_{03}(\gamma_{0a3} - \gamma_{3a0}) + \\
+ F_{12}(\gamma_{1a2} - \gamma_{2a1}) + F_{23}(\gamma_{2a3} - \gamma_{3a2}) + F_{31}(\gamma_{3a1} - \gamma_{1a3}) + \\
+ F_{a1}(-\gamma_{100} + \gamma_{122} + \gamma_{133}) + F_{a2}(-\gamma_{200} + \gamma_{211} + \gamma_{233}) + \\
+ F_{a3}(-\gamma_{300} + \gamma_{311} + \gamma_{322}) + F_{a0}(\gamma_{101} - \gamma_{202} + \gamma_{303}). \quad (93)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{[ab, c]} + \sum_{[a, b, c]} (-\gamma_{0ac} F_{0b} + \gamma_{1ac} F_{1b} + \gamma_{2ac} F_{2b} + \gamma_{3ac} F_{3b} - \gamma_{0bc} F_{a0} + \\
+ \gamma_{1tc} F_{a1} + \gamma_{2bc} F_{a2} + \gamma_{3bc} F_{a3}) = 0. \quad (94)
\end{aligned}$$

Явное выражение в левой части уравнения (93) получено с помощью формулы (88), связывающей производные (49) с производными по направлению вдоль контравариантных базисных векторов (81).

Подставляя теперь в уравнения (93) и (94) коэффициенты вращения Риччи из уравнений (91), после простых, но длинных преобразований, получим следующую систему восьми уравнений:

$$\mathcal{D}_3(e^{\psi + \mu_2} F_{12}) - \mathcal{D}_2(e^{\psi + \mu_3} F_{13}) + (e^{\mu_2 + \mu_3} F_{23})_{;1} = 0, \quad (95a)$$

$$\mathcal{D}_2(e^{\psi + \nu} F_{01}) + \mathcal{D}_0(e^{\psi + \mu_2} F_{12}) - (e^{\nu + \mu_2} F_{02})_{;1} = 0, \quad (95б)$$

$$\mathcal{D}_3(e^{\psi + \nu} F_{01}) + \mathcal{D}_0(e^{\psi + \mu_3} F_{13}) - (e^{\nu + \mu_3} F_{03})_{;1} = 0, \quad (95в)$$

$$\begin{aligned}
(e^{\mu_2 + \mu_3} F_{01})_{;0} + (e^{\nu + \mu_3} F_{12})_{;2} + (e^{\nu + \mu_2} F_{13})_{;3} = \\
= e^{\psi + \mu_3} F_{02} Q_{02} + e^{\psi + \mu_2} F_{03} Q_{03} - e^{\psi + \nu} F_{23} Q_{23}, \quad (95г)
\end{aligned}$$

$$\mathcal{D}_2(e^{\psi + \mu_3} F_{02}) + \mathcal{D}_3(e^{\psi + \mu_2} F_{03}) + (e^{\mu_2 + \mu_3} F_{01})_{;1} = 0, \quad (95д)$$

$$-\mathcal{D}_2(e^{\psi + \nu} F_{23}) + \mathcal{D}_0(e^{\psi + \mu_2} F_{03}) - (e^{\mu_2 + \nu} F_{13})_{;1} = 0, \quad (95е)$$

$$+ \mathcal{D}_3(e^{\psi + \nu} F_{23}) + \mathcal{D}_0(e^{\psi + \mu_3} F_{02}) - (e^{\mu_3 + \nu} F_{12})_{;1} = 0, \quad (95ж)$$

$$\begin{aligned}
(e^{\nu + \mu_2} F_{02})_{;3} - (e^{\nu + \mu_3} F_{03})_{;2} + (e^{\mu_2 + \mu_3} F_{23})_{;0} = \\
= e^{\psi + \nu} F_{01} Q_{23} + e^{\psi + \mu_2} F_{12} Q_{03} - e^{\psi + \mu_3} F_{13} Q_{02}. \quad (95з)
\end{aligned}$$

Не все из этих восьми уравнений линейно независимы вследствие существования следующих легко проверяемых коммутационных соотношений:

$$\mathcal{D}_A(f, 1) = f_{;A, 1}, \quad (\mathcal{D}_A \tilde{\mathcal{D}}_B - \mathcal{D}_B \mathcal{D}_A)f = -(Q_{AB}f)_{;1}. \quad (96)$$

Например, действуя операторами $\mathcal{D}_0$, $-\mathcal{D}_3$ и $\mathcal{D}_2$ на уравнения (95а), (95б) и (95в) соответственно, складывая и упрощая с помощью коммутационных соотношений, получаем

$$[-Q_{03}e^{\Psi+\mu_2}F_{12} + Q_{02}e^{\Psi+\mu_3}F_{13} - Q_{23}e^{\Psi+\nu}F_{01} + \\ + (e^{\mu_2+\mu_3}F_{23})_{;0} + (e^{\nu+\mu_2}F_{02})_{;3} - (e^{\nu+\mu_3}F_{03})_{;2}]_{;1} = 0. \quad (97)$$

Но это уравнение удовлетворяется тождественно в силу уравнения (95з). Подобным же образом, действуя операторами $\mathcal{D}_0$, $-\mathcal{D}_3$ и $-\mathcal{D}_2$ на уравнения (95д)—(95ж) соответственно, складывая и упрощая с помощью коммутационных соотношений (96), находим, что результирующее уравнение тождественно удовлетворяется в силу уравнения (95г).

Таким образом, у нас есть метод, позволяющий легко записывать в явном виде уравнения Эйнштейна и Эйнштейна—Максвелла в пространстве-времени с метрикой (38), не являющемся ни стационарным, ни аксиально-симметричным.

Библиографические замечания

§ 11. Дж. Бардин был, очевидно, первым, кто понял преимущества такого вида метрики для описания стационарного аксиально-симметричного пространства-времени:

1. *Bardeen J. M. Astrophys. J.*, **161**, 103—109, 1970.

См. также

2. *Bardeen J. M., Press W. H., Teukolsky S. A. Astrophys J.*, **178**, 347—369, 1972.

§ 12. Теорема, названная нами теоремой Коттона — Дарбу, о возможности ввести в трехмерном пространстве локально, т. е. в конечной области, ортонормальную систему криволинейных координат, несмотря на ее элементарный характер, по-видимому, не упоминается ни в одном стандартном курсе дифференциальной геометрии. Действительно, ссылка на работу Коттона

3. *Cotton E. Ann. Fac. Sci. Toulouse, Ser. 2*, **1**, 385—438, 1889 (см. p. 410) есть в книге А. З. Петрова:

4. Петров А. З. Пространства Эйнштейна. — М.: Физматгиз, 1960, в примере 5 на с. 44.

Мы соединили в названии теоремы имена Коттона и Дарбу, потому что моделью доказательства, данного Коттоном, служит доказательство Дарбу соответствующей теоремы для евклидовых пространств:

5. *Darboux G. Leçons sur les Systèmes Orthogonaux et les Coordinées Curvilignes*, Gauthier-Villars, Paris, 1898, pp. 1—2.

Я благодарен проф. А. Траутману за его советы по этим вопросам.

§ 13. Тетрадные компоненты тензора Римана для той же метрики, что и в данном параграфе, но при условии аксиальной симметрии, выписаны в работе

6. *Chandrasekhar S., Friedman J. L. Astrophys. J.*, **175**, 379—405, 1972.

§ 14 и 15. Исследование, проведенное в этих параграфах, является обобщением работы

7. *Chandrasekhar S., Xanthopoulos B. C. Proc. Roy. Soc. (London) A*, **367**, 1—14, 1979.

ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ ШВАРЦШИЛЬДА

16. Введение

Полное понимание структуры пространства-времени Шварцшильда, содержащего горизонт событий и истинную сингулярность в центре, достигнуто сравнительно недавно. В настоящей главе при выводе метрики Шварцшильда мы не будем проходить весь исторический путь, а (следуя в основном Сингу) обратим внимание на существенные особенности пространства-времени. Поскольку изучение геодезических в пространстве-времени Шварцшильда позволяет понять некоторые основные черты многообразий, содержащих горизонты событий, мы посвятили их исследованию два параграфа — возможно, немного больше, чем необходимо. Заканчивается глава описанием пространства-времени Шварцшильда в формализме Ньюмена — Пенроуза и доказательством принадлежности этого многообразия типу D .

17. Метрика Шварцшильда

Метрика Шварцшильда является сферически симметричным решением уравнений Эйнштейна в пустоте. Следуя Сингу, определим сферически симметричное пространство-время как декартово произведение $S_2 \times U_2$ двух многообразий: единичной двумерной сферы S_2 и двумерного многообразия U_2 с индефинитной метрикой. На S_2 мы введем обычные полярные координаты (θ, φ) . Метрика на S_2 в этих координатах имеет вид

$$d\Omega^2 = (d\theta)^2 + (d\varphi)^2 \sin^2 \theta. \quad (1)$$

На многообразии U_2 метрика индефинитна, следовательно, должны существовать изотропные линии

$$u = \text{const}, \quad v = \text{const}. \quad (2)$$

Мы используем эти линии в качестве координатных линий на U_2 . Выбрав таким способом координаты на S_2 и U_2 , можно записать наиболее общую метрику сферически симметричного пространства-времени в следующем виде:

$$ds^2 = f du dv - e^{2\mu_3} [(d\theta)^2 + (d\varphi)^2 \sin^2 \theta], \quad (3)$$

где f и μ_3 — функции u и v .

Метрику (3) подстановками

$$u = 1/2 (x^0 + x^2), \quad v = 1/2 (x^0 - x^2) \quad (4)$$

можно привести к виду

$$ds^2 = f [(dx^0)^2 - (dx^2)^2] - e^{2\mu_3} [(d\theta)^2 + (d\varphi)^2 \sin^2 \theta]. \quad (5)$$

Это частный случай метрики, рассмотренной в гл. 2. Если ввести обозначения

$$f = e^{2\mu_2}, \quad e^{2\psi} = e^{2\mu_3} \sin^2 \theta, \quad dx^1 = d\varphi, \quad dx^3 = d\theta, \quad dx^4 = i dx^0, \quad (6)$$

то метрика принимает вид

$$-ds^2 = e^{2\mu_2} (dx^1)^2 + e^{2\psi} (dx^1)^2 + e^{2\mu_2} (dx^2)^2 + e^{2\mu_3} (dx^3)^2. \quad (7)$$

Сравнивая с метрикой, введенной в § 13, видим, что

$$q_2 = q_3 = q_4 = 0, \quad \mu_4 = \mu_2, \quad e^\psi = e^{\mu_3} \sin \theta, \quad (8)$$

и при таком выборе метрики

$$\Psi_4 = \mu_{3,4}, \quad \Psi_2 = \mu_{3,2}, \quad \Psi_3 = \text{ctg } \theta, \quad (9)$$

где μ_2 и μ_3 — функции двух переменных x^2 и x^4 .

Теперь нетрудно выписать компоненты тензора Римана (ср. с уравнениями (75a) — 75 (x) гл. 2) для рассматриваемого специального случая:

$$\begin{aligned} -R_{1212} &= -R_{2323} = -e^{-\mu_3 - \mu_2} (e^{\mu_3 - \mu_2} \mu_{3,2}),_2 - e^{-2\mu_2} \mu_{3,4} \mu_{2,4} = \\ &= -e^{-2\mu_2} [\mu_{3,22} + \mu_{3,2} (\mu_3 - \mu_2),_2 + \mu_{3,4} \mu_{2,4}], \end{aligned} \quad (10a)$$

$$\begin{aligned} -R_{1414} &= -R_{3434} = -e^{-\mu_3 - \mu_2} (e^{\mu_3 - \mu_2} \mu_{3,4}),_4 - e^{-2\mu_2} \mu_{3,2} \mu_{2,2} = \\ &= -e^{-2\mu_2} [\mu_{3,44} + \mu_{3,4} (\mu_3 - \mu_2),_4 + \mu_{3,2} \mu_{2,2}], \end{aligned} \quad (10б)$$

$$\begin{aligned} -R_{1214} &= +R_{2334} = -e^{-\mu_3 - \mu_2} (e^{\mu_3 - \mu_2} \mu_{3,2}),_4 + e^{-2\mu_2} \mu_{3,4} \mu_{2,2} = \\ &= -e^{-2\mu_2} [\mu_{3,24} + \mu_{3,2} (\mu_3 - \mu_2),_4 - \mu_{3,4} \mu_{2,2}], \end{aligned} \quad (10в)$$

$$-R_{1313} = e^{-2\mu_3} - e^{-2\mu_2} [(\mu_{3,2})^2 + (\mu_{3,4})^2], \quad (10г)$$

$$-R_{2424} = -e^{-2\mu_2} (\mu_{2,44} + \mu_{2,22}). \quad (10д)$$

Остальные компоненты равны нулю.

В силу уравнений Эйнштейна компоненты тензора Риччи должны быть равны нулю:

$$-R_{22} = R_{1212} + R_{2323} + R_{2424} = 2R_{1212} + R_{2424} = 0, \quad (11)$$

$$-R_{44} = R_{1414} + R_{2424} + R_{3434} = 2R_{1414} + R_{2424} = 0, \quad (12)$$

$$-R_{11} = R_{1212} + R_{1313} + R_{1414} = 0, \quad (13)$$

$$-R_{33} = R_{1313} + R_{2323} + R_{3434} = 0, \quad (14)$$

и единственная недиагональная компонента тензора Риччи, не равная тождественно нулю, есть

$$R_{24} = R_{2114} + R_{2334} = 0. \quad (15)$$

Легко видеть, что уравнения (10б) и (11)–(15) требуют, чтобы

$$\begin{aligned} R_{1212} &= R_{1414} = -\frac{1}{2} R_{2424} = -\frac{1}{2} R_{1313}, \\ R_{2334} &= R_{1214} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Переходя снова к пространственно-временной координате x^0 , имеем

$$R_{1212} = -R_{1010} = \frac{1}{2}R_{2020} = -\frac{1}{2}R_{1313}, \quad R_{1210} = 0, \quad (17)$$

где

$$R_{1212} = e^{-2\mu_2} [\mu_{3,22} + \mu_{3,2}(\mu_3 - \mu_2)_{,2} - \mu_{3,0}\mu_{2,0}], \quad (18a)$$

$$R_{1010} = e^{-2\mu_2} [\mu_{3,00} + \mu_{3,0}(\mu_3 - \mu_2)_{,0} - \mu_{3,2}\mu_{2,2}], \quad (18б)$$

$$R_{1210} = e^{-2\mu_2} [\mu_{3,20} + \mu_{3,2}(\mu_3 - \mu_2)_{,0} - \mu_{3,0}\mu_{2,2}], \quad (18в)$$

$$R_{1313} = -e^{-2\mu_3} + e^{-2\mu_2} [(\mu_{3,2})^2 - (\mu_{3,0})^2], \quad (18г)$$

$$R_{2020} = e^{-2\mu_2} (\mu_{2,00} - \mu_{2,22}). \quad (18д)$$

Рассмотрим следующие уравнения, которые являются комбинациями уравнений (17):

$$\begin{aligned} R_{1212} + R_{1010} &= 0, \quad R_{1210} = 0, \\ R_{1212} + R_{1313} - R_{1010} &= 0, \quad R_{0202} + R_{1313} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Подставляя выражения (18) для компонент тензора Римана в уравнения (19), получаем

$$[(e^{\mu_3})_{,2}e^{-\mu_2}]_{,2} + [(e^{\mu_3})_{,0}e^{-\mu_2}]_{,0} + (e^{\mu_3})_{,0}(e^{-\mu_2})_{,0} + (e^{\mu_3})_{,2}(e^{-\mu_2})_{,2} = 0, \quad (20)$$

$$(e^{\mu_3})_{,02} - (e^{\mu_3})_{,2}\mu_{2,0} - (e^{\mu_3})_{,0}\mu_{2,2} = 0, \quad (21)$$

$$e^{2\mu_2} + \{e^{\mu_3}(e^{\mu_3})_{,00} - e^{\mu_3}(e^{\mu_3})_{,22}[(e^{\mu_3})_{,0}]^2 - [(e^{\mu_3})_{,2}]^2\} = 0, \quad (22)$$

$$e^{-2\mu_2}(\mu_{2,00} - \mu_{2,22}) - e^{-2\mu_3} + e^{-2\mu_2-2\mu_3}\{[e^{\mu_3}]_{,2}]^2 - [(e^{\mu_3})_{,0}]^2\} = 0. \quad (23)$$

Полагая

$$f = e^{2\mu_2}, \quad Z = e^{\mu_3}, \quad (24)$$

перепишем уравнения (20)–(23) в следующем виде:

$$f(Z_{,22} + Z_{,00}) - (Z_{,2}f_{,2} + Z_{,0}f_{,0}) = 0, \quad (25)$$

$$2fZ_{,02} - (Z_{,2}f_{,0} + Z_{,0}f_{,2}) = 0, \quad (26)$$

$$f + Z(Z_{,00} - Z_{,22}) + (Z_{,0})^2 - (Z_{,2})^2 = 0, \quad (27)$$

$$(1/2f)[(\ln f)_{,00} - (\ln f)_{,22}] - Z^{-2} + (1/Z^2f)[(Z_{,2})^2 - (Z_{,0})^2] = 0. \quad (28)$$

Комбинируя уравнения (25) и (26), получаем

$$f(Z_{,00} \pm 2Z_{,02} + Z_{,22}) - (Z_{,2} \pm Z_{,0})(f_{,2} \pm f_{,0}) = 0, \quad (29)$$

а уравнение (28) можно упростить, воспользовавшись уравнением (27):

$$\frac{1}{2}[(\ln f)_{,00} - (\ln f)_{,22}] + Z^{-1}(Z_{,00} - Z_{,22}) = 0. \quad (30)$$

Наконец, возвращаясь к первоначальным переменным u и v , получаем следующие уравнения:

$$fZ_{,uu} - Z_{,u}f_{,u} = 0, \quad (31)$$

$$fZ_{,vv} - Z_{,v}f_{,v} = 0, \quad (32)$$

$$f + Z_{,uv} + Z_{,u}Z_{,v} = 0, \quad (33)$$

$$\frac{1}{2}(\ln f)_{,uv} + Z^{-1}Z_{,uv} = 0. \quad (34)$$

а. Решение уравнений. Переписывая уравнение (31) в виде

$$Z_{,uu}/Z_{,u} = f_{,u}/f, \quad (35)$$

заключаем, что

$$f = B(v) Z_{,u}, \quad (36)$$

где $B(v)$ — произвольная функция v . Подобным же образом из уравнения (32) находим

$$f = A(u) Z_{,v}, \quad (37)$$

где $A(u)$ — произвольная функции u . Переписывая теперь уравнение (33) в двух альтернативных формах

$$f + (ZZ_{,v})_{,u} = 0, \quad f + (ZZ_{,u})_{,v} = 0 \quad (38)$$

и подставляя вместо f выражение (36) или (37), получаем

$$[B(v)Z + ZZ_{,v}]_{,u} = 0, \quad [A(u)Z + ZZ_{,u}]_{,v} = 0. \quad (39)$$

Таким образом,

$$Z_{,u} = -A(u) + F(u)/Z, \quad Z_{,v} = -B(v) + G(v)/Z, \quad (40)$$

где $F(u)$ и $G(v)$ — другие произвольные функции указанных аргументов. С помощью уравнений (36), (37) и (40) получаем

$$\begin{aligned} Z_{,u}Z_{,v} &= -A(u)Z_{,v} + F(u)Z_{,v}/Z = -f + F(u)Z_{,v}/Z = \\ &= -B(v)Z_{,u} + G(v)Z_{,u}/Z = -f + G(v)Z_{,u}/Z, \end{aligned} \quad (41)$$

откуда следует соотношение

$$F(u)Z_{,v}/Z = G(v)Z_{,u}/Z. \quad (42)$$

Объединяя уравнения (36), (37) и (42), имеем

$$\frac{Z_{,u}}{Z_{,v}} = \frac{F(u)}{G(v)} = \frac{A(u)}{B(v)}. \quad (43)$$

Следовательно,

$$\frac{F(u)}{A(u)} = \frac{G(v)}{B(v)} = \text{const} = 2M, \quad (44)$$

и мы получаем решение

$$Z_{,u} = -A(u)(1 - 2M/Z), \quad Z_{,v} = -B(v)(1 - 2M/Z); \quad (45)$$

$$f = -A(u)B(v)(1 - 2M/Z). \quad (46)$$

Несложно проверить, что это решение удовлетворяет также и уравнению (34).

Смысл соотношений (45) становится яснее, если их записать следующим образом:

$$dZ = -(1 - 2M/Z)[A(u)du + B(v)dv]. \quad (47)$$

Из этого уравнения следует, что Z зависит от u и v таким образом, что в плоскости (u, v) можно начертить кривые $Z = \text{const.}$ Последнее утверждение составляет содержание теоремы Биркгофа, к которой мы еще вернемся в п. (в) настоящего параграфа, а также в § 18.

Наконец, выпишем явно метрику Шварцшильда:

$$ds^2 = -4 (1 - 2M/Z) A(u) B(v) du dv - Z^2 d\Omega^2. \quad (48)$$

б. Координаты Крускала. Две произвольные функции $A(u)$ и $B(v)$ в решении (48) для метрики обусловлены свободой в выборе координат на U_2 : вместо u и v можно выбрать некоторую функцию u и некоторую функцию v . Возможность произвола в выборе калибровки заложена в самой структуре формул: произвольные функции $A(u)$ и $B(v)$ входят лишь в комбинациях $A(u) du$ и $B(v) dv$ как в метрику (48), так и в решение (47) для Z . Однако, выбирая функции u и v в качестве координат на U_2 , следует соблюдать осторожность, чтобы не ввести при этом фиктивную координатную сингулярность (в особенности при $Z = 2M$, как явствует из вида метрики). Появление сингулярности в этом случае означает лишь, что выбранные координатные функции действуют не глобально, а в строго определенных окрестностях многообразия.

Следующий выбор координатных функций позволяет избежать появления нефизических сингулярностей:

$$-A(u) du \rightarrow 2M d \ln u, \quad -B(v) dv \rightarrow 2M d \ln v. \quad (49)$$

При этом

$$dZ = 2M (1 - 2M/Z) d(\ln uv), \quad (50)$$

$$ds^2 = -(16M^2/uv) (1 - 2M/Z) du dv - Z^2 d\Omega^2. \quad (51)$$

Интегрирование уравнения (50) дает

$$|uv| = C |Z - 2M| e^{Z/2M}, \quad (52)$$

где C — постоянная интегрирования. Выбирая

$$C = (2M)^{-1} \quad (53)$$

и заменяя Z обычной радиальной координатой r , получаем метрику Шварцшильда (51) в форме Крускала:

$$ds^2 = -(32M^3/r) e^{-r/2M} du dv - r^2 d\Omega^2, \quad (54)$$

где r связано с uv соотношением

$$uv = (1 - r/2M) e^{r/2M}. \quad (55)$$

Найдем область изменения координат u и v , в которой метрика определена.

Заметим, что соотношение (55) между r и uv является двузначным, если разрешить r принимать отрицательные значения. Следовательно, две ветви этого соотношения при $r > 0$ и $r < 0$

должны описывать совершенно различные физические ситуации. Поскольку изменение знака r производит тот же эффект, что и изменение знака M , ясно, что та ветвь соотношения (55), для которой $r < 0$, соответствует отрицательным значениям M . Вскоре мы увидим, что M имеет смысл массы, поэтому ограничимся случаем $r > 0$ и $M > 0$.

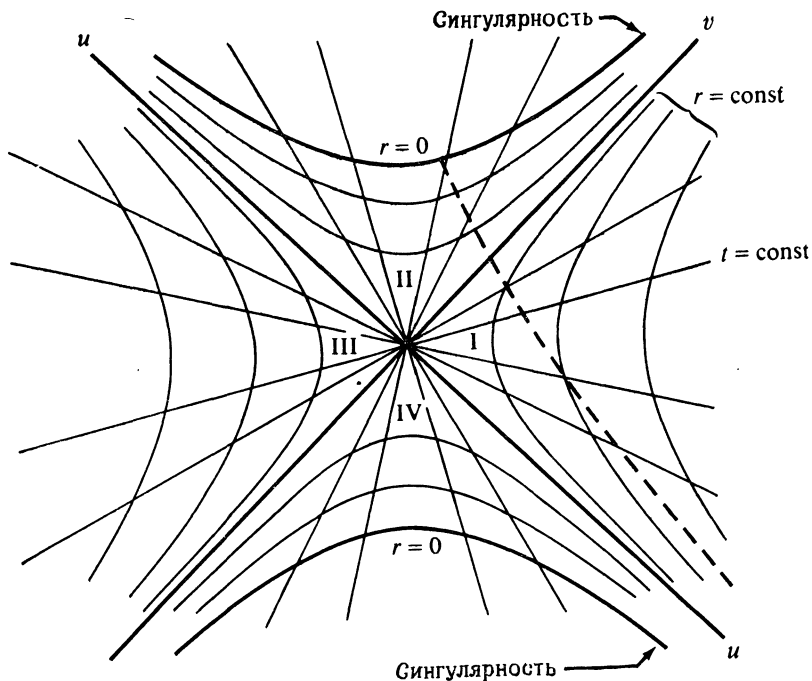


Рис. 2. Геометрия Шварцшильда в координатах u и v (эквивалентных координатам Крускала). Световые конусы в каждой точке образуются изотропными геодезическими $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$, проходящими через эту точку. Кривые постоянных значений t — радиальные линии, проходящие через начало координат, а кривые постоянных значений r — гиперболы. Штриховая линия — возможная времениподобная траектория, пересекающая горизонт.

В плоскости (u, v) кривые постоянных значений r — гиперболы, асимптотами которых служат координатные оси. «Изорадиальные» кривые в случае $r > 2M$ лежат на рис. 2 в квадрантах I и III, а в случае $r < 2M$ — в квадрантах II и IV. Оси координат — геометрическое место точек, где $r = 2M$. Световые конусы в каждой точке образуются изотропными геодезическими $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$, проходящими через эту точку. Расположение световых конусов на рис. 2 показывает, что никакая времениподобная (или изотропная) траектория при движении в направлении возрастания r в квадранте II никогда не попадает в квадрант I. Этот геометрически очевидный факт (который бу-

дет строго обоснован в § 19 и 20) свидетельствует о том, что поверхность $r = 2M$ является *горизонтом событий*.

Пространство-время Шварцшильда обладает еще одним важным свойством: как явствует из рис. 2, если при движении вдоль времениподобной траектории в направлении в будущее (и при этом в направлении убывания r) мы пересечем горизонт на поверхности $r = 2M$ и попадем в квадрант II, то с необходимостью пересечем геометрическое место точек с $r = 0$, где становится равным нулю элемент собственного объема. Другими словами, все, что пересекает горизонт, будет раздавлено, сжато «в ничто» при $r = 0$. В этом причина появления сингулярности на линии $r = 0$ в пространстве-времени Шварцшильда, существование которой подтверждается еще и тем, что все ненулевые компоненты тензора Римана в локально инерциальной системе отсчета расходятся при $r = 0$ и регулярны во всех остальных точках (см. уравнение (75) в § 18).

в. Переход к координатам Шварцшильда. Пусть

$$v/u = \exp [t/2M]. \quad (56)$$

Эта подстановка имеет смысл в квадрантах I и III. В этих квадрантах кривые постоянного t — прямые линии, проходящие через начало координат. В частности, $t = 0$ — линия $u = +v$, при $t \rightarrow +\infty$ прямая приближается к оси v (поворачиваясь против часовой стрелки), а при $t \rightarrow -\infty$ к оси u (поворачиваясь по часовой стрелке).

Ограничим наше рассмотрение квадрантами I и III. Имеем

$$dt = 2M \left(\frac{du}{u} - \frac{dv}{v} \right). \quad (57)$$

Кроме того, заменяя Z на r в уравнении (50), получаем

$$\frac{r dr}{r - 2M} = 2M \left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v} \right). \quad (58)$$

Из этих уравнений следует

$$(dt)^2 - \frac{r^2 (dr)^2}{(r - 2M)^2} = -16M^2 \frac{du dv}{uv}, \quad (59)$$

и метрика (51) принимает вид

$$ds^2 = (1 - 2M/r) (dt)^2 - \frac{(dr)^2}{1 - 2M/r} - r^2 [(d\theta)^2 + (d\varphi)^2 \sin^2 \theta]. \quad (60)$$

Это наиболее известная форма метрики Шварцшильда, и именно в таком виде ее впервые получил Шварцшильд. Наш же способ вывода подчеркивает применимость подобной записи только в квадрантах I и III. Но запись метрики в форме (60) имеет некоторые преимущества. Становится очевидным, например, что радиальная координата r есть «яркостное расстояние» в том смысле, что площадь поверхности сферы «радиуса» r равна $4\pi r^2$ и что t

есть мера собственного времени наблюдателя, покоящегося на бесконечности. Далее, асимптотика при $r \rightarrow \infty$ говорит о том, что метрика (60) описывает пространство-время вне сферически симметричного распределения вещества, инертная масса которого равна M . И наконец, поскольку метрические коэффициенты не зависят явно от времени и вдобавок нет увлечения инерциальной системы отсчета (см. § 11, а), пространство-время является *статическим* для наблюдателя вне горизонта. Последнее утверждение и есть теорема Биркгофа в обычной формулировке.

В заключение этого параграфа отметим, что для наблюдателя, чья мировая линия целиком лежит в квадранте I на плоскости (u, v) , перемещение от произвольной точки квадранта I до горизонта вдоль любой времениподобной и изотропной траектории занимает бесконечное время (в § 19 и 20 мы проиллюстрируем на примере это явление). Кроме того, поскольку никакая времениподобная или изотропная траектория не может выйти из квадранта II в квадрант I, события во внутреннем относительно поверхности $r = 2M$ пространстве недоступны для наблюдения в квадранте I: сигналы из области внутри горизонта $r = 2M$ не проходят в область вне горизонта. Именно такой смысл вкладывается в понятие «горизонт событий», и именно в этом смысле метрика Шварцшильда описывает пространство-время черной дыры.

18. Альтернативный вывод метрики Шварцшильда

Метрика Шварцшильда в стандартной записи (60) играет важную роль в наших исследованиях. Полезно поэтому вывести ее, пользуясь с самого начала координатами r и t . Кроме того, это позволит получить различные компоненты тензора Римана сразу же в этих координатах, что нам также пригодится.

Приводя те же аргументы, что и в начале главы, нетрудно показать, что метрику сферически симметричного пространства-времени можно записать в следующем общем виде:

$$ds^2 = f_{00} (dt)^2 + 2f_{02} dr dt + f_{22} (dr)^2 + g d\Omega^2, \quad (61)$$

где f_{00} , f_{02} , f_{22} и g — функции только двух переменных r и t . Преобразованием координат, в которое входят эти переменные, можно добиться равенства нулю f_{02} и равенства g квадрату яркостного расстояния r . Ясно, что такое преобразование возможно в некоторой открытой окрестности, но совсем необязательно — глобально. Действительно, результаты предыдущего параграфа свидетельствуют как раз о том, что такое преобразование невозможно во всем пространстве-времени. Это преобразование приводит метрику к виду

$$ds^2 = e^{2\nu} (dt)^2 - e^{2\mu_2} (dr)^2 - r^2 [(d\theta)^2 + (d\varphi)^2 \sin^2 \theta], \quad (62)$$

где v и μ_2 — функции t ($=x^0=-ix^4$) и r ($=x^2$). Это частный случай метрики, рассмотренной нами в гл. 2, в которой

$$\begin{aligned} v &= \mu_4, \quad \mu_3 = \ln r, \quad \psi = \ln r + \ln \sin \theta, \quad \mu_{3,2} = r^{-1}, \\ \Psi_4 &= 0, \quad \Psi_1 = 0, \quad \Psi_2 = r^{-1}, \quad \Psi_3 = \operatorname{ctg} \theta. \end{aligned} \quad (63)$$

Используя результаты гл. 2 (уравнения (75а) — (75х)), находим ненулевые компоненты тензора Римана:

$$\begin{aligned} -R_{1212} &= -R_{2323} = r^{-1}e^{-2\mu_2}\mu_{2,r}, \\ -R_{1414} &= -R_{3434} = -r^{-1}e^{-2\mu_2}v_{,r}, \\ -R_{2334} &= +R_{1214} = -r^{-1}e^{-v-\mu_2}\mu_{2,4}, \\ -R_{1313} &= r^{-2}(1 - e^{-2\mu_2}), \\ -R_{2424} &= -e^{-\mu_2-v}[(e^{\mu_2-v}\mu_{2,4})_{,4} + (e^{v-\mu_2}v_{,r})_{,r}]. \end{aligned} \quad (64)$$

Следует помнить, что это тетрадные компоненты при следующем выборе базисных векторов:

$$e_{(a)i} = \begin{vmatrix} e^v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{\mu_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r \end{vmatrix}. \quad (65)$$

Уравнения поля требуют равенства нулю тензора Риччи. Следовательно,

$$-R_{42} = R_{1412} + R_{3432} = -2r^{-1}e^{-v-\mu_2}\mu_{2,4} = 0, \quad (66)$$

откуда получаем

$$\mu_2 \equiv \mu_2(r). \quad (67)$$

Из уравнения

$$-R_{44} + R_{22} = R_{1414} + R_{3434} - (R_{1212} + R_{2323}) = 0 \quad (68)$$

находим

$$(2/r)e^{-2\mu_2}(v + \mu_2)_{,r} = 0, \quad (69)$$

откуда

$$v = -\mu_2(r) + f(t), \quad (70)$$

где $f(t)$ — произвольная функция t . Не теряя общности, мы можем положить $f(t) = 0$, потому что этого же можно добиться переопределением временной координаты t , заменив $\exp(f(t))dt$ на dt . В результате имеем

$$v = -\mu_2, \quad (71)$$

причем и v , и μ_2 — функции только r . Тот факт, что компоненты метрики в силу уравнений поля не зависят от t , хотя это требование специально и не налагалось, — еще одно следствие теоремы Биркгофа: *пространство-время вне сферической массы с необходимостью статично*.

Рассмотрим уравнение

$$-R_{33} = R_{1313} + R_{2323} + R_{4343} = 0. \quad (72)$$

Подставляя из уравнений (64) выражения для тензора Римана, находим

$$-2\mu_2 r^{-1} e^{-2\mu_2} = r^{-2} (1 - e^{-2\mu_2}). \quad (73)$$

Это уравнение имеет следующее решение:

$$e^{-2\mu_2} = 1 - 2M/r (=e^{2\nu}), \quad (74)$$

где M — постоянная интегрирования. Нетрудно проверить, что решение (74) обеспечивает равенство нулю и остальных компонент тензора Риччи.

Заметим, наконец, что ненулевые компоненты тензора Римана для метрики, определяемой решением (74), равны

$$\begin{aligned} -R_{(1)(3)(1)(3)} &= R_{(2)(0)(2)(0)} = 2Mr^{-3}, & R_{(1)(2)(1)(2)} &= \\ &= R_{(2)(3)(2)(3)} = -R_{(1)(0)(1)(0)} = -R_{(3)(0)(3)(0)} = Mr^{-3}. \end{aligned} \quad (75)$$

Индексы взяты в скобки для того, чтобы подчеркнуть тетрадную природу этих компонент в локально инерциальной системе отсчета, заданной базисными векторами (65). Все ненулевые компоненты тензора Римана расходятся при $r = 0$ — это проявление сингулярности пространства-времени Шварцшильда при $r = 0$.

Для получения ковариантных компонент тензора в той же системе координат, в которой записана метрика Шварцшильда, мы должны подвергнуть тетрадные компоненты (75) по каждому индексу преобразованию (65). В результате получим

$$\begin{aligned} R_{0101} &= -Mr^{-1} e^{2\nu} \sin^2 \theta, & R_{0303} &= -Mr^{-1} e^{2\nu}, \\ R_{1212} &= +Mr^{-1} e^{-2\nu} \sin^2 \theta, & R_{2323} &= +Mr^{-1} e^{-2\nu}, \\ R_{1313} &= -2Mr \sin^2 \theta, & R_{0202} &= 2Mr^{-3}. \end{aligned} \quad (76)$$

Напомним, что

$$e^{2\nu} = 1 - 2M/r \quad (77)$$

и что индексы 0, 1, 2 и 3 обозначают соответственно координаты t , φ , r и θ .

19. Геодезические в пространстве-времени Шварцшильда: времениподобные геодезические

В гл. 1 (§ 6, а, уравнение (203)) мы показали, что уравнения геодезических в пространстве-времени с линейным элементом

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (78)$$

могут быть получены из лагранжиана

$$2\mathcal{L} = g_{ij} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau}, \quad (79)$$

где τ — некоторый аффинный параметр на геодезической. В случае времениподобных геодезических τ можно отождествить с собственным временем s частицы, движущейся по геодезической.

В случае пространства-времени Шварцшильда лагранжиан принимает вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(1 - 2M/r) \dot{t}^2 - \dot{r}^2 / (1 - 2M/r) - r^2 \dot{\theta}^2 - (r^2 \sin^2 \theta) \dot{\phi}^2], \quad (80)$$

где точка означает дифференцирование по τ . Соответствующие канонические импульсы равны

$$\begin{aligned} p_t &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}, & p_r &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}, \\ p_\phi &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = (r^2 \sin^2 \theta) \dot{\phi}, & p_\theta &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = r^2 \dot{\theta}. \end{aligned} \quad (81)$$

Результирующий гамильтониан имеет следующий вид:

$$\mathcal{H} = p_t \dot{t} - (p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} + p_\phi \dot{\phi}) - \mathcal{L} = \mathcal{L}. \quad (82)$$

Равенство гамильтониана лагранжиану свидетельствует о том, что в задаче не участвует «потенциальная энергия»: полная энергия равна «кинетической энергии», как явствует из выражения (79) для лагранжиана. В силу той же причины гамильтониан и лагранжиан постоянны:

$$\mathcal{H} = \mathcal{L} = \text{const}. \quad (83)$$

Меня масштаб аффинного параметра τ , можно сделать $2\mathcal{L} = +1$ для времениподобных геодезических. Для изотропных геодезических $\mathcal{L}$ равно нулю. (Пространственноподобные геодезические мы рассматривать не будем.)

Другие интегралы движения получаются из уравнений

$$\frac{dp_t}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{dp_\phi}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (84)$$

Имеем

$$p_t = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} = \text{const} = E, \quad (85)$$

$$p_\phi = r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\tau} = \text{const}. \quad (86)$$

Кроме того, из уравнения движения

$$\frac{dp_\theta}{d\tau} = \frac{d(r^2 \dot{\theta})}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = (r^2 \sin \theta \cos \theta) \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 \quad (87)$$

следует, что если мы выберем начало отсчета угла θ так, чтобы $\theta = \pi/2$, когда $\dot{\theta} = 0$, то $\dot{\theta}$ также будет равно нулю, т. е. θ в этом

случае остается постоянным в процессе движения. Отсюда заключаем, что геодезическая лежит в одной плоскости, в качестве которой можно выбрать экваториальную плоскость $\theta = \pi/2$. Уравнение (86) теперь принимает вид

$$p_\varphi = r^2 d\varphi/d\tau = \text{const} = L, \quad (88)$$

где L — момент количества движения относительно оси, перпендикулярной экваториальной плоскости.

Подставляя в лагранжиан значения $\dot{t}$ и $\dot{\varphi}$ из уравнений (85) и (88), получаем

$$\frac{E^2}{1 - 2M/r} - \frac{\dot{r}^2}{1 - 2M/r} - \frac{L^2}{r^2} = 2\mathcal{L} = +1 \quad (89a)$$

для времениподобных геодезических и

$$\frac{E^2}{1 - 2M/r} - \frac{\dot{r}^2}{1 - 2M/r} - \frac{L^2}{r^2} = 2\mathcal{L} = 0 \quad (89b)$$

для изотропных геодезических.

В данном параграфе мы будем рассматривать только времениподобные геодезические (изотропным геодезическим посвящен следующий параграф). В случае же времениподобных геодезических уравнения (88) и (89) могут быть переписаны следующим образом:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) = E^2, \quad (90)$$

$$d\varphi/d\tau = L/r^2. \quad (91)$$

Рассматривая r как функцию φ (вместо τ), получаем уравнение

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = (E^2 - 1)(r^2/L)^2 + (2M/L^2)r^3 - r^2 + 2Mr. \quad (92)$$

Полагая, как это обычно делается при анализе кеплеровских орбит в ньютоновской теории,

$$u = r^{-1}, \quad (93)$$

получим основное уравнение для дальнейшего исследования:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = 2Mu^3 - u^2 + (2M/L^2)u - (1 - E^2)/L^2. \quad (94)$$

Это уравнение определяет геометрию геодезических в экваториальной плоскости. Если известно решение уравнения (94) для $u(\varphi)$, то окончательное решение получается в квадратурах прямым интегрированием уравнений

$$d\tau/d\varphi = 1/(Lu^2), \quad dt/d\varphi = E/[Lu^2(1 - 2Mu)]. \quad (95)$$

а. Радиальные геодезические. Радиальные геодезические с нулевым моментом количества движения иллюстрируют, несмотря на свою простоту, важные свойства пространства-времени (о ко-

торых упоминалось в § 17). Уравнения этих геодезических имеют следующий вид (ср. с уравнениями (85) и (90)):

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = 2Mr/r - (1 - E^2), \quad \frac{dt}{d\tau} = E/(1 - 2M/r). \quad (96)$$

Рассмотрим траектории частиц, которые начинают движение из состояния покоя на некотором конечном расстоянии r_i и падают к центру. Начальное расстояние связано с постоянной интегрирования E соотношением ($r = r_i$ при $\dot{r} = 0$)

$$r_i = 2M/(1 - E^2). \quad (97)$$

Уравнения движения проще всего проинтегрировать, введя переменную η :

$$\begin{aligned} r = M(1 - E^2)^{-1}(1 + \cos \eta) &= 2M(1 - E^2)^{-1} \cos^2(\eta/2) = \\ &= r_i \cos^2(\eta/2). \end{aligned} \quad (98)$$

Ясно, что $\eta = 0$, когда $r = r_i$,

$$\eta = \eta_H = 2 \arcsin E, \quad (99a)$$

когда геодезическая пересекает горизонт при $r = 2M$, и

$$\eta = \pi, \quad (99b)$$

когда геодезическая достигает сингулярности при $r = 0$.

Перепишем уравнения, которые следует проинтегрировать, с помощью переменной η :

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = (1 - E^2) \operatorname{tg}^2(\eta/2), \quad \frac{dt}{d\tau} = \frac{E \cos^2(\eta/2)}{\cos^2 \eta/2 - \cos^2 \eta_H/2}. \quad (100)$$

Сюда следует добавить уравнение

$$dr/d\eta = -r_i \sin(\eta/2) \cos(\eta/2). \quad (101)$$

Поскольку мы рассматриваем падающие частицы,

$$dr/d\tau = -(1 - E^2)^{1/2} \operatorname{tg}(\eta/2) = -(2M/r_i)^{1/2} \operatorname{tg}(\eta/2). \quad (102)$$

Из уравнений (101) и (102) получаем

$$d\tau/d\eta = (r_i^3/2M)^{1/2} \cos^2(\eta/2) = (r_i^3/8M)^{1/2} (1 + \cos \eta), \quad (103)$$

$$\tau = (r_i^3/8M)^{1/2} (\eta + \sin \eta), \quad (104)$$

где мы предположили, что $\tau = 0$ в начальной точке $\eta = 0$. Из уравнения (104) следует, что частица пересекает горизонт, а затем достигает сингулярности за конечное собственное время

$$\tau_H = (r_i^3/8M)^{1/2} (\eta_H + \sin \eta_H), \quad \tau_0 = (r_i^3/8M)^{1/2} \pi. \quad (105)$$

Совершенно другая ситуация возникает, как мы сейчас увидим, если рассматривать уравнение траектории в координатном вре-

мени t . Для определения t нужно проинтегрировать уравнение (см. (100) и (103))

$$\frac{dt}{d\eta} = E \left(\frac{r_i^3}{2M} \right)^{1/2} \frac{\cos^4(\eta/2)}{\cos^2(\eta/2) - \cos^2(\eta_H/2)}. \quad (106)$$

Интегрируя, получаем

$$t = E (r_i^3/2M)^{1/2} [^{1/2}(\eta + \sin \eta) + (1 - E^2)\eta] + \\ + 2M \ln \left[\frac{\operatorname{tg}(\eta_H/2) + \operatorname{tg}(\eta/2)}{\operatorname{tg}(\eta_H/2) - \operatorname{tg}(\eta/2)} \right], \quad (107)$$

откуда следует, что

$$t \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow \eta_H = 0, \quad (108)$$

в отличие от поведения собственного времени частицы τ при подходе к горизонту. Этот пример иллюстрирует тот факт (который

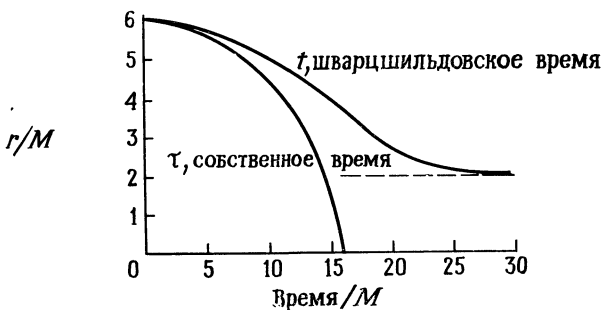


Рис. 3. Изменение координатного времени t и собственного времени τ при движении пробной частицы вдоль времениподобной радиальной геодезической из состояния покоя при $r = 6M$ по направлению к сингулярности.

мы установили в § 17, в, из общих соображений), что, с точки зрения наблюдателя, покоящегося «на бесконечности», частице, движущейся по времениподобной траектории, потребуется бесконечное время для достижения горизонта, даже если собственное время при этом будет конечным. После пересечения горизонта частица достигнет сингулярности также за конечное время. На рис. 3 построены графики решений (104) и (108), иллюстрирующие эти факты.

б. Орбиты, ограниченные в пространстве. Орбиты в экваториальной плоскости, описываемые уравнением (94), удобно разбить на два класса, соответствующие $E^2 < 1$ и $E^2 \geq 1$. Орбиты первого класса характеризуются отрицательной энергией (без учета энергии покоя), а орбиты второго класса — положительной (или нулевой) энергией (исключая энергию покоя). Следует ожидать, что это различие в энергиях определяет, ограничены ли орбиты в пространстве или не ограничены (т. е. ограничена ли сверху величина r вдоль геодезической). В данном разделе мы будем

рассматривать только ограниченные орбиты ($E^2 < 1$). Эти орбиты описываются уравнением

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = f(u), \quad (109)$$

$$f(u) = 2Mu^3 - u^2 + (2M/L^2)u - (1 - E^2)/L^2 \quad (E^2 < 1). \quad (110)$$

Ясно, что геометрия геодезических определяется расположением корней уравнения $f(u) = 0$. Поскольку $f(u)$ — кубическая функция u , существуют две возможности: 1) все корни

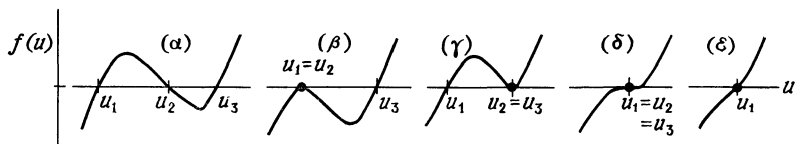


Рис. 4. Расположение корней кубического уравнения $f(u) = 0$ при $E^2 < 1$. Различные случаи (α), (β) и т. д. подробно рассмотрены в тексте.

действительны, 2) один из них действительный, а два других — комплексно сопряженные друг другу. Обозначая через u_1 , u_2 и u_3 корни кубического уравнения $f(u) = 0$, имеем

$$u_1 u_2 u_3 = (1 - E^2)/2ML^2, \quad (111)$$

$$u_1 + u_2 + u_3 = 1/2M. \quad (112)$$

В силу сделанного предположения $(1 - E^2) > 0$ уравнение $f(u) = 0$ должно всегда иметь положительный действительный корень. Поскольку $f < 0$ при $u = 0$ и $f(u) \rightarrow \pm\infty$ при $u \rightarrow \pm\infty$, мы должны рассмотреть пять случаев, показанных на рис. 4*.

Случай (α). Каждая пара значений E и L , допускающая существование трех действительных различных корней $0 < u_1 < u_2 < u_3$, определяет две различные орбиты с $u_1 \leq u \leq u_2$ и $u \geq u_3$ соответственно. Первая из этих орбит осциллирует между двумя экстремальными значениями $r (=u_1^{-1}$ и $u_2^{-1})$, а вторая, начинаясь с определенного расстояния в апоцентре ($=u_3^{-1}$), падает на сингулярность $r = 0$ ($u \rightarrow \infty$). Назовем эти два вида орбит орбитами *первого* и *второго рода* соответственно. Орбиты первого рода — это релятивистский аналог орбит Кеплера, и в ньютоновском пределе они переходят в орбиты Кеплера. Орбитам второго рода в ньютоновской теории аналога нет. Тем не менее мы увидим, что орбиты и первого, и второго рода (а также и неограниченные орбиты, как будет показано ниже в § 19, в) удобнее всего параметризовать с помощью эксцентриситета $e \geq 0$ и фо-

* Комбинируя соотношения (111) и (112) с соотношением

$$u_1 u_2 + u_2 u_3 + u_3 u_1 = 1/L^2,$$

можно показать, что при $E^2 < 1$ не может быть двух отрицательных действительных корней (помимо положительного корня). На рис. 4 поэтому представлены все разрешенные ситуации.

кального параметра l точно так же, как и ньютоновские орбиты.

Случай (β). В этом случае орбита первого рода — устойчивая круговая орбита ($e = 0$), а орбита второго рода падает на сингулярность в центре (хотя и ее эксцентриситет равен нулю).

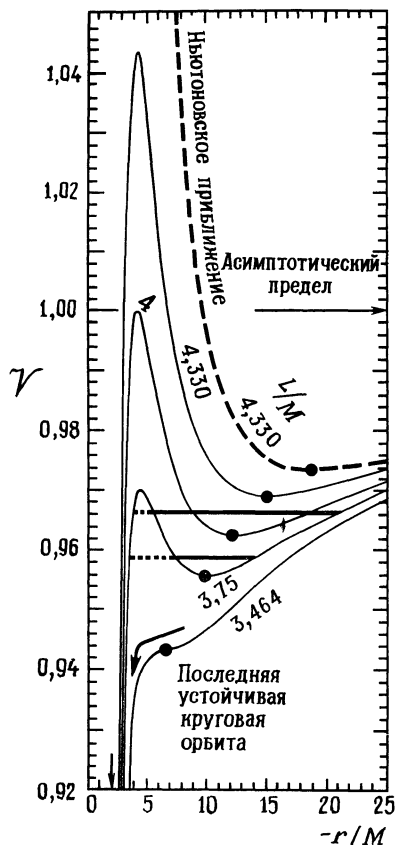


Рис. 5. Эффективные потенциалы для времениподобных геодезических (см. уравнение (113)). Минимумы потенциалов соответствуют устойчивым круговым орбитам, а максимумы — неустойчивым круговым орбитам. Последняя устойчивая круговая орбита соответствует точке перегиба.

являющаяся интегралом движения,

$$\mathcal{V} = (1 - 2M/r) (1 + L^2/r^2) \quad (113)$$

есть «потенциальная энергия». На рис. 5 показаны кривые зависимости потенциальной энергии от радиуса для некоторых типичных значений параметров E и L .

Случай (γ). В этом случае орбита первого рода, начинаясь с определенного расстояния u_1^{-1} в апоцентре, асимптотически по спирали приближается к окружности радиуса u_3^{-1} , совершая при этом бесконечное число оборотов. Орбита второго рода в этом случае является в некотором смысле продолжением орбиты первого рода, раскручиваясь по спирали, начиная с той же самой окружности (приближаясь при этом к центру и в конце концов падая на сингулярность).

Случай (δ). В этом случае все три корня совпадают, и принципиальное отличие от случая (ε), рассматриваемого ниже, в том, что уравнения допускают еще и неустойчивую круговую орбиту радиуса $u_1^{-1} (= u_2^{-1} = u_3^{-1})$.

Случай (ε). В этом случае имеется только один класс орбит: все орбиты начинаются на определенном расстоянии в апоцентре и оканчиваются на сингулярности. Удобнее всего параметризовать их чисто мнимым эксцентриситетом, во всем же остальном они подобны радиальным геодезическим. Такую же классификацию орбит (случаи (α)—(ε)) получим, рассматривая уравнение (90) как закон сохранения энергии, где E^2 — «полная энергия», являю-

ся $\dot{r}^2$ — «кинетическая энергия», а

I. Орбиты первого рода. Мы видели, рассматривая случаи $(\alpha) - (\delta)$, что существование орбит первого рода требует, чтобы уравнение $f(u) = 0$ имело три положительных действительных корня, которые будем записывать следующим образом:

$$u_1 = (1 - e)/l, \quad u_2 = (1 + e)/l, \quad u_3 = 1/2M - 2/l, \quad (114)$$

где фокальный параметр l — некоторая положительная постоянная, а эксцентриситет e меньше единицы, чтобы выполнялось неравенство $u_1 > 0$, как следует из условия $E^2 < 1$:

$$0 \leq e < 1 \quad (E^2 < 1). \quad (115)$$

(Значение u_3 получено из условия (112).)

Важно отметить, что принятое нами упорядочение $u_1 \leq u_2 \leq u_3$ приводит к ограничениям на возможные значения l и e :

$$1/2M - 2/l \leq (1 + e)/l, \quad l \geq 2M(3 + e). \quad (116)$$

Вводя обозначение

$$\mu = M/l, \quad (117)$$

получаем важное неравенство

$$\mu \leq 1/2(3 + e), \quad \text{или} \quad 1 - 6\mu - 2\mu e \geq 0. \quad (118)$$

Записывая $f(u)$ в виде

$$f(u) = 2M[u - (1 - e)/l][u - (1 + e)/l](u - 1/2M + 2/l) \quad (119)$$

и сравнивая с определением (110), приходим к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} M/L^2 &= (1/l^2)[l - M(3 + e^2)], \\ (1 - E^2)/L^2 &\equiv (1/l^3)(l - 4M)(1 - e^2), \end{aligned} \quad (120)$$

которые можно выразить через μ в виде

$$\begin{aligned} 1/L^2 &= (1/lM)[1 - \mu(3 + e^2)], \\ (1 - E^2)/L^2 &= (1/l^2)(1 - 4\mu)(1 - e^2). \end{aligned} \quad (121)$$

Из этих соотношений следует, что

$$\mu < (3 + e^2)^{-1}, \quad \mu < 1/4. \quad (122)$$

Справедливость этих неравенств легко проверить, используя неравенство (118).

Отметим, что из уравнения (121) можно получить альтернативное выражение для E^2 :

$$(E/L)^2 = (1/lM)[(2\mu - 1)^2 - 4\mu^2 e^2]. \quad (123)$$

Вернемся теперь к уравнению (109) и сделаем подстановку

$$u = (1/l)(1 + e \cos \chi), \quad (124)$$

где χ — новая переменная, которую, следуя Дарвину, можно назвать «релятивистской аномалией». В апоцентре

$$u = (1 - e)/l, \quad \chi = \pi, \quad (125a)$$

а в перицентре

$$u = (1 + e)/l, \quad \chi = 0. \quad (125б)$$

Нетрудно проверить, что подстановка (124) приводит уравнение (109) к простому виду:

$$\left(\frac{d\chi}{d\varphi}\right)^2 = [1 - 2\mu(3 + e \cos \chi)] = [(1 - 6\mu + 2\mu e) - 4\mu e \cos^2 \chi/2], \quad (126)$$

или

$$\pm \frac{d\chi}{d\varphi} = (1 - 6\mu + 2\mu e)^{1/2} (1 - k^2 \cos^2 \chi/2)^{1/2}, \quad (127)$$

где

$$k^2 = 4\mu e / (1 - 6\mu + 2\mu e). \quad (128)$$

Неравенство (118) гарантирует, что

$$k^2 \leq 1, \quad 1 - 6\mu + 2\mu e > 0. \quad (129)$$

Теперь очевидно, что решение для φ может быть выражено через эллиптический интеграл Якоби:

$$F(\psi, k) = \int_0^\psi (1 - k^2 \sin^2 \gamma)^{-1/2} d\gamma, \quad (130)$$

где

$$\psi = (\pi - \chi)/2. \quad (131)$$

Таким образом, можно записать:

$$\varphi = 2(1 - 6\mu + 2\mu e)^{-1/2} F(1/2\pi - 1/2\chi, k); \quad (132)$$

начало отсчета φ выбрано в апоцентре, где $\chi = \pi$. Перицентр имеет место при $\chi = 0$, когда $\psi = \pi/2$. (Орбиты, вычисленные на основе уравнения (132), показаны на рис. 7а ($a - e$) ниже.)

Интегрированием уравнений (95) заканчивается решение уравнений движения. Записав искомые интегралы в виде

$$\tau = \frac{1}{L} \int \frac{d\varphi}{u^2} = \frac{1}{L} \int \frac{d\varphi}{d\chi} \frac{d\chi}{u^2}, \quad (133)$$

$$t = \frac{E}{L} \int \frac{d\varphi}{d\chi} \frac{d\chi}{u^2(1 - 2Mu)} \quad (134)$$

и используя уравнения (121), (123), (124) и (126), получаем

$$\tau = (l^3/M)^{1/2} [1 - \mu(3 + e^2)]^{1/2} \int_\chi^\pi d\chi (1 + e \cos \chi)^{-2} \times \\ \times [1 - 2\mu(3 + e \cos \chi)]^{-1/2}, \quad (135)$$

$$t = (l^3/M)^{1/2} [(2\mu - 1)^2 - 4\mu^2 e^2]^{1/2} \int_\chi^\pi d\chi [1 + e \cos \chi]^{-2} \times \\ \times [1 - 2\mu(3 + e \cos \chi)]^{-1/2} [1 - 2\mu(1 + e \cos \chi)]^{-1}. \quad (136)$$

Удобно выразить t и τ через ньютоновский период для кеплеровской орбиты с теми же эксцентриситетом и фокальным параметром:

$$T_N = [4\pi^2 l^3 / (1 - e^2)^3 GM]^{1/2}, \quad (137)$$

при этом множители перед интегралами в правых частях уравнений (135) и (136) соответственно равны

$$\begin{aligned} (1/2\pi) T_N (1 - e^2)^{3/2} [1 - \mu (3 + e^2)]^{1/2}, \\ (1/2\pi) T_N (1 - e^2)^{3/2} [(2\mu - 1)^2 - 4\mu^2 e^2]^{1/2}. \end{aligned} \quad (138)$$

(Если T_N задано уравнением (137), то интегралы (135) и (136), записанные через T_N , дают t и τ в секундах. В этом примере с целью сравнения с результатами ньютоновской теории мы отказываемся от принятой до сих пор системы единиц, в которой $c = 1$ и $G = 1$.)

Рассмотрим теперь два специальных случая: случай $e = 0$, когда два корня u_1 и u_2 совпадают (случай (β) на рис. 4), и случай $2\mu (3 + e) = 1$, когда совпадают корни u_2 и u_3 (случай (γ) на рис. 4).

(α) Случай $e = 0$. В этом случае орбита представляет собой окружность радиуса r_c , причем

$$r_c = l, \quad \mu = M/r_c. \quad (139)$$

Уравнения (121) и (123), связывающие орбитальный момент L и энергию E орбиты с параметрами орбиты e и l , теперь дают

$$1/L^2 = (1 - 3M/r_c)/r_c M, \quad (E/L)^2 = (2M/r_c - 1)^2/r_c M. \quad (140)$$

Переписывая первое из этих уравнений в виде

$$r_c^2 - (L^2/M)r_c + 3L^2 = 0, \quad (141)$$

заключаем (это очевидно из рис. 5), что радиус орбиты с нулевым эксцентриситетом есть один из корней этого квадратного уравнения:

$$r_c = (L^2/2M) [1 \pm (1 - 12M^2/L^2)^{1/2}], \quad (142)$$

и, кроме того, круговые орбиты невозможны при

$$L/M < 2\sqrt{3}. \quad (143)$$

При минимально возможном значении $L/M = 2\sqrt{3}$

$$r_c = 6M, \quad E^2 = 8/9. \quad (144)$$

Ясно, что больший из двух корней уравнения (142) (при $L/M > 2\sqrt{3}$) соответствует точке минимума кривой потенциальной энергии $\mathcal{V}(r)$, которая была определена уравнением (113), а меньший корень соответствует максимуму этой кривой. Таким образом, круговая орбита с большим радиусом устойчива, а кру-

говая орбита с меньшим радиусом неустойчива. Радиусы орбит обоих классов могут изменяться в следующих пределах:

$$\begin{aligned} 6M < r_c < \infty & \quad (\text{устойчивая орбита}), \\ 3M \leq r_c \leq 6M & \quad (\text{неустойчивая орбита}). \end{aligned} \quad (144')$$

Из двух орбит с нулевым эксцентриситетом, разрешенных при $L/M > 2\sqrt{3}$, в число орбит первого рода (которые мы сейчас рассматриваем) включаются лишь устойчивые орбиты с большим радиусом (меньшим u).

Периоды одного полного оборота для этих круговых орбит, измеренные в собственном и координатном времени, равны (см. уравнения (136)–(138))

$$\tau_{\text{period}} = T_N [(1 - 3\mu)/(1 - 6\mu)]^{1/2}, \quad t_{\text{period}} = T_N (1 - 6\mu)^{-1/2}. \quad (145)$$

(Заметим, что $t_{\text{period}} \rightarrow \infty$, когда $\mu \rightarrow 1/6$ и $r_c \rightarrow 6M$.)

(β) *Случай* $2\mu(3 + e) = 1$. В этом случае расстояние в перигеосентре r_p равно

$$r_p = l/(1 + e) = 2M(3 + e)/(1 + e), \quad (146a)$$

а в апоцентре

$$r_{ap} = 2M(3 + e)/(1 - e). \quad (146b)$$

Видно, что расстояние в перигеосентре может меняться лишь в пределах

$$4M \leq r_p < 6M. \quad (147)$$

Кроме того, для этих орбит

$$\begin{aligned} (L/M)^2 &= 4(3 + e)^2/(3 - e)(1 + e), \\ 1 - E^2 &= (1 - e^2)/(9 - e^2). \end{aligned} \quad (148)$$

В рассмотренном случае модуль k эллиптического интеграла, через который записывается решение (132), становится равным 1, и поэтому удобно вернуться назад к уравнению (126), которое дает

$$\left(\frac{d\chi}{d\varphi}\right)^2 = 4\mu e \sin^2(\chi/2), \quad \frac{d\chi}{d\varphi} = -2(\mu e)^{1/2} \sin(\chi/2), \quad (149)$$

где отрицательный знак выбран для того, чтобы угол φ возрастал (от нуля) при движении от апоцентра к перигеосентру, когда χ убывает от π — значения в апоцентре до 0 — значения в перигеосентре. Уравнение (149) при этих условиях имеет следующее решение:

$$\varphi = -(\mu e)^{-1/2} \ln \operatorname{tg}(\chi/4) \quad (\varphi = 0 \text{ при } \chi = \pi). \quad (150)$$

Уравнение (150) показывает, что $\varphi \rightarrow \infty$, когда $\chi \rightarrow 0$ и достигается перигеосентр. Другими словами, орбита приближается к окружности радиуса r_p асимптотически по спирали (в направлении против часовой стрелки), совершая бесконечное число витков. Ниже мы покажем, что эта орбита «продолжается» внутрь

окружности как орбита второго рода, которая затем заканчивается на сингулярности (см. рис. 7а (з)).

(γ) *Постньютоновское приближение.* Релятивистские поправки первого порядка к кеплеровским орбитам ньютоновской теории могут быть легко выведены из уравнения (126), если заметить, что при обычных условиях величина $\mu = M/l$ очень мала: она равна отношению радиуса Шварцшильда (~ 2 км) к большой оси орбиты планеты или системы двойной звезды ($\sim 10^6 - 10^8$ км). Разлагая затем уравнение (126) в ряд вплоть до членов первого порядка по μ , получаем

$$-d\varphi = d\chi (1 + 3\mu + \mu e \cos \chi), \quad (151)$$

$$-\varphi = (1 + 3\mu) \chi + \mu e \sin \chi + \text{const.} \quad (152)$$

Из уравнения (152) следует, что изменение угла φ за полный оборот (при изменении χ на 2π) равно $2(1 + 3\mu)\pi$. Следовательно, опережение $\Delta\varphi$ в перигеентре за один оборот равно

$$\Delta\varphi = 6\pi M/l = 6\pi M/a (1 - e^2), \quad (153)$$

где a — большая полуось кеплеровского эллипса. Этот стандартный результат был впервые получен Эйнштейном.

II. Орбиты второго рода. Как уже говорилось, орбиты второго рода начинаются на расстоянии u_3^{-1} в апоцентре, а кончаются на сингулярности $r = 0$. Важно отметить, что вследствие соотношений $u_1 + u_2 + u_3 = 1/2M$ и $u_1 + u_2 > 0$ имеет место неравенство $u_3 < 1/2M$, и, следовательно, все орбиты начинаются вне горизонта.

Решения для этих орбит получаем, если вместо (124) сделаем следующую подстановку:

$$u = (1/2M - 2/l) + [1/2M - (3 + e)/l] \operatorname{tg}^2 (\xi/2). \quad (154)$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} u &= u_3 = 1/2M - 2/l, \text{ когда } \xi = 0, \\ u &\rightarrow \infty, \text{ когда } \xi \rightarrow \pi. \end{aligned} \quad (155)$$

Далее находим, что уравнение (109) сводится теперь к уравнению

$$\left(\frac{d\xi}{d\varphi} \right)^2 = (1 - 6\mu + 2\mu e) (1 - k^2 \sin^2 (\xi/2)), \quad (156)$$

причем k^2 определяется так же, как и для орбит первого рода. Уравнение для φ , следовательно, может быть выражено через тот же самый эллиптический интеграл (130). Таким образом, можно записать (ср. уравнение (132))

$$\varphi = 2 (1 - 6\mu + 2\mu e)^{-1/2} F (\xi/2, k). \quad (157)$$

В апоцентре $\xi = 0$ и $\varphi = 0$, а в сингулярности $\xi \rightarrow \pi$ и φ принимает конечное значение

$$\varphi_0 = 2 (1 - 6\mu + 2\mu e)^{-1/2} K (k), \quad (158)$$

где $K(k)$ обозначает полный эллиптический интеграл

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \gamma)^{-1/2} d\gamma. \quad (159)$$

Примеры орбит, вычисленных на основе уравнения (157), показаны на рис. 7а (а) — (в).

Выражения для собственного времени τ и координатного времени t могут быть получены интегрированием уравнений

$$\frac{d\tau}{d\xi} = \frac{1}{Lu^2} \frac{d\varphi}{d\xi}, \quad \frac{dt}{d\xi} = \frac{E}{Lu^2(1 - 2Mu)} \frac{d\varphi}{d\xi}. \quad (160)$$

Появление множителя $(1 - 2Mu)^{-1}$ в правой части уравнения для $dt/d\xi$ показывает, что интеграл для t расходится, когда $u \rightarrow 1/2M$. Та часть этих орбит, которая соответствует $r < 2M$, следовательно, недоступна наблюдателю, находящемуся все время вне горизонта, и этот факт отражает то же явление, что и в случае радиальных геодезических, и подтверждает результаты, полученные из общих соображений в § 17, б и в. Важно отметить также, что все орбиты, пересекающие горизонт, с необходимостью оканчиваются в центре — в этом проявляется сингулярный характер пространства-времени в точке $r = 0$.

Снова рассмотрим два специальных случая $e = 0$ и $2\mu(3 + e) = 1$.

(а) *Случай $e = 0$.* В этом случае (поскольку k^2 также равно нулю) уравнение (156) интегрируется, и в результате получаем

$$\xi = (1 - 6\mu)^{1/2} (\varphi - \varphi_0), \quad (161)$$

где φ_0 — постоянная интегрирования. Соответствующее решение для u имеет вид

$$u = 1/l + (1/2M - 3/l) \sec^2 [1/2 (1 - 6\mu)^{1/2} (\varphi - \varphi_0)]. \quad (162)$$

Эта орбита с «нулевым эксцентриситетом» не является окружностью! Начинаясь с расстояния u_3^{-1} в апоцентре (причем $3M \leq u_3^{-1} \leq 6M$), когда $\varphi = \varphi_0$, она заканчивается в сингулярности $r = 0$ при

$$\varphi - \varphi_0 = \pi/(1 - 6\mu)^{1/2} \quad (163)$$

после одного или более оборотов в зависимости от близости μ к значению $1/6$. Окружность радиуса u_3^{-1} является огибающей семейства этих решений, так что круговая орбита, предсказываемая для этого радиуса, является особым решением уравнения движения (см. рис. 7а (д)).

Случай $e = 0$ и $\mu = 1/6$ необходимо исследовать отдельно. В этом случае все три корня уравнения $f(u) = 0$ совпадают (случай (д) на рис. 4) и $u_1 = u_2 = 1/6M$. Как мы только что показали, круговая орбита радиуса $6M$ является особым решением уравнений движения. Радиус $6M$ — это нижняя граница области

существования устойчивых круговых орбит (см. уравнения (144') и (146)). Общее решение в этом случае может быть получено из уравнения

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = 2M(u - 1/6M)^3. \quad (164)$$

Это решение имеет следующий вид:

$$u = 1/6M + 2/M (\varphi - \varphi_0)^2. \quad (165)$$

Орбита приближается к окружности радиуса $6M$ асимптотически, закручиваясь по спирали вокруг нее бесконечное число раз (см. рис. 7а (е)).

(β) *Случай* $2\mu(3+e) = 1$. Мы не можем получить решение в этом случае, просто полагая $\mu = 1/2(3+e)$ при выводе уравнения (156), поскольку коэффициент при $\text{tg}^2 \xi/2$ в первоначальной подстановке (154) равен теперь нулю. Поэтому мы должны исследовать этот случай с самого начала.

Когда $2\mu(3+e) = 1$, корни уравнения $f(u) = 0$ равны

$$\begin{aligned} u_1 &= (1-e)/l, \quad u_2 = u_3 = 1/4M - (1-e)/2l = \\ &= (1+e)/l. \end{aligned} \quad (166)$$

Если сделать подстановку

$$u = (1/l)(1+e+2e \text{tg}^2(\xi/2)), \quad (167)$$

то

$$\begin{aligned} u &= u_2 = u_3 = (1+e)/l, \text{ когда } \xi = 0, \\ u &\rightarrow \infty, \text{ когда } \xi = \pi, \end{aligned} \quad (168)$$

и уравнение (109) принимает вид

$$\left(\frac{d\xi}{d\varphi}\right)^2 = 4\mu e \sin^2(\xi/2). \quad (169)$$

Это в точности то же уравнение, которое мы получили, исследуя орбиты первого рода при подобном же условии $u_2 = u_3$ (см. уравнение (149)). И, как и прежде, запишем

$$\varphi = -(\mu e)^{-1/2} \ln(\text{tg}(\xi/4)). \quad (170)$$

Вдоль этой орбиты $\varphi = 0$ при $\xi = \pi$ и $r \rightarrow 0$, и $\varphi \rightarrow \infty$ при $\xi \rightarrow 0$ при приближении к апоцентру на расстояние $r = l/(1+e)$. Другими словами, орбита приближается к окружности радиуса $l/(1+e)$ асимптотически, закручиваясь по спирали (в направлении против часовой стрелки) бесконечное число раз. Такое же поведение и у орбит первого рода, но есть одно важное различие: окружность радиуса $l/(1+e)$ является перицентром для орбит первого рода, но апоцентром для орбит второго рода. Если же мы хотим рассматривать орбиты первого и второго рода при $u_2 = u_3$ как продолжение друг друга, то должны предположить, что орбита первого рода сначала накручивается на окружность радиуса $l/(1+e)$, делая бесконечное число витков, а затем по-

падает внутрь и в конце концов заканчивается на сингулярности (см. рис. 7а (з)).

III. Орбиты с мнимым эксцентриситетом. Наконец, рассмотрим случай, когда уравнение $f(u) = 0$ имеет только один действительный корень (обязательно положительный для ограниченных орбит, рассматриваемых в настоящем параграфе) и пару комплексно сопряженных корней (случай (ε) на рис. 4). Очевидно, что орбиты этого типа, начинаясь на некотором конечном расстоянии в апоцентре, заканчиваются на сингулярности, хотя и могут успеть совершить один или несколько оборотов. Мы будем характеризовать эти орбиты чисто мнимым эксцентриситетом ie ($e > 0$), а корни уравнения $f(u) = 0$ при этом обозначим следующим образом:

$$u_1 = 1/2M - 2/l, \quad u_2 = (1 + ie)/l, \quad u_3 = (1 - ie)/l. \quad (171)$$

Ясно, что при таких определениях можно получить необходимые уравнения, заменяя в уравнениях (121) и (123) e^2 на $-e^2$. Получаем

$$\begin{aligned} 1/L^2 &= (1/lM) [1 - \mu (3 - e^2)], \\ (1 - E^2)/L^2 &= (1/l^2) (1 - 4\mu) (1 + e^2), \\ E^2/L^2 &= (1/lM) [(2\mu - 1)^2 + 4\mu^2 e^2]. \end{aligned} \quad (172)$$

Последнее из этих уравнений показывает, что l следует брать положительным. Более того, поскольку мы рассматриваем ограниченные орбиты ($(1 - E^2) > 0$), $\mu < 1/4$, а это неравенство гарантирует выполнение неравенства

$$1 - 3\mu + \mu e^2 > 0. \quad (173)$$

Видно также, что никаких ограничений сверху на e^2 мы наложить не можем.

В предположении (171) уравнение, которое мы должны исследовать, принимает вид

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = 2M \left(u - \frac{1}{2M} + \frac{2}{l}\right) \left[\left(u - \frac{1}{l}\right)^2 + \frac{e^2}{l^2}\right]. \quad (174)$$

Сделаем теперь подстановку

$$u = (1 + e \operatorname{tg} \xi/2)/l. \quad (175)$$

Поскольку u изменяется в пределах

$$1/2M - 2/l \leq u < \infty, \quad (176)$$

соответствующая область изменения переменной ξ есть

$$\xi_0 \leq \xi < \pi, \quad (177)$$

$$\operatorname{tg} (\xi_0/2) = -(6\mu - 1)/2\mu e, \quad (178)$$

или, что эквивалентно,

$$\sin (\xi_0/2) = -(6\mu - 1)/\delta, \quad \cos (\xi_0/2) = 2\mu e/\delta, \quad (179)$$

$$\delta = [(6\mu - 1)^2 + 4\mu^2 e^2]^{1/2}. \quad (180)$$

Подставляя (175) в уравнение (174), получаем

$$d\xi/d\varphi = \pm \sqrt{2} [(6\mu - 1) + 2\mu e \sin \xi + (6\mu - 1) \cos \xi]^{1/2}. \quad (181)$$

Из теории эллиптических интегралов следует, что решение для φ может быть записано через эллиптический интеграл Якоби. Имеем

$$\pm \varphi = \delta^{-1/2} \int_0^\psi (1 - k^2 \sin^2 \gamma)^{-1/2} d\gamma, \quad (182)$$

где

$$k^2 = (1/2\delta) (\delta + 6\mu - 1), \quad (183)$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \psi &= (\delta + 6\mu - 1)^{-1} \{ \delta - 2\mu e \sin \xi - (6\mu - 1) \cos \xi \} = \\ &= (\delta + 6\mu - 1)^{-1} \{ \delta + 6\mu - 1 - 2 [2\mu e \sin (\xi/2) + \\ &\quad + (6\mu - 1) \cos (\xi/2)] \cos (\xi/2) \}. \end{aligned} \quad (184)$$

Из уравнений (179) и (184) следует, что

$$\begin{aligned} \sin^2 \psi &= 1 \quad \text{и в апоцентре, когда } \xi = \xi_0, \\ &\quad \text{и в сингулярности, когда } \xi = \pi. \end{aligned} \quad (185)$$

Кроме того,

$$\sin^2 \psi = 0, \quad \text{когда } \xi = \arctg 2\mu e / (6\mu - 1). \quad (186)$$

Таким образом, в области изменения ξ (см. (177)) переменная ψ проходит через нуль. Следовательно, при изменении ξ от ξ_0 до π

$$-\pi/2 \leq \psi \leq +\pi/2. \quad (187)$$

Соответственно этому можно записать

$$\varphi = \delta^{-1/2} \{ K(k) - F(\psi, k) \}, \quad (188)$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл, а $F(\psi, k)$ обозначает (как обычно) неполный интеграл Якоби. При записи решения для φ в виде (188) мы предположили, что $\varphi = 0$ в сингулярности, где $\xi = \pi$ и $\psi = \pi/2$. Значение φ в апоцентре, где $\xi = \xi_0$ и $\psi = -\pi/2$, равно

$$\varphi_{ap} = 2K(k)/\delta^{1/2}. \quad (189)$$

Примеры орбит, вычисленные на основе уравнения (188), показаны на рис. 7а (ж) и (з).

На этом мы закончим обсуждение ограниченных орбит и перейдем к исследованию неограниченных орбит с $E^2 \geq 1$.

в. Неограниченные орбиты ($E^2 > 1$). В случае $E^2 > 1$ свободный член в кубической функции $f(u)$ положителен. Следовательно, уравнение $f(u) = 0$ должно допускать отрицательный корень. На рис. 6 показаны различные случаи, отвечающие различному расположению корней (число случаев меньше, чем для ограниченных орбит). [Снова можно показать, что все три корня

не могут быть действительными и отрицательными (см. сноску на стр. 111)].

Во всех случаях, когда существуют три действительных корня, два из которых положительны (различны или одинаковы), мы продолжаем различать орбиты двух родов: для орбит первого рода интервал изменения u есть $0 < u \leq u_2$ (эти орбиты аналогичны гиперболическим орбитам ньютоновской теории), а орбитам второго рода соответствуют $u \geq u_3$ (по существу, эти орбиты не отличаются от ограниченных орбит второго рода). Когда $u_2 = u_3$,

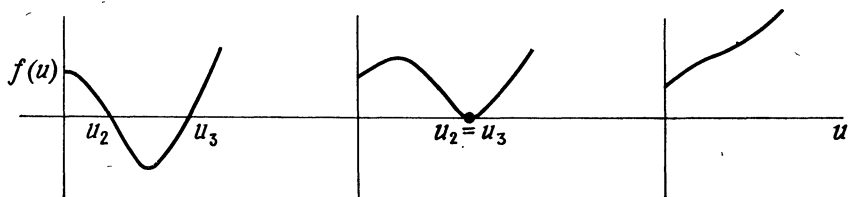


Рис. 6. Расположение корней кубического уравнения $f(u) = 0$, когда $E^2 > 1$.

орбиты первого и второго рода асимптотически приближаются к окружности радиуса $u_3^{-1} (= u_2^{-1})$ с противоположных сторон, закручиваясь по спирали бесконечное число раз. И наконец, когда уравнение $f(u) = 0$ допускает пару комплексно сопряженных корней (не считая отрицательного действительного корня), орбиты можно характеризовать мнимым эксцентриситетом, причем отличие от случая, рассмотренного в предыдущем разделе, состоит только в том, что теперь орбиты неограниченны!

1. Орбиты первого и второго рода. Пусть все три корня действительны. Мы запишем их через эксцентриситет e , как и в случае ограниченных орбит, только теперь $e \geq 1$:

$$\begin{aligned} u_1 &= -(e - 1)/l, & u_2 &= (e + 1)/l, \\ u_3 &= 1/2M - 2/l & (e \geq 1). \end{aligned} \quad (190)$$

Неравенство (118)

$$1 - 6\mu - 2\mu e \geq 0 \quad (191)$$

остается справедливым, поскольку оно является следствием упорядочения корней: $u_1 < u_2 \leq u_3$. Соотношения (121) также остаются справедливыми с той же оговоркой: теперь $e \geq 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} 1/L^2 &= (1/lM) [1 - \mu(3 + e^2)], \\ (E^2 - 1)/L^2 &= (1/l^2) (1 - 4\mu)(e^2 - 1). \end{aligned} \quad (192)$$

Поскольку $L^2 > 0$ и (по предположению) $E^2 - 1 \geq 0$, то

$$1 - \mu(3 + e^2) > 0, \quad (193)$$

$$\mu \leq 1/4. \quad (194)$$

Неравенство $\mu \leq 1/4$ является следствием как неравенства (191), так и неравенства (193). Интересно, что неравенство (191) является следствием неравенства (193), когда $e < 3$; и наоборот, неравенство (193) следует из (191), когда $e \geq 3$. В этой связи отметим, что в случае $2\mu(3+e) = 1$ (т. е. когда корни u_2 и u_3 совпадают) соотношения (192) принимают вид (ср. с уравнением (148)):

$$\begin{aligned}(L/M)^2 &= 4(3+e^2)/(3-e)(e+1), \\ E^2 - 1 &= (e^2 - 1)/(9 - e^2).\end{aligned}\quad (195)$$

Соответственно в этом специальном случае

$$1 \leq e < 3, \quad (196)$$

и расстояния в перицентре могут лежать только в интервале (ср. с интервалом (147) для ограниченных орбит)

$$3M < r_p \leq 4M. \quad (197)$$

Отметим также, что, поскольку орбиты первого рода (а также орбиты с мнимым эксцентриситетом) «приходят из бесконечности», можно характеризовать их прицельным параметром D и скоростью на бесконечности V , которые следующим образом связаны с L и E :

$$D^2 = L^2/V^2 = L^2 E^2/(E^2 - 1) \quad [E^2 = (1 - V^2)^{-1}]. \quad (198)$$

Решение уравнений движения для орбит первого и второго рода начнем с уже знакомой подстановки:

$$u = (1 + e \cos \chi)/l. \quad (199)$$

Однако теперь $e \geq 1$ и

$$u = 0, \text{ когда } \chi = \arccos(-e^{-1}) = \chi_\infty. \quad (200)$$

Как и прежде, перицентру соответствует $\chi = 0$, причем χ изменяется в пределах

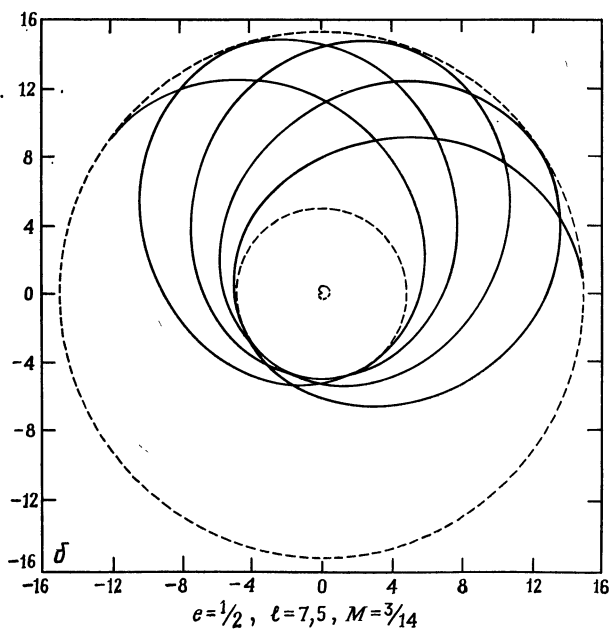
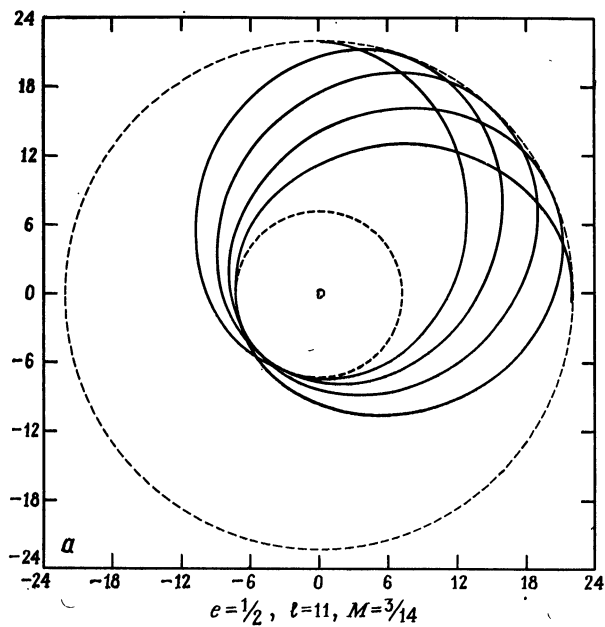
$$0 \leq \chi < \chi_\infty = \arccos(-e^{-1}). \quad (201)$$

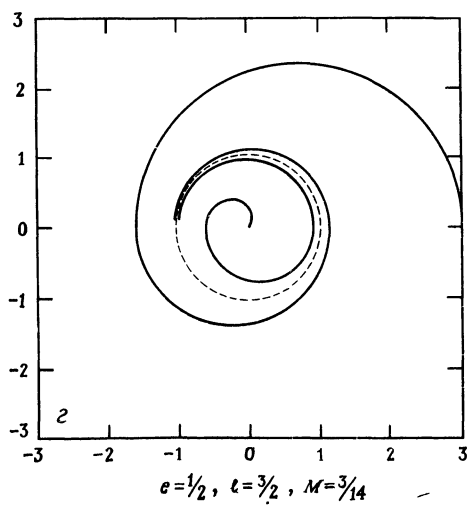
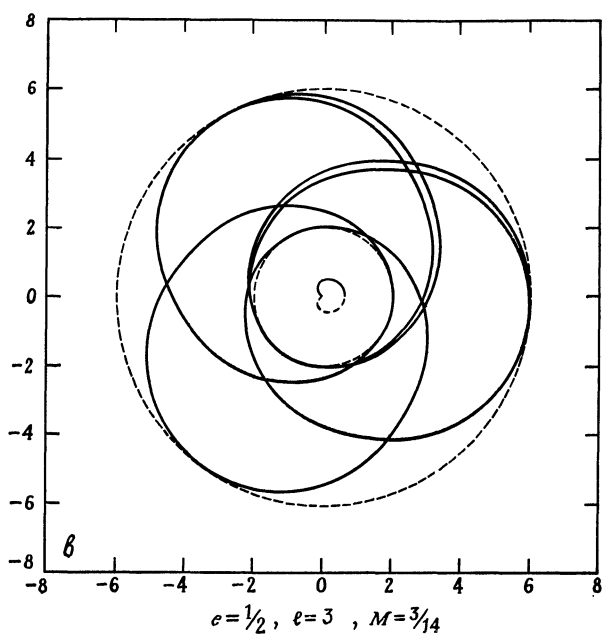
Дальнейший процесс решения протекает без изменений по сравнению с соответствующим случаем ограниченных орбит. Решение для χ снова может быть записано через эллиптический интеграл (130) с тем же модулем k . Помня об ограниченности области изменения χ , можно теперь записать решение для φ в виде (ср. с уравнением (132))

$$\varphi = 2(1 - 6\mu + 2\mu e)^{-1/2} [K(k) - F(1/2\pi - 1/2\chi, k)]. \quad (202)$$

Здесь мы выбрали $\varphi = 0$ в перицентре, когда $\chi = 0$. Траектория начинается на бесконечности вдоль направления

$$\begin{aligned}\varphi = \varphi_\infty = 2(1 - 6\mu + 2\mu e)^{-1/2} [K(k) - F(\psi_\infty, k)] \\ \psi_\infty = 1/2 \arccos e^{-1}.\end{aligned}\quad (203)$$





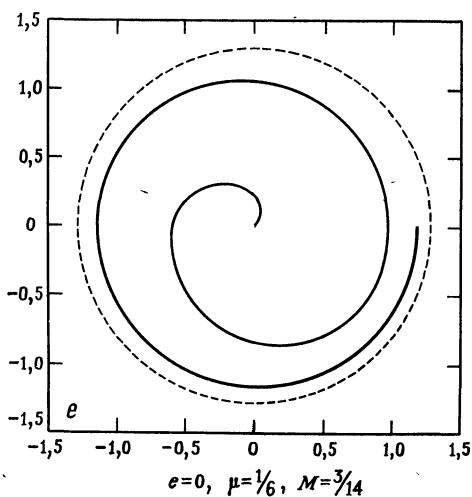
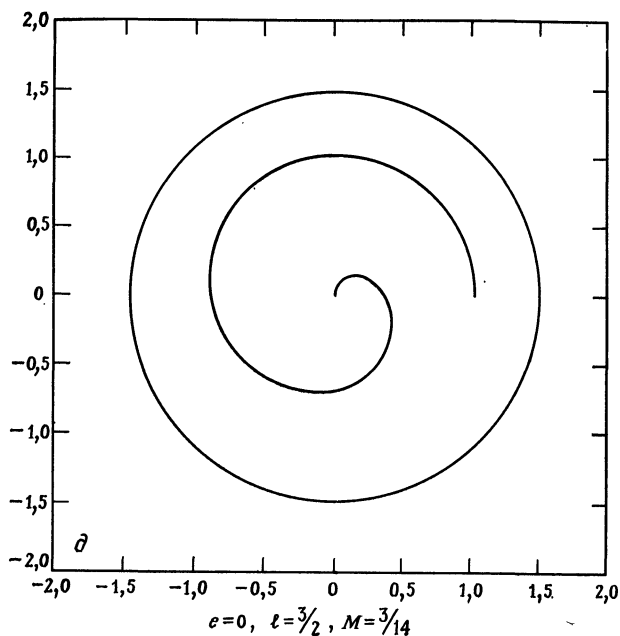
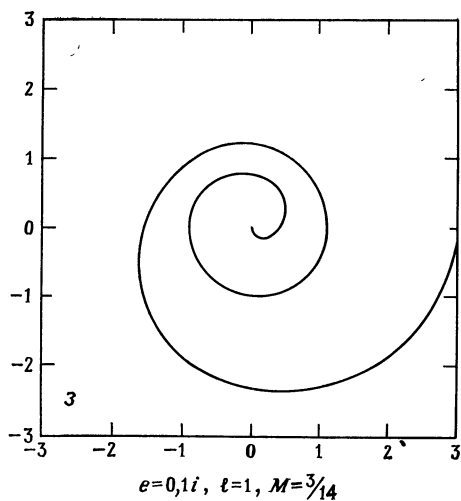
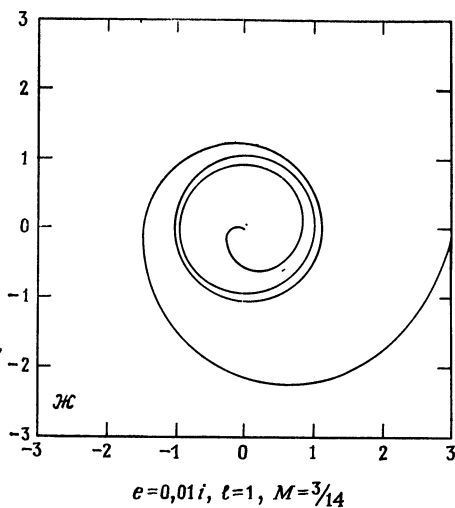


Рис. 7а. Различные классы времениподобных геодезических для пробных частиц для которой орбиты первого и второго рода переходят друг в друга $[2\mu(3+e)$ — последняя неустойчивая круговая орбита, когда орбита второго рода по мнимыми эксцентриситетами. (На всех этих графиках $M = 3/14$ в том масштабе,



с $E^2 < 1$. a — $в$ — геодезические первого и второго рода; $г$ — пример траектории, $e) = 1]$; $д$ — пример круговой орбиты и связанной с ней орбиты второго рода; спирали уходит от орбиты первого рода; $ж, з$ — ограниченные орбиты с $l = 1$ и который принят на соответствующей оси координат.)

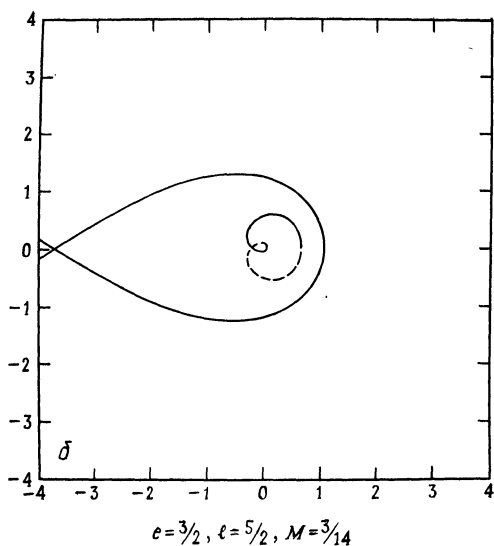
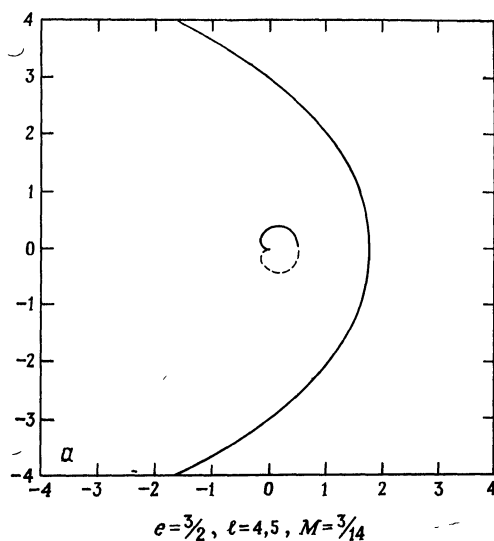
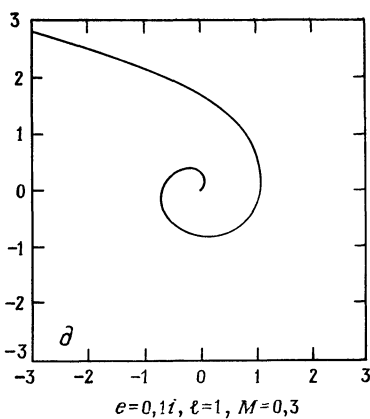
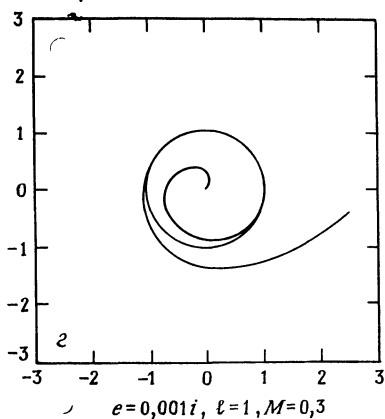
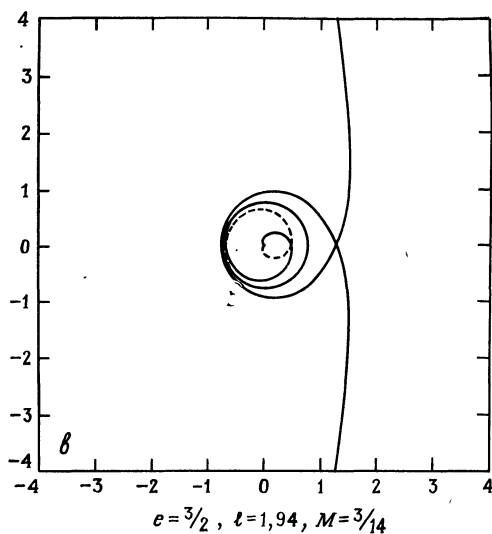


Рис. 76. Различные классы времениподобных геодезических для пробных частиц различными фокальными параметрами ($M = 3/14$ в масштабе, который принят и мнимыми эксцентриситетами ($M = 0,3$ в масштабе, принятом на соответствующую



с $E^2 > 1$. a — $в$ — орбиты первого и второго рода с эксцентриситетом $e = 3/2$ и на соответствующей оси координат), z , d — неограниченные орбиты с $l = 1$ щей оси координат).

Предельный случай, когда корни u_2 и u_3 совпадают, описывается, как и для ограниченных орбит, уравнением (150) (разумеется, снова с ограничением области изменения χ). Так же как и ограниченные орбиты, неограниченные орбиты приближаются асимптотически к окружности радиуса r_p , накручиваясь по спирали бесконечное число раз.

Исследование орбит второго рода ничем, кроме условия $e \geq 1$, не отличается от исследования соответствующих ограниченных орбит.

II. Орбиты с мнимым эксцентриситетом. Выше мы показали, что ограниченные орбиты, заканчивающиеся на сингулярности, лучше всего характеризуются мнимым эксцентриситетом. Аналогично неограниченные орбиты, заканчивающиеся на сингулярности, также удобно описывать мнимыми эксцентриситетами, и предыдущий анализ переносится на случай неограниченных орбит лишь с незначительными изменениями, учитывающими тот факт, что теперь орбиты начинаются на бесконечности, а не на конечном расстоянии в апоцентре.

Соотношения (172) для неограниченных орбит принимают вид

$$\begin{aligned} 1/L^2 &= (1/lM) [1 - \mu (3 - e^2)], \\ (E^2 - 1)/L^2 &= (1/l^2) (4\mu - 1) (1 + e^2). \end{aligned} \quad (204)$$

Соответственно мы должны потребовать, чтобы

$$\mu \geq 1/4, \quad 1 - 3\mu + \mu e^2 > 0. \quad (205)$$

Если $1/3 \geq \mu \geq 1/4$, то второе неравенство не накладывает никаких ограничений на величину e^2 , но когда $\mu > 1/3$, то

$$e^2 > 3 - 1/\mu \quad (\mu > 1/3). \quad (206)$$

Решение для этих орбит, как и выше, получается в результате подстановки (175). Однако вследствие требования $\mu \geq 1/4$ область изменения ξ должна обрываться на значении ξ_∞ (не доходя до значения ξ_0 , определяемого уравнением (179)). Значение ξ_∞ определяется из уравнения

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^{1/2} \xi_\infty &= -e^{-1}, \\ \sin^{1/2} \xi_\infty &= -(1 + e^2)^{-1/2}, \quad \cos^{1/2} \xi_\infty = (1 + e^2)^{-1/2} e, \end{aligned} \quad (207)$$

поскольку $u = 0$ при $\xi = \xi_\infty$, и u становится отрицательным, когда $\xi < \xi_\infty$. Таким образом, если $\xi \rightarrow \xi_\infty + 0$, то $u \rightarrow 0$ и $r \rightarrow \infty$. Но верхний предел для ξ , равный π , остается неизменным, поэтому

$$\xi_\infty < \xi \leq \pi. \quad (208)$$

Несмотря на эти изменения, решение для φ снова может быть записано в следующем виде (ср. с уравнениями (183), (184) и (188):

$$\varphi = \delta^{-1/2} \{K(k) - F(\psi, k)\}. \quad (209)$$

Отсчет φ (как и в прежнем решении для подобного случая) начинается на сингулярности (где $\xi = \pi$ и $\psi = \pi/2$), но нижний предел для ψ (обозначим его ψ_∞), когда орбита начинается на бесконечности, находится из уравнения (184), если в качестве аргументов функций $\sin \xi/2$ и $\cos \xi/2$ подставить значение ξ_∞ , которое в свою очередь находится из уравнения (207). Имеем

$$\sin^2 \psi_\infty = (\delta + 6\mu - 1)^{-1} [\delta + 6\mu - 1 - 2e^2(4\mu - 1)/(e^2 + 1)]. \quad (210)$$

(Заметим, что при $\mu > 1/4$ правая часть уравнения (210) меньше единицы, причем она равна единице, если $\mu = 1/4$, и тогда $\psi_\infty = -\pi/2$, как и в случае ограниченных орбит.)

Ряд примеров для различных классов неограниченных орбит показан на рис. 76.

На этом мы закончим исследование времениподобных геодезических в пространстве-времени Шварцшильда.

20. Геодезические в пространстве-времени Шварцшильда: изотропные геодезические

Мы уже отмечали в § 19, что для изотропных геодезических лагранжиан должен быть равен нулю. Поэтому для изотропных геодезических вместо уравнения (89) напомним следующее уравнение:

$$\frac{E^2}{1 - 2M/r} - \frac{\dot{r}^2}{1 - 2M/r} - \frac{L^2}{r^2} = 0, \quad (211)$$

которое удобно переписать в виде

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = E^2. \quad (212)$$

Это уравнение следует рассматривать совместно с уравнениями для координатного времени t и азимутального угла φ :

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} = E, \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{L}{r^2}. \quad (213)$$

Следуя по проторенному пути, будем считать r функцией φ и, выбрав в качестве независимой переменной $u = 1/r$, получим уравнение (ср. с уравнением (94))

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = 2Mu^3 - u^2 + 1/D^2 = f(u), \quad (214)$$

где

$$D = L/E \quad (215)$$

есть прицельный параметр. Заметим, что в отличие от прежнего определения в функции $f(u)$ отсутствует линейный по u член и, кроме того, свободный член всегда положителен.

а. *Радиальные геодезические.* Начнем с исследования радиальных изотропных геодезических, описываемых уравнениями

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm E, \quad \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} = E. \quad (216)$$

Комбинируя их, получаем

$$\frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right). \quad (217)$$

Интегрирование этого последнего уравнения дает

$$t = \pm r_* + \text{const}_{\pm}, \quad (218)$$

$$r_* = r + 2M \ln(r/2M - 1). \quad (219)$$

Переменная r_* играет чрезвычайно важную роль в дальнейших исследованиях. Обычно она определяется уравнением (ср. с уравнением (74))

$$\frac{d}{dr_*} = \frac{\Delta}{r^2} \frac{d}{dr}, \quad (220)$$

где

$$\Delta = r^2 - 2Mr = r^2 e^{2\nu} \quad (221)$$

есть *функция горизонта*. Функция r_* имеет следующие свойства:

$$r_* \rightarrow -\infty, \text{ когда } r \rightarrow 2M + 0, \quad (222)$$

$$r_* \rightarrow r, \text{ когда } r \rightarrow +\infty.$$

Значение переменной r_* определяется именно этими свойствами: при изменении r_* от $-\infty$ до $+\infty$ полностью исчерпывается область пространства-времени, доступная наблюдателю вне горизонта.

Уравнение (218) интересно сравнить с уравнением

$$r = \pm E\tau + \text{const}_{\pm}, \quad (223)$$

связывающим r с собственным временем τ . Уравнения (218) и (223) показывают, что наблюдатели, движущиеся вдоль радиальных геодезических, пересекают горизонт, даже не замечая этого, при конечном значении собственного времени, тогда как требуется бесконечное координатное время, чтобы только приблизиться к горизонту, а преодоление этого препятствия находится вне поля зрения наблюдателя вне горизонта. Все это видно на рис. 8, на котором изображены световые конусы, образованные радиальными геодезическими, описываемыми уравнением (217).

Выпишем касательные векторы к радиальным геодезическим:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{r^2}{\Delta} E, \quad \frac{dr}{d\tau} = \pm E, \quad \frac{d\theta}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = 0. \quad (224)$$

Ниже, в § 21, мы покажем, что эти изотропные векторы являются основой для построения изотропной тетрады, необходимой при

описании пространства-времени Шварцшильда в формализме Ньюмена — Пенроуза.

б. Критические орбиты. Вернемся к общему уравнению (214) и рассмотрим сначала все возможные случаи расположения корней кубического уравнения

$$f(u) = 2Mu^3 - u^2 + D^{-2} = 0. \quad (225)$$

Сумма и произведение корней u_1 , u_2 и u_3 равны

$$u_1 + u_2 + u_3 = 1/2M, \quad u_1 u_2 u_3 = -1/2MD^2. \quad (226)$$

Ясно, что уравнение $f(u) = 0$ должно иметь отрицательный действительный корень, а два других корня могут быть или действительными

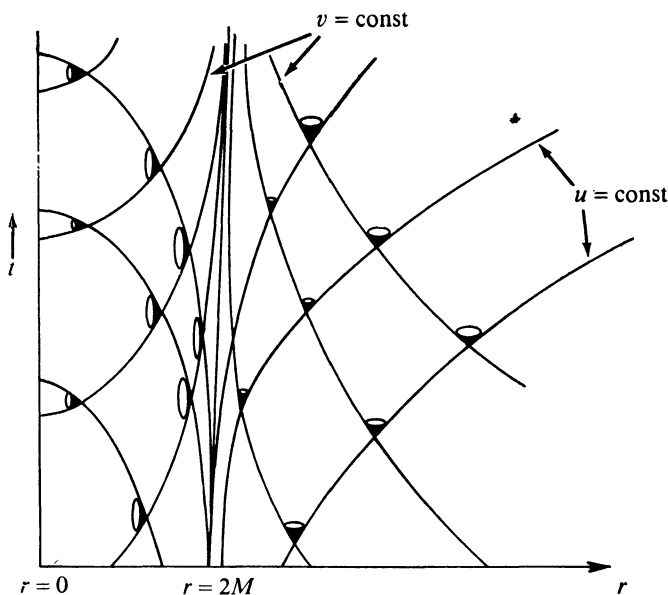


Рис. 8. Падающие и уходящие радиальные изотропные геодезические в шварцшильдовых координатах.

тельными (различными или одинаковыми), или составлять пару комплексно сопряженных корней. Таким образом, мы должны рассмотреть те же варианты, что и для случая неограниченных времениподобных геодезических. В классификации изотропных геодезических определяющую роль играет условие совпадения двух положительных корней *. По этой причине мы сначала рассмотрим этот критический случай.

* Невозможность существования трех действительных отрицательных корней следует из соотношения $u_1 + u_2 + u_3 = 1/2M > 0$.

Условие существования двух одинаковых корней получим, дифференцируя уравнение (225) и приравнявая производную нулю:

$$f'(u) = 6Mu^2 - 2u = 0. \quad (227)$$

Это уравнение допускает корень $u = (3M)^{-1}$, который будет одновременно корнем (двойным корнем) и уравнения (225), если

$$D^2 = 27M^2, \text{ или } D = 3\sqrt{3}M. \quad (228)$$

Из второго из уравнений (226) получаем значение корней уравнения $f(u) = 0$ в интересующем нас случае:

$$u_1 = -1/6M, \quad u_2 = u_3 = 1/3M, \quad (229)$$

причем $D = 3\sqrt{3}M$. Более того, при таком значении D производная $du/d\varphi$ становится равной нулю при $u = (3M)^{-1}$. Следовательно, *круговая орбита радиуса $3M$ является изотропной геодезической*. Однако эта круговая орбита не может быть устойчивой. Ее место в семействе изотропных геодезических мы уясним, рассмотрев уравнение (214) в случае совпадения двух корней:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = 2M\left(u + \frac{1}{6M}\right)\left(u - \frac{1}{3M}\right)^2. \quad (230)$$

Нетрудно проверить, что оно удовлетворяется подстановкой

$$u = -(1/6M) + (1/2M) \operatorname{th}^2[(\varphi - \varphi_0)/2], \quad (231)$$

где φ_0 — постоянная интегрирования. Если выбрать φ_0 так, чтобы

$$\operatorname{th}^2(\varphi_0/2) = 1/3, \quad (232)$$

то

$$u = 0 \quad \text{и} \quad r \rightarrow \infty, \quad \text{когда} \quad \varphi = 0. \quad (233)$$

Заметим также, что

$$u = 1/3M, \quad \text{когда} \quad \varphi \rightarrow \infty. \quad (234)$$

Таким образом, изотропная геодезическая начинается на бесконечности с прицельным параметром $D = 3\sqrt{3}M$ и приближается асимптотически к окружности радиуса $r = 3M$, закручиваясь вокруг нее по спирали.

Очевидно, должна существовать и «орбита второго рода», связанная с орбитой (231), которая, начинаясь на сингулярности, подходит асимптотически к той же окружности $r = 3M$ с другой стороны, закручиваясь по спирали. Такая орбита может быть получена подстановкой

$$u = 1/3M + (1/2M) \operatorname{tg}^2(\xi/2) \quad (235)$$

в то же самое уравнение (230). Уравнение при этом приводится к виду

$$\left(\frac{d\xi}{d\varphi}\right)^2 = \sin^2(\xi/2). \quad (236)$$

Решения уравнения (236) отличаются друг от друга началом отсчета угла φ . Мы выберем следующее решение:

$$\varphi = 2 \ln |\operatorname{tg}(\xi/4)|, \text{ или } \operatorname{tg}(\xi/4) = e^{\varphi/2}. \quad (237)$$

Подставляя его в уравнение (235), получим

$$u = 1/3M + 2e^{\varphi}/M(e^{\varphi} - 1)^2. \quad (238)$$

Вдоль этой орбиты

$$\begin{aligned} u &\rightarrow \infty \text{ и } r \rightarrow 0, \text{ когда } \varphi \rightarrow 0, \\ u &\rightarrow (3M)^{-1}, \text{ когда } \varphi \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (239)$$

Именно это свойство мы и ожидали получить. Как и ранее в подобном случае, решение (239), если сменить знак φ на обратный, можно рассматривать как «продолжение» решения (231).

На рис. 9 показаны возможные типы изотропных геодезических.

1. Конус избегания. В каждой точке мы можем построить конус избегания, образующими которого служат световые лучи, описываемые решением (231) уравнения (230) и проходящие через эту точку. Из общих соображений (ниже, в п. 2, мы покажем это аналитически) ясно, что световые лучи, проходящие внутри этого конуса, должны с необходимостью пересекать горизонт и попадать в сингулярность.

Если через ψ обозначить половинный угол раствора такого конуса (раскрытого внутрь на больших расстояниях), то

$$\operatorname{ctg} \psi = + \frac{1}{r} \frac{d\tilde{r}}{d\varphi}, \quad (240)$$

где

$$d\tilde{r} = (1 - 2M/r)^{-1/2} dr \quad (241)$$

есть элемент собственной длины вдоль образующих конуса. Таким образом,

$$\operatorname{ctg} \psi = + \frac{1}{r(1 - 2M/r)^{1/2}} \frac{dr}{d\varphi} = - \frac{1}{u(1 - 2Mu)^{1/2}} \frac{du}{d\varphi}, \quad (242)$$

где $u = 1/r$. В уравнение (242) мы можем подставить вместо $du/d\varphi$ соответствующее выражение (230). Получаем

$$\operatorname{ctg} \psi = - (r/2M - 1)^{-1/2} (1 - r/3M)(1 + r/6M)^{1/2}, \quad (243)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{(r/2M - 1)^{1/2}}{(r/3M - 1)(r/6M + 1)^{1/2}}. \quad (244)$$

Из последнего уравнения следует, что

$$\begin{aligned} \psi &= 3\sqrt{3}M/r \text{ при } r \rightarrow \infty, \\ \psi &= \pi/2 \text{ при } r = 3M, \quad \psi = \pi \text{ при } r = 2M. \end{aligned} \quad (245)$$

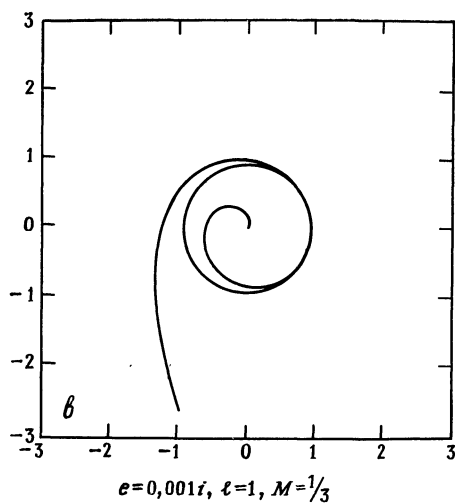
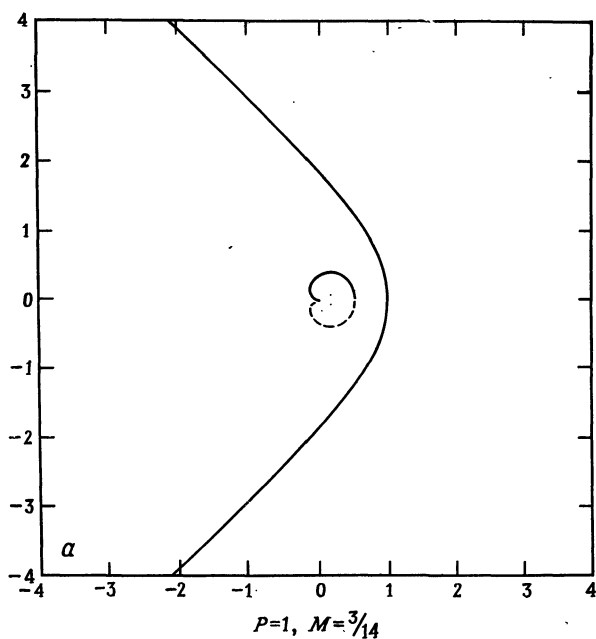
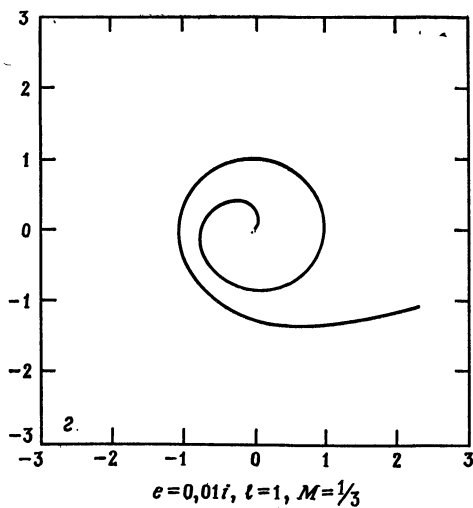
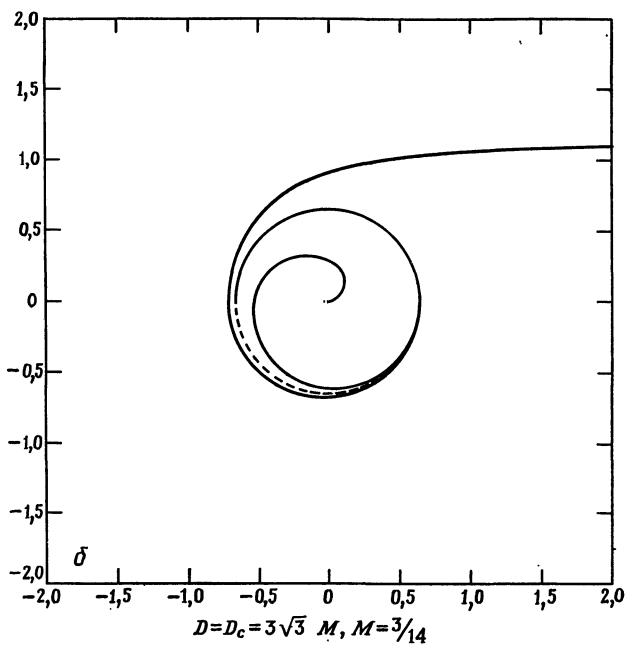


Рис. 9. Различные классы изотропных геодезических в метрике Шварцшильда: *а* — орбиты первого и второго рода; *б* — критическая изотропная геодезическая, для приближения к неустойчивой круговой орбите радиуса $3M$ ($M = 3/14$ в масштабе, $M = 1/3$ в масштабе, задаваемом осями координат).



a — изотропная геодезическая с $P = 1$ (см. уравнение (251)), иллюстрирующая которой орбиты первого и второго рода закручиваются по спирали по мере при-
задаваемом координатными осями); v , z — орбиты с мнимыми эксцентриситетами

Таким образом, угол полураствора конуса избегания равен на больших расстояниях углу, под которым виден диск радиуса $3\sqrt{3}M$. Конус полностью раскрывается при $r = 3M$, при $r < 3M$ конус раскрыт наружу, и он тем уже, чем ближе r к $2M$, а при $r = 2M$ все скрывается из виду (рис. 10).

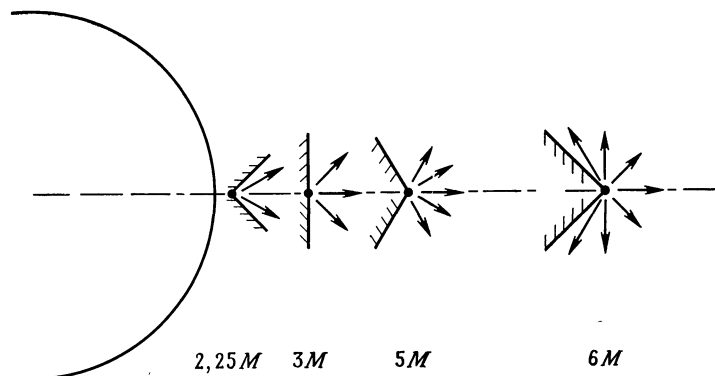


Рис. 10. Конус избегания на различных расстояниях от центра.

в. Геодезические первого рода. Рассмотрим теперь случай, когда все корни кубического уравнения $f(u) = 0$ действительны, а два положительных корня различны. Представим корни в виде

$$u_1 = (P - 2M - Q)/4MP (< 0), \quad u_2 = 1/P, \\ u_3 = (P - 2M + Q)/4MP, \quad (246)$$

где P — расстояние в перигеетре, Q — постоянная, которую мы сейчас определим. Корни представлены так, чтобы их сумма была равна $1/2M$ (см. уравнение (226)). Следует отметить, что нумерация корней в порядке возрастания $u_1 < u_2 < u_3$ приводит к неравенству

$$Q + P - 6M > 0. \quad (247)$$

Подставляя далее в разложение

$$f(u) = 2M(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3) \quad (248)$$

корни u_1 , u_2 и u_3 из (246) и сравнивая результат с выражением (225), получаем соотношения

$$Q^2 = (P - 2M)(P + 6M), \quad (249)$$

$$1/D^2 = (1/8MP^3) [Q^2 - (P - 2M)^2]. \quad (250)$$

Второе уравнение можно упростить, используя первое уравнение:

$$D^2 = P^3/(P - 2M). \quad (251)$$

Комбинируя соотношения (247) и (249), получаем неравенство

$$(P - 2M)(P + 6M) > (P - 6M)^2, \quad (252)$$

которое после упрощения принимает вид

$$P > 3M. \quad (253)$$

Из уравнения (251) получаем теперь новое неравенство

$$D > 3\sqrt{3}M = D_c. \quad (254)$$

Таким образом, прицельные параметры орбит, которые мы сейчас рассматриваем, выше критического значения, приводящего к специальным решениям, полученным выше, в п. б этого параграфа. Кроме того, рассматриваемые орбиты полностью лежат вне окружности радиуса $r = 3M$.

Сделаем следующую подстановку:

$$u - 1/P = -(Q - P + 6M)/8MP (1 + \cos \chi), \quad (255)$$

или, что эквивалентно,

$$\begin{aligned} u + (Q - P + 2M)/4MP = \\ = [(Q - P + 6M)/8MP] (1 - \cos \chi). \end{aligned} \quad (256)$$

При этом

$$u = 1/P, \text{ когда } \chi = \pi,$$

$$u = 0 \text{ и } r \rightarrow \infty, \text{ когда } \sin^2 \chi/2 = \frac{Q - P + 2M}{Q - P + 6M} = \sin^2 (\chi_\infty/2). \quad (257)$$

Подстановка (255) (или (256)) приводит уравнение (214) к виду

$$\left(\frac{d\chi}{d\varphi} \right)^2 = (Q/P) [1 - k^2 \sin^2 (\chi/2)], \quad (258)$$

$$k^2 = (Q - P + 6M)/2Q. \quad (259)$$

Решение для φ , следовательно, выражается через эллиптический интеграл Якоби

$$\varphi = 2 (P/Q)^{1/2} [K(k) - F(\chi/2, k)], \quad (260)$$

в котором начало отсчета выбрано в периферии $\chi = \pi$ (см. уравнения (257)). Асимптотическое значение φ при $r \rightarrow \infty$ равно

$$\varphi_\infty = 2 (P/Q)^{1/2} [K(k) - F(\chi_\infty/2, k)]. \quad (261)$$

Значение χ_∞ определено в уравнении (257) (см. рис. 9, а).

I. Асимптотическое поведение φ_∞ при $P \rightarrow 3M$ и $P/3M \gg 1$. Полезно знать асимптотическое поведение φ_∞ при $P \rightarrow 3M$ и $P/3M \rightarrow \infty$. Найдем эти асимптотики.

Заметим прежде всего, что при $P = 3M$

$$Q = 3M, D = 3\sqrt{3}M, k^2 = 1,$$

$$\sin^2 (\chi_\infty/2) = 1/3, F(\chi_\infty/2, 1) = \frac{1}{2} \ln (\sqrt{3} + 1)/(\sqrt{3} - 1). \quad (262)$$

Далее из уравнений (249), (251) и (259) находим, что если $P = M(3 + \delta)$, то

$$Q = M(3 + \frac{5}{3}\delta), \quad k'^2 = 1 - k^2 = \frac{4}{9}\delta, \quad (263)$$

$$D = D_c + \delta D, \quad \delta D = (\sqrt{3}/2) M \delta^2.$$

Используя также известное асимптотическое соотношение

$$K(k) \rightarrow \ln 4/k' = \ln 6 - \frac{1}{2} \ln \delta \quad (k' \rightarrow 0), \quad (264)$$

получаем

$$\varphi_\infty = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{6^4 \sqrt{3} (\sqrt{3} - 1)^2}{2 (\sqrt{3} + 1)^2} \right] - \frac{1}{2} \ln \frac{\delta D}{M}, \quad (265)$$

или

$$\frac{\delta D}{M} \rightarrow \frac{6^4 \sqrt{3}}{2} \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{(\sqrt{3} + 1)^2} e^{-2\varphi_\infty}. \quad (266)$$

Полагая

$$\varphi_\infty = (\pi + \Theta)/2, \quad (267)$$

приходим к искомому соотношению

$$\frac{\delta D}{M} = 648 \sqrt{3} \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{(\sqrt{3} + 1)^2} e^{-\pi} e^{-\Theta} = 3,4823 e^{-\Theta}. \quad (268)$$

Здесь следует отметить, что в число геодезических, которые отклоняются на угол Θ , определяемый уравнением (268), входят и геодезические, которые отклонились на угол $\Theta + 2n\pi$ ($n = 1, 2, \dots$), — прицельные параметры этих геодезических равны

$$D_n = D_c + 3,4823 M e^{-(\Theta + 2n\pi)}. \quad (269)$$

Подобные же (но более простые) рассуждения показывают, что в случае $P \gg 3M$

$$\Theta \rightarrow 4M/D, \quad D \rightarrow P(1 + M/P). \quad (270)$$

Первое из этих соотношений знаменито тем, что на его основе было получено первое (и впечатляющее) подтверждение общей теории относительности.

г. *Геодезические второго рода.* Решения для изотропных геодезических, характеризующиеся значениями $u_3 \leq u < \infty$, получаются, если воспользоваться подстановкой

$$u = 1/P + [(Q + P - 6M)/4MP] \sec^2(\chi/2) \quad (271)$$

вместо подстановки (255). При этом в апоцентре $u = u_3$, $\chi = 0$, причем

$$u = u_3 = (Q + P - 2M)/4MP, \quad (272)$$

$u \rightarrow \infty$ и $r \rightarrow 0$, когда $\chi = \pi$. Подстановка (271) приводит уравнение (214) к виду (258) с тем же самым значением k^2 , и поэтому можно записать (ср. с уравнением (260))

$$\varphi = 2 (P/Q)^{1/2} F(\chi/2, k), \quad (273)$$

причем теперь начало отсчета φ — в апоцентре.

д. Орбиты с мнимыми эксцентриситетами и прицельными параметрами меньше $3\sqrt{3}M$. Наконец, рассмотрим орбиты в случае, когда уравнение $f(u) = 0$ имеет помимо отрицательного действительного корня пару комплексно сопряженных корней. Запишем, как и прежде в подобном случае, корни через мнимые эксцентриситеты ie (ср. с уравнением (171)). Вычисляя

$$f(u) = 2M(u - 1/2M + 2/l) [(u - 1/l)^2 + e^2/l^2] \quad (274)$$

и сравнивая с уравнением (214), получаем следующие соотношения:

$$l - M(3 - e^2) = 0, \quad 1/2MD^2 = (2/l - 1/2M)(1 + e^2)/l^2, \quad (275)$$

которые удобно переписать через параметр $\mu = M/l$:

$$e^2 = (3\mu - 1)/\mu, \quad D^2/M^2 = 1/\mu(4\mu - 1)^2. \quad (276)$$

Из этих соотношений следуют неравенства

$$\mu > 1/3, \quad D < 3\sqrt{3}M. \quad (277)$$

Таким образом, прицельные параметры этих орбит меньше прицельных параметров орбит первого рода, рассмотренных выше, в п. в настоящего параграфа.

Анализ, проведенный в п. 19, б, III, приложим и теперь, с той лишь разницей, что e^2 и μ уже нельзя считать независимыми параметрами: они связаны соотношением $e^2 = 3 - \mu^{-1}$. Поскольку эти орбиты неограниченны, решение дается тем же уравнением (209), что и в п. 19, в, II. В частности,

$$\varphi_\infty = \delta^{-1/2} \{K(k) - F(\psi_\infty, k)\}, \quad (278)$$

где ψ_∞ (после подстановки вместо e^2 его значения $3 - \mu^{-1}$) равно

$$\sin^2 \psi_\infty = (\delta + 1)/(\delta + 6\mu - 1). \quad (279)$$

Следует помнить, что $\mu > 1/3$ и

$$\delta = (48\mu^2 - 16\mu + 1)^{1/2}. \quad (280)$$

Примеры орбит, вычисленных на основе уравнений (230), (238), (260), (273) и (278), показаны на рис. 9, в, г.

На этом мы заканчиваем исследование геодезических в пространстве-времени Шварцшильда.

21. Описание пространства-времени Шварцшильда в формализме Ньюмена—Пенроуза

Последний параграф этой главы мы посвятим описанию пространства-времени Шварцшильда в формализме Ньюмена—Пенроуза. Построение необходимой для такого описания изотропной тетрады начнем с изотропных векторов (224), представляющих радиальные изотропные геодезические. В качестве действительных изотропных векторов l и n выберем

$$\begin{aligned} l^i &= (l^t, l^r, l^\theta, l^\varphi) = \frac{1}{\Delta} (r^2, +\Delta, 0, 0), \\ n^i &= (n^t, n^r, n^\theta, n^\varphi) = \frac{1}{2r^2} (r^2, -\Delta, 0, 0), \end{aligned} \quad (281)$$

причем вектор, в котором знак перед dr/dt в (224) отрицателен, мы умножим на $\Delta/2r^2$. Выбранные таким образом векторы l и n удовлетворяют условию

$$l \cdot n = 1. \quad (282)$$

Умножение на $\Delta/2r^2$ привело к тому, что параметр вдоль вектора n в отличие от вектора l не является аффинным. Построение тетрады завершим добавлением к векторам l и n комплексного изотропного вектора

$$m^i = (m^t, m^r, m^\theta, m^\varphi) = \frac{1}{r\sqrt{2}} (0, 0, 1, i \operatorname{cosec} \theta), \quad (283)$$

который ортогонален векторам l и n и, кроме того, удовлетворяет нормировочному условию

$$m \cdot \overline{m} = -1. \quad (284)$$

Контравариантные векторы l^i , n^i , m^i и $\overline{m}^i$ составляют требуемый базис. Соответствующие ковариантные векторы равны

$$\begin{aligned} l_i &= \left(1, -\frac{r^2}{\Delta}, 0, 0\right), \\ n_i &= \frac{1}{2r^2} (\Delta, +r^2, 0, 0), \\ m_i &= \frac{1}{r\sqrt{2}} (0, 0, -r^2, -ir^2 \sin \theta). \end{aligned} \quad (285)$$

Спиновые коэффициенты, введенные в гл. 1 (уравнения (286)), удобнее всего вычислить, используя λ -символы (гл. 1, уравнение (266)). Мы уже использовали эти λ -символы (правда, в другом базисе), вычисляя коэффициенты вращения Риччи в § 14. В рассматриваемом сейчас базисе ненулевые λ -символы равны

$$\begin{aligned} \lambda_{122} &= -M/r^2, \quad \lambda_{243} = -(r - 2M)/2r^2, \\ \lambda_{341} &= -1/r, \quad \lambda_{334} = \operatorname{ctg} \theta / r \sqrt{2}, \end{aligned} \quad (286)$$

и для спиновых коэффициентов получаем следующие значения:

$$\kappa = \sigma = \lambda = \nu = \varepsilon = \pi = \tau = 0, \quad (287)$$

$$\rho = 1/r, \quad \beta = -\alpha = \operatorname{ctg} \theta/2 \sqrt{2}r, \\ \mu = -(r - 2M)/2r^2, \quad \gamma = M/2r^2. \quad (288)$$

Равенство нулю спиновых коэффициентов κ , σ , λ и ν свидетельствует о том, что конгруэнции изотропных геодезических l и n являются бессдвиговыми. И действительно, это с очевидностью следует из чисто радиального характера этих изотропных геодезических в сферически симметричном пространстве-времени. На основании теоремы Гольдберга—Сакса можем заключить, что *пространство-время Шварцшильда относится к типу D по классификации Петроза*.

Из теоремы Гольдберга—Сакса следует также, что в выбранном базисе вейлевские скаляры Ψ_0 , Ψ_1 , Ψ_3 и Ψ_4 равны нулю и лишь скаляр Ψ_2 остается не равным нулю. Это можно проверить прямым вычислением, свертывая ненулевые компоненты тензора Римана уравнения (76) с соответствующими векторами l , n , $\bar{m}$ и $\bar{m}$ (см. определения вейлевских скаляров, данные уравнениями (294) гл. 1), напомним также, что тензорные индексы 0, 1, 2 и 3 соответствуют координатным индексам t , ϕ , r и θ соответственно. Равенство нулю скаляров Ψ_0 , Ψ_1 , Ψ_3 и Ψ_4 проверяется легко. Рассмотрим скаляр Ψ_2 :

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= R_{ijkl} l^i m^j n^k \bar{m}^l = \\ &= (r^2/2\Delta) (R_{0j0l} - e^{2\nu} R_{0j2l} - e^{2\nu} R_{2j0l} - e^{4\nu} R_{2j2l}) m^j \bar{m}^l = \\ &= (e^{-2\nu}/4r^2) (R_{0101} \operatorname{cosec}^2 \theta + R_{0303} - e^{4\nu} R_{2323} - e^{4\nu} \operatorname{cosec}^2 \theta). \end{aligned} \quad (289)$$

Подставляя значения компонент тензора Римана из уравнений (76), находим

$$\Psi_2 = -Mr^{-3}. \quad (290)$$

На этом мы закончим описание пространства-времени Шварцшильда в формализме Ньюмена—Пенроуза.

Библиографические замечания

К. Шварцшильд (1873—1916) впервые опубликовал вывод решения, названного впоследствии его именем, в работе

1. Schwarzschild K. Berliner Sitzungsbesichte (Phys. Math. Klasse), 189—196, 3 Feb. 1916 (Mitt. Jan. 13).

См. также

2. Schwarzschild K. Berliner Sitzungsbesichte (Phys. Math. Klasse), 424—434, 23 Mar. 1916 (Mitt. Feb. 24).

Едва ли найдется такая книга по общей теории относительности, в которой так или иначе не обсуждалось бы решение Шварцшильда. Тем не менее драматические обстоятельства, сопутствовавшие этой работе Шварцшильда, вероятно, известны мало. По-видимому, впервые они были описаны в работе

3. Chandrasekhar S. Notes and Records of the Royal Society of London, 30, 249—260, 1976

и пересказаны в книге

4. Sullivan W. Black Holes, Anchor Press, Doubleday Garden City, New York, 1979, pp. 61—62.

Ниже мы кратко повторим историю, изложенную в работе [3].

Статья Шварцшильда, в которой содержался вывод его решения, была доложена А. Эйнштейном 13 января 1916 г. Берлинской академии наук, примерно через два месяца после того, как сам Эйнштейн опубликовал в виде краткого сообщения основные уравнения своей теории. В письме к Шварцшильду от 9 января 1916 г., благодаря Шварцшильда за присылку рукописи, Эйнштейн писал:

«Я прочитал Вашу статью с величайшим интересом. Я не ожидал, что можно так просто сформулировать точное решение задачи. Аналитическое исследование задачи кажется мне великолепным».

Шварцшильд получил свое знаменитое теперь решение при следующих обстоятельствах.

Весной и летом 1915 г. Карл Шварцшильд служил в немецкой армии на восточном фронте в небольшом техническом штабе. Там он заболел неизлечимой болезнью пузырчаткой и умер 11 мая 1916 г. В госпитале Шварцшильд написал две статьи по общей теории относительности (кроме того, он написал фундаментальную работу по теории Бора — Зоммерфельда).

Из многих книг, в которых обсуждается решение Шварцшильда, читателю можно рекомендовать прекрасные изложения в книгах

5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. — М.: Наука, 1967.

6. Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A. Gravitation, W. H. Freeman and Co., San Francisco, 1970. ch. 25, pp. 655—678, ch. 31—32, pp. 819—841. [Имеется перевод: Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер. Гравитация. В 3-х т. — М.: Мир, 1977.]

Рис. 3 и 5 в нашей книге воспроизведены из этой книги Мизнера, Торна и Уилера.

§ 17—18. Широко принято (как, например, в книгах [5, 6]) сначала выводить метрику Шварцшильда в координатах (t, r, θ, φ) , а затем преобразовывать к координатам Эддингтона — Финкельштейна или Крускала, чтобы показать, что сингулярность на сфере Шварцшильда радиуса $R_s = 2GM/c^2$ не истинная, а координатная, и выявить природу сферы Шварцшильда как поверхности горизонта событий. Мы обратили эту процедуру и получили решение сразу в координатах Крускала, а затем для удобства преобразовали его к координатам Шварцшильда. В этом мы следовали Сингу:

7. Synge J. L. Annali di Matematica pura ed Applicata, 98, p. 239—255, 1974.

Как отметил Синг, «если бы сферически симметричная задача первоначально решалась именно так, никому бы и в голову не пришла мысль о сингулярности в этом месте» (т. е. при $r = R_s$). Получилось, однако, так, что основная идея о том, что природа пространства-времени Шварцшильда лучше всего может быть понята в изотропных координатах, была высказана в работах

8. Eddington A. S. Nature, 113, 192, 1924;

9. Finkelstein D. Phys. Rev., 110, 965—967, 1958;

10. Kruskal M. D. Phys. Rev., 110, 1743—1745, 1960.

Более подробные сведения и ссылки см. в книге [6].

§ 19—20. Геодезические в пространстве-времени Шварцшильда много исследовались в постньютоновском приближении (начиная с первых расчетов Эйнштейна) при изучении отклонения луча света и прецессии кеплеровских орбит в гравитационном поле центрального сферически симметричного источника. Интерес к геодезическим как к средству изучения самого пространства-времени появился сравнительно недавно. Изложение этого подхода в книгах [5, 6] достаточно подробное и точное.

Исключительно подробное аналитическое исследование геодезических содержится в ранней работе

11. Hagihara Y. Jap. J. Astron. Geophys., 8, 67—175, 1931.

Однако в подходе Хагихары предмет исследования гораздо сложнее, чем это не-

обходимо. Изложение в нашей книге по существу является завершением программы, начатой в работах

12. *Darwin C. G.* Proc. Roy. Soc. (London) **A**, **249**, 180—194, 1958,

13. *Darwin C. G.* Proc. Roy. Soc. (London) **A**, **263**, 39—50, 1961.

В частности, путем разделения на орбиты первого и второго рода и введения мнимых эксцентриситетов нам удалось рассмотреть все возможные случаи единообразно. Геодезические на рис. 7—9 были рассчитаны и вычерчены Гарретом Туми, которому автор приносит глубокую признательность. Полная библиография работ, посвященных геодезическим в пространстве-времени Шварцшильда, содержится в статье

14. *Sharp N. A.* General Relativity and Gravitation, **10**, 659—670, 1979.

Видимая картина шварцшильдовской черной дыры, окруженной светящимся аккреционным диском, дана в работе

15. *Luminet J. P.* Astron. Astrophys., **75**, 228—235, 1979.

§ 21. Первое применение формализма Ньюмена — Пенроуза к изучению пространства-времени Шварцшильда содержится в работах

16. *Price R. H.* Phys. Rev. D., **5**, 2419—2438, 2439—2454, 1972,

17. *Bardeen J. M.*, *Press W. H.* J. Math. Phys., **14**, 7—19, 1972.

В настоящей главе, однако, мы только приступили к этому исследованию, которому целиком посвящена следующая глава.

ВОЗМУЩЕНИЯ МЕТРИКИ ШВАРЦШИЛЬДА

22. Введение

Настоящая глава посвящена изучению возмущений метрики Шварцшильда, описывающей черную дыру. Предпринимаемое исследование позволит нам, с одной стороны, изучить рассеяние и поглощение падающих на черную дыру гравитационных волн. (Эти процессы, очевидно, интересны для астрофизики.) С другой стороны, оно будет способствовать более глубокому пониманию в наиболее простой и ясной форме свойств пространства и времени в общей теории относительности. Эта вторая сторона проблемы чрезвычайно важна.

В настоящее время существуют два подхода к изучению возмущений метрики пространства-времени. Можно прямо изучать возмущения метрических коэффициентов, допускаемые уравнениями Эйнштейна или уравнениями Эйнштейна—Максвелла и линеаризованные на фоне невозмущенного пространства-времени, или же можно изучать возмущения вейлевских и максвелловских скаляров, удовлетворяющие уравнениям формализма Ньюмена—Пенроуза. Хотя второй подход особенно хорошо подходит для изучения возмущений метрики пространства-времени вокруг черных дыр (поскольку эти метрики алгебраически специальные), мы покажем, что эти два подхода прекрасно дополняют друг друга, и параллельное исследование по двум направлениям позволяет выявить внутренние взаимосвязи, которые в противном случае оказались бы скрытыми.

23. Тензор Риччи и тензор Эйнштейна для нестационарных аксиально-симметричных метрик

Изучая возмущение любой сферически симметричной системы, можно, не теряя общности, ограничиться аксиально-симметричными модами возмущений, потому что моды возмущений, не являющиеся аксиально-симметричными, зависимость которых от азимутального угла φ имеет вид $e^{im\varphi}$ (где m — целое число, положительное или отрицательное), могут быть получены из аксиально-симметричных мод, для которых $m = 0$, подходящим вращением. Причина этого — в отсутствии выделенной оси в сферически симметричном фоновом пространстве-времени. Например,

аксиально-симметричной моде, вычисленной в точке (θ, φ) на сфере относительно некоторой выбранной полярной оси, в другой системе координат, в которой полярная ось ориентирована в направлении (θ', φ') , следует приписать полярный угол Θ , равный

$$\cos \Theta = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos (\varphi' - \varphi). \quad (1)$$

После такого преобразования аксиально-симметричная мода будет равна сумме компонент, которые не являются аксиально-симметричными и могут рассматриваться в качестве различных мод возмущений. Такая процедура возможна вследствие линейности теории возмущений.

На практике вышеупомянутое разложение возникает следующим образом. Уравнения для возмущений сферически симметричной системы допускают разделение всех четырех переменных t, r, θ и φ . Можно ожидать (на зависимость от t и r мы пока не будем обращать внимания), что зависимость аксиально-симметричной моды от угла θ может быть записана через функции Лежандра $P_l(\cos \theta)$. Но при преобразовании (1)

$$P_l(\cos \Theta) = \sum_{m=-l}^{m=+l} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} P_l^m(\cos \theta') e^{-im\varphi'}, \quad (2)$$

где $P_l^m(\cos \theta)$ — присоединенные функции Лежандра. Мы видим, что аксиально-симметричная мода с определенным значением l разлагается в ряд по полной системе из $(2l + 1)$ функций с угловой зависимостью $P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$. Это разложение, разумеется, не затрагивает функции, описывающие радиальную зависимость. По этой же причине радиальные волновые функции электрона в центральном поле не зависят от магнитного квантового числа m и их зависимость от орбитального углового момента определяется только числом l .

В соответствии с предыдущими замечаниями будем рассматривать только зависящие от времени аксиально-симметричные моды возмущений. Поэтому достаточно считать решение Шварцшильда специальным сферически симметричным и статическим случаем более общего решения уравнений поля, линейный элемент которого равен (см. уравнение (38) гл. 2)

$$ds^2 = e^{2\nu} (dt)^2 - e^{2\psi} (d\varphi - \omega dt - q_2 dx^2 - q_3 dx^3)^2 - e^{2\mu_2} (dx^2)^2 - e^{2\mu_3} (dx^3)^2, \quad (3)$$

и получить соответствующие уравнения для возмущений линеаризацией уравнений поля в окрестности решения Шварцшильда. Для этого (а также и для других целей) удобно иметь явные выражения для различных компонент тензора Риччи и тензора Эйнштейна в метрике (3), где $\nu, \psi, \mu_2, \mu_3, \omega, q_2$ и q_3 — функции только t, x^2 и x^3 . Эти компоненты можно получить, свертывая

тензор Римана, компоненты которого (в случае, когда метрические функции зависят также и от угла φ) были выписаны в гл. 2 (уравнения (75)). Результаты этих свертков даны ниже:

$$\begin{aligned} -R_{00} = & e^{-2\nu} [(\psi + \mu_2 + \mu_3)_{,00} + \psi_{,0}(\psi - \nu)_{,0} + \\ & + \mu_{2,0}(\mu_2 - \nu)_{,0} + \mu_{3,0}(\mu_3 - \nu)_{,0}] - \\ & - e^{-2\mu_2} [\nu_{,22} + \nu_{,2}(\psi + \nu - \mu_2 + \mu_3)_{,2}] - \\ & - e^{-2\mu_3} [\nu_{,33} + \nu_{,3}(\psi + \nu + \mu_2 - \mu_3)_{,3}] + \\ & + 1/2 e^{2\psi-2\nu} [e^{-2\mu_2} Q_{20}^2 + e^{-2\mu_3} Q_{30}^2], \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} -R_{11} = & e^{-2\mu_2} [\psi_{,22} + \psi_{,2}(\psi + \nu + \mu_3 - \mu_2)_{,2}] + \\ & + e^{-2\mu_3} [\psi_{,33} + \psi_{,3}(\psi + \nu + \mu_2 - \mu_3)_{,3}] - \\ & - e^{-2\nu} [\psi_{,00} + \psi_{,0}(\psi - \nu + \mu_2 + \mu_3)_{,0}] - \\ & - 1/2 e^{2\psi-2\mu_2-2\mu_3} Q_{23}^2 + 1/2 e^{2\psi-2\nu} [e^{-2\mu_3} Q_{30}^2 + e^{-2\mu_2} Q_{20}^2], \end{aligned} \quad (4б)$$

$$\begin{aligned} -R_{22} = & e^{-2\mu_2} [(\psi + \nu + \mu_3)_{,22} + \psi_{,2}(\psi - \mu_2)_{,2} + \\ & + \mu_{3,2}(\mu_3 - \mu_2)_{,2} + \nu_{,2}(\nu - \mu_2)_{,2}] + \\ & + e^{-2\mu_3} [\mu_{2,33} + \mu_{2,3}(\psi + \mu + \mu_2 - \mu_3)_{,3}] - \\ & - e^{-2\nu} [\mu_{2,00} + \mu_{2,0}(\psi - \nu + \mu_2 + \mu_3)_{,0}] + \\ & + 1/2 e^{2\psi-2\mu_2} [e^{-2\mu_3} Q_{23}^2 - e^{-2\nu} Q_{20}^2], \end{aligned} \quad (4в)$$

$$\begin{aligned} -R_{01} = & 1/2 e^{-2\psi-\mu_2-\mu_3} [(e^{3\psi-\nu-\mu_2+\mu_3} Q_{20})_{,2} + \\ & + (e^{3\psi-\nu-\mu_3+\mu_2} Q_{30})_{,3}], \end{aligned} \quad (4г)$$

$$-R_{12} = 1/2 e^{-2\psi-\nu-\mu_3} [(e^{3\psi+\nu-\mu_2-\mu_3} Q_{32})_{,3} - (e^{3\psi-\nu+\mu_3-\mu_2} Q_{02})_{,0}], \quad (4д)$$

$$\begin{aligned} -R_{02} = & e^{-\mu_2-\nu} [(\psi + \mu_3)_{,20} + \psi_{,2}(\psi - \mu_2)_{,0} + \\ & + \mu_{3,2}(\mu_3 - \mu_2)_{,0} - (\psi + \mu_3)_{,0}\nu_{,2}] - 1/2 e^{2\psi-\nu-2\mu_3-\mu_2} Q_{23} Q_{30}, \end{aligned} \quad (4е)$$

$$\begin{aligned} -R_{23} = & e^{-\mu_2-\mu_3} [(\psi + \nu)_{,23} - (\psi + \nu)_{,2}\mu_{2,3} - \\ & - (\psi + \nu)_{,3}\mu_{2,2} + \psi_{,2}\psi_{,3} + \nu_{,2}\nu_{,3}] - 1/2 e^{2\psi-2\nu-\mu_2-\mu_3} Q_{20} Q_{30}, \end{aligned} \quad (4ж)$$

$$\begin{aligned} -G_{00} = & -e^{-2\mu_2} [(\psi + \mu_3)_{,22} + \psi_{,2}(\psi - \mu_2 + \mu_3)_{,2} + \\ & + \mu_{3,2}(\mu_3 - \mu_2)_{,2}] - e^{-2\mu_3} [(\psi + \mu_2)_{,33} + \psi_{,3}(\psi - \mu_3 + \mu_2)_{,3} + \\ & + \mu_{2,3}(\mu_2 - \mu_3)_{,3}] + \\ & + e^{-2\nu} [\psi_{,0}(\mu_2 + \mu_3)_{,0} + \mu_{3,0} + \mu_{2,0}] - \\ & - 1/4 e^{2\psi-2\nu} [e^{-2\mu_2} Q_{20}^2 + e^{-2\mu_3} Q_{30}^2] - 1/4 e^{2\psi-2\mu_3-2\mu_2} Q_{23}^2, \end{aligned} \quad (4з)$$

$$G_{11} = e^{-2\mu_2} [(\nu + \mu_3)_{,22} + \nu_{,2}(\nu - \mu_2 + \mu_3)_{,2} + \mu_{3,2}(\mu_3 - \mu_2)_{,2}] +$$

$$+ e^{-2\mu_3} [(\nu + \mu_2)_{,33} + \nu_{,3}(\nu - \mu_3 + \mu_2)_{,3} + \mu_{2,3}(\mu_2 - \mu_3)_{,3}] - \\ - e^{-2\nu} [(\mu_2 + \mu_3)_{,00} + \mu_{2,0}(\mu_2 - \nu)_{,0} + \mu_{3,0}(\mu_3 - \nu)_{,0} + \mu_{2,0}\mu_{3,0}] + \\ + \frac{3}{4}e^{2\psi} [e^{-2\mu_2-2\mu_3}Q_{23}^2 - e^{-2\mu_2-2\nu}Q_{20}^2 - e^{-2\mu_3-2\nu}Q_{30}^2], \quad (4и)$$

$$G_{22} = e^{-2\mu_3} [(\psi + \nu)_{,33} + (\psi + \nu)_{,3}(\nu - \mu_3)_{,3} + \psi_{,3}\psi_{,3}] + \\ + e^{-2\mu_2} [\nu_{,2}(\psi + \mu_3)_{,2} + \psi_{,2}\mu_{3,2}] - \\ - e^{-2\nu} [(\psi + \mu_3)_{,00} + (\psi + \mu_3)_{,0}(\mu_3 - \nu)_{,0} + \psi_{,0}\psi_{,0}] - \\ - \frac{1}{4}e^{2\psi} [e^{-2\mu_2-2\mu_3}Q_{23}^2 - e^{-2\mu_2-2\nu}Q_{20}^2 + e^{-2\mu_3-2\nu}Q_{30}^2], \quad (4к)$$

где

$$Q_{AB} = q_{A,B} - q_{B,A}, \quad Q_{A0} = q_{A,0} - \omega_{,A} \quad (A, B = 2, 3). \quad (5)$$

Компоненты R_{33} , R_{13} , R_{03} и G_{33} здесь не выписаны — они могут быть получены простой заменой индекса 2 индексом 3 и обратно в компонентах R_{22} , R_{12} , R_{02} и G_{22} .

24. Возмущения метрики

Коэффициенты линейного элемента метрики Шварцшильда, записанной в виде (3), равны

$$e^{2\nu} = e^{-2\mu_2} = 1 - 2M/r = \Delta/r^2, \quad e^{\mu_3} = r, \quad e^\psi = r \sin \theta; \quad (6)$$

$$\omega = q_2 = q_3 = 0 \quad (\Delta = r^2 - 2Mr, \quad x^2 = r, \quad x^3 = \theta). \quad (7)$$

Следовательно, возмущение общего вида для шварцшильдовской черной дыры сводится к тому, что

$$\omega, q_2, q_3 \quad (8)$$

становятся величинами первого порядка малости, а функции ν , μ_2 , μ_3 и ψ получают малые приращения

$$\delta\nu, \delta\mu_2, \delta\mu_3, \delta\psi. \quad (9)$$

Ясно, что возмущения, приводящие к ненулевым значениям величин ω , q_2 и q_3 , и возмущения, приводящие к приращениям функций ν , μ_2 , μ_3 и ψ , имеют совершенно различную природу: первые описывают увлечение инерциальных систем отсчета, т. е. вращение черной дыры, тогда как вторые не связаны с вращением. По этой причине назовем эти возмущения соответственно *аксиальными* и *полярными*. Эта терминология становится понятной, когда рассматривается изменение метрики при замене φ на $-\varphi$. Рассмотрим, как влияет на метрику изменение знака переменной φ . Обращение знака никак не сказывается на полярных возмущениях и приводит к изменению знака аксиальных возмущений ω , q_2 и q_3 , как это следует из требования инвариантности линейного элемента, что и оправдывает нашу терминологию. Следует ожидать, что возмущения, имеющие столь различное

поведение, можно рассматривать независимо друг от друга. Мы увидим, что так оно и есть на самом деле.

а. Аксиальные возмущения. Как мы установили, аксиальные возмущения — это возмущения, для которых ω , q_2 и q_3 не равны нулю. Они удовлетворяют уравнениям

$$R_{12} = R_{13} = 0. \quad (10)$$

В уравнение (10) можно подставить невозмущенные значения (6) для ν , μ_2 , μ_3 и ψ (это следует, например, из выражения (4д) для R_{12}). В результате получим следующие уравнения:

$$(e^{3\psi+\nu-\mu_2-\mu_3} Q_{23})_{,3} = -e^{3\psi-\nu+\mu_2-\mu_3} Q_{02,0} \quad (\delta R_{12} = 0), \quad (11)$$

$$(e^{3\psi+\nu-\mu_2-\mu_3} Q_{23})_{,2} = e^{3\psi-\nu+\mu_2-\mu_3} Q_{03,0} \quad (\delta R_{13} = 0). \quad (12)$$

Полагая

$$Q(t, r, \theta) = \Delta Q_{23} \sin^3 \theta = \Delta (q_{2,3} - q_{3,2}) \sin^3 \theta \quad (13)$$

и подставляя выражения (6), получаем

$$\frac{1}{r^4 \sin^3 \theta} \frac{\partial Q}{\partial \theta} = -(\omega_{,2} - q_{2,0})_{,0}, \quad (14)$$

$$\frac{\Delta}{r^4 \sin^3 \theta} \frac{\partial Q}{\partial r} = +(\omega_{,3} - q_{3,0})_{,0}. \quad (15)$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что зависимость рассматриваемых возмущений от времени имеет вид

$$e^{i\sigma t}, \quad (16)$$

где σ — постоянная (как правило, действительная). Другими словами, мы совершаем фурье-преобразование возмущения и рассматриваем одну фурье-компоненту, имеющую частоту — σ . Оставляя прежние обозначения, но рассматривая амплитуду возмущения с заданной частотой, мы можем переписать уравнения (14) и (15) в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^4 \sin^3 \theta} \frac{\partial Q}{\partial \theta} &= -i\sigma \omega_{,2} - \sigma^2 q_{,2}, \\ \frac{\Delta}{r^4 \sin^3 \theta} \frac{\partial Q}{\partial r} &= +i\sigma \omega_{,3} + \sigma^2 q_{,3}. \end{aligned} \quad (17)$$

Исключая из этих уравнений ω , получаем

$$r^4 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Delta}{r^4} \frac{\partial Q}{\partial r} \right) + \sin^3 \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin^3 \theta} \frac{\partial Q}{\partial \theta} \right) + \sigma^2 (r^4 / \Delta) Q = 0. \quad (18)$$

Переменные r и θ в уравнении (18) можно разделить подстановкой

$$Q(r, \theta) = Q(r) C_{l+2}^{-3/2}(\theta), \quad (19)$$

где $C_{l+2}^{-3/2}$ — функция Гегенбауэра, удовлетворяющая уравнению

$$\left[\frac{d}{d\theta} \sin^{2\nu} \theta \frac{d}{d\theta} + n(n+2\nu) \sin^{2\nu}(\theta) \right] C_n^\nu(\theta) = 0. \quad (20)$$

Функция Гегенбауэра $C_{l+2}^{-3/2}(\theta)$ связана с функцией Лежандра $P_l(\theta)$ соотношением

$$C_{l+2}^{-3/2}(\theta) = \sin^3 \theta \frac{d}{d\theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{dP_l(\theta)}{d\theta}, \quad (21)^*$$

которое можно переписать в виде

$$C_{l+2}^{-3/2}(\theta) = (P_{l, \theta\theta} - P_{l, \theta} \operatorname{ctg} \theta) \sin^2 \theta. \quad (22)$$

Подставляя выражение (19) в уравнение (18), получаем радиальное уравнение

$$\Delta \frac{d}{dr} \left(\frac{\Delta}{r^4} \frac{dQ}{dr} \right) - \mu^2 \frac{\Delta}{r^4} Q + \sigma^2 Q = 0, \quad (23)$$

$$\mu^2 = 2n = (l-1)(l+2). \quad (24)$$

Величина μ^2 задает угловую зависимость. Переходя к переменной (см. уравнение (219) гл. 3)

$$r_* = r + 2M \ln(r/2M - 1) \left(\frac{d}{dr_*} = \frac{\Delta}{r^2} \frac{d}{dr} \right) \quad (25)$$

и производя замену функции

$$Q(r) = rZ^{(-)}, \quad (26)$$

находим, что $Z^{(-)}$ удовлетворяет одномерному волновому уравнению Шредингера:

$$\left(\frac{d^2}{dr_*^2} + \sigma^2 \right) Z^{(-)} = V^{(-)} Z^{(-)} \quad (27)$$

с потенциалом $V^{(-)}$, равным

$$V^{(-)} = (\Delta/r^5) [(\mu^2 + 2)r - 6M]. \quad (28)$$

Уравнение (27), которому удовлетворяют аксиальные возмущения, было впервые выведено (хотя и совершенно другим способом) Редже и Уилером и поэтому часто называется *уравнением Редже—Уилера*.

Удобно для дальнейшей работы ввести операторы

$$\Lambda_{\pm} = \frac{d}{dr_*} \pm i\sigma,$$

$$\Lambda^2 = \Lambda_+ \Lambda_- = \Lambda_- \Lambda_+ = \frac{d^2}{dr_*^2} + \sigma^2. \quad (29)$$

В новых обозначениях уравнение для $Z^{(-)}$ выглядит следующим образом:

$$\Lambda^2 Z^{(-)} = V^{(-)} Z^{(-)}. \quad (30)$$

* При обычной нормировке функций Гегенбауэра и Лежандра в правой части этого уравнения появится еще множитель $3[(l-1)(l+1)(l+2)]^{-1}$.

Таблица 1

Потенциальный барьер $V^{(-)}$ для аксиальных возмущений при различных значениях l и n

r/M	$l=2$ $n=2$	$l=3$ $n=5$	$l=4$ $n=9$	r/M	$l=2$ $n=2$	$l=3$ $n=5$	$l=4$ $n=9$
2,0	0	0	0	3,8	0,14503	0,34185	0,60428
2,1	0,03394	0,09872	0,18511	4,0	0,14063	0,32813	0,57813
2,2	0,06147	0,17417	0,32443	4,5	0,12803	0,29264	0,51212
2,3	0,08362	0,23156	0,42881	5,0	0,11520	0,25920	0,45120
2,4	0,10127	0,27488	0,50637	6,0	0,09259	0,20370	0,35185
2,5	0,11520	0,30720	0,56320	7,0	0,07497	0,16243	0,27905
2,6	0,12605	0,33087	0,60397	8,0	0,06152	0,13184	0,22559
2,7	0,13435	0,34773	0,63224	9,0	0,05121	0,10882	0,18564
2,8	0,14057	0,35923	0,65077	10,0	0,04320	0,09120	0,15520
2,9	0,14506	0,36647	0,66169	12,0	0,03183	0,06655	0,11285
3,0	0,14815	0,37037	0,66667	14,0	0,02436	0,05060	0,08559
3,2	0,15106	0,37079	0,66376	16,0	0,01923	0,03973	0,06708
3,4	0,15086	0,36458	0,64954	18,0	0,01555	0,03201	0,05396
3,6	0,14861	0,35437	0,62871	20,0	0,01283	0,02633	0,04433

В табл. 1 затабулирован потенциал $V^{(-)}$ для $l = 2, 3, 4$, а соответствующие кривые показаны на рис. 11.

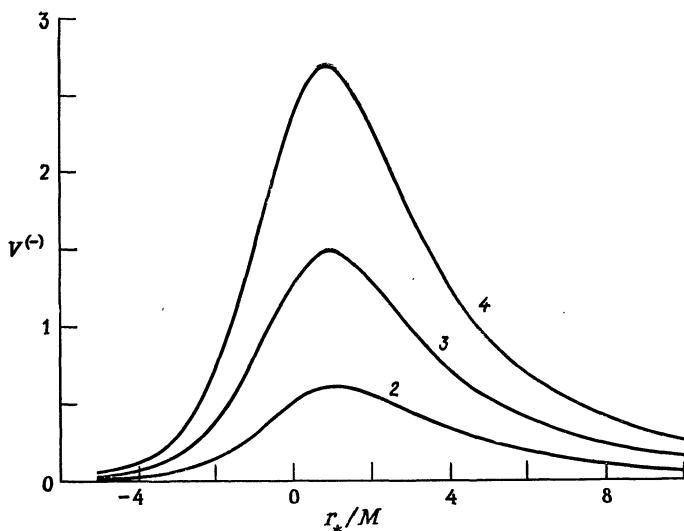


Рис. 11. Потенциальные барьеры, окружающие шварцшильдовские черные дыры, для аксиальных возмущений. Около кривых указаны соответствующие значения l .

б. Полярные возмущения. Полярные возмущения связаны с ненулевыми приращениями в метрических функциях v , μ_2 , μ_3 и ψ . Заметим, что в выражения (4е), 4 (ж), (4б) и (4к) для R_{02} , R_{23} , R_{11}

и G_{22} величины Q_{AB} входят квадратично; следовательно, эти уравнения в линейной теории возмущений можно не учитывать. Таким образом, как и ожидалось, уравнения для аксиальных и полярных возмущений действительно расцепляются.

Линеаризуя выражения для R_{02} , R_{03} , R_{23} , R_{11} и G_{22} около шварцшильдовских значений, получаем следующие уравнения:

$$(\delta\psi + \delta\mu_3)_{,r} + (1/r - v_{,r})(\delta\psi + \delta\mu_3) - (2/r)\delta\mu_2 = 0 \quad (\delta R_{02} = 0), \quad (31)$$

$$(\delta\psi + \delta\mu_2)_{,\theta} + (\delta\psi - \delta\mu_3) \operatorname{ctg} \theta = 0 \quad (\delta R_{03} = 0), \quad (32)$$

$$(\delta\psi + \delta v)_{,r\theta} + (\delta\psi - \delta\mu_3)_{,r} \operatorname{ctg} \theta + \\ + (v_{,r} - 1/r)\delta v_{,\theta} - (v_{,r} + 1/r)\delta\mu_{2,\theta} = 0 \quad (\delta R_{23} = 0), \quad (33)$$

$$e^{-2\mu_2} \{ (2/r)\delta v_{,r} + (1/r + v_{,r})(\delta\psi + \delta\mu_3)_{,r} - 2\delta\mu_2 [(2/r)v_{,r} + 1/r^2] \} + \\ + 1/r^2 [(\delta\psi + \delta v)_{,\theta\theta} + (2\delta\psi + \delta v - \delta\mu_3)_{,\theta} \operatorname{ctg} \theta + 2\delta\mu_3] - \\ - e^{-2v} (\delta\psi + \delta\mu_3)_{,\theta\theta} = 0 \quad (\delta G_{22} = 0), \quad (34)$$

$$e^{+2v} \left\{ \delta\psi_{,rr} + 2(1/r + v_{,r})\delta\psi_{,r} + (1/r)(\delta\psi + \delta v - \delta\mu_2 + \delta\mu_3)_{,r} - \right. \\ \left. - (2/r) \frac{\delta\mu_2}{r} (1/r + 2v_{,r}) \right\} + \\ + (1/r^2) \{ \delta\psi_{,\theta\theta} + (2\delta\psi + \delta v + \delta\mu_2 - \delta\mu_3)_{,\theta} \operatorname{ctg} \theta + 2\delta\mu_3 \} - \\ - e^{-2v} \delta\psi_{,\theta\theta} = 0 \quad (\delta R_{11} = 0). \quad (35)$$

Снова предположим, что возмущения имеют временную зависимость вида $e^{i\sigma t}$, так что в дальнейшем производную по нулевой координате, обозначаемую « $_{,0}$ », заменим на множитель $i\sigma$ и опустим множитель $e^{i\sigma t}$.

Переменные r и θ в уравнениях (31)–(35) разделяются, если сделать, следуя Дж. Фридману, подстановки:

$$\delta v = N(r) P_l(\cos \theta), \quad (36)$$

$$\delta\mu_2 = L(r) P_l(\cos \theta), \quad (37)$$

$$\delta\mu_3 = [T(r) P_l + V(r) P_{l,\theta\theta}], \quad (38)$$

$$\delta\psi = [T(r) P_l + V(r) P_{l,\theta} \operatorname{ctg} \theta]. \quad (39)$$

Заметим, что при этом

$$\delta\psi + \delta\mu_3 = [2T - l(l+1)V] P_l, \quad (40)$$

$$\delta\psi_{,\theta} + (\delta\psi - \delta\mu_3) \operatorname{ctg} \theta = (T - V) P_{l,\theta}, \quad (41)$$

$$\delta\psi_{,\theta\theta} + (2\delta\psi - \delta\mu_3)_{,\theta} \operatorname{ctg} \theta + 2\delta\mu_3 = [2 - l(l+1)] T P_l = -2n T P_l. \quad (42)$$

Вернемся к уравнениям (31)–(35). Прежде всего, подставляя выражения (37) и (41) в уравнение (32), получаем соотношение

$$T - V + L = 0 \quad (\delta R_{03} = 0), \quad (43)$$

из которого следует, что только три из четырех определенных нами радиальных функций являются линейно независимыми. В качестве независимых выберем функции N , L и V .

С помощью уравнений (40) и (41) получаем (вместо уравнений (31) и (33)) для компонент (0,2) и (2,3) следующие уравнения:

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} - v_{,r}\right)[2T - l(l+1)V] - 2L/r = 0, \quad (44)$$

$$(T - V + N)_{,r} - (1/r - v_{,r})N - (1/r + v_{,r})L = 0. \quad (45)$$

После исключения T эти уравнения принимают вид

$$N_{,r} - L_{,r} = (1/r - v_{,r})N + (1/r + v_{,r})L, \quad (46)$$

$$L_{,r} + (2/r - v_{,r})L = -[X_{,r} + (1/r - v_{,r})X], \quad (47)$$

где вместо V мы ввели величину X :

$$X = nV = \frac{1}{2}(l-1)(l+2)V. \quad (48)$$

Подобным же образом с помощью уравнений (40) и (42) можно привести уравнение (34) к виду

$$\begin{aligned} (2/r)N_{,r} + (1/r + v_{,r})[2T - l(l+1)V]_{,r} - (2/r)(1/r + 2v_{,r})L - \\ - l(l+1)e^{-2v}r^{-2}N - 2nr^{-2}e^{-2v}T + \sigma^2e^{-4v}[2T - l(l+1)V] = 0. \end{aligned} \quad (49)$$

После исключения T получаем

$$\begin{aligned} (2/r)N_{,r} - l(l+1)e^{-2v}r^{-2}N - (2/r)(1/r + 2v_{,r})L - \\ - 2(1/r + v_{,r})(L + nV)_{,r} - 2nr^{-2}e^{-2v}(V - L) - 2\sigma^2e^{-4v}(L + nV) = 0. \end{aligned} \quad (50)$$

Наконец, рассмотрим уравнение (35). Оно состоит из членов, содержащих P_l , и членов, содержащих $P_{l,\theta} \operatorname{ctg} \theta$. Эти члены равны нулю по отдельности в силу предыдущих уравнений. Члены с $P_{l,\theta} \operatorname{ctg} \theta$ при этом дают

$$V_{,rr} + 2(1/r + v_{,r})V_{,r} + r^{-2}e^{-2v}(N + L) + \sigma^2e^{-4v}V = 0. \quad (51)$$

Уравнение (51), как мы уже установили, не является независимым от уравнений (46), (47) и (50). Тем не менее оно окажется полезным в дальнейшем именно в такой форме.

Уравнения (46), (47) и (50) составляют систему трех линейных уравнений первого порядка для трех радиальных функций L , N и V (или X). Разрешая эти уравнения относительно производных, получаем

$$N_{,r} = aN + bL + cX, \quad (52)$$

$$L_{,r} = (a - 1/r + v_{,r})N + (b - 1/r - v_{,r})L + cX, \quad (53)$$

$$X_{,r} = -(a - 1/r + v_{,r})N - (b + 1/r - 2v_{,r})L - (c + 1/r - v_{,r})X, \quad (54)$$

где мы использовали следующие обозначения:

$$\begin{aligned} a &= (n+1)/(r-2M), \quad v_{,r} = M/r(r-2M), \\ b &= -\frac{1}{r} - \frac{n}{r-2M} + \frac{M}{r(r-2M)} + \frac{M^2}{r(r-2M)^2} + \sigma^2 \frac{r^3}{(r-2M)^2}, \\ c &= -\frac{1}{r} + \frac{1}{r-2M} + \frac{M^2}{r(r-2M)^2} + \sigma^2 \frac{r^3}{(r-2M)^2}. \end{aligned} \quad (55)$$

В дальнейшем окажутся полезными также следующие альтернативные записи уравнений (47) и (54):

$$\begin{aligned} (L+X)_{,r} &= -(2/r - v_{,r})L - (1/r - v_{,r})X = \\ &= -[r(r-2M)]^{-1}[(2r-5M)L + (r-3M)X], \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} X_{,r} &= -\frac{nr+3M}{r(r-2M)}N - \left[\frac{1}{r-2M} - \frac{M}{r(r-2M)} + \frac{M^2 + \sigma^2 r^4}{r(r-2M)^2} \right] (L+X) + \\ &\quad + \frac{n+1}{r-2M}L. \end{aligned} \quad (57)$$

I. Приведение уравнений к одномерному волновому уравнению. Замечательно, что функция

$$Z^{(+)} = r^2 (3MX/nr - L)/(nr + 3M), \quad (58)$$

подобно функции $Z^{(-)}$, удовлетворяет (вследствие уравнений (52)–(54)) одномерному волновому уравнению. Возможность сведения системы трех уравнений первого порядка (52)–(54) к одному уравнению второго порядка была обнаружена эмпирически, однако причина этого должна лежать глубже, в структуре системы уравнений. Мы выясним это ниже, в § 25. Но прежде удостоверимся, что $Z^{(+)}$ действительно удовлетворяет одномерному волновому уравнению.

Переписывая $Z^{(+)}$ в виде

$$Z^{(+)} = rV - r^2(L+X)/(nr+3M), \quad (59)$$

дифференцируя по r_* и подставляя производную $(L+X)_{,r}$ из уравнения (56), находим

$$\begin{aligned} Z_{,r_*}^{(+)} &= (1 - 2M/r)Z_{,r} = \\ &= (r-2M)V_{,r} + \frac{3M(r-2M)}{r(nr+3M)}V + \frac{nr^2 - 3nMr - 3M^2}{(nr+3M)^2}(L+X). \end{aligned} \quad (60)$$

Дифференцируя это выражение по r и снова используя уравнение (56), получаем

$$\begin{aligned} Z_{,r_*r}^{(+)} &= (r-2M)V_{,rr} + V_{,r} + \frac{3M(r-2M)}{r(nr+3M)}V_{,r} + \\ &+ 3M \frac{-nr^2 + 4Mnr + 6M^2}{r^2(nr+3M)^2}V + \frac{3Mn}{(nr+3M)^3}[(2+n)r-M](L+X) - \\ &- \frac{nr^2 - 3Mnr - 3M^2}{r(r-2M)(nr+3M)^2}[(2r-5M)L + (r-3M)X]. \end{aligned} \quad (61)$$

Если подставить производную $V_{,rr}$ из уравнения (51), то получим выражение, которое помимо L , X и N содержит только производную V , которую можно найти из уравнения (57). Сделав эти подстановки и упростив получившееся выражение, придем (после некоторых сокращений) к уравнению

$$\left(\frac{d^2}{dr_*^2} + \sigma^2\right) Z^{(+)} = V^{(+)} Z^{(+)}, \quad (62)$$

где

$$V^{(+)} = 2 \Delta r^{-5} (nr + 3M)^{-2} [n^2 (n + 1) r^3 + 3Mn^2 r^2 + 9M^2 nr + 9M^3]. \quad (63)$$

Уравнение (62) было впервые получено (совершенно другим способом) Церилли и поэтому часто называется *уравнением Церилли*.

С помощью введенных выше операторов Λ (см. уравнения (29) и (30)) перепишем уравнение (62) в следующем виде:

$$\Lambda^2 Z^{(+)} = V^{(+)} Z^{(+)}. \quad (64)$$

В табл. 2 затабулирован потенциал $V^{(+)}$ для $l = 2, 3, 4$, а соответствующие кривые показаны на рис. 12. Сравнение таблиц для $V^{(+)}$ и $V^{(-)}$ показывает, что потенциалы чрезвычайно мало отличаются во всей области изменения r_* , несмотря на то, что формулы (28) и (63), их описывающие, столь различны.

Таблица 2

Потенциальный барьер $V^{(+)}$ для полярных возмущений при различных значениях l и n

r/M	$l=2$ $n=2$	$l=3$ $n=5$	$l=4$ $n=9$	r/M	$l=2$ $n=2$	$l=3$ $n=5$	$l=4$ $n=9$
2,0	0	0	0	3,8	0,13970	0,33866	0,60225
2,1	0,04183	0,10289	0,18766	4,0	0,13443	0,32458	0,57591
2,2	0,07311	0,18018	0,32809	4,5	0,12079	0,28876	0,50974
2,3	0,09647	0,23805	0,43272	5,0	0,10787	0,25542	0,44891
2,4	0,11383	0,28106	0,51004	6,0	0,08617	0,20054	0,34997
2,5	0,12660	0,31263	0,56639	7,0	0,06974	0,15993	0,27758
2,6	0,13584	0,33536	0,60656	8,0	0,05734	0,12988	0,22444
2,7	0,14235	0,35122	0,63420	9,0	0,04786	0,10728	0,18475
2,8	0,14673	0,36171	0,65211	10,0	0,04050	0,08997	0,15449
2,9	0,14946	0,36802	0,66246	12,0	0,03002	0,06575	0,11239
3,0	0,15089	0,37106	0,66691	14,0	0,02310	0,05005	0,08527
3,2	0,15094	0,37003	0,66314	16,0	0,01832	0,03934	0,06685
3,4	0,14848	0,36272	0,64827	18,0	0,01487	0,03172	0,05379
3,6	0,14452	0,35172	0,62355	20,0	0,01231	0,02611	0,04420

II. Завершение решения. Зная решение уравнения второго порядка (61) для $Z^{(+)}$, решение для функций L , X и N можно по-

лучить в квадратурах. Для этого перепишем уравнение (47) в виде

$$\frac{d}{dr} (r^2 e^{-\nu} L) = -nr \frac{d}{dr} (re^{-\nu} V). \quad (65)$$

Если теперь вместо V подставить соотношение

$$V = (nr + 3M) Z^{(+)} / 3Mr + rL / 3M, \quad (66)$$

получим уравнение

$$(1 + nr/3M) d(r^2 e^{-\nu} L) / dr = -(nr/3M) d[e^{-\nu} (nr + 3M) Z^{(+)}] / dr. \quad (67)$$

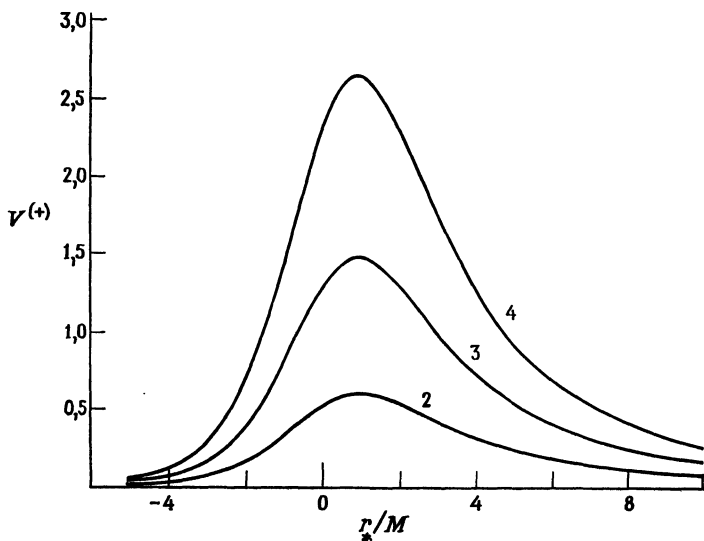


Рис. 12. Потенциальные барьеры, окружающие шварцшильдовские черные дыры, для случая полярных возмущений. Около кривых указаны соответствующие значения l .

Это уравнение дает следующее интегральное соотношение:

$$r^2 e^{-\nu} L = - \int \frac{nr}{(nr + 3M)} \frac{d}{dr} [e^{-\nu} (nr + 3M) Z^{(+)}] dr, \quad (68)$$

которое после интегрирования по частям принимает вид

$$r^2 e^{-\nu} L = -nre^{-\nu} Z^{(+)} + 3Mn \int e^{-\nu} (nr + 3M)^{-1} Z^{(+)} dr. \quad (69)$$

Вводя функцию

$$\Phi = ne^{\nu} \int e^{-\nu} (nr + 3M)^{-1} Z^{(+)} dr, \quad (70)$$

получим решение для L :

$$L = -(n/r) Z^{(+)} + (3M/r^3) \Phi. \quad (71)$$

Уравнение (66) дает решение для X :

$$X = (n/r) (Z^{(+)} + \Phi). \quad (72)$$

Следствием решений (71) и (72) является соотношение

$$L + X = (1/r^2) (nr + 3M) \Phi. \quad (73)$$

Вернемся к уравнению (60). Подставляя в него $V_{,r} (= X_{,r}/n)$ из уравнения (57), получим

$$\begin{aligned} Z_{,r*} = \frac{1}{n} (r - 2M) \left\{ -\frac{nr + 3M}{r(r - 2M)} N - \right. \\ \left. - \left[\frac{1}{r - 2M} - \frac{M}{r(r - 2M)} + \frac{M^2 + \sigma^2 r^4}{r(r - 2M)^2} \right] (L + X) + \frac{n + 1}{r - 2M} L \right\} + \\ + \frac{3M(r - 2M)}{nr(nr + 3M)} X + \frac{nr^2 - 3Mnr - 3M^2}{(nr + 3M)^2} (L + X). \quad (74) \end{aligned}$$

Упрощая это последнее уравнение и подставляя решения для L (71) и $(L + X)$ (72), находим следующее решение для N :

$$\begin{aligned} N = -\frac{nr}{nr + 3M} Z_{,r*}^{(+)} - \frac{n}{(nr + 3M)^2} \left[\frac{6M^2}{r} + 3Mn + n(n + 1)r \right] Z^{(+)} + \\ + \left(M - \frac{M^2 + \sigma^2 r^4}{r - 2M} \right) \frac{\Phi}{r^2}. \quad (75) \end{aligned}$$

Формальное решение основных уравнений на этом заканчивается. Волновые уравнения для функций $Z^{(+)}$ и $Z^{(-)}$ мы рассмотрим в § 26 и 27.

25. Теорема о частных решениях и приводимости системы линейных дифференциальных уравнений

Исследуя в § 24 полярные возмущения, мы обнаружили, что решение системы трех линейных уравнений (уравнения (52) — (54)) для трех функций N , L и X может быть сведено к решению одного уравнения второго порядка для определенной комбинации этих функций, которую мы обозначили $Z^{(+)}$. Эту приводимость мы проверили прямым вычислением, но ее причина из-за сложности потенциала в волновом уравнении для $Z^{(+)}$ осталась скрытой целой серией чудесных сокращений в наших вычислениях. В настоящем параграфе мы попытаемся обнаружить происхождение этих таинственных совпадений.

В принципе в самом факте приводимости системы линейных уравнений к системе более низкого порядка нет ничего необычного: этого всегда можно достичь, если заранее известны одно или несколько частных решений. Упрощение же нашей системы уравнений достигнуто без знания какого-либо решения. Возникает вопрос,

можем ли мы, зная о приводимости системы линейных уравнений к системе более низкого порядка, построить алгоритм для нахождения частных решений, которые сделали возможной редукцию. Такой алгоритм был недавно построен Ксантопулосом. Мы кратко опишем процедуру, поскольку она нам пригодится и в других случаях.

Рассмотрим систему n линейных уравнений

$$dX_j/dx = A_{jk}X_k \quad (j = 1, \dots, n), \quad (76)$$

где A_{jk} — некоторые известные функции x и подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. Обозначив через $\mathbf{X}$ вектор-столбец с компонентами X_j , а через $\mathbf{A}$ — матрицу размерности $(n \times n)$ с компонентами A_{jk} , можно переписать уравнение (76) в матричном виде:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{X}. \quad (77)$$

Определим сопряженную систему уравнений

$$\frac{d\tilde{\mathbf{X}}}{dx} = -\mathbf{A}^+\tilde{\mathbf{X}} \quad \left(\frac{d\tilde{X}_j}{dx} = -A_{kj}\tilde{X}_k \right), \quad (78)$$

где $\mathbf{A}^+$ — транспонированная матрица $\mathbf{A}$.

Очевидно, если X_j и $\tilde{X}_j$ — решения соответственно уравнений (77) и (78), то

$$\frac{d}{dx}(X_j\tilde{X}_j) = 0, \quad X_j\tilde{X}_j = \text{const}. \quad (79)$$

Операторам

$$\mathbf{A} \frac{d}{dx} \quad \text{и} \quad \mathbf{A} \frac{d^2}{dx^2} \quad (80)$$

сопоставим, как обычно, сопряженные операторы

$$-\mathbf{A}^+ \frac{d}{dx} - \frac{d\mathbf{A}^+}{dx} \quad \text{и} \quad \mathbf{A}^+ \frac{d^2}{dx^2} + 2 \frac{d\mathbf{A}^+}{dx} \frac{d}{dx} + \frac{d^2\mathbf{A}^+}{dx^2}. \quad (81)$$

Перепишем также уравнение (76) в более удобном виде:

$$\mathbf{E}\mathbf{X} = \left(\mathbf{I} \frac{d}{dx} - \mathbf{A} \right) \mathbf{X} = \left(\delta_{jk} \frac{d}{dx} - A_{jk} \right) X_k = 0, \quad (82)$$

где $\mathbf{I}$ — единичная (диагональная) матрица.

Предположим, что существует такая комбинация

$$Z = L_j X_j = \mathbf{L}\mathbf{X}, \quad (83)$$

которая в силу уравнений (77) удовлетворяет уравнению второго порядка

$$OZ = \left(\frac{d^2}{dx^2} + B \frac{d}{dx} + C \right) L_j X_j = 0, \quad (84)$$

где B и C — некоторые известные функции x . Задача теперь заключается в построении алгоритма, который позволит найти частные решения уравнений (77), делающие возможной такую редукцию.

Более того, можно предположить, что существуют m комбинаций

$$Z_\alpha = L_{\alpha j} X_j \quad (\alpha = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad 2m < n), \quad (85)$$

которые удовлетворяют системе m уравнений

$$\left(\delta_{\alpha\beta} \frac{d^2}{dx^2} + B_{\alpha\beta} \frac{d}{dx} + C_{\alpha\beta} \right) Z_\beta = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, m), \quad (86)$$

где $B_{\alpha\beta}$ и $C_{\alpha\beta}$ — некоторые известные функции x . Мы ограничимся, однако, исследованием более простого случая, когда существует только одна комбинация. В общем случае не требуется никаких новых идей по сравнению с этим простым случаем, но нужно обобщить некоторые понятия и термины.

Тот факт, что уравнение (84) удовлетворяется в силу справедливости уравнения (82), означает, что должно существовать определенное операторное тождество. Действительно, дифференцируя (83), получаем

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{d}{dx} L_j X_j = \left(\frac{dL_j}{dx} + L_k A_{kj} \right) X_j = \Gamma_j X_j, \quad (87)$$

где

$$\Gamma_j = \frac{dL_j}{dx} + L_k A_{kj}, \quad \Gamma = dL/dx + LA, \quad (88)$$

а дифференцирование уравнения (87) дает

$$\frac{d^2 Z}{dx^2} = \left(\frac{d\Gamma_j}{dx} + \Gamma_k A_{kj} \right) X_j. \quad (89)$$

Подставляя полученные выражения для производных Z в уравнение (84), получаем

$$OZ = \left(\frac{d\Gamma_j}{dx} + \Gamma_k A_{kj} + B\Gamma_j + CL_j \right) X_j = 0, \quad (90)$$

откуда следует тождество

$$d\Gamma/dx + \Gamma A + B\Gamma + CL = 0. \quad (91)$$

Найдем теперь оператор S , удовлетворяющий операторному уравнению

$$SE = OL, \quad (92)$$

которое в координатной записи имеет вид

$$S_k \left(\delta_{kj} \frac{d}{dx} - A_{kj} \right) X_j = \left(\frac{d^2}{dx^2} + B \frac{d}{dx} + C \right) L_j X_j. \quad (93)$$

Для определения S вычислим правую часть уравнения (93) для случая, когда X_j удовлетворяет неоднородному уравнению

$$dX_j/dx = A_{jk}X_k + \Lambda_j. \quad (94)$$

Имеем (ср. с уравнением (87))

$$dZ/dx = \Gamma_j X_j + L_j \Lambda_j, \quad (95)$$

$$\frac{d^2 Z}{dx^2} = \left(\frac{d\Gamma_j}{dx} + \Gamma_k A_{kj} \right) X_j + \Gamma_k \Lambda_k + \frac{d}{dx} (L_j \Lambda_j). \quad (96)$$

С помощью тождества (91) затем находим

$$\begin{aligned} OZ &= OL_j X_j = \left(\frac{dL_j}{dx} + L_j \frac{d}{dx} + BL_j + \Gamma_j \right) \Lambda_j = \\ &= \left(\frac{dL_j}{dx} + L_j \frac{d}{dx} + BL_j + \Gamma_j \right) \left(\delta_{jk} \frac{d}{dx} - A_{jk} \right) X_k. \end{aligned} \quad (97)$$

Сравнение с уравнением (92) показывает, что

$$S = L \frac{d}{dx} + \frac{dL}{dx} + BL + \Gamma. \quad (98)$$

Оператор

$$S^\dagger = -L^\dagger \frac{d}{dx} + BL^\dagger + \Gamma^\dagger \quad (99)$$

является сопряженным к оператору S .

Рассмотрим теперь столбец

$$\tilde{X}_j = S_j^\dagger \phi = -L_j \frac{d\phi}{dx} + (BL_j + \Gamma_j) \phi \quad (j = 1, \dots, n), \quad (100)$$

где ϕ — некоторая функция x . Предположим, что эти n уравнений однозначно определяют ϕ и производную $\phi_{,x}$. Это возможно тогда и только тогда, когда матрица $(3 \times n)$

$$\begin{vmatrix} \tilde{X}_1 & +L_1 & -(BL_1 + \Gamma_1) \\ \tilde{X}_2 & +L_1 & -(BL_2 + \Gamma_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \tilde{X}_n & +L_n & -(BL_n + \Gamma_n) \end{vmatrix}, \quad (101)$$

или, что эквивалентно, матрица

$$\begin{vmatrix} \tilde{X}_1 & L_1 & \Gamma_1 \\ \tilde{X}_2 & L_2 & \Gamma_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \tilde{X}_n & L_n & \Gamma_n \end{vmatrix}, \quad (102)$$

имеет ранг 2, т. е. все детерминанты третьего порядка

$$D_{ijk} = \begin{vmatrix} \tilde{X}_i & L_i & \Gamma_i \\ \tilde{X}_j & L_j & \Gamma_j \\ \tilde{X}_k & L_k & \Gamma_k \end{vmatrix} \quad (i \neq j \neq k \neq i), \quad (103)$$

построенные из любых трех строк матрицы (102), равны нулю. Покажем, что если $\tilde{X}_j$ удовлетворяют сопряженной системе уравнений

$$d\tilde{X}_j/dx = -A_{hj}\tilde{X}_h, \quad (104)$$

то детерминанты (103) равны нулю всюду, если только они равны нулю в какой-нибудь одной точке x . Продифференцируем детерминанты D_{ijk} , подставим производные $\tilde{X}$, L и Γ из уравнений (104), (88) и (91) соответственно и в результате получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} D_{ijk} &= \begin{vmatrix} -A_{li}\tilde{X}_l & L_i & \Gamma_i \\ -A_{lj}\tilde{X}_l & L_j & \Gamma_j \\ -A_{lk}\tilde{X}_l & L_k & \Gamma_k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \tilde{X}_i & (\Gamma_i - L_l A_{li}) & \Gamma_i \\ \tilde{X}_j & (\Gamma_j - L_l A_{lj}) & \Gamma_j \\ \tilde{X}_k & (\Gamma_k - L_l A_{lk}) & \Gamma_k \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} \tilde{X}_i & L_i & -(\Gamma_l A_{li} + B\Gamma_i + CL_i) \\ \tilde{X}_j & L_j & -(\Gamma_l A_{lj} + B\Gamma_j + CL_j) \\ \tilde{X}_k & L_k & -(\Gamma_l A_{lk} + B\Gamma_k + CL_k) \end{vmatrix} = \\ &= -A_{li} \begin{vmatrix} \tilde{X}_l & L_l & \Gamma_l \\ \tilde{X}_j & L_j & \Gamma_j \\ \tilde{X}_k & L_k & \Gamma_k \end{vmatrix} - A_{lj} \begin{vmatrix} \tilde{X}_i & L_i & \Gamma_i \\ \tilde{X}_l & L_l & \Gamma_l \\ \tilde{X}_k & L_k & \Gamma_k \end{vmatrix} - \\ &- A_{lk} \begin{vmatrix} \tilde{X}_i & L_i & \Gamma_i \\ \tilde{X}_j & L_j & \Gamma_j \\ \tilde{X}_l & L_l & \Gamma_l \end{vmatrix} - BD_{ijk}. \quad (105) \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dx} D_{ijk} = -A_{li}D_{ljk} - A_{lj}D_{ilk} - A_{lk}D_{ijl} - BD_{ijk}, \quad (106)$$

и мы приходим к заключению, что, если все детерминанты третьего порядка D_{ijk} равны нулю, их производные также равны нулю.

Не теряя общности, можно предположить, что ϕ и $\phi_{,\alpha}$ определяются первой парой уравнений (100) ($j = 1, 2$). Рассмотрим $(n - 2)$ детерминанта

$$D_{12\alpha} \quad (\alpha = 3, \dots, n). \quad (107)$$

Поскольку любой детерминант D_{ijk} может быть представлен в виде линейной комбинации детерминантов $D_{12\alpha}$ (с коэффициентами, не зависящими от $\tilde{X}_j$), уравнение (106) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dx} D_{12\alpha} = q_{\alpha\beta} D_{12\beta} \quad (\alpha = 3, \dots, n), \quad (108)$$

где $q_{\alpha\beta}$ — коэффициенты, не зависящие от $\tilde{X}_j$, явный вид которых известен. Уравнения (108) гарантируют, что вследствие (104) детерминанты $D_{12\alpha}$ будут равны нулю всюду, если они равны нулю в какой-либо одной точке.

Уравнения (108) составляют линейную систему $(n - 2)$ уравнений первого порядка для определения $D_{12\alpha}$. Предположим, что интегрирующие множители для этих уравнений могут быть найдены, а решения можно представить в виде

$$\mathcal{D}_\alpha = k_{\alpha\beta} D_{12\beta} = C_\alpha = \text{const} \quad (\alpha = 3, \dots, n), \quad (109)$$

где $k_{\alpha\beta}$ — некоторые известные функции. Детерминанты $D_{12\beta}$ являются линейными комбинациями величин $\tilde{X}_j$, поэтому решения (109) можно записать в виде

$$\mathcal{D}_\alpha = X_{(\alpha)j} \tilde{X}_j = C_\alpha \quad (\alpha = 3, \dots, n), \quad (110)$$

где функции $X_{(\alpha)j}$ — линейные комбинации функций $k_{\alpha\beta}$. Из уравнения (79) следует, что $X_{(\alpha)j}$ ($j = 1, \dots, n$) есть частные решения первоначальной системы уравнений (77). Именно существование этих частных решений лежит в основе приводимости системы уравнений (77). Таким образом, мы решили поставленную задачу.

Интересно отметить, что в частном случае интересующей нас системы трех уравнений, приводимой к уравнению второго порядка, уравнение (106) принимает особенно простой вид:

$$\frac{dD_{123}}{dx} = -(B + A_{11} + A_{22} + A_{33}) D_{123}. \quad (111)$$

Это уравнение элементарно интегрируется.

а. Частное решение системы уравнений (52)–(54). Мы видели в § 24, что система уравнений (52)–(54) для функций N , L и X допускает сведение к уравнению второго порядка для функции

$$Z^{(+)} = \frac{r^2}{nr + 3M} \left(-L + \frac{3M}{nr} X \right). \quad (112)$$

Чтобы применить к этой системе уравнений алгоритм нахождения частного решения, развитый в предыдущем разделе, приведем в соответствие обозначения

$$x \rightarrow r, \quad X_1, X_2, X_3 \rightarrow N, L, X. \quad (113)$$

Кроме того,

$$L_1 = 0, \quad L_2 = -\frac{r^2}{nr + 3M}, \quad L_3 = \frac{r^2}{nr + 3M} \frac{3M}{nr}. \quad (114)$$

Уравнение для $Z^{(+)}$, выраженное через переменную r , имеет вид

$$\frac{d^2 Z^{(+)}}{dr^2} + \frac{2M}{r(r-2M)} \frac{dZ^{(+)}}{dr} + \frac{r^2}{(r-2M)^2} (\sigma^2 - V^{(+)}) Z^{(+)} = 0. \quad (115)$$

Далее рассмотрим уравнение (111), которое удовлетворяется следующей комбинацией функций, равной детерминанту:

$$D_{123} = \frac{r^2}{nr + 3M} \begin{vmatrix} \tilde{N} & 0 & \Gamma_1 \\ \tilde{L} & -1 & \Gamma_2 \\ \tilde{X} & 3M/nr & \Gamma_3 \end{vmatrix}. \quad (116)$$

Из уравнений (52)—(54) и (114) следует

$$\begin{aligned} A_{11} + A_{22} + A_{33} &= a + b - c - 2/r = \\ &= (5M - 2r)/r (r - 2M), \end{aligned} \quad (117)$$

$$B = 2M/r (r - 2M). \quad (118)$$

Уравнение для D_{123} , следовательно, имеет вид

$$\frac{dD_{123}}{dr} = \frac{2r - 7M}{r(r - 2M)} D_{123}. \quad (119)$$

Интегрируя, получаем

$$(e^{3v}/r^2) D_{123} = \text{const} \quad (e^{2v} = 1 - 2M/r). \quad (120)$$

Остается выразить D_{123} через $\tilde{N}$, $\tilde{L}$ и $\tilde{X}$. Имеем

$$D_{123} = \frac{r^2}{nr + 3M} \left\{ -\left(\Gamma_3 + \frac{3M}{nr} \Gamma_2 \right) \tilde{N} + \Gamma_1 \left(\frac{3M}{nr} \tilde{L} + \tilde{X} \right) \right\}, \quad (121)$$

где (см. уравнение (88))

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= L_2 A_{21} + L_3 A_{31}, \\ \Gamma_2 &= L_{2,r} + L_2 A_{22} + L_3 A_{32}, \\ \Gamma_3 &= L_{3,r} + L_2 A_{23} + L_3 A_{33}. \end{aligned} \quad (122)$$

Коэффициенты A_{21} и т. д. могут быть получены из уравнений (52)—(54). В конце концов находим

$$D_{123} = -(e^v n)^{-2} (p\tilde{N} + 3M\tilde{L} + nr\tilde{X}), \quad (123)$$

$$p = M - (M^2 + \sigma^2 r^4)/(r - 2M). \quad (124)$$

Следовательно,

$$(e^v/r^2) (p\tilde{N} + 3M\tilde{L} + nr\tilde{X}) = \text{const}. \quad (125)$$

Таким образом, имеем частное решение уравнений (52)—(54):

$$N = f = pe^v/r^2, \quad L = g = 3Me^v/r^2, \quad X = h = nre^v/r^2. \quad (126)$$

Это решение и было найдено Ксантопулосом.

Пусть теперь у нас есть частное решение (126). Приведем систему уравнений (52)—(54) к одному уравнению второго порядка. Производя подстановку

$$N = fv, \quad L = g\lambda, \quad X = h\chi, \quad (127)$$

получим систему уравнений

$$\begin{aligned} v_{,r} &= A_{12} (g/f) (\lambda - v) + A_{13} (h/f) (\chi - v), \\ \lambda_{,r} &= A_{21} (f/g) (v - \lambda) + A_{23} (h/g) (\chi - \lambda), \\ \chi_{,r} &= A_{31} (f/h) (v - \chi) + A_{32} (g/h) (\lambda - \chi). \end{aligned} \quad (128)$$

Полагая

$$P = v - \lambda, \quad Q = \lambda - \chi, \quad R = \chi - v \quad (P + Q + R = 0), \quad (129)$$

приведем эту систему к виду

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dr} &= -(A_{12}gf + A_{21}f/g)P + A_{23}(h/g)Q + A_{13}(h/f)R, \\ \frac{dQ}{dr} &= -(A_{23}h/g + A_{32}g/h)Q + A_{31}(f/h)R + A_{21}(f/g)P, \\ \frac{dR}{dr} &= -(A_{31}f/h + A_{13}h/f)R + A_{12}(g/f)P + A_{32}(g/h)Q. \end{aligned} \quad (130)$$

Заметим, что эта система совместна с требованием (ср. с уравнением (129))

$$P + Q + R = 0. \quad (131)$$

Приводимость системы (130) к одному уравнению второго порядка очевидна.

Наконец, найдем функцию

$$Z^{(+)} = \frac{r^2}{nr + 3M} \left(\frac{3M}{nr} X - L \right) = \frac{r^2}{nr + 3M} g (\chi - \lambda) = - \frac{3Me^v}{nr + 3M} Q. \quad (132)$$

Ясно, что решение исходной системы уравнений может быть выражено через $Z^{(+)}$ и ее производную (как было показано нами выше, в § 24, б, II).

26. Соотношения между $V^{(+)}$ и $V^{(-)}$ и между $Z^{(+)}$ и $Z^{(-)}$

В § 24 мы свели уравнения для полярных и аксиальных возмущений к одномерным волновым уравнениям Шредингера для двух функций $Z^{(-)}$ и $Z^{(+)}$ с потенциалами $V^{(-)}$ и $V^{(+)}$. Примечательно, что, несмотря на внешнее различие, потенциалы $V^{(-)}$

и $V^{(+)}$, даваемые формулами (28) и (63), очень просто связаны. Действительно, их можно записать единообразно:

$$V^{(\pm)} = \pm \beta \frac{df}{dr_*} + \beta^2 f^2 + \kappa f, \quad (133)$$

где

$$\beta = \text{const} = 6M, \quad \kappa = \text{const} = 4n(n+1) = \mu^2(\mu^2 + 2), \quad (134)$$

$$f = \Delta/r^3 (\mu^2 r + 6M) = \Delta/2r^3 (nr + 3M). \quad (135)$$

Особо следует отметить, что в уравнении (133) β и κ — постоянные, а f — функция, равная нулю и на горизонте ($r = 2M$), и на бесконечности (где она пропорциональна r^{-2}).

На этом этапе причина столь простой связи между потенциалами $V^{(+)}$ и $V^{(-)}$ остается непонятной. Она станет ясной при использовании формализма Ньюмена—Пенроуза в § 28 и 29. Пока же мы примем соотношение (133) в качестве эмпирического (и легко проверяемого) факта и покажем, что отсюда следует очень простое соотношение между решениями $Z^{(+)}$ и $Z^{(-)}$.

Рассмотрим два волновых уравнения

$$\frac{d^2 Z_1}{dx^2} + \sigma^2 Z_1 = V_1 Z_1 = \left(+\beta \frac{df}{dx} + \beta^2 f^2 + \kappa f \right) Z_1, \quad (136)$$

$$\frac{d^2 Z_2}{dx^2} + \sigma^2 Z_2 = V_2 Z_2 = \left(-\beta \frac{df}{dx} + \beta^2 f^2 + \kappa f \right) Z_2, \quad (137)$$

где β и κ — некоторые действительные постоянные, а f — произвольная гладкая функция, причем и функция f , и все ее производные стремятся к нулю как при $x \rightarrow +\infty$, так и при $x \rightarrow -\infty$, а интеграл от этой функции по всей области изменения x конечен. (Для удобства обозначений мы временно заменили r_* на x и $Z^{(+)}$ и $Z^{(-)}$ на Z_1 и Z_2 .)

Ясно, что без ограничения общности, имея решение Z_2 уравнения (137), можно записать решения уравнения (136) в виде

$$Z_1 = p Z_2 + q Z_2', \quad (138)$$

где Z_2' — производная функции Z_2 по x , а p и q — некоторые соответствующим образом подобранные функции. Нетрудно вывести уравнения, которым должны удовлетворять функции p и q , чтобы Z_1 было решением уравнения (136).

С этой целью продифференцируем уравнение (138) и используем уравнение (137). Получим при этом

$$Z_1' = [p' + q(V_2 - \sigma^2)] Z_2 + (p + q') Z_2'. \quad (139)$$

Еще раз проделаем эту процедуру:

$$\begin{aligned} Z_1'' = & [p'' + (p + 2q')(V_2 - \sigma^2) + qV_2'] Z_2 + \\ & + [p' + q(V_2 - \sigma^2) + p' + q''] Z_2'. \end{aligned} \quad (140)$$

Это уравнение должно в точности совпадать с тем, которое мы получим, комбинируя уравнения (136) и (138):

$$Z_1'' = (\dot{p}Z_2 + qZ_2') (V_1 - \sigma^2). \quad (141)$$

Приравнявая в уравнениях (140) и (141) коэффициенты при Z_2 и Z_2' , находим

$$q (V_1 - \sigma^2) = 2p' + q'' + q (V_2 - \sigma^2), \quad (142)$$

$$p (V_1 - \sigma^2) = p'' + (p + 2q') (V_2 - \sigma^2) + qV_2', \quad (143)$$

которые удобно переписать в виде

$$q (V_1 - V_2) = 2p' + q'', \quad (144)$$

$$p (V_1 - V_2) = p'' + 2q' (V_2 - \sigma^2) + qV_2'. \quad (145)$$

Исключая из этих уравнений $(V_1 - V_2)$, получаем

$$2pp' + pq'' - p''q - 2qq' (V_2 - \sigma^2) - q^2V_2' = 0. \quad (146)$$

Уравнение (146) допускает интеграл

$$p^2 + (pq' - p'q) - q^2 (V_2 - \sigma^2) = \text{const} = C^2. \quad (147)$$

Функции p и q должны удовлетворять уравнениям (144) и (147), если комбинация $pZ_2 + qZ_2'$ является решением уравнения (136). В общем случае (т. е. при произвольно заданных функциях V_1 и V_2) нельзя надеяться решить эти уравнения явно. Однако в конкретном рассматриваемом случае это оказывается возможным! Действительно, легко проверить, что в данном случае функции

$$q = 2\beta (= \text{const}), \quad p = \kappa + 2\beta^2f \quad (148)$$

удовлетворяют уравнениям (144) и (147), причем

$$C^2 = \kappa^2 + 4\beta^2\sigma^2. \quad (149)$$

Следовательно, решения Z_1 и Z_2 связаны между собой соотношением

$$(\kappa + 2i\sigma\beta) Z_1 = (\kappa + 2\beta^2f) Z_2 + 2\beta Z_2', \quad (150)$$

где относительная нормировка Z_1 и Z_2 выбрана таким образом, чтобы обратное соотношение (при той же нормировке) имело вид

$$(\kappa - 2i\sigma\beta) Z_2 = (\kappa + 2\beta^2f) Z_1 - 2\beta Z_1'. \quad (151)$$

Если же β , κ и f заданы уравнениями (134) и (135) (этот конкретный случай нам и необходим), то соотношения (150) и (151) принимают вид

$$\begin{aligned} & [\mu^2 (\mu^2 + 2) + 12i\sigma M] Z^{(+)} = \\ & = [\mu^2 (\mu^2 + 2) + 72M^2\Delta/r^3 (\mu^2 r + 6M)] Z^{(-)} + 12MZ_{r*}^{(-)}, \end{aligned} \quad (152)$$

$$\begin{aligned} & [\mu^2 (\mu^2 + 2) - 12i\sigma M] Z^{(-)} = \\ & = [\mu^2 (\mu^2 + 2) + 72M^2\Delta/r^3 (\mu^2 r + 6M)] Z^{(+)} - 12MZ_{r*}^{(+)}. \end{aligned} \quad (153)$$

В § 27 мы рассмотрим другие следствия полученных соотношений и найдем другие соотношения, следующие из вида потенциалов, задаваемых уравнениями (133).

Интересное следствие соотношений (152) и (153) можно получить, подставляя вместо L , X и N решения (71), (72) и (75) в выражение

$$\mathcal{Z} = (1/r) (nr + 3M) [N - (n + 1) rL/3M] + \\ + [(n + 1) - p/r] (L + X). \quad (154)$$

Находим, что члены с Φ сокращаются (это одна из причин для рассмотрения именно выражения (154)), и $\mathcal{Z}$ равно

$$\mathcal{Z} = -nZ_{,r_*}^{(+)} + \left[\frac{n^2(n+1)}{3M} + 3Mn \frac{r-2M}{r^3(nr+3M)} \right] Z^{(+)}. \quad (155)$$

Следовательно,

$$(12M/n)\mathcal{Z} = -12MZ_{,r_*}^{(+)} + [4n(n+1) + 36M^2\Delta/r^3(nr+3M)]Z^{(+)}. \quad (156)$$

Сравнивая это последнее уравнение с уравнением (153) и вспоминая, что $\mu^2 = 2n$, заключаем, что выражение для $\mathcal{Z}$, составленное из радиальных функций, описывающих *полярные возмущения*, удовлетворяет волновому уравнению, соответствующему *аксиальным возмущениям*!

27. Задача об отражении и прохождении волн

В настоящем параграфе мы рассмотрим волновые уравнения, которым удовлетворяют функции $Z^{(+)}$ и $Z^{(-)}$, с точки зрения физических процессов, ими описываемых, и физический смысл входящих в них величин.

Заметим сначала, что потенциалы $V^{(+)}$ и $V^{(-)}$ — гладкие функции, интегрируемые во всей области изменения переменной r_* ($+\infty, -\infty$) и всюду положительные. Кроме того, потенциалы спадают при $r_* \rightarrow +\infty$ обратно пропорционально квадрату радиуса и экспоненциально стремятся к нулю по мере приближения к горизонту, т. е. при $r_* \rightarrow -\infty$. Таким образом, имеем

$$V^{(\pm)} \rightarrow \begin{cases} 2(n+1)r^{-2}, & \text{когда } r \rightarrow r_* \rightarrow +\infty, \\ (\text{const})_{\pm} e^{r_*/2M}, & \text{когда } r_* \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (157)$$

Поскольку $V^{(\pm)}$ при $r_* \rightarrow \pm\infty$ спадают быстрее, чем r_*^{-1} , решения $Z^{(\pm)}$ при $r_* \rightarrow \pm\infty$ имеют асимптотику

$$e^{\pm i\sigma r_*} (r_* \rightarrow \pm\infty). \quad (158)$$

При действительных σ , таким образом, решения $Z^{(\pm)}$ описывают входящие и уходящие волны. Следовательно, физические процессы, описываемые нашими волновыми уравнениями, — это про-

цессы отражения и прохождения падающих (из $+\infty$ или $-\infty$) волн в поле с одномерными потенциальными барьерами $V^{(\pm)}$. Это задача о прохождении через одномерный потенциальный барьер, рассматриваемая в квантовой механике. Более точно, мы должны искать решения волновых уравнений, удовлетворяющие граничным условиям

$$Z^{\pm} \rightarrow \begin{cases} e^{+i\sigma r_*} + R^{(\pm)}(\sigma) e^{-i\sigma r_*} & (r_* \rightarrow +\infty), \\ T^{(\pm)}(\sigma) e^{+i\sigma r_*} & (r_* \rightarrow -\infty). \end{cases} \quad (159)$$

Эти граничные условия соответствуют *падающей* из $+\infty$ волне единичной амплитуды, которая в результате рассеяния на потенциальном барьере превращается в суперпозицию *отраженной волны* с амплитудой $R^{(\pm)}(\sigma)$ на $+\infty$ и *проходящей волны* с амплитудой $T^{(\pm)}(\sigma)$ на $-\infty$. (Заметим, что граничные условия мы наложили с учетом физических требований — от горизонта волны не идут.)

Поскольку потенциалы действительные, комплексно сопряженные решения будут удовлетворять комплексно сопряженным граничным условиям

$$Z^{(\pm)*} \rightarrow \begin{cases} e^{-i\sigma r_*} + R^{(\pm)*}(\sigma) e^{+i\sigma r_*} & (r_* \rightarrow +\infty), \\ T^{(\pm)*}(\sigma) e^{-i\sigma r_*} & (r_* \rightarrow -\infty). \end{cases} \quad (160)$$

Вронскиан двух независимых решений $Z^{(\pm)}$ и $Z^{(\pm)*}$

$$[Z^{(\pm)} Z^{(\pm)*}] = Z^{(\pm)}_{,r_*} Z^{(\pm)*} - Z^{(\pm)} Z^{(\pm)*}_{,r_*} \quad (161)$$

должен быть постоянным, поэтому, вычисляя его значения на $+\infty$ и $-\infty$, получаем

$$-2i\sigma (|R^{(\pm)}(\sigma)|^2 - 1) = +2i\sigma |T^{(\pm)}(\sigma)|^2. \quad (162)$$

Перепишем это соотношение в виде

$$\mathbb{R}^{(\pm)}(\sigma) + \mathbb{T}^{(\pm)}(\sigma) = 1, \quad (163)$$

где

$$\mathbb{R}^{(\pm)}(\sigma) = |R^{(\pm)}(\sigma)|^2, \quad \mathbb{T}^{(\pm)}(\sigma) = |T^{(\pm)}(\sigma)|^2. \quad (164)$$

Величины $\mathbb{R}^{(\pm)}$ и $\mathbb{T}^{(\pm)}$ называются соответственно *коэффициентами отражения и прохождения*.

а. Равенство коэффициентов отражения и прохождения для аксиальных и полярных возмущений. Рассмотрим общую задачу об отражении и прохождении волн, описываемую парой волновых уравнений (136) и (137). Из уравнений (150) и (151), связывающих решения этих двух уравнений, и из нашего предположе-

Таблица 3

Коэффициент отражения R и фазы амплитуд отраженных волн $\delta^{(+)}$ и $\delta^{(-)}$ (в радианах) для аксиальных и полярных волн при $l = 2$ и различных частотах σ

σ/M	R	$\delta^{(+)}$	$\delta^{(-)}$
0,10	1,0000	3,172	3,272
0,20	0,9991	2,462	2,661
0,30	0,9945	1,198	1,496
0,32	0,8895	0,854	1,171
0,34	0,7929	0,471	0,808
0,36	0,6491	0,057	0,413
0,38	0,4754	5,909	0,001
0,40	0,3102	5,482	5,877
0,42	0,1841	5,080	5,494
0,44	0,1027	4,710	5,143
0,46	0,05533	4,371	4,823
0,48	0,02935	4,061	4,532
0,50	0,01548	3,773	4,263
0,52	0,00817	3,504	4,013
0,54	0,00433	3,250	3,777
0,56	0,00230	3,007	3,553
0,58	0,00123	2,775	3,340
0,60	0,00065	2,552	3,135
0,62	0,00036	2,337	2,938
0,64	0,00019	2,127	2,746
0,66	0,00010	1,923	2,560
0,68	0,00006	1,724	2,379
0,70	0,00003	1,530	2,203

Коэффициенты отражения R при $l > 2$

$\sigma M/l$	$l = 3$	$l = 4$	$l = 5$	$l = 6$
0,130	0,9995			
0,140	0,9985			
0,150	0,9953			
0,160	0,9863	0,9973		
0,170	0,9604	0,9888		
0,180	0,8935	0,9563	0,9787	0,9886
0,190	0,7469	0,8471	0,8934	0,9192
0,200	0,5137	0,5890	0,6109	0,6064
0,210	0,2774	0,2745	0,2312	0,1768
0,220	0,1236	0,0924	0,0556	0,0296
0,230	0,0471	0,0272	0,0117	0,0046
0,240	0,0192	0,0074	0,0023	0,0008
0,250	0,0077	0,0018	0,0005	
0,260	0,0029	0,0009		

ния о стремлении функций f к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$ следует, что если Z_2 имеет асимптотическое поведение

$$Z_2 \rightarrow e^{+i\sigma x} \quad \text{и} \quad Z_2 \rightarrow e^{-i\sigma x} \quad (x \rightarrow \pm\infty), \quad (165)$$

асимптотики Z_1 имеют вид

$$Z_1 \rightarrow e^{+i\sigma x} \quad \text{и} \quad Z_1 \rightarrow \frac{\kappa - 2i\sigma\beta}{\kappa + 2i\sigma\beta} e^{-i\sigma x} \quad (x \rightarrow \pm\infty). \quad (166)$$

Соответственно этому если потенциалы равны V_1 и V_2 , то для отраженных и прошедших волн имеем

$$T_1(\sigma) = T_2(\sigma), \quad R_1(\sigma) = \frac{\kappa - 2i\sigma\beta}{\kappa + 2i\sigma\beta} R_2(\sigma). \quad (167)$$

Таким образом, *поскольку амплитуды прошедших волн абсолютно одинаковы для потенциалов V_1 и V_2 , амплитуды отраженных волн отличаются только фазами:*

$$R_1(\sigma) = e^{i\delta} R_2(\sigma), \quad \text{где} \quad e^{i\delta} = \frac{\kappa - 2i\sigma\beta}{\kappa + 2i\sigma\beta}. \quad (168)$$

Отсюда следует равенство коэффициентов отражения и прохождения.

В нашем конкретном случае, когда Z_1 и Z_2 равны $Z^{(+)}$ и $Z^{(-)}$, разность фаз амплитуд отраженных волн равна (см. уравнение (134))

$$e^{i\delta} = \frac{\mu^2(\mu^2 + 2) - 12i\sigma M}{\mu^2(\mu^2 + 2) + 12i\sigma M}. \quad (169)$$

В табл. 3 даются краткая сводка значений коэффициентов отражения и прохождения (одинаковых для аксиальных и полярных возмущений) и разность фаз амплитуд отраженных волн, даваемых уравнением (169).

Отметим следующий из соотношений (150) и (151) для решений Z_1 и Z_2 факт, что если V_1 допускает дискретный спектр состояний, то точно такой же дискретный спектр допускает и потенциал V_2 . Однако, поскольку потенциалы $V^{(+)}$ и $V^{(-)}$ всюду положительны, спектр не может быть дискретным.

28. Элементы теории одномерного потенциального рассеяния и необходимое условие равенства амплитуд прохождения для двух потенциалов

В § 27 мы показали, что пара потенциалов (133) приводит к одинаковым амплитудам прохождения для всех значений σ . Возникает вопрос, каким необходимым условиям должны удовлетворять потенциалы, обладающие таким свойством. Этот вопрос связан с обратной задачей рассеяния, целью которой является определение потенциалов по известной S-матрице (см. уравне-

ние (179)), и ее развитием в теории солитонов и теории уравнения Кортевега—де Фриза. Кроме того, этот же вопрос возникнет при изучении подобной задачи для керровской черной дыры в гл. 9, где мы будем иметь дело с комплексными потенциалами и потенциалами, содержащими сингулярности. Для этих случаев еще нет хорошо разработанной теории, поэтому мы сделаем краткий обзор элементов существующей теории и найдем необходимые условия, которым удовлетворяют потенциалы, приводящие к одинаковым амплитудам прохождения.

В теории одномерного потенциального рассеяния исследуются решения волнового уравнения Шредингера

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \sigma^2\right)f = Vf \quad (-\infty < x < +\infty), \quad (170)$$

где $V(x)$ — гладкая функция x . Мы предположим также, что интегралы по бесконечной области изменения x (от $-\infty$ до $+\infty$) от любых полиномов, построенных из функции V и ее производных всех порядков, конечны. При этих ограничениях на V асимптотики решений уравнения (170) равны

$$e^{\pm i\sigma x}. \quad (171)$$

Рассмотрим теперь два частных решения $f_1(x, \sigma)$ и $f_2(x, \sigma)$, имеющих следующее асимптотическое поведение:

$$\begin{aligned} f_1(x, \sigma) &\rightarrow e^{-i\sigma x} \quad (x \rightarrow +\infty), \\ f_2(x, \sigma) &\rightarrow e^{+i\sigma x} \quad (x \rightarrow -\infty). \end{aligned} \quad (172)$$

Два решения уравнения (170) $f_1(x, \sigma)$ и $f_1(x, -\sigma)$ независимы, поскольку их вронскиан отличен от нуля:

$$\begin{aligned} [f_1(x, \sigma), f_1(x, -\sigma)] &= \\ &= \{f_1'(x, \sigma)f_1(x, -\sigma) - f_1(x, \sigma)f_1'(x, -\sigma)\} = \text{const} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \{e^{i\sigma x}(-i\sigma)e^{-i\sigma x} - e^{-i\sigma x}(i\sigma)e^{+i\sigma x}\} = -2i\sigma \neq 0. \end{aligned} \quad (173)$$

Точно так же

$$[f_2(x, \sigma), f_2(x, -\sigma)] = +2i\sigma \neq 0, \quad (174)$$

и, следовательно, $f_2(x, \sigma)$ и $f_2(x, -\sigma)$ также являются независимыми решениями уравнения (170). Отсюда следует, что существуют однозначно определяемые функции $R_1(\sigma)$, $R_2(\sigma)$, $T_1(\sigma)$ и $T_2(\sigma)$, такие, что при $\sigma \neq 0$

$$f_2(x, \sigma) = \frac{R_1(\sigma)}{T_1(\sigma)} f_1(x, \sigma) + \frac{1}{T_1(\sigma)} f_1(x, -\sigma), \quad (175)$$

$$f_1(x, \sigma) = \frac{R_2(\sigma)}{T_2(\sigma)} f_2(x, \sigma) + \frac{1}{T_2(\sigma)} f_2(x, -\sigma). \quad (176)$$

Из предположения (172) и представлений (175) и (176) получаем

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x, \sigma) = \frac{R_1(\sigma)}{T_1(\sigma)} e^{-i\sigma x} + \frac{1}{T_1(\sigma)} e^{+i\sigma x}, \quad (177)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x, \sigma) = \frac{R_2(\sigma)}{T_2(\sigma)} e^{+i\sigma x} + \frac{1}{T_2(\sigma)} e^{-i\sigma x}, \quad (178)$$

откуда можем заключить, что $T_1(\sigma) f_2(x, \sigma)$ соответствует падающей из $+\infty$ волне с единичной амплитудой (ср. с уравнением (159)), которая после взаимодействия с потенциалом $V(x)$ превращается в суперпозицию отраженной волны амплитуды $R_1(\sigma)$ и прошедшей волны амплитуды $T_1(\sigma)$. Точно так же $T_2(\sigma) f_1(x, \sigma)$ соответствует падающей из $-\infty$ волне единичной амплитуды, переходящей в суперпозицию отраженной волны амплитуды $R_2(\sigma)$ и прошедшей волны амплитуды $T_2(\sigma)$.

Определим *матрицу рассеяния*, или *S-матрицу*, следующим образом ($\sigma \neq 0$):

$$S(\sigma) = \begin{vmatrix} T_1(\sigma) & R_2(\sigma) \\ R_1(\sigma) & T_2(\sigma) \end{vmatrix}. \quad (179)$$

Из соотношений (173) и (174) и представлений (175) и (176) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_1(\sigma)} &= -\frac{1}{2i\sigma} [f_1(x, \sigma), f_2(x, \sigma)] = \frac{1}{T_2(\sigma)}, \\ \frac{R_1(\sigma)}{T_1(\sigma)} &= -\frac{1}{2i\sigma} [f_2(x, \sigma), f_1(x, -\sigma)], \\ \frac{R_2(\sigma)}{T_2(\sigma)} &= -\frac{1}{2i\sigma} [f_2(x, -\sigma), f_1(x, \sigma)]. \end{aligned} \quad (180)$$

Таким образом,

$$T_1(\sigma) = T_2(\sigma) = T(\sigma), \quad (181)$$

$$\frac{R_1(\sigma)}{T(\sigma)} = -\frac{R_2(-\sigma)}{T(-\sigma)}, \quad \frac{R_1(-\sigma)}{T(-\sigma)} = -\frac{R_2(\sigma)}{T(\sigma)}. \quad (182)$$

Кроме того,

$$T^*(\sigma) = T(-\sigma), \quad R_1^*(\sigma) = R_1(-\sigma), \quad R_2^*(-\sigma) = R_2(\sigma). \quad (183)$$

Подставляя далее в уравнение (176) для $f_1(x, \sigma)$ представление (175) для $f_2(x, \sigma)$ и приравнявая в получившемся выражении коэффициенты при $f_1(x, \sigma)$ и $f_1(x, -\sigma)$ (что допустимо вследствие независимости этих решений), находим

$$1 = \frac{R_2(\sigma) R_1(\sigma)}{T(\sigma) T(\sigma)} + \frac{1}{T(\sigma) T(-\sigma)}. \quad (184)$$

С помощью уравнений (182) и (183) можно переписать соотношение (184) в альтернативных формах:

$$|R_1(\sigma)|^2 + |T(\sigma)|^2 = |R_2(\sigma)|^2 + |T(\sigma)|^2 = 1. \quad (185)$$

Из уравнения (185) следует, что

$$|R_1(\sigma)|, |R_2(\sigma)|, |T(\sigma)| \leq 1 \quad (186)$$

и, кроме того, что $R_1(\sigma)$ и $R_2(\sigma)$ могут отличаться только фазой. Соотношения (181) — (183) определяют симметрию и доказывают унитарность S -матрицы.

а. Функции Йоста и интегральные уравнения для них. В теории потенциального рассеяния вводятся функции Йоста

$$m_1(x, \sigma) = e^{+i\sigma x} f_1(x, \sigma), \quad m_2(x, \sigma) = e^{-i\sigma x} f_2(x, \sigma), \quad (187)$$

удовлетворяющие граничным условиям (см. уравнение (172))

$$\begin{aligned} m_1(x, \sigma) &\rightarrow 1 \quad (x \rightarrow +\infty), \\ m_2(x, \sigma) &\rightarrow 1 \quad (x \rightarrow -\infty). \end{aligned} \quad (188)$$

Пусть теперь σ может принимать комплексные значения и пусть $\text{Im } \sigma < 0$, так что функции $f_1(x, \sigma)$ и $f_2(x, \sigma)$, определяемые уравнением (172), стремятся к нулю соответственно при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$.

Выраженные через функции Йоста, уравнения (175) и (176) принимают вид

$$T(\sigma) m_2(x, \sigma) = R_1(\sigma) e^{-2i\sigma x} m_1(x, \sigma) + m_1(x, -\sigma), \quad (189)$$

$$T(\sigma) m_1(x, \sigma) = R_2(\sigma) e^{+2i\sigma x} m_2(x, \sigma) + m_2(x, -\sigma). \quad (190)$$

Из асимптотик (188) следует, в частности, что

$$m_2(x, \sigma) = \frac{R_1(\sigma)}{T(\sigma)} e^{-2i\sigma x} + \frac{1}{T(\sigma)} + o(1) \quad (x \rightarrow +\infty), \quad (191)$$

$$m_1(x, \sigma) = \frac{R_2(\sigma)}{T(\sigma)} e^{+2i\sigma x} + \frac{1}{T(\sigma)} + o(1) \quad (x \rightarrow -\infty). \quad (192)$$

Заметим также, что функции Йоста удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$-\frac{d^2 m_1}{dx^2} - 2i\sigma \frac{dm_1}{dx} = V m_1, \quad \frac{d^2 m_2}{dx^2} + 2i\sigma \frac{dm_2}{dx} = V m_2. \quad (193)$$

Теперь мы получим интегральное уравнение для функции $m_2(x)$. Полагая

$$f_2(x, \sigma) = e^{i\sigma x} + \psi(x, \sigma) \quad (\psi \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow -\infty), \quad (194)$$

находим, что ψ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \sigma^2 \right) \psi = (e^{i\sigma x} + \psi) V. \quad (195)$$

Функция Грина этого уравнения, но с $V = 0$, равна

$$G(x - x') = (1/\sigma) \sin \sigma (x - x') \theta(x - x'), \quad (196)$$

где $\theta(x - x')$ — ступенчатая функция:

$$\theta(x - x') = \begin{cases} 1 & \text{при } x > x', \\ 0 & \text{при } x < x'. \end{cases} \quad (197)$$

Следовательно, (поскольку $\psi \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$),

$$\psi(x, \sigma) = (1/2i\sigma) \int_{-\infty}^x [e^{i\sigma(x-x')} - e^{-i\sigma(x-x')}] V(x') \times \\ \times [e^{i\sigma x'} + \psi(x', \sigma)] dx'. \quad (198)$$

Переписывая это уравнение через функцию Йоста

$$m_2(x, \sigma) = e^{-i\sigma x} f_2(x, \sigma) = 1 + e^{-i\sigma x} \psi(x, \sigma), \quad (199)$$

получаем

$$m_2(x; \sigma) = 1 - (1/2i\sigma) \int_{-\infty}^x (e^{2i\sigma(x'-x)} - 1) V(x') m_2(x', \sigma) dx'. \quad (200)$$

Уравнение (200) в случае $\sigma \neq 0$ является интегральным уравнением Вольтерра для функции $m_2(x, \sigma)$, и при $\text{Im } \sigma < 0$ его решение, получаемое последовательными итерациями, сходится для всех гладких интегрируемых функций V . Очевидно также, что решение, получаемое итерациями, является разложением $m_2(x, \sigma)$ в ряд по обратным степеням σ . Основываясь на этом, можно показать, что $m_2(x, \sigma)$ есть аналитическая функция в нижней полуплоскости комплексной переменной σ (т. е. при $\text{Im } \sigma < 0$) и, кроме того, что $m_2(x, \sigma)$ непрерывна при $\text{Im } \sigma \leq 0$ ($\sigma \neq 0$).

Из уравнения (200) следует

$$m_2(x, \sigma) = -e^{-2i\sigma x} \left[(1/2i\sigma) \int_{-\infty}^x e^{+2i\sigma x'} V(x') m_2(x', \sigma) dx' \right] + \\ + \left[1 + (1/2i\sigma) \int_{-\infty}^x V(x') m_2(x', \sigma) dx' \right] = \\ = -e^{-2i\sigma x} \left[(1/2i\sigma) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+2i\sigma x'} V(x') m_2(x', \sigma) dx' \right] + \\ + \left[1 + (1/2i\sigma) \int_{-\infty}^{+\infty} V(x') m_2(x', \sigma) dx' \right] + o(1) \quad (x \rightarrow \infty). \quad (201)$$

Сравнение этого результата с уравнением (191) показывает, что

$$\frac{R_1(\sigma)}{T(\sigma)} = - (1/2i\sigma) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\sigma x} V(x) m_2(x, \sigma) dx, \quad (202)$$

$$\frac{1}{T(\sigma)} = 1 + (1/2i\sigma) \int_{-\infty}^{+\infty} V(x) m_2(x, \sigma) dx. \quad (203)$$

Ясно, что можно выписать подобные же уравнения для $R_2(\sigma)/T(\sigma)$ и $1/T(\sigma)$ через функцию Йоста $m_1(x, \sigma)$.

Из уравнения (203) можно вывести одно важное следствие. При $\text{Im } \sigma < 0$ мы можем получить сходящееся разложение для функции $1/T(\sigma)$, используя решение для функции Йоста $m_2(x, \sigma)$, полученное последовательными итерациями интегрального уравнения Вольтерра (200). Это разложение является разложением в ряд по обратным степеням σ с ограниченными коэффициентами, если $V(x)$ удовлетворяет наложенным нами требованиям конечности интегралов от всех полиномов, построенных из функции V и ее производных. В частности, из уравнения (203) следует, что

$$T(\sigma) = 1 - (1/2i\sigma) \int_{-\infty}^{+\infty} V(x) dx + O(\sigma^{-2}). \quad (204)$$

б. Разложение функции $\ln T(\sigma)$ в ряд по обратным степеням σ и необходимые условия того, чтобы различные потенциалы приводили к одинаковым амплитудам прохождения. Мы видели, как можно получить разложение $1/T(\sigma)$ в ряд по σ^{-1} , комбинируя уравнения (200) и (203). Явные выражения для коэффициентов в этом разложении, однако, удобно получать, следуя другим путем, предложенным Фаддеевым.

Сделаем подстановку

$$m_2(x, \sigma) = e^{w(x, \sigma)}. \quad (205)$$

Уравнение (193), которому удовлетворяет $m_2(x, \sigma)$, принимает теперь вид

$$w'' + 2i\sigma w' + (w')^2 - V = 0, \quad (206)$$

где штрих означает дифференцирование по x . Поскольку $m_2 \rightarrow 1$ при $x \rightarrow -\infty$,

$$w \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow -\infty). \quad (207)$$

Из уравнения (191) следует, что

$$w \rightarrow -\ln T(\sigma) \quad (x \rightarrow +\infty, \text{Im } \sigma < 0). \quad (208)$$

Полагая теперь

$$w(x, \sigma) = \int_{-\infty}^x v(x', \sigma) dx' \quad (w' = v), \quad (209)$$

получаем уравнение

$$v' + 2i\sigma v + v^2 - V = 0. \quad (210)$$

Требование (208) приводит к следующему интегральному уравнению:

$$\ln T(\sigma) = - \int_{-\infty}^{\infty} v(x, \sigma) dx. \quad (211)$$

Будем искать теперь решение уравнения (210) для v в виде ряда по степеням σ^{-1} :

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)/(2i\sigma)^n, \quad (212)$$

где, как следует из уравнений (204) и (211),

$$v_1 = V. \quad (213)$$

Подставляя разложение (212) в уравнение (211), получаем

$$\ln T(\sigma) = - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sigma^{-n}, \quad (214)^*$$

$$(2i)^n c_n = \int_{-\infty}^{+\infty} v_n(x) dx. \quad (215)$$

Подставляя теперь разложение (212) в уравнение (210) и приравнявая коэффициенты при соответствующих степенях $1/\sigma$, получим рекуррентное соотношение

$$v_n = -v'_{n-1} - \sum_{l=1}^{n-1} v_l v_{n-1-l}, \quad (216)$$

с помощью которого можно вычислить все v_n , начиная с

$$v_1 = V. \quad (217)$$

Находим

$$\begin{aligned} v_2 &= -v'_1 = -V', \quad v_3 = -v'_2 - v_1^2 = V'' - V^2, \\ v_4 &= -v'_3 - 2v_1 v_2 = -V''' + 2(V^2)', \\ v_5 &= -v'_4 - 2v_1 v_3 - v_2^2 = V'''' - 3(V^2)'' + (V')^2 + 2V^3 \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (218)$$

Коэффициенты с нечетными номерами c_{2n+1} в разложении $\ln T(\sigma)$, таким образом, равны

$$\begin{aligned} 2ic_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} V dx; \quad - (2i)^3 c_3 = \int_{-\infty}^{\infty} V^2 dx; \\ (2i)^5 c_5 &= \int_{-\infty}^{\infty} (2V^3 + V'^2) dx \text{ и т. д.,} \end{aligned} \quad (219)$$

* Я благодарен д-ру Розе Траутман, указавшей мне, что этот результат прямо следует из альтернативного разложения для $\ln T(\sigma)$, предложенного В. Е. Захаровым и Л. Д. Фаддеевым (Funct. Anal. Appl., 5, 280, 1971):

$$\ln T(\sigma) = (i/2\pi) \sum_{n=1}^{\infty} (1/\sigma^n) \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma')^{n-1} \ln |T(\sigma')|^2 d\sigma',$$

а все коэффициенты с четными номерами равны нулю.

Теперь ясно, что если два потенциала дают одинаковые коэффициенты прохождения $T(\sigma)$, то полученные ряды для $\ln T(\sigma)$ (сходящиеся при $\text{Im } \sigma < 0$) для этих двух потенциалов должны быть почленно равны. Поэтому интегралы от функций

$$(1) V; (2) V^2; (3) 2V^3 + V'^2; (4) 5V^4 + 10VV'^2 + V''^2; \\ (5) 14V^5 + 70V^2V'^2 + 14VV''^2 + V'''^2 \text{ и т. д.} \quad (220)$$

должны быть равны. Эти интегралы формально совпадают с сохраняющимися величинами уравнения Кортевега—де Фриза

$$u_{,t} - 6uu_{,x} + u_{,xxx} = 0. \quad (221)$$

Это совпадение не случайное, но выяснение причин уведет нас слишком далеко в сторону. Интересующиеся могут обратиться к соответствующей литературе, указанной в библиографических замечаниях к настоящей главе.

в. Прямая проверка иерархии интегральных соотношений для потенциалов $V^{(\pm)} = \pm\beta f' + \beta^2 f^2 + \kappa f$. Интегральные равенства для конкретных потенциалов $V^{(+)}$ и $V^{(-)}$, заданных уравнениями (136) и (137), можно проверить, вычисляя выражения (220) для потенциала

$$V = \beta f' + \beta^2 f^2 + \kappa f \quad (222)$$

и показав, что нечетные по β члены выражаются в виде производных от комбинаций функции f и ее производных и, следовательно, обращаются в нуль при интегрировании (вследствие предположения о стремлении к нулю f и всех ее производных при $x \rightarrow \pm\infty$).

Например, равенство интегралов от $V^{(+)}$ и $V^{(-)}$ следует из того факта, что интеграл от $\beta f'$ обращается в нуль.

Рассматривая V^2 , находим, что члены, нечетные по β , равны

$$2\beta (\beta^2 f^2 + \kappa f) f' = \frac{2}{3}\beta^3 (f^3)' + \kappa\beta (f^2)'. \quad (223)$$

Интеграл от этого выражения, очевидно, равен нулю, а остальные члены, четные по β , одинаковы для $V^{(+)}$ и $V^{(-)}$. Точно так же нечетные по β члены в выражении для $2V^3 + V'^2$ приводятся к

$$2\beta^3 (ff'^2)' + \kappa\beta (f'^2)' + 6\beta (\beta^2 f^2 + \kappa f)^2 f', \quad (224)$$

и интеграл от них также равен нулю. Равенство интегралов от двух оставшихся величин, перечисленных в (220), может быть проверено, хотя громоздкость выражений быстро возрастает.

Прямое вычисление интегралов от выражений (220) для потенциалов $V^{(+)}$ и $V^{(-)}$, соответствующих шварцшильдовской черной дыре, дает ($p = 2n + 1$)

$$1) (2p - 3)/4M, \\ 2) (5p^2 - 18p + 18)/480M^3, \\ 3) (16p^3 - 83p^2 + 150p - 87)/26880M^5, \quad (225)$$

$$4) \frac{1}{128M^7} \left(\frac{1}{168} p^4 - \frac{53}{1386} p^3 + \frac{263}{2772} p^2 - \frac{147}{1430} p + \frac{444}{10010} \right);$$

$$5) \frac{1}{512M^9} \left(\frac{14}{6435} p^5 - \frac{41}{2574} p^4 + \frac{56}{1155} p^3 - \frac{2557}{34320} p^2 + \frac{1203}{19448} p - \frac{723}{38896} \right).$$

29. Описание возмущений в формализме Ньюмена — Пенроуза

При исследовании возмущений метрики, проведенном в предыдущем параграфе, мы несколько раз оказывались в ситуации, когда не могли объяснить, откуда возникают те или иные соотношения. Например, почему коэффициенты отражения и прохождения одинаковы для полярных и аксиальных возмущений? Почему существует такая простая связь между решениями для полярных и аксиальных возмущений? И почему, наконец, потенциалы $V^{(+)}$ и $V^{(-)}$ получаются из одной и той же формулы, в которой лишь нужно изменить знак одного члена? Глубокие физические причины возникновения подобных соотношений пока еще не поняты. Эти соотношения были найдены нами эмпирически, но впервые они были получены в формализме Ньюмена — Пенроуза, что и будет рассмотрено в этом разделе.

Предположим, что зависимость различных величин от времени t и азимутального угла φ имеет следующий вид:

$$\exp \{i(\sigma t + m\varphi)\}, \quad (226)$$

где σ — постоянная величина, а m — целое число, которое может быть положительным, отрицательным или нулем. Действие производных D , Δ , δ и δ^* по направлению базисных изотропных векторов, введенных в гл. 3 (уравнение (281)), на функции с зависимостью (226) от времени и момента количества движения можно описать следующим образом:

$$l = D = \mathcal{D}_0, \quad n = \Delta = -(\Delta/2r^2)\mathcal{D}_0^+,$$

$$m = \delta = 2^{-1} {}^2r^{-1}\mathcal{L}_0^+, \quad \bar{m} = \delta^* = 2^{-1} {}^2r^{-1}\mathcal{L}_0, \quad (227)$$

где

$$\mathcal{D}_n = \partial_r + ir^2\sigma/\Delta + 2n(r - M)/\Delta,$$

$$\mathcal{D}_n^+ = \partial_r - ir^2\sigma/\Delta + 2n(r - M)/\Delta, \quad (228)$$

$$\mathcal{L}_n = \partial_\theta + n \operatorname{ctg} \theta + m \operatorname{cosec} \theta, \quad \mathcal{L}_n^+ = \partial_\theta + n \operatorname{ctg} \theta - m \operatorname{cosec} \theta.$$

Следует отметить, что $\mathcal{D}_n$ и $\mathcal{D}_n^+$ являются чисто радиальными операторами, а $\mathcal{L}_n$ и $\mathcal{L}_n^+$ — чисто угловыми операторами.

Дифференциальные операторы (228) удовлетворяют ряду тождеств, которые будут нам полезны:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_n^\dagger &= (\mathcal{D}_n)^*, \quad \mathcal{L}_n^\dagger(\theta) = -\mathcal{L}_n(\pi - \theta), \\ \Delta \mathcal{D}_{n+1} &= \mathcal{D}_n \Delta, \quad \sin \theta \mathcal{L}_{n+1} = \mathcal{L}_n \sin \theta.\end{aligned}\quad (229)$$

Как мы проверили прямыми вычислениями (§ 21), вейлевские скаляры Ψ_0 , Ψ_1 , Ψ_3 и Ψ_4 и спинные коэффициенты κ , σ , λ и ν равны нулю в фоновой метрике Шварцшильда, что следует также из принадлежности метрики Шварцшильда к типу D по классификации Петрова. Единственный не равный нулю вейлевский скаляр — это Ψ_2 , равный

$$\Psi_2 = -Mr^{-3} \quad (230)$$

(см. уравнение (290) гл. 3), а ненулевые спинные коэффициенты равны (см. уравнение (288) гл. 3)

$$\begin{aligned}\rho &= -1/r, \quad -\alpha = \beta = \operatorname{ctg} \theta/2 \sqrt{2} r, \\ \mu &= -\Delta/2r^3, \quad \gamma = \mu + (r - M)/2r^2 = M/2r^2.\end{aligned}\quad (231)$$

а. Линейные по возмущениям уравнения формализма Ньюмена — Пенроуза. Среди различных уравнений формализма Ньюмена — Пенроуза, перечисленных в гл. 1 (§ 8, *в—д*), есть шесть уравнений — четыре тождества Бианки (гл. 1, уравнения (321а), (321г), (321д) и (321з)) и тождества Риччи (гл. 1, уравнения (310б) и (310к)), — которые линейны и однородны относительно величин, тождественно равных нулю для фоновой метрики:

$$\begin{aligned}(\delta^* - 4\alpha + \pi) \Psi_0 - (D - 2\varepsilon - 4\rho) \Psi_1 &= 3\kappa \Psi_2, \\ (\Delta - 4\gamma + \mu) \Psi_0 - (\delta - 4\tau - 2\beta) \Psi_1 &= 3\sigma \Psi_2,\end{aligned}\quad (232)$$

$$\begin{aligned}(D - \rho - \rho^* - 3\varepsilon + \varepsilon^*) \sigma - \\ - (\delta - \tau + \pi^* - \alpha^* - 3\beta) \kappa &= \Psi_0; \\ (D + 4\varepsilon - \rho) \Psi_4 - (\delta^* + 4\pi - 2\alpha) \Psi_3 &= -3\lambda \Psi_2, \\ (\delta + 4\beta - \tau) \Psi_4 - (\Delta + 2\gamma + 4\mu) \Psi_3 &= -3\nu \Psi_2,\end{aligned}\quad (233)$$

$$\begin{aligned}(\Delta + \mu + \mu^* + 3\gamma - \gamma^*) \lambda - \\ - (\delta^* + 3\alpha + \beta^* + \pi - \tau^*) \nu &= -\Psi_4.\end{aligned}$$

Эти уравнения уже линеаризованы в том смысле, что Ψ_0 , Ψ_1 , Ψ_3 , Ψ_4 , κ , σ , λ и ν следует рассматривать как возмущения, т. е. как величины первого порядка малости (при этом зависимость от t и ϕ имеет вид (226)). Поэтому можно все остальные величины (включая базисные векторы и, следовательно, производные по направлению) заменить на соответствующие невозмущенные зна-

чения, заданные уравнениями (227), (230) и (231). При этом получаем

$$\begin{aligned} (1/r \sqrt{2}) (\mathcal{L}_0 + 2 \operatorname{ctg} \theta) \Psi_0 - (\mathcal{D}_0 + 4/r) \Psi_1 &= -3M\kappa/r^3, \\ -(\Delta/2r^2) (\mathcal{D}_0^\dagger + 4(r-M)/\Delta - 3/r) \Psi_0 - (1/r \sqrt{2}) (\mathcal{L}_0^\dagger - \operatorname{ctg} \theta) \Psi_1 &= \\ &= -3M\sigma/r^3, \end{aligned} \quad (234)$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_0 + 2/r) \sigma - (1/r \sqrt{2}) (\mathcal{L}_0^\dagger - \operatorname{ctg} \theta) \kappa &= \Psi_0; \\ (\mathcal{D}_0 + 1/r) \Psi_4 - (1/r \sqrt{2}) (\mathcal{L}_0 - \operatorname{ctg} \theta) \Psi_3 &= +3M\lambda/r^3, \\ (1/r \sqrt{2}) (\mathcal{L}_0^\dagger + 2 \operatorname{ctg} \theta) \Psi_4 + (\Delta/2r^2) (\mathcal{D}_0^\dagger - 2(r-M)/\Delta + 6/r) \Psi_3 &= \\ &= +3M\nu/r^3, \end{aligned} \quad (235)$$

$$\begin{aligned} -(\Delta/2r^2) (\mathcal{D}_0^\dagger - 2(r-M)/\Delta + 4/r) \lambda - (1/r \sqrt{2}) (\mathcal{L}_0 - \operatorname{ctg} \theta) \nu &= \\ &= -\Psi_4. \end{aligned}$$

Введем новые функции

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \Psi_0, \quad \Phi_1 = \Psi_1 r \sqrt{2}, \\ \Phi_4 &= \Psi_4 r^4, \quad \Phi_3 = \Psi_3 r^3 / \sqrt{2}, \quad k = \kappa / r^2 \sqrt{2}, \\ s &= \sigma / r, \quad l = \lambda r / 2, \quad n = \nu r^2 / \sqrt{2}. \end{aligned} \quad (236)$$

В этих переменных уравнения (234) и (235) принимают простой и симметричный вид:

$$\mathcal{L}_2 \Phi_0 - (\mathcal{D}_0 + 3/r) \Phi_1 = -6Mk, \quad (237)$$

$$\Delta (\mathcal{D}_2^\dagger - 3/r) \Phi_0 + \mathcal{L}_{-1}^\dagger \Phi_1 = +6Ms, \quad (238)$$

$$(\mathcal{D}_0 + 3/r) s - \mathcal{L}_{-1}^\dagger k = \Phi_0 / r, \quad (239)$$

$$(\mathcal{D}_0 - 3/r) \Phi_4 - \mathcal{L}_{-1} \Phi_3 = 6Ml, \quad (240)$$

$$\mathcal{L}_2^\dagger \Phi_4 + \Delta (\mathcal{D}_{-1}^\dagger + 3/r) \Phi_3 = 6Mn, \quad (241)$$

$$\Delta (\mathcal{D}_{-1}^\dagger + 3/r) l + \mathcal{L}_{-1} n = \Phi_4 / r. \quad (242)$$

Действуя оператором $\mathcal{L}_{-1}^\dagger$ на уравнение (237) и оператором $(\mathcal{D}_0 + 3/r)$ на уравнение (238), а затем складывая получившиеся выражения, мы придем к уравнению, не содержащему Φ_1 , правая часть которого с точностью до множителя $6M$ совпадает с левой частью уравнения (239). Сравнивая эти выражения, получаем уравнение, в которое входит только одна функция Φ_0 :

$$[\mathcal{L}_{-1}^\dagger \mathcal{L}_2 + (\mathcal{D}_0 + 3/r) \Delta (\mathcal{D}_2^\dagger - 3/r)] \Phi_0 = (6M/r) \Phi_0. \quad (243)$$

Подобным же образом из уравнений (240)—(242), исключая Φ_3 , получаем уравнение для Φ_4 :

$$[\mathcal{L}_{-1} \mathcal{L}_2^\dagger + \Delta (\mathcal{D}_{-1}^\dagger + 3/r) (\mathcal{D}_0 - 3/r)] \Phi_4 = (6M/r) \Phi_4. \quad (243')$$

С помощью тождества

$$\Delta(\mathcal{D}_1 + 3/r)(\mathcal{D}_2^\dagger - 3/r) - 6M/r = \Delta\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2^\dagger + \\ + (6/r)[-ir^2\sigma + (r - M)] - 6\Delta/r^2 - 6M/r = \Delta\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2^\dagger - 6i\sigma r \quad (244)$$

можно привести уравнение (243) к виду

$$[\mathcal{L}_{-1}^\dagger \mathcal{L}_2 + (\Delta\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2^\dagger - 6i\sigma r)]\Phi_0 = 0, \quad (245)$$

а уравнение (243') к виду

$$[\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_2^\dagger + (\Delta\mathcal{D}_{-1}^\dagger\mathcal{D}_0 + 6i\sigma r)]\Phi_4 = 0. \quad (246)$$

Уравнения (245) и (246) допускают разделение переменных. Действительно, пусть

$$\Phi_0 = R_{+2}(r) S_{+2}(\theta), \quad \Phi_4 = R_{-2}(r) S_{-2}(\theta), \quad (247)$$

где $R_{\pm 2}$ — функции только переменной r , а $S_{\pm 2}$ — функции только переменной θ . Подставляя эти выражения в (245) и (246), получаем две пары уравнений:

$$\mathcal{L}_{-1}^\dagger \mathcal{L}_2 S_{+2} = -\mu^2 S_{+2}, \quad (248)$$

$$(\Delta\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2^\dagger - 6i\sigma r) R_{+2} = +\mu^2 R_{+2}; \quad (249)$$

$$\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_2^\dagger S_{-2} = -\mu^2 S_{-2}, \quad (250)$$

$$(\Delta\mathcal{D}_{-1}^\dagger\mathcal{D}_0 + 6i\sigma r) R_{-2} = +\mu^2 R_{-2}, \quad (251)$$

где μ^2 — постоянная разделения.

Следует отметить, что постоянные разделения для первой и второй пары уравнений равны. Чтобы понять, почему это так, рассмотрим сначала уравнение (248). Постоянная разделения μ^2 является собственным значением оператора $-\mathcal{L}_{-1}^\dagger \mathcal{L}_2$ и определяется из требования регулярности собственной функции $S_{+2}(\theta)$ в точках $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. С другой стороны, оператор $\mathcal{L}_{-1}^\dagger \mathcal{L}_2$ в уравнении (248) переходит в оператор $\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_2^\dagger$ в уравнении (250) при замене θ на $\pi - \theta$, откуда следует, что собственная функция $S_{+2}(\theta; \mu^2)$ в уравнении (248), принадлежащая собственному значению μ^2 , при замене θ на $\pi - \theta$ переходит в собственную функцию S_{-2} в уравнении (250), принадлежащую тому же собственному значению μ^2 . Другими словами, множество собственных значений для уравнений (248) и (250) совпадает.

Спектр собственных значений μ^2 можно найти, рассматривая (без потери общности) только случай $m = 0$ (это возможно по той же причине, по какой можно ограничиться исследованием аксиально-симметричных возмущений системы, которая в невозмущенном состоянии является сферически симметричной). Выпишем в явном виде уравнение для S_{+2} в случае $m = 0$:

$$\frac{d^2 S_{+2}}{d\theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{dS_{+2}}{d\theta} - 2(\operatorname{ctg}^2 \theta + \operatorname{cosec}^2 \theta) S_{+2} = -\mu^2 S_{+2}. \quad (252)$$

Сделаем подстановку

$$S_{+2}(\theta) = C(\theta) \operatorname{cosec}^2 \theta. \quad (253)$$

Функция $C(\theta)$ удовлетворяет уравнению

$$\sin^3 \theta \frac{d}{d\theta} \frac{1}{\sin^3 \theta} \frac{dC}{d\theta} + \mu^2 C = 0. \quad (254)$$

Сравнение с уравнениями (20) и (21) показывает

$$C(\theta) = C_{l+2}^{-3,2}(\theta), \quad \mu^2 = 2n - (l-1)(l+2). \quad (255)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} S_{+2}(\theta) &= C_{l+2}^{-3,2}(\theta) \operatorname{cosec}^2 \theta = \sin \theta \frac{d}{d\theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{dP_l}{d\theta} = \\ &= P_{l,00} - P_{l,0} \operatorname{ctg} \theta \quad (m=0), \end{aligned} \quad (256)$$

где P_l , как обычно, — функции Лежандра. В случае $m \neq 0$ $S_{+2}(\theta)$ является сферической гармоникой со спиновым весом, но значение μ^2 при этом не меняется.

Вернемся теперь к радиальному уравнению (249). Заметим, что функция $\Delta^2 R_{+2}$ удовлетворяет уравнению

$$(\Delta \mathcal{D}_{-1} \mathcal{D}_0^\dagger - 6i\sigma r) \Delta^2 R_{+2} = \mu^2 (\Delta^2 R_{+2}), \quad (257)$$

комплексно сопряженному уравнению (251) для R_{-2} .

Преобразуем уравнение (257) к стандартному виду (принятому в теории дифференциальных уравнений). Во-первых, заметим, что

$$\mathcal{D}_0 = (r^2/\Delta) \Lambda_+, \quad \mathcal{D}_0^\dagger = (r^2/\Delta) \Lambda_-, \quad (258)$$

где (см. уравнение (29))

$$\Lambda_\pm = \frac{d}{dr_*} \pm i\sigma, \quad \frac{d}{dr_*} = \frac{\Delta}{r^2} \frac{d}{dr}. \quad (259)$$

Следовательно,

$$\Delta \mathcal{D}_{-1} \mathcal{D}_0^\dagger = \Delta^2 \mathcal{D}_0 \Delta^{-1} \mathcal{D}_0^\dagger = r^2 \Delta \Lambda_+ (r^2 \Delta^{-2} \Lambda_-). \quad (260)$$

Введем функцию

$$Y_{+2} = r^{-3} \Delta^2 R_{+2}. \quad (261)$$

В силу уравнения (257) эта функция удовлетворяет следующему уравнению:

$$\Lambda_+ [(r^2/\Delta^2) \Lambda_- (r^3 Y_{+2})] - 6i\sigma r^2 \Delta^{-1} Y_{+2} = \mu^2 (r/\Delta) Y_{+2}, \quad (262)$$

которое после некоторых преобразований может быть приведено к виду

$$\Lambda^2 Y_{+2} + P \Lambda_- Y_{+2} - Q Y_{+2} = 0, \quad (263)$$

$$P = \frac{d}{dr_*} \ln (r^8/\Delta^2) = (4/r^2) (r - 3M), \quad (264)$$

$$Q = (\Delta/r^5) (\mu^2 r + 6M). \quad (265)$$

С уравнением типа (263) мы будем часто встречаться, в частности, именно в таком виде мы будем большей частью использовать уравнение для Ψ_0 .

Подобные же преобразования уравнения (251) для R_{-2} приводят к уравнению, которое комплексно сопряжено уравнению (263). Действительно, подстановка

$$Y_{-2} = r^{-3} R_{-2} \quad (266)$$

приводит к уравнению

$$\Lambda^2 Y_{-2} + P \Lambda_+ Y_{-2} - Q Y_{-2} = 0. \quad (267)$$

Поскольку Y_{+2} и Y_{-2}^* удовлетворяют одному и тому же уравнению, выполняется соотношение

$$(r^8/\Delta^2) (Y_{-2}^* \Lambda_- Y_{+2} - Y_{+2} \Lambda_- Y_{-2}^*) = \text{const}. \quad (268)$$

Но

$$Y_{-2}^* \Lambda_- Y_{+2} - Y_{+2} \Lambda_- Y_{-2}^* = Y_{+2, r_*} Y_{-2}^* - Y_{+2} Y_{-2, r_*}^*, \quad (269)$$

откуда следует, что вронскиан $[Y_{+2}, Y_{-2}^*]$ решений Y_{+2} и Y_{-2}^* имеет вид

$$[Y_{+2}, Y_{-2}^*] = \text{const } r^{-8} \Delta^2. \quad (270)$$

Вронскиан для функций $\Delta^2 R_{+2}$ и R_{-2}^* в силу подстановок (261) и (266) равен

$$[\Delta^2 R_{+2}, R_{-2}^*] = \text{const} \cdot r^{-2} \Delta^2. \quad (271)$$

Из этого последнего соотношения должен следовать «закон сохранения», точно так же как постоянство вронскиана $[Z^{(\pm)}, Z^{(\pm)*}]$ привело к закону сохранения (163). Ниже, в § 32, мы увидим, что это действительно так.

б. Завершение решения уравнений (237)—(242) и «призрачная» калибровка. В настоящей главе мы не собираемся решать все уравнения Ньюмена — Пенроуза — это будет сделано в гл. 9 для более общего случая черной дыры Керра. Тем не менее мы закончим решение уравнений (237)—(242), поскольку они нам понадобятся в гл. 5.

Предварительно заметим, что, во-первых, у нас есть только шесть уравнений, содержащих восемь неизвестных функций, и поэтому общее решение этих уравнений должно содержать две произвольные функции, и, во-вторых, уравнения (237)—(239) для Φ_0 , Φ_1 , k и s и уравнения (240)—(242) для Φ_4 , Φ_3 , l и n расцеплены. Это расщепление двух систем уравнений имеет далеко идущие последствия, изучение их мы также отложим до гл. 9.

Вернемся теперь к уравнениям (237)—(242). Мы показали выше, что эти уравнения приводят к независимым уравнениям для Φ_0 и Φ_4 . Ясно, что решения для остальных величин должны содержать две произвольные функции. Дело в том, что бесконечно

малый поворот тетрады вызывает приращения *второго* порядка малости в скалярах Ψ_0 и Ψ_4 и приращения *первого* порядка малости в скалярах Ψ_1 и Ψ_3 , если в невозмущенном пространстве-времени Ψ_0 , Ψ_1 , Ψ_3 и Ψ_4 равны нулю (см. § 8, ж, уравнения (342) и (346)). Иначе говоря, в линейной теории возмущений Ψ_0 и Ψ_4 являются калибровочно-инвариантными величинами, а Ψ_1 и Ψ_3 — нет. Следовательно, мы можем, например, выбрать калибровку (т. е. подвергнуть тетрадный базис бесконечно малому вращению), в которой Ψ_1 и Ψ_3 равны нулю, не затрагивая при этом Ψ_0 и Ψ_4 .

Если выбрать калибровку, в которой Ψ_1 и Ψ_3 равны нулю, то соответствующие решения для k , s , l и n сразу же следуют из уравнений (237), (238), (240) и (241):

$$\begin{aligned} -6Mk &= R_{+2}\mathcal{L}_2S_{+2}, & 6Ms &= S_{+2}\Delta(\mathcal{D}_2^+ - 3/r)R_{+2}; \\ +6Mn &= R_{-2}\mathcal{L}_2^+S_{-2}, & 6Ml &= S_{-2}(\mathcal{D}_0 - 3/r)R_{-2}. \end{aligned} \quad (272)$$

Чтобы получить полное описание решений уравнений (237)—(242), необходимо знать относительную нормировку радиальных функций Δ^2R_{+2} и R_{-2} . Мы найдем эту нормировку в § 32.

Разумеется, помимо калибровки, в которой Ψ_1 и Ψ_3 равны нулю, могут быть выбраны и другие калибровки, в частности, такие, в которых уравнения (237)—(242) приобретают дополнительные свойства симметрии, отсутствующие в общем виде. Посмотрим, например, как входят в уравнения (237)—(239) величины Φ_0 , k и s , с одной стороны, и величины Φ_1 , k и s — с другой. Если исключить из уравнений (237) и (238) величину Φ_1 , то уравнение (239) позволяет получить уравнение только для функции Φ_0 — назовем поэтому уравнение (239) «правильным». Но подобное же исключение Φ_0 не приводит к отцеплению Φ_1 , так как у нас нет соответствующего «правильного» четвертого уравнения. Однако мы можем воспользоваться имеющейся свободой и подвергнуть базисную тетраду такому бесконечно малому повороту, чтобы величины Φ_1 , k и s удовлетворяли дополнительному «правильному» уравнению

$$\Delta(\mathcal{D}_2^+ - 3/r)k + \mathcal{L}_2s = (2/r)\Phi_1, \quad (273)$$

позволяющему после исключения Φ_0 из уравнений (237) и (238) получить отцепленное уравнение только для Φ_1 :

$$[\Delta(\mathcal{D}_2^+ - 3/r)(\mathcal{D}_0 + 3/r) + \mathcal{L}_2\mathcal{L}_{-1}^+]\Phi_1 = 12(M/r)\Phi_1. \quad (274)$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$[(\Delta\mathcal{D}_2^+\mathcal{D}_0 - 6i\sigma r) + \mathcal{L}_2\mathcal{L}_{-1}^+]\Phi_1 = 0. \quad (275)$$

Подобным же образом, добавляя в качестве калибровочного условия уравнение

$$(\mathcal{D}_0 - 3/r)n - \mathcal{L}_2^+l = (2/r)\Phi_3 \quad (276)$$

к уравнениям (240)—(242) и исключая Φ_4 из уравнений (240) и (241), получим уравнение для Φ_3 :

$$[(\Delta \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_{-1}^\dagger + 6i\sigma r) + \mathcal{L}_2^\dagger \mathcal{L}_{-1}] \Phi_3 = 0. \quad (277)$$

Уравнения (275) и (277) допускают разделение переменных. Подстановки

$$\Phi_1 = R_{+1}(r) S_{+1}(\theta), \quad \Phi_3 = R_{-1}(r) S_{-1}(\theta) \quad (278)$$

приводят к следующей паре уравнений:

$$(\Delta \mathcal{D}_2^\dagger \mathcal{D}_0 - 6i\sigma r) R_{+1} = \mu^2 R_{+1}, \quad \mathcal{L}_2 \mathcal{L}_{-1}^\dagger S_{+1} = -\mu^2 S_{+1}; \quad (279)$$

$$(\Delta \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_{-1}^\dagger + 6i\sigma r) R_{-1} = \mu^2 R_{-1}, \quad \mathcal{L}_2^\dagger \mathcal{L}_{-1} S_{-1} = -\mu^2 S_{-1}. \quad (280)$$

Введение индексов $+1$ и -1 оправданно, причину этого мы объясним ниже.

Заметим, что в уравнениях (279) и (280) мы использовали ту же самую постоянную разделения μ^2 , что и в уравнениях (248) и (250). Причина этого в том, что между функциями S_{+1} и S_{-1} и функциями S_{+2} и S_{-2} существуют (при подходящей нормировке) следующие соотношения:

$$\mathcal{L}_2 S_{+2} = +\mu S_{+1}; \quad \mathcal{L}_{-1}^\dagger S_{+1} = -\mu S_{+2}; \quad (281)$$

$$\mathcal{L}_2^\dagger S_{-2} = -\mu S_{-1}, \quad \mathcal{L}_{-1} S_{-1} = +\mu S_{-2}, \quad (282)$$

причем регулярность $S_{\pm 2}$ при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ гарантирует также регулярность функций $S_{\pm 1}$.

Ниже, в гл. 5 (§ 46), мы покажем, что функции Φ_1 и Φ_3 , определяемые уравнениями (278)—(280), описывают некоторое максвелловское поле в геометрии Шварцшильда *. Таким образом, мы фактически вывели уравнения Максвелла (которые описывают также фотоны со спином ± 1), найдя калибровку, восстанавливающую описанную выше симметрию уравнений (237)—(242). Теперь становится ясным появление индексов ± 1 при соответствующих радиальных и угловых функциях.

Калибровку, в которой выполняются уравнения (273) и (276), назовем «призрачной», поскольку в этой калибровке среди возмущений гравитационного поля метрики Шварцшильда появляется призрак максвелловского поля (в других калибровках этот факт завуалирован).

Наконец, выпишем уравнения для спиновых коэффициентов в призрачной калибровке:

$$\begin{aligned} -6Mk &= S_{+1} [+\mu R_{+2} - (\mathcal{D}_0 + 3/r) R_{+1}], \\ 6Ms &= S_{+2} [-\mu R_{+1} + \Delta (\mathcal{D}_2^\dagger - 3/r) R_{+2}], \end{aligned} \quad (283)$$

* Мы исследуем уравнения Максвелла в более общем случае геометрии Керра в гл. 8.

$$6Ml = S_{-2} [-\mu R_{-1} + (\mathcal{D}_0 - 3/r) R_{-2}],$$

$$6Mn = S_{-1} [-\mu R_{-2} + \Delta (\mathcal{D}_{-1}^+ + 3/r) R_{-1}].$$

В уравнениях (283) для спиновых коэффициентов переменные r и θ уже разделены. В гл. 5 мы увидим, что эта возможность разделения переменных играет важную роль при изучении возмущений метрики Рейсснера—Нордстрема для заряженной черной дыры.

30. Теория преобразований

В предыдущем параграфе мы, используя формализм Ньюмена—Пенроуза, получили пару комплексно сопряженных уравнений для радиальных функций $\Delta^2 R_{+2}$ и R_{-2} . Как будет подробно показано в § 32, уравнения (263) и (267) с вронскианом (271) описывают отражение и прохождение гравитационных волн, т. е. те же физические процессы, которые описываются уравнениями для функций $Z^{(\pm)}$ с вронскианом (161), приводящим к закону сохранения (163). Оказывается, именно требование согласованности результатов, полученных двумя способами — на основе формализма Ньюмена—Пенроуза и на основе линейаризованных уравнений Эйнштейна, — является причиной равенства коэффициентов отражения и прохождения для аксиальных и полярных возмущений. Благодаря этому можно явно выразить функции $Y_{\pm 2}$ и $Z^{(\pm)}$ друг через друга. Из сказанного выше следует, что должна существовать возможность так преобразовать решение $Y_{\pm 2}$ уравнения (263), чтобы оно одновременно было и решением уравнения для $Z^{(+)}$ или уравнения для $Z^{(-)}$. Такая возможность должна быть обусловлена каким-то специальным свойством уравнения (263). Займемся этой проблемой.

Наша задача состоит в том, чтобы выразить решение уравнения

$$\Delta^2 Y + P \Lambda_- Y - QY = 0 \quad (284)$$

через решение одномерного волнового уравнения

$$\Delta^2 Z = VZ, \quad (285)$$

где

$$P = \frac{d}{dr_*} \ln (r^3/\Delta^2), \quad (286)$$

а Q и V — некоторые функции, которые мы пока оставим неопределенными.

Поскольку Y и Z удовлетворяют уравнениям второго порядка, предположение о том, что Y — линейная комбинация функции Z и ее производной, не является ограничением. Но вместо того, чтобы написать эту линейную комбинацию в явном виде, как в § 26, мы представим Y в виде

$$Y = f \Lambda_+ \Lambda_+ Z + W \Lambda_+ Z, \quad (287)$$

или в эквивалентной форме

$$Y = \mathcal{F}VZ + (W + 2i\sigma\mathcal{F})\Lambda_+Z, \quad (288)$$

где $\mathcal{F}$ и W — некоторые функции r_* , подлежащие определению. Представление Y в виде (287) или (288) может показаться странным, но этот способ наиболее полно учитывает структуру уравнений (284) и (285), а также удобен для других приложений, с которыми мы будем иметь дело ниже, в § 31.

Действуя оператором Λ_- на обе части уравнения (287) и учитывая, что Z удовлетворяет, по нашему предположению, уравнению (285), находим

$$\Lambda_-Y = \left[\frac{d}{dr_*}(\mathcal{F}V) + WV \right] Z + \left[\mathcal{F}V + \frac{d}{dr_*}(W + 2i\sigma\mathcal{F}) \right] \Lambda_+Z. \quad (289)$$

Вводя определения

$$-\beta\Delta^2/r^8 = \frac{d}{dr_*}(\mathcal{F}V) + WV, \quad (290)$$

$$R = \mathcal{F}V + \frac{d}{dr_*}(W + 2i\sigma\mathcal{F}), \quad (291)$$

перепишем уравнение (289) в виде

$$\Lambda_-Y = -\beta(\Delta^2/r^8)Z + R\Lambda_+Z. \quad (292)$$

Действуя далее оператором Λ_- на уравнение (292), получаем (снова используя уравнение (285))

$$\begin{aligned} \Lambda_- \Lambda_-Y = & -\beta(\Delta^2/r^8)(\Lambda_+ - 2i\sigma)Z - \frac{d\beta}{dr_*} \frac{\Delta^2}{r^8} Z - \beta Z \frac{d}{dr_*} \left(\frac{\Delta^2}{r^8} \right) + \\ & + RVZ + \frac{dR}{dr_*} \Lambda_+Z. \end{aligned} \quad (293)$$

С другой стороны, в силу уравнения (284) имеем

$$\Lambda_- \Lambda_-Y = -(P + 2i\sigma)\Lambda_-Y + QY. \quad (294)$$

Подставляя вместо Y и Λ_-Y выражения (287) и (292), получаем (ср. с уравнением (286))

$$\begin{aligned} \Lambda_- \Lambda_-Y = & -\left(2i\sigma + \frac{d}{dr_*} \ln \frac{r^8}{\Delta^2} \right) \left(-\beta \frac{\Delta^2}{r^8} Z + R\Lambda_+Z \right) + \\ & + Q[\mathcal{F}VZ + (W + 2i\sigma\mathcal{F})\Lambda_+Z]. \end{aligned} \quad (295)$$

Правые части уравнений (293) и (295) должны тождественно совпадать, поэтому можно приравнять коэффициенты при Z и Λ_+Z :

$$RV - \frac{\Delta^2}{r^8} \frac{d\beta}{dr_*} = Q\mathcal{F}V, \quad (296)$$

$$\frac{dR}{dr_*} - \beta \frac{\Delta^2}{r^8} = Q(W + 2i\sigma\mathcal{F}) - \left(2i\sigma + \frac{d}{dr_*} \ln \frac{r^8}{\Delta^2} \right) R. \quad (297)$$

Перепишем уравнения (296) и (297) следующим образом:

$$-\frac{\Delta^2}{r^8} \frac{d\beta}{dr_*} = (Qf - R)V, \quad (298)$$

$$\frac{d}{dr_*} \left(\frac{r^8}{\Delta^2} R \right) = (r^8/\Delta^2) [Q(W + 2i\sigma f) - 2i\sigma R] + \beta. \quad (299)$$

Теперь несложно проверить, что уравнения (290), (291), (298) и (299) допускают интеграл

$$(r^8/\Delta^2) RfV + \beta(W + 2i\sigma f) = K = \text{const}. \quad (300)$$

Этот интеграл аналогичен интегралу (147) в § 26, найденному при решении подобной задачи.

Интеграл (300) позволяет записать выражения, обратные выражениям (288) и (292):

$$KZ = (r^8/\Delta^2) RY - (r^8/\Delta^2) (W + 2i\sigma f) \Lambda_- Y, \quad (301)$$

$$K\Lambda_+ Z = \beta Y + (r^8/\Delta^2) fV\Lambda_- Y.$$

а. Условия существования преобразований с $f = 1$ и $\beta = \text{const}$; дуальные преобразования. Мы можем формально рассматривать любые четыре из пяти уравнений (290), (291), (298)—(300) в качестве уравнений для пяти функций β , f , R , V и W . Найдем теперь условия, при которых уравнения, описывающие преобразования Y и Z , совместны с требованием

$$\beta = \text{const}, \quad f = 1. \quad (302)$$

Мы покажем, что преобразования, совместные с требованиями (302), возможны только в том случае, если Q удовлетворяет некоторому нелинейному дифференциальному уравнению, четному относительно β . Именно в силу последнего обстоятельства требования (302) являются искомыми условиями, позволяющими преобразовать уравнение для Y так, чтобы одновременно удовлетворялись уравнения или для $Z^{(+)}$, или для $Z^{(-)}$ с потенциалами $V^{(+)}$ и $V^{(-)}$, заданными уравнением (133).

Если β — постоянная величина, а $f = 1$, то из уравнения (298) следует

$$R = Q. \quad (303)$$

Из уравнения (291) получаем

$$V = Q - dW/dr_*. \quad (304)$$

В качестве двух других уравнений возьмем уравнения (299) и (300), которые теперь принимают вид

$$\frac{d}{dr_*} \left(\frac{r^8}{\Delta^2} R \right) = \left(\frac{r^8}{\Delta^2} Q \right) W + \beta, \quad (305)$$

$$(r^8 Q/\Delta^2) V + \beta W = K - 2i\sigma\beta = \text{const} \equiv \kappa. \quad (306)$$

Полагая

$$F = r^8 Q/\Delta^2, \quad (307)$$

перепишем уравнения (305) и (306):

$$W = \frac{1}{F} \left(\frac{dF}{dr_*} - \beta \right), \quad (308)$$

$$FV + \beta W = F \left(Q - \frac{dW}{dr_*} \right) + \beta W = \kappa. \quad (309)$$

Исключая из этих уравнений W , получаем уравнение

$$FQ - F \frac{d}{dr_*} \left(\frac{1}{F} \frac{dF}{dr_*} - \frac{\beta}{F} \right) + \frac{\beta}{F} \left(\frac{dF}{dr_*} - \beta \right) = \kappa, \quad (310)$$

которое после упрощений принимает следующий вид:

$$\frac{1}{F} \left(\frac{dF}{dr_*} \right)^2 - \frac{d^2 F}{dr_*^2} + \frac{\Delta^2}{r^8} F^2 = \frac{\beta^2}{F} + \kappa. \quad (311)$$

Функция F предполагается заданной, поэтому уравнение (311) представляет необходимое и достаточное условие того, что уравнения, описывающие преобразования, совместны с требованиями (302), т. е. должны существовать такие постоянные β и κ , что уравнение (311) удовлетворяется заданной функцией $Q = \Delta^2 F / r^8$. Поскольку β входит в уравнение (311) только в виде β^2 , возможны два преобразования, удовлетворяющие этому уравнению, именно преобразования, соответствующие $+\beta$ и $-\beta$. Мы будем называть эти преобразования *дуальными*, и они, как мы сейчас убедимся, приводят прямо к уравнениям, описывающим аксиальные и полярные возмущения.

Будем отличать преобразования, соответствующие $+\beta$ и $-\beta$, верхними индексами $(\pm)$. Имеем

$$W^{(\pm)} = \frac{1}{F} \left(\frac{dF}{dr_*} \mp \beta \right), \quad (312)$$

$$V^{(\pm)} = Q - \frac{dW^{(\pm)}}{dr_*}. \quad (313)$$

Переписывая последнее уравнение в виде

$$V^{(\pm)} = Q - \frac{d}{dr_*} \left(\frac{1}{F} \frac{dF}{dr_*} \mp \frac{\beta}{F} \right), \quad (314)$$

получаем с помощью уравнения (310)

$$V^{(\pm)} = \frac{\kappa}{F} \mp \frac{\beta}{F^2} \left(\frac{dF}{dr_*} \mp \beta \right). \quad (315)$$

Полагая

$$f = F^{-1}, \quad (316)$$

получаем следующую формулу:

$$V^{(\pm)} = \pm \beta \frac{df}{dr_*} + \beta^2 f^2 + \kappa f. \quad (317)$$

Выпишем в явном виде искомые преобразования:

$$Y = V^{(\pm)} Z^{(\pm)} + (W^{(\pm)} + 2i\sigma) \Lambda_+ Z^{(\pm)},$$

$$\Lambda_- Y = \mp \beta (\Delta^2/r^8) Z^{(\pm)} + Q \Lambda_+ Z^{(\pm)}; \quad (318)$$

$$K^{(\pm)} Z^{(\pm)} = (r^8/\Delta^2) [QY - (W^{(\pm)} + 2i\sigma) \Lambda_- Y],$$

$$K^{(\pm)} \Lambda_+ Z^{(\pm)} = \pm \beta Y + (r^8/\Delta^2) V^{(\pm)} \Lambda_- Y, \quad (319)$$

где

$$K^{(\pm)} = \kappa \pm 2i\sigma\beta. \quad (320)$$

Наконец, отметим, что с помощью соотношений (318) и (319) мы можем найти связь между $Z^{(+)}$ и $Z^{(-)}$. Действительно, пусть $Z^{(-)}$ есть решение волнового уравнения с потенциалом $Y^{(-)}$. Можно с помощью первого из уравнений (319) выразить его через Y и $\Lambda_- Y$, а затем выразить эти функции через $Z^{(+)}$ и $\Lambda_+ Z^{(+)}$ с помощью уравнений (318). Действуя таким образом, получим соотношение

$$(\Delta^2/r^8) K^{(-)} Z^{(-)} = QY - (W^{(-)} + 2i\sigma) \Lambda_- Y =$$

$$= Q[V^{(+)} Z^{(+)} + (W^{(+)} + 2i\sigma) \Lambda_+ Z^{(+)}] -$$

$$- (W^{(-)} + 2i\sigma) [-\beta (\Delta^2/r^8) Z^{(+)} + Q \Lambda_+ Z^{(+)}], \quad (321)$$

которое после некоторой перегруппировки членов принимает вид

$$K^{(-)} Z^{(-)} = [(r^8/\Delta^2) QV^{(+)} + \beta (W^{(+)} + 2i\sigma) +$$

$$+ \beta (W^{(-)} - W^{(+)})] Z^{(+)} + F (W^{(+)} - W^{(-)}) \Lambda_+ Z^{(+)}. \quad (322)$$

Выражение в правой части уравнения (322) можно упростить, используя уравнения (306), (312), (316) и (320):

$$(\kappa - 2i\sigma\beta) Z^{(-)} = (\kappa + 2\beta^2 f) Z^{(+)} - 2\beta \frac{dZ^{(+)}}{dr_*}. \quad (323)$$

Это соотношение можно обратить:

$$(\kappa + 2i\sigma\beta) Z^{(+)} = (\kappa + 2\beta^2 f) Z^{(-)} + 2\beta \frac{dZ^{(-)}}{dr_*}. \quad (324)$$

Мы снова пришли к соотношениям (150) и (151), полученным выше путем прямого преобразования, связывающего решения уравнений (136) и (137).

б. Проверка уравнения для F и определение значений κ и β^2 . В рассматриваемом случае функция Q определяется уравнением (265), поэтому

$$F = (r^8/\Delta^2) Q = (r^3/\Delta) (\mu^2 r + 6M) = 1/f. \quad (325)$$

Покажем прямой проверкой, что функция F удовлетворяет уравнению (311) при определенных значениях β^2 и κ . Подставляя функцию F в левую часть уравнения (311), находим

$$-F \left[\frac{\Delta}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{\Delta}{r^2} \frac{d}{dr} \ln F \right) - \frac{\Delta^2}{r^8} F \right] =$$

$$= \mu^2 (\mu^2 + 2) + 36M^2 \Delta / r^3 (\mu^2 r + 6M) = \mu^2 (\mu^2 + 2) + 36M^2 / F, \quad (326)$$

и это должно быть равно $\kappa + \beta^2/F$. Таким образом, функция F , определяемая уравнением (325), действительно удовлетворяет уравнению (311), если

$$\beta^2 = 36M^2, \quad \kappa = \mu^2 (\mu^2 + 2). \quad (327)$$

Следовательно, уравнение (263) для Y допускает дуальные преобразования, описанные выше в п. а, причем выражения (317) для $V^{(\pm)}$ при условии, что $\beta = 6M$, а f определяется уравнением (325), совпадают с соответствующими выражениями из § 26 (уравнения (133)—(135)). Кроме того, при данных определениях κ , β и F соотношения (323) и (324) совпадают с ранее полученными в предположении, что $V^{(+)}$ и $V^{(-)}$ имеют как раз такой вид, какой мы сейчас получили для них.

Наконец, заметим, что если функция F задана уравнением (325), то

$$\begin{aligned} W^{(-)} &= 2(r - 3M)/r^2, \\ W^{(+)} &= 2 \frac{\mu^2 r^2 - 3\mu^2 M r - 6M^2}{r^2 (\mu^2 r + 6M)}. \end{aligned} \quad (328)$$

31. Прямое вычисление Ψ_0 через возмущения метрики

В предыдущем параграфе мы выразили вейлевский скаляр

$$\Psi_0 = (r^3/\Delta^2) Y_{+2}(r) S_{+2}(\theta) \quad (329)$$

через возмущения метрики, показав, что дуальные преобразования (318) и (319) позволяют выразить функцию Y_{+2} через $Z^{(+)}$ и $Z^{(-)}$. В настоящем параграфе мы замкнем круг, проведя прямое вычисление Ψ_0 через возмущения метрики.

По определению

$$\Psi_0 = R_{(p)(q)(r)(s)} l^{(p)} m^{(q)} l^{(r)} m^{(s)}. \quad (330)$$

В гл. 3 (§ 21) мы показали, что в пространстве-времени Шварцшильда скаляр Ψ_0 (а также Ψ_1 , Ψ_3 и Ψ_4) равен нулю, поскольку это многообразие принадлежит к типу D по классификации Петрова. Поэтому при вычислении возмущенного значения Ψ_0 достаточно свернуть возмущенный тензор Римана с невозмущенными базисными векторами, а вклад от свертки невозмущенного тензора Римана и возмущенных значений базисных векторов l и m (которые являются в свою очередь линейными комбинациями невозмущенных базисных векторов) равен нулю вследствие равенства нулю невозмущенных вейлевских скаляров Ψ_0 , Ψ_1 , Ψ_3 и Ψ_4 . Таким образом, мы можем записать

$$\Psi_0 = -\delta R_{(p)(q)(r)(s)} l^{(p)} m^{(q)} l^{(r)} m^{(s)}. \quad (331)$$

Индексы заключены в скобки, чтобы подчеркнуть, что обозначение тетрадных компонент дано в системе отсчета, в которой был вычислен тензор Римана в гл. 2 (уравнение (75)).

Тетрадные компоненты базисных векторов можно получить, подвергнув тензорные компоненты (гл. 3, уравнение (281)) преобразованию:

$$e^{(a)}_i = \begin{vmatrix} e^v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \end{vmatrix}, \quad (332)$$

причем $e^{2v} = \Delta/r^2 = (1 - 2M/r)$. Находим

$$\begin{aligned} l^{(p)} &= (l^{(t)}, l^{(\varphi)}, l^{(r)}, l^{(\theta)}) = (e^{-v}, 0, e^{-v}, 0), \\ n^{(p)} &= (n^{(t)}, n^{(\varphi)}, n^{(r)}, n^{(\theta)}) = 1/2(e^{+v}, 0, -e^{+v}, 0), \\ m^{(p)} &= (m^{(t)}, m^{(\varphi)}, m^{(r)}, m^{(\theta)}) = 2^{-1/2}(0, i, 0, 1). \end{aligned} \quad (333)$$

Свертывая тензор Римана с этими векторами, получаем

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= -ie^{-2v}(\delta R_{0301} + \delta R_{2321} + \delta R_{2301} + \delta R_{0321}) - \\ &- 1/2e^{-2v}(\delta R_{0303} + 2\delta R_{0323} + \delta R_{2323} - \delta R_{0101} - 2\delta R_{0121} - \delta R_{2121}). \end{aligned} \quad (334)$$

Заметим, что Ψ_0 можно разложить на аксиальную часть — первая группа членов, нечетная по индексу 1 и меняющая знак при обращении знака φ , и на полярную часть — вторая группа членов, четная по индексу 1 и инвариантная относительно обращения знака φ .

а. Аксиальная часть Ψ_0 . Выражения для соответствующих компонент тензора Римана, входящих в аксиальную часть Ψ_0 , возьмем из списка, приведенного в гл. 2. Имеем

$$\begin{aligned} \delta R_{0301} &= 1/2e^{\psi-2v-\mu_3}Q_{03,0} - 1/2e^{\psi-2\mu_2-\mu_3}Q_{23}v_{,r}, \\ \delta R_{2321} &= e^{\psi-2\mu_2-\mu_3}[(1/r + 1/2v_{,r})Q_{23} + 1/2Q_{23,r}], \\ \delta R_{2301} &= 1/2e^{\psi-v-\mu_2-\mu_3}[Q_{03,2} - Q_{02,3} + \\ &+ Q_{03}(1/r - v_{,r}) - Q_{02} \operatorname{ctg} \theta], \\ \delta R_{2321} &= -1/2e^{\psi-v-\mu_2-\mu_3}[Q_{20,3} + Q_{20} \operatorname{ctg} \theta - \\ &- Q_{23,0} + Q_{30}(1/r - v_{,r})]. \end{aligned} \quad (335)$$

Напомним, что здесь мы ограничиваемся аксиально-симметричными возмущениями (что можно сделать, как было показано в § 23, без потери общности). Подставляя выражения (335) в те члены уравнения (334), которые входят в него с множителем $-i$, находим

$$\begin{aligned} -\operatorname{Im} \Psi_0 &= \{Q_{23}/r + 1/2Q_{23,r} + 1/2e^{-2v}Q_{23,0} + \\ &+ 1/2e^{-2v}[Q_{03,r} + 2(1/r - v_{,r})Q_{03}] + 1/2e^{-4v}Q_{03,0}\} \sin \theta. \end{aligned} \quad (336)$$

С другой стороны, в силу уравнений (13)—(15) и (19)

$$Q_{23} = \frac{Q(r) C_{l+2}^{-3/2}(\theta)}{\Delta \sin^3 \theta} e^{i\sigma t}, \quad (337)$$

$$Q_{03,0} = (\Delta/r^4 \sin^3 \theta) Q_{,r} C_{l+2}^{-3/2}(\theta) e^{i\sigma t}. \quad (338)$$

Подставляя эти выражения в уравнение (336), получаем (опуская общий множитель $e^{i\sigma t}$)

$$\begin{aligned} -\operatorname{Im} \Psi_0 = & \left\{ \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left(\frac{Q}{\Delta} \right) + \frac{Q}{r\Delta} + \frac{i\sigma r^2}{2\Delta^2} Q + \frac{1}{2\Delta} Q_{,r} + \right. \\ & \left. + \frac{r^2}{2i\sigma\Delta} \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{\Delta}{r^4} \frac{dQ}{dr} \right) + 2 \frac{\Delta}{r^4} \left(\frac{1}{r} - v_{,r} \right) Q_{,r} \right] \right\} \frac{C_{l+2}^{-3/2}(\theta)}{\sin^2 \theta}. \end{aligned} \quad (339)$$

Это уравнение можно упростить, воспользовавшись соотношением (23):

$$\begin{aligned} -\operatorname{Im} \Psi_0 = & \left\{ i\sigma \left[\frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left(\frac{Q}{\Delta} \right) + \frac{Q}{r\Delta} + \frac{1}{2\Delta} \frac{dQ}{dr} \right] - \right. \\ & - \sigma^2 \frac{r^2}{\Delta^2} Q + \frac{n}{r^2\Delta} Q + \frac{r-3M}{r^2\Delta} \frac{dQ}{dr} \left. \right\} \frac{C_{l+2}^{-3/2}(\theta)}{i\sigma \sin^2 \theta} = \\ = & \left\{ i\sigma \left[\frac{1}{\Delta} \frac{dQ}{dr} + \frac{Q}{r\Delta} - \frac{r-M}{\Delta^2} Q \right] - \right. \\ & - \sigma^2 \frac{r^2}{\Delta^2} Q + \frac{n}{r^2\Delta} Q + \frac{r-3M}{r^2\Delta} \frac{dQ}{dr} \left. \right\} \frac{C_{l+2}^{-3/2}(\theta)}{i\sigma \sin^2 \theta}. \end{aligned} \quad (340)$$

Полагая, как и в уравнении (25),

$$Q = rZ^{(-)}, \quad (341)$$

после некоторых упрощений находим

$$\begin{aligned} -\operatorname{Im} \Psi_0 = & \left\{ \frac{r}{\Delta} \left(i\sigma + \frac{r-3M}{r^2} \right) \frac{dZ^{(-)}}{dr} + \right. \\ & + \left[\frac{(\mu^2+2)r-6M}{2r^2\Delta} + i\sigma \frac{r(r-3M)}{\Delta^2} - \sigma^2 \frac{r^3}{\Delta^2} \right] Z^{(-)} \left. \right\} \frac{C_{l+2}^{-3/2}(\theta)}{i\sigma \sin^2 \theta}. \end{aligned} \quad (342)$$

Вспоминая определения (27) и (328), именно

$$W^{(-)} = 2(r-3M)/r^2, \quad V^{(-)} = \Delta[(\mu^2+2)r-6M]/r^5, \quad (343)$$

перепишем уравнение (342) в виде

$$\begin{aligned} -2i\sigma \operatorname{Im} \Psi_0 = & \frac{r^3}{\Delta^2} \left[(2i\sigma + W^{(-)}) \frac{dZ^{(-)}}{dr_*} + \right. \\ & \left. + (V^{(-)} + i\sigma W^{(-)} - 2\sigma^2) Z^{(-)} \right] \frac{C_{l+2}^{-3/2}(\theta)}{\sin^2 \theta}, \end{aligned} \quad (344)$$

или иначе

$$-2i\sigma \operatorname{Im} \Psi_0 = (r^3/\Delta^2) [V^{(-)}Z^{(-)} + (W^{(-)} + 2i\sigma) \Lambda_+ Z^{(-)}] C_{l+2}^{-3/2}(\theta)/\sin^2 \theta. \quad (345)$$

Это уравнение в силу подстановок (256) и (261) полностью соответствует уравнению (318), к которому мы пришли, решая уравнения формализма Ньюмена—Пенроуза и используя теорию преобразований.

б. Полярная часть Ψ_0 . Возмущенные компоненты тензора Римана, входящие в полярную часть Ψ_0 в уравнении (334), могут быть получены линеаризацией соответствующих компонент (выписанных в гл. 2) около невозмущенных шварцшильдовских значений:

$$\begin{aligned} -\delta R_{0303} &= -2\delta\mu_2 \frac{e^{2\nu}}{r} v_{,r} + e^{2\nu} \left(\frac{\delta v_{,r}}{r} + v_{,r} \delta\mu_{3,r} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{r^2} \delta v_{,\theta\theta} + e^{-2\nu} \sigma^2 \delta\mu_3, \\ -\delta R_{0101} &= -2\sigma\mu_2 \frac{e^{2\nu}}{r} v_{,r} + e^{2\nu} \frac{\delta v_{,r}}{r} + e^{2\nu} v_{,r} \delta\psi_{,r} + \\ &\quad + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \delta v_{,\theta} + \sigma^2 e^{-2\nu} \delta\psi, \\ -\delta R_{2323} &= -\frac{1}{r^2} \delta\mu_{2,\theta\theta} + 2\delta\mu_2 e^{2\nu} \frac{v_{,r}}{r} - \\ &\quad - e^{2\nu} \left[\delta\mu_{3,rr} + \left(\frac{2}{r} + v_{,r} \right) \delta\mu_{3,r} - \frac{\delta\mu_{2,r}}{r} \right], \\ -\delta R_{1212} &= 2\delta\mu_2 \frac{e^{2\nu}}{r} v_{,r} - \\ &\quad - e^{2\nu} \left[\delta\psi_{,rr} + \left(\frac{2}{r} + v_{,r} \right) \delta\psi_{,r} - \frac{\delta\mu_{2,r}}{r} \right] - \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \delta\mu_{2,\theta}, \\ -\delta R_{0323} &= -i\sigma \left[\delta\mu_{3,r} + \frac{1}{r} (\delta\mu_3 - \delta\mu_2) - v_{,r} \delta\mu_3 \right], \\ -\delta R_{0121} &= +i\sigma \left[-\delta\psi_{,r} + \frac{1}{r} (\delta\mu_2 - \delta\psi) + v_{,r} \delta\psi \right]. \end{aligned} \quad (346)$$

Подставляя эти выражения в члены, входящие в уравнение (334) с общим множителем $-1/2 e^{-2\nu}$, находим

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Psi_0 &= \frac{1}{2} e^{-2\nu} \left\{ e^{2\nu} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \right. \\ &\quad + 2i\sigma \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} - v_{,r} \right) \left(\delta\psi - \delta\mu_3 \right) - \sigma^2 e^{-2\nu} (\delta\psi - \delta\mu_3) + \\ &\quad \left. + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (\delta v - \delta\mu_2) \right\}. \end{aligned} \quad (347)$$

В силу уравнений (36)—(39)

$$\delta\psi - \delta\mu_3 = -V(P_{l,00} - P_{l,0} \operatorname{ctg} \theta) = -VC_{l+2}^{-3/2}(\theta)/\sin^2 \theta, \quad (348)$$

$$\delta v - \delta\mu_2 = (N - L) P_l.$$

Таким образом,

$$-\operatorname{Re} \Psi_0 = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + 2i\sigma e^{-2v} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} - v, r \right) - e^{-4v} \sigma^2 \right] V - \frac{e^{-2v}}{r^2} (N - L) \right\} \frac{C_{l+2}^{-3/2}(\theta)}{\sin^2 \theta}. \quad (349)$$

С помощью уравнения (51) и перегруппировки членов получаем

$$-\operatorname{Re} \Psi_0 = \{-(v, r V, r + \sigma^2 e^{-4v} V + N e^{-2v}/r^2) + + i\sigma e^{-2v} [V, r + (1/r - v, r) V]\} C_{l+2}^{-3/2}/\sin^2 \theta. \quad (350)$$

В первой группе членов (без множителя $i\sigma$) вместо V, r подставим соответствующее значение из уравнения (57) и, кроме того, явно выпишем выражение для $v(r)$:

$$\begin{aligned} -\operatorname{Re} \Psi_0 = & \left\{ \frac{i\sigma r}{r-2M} \left[V, r + \frac{r-3M}{r(r-2M)} V \right] + \right. \\ & + \frac{\sigma^2 r^2}{(r-2M)^2} \left[\frac{M}{n(r-2M)} (L+X) - V \right] - \\ & - \frac{nr^2 - 3Mnr - 3M^2}{nr^2(r-2M)^2} N - \frac{M[nr^2 - M(2n-1)r - 3M^2]}{nr^2(r-2M)^2} L + \\ & \left. + \frac{M(r^2 - 3Mr + 3M^2)}{r^2(r-2M)^2} V \right\} \frac{C_{l+2}^{-3/2}(\theta)}{\sin^2 \theta}. \end{aligned} \quad (351)$$

С помощью соотношений (57) и (60) это выражение можно привести к виду

$$\begin{aligned} -\operatorname{Re} \Psi_0 = & \frac{1}{2\Delta} \left\{ \frac{2n^2(n+1)r^3 + 6Mn^2r^2 + 18M^2nr + 18M^3}{r^2(nr+3M)^2} Z + \right. \\ & + \left[2i\sigma \frac{r^2}{r-2M} + 2 \frac{nr^2 - 3Mnr - 3M^2}{(r-2M)(nr+3M)} \right] (Z, r + i\sigma Z) \left. \right\} \frac{C_{l+2}^{-3/2}(\theta)}{\sin^2 \theta}. \end{aligned} \quad (352)$$

Вспоминая теперь определения (63) и (328) для функций $V^{(+)}$ и $\mathcal{W}^{(+)}$, получаем уравнение

$$-\operatorname{Re} \Psi_0 = (r^3/\Delta^2) [V^{(+)} Z^{(+)} + (\mathcal{W}^{(+)} + 2i\sigma) \Lambda_+ Z^{(+)}] C_{l+2}^{-3/2}(\theta)/\sin^2 \theta, \quad (353)$$

которое полностью согласуется с полученным ранее с использованием формализма Ньюмена—Пенроуза и теории преобразований, Круг замкнулся.

32. Физическое содержание теории

В начале настоящей главы (§ 22) мы писали, что возмущения метрики черной дыры описывают конкретные физические процессы — отражение и поглощение гравитационных волн, падающих на черную дыру, и основной задачей предпринятого исследования является изучение особенностей таких процессов. Хотя из общих соображений кажется, что коэффициенты $\mathbb{R}$ и $\mathbb{T}$, полученные нами из уравнений для $Z^{(\pm)}$, являются искомыми коэффициентами отражения и прохождения, этот вопрос требует специального изучения, поскольку до сих пор мы не исследовали падение гравитационных волн. И дело это не столь простое: оно потребует, как мы увидим, более глубокого, чем было до сих пор, изучения взаимосвязей двух теорий возмущений — теории, основанной на формализме Ньюмена — Пенроуза, и теории, построенной на основе линеаризованных уравнений Эйнштейна.

Начнем с того, что найдем связь постоянной в соотношении (270) для вронскиана функций Y_{+2} и Y_{-2}^* со значением вронскиана $[Z, Z^*]$, постоянство которого приводит к закону сохранения $\mathbb{R} + \mathbb{T} = 1$ (§ 27). Рассмотрим вронскиан любых двух независимых решений Z_1 и Z_2 уравнения (285):

$$K^2 [Z_1, Z_2] = K^2 (Z_2 \Lambda_+ Z_1 - Z_1 \Lambda_+ Z_2). \quad (354)$$

Подставляя вместо KZ и $K\Lambda_+ Z$ выражения из уравнений (301) и используя соотношение (300), находим

$$K^2 [Z_1, Z_2] = [(r^8/\Delta^2) \{ (r^8/\Delta^2) R f V + \beta (W + 2i\sigma f) \}] (Y_2 \Lambda_- Y_1 - Y_1 \Lambda_- Y_2) = (r^8/\Delta^2) K [Y_1, Y_2]. \quad (355)$$

Следовательно,

$$(r^8/\Delta^2) [Y_1, Y_2] = K [Z_1, Z_2] = \text{const}. \quad (356)$$

Это последнее соотношение показывает, что мы можем находить коэффициенты отражения и прохождения и из уравнений для функций Y_{+2} и Y_{-2} (или из уравнений для функций $\Delta^2 R_{+2}$ и R_{-2} , что эквивалентно). Однако мы пока не можем извлечь никакой полезной информации из знания вронскиана $[Y_{+2}, Y_{-2}^*]$, потому что Y_{+2} и Y_{-2} удовлетворяют независимым уравнениям — на это мы уже обращали внимание в § 29, б. В гл. 9, исследуя более общий случай черной дыры Керра, мы найдем, что уравнения формализма Ньюмена — Пенроуза (те уравнения, которые мы до сих пор не рассматривали) определяют относительную нормировку функций Y_{+2} и Y_{-2} , так что вронскиан функций Y_{+2} и Y_{-2}^* все-таки можно использовать для нахождения коэффициентов $\mathbb{R}$ и $\mathbb{T}$. Но сейчас мы попытаемся обойти эту трудность и получить требуемые соотношения прямо из уравнений теории преобразований, развитой в § 30.

Мы знаем, что решения $Z^{(+)}$ и $Z^{(-)}$ имеют асимптотическое поведение $e^{\pm i\sigma r_*}$ как при $r_* \rightarrow +\infty$, так и при $r_* \rightarrow -\infty$. Можно

использовать эту информацию для нахождения асимптотик функций Y_{+2} и Y_{-2} с помощью уравнений (318) и (319) и соответствующих комплексно сопряженных уравнений.

Вспоминая, что функции $V(\pm)$, $W(\pm)$ и Q стремятся к нулю при $r_* \rightarrow +\infty$, получаем (см. первое уравнение (318) и первое уравнение (319)), что при $r_* \rightarrow +\infty$

$$Z(\pm) \rightarrow e^{+i\sigma r_*}, \quad Z(\pm) \rightarrow e^{-i\sigma r_*} \quad (r_* \rightarrow +\infty) \quad (357)$$

асимптотики Y_{+2} и Y_{-2} равны

$$\begin{aligned} Y_{+2} &\rightarrow -4\sigma^2 e^{+i\sigma r_*}, \quad Y_{+2} \rightarrow -K(\pm) e^{-i\sigma r_*} / 4\sigma^2 r^4, \\ Y_{-2} &\rightarrow -K(\pm)^* e^{+i\sigma r_*} / 4\sigma^2 r^4, \quad Y_{-2} \rightarrow +4\sigma^2 e^{-i\sigma r_*}. \end{aligned} \quad (358)$$

Подобным же образом получаем, что вследствие равенства нулю функций $V(\pm)$ и Q на горизонте событий и поскольку

$$W(\pm) \rightarrow -(2M)^{-1} \quad (r = 2M) \quad (359)$$

(см. уравнение (328)), асимптотическое поведение функции $Z(\pm)$ по мере приближения к горизонту имеет вид

$$Z(\pm) \rightarrow e^{+i\sigma r_*}, \quad Z(\pm) \rightarrow e^{-i\sigma r_*} \quad (r_* \rightarrow -\infty); \quad (360)$$

соответствующие асимптотики функций Y_{+2} и Y_{-2} равны

$$\begin{aligned} Y_{+2} &\rightarrow 4i\sigma(i\sigma - 1/4M) e^{+i\sigma r_*}, \\ Y_{+2} &\rightarrow \frac{K(\pm) \Delta^2 \exp[-i\sigma r_*]}{(2M)^8 4(i\sigma - 1/2M)(i\sigma - 1/4M)}, \\ Y_{-2} &\rightarrow \frac{K(\pm)^* \Delta^2 \exp[i\sigma r_*]}{(2M)^8 4(i\sigma + 1/2M)(i\sigma + 1/4M)}, \\ Y_{-2} &\rightarrow 4i\sigma(i\sigma + 1/4M) e^{-i\sigma r_*}. \end{aligned} \quad (361)$$

Теперь мы можем выписать граничные условия для вейлевских скаляров:

$$\Phi_0 = e^{i\sigma t + im\varphi} R_{+2} S_{+2} = e^{i\sigma t + im\varphi} (r^3/\Delta^2) Y_{+2} S_{+2} (= \Psi_0), \quad (362)$$

$$\Phi_4 = e^{i\sigma t + im\varphi} R_{-2} S_{-2} = e^{i\sigma t + im\varphi} r^3 Y_{-2} S_{-2} (= r^4 \Psi_4), \quad (363)$$

которые соответствуют следующим граничным условиям для функций $Z(\pm)$ (см. уравнение (159)), определяющим амплитуды отраженной и прошедшей волны $R(\pm)(\sigma)$ и $T(\pm)(\sigma)$:

$$Z^\pm \rightarrow \begin{cases} e^{+i\sigma r_*} + R(\pm)(\sigma) e^{-i\sigma r_*} & (r_* \rightarrow +\infty), \\ T(\pm)(\sigma) e^{+i\sigma r_*} & (r_* \rightarrow -\infty). \end{cases} \quad (364)$$

Имеем

$$\Phi_0 \rightarrow \begin{cases} e^{i\sigma t + im\varphi} S_{+2}(\theta) (Y_{+2}^{(\text{in})} e^{+i\sigma r_*}/r + Y_{+2}^{(\text{ref})} e^{-i\sigma r_*}/r^5) & (r_* \rightarrow +\infty), \\ e^{i\sigma t + im\varphi} S_{+2}(\theta) Y_{+2}^{(\text{tr})} e^{+i\sigma r_*}/\Delta^2 & (r_* \rightarrow -\infty), \end{cases} \quad (365)$$

$$\Phi_4 \rightarrow \begin{cases} e^{i\sigma t + im\varphi} S_{-2}(\theta) (Y_{-2}^{(\text{in})} e^{+i\sigma r_*}/r + Y_{-2}^{(\text{ref})} r^3 e^{-i\sigma r_*}) & (r_* \rightarrow +\infty), \\ e^{i\sigma t + im\varphi} S_{-2}(\theta) Y_{-2}^{(\text{tr})} \Delta^2 e^{+i\sigma r_*} & (r_* \rightarrow -\infty), \end{cases} \quad (366)$$

где

$$\begin{aligned}
 Y_{+2}^{(\text{in})} &= -4\sigma^2, \quad Y_{+2}^{(\text{ref})} = -(K^{(\pm)}/4\sigma^2) R^{(\pm)}(\sigma), \\
 Y_{-2}^{(\text{in})} &= -K^{(\pm)*}/4\sigma^2, \quad Y_{-2}^{(\text{ref})} = -4\sigma^2 R^{(\pm)}(\sigma), \\
 Y_{+2}^{(\text{tr})} &= (2M)^3 4i\sigma (i\sigma - 1/4M) T(\sigma), \\
 Y_{-2}^{(\text{tr})} &= \frac{K^{(\pm)*} T(\sigma)}{(2M)^6 4(i\sigma + 1/2M)(i\sigma + 1/4M)}.
 \end{aligned} \tag{367}$$

Теперь ясно, что коэффициенты при главных членах (убывающих на бесконечности как r^{-1}) вейлевских скаляров Ψ_0 и Ψ_4 определяют поток энергии в приходящих и уходящих гравитационных волнах. Выражения для потоков энергии будут выведены в гл. 9 (§ 98, б). Здесь мы просто приведем их без доказательства. Итак, поток энергии в единицу времени и в единице телесного угла Ω в приходящей (падающей) волне равен

$$\frac{d^2 E^{(\text{in})}}{dt d\Omega} = \frac{(S_{+2})^2}{2\pi} \frac{1}{32\sigma^2} |Y_{+2}^{(\text{in})}|^2, \tag{368}$$

а поток в уходящей (отраженной) волне равен

$$\frac{d^2 E^{(\text{ref})}}{dt d\Omega} = \frac{(S_{-2})^2}{2\pi} \frac{1}{2\sigma^2} |Y_{-2}^{(\text{ref})}|^2. \tag{369}$$

Здесь подразумевается, что функции S_{+2} и S_{-2} нормированы на единицу. Из уравнений (367) получаем выражение для $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R} = |R^{(\pm)}(\sigma)|^2 = \left| \frac{Y_{-2}^{(\text{ref})}}{Y_{+2}^{(\text{in})}} \right|^2 = \left| \frac{Y_{+2}^{(\text{ref})}}{Y_{-2}^{(\text{in})}} \right|^2 = \left| \frac{Y_{-2}^{(\text{ref})} Y_{+2}^{(\text{ref})}}{Y_{+2}^{(\text{in})} Y_{-2}^{(\text{in})}} \right|^2, \tag{370}$$

которое можно переписать и в другом виде:

$$\mathbb{R} = \frac{256\sigma^8}{|K^{(\pm)}|^2} \left| \frac{Y_{+2}^{(\text{ref})}}{Y_{+2}^{(\text{in})}} \right| = \frac{|K^{(\pm)}|^2}{256\sigma^8} \left| \frac{Y_{-2}^{(\text{ref})}}{Y_{-2}^{(\text{in})}} \right|^2. \tag{371}$$

Этот результат согласуется с соотношениями (368) и (369). Выражение (371) для $\mathbb{R}$ дает возможность определить коэффициент отражения прямо из уравнений для Y_{+2} или Y_{-2} (или из уравнений для R_{+2} или R_{-2} , что эквивалентно), и этот коэффициент, разумеется, будет совпадать с коэффициентом, определенным из уравнений для $Z^{(\pm)}$.

Выпишем соответствующее выражение для коэффициента прохождения $\mathbb{T}$:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{T} &= \frac{\sigma^2}{(2M)^6 (\sigma^2 + 1/16M^2)} \left| \frac{Y_{+2}^{(\text{tr})}}{Y_{+2}^{(\text{in})}} \right|^2 = \\
 &= \frac{(2M)^{10}}{\sigma^4} \left(\sigma^2 + \frac{1}{16M^2} \right) \left(\sigma^2 + \frac{1}{4M^2} \right) \left| \frac{Y_{-2}^{(\text{tr})}}{Y_{-2}^{(\text{in})}} \right|^2 = \\
 &= (2M)^2 \left| \frac{Y_{+2}^{(\text{tr})} Y_{-2}^{(\text{tr})}}{Y_{+2}^{(\text{in})} Y_{-2}^{(\text{in})}} \right| \frac{(\sigma^2 + 1/4M^2)^{1/2}}{\sigma}.
 \end{aligned} \tag{372}$$

Хотя физический смысл $\mathbb{T}$ — доля энергии падающей волны, поглощаемая черной дырой, — с очевидностью следует из закона сохранения $\mathbb{R} + \mathbb{T} = 1$, прямое доказательство требует детальной аргументации. Оно будет дано в гл. 9.

а. Следствия унитарности матрицы рассеяния. Установленная в § 28 унитарность матрицы рассеяния (179) требует, помимо прочего, чтобы решение для $\tilde{Z}$, удовлетворяющее условиям

$$\tilde{Z} \rightarrow \begin{cases} e^{-i\sigma r_*} + R(-\sigma)e^{+i\sigma r_*} & (r_* \rightarrow -\infty), \\ T(-\sigma)e^{-i\sigma r_*} & (r_* \rightarrow +\infty), \end{cases} \quad (373)$$

давало те же коэффициенты отражения и прохождения $\mathbb{R}$ и $\mathbb{T}$, что и решение, удовлетворяющее граничным условиям (364). Соответствующие граничные условия для вейлевских скаляров Φ_0 и Φ_4 имеют вид

$$\Phi_0 \rightarrow \begin{cases} e^{i\sigma t + im\varphi} S_{+2} (\tilde{Y}_{+2}^{(\text{in})} e^{-i\sigma r_*} + \tilde{Y}_{+2}^{(\text{ref})} e^{+i\sigma r_*} / \Delta^2) & (r_* \rightarrow -\infty), \\ e^{i\sigma t + im\varphi} S_{+2} (\tilde{Y}_{+2}^{(\text{tr})} e^{-i\sigma r_*} / r^5) & (r_* \rightarrow +\infty), \end{cases} \quad (374)$$

$$\Phi_4 \rightarrow \begin{cases} e^{i\sigma t + im\varphi} S_{-2} (\tilde{Y}_{-2}^{(\text{in})} e^{-i\sigma r_*} + \tilde{Y}_{-2}^{(\text{ref})} \Delta^2 e^{+i\sigma r_*}) & (r_* \rightarrow -\infty), \\ e^{i\sigma t + im\varphi} S_{-2} (\tilde{Y}_{-2}^{(\text{tr})} r^3 e^{-i\sigma r_*}) & (r_* \rightarrow +\infty), \end{cases} \quad (375)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_{+2}^{(\text{in})} &= \frac{K}{(2M)^5 4 (i\sigma - 1/2M) (i\sigma - 1/4M)}, \\ \tilde{Y}_{-2}^{(\text{in})} &= (2M)^3 4i\sigma (i\sigma + 1/4M), \\ \tilde{Y}_{+2}^{(\text{ref})} &= (2M)^3 4i\sigma (i\sigma - 1/4M) R(-\sigma), \\ \tilde{Y}_{-2}^{(\text{ref})} &= \frac{K^* R(-\sigma)}{(2M)^5 4 (i\sigma + 1/2M) (i\sigma + 1/4M)}, \\ \tilde{Y}_{+2}^{(\text{tr})} &= -(K/4\sigma^2) T(-\sigma), \quad \tilde{Y}_{-2}^{(\text{tr})} = -4\sigma^2 T(-\sigma). \end{aligned} \quad (376)$$

Из этих соотношений получаем

$$\begin{aligned} |R(-\sigma)|^2 &= \left| \frac{\tilde{Y}_{-2}^{(\text{ref})}}{\tilde{Y}_{+2}^{(\text{in})}} \right|^2 = \left| \frac{\tilde{Y}_{+2}^{(\text{ref})}}{\tilde{Y}_{+2}^{(\text{in})}} \right|^2 \frac{|K|^2}{(2M)^{16} 256\sigma^2 (\sigma^2 + 1/16M^2)^2} \times \\ &\times \frac{1}{(\sigma^2 + 1/4M^2)} = \left| \frac{\tilde{Y}_{-2}^{(\text{ref})}}{\tilde{Y}_{-2}^{(\text{in})}} \right|^2 \frac{256}{|K|^2} (2M)^{16} \sigma^2 (\sigma^2 + 1/16M^2)^2 (\sigma^2 + 1/4M^2), \end{aligned} \quad (377)$$

$$\begin{aligned} |T(-\sigma)|^2 &= \left| \frac{\tilde{Y}_{+2}^{(\text{tr})}}{\tilde{Y}_{+2}^{(\text{in})}} \right|^2 \frac{\sigma^4}{(2M)^{10} (\sigma^2 + 1/16M^2) (\sigma^2 + 1/4M^2)} = \\ &= \left| \frac{\tilde{Y}_{-2}^{(\text{tr})}}{\tilde{Y}_{-2}^{(\text{in})}} \right|^2 \frac{(2M)^6 (\sigma^2 + 1/16M^2)}{\sigma^2}. \end{aligned} \quad (378)$$

33. Некоторые комментарии к теории возмущений

Теория возмущений шварцшильдовской черной дыры, описанная в предыдущих параграфах, представляет собой такое количество спутанных нитей, что трудно распутать этот узел и разглядеть скрытый в нем узор. Но некоторые элементы этого узора все-таки видны.

Центром, из которого, как представляется, расходится весь узор, является уравнение для радиальной части Y_{+2} (или Y_{-2}) вейлевского скаляра Ψ_0 (или Ψ_4) в формализме Ньюмена—Пенроуза. Мы видели в § 32, что коэффициенты отражения и прохождения для падающих гравитационных волн однозначно определяются функцией Y_{+2} или Y_{-2} . И любой способ, любой путь (любая нить) в нашей теории должны приводить к тем же самым значениям этих коэффициентов.

Разделение возмущений метрики на аксиальную и полярную части наиболее естественно вытекает из структуры вейлевских скаляров в формализме Ньюмена—Пенроуза.

Аксиальные возмущения описываются одной скалярной функцией $Z^{(-)}$, удовлетворяющей одномерному волновому уравнению Шредингера с потенциалом $V^{(-)}$, который называется потенциалом Редже—Уилера. Коэффициенты отражения и прохождения, которые можно получить элементарными методами из этого уравнения, должны, конечно, совпадать с коэффициентами, полученными из уравнения для Y_{+2} . Ясно, что должны существовать преобразования, переводящие Y_{+2} в $Z^{(-)}$ и обратно.

Полярные возмущения описываются тремя радиальными функциями L , N и X , которые удовлетворяют системе трех линейных уравнений первого порядка. Поскольку эти уравнения должны давать информацию об отражении и прохождении падающих гравитационных волн, они должны сводиться к волновому уравнению второго порядка. Подобная приводимость обеспечивается существованием частного решения уравнения — интеграла Ксантопулоса (уравнение (126)). Но если редукция гарантирована, она может быть осуществлена разными способами. Существует, например, комбинация $Z^{(+)}$ (определяемая уравнением (59)), которая удовлетворяет волновому уравнению с так называемым потенциалом Церилли $V^{(+)}$. Однако есть и другая комбинация $\mathcal{Z}$ (задаваемая уравнением (154)), удовлетворяющая уравнению Редже—Уилера. Этот произвол в действительности является следствием того, что любое волновое уравнение для полярных возмущений должно приводить к тем же коэффициентам отражения и прохождения, что и уравнение Редже—Уилера, и поэтому их решения должны быть представимы явным образом в виде линейных комбинаций функции $Z^{(-)}$ и ее производной.

Можно ли на основании вышесказанного совсем не рассматривать уравнение для $Z^{(+)}$? Видимо, нельзя, потому что, например, при установлении связи между Y_{+2} и $Z^{(-)}$ мы получаем уравнение для $Z^{(-)}$ как одно из пары дуальных уравнений с потенциалами (см. уравнение (133)) вида

$$V^{(\pm)} = \pm \beta \frac{df}{dr_*} + \beta^2 f^2 + \kappa f \quad (\beta, \kappa = \text{const}), \quad (379)$$

где знак минус приводит к потенциалу Редже—Уилера, а знак плюс — к потенциалу Церилли. Кроме того, структура этих потенциалов явно гарантирует равенство коэффициентов отражения и коэффициентов прохождения для решений $Z^{(+)}$ и $Z^{(-)}$ и приводит к простым соотношениям взаимосвязи между $Z^{(+)}$ и $Z^{(-)}$.

В теории возмущений есть еще один момент. Формализм Ньюмена—Пенроуза изначально не предусматривает разложения вейлевских скаляров Ψ_0 и Ψ_4 на аксиальную и полярную части. Разложение становится возможным, только если явно выразить Ψ_0 и Ψ_4 через возмущенные значения компонент тензора Римана. Как и должно быть, после разложения аксиальная и полярная части разделяются и поэтому с необходимостью должны удовлетворять одному и тому же уравнению, что и осуществляется на самом деле.

Теория возмущений имеет и другие грани, которые мы рассмотрим в гл. 10. Но из того, что мы знаем на данный момент, следует подчеркнуть две существенные особенности теории: во-первых, уравнение для Ψ_0 допускает дуальные преобразования, и, во-вторых (что непосредственно связано с первой), возможно разложение возмущений на аксиальную и полярную части.

34. Устойчивость шварцшильдовской черной дыры

Проблеме устойчивости шварцшильдовской черной дыры по отношению к внешним возмущениям — а только такие возмущения нам необходимо рассматривать — было посвящено много исследований. Постановка задачи следующая: задано произвольное ограниченное в пространстве, т. е. в конечном интервале изменения r_* (или с «компактным носителем»), начальное возмущение. Останется ли оно ограниченным во все последующие моменты времени?

Мы видели, что возмущения описываются одномерными волновыми уравнениями типа

$$\frac{d^2 Z}{dr_*^2} + \sigma^2 Z = VZ \quad (380)$$

с гладкими действительными потенциалами, которые не зависят от σ и являются короткодействующими (т. е. интеграл от которых

по всей области изменения независимой переменной конечен). В этом случае применимы стандартные теоремы квантовой механики. Эти теоремы гарантируют, что собственные волновые функции какой-либо наблюдаемой образуют полную систему и что любая квадратично интегрируемая функция, описывающая состояние системы, может быть разложена в ряд по этой полной системе, и более того, интеграл от квадрата модуля любой функции состояния не должен меняться с течением времени, т. е. должен оставаться постоянным.

В нашем случае решения $Z(r_*, \sigma)$ уравнения (380) для действительных значений σ , удовлетворяющие граничным условиям (159), образуют базисную полную систему волновых функций и любое гладкое и ограниченное в пространстве начальное возмущение может быть представлено в виде интеграла от функций $Z(r_*, \sigma)$ типа

$$\psi(r_*; 0) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(\sigma; 0) Z(r_*; \sigma) d\sigma, \quad (381)$$

а эволюция возмущения в последующие моменты времени определяется интегралом

$$\psi(r_*, t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(\sigma; 0) e^{i\sigma t} Z(r_*; \sigma) d\sigma. \quad (382)$$

Кроме того, обеспечено равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(r_*; 0)|^2 dr_* = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(\sigma; 0)|^2 d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(r_*; t)|^2 dr_*. \quad (383)$$

Ограниченность функции $\psi(r_*, t)$ для всех $t > 0$ следует также из сравнения равенств (381) и (382).

Более слабый результат (но имеющий большое значение) следует из уравнения

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial r_*^2} - VZ, \quad (384)$$

которое переходит в уравнение (380) для отдельной фурье-компоненты, когда дифференциальный оператор $\partial/\partial t$ заменяется на $i\sigma$ (это соответствует сделанному нами предположению (соотношение (16)) о временной зависимости возмущений вида $e^{i\sigma t}$). Умножая уравнение (384) на $\partial Z^*/\partial t$, мы получаем после интегрирования по частям (при условии, что соответствующие интегралы сходятся)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial Z^*}{\partial t} \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} + \frac{\partial Z}{\partial r_*} \frac{\partial^2 Z^*}{\partial t \partial r_*} + VZ \frac{\partial Z^*}{\partial t} \right) dr_* = 0. \quad (385)$$

Складывая уравнение (385) с комплексно сопряженным ему, получаем *интеграл энергии*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\left| \frac{\partial Z}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial Z}{\partial r_*} \right|^2 + V |Z|^2 \right) dr_* = \text{const.} \quad (386)$$

Существование интеграла энергии ограничивает интеграл от функции $|\partial Z / \partial t|^2$, следовательно, *исключается экспоненциальный рост любого ограниченного решения уравнения (383)*.

35. Квазинормальные моды шварцшильдовской черной дыры

Последний параграф главы мы посвятим изучению того, что можно назвать *собственными тонами* черной дыры. Мы имеем в виду следующее.

Черная дыра может быть возмущена не только падающими гравитационными волнами, но и множеством других способов: падением тела в черную дыру или аккрецией окружающего ее вещества. Мы можем также рассмотреть образование черной дыры в результате слабонесферического коллапса звезды; при этом конечное состояние описывается решением Шварцшильда. Во всех этих случаях эволюция возмущений (если они могут рассматриваться как «малые») определяется суперпозицией базисных решений $Z(r_*; \sigma)$ типа рассмотренной в предыдущем параграфе. Однако можно ожидать из общих соображений, что распад любого начального возмущения на поздних стадиях будет определяться характеристиками черной дыры и не будет зависеть от первоначальной причины, вызвавшей это возмущение. Другими словами, можно ожидать, что на самых поздних стадиях черная дыра будет излучать гравитационные волны, частота которых и скорость затухания определяются характеристиками самой черной дыры, точно так же как колокол испускает последними замирающие чистые тона. Эти соображения приводят к понятию *квазинормальных мод* черной дыры.

Точное определение следующее. Квазинормальные моды — это решения уравнений для возмущений, соответствующие комплексным собственным значениям частоты и удовлетворяющие граничным условиям для чисто уходящих волн на бесконечности и падающих волн — на горизонте. Задача, следовательно, состоит в поиске решений уравнений для $Z(\pm)$ с граничными условиями вида

$$Z(\pm) \rightarrow \begin{cases} A(\pm)(\sigma) e^{-i\sigma r_*} & (r_* \rightarrow +\infty), \\ e^{+i\sigma r_*} & (r_* \rightarrow -\infty). \end{cases} \quad (387)$$

Это задача на собственные значения σ , а решения, принадлежащие различным собственным значениям, определяют квазинормальные моды.

Заметим прежде всего, что экспоненциально растущие неустойчивые квазинормальные моды с $\text{Im } \sigma < 0$ запрещены вследствие существования интеграла энергии (386), потому что, если бы такие моды существовали, решения, удовлетворяющие граничным условиям (387), убывали бы экспоненциально при $r_* \rightarrow \pm\infty$ и интегралы по r_* в уравнениях (386) сходились бы, что привело бы к противоречию. Следовательно, могут существовать только затухающие квазинормальные моды, но решения, соответствующие им, будут расходиться при $r_* \rightarrow \pm\infty$ — мы должны приписать это неявному предположению о «бесконечно больших» возмущениях в отдаленном прошлом.

Замечаем далее, что собственные частоты для $Z^{(-)}$ и $Z^{(+)}$ совпадают. Действительно, пусть σ — собственная частота, а $Z^{(-)}(\sigma)$ — соответствующее этому собственному значению решение, тогда решение $Z^{(+)}(\sigma)$, построенное на основе $Z^{(-)}(\sigma)$ с помощью (152), будет удовлетворять граничным условиям (387), в которых (см. уравнение (169)) следует положить

$$A^{(+)}(\sigma) = A^{(-)}(\sigma) \frac{\mu^2(\mu^2 + 2) - 12i\sigma M}{\mu^2(\mu^2 + 2) + 12i\sigma M}. \quad (388)$$

Следовательно, достаточно рассмотреть только уравнение для $Z^{(-)}$.

Полагая

$$Z^{(-)} = \exp \left(i \int_{r_*}^{r_*} \phi dr_* \right), \quad (389)$$

получаем уравнение

$$i\phi, r_* + \sigma^2 - \phi^2 - V^{(-)} = 0. \quad (390)$$

Нам нужно найти решение этого уравнения, удовлетворяющее граничным условиям

$$\phi \rightarrow -\sigma \quad (r_* \rightarrow +\infty); \quad \phi \rightarrow +\sigma \quad (r_* \rightarrow -\infty). \quad (391)$$

Решения уравнения (390), удовлетворяющие граничным условиям (391), существуют только для дискретного спектра значений σ . В общем случае неизвестно, является ли это множество собственных значений конечным или бесконечным, но счетным.

Отметим полезное тождество, которое получается в результате интегрирования уравнения (390) с учетом граничных условий (391) (см. формулы (225)):

$$-2i\sigma + \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma^2 - \phi^2) dr_* = \int_{-\infty}^{\infty} V^{(-)} dr_* = (1/2M)(\mu^2 + 1/2). \quad (392)$$

В табл. 4 дан список комплексных собственных значений частот σ для различных значений l .

Подробные расчеты слабонесферического коллапса пылевых облаков и падения частиц с конечной массой в черную дыру при

Таблица 4

Комплексные собственные частоты квазинормальных мод шварцшильдовской черной дыры (σ выражено в единицах $(2M)^{-1}$)

l	$2M\sigma$	l	$2M\sigma$
2	$0,74734 + 0,17792i$	4	$1,61835 + 0,18832i$
	$0,69687 + 0,54938i$		$1,59313 + 0,56877i$
3	$1,19889 + 0,18541i$		$1,12019 + 0,84658i$
	$1,16402 + 0,56231i$	5	$2,02458 + 0,18974i$
	$0,85257 + 0,74546i$	6	$2,42402 + 0,19053i$

(Значения в разных строчках для $l = 2, 3$ и 4 соответствуют собственным частотам для разных мод.)

движении вдоль геодезических подтверждают существование явления «звона» черных дыр на частоте и со скоростью затухания квазинормальных мод.

Библиографические замечания

Классическая работа Т. Редже и Дж. А. Уилера

1. *Regge T., Wheeler J. A. Phys. Rev.*, **108**, 1063—1069, 1957

положила начало исследованиям возмущений пространства-времени Шварцшильда. В начале 1970-х годов были опубликованы работы, продолжающие исследования в том же направлении:

2. *Vishveshwara C. V. Phys. Rev.* **D1**, 2870—2879, 1970;

3. *Zerilli F. J. Phys. Rev.* **D2**, 2141—2160, 1970;

4. *Zerilli F. J. Phys. Rev. Lett.*, **24**, 737—738, 1970;

5. *Bardeen J. M., Press W. H., J. Math. Phys.*, **14**, 7—19, 1972.

Разработка теории на этом не закончилась. Не был известен даже такой важный факт как равенство коэффициентов отражения и прохождения для аксиальных и полярных возмущений (которые тогда назывались «нечетными» и «четными»). Многие другие соотношения выявлялись постепенно, часто при исследовании керровской черной дыры. Поэтому в настоящей главе сведены вместе результаты и методы теории возмущений шварцшильдовской черной дыры, которые в разрозненном виде можно найти в следующих статьях:

6. *Chandrasekhar S. Proc. Roy. Soc. (London)* **A343**, 289—298, 1975;

7. *Chandrasekhar S., Detweiler S. Proc. Roy. Soc. (London)* **A344**, 441—452, 1975;

8. *Chandrasekhar S., Detweiler S. Proc. Roy. Soc. (London)*, **A345**, 145—167, 1975;

9. *Chandrasekhar S. Proc. Roy. Soc. (London)* **A358**, 421—439, 1978;

10. *Chandrasekhar S. Proc. Roy. Soc. (London)* **A358**, 441—465, 1978;

11. *Chandrasekhar S. Proc. Roy. Soc. (London)*, **A365**, 453—465, 1979;

12. *Chandrasekhar S., Xanthopoulos B. C. Proc. Roy. Soc. (London)* **A367**, 1—14, 1979;

13. *Chandrasekhar S., Xanthopoulos B. C. Proc. Roy. Soc. (London)*, **A369**, 425—433, 1980.

См. также

14. *Chandrasekhar S. In: General Relativity — An Einstein Centenary Survey. Ed. S. W. Hawking, W. Israel, Cambridge, England, 1979.*

§ 24. Изложение в этом параграфе следует работе [6]. Основные соотношения (36) — (39), которые приводят к разделению переменных, были получены Дж. Л. Фридманом:

15. *Friedman J. L.* Proc. Roy. Soc. (London) **A335**, 163—190, 1973.
§ 25. Здесь дан упрощенный вариант теории, развитой в работе
 16. *Xanthopoulos B. C.* Proc. Roy. Soc. (London) **A378**, 61—71, 1981.
§ 26—27. Соотношения, приведенные здесь, появились не сразу. Впервые они были выписаны явно в работе [13], но кое-что о них было известно и ранее. См. работы [7, 11] и
 17. *Headings J. J.* Phys. A. Math. Gen., **10**, 885—897, 1977.
§ 28. Обратная задача рассеяния и связанная с ней теория уравнения Кортевега — де Фриза требуют слишком много места для сколько-нибудь глубокого изложения. Но найденные нами соотношения между $V^{(+)}$ и $V^{(-)}$ (и подобные соотношения для черных дыр Рейсснера — Нордстрема и Керра, которые будут приведены в последующих главах) настолько тесно связаны с этими вопросами, что мы были вынуждены кратко изложить их. Изложение в § 28, а в основном следует работе
 18. *Deift P., Trubowitz E.* Communications on Pure and Applied, Math., **32**, 121—251, 1979.
- Я благодарен профессору Дайфту за критические замечания по этому разделу. Изложение п. 28, б следует работе
19. Фаддеев Л. Д. Доклады АН СССР, **115**, № 5, 878—881, 1957.
- В явном виде соотношения (220) для более высоких порядков получены в работе
20. *Miura R. M., Gardner C. S., Kruskal M. D.* J. Math. Phys., **9**, 1204—1209, 1968.
- Ниже приведены работы по классической теории солитонов и теории уравнения Кортевега — де Фриза:
21. *Whitham G. B.* Linear and Non — Linear Waves, §§ 16.14 — 16.16, 17.2—17.4, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1974;
 22. *Scott A. C., Chu F. Y. F., McLaughlin D. W.* Proc IEEE, **61**, 1443—1483, 1973;
 23. *Miura R. M.* SIAM Rev., **18**, 412—459, 1976.
- § 29. В этом параграфе мы применили к пространству-времени Шварцшильда результаты исследования, проведенного в работе [9] для более общего случая керровской черной дыры.
- § 30. Теория преобразований была первоначально развита в работе [8] (и в предыдущих статьях, здесь не указанных) для случая возмущений керровской черной дыры. В данном параграфе она применяется к изучению возмущений пространства-времени Шварцшильда. Основные же идеи неявно содержатся в работе [6].
- § 31. Расчет полярной части Ψ_0 был проведен Дж. Л. Фридманом [15], а расчет аксиальной части приводится в настоящей книге.
- § 34. Альтернативные способы исследования устойчивости шварцшильдовской черной дыры см. в работах
24. *Moncrief V.* Ann. Phys., **88**, 323—342, 1973,
 25. *Wald R. M.* J. Math. Phys., **20**, 1056—1058, 1979.
- Основные теоремы, которыми мы пользовались в нашем изложении, содержатся в книге
26. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. — М.: Физматгиз, 1963.
- § 35. При изложении вопроса о квазинормальных модах мы следовали работе [7]. Численные результаты, приведенные в табл. 4, взяты из работы [7] и дополнены результатами, полученными позднее в работе
27. *Gunter D. L.*, Phil. Trans. Roy. Soc. (London), **A296**, 497—526, 1980.
- Появление этих квазинормальных мод излучения на последних стадиях коллапса массивных звезд исследовалось в работах
28. *Cunningham C. T., Price R. H., Moncrief V.* Astrophys. J., **224**, 643—667, 1978;
 29. *Cunningham C. T., Price R. H., Moncrief V.* Astrophys. J., **230**, 870—892, 1979.

РЕШЕНИЕ РЕЙССНЕРА—НОРДСТРЕМА

36. Введение

Сферически симметричное решение связанной системы уравнений Эйнштейна—Максвелла называется решением Рейсснера—Нордстрема. Это решение описывает черную дыру массы M и заряда Q_* . Поскольку вряд ли можно ожидать, что какое-либо макроскопическое тело обладает нескомпенсированным зарядом, может показаться, что задача о заряженной черной дыре имеет чисто академический интерес. Оказывается, однако, что изучение решения Рейсснера—Нордстрема позволяет глубже понять свойства пространства и времени. Например, мы найдем, что рассеяние падающих гравитационных и электромагнитных волн черной дырой Рейсснера—Нордстрема описывается симметричной унитарной матрицей рассеяния четвертого порядка и позволяет частично превращать энергию одного вида (электромагнитную или гравитационную) в энергию другого вида. Кроме того, исследование решения Рейсснера—Нордстрема позволяет шире взглянуть на многие удивительные аналитические свойства уравнений, с которыми мы встретились при изучении шварцшильдовской черной дыры в гл. 4. И наконец, существование двух горизонтов — внешнего горизонта событий и внутреннего «горизонта Коши» — является тем мостом, по которому легко перейти к исследованию решения Керра в последующих главах.

37. Решение Рейсснера—Нордстрема

Решение Рейсснера—Нордстрема, так же как и решение Шварцшильда, описывает сферически симметричное пространство-время. Поэтому мы можем, как и в гл. 3, записать линейный элемент в одной из двух форм (гл. 3, уравнения (3) и (5)):

$$ds^2 = 4f du dv - e^{2\mu_3} [(d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\varphi)^2], \quad (1)$$

$$ds^2 = e^{2\mu_3} [(dx^0)^2] - (dx^2)^2 - e^{2\mu_3} [(d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\varphi)^2], \quad (2)$$

где $f = \exp [2\mu_2]$ и μ_3 — функции только u и v (или, иначе, x^0 и x^2). Соответственно остаются справедливыми выражения для ненулевых (тетрадных) компонент тензора Римана (в метрике (2)), приведенные в гл. 3 (уравнения (10)), только теперь мы рассматриваем не вакуумное пространство-время, а такое, в котором существует электромагнитное поле. Следовательно, мы не можем

положить тензор Риччи равным нулю, как сделали это в гл. 3 (уравнения (11)—(14)). Вместо этого имеем

$$R_{ab} = -2(\eta^{cd}F_{ac}F_{bd} - 1/4\eta_{ab}F_{ef}F^{ef}), \quad (3)$$

где F_{ab} — тетрадные компоненты тензора Максвелла, которые в свою очередь определяются уравнениями Максвелла, а η_{ab} — метрика Минковского в выбранной ортонормированной тетраде.

а. Решение уравнений Максвелла. Ясно, что вследствие сферической симметрии аксиальные компоненты тензора Максвелла F_{01} , F_{12} и F_{13} должны быть равны нулю, а уравнения для полярных компонент F_{02} , F_{03} и F_{23} получаются из уравнений, приведенных в гл. 2 (уравнения (95д)—(95з)). Для случая метрики (2) находим

$$\begin{aligned} (e^{2\mu_3}F_{02})_{,2} + e^{\mu_2+\mu_3}F_{03}\operatorname{ctg}\theta &= 0, & (e^{2\mu_3}F_{02})_{,0} + e^{\mu_2+\mu_3}F_{23}\operatorname{ctg}\theta &= 0, \\ (e^{\mu_2+\mu_3}F_{23})_{,2} - (e^{\mu_2+\mu_3}F_{03})_{,0} &= 0, & (e^{\mu_2+\mu_3}F_{23})_{,0} - (e^{\mu_2+\mu_3}F_{03})_{,2} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Предположение о сферической симметрии требует, чтобы компоненты тензора Максвелла не зависели от угла θ . Из уравнений (4) поэтому следует

$$F_{03} = F_{23} = 0, \quad (5)$$

$$(e^{2\mu_3}F_{02})_{,2} = (e^{2\mu_3}F_{02})_{,0} = 0. \quad (6)$$

Следовательно, только компонента F_{02} не равна нулю, и

$$F_{02} = -Q_*e^{-2\mu_3}, \quad (7)$$

где Q_* — постоянная.

Теперь нетрудно вычислить компоненты тензора Риччи:

$$-R_{44} = R_{00} = R_{11} = -R_{22} = R_{33} = Q_*^2e^{-4\mu_3}, \quad R_{42} = 0. \quad (8)$$

б. Решение уравнений Эйнштейна. С учетом уравнений (8), выведенных в предыдущем разделе, уравнения (11)—(15) из гл. 3 принимают следующий вид:

$$2R_{1212} + R_{2424} = +Q_*^2e^{-4\mu_3}, \quad (9)$$

$$2R_{1414} + R_{2424} = +Q_*^2e^{-4\mu_3}, \quad (10)$$

$$R_{1212} + R_{1313} + R_{1414} = -Q_*^2e^{-4\mu_3}, \quad (11)$$

$$R_{1313} + R_{2323} + R_{3434} = -Q_*^2e^{-4\mu_3}, \quad (12)$$

$$R_{2114} + R_{2334} = R_{24} = 0. \quad (13)$$

Из уравнений (9) и (10) следует:

$$R_{1212} + R_{1010} = 0, \quad (14)$$

а уравнение (13) и уравнение (10в) из гл. 3 позволяют заключить, что

$$R_{1210} = 0. \quad (15)$$

Далее, складывая уравнения (9) и (10), получаем

$$R_{1212} - R_{1010} - R_{2020} = + Q_*^2 e^{-4\mu_3}. \quad (16)$$

Перепишем уравнение (11) в виде

$$R_{1212} + R_{1313} - R_{1010} = - Q_*^2 e^{-4\mu_3}. \quad (17)$$

Вычитая теперь уравнение (16) из уравнения (17), получаем

$$R_{1313} + R_{2020} = - 2Q_*^2 e^{-4\mu_3}. \quad (18)$$

Замечаем, что уравнения (14) и (15) совпадают с первой парой уравнений (19) из гл. 3, а уравнения (17) и (18) заменяют вторую пару. Преобразуя эти уравнения как в гл. 3, получаем следующую основную систему уравнений:

$$fZ_{,uu} - Z_{,u}f_{,u} = 0, \quad (19)$$

$$fZ_{,vv} - Z_{,v}f_{,v} = 0, \quad (20)$$

$$f(1 - Q_*^2/Z^2) + ZZ_{,uv} + Z_{,u}Z_{,v} = 0, \quad (21)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{f_{,u}}{f} \right) + \frac{Z_{,uv}}{Z} = - \frac{Q_*^2}{Z^4} f. \quad (22)$$

Уравнения (19)–(22) — аналог уравнений (31)–(34) гл. 3, и при их решении мы используем тот же метод. Рассмотрим сначала уравнения (19) и (20). Интегрируя уравнение (19) по u , а уравнение (20) — по v , получаем

$$f = A(u) Z_{,v}; \quad f = B(v) Z_{,u}, \quad (23)$$

где $A(u)$ и $B(v)$ — функции только одной указанной переменной. Уравнение (21) теперь можно переписать в двух различных формах:

$$[A(u)(Z + Q_*^2/Z) + ZZ_{,u}]_{,v} = 0, \quad (24)$$

$$[B(v)(Z + Q_*^2/Z) + ZZ_{,v}]_{,u} = 0. \quad (25)$$

Следовательно,

$$Z_{,u} = -A(u)(1 + Q_*^2/Z^2) + F(u)/Z, \quad (26)$$

$$Z_{,v} = -B(v)(1 + Q_*^2/Z^2) + G(v)/Z, \quad (27)$$

где $F(u)$ и $G(v)$ — другие произвольные функции одной переменной.

Исключая из уравнений (26) и (27) функции $A(u)$ и $B(v)$ с помощью уравнения (23), получаем два соотношения:

$$\begin{aligned} Z_{,u}Z_{,v} &= -f(1 + Q_*^2/Z^2) + F(u)Z_{,v}/Z = \\ &= -f(1 + \widetilde{Q_*^2}/Z^2) + G(v)Z_{,u}/Z, \end{aligned} \quad (28)$$

из которых следует, что

$$\frac{Z_{,u}}{Z_{,v}} = \frac{F(u)}{G(v)} = \frac{A(u)}{B(v)}, \quad (29)$$

и поэтому

$$\frac{F(u)}{A(u)} = \frac{G(v)}{B(v)} = \text{const} = 2M. \quad (30)$$

Таким образом, мы получили следующие решения:

$$Z_{,u} = -A(u) \left(1 - \frac{2M}{Z} + \frac{Q_*^2}{Z^2} \right), \quad Z_{,v} = -B(v) \left(1 - \frac{2M}{Z} + \frac{Q_*^2}{Z^2} \right), \quad (31)$$

$$\dot{f} = -A(u) B(v) \left(1 - \frac{2M}{Z} + \frac{Q_*^2}{Z^2} \right). \quad (32)$$

Несложно проверить, что эти решения удовлетворяют также и уравнению (22), которое мы до сих пор не использовали.

Смысл решения (31) для Z становится яснее, если рассмотреть дифференциал

$$dZ = - \left(1 - 2M/Z + Q_*^2/Z^2 \right) [A(u) du + B(v) dv]. \quad (33)$$

Как и в гл. 3 (§ 17, б), мы видим, что сферически симметричное решение системы уравнений Эйнштейна — Максвелла с необходимостью статическое (вне горизонта событий). Этот результат составляет содержание обобщенной теоремы Биркгоффа.

Наконец, подставляя найденные решения в метрику (1), получаем метрику Рейсснера—Нордстрема

$$ds^2 = -4 \left(1 - 2M/Z + Q_*^2/Z^2 \right) A(u) B(v) du dv - Z^2 d\Omega^2. \quad (34)$$

Появление в метрике двух произвольных функций $A(u)$ и $B(v)$, так же как и в решении для метрики Шварцшильда (уравнение (48) гл. 3), обусловлено свободой выбора координат на двумерной поверхности U_2 : вместо координаты u можно взять некоторую функцию u , а вместо v — некоторую функцию v .

38. Структура пространства-времени

Следуя обычному соглашению, введем вместо Z координату r , которая имеет смысл «яркостного расстояния», и перепишем уравнения (33) и (34) в виде

$$dr = -(\Delta/r^2) [A(u) du + B(v) dv], \quad (35)$$

$$ds^2 = -4 (\Delta/r^2) A(u) B(v) du dv - r^2 d\Omega^2, \quad (36)$$

где

$$\Delta = r^2 - 2Mr + Q_*^2. \quad (37)$$

Пусть $r_{\pm}$ — корни уравнения $\Delta = 0$:

$$r_+ = M + (M^2 - Q_*^2)^{1/2}, \quad r_- = M - (M^2 - Q_*^2)^{1/2}. \quad (38)$$

Эти корни действительны и различны, если $M^2 > Q_*^2$. Будем предполагать, что это неравенство выполнено. Поскольку

$$\Delta > 0 \quad (r > r_+, 0 < r < r_-), \quad \Delta < 0 \quad (r_- < r < r_+), \quad (39)$$

все пространство-время делится на три области:

$$A: 0 < r < r_-, \quad B: r_- < r < r_+, \quad C: r > r_+. \quad (40)$$

Мы увидим, что поверхность $r = r_+$ — горизонт событий, аналогично поверхности $r = 2M$ в пространстве-времени Шварцшильда, а поверхность $r = r_-$ не является горизонтом событий, но это тоже «горизонт», природу которого мы установим ниже.

Удобно уравнение (35) переписать в следующем виде:

$$dr_* = -[A(u) du + B(v) dv], \quad (41)$$

где

$$r_* = \int (r^2/\Delta) dr = r + \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \ln|r - r_+| - \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \ln|r - r_-|. \quad (42)$$

По определению

$$-\infty < r_* < +\infty \quad (r_+ < r < +\infty), \\ +\infty > r_* > -\infty \quad (r_- < r < r_+). \quad (43)$$

Воспользуемся оставшейся свободой выбора координат u и v и, следовательно, функций $A(u)$ и $B(v)$, чтобы лучше выявить структуру пространства-времени. В областях A и C выберем

$$A(u) = -B(v) = 1/2 \quad (44)$$

и положим

$$dt = 1/2 (du + dv). \quad (45)$$

Тогда

$$u = t - r_*, \quad v = t + r_*, \quad (46)$$

и метрика принимает вид

$$ds^2 = (\Delta/r^2) du dv - r^2 d\Omega^2, \quad (47)$$

или, что то же самое,

$$ds^2 = (\Delta/r^2) (dt)^2 - (r^2/\Delta) (dr)^2 - r^2 [(d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\varphi)^2]. \quad (48)$$

Именно в таком виде обычно записывают метрику Рейсснера—Нордстрема.

В области B выберем другие функции $A(u)$ и $B(v)$:

$$A(u) = B(v) = -1/2. \quad (49)$$

Полагая

$$dt = 1/2 (du - dv), \quad (50)$$

получаем

$$u = r_* + t, \quad v = r_* - t. \quad (51)$$

Метрика теперь принимает вид

$$ds^2 = (|\Delta|/r^2) du dv - r^2 d\Omega^2. \quad (52)$$

При таком выборе функций в областях A , B и C все три части многообразия могут быть представлены при постоянных значениях координат θ и φ «блоками», показанными на рис. 13. Стрелки на этом рисунке указывают, как отождествляются края блоков.

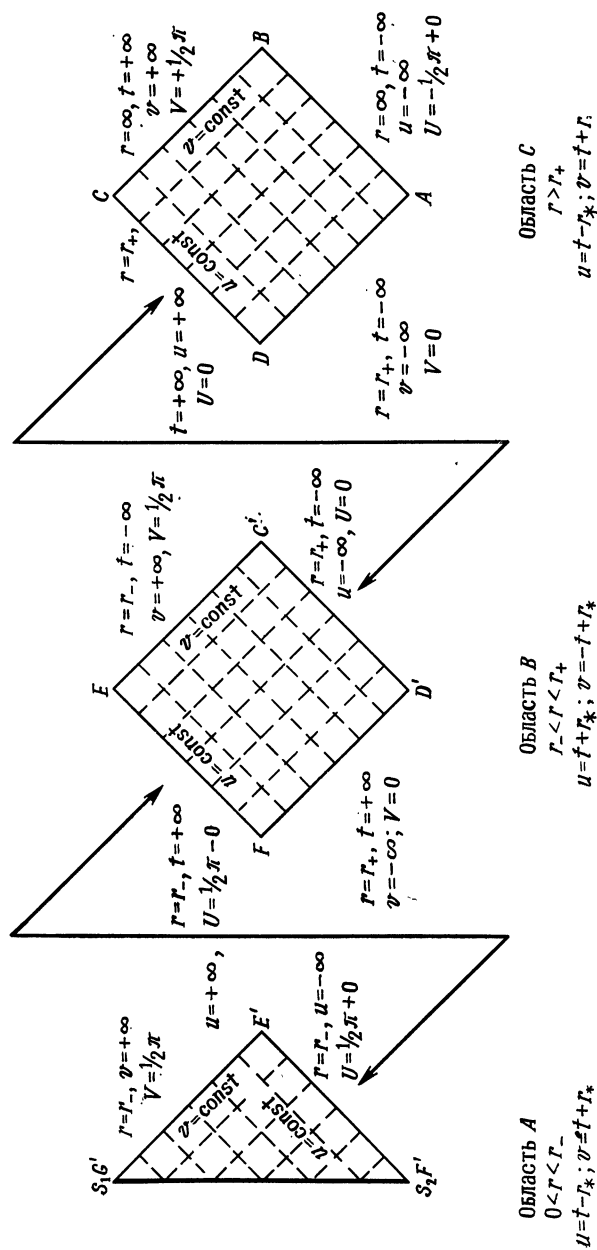


Рис. 13. Различные области пространства-времени Рейсснера — Нордстрема. Пояснения см. в тексте.

Кроме того, существуют еще области A' , B' и C' , соответствующие областям A , B и C и получаемые из последних преобразованиями $u \rightarrow -u$, $v \rightarrow -v$ (эти преобразования переворачивают световые конусы). Максимальное аналитическое расширение решения Рейсснера—Нордстрема получается, если соединить копии этих шести блоков аналитическим образом так, чтобы общие края покрывались или системой координат (u, r) , или системой координат (v, r) (исключая углы каждого блока). Получающаяся при этом «лестница» показана на рис. 14, она может быть продолжена в обе стороны до бесконечности. Основная причина, заставляющая делать такое расширение — это требование *геодезической полноты* многообразия, которое означает, что все геодезические, кроме тех, что прерываются в сингулярности, должны иметь бесконечную длину при продолжении как в будущее, так и в прошлое.

Аналитическое описание максимально расширенного пространства-времени может быть получено следующим образом. В областях A и C введем координаты U и V :

$$\operatorname{tg} U = -e^{-\alpha u} = -e^{-\alpha(t-r_*)} = -e^{-\alpha t} \{e^{+\alpha r} |r - r_+|^{1/2} |r - r_-|^{-\beta/2}\}, \quad (53)$$

$$\operatorname{tg} V = +e^{+\alpha v} = +e^{+\alpha(t+r_*)} = +e^{+\alpha t} \{e^{+\alpha r} |r - r_+|^{1/2} |r - r_-|^{-\beta/2}\}, \quad (54)$$

где

$$\alpha = (r_+ - r_-)/2r_+^2, \quad \beta = r_-^2/r_+^2 \quad (\alpha > 0, \beta < 1). \quad (55)$$

В области B положим

$$\operatorname{tg} U' = +e^{+\alpha u} = +e^{+\alpha(t+r_*)} = +e^{+\alpha t} \{e^{+\alpha r} |r - r_+|^{1/2} |r - r_-|^{-\beta/2}\}, \quad (56)$$

$$\operatorname{tg} V = +e^{+\alpha v} = e^{+\alpha(-t+r_*)} = +e^{-\alpha t} \{e^{+\alpha r} |r - r_+|^{1/2} |r - r_-|^{-\beta/2}\}. \quad (57)$$

В этих координатах метрика принимает «универсальный» вид:

$$ds^2 = -(4/\alpha^2) |r - r_+| |r - r_-| \operatorname{cosec} 2U \operatorname{cosec} 2V dU dV - r^2 d\Omega^2, \quad (58)$$

причем r определяется из уравнений

$$\operatorname{tg} U \operatorname{tg} V = \begin{cases} -e^{2\alpha r} |r - r_+| |r - r_-|^{-\beta} & (r > r_+, 0 < r < r_-), \\ +e^{2\alpha r} |r - r_+| |r - r_-|^{-\beta} & (r_- < r < r_+). \end{cases} \quad (59)$$

На рис. 13 указаны значения U и V вдоль различных краев блоков. Метрика, определяемая уравнением (58), аналитична всюду, кроме поверхности $r = r_-$, потому что в уравнении (59) величина $|r - r_-|$ возведена в отрицательную степень, но на этой поверхности $r = r_-$ метрика принадлежит по крайней мере к классу C^2 .

Использование изотропных геодезических в качестве коор-

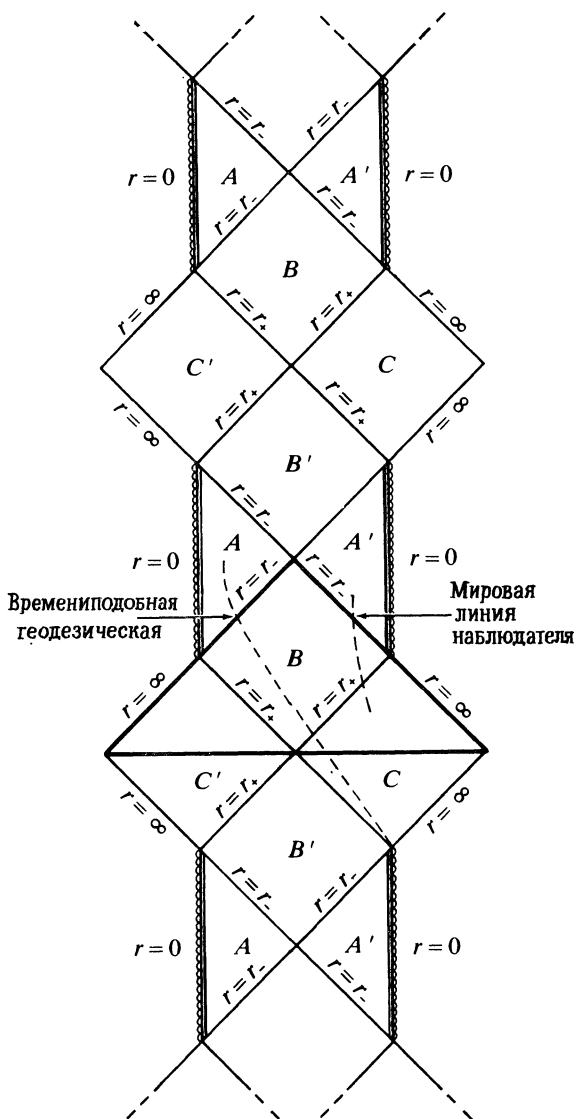


Рис. 14. Максимальное аналитическое расширение пространства-времени Рейснера — Нордстрема. Различные области A , B и C , изображенные на рис. 13, объединены вместе, области A' , B' и C' получаются из областей A , B и C преобразованиями $u \rightarrow -u$, $v \rightarrow -v$. Полное расширение получается при таком ссоединении копий этих шести блоков, при котором общие края покрываются (u, r) -или (v, r) -картой. Показаны также времениподобная геодезическая, которая выходит из области C и пересекает оба горизонта, и часть возможной времениподобной мировой линии наблюдателя.

динатных осей позволяет наглядно представить структуру пространства-времени. Ясно, например, что часть пространства-времени, лежащая вне поверхности r_+ (в области C), очень похожа на соответствующую часть пространства-времени Шварцшильда, лежащую вне поверхности $r = 2M$: любой наблюдатель, который, двигаясь вдоль времениподобной траектории (в направлении будущего), пересекает поверхность $r = r_+$ (линия CD на рис. 13), навсегда «пропадает» для внешнего наблюдателя (который находится в области C). Кроме того, любой световой сигнал, полученный внешним наблюдателем в момент пересечения поверхности $r = r_+$, будет иметь бесконечно большое красное смещение (поскольку $dt/d\tau \rightarrow +\infty$, см. уравнение (70) в § 40). Поверхность $r = r_+$ является, таким образом, горизонтом событий в том же смысле, что и поверхность $r = 2M$ в пространстве-времени Шварцшильда. Однако наблюдателю, который пересек горизонт событий в геометрии Рейсснера—Нордстрема, предоставляется много возможностей для наблюдений. Этой возможности лишен наблюдатель, пересекающий горизонт событий в геометрии Шварцшильда, поскольку после этого он неизбежно попадает в сингулярность $r = 0$. Напротив, аналогичный наблюдатель в геометрии Рейсснера—Нордстрема, находясь в области B , имеет выбор: он тоже может попасть в сингулярность $r = 0$, но, кроме того, он может, двигаясь вдоль времениподобной траектории (направленной в будущее), пересечь поверхность $r = r_-$ (линия $C'E$ на рис. 13) и попасть в область A' . В момент пересечения поверхности $r = r_-$ перед таким наблюдателем развернется панорама всей истории внешнего мира в виде вспышки лучей света с бесконечно большим фиолетовым смещением (вследствие того, что $dt/d\tau \rightarrow -\infty$ при $r \rightarrow r_- + 0$; см. уравнение (70) ниже), идущих вдоль линии $BCC'E$. В области A' будущее нашего наблюдателя уже не определяется его прошлой историей — область A' лежит вне области зависимости пространственной гиперповерхности, проходящей через области C и C' на рис. 14. По этой причине поверхность $r = r_-$ называется *горизонтом Коши*.

Точно так же наблюдатель, находящийся в области B , может двигаться и по такой времениподобной геодезической, что после пересечения поверхности r_- линия $EF = E'F'$ (рис. 13) попадает в область A . Все такие геодезические (кроме чисто радиальных изотропных геодезических) обходят сингулярность при $r = 0$, а затем пересекают поверхность $r = r_-$ (линия $E'G'$) и «чудесным образом» оказываются в новой асимптотически плоской вселенной. Ясно, что такой выбор возможностей для наблюдателя, пересекшего горизонт событий при $r = r_+$, является следствием времениподобного характера сингулярности при $r = 0$ (в отличие от пространственноподобного характера сингулярности в геометрии Шварцшильда). Но осторожно! Пересечение горизонта Коши чревато опасностью (как мы увидим в § 49).

39. Другой вывод метрики Рейсснера—Нордстрема

В настоящем параграфе мы дадим другой вывод метрики Рейсснера—Нордстрема, который аналогичен выводу метрики Шварцшильда, данному в § 18. Если исходить из метрики, заданной в гл. 3 уравнением (62), то мы получим для случая Рейсснера—Нордстрема те же выражения (уравнения (64) гл. 3) для не равных нулю компонент тензора Римана. И поскольку, кроме того,

$$R_{42} = 0, \quad R_{22} - R_{44} = 0 \quad (60)$$

(ср. с уравнением (8)), то уравнения (68) и (72), полученные в гл. 3, остаются справедливыми. Однако теперь вместо уравнения (73) из гл. 3 мы имеем (см. уравнение (8))

$$2\mu_2, r e^{-2\mu_2}/r + r^{-2}(1 - e^{-2\mu_2}) = R_{33} = Q_*^2/r^4. \quad (61)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$e^{-2\mu_2} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q_*^2}{r^2} (= e^{2\nu} = \Delta/r^2), \quad (62)$$

и мы снова получаем решение Рейсснера—Нордстрема в стандартной форме (уравнение (48)).

Выпишем не равные нулю компоненты тензора Римана (ср. с уравнениями (75) гл. 3):

$$\begin{aligned} -R_{(1)(3)(1)(3)} &= (2Mr - Q_*^2)/r^4, \\ R_{(2)(0)(2)(0)} &= (2Mr - 3Q_*^2)/r^4, \\ R_{(1)(2)(1)(2)} &= R_{(3)(2)(2)(3)} = -R_{(1)(0)(1)(0)} = \\ &= -R_{(3)(0)(3)(0)} = (Mr - Q_*^2)/r^4. \end{aligned} \quad (63)$$

Индексы взяты в скобки, чтобы подчеркнуть их тетрадный характер (в локально инерциальной системе отсчета). Эти выражения показывают, что поверхность $r = 0$ действительно является истинной сингулярностью пространства-времени. Соответствующие тензорные компоненты тензора Римана равны (ср. с уравнениями (76) гл. 3)

$$\begin{aligned} R_{0101} &= +R_{t\varphi t\varphi} = -[(Mr - Q_*^2)/r^2]e^{2\nu}\sin^2\theta, \\ R_{0303} &= +R_{t\theta t\theta} = -[(Mr - Q_*^2)/r^2]e^{2\nu}, \\ R_{1212} &= +R_{\varphi r \varphi r} = +[(Mr - Q_*^2)/r^2]e^{-2\nu}\sin^2\theta, \\ R_{2323} &= +R_{r\theta r\theta} = +[(Mr - Q_*^2)/r^2]e^{-2\nu}, \\ R_{1313} &= +R_{\varphi\theta\varphi\theta} = -(2Mr - Q_*^2)\sin^2\theta, \\ R_{0202} &= +R_{trtr} = +(2Mr - 3Q_*^2)/r^4, \end{aligned} \quad (64)$$

где $e^{2\nu} = \Delta/r^2$.

40. Геодезические в пространстве-времени Рейсснера—Нордстрема

Метрика Рейсснера—Нордстрема отличается от метрики Шварцшильда только видом «функции горизонта» Δ ; следовательно, основные уравнения, управляющие геодезическим движением, — это уравнения из § 19 и 20, но с другим определением функции Δ . Например, уравнения для времениподобных геодезических имеют вид (гл. 3, уравнения (85), (90) и (91))

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{\Delta}{r^2} \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) = E^2, \quad \frac{dt}{d\tau} = E \frac{r^2}{\Delta}, \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{L}{r^2}, \quad (65)$$

где

$$\Delta = r^2 - 2Mr + Q_*^2. \quad (66)$$

Рассматривая r как функцию φ и делая замену независимой переменной $u = 1/r$, получаем уравнение (ср. с уравнением (94) гл. 3)

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = -Q_*^2 u^4 + 2Mu^3 - u^2(1 + Q_*^2/L^2) + 2Mu/L^2 - (1 - E^2)/L^2 = f(u). \quad (67)$$

Соответствующие уравнения для изотропных геодезических имеют следующий вид (ср. с уравнениями (212)—(215) гл. 3):

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + L^2 \frac{\Delta}{r^4} = E^2, \quad dt/d\tau = Er^2/\Delta, \quad d\varphi/d\tau = L/r^2; \quad (68)$$

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = -Q_*^2 u^4 + 2Mu^3 - u^2 + 1/D^2 = f(u), \quad (69)$$

где $D (=L/E)$ — как и раньше, прицельный параметр.

В отличие от уравнений, которые мы рассматривали в гл. 3, в уравнениях (67) и (69) $f(u)$ — не кубическая, а биквадратичная функция. Мы увидим ниже, что это существенно только для орбит, которые пересекают горизонт при $r = r_+$, т. е. для орбит, которые в геометрии Шварцшильда обрывались в сингулярности, и в этом проявляется различие внутренних (по отношению к соответствующим горизонтам событий) областей метрик Шварцшильда и Рейсснера—Нордстрема.

а. Изотропные геодезические. Как и в пространстве-времени Шварцшильда, радиальные изотропные геодезические в геометрии Рейсснера—Нордстрема служат основой для построения изотропной тетрады, необходимой для применения формализма Ньюмена—Пенроуза. Мы получим уравнения для радиальных изотропных геодезических, положив $L = 0$ в уравнениях (68):

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm E, \quad \frac{dt}{d\tau} = \frac{r^2}{\Delta} E, \quad \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{d\varphi}{d\tau} = 0. \quad (70)$$

Следовательно,

$$\frac{dr}{dt} = \pm \frac{\Delta}{r^2}. \quad (71)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$t = \pm r_* + \text{const}. \quad (72)$$

Переменная r_* определена уравнением (42). Таким образом, в случае входящего светового луча координатное время t возрастает от $-\infty$ до $+\infty$ при уменьшении r от $+\infty$ до r_+ , затем убывает от $+\infty$ до $-\infty$ при дальнейшем уменьшении r от r_+ до r_- и снова возрастает от $-\infty$ до некоторого конечного значения при уменьшении r от r_- до нуля. В собственном времени радиус убывает с постоянной скоростью E (так и должно быть для световых лучей!). Если свободно падающий наблюдатель начинает движение с конечного расстояния $r > r_+$, то он упадет на сингулярность за конечное собственное время. (Мы увидим ниже, что это единственный класс геодезических, которые обрываются в сингулярности: все остальные геодезические обходят ее). Следует также отметить, что, поскольку $dt/d\tau$ стремится к $+\infty$ в случае приближения к поверхности $r = r_+$ снаружи, т. е. при $r \rightarrow r_+ + 0$, любое излучение, приходящее из бесконечности (область C), при пересечении горизонта событий имеет бесконечное красное смещение. Аналогично вследствие того, что $dt/d\tau$ стремится к $-\infty$ при $r \rightarrow r_- + 0$, излучение, приходящее из бесконечности, при пересечении горизонта Коши имеет бесконечное фиолетовое смещение.

Рассмотрим теперь изотропные геодезические общего вида, описываемые уравнением (69). Прежде всего замечаем, что уравнение четвертого порядка $f(u) = 0$ всегда допускает два действительных корня: один отрицательный (не имеющий физического смысла), а другой положительный (можно показать, что этот корень лежит в области $r < r_-$). Мы рассмотрим только случаи, когда два остальных корня или оба действительные (различные или совпадающие) или комплексно сопряженные друг другу. Введем обозначение D_c для прицельного параметра D , при котором уравнение $f(u) = 0$ имеет двойной корень. Тогда для всех значений $D > D_c$ существуют два рода орбит (как и в пространстве-времени Шварцшильда). Орбиты *первого рода* лежат целиком вне горизонта событий, они приходят из $+\infty$, а затем после прохождения через перигентр снова уходят на $+\infty$. Орбиты *второго рода* имеют две точки поворота: одну вне горизонта событий, а другую — под горизонтом Коши. В случае когда прицельный параметр $D < D_c$ (т. е. когда уравнение $f(u) = 0$ на действительной положительной оси u имеет только один корень, который $> 1/r_-$), орбита идет из $+\infty$, пересекает оба горизонта и имеет точку поворота при конечном значении $r < r_-$. Следовательно, все эти орбиты обходят сингулярность при $r = 0$. Однако, как

следует из нашего обсуждения в § 38, продолжение орбит, имеющих точки поворота под горизонтом Коши, не достигается просто присоединением соответствующих орбит, получаемых из первых отражением времени. Такие орбиты продолжаются вверх по «лестнице», изображенной на рис. 14, т. е. $A \rightarrow B' \rightarrow C$ (где C теперь — другая асимптотически плоская вселенная).

Значение прицельного параметра, при котором уравнение $f(u) = 0$ имеет двойной корень, определяется из уравнений

$$f(u) = 1/D^2 - u^2(Q_*^2 u^2 - 2Mu + 1) = 0, \quad (73)$$

$$f'(u) = -2u(1 - 3Mu + 2Q_*^2 u^2) = 0. \quad (74)$$

Помимо корня $u = 0$ уравнение (74) имеет корни

$$u = (3M/4Q_*^2)[1 \pm (1 - 8Q_*^2/9M^2)^{1/2}]. \quad (75)$$

При большем из этих корней $f(u)$ имеет максимум. Искомый двойной корень должен появляться в минимуме функции $f(u)$, где

$$u = (3M/4Q_*^2)[1 - (1 - 8Q_*^2/9M^2)^{1/2}] = u_c. \quad (76)$$

Соответствующее значение r равно

$$r_c = 1,5M[1 + (1 - 8Q_*^2/9M^2)^{1/2}]. \quad (77)$$

Ясно, что уравнения геодезических допускают круговую орбиту радиуса r_c . Эта орбита неустойчива.

Из уравнения (73) получаем следующее значение прицельного параметра D_c , соответствующего двойному корню r_c :

$$D_c = r_c^2/\Delta_c^{1/2}, \quad \Delta_c = r_c^2 - 2Mr_c + Q_*^2 = Mr_c - Q_*^2. \quad (78)$$

В этом случае

$$f(u) = (u - u_c)^2[-Q_*^2 u^2 + 2(M - Q_*^2 u_c)u + u_c(M - Q_*^2 u_c)], \quad (79)$$

и решение для φ имеет вид

$$\varphi = \pm \int [-Q_*^2 u^2 + 2(M - Q_*^2 u_c)u + u_c(M - Q_*^2 u_c)]^{-1/2} (u - u_c)^{-1} du. \quad (80)$$

Подстановка

$$\xi = (u - u_c)^{-1} \quad (81)$$

сводит решение для φ к элементарному интегралу

$$\varphi = \mp \int (-Q_*^2 + b\xi + c\xi^2)^{-1/2} d\xi, \quad (82)$$

где

$$b = 2(M - 2Q_*^2 u_c), \quad c = u_c(3M - 4Q_*^2 u_c). \quad (83)$$

Мы получили, таким образом, решение

$$\mp \varphi = \begin{cases} c^{-1/2} \ln \{2[c(-Q_*^2 + b\xi + c\xi^2)]^{1/2} + 2c\xi + b\} & (c > 0), \\ -(-c)^{-1/2} \arcsin \left\{ \frac{2c\xi + b}{(4Q_*^2 c + b^2)^{1/2}} \right\} & (c < 0). \end{cases} \quad (84)$$

Это решение описывает орбиты как первого рода, так и второго рода, но этим орбитам соответствуют разные области изменения аргументов. В случае орбит первого рода

$$\infty > r > r_c, \quad 0 \leq u \leq u_c, \quad -u_c^{-1} > \xi > -\infty, \quad (85)$$

а для орбит второго рода

$$r_c < r < r_{\min}, \quad u_c < u \leq u_{\max} (= 1/r_{\min}), \\ +\infty > \xi > \xi_{\min} (= (u_{\min} - u_c)^{-1}), \quad (86)$$

где $r_{\min}$ — положительный корень уравнения (ср. с уравнением (79)):

$$u_c(M - Q_*^2 u_c)r^2 + 2(M - Q_*^2 u_c)r - Q_*^2 = 0. \quad (87)$$

Орбиты первого и второго рода асимптотически приближаются к неустойчивой круговой орбите радиуса $r = r_c$ с противоположных сторон, накручиваясь на нее бесконечное число раз.

На рис. 15 изображен пример орбиты, вычисленной по формуле (84) (ср. с рис. 9, б, на котором изображены соответствующие орбиты в пространстве-времени Шварцшильда). Теперь легко представить поведение изотропных геодезических при других значениях прицельного параметра.

б. Времениподобные геодезические. Рассмотрим сначала радиальные геодезические, описываемые уравнениями

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - \frac{\Delta}{r^2}, \quad \frac{dt}{d\tau} = E \frac{r^2}{\Delta}. \quad (88)$$

Поскольку в интервале $0 \leq r < r_-$ величина $\Delta > 0$, ясно, что выражение $(E^2 r^2 - \Delta)$ станет равным нулю при некотором конечном значении $0 < r < r_-$. Следовательно, траектория будет иметь точку поворота под горизонтом Коши. Таким образом, даже радиальные времениподобные геодезические не достигают сингулярности $r = 0$, они обходят ее и уходят в другие области. Из уравнения (88) ясно также, что поведение координатного времени t , когда $r \rightarrow r_+ (\pm 0)$ и $r \rightarrow r_- (\pm 0)$, соответствует тому, что поверхность $r = r_+$ является горизонтом событий, а поверхность $r = r_-$ — горизонтом Коши.

Формальные решения уравнений (88) могут быть записаны через элементарные интегралы. Вследствие сложности и громоздкости мы не будем их здесь выписывать полностью.

Рассмотрим теперь [уравнение (67), описывающее временипо-

добные геодезические общего вида. Можно классифицировать и проанализировать различные случаи (как в § 19 для метрики Шварцшильда). Ясно, что те геодезические в пространстве-времени Рейсснера—Нордстрема, которые пересекают горизонт событий, будут существенно отличаться от соответствующих геодезических в геометрии Шварцшильда: последние обрываются в син-

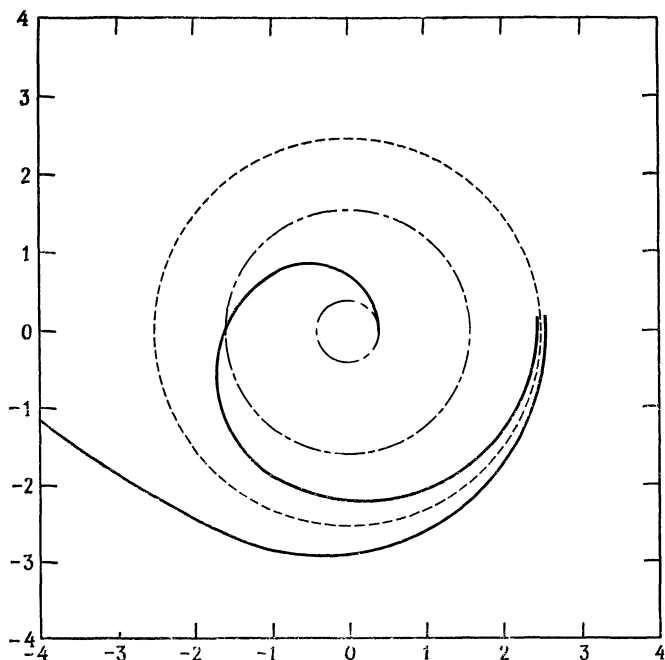


Рис. 15. Изотропная геодезическая при критическом значении прицельного параметра D_* , полученного из уравнения (78) для $Q_* = 0,8$. Внутренний и внешний горизонты показаны штрихпунктирными окружностями, пунктирной линией изображена неустойчивая круговая орбита. Траектория в действительности пересекает внутренний горизонт, но почти сразу обрывается. Единицей длины вдоль осей координат служит величина M .

гулярности, тогда как первые обрываются (формально) в некоторой точке под горизонтом Коши. Достаточно проиллюстрировать это различие на примере орбит второго рода, связанных с устойчивой и неустойчивой круговыми орбитами.

Для круговых орбит справедливы соотношения

$$f(u) = -Q_*^2 u^4 + 2Mu^3 - (1 + Q_*^2/L^2)u^2 + [2Mu - (1 - E^2)]/L^2 = 0, \quad (89)$$

$$f'(u) = -4Q_*^2 u^3 + 6Mu^2 - 2(1 + Q_*^2/L^2)u + 2M/L^2 = 0. \quad (90)$$

Из этих уравнений следует, что энергия E и проекция момента количества движения L тела на круговой орбите радиуса $r_c = 1/u_c$ равны

$$E^2 = \frac{(1 - 2Mu_c + Q_*^2 u_c^2)^2}{1 - 3Mu_c + 2Q_*^2 u_c^2}, \quad (91)$$

$$L^2 = \frac{M - Q_*^2 u_c}{u_c (1 - 3Mu_c + 2Q_*^2 u_c^2)}. \quad (92)$$

Из этих последних уравнений следует, в частности, неравенство

$$1 - 3Mu_c + 2Q_*^2 u_c^2 > 0. \quad (93)$$

Сравнение неравенства (93) с уравнением (74) показывает, что минимальный радиус времениподобной круговой орбиты равен

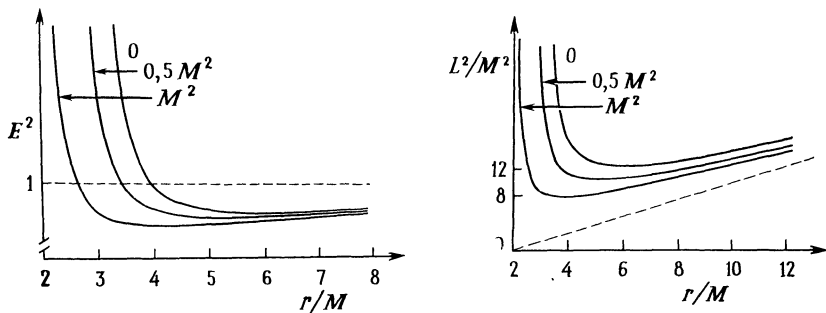


Рис. 16. Зависимость E^2 (слева) и L^2 (справа) от радиуса круговой орбиты. Различные кривые соответствуют указанным различным значениям Q_*^2 .

радиусу неустойчивой круговой фотонной орбиты. На рис. 16 показаны зависимости E и L от радиуса круговой орбиты.

Если E и L имеют значения (91) и (92), соответствующие круговой орбите радиуса $r_c = 1/u_c$, то уравнение (67) принимает вид (ср. с уравнением (79))

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = (u - u_c)^2 [-Q_*^2 u^2 + 2(M - Q_*^2 u_c)u + (M - Q_*^2 u_c - M/L^2 u_c^2)u_c]. \quad (94)$$

Помимо круговой орбиты радиуса $r_c = 1/u_c$ уравнение (94) допускает еще следующую орбиту второго рода (ср. с уравнением (80)):

$$\varphi = \pm \int [-Q_*^2 u^2 + 2(M - Q_*^2 u_c)u + (M - Q_*^2 u_c - M/L^2 u_c^2)u_c]^{-1/2} (u - u_c)^{-1} du. \quad (95)$$

Подстановка

$$\xi = (u - u_c)^{-1} \quad (96)$$

приводит к решению (84), но теперь

$$b = 2(M - 2Q_*^2 u_c), \quad c = u_c(3M - Q_*^2 - M^2/L^2 u_c^2). \quad (97)$$

Пример орбиты второго рода, связанной с устойчивой круговой орбитой, показан на рис. 17, а. Если круговая орбита неустойчива, то орбиты и первого, и второго рода могут быть вычислены исходя из одной и той же формулы (84) (случай $c < 0$). Пример таких орбит приведен на рис. 17, б.

Минимальный радиус устойчивой круговой орбиты определяется из условия, что функция $f(u)$ при соответствующем обратном радиусе имеет точку перегиба, т. е. система уравнений (89) и (90) должна быть дополнена уравнением

$$f''(u) = -12Q_*^2 u^2 + 12Mu - 2(1 + Q_*^2/L^2) = 0. \quad (98)$$

Исключая L^2 с помощью уравнения (92), получаем

$$4Q_*^4 u_c^3 - 9MQ_*^2 u_c^2 + 6M^2 u_c - M = 0, \quad (99)$$

или иначе

$$r_c^3 - 6Mr_c^2 + 9Q_*^2 r_c - 4Q_*^4/M = 0. \quad (100)$$

(Заметим, что при $Q_*^2 = 0$ уравнение (100) дает $r_c = 6M$ в полном согласии с результатом, полученным для метрики Шварцшильда).

Если выполнены все три условия (89), (90) и (98), то уравнение (67) принимает следующий вид:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = (u - u_c)^3 (2M - 3Q_*^2 u_c - Q_*^2 u). \quad (101)$$

Решением этого уравнения является функция (ср. с уравнением (165) гл. 3)

$$u = u_c + \frac{2(M - 2Q_*^2 u_c)}{(M - 2Q_*^2 u_c)^2 (\varphi - \varphi_0)^2 + Q_*^2}. \quad (102)$$

Пример такой орбиты показан на рис. 18.

в. Движение заряженных частиц. Пробная заряженная частица не может, разумеется, описываться геодезической в геометрии Рейсснера—Нордстрема. Движение такой частицы определяется лагранжианом

$$2\mathcal{L} = \left[\frac{\Delta}{r^2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \frac{r^2}{\Delta} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - r^2 \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 - r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 \right] + \frac{2qQ_*}{r} \frac{dt}{d\tau} \quad (103)^*$$

(q — удельный, на единицу массы, заряд пробной частицы), поскольку единственной не равной нулю компонентой векторного

* Такое выражение для лагранжиана соответствует уравнению движения Лоренца

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = qF_m^i \frac{dx^m}{d\tau}.$$

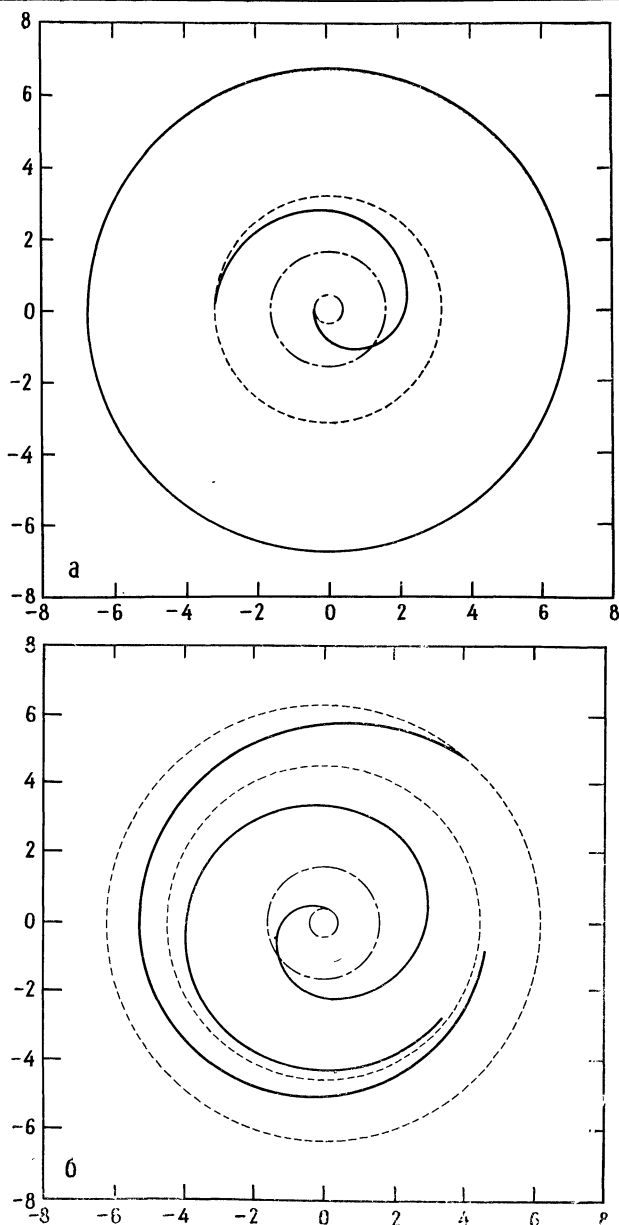


Рис. 17. *а* — орбита второго рода, связанная с устойчивой времениподобной круговой орбитой, обратный радиус которой равен $u_c = 0,15$, а $Q_* = 0,8$; *б* — времениподобная круговая орбита ($u_c = 0,2225$), когда орбиты первого и второго рода сливаются. В обоих случаях орбиты второго рода пересекают внутренний горизонт, но сразу же обрываются. Горизонты показаны штрихпунктирной линией, единица длины вдоль осей координат равна M .

потенциала является $A_0 (=Q_*/r)$. Из этого лагранжиана нетрудно получить уравнения движения (ср. с уравнениями (65))

$$p_t = \frac{\Delta}{r^2} \frac{dt}{d\tau} + \frac{qQ_*}{r} = E = \text{const}, \quad r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = L = \text{const}, \quad (104)$$

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{\Delta}{r^2} \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) = \left(\frac{\Delta}{r^2} \frac{dt}{d\tau}\right)^2 = \left(E - \frac{qQ_*}{r}\right)^2, \quad (105)$$

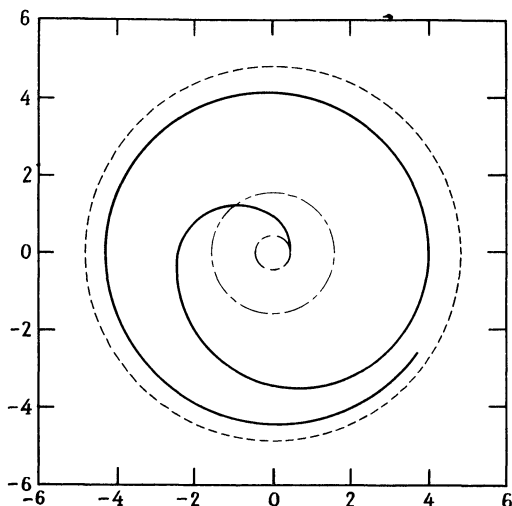


Рис. 18. Последняя неустойчивая круговая времениподобная орбита (радиус $4,89M$, $Q_* = 0,8$). Горизонты показаны штрихпунктирными окружностями, единица длины вдоль осей координат равна M .

а вместо уравнения (67) теперь имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = & -Q_*^2 u^4 + 2Mu^3 - [1 + Q_*^2(1 - q^2)/L^2]u^2 + \\ & + (2/L^2)(M - qQ_*E)u - (1 - E^2)/L^2. \end{aligned} \quad (106)$$

Чтобы частица имела точку поворота точно на горизонте событий, ее энергия, как следует из уравнения (105), должна быть равна

$$E = qQ_*/r_+. \quad (107)$$

Эта величина отрицательна, если $qQ_* < 0$, что приводит к возможности извлекать энергию из черной дыры, — энергию, обусловленную ее зарядом. Процессы такого типа будут рассмотрены в гл. 7.

41. Описание пространства-времени Рейсснера—Нордстрема в формализме Ньюмена—Пенроуза

Построим изотропную тетраду, необходимую для описания пространства-времени Рейсснера—Нордстрема в формализме Ньюмена—Пенроуза. Выберем векторы (70), задающие радиальные изотропные геодезические

$$\begin{aligned} l^i &= (l^t, l^r, l^\theta, l^\varphi) = (1/\Delta)(r^2, -\Delta, 0, 0), \\ n^i &= (n^t, n^r, n^\theta, n^\varphi) = (1/2r^2)(r^2, -\Delta, 0, 0) \end{aligned} \quad (108)$$

в качестве двух вещественных изотропных базисных векторов и добавим к ним комплексный изотропный вектор

$$m^i = (m^t, m^r, m^\theta, m^\varphi) = (1/r\sqrt{2})(0, 0, 1, i \operatorname{cosec} \theta), \quad (109)$$

ортогональный векторам l и n . Эти векторы удовлетворяют требуемым условиям нормировки:

$$l \cdot n = 1, \quad m \cdot \bar{m} = -1. \quad (110)$$

Базисные векторы ($l, n, m, \bar{m}$) только видом функции Δ отличаются от аналогичных базисных векторов, определенных в гл. 3 (уравнения (281)—(283)). Поэтому при вычислении спиновых коэффициентов нужно внести лишь незначительные изменения. В результате получаем (ср. с уравнениями (287) и (288) гл. 3)

$$\kappa = \sigma = \lambda = \nu = \varepsilon = \pi = \tau = 0,$$

$$\rho = -1/r, \quad \beta = -\alpha(1/2r\sqrt{2}) \operatorname{ctg} \theta, \quad \mu = -\Delta/2r^3, \quad (111)$$

$$\gamma = \mu + (r - M)/2r^2 = (Mr - Q_*^2)/2r^3. \quad (112)$$

Равенство нулю спиновых коэффициентов κ, σ, λ и ν подтверждает принадлежность пространства-времени Рейсснера—Нордстрема к типу D по классификации Петрова. Следовательно, в выбранном базисе вейлевские скаляры Ψ_0, Ψ_1, Ψ_3 и Ψ_4 должны быть равны нулю, что можно проверить прямым вычислением, свертывая тензор Римана (не равные нулю компоненты которого выписаны в (64)) в соответствии с определением этих скаляров. Единственный не равный нулю вейлевский скаляр — это Ψ_2 . Для него находим (ср. с уравнением (289) гл. 3)

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= R_{pqrs} l^p m^q n^r \bar{m}^s = \\ &= (e^{-2\nu}/4r)(R_{0101} \operatorname{cosec}^2 \theta + R_{0303} - e^{4\nu} R_{2323} - e^{4\nu} R_{1212} \operatorname{cosec}^2 \theta). \end{aligned} \quad (113)$$

Подставляя в это выражение компоненты тензора Римана, (64), получаем

$$\Psi_2 = -(Mr - Q_*^2)r^{-1}. \quad (114)$$

Остается найти значения максвелловских скаляров в метрике Рейсснера—Нордстрема. Среди них отличен от нуля лишь скаляр ϕ_1 , который равен

$$\phi_1 = {}^{1/2}F_{pq}(l^p n^q + \bar{m}^p m^q) = {}^{1/2}F_{tr}(l^r n^r - l^r n^t) = {}^{1/2}Q_* r^{-2}. \quad (115)$$

42. Метрические возмущения решения Рейсснера—Нордстрема

Как и в случае решения Шварцшильда, при исследовании возмущений метрики Рейсснера—Нордстрема можно линеаризовать уравнения Эйнштейна и уравнения Максвелла около решения Рейсснера—Нордстрема, предполагая, что полная метрика является нестационарной и аксиально-симметричной:

$$ds^2 = e^{2\nu}(dt)^2 - e^{2\psi}(d\varphi - \omega dt - q_2 dx^2 - q_3 dx^3)^2 - e^{2\mu_2}(dx^2)^2 - e^{2\mu_3}(dx^3)^2. \quad (116)$$

Начнем с уравнений Максвелла.

а. Линеаризованные уравнения Максвелла. Уравнения Максвелла, выписанные в гл. 2 (уравнения (95)), в метрике (116) принимают вид

$$(e^{\psi+\mu_2}F_{12})_{,3} + (e^{\psi+\mu_3}F_{31})_{,2} = 0, \quad (e^{\psi+\nu}F_{01})_{,2} + (e^{\psi+\mu_2}F_{12})_{,0} = 0, \\ (e^{\psi+\nu}F_{01})_{,3} + (e^{\psi+\mu_3}F_{13})_{,0} = 0, \quad (117)$$

$$(e^{\mu_2+\mu_3}F_{01})_{,0} + (e^{\nu+\mu_1}F_{12})_{,2} + (e^{\nu+\mu_2}F_{13})_{,3} = \\ = e^{\psi+\mu_3}F_{02}Q_{02} + e^{\psi+\mu_2}F_{03}Q_{03} - e^{\psi+\nu}F_{23}Q_{23}; \\ (e^{\psi+\mu_3}F_{02})_{,2} + (e^{\psi+\mu_2}F_{03})_{,3} = 0, \\ - (e^{\psi+\nu}F_{23})_{,2} + (e^{\psi+\mu_2}F_{03})_{,0} = 0, \\ + (e^{\psi+\nu}F_{23})_{,3} + (e^{\psi+\mu_1}F_{02})_{,0} = 0, \quad (118)$$

$$(e^{\nu+\mu_2}F_{02})_{,3} - (e^{\nu+\mu_3}F_{03})_{,2} + (e^{\mu_2+\mu_3}F_{23})_{,0} = \\ = e^{\psi+\nu}F_{01}Q_{23} + e^{\psi+\mu_2}F_{12}Q_{03} - e^{\psi+\mu_3}F_{13}Q_{02},$$

где

$$Q_{AB} = q_{A,B} - q_{B,A}, \quad Q_{A0} = q_{A,0} - \omega_{,A} \quad (A, B = 2, 3). \quad (119)$$

В первую группу уравнений (117) входят только такие величины (или такие произведения величин), которые меняют знак при замене φ на $-\varphi$, а во вторую группу уравнений (118) входят только величины, инвариантные относительно обращения знака φ . Это соответственно аксиальные и полярные величины (как мы их определили в § 24 гл. 4). Кроме того, в каждой из двух групп уравнений можно обойтись без первого уравнения, поскольку каждое из них является условием интегрируемости для двух следующих уравнений данной группы.

В рассматриваемом случае единственной не равной нулю ком-

понентой тензора Максвелла является F_{02} ($= -Q_* r^{-2}$), а величины Q_{AB} — первого порядка малости, и линеаризованные уравнения (117) и (118) (без первых уравнений в каждой группе) приобретают следующий вид:

$$(re^{\nu} F_{01} \sin \theta)_{,r} + re^{-\nu} F_{12,0} \sin \theta = 0, \quad (120)$$

$$re^{\nu} (F_{01} \sin \theta)_{,\theta} + r^2 F_{13,0} \sin \theta = 0, \quad (121)$$

$$re^{-\nu} F_{01,0} + (re^{\nu} F_{12})_{,r} + F_{13,0} = -Q_*(\omega_{,2} - q_{2,0}) \sin \theta, \quad (122)$$

$$re^{-\nu} F_{03,0} = (re^{\nu} F_{23})_{,r}, \quad (123)$$

$$\delta F_{02,0} - (Q_*/r^2)(\delta\psi + \delta\mu_3)_{,0} + (e^{\nu}/r \sin \theta)(F_{23} \sin \theta)_{,\theta} = 0, \quad (124)$$

$$[\delta F_{02} - (Q_*/r^2)(\delta\nu + \delta\mu_2)]_{,\theta} + (re^{\nu} F_{30})_{,r} + re^{-\nu} F_{23,0} = 0. \quad (125)$$

б. Возмущения тензора Риччи. В отличие от случая метрики Шварцшильда теперь нельзя положить равными нулю компоненты возмущенного тензора Риччи, поэтому имеем

$$\delta R_{(a)(b)} = -2[\eta^{(n)(m)}(\delta F_{(a)(n)} F_{(b)(m)} + F_{(a)(n)} \delta F_{(b)(m)}) - \eta_{(a)(b)} Q_* \delta F_{02}/r^2]. \quad (126)$$

Подставляя сюда значения компонент тензора Максвелла, находим

$$\begin{aligned} \delta R_{00} &= \delta R_{11} = -\delta R_{22} = \delta R_{33} = -2(Q_*/r^2) \delta F_{02}, \\ \delta R_{01} &= -2(Q_*/r^2) F_{12}, \quad \delta R_{03} = +2(Q_*/r^2) F_{23}, \\ \delta R_{12} &= +2(Q_*/r^2) F_{01}, \quad \delta R_{23} = +2(Q_*/r^2) F_{03}, \quad \delta R_{02} = \delta R_{13} = 0. \end{aligned} \quad (127)$$

в. Аксиальные возмущения. Уравнения для возмущений решения Рейсснера—Нордстрема получаются точно так же, как в § 24 были получены уравнения для возмущений метрики Шварцшильда. В частности, аксиальные и полярные возмущения могут рассматриваться по отдельности.

Аксиальные возмущения решения Рейсснера—Нордстрема, как и в случае метрики Шварцшильда, характеризуются не равными нулю значениями ω , q_2 и q_3 , но вместо уравнений (11) и (12) гл. 4 теперь имеем (вследствие уравнений (127))

$$(r^{\nu} e^{2\nu} Q_{23} \sin^3 \theta)_{,3} + r^4 Q_{02,0} \sin^3 \theta = 2(r^3 e^{\nu} \sin^2 \theta) \delta R_{12} = 4Q_* r e^{\nu} F_{01} \sin^2 \theta, \quad (128)$$

$$(r^2 e^{2\nu} Q_{23} \sin^3 \theta)_{,2} - r^2 e^{-2\nu} Q_{03,0} \sin^3 \theta = -2(r^2 \sin^2 \theta) \delta R_{13} = 0. \quad (129)$$

Систему уравнений (128) и (129) следует дополнить уравнениями (120)—(122). Эти последние уравнения могут быть сведены к одному уравнению для F_{01} путем исключения из (122) функций F_{12} и F_{13} с помощью (120) и (121):

$$\begin{aligned} [e^{2\nu} (re^{\nu} B)_{,r}]_{,r} + r^{-1} e^{\nu} (B_{,\theta}/\sin \theta)_{,\theta} \sin \theta - re^{-\nu} B_{,00} = \\ = Q_*(\omega_{,20} - q_{2,00}) \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (130)$$

$$B = F_{01} \sin \theta. \quad (131)$$

Подстановкой (ср. с уравнениями (13)–(15) гл. 4)

$$Q(r, \theta, t) = r^2 e^{2\nu} Q_{23} \sin^3 \theta = \Delta(q_{2,3} - q_{3,2}) \sin^3 \theta \quad (132)$$

уравнения (128) и (129) приводятся к виду

$$\frac{1}{r^4 \sin^3 \theta} \frac{\partial Q}{\partial \theta} = -(\omega_{,2} - q_{2,0})_{,0} + \frac{4Q_*}{r^3 \sin^2 \theta} e^\nu B, \quad (133)$$

$$\frac{\Delta}{r^4 \sin^3 \theta} \frac{\partial Q}{\partial r} = +(\omega_{,3} - q_{3,0})_{,0}. \quad (134)$$

Исключая из этих уравнений ω и предполагая (что мы делаем всегда) зависимость возмущений от времени вида $\exp(i\sigma t)$, получаем следующие уравнения (ср. с уравнением (18) гл. 4):

$$\begin{aligned} r^4 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Delta}{r^4} \frac{\partial Q}{\partial r} \right) + \sin^3 \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin^3 \theta} \frac{\partial Q}{\partial \theta} \right) + \sigma^2 (r^4 / \Delta) Q = \\ = 4Q_* e^\nu r (B \sin^{-2} \theta)_{,0} \sin^3 \theta. \end{aligned} \quad (135)$$

Подобным же образом, исключая $(\omega_{,2} - q_{2,0})_{,0}$ из уравнения (130) с помощью уравнения (133), получаем

$$\begin{aligned} [e^{2\nu} (r e^\nu B)_{,r}],_r + (e^\nu / r) (B_{,\theta} / \sin \theta)_{,\theta} \sin \theta + (\sigma^2 r e^{-\nu} - 4Q_* e^\nu / r^3) B = \\ = -Q_* Q_{,\theta} / r^4 \sin \theta. \end{aligned} \quad (136)$$

Подстановки

$$Q(r, \theta) = Q(r) C_{l+2}^{-3/2}(\theta), \quad (137)$$

$$B(r, \theta) = \frac{B(r)}{\sin \theta} \frac{dC_{l+2}^{-3/2}}{d\theta} = 3B(r) C_{l+1}^{-1/2}(\theta), \quad (138)$$

где C_n^ν — функции Гегенбауэра, приводят к разделению переменных r и θ в уравнениях (135) и (136) (ср. с уравнениями (19) и (20) гл. 4). При получении второго равенства для $B(r, \theta)$ в уравнении (138) было использовано рекуррентное соотношение

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{dC_n^\nu}{d\theta} = -2\nu C_{n-1}^{\nu+1}. \quad (139)$$

Подстановки (137) и (138) в уравнения (135) и (136) приводят к следующим радиальным уравнениям (ср. с уравнением (23) гл. 4):

$$\Delta \frac{d}{dr} \left(\frac{\Delta}{r^4} \frac{dQ}{dr} \right) - \mu^2 \frac{\Delta}{r^4} Q + \sigma^2 Q = -4(Q_* u^2 / r^3) \Delta e^\nu B, \quad (140)$$

$$\begin{aligned} [e^{2\nu} (r e^\nu B)_{,r}],_r - (\mu^2 + 2) r^{-1} e^\nu B + \\ + (\sigma^2 r e^{-\nu} + 4Q_* e^\nu r^{-3}) B = -Q_* Q r^{-4}, \end{aligned} \quad (141)$$

где

$$\mu^2 = 2n = (l-1)(l+2). \quad (142)$$

Переходя к переменной r_* (определяемой уравнением (42)) и полагая

$$Q(r) = r H_2^{(-)}, \quad r e^\nu B = -H_1^{(-)} / 2\mu, \quad (143)$$

получаем для $H_2^{(-)}$ и $H_1^{(-)}$ следующую пару связанных уравнений

$$\Lambda^2 H_2^{(-)} = r^{-5} \Delta \{[(\mu^2 + 2)r - 3M + 4r^{-1}Q_*] H_2^{(-)} - 3MH_2^{(-)} + 2Q_* \mu H_1^{(-)}\}, \quad (144)$$

$$\Lambda^2 H_1^{(-)} = r^{-5} \Delta \{[(\mu^2 + 2)r - 3M + 4r^{-1}Q_*] H_1^{(-)} + 3MH_1^{(-)} + 2Q_* \mu H_2^{(-)}\}. \quad (145)$$

Здесь было введено стандартное обозначение

$$\Lambda^2 = \frac{d^2}{dr_*^2} + \sigma^2. \quad (146)$$

Если вместо $H_1^{(-)}$ и $H_2^{(-)}$ ввести функции

$$Z_1^{(-)} = +q_1 H_1^{(-)} + (-q_1 q_2)^{1/2} H_2^{(-)}, \quad (147)$$

$$Z_2^{(-)} = -(-q_1 q_2)^{1/2} H_1^{(-)} + q_1 H_2^{(-)}, \quad (148)$$

где

$$q_1 = 3M + (9M^2 + 4Q_*^2 \mu^2)^{1/2}, \quad q_2 = 3M - (9M^2 + 4Q_*^2 \mu^2)^{1/2}, \quad (149)$$

то уравнения (144) и (145) расцепляются и $Z_1^{(-)}$ и $Z_2^{(-)}$ удовлетворяют одномерным волновым уравнениям Шредингера

$$\Lambda^2 Z_i^{(-)} = V_i^{(-)} Z_i^{(-)} \quad (i = 1, 2), \quad (150)$$

$$V_i^{(-)} = r^{-5} \Delta [(\mu^2 + 2)r - q_i(1 + q_i/\mu^2 r)] \quad (i, j = 1, 2; i \neq j), \quad (151)$$

$$q_1 + q_2 = 6M, \quad -q_1 q_2 = 4Q_*^2 \mu^2. \quad (152)$$

Редукция уравнений для аксиальных возмущений к паре одномерных волновых уравнений (150) была впервые выполнена Монкрифом и Церилли (хотя и совсем другими путями).

Отметим, что в пределе $Q_* = 0$, когда $q_1 = 6M$, а $q_2 = 0$, уравнение для $Z_2^{(-)}$ переходит в уравнение Редже—Уилера (уравнения (27) и (28) гл. 4).

г. Полярные возмущения. Полярные возмущения характеризуются приращениями метрических функций v , μ_2 , μ_3 и ψ . Линеаризуя выражения для R_{02} , R_{03} , R_{23} , R_{11} и G_{22} (уравнения (4) гл. 4) и подставляя в эти величины выражения для возмущений из уравнений (127), получаем вместо уравнений (31) — (35) гл. 4 следующие уравнения:

$$(\delta\psi + \delta\mu_3)_{,r} + (1/r - v_{,r})(\delta\psi + \delta\mu_3) - (2/r)\delta\mu_2 = -\delta R_{02} = 0, \quad (153)$$

$$[(\delta\psi + \delta\mu_2)_{,0} + (\delta\psi - \delta\mu_3) \operatorname{ctg} \theta]_{,0} = -e^{v+\mu_3} \delta R_{03} = -2Q_* r^{-1} e^v F_{23}, \quad (154)$$

$$\begin{aligned} (\delta\psi + \delta v)_{,r0} + (\delta\psi - \delta\mu_3)_{,r} \operatorname{ctg} \theta + (v_{,r} - 1/r)\delta v_{,0} - (v_{,r} + 1/r)\delta\mu_{2,0} = \\ = -e^{\mu_2+\mu_3} \delta R_{23} = -2Q_* r^{-1} e^{-v} F_{03}, \end{aligned} \quad (155)$$

$$e^{2\nu} [(2/r) \delta v_{,r} + (1/r + v_{,r}) (\delta \psi + \delta \mu_3)_{,r} - 2(r^{-2} + 2r^{-1}v_{,r}) \delta \mu_2] + \\ + r^{-2} [(\delta \psi + \delta v)_{,\theta\theta} + (2\delta \psi + \delta v - \delta \mu_3)_{,\theta} \operatorname{ctg} \theta + 2\delta \mu_3] - \\ - e^{-2\nu} (\delta \psi + \delta \mu_3)_{,\theta\theta} = \delta G_{22} = \delta R_{22} = 2r^{-2} Q_* \delta F_{02}, \quad (156)$$

$$e^{2\nu} [\delta \psi_{,rr} + 2(1/r + v_{,r}) \delta \psi_{,r} + (1/r) (\delta \psi + \delta v + \delta \mu_3 - \delta \mu_2)_{,r} - \\ - 2(1/r + 2v_{,r}) r^{-1} \delta \mu_2] + r^{-2} [\delta \psi_{,\theta\theta} + \delta \psi_{,\theta} \operatorname{ctg} \theta + \\ + (\delta \psi + \delta v - \delta \mu_3 + \delta \mu_2)_{,\theta} \operatorname{ctg} \theta + 2\delta \mu_3] - e^{-2\nu} \delta \psi_{,\theta\theta} = \\ = -\delta R_{11} = 2r^{-2} Q_* \delta F_{02}. \quad (157)$$

Эти уравнения следует рассматривать совместно с уравнениями (123) и (125), полученными в результате линеаризации уравнений Максвелла.

Разделение переменных r и θ в уравнениях (123)—(125) и (153)—(157) достигается следующими подстановками (при этом нужно воспользоваться соотношениями (40)—(42) гл. 4):

$$\delta v = N(r) P_l(\theta), \quad \delta \mu_2 = L(r) P_l(\theta), \quad (158)$$

$$\delta \mu_3 = [T(r) P_l + V(r) P_{l,\theta\theta}], \quad \delta \psi = [T(r) P_l + V(r) P_{l,\theta} \operatorname{ctg} \theta],$$

$$\delta F_{02} = (r^2 e^{2\nu} / 2Q_*) B_{02}(r) P_l, \quad F_{03} = -(re^{\nu} / 2Q_*) B_{03}(r) P_{l,\theta}, \quad (159)$$

$$F_{23} = -i\sigma (re^{-\nu} / 2Q_*) B_{23}(r) P_{l,\theta}. \quad (160)$$

Для введенных таким образом различных радиальных функций получаем следующие соотношения:

$$\left[\frac{d}{dr} + (1/r - v_{,r}) \right] [2T - l(l+1)V] - 2L/r = 0, \quad (161)$$

$$T - V + L = B_{23}, \quad (162)$$

$$(T - V + N)_{,r} - (1/r - v_{,r}) N - (1/r + v_{,r}) L = B_{03}, \quad (163)$$

$$(2/r) N_{,r} + (1/r + v_{,r}) [2T - l(l+1)V] - (2/r) (1/r + 2v_{,r}) L - \\ - l(l+1) r^{-2} e^{-2\nu} N - 2nr^{-2} e^{-2\nu} T - \sigma^2 e^{-4\nu} [2T - l(l+1)V] = B_{02}, \quad (164)$$

$$B_{03} = (1/r^2) (r_2 B_{23}),_{,r} = B_{23,r} + (2/r) B_{23}, \quad (165)$$

$$r^4 e^{2\nu} B_{02} = 2Q_*^2 [2T - l(l+1)V] - l(l+1) r^2 B_{23}, \quad (166)$$

$$(r^2 e^{\nu} B_{03})_{,r} + r^2 e^{2\nu} B_{02} + \sigma^2 r^2 e^{-2\nu} B_{23} = 2Q_*^2 (N + L)/r^2. \quad (167)$$

Заметим, что уравнения (162) и (166) являются алгебраическими.

Удобно ввести новую переменную

$$X = nV = \frac{1}{2} (l-1) (l+2) V. \quad (168)$$

Из уравнения (162) следует

$$2T - l(l+1)V = -2(L + X - B_{23}). \quad (169)$$

Это соотношение позволяет переписать уравнение (161) в виде

$$(L + X - B_{23})_{,r} = -(1/r - v_{,r}) (L + X - B_{23}) - L/r. \quad (170)$$

Подобным же образом, комбинируя уравнения (162), (163) и (165), получаем

$$N_{,r} - L_{,r} = (1/r - v_{,r})N + (1/r + v_{,r})L + 2B_{23}/r. \quad (171)$$

Наконец, разделение переменных в уравнении (157) (подстановкой (158)) приводит к следующему уравнению:

$$V_{,rr} + 2(1/r + v_{,r})V_{,r} + (e^{-2v}/r^2)(N + L) + \sigma^2 e^{-4v}V = 0. \quad (172)$$

Заметим, что в точности такое же уравнение было получено при исследовании возмущений метрики Шварцшильда (уравнение (51) гл. 4).

Уравнения (164), (170) и (171) могут рассматриваться как система трех линейных уравнений первого порядка для трех функций L , N и $V(=X/n)$. Комбинируя эти уравнения, можно записать производные функций N , L и X в виде линейных комбинаций функций L , N , V , B_{23} и B_{03} (ср. с уравнениями (52)—(55) гл. 4):

$$N_{,r} = aN + bL + c(X - B_{23}), \quad (173)$$

$$L_{,r} = (a - 1/r + v_{,r})N + (b - 1/r - v_{,r})L + c(X - B_{23}) - 2B_{23}/r, \quad (174)$$

$$X_{,r} = -(a - 1/r + v_{,r})N - (b + 1/r - 2v_{,r})L - \\ - (c + 1/r - v_{,r})(X - B_{23}) + B_{03}, \quad (175)$$

$$\text{где } a = (n + 1)e^{-2v}/r, \quad (176)$$

$$b = -1/r - (n/r)e^{-2v} + v_{,r} + rv_{,r}^2 + \sigma^2 re^{-4v} - 2(Q_*/r^3)e^{-2v} = \\ = -1/r - (n/r)e^{-2v} + (M/r^2)e^{-2v} + (M^2/r^3)e^{-4v} + \\ + \sigma^2 re^{-4v} - (Q_*^2/r^3)(1 + 2e^{2v})e^{-4v}, \quad (177)$$

$$c = -1/r + e^{-2v}/r + rv_{,r}^2 + \sigma^2 re^{-4v} - 2(Q_*^2/r^3)e^{-2v} = \\ = -1/r + e^{-2v}/r + (M^2/r^3)e^{-4v} + \sigma^2 re^{-4v} - (Q_*^2/r^3)(1 + e^{2v})e^{-4v}. \quad (178)$$

Уравнение (175) может быть переписано в другом виде:

$$X_{,r} = -(1/r^2)(nr + 3M - 2Q_*^2/r)e^{-2v}N + \\ + [-r^{-1}e^{-2v} + (M/r^2)e^{-2v} - r^{-3}(M^2 - Q_*^2)e^{-4v} - \\ - \sigma^2 re^{-4v}](L + X - B_{23}) + aL + B_{03}. \quad (179)$$

Замечательно, что система пятого порядка (уравнения (165)—(167) и (173)—(175)) может быть сведена к двум независимым уравнениям второго порядка. Действительно, определим функции $H_2^{(+)}$ и $H_1^{(+)}$ следующим образом (ср. с уравнением (59) гл. 4):

$$H_2^{(+)} = (r/n)X - (r^2/\bar{\omega})(L + X - B_{23}), \quad (180)$$

$$H_1^{(+)} = -(Q_*\mu)^{-1}[r^2B_{23} + 2Q_*^2(r/\bar{\omega})(L + X - B_{23})] = \\ = (Q_*\mu)^{-1}[r^2B_{23} + 2(Q_*^2/r)(rX/n - H_2^{(+)})], \quad (181)$$

$$\bar{\omega} = nr + 3M - 2Q_*^2/r. \quad (182)$$

Эти функции удовлетворяют системе двух уравнений

$$\Delta^2 H_2^{(+)} = r^{-5} \Delta [U H_2^{(+)} + W (-3M H_2^{(+)} + 2Q_* \mu H_1^{(+)})], \quad (183)$$

$$\Delta^2 H_1^{(+)} = r^{-5} \Delta [U H_1^{(+)} + W (+2Q_* \mu H_2^{(+)} + 3M H_1^{(+)})], \quad (184)$$

где

$$\begin{aligned} U &= (2nr + 3M)W + (\bar{\omega} - nr - M) - 2n\Delta/\bar{\omega}, \\ W &= (\Delta/r\bar{\omega}^2)(2nr + 3M) + \bar{\omega}^{-1}(nr + M). \end{aligned} \quad (185)$$

Уравнения (183) и (184) могут быть расцеплены, если вместо $H_2^{(+)}$ и $H_1^{(+)}$ ввести такие же функции (147) и (148) (с соответствующей заменой индексов), которые были использованы для расцепления уравнений (144) и (145) в случае аксиальных возмущений. Таким образом, функции

$$Z_1^{(+)} = +q_1 H_1^{(+)} + (-q_1 q_2)^{1/2} H_2^{(+)}, \quad (186)$$

$$Z_2^{(+)} = -(-q_1 q_2)^{1/2} H_1^{(+)} + q_1 H_2^{(+)} \quad (187)$$

удовлетворяют одномерным волновым уравнениям

$$\Delta^2 Z_i^{(+)} = V_i^{(+)} Z_i^{(+)} \quad (i = 1, 2), \quad (188)$$

где

$$V_1^{(+)} = r^{-5} \Delta [U + 1/2 (q_1 - q_2) W], \quad V_2^{(+)} = r^{-5} \Delta [U - 1/2 (q_1 - q_2) W]. \quad (189)$$

Эти расцепленные уравнения были впервые получены (другими методами) Монкрифом и Церилли.

И снова, как легко проверить, в пределе $Q_* = 0$ уравнение для $Z_2^{(+)}$ переходит в уравнение Церилли (ср. с уравнениями (62) и (63) гл. 4).

Г. Окончание построения решения. Как было показано в § 25 гл. 4, приводимость уравнений, описывающих полярные возмущения черной дыры Шварцшильда, к уравнению Церилли является следствием существования особого решения системы уравнений. Ясно, что и приводимость рассматриваемой в настоящем параграфе системы пятого порядка к паре уравнений (183) и (184) должна быть обусловлена существованием подобного особого решения. Ксантопулос распространил описанный в § 25 гл. 4 анализ на более общий случай, когда система линейных дифференциальных уравнений сводится более чем к одному уравнению второго порядка, и показал, что система уравнений (165), (167) и (173)—(175) допускает следующее специальное решение (ср. с уравнением (126) гл. 4):

$$\begin{aligned} N^{(0)} &= r^{-2} e^v [M - (r/\Delta) (M^2 - Q_*^2 + \sigma^2 r^4) - 2Q_*^2/r], \\ L^{(0)} &= r^{-3} e^v (3Mr - 4Q_*^2), \quad X^{(0)} = n e^v r^{-1}, \\ B_{23}^{(0)} &= -2Q_*^2 r^{-3} e^v, \\ B_{03}^{(0)} &= 2Q_*^2 r^{-6} e^{-v} (2Q_*^2 + r^2 - 3Mr). \end{aligned} \quad (190)$$

Теперь несложно получить общее решение уравнений для остальных радиальных функций. Ксантопулос нашел, что

$$N = N^{(0)}\Phi + 2n(e^{2\nu}/\bar{\omega})H_2^{(+)} - (e^{2\nu}/\bar{\omega})(nrH_2^{(+)} + Q_*\mu H_1^{(+)}),_{,r} + \\ + (1/r\bar{\omega}^2)[e^{2\nu}(\bar{\omega} - 2nr - 3M) - (n+1)\bar{\omega}](nrH_2^{(+)} + Q_*\mu H_1^{(+)}), \quad (191)$$

$$L = L^{(0)}\Phi - r^{-2}(nrH_2^{(+)} + Q_*\mu H_1^{(+)}), \quad (192)$$

$$X = X^{(0)}\Phi + nH_2^{(+)} / r, \quad (193)$$

$$B_{23} = B_{23}^{(0)}\Phi - Q_*\mu H_1^{(+)} / r^2, \quad (194)$$

$$B_{03} = B_{03}^{(0)}\Phi - Q_*\mu H_1^{(+)} / r^2 - 2r^{-4}Q_*^2/\bar{\omega}(nrH_2^{(+)} + Q_*\mu H_1^{(+)}), \quad (195)$$

где
$$\Phi = \int (nrH_2^{(+)} + Q_*\mu H_1^{(+)})(e^{-\nu}/\bar{\omega}r) dr. \quad (196)$$

Заметим, что в пределе $Q_* = 0$ функция Φ , определяемая уравнением (196), отличается от функции Φ , введенной в гл. 4 (уравнение (70)), множителем $\exp(-\nu)$.

43. Соотношения между $V_i^{(+)}$ и $V_i^{(-)}$ и между $Z_i^{(+)}$ и $Z_i^{(-)}$

Как и в метрике Шварцшильда, структура потенциалов V_i^{+} и V_i^{-} ($i = 1, 2$) в уравнениях для аксиальных и полярных возмущений соответственно обеспечивает равенство коэффициентов отражения и коэффициентов прохождения для этих двух видов возмущений. Нетрудно проверить (мы покажем это ниже, в § 45), что потенциалы имеют следующий вид:

$$V_i^{(\pm)} = \pm\beta_i \frac{df_i}{dr_*} + \beta_i^2 f_i^2 + \kappa f_i, \quad (197)$$

где

$$\kappa = \mu^2(\mu^2 + 2), \quad \beta_i = q_j, \quad f_i = \Delta/r^3(\mu^2 r + q_j) \quad (i, j = 1, 2; i \neq j), \quad (198)$$

а величины q_j имеют тот же смысл, что и до сих пор. Следовательно, решения Z_i^{+} и Z_i^{-} соответствующих уравнений связаны соотношением (ср. с уравнениями (152) и (153) гл. 4)

$$[\mu^2(\mu^2 + 2) \pm 2i\sigma q_j] Z_i^{(\pm)} = \\ = \left[\mu^2(\mu^2 + 2) + \frac{2q_j^2 \Delta}{r^3(\mu^2 r + q_j)} \right] Z_i^{(\mp)} \pm 2q_j \frac{dZ_i^{(\mp)}}{dr^*} \quad (i, j = 1, 2; i \neq j). \quad (199)$$

Именно существование этого соотношения гарантирует равенство коэффициентов отражения и прохождения, определяемых волновыми уравнениями для функций Z_i^{+} и Z_i^{-} . В § 47 мы рассмотрим

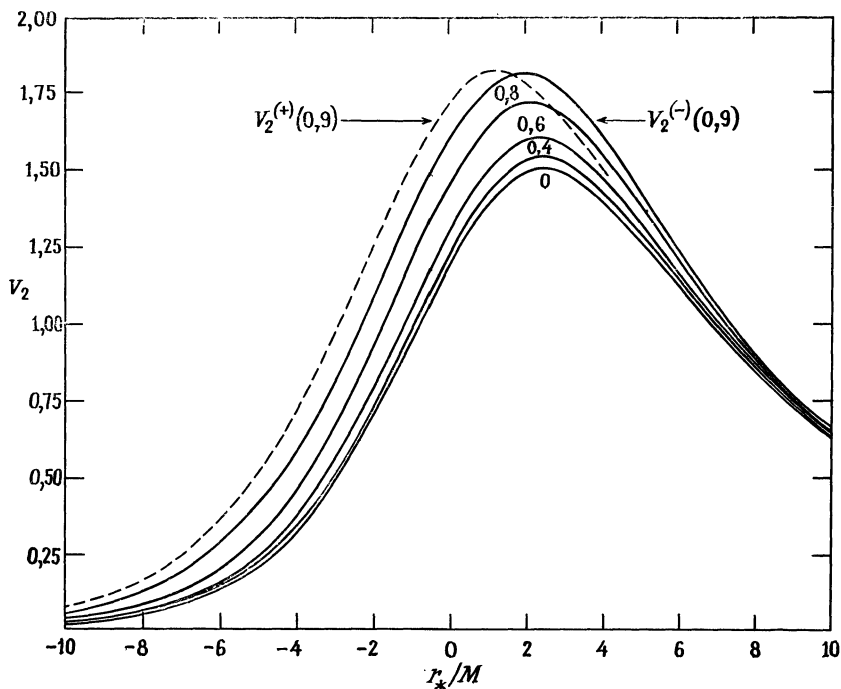


Рис. 19. Потенциальные барьеры $V_2^{(\pm)}$ вокруг черной дыры Рейсснера — Нордстрема. Сплошные линии — барьеры для значений $Q_* = 0, 0,4; 0,6; 0,8; 0,9$. Потенциальные барьеры для полярных возмущений лишь незначительно отличаются от барьеров для аксиальных возмущений. Для сравнения пунктирной линией показан барьер для полярных возмущений при $Q_* = 0,9$.

применение решений этих уравнений к исследованию отражения и прохождения гравитационных и электромагнитных волн, одновременно падающих на черную дыру Рейсснера—Нордстрема. А здесь приведем графики потенциалов $V_i^{(\pm)}$ для различных значений Q_* (рис. 19 и 20).

44. Описание возмущений в формализме Ньюмена—Пенроуза

Легкость, с которой нам удалось при исследовании возмущений метрики Шварцшильда в формализме Ньюмена—Пенроуза получить решения для вейлевских скаляров Ψ_0 и Ψ_4 , связана с тем, что четыре тождества Бианки и два тождества Риччи (соотношения (232) и (233) гл. 4) оказались уже линеаризованными в том смысле, что они были однородными относительно величин, которые обращаются в нуль в фоновой метрике (вслед-

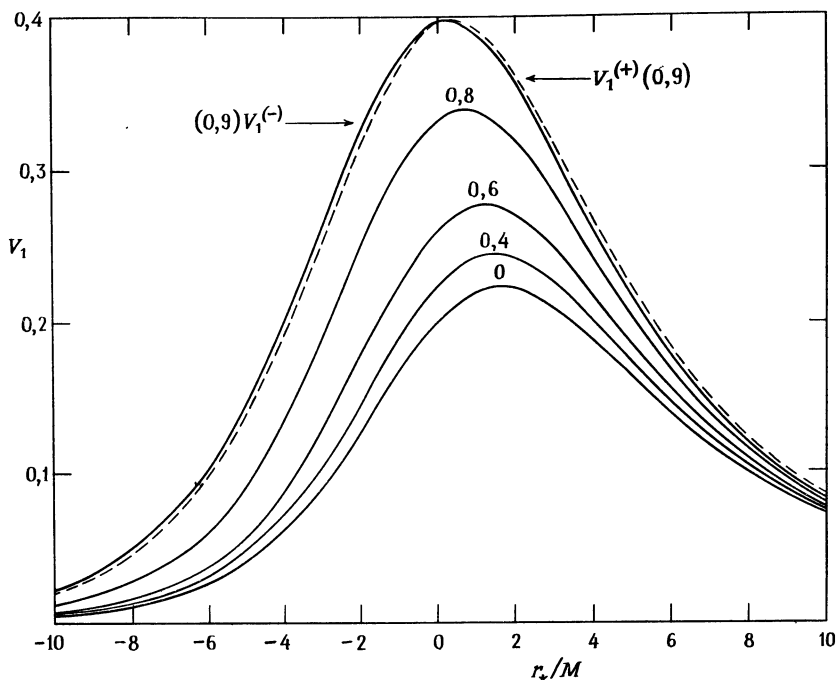


Рис. 20. Потенциальные барьеры $V_1^{(\pm)}$ вокруг черной дыры Рейсснера — Нордстрема. Сплошные линии — барьеры для значений $Q_* = 0, 0,4; 0,6; 0,8$ и $0,9$, соответствующие аксиальным возмущениям. Потенциальные барьеры для полярных возмущений лишь незначительно отличаются от барьеров для аксиальных возмущений. Для сравнения пунктирной линией показан барьер для полярных возмущений при $Q_* = 0,9$.

ствие принадлежности геометрии Шварцшильда к типу D по классификации Петрова). Данный факт означает, что эти уравнения можно было рассматривать, не вычисляя возмущения базисных векторов — в противном случае (как мы увидим в гл. 9) задача становится на порядок сложнее. В геометрии Рейсснера—Нордстрема подобная благоприятная ситуация сохраняется для тождеств Бианки и Риччи (опять в силу принадлежности метрики к типу D), но это не так для уравнений Максвелла (см. уравнения (200)—(203) ниже) — уравнения содержат члены с максвелловским скаляром ϕ_1 , который не равен нулю в фоновой метрике. Можно, однако, получить такие уравнения, которые уже линеаризованы в том же смысле, что и тождества Бианки и Риччи. Мы начнем с вывода этих уравнений.

а. Уравнения Максвелла, линейные и однородные относительно возмущений. Уравнения Максвелла в формализме Ньюмена—

Пенроуза есть уравнения относительно максвелловских скаляров ϕ_0 , ϕ_1 и ϕ_2 (уравнения (330)—(333) гл. 1):

$$(D - 2\rho)\phi_1 - (\delta^* + \pi - 2\alpha)\phi_0 + \kappa\phi_2 = 0, \quad (200)$$

$$(\delta - 2\tau)\phi_1 - (\Delta + \mu - 2\gamma)\phi_0 + \sigma\phi_2 = 0, \quad (201)$$

$$(\delta^* + 2\pi)\phi_1 - (D - \rho + 2\varepsilon)\phi_2 - \lambda\phi_0 = 0, \quad (202)$$

$$(\Delta + 2\mu)\phi_1 - (\delta - \tau + 2\beta)\phi_2 - \nu\phi_0 = 0. \quad (203)$$

Поскольку скаляр $\phi_1 (= Q_*/2r^2)$ не равен нулю в фоновой метрике, после линеаризации уравнений (200)—(203) в них войдут возмущения базисных векторов (которые действуют на ϕ_1 как производные по направлению), а также спинные коэффициенты ρ , τ , π и μ (эти коэффициенты также не равны нулю в фоновой геометрии). Чтобы исправить этот «недостаток», поступим следующим образом.

Поддействуем оператором $(\delta - 2\tau - \alpha^* - \beta + \pi^*)$ на уравнение (200), а оператором $(D - \varepsilon + \varepsilon^* - 2\rho - \rho^*)$ — на уравнение (201) и вычтем один результат из другого. Получим при этом

$$\begin{aligned} & [(\delta - 2\tau - \alpha^* - \beta + \pi^*)(\delta^* + \pi - 2\alpha) - \\ & \quad - (D - \varepsilon + \varepsilon^* - 2\rho - \rho^*)(\Delta + \mu - 2\gamma)]\phi_0 = \\ & = [(\delta - 2\tau - \alpha^* - \beta + \pi^*)\kappa - (D - \varepsilon + \varepsilon^* - 2\rho - \rho^*)\sigma]\phi_2 + \\ & + \kappa\delta\phi_2 - \sigma D\phi_2 + (\delta D - D\delta)\phi_1 - (2\delta\rho)\phi_1 + \\ & + (2D\tau)\phi_1 - (\alpha^* + \beta - \pi^*)D\phi_1 + 2\rho(\alpha^* + \beta - \pi^*)\phi_1 - \\ & - (-\varepsilon + \varepsilon^* - \rho^*)\delta\phi_1 + 2\tau(-\varepsilon + \varepsilon^* - \rho^*)\phi_1. \end{aligned} \quad (204)$$

Заменим коммутатор $(\delta D - D\delta)$ в правой части этого уравнения, действующий на ϕ_1 , его значением, полученным в гл. 1 (уравнение (304)), а вместо $D\tau$ и $\delta\rho$ подставим их выражения, которые можно получить из тождеств Риччи (гл. 1, уравнения (310в) и (310л) соответственно). В результате уравнение значительно упрощается, и мы получаем

$$\begin{aligned} & [(\delta - 2\tau - \alpha^* - \beta + \pi^*)(\delta^* + \pi - 2\alpha) - \\ & \quad - (D - \varepsilon + \varepsilon^* - 2\rho - \rho^*)(\Delta + \mu - 2\gamma)]\phi_0 = \\ & = [(\delta - 2\tau - \alpha^* - \beta + \pi^*)\kappa - (D - \varepsilon + \varepsilon^* - 2\rho - \rho^*)\sigma]\phi_2 + \\ & + \kappa\delta\phi_2 - \sigma D\phi_2 + 2\phi_1 [(\Delta - 3\gamma - \gamma^* - \mu + \mu^*)\kappa - \\ & - (\delta^* - 3\alpha + \beta^* - \tau^* - \pi)\sigma] + 4\phi_1\Psi_1 + \kappa\Delta\phi_1 - \sigma\delta^*\phi_1. \end{aligned} \quad (205)$$

Подобным же образом, действуя операторами $-(\Delta + \mu^* - \gamma^* + \gamma + 2\mu)$ и $(\delta^* - \tau^* + \alpha + \beta^* + 2\pi)$ на уравнения (202) и (203), складывая результаты и заменяя соответствующие операторы их значениями, получаем еще одно уравнение:

$$\begin{aligned} & [(\delta^* - \tau^* + \alpha + \beta^* + 2\pi)(\delta - \tau + 2\beta) - \\ & \quad - (\Delta + \mu^* - \gamma^* + \gamma + 2\mu)(D - \rho + 2\varepsilon)]\phi_2 = \end{aligned}$$

$$= [(\Delta + \mu^* - \gamma^* + \gamma + 2\mu)\lambda - (\delta^* - \tau^* + \alpha + \beta^* + 2\pi)\nu] \phi_0 + \\ + \lambda \Delta \phi_0 - \nu \delta^* \phi_0 + 2\phi_1 [(D + 3\varepsilon + \varepsilon^* + \rho - \rho^*)\nu + \\ + (\delta + \pi^* + \tau - \alpha^* + 3\beta)\lambda] + 4\phi_1 \Psi_3 - \nu D \phi_1 + \lambda \delta \phi_1. \quad (206)$$

Уравнения (205) и (206) уже «линеаризованы» в том смысле, в каком мы употребляем этот термин. Действительно, члены с ϕ_2 в уравнении (205) и члены с ϕ_0 в уравнении (206) являются величинами второго порядка малости, и в линейной теории возмущений ими можно пренебречь. Кроме того, члены $\Delta \phi_1$ и $\delta^* \phi_1$ (в уравнении (205)) и члены $D \phi_1$ и $\delta \phi_1$ (в уравнении (206)) можно заменить величинами $-2\mu \phi_1$, $-2\pi \phi_1$, $2\rho \phi_1$ и $2\tau \phi_1$ соответственно (что следует из уравнений (200)–(203), если их записать для фоновой метрики). В результате получаем следующие уравнения линейной теории возмущений:

$$[(\delta - 2\tau - \alpha^* - \beta + \pi^*)(\delta^* + \pi - 2\alpha) - \\ - (D - \varepsilon + \varepsilon^* - 2\rho - \rho^*)(\Delta + \mu - 2\gamma)] \phi_0 = \\ = 2\phi_1 [(\Delta - 3\gamma - \gamma^* - 2\mu + \mu^*)\kappa - \\ - (\delta^* - 3\alpha + \beta^* - \tau^* - 2\pi)\sigma + 2\Psi_1], \quad (207)$$

$$[(\delta^* - \tau^* + \alpha + \beta^* + 2\pi)(\delta - \tau + 2\beta) - \\ - (\Delta + \mu^* - \gamma^* + \gamma + 2\mu)(D - \rho + 2\varepsilon)] \phi_2 = \\ = 2\phi_1 [(\delta + \pi^* + 2\tau - \alpha^* + 3\beta)\lambda - (D + 3\varepsilon + \varepsilon^* + 2\rho - \rho^*)\nu + 2\Psi_3]. \quad (208)$$

б. «Призрачная» калибровка. Очевидно, исследование уравнений (207) и (208) в их настоящем виде совместно с другими уравнениями, получаемыми из тождеств Бианки и Риччи, — непростоая задача. Уравнения значительно упрощаются при калибровке, в которой

$$\zeta_0 = \zeta_2 = 0. \quad (209)$$

Это происходит потому, что теперь уравнения (207) и (208) суть просто соотношения, связывающие спиновые коэффициенты κ , σ , λ и ν с вейлевскими скалярами Ψ_1 и Ψ_3 :

$$(\Delta - 3\gamma - \gamma^* - 2\mu + \mu^*)\kappa - \\ - (\delta^* - 3\alpha + \beta^* - \tau^* - 2\pi)\sigma + 2\Psi_1 = 0, \quad (210)$$

$$(\delta + \pi^* + 2\tau - \alpha^* + 3\beta)\lambda - \\ + (D + 3\varepsilon + \varepsilon^* + 2\rho - \rho^*)\nu + 2\Psi_3 = 0. \quad (211)$$

Уравнения (210) и (211) остаются справедливыми и в пределе $\phi_1 = 0$, и мы увидим ниже (см. уравнения (217) и (218)), что в этом пределе они определяют «призрачную» калибровку, введенную в § 29, б.

Изучение влияния вращения тетрады на различные скаляры и спиновые коэффициенты, проведенное в гл. 1 (§ 8, ж), показы-

ваает, что можно выбрать калибровку, в которой скаляры ϕ_0 и ϕ_2 равны нулю. Например, бесконечно малое вращение из класса II приводит к следующему изменению (в первом порядке по b) вейлевских и максвелловских скаляров (ср. с уравнениями (345) и (346) гл. 1):

$$\begin{aligned}\Psi_0 &\rightarrow \Psi_0 + 4b\Psi_1, & \Psi_1 &\rightarrow \Psi_1 + 3b\Psi_2, \\ \Psi_2 &\rightarrow \Psi_2 + 2b\Psi_3, & \Psi_3 &\rightarrow \Psi_3 + b\Psi_4, \\ \Psi_4 &\rightarrow \Psi_4, & \phi_0 &\rightarrow \phi_0 + 2b\phi_1, & \phi_1 &\rightarrow \phi_1 + b\phi_2, \\ & & \phi_2 &\rightarrow \phi_2.\end{aligned}\quad (212)$$

Поскольку $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_3, \Psi_4, \phi_0$ и ϕ_2 в невозмущенной метрике Рейсснера—Нордстрема равны нулю, ясно, что $\Psi_0, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \phi_1$ и ϕ_2 остаются неизменными (в первом порядке по b) при таком вращении. Но вращение приводит к изменению Ψ_1 и ϕ_0 , потому что Ψ_2 и ϕ_1 не равны нулю в исходной метрике, однако можно заметить, что, хотя нельзя выбрать калибровку, в которой Ψ_1 и ϕ_1 одновременно равны нулю, комбинация

$$2\Psi_1\phi_1 - 3\phi_0\Psi_2 \quad (213)$$

инвариантна (в первом порядке) при бесконечно малом вращении.

Подобным же образом можно выбрать калибровку, в которой либо ϕ_2 , либо Ψ_3 равны нулю.

Вернемся к уравнениям (210) и (211). Подставляя из уравнения (112) значения не равных нулю спиновых коэффициентов, получаем

$$(\Delta/2r^2)(\mathcal{D}_2^+ - 5/r)\kappa + (1/r\sqrt{2})\mathcal{L}_2\sigma = 2\Psi_1, \quad (214)$$

$$(1/r\sqrt{2})\mathcal{L}_2^+\lambda - (D_0 - 1/r)v = -2\Psi_3, \quad (215)$$

где операторы $\mathcal{D}_n, \mathcal{D}_n^+, \mathcal{L}_n$ и $\mathcal{L}_n^+$ имеют тот же смысл, что и в гл. 4 (уравнение (228)), — различие лишь в определении функции Δ . Вводя переменные (ср. уравнения (236) гл. 4)

$$\kappa = (r^2\sqrt{2})k, \quad \sigma = sr, \quad \lambda = 2l/r,$$

$$v = n\sqrt{2}/r^2, \quad \Psi_1 = \Phi_1/r\sqrt{2}, \quad \Psi_3 = \Phi_3\sqrt{2}/r^3, \quad (216)$$

можем переписать уравнения (214) и (215) в более простом виде:

$$\Delta(\mathcal{D}_2^+ - 3/r)k + \mathcal{L}_2s = 2\Phi_1/r, \quad (217)$$

$$(\mathcal{D}_0 - 3/r)n - \mathcal{L}_2^+l = 2\Phi_3/r. \quad (218)$$

Следует заметить, что уравнения (217) и (218) совпадают с уравнениями (273) и (276) гл. 4, которые были введены для выявления «усеченной симметрии» уравнений (237) и (242) в той же главе. Они определяют фактически «призрачную» калибровку.

в. Основные уравнения. Тожества Риччи и Бианки имеют тот же вид, что и в случае возмущений метрики Шварцшильда (гл. 1,

уравнения (310б), (310к) и (321а), (321д), (321г) и (321з). Тожества Риччи не меняются вовсе — это третьи уравнения в каждой из двух групп их трех уравнений (232) и (233) гл. 4. Но в первую пару каждой группы уравнений, представляющих тождества Бианки, нужно включить члены, содержащие тензор Риччи, перечисленные в гл. 1 (уравнение (339)). В выбранной нами калибровке, в которой $\zeta_0 = \zeta_2 = 0$, эти дополнительные члены имеют вид

$$\begin{aligned} -4\kappa\phi_1\phi_1^* & \quad (339а), & 4\sigma\phi_1\phi_1^* & \quad (339д), \\ -4\lambda\phi_1\phi_1^* & \quad (339г), & 4\nu\phi_1\phi_1^* & \quad (339з). \end{aligned} \quad (219)$$

В результате правые части первых пар уравнений (232) и (233) гл. 4 становятся равными

$$\begin{aligned} +\kappa(3\Psi_2 - 4\phi_1\phi_1^*) &= -\kappa(3Mr - 2Q_*^2)r^{-4}, \\ +\sigma(3\Psi_2 + 4\phi_1\phi_1^*) &= -\sigma(3Mr - 4Q_*^2)r^{-4}, \\ -\lambda(3\Psi_2 + 4\phi_1\phi_1^*) &= +\lambda(3Mr - 4Q_*^2)r^{-4}, \\ -\nu(3\Psi_2 - 4\phi_1\phi_1^*) &= +\nu(3Mr - 2Q_*^2)r^{-4}, \end{aligned} \quad (220)$$

где вместо Ψ_2 и ϕ_1 подставлены их значения из уравнений (114) и (115):

$$\Psi_2 = -(Mr - Q_*^2)r^{-4}, \quad \phi_1 = Q_*/2r^2. \quad (221)$$

Теперь мы можем выписать систему основных уравнений (включая уравнения (217) и (218)) для возмущений метрики Рейсснера — Нордстрема (ср. с уравнениями (237) — (242) гл. 4):

$$\mathcal{L}_2\Phi_0 - (\mathcal{D}_0 + 3/r)\Phi_1 = -2k(3M - 2Q_*^2/r), \quad (222)$$

$$\Delta(\mathcal{D}_2^\dagger - 3/r)\Phi_0 + \mathcal{L}_{-1}^\dagger\Phi_1 = +2s(3M - 4Q_*^2/r), \quad (223)$$

$$(\mathcal{D}_0 + 3/r)s - \mathcal{L}_{-1}^\dagger k = \Phi_0/r, \quad (224)$$

$$\Delta(\mathcal{D}_2^\dagger - 3/r)k + \mathcal{L}_2 s = 2\Phi_1/r; \quad (225)$$

$$(\mathcal{D}_0 - 3/r)\Phi_4 - \mathcal{L}_{-1}\Phi_3 = +2l(3M - 4Q_*^2/r), \quad (226)$$

$$\mathcal{L}_2^\dagger\Phi_4 + \Delta(\mathcal{D}_{-1}^\dagger + 3/r)\Phi_3 = 2n(3M - 2Q_*^2/r), \quad (227)$$

$$\Delta(\mathcal{D}_{-1}^\dagger + 3/r)l + \mathcal{L}_{-1}n = \Phi_4/r, \quad (228)$$

$$(\mathcal{D}_0 - 3/r)n - \mathcal{L}_2^\dagger l = 2\Phi_3/r, \quad (229)$$

где

$$\Phi_0 = \Psi_0, \quad \Phi_4 = \Psi_4 r^4, \quad (230)$$

а остальные переменные были определены в уравнении (216).

г. *Разделение переменных, расщепление и редукция уравнений.* В первой группе уравнений (222) — (225) разделение переменных

достигается следующей подстановкой (ср. с уравнениями (247), (278) и (283) гл. 4):

$$\Phi_0(r, \theta) = R_{+2}(r) S_{+2}(\theta), \quad \Phi_1(r, \theta) = R_{+1}(r) S_{+1}(\theta), \quad (231)$$

$$k(r, \theta) = k(r) S_{+1}(\theta), \quad s(r, \theta) = s(r) S_{+2}(\theta),$$

где функции угловой переменной $S_{+2}(\theta)$ и $S_{+1}(\theta)$ — нормированные собственные функции уравнений

$$\mathcal{L}_{-1}^+ \mathcal{L}_2 S_{+2} = -\mu^2 S_{+2}, \quad \mathcal{L}_2 \mathcal{L}_{-1}^+ S_{+1} = -\mu^2 S_{+1}, \quad (232)$$

$$\mu^2 = 2n = (l-1)(l+2). \quad (233)$$

Кроме того, функции $S_{+2}(\theta)$ и $S_{+1}(\theta)$ связаны соотношениями (ср. с уравнениями (281) и (282) гл. 4)

$$\mathcal{L}_2 S_{+2} = \mu S_{+1}, \quad \mathcal{L}_{-1}^+ S_{+1} = -\mu S_{+2}. \quad (234)$$

Именно вследствие этих соотношений подстановки (231) приводят к разделению переменных в уравнениях (222)—(225), и в результате получается система связанных уравнений для радиальных функций:

$$\mu R_{+2} - (\mathcal{D}_0 + 3/r) R_{+1} = -2k(3M - 2Q_*^2/r), \quad (235)$$

$$\Delta(\mathcal{D}_2^+ - 3/r) R_{+2} - \mu R_{+1} = +2s(3M - 4Q_*^2/r), \quad (236)$$

$$(\mathcal{D}_0 + 3/r) s + \mu k = R_{+2}/r, \quad (237)$$

$$\Delta(\mathcal{D}_2^+ - 3/r) k + \mu s = 2R_{+1}/r. \quad (238)$$

Систему связанных уравнений (235) — (238) можно расцепить, если ввести функции

$$\begin{aligned} F_{+1} &= R_{+2} + q_1 k / \mu, & G_{+1} &= R_{+1} + q_1 s / \mu, \\ F_{+2} &= R_{+2} + q_2 k / \mu, & G_{+2} &= R_{+1} + q_2 s / \mu, \end{aligned} \quad (239)$$

где q_1 и q_2 имеют тот же смысл, что и в § 42 (уравнение (149)). Складывая теперь уравнение (236) с умноженным на q_1/μ уравнением (238), получаем

$$\begin{aligned} \Delta(\mathcal{D}_2^+ - 3/r) F_{+1} &= \mu R_{+1} + 2s(3M + q_1 q_2 / \mu^2 r) - q_1 s + 2q_1 R_{+1} / \mu r = \\ &= \mu R_{+1} + q_2 s + 2q_1 (R_{+1} + q_2 s / \mu) / \mu r = \\ &= \mu(1 + 2q_1 / \mu^2 r) (R_{+1} + q_2 s / \mu) = \mu(1 + 2q_1 / \mu^2 r) G_{+2}. \end{aligned} \quad (240)$$

При преобразовании правой части были использованы соотношения (152) между q_1 и q_2 . Очевидно, справедливо и уравнение, получающееся из уравнения (240) перестановкой индексов 1 и 2. Оба этих уравнения могут быть записаны единообразно:

$$D(\mathcal{D}_2^+ - 3/r) F_{+i} = \mu(1 + 2q_i / \mu^2 r) G_{+j} \quad (i, j = 1, 2; \quad i \neq j). \quad (241)$$

Условимся, что всюду далее до конца главы индексы i и j будут принимать значения 1 и 2, но $i \neq j$, и мы не будем определять индексы i и j в каждом отдельном случае.

Комбинируя подобным же образом уравнения (235) и (237), получаем уравнение

$$(\mathcal{D}_0 + 3/r) G_{+i} = \mu (1 + q_i/\mu^2 r) F_{+j}. \quad (242)$$

Полагая

$$F_{+i} = (r^3/\Delta^2) Y_{+i}, \quad G_{+j} = r^{-3} X_{+j}, \quad (243)$$

приведем уравнения (241) и (242) к виду

$$\mathcal{D}_0^+ Y_{+i} = \mu (\Delta/r^6) (1 + 2q_i/\mu^2 r) X_{+j}, \quad (244)$$

$$\mathcal{D}_0 X_{+j} = \mu (r^6/\Delta^2) (1 + q_j/\mu^2 r) Y_{+i}. \quad (245)$$

Поскольку

$$\frac{\Delta}{r^2} \mathcal{D}_0 = \frac{d}{dr_*} + i\sigma = \Lambda_+, \quad \frac{\Delta}{r^2} \mathcal{D}_0^+ = \frac{d}{dr_*} - i\sigma = \Lambda_-, \quad (246)$$

уравнения (244) и (245) можно переписать следующим образом:

$$\Lambda_- Y_{+i} = \mu (\Delta^2/r^8) (1 + 2q_i/\mu^2 r) X_{+j}, \quad (247)$$

$$\Lambda_+ X_{+j} = \mu (r^4/\Delta) (1 + q_j/\mu^2 r) Y_{+i}. \quad (248)$$

Наконец, исключая X , получаем пару уравнений для Y :

$$\Lambda^2 Y_{+i} + P_i \Lambda_- Y_{+i} - Q_i Y_{+i} = 0 \quad (i = 1, 2), \quad (249)$$

где

$$P_i = \frac{d}{dr_*} \ln(r^8/D_i), \quad D_i = \Delta^2 (1 + 2q_i/\mu^2 r), \quad (250)$$

$$Q_i = \mu^2 (\Delta/r^4) (1 + 2q_i/\mu^2 r) (1 + q_j/\mu^2 r). \quad (251)$$

Такая же процедура позволяет получить из второй группы уравнений (226)—(229) пару сопряженных уравнений

$$\Lambda^2 Y_{-i} + P_i \Lambda_+ Y_{-i} - Q_i Y_{-i} = 0 \quad (252)$$

с помощью следующих подстановок:

$$\Phi_4(r, \theta) = R_{-2}(r) S_{-2}(\theta), \quad \Phi_3(r, \theta) = R_{-1}(r) S_{-1}(\theta), \quad (253)$$

$$n(r, \theta) = n(r) S_{-1}(\theta), \quad l(r, \theta) = l(r) S_{-2}(\theta),$$

$$F_{-i} = r^3 Y_{-i}, \quad G_{-i} = (\Delta/r^3) X_{-i}. \quad (254)$$

Угловые функции $S_{-1}(\theta)$ и $S_{-2}(\theta)$ удовлетворяют «присоединенным уравнениям»

$$\mathcal{L}_{-1} \mathcal{L}_2^+ S_{-2} = -\mu^2 S_{-2}, \quad \mathcal{L}_2^+ \mathcal{L}_{-1} S_{-1} = -\mu^2 S_{-1} \quad (255)$$

и связаны между собой соотношениями

$$\mathcal{L}_2^+ S_{-2} = -\mu S_{-1}, \quad \mathcal{L}_{-1} S_{-1} = +\mu S_{-2}. \quad (256)$$

Таким образом, уравнения формализма Ньюмена—Пенроуза для вейлевских и максвелловских скаляров, описывающих возмущения черной дыры Рейсснера—Нордстрема, сводятся к стандартному уравнению такого же вида, что и для черной дыры Шварцшильда, полученному в гл. 4.

45. Теория преобразований

Пара уравнений (249) и (252), к которым в § 44 свелись уравнения Ньюмена—Пенроуза, отличаются от соответствующих уравнений, рассмотренных в § 30 (гл. 4, уравнение (284) и комплексно сопряженное ему), лишь в одном несущественном пункте: в определении P_i величина Δ^2 заменена на D_i . Поэтому теория преобразований, развитая в § 30, применима с незначительными изменениями и в данном случае.

Наша цель — преобразовать уравнения (249) и (252) так, чтобы получилась пара одномерных волновых уравнений вида

$$\Lambda^2 Z_i = V_i Z_i \quad (257)$$

для некоторых подходящим образом определенных потенциалов.

Займемся сначала преобразованием уравнения (249). Будем писать (удобства ради) Y_i вместо Y_{+i} . Исследование уравнения (252) отличается от исследования уравнения (249) только изменением знака σ и заменой всюду Λ_- на Λ_+ и обратно.

Так же как и в § 30, начнем с подстановки (ср. с уравнением (287) гл. 4)

$$Y_i = f_i V_i Z_i + (W_i + 2i\sigma f_i) \Lambda_+ Z_i \quad (258)$$

и получим следующие уравнения (ср. с уравнениями (290)—(292) гл. 4):

$$\Lambda_- Y_i = -(D_i/r^8) \beta_i Z_i + R_i \Lambda_+ Z_i, \quad (259)$$

$$-(D_i/r^8) \beta_i = \frac{d}{dr_*} (f_i V_i) + W_i V_i, \quad (260)$$

$$R_i = f_i V_i + \frac{d}{dr_*} (W_i + 2i\sigma f_i). \quad (261)$$

Условие совместности уравнений (249) и (257) приводит к уравнениям (ср. с уравнениями (298)—(300) гл. 4)

$$-\frac{D_i}{r^8} \frac{d\beta_i}{dr_*} = (Q_i f_i - R_i) V_i, \quad (262)$$

$$\frac{d}{dr_*} \left(\frac{r^8}{D_i} R_i \right) = \frac{r^8}{D_i} [Q_i W_i + 2i\sigma (Q_i f_i - R_i)] + \beta_i \quad (263)$$

и интегралы

$$(r^8/D_i) R_i f_i V_i + \beta_i (W_i + 2i\sigma f_i) = K_i = \text{const.} \quad (264)$$

а. Допустимость дуальных преобразований. Убедимся, что, как и в случае шварцшильдовых возмущений, уравнения (260)—(264) совместны с условиями

$$\beta_i = \text{const}, \quad f_i = 1 \quad (265)$$

и допускают дуальные преобразования с двумя значениями β_i с противоположными знаками.

Как и в § 30 (гл. 4, уравнения (307) и (311)), условие существования дуальных преобразований требует, чтобы функции

$$F_i = r^8 (Q_i/D_i) = (r^3/\Delta) (\mu^2 r + q_j) \quad (i, j = 1, 2; \quad i \neq j) \quad (266)$$

удовлетворяли дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{F_i} \left(\frac{dF_i}{dr_*} \right)^2 - \frac{d^2 F_i}{dr_*^2} + \frac{D_i}{r^8} F_i^2 = \frac{\beta_i^2}{F_i} + \kappa_i \quad (267)$$

при некоторых специально выбранных постоянных значениях

$$\beta_i^2 \quad \text{и} \quad \kappa_i = K_i - 2i\sigma\beta_i. \quad (268)$$

Легко видеть, что функции F_i , определенные уравнением (266), действительно удовлетворяют уравнению (267), если

$$\beta_i^2 = q_j^2 \quad (i, j = 1, 2; \quad i \neq j), \quad \kappa_i = \kappa = \mu^2 (\mu^2 + 2). \quad (269)$$

Потенциалы $V_i^{(\pm)}$, связанные с дуальными преобразованиями, соответствующими значениям $\pm q_j$, имеют следующий вид (ср. с уравнением (317) гл. 4):

$$V_i^{(\pm)} = \pm q_j \frac{df_i}{dr_*} + q_j^2 i + \kappa f_i \quad (i, j = 1, 2; \quad i \neq j), \quad (270)$$

$$f_i = 1/F_i = \Delta/r^3 (\mu^2 r + q_j) \quad (i, j = 1, 2; \quad i \neq j). \quad (271)$$

Сравнение с уравнением (197) показывает, что потенциалы (270) совпадают с потенциалами в волновых уравнениях, определяющих аксиальные и полярные возмущения.

Заметим также, что (ср. с уравнением (312) гл. 4)

$$W_i^{(\pm)} = - \frac{d}{dr_*} \ln f_i \mp q_j f_i, \quad (272)$$

или в явном виде

$$W_i^{(-)} = W^{(-)} = (2/r^2) (r - 3M + 2Q_*^2/r), \quad (273)$$

$$W_i^{(+)} = W^{(+)} - 2q_j \Delta/r^3 (\mu^2 r + q_j) \quad (i, j = 1, 2; \quad i \neq j). \quad (274)$$

Выпишем в явном виде искомые преобразования (ср. с уравнениями (318) и (319), гл. 4):

$$Y_i = V_i^{(\pm)} Z_i^{(\pm)} + (W_i^{(\pm)} + 2i\sigma) \Lambda_+ Z_i^{(\pm)}, \quad (275)$$

$$\Lambda_i Y_i = \mp D_i r^{-8} q_j Z_i^{(\pm)} + Q_i \Lambda_+ Z_i^{(\pm)}, \quad (276)$$

$$K_i^{(\pm)} Z_i^{(\pm)} = (r^8/D_i) Q_i Y_i - (r^8/D_i) (W_i^{(\pm)} + 2i\sigma) \Lambda_- Y_i, \quad (277)$$

$$K_i^{(\pm)} \Lambda_+ Z_i^{(\pm)} = \pm q_j Y_i + (r^8/D_i) V_i^{(\pm)} \Lambda_- Y_i. \quad (278)$$

Напомним, что

$$Q_i = \mu^2 (\Delta/r^4) (1 + 2q_i/\mu^2 r) (1 + q_j/\mu^2 r) = \mu^2 (D_i/r^4 \Delta) (1 + q_j/\mu^2 r), \quad (279)$$

$$K_i^{(\pm)} = \mu^2 (\mu^2 + 2) \pm 2i\sigma q_j. \quad (280)$$

С помощью уравнения (247) получаем из уравнений (276) и (277) следующие соотношения:

$$\mu X_j = \mp q_j Z_i^\pm + \mu^2 (r^4/\Delta) (1 + q_j/\mu^2 r) \Lambda_+ Z_i^\pm, \quad (281)$$

$$K_i^\pm Z_i^\pm = \mu^2 (r^4/\Delta) (1 + q_j/\mu^2 r) Y_i - (W_i^\pm + 2i\sigma) \mu X_j. \quad (282)$$

Как упоминалось выше, всюду в уравнениях мы писали Y_i и X_j вместо Y_{+i} и X_{+j} . Для получения соответствующих уравнений, связывающих Y_{-i} и X_{-j} с функциями $Z_i^{(\pm)}$, необходимо лишь поменять знак σ и всюду писать Λ_+ вместо Λ_- .

б. *Асимптотическое поведение функций $Y_{\pm i}$ и $X_{\pm j}$.* Вследствие короткодействующего характера потенциалов $V_i^{(\pm)}$ решения $Z_i^{(\pm)}$ имеют асимптотики $\exp(\pm i\sigma r_*)$, как при $r_* \rightarrow +\infty$, так и при $r_* \rightarrow -\infty$ (ср. с § 47 ниже). Этот факт можно использовать (как в подобном случае в § 32) для получения асимптотик функций $Y_{\pm i}$ и $X_{\pm j}$. При этом используются уравнения (275)—(278), (281) и (282). Вывод асимптотических формул основывается лишь на том, что

$$V_i^{(\pm)} \rightarrow 0, \quad Q_i \rightarrow 0, \quad f_i \rightarrow 0, \quad D_i \rightarrow 0 \quad (r_* \rightarrow \pm \infty); \quad (283)$$

$$W_i^\pm = \begin{cases} 0 & (r_* \rightarrow +\infty), \\ -(2/r_+^3) (Mr_+ - Q_*^2) & (r_* \rightarrow -\infty). \end{cases} \quad (284)$$

Заметим, что предельное значение функций $W_i^{(\pm)}$ на горизонте не зависит от индекса i и одинаково для $W^{(+)}$ и $W^{(-)}$.

Во избежание путаницы со знаками « $\pm$ », которые используются и как верхние индексы для различения аксиальной и полярной части в $Z_i^{(\pm)}$, и как нижние индексы для различения функции Y_{+i} от функции Y_{-i} , удовлетворяющей комплексно сопряженному уравнению, выпишем в явном виде асимптотические соотношения (убрав верхние значки) для $Z^{(+)}$. Имеем

$r_* \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} Z_i &\rightarrow e^{+i\sigma r_*}, \quad Y_{+i} \rightarrow -4\sigma^2 e^{+i\sigma r_*}, \quad X_{+j} \rightarrow 2i\sigma\mu r^2 e^{+i\sigma r_*}, \\ Y_{-i} &\rightarrow (K_i^*/4\sigma^2) e^{+i\sigma r_*}/r^4, \quad X_{-j} \rightarrow (K_i^*/2i\sigma\mu) e^{+i\sigma r_*}; \end{aligned} \quad (285)$$

$$Z_i \rightarrow e^{-i\sigma r_*}, \quad Y_{+i} \rightarrow -(K_i/4\sigma^2) e^{-i\sigma r_*}/r^4, \quad X_{+j} \rightarrow -(K_i/2i\sigma\mu) e^{-i\sigma r_*},$$

$$Y_{-i} \rightarrow -4\sigma^2 e^{-i\sigma r_*}, \quad X_{-j} \rightarrow -2i\sigma\mu r^2 e^{-i\sigma r_*};$$

$r_* \rightarrow -\infty$:

$$Z_i \rightarrow e^{+i\sigma r_*}, \quad Y_{+i} \rightarrow 4i\sigma [i\sigma - (Mr_+ - Q_*^2)/r_+^3] e^{+i\sigma r_*},$$

$$Y_{-i} \rightarrow \frac{\Delta^2}{r_+^3} \frac{K_i^* (1 + 2q_i/\mu^2 r_+) e^{+i\sigma r_*}}{4 [i\sigma + (Mr_+ - Q_*^2)/r_+^3] [i\sigma + 2(r_+ - M)/r_+^3]},$$

$$\begin{aligned}
X_{+j} &\rightarrow 2i\sigma\mu \frac{r_+^4}{\Delta} \left(1 + \frac{qj}{\mu^2 r_+}\right) e^{+i\sigma r_*}, \\
X_{-j} &\rightarrow \frac{K_i^* e^{+i\sigma r_*}}{2\mu [i\sigma + (Mr_+ - Q_*^2)/r_+^3]}; \\
Z_i &\rightarrow e^{-i\sigma r_*}, \quad Y_{+i} \rightarrow \frac{\Delta^2}{r_+^8} \frac{K_i (1 + 2q_i/\mu^2 r_+) e^{-i\sigma r_*}}{4 [i\sigma - (Mr_+ - Q_*^2)/r_+^3] [i\sigma - 2(r_+ - M)/r_+^2]}, \\
Y_{-i} &\rightarrow 4i\sigma [i\sigma + (Mr_+ - Q_*^2)/r_+^3] e^{-i\sigma r_*}, \\
X_{+i} &\rightarrow -\frac{K_i e^{-i\sigma r_*}}{2\mu [i\sigma - (Mr_+ - Q_*^2)/r_+^3]}, \\
X_{-j} &\rightarrow -2i\sigma\mu \frac{r_+^4}{\Delta} \left(1 + \frac{qj}{\mu^2 r_+}\right) e^{-i\sigma r_*}.
\end{aligned} \tag{286}$$

Чтобы получить соответствующие соотношения для Z_i^{-} , необходимо, как следует из уравнения (280), лишь заменить K_i на K_i^* .

46. Прямое вычисление вейлевских и максвелловских скаляров через возмущения метрики

Как говорилось, основной целью изучения возмущений черной дыры Рейсснера—Нордстрема является выяснение особенностей процессов рассеяния и поглощения электромагнитных и гравитационных волн, падающих на черную дыру. Для этого необходимо связать функции, появляющиеся в теории возмущений, развитой в предыдущих параграфах, с амплитудами соответствующих волн. Функции $Z_i^{(\pm)}$ должны определять амплитуды падающей, отраженной и прошедшей волн, поскольку в пределе $Q_* \rightarrow 0$ уравнения, которым подчиняются функции $Z_2^{(\pm)}$, сводятся к уравнениям Церилли и Редже—Уилера. В общем случае следует ожидать, что требуемые амплитуды являются некоторыми линейными комбинациями функций $Z_1^{(+)}$ и $Z_2^{(+)}$ или комбинациями функций $Z_1^{(-)}$ и $Z_2^{(-)}$. Вопрос в том, какие конкретно это комбинации. Решения уравнений Ньюмена—Пенроуза, полученные в § 44, не дают прямого ответа на этот вопрос, поскольку они были получены в специальной калибровке, вследствие чего функции $R_{\pm 2}$ и $R_{\pm 1}$, через которые были выражены решения, не имеют простой физической интерпретации. Поэтому мы вычислим вейлевские скаляры Ψ_0 и Ψ_4 и максвелловские скаляры ϕ_0 и ϕ_2 с самого начала, воспользовавшись выражениями для тензора Римана и тензора Максвелла.

Поскольку метрики Шварцшильда и Рейсснера—Нордстрема отличаются только определением функции горизонта Δ (равной $r^2 e^{2v}$ в обоих случаях), анализ, проведенный в § 31, можно большей частью повторить и в настоящем случае. В частности, выра-

жения для Ψ_0 , полученные в гл. 4 (формулы (334), (339) и (350)), остаются справедливыми (ср. с соотношениями (293) и (294) гл. 1).

Вычисление аксиальной части Ψ_0 , равной $\text{Im } \Psi_0$, начнем с уравнения (339) гл. 4:

$$-\text{Im } \Psi_0 = \left\{ \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left(\frac{Q}{\Delta} \right) + \frac{Q}{r\Delta} + \frac{1}{2} i\sigma \frac{r^2}{\Delta^2} Q + \frac{1}{2} \frac{Q_{,r}}{\Delta} + \right. \\ \left. + \frac{r^2}{2i\sigma\Delta} \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{\Delta}{r^4} \frac{dQ}{dr} \right) + 2 \frac{\Delta}{r^4} \left(\frac{1}{r} - v_{,r} \right) \frac{dQ}{dr} \right] \right\} \frac{C_{l+2}^{-3/2}}{\sin^2 \theta}. \quad (287)$$

Заменим первый член в квадратных скобках выражением

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\Delta}{r^4} \frac{dQ}{dr} \right) = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\mu^2 \Delta}{r^4} Q - \sigma^2 Q + 2 \frac{Q_* \mu}{r^4} \Delta H_1^{(-)} \right). \quad (288)$$

(Это не что иное, как уравнение (140), в котором величина B заменена на $H_1^{(-)}$ в соответствии с определением (143).) После некоторых перегруппировок членов получаем

$$-i\sigma \text{Im } \Psi_0 = \left\{ i\sigma \left[\frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left(\frac{Q}{\Delta} \right) + \frac{Q}{r\Delta} + \frac{1}{2\Delta} \frac{dQ}{dr} \right] - \sigma^2 \frac{r^2}{\Delta^2} Q + \right. \\ \left. + \frac{\mu^2}{2r^2\Delta} Q + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{r} - v_{,r} \right) \frac{dQ}{dr} + \frac{Q_* \mu}{r^2\Delta} H_1^{(-)} \right\} \frac{C_{l+2}^{-3/2}}{\sin^2 \theta}, \quad (289)$$

причем

$$1/r - v_{,r} = (r^2 - 3Mr + 2Q_*^2)/r\Delta. \quad (290)$$

Полагая, как и в уравнении (143),

$$Q = rH_2^{(-)}, \quad (291)$$

найдем, что после некоторых упрощений члены в фигурных скобках в правой части уравнения (289) становятся равными

$$i\sigma \left[\frac{r}{\Delta} \frac{dH_2^{(-)}}{dr} + \frac{1}{\Delta^2} (r^2 - 3Mr + 2Q_*^2) H_2^{(-)} \right] - \sigma^2 \frac{r^3}{\Delta^2} H_2^{(-)} + \\ + \frac{\mu^2}{2r\Delta} H_2^{(-)} + \frac{Q_* \mu}{r^2\Delta} H_1^{(-)} + \frac{1}{r^3\Delta} (r^2 - 3Mr + 2Q_*^2) \left(r \frac{dH_2^{(-)}}{dr} + H_2^{(-)} \right). \quad (292)$$

Заменяя производные по r производными по r_* и вспоминая, что

$$W^{(-)} = (2/r^3) (r^2 - 3Mr + 2Q_*^2) \quad (293)$$

(ср. с соотношением (273)), перегруппируем члены в уравнении (292) следующим образом:

$$\frac{r^3}{2\Delta^2} (W^{(-)} + 2i\sigma) \frac{dH_2^{(-)}}{dr_*} + \frac{Q_* \mu}{r^2\Delta} H_1^{(-)} + \\ + \left[\left(\frac{\mu^2}{2r\Delta} + \frac{r^2 - 3Mr + 2Q_*^2}{r^3\Delta} \right) + i\sigma \frac{r^3}{2\Delta^2} (W^{(-)} + 2i\sigma) \right] H_2^{(-)}. \quad (294)$$

Теперь можно переписать уравнение (289) в виде

$$-i\sigma \operatorname{Im} \Psi_0 = (r^3/2\Delta^2) \{ (W^{(-)} + 2i\sigma) \Lambda_+ H_2^{(-)} + \\ + (\Delta/r^5) [(\mu^2 + 2)r - 6M + 4Q_*^2/r] H_2^{(-)} + \\ + (\Delta/r^5) (2Q_*\mu) H_1^{(-)} \} C_{l+2}^{-3/2}/\sin^2 \theta. \quad (295)$$

Функция $H_2^{(-)}$ удовлетворяет уравнению (144), следовательно,

$$-i\sigma \operatorname{Im} \Psi_0 = (r^3/2\Delta^2) \{ (W^{(-)} + 2i\sigma) \Lambda_+ + \Lambda^2 \} H_2^{(-)} C_{l+2}^{-3/2}/\sin^2 \theta. \quad (296)$$

Решая уравнения (147) и (148), мы можем представить функцию $H_2^{(-)}$ в виде линейной комбинации функций $Z_1^{(-)}$ и $Z_2^{(-)}$. Перепишем эти уравнения следующим образом:

$$Z_1^{(-)} = [q_1 (q_1 - q_2)]^{1/2} (H_1^{(-)} \cos \psi + H_2^{(-)} \sin \psi), \\ Z_2^{(-)} = [q_1 (q_1 - q_2)]^{1/2} (H_2^{(-)} \cos \psi - H_1^{(-)} \sin \psi), \quad (297)$$

где

$$\sin 2\psi = \frac{2(-q_1 q_2)^{1/2}}{q_1 - q_2} = \frac{2Q_*\mu}{(9M^2 + 4Q_*^2\mu^2)^{1/2}}. \quad (298)$$

Решения можно записать в виде

$$[q_1 (q_1 - q_2)]^{1/2} H_1^{(-)} = Z_1^{(-)} \cos \psi - Z_2^{(-)} \sin \psi, \\ [q_1 (q_1 - q_2)]^{1/2} H_2^{(-)} = Z_1^{(-)} \sin \psi + Z_2^{(-)} \cos \psi. \quad (299)$$

Подставляя теперь $H_2^{(-)}$ в уравнение (296), получаем

$$-i\sigma [q_1 (q_1 - q_2)]^{1/2} \operatorname{Im} \Psi_0 = \\ = (r^3/2\Delta^2) \{ (W^{(-)} + 2i\sigma) \Lambda_+ + \Lambda^2 \} (Z_2^{(-)} \cos \psi + \\ + Z_1^{(-)} \sin \psi) C_{l+2}^{-3/2}/\sin^2 \theta. \quad (300)$$

Используя уравнения, которым удовлетворяют функции $Z_i^{(-)}$, можно переписать последнее соотношение следующим образом (ср. с уравнением (345) гл. 4):

$$-i\sigma [q_1 (q_1 - q_2)]^{1/2} \operatorname{Im} \Psi_0 = \\ = (r^3/2\Delta^2) \{ [V_2^{(-)} Z_2^{(-)} + (W^{(-)} + 2i\sigma) \Lambda_+ Z_2^{(-)}] \cos \psi + \\ + [V_1^{(-)} Z_1^{(-)} + (W^{(-)} + 2i\sigma) \Lambda_+ Z_1^{(-)}] \sin \psi \} C_{l+2}^{-3/2}/\sin^2 \theta. \quad (301)$$

Наконец, с помощью уравнения (275) из теории преобразований получаем важное соотношение

$$-2i\sigma [(q_1 - q_2) q_1]^{1/2} \operatorname{Im} \Psi_0 = \\ = (r^3/\Delta^2) (Y_{+2} \cos \psi + Y_{+1} \sin \psi) C_{l+2}^{-3/2}/\sin^2 \theta = \\ = (F_{+2} \cos \psi + F_{+1} \sin \psi) C_{l+2}^{-3/2}/\sin^2 \theta. \quad (302)$$

Подобным же образом находим

$$\begin{aligned} -2i\sigma [q_1 (q_1 - q_2)]^{1/2} \operatorname{Im} r^4 \Psi_4 = \\ = 1/4 r^3 (Y_{-2} \cos \psi + Y_{-1} \sin \psi) C_{l+2}^{-3/2} / \sin^2 \theta = \\ = 1/4 (F_{-2} \cos \psi + F_{-1} \sin \psi) C_{l+2}^{-3/2} / \sin^2 \theta. \quad (303) \end{aligned}$$

Аналогичные вычисления могут быть выполнены и для $\operatorname{Re} \Psi_0$, но это едва ли необходимо, поскольку из общих соображений ясно, что при этом получится такое же соотношение с единственным отличием: множитель $2i\sigma$ в левой части уравнения (302) будет отсутствовать (ср. с уравнениями (345) и (353) гл. 4).

а. Максвелловские скаляры ϕ_0 и ϕ_1 . По определению

$$\phi_0 = F_{(p)(q)} l^{(p)} m^{(q)}, \quad (304)$$

где круглые скобки подчеркивают, что индексы относятся к тетрадной системе отсчета, в которой были записаны уравнения (117) и (118). Базисные изотропные векторы тетрадной системы даются уравнением (333) гл. 4, и, свертывая тензор Максвелла с этими векторами, получаем

$$\phi_0 = (e^{-v}/\sqrt{2}) [i(F_{01} + F_{21}) + (F_{03} + F_{23})]. \quad (305)$$

Заметим, что ϕ_0 опять разлагается на аксиальную и полярную части.

Рассмотрим сначала аксиальную часть:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \phi_0 = (e^{-v}/\sqrt{2}) (F_{01} + F_{21}) = (e^{-2v}/r \sqrt{2} \sin \theta) \times \\ \times (re^v F_{01} \sin \theta + re^v F_{21} \sin \theta). \quad (306) \end{aligned}$$

Член с F_{21} можно переписать, воспользовавшись уравнением (120), следующим образом:

$$i\sigma re^v F_{21} \sin \theta = e^{2v} (re^v F_{01} \sin \theta)_{,r} = (re^v F_{01} \sin \theta)_{,r*}. \quad (307)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \phi_0 = (r/i\sigma \sqrt{2} \Delta \sin \theta) \Lambda_+ (re^v F_{01} \sin \theta) = \\ = (r/i\sigma \sqrt{2} \Delta \sin \theta) \Lambda_+ (re^v B), \quad (308) \end{aligned}$$

где вместо $F_{01} \sin \theta$ мы написали B в соответствии с уравнением (131). Подставляя теперь значение $re^v B$ из уравнений (138) и (143), получаем

$$-2 \sqrt{2} i\sigma \mu \operatorname{Im} \phi_0 = (r/\Delta) \Lambda_+ H_1^{-1} \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{dC_{l+2}^{-3/2}}{d\theta}. \quad (309)$$

Вследствие рекуррентных соотношений, которым удовлетворяют функции Гегенбауэра, имеем

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{dC_{l+2}^{-3/2}}{d\theta} = -\frac{3}{\mu^2 + 2} P_{l, \theta}. \quad (310)$$

Поэтому, подставляя из уравнения (299) значение для $H_1^{(-)}$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} i \sigma \mu (\mu^2 + 2) [2q_1 (q_1 - q_2)]^{1/2} \operatorname{Im} \phi_0 = \\ = (r/\Delta) \Lambda_+ (Z_1^{(-)} \cos \psi - Z_2^{(-)} \sin \psi) P_{l, \theta}, \end{aligned} \quad (311)$$

причем в силу уравнения (281)

$$(r/\Delta) \Lambda_+ Z_i^{(-)} = [r^2 (\mu^2 r + q_i)]^{-1} (\mu X_j - q_j Z_i^{(-)}). \quad (312)$$

Подобным же образом, рассматривая выражение

$$\phi_2 = F_{(p)(q)} \tilde{m}^{(p)} n^{(q)} = (e^\nu / 2 \sqrt{2}) [i (F_{01} + F_{21}) + (F_{03} + F_{23})], \quad (313)$$

находим

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} i \sigma \mu (\mu^2 + 2) [2q_1 (q_1 - q_2)]^{1/2} \operatorname{Im} \phi_2 = \\ = (1/2r) \Lambda_- (Z_1^{(-)} \cos \psi - Z_2^{(-)} \sin \psi) P_{l, \theta}, \end{aligned} \quad (314)$$

где

$$(1/r) \Lambda_- Z_i^{(-)} = [\Delta / r^4 (\mu^2 r + q_i)] (\mu X_{-j} - q_j Z_i^{(-)}). \quad (315)$$

Рассмотрим теперь полярную часть ϕ_0 , равную $\operatorname{Re} \phi_0$. Подставляя значения F_{03} и F_{23} из уравнений (159) и (165), находим

$$\operatorname{Re} \phi_0 = - (r/2 \Delta Q_* \sqrt{2}) \Lambda_+ (r^2 B_{23}) P_{l, \theta}. \quad (316)$$

С другой стороны, в силу уравнений (181), (190) и (193) имеем

$$\begin{aligned} r^2 B_{23} = -Q_* \mu H_1^{(+)} - (2Q_*^2 / r) (rX/n - H_2^{(+)}) = \\ = -Q_* \mu H_1^{(+)} - (2Q_*^2 / r) e^\nu \Phi. \end{aligned} \quad (317)$$

Следовательно,

$$2 \sqrt{2} \operatorname{Re} \phi_0 = \mu (r/\Delta) \Lambda_+ [H_1^{(+)} + (2Q_*/\mu r) e^\nu \Phi] P_{l, \theta}. \quad (318)$$

Мы снова можем заменить член с $H_1^{(+)}$ в предыдущем уравнении выражением

$$(r/\Delta) \Lambda_+ H_1^{(+)} = (r/\Delta) [q_1 (q_1 - q_2)]^{-1/2} \Lambda_+ (Z_1^{(+)} \cos \psi - Z_2^{(+)} \sin \psi), \quad (319)$$

где в силу уравнения (281)

$$(r/\Delta) \Lambda_+ Z_i^{(+)} = [r^2 (\mu^2 r + q_i)]^{-1} (\mu X_j + q_j Z_i^{(+)}). \quad (320)$$

47. Задача об отражении и прохождении волн; матрица рассеяния

Обратимся теперь к фундаментальной проблеме, для решения которой развивалась теория возмущений черной дыры: проблеме взаимодействия черной дыры с падающими волнами различной природы.

Напомним прежде всего, что уравнения и для аксиальных, и для полярных возмущений удалось свести к паре одномерных

волновых уравнений (для каждого типа возмущения по отдельности) с действительными положительными потенциалами, которые убывают пропорционально обратному квадрату расстояния при $r_* \rightarrow +\infty$ и экспоненциально убывают при $r_* \rightarrow -\infty$. Вследствие короткодействующего характера этих потенциалов задача исследования каждого уравнения сводится к задаче о проникновении через барьер: т. е. нужно искать решения, удовлетворяющие стандартным граничным условиям:

$$Z_i^{\pm} \rightarrow \begin{cases} e^{+i\sigma r_*} + R_i^{(\pm)}(\sigma) e^{-i\sigma r_*} & (r_* \rightarrow +\infty), \\ T_i^{(\pm)}(\sigma) e^{+i\sigma r_*} & (r_* \rightarrow -\infty). \end{cases} \quad (321)$$

Как было показано в § 43, вид потенциалов $V_i^{(\pm)}$, описываемых уравнениями (197), позволяет выразить решение $Z_i^{(\pm)}$, как это было сделано в уравнении (199), в виде линейной комбинации функции $Z_i^{(-)}$ и ее производной, и обратно. Из анализа, проведенного в § 27, и из уравнения (199) следует (ср. с уравнениями (168) и (169) гл. 4), что

$$R_i^{(+)}(\sigma) = R_i^{(-)}(\sigma) e^{i\delta_i}, \quad T_i^{(+)}(\sigma) = T_i^{(-)}(\sigma), \quad (322)$$

$$e^{i\delta_i} = \frac{\mu^2(\mu^2 + 2) - 2i\sigma q_j}{\mu^2(\mu^2 + 2) + 2i\sigma q_j} \quad (i, j = 1, 2; i \neq j). \quad (323)$$

В силу этих простых соотношений между амплитудами отраженных и проходящих волн, принадлежащих к двум классам возмущений, мы можем в оставшейся части параграфа опустить верхние индексы, отмечающие принадлежность функций к определенному классу возмущений, понимая, что последующий анализ приложим равно к функции $Z_i^{(+)}$, и к функции $Z_i^{(-)}$.

Определим матрицу рассеяния по отношению к рассеянию каждым из двух потенциалов V_i ($i = 1, 2$, индексы «+» и «—» опускаем!) следующим образом (ср. с § 28 гл. 4):

$$S_i = \begin{vmatrix} T_i(\sigma) & \tilde{R}_i(\sigma) \\ R_i(\sigma) & T_i(\sigma) \end{vmatrix} \quad (i = 1, 2). \quad (324)$$

Элементы этой матрицы (представляющие амплитуды отражения и прохождения) удовлетворяют условиям унитарности (ср. с уравнениями (181)—(186) гл. 4):

$$R_i(\sigma) T_i^*(\sigma) + T_i(\sigma) \tilde{R}_i^*(\sigma) = 0, \quad |R_i(\sigma)| = |\tilde{R}_i(\sigma)|, \quad (325)$$

$$|R_i(\sigma)|^2 + |T_i(\sigma)|^2 = 1. \quad (326)$$

(Здесь через $\tilde{R}(\sigma)$ обозначена величина, которая в § 28 обозначалась $R_2(\sigma)$.) Из соотношений (325) и (326) следует, что

$$S_i(\sigma) \tilde{S}_i(\sigma) = 1, \quad (327)$$

где $\tilde{S}_i$ — матрица, эрмитово сопряженная матрице S_i (т. е. транспонированная и комплексно сопряженная).

Матрица рассеяния обладает важным свойством относительно «обратимости времени»: если $\vec{Z}_i^{(r)}$ и $\vec{Z}_i^{(l)}$ — амплитуды волн, падающих на барьер справа и слева (рис. 21), то амплитуды

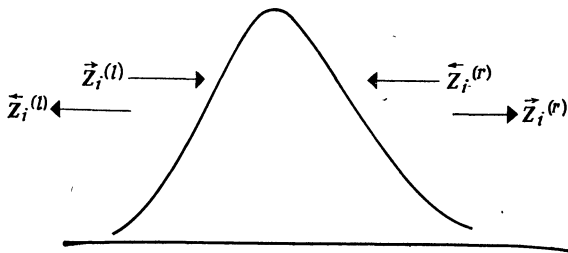


Рис. 21. Падающие с бесконечности и уходящие на бесконечность волны отражаются потенциальным барьером. Матрица рассеяния (328) связывает амплитуды волн, падающих на барьер, с амплитудами волн, отраженных барьером.

волн, отраженных влево ($\vec{Z}_i^{(l)}$), и амплитуды волн $\vec{Z}_i^{(r)}$, отраженных вправо, равны

$$S_i \begin{vmatrix} \vec{Z}_i^{(r)} \\ \vec{Z}_i^{(l)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{Z}_i^{(l)} \\ \vec{Z}_i^{(r)} \end{vmatrix}. \quad (328)$$

Вследствие унитарности имеем

$$[\vec{Z}_i^{(r)}, \vec{Z}_i^{(l)}] = [\vec{Z}_i^{(l)}, \vec{Z}_i^{(r)}] \tilde{S}_i. \quad (329)$$

Наша задача состоит в том, чтобы связать матрицы рассеяния S_1 и S_2 с матрицей рассеяния четвертого порядка, которая описывает отражение и прохождение электромагнитных и гравитационных волн, одновременно падающих на черную дыру Рейсснера—Нордстрема. Другими словами, нужно найти связь между амплитудами волн двух типов и функциями Z_1 и Z_2 . С этой целью рассмотрим граничные условия, которым удовлетворяют решения Y_{+i} и Y_{-i} , полученные из решений для Z_i . Функции Z_i удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$Z_i \rightarrow \begin{cases} Z_i^{(\infty)} e^{i\sigma r_*} + Z_i^{(\infty)} R_i(\sigma) e^{-i\sigma r_*} & (r_* \rightarrow +\infty), \\ Z_i^{(\infty)} T_i(\sigma) e^{+i\sigma r_*} & (r_* \rightarrow -\infty). \end{cases} \quad (330)$$

Асимптотики для функций $Y_{\pm i}$, получаемых из решения для Z_i , имеют вид

$$(r^3/\Delta^2) Y_{+i} \rightarrow \begin{cases} Y_{+i}^{(\text{in})} e^{+i\sigma r_*}/r + Y_{+i}^{(\text{ref})} e^{-i\sigma r_*}/r^5 & (r_* \rightarrow +\infty), \\ Y_{+i}^{(\text{tr})} e^{+i\sigma r_*}/\Delta^2 & (r_* \rightarrow -\infty), \end{cases} \quad (331)$$

$$r^3 Y_{-i} \rightarrow \begin{cases} Y_{-i}^{(\text{in})} e^{+i\sigma r_*}/r + Y_{-i}^{(\text{ref})} r^3 e^{-i\sigma r_*} & (r_* \rightarrow +\infty), \\ Y_{-i}^{(\text{tr})} \Delta^2 e^{+i\sigma r_*} & (r_* \rightarrow -\infty). \end{cases} \quad (332)$$

Из соответствия асимптотик, выписанных в уравнениях (285) и (286), следует:

$$Y_{+i}^{(\text{in})} = -4\sigma^2 Z_i^{(\infty)}, \quad Y_{-i}^{(\text{in})} = -(K_i^*/4\sigma^2) Z_i^{(\infty)},$$

$$Y_{+i}^{(\text{ref})} = -(K_i/4\sigma^2) Z_i^{(\infty)} R_i(\sigma), \quad Y_{-i}^{(\text{ref})} = -4\sigma^2 Z_i^{(\infty)} R_i(\sigma); \quad (333)$$

$$Y_{+i}^{(\text{tr})} = 4i\sigma [i\sigma - (Mr_+ - Q_*^2)/r_+^3] r_+^3 Z_i^{(\infty)} T_i(\sigma),$$

$$Y_{-i}^{(\text{tr})} = \frac{1}{r_+^3} \left(1 + \frac{2q_i}{\mu^2 r_+}\right) \frac{K_i^* Z_i^{(\infty)} T_i(\sigma)}{4 [i\sigma + (Mr_+ - Q_*^2)/r_+^3] [i\sigma + 2(r_+ - M)/r_+^2]}. \quad (334)$$

Рассмотрим сначала потоки падающих и отраженных гравитационных волн. Напомним, что их величина определяется ведущими членами, пропорциональными r^{-1} в асимптотике скаляров Ψ_0 и Ψ_4 , представляющими приходящие и уходящие волны соответственно. Выражения (302) и (303) для Ψ_0 и Ψ_4 дают (ср. уравнения (368) и (369) гл. 4)

$$\frac{d^2 E_{\text{gr}}^{(\text{in})}}{dt d\Omega} = \frac{(S_{+2})^2}{2\pi} \frac{1}{2\sigma^2} |Y_{+2}^{(\text{in})} \cos \psi + Y_{+1}^{(\text{in})} \sin \psi|^2, \quad (335)$$

$$\frac{d^2 E_{\text{gr}}^{(\text{ref})}}{dt d\Omega} = \frac{(S_{-2})^2}{2\pi} \frac{1}{2\sigma^2} |Y_{-2}^{(\text{ref})} \cos \psi + Y_{-1}^{(\text{ref})} \sin \psi|^2. \quad (336)$$

Из выражений для $Y_{+i}^{(\text{in})}$ и $Y_{-i}^{(\text{ref})}$ в уравнениях (333) можно извлечь величину коэффициента отражения для падающей гравитационной волны:

$$\mathbb{R}_{\text{gr}} = \frac{|Z_{+2}^{(\infty)} K_2(\sigma) \cos \psi + Z_{+1}^{(\infty)} R_1(\sigma) \sin \psi|^2}{|Z_{+2}^{(\infty)} \cos \psi + Z_{+1}^{(\infty)} \sin \psi|^2}. \quad (337)$$

Отсюда следует, что амплитуда гравитационной волны с точностью до постоянного множителя пропорциональности равна

$$H_2 = Z_2 \cos \psi + Z_1 \sin \psi. \quad (338)$$

Это та самая величина, которая удовлетворяла системе связанных уравнений (144) и (145) и системе уравнений (183) и (184), прежде чем мы расцепили их, чтобы получить уравнения для Z_1 и Z_2 (ср. с уравнениями (299)).

а. Тензор энергии-импульса максвелловского поля и поток электромагнитной энергии. Тензор энергии-импульса максвелловского поля, записанный через скаляры ϕ_0 , ϕ_1 и ϕ_2 , равен

$$4\pi T_{ij} = \{\phi_0 \phi_0^* n_i n_j + \phi_2 \phi_2^* l_i l_j + 2\phi_1 \phi_1^* [l_{(i} n_{j)} + m_{(i} \bar{m}_{j)}] -$$

$$- 4\phi_0^* \phi_1 n_{(i} m_{j)} - 4\phi_1^* \phi_2 l_{(i} m_{j)} + 2\phi_2 \phi_0^* m_i m_j\} +$$

$$+ \text{Комплексно сопряженные члены.} \quad (339)$$

В фоновой метрике Рейсснера—Нордстрема единственным не равным нулю скаляром является $\phi_1 (= Q_*/2r^2)$. По предположению, возмущения поля, описываемые ϕ_0 , ϕ_2 и $\delta\phi_1$, спадают на бесконеч-

ности по крайней мере как $1/r$, откуда следует, что для вычисления возмущенного значения тензора T_{ij} не нужно учитывать возмущения базисных векторов. Опуская члены, спадающие на бесконечности быстрее, чем r^{-2} , получаем

$$4\pi T_{ij} = \{\phi_0 \phi_0^* n_i n_j + \phi_2 \phi_2^* l_i l_j + 2\delta \phi_1 \delta \phi_1^* [l_{(i} n_{j)} + m_{(i} \bar{m}_{j)}] - \\ - 4\phi_0^* \delta \phi_1 n_{(i} m_{j)} - 4\delta \phi_1 \phi_2^* l_{(i} m_{j)} + 2\phi_2 \phi_0^* m_i m_j\} + \\ + \text{Комплексно сопряженные члены} + O(r^{-3}) \quad (r \rightarrow \infty). \quad (340)$$

Подставляя в это уравнение компоненты базисных векторов, перечисленные в уравнении (108), находим, что поток энергии в единицу времени и в единице телесного угла равен

$$\frac{d^2 E_{\text{em}}}{dt d\Omega} = \lim_{r \rightarrow \infty} (r^2 T_t^r) = \lim_{r \rightarrow \infty} (r^2/4\pi) (-1/4 |\phi_0|^2 + |\phi_2|^2). \quad (341)$$

Из выражений для ϕ_0 (уравнение (311)) и для ϕ_2 (уравнение (314)) следует, что с точностью до одинакового постоянного множителя пропорциональности поток для падающих электромагнитных волн $Z_i^{(\infty)} \exp(+i\sigma r_*)$ равен

$$\frac{d^2 E_{\text{em}}^{(\text{in})}}{dt d\Omega} = (1/4\pi) (P_{l, \theta})^2 16\sigma^4 |Z_1^{(\infty)} \cos \psi - Z_2^{(\infty)} \sin \psi|^2, \quad (342)$$

а поток для отраженных волн $Z_i^{(\infty)} R_i(\sigma) \exp(-i\sigma r_*)$ равен

$$\frac{d^2 E_{\text{em}}^{(\text{ref})}}{dt d\Omega} = (1/4\pi) (P_{l, \theta})^2 16\sigma^4 |Z_1^{(\infty)} R_1(\sigma) \cos \psi - Z_2^{(\infty)} R_2(\sigma) \sin \psi|^2. \quad (343)$$

Соответственно этому коэффициент отражения для падающих электромагнитных волн равен

$$R_{\text{em}} = \frac{|Z_1^{(\infty)} R_1(\sigma) \cos \psi - Z_2^{(\infty)} R_2(\sigma) \sin \psi|^2}{|Z_1^{(\infty)} \cos \psi - Z_2^{(\infty)} \sin \psi|^2}. \quad (344)$$

Из этого выражения ясно, что амплитуда электромагнитной волны H_1 с точностью до постоянного множителя равна

$$H_1 = Z_1 \cos \psi - Z_2 \sin \psi, \quad (345)$$

т. е. равна величине, которая удовлетворяла системе связанных уравнений (183) и (184) до их расщепления, приводящего к уравнениям для Z_1 и Z_2 .

К результатам (344) и (345) можно прийти и другим путем, сведя все к задаче, в которой асимптотики решений для $X_{\pm i}$ играют ту же роль, что и асимптотики $Y_{\pm i}$ при исследовании гравитационных волн. Однако доказательства уже не будут столь простыми.

б. Матрица рассеяния. Покажем теперь, что в общем виде процесс рассеяния и поглощения электромагнитных и гравита-

ционных волн черной дырой может быть описан симметричной унитарной матрицей рассеяния четвертого порядка, которая, кроме того, удовлетворяет условию обратимости времени.

Мы видели, что амплитуды электромагнитных и гравитационных волновых возмущений H_1 и H_2 соответственно для некоторой заданной частоты связаны с функциями Z_1 и Z_2 соотношениями

$$H_1 = Z_1 \cos \psi - Z_2 \sin \psi, \quad H_2 = Z_2 \cos \psi + Z_1 \sin \psi \quad (346)$$

(напомним, что здесь опущены верхние индексы «+» и «-», различающие аксиальные и полярные возмущения). Обратные соотношения имеют вид

$$Z_1 = H_1 \cos \psi + H_2 \sin \psi, \quad Z_2 = H_2 \cos \psi - H_1 \sin \psi. \quad (347)$$

Предположим теперь, что чисто электромагнитная волна амплитуды $\hat{H}_1^{(r)}$ падает на черную дыру справа. Тогда $\hat{H}_2^{(r)} = 0$ и

$$\tilde{Z}_1^{(r)} = \hat{H}_1^{(r)} \cos \psi, \quad \tilde{Z}_2^{(r)} = -\hat{H}_1^{(r)} \sin \psi. \quad (348)$$

Каждое из этих Z -полей приводит к появлению амплитуд отраженной и проходящей волн, равных

$$\vec{Z}_i^{(r)} = \tilde{Z}_i^{(r)} R_i(\sigma), \quad \vec{Z}_i^{(l)} = \tilde{Z}_i^{(r)} T_i(\sigma), \quad (349)$$

а эти амплитуды, сгруппированные в соответствии с уравнениями (346), дают амплитуды отражения и прохождения как для электромагнитных, так и для гравитационных волн. Таким образом,

$$\vec{H}_1^{(r)} = \hat{H}_1^{(r)} (R_1 \cos^2 \psi + R_2 \sin^2 \psi), \quad (350a)$$

$$\vec{H}_1^{(l)} = \hat{H}_1^{(r)} (T_1 \cos^2 \psi + T_2 \sin^2 \psi), \quad (350б)$$

$$\vec{H}_2^{(r)} = \hat{H}_1^{(r)} (R_1 - R_2) \sin \psi \cos \psi, \quad (350в)$$

$$\vec{H}_2^{(l)} = \hat{H}_1^{(r)} (T_1 - T_2) \sin \psi \cos \psi. \quad (350г)$$

Если, с другой стороны, чисто гравитационная волна амплитуды $\hat{H}_2^{(r)}$ падает на черную дыру справа, то $\hat{H}_1^{(r)} = 0$ и

$$\tilde{Z}_1^{(r)} = \hat{H}_2^{(r)} \sin \psi, \quad \tilde{Z}_2^{(r)} = \hat{H}_2^{(r)} \cos \psi. \quad (351)$$

Отражение и прохождение этих падающих Z -полей, сгруппированных аналогичным образом, приводят к следующим амплитудам отраженных и проходящих электромагнитных и гравитационных волн:

$$\vec{H}_1^{(r)} = \hat{H}_2^{(r)} (R_1 - R_2) \sin \psi \cos \psi, \quad (352a)$$

$$\vec{H}_1^{(l)} = \hat{H}_2^{(r)} (T_1 - T_2) \sin \psi \cos \psi, \quad (352б)$$

$$\vec{H}_2^{(r)} = \hat{H}_2^{(r)} (R_1 \sin^2 \psi + R_2 \cos^2 \psi), \quad (352в)$$

$$\vec{H}_2^{(l)} = \hat{H}_2^{(r)} (T_1 \sin^2 \psi + T_2 \cos^2 \psi). \quad (352г)$$

Сравнение уравнений (350в) и (350г) и уравнений (352а) и (352б) показывает, что преобразование энергии падающей волны одного типа в энергию отраженной и проходящей волны другого типа полностью симметрично по отношению к тому, какого типа волна — электромагнитная или гравитационная. Это, очевидно, следствие условия обратимости времени.

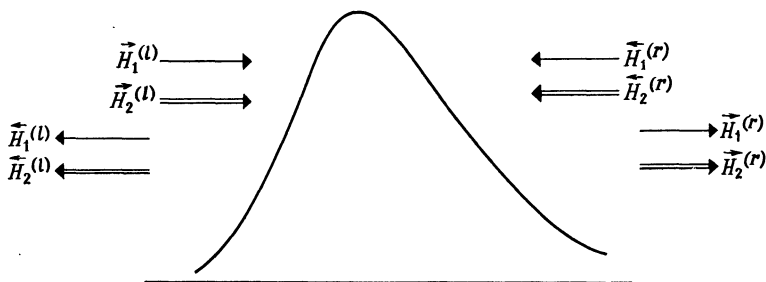


Рис. 22. В случае черной дыры Рейсснера — Нордстрема электромагнитные и гравитационные волны, падающие на потенциальный барьер с противоположных сторон из $\pm\infty$, отражаются на $\mp\infty$, и для описания этого процесса необходима матрица рассеяния четвертого порядка.

Рассмотрим далее ситуацию, показанную на рис. 22. Матрица рассеяния, описывающая преобразование

$$(\vec{H}_1^{(r)}, \vec{H}_1^{(l)}, \vec{H}_2^{(r)}, \vec{H}_2^{(l)}) \rightarrow (\vec{H}_1^{(l)}, \vec{H}_1^{(r)}, \vec{H}_2^{(l)}, \vec{H}_2^{(r)}), \quad (353)$$

может быть сразу же выписана, если воспользоваться уравнениями (350) и (351). Получаем

$$S \begin{vmatrix} \vec{H}_1^{(r)} \\ \vec{H}_1^{(l)} \\ \vec{H}_2^{(r)} \\ \vec{H}_2^{(l)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} T_{11} & \tilde{R}_{11} & T_{21} & \tilde{R}_{21} \\ R_{11} & T_{11} & R_{21} & T_{21} \\ T_{12} & \tilde{R}_{12} & T_{22} & \tilde{R}_{22} \\ R_{12} & T_{12} & R_{22} & T_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{H}_1^{(r)} \\ \vec{H}_1^{(l)} \\ \vec{H}_2^{(r)} \\ \vec{H}_2^{(l)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{H}_1^{(l)} \\ \vec{H}_1^{(r)} \\ \vec{H}_2^{(l)} \\ \vec{H}_2^{(r)} \end{vmatrix}, \quad (354)$$

где

$$\begin{aligned} R_{11} &= R_1 \cos^2 \psi + R_2 \sin^2 \psi, & T_{11} &= T_1 \cos^2 \psi + T_2 \sin^2 \psi, \\ R_{22} &= R_1 \sin^2 \psi + R_2 \cos^2 \psi, & T_{22} &= T_1 \sin^2 \psi + T_2 \cos^2 \psi, \\ R_{12} &= R_{21} = (R_1 - R_2) \sin \psi \cos \psi, \\ T_{12} &= T_{21} = (T_1 - T_2) \sin \psi \cos \psi. \end{aligned} \quad (355)$$

Несложно проверить, что матрица рассеяния S , определяемая уравнением (354), унитарна вследствие унитарности матриц S_1 и S_2 :

$$\tilde{S}S = 1. \quad (356)$$

в частности, выполняются тождества, требуемые законом сохранения энергии:

$$\begin{aligned} |T_{11}|^2 + |R_{11}|^2 + |T_{12}|^2 + |R_{21}|^2 &= 1, \\ |T_{11}|^2 + |R_{11}|^2 &= |T_{22}|^2 + |R_{22}|^2. \end{aligned} \quad (357)$$

На рис. 23 показана зависимость коэффициента конверсии $\mathbb{C} = |R_{12}^{(\pm)}|^2$ от Q_* и σ для случая $l = 2$.

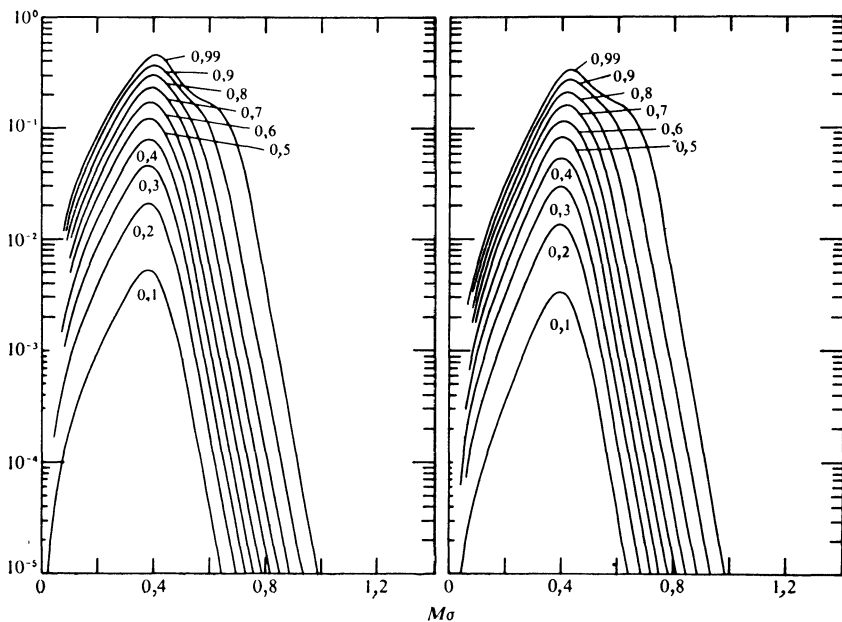


Рис. 23. Зависимость коэффициентов конверсии $\mathbb{C}^{(+)}$ (слева) и $\mathbb{C}^{(-)}$ (справа) от σ и от Q_* для аксиальных и полярных возмущений в случае $l = 2$. У кривых указаны значения Q_* .

48. Квазинормальные моды черной дыры Рейсснера—Нордстрема

Черная дыра Рейсснера—Нордстрема обладает квазинормальными модами, удовлетворяющими тем же граничным условиям и имеющими тот же смысл, что и квазинормальные моды шварцшильдовой черной дыры, описанные в § 35. Существует, однако, одно важное отличие: квазинормальные моды могут быть определены для каждого из уравнений для функций $Z_i^{(\pm)}$ ($i = 1, 2$). Поскольку потенциалы $V_i^{(\pm)}$ действительны и положительны (в области пространства-времени, внешней по отношению к горизонту событий), мнимые части комплексных собственных частот квазинормальных мод положительны. Кроме того, вследствие

Таблица 5

Комплексные собственные частоты квазинормальных мод Z_1 и Z_2 (σ выражено в единицах M^{-1}) Z_2 Z_1

Q_*	$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$	$l = 4$	$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$	$l = 4$
0	0,24828 +0,09250i	0,45760 +0,09500i	0,65690 +0,09562i	0,85310 +0,09586i	0,11252 +0,10040i	0,37367 +0,08896i	0,59944 +0,09270i	0,80918 +0,09416i
0,2	0,25150 +0,09291i	0,46296 +0,09537i	0,66437 +0,09597i	0,86260 +0,09621i	0,11320 +0,10061i	0,37475 +0,08907i	0,60103 +0,09279i	0,81134 +0,09425i
0,4	0,26194 +0,09416i	0,47993 +0,09644i	0,68728 +0,09697i	0,89100 +0,09716i	0,11537 +0,10123i	0,37844 +0,08940i	0,60705 +0,09306i	0,82020 +0,09453i
0,6	0,28276 +0,09619i	0,51201 +0,09802i	0,72919 +0,09837i	0,94192 +0,09845i	0,11957 +0,10206i	0,38622 +0,08981i	0,62066 +0,09341i	0,84056 +0,09493i
0,8	0,32349 +0,09827i	0,57013 +0,09907i	0,80284 +0,09911i	1,03039 +0,09903i	1,12712 +0,10198i	0,40122 +0,08964i	0,64755 +0,09312i	0,88057 +0,09467i
0,9	0,36082 +0,09744i	0,61939 +0,09758i	0,86375 +0,09752i	1,10286 +0,09742i	0,13276 +0,09980i	0,41357 +0,08833i	0,67002 +0,09164i	0,91396 +0,09314i
0,95	0,38927 +0,09442i	0,65476 +0,09460i	0,90668 +0,09469i	1,1535 +0,09467i	0,13540 +0,09675i	0,42169 +0,08666i	0,68519 +0,08978i	0,93664 +0,09117i
0,999	0,43031 +0,08388i	0,70310 +0,08627i	0,96434 +0,08726i	1,22097 +0,08773i	0,13416 +0,09666i	0,43113 +0,08354i	0,70387 +0,08608i	0,96510 +0,08712i

соотношения (199) между решениями, описывающими аксиальные и полярные возмущения, собственные частоты будут одинаковыми для $Z_i^{(+)}$ и $Z_i^{(-)}$. Следует также отметить, что не существует чисто электромагнитных или чисто гравитационных квазинормальных мод: каждая квазинормальная мода колебаний сопровождается излучением и электромагнитных, и гравитационных волн, что является следствием уравнения (346).

В табл. 5 приведены значения комплексных собственных частот σ_1 и σ_2 (принадлежащих собственным функциям $Z_1^{(\pm)}$ и $Z_2^{(\pm)}$) квазинормальных мод для некоторых значений Q_* и l^2 .

49. Об устойчивости пространства-времени Рейсснера—Нордстрема

Все, что было сказано в § 34 об устойчивости черной дыры Шварцшильда относительно внешних возмущений, целиком переносится на черную дыру Рейсснера—Нордстрема, поскольку для вопроса об устойчивости единственно важно то, что потенциальные барьеры вне горизонта событий действительны и положительны — устойчивость следует именно из этого факта. Но в интервале между двумя горизонтами $r_- < r < r_+$ ситуация меняется.

Хотя уравнения для $Z_i^{(\pm)}$ формально остаются неизменными, потенциальные барьеры $V_i^{(\pm)}$ в интервале $r_- < r < r_+$ отрицательны, и в соответствующей области изменения переменной r_* они, в сущности, представляют собой *потенциальные ямы*, а не потенциальные барьеры (рис. 24). Таким образом, теперь уравнение, например, для $Z_i^{(-)}$ имеет вид (ср. с уравнением (151))

$$\frac{d^2 Z_i^{(-)}}{dr_*^2} + \sigma^2 Z_i^{(-)} = -(\Delta/r^5) [(\mu^2 + 2)r - q_j + 4Q_*/r] Z_i^{(-)} \quad (i, j = 1, 2; i \neq j; r_- < r < r_+, \quad \infty > r_* > -\infty), \quad (358)$$

где

$$r_* = r + (1/2\kappa_+) \ln|r_+ - r| - (1/2\kappa_-) \ln|r - r_-|, \quad (359)$$

$$\kappa_+ = (r_+ - r_-)/2r_+^2, \quad \kappa_- = (r_+ - r_-)/2r_-^2. \quad (360)$$

Вследствие соотношения (199) между решениями, описывающими аксиальные и полярные возмущения, достаточно опять рассмотреть только уравнение (358). Поэтому удобства ради мы опустим верхний индекс, различающий эти два типа возмущений.

Важным следствием того факта, что теперь мы имеем дело с короткодействующим потенциалом, описывающим одномерную потенциальную яму, является изменение спектра. Уравнение (358) допускает теперь конечное число дискретных невырожденных связанных состояний:

$$\sigma = \pm i\sigma_j \quad (j = 1, 2; n = 1, 2, \dots, m). \quad (361)$$

Помимо этих связанных состояний имеется и непрерывный спектр, соответствующий, как и раньше, всем действительным значениям σ , с которым связана стандартная задача об отражении и прохождении волн. Однако соответствующие решения должны удовлетворять граничным условиям, отличным от тех, с которыми нам

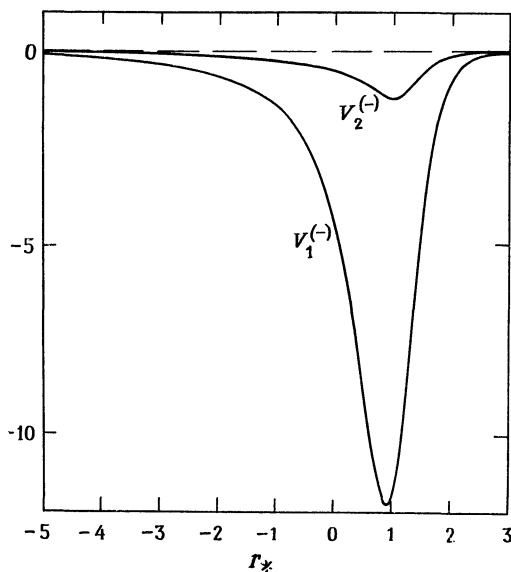


Рис. 24. Потенциальные ямы $V_1^{(-)}$ и $V_2^{(-)}$, которые вызывают дисперсию возмущений в области между двумя горизонтами (в случае $Q_* = 0,75$).

приходилось иметь дело до сих пор. Теперь нужно наложить следующие граничные условия:

$$Z(r_*) \rightarrow \begin{cases} A(\sigma)e^{-i\sigma r_*} + B(\sigma)e^{+i\sigma r_*} & (r \rightarrow r_- + 0; r_* \rightarrow +\infty), \\ e^{-i\sigma r_*} & (r \rightarrow r_+ - 0; r_* \rightarrow -\infty). \end{cases} \quad (362)$$

Причина изменения граничных условий в том, что структура световых конусов в области между горизонтами допускает входящие волны, пересекающие горизонт событий r_+ из внешнего мира, но не в обратном направлении.

Коэффициенты $A(\sigma)$ и $B(\sigma)$ в уравнении (362) связаны с амплитудами отражения и прохождения, которые были определены в гл. 4 (уравнения (175) и (176)), следующим образом:

$$A(\sigma) = 1/T^*(\sigma) = 1/T_1(-\sigma);$$

$$B(\sigma) = R^*(\sigma)/T^*(\sigma) = R_1(-\sigma)/T_1(-\sigma), \quad (363)$$

причем

$$|A(\sigma)|^2 - |B(\sigma)|^2 = 1. \quad (364)$$

Таблица 6

Коэффициенты усиления, соответствующие потенциалам $V_1^{(+)}$ и $V_2^{(+)}$ при $Q_*^2 = 0,75M^2$

σ	для V_1	для V_2	σ	для V_1	для V_2
0,009375	2,7746	2,7747	0,50	1,2631	1,2653
0,01875	2,7652	2,7655	0,55	1,2165	1,2169
0,0375	2,7287	2,7299	0,65	1,1494	1,1471
0,05	2,6923	2,6944	0,70	1,1248	1,1220
0,075	2,5962	2,6005	0,75	1,1044	1,1016
0,10	2,4785	2,4853	0,80	1,0877	1,0849
0,15	2,2201	2,2312	0,85	1,0741	1,0710
0,20	1,9781	1,9914	0,90	1,0628	1,0596
0,25	1,7764	1,7898	0,95	1,0534	1,0502
0,30	1,6168	1,6286	0,100	1,0453	1,0423
0,35	1,4928	1,5022	0,105	1,0384	1,0358
0,40	1,3967	1,4035	0,110	1,0325	1,0304
0,45	1,3219	1,3262	0,115	1,0276	1,0257

В табл. 6 приведены значения коэффициентов усиления $|A(\sigma)|^2$ для $Q_*^2 = 0,75M^2$. Мы видим, что $|A(\sigma)|^2$, и, следовательно, также и $|B(\sigma)|^2$ стремятся к конечным пределам при $\sigma \rightarrow 0$. Причина этого в существовании связанных состояний с нулевой энергией в потенциальных ямах V_1 и V_2 (см. библиографические замечания к настоящей главе).

При анализе излучения, приходящего к горизонту Коши r_- , нужно различать края EC' и EF на диаграмме Пенроуза (рис. 14). По этой причине мы восстановим явную зависимость решений от времени, описываемую множителем $\exp(i\sigma t)$, и, помня, что в интервале $r_- < r < r_+$

$$u = r_* + t, \quad v = r_* - t \quad (365)$$

(ср. с уравнением (51)), вместо уравнения (362) напомним

$$Z(r_*, t) \rightarrow e^{-i\sigma v} + [A(\sigma) - 1]e^{-i\sigma v} + B(\sigma)e^{i\sigma u}. \quad (366)$$

Если предположить, что поток излучения, идущего от $D'C'$, равен $\hat{Z}(v)$, то

$$Z(\sigma) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{Z}(v) e^{i\sigma v} dv. \quad (367)$$

Этот поток рассеивается по области между двумя горизонтами и на горизонте Коши равен

$$Z(r_*, t) \rightarrow X(v) + Y(u) \quad (v \rightarrow \infty; u \rightarrow \infty), \quad (368)$$

$$X(v) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(\sigma) [A(\sigma) - 1] e^{-i\sigma v} d\sigma, \quad (369)$$

$$Y(u) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(\sigma) B(\sigma) e^{i\sigma u} d\sigma. \quad (370)$$

Нас интересуют, однако, не величины $X(v)$ или $Y(u)$ сами по себе, а связанные с ними величины.

Как уже объяснялось в § 38, нас прежде всего интересует излучение, которое принимает наблюдатель в момент пересечения им (или ею) горизонта Коши. Для вычисления этой величины рассмотрим наблюдателя, свободно падающего вдоль радиальной геодезической. 4-скорость наблюдателя U определяется уравнением (65) при $L = 0$. Имеем, таким образом,

$$U^t = (r^2/\Delta) E, \quad U^{r*} = (r^2/\Delta) (E^2 - \Delta/r^2)^{1/2}, \quad U^\theta = U^\varphi = 0, \quad (371)$$

где в выражении для U^{r*} был выбран положительный корень в соответствии с времениподобным характером координаты r в интервале $r_- < r < r_+$. Следует также отметить, что E может принимать отрицательные значения, поскольку в том же интервале координата t пространственноподобна.

Если поле излучения описывается функцией $Z(r_*, t)$, то поток излучения $\mathcal{F}$, полученный свободно падающим наблюдателем, равен

$$\mathcal{F} = U^i Z_{,i} = (r^2/\Delta) [EZ_{,t} + (E^2 - \Delta/r^2)^{1/2} Z_{,r*}]. \quad (372)$$

По мере приближения к горизонту Коши

$$Z(r_*, t) \rightarrow X(t - r_*) + Y(t + r_*) \quad (373)$$

(ср. с уравнениями (369) и (370)). Следовательно,

$$Z_{,t} \rightarrow X_{,-v} + Y_{,u}, \quad Z_{,r*} \rightarrow -X_{,-v} + Y_{,u} \quad (374)$$

и выражение (372) для $\mathcal{F}$ принимает вид

$$\mathcal{F} \rightarrow (r^2/\Delta) \{X_{,-v} [E - (E^2 - \Delta/r^2)^{1/2}] + Y_{,u} [E + (E^2 - \Delta/r^2)^{1/2}]\}. \quad (375)$$

На линии EF величина v остается конечной, тогда как $u \rightarrow \infty$, следовательно, на этой линии

$$r_* \rightarrow +t, \\ u \rightarrow 2r_* \rightarrow -(1/\kappa_-) \ln |r - r_-| \quad (r \rightarrow r_- \text{ на } EF). \quad (376)$$

Если $E > 0$, то член, пропорциональный $X_{,-v}$, остается конечным, а член, пропорциональный $Y_{,u}$, расходится как $1/\Delta$. Поэтому

$$\mathcal{F}_{EF} \rightarrow -[2r_-^2/(r_+ - r_-)] E Y_{,u} e^{\kappa_- u} \quad (u \rightarrow \infty \text{ на } EF). \quad (377)$$

На линии EC' величина u остается конечной, тогда как $v \rightarrow \infty$, следовательно, на этой линии

$$r_* \rightarrow -t, \\ v \rightarrow 2r_* \rightarrow -(1/\kappa_-) \ln |r - r_-| \quad (r \rightarrow r_- \text{ на } EC'). \quad (378)$$

Если $E < 0$, то член, пропорциональный $Y_{,u}$, остается конечным, а член, пропорциональный $X_{,-v}$, расходится. Поэтому

$$\mathcal{F}_{EC'} \rightarrow +[2r_-^2/(r_+ - r_-)] |E| X_{,-v} e^{\kappa_- v} \quad (v \rightarrow \infty \text{ на } EC'). \quad (379)$$

Из уравнений (377) и (379) следует, что от поведения функций $Y_{,u}$ и $X_{,-v}$, заданных интегральными представлениями

$$Y_{,u} = \int_{-\infty}^{\infty} i\sigma [R_1(-\sigma)/T_1(-\sigma)] Z(\sigma) e^{i\sigma u} d\sigma, \quad (380)$$

$$X_{,-v} = \int_{-\infty}^{\infty} i\sigma [1/T_1(-\sigma) - 1] Z(\sigma) e^{-i\sigma v} d\sigma, \quad (381)$$

зависит, расходятся или ограничены потоки принимаемого наблюдателем излучения на горизонте Коши на линиях EF и EC' . В уравнениях (380) и (381) вместо $A(\sigma)$ и $B(\sigma)$ подставлены значения из уравнения (363). Если мы хотим вычислить эти интегралы по бесконечной области методом интегрирования по контуру (очевидно, это самый удобный способ в данном случае), замыкая контур в верхней полуплоскости (при определении поведения функции $Y_{,u}$, когда $u \rightarrow \infty$) или в нижней полуплоскости (для определения поведения функции $X_{,-v}$ при $v \rightarrow \infty$), мы должны знать области аналитичности функций $A(\sigma)$ и $B(\sigma)$, определенных уравнениями (363).

В соответствии с уравнениями (180) гл. 4 определения функций $A(\sigma)$ и $B(\sigma)$ можно переписать следующим образом:

$$B(\sigma) = \frac{R_1(-\sigma)}{T_1(-\sigma)} = \frac{1}{2i\sigma} [f_2(x, -\sigma), f_1(x, +\sigma)], \quad (382)$$

$$A(\sigma) = \frac{1}{T_1(-\sigma)} = \frac{1}{2i\sigma} [f_1(x, -\sigma), f_2(x, -\sigma)], \quad (383)$$

где для удобства вместо r_* мы написали x , а функции $f_1(x, \pm\sigma)$ и $f_2(x, \pm\sigma)$ являются решениями одномерных волновых уравнений и удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} f_1(x, \pm\sigma) &\rightarrow e^{\mp i\sigma x} \quad (x \rightarrow +\infty), \\ f_2(x, \pm\sigma) &\rightarrow e^{\pm i\sigma x} \quad (x \rightarrow -\infty). \end{aligned} \quad (384)$$

Как было показано в гл. 4 (уравнения (194) и (198)), функция $f_2(x, -\sigma)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$f_2(x, -\sigma) = e^{-i\sigma x} + \int_{-\infty}^x (1/\sigma) \sin \sigma(x - x') V(x') f_2(x', -\sigma) dx'. \quad (385)$$

Соответствующее интегральное уравнение для функции $f_1(x, \pm\sigma)$ имеет вид

$$f_1(x, \mp\sigma) = e^{\pm i\sigma x} - \int_x^{\infty} (1/\sigma) \sin \sigma(x - x') V(x') f_1(x, \mp\sigma) dx'. \quad (386)$$

Мы можем определить области аналитичности функций $f_2(x, -\sigma)$ и $f_1(x, \pm\sigma)$ в комплексной плоскости σ с помощью метода, развитого Хартлем и Уилкинсом для более общего случая. Метод осно-

ван на решении интегральных уравнений Вольтерра (385) и (386) методом последовательных приближений. (Как известно, обычно итерации интегральных уравнений типа Вольтерра гарантируют равномерную сходимость решений.) Рассмотрим сначала уравнение (385) и представим его решение в виде следующего ряда:

$$f_2(x, -\sigma) = e^{-i\sigma x} + \sum_{n=1}^{\infty} f_2^{(n)}(x, -\sigma), \quad (387)$$

где

$$f_2^{(n)}(x, -\sigma) = \int_{-\infty}^x dx_1 (1/\sigma) \sin \sigma (x - x_1) V(x_1) f_2^{(n-1)}(x_1, -\sigma). \quad (388)$$

Рекуррентное соотношение (388) позволяет написать следующее выражение для $f_2^{(n)}(x, -\sigma)$:

$$\begin{aligned} f_2^{(n)}(x, -\sigma) = \\ = \int_{-\infty}^{x_0} dx_1 \int_{-\infty}^{x_1} dx_2 \dots \int_{-\infty}^{x_{n-1}} dx_n \prod_{i=1}^n \sin \sigma (x_{i-1} - x_i) V(x_i) e^{-i\sigma x_n/\sigma}, \end{aligned} \quad (389)$$

где $x_0 = x$. Это выражение после некоторых преобразований принимает вид

$$\begin{aligned} f_2^{(n)}(x, -\sigma) = [e^{-i\sigma x}/(2i\sigma)^n] \times \\ \times \int_{-\infty}^{x_0} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{x_{n-1}} dx_n \prod_{i=1}^n \{[e^{2i\sigma(x_{i-1}-x_i)} - 1] V(x_i)\}. \end{aligned} \quad (390)$$

Поскольку

$$V(x) \rightarrow \text{const } e^{2\kappa_+ x} \quad (x \rightarrow -\infty), \quad (391)$$

ясно, что каждый из множителей в выражении (390) стремится к нулю экспоненциально при $x \rightarrow -\infty$ для всех

$$\text{Im } \sigma > -\kappa_+. \quad (392)$$

Следовательно, интегралы, определяющие $f_2^{(n)}(x, -\sigma)$, сходятся при всех n и $\text{Im } \sigma > -\kappa_+$. Можно показать (Хартль и Уилкинс показали это в более общем случае), что ряд (387) сходится равномерно при всех σ , если $\text{Im } \sigma > -\kappa_+$. Область аналитичности функции $f_2(x, -\sigma)$, таким образом, включает в себя полностью верхнюю полуплоскость и бесконечную полосу шириной κ_+ в нижней полуплоскости*.

Можно, далее, показать, что вдоль мнимой оси при $\sigma = -im\kappa_+$ ($m = 1, 2, \dots$) идет ряд полюсов. Мы не будем давать строгое доказательство этого факта, а только укажем источник

* Я благодарен д-ру Розе Траутман, указавшей мне, что эквивалентный результат содержится в работе: M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, *Studies in Applied Mathematics*, 53, 249, 1974.

сингулярностей. Асимптотическое поведение (391) функции $V(x)$ таково, что мы можем ожидать, что существует следующее интегральное представление для $V(x)$ при $x < 0$ (в духе преобразования Лапласа):

$$V(x) = \int_{2\kappa_+}^{\infty} d\mu \mathcal{V}(\mu) e^{\mu x}, \quad (393)$$

где $\mathcal{V}(\mu)$ содержит δ -функции с носителями в различных точках, т. е. $\mathcal{V}$ — обобщенная функция. Поэтому первую итерацию $f_2^{(1)}$ функции $f_2(x, -\sigma)$ можно представить в виде

$$f_2^{(1)}(x, -\sigma) = (e^{-i\sigma x}/2i\sigma) \int_{-\infty}^x dx_1 [e^{2i\sigma(x-x_1)} - 1] \int_{2\kappa_+}^{\infty} d\mu \mathcal{V}(\mu) e^{\mu x_1}. \quad (394)$$

Меняя порядок интегрирования, получаем

$$\begin{aligned} f_2^{(1)}(x, -\sigma) &= (e^{-i\sigma x}/2i\sigma) \int_{2\kappa_+}^{\infty} d\mu \mathcal{V}(\mu) e^{\mu x} \times \\ &\times \int_{-\infty}^x dx_1 [e^{2i\sigma(x-x_1)} - 1] e^{\mu(x_1-x)}. \end{aligned} \quad (395)$$

Интегрируя теперь по x_1 , приходим к следующему выражению:

$$f_2^{(1)}(x, -\sigma) = e^{-i\sigma x} \int_{2\kappa_+}^{\infty} d\mu \mathcal{V}(\mu)/\mu (\mu - 2i\sigma) e^{\mu x}. \quad (396)$$

Ясно, что $f_2^{(1)}(x, -\sigma)$ имеет сингулярности вдоль отрицательной мнимой оси, начинающиеся при $\text{Im } \sigma = -\kappa_+$. Подобный же результат получается и для высших итераций. Хотя эти аргументы и не позволяют установить с определенностью существование разрывов и сингулярностей для полной суммы $\sum f_2^{(n)}(x, -\sigma)$, начинающихся с $\text{Im } \sigma = -\kappa_+$, рассуждения можно уточнить и показать, что это действительно так, но мы не будем этого делать.

Аналогичным образом можно показать, решая интегральное уравнение (386) для $f_1(x, \pm\sigma)$ методом последовательных приближений, что вследствие асимптотического поведения

$$V(x) \rightarrow \text{const } e^{-2\kappa_- x} \quad (x \rightarrow +\infty) \quad (397)$$

область аналитичности функции $f_1(x, -\sigma)$ включает в себя всю верхнюю полуплоскость и бесконечную полосу ширины κ_- в нижней полуплоскости, а область аналитичности функции $f_1(x, +\sigma)$ включает в себя всю нижнюю полуплоскость и бесконечную полосу ширины κ_- в верхней полуплоскости.

Из вышесказанного следует, что область аналитичности функции $\sigma V(\sigma)$, которая равна вронскиану функций $f_2(x, -\sigma)$ и $f_1(x, +\sigma)$, обязательно включает в себя полосу ширины κ_- в верхней полуплоскости. (Фактически, можно показать, что функция

$f_1(x, \sigma)$ аналитична во всей комплексной плоскости σ , за исключением сингулярностей вдоль мнимой оси при $\sigma = im\kappa_-$ ($m = 1, 2 \dots$.) Во всяком случае, замыкая контур интегрирования в верхней полуплоскости и вычисляя интеграл $Y_{,u}$, можно показать, что вследствие аналитичности функции $Z(\sigma)$ в верхней полуплоскости функция $Y_{,u}$ должна убывать при $u \rightarrow \infty$ по крайней мере как $e^{-\kappa_- u}$, т. е.

$$Y_{,u} < e^{-\kappa_- u} \quad (u \rightarrow \infty). \quad (398)$$

Из уравнения (377) поэтому следует, что поток $\mathcal{F}_{EF}$ на горизонте Коши на линии EF с необходимостью ограничен.

Рассматривая аналогичным образом функцию $\sigma A(\sigma)$, которая входит в подинтегральное выражение для $X_{,v}$, можно показать, учитывая области аналитичности функций $f_2(x, -\sigma)$ и $f_1(x, -\sigma)$, что ее область аналитичности содержит полосу ширины κ_+ в нижней полуплоскости и что функция имеет разрезы или сингулярности вдоль всей отрицательной мнимой оси начиная с $-\kappa_+ i$. Таким образом, продлевая контур интегрирования в нижнюю полуплоскость так, чтобы обойти разрез вдоль отрицательной мнимой оси, начинающийся при $\text{Im } \sigma = -\kappa_+$, и вычисляя интеграл $X_{,v}$, получаем, предполагая регулярность функции $Z(\sigma)$ в области интегрирования, что

$$X_{,v} \rightarrow \text{const } e^{-\kappa_+ v} \quad (v \rightarrow \infty). \quad (399)$$

Из уравнения (379) теперь следует

$$\mathcal{F}_{EC'} \rightarrow \text{const } e^{(\kappa_- - \kappa_+) v} \quad (v \rightarrow \infty). \quad (400)$$

Поскольку $\kappa_- > \kappa_+$, поток $\mathcal{F}_{EC'}$ на горизонте Коши вдоль линии EC' расходится. Таким образом, наблюдатель, пытающийся пересечь горизонт Коши вдоль времениподобной геодезической и освободиться от груза прошлого, в момент пересечения почувствует удар бесконечного потока излучения, даже если возмущение в виде излучения, пересекающего горизонт событий, ограничено в пространстве и во времени.

50. Некоторые замечания о статических решениях, описывающих черные дыры

Мы закончили исследование метрик Шварцшильда и Рейснера—Нордстрема, и уместно будет обсудить здесь их сходства и различия — и то и другое равно впечатляет.

Общие черты: обе метрики принадлежат к типу D по классификации Петрова; имеют горизонт событий, который отделяет внутреннюю область от асимптотически плоского внешнего мира и не пропускает информацию из внутренней области к внешнему наблюдателю; в обоих случаях горизонт событий окружен потенциальным барьером, который определяет отражательную способ-

ность черной дыры по отношению к падающему на нее излучению; эти потенциальные барьеры очень специального вида, что гарантирует равенство отражательной способности по отношению к волнам аксиального и полярного типа; уравнения для возмущений, следующие из формализма Ньюмена—Пенроуза, допускают в обоих случаях дуальные преобразования — это также связано со специальным видом потенциалов. Но имеются и некоторые различия в деталях, и они преподносят свои сюрпризы: описание взаимодействия черной дыры Рейсснера—Нордстрема с одновременно падающими на нее электромагнитными и гравитационными волнами требует введения матрицы рассеяния четвертого порядка, которая симметрична и унитарна! Расщепление уравнения для возмущений черной дыры Рейсснера—Нордстрема в формализме Ньюмена—Пенроуза требует выбора специальной калибровки, но эта же калибровка появляется как призрак и при исследовании возмущений метрики Шварцшильда. Итак, одно различие в деталях влечет за собой другое.

Среди различий есть одно принципиальное (все другие являются его следствием): пространство-время Рейсснера—Нордстрема имеет внутренний горизонт Коши, вследствие чего максимальное аналитическое продолжение метрики дает возможность в принципе ввести в рассмотрение другие миры и позволяет наблюдателю «оторваться» от прошлого. Но метаморфозы с координатой, которая из пространственноподобной вне горизонта событий превращается во времениподобную после пересечения горизонта событий, представляют опасность для того, кто воодушевится подобными перспективами: излучение, пересекающее горизонт, начинает усиливаться по пути к горизонту Коши до такой степени, что встреча с ним может оказаться фатальной. И этот последний пассаж станет впечатляющей кодой к теме с вариациями.

Библиографические замечания

Х. Рейсснер (1874—1967) и Г. Нордстрем (1881—1923) независимо нашли решение, которое затем получило название «решение Рейсснера — Нордстрема»:

1. *Reissner H.* Ann. Physik, **50**, 106—120, 1916;
2. *Nordström G.* Proc. Kon. Ned. Akad. Wet., **20**, 1238—1245, 1918.

§ 37. Вывод решения Рейсснера — Нордстрема совпадает с выводом решения Шварцшильда в § 17.

§ 38. Обсуждение структуры пространства-времени Рейсснера — Нордстрема близко следует работе

3. *Simpson M., Penrose R.* Internat. J. Theor. Phys., **7**, 183—197, 1973.

См. также

4. *Graves J. C., Brill D. R.* Phys. Rev., **120**, 1507—1513, 1960;
5. *Hawking S. W., Ellis G. F. R.* The Large-Scale Structure of Space-Time, Cambridge, England, 1973, pp. 156—159.

[Имеется перевод: Хокинг С., Эллис Дж., Крупномасштабная структура пространства-времени. — М.: Мир, 1977.]

§ 40. Полная библиография работ по исследованию геодезических в пространстве-времени Рейсснера — Нордстрема содержится в работе

6. *Sharp N. A. Gen. Relativity and Gravitation*, **10**, 659—670, 1979.

Особо следует отметить работу

7. *Prasanna A. R., Varma R. K. Pramana*, **8**, 229—244, 1977, которую можно считать исчерпывающей. Но ни в одной из статей на эту тему орбиты не классифицируются надлежащим образом и нигде нет сравнения с орбитами в пространстве-времени Шварцшильда.

Рис. 16 взят из работы

8. *Armenti A., Jr. Nuovo Cimento*, **25B**, 442—448, 1973.

Геодезические, показанные на рис. 15, 17 и 18, рассчитаны и начерчены Гарретом Туми, которому приношу глубокую благодарность.

Движение заряженных частиц с особым упором на экстремальный случай $Q^2 = M^2$ рассматривалось в работах

9. *Ruffini R. In Black Holes*, eds. C. De Witt, B. S. De Witt, Gordon and Breach Science Publ., New York, 1973, pp. 497—508.

10. *Denardo G., Ruffini R. In Black Holes*, eds. C. De Witt, B. S. De Witt, Gordon and Breach Science Publ., New York, 1973, R 33—44.

В этих работах исследовалась возможность извлекать заряд из черной дыры Рейсснера — Нордстрема при столкновениях с ней частиц противоположного знака заряда.

§ 41. Совпадение спиновых коэффициентов и главных изотропных направлений в пространстве-времени Рейсснера — Нордстрема и Шварцшильда (за исключением только определения «функции горизонта» Δ) отмечалось в работах

11. *Bose S. K. J. Math. Phys.*, **16**, 772—775, 1975;

12. *Chitre D. M. Phys. Rev.* **D13**, 2713—2719, 1976;

13. *Lee C. H. J. Math. Phys.*, **17**, 1226—1235, 1976.

§ 42. Анализ, проведенный в этом параграфе, основан на работах

14. *Chandrasekhar S., Xanthopoulos B. C. Proc. Roy. Soc. (London)* **A367**, 1—14, 1979;

15. *Xanthopoulos B. C. Proc. Roy. Soc. (London)* **A378**, 73—88, 1981.

Исследования другими методами были проведены в работах

16. *Moncrief V. Phys. Rev.*, **D9**, 2707—2709, 1974;

17. *Moncrief V. Phys. Rev.* **D10**, 1057—1059, 1974;

18. *Moncrief V. Phys. Rev.*, **D12**, 1526—1537, 1975;

19. *Zerilli F. J. Phys. Rev.*, **D9**, 860—868, 1974.

§ 43. Приведенные в этом параграфе соотношения были получены в работе

20. *Chandrasekhar S. Proc. Roy. Soc. (London)*, **A369**, 425—433, 1980.

§ 44. Анализ, описанный в этом параграфе, содержится в работе

21. *Chandrasekhar S. Proc. Roy. Soc. (London)*, **A365**, 453—465 1979.

См. также

22. *C.-Lun A. W. Nuovo Cim. Letters*, **10**, 681—684, 1976;

23. *Bicak J. Czech. J. Phys.*, **B29**, 945—980, 1979;

24. *Wald R. M. Proc. Roy. Soc. (London)*, **A369**, 67—81, 1979.

§ 45. См. работу [21].

§ 46—47. В этом параграфе в основном изложен новый материал. Я благодарен д-ру Р. Соркину, который предложил ввести матрицу рассеяния.

Преобразование гравитационной энергии в электромагнитную энергию в низкочастотном пределе подробно обсуждалось в работе

25. *Matzner R. A. Phys. Rev.*, **D14**, 3274—3280, 1976.

См. также

26. *Olson D. W., Unruh W. G. Phys. Rev. Letters*, **33**, 1116—1118, 1974.

§ 48. Численные результаты, приведенные в табл. 5, взяты из работы

27. *Gunter D. Phil. Trans. Roy. Soc. (London)*, **296**, 457—526, 1980; **301**, 705—709, 1981.

§ 49. Важность исследования развития возмущений на горизонте Коши была впервые понята Пенроузом (см. работу [3]). С тех пор этот вопрос интенсивно исследовался, основные результаты получены в работах

28. *McNamara J. M. Proc. Roy. Soc. (London)*, **A364**, 121—134, 1978;

29. *McNamara J. M. Proc. Roy. Soc. (London)*, **A358**, 499—517, 1978;

30. Gürsel Y., Sandberg V. D., Novikov I. D., Starobinsky A. A. Phys. Rev., **D19**, 413—420, 1979;
31. Gürsel Y., Sandberg V. D., Novikov I. D., Starobinsky A. A. Phys. Rev., **D20**, 1260—1270, 1979;
32. Matzner R. A., Zamorano N., Sandberg V. D. Phys. Rev., **D19**, 2821—2826, 1979.

Отмечу, что я считаю термин «устойчивость» не совсем удачным в данном контексте. В действительности исследуется развитие потока излучения в области между двумя горизонтами с приближением к горизонту Коши, если первоначально волны падают на черную дыру извне, пересекая горизонт событий, а также влияние этого потока на свободно падающего наблюдателя.

Я благодарен д-ру С. Детвейлеру, который вычислил коэффициенты усиления, приведенные в табл. 6.

Существование связанных состояний с нулевой энергией в потенциальных ямах V_1 и V_2 доказывается в работе [31].

Исследование в настоящем параграфе в некоторых существенных чертах отличается от исследования, проведенного в работах [28—32]. Основные аргументы взяты из работы

33. Hartle J. B., Wilkins D. C., Comm. Math. Phys., **38**, 47—63, 1974.

Более полные исследования тонких вопросов, не рассмотренных в этом изложении, см. в работе

34. Chandrasekhar S., Hartle J. B. Proc. Roy. Soc. (London) A. **A384**, 301—315, 1982.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аффинный параметр 35

Базис дуальный 21

— канонический 21

— локальный координатный 21

— тетрадный 49

Бианки тождества 41, 54, 63

Биркгофа теорема 101, 104, 105, 211

Вейлевские скаляры 58

Вейля тензор 46, 48, 57

— — алгебраически общий 74

— — — специальный 74

Вектор времениподобный 47

— изотропный 47

— касательный 18

— ковариантный 20

— контравариантный 19

— пространственноподобный 47

Возмущения метрики аксиальные 149

— — полярные 149

Вольтерра уравнение 175, 265

Вращение из класса I 68

— — — II 68

— — — III 68

Гамильтониан 107

Геодезическая 35

— полнота 214

Главные изотропные направления 74

Гладкие функции 17

Гольдберга—Сакса теорема 77

Горизонта функция 132

Горизонт *Коши* 216, 268

— событий 103, 212, 216

Гравитационные волны 257

Грина функция 174

Дифференциальная 1-форма 20

— s-форма 25, 26

Дифференцирование внешнее 27

— ковариантное 31

— *Ли* 29

Дуальное преобразование 190, 245

Интеграл энергии 204

Йоста функции 174

Картана формы 37

Картаново уравнение структуры первого 37

— — — второе 38

Касательное пространство 19

— — дуальное 20

Квазинормальные моды 204, 258

Коммутационные соотношения 54, 59

Конус избегания 135

Координатные условия 49

Коттона—Дарбу теорема 84

Коши—Ковалевской теорема 71

Коэффициенты вращения *Риччи* 52, 94

— метрические 49

— спинные 57

— усиления 262

Кривизна 36

— скалярная 46

Кристоффеля связность 44

— символы 44

Крускала координаты 101

Кручение 36

Лагранжиан 107

Лейбница правило 30

Локальная инерциальная система отсчета 83

Максвелла уравнения 66, 95, 206

Максвелловские скаляры 66, 238, 250

Матрица рассеяния 173, 257

Метрика евклидова 43

- Минковского 43
 Метрические коэффициенты 49
 Многообразие 17
- Нормировки условия 56
- Оптические скаляры 72
 Орбиты критические 133
 Ортогональности условия 56
 Ортонормированная тетрада 50
 Отражения и прохождения коэффициенты 169, 255
- Петрова* классификация 73
 Поле тензорное 27
 Полилинейное отображение 22
 Призрачная калибровка 186, 239, 240
 Произведение внешнее 26
 — прямое 17
 — скалярное 44
 — тензорное 22
 Производная внутренняя 52
 — *Ли* 30
 — по направлению 51
Пуанкаре лемма 27
- Редже—Уилера* потенциал 151
 — — уравнение 151, 202
Римана тензор 37, 45, 48, 57
 Риманова геометрия 43
 — связность 45
Риччи коэффициенты вращения 52
 — тензор 40, 45, 48, 57
 — тождества 39, 54, 60
- Связность аффинная 31
 — *Кристоффеля* 44
 — метрическая 43
 — риманова 45
- Сигнатура 42, 47
 Скалярное произведение 44
 Скобка *Ли* 29
 Собственные тона черной дыры 204
 Спинорные коэффициенты 57
 Структурные константы 53, 59
- Тензор 22
 — антисимметричный 24, 25
 — *Вейля* 46, 48
 — кривизны 37, 48
 — кручения 34, 36
 — метрический 41
 — полностью антисимметричный 25
 — *Римана* 37, 45, 48, 57, 91
 — *Риччи* 40, 48
 — симметричный 24, 25
 — *Эйнштейна* 46
 — энергии-импульса 49, 254
 Тетрадные индексы 50
 — компоненты 51
- Увлечение инерциальной системы отсчета 84
- Церилли* потенциал 156, 201
 — уравнение 156
 Циклическое тождество 40
- Шредингера* уравнение 151, 172, 201
- Эйлера—Лагранжа* уравнение 44
Эйнштейна тензор 46
 — уравнения 47, 49
 Энергии-импульса тензор 49, 67
- Якоби* тождество 29

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	5
К читателю	13
Благодарности	14
Пролог	15
Глава 1. Математический аппарат	17
1. Введение	17
2. Элементы дифференциальной геометрии	17
а. Касательные векторы	18
б. 1-формы (ковекторы, или ковариантные векторы)	20
в. Тензоры и тензорные произведения	22
3. Дифференциальные формы	25
а. Внешнее дифференцирование	27
б. Скобка Ли и производная Ли	29
4. Ковариантное дифференцирование	31
а. Параллельный перенос и геодезические	34
5. Формы кривизны и уравнения структуры Картана	36
а. Циклическое тождество и тождества Бианки в отсутствие кручения	40
6. Метрика и метрическая связность. Риманова геометрия и уравнения Эйнштейна	41
а. Метрическая связность	43
б. Некоторые свойства тензора Римана и тензора Риччи в случае римановой связности	45
в. Тензор Эйнштейна	46
г. Тензор Вейля	46
д. Пространство-время как четырехмерное многообразие; уравнения Эйнштейна	47
7. Тетрадный формализм	49
а. Тетрадное представление	50
б. Производные по направлению и коэффициенты вращения Риччи	51
в. Коммутационные соотношения и структурные константы	53
г. Тождества Риччи и тождества Бианки	54
д. Обобщенный тетрадный формализм	54
8. Формализм Ньюмена—Пенроуза	55
а. Изотропный базис и спиновые коэффициенты	55
б. Представление тензора Вейля, тензора Риччи и тензора Римана в формализме Ньюмена—Пенроуза	57
в. Коммутационные соотношения и структурные константы	59
г. Тождества Риччи и приведенные уравнения	60
д. Тождества Бианки	63
е. Уравнения Максвелла	66
ж. Преобразования тетрад	68
9. Оптические скаляры, классификация Петрова и теорема Гольдберга — Сакса	70
а. Оптические скаляры	71

б. Классификация Петрова	73
в. Теорема Гольдберга—Сакса	77
Библиографические замечания	78
Глава 2. Пространство-время достаточно общей структуры	80
10. Введение	80
11. Стационарное аксиально-симметричное пространство-время и увлечение инерциальных систем отсчета	80
а. Увлечение инерциальных систем отсчета	83
12. Пространство-время необходимой общности	84
13. Уравнения структуры и компоненты тензора Римана	87
14. Компоненты тетрады и коэффициенты вращения Риччи	93
15. Уравнения Максвелла	95
Библиографические замечания	96
Глава 3. Пространство-время Шварцшильда	97
16. Введение	97
17. Метрика Шварцшильда	97
а. Решение уравнений	100
б. Координаты Крускала	101
в. Переход к координатам Шварцшильда	103
18. Альтернативный вывод метрики Шварцшильда	104
19. Геодезические в пространстве-времени Шварцшильда: времениподобные геодезические	106
а. Радиальные геодезические	108
б. Орбиты, ограниченные в пространстве	110
в. Неограниченные орбиты	121
20. Геодезические в пространстве-времени Шварцшильда: изотропные геодезические	131
а. Радиальные геодезические	132
б. Критические орбиты	133
в. Геодезические первого рода	138
г. Геодезические второго рода	140
д. Орбиты с мнимыми эксцентриситетами и прицельными параметрами меньше $3\sqrt{3}M$	141
21. Описание пространства-времени Шварцшильда в формализме Ньюмена—Пенроуза	142
Библиографические замечания	143
Глава 4. Возмущения метрики Шварцшильда	146
22. Введение	146
23. Тензор Риччи и тензор Эйнштейна для нестационарных аксиально-симметричных метрик	146
24. Возмущения метрики	149
а. Аксиальные возмущения	150
б. Полярные возмущения	152
25. Теорема о частных решениях и приводимости системы линейных дифференциальных уравнений	158
а. Частное решение системы уравнений (52) — (54)	163
26. Соотношения между $V^{(+)}$ и $V^{(-)}$ и между $Z^{(+)}$ и $Z^{(-)}$	165
27. Задача об отражении и прохождении волн	168
а. Равенство коэффициентов отражения и прохождения для аксиальных и полярных возмущений	169
28. Элементы теории одномерного потенциального рассеяния и необходимое условие равенства амплитуд прохождения для двух потенциалов	171
а. Функции Йоста и интегральные уравнения для них	174

б. Разложение функции $\ln T(\sigma)$ в ряд по обратным степеням σ и необходимые условия того, чтобы различные потенциалы приводили к одинаковым амплитудам прохождения	176
в. Прямая проверка иерархии интегральных соотношений для потенциалов $V^{(\pm)} = \pm \beta f' + \beta^2 f^2 + \kappa f$	178
29. Описание возмущений в формализме Ньюмена—Пенроуза	179
а. Линейные по возмущениям уравнения формализма Ньюмена—Пенроуза	180
б. Завершение решения уравнений (237) — (242) и «призрачная» калибровка	184
30. Теория преобразований	187
а. Условия существования преобразований с $f = 1$ и $\beta = \text{const}$; дуальные преобразования	189
б. Проверка уравнения для F и определение значений κ и β^2	191
31. Прямое вычисление Ψ_0 через возмущения метрики	192
а. Аксиальная часть Ψ_0	193
б. Полярная часть Ψ_0	195
32. Физическое содержание теории	197
а. Следствия унитарности матрицы рассеяния	200
33. Некоторые комментарии к теории возмущений	201
34. Устойчивость шварцшильдовской черной дыры	202
35. Квазинормальные моды шварцшильдовской черной дыры	204
Библиографические замечания	206
 Глава 5. Решение Рейсснера—Нордстрема	 208
36. Введение	208
37. Решение Рейсснера—Нордстрема	208
а. Решение уравнений Максвелла	209
б. Решение уравнений Эйнштейна	209
38. Структура пространства-времени	211
39. Другой-вывод метрики Рейсснера—Нордстрема	217
40. Геодезические в пространстве-времени Рейсснера—Нордстрема	218
а. Изотропные геодезические	218
б. Времениподобные геодезические	221
в. Движение заряженных частиц	224
41. Описание пространства-времени Рейсснера—Нордстрема в формализме Ньюмена—Пенроуза	227
42. Метрические возмущения решения Рейсснера—Нордстрема	228
а. Линеаризованные уравнения Максвелла	228
б. Возмущения тензора Риччи	229
в. Аксиальные возмущения	229
г. Полярные возмущения	231
43. Соотношения между $V_i^{(+)}$ и $V_i^{(-)}$ и между $Z_i^{(+)}$ и $Z_i^{(-)}$	235
44. Описание возмущений в формализме Ньюмена—Пенроуза	236
а. Уравнения Максвелла, линейные и однородные относительно возмущений	237
б. «Призрачная» калибровка	239
в. Основные уравнения	240
г. Разделение переменных, расщепление и редукция уравнений	241
45. Теория преобразований	244
а. Допустимость дуальных преобразований	244
б. Асимптотическое поведение функций $Y_{\pm i}$ и $X_{\pm j}$	246
46. Прямое вычисление вейлевских и максвелловских скаляров через возмущения метрики	247
а. Максвелловские скаляры ϕ_0 и ϕ_1	250

47. Задача об отражении и прохождении волн; матрица рассеяния . .	251
а. Тензор энергии-импульса максвелловского поля и поток электро- магнитной энергии	254
б. Матрица рассеяния	255
48. Квазинормальные моды черной дыры Рейсснера—Нордстрема . . .	258
49. Об устойчивости пространства-времени Рейсснера—Нордстрема . .	260
50. Некоторые замечания о статических решениях, описывающих черные дыры	267
Библиографические замечания	268
Предметный указатель	271

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., 2, издательство «Мир»

Субраманьян Чандрасекар
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ
ЧЕРНЫХ ДЫР

В 2-х частях

Часть 1

Ст. научный редактор М. Я. Рутковская
Художник Е. Л. Вельчинский
Художественный редактор В. И. Шаповалов
Технический редактор З. И. Резник
Корректор В. И. Киселева

ИБ № 5421

Сдано в набор 11.06.85. Подписано к печати 10.03.86. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага кн.-журн. имп. Печать высокая. Гарнитура латинская. Объем 8,75 бум. л. Усл. печ. л. 17,50. Усл. кр.-отт. 17,50. Уч.-изд. л. 16,76. Изд. № 8/3972. Тираж 5000 экз. Зак. 185. Цена 2 р. 80 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР». 129820, ГСП,
Москва, И-110, 1-й Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 6 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 193144, г. Ленинград, ул. Моисеенко, 10.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
ВЫПУСТИТ В 1987 г. КНИГУ:

Ченг Т.-П., Ли Л.-Ф. Калибровочные теории элементарных частиц. Пер. с англ., 38 л., 5 р. 60 к.

В книге дано современное изложение калибровочных теорий элементарных частиц. Общая часть включает квантование полей методом континуального интеграла, теорию перенормировок, ренормгруппы, элементы теории групп. Излагаются модели алгебры токов, спонтанное нарушение симметрии, аномалии. Основная часть книги посвящена собственно калибровочным теориям. Здесь помимо квантовой хромодинамики и теории электрослабого взаимодействия изложены модели техницвета, теория Великого объединения, теория солитонов и инстантонов.

Первые три главы книги вводят читателя в круг основных представлений современной квантовой теории поля. Здесь кратко излагается каноническое квантование полей, вводятся интегралы по траекториям в квантовой механике и теории поля, обсуждается интегрирование по ферми-полям. Рассматриваются перенормировки и регуляризации и классификация перенормируемых теорий. Выводятся уравнения ренормгруппы, рассматривается асимптотическое поведение эффективных констант связи. В четвертой главе излагаются элементы теории групп. Описана кварковая модель Гелл—Мана—Цвейга. В последующих двух главах обсуждается киральная симметрия, алгебра токов, спонтанное нарушение симметрии. Предметом изложения в седьмой главе является кварк-партонная модель и бьеркеновский скейлинг. В главах 8 и 9 обсуждается классическая теория неабелевых калибровочных полей и ее квантование. В главах 10—14 подробно изложены квантовая хромодинамика, квантовая ароматодинамика и Великое объединение. Две последние главы посвящены монополям и инстантонам.

Для студентов, аспирантов и лиц, изучающих теорию элементарных частиц, для специалистов, нуждающихся в справочном пособии по калибровочной теории элементарных частиц.

Уважаемый читатель!

Заказы на книги издательства «Мир» принимаются в магазинах научно-технической литературы.

ПОМНИТЕ!

Тираж книг определяется числом собранных заказов. Только своевременно оформленный заказ гарантирует Вам приобретение интересующих Вас книг.