И. Б. ЧЕЛПАНОВ

ОПТИМАЛЬНАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ В НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

И. Б. ЧЕЛПАНОВ

ОПТИМАЛЬНАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ В НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1967

6Т5
Ч 38
УДК 629.014-506.4

Игорь Борисович Челпанов

Оптимальная обработка сигналов
в навигационных системах

М., 1967 г., 392 стр. с илл.

Редактор *Ю. Г. Гуревич*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод* Корректор *З. В. Автонеева*

Сдано в набор 17/XII 1966 г. Подписано к печати 31/V 1967 г. Бумага 84×108 1/32.
Физ. печ. л. 12,25. Условн. печ. л. 20,58. Уч.-изд. л. 19,22. Тираж 4650 экз. Т-06953.
Цена книги 1 р. 41 к. Заказ № 463.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой
Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Измайловский проспект, 29.

3-3-13
135-67

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 7
Введение 9

Глава 1. **Постановка задачи** 14

1.1. Задачи навигации 14
1.2. Точность навигационной системы 17
1.3. Задача синтеза оптимальных динамических характеристик вычислительного устройства . 23

Глава 2. **Преобразование навигационных данных как фильтрация случайных сигналов** . 33

2.1. Навигационные задачи в автоматической системе управления движением 34
2.2. Характеристики реакции стабилизированного объекта на возмущающие и корректирующие воздействия 37
2.3. Пути получения характеристик движения объекта . . . 41
2.4. Статистические характеристики движения объекта при действии на него ветра (течения) 46
2.5. Сведение задачи преобразования сигналов приборов к линейной задаче при линеаризации уравнений относительно программы 58
2.6. Линеаризация уравнений навигации относительно текущих значений координат 66
2.7. О нестационарности помех 70
2.8. Статистические характеристики сигналов основных измерителей 72

Глава 3. **Методы синтеза оптимальных динамических характеристик одноканальных систем** . 82

3.1. Условия оптимальности преобразования непрерывного сигнала 82
3.2. Обобщенный метод Заде—Рагаззини 91

3.3. Некоторые качественные особенности оптимальных решений 103
3.4. Методы решения интегрального уравнения для бесконечного интервала времени 106
3.5. Метод логарифмических характеристик 109
3.6. О применимости решений, оптимальных для бесконечного времени поступления сигнала 125
3.7. Оптимальная обработка дискретных данных 127
3.8. Вопросы реализации фильтров на ЦВМ 130
3.9. Методы оценки влияния некоторых факторов на точность непрерывного оптимального фильтра . . . 136

Глава 4. **Методы синтеза динамических характеристик оптимальных многоканальных систем** 152

4.1. Условия оптимальности преобразования непрерывных сигналов 152
4.2. Обобщенный метод Заде — Рагаззини 158
4.3. Метод неопределенных коэффициентов 163
4.4. Оптимальная обработка дискретных данных в многоканальной системе 176
4.5. Оптимальная обработка одновременно поступающих непрерывных и дискретных сигналов 179

Глава 5. **Оптимальное преобразование навигационных данных для режима экстраполяции (режима «памяти»)** . . 185

5.1. Определение координаты и скорости по априорным данным 185
5.2. Определение координаты и скорости по априорным данным и начальным условиям 190
5.3. Определение координаты и скорости по априорным данным и известной предыстории 196

Глава 6. **Оптимальное преобразование сигнала позиционного измерителя для случая движения со стационарной скоростью** 205

6.1. Общее решение 206
6.2. Начальный участок 211
6.3. Установившийся режим 217
6.4. Пути реализации вычислительного устройства с характеристиками, близкими к оптимальным . . . 223
6.5. Критичность оптимального преобразования 231
6.6. Сложные режимы 235

Глава 7. **Оптимальное преобразование сигнала позиционного измерителя для случая движения со стационарным ускорением и для случая смешанного движения** 241

7.1. Общее решение для случая движения со стационарным ускорением 241

7.2. Начальный участок и установившийся режим для случая движения со стационарным ускорением 244

7.3. Установившийся режим для случая смешанного движения 249

Глава 8. **Оптимальное преобразование сигналов измерителя скорости и акселерометра** 253

8.1. Преобразование сигнала измерителя скорости 254

8.2. Преобразование сигнала акселерометра астроинерциальной системы 260

8.3. Преобразование сигнала акселерометра гироинерциальной системы 276

Глава 9. **Оптимальное совместное преобразование сигналов позиционного измерителя и измерителя скорости** 280

9.1. Одновременная работа измерителей. Общее решение . . 281

9.2. Начальный участок 285

9.3. Установившийся режим 288

9.4. Коррекция измерителя скорости при малом времени совместной работы обоих измерителей 297

Глава 10. **Оптимальное совместное преобразование непрерывных сигналов других источников информации в установившемся режиме** 305

10.1. Совместная работа позиционного измерителя и астроинерциальной системы 306

10.2. Совместная работа позиционного измерителя и гироинерциальной системы 316

10.3. Совместная работа астроинерциальной системы и измерителя скорости 328

10.4. Совместная работа двух позиционных измерителей . . 334

10.5. Совместная работа позиционного измерителя, измерителя скорости и гироинерциальной системы 340

Глава 11. **Некоторые задачи оптимального преобразования при использовании дискретных данных** 343

11.1. Преобразование результатов двух дискретных измерений координаты 343

11.2. Преобразование большого числа точных дискретных данных 345
11.3. Использование результата однократного измерения координаты для коррекции измерителя скорости . . . 348
11.4. Использование результата однократного измерения координаты для коррекции астроинерциальной системы 353

Глава 12. **Самонастройка. Автоматическое изменение структуры. Автоматическая индикация точности** 355
12.1. Основные способы автоматической перестройки фильтров 356
12.2. Возможности самонастройки в одноканальной и многоканальной системах 360
12.3. Пути реализации самонастройки 365
12.4. Самонастройка для установившегося режима обработки сигнала позиционного измерителя 367
12.5. Автоматическое изменение структуры фильтров при изменении режима работы 371
12.6. Автоматическая индикация точности 383

Литература 390

ПРЕДИСЛОВИЕ

Использование прикладной теории случайных процессов при теоретическом исследовании устройств различного рода, осуществляющих передачу и преобразование информации, дало возможность объективно оценивать их точность и помехоустойчивость в режиме нормальной работы, когда условия работы точно не определены, но могут быть охарактеризованы в вероятностном смысле. Основные представления о случайном полезном сигнале, подлежащем воспроизведению или заданному преобразованию, и об искажающей его случайной помехе, определение свойств полезного сигнала и помехи посредством задания спектральных плотностей или корреляционных функций, оценки точности по стандартным критериям — все это широко используется в теоретической радиотехнике, теории связи, теории автоматического управления и в ряде смежных областей. Во многих приложениях особое место занимают задачи синтеза оптимальных систем, представляющих собой тот идеал, к которому надо стремиться, если использовать выбранный критерий качества.

Различные приложения требуют обычно более или менее существенной доработки общей теории случайных процессов, что связано в первую очередь со специфическими особенностями преобразуемых сигналов. Так, в наиболее разработанной области — статистической радиотехнике — теория развита в применении к модулированным сигналам. К числу приложений, относительно слабо и фрагментарно разработанных с позиций теории случайных процессов, относятся вопросы статистической обработки навигационных данных, т. е. данных о движении различных объектов, в первую очередь летательных

аппаратов. Здесь нужно установить характерные свойства преобразуемых сигналов, доставляющих сведения о текущих координатах объекта, математически сформулировать задачу оптимального преобразования этих данных, приспособить для решения существующие общие методы и, наконец, получить конечные результаты для большой группы типичных случаев. Именно этому и посвящена настоящая книга.

Автор не стремился к наиболее общей постановке проблемы. Основной целью, которой подчинено все изложение, является получение приближенных, достаточно простых и физически ясных аналитических результатов, удобных как для численных оценок достижимой точности навигационных систем, так и для практического осуществления вычислительных устройств, реализующих эти оценки. Поэтому в книге много внимания уделяется обоснованной идеализации общей задачи, в результате чего она математически формализуется как задача линейного преобразования нестационарных случайных сигналов со стационарными первыми или вторыми приращениями, разработке приближенных, очень простых в использовании методов синтеза динамических характеристик оптимальных фильтров, упрощению результатов решения конкретных задач и сопоставлению с данными, известными по литературе. Книга не претендует на исчерпывающее освещение проблемы статистической обработки данных в навигационных системах, в этой обширной области остается широкое поле деятельности для многих исследователей.

Вопросы практического применения навигационных систем излагаются в книге по зарубежным источникам.

Пользуюсь случаем, чтобы поблагодарить проф. А. А. Первозванского за ценные советы, рецензентов проф. И. Е. Казакова и доц. Л. Г. Евланова за подробный разбор рукописи и инж. Ю. Г. Гуревича, проделавшего большую работу по редактированию.

И. Челпанов

Ленинград, август 1966

ВВЕДЕНИЕ

Задачи управления движением центра масс летательного аппарата составляют значительную часть общего комплекса задач, решаемых бортовой системой автоматического управления. Исходные данные для определения координат центра масс поступают от навигационных приборов. Эти данные подлежат преобразованию в вычислительном устройстве — приведению к одной и той же системе координат и статистической обработке. Полученные сигналы поступают на индикацию и вводятся в контур управления. Первая часть общей задачи преобразования сигналов, связанная с переходом от одних систем координат к другим, до последнего времени считалась в теории навигации основной. Математической основой решения соответствующих прикладных задач является сферическая тригонометрия. Обычно с преобразованием систем координат объединяют задачи перехода от одних кинематических величин к другим (например, от скоростей или ускорений к координатам). При этом вместо конечных соотношений, получающихся при простом преобразовании координат, дело сводится к дифференциальным уравнениям, представляющим собой кинематические соотношения. Из задач этого рода наибольших усилий потребовали исследования кинематики инерциальных систем.

Будем считать, что приведение первичных данных к единой (например, ортодромической) системе координат уже осуществлено. После такого приведения можно рассматривать в первом приближении раздельно продольное и боковое движения, т. е. сводить двумерную задачу управления движением центра тяжести к двум несвязанным одномерным. Если навигационные приборы сами по себе достаточно точны, то после пересчета в

ортодромическую систему координат и, возможно, решения дифференциальных уравнений, вид которых определяется требованиями инвариантности относительно закона движения объекта, данные могут сразу поступать на индикацию или в контур управления. В противном случае, если требуемая точность непосредственно не обеспечивается, часто большую пользу может принести рациональная статистическая обработка данных.

Целью статистической обработки сигналов навигационных приборов является достижение возможно большей точности в выработке текущих значений координат и составляющих скорости (для индикаторного режима) и наилучшего приближения действительного движения объекта к желаемому закону (для режима управления). При нескольких параллельно работающих навигационных приборах задача наилучшего использования их сигналов обычно называется *задачей комплексирования.*

Отдельные вопросы теории комплексирования разрабатывались многими авторами в течение последних лет [4, 12, 25, 30, 32, 33]. В основе используемых алгоритмов комплексирования, осуществляемого на основе статистической обработки данных, лежат следующие основные идеи:

1. Сглаживание (осреднение) помех. Непрерывные сигналы многих навигационных приборов содержат флюктуационные помехи. Сглаживание уменьшает их влияние. При сглаживании можно или опираться на априори известный факт плавности изменения координат в действительном движении летательного аппарата, или использовать сигналы других приборов, у которых флюктуационные помехи выражены слабее.

2. Выявление и компенсация ошибок известного вида. В результате сравнения выходных сигналов приборов, ошибки которых практически являются функциями времени известного вида (например, часто принимают, что ошибка астроинерциальной системы — гармоническая с периодом Шулера, а ошибка счисления пути по измерителю скорости — линейная), можно выделить каждую из них, а затем и скорректировать.

3. Периодическая или разовая коррекция. Данные, поступающие от постоянно работающих (обычно менее

точных) приборов, корректируются по данным более точных приборов, работающих дискретно или в течение коротких интервалов времени.

4. Улучшение условий работы одних приборов за счет использования сигналов других. В этих случаях введение перекрестных связей (или связей с выхода системы на сами приборы) позволяет сузить диапазон линейности по входу элементов прибора, повысить добротность следящих систем и т. д., что приводит к повышению точности данного прибора, а следовательно, и всей системы.

Реализация этих идей дает обычно наибольшую выгоду в системах со структурной избыточностью (когда значения текущих координат могут быть рассчитаны независимо несколькими путями). Рациональное комплексирование приводит к более или менее значительному повышению точности по сравнению с тем, что можно получить от самого точного из приборов. В каждом случае может быть поставлена задача оптимального комплексирования. В результате ее решения определяются, во-первых, алгоритмы наилучшего преобразования данных, а во-вторых, потенциальные возможности повышения точности при заданных характеристиках приборов.

К настоящему времени созданы предпосылки для разработки единой теории статистической обработки данных в навигации. Такая теория должна использовать единообразное описание свойств сигналов приборов и законов движения объектов, единые критерии качества и единый математический аппарат. Разработке такой теории посвящена эта книга.

Все сигналы навигационных приборов и их ошибки рассматриваются как случайные функции времени с известными статистическими свойствами. Уравнения навигации считаются линеаризованными относительно программы. Это дает основание представить вычислительное устройство, осуществляющее статистическую обработку данных, в виде системы параллельно включенных линейных фильтров, выходные сигналы которых суммируются. Передаточные функции (или импульсные переходные функции) фильтров определяются из условий

минимума дисперсии ошибки в определении координаты или скорости в произвольный момент времени. Тем самым находятся алгоритмы, обеспечивающие максимальную точность непрерывно во времени. Все многообразие прикладных задач теперь укладывается в единую схему: задано несколько входных сигналов с различными свойствами; они поступают в систему фильтров, характеристики которых подлежат определению. Таким образом, задача оптимального комплексирования математически ставится как задача полного синтеза динамических характеристик линейных фильтров в многоканальной системе, оптимальных по критерию минимума среднеквадратичной ошибки.

Материал книги разделен на 12 глав. Глава 1 посвящена выяснению физического смысла задачи синтеза оптимальных характеристик вычислительного устройства навигационной системы. Основное внимание здесь уделено качественной стороне. В главе 2 эта задача ставится математически: подготавливаются исходные данные и составляются общие соотношения, из которых будут находиться решения. Главы 3 и 4 посвящены разработке математического аппарата: изложению методов решения одиночных интегральных уравнений и систем интегральных уравнений первого рода. Главы 5—11 посвящены непосредственно решению типичных задач преобразования навигационных данных. Наконец, в главе 12 определены некоторые пути построения вычислительного устройства навигационной системы, самостоятельно вырабатывающего часть исходных данных.

Оптимальные задачи преобразования навигационных данных, сформулированные в упрощенной постановке так, как это сделано в главе 2, допускают точные решения. Однако обычно эти решения оказываются настолько сложными, что возникают серьезные трудности уже при расчете оптимальных характеристик, не говоря о том, что соответствующие алгоритмы практически не могут быть реализованы. Имея это в виду, автор уделил большое внимание изложению приближенных методов расчета и способов упрощения решений. В результате в основной части книги (в главах 5—11) удается получить почти для всех задач простые аналитические

выражения. Кроме того, большинство основных результатов представлено в виде графиков и номограмм, позволяющих максимально упростить прикидочные расчеты.

До последнего времени теория оптимальной фильтрации случайных сигналов разрабатывалась почти исключительно для нужд радиотехники, теории связи и смежных дисциплин. Содержание предлагаемой книги должно показать, что существует еще новая обширная область, в которой применение прикладной теории случайных функций и в особенности теории оптимальной фильтрации может принести большую пользу.

ГЛАВА 1

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Навигационный комплекс современного летательного аппарата или судна весьма сложен. При решении задач индикации текущих значений координат и выработки корректирующих сигналов выполняется большое число разнородных операций, причем при их выполнении предъявляется большое число различных требований. При статистической обработке данных основным требованием является точность: алгоритм работы вычислительного устройства, выполняющего эту операцию, должен, насколько возможно, уменьшать ошибки. В этой главе выясняется, какое место эта частная задача преобразования занимает в общем комплексе, как она может быть выделена и математически поставлена и какой аппарат может быть использован для ее решения. Рассмотрение пока проводится чисто качественно. Изложенные в этой главе соображения позволяют в дальнейшем перейти непосредственно к математической постановке задач.

1.1. Задачи навигации

Автоматическая навигационная система должна выполнять следующие операции:

1. Определение текущих значений координат и составляющих скорости в выбранной системе.

2. Выработка желаемых законов движения, рассматриваемых в дальнейшем как программы.

3. Выработка сигналов управления, поступающих в автопилот.

Задача определения текущих значений координат может иметь самостоятельное значение. Такой режим

работы навигационной системы, когда ее выходные сигналы не используются для управления движением объекта, в дальнейшем будем называть *индикаторным режимом*. Индикаторный режим осуществляется в течение более или менее длительного времени, например при патрулировании заданного района. В этом случае нет необходимости точно придерживаться заранее намеченной траектории, и управление объектом может осуществляться только на основе угловой стабилизации и стабилизации высоты.

Такой режим работы навигационной системы, когда ее выходные сигналы используются для целей управления, будем называть *режимом управления*. При этом навигационная система составляет часть общего замкнутого контура автоматического управления движением объекта. Обычно включение навигационной системы осуществляется по принципу коррекции системы угловой стабилизации. На рис. 1.1 и 1.2 изображены обобщенные блок-схемы систем управления движением. Здесь *О* — объект, *АП* — автопилот, *НС* — навигационная система. Для индикаторного режима система управления замыкается только через автопилот, для режима управления — как непосредственно через автопилот, так и через навигационную систему. Чаще всего навигационная система работает в комбинированном режиме, когда по продольному движению осуществляется индикация, а по боковому — управление (стабилизация).

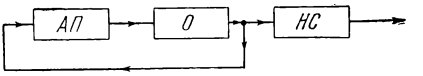

Рис. 1.1.

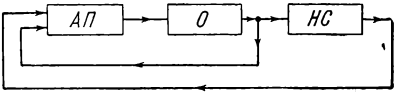

Рис. 1.2.

Будем классифицировать навигационные приборы по виду кинематической величины, о которой прибор дает информацию. По этому признаку все навигационные приборы можно разделить на четыре группы:

1. Приборы, определяющие непосредственно координаты (фазо-гиперболическая система дальней радиона-

вигации, системы ближней радионавигации). В дальнейшем приборы этой группы будем называть *позиционными измерителями.*

2. Приборы, определяющие составляющие вектора скорости движения объекта (измеритель воздушной скорости, допплеровский измеритель скорости). В дальнейшем приборы этой группы будем называть просто *измерителями скорости.*

3. Приборы, определяющие составляющие вектора ускорения, — *акселерометры.*

4. Приборы, определяющие *угловую ориентацию* объекта и, следовательно, ориентацию приборов предыдущих групп. В подавляющем большинстве случаев эти приборы непосредственно измеряют углы (курсовой гироскоп, гировертикаль). Однако навигационные системы могут быть построены на принципе вычисления углов по сигналам измерителей угловой скорости или углового ускорения (некоторые варианты инерциальных систем [30]).

Будем считать, что сигналы всех приборов поступают в единое вычислительное устройство. Каждый из навигационных приборов измеряет значения одного или нескольких навигационных параметров в определенной системе координат. Эти данные необходимо в первую очередь привести к единой системе координат. Для простейшего случая полета вблизи программной ортодромии естественно осуществлять приведение к ортодромической системе. Навигационный комплекс современного летательного аппарата обычно обладает структурной избыточностью, т. е. значения координат и составляющих вектора скорости могут быть получены независимо несколькими путями.

К навигационной системе предъявляется большое число разнородных требований [30]:

достаточно большая дальность действия, определяемая величиной радиуса действия объекта;

достаточно высокая точность определения координат местоположения объекта и составляющих вектора его скорости;

возможность автономной работы (без связи с Землей);

достаточно высокая помехозащищенность;
достаточно малые вес и габариты;
высокая надежность работы.

При определении алгоритмов преобразования данных и путей их реализации в бортовой вычислительной машине следует, вообще говоря, принимать во внимание все требования. Между некоторыми из требований необходимо искать разумный компромисс. В частности, повышение точности обычно ведет к снижению надежности и требует увеличения веса и габаритов. Однако в дальнейшем основным считается требование возможно большей точности, остальные требования учитываются лишь косвенно: если оптимальные алгоритмы обработки данных оказываются слишком сложными, то разыскиваются их более простые приближенные выражения, при которых облегчается практическая реализация.

Повышение точности навигационных систем в целом осуществляется за счет прогресса по двум путям:

1. Совершенствование самих навигационных приборов и расширение состава бортовой аппаратуры.

2. Улучшение обработки данных.

Первый путь повышения качества навигационных систем является основным. Совокупность навигационных приборов, обеспечивающих в целом требуемую дальность действия объекта, обладающих нужной помехозащищенностью, укладывающихся в заданные вес и габариты и т. д., должна создавать объективные возможности для получения необходимой точности. Однако реализует эти возможности вычислительное устройство. В настоящей книге предполагается, что состав навигационного комплекса задан, свойства приборов определены, а расчету подлежат характеристики вычислительного устройства, обеспечивающего максимальную точность в выработке выходных данных.

1.2. Точность навигационной системы

В большинстве случаев алгоритмы преобразования данных строятся без явного учета статистических характеристик преобразуемых сигналов. До последнего времени единственной основой считался принцип

инвариантности относительно движения объекта, применяемый в предположении отсутствия ошибок измерения. Если система не обладает структурной избыточностью, то принцип инвариантности относительно движения однозначно определяет вид преобразования данных.

Так, для задачи определения географических координат — долготы λ и широты φ по высотам h_1 и h_2 двух светил измеряемые и искомые величины связаны конечными соотношениями [30]:

$$\left.\begin{aligned} \sin h_1 &= \sin\varphi \sin\delta_1 + \cos\varphi \cos\delta_1 \cos(Ut + \alpha_1 + \lambda), \\ \sin h_2 &= \sin\varphi \sin\delta_2 + \cos\varphi \cos\delta_2 \cos(Ut + \alpha_2 + \lambda), \end{aligned}\right\} \quad (1.1)$$

где α_1 и α_2 — прямые восхождения, δ_1 и δ_2 — склонения светил, U — угловая скорость вращения Земли. Эти соотношения рассматриваются как система двух уравнений относительно неизвестных λ и φ, определяющих взаимно однозначное соответствие между λ и φ, с одной стороны, и между h_1 и h_2, с другой. То обстоятельство, что величины h_1 и h_2 измеряются с ошибками, при составлении алгоритма преобразования никак не учитывается.

Для системы счисления пути по скорости вместо конечных соотношений записываются кинематические зависимости

$$\left.\begin{aligned} R\frac{d\varphi}{dt} &= V\cos(\psi + \chi), \\ R\frac{d\lambda}{dt}\cos\varphi &= V\sin(\psi + \chi), \end{aligned}\right\} \quad (1.2)$$

где ψ — угол курса, получаемый от курсового прибора, χ — угол сноса, V — величина скорости объекта относительно поверхности Земли, R — радиус Земли. Система зависимостей (1.2) рассматривается как система двух дифференциальных уравнений относительно искомых координат. Таким образом, в рассматриваемом случае вычислительное устройство должно осуществлять интегрирование системы дифференциальных уравнений (решение *задачи Коши*). Обширная литература посвящена

построению полных систем кинематических зависимостей для различных вариантов инерциальных систем (см., например, [8, 21]). Задача преобразования данных в инерциальных системах также сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений. Важно, что во всех случаях вид уравнений определяется, по существу, из условий точного определения искомых координат при точных текущих данных и точных начальных условиях, т. е. из условий инвариантности относительно движения объекта.

После того как структура системы в основном определена, встает вопрос о точности. Первая задача теории точности — задача анализа ошибок для полностью заданной системы: нужно выразить ошибки в выработке выходных данных (искомых координат и составляющих скорости) через исходные инструментальные ошибки всех элементов и рассчитать методические ошибки. Задача анализа получается наиболее простой, когда измерения навигационных элементов можно считать дискретными и одновременными. В этом случае составляются уравнения всех звеньев с учетом инструментальных ошибок. Затем эти уравнения линеаризуются и разрешаются относительно ошибок в выходных данных. Полученные соотношения позволяют легко рассчитать дисперсии ошибок.

Более сложный вариант задачи анализа получается, когда существенно необходимо учитывать непрерывность поступления входных данных, т. е. считать ошибки функциями времени. Такое положение имеет место при счислении пути по сигналам измерителя скорости или акселерометров инерциальной системы. Уравнения для ошибок представляют собой не конечные соотношения, а дифференциальные уравнения (в общем случае с переменными коэффициентами). При их решении, помимо задания координат и ошибок, как функций времени, должны быть определены начальные условия: ошибки в значениях координат и, возможно, составляющих скорости в начальный момент времени. Ошибки элементов системы, как функции времени, конечно, заранее неизвестны. Однако часто считают возможным, исходя из физических особенностей задачи, считать ошибки или

постоянными, или линейно-нарастающими, или гармоническими. Лишь в последние годы ошибки стали рассматривать как случайные функции времени.

Следующий этап решения задачи анализа точности связан с учетом динамической неидеальности элементов системы. Для расчета динамических ошибок обычно используют линеаризованные дифференциальные уравнения. Описание свойств элементов навигационной системы передаточными функциями и частотными характеристиками в настоящее время широко распространено [5, 27]. При расчете динамических ошибок необходимо учитывать начальные условия не только по координатам и составляющим скорости, но и по «внутренним» параметрам системы.

Учет динамической неидеальности элементов навигационной системы необходим, если принимать во внимание быстропеременные составляющие инструментальных ошибок (типа «шумов»). Если же их игнорировать, то получится, что собственная динамика элементов системы дает незначительный эффект. Это связано со спецификой навигационных задач: величины составляющих скорости меняются весьма медленно; по сравнению с ними быстродействие элементов достаточно велико. Поэтому широко распространено мнение, что точность навигационных систем определяется исключительно медленно меняющимися составляющими ошибок (эти составляющие обычно считаются систематическими и задаются в виде постоянных и линейно-изменяющихся функций). При этом полагают, что не имеют значения ни собственная динамика элементов (их быстродействие достаточно велико), ни быстропеременные составляющие ошибок (их достаточно хорошо фильтруют элементы системы и, кроме того, их легко подавить дополнительными сглаживающими и усредняющими устройствами). В действительности такие представления допустимы лишь в некоторых пределах. В частности, медленно меняющиеся составляющие инструментальных ошибок можно задавать в виде функций простейшей формы только в ограниченных интервалах времени и только в тех случаях, когда для их уменьшения не принимаются специальные меры.

Вторая задача теории точности — задача синтеза динамических характеристик вычислительного устройства (навигационные приборы считаются заданными). Как отмечалось выше, для решения этой задачи может быть использован принцип инвариантности относительно движения. Однако лишь в простейших случаях он полностью определяет алгоритм преобразования. Кроме того, его использование может оказаться практически невыгодным. В реальной системе, построенной по принципу инвариантности, точные значения координат не могут быть получены по двум причинам:

1) из-за невозможности точной установки всех начальных условий;

2) из-за ошибок как навигационных приборов, так и элементов вычислительного устройства.

Если расчет ошибок системы показывает, что эти ошибки лежат в допустимых пределах, то использование принципа инвариантности в качестве основы для решения задачи синтеза можно считать практически оправданным. В противном случае, когда ошибки велики, нет оснований сохранять принцип инвариантности. Отказ от него может быть использован для повышения точности, так как в общем случае нет никаких оснований считать, что система, обеспечивающая нулевую ошибку при идеально точных приборах, является наилучшей при наличии ошибок. Известно, например, что инерциальная система, инвариантная относительно движения объекта, представляет собой звено, находящееся вблизи границы устойчивости; ошибки ее, вызванные ненулевыми начальными условиями, не затухают [8], а любые случайные нерегулярные ошибки элементов «раскачивают» ее [35]. При очень неточном знании начальных условий заведомо выгодно ввести демпфирование, хотя это приводит к тому, что система становится возмущаемой ускорениями движения объекта. Выбор величины коэффициента демпфирования может быть осуществлен только при учете характеристик законов движения, свойств ошибок элементов и возможных величин начальных условий.

Принцип инвариантности не определяет структуры преобразований в случае, когда в системе существует

избыточность. Под *избыточностью* в навигационной системе в узком смысле понимается возможность решения навигационных задач параллельно несколькими способами с использованием сигналов различных приборов. В состав комплекса бортовой аппаратуры входит ряд навигационных приборов или систем, показания которых частично дублируют друг друга. Так, текущие значения координат могут быть определены методом счисления пути по сигналам измерителя воздушной скорости и допплеровского измерителя скорости, непосредственным пересчетом гиперболических координат, получаемых от системы дальней радионавигации, и т. д. Избыточность системы в таком смысле можно называть *структурной избыточностью*. В соответствии с традицией, схемы, в которых реализуется структурная избыточность, в дальнейшем будем называть *комплексными*. Очевидно, что при наличии структурной избыточности условие инвариантности относительно движения может быть выполнено бесчисленным множеством способов.

Понятие избыточности в широком смысле (в информационном смысле) относится ко всей совокупности навигационных сигналов вне зависимости от того, от скольких приборов эти сигналы получены. Если точные измерения координат или составляющих вектора скорости производятся дискретно, но с достаточно малым интервалом, или тем более непрерывно, то сигнал обязательно содержит больше данных, чем это необходимо (содержит избыточность). Действительно, предположим, что навигационная система удовлетворительно решает задачу определения местоположения объекта, когда сигналы поступают с интервалом дискретности T. Тогда, если сигналы в действительности поступают с меньшим интервалом или непрерывно, они содержат больше данных, чем это необходимо. Решение задачи синтеза по критерию точности указывает пути реализации избыточности, т. е. обмена избыточности на повышенную точность. При наличии избыточности любого вида критерий точности дает однозначное решение, обеспечивающее выполнение одной из основных задач, — снижение ошибок. Поэтому в дальнейшем при решении задачи

синтеза используется не условие инвариантности относительно движения (это условие в отдельных случаях получается как следствие), а условие максимальной точности.

1.3. Задача синтеза оптимальных динамических характеристик вычислительного устройства

Теоретический анализ точностных свойств навигационной системы всегда имеет конечной целью выяснение влияния различных факторов, а затем выбор наиболее удачных вариантов схемы и оптимальных значений параметров. Если структурная схема системы задается заранее из посторонних соображений (например, из условия инвариантности относительно движения), а определению подлежат значения параметров, то соответствующая задача называется *задачей синтеза динамических характеристик системы с заданной структурой.* Если же структура также подлежит определению из условия наибольшей точности, то это задача *полного синтеза динамических характеристик системы.*

А) Задача синтеза динамических характеристик системы с заданной структурой.

До последнего времени в теории навигации ставились и решались задачи синтеза только при заданной структуре. В частности, так обстоит дело в теории гироскопических приборов (см., например, [27]). Исходный этап проектирования новой системы — выбор схемы — обычно основывается на опыте проектирования аналогичных систем и простейших физических соображениях.

Одним из основных требований при выборе структуры вычислительного устройства навигационной системы является простота реализации. В тех случаях, когда непосредственное преобразование сигналов навигационных приборов на основе принципа инвариантности относительно движения не дает требуемой точности, при выборе структуры принимаются специальные меры для уменьшения ошибок. Во всех работах, известных автору, при рассмотрении этих мер принимается разделение ошибок на систематические и случайные.

Для уменьшения влияния методических и систематических ошибок используются в основном три группы методов.

1. После выяснения физических источников ошибок принимаются меры по их устранению (введение стабилизаторов напряжения питания; использование термостатирования и температурной компенсации; частичная компенсация основных нелинейностей посредством включения дополнительных нелинейных элементов; компенсация методических ошибок сигналами, сформированными специальными устройствами; амортизация и т. д.). При борьбе с систематическими ошибками этот путь является основным. Однако возможности прогресса в этом направлении все же существенно ограничены. Так, введение стабилизаторов напряжения повышает вес системы, эффективная амортизация затруднена при действии больших постоянных перегрузок и т. д. Основным же обстоятельством, по-видимому, является то, что введение многочисленных вспомогательных устройств стабилизации, компенсации и т. п. усложняет всю систему и делает ее в целом менее надежной.

2. Производится предварительный расчет или экспериментальное определение методических или систематических ошибок и по этим данным определяются необходимые корректирующие (компенсирующие) воздействия. При этом принимается, что на этапе выявления ошибок (калибровки или юстировки) систематические ошибки те же, что и в рабочем режиме. В простейшем варианте метод сводится просто к достаточно редким периодическим поверкам приборов и к внесению после каждой поверки соответствующих поправок. Следующей ступенью является измерение и компенсация систематических ошибок перед каждым полетом. В качестве одного из устройств подобного рода следует указать на изодром, осуществляющий «запоминание» постоянной составляющей вектора скорости ухода гироскопа. Еще более сложный вариант компенсации осуществляется тогда, когда систематические ошибки обнаруживаются и определяются на отдельных участках полета при сравнении показаний нескольких приборов. Результаты сравнения запоминаются и по ним вырабатываются соответствующие по-

правки на те интервалы времени, в течение которых непосредственное выявление систематических ошибок невозможно. Этот метод дает выигрыш лишь постольку, поскольку величины или скорости изменения компенсируемых составляющих ошибок действительно остаются постоянными. Аналогичный прием используется для устранения ошибок, возникающих от неточного введения начальных условий (предстартовая выставка инерциальных систем).

3. Производится изменение динамических характеристик системы, чтобы устранить влияние ошибок, изменяющихся по заранее известным законам. Так, чтобы уменьшить влияние постоянной ошибки, когда это возможно, вводят в систему дополнительные звенья, делающие ее астатической. Против помех, близких к гармоническим, используются узкополосные фильтры — пробки. Однако все это допустимо, пока полезный сигнал не претерпевает существенных искажений со стороны устройств, осуществляющих борьбу с ошибками. Наиболее эффективен этот метод в системах со структурной избыточностью. Так, в первой из известных автору работ [52], посвященной частной задаче комплексирования (в ней рассматривается схема комплексной системы измерения вертикальной скорости самолета), схема построена так, что постоянная ошибка одного из приборов (акселерометра) не вызывает линейно-нарастающей ошибки в скорости.

Большинство специалистов по теории навигации уделяет гораздо меньше внимания случайным флюктуационным ошибкам (обычно их называют просто случайными). Такое отношение в известной мере обосновано. Действительно, уровень флюктуационных помех значительно уменьшается при прохождении сигналов через элементы вычислительного устройства. Это происходит вследствие инерционности элементов, а также потому, что ряд навигационных приборов снабжен собственными демпфирующими и сглаживающими устройствами.

Если «естественная» фильтрация флюктуационных помех недостаточна, то в вычислительном устройстве следует использовать специальные фильтры низких частот. Они могут быть реализованы или на активных

электрических цепях (электрические фильтры), или на следящих системах (электромеханические сглаживающие устройства), или в виде дополнительных программ обработки данных на цифровой вычислительной машине (дискретные фильтры).

Усиление фильтрации всегда ведет к снижению быстродействия. Поэтому при наложении ограничений на продолжительность переходных процессов оказывается ограниченной и степень фильтрации флюктуационных помех. В навигационных системах требования по быстродействию не являются слишком жесткими: для самолета, по-видимому, допустимы постоянные времени порядка минуты, для судна — порядка десяти минут. Лишь для ракет часто необходимо существенно большее быстродействие. Из-за низких требований к быстродействию иногда получается, что влияние флюктуационных ошибок на точность системы легко может быть снижено до уровня систематических ошибок, если против последних не принимается специальных мер. Однако такое положение отнюдь не всегда имеет место.

В работах, посвященных описанию средств борьбы с систематическими ошибками и ошибками от неточной выставки начальных условий, всегда предполагается, что они представляют собой функции известного вида (что они строго постоянны, строго линейно изменяются во времени и т. д.).

Приборы, предназначенные для устранения этих ошибок, строятся обычно так, чтобы при отсутствии флюктуационных помех получалось полное устранение ошибок. Еще более широкое применение находит предположение о том, что точно известен вид закона движения, а именно, что скорость постоянна.

Методы повышения точности, основанные на использовании простых аналитических выражений для ошибок и закона движения, оправдывают себя, когда флюктуационные ошибки заведомо несущественны и вид аналитических выражений определен из четких физических соображений. Так, допущение о постоянстве скорости дрейфа курсового гироскопа вытекает из предположения, что в установившихся тепловом и вибрационном режимах при постоянной ориентации оси гироскопа относительно

вектора силы тяжести суммарный возмущающий момент относительно оси нутации постоянен. Это приводит к линейному нарастанию угловой ошибки. Аналогично физически оправданным является предположение, что ошибка гирокомпаса изменяется по гармоническому закону с периодом Шулера, если эта ошибка возникает в основном из-за неточной выставки начальных условий, а влиянием неидеальности элементов можно пренебречь.

Однако при этом также достаточно популярна идея представления вообще любого медленно меняющегося процесса в виде суммы известных функций с неизвестными коэффициентами даже тогда, когда этот процесс заведомо нерегулярен. Часто приводится лишь одно чисто формальное соображение: на некотором отрезке времени любая плавно меняющаяся функция может быть с достаточной точностью аппроксимирована суммой небольшого числа функций известного вида (обычно полиномом первой или второй степени). Так, в классической задаче подготовки данных для стрельбы по воздушной цели считаются постоянными или скорость полета (это физически оправдано), или ускорение (это уже не имеет физического обоснования, так как в действительности при пикировании самолета или при входе его в вираж величины составляющих ускорения достаточно быстро меняются).

В действительности представление сигналов в виде регулярных функций времени допустимо в строго ограниченных интервалах времени. Когда не учитывают это обстоятельство, то получается качественно неверный вывод, что точность определения координат со временем неограниченно растет [25]. В главах 5—11 этой книги, между прочим, показано, что правильные выводы о путях повышения точности систем и достижимых пределах могут быть сделаны лишь тогда, когда во всех сигналах, в том числе и в медленно меняющихся, учитываются нерегулярные составляющие, которые не могут быть представлены суммой конечного числа функций известного вида. Учет этих составляющих отражает тот очевидный факт, что форма сигналов не может быть точно известной.

В настоящее время достижимая точность навигационной системы, как правило, определяется в основном ее

допустимой сложностью. Однако можно предполагать, что при достаточно высоком уровне развития счетно-решающей техники пределы по точности будут зависеть уже только от объективных условий, определяемых в первую очередь свойствами вводимых данных. Поэтому приобретает большой интерес решение задачи полного синтеза оптимальной системы.

Б) Задача полного синтеза динамических характеристик системы.

Значение задачи полного синтеза определяется двумя основными моментами.

1. Расчет оптимальной системы без ограничений, накладываемых на структуру, дает возможность оценить потенциальные возможности любой реальной системы.

2. В связи с прогрессом счетно-решающей техники (особенно цифровой) открываются перспективы реализации оптимальных характеристик или характеристик, весьма близких к оптимальным.

При решении задачи полного синтеза особое значение приобретают два обстоятельства: разумный выбор критерия точности системы и корректность описания свойств сигналов. Почти все известные автору работы по полному синтезу, содержащие доведенные до конца решения нетривиальных задач, основаны на использовании критерия минимума среднеквадратичной ошибки. Это вызвано двумя причинами:

а) критерий минимума среднеквадратичной ошибки в основном соответствует здравому смыслу (бóльшие по величине ошибки считаются менее желательными),

б) применение этого критерия позволяет доводить решение до конца, так как в процессе решения приходится иметь дело с более простыми уравнениями (при синтезе линейных систем уравнения получаются линейными).

Требование большей корректности при задании свойств сигналов связано с принципиально более широкими возможностями преобразования, чем в задаче синтеза с заданной структурой. При неадекватном задании свойств сигналов иногда получается, что система как будто может быть сделана идеально точной и при этом бесчисленным множеством способов. Так, если предста-

вить закон движения в виде суммы известных функций одного вида, а ошибку — в виде суммы функций другого вида (например, считать, что скорость движения постоянна, а ошибка измерения подчиняется синусоидальному закону), то оптимальное преобразование дает нулевую ошибку. Правильное решение задачи полного синтеза получается, если учитывать во всех сигналах нерегулярные составляющие, которые не могут быть представлены суммой конечного числа известных функций, и не производить заранее разделения ошибок на систематические и случайные, а рассматривать их совместно.

Другая сторона вопроса о корректности задания характеристик сигналов относится к виду их нестационарности. Здесь речь идет не о точности их задания, а лишь о том, чтобы была правильно отражена их «грубая структура». Этот вопрос подробно рассмотрен в § 2.4 и 2.7.

Физически правильно поставленная задача полного синтеза приводит к конечности минимальной среднеквадратичной ошибки. Это соответствует твердо установившемуся представлению о том, что никакими средствами нельзя получить идеально точную систему и что объективно существует лишь некоторый оптимум. Желание учесть факторы, действительно ограничивающие точность оптимальной системы, приводит к необходимости серьезного и широкого использования теории случайных функций.

Обычно доводы в пользу привлечения прикладной теории случайных функций формулируются примерно следующим образом [26].

Условия работы динамических систем не могут быть полностью известны, по крайней мере часть воздействий не может быть заранее определена. При этом мы можем получить не точное описание движения, а лишь общие, вероятностные закономерности. Может быть использовано также статистическое описание, когда закономерности выявляются не в каждом конкретном случае, а в совокупности большого числа случаев. Тогда воздействие задается в виде случайного процесса, представляющего собой множество реализаций с вероятностной мерой, заданной на этом множестве. Соответственно

выходной сигнал системы также считается случайной функцией; определению подлежат вероятностные характеристики этой функции.

Из этих рассуждений следует, что желательно привлекать аппарат теории случайных функций ко всем прикладным динамическим задачам вообще. Между тем, практическая польза от этого существенно различна для разных групп задач.

В задачах анализа и задачах синтеза при заданной структуре в практике инженерных расчетов часто обходятся без использования представлений о случайных функциях, хотя, конечно, всегда подразумевается, что условия работы полностью не определены. В подобных случаях считается достаточным рассчитать реакцию системы на некоторые типичные или наиболее неблагоприятные воздействия (обычно они задаются в виде скачка, импульса или синусоиды). В теории навигационных приборов широко использовались представления о постоянной скорости ухода гироскопа, постоянной ошибке лага, синусоидальной качке и т. п. Переход к учету случайного характера воздействий сначала в большинстве случаев дает только количественное уточнение результатов. Так, при исследовании работы креномера при случайном волнении [27] было получено, что колебания чувствительного элемента прибора близки к гармоническим, причем математическое ожидание амплитуды мало отличается от амплитуды, рассчитанной для эквивалентного регулярного (синусоидального) волнения. Никаких качественных особенностей не было получено также в ряде последующих работ. В свете этого ясно, почему методы расчета, основанные на использовании представлений о регулярном характере воздействий, длительное время удовлетворяли практику. Существуют задачи теории навигационных приборов, в которых нерегулярный характер воздействия дает существенно иные законы изменения ошибок [29, 35]. Важно, однако, отметить, что рассматриваемые в этих работах приборы представляют собой динамические системы, находящиеся на границе устойчивости (свободный гироскоп, недемпфированная инерциальная система). Таким образом, в задачах анализа настоятельная необходимость в использовании ап-

парата теории случайных функций возникает лишь в особых случаях.

В задачах синтеза при заданной структуре, как и в задачах анализа, часто можно ограничиваться рассмотрением только регулярных воздействий. Например, подбор параметров следящих систем сложных навигационных приборов часто производится в предположении, что качка синусоидальна; изодромные устройства гироскопических приборов строятся, исходя из предположения о постоянстве скорости ухода гироскопов и т. д. Но упрощенные представления о характере воздействий приводят к разумным результатам, пока структура системы остается достаточно простой. Чем более сложные меры принимаются для борьбы с ошибками, тем к более грубым просчетам это может привести. Так, известно, что попытки построения для гироскопических приборов изодромных устройств первого и второго порядка (идея такого усложнения основывается на предположении, что скорость ухода гироскопа можно представить полиномом первой или второй степени) не привели к положительным результатам. Факт ухудшения работы системы вместо ожидаемого улучшения при повышении порядка экстраполятора неоднократно отмечался в ряде работ. В подобных случаях применение теории случайных функций становится необходимым.

Настоящая книга посвящена исключительно задачам полного синтеза динамических характеристик оптимального вычислительного устройства навигационной системы. Основным рабочим аппаратом является прикладная теория случайных функций, один из разделов которой (теория оптимальной фильтрации) изложен в главах 3 и 4.

При решении задачи полного синтеза определяются операции, которые нужно производить над выходными сигналами неидеальных навигационных приборов, чтобы получить в результате максимальную точность. При этом, с одной стороны, не налагается ограничений на сложность операций, выполняемых этим устройством, а с другой, это устройство считается идеальным, т. е. работающим без ошибок. Следовательно, решается задача о построении идеальной системы, наилучшим образом

использующей сигналы неидеальных навигационных приборов. Эту задачу можно рассматривать как частный случай более общей задачи преобразования данных в любой измерительной системе. Именно с этих более общих позиций ведется изложение в главах 3 и 4.

В последнее время в теории измерений широко используется теория информации. В теории преобразования навигационных данных также проводятся работы в этом направлении [2]. Использование понятий и аппарата теории информации дает возможность установления единой меры качества приборов. Однако оценка количества информации, содержащейся в сигналах, дает еще очень мало. Теория информации в узком смысле не показывает, как извлечь максимальную информацию, т. е. не дает рецептов построения оптимальных систем. Это связано с той особенностью аппарата теории информации, что в нем не принимается во внимание фактор времени: системы, обеспечивающие минимум потери информации при преобразовании сигналов, дают одновременно большое (в принципе — бесконечное) запаздывание в выработке выходных данных [26]. Поэтому применение теории информации в узком смысле к теории автоматического управления вообще и к теории автоматического управления движением в частности обычно не дает реальных результатов.

Настоящая книга построена на применении теории оптимальной фильтрации случайных сигналов при использовании критерия минимума среднеквадратичной ошибки. Для всех прикладных задач (главы 5—12) решение определяет как саму оптимальную систему, так и минимально возможные значения среднеквадратичной ошибки. В качестве исходных данных для расчета необходимы характеристики всех составляющих сигналов, поступающих в вычислительное устройство навигационной системы, а также динамические характеристики объектов управления. Эти данные приведены в главе 2.

ГЛАВА 2

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НАВИГАЦИОННЫХ ДАННЫХ КАК ФИЛЬТРАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

Чтобы привести общую задачу преобразования сигналов навигационных приборов к задаче оптимальной линейной фильтрации случайных сигналов, необходимо выполнить большую подготовительную работу. Прежде всего нужно показать, что суть задач статистической обработки навигационных данных заключается именно в линейном преобразовании. Для этого необходимо обратить внимание на способы осуществления линеаризации. Затем следует обосновать выделение навигационных задач из общего комплекса. Основным моментом является определение понятий полезного сигнала и помехи и выяснение их свойств. Здесь приходится считаться, во-первых, со скудностью экспериментальных данных, а во-вторых, с желанием получить конечные результаты в достаточно общей форме. В этой главе введены две основные, достаточно общие идеализированные модели движения, основанные на физически правдоподобном предположении о стационарности скорости и ускорения. Вместе с тем, имея в виду получение в дальнейшем конкретных результатов, устанавливаются конкретные выражения для спектральных плотностей и корреляционных функций. Свойства источников информации определяются также обобщенно, с учетом их наиболее существенных особенностей, общих для различных групп приборов. В заключение главы отмечается, что у задач преобразования навигационных данных, как задач оптимальной фильтрации, есть своя специфика, которая требует определенной доработки уже существующего математического аппарата.

2.1. Навигационные задачи в автоматической системе управления движением

Положение центра тяжести объекта при плоском движении или при движении на постоянной высоте над поверхностью Земли (мы ограничимся для простоты только этими случаями) будем характеризовать двумя координатами в движущейся системе координат $O\xi_0\eta_0$. Эта система координат определяет некоторое программное движение: начало O системы координат движется так, как двигался бы центр масс объекта, если бы движение в точности следовало программе; ось ξ_0 направлена по вектору скорости программного движения (рис. 2.1). Примем, что программа заранее задана и физически выполнима, причем с достаточным запасом, т. е. ограничения по углам атаки и скольжения, углам поворота рулей, по тяге и т. д. допускают воспроизведение программы как при отсутствии возмущающих воздействий, так и при их наличии.

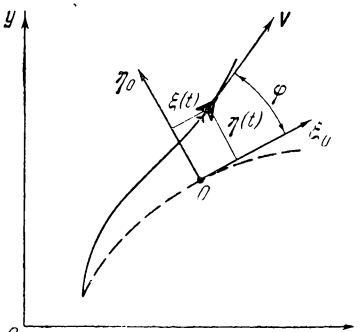

Рис. 2.1.

Действительное движение отличается от программного. Положение центра тяжести объекта в действительном движении определяется координатами $\xi(t)$ (продольное отклонение) и $\eta(t)$ (боковое отклонение), измеренными в синхронно движущейся системе координат $O\xi_0\eta_0$. Скорость движения центра масс определяется составляющими $\dot{\xi}(t)$ и $\dot{\eta}(t)$. В дальнейшем будем всегда предполагать, что отличия действительного движения от программного невелики по всем параметрам, и, следовательно, при пересчете координат $\xi(t)$ и $\eta(t)$ к навигационным данным (например, при определении географических координат) допустимо использование линеаризованных зависимостей. Кроме того, предполагается малым угол φ между вектором скорости действительно движения объекта и осью ξ_0 программного вектора ско-

рости. Когда программа заранее задана, как принято здесь, она может быть просто исключена из рассмотрения на всех этапах преобразования сигналов. Более сложный случай отсутствия заданной программы рассмотрен в § 2.6.

При работе в индикаторном режиме навигационная система должна вырабатывать или текущие значения координат $\xi(t)$ и $\eta(t)$ (задача определения координат), или текущие значения составляющих скорости $\dot{\xi}(t)$ и $\dot{\eta}(t)$ (задача определения скорости). При работе в режиме управления необходимо сводить к нулю или $\xi(t)$ и $\eta(t)$ (задача управления координатами), или $\dot{\xi}(t)$ и $\dot{\eta}(t)$ (задача управления скоростью или задача стабилизации скорости). В § 1.1 было отмечено, что навигационная система может работать в комбинированных режимах, например, когда по боковому отклонению осуществляется режим управления, а по продольному движению — индикаторный режим.

Управление объектом осуществляется более или менее сложной автоматической системой. Помимо возможной обратной связи через навигационную систему (эта связь существует только для режима управления), связи замыкаются через автопилот (авторулевой, автомат стабилизации), осуществляющий стабилизацию объекта по углам и угловым скоростям. При рассмотрении навигационных задач целесообразно объединять систему стабилизации и объект в один «блок»; этот «блок», который следовало бы называть стабилизированным объектом, в дальнейшем будем часто именовать просто объектом.

Такое объединение совершенно естественно, если навигационная система работает в индикаторном режиме. Для случая работы в режиме управления отделение навигационных задач от всех остальных может быть условным и не всегда методически правильным. Строго говоря, задачу об управлении движением центра масс нельзя выделить из общей задачи управления полетом: параметры обратной связи, замыкающейся через навигационную систему, не могут быть выбраны независимо от системы стабилизации, и наоборот, от особенностей навигационной системы зависят требования к системе

стабилизации. В частности, такая взаимосвязь задач существенна при стабилизации высоты полета самолета и в задачах самонаведения, особенно на последнем его этапе. В этих случаях при недостаточно эффективной системе угловой стабилизации обратная связь по координате, рассчитанная, исходя из требования малых статических ошибок, может заметно ухудшать динамические свойства замкнутой системы или даже привести к неустойчивости.

Если задачи управления движением центра масс и угловой стабилизации действительно динамически неразделимы, то общая задача синтеза оптимальной системы управления многократно усложняется, так как изменением одних и тех же параметров необходимо удовлетворить нескольким критериям качества. Так, наряду с требованием хорошего приближения к программной траектории могут быть наложены требования минимума перегрузок, минимума амплитуды угловых колебаний и т. д. Комплексное решение всех этих задач представит серьезные трудности.

Однако в большинстве случаев обратная связь через навигационную систему является достаточно слабой, так что она существенно меняет динамические свойства стабилизированного объекта лишь в области весьма низких частот. В этих случаях может быть осуществлено разделение задач: связи через навигационую систему выбираются из условия возможно более точного воспроизведения программы движения центра масс объекта, а прямые связи через автопилот — на основе всех остальных требований.

В дальнейшем будем принимать, что система угловой стабилизации (ее структура и параметры) определена заранее и известна. Тогда при синтезе динамических характеристик навигационной системы, работающей в режиме управления, следует исходить только из требований возможно более точного воспроизведения программы движения центра масс.

Для решения этой задачи нужно иметь следующие исходные данные:

1. Характеристики реакции стабилизированного объекта на возмущающие и корректирующие воздействия.

2. Описание свойств движения стабилизированного объекта при отсутствии обратной связи через навигационную систему.

3. Описание свойств выходных сигналов навигационных приборов.

Обобщению и приведению этих данных к простому стандартному виду, удобному для решения конкретных задач, посвящены § 2.2—2.5 и 2.8.

2.2. Характеристики реакции стабилизированного объекта на возмущающие и корректирующие воздействия

Динамические свойства самолета, судна и ракеты имеют много общих черт, поэтому ниже подробно будем говорить только о характеристиках самолета, а затем кратко отметим особенности судна и ракеты.

Силы и моменты, действующие на стабилизированный самолет, можно разделить на возмущающие и управляющие. При отсутствии возмущающих факторов движение точно совпадало бы с программным и не было бы необходимости в управляющих воздействиях. Управляющие воздействия используются для устранения результатов воздействия возмущающих факторов. При рассмотрении навигационных задач стабилизированный самолет рассматривается как единое целое. Этим самым под понятием «возмущающие факторы» объединяются воздействия различной природы. Сюда относятся как внешние силы и моменты, непосредственно приложенные к самолету, возникающие из-за наличия ветра, несимметрии обтекания и тяги и т. п., так и ошибки звеньев системы автоматической стабилизации (колебания гировертикали, уход курсового гироскопа, дрейфы усилителей и т. п.). Разумеется, факторы второй группы в конечном счете приводят к возникновению дополнительных сил и моментов. К числу возмущающих факторов могут быть условно отнесены причины, вызывающие отличие начальных условий от расчетных.

Управляющими воздействиями в навигационных задачах следует считать сигналы, поступающие на автопилот от навигационной системы. Обычно способ введения

этих сигналов в контур автоматической стабилизации заранее определен. Управляющие воздействия, как и возмущающие, проявляются в возникновении дополнительных сил и моментов. Однако в дальнейшем под управляющими воздействиями мы будем понимать электрические сигналы, непосредственно поступающие от навигационной системы. При описании динамических свойств самолета выходными переменными считаются текущие значения координат и составляющих скорости. Будем считать, что уравнения движения самолета линеаризованы относительно программы. В этом случае динамические свойства самолета по отношению к возмущающим и управляющим воздействиям характеризуются системой импульсных переходных функций. Если программное движение близко к режиму равномерного и прямолинейного полета, то, во-первых, самолет как объект регулирования становится стационарным, а во-вторых, происходит разделение динамических характеристик на две группы, соответствующие продольному и боковому движению. Будем считать, что возможные в автопилоте перекрестные связи не нарушают справедливости такого разделения. В этом случае возмущающие факторы, действующие в продольной плоскости (составляющая скорости ветра в продольной плоскости, нестабильность тяги и т. д.), не оказывают влияния на боковое движение. Примем дополнительно, что управляющие воздействия в линейном приближении раздельно влияют на продольное и боковое движения: управляющее воздействие $u_1(t)$ вызывает изменение параметров только продольного движения [$\xi(t)$ и $\dot{\xi}(t)$], а воздействие $u_2(t)$ — изменение параметров только бокового движения [$\eta(t)$ и $\dot{\eta}(t)$].

При всех принятых предположениях происходит полное разделение задач управления продольным и боковым движениями: навигационная система после преобразования координат определяет отклонения от программы отдельно по продольному и боковому движениям, и соответствующие управляющие воздействия вызывают изменение координат только в продольном или только в боковом движении. Продольное и боковое движения обладают специфическими особенностями.

а) Продольное движение.

Свойства стабилизированного объекта в продольном движении по отношению к различным воздействиям удобно характеризовать системой передаточных функций (для стационарного случая они вводятся вместо импульсных переходных функций). Конкретный вид этих передаточных функций зависит от типа объекта и особенностей системы стабилизации. Сведения о типичных передаточных функциях можно найти в книгах, посвященных рассмотрению автопилотов [5, 46]. Примерный вид одной из амплитудно-частотных характеристик [возмущением считается скорость ветра, выходным сигналом — продольная координата $\xi(t)$] показан на рис. 2.2. Характерно, что по отношению к большинству воздействий передаточные функции имеют один нулевой полюс (постоянное воздействие вызывает постоянное установившееся приращение скорости). Это положение справедливо для всех объектов, движущихся в вязкой среде.

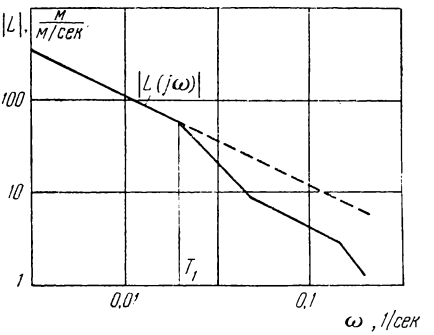

Рис. 2.2.

Для навигационных задач важна только низкочастотная часть частотной характеристики. В первом приближении для очень низких частот передаточная функция самолета в продольном движении может быть записана (с точностью до постоянного множителя) в виде

$$L(j\omega) \approx \frac{1}{j\omega}. \tag{2.1}$$

Такому представлению соответствует спрямление логарифмической частотной характеристики (на рис. 2.2 пунктир). Аппроксимацию можно считать справедливой при $\omega < \frac{1}{T_1}$, где $\omega_1 = \frac{1}{T_1}$ соответствует первой точке пере-

лома частотной характеристики. Для стабилизированных самолетов различных типов величина T_1 изменяется в пределах 10 *сек*$<T_1<$100 *сек*, для судов — в пределах 100 *сек*$<T_1<$1000 *сек*. Если нужна аппроксимация частотной характеристики в более широком диапазоне частот, то вместо выражения (2.1) следует записать

$$L(j\omega)=\frac{1}{j\omega(T_1 j\omega+1)} \tag{2.2}$$

или

$$L(j\omega)=\frac{1}{j\omega\left[T_2^2(j\omega)^2+T_1 j\omega+1\right]} \tag{2.3}$$

в зависимости от того, каков наклон логарифмической характеристики на следующем участке. При решении навигационных задач, по-видимому, нет необходимости использовать более точные аппроксимации, чем (2.2) или (2.3).

Для ракеты, движущейся в пустоте при отсутствии гравитационных сил, передаточные функции должны иметь двойной нулевой полюс. Это означает, что постоянные воздействия вызывают постоянные установившиеся ускорения. Такое положение характерно для случаев, когда отсутствуют силы сопротивления движению; все воздействия приводятся к изменению силы тяги, а следовательно, (по закону Ньютона) к пропорциональному изменению ускорения. В области очень низких частот можно использовать простейшую аппроксимацию

$$L(j\omega)=\frac{1}{(j\omega)^2}. \tag{2.4}$$

В случае необходимости ее можно заменить более точными:

$$L(j\omega)=\frac{1}{(j\omega)^2(T_1 j\omega+1)} \tag{2.5}$$

или

$$L(j\omega)=\frac{1}{(j\omega)^2\left[T_2^2(j\omega)^2+T_1 j\omega+1\right]}. \tag{2.6}$$

При решении прикладных задач в главах 5—11 используются в основном простейшие выражения (2.1) и (2.4). Оценка допустимости таких упрощений может быть произведена в каждом конкретном случае так, как показано в § 6.5.

б) Боковое движение.

В случае бокового движения вид передаточных функций для различных воздействий может быть существенно различным. По отношению к воздействиям, не вызывающим поворот объекта (таким воздействием является, например, боковой ветер, который сносит самолет), передаточные функции самолета имеют тот же вид, что и для продольного движения [(2.1), (2.2) или (2.3)]. По отношению к воздействиям, для которых постоянная величина вызывает постоянную угловую скорость отклонения продольной оси самолета от оси ξ_0 (таким возмущением является скорость ухода курсового гироскопа автопилота), передаточные функции имеют двойной нулевой полюс. Действительно, в установившемся режиме при угловой стабилизации по «уходящему» курсовому гироскопу боковая скорость, пропорциональная углу ухода, пропорциональна, таким образом, интегралу от возмущения (угловой скорости), а боковое отклонение пропорционально второму интегралу от возмущения. Следовательно, по отношению к некоторым возмущениям передаточные функции могут быть аппроксимированы выражениями (2.4), (2.5) или (2.6). Для таких возмущений свойства объектов, движущихся в вязкой среде или в пустоте, не имеют качественных различий.

Постоянные времени для бокового движения обычно в несколько раз меньше, чем для продольного, поэтому диапазон условий, при которых могут быть использованы выражения (2.1) и (2.4), для бокового движения гораздо шире.

2.3. Пути получения характеристик движения объекта

Важную группу исходных данных составляют характеристики движения стабилизированного объекта, а именно статистические свойства координат $\xi(t)$ и $\eta(t)$ как случайных функций времени. Необходимо отметить, что эти данные должны определять свойства только самого стабилизированного объекта, поэтому при экспериментальном получении данных навигационная система может работать только в индикаторном режиме.

При определении статистических характеристик координат $\xi(t)$ и $\eta(t)$ можно пойти по двум путям.

1. Сначала изучаются отдельные возмущения, вычисляются передаточные функции, соответствующие этим возмущениям, а затем расчетным путем находятся ожидаемые статистические характеристики координат.

2. Непосредственно обрабатываются данные полных натурных испытаний. В этом случае мы имеем дело сразу с суммарным эффектом действия всех возмущений.

Первый путь, вообще говоря, дает не вполне надежные данные, поскольку при расчете могут быть упущены некоторые существенные факторы. Второй путь дает сразу те сведения, которые нужны для решения конкретных задач; однако если сам объект еще только проектируется, то приходится довольствоваться сведениями о сходных объектах, что также вносит элемент ненадежности.

Изложение общих методов получения статистических свойств случайных процессов можно найти в литературе по теории случайных функций [10, 26]. Исходными данными являются записи изменения координат объекта как функций времени в системе осей, связанной с Землей:

$$x_i(t),\ y_i(t) \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ N). \tag{2.7}$$

Эти данные могут быть получены, например, от наземных радиолокационных станций, сопровождающих самолет, в результате аэрофотосъемки земной поверхности с самого самолета или вообще от любой достаточно точной навигационной системы, работающей в индикаторном режиме. Последнее обстоятельство является существенным: самолет должен управляться только автопилотом, без всякой коррекции со стороны пилота или навигационной системы.

От системы координат, связанной с Землей, необходимо перейти к системе координат, совершающей программное движение. Для случая, когда программное движение представляет собой прямолинейный полет с постоянной скоростью, а ось x направлена горизонтально в направлении полета, координаты $\xi_i(t)$ и $\eta_i(t)$ определяются следующим образом:

$$\xi_i(t)=x_i(t)-V_0t, \qquad \eta_i(t)=y_i(t), \tag{2.8}$$

где V_0 — скорость программного движения. Вероятностные свойства координат $\xi(t)$ и $\eta(t)$ как случайных функций времени характеризуются математическими ожиданиями

$$m_\xi(t) = M\{\xi(t)\}, \qquad m_\eta(t) = M\{\eta(t)\} \tag{2.9}$$

и корреляционными функциями

$$\left.\begin{aligned} &R_{\xi\xi}(\tau_1, \tau_2) = M\{\xi^{(0)}(\tau_1)\,\xi^{(0)}(\tau_2)\},\\ &R_{\eta\eta}(\tau_1, \tau_2) = M\{\eta^{(0)}(\tau_1)\,\eta^{(0)}(\tau_2)\},\\ &R_{\xi\eta}(\tau_1, \tau_2) = M\{\xi^{(0)}(\tau_1)\,\eta^{(0)}(\tau_2)\},\\ &\quad[\xi^{(0)}(t) = \xi(t) - m_\xi(t), \quad \eta^{(0)}(t) = \eta(t) - m_\eta(t)]. \end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

Здесь и везде далее M — символ математического ожидания. Известно (см., например, [26]), что знания математических ожиданий процессов и их корреляционных функций достаточно для расчета дисперсий ошибок при любых линейных преобразованиях.

Оценки (приближенные выражения) математических ожиданий и корреляционных функций координат рассчитываются по экспериментальным данным следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &m_\xi^*(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i(t), \qquad m_\eta^*(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\eta_i(t),\\ &R_{\xi\xi}^*(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i^{(0)}(\tau_1)\,\xi_i^{(0)}(\tau_2),\\ &R_{\eta\eta}^*(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\eta_i^{(0)}(\tau_1)\,\eta_i^{(0)}(\tau_2),\\ &R_{\xi\eta}^*(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i^{(0)}(\tau_1)\,\eta_i^{(0)}(\tau_2),\\ &[\xi_i^{(0)}(t) = \xi_i(t) - m_\xi^*(t), \quad \eta_i^{(0)}(t) = \eta_i(t) - m_\eta^*(t)]. \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

При получении статистических характеристик движения объекта необходимо четко устанавливать, по какому множеству реализаций производится усреднение и как эти данные будут использоваться в дальнейшем. Строго

говоря, исходные данные должны быть взяты для тех же диапазонов изменения внешних условий, для которых навигационная система должна работать без перестройки (генеральная совокупность, из которой делается выборка для составления статистики, должна совпадать с генеральной совокупностью, для которой строятся решения). Так, если серию одинаковых навигационных комплексов с одинаковыми настройками имеется в виду поставить на однотипные рейсовые самолеты, совершающие полеты по одному и тому же маршруту примерно на одной высоте с одинаковой средней скоростью, то реализация $\xi_i(t)$ и $\eta_i(t)$ случайных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ должна быть взята для самолетов того же типа, того же маршрута, той же высоты. Если требуется, чтобы навигационный комплекс имел фиксированные настройки для разных типов самолетов, различных высот и скоростей полета и т. д., то нужно располагать записями координат именно для такого разнообразия условий. Смысл символа «математическое ожидание» может изменяться, и соответственно выражения корреляционных функций оказываются различными. В частности, при осреднении результатов для фиксированной трассы следует считать

$$R_{\xi\xi}(0;\ 0) = R_{\eta\eta}(0;\ 0) = R_{\xi\eta}(0;\ 0) = 0, \qquad (2.12)$$

так как исходный пункт маршрута точно известен. Условия (2.12) не выполняются, если трассы различны, причем исходные пункты маршрута или точно не известны, или неудобно вводить эти данные в навигационный комплекс. В последнем случае «с точки зрения» навигационного комплекса существует разброс начальных значений координат, характеризующийся дисперсиями

$$D_\xi(0) = R_{\xi\xi}(0;\ 0), \qquad D_\eta(0) = R_{\eta\eta}(0;\ 0). \qquad (2.13)$$

Для фиксированной трассы и одного направления движения следует считать $m_\xi(t) \neq 0$ и $m_\eta(t) \neq 0$ (по крайней мере потому, что в каждой точке трассы существуют преимущественные направления ветра). В то же время, если величина V_0 выбрана определенным образом, для множества всевозможных трасс можно считать $m_\xi(t) = m_\eta(t) = 0$.

По-видимому, практически нельзя надеяться на то, что всегда будет иметь место соответствие между диапазонами изменения внешних условий при получении исходных данных и при использовании результатов статистической обработки этих данных. Весьма вероятным представляется такое положение: статистические свойства сигналов получаются осреднением по всем высотам и трассам, а при использовании аппаратуры, рассчитанной по этим данным, имеется возможность перестройки в зависимости от высот и трасс. Неиспользование этой возможности (что связано с отсутствием дифференцированных данных) ведет в конечном счете к снижению точности. Расчет критичности оптимальных систем позволяет оценить величину этого снижения точности.

Необходимо обратить внимание на одну особенность понятия «математическое ожидание». Если принимается $m_\xi(t) \neq 0$ или $m_\eta(t) \neq 0$, то этим утверждается, что функции $m_\xi(t)$ и $m_\eta(t)$, характеризующие систематические (средние по множеству полетов) отклонения движения от программного, известны. Если же в диапазоне изменения условий, для которого будет настраиваться система, можно ожидать, что систематические отклонения имеют место, но они неизвестны, то приходится считать $m_\xi(t) = m_\eta(t) = 0$. В этом случае как будто осуществляется переход к более широкому множеству реализаций, для которого систематические отклонения отсутствуют. Таким образом, следует считать математические ожидания сигналов или известными функциями времени, или равными нулю.

Несмотря на простоту методики получения исходных данных, надежные сведения о корреляционных функциях координат различных объектов в литературе полностью отсутствуют. Поэтому приходится идти по пути косвенного определения характеристик движения. Из всех возмущающих факторов, действующих на стабилизированный объект, удовлетворительно изучены только ветры (для самолета) и неучитываемые течения (для судна). Относительно характера остальных возмущений могут быть высказаны лишь более или менее правдоподобные гипотезы.

2.4. Статистические характеристики движения объекта при действии на него ветра (течения)

Вектор $\boldsymbol{U}$ горизонтальной составляющей скорости ветра на фиксированной высоте H представляет собой случайную функцию трех аргументов: $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}(t,\ x,\ y)$. Координаты x и y измеряются в системе, связанной с Землей. При этом рассматриваются не слишком большие расстояния, для которых допустимо использовать прямоугольную сетку координат. $U_x(t, x, y)$, $U_y(t, x, y)$ — проекции вектора $\boldsymbol{U}$. Если задаться целью построить статистические характеристики скорости ветра для множества полетов по заданной трассе в определенное время суток (при этом все три аргумента t, x, y оказываются сильно статистически зависимыми), то, строго говоря, следует учитывать явную зависимость корреляционных функций составляющих скорости от конкретных условий. Так, известно, что среднеквадратичные значения скорости ветра закономерно изменяются в течение суток, что в различных районах существуют различные преимущественные направления ветра и т. д. Мы будем, однако, предполагать, что осреднение производится для множества всех возможных трасс и направлений (но не обязательно для всех высот и времен года). В этом случае естественно принять пять исходных допущений.

1. Составляющие U_x и U_y взаимно некоррелированы.
2. Математические ожидания составляющих U_x и U_y равны нулю.
3. Взаимная статистическая связь случайных величин

$$U_x^{(1)}=U_x(t_1,\ x_1,\ y_1) \quad \text{и} \quad U_x^{(2)}=U_x(t_2,\ x_2,\ y_2) \tag{2.14}$$

определяется только двумя аргументами:

$$\tau=t_2-t_1, \qquad s=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \tag{2.15}$$

Иначе говоря, принимается, что составляющая вектора скорости представляет собой случайную функцию, стационарную во времени и пространстве. Следовательно, корреляционная функция для U_x имеет вид:

$$R_{U_xU_x}(t_1,\ t_2;\ x_1,\ x_2;\ y_1,\ y_2)=R_{U_xU_x}(\tau,\ s). \tag{2.16}$$

4. Изменения U_x, происходящие от изменения аргументов τ и s, взаимно статистически независимы. В этом случае

$$R_{U_xU_x}(\tau, s) = C^2\rho_\tau(\tau)\rho_s(s), \qquad [\rho_\tau(0) = \rho_s(0) = 1], \tag{2.17}$$

где C — среднеквадратичное значение составляющей скорости ветра (можно считать, что эта величина или зависит от высоты полета и времени года, или получена осреднением по этим факторам), $\rho_\tau(\tau)$ характеризует временну́ю изменчивость скорости ветра, а $\rho_s(s)$ — пространственную изменчивость.

5. При неограниченном возрастании интервала времени и расстояния величины $U_x^{(1)}$ и $U_x^{(2)}$ становятся статистически независимыми, т. е.

$$R_{U_xU_x}(\tau, s) \to 0 \quad \text{при} \quad \tau \to \infty \quad \text{и} \quad s \to \infty. \tag{2.18}$$

Для навигационных задач важны свойства ветровых воздействий в области низких частот. Поэтому обычно используемые при расчете автопилотов данные о турбулентности атмосферы [46] здесь не могут быть использованы. Сведения об изменчивости скорости ветра отдельно во времени и пространстве приведены в книге [20]. Математическая модель явления, описанная там, имеет следующий вид. Пусть $\boldsymbol{U}_A$ — вектор скорости ветра в произвольной точке A атмосферы. Вектор $\boldsymbol{U}_B$ скорости ветра в тот же момент времени в другой точке B, взятой на той же высоте, равен:

$$\boldsymbol{U}_B = \boldsymbol{U}_A + \Delta\boldsymbol{U}. \tag{2.19}$$

По результатам обработки экспериментальных данных сделан вывод, что $\Delta\boldsymbol{U}$ — случайный вектор, статистически независимый от $\boldsymbol{U}_A$, причем любое его направление равновероятно, а дисперсия модуля определяется выражением

$$M\{\Delta U^2\} = k_s^2 s, \tag{2.20}$$

где k_s — постоянный коэффициент, зависящий от высоты полета и времени года. Для штурманских расчетов обычно считают $k_s = 1{,}4$ (ΔU — в *км/час*, s — в *км*). Принимается, что такой вероятностной моделью можно пользоваться на расстояниях примерно до 1500 *км*.

Модель временно́й изменчивости скорости ветра выглядит аналогично, причем дисперсия модуля вектора скорости определяется аналогичной формулой

$$M\{\Delta U^2\} = k_t^2 t, \tag{2.21}$$

где k_t — постоянная. Графики зависимости k_s и k_t от высоты полета и времени года приведены в [20].

Легко убедиться в том, что приведенное выше описание изменчивости ветра является некорректным. Действительно, если принять такую модель, то для дисперсии модуля вектора скорости ветра для точки B (при учете равновероятности направления вектора $\Delta \boldsymbol{U}$) получаем:

$$M\{U_B^2\} = M\{U_A^2 + 2U_A \Delta U \cos\varphi + \Delta U^2 \cos^2\varphi\} = \\ = M\{U_A^2\} + \frac{1}{2} M\{\Delta U^2\} > M\{U_A^2\}. \tag{2.22}$$

Поскольку точки A и B в принципе равноправны (их можно поменять местами), то неравенство (2.22) противоречит здравому смыслу.

Противоречия можно избежать, если несколько усовершенствовать модель, приняв, например, что вместо (2.19) справедлива зависимость

$$\boldsymbol{U}_B = \frac{1}{P}(\boldsymbol{U}_A + \Delta \boldsymbol{U}), \tag{2.23}$$

где

$$P = \sqrt{1 + \frac{1}{4C^2} M\{\Delta U^2\}}. \tag{2.24}$$

Вектор $\Delta \boldsymbol{U}$ здесь уже не представляет собой вектор изменения скорости. Величина $2C^2 = M\{U_A^2\} = M\{U_B^2\}$ представляет собой постоянную во времени и пространстве дисперсию модуля вектора скорости ветра. Заметим, что при $M\{\Delta U^2\} \ll C^2$ как предложенная ранее, так и измененная модели изменчивости ветра совпадают с точностью до слагаемых второго порядка малости.

При соизмеримых C^2 и $M\{\Delta U^2\}$ обе модели — исходная и усовершенствованная — дают малодостоверные результаты. Из общих соображений ясно, что при $\tau \to \infty$

и $s \to \infty$ векторы $\boldsymbol{U}_A$ и $\boldsymbol{U}_B$ становятся некоррелированными. Легко проверить, что корреляционные функции, записанные в виде

$$R_{U_xU_x}(\tau, s) = R_{U_yU_y}(\tau, s) = C^2 e^{-\frac{1}{8C^2}\left(k_s^2|s|+k_t^2|\tau|\right)}, \qquad (2.25)$$

с одной стороны, при малых $M\{\Delta U^2\}$ дают численные значения, близкие к тем, которые получаются по формулам (2.19) и (2.23) (первые слагаемые разложений в ряд по степеням ΔU^2 совпадают), а с другой стороны, обеспечивают убывание при $M\{\Delta U^2\} \to \infty$. Таким образом, выражения вида (2.25) можно считать удачными аппроксимациями, соответствующими как основным допущениям, перечисленным в начале этого параграфа, так и экспериментальным данным.

Среднеквадратичное значение $C\sqrt{2}$ модуля вектора скорости ветра меняется в зависимости от высоты полета и времени года в довольно узких пределах: от 10 *м/сек* до 25 *м/сек*. В дальнейшем при расчете конкретных примеров (в главах 5—11) мы будем принимать $C\sqrt{2} \approx 14$ *м/сек* или $C = 10$ *м/сек*.

При расчете влияния ветровых воздействий на летящий самолет отклонения координат, вызванные этим фактором, считаются функциями только времени. Мы будем принимать, что эти функции времени отнесены к программному движению. Если программное движение — прямолинейный горизонтальный полет с постоянной скоростью V_0, то составляющие скорости ветра будут представлять собой стационарные функции времени. Тогда выражения корреляционных функций будут иметь вид:

$$R_{U_xU_x}(\tau) = R_{U_yU_y}(\tau) = C^2 e^{-\beta|\tau|}, \qquad (2.26)$$

где

$$\beta = \frac{1}{8C^2}\left(k_s^2 V_0 + k_t^2\right).$$

Спектральная плотность скорости ветра, соответствующая корреляционной функции (2.26), имеет вид:

$$S_{U_xU_x}(\omega) = \frac{2\beta C^2}{\omega^2 + \beta^2}. \qquad (2.27)$$

При расчете примеров в главах 5—11 принято $\beta = 10^{-3}$ 1/*сек*, что при $k_s = 2{,}2$ и $k_t = 1{,}5$ соответствует скорости $V_0 = 1200$ *м/сек*. Заметим, что при $V_0 > 50$ *м/сек* «локальной» изменчивостью ветра (в явной зависимости от времени) можно пренебрегать по сравнению с «переносной». Если программное движение — не прямолинейный полет (система координат программного движения вращается), то вид корреляционных функций составляющих скорости ветра может существенно измениться (в частности, появится взаимная корреляция составляющих). Заметим, что мощность составляющих скорости воздуха от турбулентности атмосферы [46] остается малой по величине во всем диапазоне частот, представляющем интерес в навигационных задачах (вплоть до $\omega = 0{,}3$ 1/*сек*). На рис. 2.3 показаны кривые спектральных плотностей скорости ветра (*1*) и скорости воздушного потока, вызванного турбулентностью (*2*).

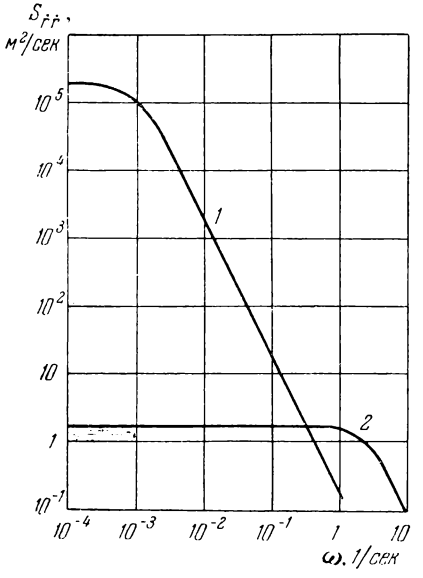

Рис. 2.3.

Для морских кораблей (надводных и подводных) важным возмущающим фактором являются неучитываемые течения (основные составляющие течений берутся из атласов морских течений и при счислении пути вводятся соответствующие поправки). Согласно данным, приведенным в работе [3], корреляционные функции составляющих скорости неучитываемых морских течений удовлетворительно аппроксимируются выражениями вида (2.25), причем входящие туда параметры имеют порядок: $C = 0{,}2 \div 0{,}5$ *м/сек*, $\beta = (0{,}5 \div 2)\,10^{-5}$ 1/*сек*. В противо-

положность самолетной навигации здесь основное значение имеет «локальная», а не «переносная» изменчивость.

Для ракеты, летящей в пустоте или в очень разреженной среде, по-видимому, основным возмущающим фактором является нестабильность тяги по величине и направлению. В качестве правдоподобного предположения можно принять, что переменная составляющая ускорения, появляющаяся из-за нестабильности тяги, представляется простым марковским процессом. В этом случае переменная составляющая ускорения стационарна и ее корреляционная функция имеет вид:

$$R_{\ddot{x}\ddot{x}}(\tau) = A^2 e^{-\alpha|\tau|}. \tag{2.28}$$

Такое выражение удовлетворяет гипотезам о стационарности нестабильности тяги и ограниченности ее дисперсии. Спектральная плотность этой составляющей ускорения будет иметь вид:

$$S_{\ddot{x}\ddot{x}}(\omega) = \frac{2\alpha A^2}{\omega^2 + \alpha^2}. \tag{2.29}$$

Для самолета, как и для судна, нет надежных данных о свойствах других возмущений, кроме ветра и неучитываемых течений. Наиболее простым и в то же время правдоподобным является предположение, что ряд факторов вызывает в установившемся режиме практически постоянные отклонения скорости, средней по времени для каждого полета, от скорости, средней по множеству полетов. Таким образом, примем, что скорость продольного движения объекта относительно системы, совершающей программное движение, может быть записана в виде

$$\dot{\xi}(t) = \dot{\xi}_U(t) + \dot{\xi}_0(t), \tag{2.30}$$

где $\dot{\xi}_U(t)$ — составляющая скорости, вызванная случайным ветром, а $\dot{\xi}_0(t)$ — составляющая скорости, вызванная факторами, только что введенными в рассмотрение. Будем предполагать, что случайная функция $\dot{\xi}(t)$ имеет нулевое математическое ожидание. Этим самым понятие «программа движения» приобретает новый смысл: программное движение теперь будет представлять собой среднее из множества движений при заданном диапазоне

изменения условий. В частности, программа может быть рассчитана при определенном положении сектора газа двигателя (при определенном режиме работы двигателя), если не производится осреднение по режимам работы двигателя). Если требуется выдерживание наперед заданного закона изменения скорости, то программа управления тягой рассчитывается и реализуется так, чтобы этот закон был средним из действительных законов, различающихся из-за действующих возмущений.

Если момент начала отсчета времени $t=0$ произволен (движение началось до этого момента и продолжается после него), то случайная начальная скорость $\dot{\xi}(0)$ коррелирована с составляющими $\dot{\xi}_U(t)$ и $\dot{\xi}_0(t)$, так как $\dot{\xi}(0)$ вызвано не только случайными начальными условиями, но и возмущениями, действовавшими до момента времени $t=0$. Выражения для $\dot{\xi}_U(t)$ и $\dot{\xi}_0(t)$ записываются в виде интегралов свертки:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\xi}_U(t) &= \dot{\xi}_U(0) + \int_0^t G_U(t, \tau)\, U_x(\tau)\, d\tau, \\ \dot{\xi}_0(t) &= \dot{\xi}_0(0) + a \int_0^t G_a(t, \tau)\, d\tau, \end{aligned}\right\} \qquad (2.31)$$

где $G_U(t, \tau)$ и $G_a(t, \tau)$ — импульсные переходные функции объекта (входными переменными считаются составляющая скорости ветра и постоянное возмущение, выходными — составляющие скорости объекта). В дальнейшем будем считать скорость движения установившейся. Тогда составляющая $\xi_0(t)$ будет просто постоянной.

Спектральная плотность составляющей $\dot{\xi}_U(t)$ определяется выражением

$$S_{\dot{\xi}_U \dot{\xi}_U}(\omega) = \omega^2 |L(j\omega)|^2 S_{U_x U_x}(\omega). \qquad (2.32)$$

При аппроксимации передаточной функции самолета простейшим выражением (2.1) спектральная плотность этой составляющей скорости самолета определяется выражением (2.27). Такая аппроксимация равносильна предположению, что инерционностью самолета при «втя-

гивании» его в медленно изменяющийся воздушный поток можно пренебречь. Когда используются более точные выражения (2.2) или (2.3), получаем вместо (2.27) соответственно следующие выражения для спектральной плотности составляющей $\dot{\xi}_U(t)$:

$$S_{\dot{\xi}_U\dot{\xi}_U}(\omega)=\frac{2\beta C^2}{(\omega^2+\beta^2)\left(T_1^2\omega^2+1\right)}, \tag{2.33}$$

$$S_{\dot{\xi}_U\dot{\xi}_U}(\omega)=\frac{2\beta C^2}{(\omega^2+\beta^2)\left[(T_2^2\omega^2-1)^2+T_1^2\omega^2\right]}. \tag{2.34}$$

Чтобы подчеркнуть основную качественную особенность движений, для которых возмущения вызывают ограниченные приращения скорости, для них в дальнейшем вводится термин «движение со стационарной скоростью». Представление реального движения как движения со стационарной скоростью является идеализацией, применимой, по-видимому, во многих случаях. Основные физические упрощения, используемые при переходе к этой идеализации, следующие:

1. Пренебрежение переходными процессами установления скорости. Вследствие этого дисперсия скорости в любой момент времени (в том числе и начальный) постоянна и не равна нулю.

2. Пренебрежение медленными изменениями характеристик движения, вызываемыми непостоянством параметров объекта и другими медленно меняющимися факторами.

Далее удобно перейти к обозначениям, обычным для теории преобразования сигналов. Вместо координаты $\xi(t)$ вводится переменная $s(t)$ — полезный сигнал, вместо $\dot{\xi}_U(t)$ — компонента $\dot{r}(t)$ производной $\dot{s}(t)$ полезного сигнала $s(t)$. Для характеристики отличительных особенностей качественно различных составляющих полезного сигнала используется терминология Миддлтона [19]: составляющие, которые могут быть представлены в виде суммы конечного числа известных функций со случайными множителями, называются *детерминированными* (другие авторы называют их «регулярными» [24], «заданными аналитическими выражениями» [31]),

а составляющие, для которых это невозможно, — *недетерминированными*. Существенно, что детерминированный случайный процесс может быть точно задан в любом интервале времени конечным числом дискретных значений, а для недетерминированного процесса значение в любой момент времени не может быть точно найдено через значения в другие моменты времени, а зависит от них только в вероятностном смысле.

В соответствии с предположением о стационарности скорости полезный сигнал записывается следующим образом:

$$s(t) = c_0 + c_1 t + r(t), \tag{2.35}$$

где c_0 — случайное отклонение начального значения координаты. Если момент $t=0$ произволен, то случайная величина c_0 и функция $r(t)$ статистически связаны, так как отклонение c_0 частично обусловлено действием того же возмущения, что и $r(t)$ (при $t<0$). Поэтому в общем случае статистические свойства сигнала $s(t)$ должны быть заданы корреляционными моментами

$$C_0^2 = M\{c_0^2\}, \quad C_1^2 = M\{c_1^2\}, \quad C_{01} = M\{c_0 c_1\} \tag{2.36}$$

и корреляционными функциями

$$\left.\begin{aligned} R_{rr}(\tau_1, \tau_2) &= M\{r(\tau_1) r(\tau_2)\}, \\ R_{c_0 r}(\tau) &= M\{c_0 r(\tau)\}, \\ R_{c_1 r}(\tau) &= M\{c_1 r(\tau)\}. \end{aligned}\right\} \tag{2.37}$$

Величина C_0^2 характеризует неточность сведений о начальном положении самолета, величина C_1^2 — разброс средней скорости относительно номинального значения. Величины корреляционных моментов существенным образом зависят от множества полетов, для которого производится осреднение. Для навигационной системы вопрос о выборе множества сводится к определению предварительных сведений, подлежащих вводу в систему перед полетом. Если в момент $t=0$ точно известно положение самолета и соответствующее значение координаты может быть введено, то можно считать $C_0=0$. Если

в этот момент времени положение практически неизвестно или в системе не предусмотрено введение подобных данных, то C_0 велико (часто при решении задач можно принимать $C_0 \to \infty$).

Величина C_1 зависит от того, использует ли навигационная система данные о зависимости скорости от положения сектора газа двигателя, высоты полета, полетного веса и т. д. Априорные сведения позволяют уточнить величину средней скорости, т. е. уменьшить значение C_1. Вообще использование априорных сведений ведет к усложнению процесса настройки и выставки системы, но дает возможность повысить точность. При решении конкретных задач в главах 5—11 вопросу о влиянии величин C_0 и C_1 на точность уделено много внимания.

Далее будем для простоты принимать, что величины c_0, c_1 и функция $r(t)$ взаимно статистически независимы. Это условие приближенно выполняется, если интервал времени между моментом старта ($t=-T$) и условно выбранным моментом начала отсчета времени ($t=0$) достаточно мал, так что неопределенность в значении начальной координаты $s(0)=c_0$ обусловливается в основном неточным знанием места старта и мало зависит от возмущений, действующих в интервале $(-T, 0)$. При этом обычно ошибки в определении и установке координаты точки старта статистически не зависят от возмущений, действующих затем в полете. Предполагается также, что при точном знании места старта ошибками в определении местоположения в момент времени $t=0$ можно пренебречь. Заметим, однако, что интервал $(-T, 0)$ не может быть очень малым, так чтобы можно было считать скорость установившейся, начиная с момента $t=0$.

При принятых предположениях корреляционная функция полезного сигнала записывается в виде

$$R_{ss}(\tau_1, \tau_2)=C_0^2+C_1^2\tau_1\tau_2+R_{rr}(\tau_1, \tau_2), \qquad (2.38)$$

где $R_{rr}(\tau_1, \tau_2)$ — корреляционная функция недетерминированной составляющей $r(t)$ сигнала $s(t)$. Используя выражение (2.27) для спектральной плотности недетерминированной составляющей скорости и аппроксимацию

(2.1) передаточной функции объекта, получаем:

$$R_{rr}(\tau_1, \tau_2) = \frac{C^2}{\beta}\left[2\min(\tau_1, \tau_2) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\beta}(-1 + e^{-\beta\tau_1} + e^{-\beta\tau_2} - e^{-\beta|\tau_1-\tau_2|})\right]. \quad (2.39)$$

При аппроксимациях (2.2) и (2.3) выражения $R_{rr}(\tau_1, \tau_2)$ получаются весьма громоздкими и их использование при решении прикладных задач затруднительно.

Для класса движений другого типа, который представляет, например, движение ракеты в пустоте, можно предположить, что ускорение (вторая производная полезного сигнала) может быть записано в виде

$$\ddot{s}(t) = c_2 + \ddot{r}(t), \quad (2.40)$$

где c_2 — случайное отклонение постоянной составляющей ускорения от номинала (математического ожидания), $\ddot{r}(t)$ — недетерминированная стационарная составляющая, вызванная нестабильностью тяги. Выражение (2.40) определяет второй класс движений — движения со стационарным ускорением. Как и в случае движений со стационарной скоростью, — это результат идеализации. Заметим, что для движения со стационарной скоростью ускорение стационарно, а для движения со стационарным ускорением скорость нестационарна.

Для движения со стационарным ускорением полезный сигнал имеет вид:

$$s(t) = c_0 + c_1 t + \frac{1}{2}c_2 t^2 + r(t), \quad (2.41)$$

где c_0 имеет тот же смысл, что и для движения со стационарной скорстью, а c_1 — случайное отклонение начальной скорости. Случайные величины c_0, c_1, c_2 и функция $r(t)$ считаются взаимно статистически независимыми. Как и в случае движения со стационарной скоростью, это условие приближенно выполняется, если интервал $(-T, 0)$ не очень велик.

При введенных упрощениях корреляционная функция полезного сигнала будет иметь вид:

$$R_{ss}(\tau_1, \tau_2) = C_0^2 + C_1^2\tau_1\tau_2 + \frac{1}{4}C_2^2\tau_1^2\tau_2^2 + R_{rr}(\tau_1, \tau_2), \quad (2.42)$$

где

$$R_{rr}(\tau_1, \tau_2) = \frac{A^2}{\alpha}\left\{\frac{2}{3}\min(\tau_1^3, \tau_2^3) + \right.$$
$$+ \frac{1}{\alpha^3}[1 - e^{-\alpha\tau_1}(\alpha\tau_1 + 1) - e^{-\alpha\tau_2}(\alpha\tau_2 + 1) +$$
$$\left. + e^{-\alpha|\tau_1-\tau_2|}(1 + \alpha|\tau_1 - \tau_2| - \alpha^2\tau_1\tau_2)]\right\}. \quad (2.43)$$

Величины C_0^2, C_1^2, C_2^2 — дисперсии случайных величин c_0, c_1, c_2.

Математическая теория нестационарных процессов, производные которых стационарны (процессов со стационарными приращениями), достаточно хорошо разработана [26, 47].

Отметим, что, хотя конкретный вид корреляционных функций определен при учете только одного фактора (для продольного движения самолета — ветра, для ракеты — нестабильности тяги), все же основной принцип идеализации — допущение о стационарности скорости или ускорения — может быть принят и в случае совместного действия многих возмущающих факторов. При статистической обработке экспериментальных данных с целью построения оценок корреляционных функций задание вида нестационарности, т. е. вида связи интересующего нас нестационарного процесса с некоторым «порождающим» стационарным процессом, может существенно облегчить получение результатов. Так, для процессов со стационарными приращениями корреляционная функция может быть получена по одной реализации (если принять *гитопезу эргодичности* для «порождающего» случайного процесса).

Для бокового движения самолета в общем случае могут быть существенны составляющие как со стационарной скоростью, так и со стационарным ускорением. Поэтому наряду с основными вариантами следует рассматривать более общий смешанный случай. В соответствии с выражением (2.27) в § 7.3 будет принято, что в смешанном случае спектральная плотность недетерминированной части ускорения имеет вид:

$$S_{\ddot{r}\ddot{r}}(\omega) = \frac{2\beta C^2\omega^2}{\omega^2 + \beta^2} + \frac{2\alpha A^2}{\omega^2 + \alpha^2}, \quad (2.44)$$

где первое слагаемое соответствует компоненте со стационарной скоростью, второе — компоненте со стационарным ускорением. Для смешанного случая в пределе получаем:

а) если система угловой стабилизации весьма точна и основным возмущающим фактором следует считать ветер, то можно принять, что боковое движение является движением со стационарной скоростью;

б) если в боковом движении основную роль играют ошибки системы угловой стабилизации, то движение близко к движению со стационарным ускорением.

Вопрос о том, в каких случаях при рассмотрении бокового движения допустим упрощенный подход, может быть решен на основании рассмотрения кривых «условных» спектральных плотностей (это понятие вводится в § 3.4). Так, в § 7.3 будет показано, что при преобразовании сигнала позиционного измерителя составляющей со стационарным ускорением во многих случаях можно пренебрегать. Поэтому в главах 5—11, посвященных решению конкретных задач, главное внимание уделяется основным вариантам — движению со стационарными скоростью и ускорением.

2.5. Сведéние задачи преобразования сигналов приборов к линейной задаче при линеаризации уравнений относительно программы

Предположим, что программа движения задана заранее. Сведения, получаемые от навигационных приборов и комплексов, должны быть приведены к системе координат $O\xi_0\eta_0$, совершающей программное движение. Для некоторых приборов или устройств такое приведение может быть осуществлено автономно, для других необходимо совместное преобразование сигналов двух приборов. В дальнейшем будем считать, что все первичные источники информации разбиты на простые группы, так что в пределах каждой из групп могут быть определены или координаты, или составляющие скорости, или составляющие ускорения (в системе координат программного движения). При этом некоторые устройства могут входить в несколько групп. Каждую эле-

ментарную группу первичных источников информации будем называть просто *измерителем*.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Фазо-гиперболическая система дальней радионавигации. Непосредственно измеряемыми параметрами

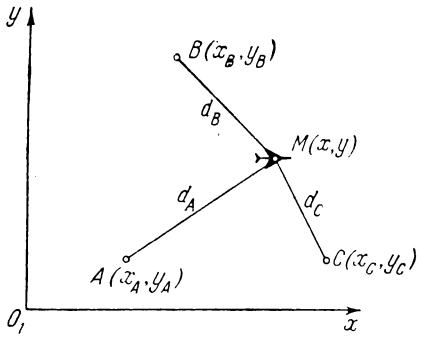

Рис. 2.4.

являются две разности Δ_{AB} и Δ_{BC} расстояний от объекта M до трех наземных станций A, B и C (рис. 2.4):

$$\Delta_{AB} = d_A - d_B, \qquad \Delta_{BC} = d_B - d_C. \tag{2.45}$$

Искомые координаты объекта x, y (в прямоугольной системе) определяются из системы двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2} - \sqrt{(x-x_B)^2+(y-y_B)^2} = \Delta_{AB}, \\ &\sqrt{(x-x_B)^2+(y-y_B)^2} - \sqrt{(x-x_C)^2+(y-y_C)^2} = \Delta_{BC}, \end{aligned}\right\} \tag{2.46}$$

в которых x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C — заданные координаты наземных станций. Таким образом, в этом случае измеритель включает только один навигационный прибор.

2. Датчик скорости и курсовой прибор. Непосредственно измеряемыми параметрами являются величина скорости V, угол сноса χ и курс ψ. Составляющие скорости в неподвижной прямоугольной системе координат Oxy определяются следующим образом (рис. 2.5):

$$V_x = \dot{x} = V\sin(\psi+\chi), \qquad V_y = \dot{y} = V\cos(\psi+\chi). \tag{2.47}$$

В этом случае измеритель включает два первичных навигационных прибора.

3. Инерциальная система геометрического типа с горизонтальной площадкой. Принцип ее действия сводится к следующему (рис. 2.6). На объекте в виде блока *1* фиксируется инерциальная система координат $x_0y_0z_0$.

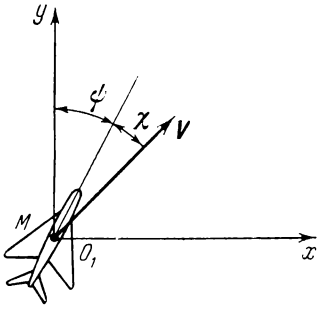

Рис. 2.5.

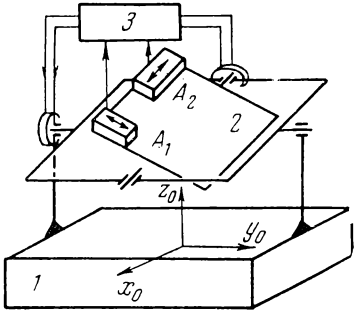

Рис. 2.6.

Акселерометры A_1 и A_2 располагаются на площадке *2*, которая непрерывно приводится в плоскость горизонта за счет преобразования блоком *3* сигналов этих же акселерометров в углы поворота, отрабатываемые следящими системами относительно блока *1*. Непосредственно измеряемыми сигналами можно считать или углы поворота площадки *2* относительно блока *1*, или выходные сигналы акселерометров. Положение осей блока *1* фиксируется в инерциальном пространстве или с помощью визиров с фотоследящими системами, осуществляющими автоматическую стабилизацию оптических осей визиров относительно направлений на выбранные светила, или с помощью свободных гироскопов. Инерциальную систему геометрического типа удобно разделить на две части, первая из которых фиксирует инерциальную систему координат, а вторая — горизонтально-географическую. Вторая часть системы представляет собой по существу длиннопериодическую гравитационную вертикаль. Поэтому с таких общих позиций астроинерциальная система тождественна обычной астронавигационной системе, в которой измеряемыми величинами

являются высоты светил над горизонтом. Однако обязательным является условие, чтобы вертикаль была гравитационной.

4. Астронавигационная система с негравитационной вертикалью. Вертикаль может быть радиолокационной, инфракрасной или основанной на ином физическом принципе. В этом случае система внешне очень похожа на астроинерциальную (координаты получаются в виде углов между осями материально реализуемых систем координат), однако по характеру выдаваемых данных она ближе, например, к фазо-гиперболической системе дальней радионавигации. Дело в том, что в рассматриваемом случае, как и в системах радионавигации, свойства ошибок в определении координат обусловлены чисто схемными особенностями, в то время как в астроинерциальной системе существенными являются начальные условия, устанавливаемые при выставке (колебания невозмущаемой вертикали не затухают).

В различные измерители могут входить одни и те же первичные навигационные приборы. Так, сигнал курсового прибора может использоваться при преобразовании сигналов датчиков скорости и радионавигационных систем некоторых типов; в навигационном комплексе может быть реализовано несколько абсолютных систем координат (с помощью свободных гироскопов, визиров с фотоследящими системами) и несколько горизонтальных систем координат (гравитационная, инфракрасная, радиолокационная вертикали). В подобных случаях в качестве измерителей можно рассматривать все возможные сочетания первичных приборов, по сигналам которых могут быть однозначно определены координаты.

Каждый измеритель вырабатывает данные одновременно о двух координатах. Однако поскольку задачи индикации и управления по двум координатам считаются несвязанными, то далее допустимо рассматривать процесс преобразования данных только по одной координате. К этой же постановке мы приходим, рассматривая случай одномерного движения, когда траектория движения жестко задана и положение объекта определяется единственной координатой вдоль траектории. Модель одномерного движения удобна для теоретического

анализа и поэтому будет обычно использоваться в дальнейшем.

Задачи преобразования координат в навигационных системах как задачи нелинейных преобразований сигналов имеют следующие отличительные особенности:

1. Все нелинейности гладкие и в разумных пределах взаимно однозначные (по крайней мере возможная многозначность всегда легко устраняется).

2. Ошибки во входных данных малы.

3. Отклонения от программных значений координат малы по сравнению с самими программными значениями.

Покажем на простейшем примере, что при выполнении перечисленных условий ошибки при нелинейном преобразовании рассчитываются так же, как и при линейном. Рассмотрим одномерное движение. Сведения о нем поступают от непрерывного измерителя, выходной сигнал $u(t)$ которого представляет собой результат безынерционного нелинейного преобразования координаты $x(t)$, подлежащей определению. Если измеритель идеально точен, то вид этого нелинейного преобразования

$$u(t) = F_0[x(t)] \tag{2.48}$$

точно известен. Для определения искомой координаты в этом случае вычислительное устройство должно осуществить обратное нелинейное преобразование

$$z(t) = F_0^{-1}[u(t)]. \tag{2.49}$$

При идеально точном преобразовании получаем $z(t) \equiv \equiv x(t)$. Схема преобразования представлена на рис. 2.7, *а*, где *И* — измеритель, *ВУ* — вычислительное устройство.

Если измеритель неидеален, то осуществляемое им преобразование

$$u(t) = F[x(t)] \tag{2.50}$$

отличается от (2.48). Отличия закона (2.50) от (2.48) случайны, заранее неизвестны и характеризуют ошибки измерителя. Поскольку ошибки заранее неизвестны, то принципиально невозможно осуществить такое преобра-

зование, которое обеспечивало бы точное выполнение тождества $z(t) \equiv x(t)$. Поэтому вид преобразования

$$z(t) = G[u(t)] \tag{2.51}$$

может быть определен из условия минимума математического ожидания какой-либо функции ошибки, например дисперсии ошибки:

$$M\{[z(t) - x(t)]^2\} = \min. \tag{2.52}$$

Решение этой общей задачи оптимального нелинейного преобразования сигналов, вообще говоря, может быть получено при использовании современных методов

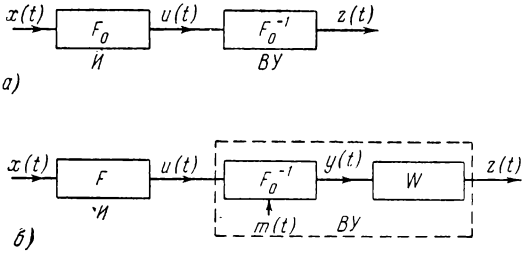

Рис. 2.7.

прикладной теории случайных функций [26]. Однако перспективы в этом направлении весьма ограничены по трем причинам.

1. Очень велики вычислительные сложности при аналитическом решении. Не случайно невелико число решенных нетривиальных примеров.

2. Вид решения получается настолько сложным, что соответствующие алгоритмы непосредственно не могут быть реализованы.

3. Нужно иметь очень полное описание характеристик сигналов (знания только корреляционных функций или спектральных плотностей недостаточно).

В то же время простыми приемами задача может быть сведена к линейной. Выделим нелинейную часть преобразования, задав структуру вычислительного устройства в виде последовательного соединения двух звеньев (рис. 2.7, *б*), первое из которых осуществляет

нелинейное преобразование вида (2.49), а второе — линейное преобразование W, т. е. будем искать оптимальное преобразование на ограниченном классе операторов.

Сигнал $x(t)$ состоит из двух слагаемых — программы $m(t)$ и полезного сигнала $s(t)$:

$$x(t) = m(t) + s(t). \tag{2.53}$$

Разложим результат прохождения сигнала $x(t)$ через нелинейные преобразования F и F_0^{-1} (см. рис. 2.7, *б*) в ряд по степеням $s(t)$ относительно программного движения $v(t) = m(t) + y(t)$:

$$y(t) = n(t) + a_1(t)\, s(t) + a_2(t)\, s^2(t) + \ldots \tag{2.54}$$

Так как, согласно сделанным предположениям, нелинейность гладкая, а ошибки и отклонения от программы малы, то в выражении (2.54) допустимо сохранить только два первых слагаемых. Кроме того, поскольку при переходе к идеальному измерителю получаем $a_1(t) = 1$, выражение (2.54) удобно записать в виде

$$y(t) = [1 + \varepsilon(t)]\, s(t) + n(t), \tag{2.55}$$

где $\varepsilon(t)$ представляет собой мультипликативную составляющую ошибки, а $n(t)$ — аддитивную составляющую. Сигнал $y(t)$ подлежит теперь дальнейшему преобразованию. Можно ожидать, что при этом хорошие результаты даст именно линейное преобразование, так как в выражение (2.55) полезный сигнал входит линейно. Поэтому принятая структура закона преобразования (рис. 2.7, *б*) представляется оправданной. В результате в рассматриваемом простейшем случае задача оптимального преобразования сигнала измерителя сводится к задаче линейной фильтрации сигнала $y(t)$, в который линейно входят полезный сигнал $s(t)$, аддитивная помеха $n(t)$ и мультипликативная помеха $\varepsilon(t)$.

Заметим, что, строго говоря, вид оптимального преобразования даже при условии, что полезный сигнал входит в преобразуемый сигнал линейно, зависит от законов распределения сигналов и критерия оптимальности [26]. Лишь в частном случае, когда все сигналы имеют нормальное распределение, а в качестве критерия

используется принцип минимума дисперсии ошибки, строго доказано, что оптимальное преобразование является линейным. Тем не менее многочисленные расчеты показывают, что линейное преобразование остается близким к оптимальному даже при значительных отклонениях от нормального закона распределения.

Далее предполагается, что принцип сведéния задачи к линейной, проиллюстрированный на простом примере, применяется ко всей навигационной системе в целом. Схема преобразования сигналов представлена на рис. 2.8. Входными сигналами считаем ортодромические координаты $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$. Измерители $И_1, И_2, \ldots, И_N$ вырабатывают сигналы, связанные нелинейными зависимостями с самими координатами $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, их первыми и вторыми производными. Если бы измерители были идеально точными, то преобразования характеризовались бы нелинейными операторами F_{0i}; в действительности же операторы F_i отличаются от них (источники информации неидеальны). Будем считать, что уже произведено объединение первичных источников информации в группы, в пределах каждой из которых могут быть определены или две координаты, или две составляющие скорости, или две составляющие ускорения.

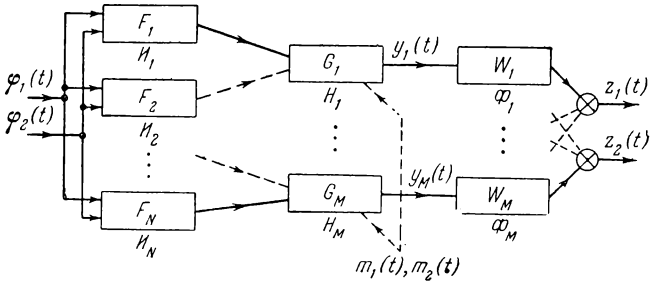

Рис. 2.8.

Блоки $H_1, \ldots, H_M$ (рис. 2.8) осуществляют нелинейные преобразования сигналов $u_i(t)$ в приближенные значения координат, составляющих скорости и ускорения. Вид этих преобразований определяется из условий инвариантности, составленных для случая $F_i \equiv F_{0i}$ (реали-

зуются обратные нелинейные преобразования, но на этот раз не одной, а двух переменных).

После выделения программных составляющих $m_1(t)$ и $m_2(t)$ [или $\dot{m}_1(t)$ и $\dot{m}_2(t)$, или $\ddot{m}_1(t)$ и $\ddot{m}_2(t)$] получаем в линейном приближении следующие выражения для определения сигналов, подлежащих дальнейшему преобразованию:

$$y_i(t) = [1 + \varepsilon_i(t)]\,\psi_i(t) + n_i(t), \tag{2.56}$$

где $\psi_i(t)$ есть $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\dot{\varphi}_1(t)$, $\dot{\varphi}_2(t)$, $\ddot{\varphi}_1(t)$, $\ddot{\varphi}_2(t)$ или их линейные комбинации. Полезные сигналы входят в выражения (2.56) линейно, поэтому представляется целесообразным подать их на линейные фильтры $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_M$.

Таким образом, в основу построения блок-схемы положен принцип отделения нелинейных операций от линейных. При этом первые осуществляются по алгоритмам, обычным для таких задач и построенным без учета неидеальности измерителей. Именно так и делается в существующих навигационных системах: тригонометрические или кинематические соотношения, связывающие выходные сигналы с ортодромическими координатами, рассматриваются как уравнения относительно последних. После разрешения этих уравнений в вычислительном устройстве получается, что ортодромические координаты (или их производные) определены несколькими независимыми путями. И вот теперь утверждается, что далее необходимо осуществить только линейные преобразования. Таким образом, основная часть вычислительного устройства остается неизменной, но только дополняется системой линейных фильтров. Если иметь в виду реализацию всего объема вычислений на ЦВМ, то можно сделать вывод, что добавление линейных фильтров не потребует существенного увеличения ее быстродействия и объема памяти.

2.6. Линеаризация уравнений навигации относительно текущих значений координат

Начиная с § 2.1 и до этого момента предполагалось, что линеаризация уравнений навигации производится относительно некоторого заранее заданного программного движения. Этот способ линеаризации с практической

точки зрения может оказаться неприемлемым. Во-первых, действительные отклонения от программной траектории могут быть достаточно большими, так что линеаризованные соотношения уже не будут обеспечивать требуемую точность. Во-вторых, во многих случаях программа вообще не может быть задана заранее. Выход заключается в осуществлении линеаризации относительно текущих значений координат. Рассмотрим пути осуществления этой линеаризации.

Основными являются два варианта.

1. Линеаризация относительно дискретных значений координат. Блок-схема системы для этого варианта представлена на рис. 2.9. Блок *Л* осуществляет вычисление

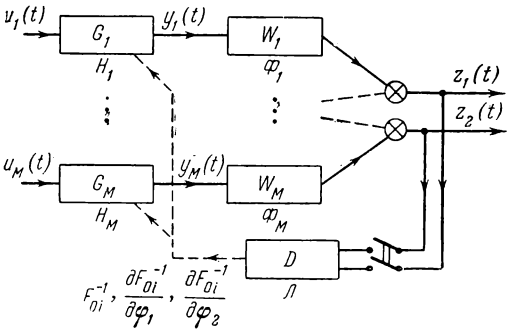

Рис. 2.9.

$F_{0i}^{-1}(\varphi_1, \varphi_2)$ и $\frac{\partial F_{0i}^{-1}}{\partial \varphi_1}$ и $\frac{\partial F_{0i}^{-1}}{\partial \varphi_2}$ при некоторых дискретных значениях координат (операторы F_{0i}^{-1}, как и в § 2.5, определяют преобразования измеряемых параметров в координаты, составляющие скорости или ускорения, причем вид этих операторов определен из условий инвариантности относительно движения объекта). На рис. 2.10 точки O_1, O_2, ... изображают центры, отно-

Рис. 2.10.

сительно которых производится линеаризация в последовательные интервалы времени, а A_0A_1, A_1A_2, ... — соответствующие отрезки траектории. Переход от центра к центру осуществляется тогда, когда расстояние между старым центром и точкой, в которой находится объект, становится больше допустимого. За новый центр может быть принята точка, в которой объект находится в момент перехода, или любая точка вблизи нее. Таким образом, при рассматриваемом методе время от времени должен производиться расчет координат центров (по полным нелинейным уравнениям), а в промежутках — определение приращений координат (по линеаризованным зависимостям). Расстояния между центрами линеаризации выбираются достаточно малыми, так чтобы соответствующие ошибки были заведомо пренебрежимо малы. По сравнению с методом линеаризации относительно заданной программы характерным здесь является наличие дискретной обратной связи с выхода всей системы на блок *Л* (координаты центров линеаризации определяются как приближенные значения координат в дискретные моменты времени).

2. Линеаризация относительно непрерывно сглаживаемых значений координат. Блок-схема системы для

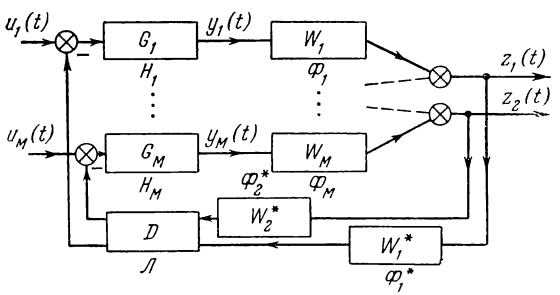

Рис. 2.11.

этого варианта представлена на рис. 2.11. Здесь блок *Л* осуществляет обратное нелинейное преобразование искомых координат $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ в измеряемые сигналы $u_i(t)$ (это преобразование определяется операторами F_{0i}). Таким образом, в этом случае система представляет собой двумерную следящую систему. При большом

коэффициенте усиления блоков Φ_i и при большом быстродействии цепи обратной связи система осуществляла бы практически безынерционное нелинейное преобразование. Однако здесь на входе блока *Л* включены фильтры Φ_1^* и Φ_2^* с весьма большими постоянными времени. Поэтому обратные связи осуществляют «коррекцию» в диапазоне весьма низких частот. Можно сказать, что в этом варианте блоки H_i и Φ_i осуществляют основную часть преобразования, а блок *Л* дает медленное перемещение «рабочих точек» по нелинейным характеристикам. Поэтому линеаризация осуществляется относительно сильно сглаженных текущих значений координат. Постоянные времени фильтров могут быть достаточно большими, однако такими, чтобы поправки к координатам, вырабатываемые блоками H_i и Φ_i, были не слишком велики (для них линеаризованные уравнения должны сохранять требуемую точность).

При линеаризации относительно заранее не заданных траекторий свойства сигналов, преобразуемых фильтрами, зависят от вида и параметров устройств, осуществляющих линеаризацию, а не только от характеристик действующих возмущений. Это приводит к дополнительным трудностям расчета оптимальных фильтров. В этом

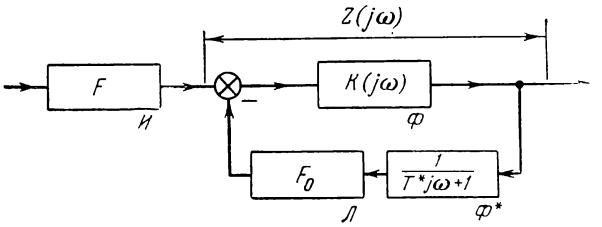

Рис. 2.12.

отношении неприятнее первый вариант, в котором характеристики сигналов периодически скачкообразно изменяются. Во втором варианте при определенных условиях трудности легко преодолимы.

Рассмотрим для простоты одномерную систему (рис. 2.12), построенную по второму варианту. Линеаризуем уравнение контура относительно сигнала $\bar{x}(t)$ —

сглаженной координаты. По отношению к поправке $\Delta x(t)$ поведение контура описывается уравнением с переменными коэффициентами. Однако практически на не слишком больших интервалах времени допустимо считать производную $\partial F_0/\partial x$ постоянной. Тогда передаточные функции разомкнутого и замкнутого контуров [соответственно $K(j\omega)$ и $Z(j\omega)$] связаны соотношением

$$Z(j\omega)=\frac{K(j\omega)}{1+K(j\omega)\dfrac{\partial F_0}{\partial x}\dfrac{1}{T^*j\omega+1}}. \qquad (2.57)$$

Если из решения задачи линейного преобразования при заданной программе определена передаточная функция $K(j\omega)$, то из соотношения (2.57) может быть определена передаточная функция $Z(j\omega)$. Если в интересующем нас диапазоне частот выполняется условие

$$|T^*j\omega+1|>|K(j\omega)|\frac{\partial F_0}{\partial x}, \qquad (2.58)$$

то из выражения (2.57) следует $Z(j\omega)\approx K(j\omega)$. Таким образом, при условии (2.58) обратная связь через блок линеаризации несущественна, и оптимальный линейный фильтр остается тем же, что и при линеаризации относительно программы.

2.7. О нестационарности помех

Итак, будем считать, что задача преобразования сигналов к виду (2.56) уже решена. Помехи $n_i(t)$ и $\varepsilon_i(t)$ представляют собой случайные функции времени, в общем случае нестационарные. Нестационарность может быть обусловлена следующими обстоятельствами:

1. Механизм возникновения ошибок может давать явно нестационарный эффект, проявляющийся в определенной тенденции изменения ошибок. В частности, такое положение имеет место у всех приборов, не обладающих «направляющей силой»: для них характерно накопление результатов действия возмущений. Примером такого прибора является некорректируемый курсовой гироскоп, постепенно уходящий от заданного направления.

2. Если даже первое обстоятельство не имеет места, к нестационарности приводит линеаризация уравнений

навигации, так как обычно эти исходные уравнения существенно нелинейны.

3. Уровень и характеристики помех могут меняться в зависимости от текущих координат, режима движения, высоты полета и т. д. Так, помехи радиосредств дальней навигации зависят от расстояний до наземных станций; помехи допплеровского измерителя скорости — от вида подстилающей поверхности, от высоты и т. д.

Проявление нестационарности, связанной с факторами второй и третьей групп, зависит от того, для какого множества ведется осреднение, и соответственно от того, какие дополнительные данные вводятся в навигационную систему. Так, если осреднение производится для полетов по всем возможным трассам и соответственно в навигационную систему не вводятся сведения о характере подстилающей поверхности, то следует считать, что изменение характера поверхности в течение полета не дает дополнительной нестационарности. Если же данные осредняются для полетов по определенной трассе и эти данные используются для той же трассы, то соответствующей помехе следует приписать нестационарность от этого фактора. Сказанное относится также и к полезному сигналу. Для определенной трассы средняя интенсивность ветра может закономерно изменяться; это приводит к нестационарности полезного сигнала. При осреднении по всем возможным трассам скорость ветра следует считать стационарной, что и было сделано в § 2.4.

Нестационарность, связанная с факторами первой группы, характеризуется определенной устойчивой тенденцией изменения ошибок. Так, дисперсии ошибок курсового гироскопа и недемпфированной инерциальной системы всегда растут. Наоборот, факторы второй и третьей групп могут вызывать в различных случаях как уменьшение, так и увеличение уровня ошибок. Такую нестационарность сигналов, когда они остаются близкими к стационарным и могут быть достаточно хорошо описаны характеристиками того же вида, что и стационарные, но с параметрами, медленно меняющимися во времени, в дальнейшем будем называть *параметрической*. Нестационарность, проявляющуюся в определенной тенденции изменения характеристик, из-за чего

сигналы принципиально отличаются от стационарных, будем называть *существенной*. Параметрическая нестационарность сильно зависит от вида осреднения и может исчезать при осреднении в достаточно широком диапазоне изменения условий. Существенная нестационарность остается при любом осреднении. При расчете оптимальных систем преобразования сигналов существенную нестационарность нужно учитывать всегда, параметрическую же нестационарность в зависимости от обстоятельств можно учитывать или не учитывать. Пренебрежение параметрической нестационарностью ведет к потере точности, но дает существенное упрощение алгоритмов преобразования и уменьшение объема необходимых априорных сведений. Основные соображения по этому поводу приводятся в § 3.9. При решении прикладных задач в гл. 5—11 параметрическая нестационарность не учитывается. Средством учета параметрической нестационарности в вычислительном устройстве является самонастройка (см. гл. 12).

Если параметрическую нестационарность не учитывать, то следует считать стационарными:

а) ошибки в определении координат радиосредствами дальней, а возможно, и ближней навигации;

б) ошибки в определении скорости измерителем воздушной скорости и допплеровским измерителем скорости;

в) ошибки в определении ускорения акселерометром, ось чувствительности которого идеально точно стабилизирована;

г) ошибки в определении угловых скоростей гироскопическими приборами.

Нестационарными следует считать:

а) угловую ошибку свободного гироскопа (стационарной является угловая скорость ухода);

б) ошибки недемпфированной инерциальной системы по координате и скорости.

2.8. Статистические характеристики сигналов основных измерителей

Теперь встает вопрос о задании типичных характеристик помех измерителей различных групп. Следует говорить отдельно об аддитивной и мультипликативной

составляющих ошибок. Четких представлений о свойствах мультипликативных составляющих помех нет. Чаще всего без достаточных оснований принимают, что статический коэффициент измерителя постоянен, но отличается от расчетного [$\varepsilon(t)=\text{const}$]. Вопрос о возможных временных свойствах $\varepsilon(t)$ совершенно не разработан. Поэтому в дальнейшем в соответствии с традицией принимается, что мультипликативная помеха отсутствует.

Будем считать, что стационарную аддитивную ошибку измерителя можно представить в виде

$$n(t)=m_n+n'(t)+n''(t), \tag{2.59}$$

где m_n — постоянное математическое ожидание ошибки, $n'(t)$ — широкополосная (флюктуационная) составляющая (ее иногда называют просто случайной), $n''(t)$ — медленно меняющаяся составляющая типа блуждания нуля шкалы или дрейфа (часто эту составляющую называют систематической). Разделение ошибки на эти составляющие чисто условно. Можно считать, что $n'(t)$ составляет высокочастотную часть ошибки, $n''(t)$ — низкочастотную.

Вероятностные свойства ошибки характеризуются математическим ожиданием m_n и корреляционными функциями $R_{n'n'}(\tau_1, \tau_2)$ и $R_{n''n''}(\tau_1, \tau_2)$. Математическое ожидание ошибки (оно зависит от множества, по которому производится осреднение) представляет собой ту часть ошибки, которая может быть заранее рассчитана по косвенным данным или определена в результате осреднения результатов испытаний группы однотипных приборов в сходных условиях. Использование математического ожидания ошибки в системе преобразования означает введение корректирующих поправок. После того, как эти поправки введены, следует считать, что математическое ожидание ошибки равно нулю.

Если рассматриваются достаточно малые интервалы времени, то медленно меняющуюся составляющую ошибки можно считать постоянной. Тогда

$$R_{n''n''}(\tau_1, \tau_2)\approx B_0^2. \tag{2.60}$$

Таким образом, в этом случае свойства составляющей $n''(t)$ характеризуются только дисперсией B_0^2. Для больших интервалов времени такая аппроксимация недопустима по двум причинам:

а) исходную физическую причину ошибки нельзя считать строго постоянной;

б) линеаризация нелинейных уравнений навигации приводит к тому, что ошибки в определении ортодромических координат становятся переменными, если даже ошибки исходных первичных измерителей постоянны.

Не располагая статистическими данными о свойствах медленно меняющихся ошибок, в дальнейшем будем широко использовать выражение

$$R_{n''n''}(\tau_1, \tau_2) = B^2 e^{-\gamma|\tau_1-\tau_2|}, \tag{2.61}$$

где γ предполагается достаточно малой величиной. Выражение (2.61) дает ограниченную дисперсию, равную B^2, и соответствует общим представлениям о медленно меняющейся функции: при малых значениях величины $|\tau_1-\tau_2|$, а именно при $|\tau_1-\tau_2| \ll 1/\gamma$, выражение (2.61) переходит в выражение (2.60), т. е. на малых интервалах времени ошибку можно считать постоянной. В то же время значения этой составляющей ошибки, разделенные достаточно большим интервалом времени (когда $|\tau_1-\tau_2| \gg 1/\gamma$), становятся практически некоррелированными, т. е. статистически независимыми. Свойства медленно меняющейся ошибки теперь определяются двумя постоянными: дисперсией B^2 и постоянной времени корреляции $T_0 = 1/\gamma$.

Спектральная плотность флюктуационной составляющей $n'(t)$ может иметь сложный вид. Однако для навигационных задач представляет интерес относительно низкочастотная часть спектра ошибки (ниже 0,1 *гц*). По-видимому, типичным является случай, когда в этой области частот флюктуационную составляющую можно считать белым шумом:

$$R_{n'n'}(\tau_1, \tau_2) = \sigma^2 \delta(\tau_1 - \tau_2), \tag{2.62}$$

где σ^2 — интенсивность белого шума. В соответствии с выражениями (2.61) и (2.62) спектральная плотность

типичной стационарной ошибки записывается следующим образом:

$$S_{nn}(\omega) = \sigma^2 + \frac{2\gamma B^2}{\omega^2 + \gamma^2}. \qquad (2.63)$$

Вид кривой $S_{nn}(\omega)$ показан на рис. 2.13.

Существенно нестационарной ошибкой является угол ухода свободного гироскопа от заданного направления. Угловую скорость ухода гироскопа в одной плоскости можно считать стационарной функцией времени:

$$\omega(t) = \omega_0 + \omega_1(t), \qquad (2.64)$$

где ω_0 — постоянная составляющая скорости ухода, а $\omega_1(t)$ — медленно меняющаяся составляющая. Во многих случаях гироскоп, входящий в состав гироинерциальной системы, работает непосредственно в ортодромической системе координат. В этом случае углы ухода гироскопа во взаимно перпендикулярных плоскостях непосредственно, без поворота системы координат, пересчитываются на ошибки в продольном и боковом движениях. Согласно данным, имеющимся в литературе [28, 48, 51], корреляционная функция переменной составляющей скорости ухода имеет вид:

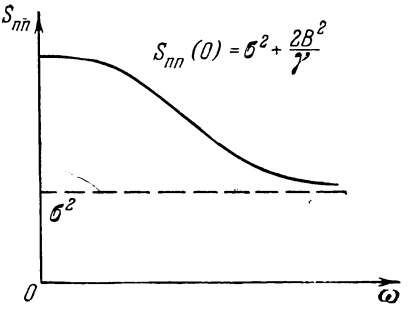

Рис. 2.13.

$$R_{\omega_1\omega_1}(\tau_1, \tau_2) = U^2 e^{-\gamma|\tau_1 - \tau_2|}. \qquad (2.65)$$

Следовательно, корреляционная функция угла ухода гироскопа записывается следующим образом:

$$R_{\varphi\varphi}(\tau_1, \tau_2) = \varphi_0^2 + \omega_0^2 \tau_1 \tau_2 + \\ + \frac{U^2}{\gamma}\left[2\min(\tau_1, \tau_2) + \frac{1}{\gamma}\left(-1 + e^{-\gamma\tau_1} + e^{-\gamma\tau_2} - e^{-\gamma|\tau_1 - \tau_2|}\right)\right], \qquad (2.66)$$

где φ_0^2 — дисперсия начального угла отклонения оси гироскопа от заданного направления, ω_0^2 — дисперсия постоянной составляющей скорости ухода.

В большинство навигационных комплексов включается инерциальная система (астроинерциальная или гироинерциальная). Будем рассматривать наиболее простой для теоретического исследования так называемый аналитический вариант инерциальной системы, когда оси чувствительности акселерометров стабилизированы относительно инерциальной системы координат. Схема перемещения акселерометра в этом случае изображена на рис. 2.14. Акселерометр A установлен на основании, которое стабилизировано или от астросредств (астроинерциальная система), или от свободного гироскопа (гироинерциальная система), так что ось его чувствительности ξ в начальной точке B горизонтальна, а затем перемещается параллельно самой себе. В дальнейшем под выходным сигналом инерциальной системы понимается сигнал акселерометра. Этим самым из инерциальной системы исключаются интеграторы, которые обычно принято считать неотъемлемой ее частью. Заметим, что наиболее известной является схема геометрического типа с приведением акселерометра в плоскость горизонта (рис. 2.15, *а*). Здесь характерным является то, что специальный следящий привод осуществляет поворот акселерометра на угол, пропорциональный выходному сигналу второго интегратора. Однако как источники информации оба варианта совершенно равноценны. Действительно, дополним первый вариант замкнутым контуром (рис. 2.15, *б*), для которого в точке D осуществляется суммирование электрических сигналов, а акселерометр не охвачен обратной связью. Схемы, представленные на рис. 2.15, *а* и 2.15, *б*, эквивалентны, пока угол

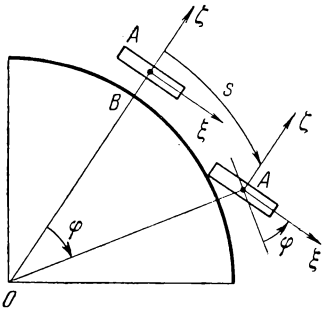

Рис. 2.14.

между осью чувствительности акселерометра и горизонтом остается малым. Поскольку добавление интеграторов с обратной связью обеспечивает обратимость преобразования сигнала, то можно сделать вывод о том, что

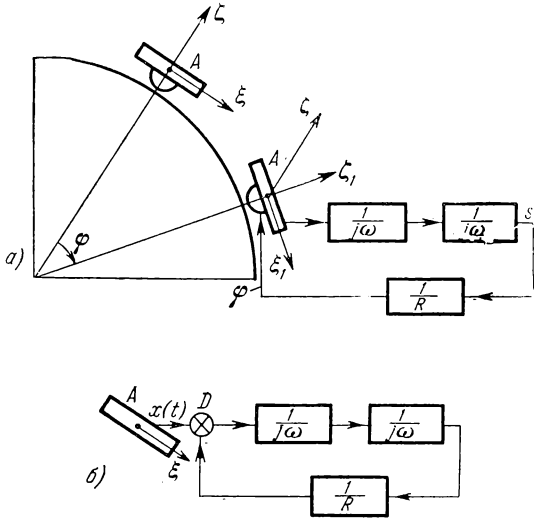

Рис. 2.15.

преобразованием сигнала акселерометра, стабилизированного в инерциальном пространстве, могут быть получены те же результаты, что и в инерциальной системе геометрического типа.

Выходной сигнал акселерометра в схеме на рис. 2.15, *б* равен:

$$x(t) = \ddot{s}(t) + \Omega^2 s(t) + g\varphi(t) + n^*(t), \qquad (2.67)$$

где $\Omega = \sqrt{g/R}$ — *частота Шулера* ($\Omega = 1{,}24 \cdot 10^{-3}$ 1/*сек*), $\varphi(t)$ — угол отклонения оси акселерометра (отклонение вызвано неточностью его угловой стабилизации), $n^*(t)$ — ошибка самого акселерометра. В астроинерциальной системе угол $\varphi(t)$ можно считать стационарной функцией времени и поэтому два последних слагаемых сигнала (2.67) можно объединить. В гироинерциальной системе,

работающей в интервалах времени порядка нескольких минут или часа, основным источником ошибок является уход гироскопа, поэтому в выражении (2.67) обычно можно пренебречь последним слагаемым.

Если в состав рассматриваемого измерителя включается несколько первичных источников информации, то в выражение для выходного сигнала каждого источника входят составляющие ошибок каждого из источников информации. Так, ошибки определения ортодромических составляющих скорости зависят как от ошибок самого датчика скорости, так и от ошибок курсового прибора, поскольку для приведения данных к ортодромической системе координат нужно знать курс объекта. Аналогичным образом в ошибки акселерометров входят составляющие, обусловленные неточностью стабилизации осей чувствительности акселерометров в азимуте. Однако мы в дальнейшем будем принимать для простоты, что ошибки системы курсоуказания достаточно малы и практически не влияют на конечную точность системы. Это означает, что вместо первичных источников информации, работающих в действительности в различных системах координат, и преобразователей координат допустимо рассматривать пары независимых и эквивалентных им измерителей, непосредственно вырабатывающих данные отдельно о продольном и боковом движениях.

Суммируя все сказанное об общих свойствах сигналов измерителей, можно выделить следующие характерные группы: позиционные измерители, измерители скорости, астроинерциальные системы, гироинерциальные системы. К позиционным измерителям относятся радионавигационные системы, автоматические системы, основанные на сопоставлении изображения земной поверхности и карты, системы астроориентации, в которых используется негравитационная вертикаль. Под измерителем скорости понимается исключительно допплеровский измеритель скорости, определяющий скорость относительно поверхности Земли (а не относительно среды). Наконец, к инерциальным системам относятся не только инерциальные системы как таковые, но и астро- и гироориентаторы, в которых вертикаль является гравитационной.

Выходные сигналы идеализированных измерителей имеют вид:

а) позиционный измеритель —

$$x(t) = s(t) + n_1'(t) + n_1''(t), \tag{2.68}$$

где

$$R_{n_1'n_1'}(\tau_1, \tau_2) = \sigma_1^2 \delta(\tau_1 - \tau_2), \qquad R_{n_1''n_1''}(\tau_1, \tau_2) = B_1^2 e^{-\gamma_1 |\tau_1 - \tau_2|}; \tag{2.69}$$

б) измеритель скорости —

$$x(t) = \dot{s}(t) + n_2'(t) + n_2''(t), \tag{2.70}$$

где

$$R_{n_2'n_2'}(\tau_1, \tau_2) = \sigma_2^2 \delta(\tau_1 - \tau_2), \qquad R_{n_2''n_2''}(\tau_1, \tau_2) = B_2^2 e^{-\gamma_2 |\tau_1 - \tau_2|}; \tag{2.71}$$

в) астроинерциальная система —

$$x(t) = \ddot{s}(t) + \Omega^2 s(t) + n_3'(t) + n_3''(t), \tag{2.72}$$

где

$$R_{n_3'n_3'}(\tau_1, \tau_2) = \sigma_3^2 \delta(\tau_1 - \tau_2), \qquad R_{n_3''n_3''}(\tau_1, \tau_2) = B_3^2 e^{-\gamma_3 |\tau_1 - \tau_2|}; \tag{2.73}$$

г) гироинерциальная система —

$$x(t) = \ddot{s}(t) + \Omega^2 s(t) + n_3'(t) + n_3''(t) + n_4(t), \tag{2.74}$$

где

$$R_{n_4n_4}(\tau_1, \tau_2) = B_4^{(0)\,2} + B_4^{(1)\,2}\tau_1\tau_2 + \\ + \frac{B_4^2}{\gamma_4}\left[2 \min(\tau_1, \tau_2) + \frac{1}{\gamma_4}\left(-1 + e^{-\gamma_4\tau_1} + e^{-\gamma_4\tau_2} - e^{-\gamma_4 |\tau_1 - \tau_2|}\right)\right]. \tag{2.75}$$

В достаточно малых интервалах времени медленно меняющиеся составляющие ошибок приближенно можно считать постоянными.

В состав комплексной навигационной системы может входить несколько измерителей каждой группы. В главах 9—11 ошибки отдельных измерителей считаются взаимно некоррелированными. В большинстве случаев

это имеет физическое оправдание, так как обычно измерители используют различные физические эффекты. Однако могут представлять интерес задачи, в которых корреляционная связь ошибок существенна.

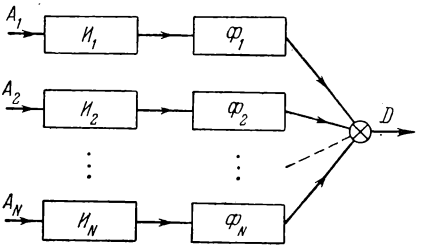

Рис. 2.16.

Способы использования сигналов измерителей в комплексной системе могут быть различными. Обычно считается целесообразным вводить перекрестные связи с одного измерителя на другой. В ряде случаев связи имеют параметрический характер и нужны для обеспечения устойчивой работы измерителей (например, сигнал скорости вводится в систему дальней радионавигации). В других случаях связи являются чисто линейными и вводятся для простоты реализации или для сужения рабочего диапазона отдельных измерителей по входу (например, схема демпфирования инерциальной системы от измерителя скорости). Наконец, возможно комплексное использование сигналов измерителей без обратных связей: все сигналы поступают на единое вычислительное устройство и по разомкнутым линиям проходят на выход. В линеаризованной постановке это сводится к параллельному преобразованию с последующим суммированием (рис. 2.16). Для математического решения задачи синтеза оптимальной системы удобна схема параллельного преобразования и поэтому именно она рассматривается в дальнейшем. При реализации комплексной системы могут быть введены те перекрестные связи, которые нужны по чисто

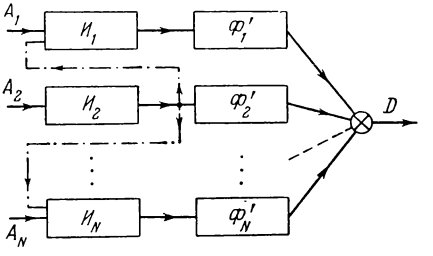

Рис. 2.17.

практическим соображениям. Пусть в схеме необходимо ввести связи, показанные штрих-пунктирными линиями (рис. 2.17). Блок-схема на рис. 2.17 может быть сделана эквивалентной блок-схеме, приведенной на рис. 2.16, если потребовать, чтобы во втором случае передаточные функции от входов измерителей (точки $A_1, \ldots, A_N$) до выхода вычислительного устройства (точка D) были теми же самыми, что и в первом случае. Таким образом, схема параллельного преобразования является просто расчетной; при реализации она может быть переведена в любую ей эквивалентную схему с перекрестными связями.

С математической стороны задача параллельного преобразования данных навигационных приборов является задачей многоканальной (многомерной) фильтрации случайных сигналов. Общая теория фильтрации случайных сигналов достаточно хорошо разработана. Однако специфические особенности навигационных задач требуют некоторой доработки математического аппарата. Поэтому в главах 3 и 4 приводится не только описание известных методов решения оптимальных задач, но основное внимание уделяется приспособлению и упрощению методов, а также их распространению на другие условия.

ГЛАВА 3

МЕТОДЫ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОДНОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМ

В этой главе показано, что при непрерывном поступлении сигнала по одному каналу задача сводится к *интегральному уравнению Винера-Хопфа.* Излагаются основные методы его решения: *обобщенный метод Заде — Рагаззини* для общего случая, когда необходимо учитывать конечность времени поступления данных, и *метод Винера* для частного случая, когда это время можно считать бесконечным. Особое внимание уделяется приближенному методу логарифмических характеристик, максимально упрощающему процесс решения. Далее приведены основные соображения об изменении качественного характера решений в зависимости от состава полезного сигнала и помехи. Эти соображения во многих случаях позволяют произвести обоснованные упрощения уже при составлении интегрального уравнения. При дискретном поступлении данных задача сводится к системе алгебраических уравнений. Если дискретные данные поступают периодически с малым интервалом или обработка данных производится в цифровой вычислительной машине, то алгоритмы строятся на основе применения теории z-преобразования. В заключение главы изложены основные соображения относительно критичности оптимальных фильтров.

3.1. Условия оптимальности преобразования непрерывного сигнала

Задача полного синтеза динамических характеристик фильтра, осуществляющего оптимальное преобразование сигнала одного измерителя, сводится к интеграль-

ному уравнению. Для случая работы фильтра в разомкнутой схеме решение интегрального уравнения непосредственно определяет характеристики фильтра; для случая работы в замкнутой схеме это же интегральное уравнение определяет характеристики замкнутой системы, а характеристики фильтра находятся из решения дополнительной задачи.

А) Интегральное уравнение оптимального фильтра, работающего в разомкнутой схеме.

Цепь преобразования сигнала изображена на рис. 3.1. Полезный сигнал $s_1(t)$ измеряется неидеальным измерителем $И$, выходной сигнал которого $x_1(t)$ поступает

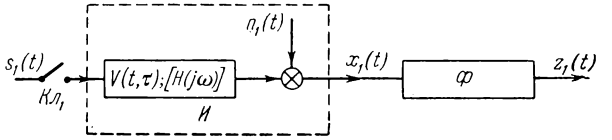

Рис. 3.1.

на фильтр $Ф$. Желательно, чтобы выходной сигнал фильтра $z_1(t)$ с возможно большей точностью воспроизводил некоторый желаемый сигнал $l_1(t)$, представляющий собой результат известного преобразования полезного сигнала:

$$l_1(t) = l\{s_1(t)\}. \tag{3.1}$$

При преобразовании навигационных данных имеют смысл два варианта задания функции $l_1(t)$: $l_1(t) \equiv s_1(t)$ (задача определения координаты) и $l_1(t) \equiv \dot{s}_1(t)$ (задача определения скорости).

Программа замыкания ключа $Кл_1$ характеризует режим работы измерителя. Могут представлять интерес следующие простейшие варианты.

1. Ключ $Кл_1$ разомкнут до момента t_0 и замкнут в интервале (t_0, t), где t — текущий момент времени, для которого необходимо определять значения сигнала $l_1(t)$. Это простейшая задача преобразования с непрерывным поступлением данных на конечном интервале времени. В ряде случаев имеет смысл предельная задача при $t_0 \to -\infty$ (время поступления данных весьма велико).

2. Ключ $Кл_1$ разомкнут до момента t_0, замкнут на интервале (t_0,t_1), а затем разомкнут, причем $t_1<t$. В этом случае фильтр играет роль экстраполятора, так как сигнал в интервале (t_1,t) не поступает. Это простейшая постановка задачи для режима «памяти».

3. Ключ $Кл_1$ замкнут, начиная с момента t_0, необходимо определить значения сигнала для прошедших моментов времени $\bar{t}<t$. Такое положение имеет, например, место, когда фильтр предназначен для расшифровки ранее сделанных записей координат. Это простейшая задача интерполяции со сглаживанием.

4. Ключ $Кл_1$ замыкается на короткие интервалы времени. В этом случае можно считать, что от измерителя поступают дискретные данные.

В практических задачах могут встречаться и более сложные режимы работы. Ниже при выводе интегрального уравнения для определенности будем иметь в виду вариант 2 (вариант 1 получается из него как частный случай при $t=t_1$).

Измеритель в дальнейшем будем считать линейным и стационарным. Выходной сигнал измерителя выражается через полезный сигнал $s_1(t)$ следующим образом:

$$x_1(t)=\int_{t_0}^{t_1} V(t-\tau)\,s_1(\tau)\,d\tau+n_1(t), \tag{3.2}$$

где $V(t-\tau)$ — импульсная переходная функция измерителя [вместо нее в дальнейшем будем использовать также передаточную функцию $H(j\omega)$], $n_1(t)$ — аддитивная ошибка измерения (помеха). Функция $V(t-\tau)$ [или $H(j\omega)$] должна отражать, вообще говоря, как основную особенность типа измерителя, так и его динамическую неидеальность. Так, для идеального измерителя скорости $H(j\omega)=j\omega$, для измерителя скорости с учетом его инерционности в первом приближении можно записать $H(j\omega)=\frac{j\omega}{1+j\omega T}$. Во всех реальных задачах функции $V(t-\tau)$ и $H(j\omega)$ известны лишь приближенно из-за того, что динамические свойства приборов могут заметно различаться у различных экземпляров, а также могут ме-

няться со временем и в зависимости от условий работы. Однако в дальнейшем свойства измерителя будем считать для простоты точно известными.

В аддитивную ошибку $n_1(t)$ включаются как постоянно действующие факторы (шумы, дрейфы, смещения нулей шкал и т. п.), так и переходные процессы, обусловленные ненулевыми начальными условиями. Полезный сигнал $s_1(t)$ и ошибку $n_1(t)$ будем считать случайными функциями времени с известными статистическими свойствами. В общем случае необходимо знать два математических ожидания $m_s(t)$ и $m_n(t)$ и четыре корреляционные функции $R_{ss}(\tau_1,\tau_2)$, $R_{sn}(\tau_1,\tau_2)$, $R_{ns}(\tau_1,\tau_2)$ и $R_{nn}(\tau_1,\tau_2)$. Однако для простоты будем считать сигналы $s_1(t)$ и $n_1(t)$ статистически независимыми. При этом должны быть известны только две корреляционные функции $R_{ss}(\tau_1,\tau_2)$ и $R_{nn}(\tau_1,\tau_2)$.

Математические ожидания сигналов легко устранить из дальнейшего рассмотрения. Действительно, введем

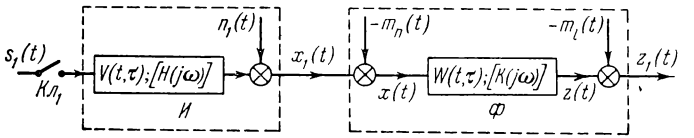

Рис. 3.2.

математические ожидания сигналов так, как показано на рис. 3.2. Математическое ожидание $m_l(t)$ желаемого сигнала определим следующим образом:

$$m_l(t) = M\{l_1(t)\} = l\{m_s(t)\}. \tag{3.3}$$

В результате этого система преобразования становится инвариантной относительно математических ожиданий и сигнал

$$x(t) = x_1(t) - m_x(t), \quad \left[m_x(t) = \int_{t_0}^{t_1} V(t-\tau)\, m_s(\tau)\, d\tau - m_n(t) \right], \tag{3.4}$$

поступающий на фильтр, имеет нулевое математическое ожидание.

Фильтр, представляющий собой искомое вычислительное устройство, будем считать идеальным и в общем случае нестационарным, так что его выходной сигнал $z(t)$ определяется следующим образом:

$$z(t)=\int_{t_0}^{t_1} W(t,\ \tau)\, x(\tau)\, d\tau. \tag{3.5}$$

Импульсная переходная функция фильтра $W(t,\tau)$ находится из условия оптимальности воспроизведения центрированной составляющей желаемого сигнала $l(t)=l_1(t)-m_l(t)$ в момент времени t:

$$D(t)=M\{[z(t)-l(t)]^2\}=\min. \tag{3.6}$$

Если t считать непрерывно изменяющимся, то импульсная переходная функция $W(t,\tau)$ определяет нестационарный фильтр. В частном случае, если фильтр оказывается стационарным, вместо $W(t,\tau)$ удобно оперировать с соответствующей передаточной функцией $K(j\omega)$.

Выражение для дисперсии ошибки воспроизведения желаемого сигнала в развернутом виде имеет вид:

$$D(t)=\int_{t_0}^{t_1} W(t,\ \tau_1)\, d\tau_1 \int_{t_0}^{t_1} W(t,\ \tau_2)\, R_{xx}(\tau_1,\ \tau_2)\, d\tau_2 - \\ -2\int_{t_0}^{t_1} W(t,\ \tau_1)\, R_{lx}(t,\ \tau_1)\, d\tau_1 + R_{ll}(t,\ t). \tag{3.7}$$

Корреляционные функции $R_{xx}(\tau_1,\tau_2)$, $R_{lx}(\tau_1,\tau_2)$, $R_{ll}(\tau_1,\tau_2)$ сигналов $x(t)$ и $l(t)$ рассчитываются по известным корреляционным функциям $R_{ss}(\tau_1,\tau_2)$ и $R_{nn}(\tau_1,\tau_2)$ сигналов $s(t)$ и $n(t)$. Задавая на интервале (t_0,t_1) произвольную вариацию $\delta W(t,\tau)$ искомой импульсной переходной функции $W(t,\tau)$ и приравнивая нулю соответствующую вариацию выражения (3.7), получаем следующее необходимое условие минимума дисперсии ошибки:

$$\int_{t_0}^{t_1} W(t,\ \tau_2)\, R_{xx}(\tau_1,\ \tau_2)\, d\tau_2 = R_{lx}(t,\ \tau_1) \quad (t_0 \leqslant \tau_1 \leqslant t_1). \tag{3.8}$$

Это условие представляет собой *интегральное уравнение Фредгольма первого рода типа Винера — Хопфа* [26, 31]. Строго говоря, условие (3.8) является только необходимым, но недостаточным [23], однако при некоторых ограничениях, принимаемых в процессе решения, интегральное уравнение однозначно определяет оптимальное решение.

Б) Приведение замкнутой схемы к разомкнутой.

Блок-схема рассматриваемой замкнутой схемы представлена на рис. 3.3. Здесь *О* — объект, *И* — измеритель,

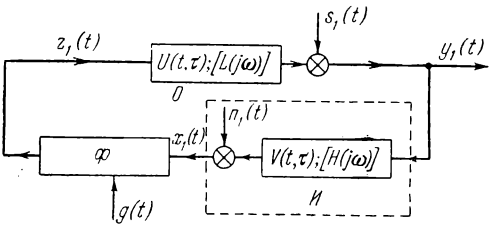

Рис. 3.3.

Ф — фильтр. Задачей системы преобразования сигнала в рассматриваемом случае является уже не точное воспроизведение входного сигнала измерителя, а такое управление объектом, при котором результат известного преобразования $l\{y_1(t)\}$ выходной координаты $y_1(t)$ был бы близок к заданной программе $g(t)$ — известной функции времени. Вид функции l определяется особенностями технической задачи. Так, для задач навигации программа может быть задана или по координате, или по скорости.

Динамические свойства объекта характеризуются импульсной переходной функцией $U(t,\tau)$ [в стационарном случае — передаточной функцией $L(j\omega)$], свойства стационарного измерителя — импульсной переходной функцией $V(t,\tau)$ или передаточной функцией $H(j\omega)$, свойства фильтра — импульсной переходной функцией $W^*(t,\tau)$ [в стационарном случае — передаточной функцией $K^*(j\omega)$]. Сигнал $s_1(t)$ изображает возмущение,

приведенное к выходу объекта, $n_1(t)$ — аддитивную ошибку измерителя.

Покажем сначала, что программа $g(t)$ и математические ожидания сигналов $m_s(t)$ и $m_n(t)$ могут быть исключены из рассмотрения, если использовать приемы, разработанные в теории инвариантности [18]. Подадим

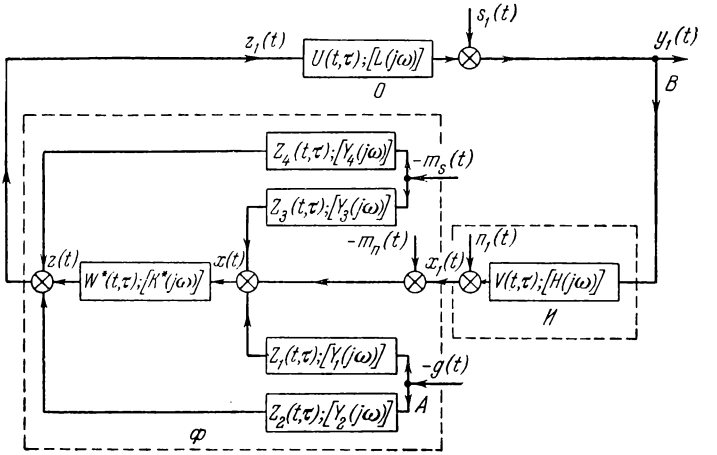

Рис. 3.4.

на вход и выход фильтра дополнительные сигналы (рис. 3.4). Импульсные переходные функции $Z_1(t,\tau)$, $Z_2(t,\tau)$, $Z_3(t,\tau)$ и $Z_4(t,\tau)$ [или передаточные функции $Y_1(j\omega)$, $Y_2(j\omega)$, $Y_3(j\omega)$ и $Y_4(j\omega)$] выбираются из следующих условий:

а) сигнал, проходящий через фильтр, не зависит от программы $g(t)$ и математических ожиданий $m_s(t)$ и $m_n(t)$;

б) выходной сигнал $y_1(t)$ не зависит от математических ожиданий $m_s(t)$ и $m_n(t)$;

в) импульсная переходная функция (или передаточная функция) от точки A (вход) до точки B (выход) равна заданной.

В стационарном случае все эти условия имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} Y_1(j\omega)+H(j\omega)L(j\omega)Y_2(j\omega)&=0,\\ -L(j\omega)Y_2(j\omega)&=F(j\omega),\\ Y_3(j\omega)+H(j\omega)L(j\omega)Y_4(j\omega)&=0,\\ L(j\omega)Y_4(j\omega)&=1,\end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

где $F(j\omega)$ — желаемая передаточная функция, определяющая качество отработки программы на выходе объекта. При выборе передаточной функции $F(j\omega)$ следует учитывать более сложные особенности объекта, в частности, ограниченность сигналов управления. Заметим, что в уравнения (3.9) не входит искомая передаточная функция $K^*(j\omega)$, поэтому способ компенсации математических ожиданий может быть установлен до решения оптимальной задачи.

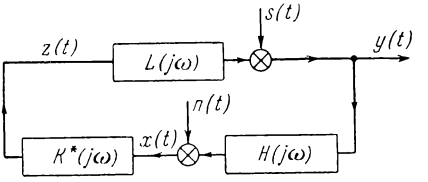

Рис. 3.5.

Если условия (3.9) выполнены, то вместо схемы, изображенной на рис. 3.4, можно рассматривать схему, приведенную на рис. 3.5, в которой все сигналы имеют нулевые математические ожидания, а задача воспроизведения программы заменена задачей стабилизации. Таким образом, характеристики фильтра теперь должны быть определены из условия

$$M\{[y(t)]^2\}=\min. \tag{3.10}$$

Приведем схему (рис. 3.5) к обычной разомкнутой схеме преобразования сигнала. В общем случае, когда звенья системы могут быть нестационарными, такое приведение может быть осуществлено на основе использования взаимно обратных систем [23]. Ниже предположим, что все звенья системы (в том числе и пока не рассчитанный фильтр) стационарны. В этом случае предварительные преобразования сводятся к простым пересчетам передаточных функций.

Сначала схема на рис. 3.5 эквивалентным преобразованием приводится к схеме, показанной на рис. 3.6.

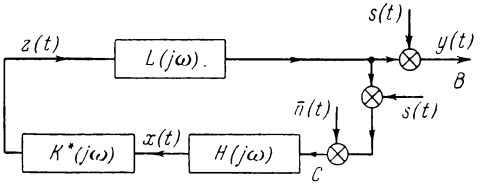

Рис. 3.6.

Здесь $\bar{n}(t)$ — помеха, приведенная ко входу измерителя: $\bar{n}(j\omega)=\frac{1}{H(j\omega)}n(j\omega)$. Обозначив через $K(j\omega)$ передаточную функцию замкнутой системы (от точки C до точки B), приходим к стандартной разомкнутой схеме (рис. 3.7), для которой условие оптимальности (3.10) принимает вид:

$$M\{[u(t)-s(t)]^2\}=\min. \tag{3.11}$$

Таким образом, мы приходим к задаче оптимальной фильтрации, причем роль полезного сигнала играет $s(t)$ — возмущение, приведенное к выходу объекта, а роль помехи — ошибка $\bar{n}(t)$ измерителя. Отметим, что, в частности, для задач навигации понятие «полезный сигнал» здесь имеет принципиально иной смысл, чем при работе в разомкнутой схеме: полезный сигнал отображает не действительный закон движения, а тот закон, который имел бы место, если бы обратная связь через навигационную систему была разомкнута [39].

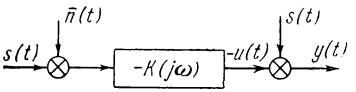

Рис. 3.7.

Передаточная функция $K(j\omega)$ или соответствующая импульсная переходная функция замкнутой системы находится в результате решения уравнения вида (3.8). После этого используется соотношение, связывающее $K(j\omega)$ с передаточной функцией искомого фильтра:

$$K(j\omega)=\frac{H(j\omega)K^*(j\omega)L(j\omega)}{1+H(j\omega)K^*(j\omega)L(j\omega)}. \tag{3.12}$$

Отсюда находим:

$$K^*(j\omega) = \frac{K(j\omega)}{H(j\omega)\,L(j\omega)\,[1 - K(j\omega)]}. \qquad (3.13)$$

Такой путь определения фильтра, работающего в замкнутой системе, возможен в тех случаях, когда объект и измеритель имеют минимально фазовые характеристики. В противном случае уже при определении передаточной функции замкнутой системы следует учитывать те корни передаточных функций измерителя и объекта, которые определяют их неминимальнофазовость [15].

Ниже излагаются методы расчета динамических характеристик оптимальных фильтров, работающих только в разомкнутых системах.

3.2. Обобщенный метод Заде — Рагаззини

Как показано в § 3.1, импульсная переходная функция оптимального фильтра должна быть получена из решения интегрального уравнения

$$\int_{t_0}^{t_1} W(t, \tau_2)\, R_{xx}(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_2 = R_{lx}(t, \tau_1) \quad (t_0 \leqslant \tau_1 \leqslant t_1). \qquad (3.14)$$

К настоящему времени разработано большое число методов решения этого уравнения. Наиболее общим, однако сложным в использовании, является метод канонических разложений [26]. Ниже излагается обобщенный метод Заде — Рагаззини [55], менее общий и пригодный при следующих ограничениях:

1. Входной сигнал фильтра $x(t)$ и желаемый сигнал $l(t)$ могут быть записаны следующим образом:

$$x(t) = x'(t) + g(t), \qquad l(t) = l'(t) + d(t). \qquad (3.15)$$

Здесь $x'(t)$ и $l'(t)$ — недетерминированные составляющие сигналов, а $g(t)$ и $d(t)$ — детерминированные составляющие, которые могут быть представлены в виде

$$g(t) = \sum_{i=1}^{r} c_i f_i(t), \qquad d(t) = \sum_{i=1}^{r} a_i f_i(t), \qquad (3.16)$$

где $f_i(t)$ — известные функции времени, а c_i и a_i — случайные величины.

2. Каждую недетерминированную составляющую $x'(t)$ или $l'(t)$ можно представить как результат прохождения стационарного сигнала с дробно-рациональной спектральной плотностью через стационарные звенья. В частном случае $x'(t)$ и $l'(t)$ могут быть стационарными, однако это не необходимо для использования метода.

Статистические свойства детерминированных составляющих сигналов должны быть заданы системой корреляционных моментов

$$C_{ij} = M\{c_i c_j\}, \quad A_{ij} = M\{c_i a_j\} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, r), \tag{3.17}$$

а статистические свойства недетерминированных составляющих — корреляционными функциями

$$\left.\begin{aligned} R_{x'x'}(\tau_1, \tau_2) &= M\{x'(\tau_1)\, x'(\tau_2)\}, \\ R_{l'x'}(\tau_1, \tau_2) &= M\{l'(\tau_1)\, x'(\tau_2)\}. \end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

В соответствии со сказанным в § 3.1, математические ожидания сигналов можно считать равными нулю.

Интегральное уравнение (3.14) удобно переписать в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} W(t, \tau_2)\, R_{x'x'}(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_2 = Z(t, \tau_1), \tag{3.19}$$

где

$$Z(t, \tau_1) = R_{l'x'}(t, \tau_1) + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} f_j(\tau_1)\,[C_{ij}\lambda_i(t) + A_{ij} f_i(t)], \tag{3.20}$$

$$\lambda_i(t) = -\int_{t_0}^{t_1} f_i(\tau)\, W(t, \tau)\, d\tau. \tag{3.21}$$

Таким образом, правая часть уравнения (3.19) зависит от искомой функции $W(t, \tau)$ через постоянные $\lambda_i(t)$. Однако при решении будем считать $\lambda_i(t)$ неопределенными постоянными.

Возможности решения интегрального уравнения (3.19) зависят от свойств его ядра $R_{x'x'}(\tau_1, \tau_2)$. Будем считать, что может быть найден такой дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами $Q(d/d\tau_1)$, для которого выполняется условие

$$Q\left(\frac{d}{d\tau_1}\right) R_{x'x'}(\tau_1, \tau_2) = 0 \quad \text{при} \quad \tau_1 \neq \tau_2 \tag{3.22}$$

(при этом τ_2 считается параметром).

Если $x'(t)$ — стационарная случайная функция с дробно-рациональной спектральной плотностью, то способ построения такого оператора весьма прост. Действительно, для такого сигнала корреляционная функция имеет вид:

$$R_{x'x'}(\tau_1, \tau_2) = \sum_{i=1}^{M} \sigma_i^2 e^{-\alpha_i |\tau_1 - \tau_2|} = \\ = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{M} \sigma_i^2 e^{-\alpha_i (\tau_1 - \tau_2)} & \text{при} \quad \tau_1 > \tau_2, \\ \sum\limits_{i=1}^{M} \sigma_i^2 e^{-\alpha_i (\tau_2 - \tau_1)} & \text{при} \quad \tau_1 < \tau_2. \end{cases} \tag{3.23}$$

Поскольку

$$\left(\frac{d}{d\tau_1} - \alpha_i\right) e^{\alpha_i \tau_1} = 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{d}{d\tau_1} + \alpha_i\right) e^{-\alpha_i \tau_1} = 0, \tag{3.24}$$

получаем, что условие (3.22) выполняется для оператора

$$Q\left(\frac{d}{d\tau_1}\right) = \prod_{i=1}^{M} \left(\frac{d}{d\tau_1} + \alpha_i\right) \prod_{i=1}^{M} \left(\frac{d}{d\tau_1} - \alpha_i\right). \tag{3.25}$$

Величины $\pm j\alpha_i$ представляют собой все полюсы спектральной плотности сигнала $x'(t)$. Это означает, что если спектральная плотность представлена в виде отношения полиномов

$$S_{x'x'}(\omega) = \frac{P(\omega^2)}{Q^*(\omega^2)}, \tag{3.26}$$

то

$$Q\left(\frac{d}{d\tau_1}\right) = Q^*(\omega^2)\Big|_{j\omega = \frac{d}{d\tau_1}} \tag{3.27}$$

При $\tau_1=\tau_2$ производные выражения (3.23) не являются непрерывными, поэтому при произвольных τ_1 и τ_2 вместо (3.22) следует записать:

$$Q\left(\frac{d}{d\tau_1}\right)R_{x'x'}(\tau_1-\tau_2)=\sum_{i=0}^{h}a_i\delta^{(2i)}(\tau_1-\tau_2), \qquad (3.28)$$

т. е. в результате примененной операции получается сумма δ-функции и ее производных. Можно показать (см., например, [10]), что в стационарном случае коэффициенты g_i числителя спектральной плотности

$$P(\omega^2)=\sum_{i=1}^{h}g_i\omega^{2i} \qquad (3.29)$$

связаны простыми соотношениями с коэффициентами a_i выражения (3.28):

$$a_i=\begin{cases} g_i & \text{при четном } i, \\ -g_i & \text{при нечетном } i. \end{cases} \qquad (3.30)$$

Если сигнал $x'(t)$ нестационарен, но является результатом прохождения стационарного сигнала через стационарные звенья, то его корреляционная функция зависит не только от разности $(\tau_1-\tau_2)$. Однако в этом случае корреляционная функция $R_{x'x'}(\tau_1, \tau_2)$ состоит из слагаемых, в которые τ_1 входит только через множители τ_1^k и $e^{\pm\alpha_i\tau_1}$ (вид этих множителей при $\tau_1>\tau_2$ и при $\tau_1<\tau_2$ может быть различным). Имея в виду, что

$$\frac{d^{k+1}}{d\tau_1^{k+1}}(\tau_1^k)=0, \qquad \left(\frac{d^2}{d\tau_1^2}-\alpha_i^2\right)e^{\pm\alpha_i\tau_1}=0, \qquad (3.31)$$

из множителей $\frac{d}{d\tau_1}$ и $\left(\frac{d^2}{d\tau_1^2}-\alpha_i^2\right)$ всегда можно построить оператор, удовлетворяющий условию (3.22). Поскольку производные $R_{x'x'}(\tau_1, \tau_2)$ при $\tau_1=\tau_2$ не являются непрерывными, то при произвольных τ_1 и τ_2 результат применения дифференциального оператора $Q\left(\frac{d}{d\tau_1}\right)$ определяется выражением вида (3.28). Однако, в отличие от стационарного случая, коэффициенты этого

выражения не могут быть непосредственно получены из выражений спектральных плотностей. Отметим, что оператор $Q\left(\frac{d}{d\tau_1}\right)$ в принципе не единственный: оператор, удовлетворяющий условию (3.22), будучи умножен на произвольный оператор $R\left(\frac{d}{d\tau_1}\right)$, будет также удовлетворять условию (3.22). Поэтому в сложных случаях становится важной задача наиболее «экономного» выбора оператора $Q\left(\frac{d}{d\tau_1}\right)$.

Применив оператор $Q\left(\frac{d}{d\tau_1}\right)$ к интегральному уравнению (3.19), получим:

$$\int_{t_0}^{t_1} W(t, \tau_2) \sum_{i=0}^{h} a_i \delta^{(2i)}(\tau_1 - \tau_2)\, d\tau_2 = Y(t, \tau_1), \qquad (3.32)$$

где

$$Y(t, \tau_1) = Q\left(\frac{d}{d\tau_1}\right) Z(t, \tau_1). \qquad (3.33)$$

Соотношение (3.32) представляет собой дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами порядка $2h$:

$$\sum_{i=0}^{h} a_i \frac{d^{2i} W(t, \tau_1)}{d\tau_1^{2i}} = Y(t, \tau_1). \qquad (3.34)$$

Это дифференциальное уравнение справедливо при $t_0 < \tau_1 < t_1$. При $\tau_1 = t_0$ и $\tau_1 = t_1$ решение исходного интегрального уравнения (3.19) в общем случае имеет особенности (δ — функции и ее производные), так что из решения уравнения (3.34) получается регулярная часть $\overline{W}(t, \tau)$ искомой импульсной переходной функции $W(t, \tau)$. Общее решение дифференциального уравнения

$$\overline{W}(t, \tau) = \overline{W}(t, \tau, \lambda_1, \ldots, \lambda_r, A_1, \ldots, A_{2h}) \qquad (3.35)$$

зависит от $2h$ произвольных постоянных интегрирования и от r ранее введенных постоянных $\lambda_i(t)$. Выражение

для искомой импульсной переходной функции записывается в виде

$$W(t, \tau) = \overline{W}(t, \tau) + \sum_{i=0}^{p} [F_i(t)\delta^{(i)}(\tau - t_0) + G_i(t)\delta^{(i)}(\tau - t_1)]. \tag{3.36}$$

Порядок наивысшей производной — значение p — может быть определен следующим образом. Производные δ-функции в выражении (3.36) означают дифференцирование сигнала $x(t)$. Для сигналов, происходящих от стационарных сигналов с дробно-рациональными спектральными плотностями, производные достаточно высокого порядка не имеют конечной дисперсии. Поскольку дисперсия выходного сигнала фильтра должна быть конечной, наивысшая производная δ-функции в выражении (3.36) должна соответствовать последней производной сигнала $x(t)$, дисперсия которой ограничена. В частном случае, когда сигнал $x(t)$ содержит составляющие типа белого шума, вообще не допускается использование дискретных значений сигнала и его производных, поэтому сумма в выражении (3.36) пропадает и аналитическая часть решения $\overline{W}(t, \tau)$ представляет собой решение исходного интегрального уравнения. Заметим, что в этом случае интегральное уравнение первого рода становится интегральным уравнением второго рода. Это обстоятельство имеет большое значение, так как для интегральных уравнений второго рода хорошо разработаны приближенные методы решения.

Неизвестные постоянные λ_i, A_i, F_i, G_i определяются из условий тождественного удовлетворения интегрального уравнения (3.19) и соотношений (3.21). В результате подстановки выражений (3.36) и (3.21) в уравнение (3.19) получается система линейных алгебраических уравнений относительно этих постоянных. Общий вид $\overline{W}(t, \tau)$ зависит от выбора оператора $Q\left(\frac{d}{d\tau_1}\right)$. Однако после определения неизвестных постоянных решение оказывается единственным, не зависящим от $Q\left(\frac{d}{d\tau_1}\right)$. Большое количество примеров расчета динамических характеристик фильтров для случаев, когда недетерми-

нированные составляющие сигналов стационарны, приведено, например, в [31].

Обычно особо выделяют [31] решения задач при условии несмещенности относительно детерминированных составляющих полезного сигнала, когда ошибка не зависит от коэффициентов при этих составляющих. В общем случае условия несмещенности могут быть наложены раздельно на любые составляющие полезного сигнала или помехи. Математически поставленная таким образом задача является задачей на условный минимум дисперсии ошибки и решается методом *неопределенных множителей Лагранжа*. Однако если найдено общее решение (при произвольных корреляционных моментах C_{ij} и A_{ij}), то решение при условии несмещенности получается предельным переходом: для обеспечения несмещенности относительно составляющей $c_l f_l(t)$ полезного сигнала следует положить $C_{lj}=A_{lj}\to\infty$. Поэтому методы нахождения решения при условии несмещенности здесь отдельно не рассматриваются.

После определения оптимальной импульсной переходной функции минимальная дисперсия ошибки рассчитывается по формуле

$$D_0(t)=R_{ll}(t,\ t)-\int_{t_0}^{t_1} W(t,\ \tau_1)\,d\tau_1\int_{t_0}^{t_1} W(t,\tau_2)\,R_{xx}(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_2. \tag{3.37}$$

Если t — текущее значение времени, то $W(t,\ \tau)$ определяет нестационарный фильтр, реализация которого в общем случае является затруднительной. Однако для многих простых прикладных задач оптимальные фильтры могут быть построены без особого труда даже при использовании аналоговых счетно-решающих устройств.

Пример 1. Полезный сигнал является детерминированным

$$s(t)=ct^2 \qquad (C^2=M\{c^2\}), \tag{3.38}$$

а недетерминированная помеха представляет собой интеграл от белого шума интенсивности σ^2, так что его корреляционная функция равна:

$$R_{nn}(\tau_1,\ \tau_2)=\sigma^2\min(\tau_1,\ \tau_2). \tag{3.39}$$

Примем, что желаемый сигнал совпадает с полезным сигналом, причем сигнал $x(t)$ поступает в интервале $(0, t)$. В этом случае интегральное уравнение (3.14) принимает вид:

$$\sigma^2 \int_0^t W(t, \tau_2) \min(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_2 = \lambda(t) C^2 \tau_1^2, \qquad (3.40)$$

где

$$\lambda(t) = t^2 - \int_0^t \tau^2 W(t, \tau)\, d\tau. \qquad (3.41)$$

По виду ядра интегрального уравнения

$$R_{x'x'}(\tau_1, \tau_2) = R_{nn}(\tau_1, \tau_2) = \begin{cases} \sigma^2\tau_1 & \text{при} \quad \tau_1 < \tau_2, \\ \sigma^2\tau_2 & \text{при} \quad \tau_1 > \tau_2 \end{cases} \qquad (3.42)$$

легко заключить, что оператор $Q\left(\frac{d}{d\tau_1}\right)$, удовлетворяющий условию (3.22), можно взять в виде

$$Q\left(\frac{d}{d\tau_1}\right) = \frac{d^2}{d\tau_1^2}. \qquad (3.43)$$

В результате применения этого оператора к интегральному уравнению (3.40) получаем:

$$\sigma^2 \overline{W}(t, \tau) = -2\lambda(t) C^2. \qquad (3.44)$$

Входной сигнал $x(t)$ при конечном значении t имеет конечную дисперсию, $\dot{x}(t)$ имеет бесконечную дисперсию. Поэтому при построении $W(t, \tau)$ к $\overline{W}(t, \tau)$ из соображений конечности дисперсии выходного сигнала следует добавить только δ-функции:

$$W(t, \tau) = \overline{W}(t, \tau) + F(t)\delta(\tau) + G(t)\delta(t - \tau). \qquad (3.45)$$

Подставив выражение (3.45) в уравнение (3.40) непосредственно и через равенство (3.41) и потребовав тождественного удовлетворения уравнения (3.40) по переменной τ_1, окончательно получаем уравнения:

$$F = 0, \quad G\sigma^2 - 2\lambda C^2 t = 0, \quad Gt^2 - \lambda\left(\frac{2C^2}{3\sigma^2} t^3 - 1\right) = t^2, \qquad (3.46)$$

откуда

$$W(t, \tau) = \frac{6C^2t^2}{4C^2t^3 + 3\sigma^2}[-\tau^2 + t\delta(t-\tau)]. \quad (3.47)$$

Минимальная дисперсия ошибки равна:

$$D_0(t) = \frac{3C^2\sigma^2t^4}{4C^2t^3 + 3\sigma^2}. \quad (3.48)$$

Решение, не зависящее от случайного коэффициента c (несмещенное относительно полезного сигнала), получаем, положив $C^2 \to \infty$. В этом случае

$$W(t, \tau) = \frac{3}{2t}[-\tau^2 + t\delta(t-\tau)], \quad (3.49)$$

$$D_0(t) = \frac{3}{4}\sigma^2 t. \quad (3.50)$$

Реализация импульсной переходной функции достаточно проста. Соответствующая схема включает только элементы, осуществляющие интегрирование, умножение на постоянные и переменные коэффициенты и суммирование. Переменные коэффициенты вырабатываются в соответствии с заранее заданной программой.

Пример 2. Полезный сигнал состоит из случайной постоянной и стационарной недетерминированной составляющей:

$$s(t) = c + r(t). \quad (3.51)$$

Корреляционная функция стационарной недетерминированной составляющей $r(t)$ имеет вид:

$$R_{rr}(\tau_1, \tau_2) = A^2e^{-\alpha|\tau_1-\tau_2|}. \quad (3.52)$$

Дисперсия случайной величины c равна C^2. Помеха представляет собой белый шум интенсивности σ^2:

$$R_{nn}(\tau_1, \tau_2) = \sigma^2\delta(\tau_1 - \tau_2). \quad (3.53)$$

Интегральное уравнение (3.19) принимает вид:

$$\int_0^t W(t, \tau)[A^2e^{-\alpha|\tau_1-\tau_2|} + \sigma^2\delta(\tau_1-\tau_2)]\,d\tau_2 = Z(t, \tau_1), \quad (3.54)$$

где

$$Z(t, \tau_1) = A^2 e^{-\alpha|t-\tau_1|} + C^2[1+\lambda(t)], \tag{3.55}$$

$$\lambda(t) = -\int_0^t W(t, \tau)\, d\tau. \tag{3.56}$$

Вид дифференциального оператора $Q\left(\frac{d}{d\tau_1}\right)$ легко установить из рассмотрения первого слагаемого ядра:

$$A^2 e^{-\alpha|\tau_1-\tau_2|} = \begin{cases} A^2 e^{-\alpha\tau_1} e^{\alpha\tau_2} & \text{при} \quad \tau_1 > \tau_2, \\ A^2 e^{\alpha\tau_1} e^{-\alpha\tau_2} & \text{при} \quad \tau_1 < \tau_2. \end{cases} \tag{3.57}$$

Переменная τ_1 входит сюда только через множители $e^{\alpha\tau_1}$ и $e^{-\alpha\tau_1}$, поэтому

$$Q\left(\frac{d}{d\tau_1}\right) = \left(\frac{d^2}{d\tau_1^2} - \alpha^2\right). \tag{3.58}$$

Второе слагаемое ядра обращается в нуль при $\tau_1 \neq \tau_2$ и, следовательно, никак не влияет на выбор оператора $Q\left(\frac{d}{d\tau_1}\right)$. Выражение (3.58) легко получить и из знаменателя спектральной плотности входного сигнала.

В результате применения оператора (3.58) к интегральному уравнению (3.54) получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 W(t, \tau)}{d\tau^2} - \xi^2 W(t, \tau) = -C^2 \xi^2 \lambda(t), \tag{3.59}$$

где

$$\xi^2 = \alpha^2 + \frac{2\alpha A^2}{\sigma^2}. \tag{3.60}$$

Решение этого уравнения определяет полное решение интегрального уравнения, а не его регулярную часть, поскольку входной сигнал содержит белый шум. Таким образом,

$$W(t, \tau) = A_1(t) e^{\xi\tau} + A_2(t) e^{-\xi\tau} + C^2 \lambda(t). \tag{3.61}$$

Постоянные $A_1(t)$, $A_2(t)$ и $\lambda(t)$ получаются из условия тождественного удовлетворения интегрального уравне-

ния (3.54) по переменной τ. Получим следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} -A_1\frac{1}{\xi+\alpha}+A_2\frac{1}{\xi-\alpha}-\lambda\frac{\alpha C^2}{\xi^2\sigma^2}&=0,\\ A_1\frac{e^{\xi t}}{\xi-\alpha}-A_2\frac{e^{-\xi t}}{\xi+\alpha}-\lambda\frac{\alpha C^2}{\xi^2\sigma^2}&=1,\\ A_1\frac{e^{\xi t}-1}{\xi}+A_2\frac{1-e^{-\xi t}}{\xi}+\lambda\left(1+\frac{\alpha^2C^2}{\xi^2\sigma^2}t\right)&=1.\end{aligned}\right\} \quad (3.62)$$

Выражения для искомых постоянных оказываются весьма громоздкими даже при наложении условия несмещенности относительно постоянной составляющей полезного сигнала. Поэтому при реализации оптимального фильтра коэффициенты целесообразно аппроксимировать более простыми выражениями.

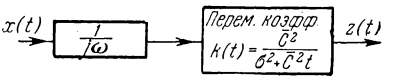

Рис. 3.8.

При малых интервалах времени работы фильтра $\left(\text{при } t \ll \frac{1}{\alpha}\right)$ выражение (3.52) можно разложить в ряд. В первом приближении ограничимся одним слагаемым, т. е. примем

$$R_{rr}(\tau_1, \tau_2) \approx A^2. \quad (3.63)$$

Это означает, что в данном случае недетерминированная составляющая полезного сигнала считается постоянной. Импульсная переходная функция оптимального фильтра при этом имеет простой вид:

$$W(t, \tau)=\frac{\overline{C}^2}{\sigma^2+\overline{C}^2 t} \qquad (\overline{C}^2=A^2+C^2). \quad (3.64)$$

Дисперсия ошибки оказывается равной:

$$D_0(t)=\frac{\sigma^2\overline{C}^2}{\sigma^2+\overline{C}^2 t}. \quad (3.65)$$

Блок-схема фильтра с импульсной переходной функцией (3.64) изображена на рис. 3.8. При условии несмещенности относительно постоянного полезного сигнала

($C \to \infty$) получаем:

$$W(t, \tau) = \frac{1}{t}, \tag{3.66}$$

$$D_0(t) = \frac{\sigma^2}{t}. \tag{3.67}$$

При увеличении t выражения (3.64)—(3.67) перестают быть справедливыми. В этом случае необходимо решение полной системы уравнений (3.62).

При $t \to \infty$ и конечных значениях C дисперсия ошибки стремится к конечной величине

$$D_0(\infty) = \sigma^2(\xi - \alpha), \tag{3.68}$$

которая не зависит от t (решение задачи при $t \to \infty$ может быть получено при использовании методики, рассматриваемой в § 3.4). Таким образом, при достаточно больших значениях t точность фильтра определяется соотношением характеристик только недетерминированных составляющих сигнала. Это обстоятельство можно использовать для построения стационарного фильтра, близкого к оптимальному при больших значениях t. Пусть Φ_0 — стационарный фильтр, оптимальный при $t \to \infty$ для сигнала, не содержащего детерминированной составляющей. Легко показать, что этот фильтр будет представлять собой звено с передаточной функцией

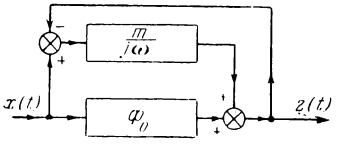

Рис. 3.9.

$$K(j\omega) = \frac{\xi - \alpha}{j\omega + \xi}. \tag{3.69}$$

Введем теперь интегральную связь с малым коэффициентом m (рис. 3.9). Свойства фильтра в этом случае будут определяться вместо функции (3.69) передаточной функцией

$$K^*(j\omega) = \frac{(\xi - \alpha + m)\, j\omega + m\xi}{(j\omega + m)(j\omega + \xi)}. \tag{3.70}$$

Если $m \ll \xi$, то дисперсии ошибок фильтров с передаточными функциями (3.70) и (3.69) будут практически одинаковы. Между тем передаточная функция (3.70)

обеспечивает астатизм фильтра, т. е. дает нулевую установившуюся ошибку от постоянной составляющей полезного сигнала. Таким образом, основные свойства фильтра при больших значениях t определяются практически только недетерминированными составляющими входного сигнала.

3.3. Некоторые качественные особенности оптимальных решений

Формулировка прикладных задач во всей возможной полноте обычно приводит к значительному усложнению процесса решения и к громоздким алгоритмам, с трудом поддающимся упрощениям. Поэтому при математической постановке задач желательно заранее предусмотреть возможности упрощенного представления характеристик сигналов и условий преобразования, а для этого необходимо иметь представление о том, какие факторы являются существенными, а какие несущественными. Ниже дан анализ некоторых особенностей оптимальных решений. Учет этих особенностей во многих случаях позволяет упрощать решения, сохраняя смысл исходных физических задач.

1. Предположим, что статистически независимые полезный сигнал и помеха содержат только детерминированные составляющие:

$$s(t)=\sum_{i=1}^{r} c_i f_i(t), \tag{3.71}$$

$$n(t)=\sum_{i=1}^{r} b_i f_i(t), \tag{3.72}$$

причем известны матрицы корреляционных моментов

$$C_{ij}=M\{c_i c_j\}, \qquad B_{ij}=M\{b_i b_j\}. \tag{3.73}$$

В этом случае интегральное уравнение (3.19) распадается на r уравнений:

$$\sum_{j=1}^{r}\left\{f_j(t)-\frac{C_{ij}+B_{ij}}{C_{ij}}\int_{t_0}^{t_1} W(t,\tau) f_j(\tau)\,d\tau\right\}=0 \tag{3.74}$$

$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ r).$$

При учете этих соотношений дисперсия ошибки принимает вид:

$$D_0(t)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\frac{C_{ij}B_{ij}}{C_{ij}+B_{ij}}f_i(t)f_j(t). \qquad (3.75)$$

Практически во всех интересных случаях при одних сочетаниях индексов i и j выполняются неравенства

$$|B_{ij}|\gg|C_{ij}|, \qquad (3.76)$$

а при других сочетаниях —

$$|B_{ij}|\ll|C_{ij}|. \qquad (3.77)$$

В этих случаях выражение (3.75) может быть записано приближенно:

$$D_0(t)\approx\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\min(B_{ij},C_{ij})f_i(t)f_j(t). \qquad (3.78)$$

Сравним это выражение с выражением дисперсии полезного сигнала

$$D_s(t)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}C_{ij}f_i(t)f_j(t) \qquad (3.79)$$

и выражением дисперсии помехи

$$D_n(t)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}B_{ij}f_i(t)f_j(t). \qquad (3.80)$$

Из сравнения видно, что составляющие дисперсии ошибки оптимального фильтра представляют собой наименьшие из составляющих дисперсий полезного сигнала и помехи. В частном случае, если в полезный сигнал и в помеху входят разные составляющие (любому $B_{ij}\neq0$ соответствует $C_{ij}=0$ и наоборот), дисперсия ошибки обращается в нуль.

Из полученных результатов может быть сделано несколько выводов:

а) Слишком упрощенная постановка прикладной задачи, когда разница в свойствах полезного сигнала и помехи грубо учитывается как различие в виде детерминированных составляющих, приводит к тому, что невозможно оценить реально достижимую точность. Так, рас-

пространенная модель, в которой полезный сигнал представляется в виде полинома, а помеха считается синусоидальной, не годится при решении задачи синтеза в случае незаданной структуры: кажется возможным в этом случае получить идеальную точность. Следовательно, для получения реальных результатов необходимо учитывать недетерминированные составляющие сигналов.

б) Если полезный сигнал и помеха имеют детерминированные составляющие одинакового вида, то оптимальное преобразование не может снизить дисперсии составляющих по сравнению с меньшими из дисперсий составляющих полезного сигнала и помехи. В частности, если и полезный сигнал и помеха имеют постоянные составляющие, то в дисперсию ошибки добавочным слагаемым войдет дисперсия постоянной составляющей помехи, если она меньше дисперсии постоянной составляющей полезного сигнала, причем вид оптимального преобразования не будет зависеть от дисперсии постоянной ошибки. Сказанное, строго говоря, относится к случаю отсутствия недетерминированных составляющих. Однако ясно, что при таком усложнении сигнала точность не может повыситься, и полученное ограничение точности останется справедливым. Поэтому в дальнейшем при решении задач в выражениях полезного сигнала и помехи нигде не сохраняются составляющие одного и того же вида.

2. Предположим теперь, что полезный сигнал является детерминированной случайной функцией времени, а помеха — недетерминированной функцией времени. Задачи этого типа считаются самыми распространенными среди задач оптимальной фильтрации на конечном времени. Чаще всего полезный сигнал представляют в виде полинома. Если при этом помеха стационарна, то для всех решенных задач [31] обнаруживается важное свойство: при $t \to \infty$ дисперсия ошибки стремится к нулю. Это означает, что когда полезный сигнал детерминирован, оптимальная задача имеет практический смысл только в определенном интервале времени; при дальнейшем увеличении интервала времени поступления сигнала ошибки фильтрации становятся пренебрежимо малыми.

3. Если полезный сигнал включает как детерминированные, так и недетерминированные составляющие, а помеха недетерминирована, то дисперсия ошибки оптимального фильтра сначала существенным образом зависит от детерминированных составляющих, затем зависит в меньшей степени и, наконец, практически перестает от них зависеть. Таким образом, установившаяся дисперсия ошибки (если дисперсия ошибки не нарастает безгранично) определяется только недетерминированными составляющими сигналов. В примере 2 в § 3.2 показано, как в частном случае практически может быть обеспечена асимптотическая несмещенность фильтра. По-видимому, во многих случаях при детерминированных составляющих другого вида асимптотическая несмещенность может быть обеспечена аналогичным образом путем введения слабых связей, охватывающих стационарный фильтр, построенный при учете только недетерминированных составляющих полезного сигнала и помехи. Поэтому представляет значительный интерес рассмотрение задач оптимальной фильтрации при наличии только недетерминированных составляющих сигналов и при достаточно большом времени их поступления.

3.4. Методы решения интегрального уравнения для бесконечного интервала времени

Примем, что полезный сигнал и помеха стационарны и представляют собой недетерминированные функции времени с дробно-рациональными спектральными плотностями, а время поступления сигнала $x(t)$ достаточно велико (в пределе бесконечно). Задача оптимальной фильтрации при таких условиях может быть, конечно, решена обобщенным методом Заде — Рагаззини, однако решение значительно облегчается, если перейти от временно́й области к частотной.

В рассматриваемом случае интегральное уравнение (3.14) удобно записать в форме

$$\int_0^\infty W(t-\tau_2)\,R_{xx}(\tau_1-\tau_2)\,d\tau_2 = R_{lx}(\tau_1) \quad (0 \leqslant \tau_1 < \infty). \qquad (3.81)$$

При этом уже принято во внимание, что сигналы стационарны и стационарен сам искомый фильтр:

$$W(t, \tau) \equiv W(t-\tau). \tag{3.82}$$

Применяя к уравнению (3.81) преобразование Фурье, получаем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [K(j\omega) S_{xx}(\omega) - S_{lx}(\omega)]\, d\omega = 0. \tag{3.83}$$

Здесь $S_{xx}(\omega)$ и $S_{lx}(\omega)$ — спектральные плотности, соответствующие корреляционным функциям $R_{xx}(\tau)$ и $R_{lx}(\tau)$:

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau, \qquad S_{lx}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{lx}(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau, \tag{3.84}$$

а $K(j\omega)$ — передаточная функция искомого фильтра. Легко показать (см., например, [7, 37]), что при некоторых ограничениях из выражения (3.83) следует

$$K(j\omega) S_{xx}(\omega) - S_{lx}(\omega) = X(j\omega), \tag{3.85}$$

где $X(j\omega)$ —неизвестная функция, не имеющая особенностей (корней и полюсов) в верхней полуплоскости комплексной плоскости ω. В то же время искомая передаточная функция $K(j\omega)$ не может иметь особенностей в нижней полуплоскости. Это является следствием так называемого *условия физической осуществимости* [7]: фильтр может использовать только прошлые значения входного сигнала $x(t)$ и не может использовать будущих значений [$W(t-\tau) = 0$ при $t < \tau$].

Уравнение (3.85), в которое входят две неизвестные функции $K(j\omega)$ и $X(j\omega)$, может быть решено одним из двух способов, описанных ниже.

1. Способ факторизации [7].

Произведем факторизацию $S_{xx}(\omega)$, т. е. представим $S_{xx}(\omega)$ в виде

$$S_{xx}(\omega) = S_{xx}^{+}(\omega)\, S_{xx}^{-}(\omega). \tag{3.86}$$

Здесь $S_{xx}^{+}(\omega)$ не имеет особенностей в нижней полуплоскости, а $S_{xx}^{-}(\omega)$ — в верхней. Далее представим $S_{lx}(\omega)/S_{xx}^{-}(\omega)$ в виде

$$\frac{S_{lx}(\omega)}{S_{xx}^{-}(\omega)}=\left[\frac{S_{lx}(\omega)}{S_{xx}^{-}(\omega)}\right]_{+}+\left[\frac{S_{lx}(\omega)}{S_{xx}^{-}(\omega)}\right]_{-}. \tag{3.87}$$

Здесь первое слагаемое не имеет особенностей в нижней полуплоскости, а второе — в верхней. Такая операция иногда называется *сепарацией*. После того как указанные операции произведены, решение определяется следующим образом [7]:

$$K(j\omega)=\frac{1}{S_{xx}^{+}(\omega)}\left[\frac{S_{lx}(\omega)}{S_{xx}^{-}(\omega)}\right]_{+}. \tag{3.88}$$

Установившаяся дисперсия ошибки на выходе оптимального фильтра вычисляется по формуле

$$D_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[S_{ll}(\omega)-|K(j\omega)|^2 S_{xx}(\omega)]\,d\omega. \tag{3.89}$$

При дробно-рациональных спектральных плотностях вычисления интегралов не требуется — для них в общем виде составлены таблицы [26].

2. Способ неопределенных коэффициентов.

Решение уравнения (3.85) можно формально записать следующим образом:

$$K(j\omega)=\frac{S_{lx}(\omega)}{S_{xx}(\omega)}+\frac{X(j\omega)}{S_{xx}(\omega)}. \tag{3.90}$$

Из этого выражения могут быть определены полюсы искомой передаточной функции $K(j\omega)$. Действительно, по условию $K(j\omega)$ может иметь полюсы только в верхней полуплоскости. Для правой части выражения (3.90) полюсы, лежащие в верхней полуплоскости, могут представлять собой или корни $S_{xx}(\omega)$, или полюсы $S_{lx}(\omega)$. Обычно полюсы спектральной плотности $S_{lx}(\omega)$ совпадают с полюсами $S_{xx}(\omega)$, поэтому в первом слагаемом выражения (3.90) соответствующие множители сокращаются. Тогда полюсами $K(j\omega)$ являются только корни $S_{xx}(\omega)$, лежащие в верхней полуплоскости. По условию

$X(j\omega)$ не имеет полюсов в верхней полуплоскости и, следовательно, не может добавить дополнительные полюсы. Отсюда следует, что $K(j\omega)$ нужно искать в виде

$$K(j\omega)=\sum_{i=1}^{h}\frac{A_i}{j\omega+\alpha_i}, \tag{3.91}$$

где $j\alpha_i$ — те корни уравнения $S_{xx}(\omega)=0$, которые лежат в верхней полуплоскости, а A_i — неопределенные коэффициенты. Эти коэффициенты могут быть определены из условий тождественного удовлетворения уравнения (3.85) по переменной ω. Подставляя выражения (3.91) в уравнение (3.85) и приравнивая нулю слагаемые с полюсами в верхней полуплоскости, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно A_i. Можно показать, что при этом число независимых уравнений будет равно числу неизвестных.

Коэффициенты A_i могут быть определены и без использования уравнения (3.85). Практически не к большим вычислительным трудностям приводит такой путь: A_i считаются неопределенными, вычисляется дисперсия ошибки, зависящая от них, а затем минимизируется как функция нескольких переменных.

Заметим, что полюсы передаточной функции $K(j\omega)$ находятся из того же уравнения, что и корни характеристического уравнения в случае конечного времени поступления сигнала (при стационарности сигналов корни характеристического уравнения находятся как корни числителя спектральной плотности недетерминированной части входного сигнала). Однако для конечного времени поступления сигнала должны быть взяты все корни, а для бесконечного — только лежащие в верхней полуплоскости.

3.5. Метод логарифмических характеристик

При практическом решении задач удобно использовать описываемый ниже приближенный метод, предлагаемый автором и основанный на использовании кривых спектральных плотностей, построенных в логарифмической шкале, — логарифмических характеристик.

а) Примем сначала, что в сигнале и помехе нет ярко выраженных «резонансных» частот, так что кривые $S_{ss}(\omega)$ и $S_{nn}(\omega)$ не имеют острых максимумов. Предположим также, что все корни и полюсы спектральных плотностей $S_{ss}(\omega)$ и $S_{nn}(\omega)$ различны. Известно [26], что корни и полюсы спектральных плотностей группируются по парам или четверкам. Действительно, поскольку в спектральные плотности входят только четные степени ω, то каждому корню (или полюсу) $\omega=+j\alpha$ соответствует корень (или полюс) $\omega=-j\alpha$, а каждой паре $\omega=\pm\beta+j\gamma$ — пара $\omega=\pm\beta-j\gamma$. Если пары или четверки корней или полюсов спектральных плотностей $S_{ss}(\omega)$ и $S_{nn}(\omega)$ по модулю значительно отличаются друг от друга, то в логарифмической сетке кривые $S_{ss}(\omega)$ и $S_{nn}(\omega)$ практически имеют вид ломаных, составленных из отрезков прямых с различным наклоном (рис. 3.10). Наклон каждого отрезка всегда кратен 12 децибелам на

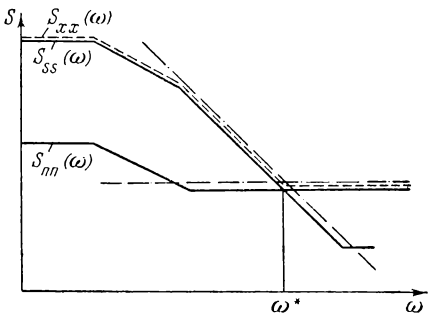

Рис. 3.10.

октаву. Паре корней (полюсов) соответствует уменьшение (увеличение) наклона на 12 децибел на октаву, четверке корней (полюсов) — на 24 децибела на октаву.

Суммарная спектральная плотность $S_{xx}(\omega)=S_{ss}(\omega)+S_{nn}(\omega)$ также может быть представлена в виде ломаной (на рис. 3.10 показана пунктиром). Очевидно, что при тех значениях ω, при которых $S_{ss}(\omega)\gg S_{nn}(\omega)$, кривая $S_{xx}(\omega)$ практически совпадает с кривой $S_{ss}(\omega)$, а при тех значениях ω, при которых $S_{ss}(\omega)\ll S_{nn}(\omega)$, кривая $S_{xx}(\omega)$ практически совпадает с кривой $S_{nn}(\omega)$.

Если рассматривать простейший случай, когда кривые $S_{ss}(\omega)$ и $S_{nn}(\omega)$ имеют одну точку пересечения и кривая $S_{ss}(\omega)$ пересекает кривую $S_{nn}(\omega)$ сверху вниз, как показано на рис. 3.10 (этот случай чаще всего встречается в приложениях), то на кривой $S_{xx}(\omega)$ появляется только одна новая точка перелома (при $\omega=\omega^*$). Изменение наклона кривой $S_{xx}(\omega)$ при $\omega=\omega^*$ может составлять 12, 24 и т. д. децибел на октаву. Это соответствует паре, четверке и т. д. корней уравнения

$$S_{xx}(\omega)=S_{ss}(\omega)+S_{nn}(\omega)=0, \tag{3.92}$$

отличных от корней двух уравнений

$$S_{ss}(\omega)=0 \quad \text{и} \quad S_{nn}(\omega)=0. \tag{3.93}$$

Приближенные значения этих корней могут быть легко определены. Вблизи значения $\omega=\omega^*$ выражения для спектральных плотностей могут быть заменены приближенными:

$$S_{ss}(\omega)\approx\frac{A^2}{\omega^{2r}}, \qquad S_{nn}(\omega)\approx\frac{B^2}{\omega^{2l}}. \tag{3.94}$$

Такая замена соответствует «спрямлению» кривых спектральных плотностей (на рис. 3.10 штрих-пунктирные линии). Следовательно, рассматриваемая группа корней может быть получена из решения уравнения

$$\omega^{2(r-l)}+\frac{A^2}{B^2}=0. \tag{3.95}$$

В результате может быть сформулирован простой приближенный метод определения корней уравнения $S_{xx}(\omega)=0$:

при $\omega<\omega^*$ эти корни совпадают с корнями уравнения $S_{ss}(\omega)=0$,

при $\omega>\omega^*$ эти корни совпадают с корнями уравнения $S_{nn}(\omega)=0$,

при $\omega\approx\omega^*$ добавляются корни уравнения (3.95).

б) Описанный прием легко распространить на случай, когда спектральные плотности имеют ярко выраженные пики — острые максимумы. В зависимости от взаимного расположения кривых спектральных плотностей пики могут иметь существенное значение или быть

несущественными. Те пики, которые не дают дополнительных точек пересечения кривых спектральных плотностей (на рис. 3.11 в точках $\omega=\omega_1$ и $\omega=\omega_2$), являются несущественными и не изменяют описанной выше методики. Важны те пики, при которых появляются дополнительные пары точек пересечения (на рис. 3.11 в точке

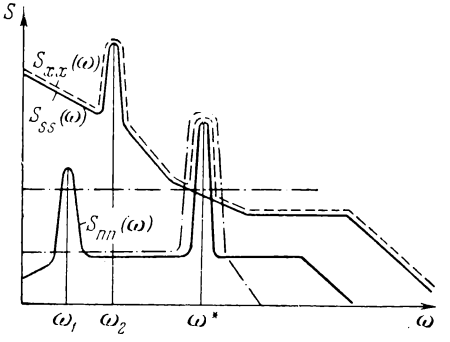

Рис. 3.11.

$\omega\approx\omega^*$). Приближенные выражения соответствующих корней могут быть легко получены, если для выражений спектральных плотностей вблизи точки $\omega=\omega^*$ использовать аппроксимации

$$S_{ss}(\omega)=A^2, \qquad S_{nn}(\omega)=\frac{B^2}{(\omega^2-\beta^2-\gamma^2)^2+4\gamma^2\omega^2}. \qquad (3.96)$$

Таким аппроксимациям соответствует замена исходных кривых $S_{ss}(\omega)$ и $S_{nn}(\omega)$ на рис. 3.11 штрих-пунктирными. Следовательно, искомые дополнительные корни находятся из решения простого уравнения

$$(\omega^2-\beta^2-\gamma^2)^2+4\gamma^2\omega^2=\frac{B^2}{A^2}. \qquad (3.97)$$

В общем случае, когда кривые $S_{ss}(\omega)$ и $S_{nn}(\omega)$ имеют несколько точек пересечения, как показано на рис. 3.12, причем соответствующие значения ω_1^*, ω_2^*, ω_3^* достаточно сильно различаются, то группы корней можно определять независимо: при определении первой группы корней используются аппроксимирующие выражения вида

(3.96) (им соответствуют кривые *1* и *2*), второй группы корней — выражения вида (3.94) (им соответствуют кривые *3* и *4*) и т. д.

Таким образом, использование логарифмических характеристик позволяет весьма просто находить полюсы

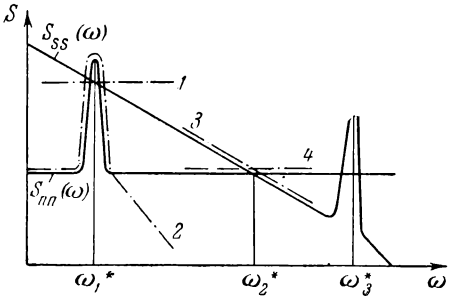

Рис. 3.12.

искомой передаточной функции. Очевидно, что для конечного времени поступления сигнала использование описанного выше приема также окажется полезным [на этапе нахождения общего решения дифференциального уравнения (3.26)]. Однако, как показано ниже, для бесконечного времени поступления сигнала применение логарифмических характеристик в ряде случаев приводит к полному определению передаточной функции.

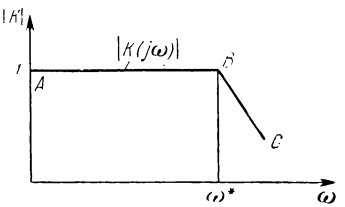

Рис. 3.13.

Будем для простоты считать, что кривые спектральных плотностей имеют такой вид, как показано на рис. 3.10. При $0<\omega<\omega^*$ можно считать $S_{xx}(\omega)\approx S_{ss}(\omega)$. Для этого диапазона частот по формуле (3.88) находим, что $K(j\omega)\approx 1$. В результате получается первый — горизонтальный — участок на кривой $|K(j\omega)|$ (рис. 3.13). Как и для спектральных плотностей, построение производится в логарифмической сетке. При значении $\omega\approx\omega^*$ появляются корни $S_{xx}(\omega)$, не совпадающие с корнями

$S_{ss}(\omega)$. Как отмечалось при анализе формулы (3.90), те из этой группы корней, которые лежат в верхней полуплоскости, являются полюсами $K(j\omega)$. Поэтому кривая $|K(j\omega)|$ на рис. 3.13 в точке B получает перелом вниз. Вообще говоря, это не определяет однозначно наклон этой кривой на участке BC, так как при $\omega \approx \omega^*$ помимо полюсов кривая $K(j\omega)$ может иметь также и корни. Однако число корней должно быть меньше числа полюсов по крайней мере на единицу, поскольку из формулы (3.88) получается, что при $\omega > \omega^*$, т. е. при $S_{ss}(\omega) < S_{xx}(\omega)$, должно быть $|K(j\omega)| < 1$.

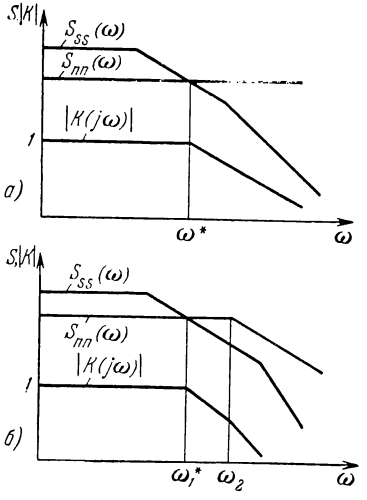

Рис. 3.14.

Оставим пока в стороне вопрос о выборе корней выражения $K(j\omega)$ и рассмотрим дальнейшее поведение кривой $|K(j\omega)|$. При $\omega > \omega^*$ корни спектральной плотности $S_{xx}(\omega)$ практически совпадают с корнями $S_{nn}(\omega)$. Те из них, которые лежат в верхней полуплоскости, не могут сократиться в выражении (3.88) с корнями $S_{ss}(\omega)$. Поэтому каждому перелому кривой $S_{nn}(\omega)$ должен соответствовать перелом кривой $|K(j\omega)|$.

Предположим теперь, что кривая $S_{nn}(\omega)$ после точки $\omega \approx \omega^*$ не имеет значительных подъемов, так что, например,

$$S_{nn}(\omega > \omega^*) < S_{nn}(\omega^*).$$

В этом случае практически нет необходимости во введении дополнительных корней или полюсов в передаточную функцию $K(j\omega)$. Рассмотрим два варианта продолжения кривой $S_{nn}(\omega)$ (рис. 3.14, *а* и *б*). В первом случае при $\omega > \omega^*$ спектральная плотность $S_{nn}(\omega)$ не имеет корней и полюсов, и поэтому кривая $|K(j\omega)|$ (рис. 3.14, *а*) не имеет дополнительных переломов. Во втором случае

кривая $|K(j\omega)|$ должна иметь дополнительный перелом (рис. 3.14, *б*). Однако различие кривых (рис. 3.14, *а* и *б*) появляется при тех значениях ω, при которых в обоих вариантах $|K(j\omega)| \ll 1$. Эта коррекция «хвоста» частотной характеристики фильтра мало сказывается на величине дисперсии ошибки. Поэтому при $\omega > \omega^*$ можно принять форму частотной характеристики фильтра без дополнительных переломов (рис. 3.14, *а*) независимо от корней и полюсов $S_{nn}(\omega)$.

Если кривые спектральных плотностей $S_{ss}(\omega)$ и $S_{nn}(\omega)$ имеют две точки пересечения вблизи острого максимума одной из них (рис. 3.11), то можно показать, что кривая $|K(j\omega)|$ имеет такой вид, как показано на рис. 3.15. В этом случае приближенное выражение для $K(j\omega)$ может быть записано при использовании

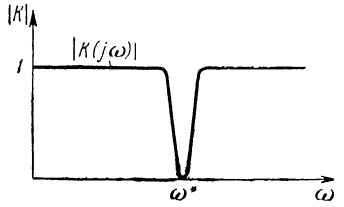

Рис. 3.15.

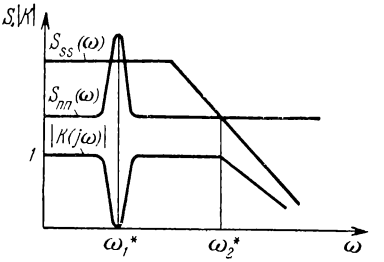

Рис. 3.16.

выражений только двух корней уравнения $S_{xx}(\omega) = 0$, имеющих отрицательные вещественные части.

В общем случае, когда кривые спектральных плотностей имеют несколько точек пересечения (рис. 3.16), то вид кривой $|K(j\omega)|$ может быть установлен путем сопоставления отдельных участков интересующего нас диапазона по ω с рассмотренными ранее более простыми вариантами. Так, вблизи значения $\omega = \omega_1^*$ кривая $|K(j\omega)|$ имеет такой вид, как на рис. 3.15, вблизи значения $\omega \approx \omega_2^*$ — как на рис. 3.13. В результате получаем кривую, изображенную на рис. 3.16. Аналитическое выражение для передаточной функции часто также может быть получено при использовании корней уравнения $S_{xx}(\omega) = 0$, соответствующих точкам пересечения.

Таким образом, частотная характеристика фильтра определяется в основном только локальным поведением кривых спектральных плотностей $S_{ss}(\omega)$ и $S_{nn}(\omega)$ вблизи точек их пересечения. Отсюда следует, что оптимальные фильтры для случаев, изображенных на рис. 3.17,*а*, *б*, *в*, оказываются практически одинаковыми. Естественно рассчитывать передаточную функцию оптимального фильтра, исходя из самых простых выражений спектральных плотностей. В частности, при одной точке пересечения кривых спектральных плотностей желательно было бы использовать «спрямленные» кривые спектральных плотностей (на рис. 3.17, *а*, *б*, *в* показаны пунктирными линиями). Однако следует иметь в виду, что при этом понятие «спектральная плотность» может потерять смысл.

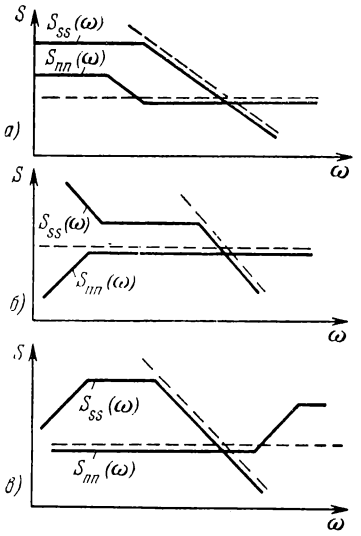

Рис. 3.17.

Многие авторы (см., например, [31, 37]) получают правильные результаты при решении задач оптимальной фильтрации, оперируя с формально составленными выражениями, получающимися в результате использования известной зависимости для спектральных плотностей входного сигнала $x(t)$ и сигнала $y(t)$ на выходе системы с передаточной функцией $H(j\omega)$

$$S_{yy}(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_{xx}(\omega), \tag{3.98}$$

не удовлетворяющими, однако, условиям конечности интеграла

$$I_y = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{yy}(\omega)\, d\omega. \tag{3.99}$$

Если интеграл (3.99) не сходится, то это означает, что функция $y(t)$ нестационарна и для нее не существует спектральной плотности. Однако использование таких формально составленных выражений (в дальнейшем будем их называть *условными спектральными плотностями*) обычно допустимо. Проверка результатов может быть осуществлена сравнением с решениями, получающимися методом Заде—Рагаззини при предельном переходе к бесконечному времени поступления сигнала. Оказывается, таким образом, что частотные методы могут быть с успехом использованы для случайных процессов более широкого класса, чем стационарные, по крайней мере при условии, что ошибка стационарна.

Использование условных спектральных плотностей простейшего вида позволит предельно облегчить процесс решения. «Спрямление» кривых спектральных плотностей в логарифмической сетке соответствует замене действительных спектральных плотностей выражениями

$$S(\omega) = A_0^2, \quad \frac{A_1^2}{\omega^2}, \quad \frac{A_2^2}{\omega^4}, \ldots \tag{3.100}$$

Таким образом, когда кривые спектральных плотностей имеют только одну точку пересечения, мы приходим к набору типичных задач со следующими парами приближенных выражений спектральных плотностей:

$$S_{ss}(\omega) = \frac{A_1^2}{\omega^2}, \qquad S_{nn}(\omega) = B_0^2,$$

$$S_{ss}(\omega) = \frac{A_2^2}{\omega^4}, \qquad S_{nn}(\omega) = B_0^2,$$

$$S_{ss}(\omega) = \frac{A_2^2}{\omega^4}, \qquad S_{nn}(\omega) = \frac{B_1^2}{\omega^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Как отмечалось ранее, характерным является такое положение, когда кривая $S_{ss}(\omega)$ пересекает кривую $S_{nn}(\omega)$ сверху вниз, поэтому степень знаменателя $S_{ss}(\omega)$ выше, чем степень знаменателя $S_{nn}(\omega)$. Полюсы искомой передаточной функции определяются как корни уравнения вида (3.95), лежащие в верхней полуплоскости. Характерно, что модули всех этих корней равны.

В случае, представляющем, по-видимому, наибольший интерес, когда $S_{nn}(\omega)=B^2$ (вблизи точки пересечения кривых спектральных плотностей помеху можно считать белым шумом), передаточная функция оптимального фильтра полностью определяется из соображений конечности дисперсии ошибки. Действительно, рассмотрим в этом случае общее выражение дисперсии ошибки

$$D=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[|1-K(j\omega)|^2 S_{ss}(\omega)+|K(j\omega)|^2 S_{nn}(\omega)]\,d\omega. \tag{3.101}$$

Если $S_{ss}(\omega)=\frac{A_k^2}{\omega^{2k}}$, то передаточная функция имеет в знаменателе полином k-й степени. Из условия конечности выражения (3.101) следует, что $[1-K(j\omega)]$ должно иметь нулевой корень кратности «k» (при $\omega\to 0$ первое слагаемое подынтегрального выражения должно оставаться конечным). С другой стороны, из условия конечности выражения (3.101) следует, что степень числителя передаточной функции $K(j\omega)$ должна быть ниже степени знаменателя (при $\omega\to\infty$ второе слагаемое подынтегрального выражения должно стремиться к нулю). Следовательно, если знаменатель искомой передаточной функции записать в виде

$$R(j\omega)=(j\omega)^k+R_1(j\omega), \tag{3.102}$$

где $R_1(j\omega)$ — полином степени $(k-1)$, то искомая передаточная функция будет иметь вид:

$$K(j\omega)=\frac{R_1(j\omega)}{R(j\omega)}. \tag{3.103}$$

В частности,
при $k=1$

$$K(j\omega)=\frac{\rho}{j\omega+\rho}\qquad\left(\rho^2=\frac{A_1^2}{B^2}\right), \tag{3.104}$$

при $k=2$

$$K(j\omega)=\frac{2\rho j\omega+2\rho^2}{(j\omega)^2+2\rho j\omega+2\rho^2}\qquad\left(\rho^4=\frac{A_2^2}{4B^2}\right), \tag{3.105}$$

при $k=3$

$$K(j\omega)=\frac{2\rho(j\omega)^2+2\rho^2 j\omega+\rho^3}{(j\omega)^3+2\rho(j\omega)^2+2\rho^2 j\omega+\rho^3}\qquad\left(\rho^6=\frac{A_3^2}{B^2}\right)\qquad(3.106)$$

и т. д.

Заметим, что при $k=1$ фильтр обладает астатизмом первого порядка, т. е. постоянная составляющая в полезном сигнале дает нулевую установившуюся ошибку; при $k=2$ фильтр обладает астатизмом второго порядка и т. д. Это свойство представляется практически очень ценным, так как недетерминированной составляющей полезного сигнала с условной спектральной плотностью $S_{ss}(\omega)=A_1^2/\omega^2$ обычно сопутствует детерминированная составляющая — случайная постоянная.

В случае, когда кривые спектральных плотностей имеют две точки пересечения вблизи пика одной из них (см. рис. 3.11), решение часто может быть получено также только из условия конечности выражения (3.101). В частности, если выражения условных спектральных плотностей имеют вид:

$$S_{ss}(\omega)=\frac{\omega^2 A^2}{(\omega^2-\omega_0^2)^2},\qquad S_{nn}(\omega)=\sigma^2,\qquad(3.107)$$

то единственное выражение передаточной функции с нужными полюсами, которое обеспечивает конечность выражения (3.101), имеет вид:

$$K(j\omega)=\frac{2\nu\omega_0 j\omega}{(j\omega)^2+2\nu\omega_0 j\omega+\omega_0^2}\qquad\left(\nu\approx\frac{A}{2\omega_0\sigma}\right).\qquad(3.108)$$

Применение описанных выше приемов ведет к тому, что рассчитанный таким образом фильтр оказывается несколько отличным от оптимального. Ниже для типичных случаев приведены соответствующие оценки точности.

Пример 1. а) Спектральные плотности полезного сигнала и помехи соответственно равны:

$$S_{ss}(\omega)=\frac{2\alpha A^2}{\omega^2+\alpha^2},\qquad S_{nn}(\omega)=\sigma^2.\qquad(3.109)$$

Кривые спектральных плотностей в логарифмической сетке изображены на рис. 3.18. Передаточная функция

оптимального фильтра [она определяется, например, по формуле (3. 88)] имеет вид:

$$K(j\omega)=\frac{\xi-\alpha}{j\omega+\xi}\qquad\left(\xi^2=\alpha^2+\frac{2\alpha A^2}{\sigma^2}\right).\qquad(3.110)$$

Установившаяся дисперсия ошибки оптимального фильтра равна:

$$D_0^{(1)}=\sigma^2(\xi-\alpha).\qquad(3.111)$$

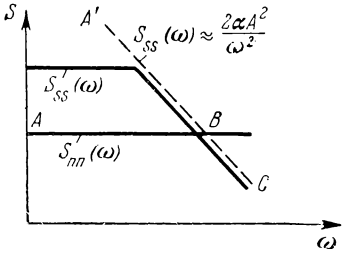

Рис. 3.18.

б) Заменим первое выражение (3.109) спектральной плотности полезного сигнала приближенным:

$$S_{ss}(\omega)\approx\frac{2\alpha A^2}{\omega^2}.\qquad(3.112)$$

Это соответствует на рис. 3.18 замене ломаной ABC прямой $A'BC$. Полезный сигнал в этом случае имеет смысл интеграла от белого шума. Передаточная функция фильтра имеет вид:

$$K(j\omega)=\frac{\rho}{j\omega+\rho}\qquad\left(\rho^2=\frac{2\alpha A^2}{\sigma^2}\right).\qquad(3.113)$$

Дисперсия ошибки фильтра (3.113) при упрощенном выражении спектральной плотности (3.112) записывается следующим образом:

$$D_0^{(2)}=\sigma^2\rho=(2\alpha)^{1/2}A\sigma.\qquad(3.114)$$

в) Для дисперсии ошибки фильтра (3.113) при исходных спектральных плотностях (3.109) получаем:

$$D_0^{(3)}=\sigma^2\rho\,\frac{\rho+\frac{\alpha}{2}}{\rho+\alpha}=D_0^{(2)}\,\frac{\rho+\frac{\alpha}{2}}{\rho+\alpha}.\qquad(3.115)$$

Предполагая малым отношение α/ρ, получаем приближенно:

$$D_0^{(1)}\approx D_0^{(2)}\left(1-\frac{\alpha}{\rho}\right),\qquad(3.116)$$

$$D_0^{(3)}\approx D_0^{(2)}\left(1-\frac{\alpha}{2\rho}\right).\qquad(3.117)$$

г) Отношение

$$\gamma_{2/1} = \frac{D_0^{(2)} - D_0^{(1)}}{D_0^{(1)}} \approx \frac{\alpha}{\rho} \tag{3.118}$$

определяет относительный проигрыш в точности из-за применения фильтра, рассчитанного приближенным методом, по сравнению с оптимальным при одних и тех же условиях работы.

Отношение

$$\gamma_{3/1} = \frac{D_0^{(3)} - D_0^{(1)}}{D_0^{(1)}} \approx \frac{\alpha}{2\rho} \tag{3.119}$$

определяет относительную ошибку в расчете точности, происходящую вследствие замены исходной задачи, в которой свойства сигналов характеризуются спектральными плотностями (3.109), упрощенной задачей. Из формул (3.118) и (3.119) видно, что при малых значениях $\sigma^2/\alpha A^2$, когда точка излома кривой спектральной плотности $S_{ss}(\omega)$ достаточно далека от точки пересечения кривых $S_{ss}(\omega)$ и $S_{nn}(\omega)$, использование условной спектральной плотности (3.112) допустимо как при определении передаточной функции оптимального фильтра, так и при расчете дисперсии ошибки.

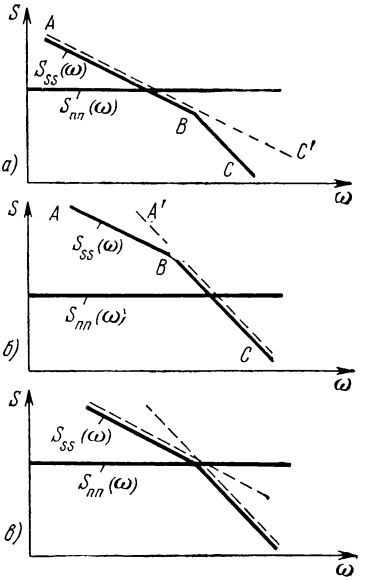

Рис. 3.19.

Пример 2. а) Условные спектральные плотности полезного сигнала и помехи имеют вид:

$$S_{ss}(\omega) = \frac{2\alpha^3 A^2}{\omega^2(\omega^2 + \alpha^2)}, \qquad S_{nn}(\omega) = \sigma^2. \tag{3.120}$$

Два варианта взаимного расположения кривых условных спектральных плотностей изображены на рис. 3.19,*а* и *б*. Передаточная функция оптимального фильтра при

точном решении имеет вид:

$$K(j\omega)=\frac{-b(\xi_1+\xi_2)+\xi_1\xi_2}{(j\omega)^2-(\xi_1+\xi_2)j\omega+\xi_1\xi_2}, \tag{3.121}$$

где

$$b=\frac{\xi_1\xi_2(\xi_1+\xi_2-\alpha)}{\xi_1\xi_2(\xi_1+\xi_2)-2\alpha\xi_1\xi_2+\alpha^2(\xi_1+\xi_2)-\alpha^3},$$

$$\xi_{1,2}^2=\frac{\alpha^2}{2}\left[1\pm j\left(\frac{8A^2}{\alpha\sigma^2}-1\right)^{1/2}\right] \qquad (\operatorname{Re}\xi_{1,2}<0).$$

Установившаяся дисперсия ошибки равна:

$$D_0^{(1)}=\sigma^2\left\{-\frac{\xi_1\xi_2[2\xi_1\xi_2-\alpha(\xi_1+\xi_2)+\alpha^2]}{2(\xi_1+\xi_2)[\xi_1\xi_2-\alpha(\xi_1+\xi_2)+\alpha^2]}-\frac{b(\xi_1+\xi_2)}{2}\right\}. \tag{3.122}$$

б) Предположим, что $\sigma^2>2A^2/\alpha$ (рис. 3.19, *а*). Для этого случая заменим ломаную ABC спектральной плотности прямой ABC'. Этим самым мы используем аппроксимацию $S_{ss}(\omega)$ выражением (3.112). При этом задача совпадает с задачей б) примера 1, передаточная функция фильтра будет иметь вид (3.113), а дисперсия ошибки будет определяться выражением (3.114).

в) Предположим, что $\sigma^2<2A^2/\alpha$ (рис. 3.19, *б*). Для этого случая ломаную ABC следует заменить уже другой прямой — прямой $A'BC$. При этом мы используем аппроксимацию

$$S_{ss}(\omega)\approx\frac{2\alpha^3A^2}{\omega^4}. \tag{3.123}$$

Получаем следующие выражения для передаточной функции и дисперсии ошибки:

$$K(j\omega)=\frac{2\rho j\omega+2\rho^2}{(j\omega)^2+2\rho j\omega+2\rho^2}\left[\rho=\left(\frac{\alpha^3}{2}\right)^{1/4}A^{1/2}\sigma^{-1/2}\right], \tag{3.124}$$

$$D_0^{(2)}=(2\alpha)^{3/4}A^{1/2}\sigma^{3/2}. \tag{3.125}$$

г) Если передаточная функция фильтра имеет вид (3.124), а дисперсия вычисляется по исходным выражениям (3.120), то получаем:

$$D_0^{(3)}=(2\alpha)^{3/4}A^{1/2}\sigma^{3/2}\left[1-\frac{\alpha(3\rho+\alpha)}{4(2\rho^2+3\alpha\rho+\alpha^2)}\right]. \tag{3.126}$$

д) Отношения $\gamma_{2/1}$ и $\gamma_{3/1}$, имеющие тот же смысл, что в примере 1, здесь оказываются приближенно равными:

$$\gamma_{2/1} = \frac{D_0^{(2)} - D_0^{(1)}}{D_0^{(1)}} \approx \frac{3\alpha}{4\rho}, \tag{3.127}$$

$$\gamma_{3/1} = \frac{D_0^{(3)} - D_0^{(1)}}{D_0^{(1)}} \approx \frac{3\alpha}{8\rho}. \tag{3.128}$$

Из рассмотрения этих выражений следует, что аппроксимацию (3.123) можно с успехом использовать при малых отношениях α/ρ вплоть до значения $\alpha/\rho = 1/2$.

е) При использовании метода логарифмических характеристик необходимо знать положение точки пересечения кривых спектральных плотностей и их наклон в окрестности этой точки. Рассмотрим наиболее неприятный для рассматриваемого метода частный случай, когда вблизи точки пересечения кривых происходит быстрое изменение наклона, т. е. примем, что $\sigma^2 = 2A^2/\alpha$ (см. рис. 3.19, *в*). При аппроксимации выражением (3.112) (по наклону левого отрезка) получаем:

$$D_0^{(2)'} = 2A^2. \tag{3.129}$$

При аппроксимации выражением (3.123) (по наклону правого отрезка) получаем:

$$D_0^{(2)''} = 2{,}82A^2. \tag{3.130}$$

В то же время точный расчет дает:

$$D_0^{(1)} = 1{,}46A^2. \tag{3.131}$$

Различия в величине среднеквадратичной ошибки составляют до 35%. Следовательно, даже когда вблизи точки пересечения наклон кривых быстро меняется, для прикидочного расчета с успехом может использоваться наклон любого из смежных отрезков.

ж) Во многих случаях не приведет к серьезным ошибкам неточное знание наклона одной из кривых спектральных плотностей. Пусть в действительности выражение условной спектральной плотности полезного

сигнала имеет вид (3.112), а оптимальный фильтр рассчитан в предположении, что она имеет вид:

$$S_{ss}(\omega) = \frac{2\alpha^3 A^2}{\omega^4}. \qquad (3.132)$$

Тогда при использовании такой передаточной функции фильтра получаем $\gamma_{2/1} = 1{,}25$, $\gamma_{3/1} = 1{,}48$. Величины среднеквадратичных ошибок различаются довольно значительно — до 30%, однако при прикидочных расчетах это обычно допустимо. Заметим, что если изменить положение, приняв, что в действительности условная спектральная плотность имеет вид (3.132), а передаточная функция фильтра рассчитана по выражению (3.112), то установившейся дисперсии ошибки не существует. Вообще, когда необходимо обеспечить конечность установившейся дисперсии ошибки, нельзя закладывать в расчет заниженный по сравнению с действительным наклон кривой условной спектральной плотности в области очень малых значений ω. При этом, как видно из предыдущего, завышение наклона допустимо.

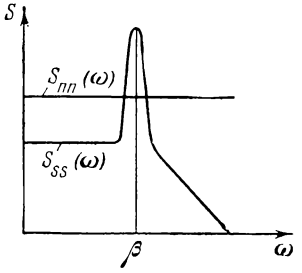

Рис. 3.20.

Пример 3. Спектральные плотности полезного сигнала и помехи имеют вид:

$$S_{ss}(\omega) = \frac{4\gamma(\beta^2+\gamma^2)C^2}{(\omega^2-\beta^2-\gamma^2)^2+4\gamma^2\omega^2}, \quad S_{пп}(\omega) = \sigma^2. \qquad (3.133)$$

Кривые спектральных плотностей изображены на рис. 3.20. Предположим, что выполняются условия:

$$\sigma^2 < \frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta^2\gamma}C^2, \quad \sigma^2 > \frac{4\gamma}{\beta^2+\gamma^2}C^2 \quad (\gamma < \beta). \qquad (3.134)$$

Первое из этих условий означает, что кривые спектральных плотностей пересекаются, второе — что точки пересечения достаточно близки. При условиях (3.134)

спектральную плотность полезного сигнала можно аппроксимировать более простым выражением

$$S_{ss}(\omega) \approx \frac{4\beta^2\gamma C^2}{(\omega^2-\beta^2)^2}. \qquad (3.135)$$

Приближенные выражения корней уравнения $S_{xx}(\omega)=0$ легко находятся. Тогда только из условий конечности дисперсии ошибки получаем:

$$K(j\omega)=\frac{2\nu\beta j\omega}{(j\omega)^2+2\nu\beta j\omega+\beta^2} \qquad \left(\nu=\frac{\gamma^{1/2}C}{\beta\sigma}\right). \qquad (3.136)$$

Дисперсия ошибки такого фильтра, рассчитанная по условной спектральной плотности (3.135), равна:

$$D_0^{(2)}=\frac{4}{\beta}\gamma^{1/2}C\sigma. \qquad (3.137)$$

Коэффициент $\gamma_{2/1}$ оказывается равным приближенно:

$$\gamma_{2/1}\approx 0{,}35\frac{\gamma}{\beta}. \qquad (3.138)$$

Видно, таким образом, что при малых значениях γ/β использование аппроксимации (3.135) дает достаточно точный результат.

3.6. О применимости решений, оптимальных для бесконечного времени поступления сигнала

Строго говоря, для нахождения оптимальных решений при любом, но конечном времени поступления сигнала применим только метод Заде—Рагаззини. Однако при достаточно больших интервалах времени оптимальный фильтр становится практически стационарным по крайней мере тогда, когда существует конечная установившаяся дисперсия ошибки. При этом сама передаточная функция может быть найдена с использованием весьма простой методики § 2.5. Практически желательно, не используя метод Заде — Рагаззини, определить, существует ли конечная установившаяся дисперсия ошибки и становится ли оптимальный фильтр в пределе

стационарным. Чтобы стационарное решение существовало, необходимы два условия:

1. Полезный сигнал и помеха должны иметь недетерминированные составляющие.

2. Условные спектральные плотности полезного сигнала и помехи могут иметь полюсы на вещественной оси комплексной плоскости ω, однако эти полюсы не должны совпадать. В частности, условные спектральные плотности полезного сигнала и помехи не могут одновременно иметь нулевые полюсы.

Стационарный фильтр, оптимальный для большого времени поступления сигнала, обладает вполне определенным быстродействием, которое может быть оценено постоянной времени

$$T = \frac{1}{\min |\operatorname{Re} \xi_i|}, \tag{3.139}$$

где ξ_i — полюсы передаточной функции. Фильтр обычно предназначен для непрерывной выработки выходных данных. Если можно примириться с потерей точности в интервалах времени, соизмеримых с T, то достаточно реализовать только стационарный фильтр. Наличие детерминированных составляющих не меняет этого вывода. Обычно оптимальный фильтр оказывается асимптотически несмещенным по отношению к детерминированным составляющим. Если же это условие автоматически не выполняется, то асимптотическая несмещенность достигается введением слабой связи (см. пример 2 в § 3.2).

В тех случаях, когда простоте реализации уделяется большое внимание, а постоянные времени стационарных фильтров оказываются слишком большими, можно

а) исходить из решения оптимальной задачи для конечного времени поступления сигналов. Если допустимо использовать только первые слагаемые разложения корреляционных функций в ряды и налагать условия несмещенности, то решения получаются сами по себе достаточно простыми. Если же это невозможно, то единственным известным по литературе способом упрощения, по-видимому, является метод аппроксимации свойств фильтров с конечной «памятью» с помощью логарифмических частотных характеристик [23];

б) сохранить предположение о бесконечном времени поступления сигнала, однако минимизировать установившуюся дисперсию ошибки при заданном значении интегральной квадратичной ошибки, возникающей в результате стандартного воздействия [22]. Однако такая постановка задачи часто дает тривиальные результаты: если интегральная квадратичная оценка не является жесткой, то реализация соответствующей системы получается добавлением слабой связи к фильтру, построенному без этого ограничения; если эта оценка требует существенно большего быстродействия, то именно этой оценкой и определяются в основном свойства фильтра, а требование минимума дисперсии ошибки перестает играть роль.

Основную предпосылку, принятую при изложении методов решения (полезный сигнал и помеха происходят от стационарных сигналов с дробно-рациональными спектральными плотностями), по-видимому, всегда можно считать допустимой, если имеется в виду практическая реализация фильтров. Тем не менее может представлять интерес расчетная оценка потенциальных возможностей преобразования в более сложных случаях, при учете параметрической нестационарности сигналов. Единственным общим методом в этом случае, по-видимому, является метод *канонических разложений*, разработанный В. С. Пугачевым [26]. При «малой» нестационарности сигналов оказывается полезным метод *последовательных приближений* [41].

3.7. Оптимальная обработка дискретных данных

В практических задачах преобразования навигационных данных чаще всего приходится иметь дело с непрерывными сигналами. Однако рассмотрение дискретных сигналов также представляется нужным. Это обусловлено в основном двумя причинами:

1. Ряд измерителей работает в течение весьма коротких интервалов времени. Можно принять, что эти измерители выдают данные дискретно.

2. Обработка сигналов даже непрерывных измерителей может производиться на цифровой вычислительной

машине с достаточно большим временем такта, так что необходимо учитывать дискретный характер ввода данных.

В первом случае речь идет действительно об оптимальной обработке данных, дискретный характер которых обусловлен внешними обстоятельствами. Во втором случае имеются в виду ограничения, связанные с реализацией способа обработки, т. е. с методом преобразования, заведомо неоптимальным, так как при преобразовании непрерывного сигнала в дискретный информация неизбежно теряется.

Примем, что дискретные данные поступают в произвольные, но известные моменты времени. Выходные данные, подлежащие обработке, представляют собой значения сигнала $x(t)$ в моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_N$, т. е. величины $x_1=x(t_1)$, $x_2=x(t_2)$, $\ldots$, $x_N=x(t_N)$. Вычислительное устройство выполняет линейную операцию

$$z=\sum_{i=1}^{N} a_i x_i. \tag{3.140}$$

Весовые коэффициенты a_i выбираются из условия

$$D(t)=M\{[z-l(t)]^2\}=\min. \tag{3.141}$$

Если необходимо получить приближенное значение желаемого сигнала в любой текущий момент времени t, то весовые коэффициенты должны быть непрерывными функциями времени $[a_i=a_i(t)]$. Можно сказать, что в этом случае система преобразования данных выполняет две задачи: дискретную фильтрацию и непрерывную экстраполяцию.

В развернутом виде выражение для дисперсии ошибки записывается следующим образом:

$$D(t)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_i(t)\,a_j(t)\,R_{xx}(t_i,\ t_j)-$$
$$-2\sum_{i=1}^{N} a_i(t)\,R_{lx}(t,\ t_i)+R_{ll}(t,\ t). \tag{3.142}$$

Из условий минимума дисперсии ошибки

$$\frac{\partial D(t)}{\partial a_i(t)}=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ N) \tag{3.143}$$

получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов:

$$\sum_{i=1}^{N} a_i(t) R_{xx}(t_i, t_j) = R_{lx}(t, t_j) \quad (j = 1, 2, \ldots, N). \quad (3.144)$$

Практическая реализация дискретных преобразований с переменными коэффициентами в общем случае возможна только при малых значениях N.

Если значения сигнала $x(t)$ поступают через равные интервалы времени, т. е. в моменты $t=0, T, 2T, \ldots$, где T — период дискретности, то для обработки данных могут быть использованы дискретные фильтры, сравнительно легко реализуемые на цифровых вычислительных машинах. Методы определения оптимальных операций над дискретными данными, основанные на использовании *теории z-преобразования* (или *дискретного преобразования Лапласа*), хорошо разработаны [17, 36]. Существенно, что при использовании этих методов сложность решения не возрастает с увеличением числа N. В частности, при $N \to \infty$ (если при этом задача сохраняет смысл) дискретный фильтр становится периодически стационарным и допускает простую реализацию на цифровой вычислительной машине [14]. Следует, однако, отметить, что решение задачи синтеза динамических характеристик дискретных фильтров всегда сложнее, чем соответствующих непрерывных.

Если дискретность поступления данных обусловлена принципом работы соответствующего измерителя, то эти данные следует обрабатывать сразу как дискретные. Если же дискретность происходит от используемого способа обработки, то перед дискретным преобразованием (перед квантованием по времени) целесообразно осуществлять, когда это возможно, предварительное сглаживание, предымпульсную фильтрацию сигналов. Задача синтеза динамических характеристик фильтров при наличии предымпульсной фильтрации рассмотрена в частной постановке в [37].

При достаточно малых T разница между непрерывным и дискретным поступлением данных стирается: в произвольном месте цепи преобразования дискретный

сигнал, любым образом экстраполированный на время такта, можно считать совпадающим с непрерывным сигналом в соответствующей непрерывной цепи. Для численной оценки максимального значения T, при котором ступенчатый сигнал, полученный из дискретного, можно считать непрерывным, обычно рекомендуют использовать *теорему Котельникова* [26], опирающуюся на предположение о конечности частотной полосы полезного сигнала. Однако для сигналов с плавно спадающей кривой спектральной плотности это понятие становится в значительной мере неопределенным. Надежные результаты можно получить, по-видимому, рассчитав отдельно непрерывный и дискретный фильтры и сравнив величины дисперсий ошибок.

3.8. Вопросы реализации фильтров на ЦВМ

Основные особенности общей задачи преобразования навигационных данных — сложность формул, высокие требования к точности и допустимость относительно низкого быстродействия — определяют перспективность использования в этой области цифровых вычислительных машин (ЦВМ). При большом объеме основных вычислений, связанных в первую очередь с тригонометрическими преобразованиями, задачи статистической обработки данных (при оптимальных или близких к оптимальным алгоритмах) будут иметь незначительный

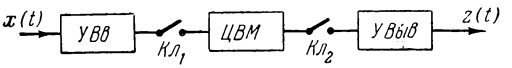

Рис. 3.21.

удельный вес. На рис. 3.21 изображена обобщенная блок-схема системы преобразования данных (*УВв* — устройство ввода данных, ЦВМ — собственно цифровая вычислительная машина, *УВыв* — устройство вывода данных). Фильтрацию входных сигналов $x_i(t)$ можно производить во всех трех блоках. С точки зрения облегчения работы ЦВМ желательно осуществлять фильтрацию возможно раньше — в *УВв*. При этом преобразуемые собственно в ЦВМ сигналы меняются более плавно,

и поэтому можно допустить большее значение шага по времени.

Фильтрация в *УВв* во многих случаях, по-видимому, может осуществляться на аналоговых элементах: от устройств требуется только высокая статическая точность, а динамические характеристики должны быть выдержаны приближенно (оптимальные фильтры, как правило, некритичны по отношению к изменениям параметров), причем сами алгоритмы преобразования достаточно просты. Однако могут возникнуть серьезные затруднения, когда необходимо изменять в широких пределах параметры фильтров. Из-за этого, возможно, придется предусмотреть основную фильтрацию в самой ЦВМ, оставив в *УВв* только слабое сглаживание.

Для осуществления оптимальной фильтрации на ЦВМ необходимо рассчитать передаточные функции дискретных фильтров. При этом можно пойти по одному из двух путей:

а) Непосредственно решать задачу синтеза динамических характеристик оптимальных дискретных фильтров, заранее имея в виду реализацию на дискретных устройствах. Методы решения в этом случае основаны на использовании теории z-преобразования [17, 36]. В стационарном случае решение при этом получается в форме, непосредственно пригодной для реализации на ЦВМ.

б) Зная решение задачи непрерывной фильтрации, приближенно реализовать соответствующие характеристики на ЦВМ.

Поскольку расчет непрерывной системы обычно значительно проще, чем дискретной, предпочтительнее второй путь. Ниже рассматриваются конкретные способы реализации дискретных систем, близких к рассчитанным непрерывным, и свойства возникающих при этом ошибок.

Прежде всего необходимо отметить, что квантование по времени и по уровню всегда приводит к необратимой потере информации, поэтому дискретные фильтры теоретически всегда дают проигрыш в точности по сравнению с идеальными непрерывными. При этом проигрыш тем меньше, чем меньше шаг дискретности по времени T и по уровню Δ. Пусть непрерывный фильтр, подлежащий реализации на ЦВМ, стационарен и харак-

теризуется передаточной функцией $K(j\omega)$ или импульсной переходной функцией $W(t-\tau)$. Выбор способа замены непрерывного оператора дискретным с заданным временем такта T по существу означает выбор метода численного интегрирования при заданных начальных условиях. В качестве наиболее известных укажем на *методы Адамса* и *Рунге — Кутта*. Для поставленной задачи удобнее два других метода:

1. *Метод дискретной аппроксимации импульсной переходной функции.* В этом случае вместо интеграла свертки

$$y(t)=\int_0^t W(t,\ \tau)\,x(\tau)\,d\tau \tag{3.145}$$

используется сумма по дискретным значениям

$$y(nT)=T\sum_{i=0}^{n} W(nT,\ iT)\,x(iT). \tag{3.146}$$

2. *Метод дискретной аппроксимации передаточной функции.* Заменим непрерывный сигнал $x(t)$ ступенчатым сигналом (рис. 3.22). Преобразование непрерывного сигнала в ступенчатый осуществляется импульсным элементом с фиксатором (экстраполятором нулевого порядка), запоминающим тактовые значения сигнала на время такта. Так как передаточная функция такого фиксатора имеет вид

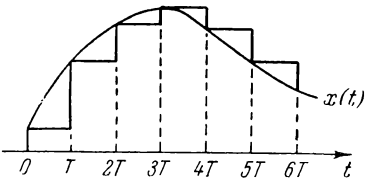

Рис. 3.22.

$$\Phi(j\omega)=\frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega}, \tag{3.147}$$

то естественно потребовать, чтобы передаточная функция дискретного фильтра была равна:

$$K_1(z)=Z\left\{\frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega}K(j\omega)\right\}=(1-z^{-1})\,Z\left\{\frac{K(j\omega)}{j\omega}\right\} \tag{3.148}$$
$$(z=e^{j\omega T}),$$

где Z — символ z-преобразования.

Оба способа замены непрерывных преобразований дискретными введены таким образом, что при малых продолжительностях такта T справедлив предельный переход к аппроксимируемым непрерывным зависимостям. Замена непрерывных устройств дискретными, независимо от способа, приводит к появлению дополнительных ошибок, которые можно разбить на три группы:

1. Ошибки от квантования по времени.
2. Ошибки от квантования по уровню.
3. Ошибки от ухудшения фильтрации помех.

В первом приближении действие каждого из фильтров можно рассматривать независимо от остальных. Расчетная схема для определения всех дополнительных ошибок изображена на рис. 3.23. Непрерывный сигнал

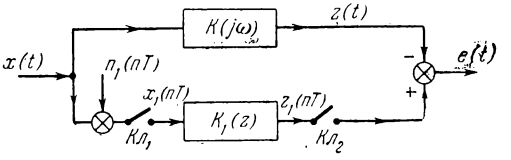

Рис. 3.23.

$x(t)$ поступает на непрерывный фильтр с передаточной функцией $K(j\omega)$, дискретный сигнал $x_1(nT)$ — на вход дискретного фильтра с передаточной функцией $K_1(z)$. Сигнал $e(t)$ представляет собой ошибку от замены непрерывного фильтра дискретным. Аддитивная помеха $n_1(nT)$ изображает шум квантования по уровню. Относительное качество дискретного фильтра определяется дисперсией

$$D(nT) = M\{[l(nT) - y(nT)]^2\} = D_1(nT) + D_2(nT), \quad (3.149)$$

где $D_1(nT)$ — составляющая дисперсии ошибки, не зависящая от квантования по уровню, $D_2(nT)$ — составляющая, обусловленная только квантованием по уровню.

Необходимо разделять два существенно различных случая:

а) Входные сигналы $x(t)$ и $x_1(t)$ стационарны, а фильтр с передаточной функцией $K(j\omega)$ устойчив (не имеет полюсов в нижней полуплоскости комплексной

плоскости ω и на вещественной оси). Тогда дисперсии сигналов $y(nT)$ и $l(nT)$ остаются конечными и при $n \to \infty$. В этом случае $D(nT)$ также остается конечной при $n \to \infty$.

б) Дисперсия сигнала $x(t)$ неограниченно нарастает во времени. В этом случае $D(nT)$ также неограниченно растет при $n \to \infty$. Такое положение имеет место, если $K(j\omega)$ имеет полюсы в нижней полуплоскости комплексной плоскости ω или на вещественной оси.

При преобразовании навигационных данных часто имеет место второй случай, к которому относятся операции счисления пути в инерциальной системе и при использовании сигнала измерителя скорости.

Пример. Рассмотрим ошибки простейшей системы дискретного интегрирования при отсутствии помехи. Непрерывная операция характеризуется передаточной функцией $K(j\omega) = 1/j\omega$. Пусть полезный сигнал представляет собой недетерминированную случайную функцию времени, а его корреляционная функция имеет вид:

$$R_{xx}(\tau_1, \tau_2) = A^2 e^{-\alpha|\tau_1 - \tau_2|}. \tag{3.150}$$

При нулевых начальных условиях для дискретных значений выходного сигнала получаем:

$$l(nT) = \int_0^{nT} x(\tau)\, d\tau. \tag{3.151}$$

Рассмотрим для этой задачи только первый способ замены операции непрерывного интегрирования дискретным преобразованием. Будем сначала учитывать дискретность преобразования только во времени. Переход от интеграла (3.151) к сумме дает:

$$y(nT) = T \sum_{i=1}^{n} x(iT). \tag{3.152}$$

Передаточная функция, соответствующая дискретному преобразованию (3.152), имеет вид:

$$K_1(z) = \frac{Tz^{-1}}{1 - z^{-1}}. \tag{3.153}$$

Выражение для составляющей дисперсии ошибки, когда пренебрегается квантованием по уровню, имеет вид:

$$D_1(nT)=R_{ll}(nT,\ nT)-2R_{ly}(nT,\ nT)+R_{yy}(nT,\ nT). \quad (3.154)$$

Слагаемые этого выражения записываются следующим образом:

$$R_{ll}(nT,\ nT)=\frac{2A^2}{\alpha}\left[nT-\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha nT})\right], \quad (3.155)$$

$$R_{ly}(nT,\ nT)=T\sum_{i=1}^{n}R_{lx}(nT,\ iT)=$$

$$=\frac{A^2}{\alpha}\left[2n\alpha T-\frac{\alpha T(1+d)}{1-d}+\frac{\alpha T(1+d)}{1-d}d^n\right], \quad (3.156)$$

$$R_{yy}(nT,\ nT)=T^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}R_{xx}(iT,\ jT)=$$

$$=\frac{A^2}{\alpha^2}(\alpha T)^2\left[\frac{1+d}{1-d}n-\frac{2d}{(1-d)^2}(1-d^n)\right] \quad (3.157)$$

$$(d=e^{-\alpha T}).$$

После элементарных выкладок получаем:

$$D_1(nT)=\frac{A^2}{\alpha^2}[B_1n\alpha T+B_2(1-d^n)], \quad (3.158)$$

где

$$B_1=\frac{\alpha T(1+d)}{1-d}-2, \qquad B_2=-\frac{2(\alpha T)^2d}{(1-d)^2}+\frac{2\alpha T(1+d)}{1-d}-2. \quad (3.159)$$

При малых αT приближенно имеем:

$$B_1\approx\frac{1}{6}(\alpha T)^2, \qquad B_2\approx\frac{1}{2}(\alpha T)^2. \quad (3.160)$$

Если при этом время работы интегратора $t=nT$ относительно мало ($\alpha t\ll 1$), то

$$D_1(t)\approx\frac{2}{3}\frac{A^2}{\alpha^2}(\alpha^3T^2t). \quad (3.161)$$

Если время работы интегратора велико ($\alpha t>1$), то

$$D_1(t)\approx\frac{1}{6}\frac{A^2}{\alpha^2}(\alpha^3T^2t). \quad (3.162)$$

Напомним, что для непрерывного интегратора, на входе которого действует помеха — белый шум интенсивности σ^2, дисперсия ошибки равна:

$$D(t) = \sigma^2 t. \tag{3.163}$$

Сравнивая выражения (3.162) и (3.163), можно сделать вывод о том, что дискретизация сигнала по времени эквивалентна добавлению добавочной помехи — белого шума интенсивности

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{6}\frac{A^2}{\alpha}(\alpha T)^2. \tag{3.164}$$

Рассмотрим вторую составляющую дисперсии ошибки, обусловленную дискретностью по уровню. Квантование по уровню в первом приближении эквивалентно введению на вход дискретного интегратора дискретного белого шума $n_1(nT)$ с дисперсией $\Delta^2/12$, где Δ — шаг квантования по уровню. Соответствующая составляющая дисперсии ошибки на выходе определяется выражением

$$D_2(nT) = \frac{\Delta^2}{12} nT^2 \quad \text{или} \quad D_2(t) = \frac{\Delta^2}{12} Tt. \tag{3.165}$$

Таким образом, квантование по уровню эквивалентно добавлению на вход интегратора помехи — белого шума интенсивности $\sigma_2^2 = \frac{\Delta^2}{12} T$.

3.9. Методы оценки влияния некоторых факторов на точность непрерывного оптимального фильтра

Методика расчета динамических характеристик оптимальных фильтров может быть использована при ряде упрощающих предположений, которые подробно обсуждены в главе II и § 3.1 и 3.2. Автор придерживается мнения, что при реализации систем, близких к оптимальным, следует исходить именно из этих решений. Тем не менее является полезным выяснить качественный характер влияния неучтенных, пусть даже второстепенных факторов и иметь в распоряжении методы, с помощью которых можно приближенно оценить это влияние. Краткому рассмотрению некоторых факторов этого рода посвящен данный параграф.

А) Отличие параметров сигналов от расчетных.

Действительные условия работы вычислительного устройства навигационной системы всегда в большей или меньшей степени отличаются от расчетных. Эти отличия можно связать с тремя группами причин:

а) происходит изменение характера внешних возмущений;

б) характеристики измерителей отличаются от идеальных;

в) характеристики самого вычислительного устройства отличаются от идеальных.

Влияние всех этих причин можно учесть, вводя в рассмотрение эквивалентные изменения свойств преобразуемых сигналов. Эти изменения можно контролировать и полученные сведения использовать для подстройки системы фильтров (см. главу XII). Однако чаще всего эти изменения неизвестны, неконтролируемы и имеются лишь более или менее полные статистические данные о них.

При рассмотрении влияния разброса характеристик сигналов могут быть поставлены задачи анализа и синтеза. В задаче анализа выясняется, к каким последствиям приводит существование разброса для системы, рассчитанной без учета этого фактора. В задаче синтеза разыскивается система, оптимальная в известном смысле для более или менее широкого диапазона изменения характеристик сигналов. Изменение качества работы фильтра можно оценивать с двух различных позиций.

1. Можно интересоваться относительным изменением дисперсии $D^*(t)$ ошибки реальной системы в реальных условиях по сравнению с тем, что получается для оптимальной системы в расчетном режиме [дисперсия ошибки равна $D_0(t)$]. В этом случае качество работы удобно характеризовать коэффициентом

$$\alpha = \frac{D^*(t) - D_0(t)}{D_0(t)}. \tag{3.166}$$

Коэффициент α может быть как положительным, так и отрицательным (свойства сигналов могут отличаться как в благоприятную сторону, так и в неблагоприятную). Использование такого критерия имеет смысл

тогда, когда существует жесткий допуск по величинам ошибок.

2. Можно интересоваться относительным изменением дисперсии ошибки $D^*(t)$ для реальной системы в реальных условиях по сравнению с тем, что получается для системы, работающей в тех же реальных условиях, но оптимальной именно в этих, отличных от расчетных условиях [дисперсия ошибки равна $D_0^*(t)$]. Качество работы фильтра теперь удобно характеризовать коэффициентом

$$\beta = \frac{D^*(t) - D_0^*(t)}{D_0^*(t)}. \tag{3.167}$$

Коэффициент β может быть только положительным (реальная система всегда хуже оптимальной для тех же условий). Использование этого критерия разумно тогда, когда важно знать не абсолютное изменение ошибок, а то, насколько полно реальная система использует потенциальные возможности.

Обозначим через $R_{ss}(\tau_1, \tau_2)$, $R_{nn}(\tau_1, \tau_2)$ и $R_{xx}(\tau_1, \tau_2) = R_{ss}(\tau_1, \tau_2) + R_{nn}(\tau_1, \tau_2)$ некоторые расчетные корреляционные функции соответственно полезного сигнала, помехи и входного сигнала фильтра, а через $R_{ss}^*(\tau_1, \tau_2)$, $R_{nn}^*(\tau_1, \tau_2)$ и $R_{xx}^*(\tau_1, \tau_2) = R_{ss}^*(\tau_1, \tau_2) + R_{nn}^*(\tau_1, \tau_2)$ — корреляционные функции для групп реализаций, полученных при неизменных условиях. Выражения для дисперсий ошибок D_0, D^* и D_0^* определяются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} D_0(t) &= R_{ss}(t, t) - \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_1} W_0(t, \tau_1)\, d\tau_1 \int_{t_0}^{t_1} W_0(t, \tau_2) R_{xx}(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_2, \\ D^*(t) &= R_{ss}^*(t, t) - 2\int_{t_0}^{t_1} W_0(t, \tau_1) R_{ss}^*(t, \tau_1)\, d\tau_1 + \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_1} W_0(t, \tau_1)\, d\tau_1 \int_{t_0}^{t_1} W_0(t, \tau_2) R_{xx}^*(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_2, \end{aligned}\right\} \tag{3.168}$$

$$\left.\begin{aligned} D_0^*(t) &= R_{ss}^*(t,\ t) - \\ &- \int_{t_0}^{t_1} W_0^*(t,\ \tau_1)\,d\tau_1 \int_{t_0}^{t_1} W_0^*(t,\ \tau_2)\,R_{xx}^*(\tau_1,\ \tau_2)\,d\tau_2, \end{aligned}\right\} \quad (3.168)$$

где $W_0(t,\ \tau)$ — решение интегрального уравнения

$$\int_{t_0}^{t_1} W_0(t,\ \tau_2)\,R_{xx}(\tau_1,\ \tau_2)\,d\tau_2 = R_{ss}(t,\ \tau_1), \quad (3.169)$$

а $W_0^*(t,\ \tau)$ — решение интегрального уравнения

$$\int_{t_0}^{t_1} W_0^*(t,\ \tau_2)\,R_{xx}^*(\tau_1,\ \tau_2)\,d\tau_2 = R_{ss}^*(t,\ \tau_1). \quad (3.170)$$

Если же задаваться целью характеризовать точность для всей совокупности свойств сигналов, то можно использовать два подхода:

а) рассчитывать дисперсию ошибки для наиболее неблагоприятных сочетаний $R_{nn}^*(\tau_1,\ \tau_2)$ и $R_{ss}^*(\tau_1,\ \tau_2)$, т. е. оценивать точность по наихудшему случаю; дисперсию ошибки при этом обозначим через $D_{\max}(t)$;

б) рассчитывать дисперсию ошибки, среднюю по всей области изменения характеристик сигналов; для этого вместо второго и третьего выражений (3.168) следует использовать выражения:

$$\left.\begin{aligned} \overline{D}(t) &= M^*\{D^*(t)\} = M\{R_{ss}^*(t,\ t)\} - \\ &- 2\int_{t_0}^{t_1} W_0(t,\ \tau_1)\,M^*\{R_{ss}^*(t,\ \tau_1)\}\,d\tau_1 + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} W_0(t,\ \tau_1)\,d\tau_1 \int_{t_0}^{t_1} W_0(t,\tau_2)\,M^*\{R_{xx}^*(\tau_1,\ \tau_2)\}\,d\tau_2, \\ \overline{D}_0(t) &= M^*\{D_0^*(t)\} = M^*\{R_{ss}^*(t,\ t)\} - \\ &- M^*\left\{\int_{t_0}^{t_1} W_0^*(t,\tau_1)\,d\tau_1 \int_{t_0}^{t_1} W_0^*(t,\tau_2)R_{xx}^*(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_2\right\}, \end{aligned}\right\} \quad (3.171)$$

где M^* — знак осреднения по множеству характеристик сигналов. Заметим, что для расчета по выражениям (3.171) нужно знать корреляционные функции не групп реализаций, а средние по группам. Они могут отличаться от расчетных корреляционных функций, если последние получены для типичной группы реализаций, взятых при фиксированных условиях.

Например, пусть совокупность корреляционных функций имеет вид:

$$R^*(\tau_1, \tau_2) = e^{-\alpha|\tau_1-\tau_2|}, \tag{3.172}$$

где α — фиксированная постоянная для неизменных условий, но случайная величина, если рассматривать всю совокупность условий. Предположим, что α равномерно распределена в интервале (α_1, α_2). Тогда в качестве типичной корреляционной функции можно было бы взять выражение (3.172) при некоторых средних условиях, например

$$R(\tau_1, \tau_2) = e^{-\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)|\tau_1-\tau_2|}, \tag{3.173}$$

в то время как корреляционная функция, средняя по множеству условий, имеет вид:

$$M^*\{R^*(\tau_1, \tau_2)\} = \frac{1}{(\alpha_2-\alpha_1)|\tau_1-\tau_2|}\left[e^{-\alpha_1|\tau_1-\tau_2|} - e^{-\alpha_2|\tau_1-\tau_2|}\right]. \tag{3.174}$$

Интересно отметить, что полученному выражению (3.174) не соответствует дробно-рациональная спектральная плотность. Поэтому перед использованием корреляционной функции (3.174) при решении оптимальных задач методами, изложенными в § 3.2, 3.3 и 3.4, необходимо аппроксимировать ее суммой экспонент. К сожалению, это же приходится делать в большинстве подобных случаев. Сопоставление значений дисперсий ошибки $D_{\max}(t)$ и $D_0^*(t)$ с заданной величиной допуска Δ_0 позволяет сделать правильные выводы о возможностях использования различных способов повышения качества.

Если $D_{\max}(t) < \Delta_0$, то с изменением характеристик сигналов можно не считаться: фильтр, построенный для наихудших условий, удовлетворительно решает

поставленную перед ним задачу и при измененных условиях.

Если $D_{\max}(t) > \Delta_0$ и при этом существуют такие условия, для которых $D_0^*(t) > \Delta_0$, то объективных возможностей для выполнения поставленных требований по точности не существует (даже точное знание характеристик сигналов не спасает положения).

Если $D_{\max}(t) > \Delta_0$, но при этом для всех условий $D_0^*(t) < \Delta_0$, то объективные возможности для выполнения требований существуют, но фильтр их не использует.

В последнем случае можно пойти по одному из двух путей:

а) требовать, чтобы фильтр был близким к оптимальному при всех условиях; это может быть обеспечено или начальной подстройкой фильтров (если вероятностные свойства сигналов во времени не меняются), или введением системы самонастройки (если свойства сигналов медленно меняются);

б) построить единый фильтр, оптимальный в известном смысле для всего множества условий; соответствующая математическая задача может быть названа *задачей синтеза при неопределенности сведений о сигналах* [43].

Первый путь основан на «индивидуальном» подходе к реализациям, второй — на «обобщенном». На практике часто возможен только второй путь. Рассмотрим две характерные ситуации.

1. Необходимо фильтровать внутренние шумы в ряде однотипных систем. Хорошо известно, что даже у приборов одной и той же серии шумы меняются от образца к образцу (по крайней мере по уровню), несмотря на то, что физические источники шумов одинаковы по природе. Причиной этого может быть естественный разброс в параметрах элементов систем, допускаемый при изготовлении; изменения значений параметров в течение срока службы («старение»); повреждения, которые не делают, однако, невозможной нормальную работу. При «индивидуальном» подходе для каждого образца следует производить отдельную настройку. Для этого нужно заранее знать или специально измерять характери-

стики шума. При «обобщенном» подходе достаточно поставить на все образцы идентичные фильтры, основываясь на некоторых типовых данных. В первом случае будет иметь место выигрыш в точности, но за счет усложнения наладки.

2. Одна и та же система должна работать при различных условиях (например, автопилот — при различных высотах и скоростях полета). При «индивидуальном» подходе используется самонастройка по результатам прямого или косвенного измерения параметров внешних условий, при «обобщенном» — фиксированные значения параметров системы выбирают, ориентируясь на весь диапазон изменения условий.

«Индивидуальный» подход всегда обеспечивает большую точность, однако по соображениям простоты часто предпочтительнее «обобщенный» подход. При выборе между ними решающее значение имеет величина разницы в точности. При «индивидуальном» подходе можно использовать один из двух показателей качества:

1) Максимальное значение дисперсии ошибки (полученное для наихудших условий)

$$D_{\max}(t) = \max\{D_0^*(t)\}. \tag{3.175}$$

Использование этого показателя обычно возможно, если только область изменения характеристик сигнала ограничена.

2) Среднее по условиям значение дисперсии ошибки

$$\overline{D}(t) = M^*\{D_0^*(t)\}. \tag{3.176}$$

При «обобщенном» подходе соответственно этим показателям можно использовать два метода.

1. *Метод минимакса* [23]. В этом случае фильтр строится так, чтобы обеспечить минимум дисперсии ошибки для тех условий, для которых дисперсия ошибки максимальна:

$$\max\{D^*(t)\} = \min. \tag{3.177}$$

Недостатком минимаксного подхода (фактически широко используемого на практике) является то, что при многих, возможно, гораздо более вероятных условиях фильтр может быть далеким от оптимального.

2. *Метод осреднения по условиям.* В этом случае фильтр строится так, чтобы обеспечить минимум дисперсии ошибки, осредненной по условиям:

$$M^*\{D^*(t)\} = \min. \tag{3.178}$$

Здесь в качестве исходных данных необходимо иметь корреляционные функции, осредненные по множеству условий.

Пример. Полезный сигнал $s(t)$ представляет собой интеграл от белого шума, а помеха $n(t)$ — белый шум, так что

$$R_{ss}(\tau_1, \tau_2) = C^2 \min(\tau_1, \tau_2), \qquad R_{nn}(\tau_1, \tau_2) = \sigma^2\delta(\tau_1 - \tau_2). \tag{3.179}$$

Рассмотрим вопрос о критичности, предполагая, что для разных условий изменяется только величина σ^2. Примем, что σ представляет собой случайную величину, равномерно распределенную в интервале (σ_1, σ_2). Передаточная функция оптимального стационарного фильтра имеет один и тот же вид для всех возможных постановок задачи:

$$K(j\omega) = \frac{\rho}{j\omega + \rho}. \tag{3.180}$$

Значение ρ определяется следующим образом:

1. Для фильтра, оптимального для расчетного режима,

$$\rho = \frac{C}{\sigma_0} \qquad \left(\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right). \tag{3.181}$$

2. Для фильтра, оптимального при любом σ,

$$\rho = \frac{C}{\sigma}. \tag{3.182}$$

3. Для фильтра, оптимального по минимаксному критерию (оптимального при $\sigma = \sigma_2$),

$$\rho = \frac{C}{\sigma_2}. \tag{3.183}$$

4. Для фильтра, оптимального «в среднем» (оптимального при σ_3),

$$\rho = \frac{C}{\sigma_3} \qquad \left[\sigma_3^2 = M\{\sigma^2\} = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)\right]. \tag{3.184}$$

На рис. 3.24 построены кривые дисперсий ошибок различных фильтров в зависимости от величины σ при $C=1$; $\sigma_1=1$; $\sigma_2=10$. В таблице приведены значения критериев, определяющих качество фильтров для всего рассматриваемого диапазона изменения σ. Номера на графике и в таблице соответствуют номерам вариантов фильтра.

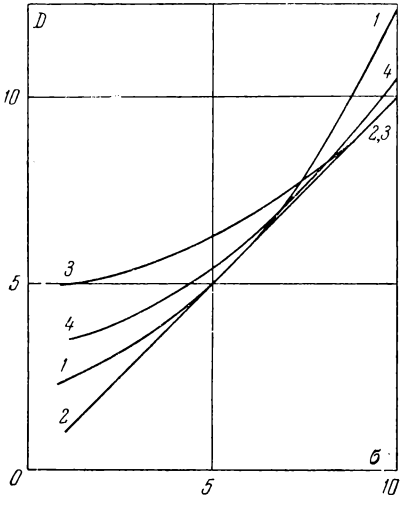

Рис. 3.24.

	1	2	3	4
D_{max}	12,5	10,0	10,0	10,6
$\overline{D}$	6,5	5,5	6,9	6,0

Как и следовало ожидать, кривая *2*, определяющая предельные возможности, идет ниже всех остальных. Вид кривой *3* свидетельствует о том, что при малых σ принцип минимакса дает большой проигрыш в точности. Кривые *1* и *4* соприкасаются с кривой *2* вблизи середины интервала и отходят от нее у концов. В зависимости от характера требований к фильтру наиболее приемлемым может быть признан любой из вариантов: *2*, *3* или *4*.

Б) Параметрическая нестационарность сигналов.

По отношению к этому фактору имеет значение все сказанное об оценке влияния отличий характеристик сигнала от расчетных. Так, сначала ставится задача анализа — определение влияния параметрической нестационарности на фильтр, построенный без ее учета. Затем может быть поставлена задача синтеза — построение фильтра по заданным характеристикам параметрической нестационарности. Для решения задачи синтеза могут быть использованы два подхода: «индивидуальный» (фильтры строятся для узких групп реализаций,

у которых параметрическая нестационарность является более определенной) и «обобщенный» (фильтры строятся едиными для всех возможных реализаций, и параметрическая нестационарность теряет определенность тенденции). Хотя при «обобщенном» подходе возможно использование минимаксного критерия, в дальнейшем будем иметь в виду только критерий минимума дисперсии ошибки, средней по всем возможным реализациям. Часто «обобщенный» подход приводит к тому, что сигнал как будто перестает быть параметрически нестационарным.

Пример. Полезный сигнал представляет собой случайную постоянную, а помеха — белый шум различной интенсивности на последовательных интервалах времени:

$$R_{ss}(\tau_1, \tau_2) = C^2,$$

$$R_{nn}(\tau_1, \tau_2) = \begin{cases} \sigma_1^2\delta(\tau_1 - \tau_2) & \text{при} \quad 0 < \tau_1, \ \tau_2 < T, \\ \sigma_2^2\delta(\tau_1 - \tau_2) & \text{при} \quad T < \tau_1, \ \tau_2 < t. \end{cases} \tag{3.185}$$

Сигнал $x(t)$ поступает в течение интервала времени $(0, t)$. В момент $t=T$ (в дальнейшем будем считать его известным) происходит изменение интенсивности помехи. Для различных групп реализаций величины σ_1 и σ_2 могут принимать различные значения. При «индивидуальном» подходе величины σ_1 и σ_2 следует считать известными. В этом случае искомая импульсная переходная функция фильтра имеет различные аналитические выражения на интервалах $(0, T)$ и (T, t):

$$W(t, \tau) = \begin{cases} W^{(1)}(t, \tau) & \text{при} \quad 0 < \tau < T, \\ W^{(2)}(t, \tau) & \text{при} \quad T < \tau < t. \end{cases}$$

Из условия минимума дисперсии ошибки получаем:

$$\left.\begin{aligned} W^{(1)}(t, \tau) &= \frac{C^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2 + C^2\sigma_1^2(t-T) + C^2\sigma_2^2 T}, \\ W^{(2)}(t, \tau) &= \frac{C^2\sigma_1^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2 + C^2\sigma_1^2(t-T) + C^2\sigma_2^2 T}. \end{aligned}\right\} \tag{3.186}$$

При этом дисперсия ошибки оказывается равной:

$$D_0(t) = \frac{C^2\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2 + C^2\sigma_1^2(t-T) + C^2\sigma_2^2 T}. \qquad (3.187)$$

В дальнейшем примем для простоты $C \to \infty$ (условие несмещенности относительно полезного сигнала). Тогда для дисперсии ошибки в момент времени t получаем выражение

$$D_0^{(1)}(t) = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2(t-T) + \sigma_2^2 T} \approx \min\left\{\frac{\sigma_2^2}{t-T}, \frac{\sigma_1^2}{T}\right\}. \qquad (3.188)$$

Это выражение характеризует достижимую точность при «индивидуальном» подходе. Будем теперь рассматривать множество условий, для которых σ_1^2 и σ_2^2 могут принимать различные значения, т. е. являются случайными величинами. Примем, что в изменении интенсивности помехи не проявляется определенной тенденции, т. е.

$$M\{\sigma_1^2\} = M\{\sigma_2^2\} = \sigma_0^2. \qquad (3.189)$$

При «обобщенном» подходе в расчет входят корреляционные функции, осредненные по всем возможным реализациям. Условие (3.189) означает тогда, что интенсивность помехи можно считать постоянной и равной σ_0^2. Следовательно, импульсная переходная функция имеет единое аналитическое выражение на всем интервале $(0, t)$. При условии $C \to \infty$ получаем:

$$W(t, \tau) = \frac{1}{t}. \qquad (3.190)$$

Дисперсия ошибки оказывается равной

$$D_0^{(2)}(t) = \frac{T(t-T)}{t^2}\left(\frac{\sigma_1^2}{t-T} + \frac{\sigma_2^2}{T}\right) \approx$$

$$\approx \frac{T(t-T)}{t^2} \max\left\{\frac{\sigma_1^2}{t-T}, \frac{\sigma_2^2}{T}\right\}. \qquad (3.191)$$

Неучет изменения мощности помехи приводит к проигрышу в точности. В частности, при $T=t/2$ получаем:

$$\frac{D_0^{(2)}(t)-D_0^{(1)}(t)}{D_0^{(1)}(t)}=\frac{(\sigma_1^2-\sigma_2^2)^2}{4\sigma_1^2\sigma_2^2}. \qquad (3.192)$$

При расчете характеристик оптимального фильтра с учетом параметрической нестационарности возникают серьезные математические трудности. Если допустимо считать, что свойства сигналов различны в последовательные интервалы времени, причем при переходе от интервала к интервалу они меняются скачкообразно, то задача сводится [40] к системе интегральных уравнений, методы решения которой изложены в главе 4. Могут быть, однако, случаи, когда необходимо учитывать непрерывный характер нестационарности. Тогда целесообразно использовать метод последовательных приближений, процедура которого кратко описана ниже.

Предположим, что ядро интегрального уравнения может быть представлено в виде

$$R_{xx}(\tau_1, \tau_2)=R_0(\tau_1, \tau_2)+\mu R_1(\tau_1, \tau_2), \qquad (3.193)$$

где μ — малый параметр. Основная часть ядра $R_0(\tau_1, \tau_2)$ такова, что при $\mu=0$ решение может быть получено обобщенным методом Заде — Рагаззини (см. § 3.2). Таким образом, $R_0(\tau_1, \tau_2)$ отражает только существенную нестационарность, а малая добавка $\mu R_1(\tau_1, \tau_2)$ характеризует также и параметрическую нестационарность, предполагаемую в дальнейшем малой. Способ введения малого параметра определяется физическим смыслом конкретных задач.

Будем теперь искать импульсную переходную функцию фильтра в виде ряда по степеням малого параметра μ:

$$W(t, \tau)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k W_k(t, \tau). \qquad (3.194)$$

Подставив выражения (3.193) и (3.194) в исходное интегральное уравнение и приравняв слагаемые при оди-

наковых степенях малого параметра μ, получим последовательность интегральных уравнений первого рода:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t_1} W_0(t, \tau_2) R_0(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_2 = R_{ss}(t, \tau_1),\\
&\int_{t_0}^{t_1} W_1(t, \tau_2) R_0(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_2 = Y_1(t, \tau_1),\\
&\int_{t_0}^{t_1} W_2(t, \tau_2) R_0(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_2 = Y_2(t, \tau_1),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right\} \quad (3.195)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&Y_1(t, \tau_1) = -\int_{t_0}^{t_1} W_0(t, \tau_2) R_1(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_2,\\
&Y_2(t, \tau_1) = -\int_{t_0}^{t_1} W_1(t, \tau_2) R_1(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (3.196)$$

Для нахождения слагаемых разложения (3.194) необходимо, таким образом, решать интегральные уравнения одинаковой структуры (ядра всех уравнений одинаковы, правая часть каждого последующего уравнения определяется после решения предыдущего). Такое последовательное решение возможно, ибо, по предположению, ядро $R_0(\tau_1, \tau_2)$ допускает решение методом Заде — Рагаззини при произвольной правой части. При решении конкретных задач контроль сходимости целесообразно вести по значениям дисперсии ошибки, получающимся при последовательных приближениях. Естественно, что сходимость будет зависеть от того, насколько удачно введен малый параметр.

В) Мультипликативная помеха.

В подавляющем большинстве работ, посвященных задачам синтеза оптимальных фильтров, помеха считается аддитивной. В то же время учет мультипликативной со-

ставляющей не приводит к серьезным трудностям. Действительно, пусть входной сигнал равен:

$$x(t)=s(t)[1+\varepsilon(t)]+n(t), \tag{3.197}$$

где $n(t)$ — аддитивная, а $\varepsilon(t)$ — мультипликативная составляющие помехи. Будем считать, что обе они статистически независимы от полезного сигнала $s(t)$ и имеют нулевые математические ожидания. Тогда корреляционная функция сигнала $x(t)$ будет иметь вид:

$$R_{xx}(\tau_1, \tau_2)=R_{ss}(\tau_1, \tau_2)+R_{\bar{n}\bar{n}}(\tau_1, \tau_2), \tag{3.198}$$

где $R_{\bar{n}\bar{n}}(\tau_1, \tau_2)$ — корреляционная функция приведенной помехи:

$$R_{\bar{n}\bar{n}}(\tau_1, \tau_2)=R_{nn}(\tau_1, \tau_2)+R_{\varepsilon\varepsilon}(\tau_1, \tau_2)R_{ss}(\tau_1, \tau_2). \tag{3.199}$$

Таким образом, учет мультипликативной составляющей помехи может быть произведен путем введения добавочной аддитивной помехи. Отметим, что при практическом решении задач также не ожидается новых трудностей. Действительно, если корреляционным функциям $R_{ss}(\tau_1, \tau_2)$ и $R_{\varepsilon\varepsilon}(\tau_1, \tau_2)$ соответствуют дробно-рациональные спектральные плотности, т. е. если они могут быть представлены в виде

$$\left.\begin{aligned} R_{ss}(\tau_1, \tau_2)&=\sum_{i=1}^{N_1} C_i^2 e^{-\alpha_i|\tau_1-\tau_2|},\\ R_{\varepsilon\varepsilon}(\tau_1, \tau_2)&=\sum_{i=1}^{N_2} \sigma_i^2 e^{-\nu_i|\tau_1-\tau_2|},\end{aligned}\right\} \tag{3.200}$$

то ясно, что результат их перемножения может быть представлен в том же виде. Следовательно, добавочная аддитивная помеха также имеет дробно-рациональную спектральную плотность. Поэтому, если для решения задачи без мультипликативной помехи может быть использован метод Заде — Рагаззини, то он годится и в этом случае.

Интересные общие выводы получаются для предельных случаев, когда время корреляции мультипликативной помехи или мало, или велико.

Пусть время корреляции мультипликативной помехи много меньше времени корреляции полезного сигнала. Тогда, если полезный сигнал стационарен, выражение (3.199) приближенно может быть записано в виде

$$R_{\bar{n}\bar{n}}(\tau_1, \tau_2) \approx R_{nn}(\tau_1, \tau_2) + D_s R_{\varepsilon\varepsilon}(\tau_1, \tau_2), \qquad (3.201)$$

где D_s — дисперсия полезного сигнала. Таким образом, в этом случае при пересчете мультипликативной помехи на аддитивную изменяется не вид корреляционной функции, а только величина дисперсии.

Примем теперь, что мультипликативная помеха постоянна. Это допущение, широко распространенное в теории измерений, означает, что передаточная функция $H(j\omega)$ измерителя известна с точностью до постоянного множителя, изменяющегося в узких пределах:

$$H(j\omega) = (1 + \alpha) H_0(j\omega), \qquad (3.202)$$

где $H_0(j\omega)$ — расчетная (идеальная) передаточная функция, а α — случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2 \ll 1$. Интегральное уравнение для импульсной переходной функции имеет вид:

$$(1 + \sigma^2) \int_{t_0}^{t_1} W(t, \tau_2) [R_{ss}(\tau_1, \tau_2) + R_{nn}(\tau_1, \tau_2)] d\tau_2 = R_{ss}(t, \tau_1). \qquad (3.203)$$

Его решение может быть записано в виде

$$W(t, \tau) = \frac{1}{1 + \sigma^2} W_0(t, \tau), \qquad (3.204)$$

где $W_0(t, \tau)$ — оптимальная импульсная переходная функция при отсутствии мультипликативной помехи (при $\sigma = 0$). Дисперсию ошибки фильтра с импульсной переходной функцией $W(t, \tau)$ можно записать в виде

$$D(t) = D_0(t) + \frac{\sigma^2}{1 + \sigma^2} \int_{t_0}^{t_1} W_0(t, \tau_1) d\tau_1 \int_{t_0}^{t_1} W_0(t, \tau_2) \times$$
$$\times [R_{ss}(\tau_1, \tau_2) + R_{nn}(\tau_1, \tau_2)] d\tau_2, \qquad (3.205)$$

где $D_0(t)$ — дисперсия ошибки оптимального фильтра при $\sigma = 0$. С другой стороны, если, несмотря на наличие

мультипликативной помехи, использовать импульсную переходную функцию $W_0(t, \tau)$, то получим следующее выражение дисперсии ошибки:

$$D(t) = D_0(t) + \\ + \sigma^2 \int_{t_0}^{t_1} W_0(t, \tau_1)\, d\tau_1 \int_{t_0}^{t_1} W_0(t, \tau_2) [R_{ss}(\tau_1, \tau_2) + R_{nn}(\tau_1, \tau_2)]\, d\tau_2. \tag{3.206}$$

При $\sigma^2 \ll 1$ выражения (3.205) и (3.206) практически совпадают. Следовательно, при нахождении характеристик оптимального фильтра постоянную мультипликативную помеху можно не учитывать; оптимальный фильтр не может уменьшить ошибку от этого фактора. Вывод остается практически справедливым, если мультипликативная помеха не постоянная, а медленно меняющаяся.

ГЛАВА 4

МЕТОДЫ СИНТЕЗА ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОПТИМАЛЬНЫХ МНОГОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Задача синтеза динамических характеристик системы фильтров, осуществляющих оптимальное преобразование непрерывных сигналов, которые поступают от нескольких измерителей, приводится к системе интегральных уравнений первого рода. В качестве основного метода решения излагается обобщенный метод Заде — Рагаззини. В случаях, когда время поступления сигналов можно считать бесконечно большим, решение производится не во временно́й, а в частотной области; для нахождения передаточных функций фильтров используется метод неопределенных коэффициентов. При преобразовании дискретных данных задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений. В главе рассматривается также комбинированная задача: по одному каналу поступает непрерывный сигнал, а по другому — дискретный. Задача сводится к интегральному уравнению и системе линейных алгебраических уравнений.

4.1. Условия оптимальности преобразования непрерывных сигналов

Условия оптимальности преобразования, когда данные поступают от нескольких источников информации, представляют собой систему интегральных уравнений. Для случая работы системы в разомкнутой схеме решение интегральных уравнений непосредственно определяет характеристики фильтра; для случая работы в зам-

кнутой схеме необходимо предварительное преобразование к эквивалентной разомкнутой схеме.

А) Система интегральных уравнений оптимальных фильтров, работающих в разомкнутой схеме.

Блок-схема системы преобразования сигналов изображена на рис. 4.1. Полезный сигнал $s(t)$ измеряется N параллельно включенными неидеальными измерителями $И_1$, $И_2$, ..., $И_N$. Их выходные сигналы $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_N(t)$ поступают на фильтры $Ф_1$, $Ф_2$, ..., $Ф_N$.

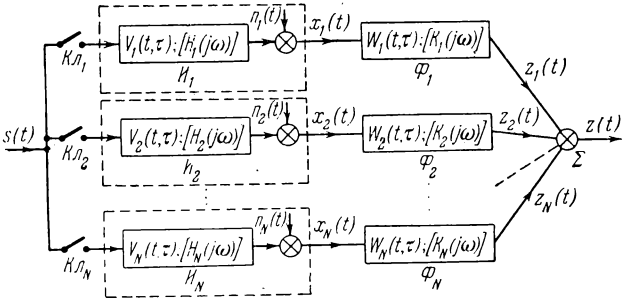

Рис. 4.1.

После фильтров следует сумматор Σ. Требуется, чтобы выходной сигнал $z(t)$ с возможно большей точностью воспроизводил желаемый сигнал $l(t)$, представляющий собой результат известного преобразования полезного сигнала $s(t)$. Характер работы системы в целом определяется режимом замыкания ключей $Кл_1$, $Кл_2$, ..., $Кл_N$. Могут быть отмечены следующие типичные варианты совместной работы измерителей:

а) все ключи замыкаются одновременно и остаются замкнутыми вплоть до текущего момента времени t; такой режим работы можно считать нормальным;

б) к текущему моменту времени t все ключи оказываются разомкнутыми; это чистый режим «памяти» для системы; при этом переход в режим «памяти» может быть простым (все ключи размыкаются одновременно) или сложным (ключи размыкаются в разные моменты времени);

в) к текущему моменту времени остаются замкнутыми немногие из ключей; это работа в режиме частичной «памяти».

Конечность времени работы каждого канала может быть связана с обстоятельствами двух родов.

1. Рассматриваемый полезный сигнал просто не существует до некоторого момента времени (он тождественно равен нулю). Так, в задачах навигации полезный сигнал появляется только с момента старта. В этих случаях следует считать, что все ключи разомкнуты до начального момента времени.

2. Время работы каждого канала определяется конкретными условиями работы измерителей и соответствующих устройств ввода данных в вычислительное устройство. Так, любой из каналов может быть на время отключен из-за «сбоя» или повреждения и вновь включен, когда работоспособность будет восстановлена. Необходимость временного отключения одного или нескольких каналов может быть связана также с изменением условий работы системы (в некоторых режимах один или несколько измерителей не могут работать), с тактическими соображениями, с тем, что каждый из каналов должен подвергаться периодической проверке, и т. д. Во всех этих случаях ключи $Кл_1, \ldots, Кл_N$ включаются и выключаются неодновременно.

Задача состоит в оптимальной обработке всей информации при любом способе ее поступления. Будем для простоты считать, что каждый из ключей замыкается и размыкается только однократно, т. е. каждый i-й канал работает только на одном интервале (t_i', t_i''). В частном случае некоторые измерители могут работать вплоть до рассматриваемого момента времени t. В этом случае $t_i'' = t$. Выходной сигнал $x_i(t)$ каждого измерителя преобразуется линейным фильтром с импульсной переходной функцией $W_i(t, \tau)$. Выражение для ошибки воспроизведения в момент t записывается следующим образом:

$$e(t) = \sum_{i=1}^{N} \int_{t_i'}^{t_i''} W_i(t, \tau) x_i(\tau) d\tau - l(t). \qquad (4.1)$$

Для дисперсии ошибки получаем:

$$D(t)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\int_{t_i'}^{t_i''} W_i(t,\tau_1)\,d\tau_1\int_{t_j'}^{t_j''} W_j(t,\tau_2)\,R_{x_ix_j}(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_2-$$

$$-2\sum_{i=1}^{N}\int_{t_i'}^{t_i''} W_i(t,\tau_1)\,R_{lx_i}(t,\tau_1)\,d\tau_1+R_{ll}(t,t), \qquad (4.2)$$

где $R_{x_ix_j}(\tau_1,\tau_2)$ — взаимно корреляционные функции сигналов $x_i(t)$, $R_{lx_i}(t,\tau_1)$ — взаимно корреляционные функции желаемого сигнала $l(t)$ и сигналов $x_i(t)$, $R_{ll}(t,t)$ — дисперсия желаемого сигнала.

Задавая произвольные вариации $\delta W_i(t,\tau_1)$ искомым импульсным переходным функциям $W_i(t,\tau_1)$ на интервалах (t_i', t_i'') и приравнивая нулю соответствующие вариации дисперсии ошибки, получаем систему интегральных уравнений первого рода:

$$\sum_{j=1}^{N}\int_{t_j'}^{t_j''} W_j(t,\tau_2)\,R_{x_ix_j}(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_2=R_{lx_i}(t,\tau_1) \qquad (4.3)$$

$$(t_i'\leqslant\tau_1\leqslant t_i''; \quad i=1,2,\ldots,N).$$

Строго говоря, эти условия не являются достаточными [23], однако при некоторых ограничениях решение становится однозначным.

Б) Приведение замкнутой схемы к эквивалентной разомкнутой.

В замкнутой системе перед фильтрами стоит задача не воспроизведения желаемого сигнала на выходе вычислительного устройства, а выработки управляющего сигнала, чтобы движение было возможно ближе к программному. Далее предполагается, что на основе использования теории инвариантности система сделана инвариантной по отношению к математическим ожиданиям

сигналов. Поэтому будем считать в дальнейшем, что математические ожидания всех сигналов равны нулю и система решает задачу не выполнения программы, а стабилизации координаты объекта около нуля (см. § 3.1).

Блок-схема замкнутой системы изображена на рис. 4.2. Будем рассматривать случай, когда все заданные звенья системы стационарны. Тогда свойства объекта O характеризуются передаточной функцией $L(j\omega)$,

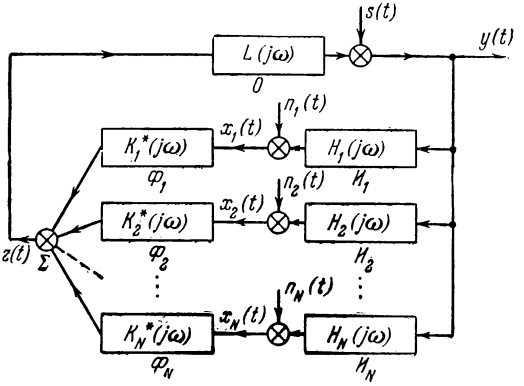

Рис. 4.2.

свойства измерителей — передаточными функциями $H_1(j\omega), \ldots, H_N(j\omega)$. Определению подлежат импульсные переходные функции фильтров $W_1^*(t, \tau), \ldots, W_N^*(t, \tau)$ [в стационарном случае — передаточные функции $K_1^*(j\omega), \ldots, K_N^*(j\omega)$]. Сигналы $n_1(t), \ldots, n_N(t)$ изображают ошибки измерителей, сигнал $s(t)$ — возмущение, приведенное к выходу объекта.

В общем случае приведение замкнутой системы к разомкнутой может быть осуществлено при использовании импульсных переходных функций взаимно обратных систем [23]. Приведение становится достаточно простым, если задача стационарна. Предположим, что все сигналы стационарны, а время их поступления достаточно велико. При этом искомые фильтры становятся стационарными, а установившаяся дисперсия ошибки постоян-

ной. Выражение для выходного сигнала системы в операторной форме имеет вид:

$$y(j\omega)=\frac{1}{1+L(j\omega)Y(j\omega)}s(j\omega)+$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\frac{K_i^*(j\omega)L(j\omega)}{1+L(j\omega)Y(j\omega)}[-n_i(j\omega)], \quad (4.4)$$

где

$$Y(j\omega)=\sum_{i=1}^{N}K_i^*(j\omega)H_i(j\omega). \quad (4.5)$$

Если ввести обозначения

$$P_i(j\omega)=\frac{K_i^*(j\omega)L(j\omega)}{1+L(j\omega)Y(j\omega)}, \qquad X(j\omega)=\frac{L(j\omega)Y(j\omega)}{1+L(j\omega)Y(j\omega)}, \quad (4.6)$$

то выражение (4.4) записывается следующим образом:

$$y(j\omega)=[1-X(j\omega)]s(j\omega)+\sum_{i=1}^{N}P_i(j\omega)[-n_i(j\omega)]. \quad (4.7)$$

При этом выполняется условие

$$X(j\omega)=\sum_{i=1}^{N}H_i(j\omega)P_i(j\omega). \quad (4.8)$$

Преобразование сигналов $s(t)$ и $-n_i(t)$, определяемое этими соотношениями, осуществляет разомкнутая схема, изображенная на рис. 4.3. Передаточные функции $P_i(j\omega)$ (или соответствующие им импульсные переходные функции) определяются в результате решения системы интегральных уравнений вида (4.3). После определения всех $P_i(j\omega)$ для искомых передаточных функций $K_i^*(j\omega)$ получается система алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &K_i^*(j\omega)-P_i(j\omega)Y(j\omega)=\frac{P_i(j\omega)}{L(j\omega)},\\ &\sum_{l=1}^{N}K_l^*(j\omega)H_l(j\omega)-Y(j\omega)=0\\ &(i=1,\ 2,\ \ldots,\ N).\end{aligned}\right\} \quad (4.9)$$

Заметим, что из условий физической осуществимости и устойчивости для $P_i(j\omega)$ (эти условия будут выполнены в процессе решения системы интегральных уравнений), вообще говоря, не вытекают условия физической осуществимости всех $K_i^*(j\omega)$. В общем случае задача определения устойчивого многоканального корректирующего устройства при произвольном заданном объекте имеет самостоятельное значение. В работе [15] показано,

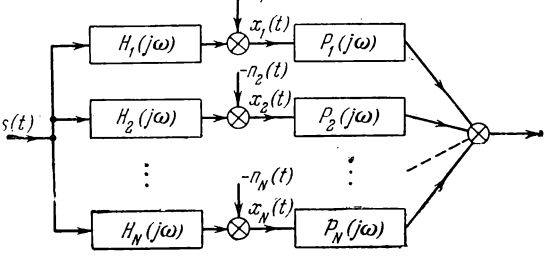

Рис. 4.3.

что достаточным условием для того, чтобы «устойчивые» передаточные функции замкнутой системы после пересчета переходили в «устойчивые» передаточные функции корректирующего устройства, является условие, чтобы все корни и полюсы определителя матрицы передаточных функций заданной части системы лежали в верхней полуплоскости (объект должен быть устойчивым и минимально фазовым). В дальнейшем будем считать, что эти условия выполнены. Тогда решение системы (4.9) представляет собой решение поставленной задачи.

4.2. Обобщенный метод *) Заде — Рагаззини

Проведем некоторые предварительные преобразования системы интегральных уравнений (4.3). Введем для всех моментов времени t_i' и t_i'' ($i=1, 2, \ldots, N$) новые обозначения: $t_1, t_2, \ldots, t_{M+1}$, так что $t_1<t_2< \ldots <t_{M+1}$.

*) Изложение метода дано по работе [44].

Далее, представим искомые импульсные переходные функции в виде сумм

$$W_j(t, \tau) = \sum_{l=1}^{M} W_j^{(l)}(t, \tau), \tag{4.10}$$

причем $W_j^{(l)}(t, \tau) = 0$, если $\tau < t_l$ или $\tau > t_{l+1}$, а также и при $t_l < \tau < t_{l+1}$, если на этом интервале ключ $Кл_j$ разомкнут; $W_j^{(l)}(t, \tau) \neq 0$, если $t_l < \tau < t_{l+1}$ и при этом на данном интервале ключ $Кл_j$ замкнут.

При введенных обозначениях вместо системы N интегральных уравнений (4.3) теперь должна быть записана следующая система MN уравнений относительно MN искомых функций $W_j^{(l)}(t, \tau)$:

$$\sum_{l=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \int_{t_l}^{t_{l+1}} W_j^{(l)}(t, \tau_2) R_{x_i x_j}(\tau_1, \tau_2) d\tau_2 = R_{lx_i}(t, \tau_1) \tag{4.11}$$

$$(t_k \leqslant \tau_1 \leqslant t_{k+1};\ k = 1, 2, \ldots, M;\ i = 1, 2, \ldots, N).$$

В частных случаях число неизвестных будет меньше [из-за того, что $W_j^{(l)}(t, \tau) = 0$, если на интервале (t_l, t_{l+1}) ключ $Кл_j$ разомкнут].

Как и в § 3.1, предположим, что входные сигналы фильтров $x_i(t)$ и желаемый сигнал $l(t)$ могут быть представлены в виде суммы недетерминированных и детерминированных составляющих:

$$\left.\begin{aligned} x_i(t) &= x_i'(t) + g_i(t), \quad & l(t) &= l'(t) + d(t), \\ g_i(t) &= \sum_{j=1}^{r} c_j^{(i)} f_j(t), \quad & d(t) &= \sum_{j=1}^{r} a_j f_j(t), \end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

где $c_j^{(i)}$ и a_j — случайные величины. Полная система функций $f_j(t)$ считается выбранной так, что все компоненты детерминированных составляющих всех сигналов образуются из этих функций. Кроме того, предполагается, что все недетерминированные составляющие появляются в результате прохождения стационарных сигналов с дробно-рациональными спектральными плотностями через стационарные звенья.

Статистические свойства детерминированных составляющих задаются системой корреляционных моментов

$$C_{(jq)}^{(ip)} = M\{c_j^{(i)} c_q^{(p)}\}, \qquad A_{(jq)}^{(i)} = M\{c_j^{(i)} a_q\}, \tag{4.13}$$

а статистические свойства недетерминированных составляющих — корреляционными функциями

$$\left.\begin{aligned} R_{x_i' x_j'}(\tau_1, \tau_2) &= M\{x_i'(\tau_1) x_j'(\tau_2)\}, \\ R_{l' x_i'}(\tau_1, \tau_2) &= M\{l'(\tau_1) x_i(\tau_2)\}. \end{aligned}\right\} \tag{4.14}$$

Математические ожидания сигналов считаются равными нулю.

Систему интегральных уравнений (4.11) удобно записать в виде

$$\sum_{l=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \int_{t_l}^{t_{l+1}} W_j^{(l)}(t, \tau_2) R_{x_i' x_j'}(\tau_1, \tau_2) d\tau_2 = Z_i^{(k)}(t, \tau_1) \tag{4.15}$$

$$(t_k \leqslant \tau_1 \leqslant t_{k+1};\ k = 1, 2, \ldots, M;\ i = 1, 2, \ldots, N),$$

где

$$Z_i^{(k)}(t, \tau_1) = R_{l' x_i'}(t, \tau_1) + \\ + \sum_{l=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \sum_{p=1}^{r} \sum_{q=1}^{r} f_q(\tau_1) [C_{pq}^{(lj)} \lambda_p^{(lj)}(t) + A_{pq}^{(i)} f_p(t)], \tag{4.16}$$

$$\lambda_p^{(lj)}(t) = -\int_{t_l}^{t_{l+1}} W_j^{(l)}(t, \tau) f_p(\tau) d\tau. \tag{4.17}$$

Постоянные $\lambda_p^{(lj)}(t)$ определяются через искомые функции $W_j^{(l)}(t, \tau)$, однако в процессе решения будем считать их сначала неопределенными постоянными.

Возможности решения системы интегральных уравнений (4.15) зависят от свойств ядер $R_{x_i' x_j'}(\tau_1, \tau_2)$. Будем считать, что все взаимно корреляционные функции недетерминированных составляющих допускают решение соответствующих задач оптимальной фильтрации в одноканальных системах методом Заде — Рагаззини, т. е.

что могут быть найдены операторы с постоянными коэффициентами $Q_{ij}\left(\frac{d}{d\tau_1}\right)$, удовлетворяющие условиям

$$Q\left(\frac{d}{d\tau_1}\right) R_{x_i' x_j'}(\tau_1, \tau_2) = 0 \tag{4.18}$$

при $\tau_1 \neq \tau_2$ и при любых i и j. Рассмотрим любое из M уравнений системы, получающейся из системы уравнений (4.15) при фиксированном значении индекса i. Если для всех ядер $R_{x_i' x_j'}(\tau_1, \tau_2)$ известны соответствующие операторы $Q_{ij}\left(\frac{d}{d\tau_1}\right)$, то по ним может быть построен оператор $Q_i\left(\frac{d}{d\tau_1}\right)$ также с постоянными коэффициентами, который удовлетворяет условию

$$Q_i\left(\frac{d}{d\tau_1}\right) R_{x_i' x_j'}(\tau_1, \tau_2) = 0 \tag{4.19}$$

при $\tau_1 \neq \tau_2$ и при любых j. Этот оператор может быть получен как наименьшее общее кратное операторов $Q_{ij}\left(\frac{d}{d\tau_1}\right)$.

Рассмотрим, что получится, например, для первого из этих уравнений ($k=1$), которое справедливо при $t_1 \leqslant \tau_1 \leqslant t_2$. В результате применения этого оператора для слагаемых уравнений, для которых $l=1$, от ядер останется (как и в § 3.2) только сумма δ-функций и ее производных, зависящих от аргумента $(\tau_1 - \tau_2)$, причем коэффициенты при них будут постоянными. Следовательно, соответствующие интегралы могут быть записаны в виде дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. В то же время слагаемые, для которых $l \neq 1$, при этом обращаются в нуль, так как для этих слагаемых аргумент ядра в нуль не обращается. Таким образом, из рассматриваемого интегрального уравнения с MN неизвестными получается дифференциальное уравнение с N неизвестными $W_j^{(1)}(t, \tau)$ ($j=1, 2, \ldots, N$). Запишем это уравнение в форме

$$\sum_{j=1}^{N} P_{ij}\left(\frac{d}{d\tau_1}\right) W_j^{(1)}(t, \tau_1) = Q_i\left(\frac{d}{d\tau_1}\right) Z_i^{(1)}(t, \tau_1). \tag{4.20}$$

Применив операторы $Q_i\left(\frac{d}{d\tau_1}\right)$ ко всем N уравнениям, для которых индексы имеют значения $k=1$, $i=1, 2, \ldots, N$, получим систему N связанных дифференциальных уравнений относительно N неизвестных $W_j^{(1)}(t, \tau)$.

Далее таким же образом преобразуем группу уравнений, для которых $k=2$, и т. д. Окончательно вместо системы MN полностью связанных интегральных уравнений (4.15) получаем M систем дифференциальных уравнений, из которых каждая включает не более N неизвестных:

$$\sum_{j=1}^{N} P_{ij}\left(\frac{d}{d\tau_1}\right) W_j^{(k)}(t, \tau_1) = Q_i\left(\frac{d}{d\tau_1}\right) Z_i^{(k)}(t, \tau_1) \qquad (4.21)$$

$$(t_k < \tau_1 < t_{k+1};\ i=1, 2, \ldots, N;\ k=1, 2, \ldots, M).$$

Если на последовательных интервалах времени работают не все каналы, то число соответствующих уравнений в каждой системе уменьшается. Если в любой момент времени включен только один канал, то система уравнений полностью разделяется.

Решения дифференциальных уравнений (4.21) представляют собой регулярные части искомых импульсных переходных функций, зависящие от ранее введенных постоянных $\lambda_p^{(ij)}$ и произвольных постоянных интегрирования $B_{iq}^{(k)}$:

$$\overline{W}_i^{(k)}(t, \tau) = \overline{W}_i^{(k)}(t, \tau, \lambda_p^{(ij)}, B_{iq}^{(k)}). \qquad (4.22)$$

Чтобы получить общее решение исходной системы интегральных уравнений (4.15), необходимо добавить систему δ-функций и ее производных:

$$W_i^{(k)}(t, \tau) = \overline{W}_i^{(k)}(t, \tau) +$$
$$+ \sum_{l=0}^{h_{ik}} \{F_{il}^{(k)}(t)\,\delta^{(l)}(\tau - t_k - 0) + G_{il}^{(k)}(t)\,\delta^{(l)}(\tau - t_{k+1} + 0)\}. \qquad (4.23)$$

Неизвестные постоянные $\lambda_p^{(ij)}$, $F_{il}^{(k)}$, $G_{il}^{(k)}$, $B_{iq}^{(k)}$ (они, конечно, являются функциями t) определяются из условий тождественного удовлетворения интегральных уравнений (4.15) и соотношений (4.17).

В качестве эффективного приема, позволяющего упрощать процесс решения, следует указать на применение разложений корреляционных функций в ряды. В случае, когда интервалы (t_1, t_2), (t_2, t_3), ..., (t_M, t_{M+1}) существенно различны по величине, разложение, возможно, допустимо не для всех слагаемых интегральных уравнений, а только для тех, для которых соответствующие интервалы малы.

После определения оптимальных импульсных переходных функций фильтров дисперсия ошибки рассчитывается по формуле

$$D(t) = R_{ll}(t, t) - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \int_{t_i'}^{t_i''} W_i(t, \tau_1)\, d\tau_1 \int_{t_j'}^{t_j''} W_j(t, \tau_2) R_{x_i x_j}(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_2. \quad (4.24)$$

Для нормального режима работы комплексной системы (все каналы работают непрерывно) дисперсия ошибки оптимальной системы стремится к установившемуся значению, если по крайней мере один измеритель в отдельности дает конечную установившуюся ошибку. В этом случае оптимальная система становится стационарной, а установившаяся дисперсия ошибки зависит только от недетерминированных составляющих сигналов. Поэтому задача преобразования недетерминированных сигналов при достаточно большом времени их поступления заслуживает специального рассмотрения.

4.3. Метод неопределенных коэффициентов

Пусть выполняются следующие условия:

а) сигналы имеют только недетерминированные составляющие, для которых могут быть записаны условные спектральные плотности;

б) условные спектральные плотности дробно-рациональны;

в) время поступления сигналов достаточно велико.

Для решения поставленной задачи могут быть применены два метода: *метод факторизации* и *метод*

неопределенных коэффициентов. Ниже излагается только второй метод, как более удобный для практического использования [49].

Будем характеризовать свойства стационарных фильтров передаточными функциями $K_1(j\omega), \ldots, K_N(j\omega)$. Эти передаточные функции должны удовлетворять условиям физической реализуемости, совпадающим с условиями устойчивости: все их полюсы должны лежать только в верхней полуплоскости комплексной плоскости ω. При этом система интегральных уравнений (4.15) оказывается эквивалентной системе уравнений

$$\sum_{l=1}^{N} K_l(j\omega) S_{x_l x_i}(\omega) = S_{lx_i}(\omega) = X_i(j\omega) \quad (i=1, 2, \ldots, N), \tag{4.25}$$

где $S_{x_l x_i}(\omega)$—условные взаимные спектральные плотности выходных сигналов измерителей, соответствующие взаимно корреляционным функциям $R_{x_l x_i}(\tau_1, \tau_2)$; $S_{lx_i}(\omega)$ — условные взаимные спектральные плотности желаемого сигнала и сигналов измерителей; $X_i(j\omega)$ — неизвестные функции, не имеющие особенностей в верхней полуплоскости комплексной плоскости ω.

Запишем формальное решение системы уравнений (4.25) так, как если бы функции $X_i(j\omega)$ были известными:

$$K_l(j\omega) = \sum_{m=1}^{N} \frac{\Delta_{im}(\omega)}{\Delta(\omega)} \left[S_{lx_m}(\omega) + X_m(j\omega)\right], \tag{4.26}$$

где $\Delta(\omega)$ — определитель системы (4.25), $\Delta_{im}(\omega)$ — минор, соответствующий элементу $S_{x_m x_i}(\omega)$. Полюсы выражений (4.26), лежащие в верхней полуплоскости, могут быть определены, несмотря на то, что функции $X_i(j\omega)$ неизвестны. Действительно, полюсы выражений (4.26), лежащие в верхней полуплоскости, могут представлять собой только корни $\Delta(\omega)$ или полюсы $\Delta_{im}(\omega)$. Обычно полюсы $\Delta_{im}(\omega)$ сокращаются с полюсами $\Delta(\omega)$, и поэтому выражения (4.26) включают только полюсы, совпадающие с теми корнями $\Delta(\omega)$, которые лежат в верхней полуплоскости. Обозначим известные, таким образом, полюсы через $j\alpha_1, j\alpha_2, \ldots, j\alpha_h$. Тогда искомые

передаточные функции могут быть записаны в виде

$$K_i(j\omega)=\sum_{m=1}^{h}\frac{A_{im}}{j\omega+\alpha_m}. \qquad (4.27)$$

Неопределенные коэффициенты A_{im} определяются из условий тождественного удовлетворения системы уравнений (4.25) при подстановке в нее выражений (4.27). Подставив выражения (4.27) в уравнения (4.25) и приравняв нулю слагаемые с полюсами в верхней полуплоскости, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно всех неизвестных A_{im}. Примерно такой же объем выкладок требует и прямой путь: при неопределенных коэффициентах A_{im} вычисляется выражение для дисперсии ошибки, а затем это выражение минимизируется по коэффициентам.

Перед решением задачи может быть наложено условие несмещенности относительно полезного сигнала:

$$\sum_{i=1}^{N}H_i(j\omega)K_i(j\omega)\equiv 1. \qquad (4.28)$$

При этом условии полезный сигнал, проходя через систему, не претерпевает динамических искажений. Условие (4.28) называется также *условием инвариантности относительно полезного сигнала.* Считается целесообразным использовать условие (4.28) в тех случаях, когда о свойствах полезного сигнала нет достоверных данных и его мощность во всей области частот, представляющих интерес, значительно выше мощности помех. Заметим, что в одноканальной системе условие инвариантности относительно полезного сигнала полностью исключает возможность фильтрации помех.

При наложении условия (4.28) методика решения остается прежней, однако число уравнений уменьшается на единицу. Действительно, из системы (4.25) в этом случае необходимо выбросить одно уравнение, а вместо него ввести уравнение связи (4.28). Выразив из тождества (4.28), например,

$$K_N(j\omega)=\frac{1}{H_N(j\omega)}\left[1-\sum_{i=1}^{N-1}H_i(j\omega)K_i(j\omega)\right] \qquad (4.29)$$

и подставив в уравнения (4.25), получим систему $(N-1)$ уравнений того же вида.

В частности, для двухканальной системы при условии инвариантности относительно полезного сигнала получается только одно уравнение вместо двух. В большинстве работ, посвященных синтезу динамических характеристик, приводится именно такое решение [4, 12, 37].

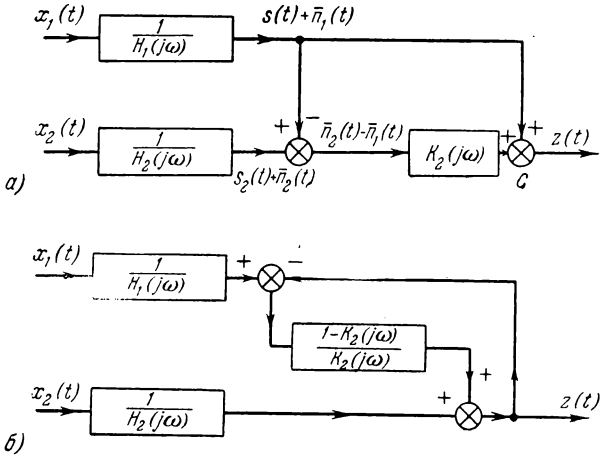

Рис. 4.4.

В работе [4] приведены две возможные схемы реализации двухканальной системы для этого случая (рис. 4.4). Их преимущество по сравнению с исходной схемой параллельного преобразования (рис. 4.1) заключается в том, что здесь необходимо реализовать только один фильтр, а не два. Схема на рис. 4.4, *а* часто называется *схемой вычитания сигналов*. Ее идея заключается в следующем. Вычитая сигнал $s(t)+\bar{n}_1(t)$ из сигнала $s(t)+\bar{n}_2(t)$, мы получаем разность помех. Задачей фильтра с передаточной функцией $K_2(j\omega)$ является наилучшее выделение помехи $\bar{n}_1(t)$ и подавление помехи $\bar{n}_2(t)$. В сумматоре C происходит частичная компенсация помехи $\bar{n}_1(t)$, идущей по прямому каналу, ее приближенным значением, поступающим с выхода фильтра.

Использование логарифмических характеристик существенно упрощает процесс решения и позволяет установить важные качественные особенности. В дальнейшем удобно представить искомые фильтры с передаточными функциями $K_i(j\omega)$ в виде параллельных цепей, каждая из которых состоит из двух последовательно включенных звеньев с передаточными функциями $\frac{1}{H_i(j\omega)}$ и $\overline{K}_i(j\omega)$ (рис. 4.5). Определению теперь подлежат $\overline{K}_i(j\omega)$. Схема

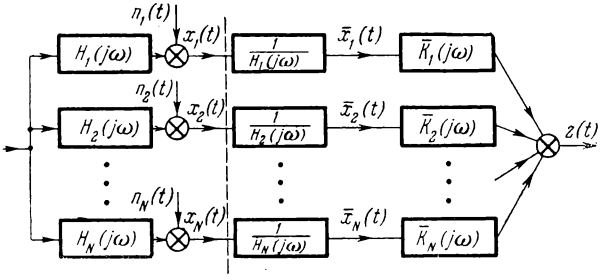

Рис. 4.5.

построена так, что в ней сигналы $x_i(t)$ подвергнуты сначала обратным преобразованиям, характеризующимся передаточными функциями $\frac{1}{H_i(j\omega)}$. Эти преобразования приводят все сигналы к полезному сигналу, так что вместо $x_i(t)$ дальнейшее преобразование претерпевают сигналы

$$\bar{x}_i(t) = s(t) + \bar{n}_i(t). \tag{4.30}$$

Приведенные помехи $\bar{n}_i(t)$ могут оказаться нестационарными, если даже исходные помехи $n_i(t)$ стационарны, однако для них могут быть составлены условные спектральные плотности $S_{\bar{n}_i\bar{n}_j}(\omega)$. Будем считать полезный сигнал и все помехи взаимно статистически независимыми.

Определитель системы (4.25) имеет вид:

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} S_{ss}(\omega)+S_{\bar{n}_1\bar{n}_1}(\omega) & S_{ss}(\omega) & & S_{ss}(\omega) \\ S_{ss}(\omega) & S_{ss}(\omega)+S_{\bar{n}_2\bar{n}_2}(\omega) & \dots & S_{ss}(\omega) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{ss}(\omega) & S_{ss}(\omega) & & S_{ss}(\omega)+S_{\bar{n}_N\bar{n}_N}(\omega) \end{vmatrix}. \tag{4.31}$$

Легко показать, что он раскрывается следующим образом:

$$\Delta(\omega) = \prod_{i=1}^{N} S_{\bar{n}_i\bar{n}_i}(\omega) + \sum_{i=1}^{N} S_{ss}(\omega) \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{N} S_{\bar{n}_k\bar{n}_k}(\omega), \tag{4.32}$$

т. е. представляет собой сумму $(N+1)$ произведений спектральных плотностей, взятых в различных сочетаниях (каждое слагаемое включает все спектральные плотности, кроме одной). Действительно, положим сначала $S_{ss}(\omega)=0$. Тогда в определителе остается только главная диагональ, и он оказывается равным произведению $S_{\bar{n}_1\bar{n}_1}(\omega)\,S_{\bar{n}_2\bar{n}_2}(\omega)\,\dots\,S_{\bar{n}_N\bar{n}_N}(\omega)$. Таким образом, это единственное слагаемое исходного определителя (4.31), не содержащее множителем $S_{ss}(\omega)$. Теперь положим $S_{\bar{n}_1\bar{n}_1}(\omega)=0$. Тогда получим определитель:

$$\Delta_1(\omega) = \begin{vmatrix} S_{ss}(\omega) & S_{ss}(\omega) & & S_{ss}(\omega) \\ S_{ss}(\omega) & S_{ss}(\omega)+S_{\bar{n}_2\bar{n}_2}(\omega) & & S_{ss}(\omega) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{ss}(\omega) & S_{ss}(\omega) & & S_{ss}(\omega)+S_{\bar{n}_N\bar{n}_N}(\omega) \end{vmatrix}. \tag{4.33}$$

Вычитая первый столбец из остальных, получаем, что в определителе остается только первый столбец и диагональ. Следовательно, в этом случае определитель равен произведению $S_{ss}(\omega)\,S_{\bar{n}_2\bar{n}_2}(\omega)\,\dots\,S_{\bar{n}_N\bar{n}_N}(\omega)$. Это единственное слагаемое определителя (4.31), не содержащее множителем $S_{\bar{n}_1\bar{n}_1}(\omega)$. Аналогично получаются остальные слагаемые выражения (4.32).

Рассмотрим логарифмические кривые спектральных плотностей и приведенных помех (рис. 4.6). Предположим для простоты, что они не имеют острых пиков. Весь интересующий нас диапазон частот ω можно разбить

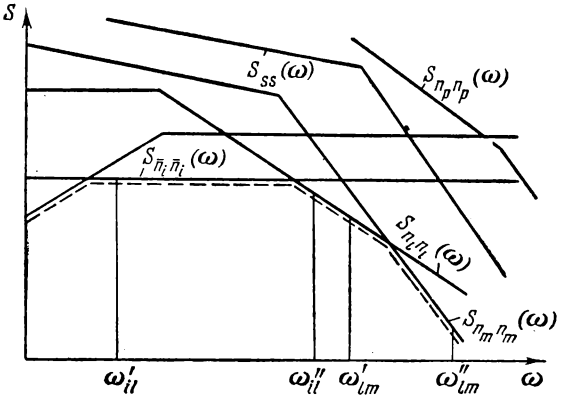

Рис. 4.6.

на интервалы, в пределах каждого из которых две кривые спектральных плотностей идут значительно ниже всех остальных. Так, на интервале $(\omega'_{il}, \omega''_{il})$ выполняется условие

$$S_{\bar{n}_l \bar{n}_i}(\omega),\ S_{\bar{n}_l \bar{n}_l}(\omega) \ll S_{ss}(\omega),\ S_{\bar{n}_m \bar{n}_m}(\omega) \quad (m \neq i,\ l). \quad (4.34)$$

В сумме (4.32) любое слагаемое содержит множителями или $S_{\bar{n}_l \bar{n}_l}(\omega)$, или $S_{\bar{n}_l \bar{n}_l}(\omega)$, или обе вместе. При этом на интервале $(\omega'_{il}, \omega''_{il})$ наибольшими по величине слагаемыми являются два, содержащие или только $S_{\bar{n}_i \bar{n}_l}(\omega)$, или только $S_{\bar{n}_l \bar{n}_l}(\omega)$ (все остальные слагаемые содержат их произведение). Поэтому на интервале $(\omega'_{il}, \omega''_{il})$ в выражении для определителя можно оставить только два слагаемых и приближенно записать

$$\Delta(\omega) \approx S_{ss}(\omega)\left[S_{\bar{n}_i \bar{n}_i}(\omega) + S_{\bar{n}_l \bar{n}_l}(\omega)\right] \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i,\, l}}^{N} S_{\bar{n}_k \bar{n}_k}(\omega). \quad (4.35)$$

Отсюда следует, что при $\omega'_{il} < \omega < \omega''_{il}$ корни определителя представляют собой или корни всех спектральных плотностей, кроме $S_{\bar{n}_i\bar{n}_i}(\omega)$ и $S_{\bar{n}_l\bar{n}_l}(\omega)$, или корни уравнения

$$S_{\bar{n}_i\bar{n}_i}(\omega) + S_{\bar{n}_l\bar{n}_l}(\omega) = 0. \tag{4.36}$$

В § 3.5 было отмечено, что при составлении передаточных функций оптимальных фильтров практически нужно учитывать только те корни, которые не совпадают с корнями спектральных плотностей полезного сигнала и помех. Аналогично для многоканальной системы «существенными» являются только корни уравнения (4.36).

Рассмотрим теперь интервал $(\omega'_{lm}, \omega''_{lm})$, на котором выполняется условие

$$S_{\bar{n}_l\bar{n}_l}(\omega),\ S_{\bar{n}_m\bar{n}_m}(\omega) \ll S_{ss}(\omega),\ S_{\bar{n}_j\bar{n}_j}(\omega) \qquad (j \neq l,\ m). \tag{4.37}$$

Аналогично получим, что на этом интервале «существенными» являются только корни уравнения

$$S_{\bar{n}_l\bar{n}_l}(\omega) + S_{\bar{n}_m\bar{n}_m}(\omega) = 0. \tag{4.38}$$

Таким образом следует просмотреть весь диапазон ω, представляющий интерес. При этом на каждом этапе следует решать простые уравнения вида (4.36), содержащие только две спектральные плотности. Методика упрощения решений уравнений такого вида, основанная на использовании спрямленных логарифмических характеристик, подробно описана в § 3.5.

Важно, что все «существенные» корни определителя $\Delta(\omega)$, т. е. полюсы искомых передаточных функций, определяются в результате рассмотрения «обхода снизу» кривых спектральных плотностей (на рис. 4.6 — пунктир). Отсюда, в частности, следует, что полюсы передаточных функций не будут зависеть от параметров тех спектральных плотностей, кривые которых нигде не идут ниже всех остальных, т. е. нигде не включаются в «обход снизу» [на рис. 4.6 кривые $S_{ss}(\omega)$ и $S_{n_pn_p}(\omega)$]. Если динамические свойства оптимальной системы не зависят от свойств какого-либо сигнала, то эта система должна быть инвариантной относительно этого сигнала.

Поэтому оптимальная система должна быть инвариантной по отношению к тем сигналам, кривые спектральных плотностей которых нигде не идут ниже всех других. Если этим свойством обладает любая из помех, то требование инвариантности относительно нее означает, что соответствующий сигнал просто не должен использоваться (передаточная функция этого канала становится равной нулю).

Все эти соображения позволяют как упростить процесс расчета характеристик оптимальной системы, заранее уменьшив число каналов или введя облегчающее решение условие инвариантности относительно полезного сигнала, так и на основании предварительного рассмотрения сделать вывод о том, полезен ли в реальной комплексной системе каждый измеритель или нет.

Полюсы передаточных функций определяют быстродействие стационарной системы. Если интервалы времени работы системы значительно превосходят постоянные времени фильтров, то фильтры, построенные при учете только недетерминированных составляющих сигналов, могут быть сделаны асимптотически несмещенными также относительно детерминированных составляющих (за счет введения слабых связей, см. § 3.2). Однако часто фильтры, построенные при учете только недетерминированных составляющих, оказываются обладающими условием асимптотической несмещенности, если вид детерминированных составляющих соответствует виду недетерминированных.

Если интервалы работы системы соизмеримы с постоянными времени стационарных фильтров, то конечность времени поступления сигналов необходимо учитывать. Этот учет может быть осуществлен косвенно, путем наложения дополнительных интегральных ограничений [22], однако в случае многоканальной системы такой подход вызывает такие же серьезные возражения, как и в случае одноканальной системы.

Пример. Рассмотрим трехканальную систему, блок-схема которой изображена на рис. 4.7. Свойства измерителей характеризуются передаточными функциями

$$H_1(j\omega)=1, \quad H_2(j\omega)=j\omega, \quad H_3(j\omega)=(j\omega)^2. \qquad (4.39)$$

Таким образом, первый измеритель непосредственно измеряет координату $s(t)$, второй — скорость $\dot{s}(t)$, третий — ускорение $\ddot{s}(t)$. Свойства взаимно статистически независимых полезного сигнала и помех характеризуются условными спектральными плотностями

$$S_{ss}(\omega)=\frac{A^2}{\omega^4},\quad S_{n_1n_1}(\omega)=\sigma_1^2,\quad S_{n_2n_2}(\omega)=\sigma_2^2,\quad S_{n_3n_3}(\omega)=\sigma_3^2. \tag{4.40}$$

Следовательно, полезный сигнал имеет смысл двойного интеграла от белого шума, а помехи представляют собой

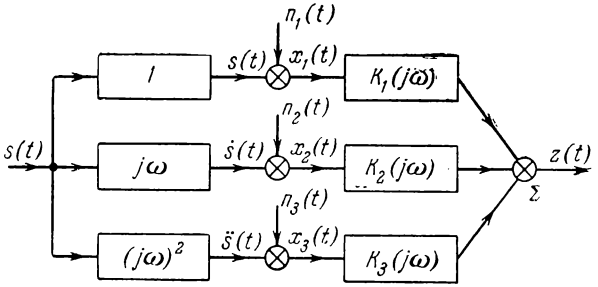

Рис. 4.7.

белые шумы. После приведения всех сигналов к полезному сигналу (после того, как сигналы пропущены через звенья с обратными передаточными функциями) получаем:

$$S_{\bar{n}_1\bar{n}_1}(\omega)=\sigma_1^2,\quad S_{\bar{n}_2\bar{n}_2}(\omega)=\frac{\sigma_2^2}{\omega^2},\quad S_{\bar{n}_3\bar{n}_3}(\omega)=\frac{\sigma_3^2}{\omega^4}. \tag{4.41}$$

Четыре основных варианта взаимного расположения кривых условных спектральных плотностей показаны на рис. 4.8. Рассмотрим их последовательно.

а) В обходе снизу (на рис. 4.8, *а* — пунктир) участвуют только две кривые $S_{ss}(\omega)$ и $S_{\bar{n}_1\bar{n}_1}(\omega)$. Следовательно, оптимальная система должна быть инвариантна относительно помех $n_2(t)$ и $n_3(t)$, а это возможно лишь тогда, когда сигналы $x_2(t)$ и $x_3(t)$ совсем не используются $[K_2(j\omega)=0,\ K_3(j\omega)=0]$. В рассматриваемом случае

трехканальная система вырождается в одноканальную. Используя методику решения задачи фильтрации в одноканальной системе (см. § 3.5), делаем вывод, что

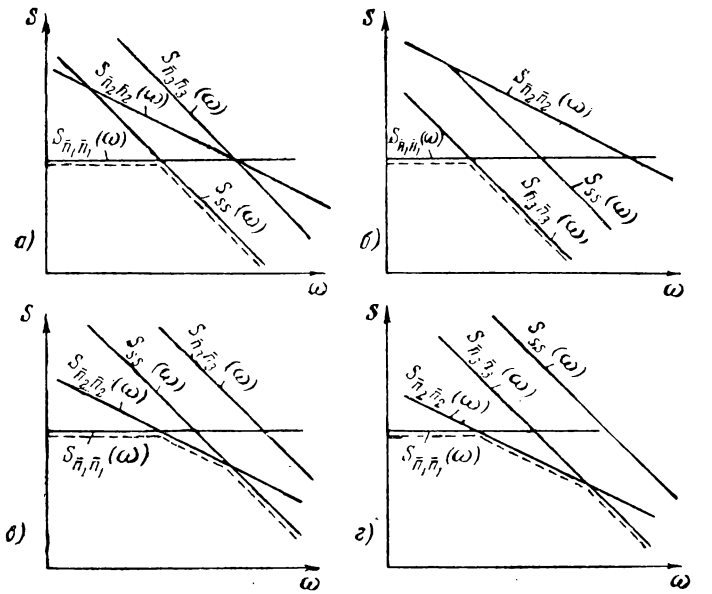

Рис. 4.8.

полюсы передаточной функции единственного фильтра являются корнями уравнения

$$S_{ss}(\omega)+S_{\bar{n}_1\bar{n}_1}(\omega)=0. \tag{4.42}$$

Из условий конечности дисперсии ошибки находим окончательно:

$$\left.\begin{aligned} K_1(j\omega)&=\frac{2\rho j\omega+2\rho^2}{(j\omega)^2+2\rho j\omega+2\rho^2}\quad\left[\rho=A^{1/2}(2\sigma_1)^{-1/2}\right],\\ D_0&=\left(\frac{A}{2}\right)^{1/2}\sigma_1^{3/2}.\end{aligned}\right\} \tag{4.43}$$

б) В обходе снизу (рис. 4.8, *б*) участвуют также только две кривые: $S_{\bar{n}_1\bar{n}_1}(\omega)$ и $S_{\bar{n}_3\bar{n}_3}(\omega)$. Следовательно, оптимальная система становится двухканальной; она не

использует сигнала $x_2(t)$ $[K_2(j\omega)=0]$ и является инвариантной относительно полезного сигнала. Полюсы передаточной функции определяются как корни уравнения

$$S_{\bar{n}_1\bar{n}_1}(\omega)+S_{\bar{n}_3\bar{n}_3}(\omega)=0. \tag{4.44}$$

Условная спектральная плотность приведенной помехи $\bar{n}_3(t)$ имеет тот же вид, что и условная спектральная плотность полезного сигнала. Поэтому для передаточных функций получаем выражения

$$K_1(j\omega)=\frac{2\rho j\omega+2\rho^2}{(j\omega)^2+2\rho j\omega+2\rho^2}, \qquad K_3(j\omega)=\frac{1}{(j\omega)^2+2\rho j\omega+2\rho^2}$$
$$\left[\rho=(2\sigma_1)^{-1/2}\sigma_3^{1/2}\right], \tag{4.45}$$

первое из которых имеет тот же вид, что и выражение (4.43). Система может быть выполнена по схеме рис. 4.4, *а*. Для фильтра в этой схеме роль полезного сигнала играет приведенная помеха $\bar{n}_3(t)$.

в) В обходе снизу (рис. 4.8, *в*) участвуют три кривые: $S_{ss}(\omega)$, $S_{\bar{n}_1\bar{n}_1}(\omega)$, $S_{\bar{n}_2\bar{n}_2}(\omega)$. Следовательно, система является двухканальной $[K_3(j\omega)=0]$, не инвариантной относительно полезного сигнала. Полюсы передаточных функций приближенно определяются как корни уравнений

$$S_{\bar{n}_1\bar{n}_1}(\omega)+S_{\bar{n}_2\bar{n}_2}(\omega)=0, \qquad S_{\bar{n}_2\bar{n}_2}(\omega)+S_{ss}(\omega)=0, \tag{4.46}$$

так как сначала ниже всех идут кривые $S_{\bar{n}_1\bar{n}_1}(\omega)$ и $S_{\bar{n}_2\bar{n}_2}(\omega)$, а затем кривые $S_{\bar{n}_2\bar{n}_2}(\omega)$ и $S_{ss}(\omega)$. Взяв те из корней уравнений (4.46), которые лежат в верхней полуплоскости, можно записать следующие выражения для искомых передаточных функций:

$$\left.\begin{aligned} K_1(j\omega)&=\frac{a_1(\rho_1+\rho_2)j\omega+\rho_1\rho_2}{(j\omega)^2+(\rho_1+\rho_2)j\omega+\rho_1\rho_2},\\ K_2(j\omega)&=\frac{a_2 j\omega+(1-a_1)(\rho_1+\rho_2)}{(j\omega)^2+(\rho_1+\rho_2)j\omega+\rho_1\rho_2}\end{aligned}\right\} \tag{4.47}$$
$$\left(\rho_1=\frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \quad \rho_2=\frac{A}{\sigma_2}\right).$$

Неопределенные коэффициенты a_1 и a_2 находятся из условий конечности и минимума дисперсии ошибки. Получаем:

$$a_1 = \frac{\sigma_2^2}{A\sigma_1 + \sigma_2^2}, \quad a_2 = \frac{A\sigma_1}{A\sigma_1 + \sigma_2^2} = 1 - a_1. \qquad (4.48)$$

Заметим, что при $\rho_1 \ll \rho_2$ (вторая точка пересечения кривых спектральных плотностей находится значительно правее и ниже первой) разность $[1 - K_1(j\omega) - j\omega K_2(j\omega)]$ становится по модулю весьма малой. Поэтому можно предположить, что при этом условии использование характеристик сигнала $s(t)$, т. е. отказ от условия инвариантности относительно полезного сигнала, дает незначительный эффект.

Найдем решение задачи оптимального преобразования сигналов двух первых измерителей при условии инвариантности относительно полезного сигнала. Получаем:

$$K_1(j\omega) = \frac{\rho_1}{j\omega + \rho_1}, \quad K_2(j\omega) = \frac{1}{j\omega + \rho_1}, \quad D_0 = \sigma_1\sigma_2. \qquad (4.49)$$

Система с передаточными функциями (4.47) должна давать меньшую дисперсию ошибки, чем система с передаточными функциями (4.49), так как в первом случае находится абсолютный минимум дисперсии ошибки, а во втором — относительный (при наложенном условии инвариантности относительно полезного сигнала). Однако сравнение дисперсий ошибок показывает, что различие в точности невелико. Так, при $\rho_1 = \rho_2$ [кривые $S_{ss}(\omega)$, $S_{\bar{n}_1\bar{n}_1}(\omega)$ и $S_{\bar{n}_2\bar{n}_2}(\omega)$ пересекаются в одной точке] среднеквадратичные ошибки систем различаются всего на 6%, и при увеличении отношения ρ_2/ρ_1 различие быстро уменьшается. Таким образом, и в этом случае двухканальная система, инвариантная относительно полезного сигнала, является практически оптимальной.

С подобным положением приходится сталкиваться, когда отклонения от условия инвариантности относительно полезного сигнала проявляются там, где значения ординат кривых спектральных плотностей достаточно малы. Так, на рис. 4.8, *в* точка пересечения кривой $S_{ss}(\omega)$

с кривой $S_{\bar{n}_2\bar{n}_2}(\omega)$ (именно из-за наличия этой точки система не инвариантна относительно полезного сигнала) лежит ниже точки пересечения кривых $S_{\bar{n}_1\bar{n}_1}(\omega)$ и $S_{\bar{n}_2\bar{n}_2}(\omega)$ (положение этой точки определяет характер преобразования сигналов двух первых измерителей), поэтому неинвариантность относительно полезного сигнала является второстепенным свойством. Оно проявляется в коррекции частотных характеристик в области относительно высоких частот.

г) В обходе снизу (рис. 4.8, *г*) участвуют три кривые: $S_{\bar{n}_1\bar{n}_1}(\omega)$, $S_{\bar{n}_2\bar{n}_2}(\omega)$ и $S_{\bar{n}_3\bar{n}_3}(\omega)$. Следовательно, система инвариантна относительно полезного сигнала и, вообще говоря, должна использовать сигналы всех трех измерителей. Однако, учитывая, что вторая точка пересечения кривых лежит ниже первой, можно сделать вывод, что достаточно близкой к оптимальной является система, использующая сигналы только двух первых измерителей. Передаточные функции фильтров в этом случае будут определяться выражениями (4.49). Таким образом, в случаях в) и г) оптимальные системы оказываются практически одинаковыми.

Отметим в заключение, что для всех вариантов оптимальная система или не инвариантна относительно полезного сигнала и использует сигнал только одного измерителя, или инвариантна относительно полезного сигнала и использует сигналы двух измерителей. Такое положение является типичным в стационарных задачах при любом числе каналов.

4.4. Оптимальная обработка дискретных данных в многоканальной системе

Будем считать, что по каждому каналу N-канальной комплексной системы поступают только дискретные данные, т. е. ключи $Кл_1$, $Кл_2$, ..., $Кл_N$ (см. рис. 4.9) представляют собой импульсные элементы, преобразующие непрерывные сигналы в кратковременные импульсы. Обозначим моменты замыкания ключа $Кл_1$ через $t_1^{(1)}, \ldots, t_{M_1}^{(1)}$, ключа $Кл_2$ — через $t_1^{(2)}, \ldots, t_{M_2}^{(2)}$ и т. д. Все

эти моменты времени считаем произвольными, но известными.

Вычислительное устройство выполняет линейную операцию над дискретными значениями выходных сигналов измерителей

$$z(t)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M_i} a_i^{(j)}(t)\,x_i\left(t_j^{(i)}\right). \qquad (4.50)$$

Весовые коэффициенты $a_i^{(j)}(t)$ определяются из условий минимума дисперсии ошибки воспроизведения желаемого сигнала $l(t)$ в момент времени t:

$$D(t)=M\{[z(t)-l(t)]^2\}=\min. \qquad (4.51)$$

Если момент времени t, для которого должен быть определен желаемый сигнал $l(t)$, считается непрерывно изменяющимся, то весовые коэффициенты $a_i^{(j)}(t)$ являются функциями времени. В этом случае вычислительное

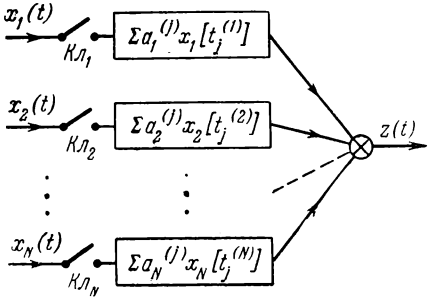

Рис. 4.9.

устройство осуществляет наряду с дискретной фильтрацией также непрерывную экстраполяцию. Выражение для дисперсии ошибки в развернутом виде имеет вид:

$$D(t)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{p=1}^{M_i}\sum_{q=1}^{M_j} a_i^{(p)}(t)\,a_j^{(q)}(t)\,R_{x_ix_j}\left(t_i^{(p)},\,t_j^{(q)}\right)-$$
$$-2\sum_{i=1}^{N}\sum_{p=1}^{M_i} a_i^{(p)}(t)\,R_{lx_i}\left(t,\,t_i^{(p)}\right)+R_{ll}(t,\,t). \qquad (4.52)$$

Условия минимума дисперсии ошибки записываются следующим образом:

$$\frac{\partial D(t)}{\partial a_i^{(p)}(t)} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, N;\ p = 1, 2, \ldots, M_i). \tag{4.53}$$

Раскрывая эти условия, получаем систему $(M_1 + M_2 + \ldots + M_N)$ линейных уравнений относительно такого же числа искомых коэффициентов

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{q=1}^{M_i} a_j^{(q)}(t) R_{x_i x_j}(t_i^{(p)}, t_j^{(q)}) = R_{lx_i}(t, t_i^{(p)}) \tag{4.54}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, N;\ p = 1, 2, \ldots, M_i).$$

Дисперсия ошибки при оптимальном преобразовании равна:

$$D_0(t) = R_{ll}(t, t) - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{p=1}^{M_i} \sum_{q=1}^{M_j} a_i^{(p)}(t) a_j^{(q)}(t) R_{x_i x_j}(t_i^{(p)}, t_j^{(q)}). \tag{4.55}$$

При большом числе дискретных данных необходимые вычисления становятся очень громоздкими, а соответствующая реализация — весьма сложной. Если дискретные значения всех сигналов поступают равномерно, синхронно и синфазно, т. е. через равные интервалы в одни и те же моменты времени, то для решения задачи с успехом могут быть использованы разработанные методы теории дискретных систем, основанные на применении z-преобразования [17, 36]. Характерно, что этот аппарат не дает усложнения решения при увеличении числа данных. В пределе, если считать время поступления сигналов бесконечно большим, решение становится даже более простым [16]. Все же решение дискретных задач всегда более сложно, чем соответствующих непрерывных. Все соображения о возможностях реализации оптимальной одноканальной системы, высказанные в § 3.8, остаются справедливыми и по отношению к многоканальным системам.

4.5. Оптимальная обработка одновременно поступающих непрерывных и дискретных сигналов [45]

При преобразовании навигационных данных в комплексной системе часто встречаются случаи, когда по одним каналам информация поступает непрерывно, а по другим — дискретно. Наиболее характерными следует считать такие ситуации:

1. Комплексная система работает в режиме периодического или разового корректирования непрерывных, менее точных измерителей (в частности, таких, для которых дисперсия ошибки растет со временем) по более

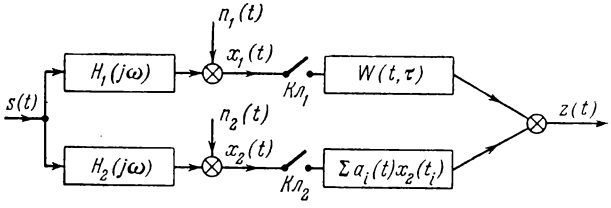

Рис. 4.10.

точным. При этом последние или по принципу действия, или по тактическим соображениям выдают дискретные данные в некоторые моменты времени.

2. Сигналы от ряда непрерывных измерителей проходят предварительные преобразования (например, тригонометрические) на цифровой вычислительной машине, выдающей результаты в дискретные моменты, причем дискретностью нельзя пренебречь. В то же время сигналы от других измерителей либо не требуют предварительной обработки, либо допускают обработку на устройствах непрерывного действия или на цифровой вычислительной машине с достаточно малым временем такта.

Для схемного решения этих задач практикой выработаны некоторые приемы, которые обеспечивают повышение точности непрерывной части системы за счет использования дискретной информации. Ниже описана методика оптимального решения задачи, при котором

непрерывно обеспечивается максимальная возможная точность. Для простоты рассмотрим систему, состоящую только из двух каналов (рис. 4.10). По первому каналу информация поступает непрерывно, по второму — дискретно. В соответствии с этим предполагается, что на рис. 4.10 ключ $Кл_1$ замкнут на конечном интервале времени (t_0, t), а ключ $Кл_2$ представляет собой идеальный импульсный элемент, преобразующий непрерывный сигнал $x_2(t)$ в серию импульсов. Моменты замыкания ключа $Кл_2$ обозначим через $t_1, t_2, \ldots, t_N$.

Выражения для выходных сигналов фильтров записываются следующим образом:

$$z_1(t)=\int_{t_0}^{t} W(t, \tau)\, x_1(\tau)\, d\tau, \quad z_2(t)=\sum_{i=1}^{N} a_i(t)\, x_2(t_i). \quad (4.56)$$

Дисперсия ошибки воспроизведения желаемого сигнала $l(t)$ в произвольный момент времени t равна:

$$\begin{aligned} D(t)=&\int_{t_0}^{t} W(t, \tau_1)\, d\tau_1 \int_{t_0}^{t} W(t, \tau_2)\, R_{x_1x_1}(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_2 + \\ &+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_i(t)\, a_j(t)\, R_{x_2x_2}(t_i, t_j)+R_{ll}(t, t)+ \\ &+2\sum_{i=1}^{N} a_i(t) \int_{t_0}^{t} W(t, \tau_1)\, R_{x_1x_2}(\tau_1, t_i)\, d\tau_1 - \\ &-2\int_{t_0}^{t} W(t, \tau_1)\, R_{lx_1}(t, \tau_1)\, d\tau_1 - 2\sum_{i=1}^{N} a_i(t)\, R_{lx_2}(t, t_i). \quad (4.57) \end{aligned}$$

Таким образом, при фиксированном t дисперсия ошибки является функционалом от $W(t, \tau)$ и, кроме того, зависит от N весовых коэффициентов $a_i(t)$. И $W(t, \tau)$ и $a_i(t)$ определяются из условий минимума дисперсии ошибки.

Задав произвольную вариацию $\delta W(t, \tau)$ искомой импульсной переходной функции $W(t, \tau)$ и приравняв нулю

соответствующую вариацию выражения (4.57), получим первое условие минимума дисперсии ошибки:

$$\int_{t_0}^{t} W(t, \tau_2) R_{x_1x_1}(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_2 = R_{lx_1}(t, \tau_1) - \sum_{i=1}^{N} a_i(t) R_{x_1x_2}(\tau_1, t_i)$$

$$(t_0 \leqslant \tau_1 \leqslant t). \qquad (4.58)$$

Условия минимума дисперсии ошибки по N весовым коэффициентам $a_i(t)$ имеют вид:

$$\frac{\partial D(t)}{\partial a_i(t)} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, N) \qquad (4.59)$$

или в развернутой форме:

$$\sum_{j=1}^{N} a_j(t) R_{x_2x_2}(t_i, t_j) = R_{lx_2}(t, t_i) - \int_{t_0}^{t} W(t, \tau_2) R_{x_1x_2}(\tau_2, t_i)\, d\tau_2$$

$$(i = 1, 2, \ldots, N). \qquad (4.60)$$

Интегральное уравнение (4.58) и система (4.60) линейных алгебраических уравнений образуют замкнутую систему. В этих уравнениях легко просматриваются более простые задачи оптимальной фильтрации в одноканальных системах. Однако здесь обе задачи оказываются связанными. Связь определяется суммой в правой части уравнения (4.58) и интегралами в правых частях уравнений (4.60).

При решении следует иметь в виду, что $W(t, \tau)$ обычно имеет различные аналитические представления на интервалах, разделенных моментами времени $t_1, t_2, \ldots, t_N$. Решение может быть осуществлено, например, в такой последовательности. Сначала находится общее решение $W(t, \tau, a_1, \ldots, a_N)$ интегрального уравнения (4.58), причем $a_1, \ldots, a_N$ считаются неопределенными постоянными. Затем это решение подставляется в правые части уравнений (4.60). В результате получится система N линейных алгебраических уравнений относительно $a_1(t), \ldots, a_N(t)$. Часто бывает удобно объединить последний этап решения интегрального уравнения (определение постоянных из условия тождественного удовлетворения

интегрального уравнения) с процессом определения $a_1(t), \ldots, a_N(t)$ (см. [45]).

Практическое использование метода оказывается возможным в следующих случаях:

1) число импульсов, поступивших по второму каналу с момента начала работы системы, невелико;

2) интервалы между моментами включения второго канала достаточно велики и соизмеримы со временем корреляции полезного сигнала, поэтому можно учитывать лишь одно или несколько последних значений дискретного сигнала.

Если данные поступают через равные интервалы времени и время работы системы достаточно велико, то для решения может быть с успехом использован аппарат смещенного z-преобразования. Для предельного случая бесконечно большого времени поступления данных методика решения описана в работе [50].

Пример. Пусть измерители выдают сведения непосредственно о полезном сигнале

$$x_1(t) = s(t) + n_1(t), \qquad x_2(t) = s(t) + n_2(t). \tag{4.61}$$

Корреляционная функция полезного сигнала имеет вид:

$$R_{ss}(\tau_1, \tau_2) = A^2 e^{-\alpha|\tau_1 - \tau_2|}. \tag{4.62}$$

Помеха в непрерывном канале представляет собой белый шум:

$$R_{n_1 n_1}(\tau_1, \tau_2) = \sigma^2 \delta(\tau_1 - \tau_2), \tag{4.63}$$

а помеха в дискретном канале пренебрежимо мала, так что можно принять

$$n_2(t) = 0. \tag{4.64}$$

Предположим, что непрерывный канал работает неограниченно долго (ключ $Кл_1$ постоянно замкнут), а дискретный канал дает только одно значение сигнала в момент времени $t=0$. Введем обозначения:

$$W(t, \tau) = \begin{cases} W^{(1)}(t, \tau) & \text{при} \quad \tau < 0, \\ W^{(2)}(t, \tau) & \text{при} \quad \tau > 0. \end{cases} \tag{4.65}$$

Система уравнений (4.58) и (4.60) для рассматриваемой задачи имеет вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{0} W^{(1)}(t,\ \tau_2)\left[A^2 e^{-\alpha|\tau_1-\tau_2|}+\sigma^2\delta(\tau_1-\tau_2)\right]d\tau_2+\\
&\qquad+\int_{0}^{t} W^{(2)}(t,\ \tau_2)\left[A^2 e^{-\alpha(\tau_2-\tau_1)}\right]d\tau_2=\\
&\qquad\qquad=A^2 e^{-\alpha(t-\tau_1)}-a(t)\,A^2 e^{\alpha\tau_1}\\
&\qquad\qquad(-\infty<\tau_1\leqslant 0),\\
&\int_{-\infty}^{0} W^{(1)}(t,\ \tau_2)\left[A^2 e^{-\alpha(\tau_1-\tau_2)}\right]d\tau_2+\\
&+\int_{0}^{t} W^{(2)}(t,\ \tau_2)\left[A^2 e^{-\alpha|\tau_1-\tau_2|}+\sigma^2\delta(\tau_1-\tau_2)\right]d\tau_2=\\
&\qquad\qquad=A^2 e^{-\alpha(t-\tau_1)}-a(t)\,A^2 e^{-\alpha\tau_1}\\
&\qquad\qquad(0<\tau_1\leqslant t),\\
&a(t)\,A^2=A^2 e^{-\alpha t}-\int_{-\infty}^{0} W^{(1)}(t,\ \tau_1)\left[A^2 e^{\alpha\tau_1}\right]d\tau_1-\\
&\qquad\qquad-\int_{0}^{t} W^{(2)}(t,\ \tau_1)\left[A^2 e^{-\alpha\tau_1}\right]d\tau_1.
\end{aligned}\right\}\quad(4.66)$$

Спектральная плотность сигнала $x_1(t)$ записывается следующим образом:

$$S_{x_1x_1}(\omega)=\frac{2\alpha A^2}{\omega^2+\alpha^2}+\sigma^2. \tag{4.67}$$

Применив к двум первым уравнениям (4.66) дифференциальный оператор

$$Q\left(\frac{d}{d\tau_1}\right)=\frac{d^2}{d\tau_1^2}-\alpha^2, \tag{4.68}$$

получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2W}{d\tau_1^2}-\xi^2 W=0\qquad\left(\xi^2=\frac{2\alpha A^2+\alpha^2\sigma^2}{\sigma^2}\right). \tag{4.69}$$

Следовательно, искомые импульсные переходные функции имеют вид:

$$W^{(1)}(t, \tau) = A_1(t) e^{\xi\tau}, \quad W^{(2)}(t, \tau) = A_2(t) e^{\xi\tau} + A_3(t) e^{-\xi\tau}. \tag{4.70}$$

Подставив выражения (4.70) в уравнения (4.66) и потребовав, чтобы они были тождественно удовлетворены, находим:

$$\left.\begin{aligned} A_1(t) = 0, \quad A_2(t) = -A_3(t) = \frac{(\xi-\alpha)(\xi+\alpha)\, e^{-\xi t}}{(\xi+\alpha)+(\xi-\alpha)\, e^{-\xi t}}, \\ a(t) = \frac{2\xi e^{-\xi t}}{(\xi+\alpha)+(\xi-\alpha)\, e^{-\xi t}}. \end{aligned}\right\} \tag{4.71}$$

При $t \to 0$ получаем, как и следовало ожидать, $a \to 1$, т. е. в момент времени $t=0$ из дискретного канала просто следует взять значение полезного сигнала. При $t \to \infty$ получаем:

$$W(t, \tau) = (\xi - \alpha) e^{-\xi(t-\tau)}, \quad a(t) = 0, \tag{4.72}$$

т. е. данные из дискретного канала по причине их устарения не используются.

То обстоятельство, что $W(t, \tau) = 0$ при $\tau < 0$, связано с тем, что полезный сигнал в этом примере представляет собой простой марковский процесс. В этом случае, если известно точное значение функции в любой момент времени, то вся предыстория не несет дополнительной информации и может быть отброшена.

ГЛАВА 5

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НАВИГАЦИОННЫХ ДАННЫХ ДЛЯ РЕЖИМА ЭКСТРАПОЛЯЦИИ (РЕЖИМА «ПАМЯТИ»)

Если данные о движении объекта не поступают в течение некоторого интервала до момента времени, когда нужно определить текущие значения координаты и скорости, то вычислительное устройство навигационной системы должно осуществлять экстраполяцию. Исходными данными являются как статистические характеристики, полученные в результате осреднения сведений по многим полетам, так и данные, относящиеся именно к исследуемому полету. В этой главе рассматриваются три варианта сведений о предыстории движения, доставленных источниками информации, работавшими к моменту перехода в режим экстраполяции. Однако во всех случаях предполагается, что сведения идеально точны. По отношению к реальным условиям, когда используются сведения, искаженные ошибками, полученные здесь решения дают возможность получить оценки достижимой точности сверху и снизу, а также выявить некоторые общие качественные закономерности.

5.1. Определение координаты и скорости по априорным данным

Для рассмотренных в этом параграфе задач характерно, что все сведения о движении объекта представляют собой статистические характеристики, полученные в результате осреднения по другим реализациям. Какие-либо сведения, относящиеся именно к данному полету, отсутствуют.

А) Движение со стационарной скоростью.

Для случая движения со стационарной скоростью априорные данные представляют собой математические ожидания значений координаты и скорости, определяющие программное движение. В рассматриваемом случае навигационная система должна осуществлять экстраполяцию текущих координат и составляющих вектора скорости по самым скудным данным. Выходные сигналы навигационной системы, работающей в индикаторном режиме, формируются как математические ожидания координаты и скорости:

$$q(t) = m(t), \qquad p(t) = \dot{m}(t). \tag{5.1}$$

Ошибки в координате и скорости представляют собой координату и скорость в системе, совершающей программное движение:

$$e_s(t) = s(t) = c_0 + c_1 t + r(t), \quad e_v(t) = \dot{s}(t) = c_1 + \dot{r}(t). \tag{5.2}$$

Используя выражение (2.38) для корреляционной функции $R_{ss}(\tau_1, \tau_2)$, получаем следующие выражения для дисперсий ошибок в координате и скорости:

$$\left.\begin{aligned} D_s(t) &= R_{ss}(t, t) = C_0^2 + C_1^2 t^2 + \frac{2C^2}{\beta}\left[t - \frac{1}{\beta}(1 - e^{-\beta t})\right], \\ D_v(t) &= R_{\dot{s}\dot{s}}(t, t) = \overline{C}_1^2 \quad (\overline{C}_1^2 = C_1^2 + C^2). \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

В соответствии с определением движения со стационарной скоростью дисперсия ошибки в скорости постоянна.

При малых t (при $t < 1/\beta$) первое из выражений (5.3) приближенно записывается так:

$$D_s(t) \approx C_0^2 + \overline{C}_1^2 t^2. \tag{5.4}$$

Это означает, что при малых t недетерминированная составляющая движения проявляется как детерминированная (на малых интервалах времени скорость можно считать постоянной).

При достаточно больших t (при $t > 1/\beta$) первое из выражений (5.3) приближенно можно записать в виде

$$D_s(t) \approx C_0^2 + C_1^2 t^2 + \frac{2C^2}{\beta} t. \tag{5.5}$$

Таким образом, при больших t основной удельный вес составляют ошибки от неточного знания средней скорости (второе слагаемое). На рис. 5.1 в логарифмической шкале построены графики изменения среднеквадратичного значения ошибки в координате $\sigma_s(t)$ для различных значений C_1. Из графиков и формул (5.3), (5.4) и (5.5) видно, что при $C_1 > C$ недетерминированный характер изменения полезного сигнала практически не проявляется (см. на рис. 5.1 кривую, соответствующую $C_1 = 50$ *м/сек*). При $C_1 < C$ недетерминированный характер полезного сигнала сказывается на ограниченном участке (на кривой, соответствующей $C_1 = 5$ *м/сек*, виден участок, на котором среднеквадратичная ошибка растет медленнее).

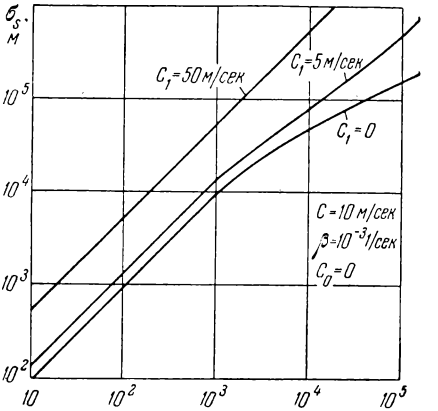

Рис. 5.1.

И лишь в пределе при $C_1 \to 0$ недетерминированность полезного сигнала существенна: при больших t среднеквадратичная ошибка растет пропорционально $t^{1/2}$, а не пропорционально t.

Напомним, что в реальных условиях величина C_1 зависит от того, при каких дополнительных условиях проводится операция осреднения на этапе определения статистических свойств движения. Так, для самолета при самом «обобщенном» подходе функции $m(t)$ и $\dot{m}(t)$ находятся осреднением по всем возможным высотам, трассам, режимам работы двигателей и т. д. Сужение диапазона условий приводит к уменьшению разброса в средней скорости, т. е. к уменьшению значения C_1. При этом существенно, что если $m(t)$ и C_1 определяются для известных высот, трасс и т. д., то вычислительное устройство должно вырабатывать $m(t)$ для навигационной системы по этим данным. Кривая, соответствующая

$C_1=0$ (рис. 5.1), характеризует предельные возможности при уточнении свойств движения для каждого данного полета: как угодно точное определение средней скорости не может убрать недетерминированную составляющую движения. По расхождению остальных кривых и кривой $C_1=0$ можно судить, таким образом, о выигрыше, который может дать автоматическое устройство, вычисляющее наиболее вероятную среднюю скорость полета по априори известным зависимостям скорости от условий полета.

Вопрос о том, можно ли не учитывать недетерминированный характер закона движения, следует решать при учете величины допуска σ_0, при превышении которого ошибки считаются недопустимо большими. Из рассмотрения рис. 5.1 видно, например, что при $\sigma_0=10^4$ *м* для любых C_1 допустимо использовать приближенную формулу (5.4).

Рассмотрение ошибок навигационной системы, работающей только по априорным данным, дает в дальнейшем основу для оценки качества работы любой навигационной системы. При оптимальной обработке сигналов любых источников информации дисперсии ошибок в координате и скорости будут всегда меньше значений, определяемых формулами (5.3).

Б) Движение со стационарным ускорением.

Выходные сигналы навигационной системы, представляющие собой оценки текущих значений координаты и скорости, формируются как математические ожидания (5.1). Ошибки в координате и скорости равны:

$$e_s(t)=c_0+c_1t+\frac{1}{2}c_2t^2+r(t),\qquad e_v(t)=c_1+c_2t+\dot{r}(t). \tag{5.6}$$

Используя выражение (2.42) для корреляционной функции координаты, получаем следующие выражения для дисперсий ошибок в координате и скорости:

$$\left.\begin{aligned} D_s(t)&=C_0^2+C_1^2t^2+\frac{1}{4}C_2^2t^4+\\ &\quad+\frac{A^2}{\alpha}\left\{\frac{2}{3}t^3-\frac{1}{\alpha}t^2+\frac{2}{\alpha^3}\left[1-e^{-\alpha t}(\alpha t+1)\right]\right\},\\ D_v(t)&=C_1^2+C_2^2t^2+\frac{2A^2}{\alpha}\left[t-\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})\right]. \end{aligned}\right\} \tag{5.7}$$

При малых t (при $t<1/\alpha$) эти выражения можно заменить приближенными:

$$\left.\begin{aligned} D_s(t) &\approx C_0^2+C_1^2t^2+\frac{1}{4}\,\overline{C}_2^2t^4,\\ D_v(t) &\approx C_1^2+\overline{C}_2^2t^2\\ &(\overline{C}_2^2=C_2^2+A^2). \end{aligned}\right\} \tag{5.8}$$

При больших t (при $t>1/\alpha$) из выражений (5.7) получаем другие приближенные выражения:

$$\left.\begin{aligned} D_s(t) &\approx C_0^2+C_1^2t^2+\frac{1}{4}\,C_2^2t^4+\frac{2}{3}\,\frac{A^2}{\alpha}\,t^3,\\ D_v(t) &\approx C_1^2+C_2^2t^2+\frac{2A^2}{\alpha}\,t. \end{aligned}\right\} \tag{5.9}$$

На рис. 5.2 представлены графики изменения среднеквадратичной ошибки в координате $\sigma_s(t)$ для различных значений C_1 и C_2. Из рассмотрения формул (5.7), (5.8) и (5.9) и графиков следует, что как при малых, так и при больших значениях t ошибки ведут себя практически как детерминированные. При $C_2<A$ и при достаточно малых C_1 недетерминированная составляющая может проявляться при не слишком малых и не слишком больших t; при $C_2>A$ она практически не проявляется вовсе. Кривая, соответствующая $C_1=0$ и $C_2=0$, определяет предельные возможности повышения точности при уточнении значений детерминированных составляющих.

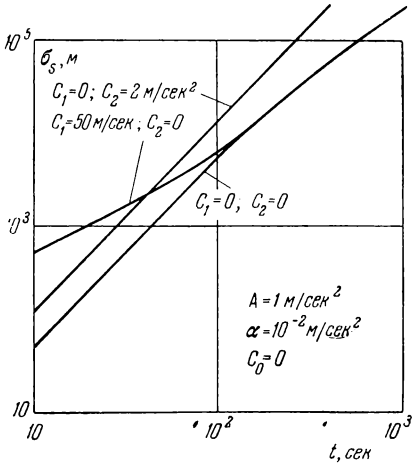

Рис. 5.2.

5.2. Определение координаты и скорости по априорным данным и начальным условиям

Примем, что помимо априорных данных (значений математических ожиданий) точно определены начальные условия: для движения со стационарной скоростью — начальные значения координаты и скорости, а для движения со стационарным ускорением — также и ускорения. Физически знание начального значения координаты означает или то, что точно известно место старта, или то, что точно фиксируется момент прохождения объекта через некоторый пункт. Чтобы иметь точные значения скорости или ускорения в начальный момент времени, нужно использовать данные соответствующих измерителей. Обычно сведения такого рода могут быть получены от источников малого радиуса действия (допплеровский измеритель скорости, опирающийся на наземную станцию) или малого времени работы (инерциальная система с плохой угловой стабилизацией).

Для корреляционных функций вида (2.38) и (2.42) перечисленные выше системы начальных условий являются полными, так как значения производных более высокого порядка задать нельзя (ускорение для движения со стационарной скоростью и производная ускорения для движения со стационарным ускорением имеют составляющие типа белого шума теоретически с бесконечной, а практически с весьма большой дисперсией). Принципиальное отличие вида используемых данных от рассмотренных в § 5.1 заключается в том, что здесь известны не только статистические сведения о множестве реализаций, но и некоторые сведения о каждой данной реализации.

А) Движение со стационарной скоростью.

Считаются известными математическое ожидание и начальное значение координаты [соответственно $m(t)$ и $s(0)$] и начальное значение скорости $\dot{s}(0)$. Выходные сигналы навигационной системы формируются следующим образом:

$$q(t) = m(t) + s(0) + a_s(t)\dot{s}(0), \qquad p(t) = \dot{m}(t) + a_v(t)\dot{s}(0). \tag{5.10}$$

Весовые коэффициенты $a_s(t)$ и $a_v(t)$ определяются из условий минимума дисперсий ошибок в координате и скорости для заданного момента времени t. Выражения для ошибок записываются следующим образом:

$$e_s(t) = c_1 t + r(t) - a_s(t)\dot{s}(0), \quad e_v(t) = c_1 + \dot{r}(t) - a_v(t)\dot{s}(0). \tag{5.11}$$

В результате минимизации дисперсий ошибок получаем:

$$a_s(t) = \frac{C_1^2\beta t + C^2(1 - e^{-\beta t})}{\beta \overline{C}_1^2}, \quad a_v(t) = \frac{C_1^2 + C^2 e^{-\beta t}}{\overline{C}_1^2}. \tag{5.12}$$

При этом выполняется соотношение

$$\frac{da_s(t)}{dt} = a_v(t). \tag{5.13}$$

Отсюда следует, что оптимальная система может быть выполнена так, как показано на рис. 5.3: оценка текущего значения координаты получается интегрированием

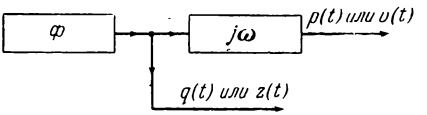

Рис. 5.3.

оценки скорости. При преобразовании данных от неидеальных источников информации такое положение обычно не имеет места (см., например, § 6.3).

Дисперсии ошибок в координате и скорости при оптимальном преобразовании данных равны:

$$\left.\begin{aligned} D_s(t) &= \frac{C_1^2 C^2}{\overline{C}_1^2} t^2 + \frac{C^2}{\beta^2 \overline{C}_1^2}\{2C_1^2[e^{-\beta t}(\beta t + 1) - 1] + \\ &\qquad + C^2(2\beta t - 3 + 4e^{-\beta t} - e^{-2\beta t})\}, \\ D_v(t) &= \frac{C^2}{\overline{C}_1^2}[2C_1^2(1 - e^{-\beta t}) + C^2(1 - e^{-2\beta t})]. \end{aligned}\right\} \tag{5.14}$$

Отметим, что при отсутствии недетерминированной составляющей (при $C = 0$) имеют место равенства

$D_s(t)=0$, $D_v(t)=0$, т. е. в этом случае при точном знании начальных условий предсказание осуществляется без ошибок.

При малых t (при $t<1/\beta$) выражения (5.12) приближенно равны:

$$a_s(t)\approx t, \qquad a_v(t)\approx 1. \tag{5.15}$$

Таким образом, при этом вычислительное устройство должно осуществлять просто запоминание измеренной начальной скорости $\dot{s}(0)$ и производить по ней линейную экстраполяцию координаты. При малых t получаем следующие приближенные выражения для дисперсий ошибок:

$$\left.\begin{aligned} D_s(t) &\approx \frac{2C^2}{3\beta^2}(\beta t)^3-\frac{C_1^2C^2}{3\beta^2\overline{C}_1^2}(\beta t)^4,\\ D_v(t) &\approx 2C^2\beta t-\frac{C^2(2C_1^2+C^2)}{\overline{C}_1^2}(\beta t)^2. \end{aligned}\right\} \tag{5.16}$$

Как и следовало ожидать, $D_s(0)=0$, $D_v(0)=0$. Важно отметить, что при малых t ошибки определяются исключительно недетерминированной составляющей $r(t)$ (величина C_1 входит только во вторые слагаемые, имеющие более высокий порядок малости).

При больших t (при $t>1/\beta$) из соотношений (5.12) и (5.14) получаются следующие приближенные выражения:

$$a_s(t)\approx\frac{C_1^2t}{\overline{C}_1^2}, \qquad a_v(t)\approx\frac{C_1^2}{\overline{C}_1^2}; \tag{5.17}$$

$$D_s(t)\approx\frac{C_1^2C^2}{\overline{C}_1^2}t^2+\frac{2C^4}{\beta^2\overline{C}_1^2}(\beta t), \qquad D_v(t)\approx\frac{C^2(2C_1^2+C^2)}{\overline{C}_1^2}. \tag{5.18}$$

Таким образом, при больших t вычислительное устройство должно выполнять операции того же вида, что и при малых t, однако запоминается не величина $\dot{s}(0)$, а величина $(C_1^2/\overline{C}_1^2)\dot{s}(0)$. При $C_1>C$ разница незначительна; можно считать, что выражения (5.15) справедливы и при больших t. Однако при $C_1<C$ переход от выражений (5.15) к выражениям (5.17) существенно меняет вид операции. На рис. 5.4 изображены зависимости

$a_s(t)$ и $a_v(t)$ для различных значений C_1. Эти кривые показывают, что при малых C_1, начиная с момента $t \approx 1/\beta$, вычислительное устройство должно просто «забывать» значение $\dot{s}(0)$. Если же вопреки такому выводу

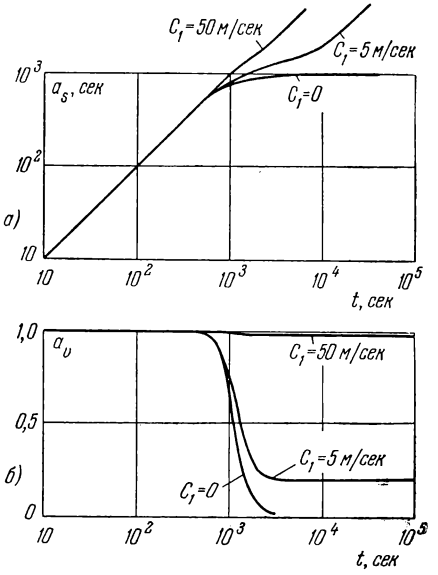

Рис. 5.4.

продолжать выполнять операции с весовыми коэффициентами (5.15), то это приведет к существенной потере точности. При весовых коэффициентах (5.15) для больших t получаем приближенные выражения:

$$D_s(t) \approx C^2 t^2, \qquad D_v(t) \approx 2C^2. \tag{5.19}$$

В то же время при оптимальном преобразовании в случае, когда $C_1 < C$, будем иметь:

$$D_s(t) \approx C_1^2 t^2, \qquad D_v(t) \approx C^2. \tag{5.20}$$

Отчетливо видна недопустимость линейной экстраполяции по значению скорости, которое «запомнило» вычислительное устройство.

Сравнение первых выражений (5.14), (5.16) и (5.18) с первой формулой (5.3) и формулами (5.4), (5.5) позволяет выяснить выигрыш от использования точных сведений о начальных условиях. При малых t выигрыш всегда значителен. При больших t в обоих случаях дисперсия ошибки в координате растет примерно пропорционально квадрату времени. Однако при наличии только априорных данных скорость нарастания среднеквадратичной ошибки равна величине C_1, а при известных начальных условиях — меньшей из величин C_1 и C. Таким образом, знание начальной скорости приводит к существенному повышению точности при малых t, если $C_1 < C$, и при всех t, если $C_1 > C$.

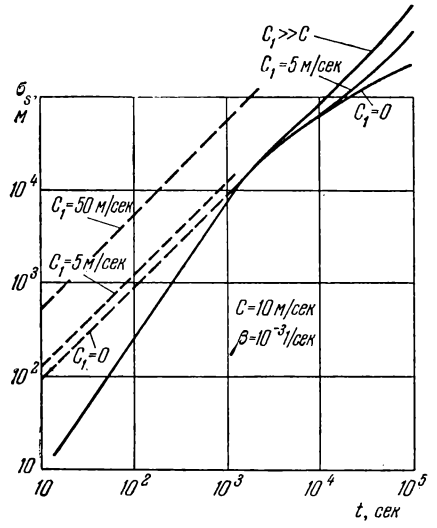

Рис. 5.5.

На рис. 5.5 построены кривые изменения среднеквадратичных ошибок в координате для различных значений C_1. Для сравнения здесь же пунктиром нанесены кривые для случая, когда используются только априорные данные.

Все выводы были получены в предположении, что значения координаты и скорости известны в момент начала движения $t=0$. Можно показать, что при известных ограничениях все качественные выводы, а также многие количественные выводы остаются справедливыми, если начальные условия заданы в произвольный момент времени $t=t_0$. В этом случае роль основного аргумента будет играть время экстраполяции $\Delta t = t - t_0$.

Б) Движение со стационарным ускорением.

Считаются известными математическое ожидание координаты $m(t)$, начальные значения координаты, ско-

рости и ускорения [соответственно $s(0)$, $\dot{s}(0)$ и $\ddot{s}(0)$]. Выходные сигналы навигационной системы формируются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} q(t) &= m(t) + s(0) + \dot{s}(0)\,t + a_s(t)\,\ddot{s}(0), \\ p(t) &= \dot{m}(t) + \dot{s}(0) + a_v(t)\,\ddot{s}(0). \end{aligned}\right\} \tag{5.21}$$

Весовые коэффициенты $a_s(t)$ и $a_v(t)$ определяются из условий минимума дисперсий ошибок. Получаем:

$$\left.\begin{aligned} a_s(t) &= \frac{C_2^2\dfrac{(\alpha t)^2}{2} + A^2(\alpha t - 1 + e^{-\alpha t})}{\alpha^2\overline{C}_2^2}, \\ a_v(t) &= \frac{C_2^2\alpha t + A^2(1 - e^{-\alpha t})}{\alpha^2\overline{C}_2^2}. \end{aligned}\right\} \tag{5.22}$$

Так же, как и для случая движения со стационарной скоростью, выполняется условие (5.13), поэтому в вычислительном устройстве операции определения скорости и координаты могут быть объединены, как показано на рис. 5.3. Выражения дисперсий ошибок в координате и скорости имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} D_s(t) &= \frac{1}{4}C_2^2t^4 + \frac{A^2}{\alpha}\left\{\frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{\alpha}t^2 + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{2}{\alpha^3}[1 - e^{-\alpha t}(\alpha t + 1)]\right\} - \\ &\qquad - \frac{\left[C_2^2\dfrac{(\alpha t)^2}{2} + A^2(\alpha t - 1 + e^{-\alpha t})\right]^2}{\alpha^4\overline{C}_2^2}, \\ D_v(t) &= \frac{C_2^2A^2}{\overline{C}_2^2}t^2 + \frac{A^2}{\alpha^2\overline{C}_2^2}\{2C_2^2[e^{-\alpha t}(\alpha t + 1) - 1] + \\ &\qquad + A^2(2\alpha t - 3 + 4e^{-\alpha t} - e^{-2\alpha t})\}. \end{aligned}\right\} \tag{5.23}$$

При малых t (при $t < 1/\alpha$) получаются следующие простые выражения:

$$a_s(t) \approx \frac{1}{2}t^2, \qquad a_v(t) \approx t. \tag{5.24}$$

Таким образом, по начальному значению ускорения, которое «запомнило» вычислительное устройство, осуще-

ствляется квадратичная экстраполяция координаты и линейная экстраполяция скорости. При малых t получаем приближенно:

$$D_s(t) \approx \frac{1}{10}\frac{A^2}{\alpha^4}(\alpha t)^5, \qquad D_v(t) \approx \frac{2}{3}\frac{A^2}{\alpha^2}(\alpha t)^3. \qquad (5.25)$$

Как и в случае движения со стационарной скоростью, при малых t ошибки определяются практически только недетерминированной составляющей полезного сигнала. Сравнение выражений (5.25) с выражениями (5.8) показывает, что при малых t знание начального ускорения существенно повышает точность.

При больших t (при $t>1/\alpha$) выражения весовых коэффициентов приобретают вид:

$$a_s(t) \approx \frac{C_2^2}{2\overline{C}_2^2}t^2, \qquad a_v(t) \approx \frac{C_2^2}{\overline{C}_2^2}t. \qquad (5.26)$$

Таким образом, при $C_2>A$ выражения (5.24) можно считать справедливыми (можно продолжать соответственно квадратичную и линейную экстраполяции), при $C_2<A$ весовые коэффициенты (5.26) значительно меньше коэффициентов (5.24); с течением времени вычислительное устройство должно «забывать» начальное значение ускорения. При больших t получаем:

$$D_s(t) \approx \frac{C_2^2A^2}{4\overline{C}_2^2}t^4, \qquad D_v(t) \approx \frac{C_2^2A^2}{\overline{C}_2^2}t^2. \qquad (5.27)$$

Таким образом, характер изменения ошибок во времени остается тем же, что и без введения начального значения ускорения [ср. с выражениями (5.9)], но скорость изменения ошибок определяется не величиной C_2, а меньшей из величин A и C_2. Следовательно, при $C_2<A$ использование начального значения ускорения приносит пользу при малых t, а при $C_2>A$ — при любых t.

5.3. Определение координаты и скорости по априорным данным и известной предыстории

Примем, что помимо априорных данных точно известен график движения на конечном интервале времени от начала движения $t=0$ до некоторого момента $t=T$. Оп-

ределению подлежат текущие значения координаты и скорости при $t>T$. График изменения координаты на интервале $(0, T)$ представляет собой предысторию движения. Поставленная задача соответствует такому варианту работы навигационной системы в режиме «памяти», для которого исходные данные являются наиболее полными: на интервале $(0, T)$ текущие значения координаты измеряются весьма точными навигационными приборами, эти данные запоминаются и по ним осуществляется экстраполяция, начиная с момента отключения навигационных приборов (при $t=T$). При неидеальных измерителях (предыстория известна неточно) ошибки экстраполяции, очевидно, будут бо́льшими.

А) Движение со стационарной скоростью.

Помимо априорных данных вычислительное устройство использует запись реализации полезного сигнала $s(t)$ на интервале $(0, T)$. Для значений $t>T$ выходные сигналы формируются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} q(t) &= m(t) + \int_0^T W_s(t, \tau)\, s(\tau)\, d\tau, \\ p(t) &= \dot{m}(t) + \int_0^T W_v(t, \tau)\, s(\tau)\, d\tau. \end{aligned}\right\} \tag{5.28}$$

В результате минимизации дисперсий ошибок в координате и скорости получаем следующие интегральные уравнения относительно искомых импульсных переходных функций $W_s(t, \tau)$ и $W_v(t, \tau)$:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^T W_s(t, \tau_2)\, R_{ss}(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_2 = R_{ss}(t, \tau_1), \\ &\int_0^T W_v(t, \tau_2)\, R_{ss}(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_2 = R_{\dot{s}s}(t, \tau_1) \\ &\qquad (0 < \tau_1 < T;\ t > T). \end{aligned}\right\} \tag{5.29}$$

Ядро уравнений и правая часть первого из них определяются выражением (2.39), а правая часть второго

уравнения равна:

$$R_{\dot{s}\dot{s}}(t, \tau_1) = C_1^2\tau_1 + \frac{C^2}{\beta}[1 - e^{-\beta\tau_1} + (1 - e^{-\beta|t-\tau_1|})\operatorname{sgn}(t-\tau_1)]. \tag{5.30}$$

Условная спектральная плотность недетерминированной составляющей сигнала $s(t)$ равна:

$$S_{rr}(\omega) = \frac{2\beta C^2}{\omega^2(\omega^2+\beta^2)}. \tag{5.31}$$

По виду знаменателя спектральной плотности (см. § 3.2) определяется дифференциальный оператор

$$Q\left(\frac{d}{d\tau_1}\right) = \frac{d^2}{d\tau_1^2}\left(\frac{d^2}{d\tau_1^2} - \beta^2\right), \tag{5.32}$$

который нужно применить к интегральным уравнениям (5.29). После элементарных выкладок получаем, что регулярные части искомых импульсных переходных функций должны обращаться в нуль:

$$\overline{W}_s(t, \tau) = 0, \qquad \overline{W}_v(t, \tau) = 0 \qquad (0 < \tau < T). \tag{5.33}$$

Сигнал $s(t)$ и его производная $\dot{s}(t)$ имеют ограниченные дисперсии, дисперсия второй производной $\ddot{s}(t)$ бесконечна, поэтому искомые импульсные переходные функции включают только δ-функции и ее первые производные:

$$\left.\begin{aligned} W_s(t, \tau) &= F_1^{(s)}(t)\delta(\tau) + F_2^{(s)}(t)\delta'(\tau) + \\ &\quad + G_1^{(s)}(t)\delta(\tau - T) + G_2^{(s)}(t)\delta'(\tau - T), \\ W_v(t, \tau) &= F_1^{(v)}(t)\delta(\tau) + F_2^{(v)}(t)\delta'(\tau) + \\ &\quad + G_1^{(v)}(t)\delta(\tau - T) + G_2^{(v)}(t)\delta'(\tau - T). \end{aligned}\right\} \tag{5.34}$$

Таким образом, при оптимальном преобразовании из всей предыстории используются только начальные и конечные значения координаты и скорости (в моменты времени $t=0$ и $t=T$). Подставив выражения (5.34) в интегральные уравнения (5.29) и потребовав, чтобы они были тождественно удовлетворены, получим системы четырех уравнений относительно искомых коэффициентов F_i и G_i. Эти же уравнения можно было бы получить,

используя методику § 4.4, если рассматривать F_i и G_i просто как весовые коэффициенты при начальных и конечных значениях координаты и скорости и минимизировать по ним дисперсию ошибки. Решив системы уравнений, получим:

$$\left.\begin{aligned}
G_1^{(s)}(t) &= \frac{C_1^2[\beta t+1+e^{-\beta(t-T)}]+2C^2}{C_1^2(2+\beta T)+2C^2},\\
F_1^{(s)}(t) &= 1-G_1^{(s)}(t);\\
G_2^{(s)}(t) &= \frac{1}{\beta}\left[G_1^{(s)}(t)-e^{-\beta(t-T)}\right],\\
F_2^{(s)}(t) &= \frac{1}{\beta}\left[G_1^{(s)}(t)-1\right];\\
G_1^{(v)}(t) &= \frac{\beta C_1^2[1-e^{-\beta(t-T)}]}{C_1^2(2+\beta T)+2C^2},\\
F_1^{(v)}(t) &= -G_1^{(v)}(t);\\
G_2^{(v)}(t) &= \frac{1}{\beta}G_1^{(v)}(t)+e^{-\beta(t-T)},\\
F_2^{(v)}(t) &= \frac{1}{\beta}G_1^{(v)}(t).
\end{aligned}\right\} \tag{5.35}$$

Легко убедиться, что

$$\frac{dF_i^{(s)}(t)}{dt}=F_i^{(v)}(t), \qquad \frac{dG_i^{(s)}(t)}{dt}=G_i^{(v)}(t). \tag{5.36}$$

Следовательно, текущие значения координаты могут быть получены интегрированием скорости (рис. 5.3). Для дисперсий ошибок в координате и скорости получаем следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned}
D_s(t) &= \frac{C^2}{\beta^2}G_1^{(s)}(t)\left\{2\beta(t-T)-2\left[1-e^{-\beta(t-T)}\right]\right\}+\\
&\qquad +\frac{C^2}{\beta^2}\left[1-e^{-\beta(t-T)}\right]^2,\\
D_v(t) &= \frac{1}{C_1^2(2+\beta T)+2C^2}\times\\
&\quad \times C^2\left\{C_1^2\left[\left(1-e^{-2\beta(t-T)}\right)+4\left(1-e^{-\beta(t-T)}\right)\right]+\right.\\
&\qquad \left.+2C^2\left[1-e^{-2\beta(t-T)}\right]\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{5.37}$$

Как и в случае известных начальных условий (§ 5.2), при $C=0$ получаем $D_s(t)=0$ и $D_v(t)=0$, т. е. ограничения в точности получаются только от недетерминированной составляющей движения.

При $T \to 0$ выражения (5.37) переходят в выражения (5.14). Это естественно, так как уменьшение интервала поступления данных до нуля означает, что известны только начальные значения координаты и скорости.

При достаточно больших значениях T, но при конечном времени экстраполяции $\Delta t = t - T$ получаем:

$$\left.\begin{aligned} D_s(t) &\approx \frac{C^2}{\beta}(2\beta\Delta t - 3 + 4e^{-\beta\Delta t} - e^{-2\beta\Delta t}). \\ D_v(t) &\approx C^2(1 - e^{-2\beta\Delta t}). \end{aligned}\right\} \quad (5.38)$$

Эти выражения явно от T не зависят и поэтому сохраняют смысл и при $T \to \infty$, если при этом Δt остается конечным. Такой предельный случай представляет значительный интерес, так как при этом предполагается известной бесконечная предыстория. То обстоятельство, что при $T \to \infty$ неограниченно нарастает дисперсия полезного сигнала, не имеет значения, важно, что при этом дисперсия ошибки остается конечной.

Дисперсии коэффициентов детерминированных составляющих полезного сигнала совсем не входят в выражения (5.38). Это является следствием общей закономерности: при увеличении времени поступления сигнала детерминированные составляющие перестают играть роль.

Сравнивая выражения (5.38) и выражения (5.14), легко установить, что они попарно совпадают, если в (5.14) положить $C_1=0$ и заменить t на Δt. Отсюда следует, что знание всей предыстории движения (напомним, что из предыстории используются только дискретные данные) обеспечивает лишь уточнение априори неизвестной средней скорости, но не снижает ошибок, обусловленных недетерминированной составляющей по сравнению с тем случаем, когда известна начальная скорость. На рис. 5.6 представлены две кривые: нижняя построена по первой формуле (5.38) и определяет изменение среднеквадратичной ошибки в координате при из-

вестной предыстории (при условии, что $T \to \infty$), а верхняя построена по формуле (5.14) и соответствует известной начальной скорости (при этом принято, что $C_1 > C$). Расхождение между этими кривыми, заметное

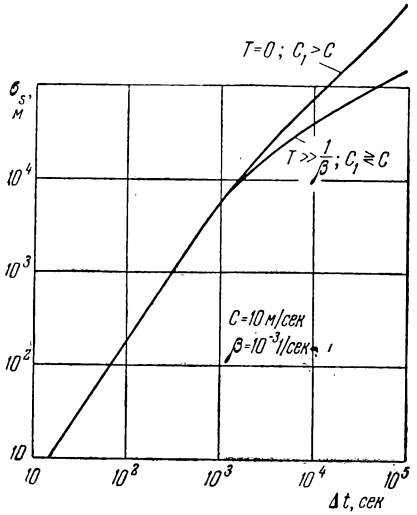

Рис. 5.6.

лишь при достаточно больших Δt, характеризует выигрыш в точности от того, что известны значения координат и скорости в течение всего «прошлого», а не в один момент времени.

При малых Δt вместо выражений (5.38) могут быть записаны приближенные выражения:

$$D_s(t) \approx \frac{2}{3}\frac{C^2}{\beta^2}(\beta\,\Delta t)^3, \qquad D_v(t) \approx 2C^2\beta\,\Delta t. \qquad (5.39)$$

Эти выражения совпадают с первыми слагаемыми выражений (5.16). Поэтому при малых Δt кривые среднеквадратичных ошибок на рис. 5.6 достаточно близки.

Все качественные выводы остаются в силе, если полезный сигнал известен не на интервале $(0, T)$, т. е. с момента начала движения, а на интервале (t_0, t_0+T)

при условии, что $T > t_0$. При этом остаются справедливыми формулы (5.38).

Результаты решения рассмотренной задачи используются в дальнейшем для оценки предельных возможностей для работы любой неидеальной системы в режиме «памяти»: никакая навигационная система не может подготовить таких данных, которые позволили бы получить бо́льшую точность, чем это определено формулами (5.38).

Б) Движение со стационарным ускорением.

Выходные сигналы навигационной системы формируются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} q(t) &= m(t) + \int_0^T W_s(t, \tau)\, s(\tau)\, d\tau, \\ p(t) &= \dot{m}(t) + \int_0^T W_v(t, \tau)\, s(\tau)\, d\tau. \end{aligned}\right\} \tag{5.40}$$

Для искомых импульсных переходных функций $W_s(t, \tau)$ и $W_v(t, \tau)$ получаются интегральные уравнения вида (5.29). Ядро обоих уравнений и правая часть первого из них определяются выражением (2.42), а правая часть второго уравнения равна:

$$R_{\dot{s}s}(t, \tau) = C_1^2\tau + \frac{1}{2} C_2^2 t\tau^2 + \frac{A^2}{\alpha^3}(\alpha t)\, e^{-\alpha t}[1 - e^{-\alpha\tau}(1 - \alpha\tau)] \quad (t > \tau). \tag{5.41}$$

Условная спектральная плотность недетерминированной составляющей сигнала имеет вид:

$$S_{rr}(\omega) = \frac{2\alpha A^2}{\omega^4(\omega^2 + \alpha^2)}. \tag{5.42}$$

Поэтому к интегральным уравнениям следует применить дифференциальный оператор

$$Q\left(\frac{d}{d\tau_1}\right) = \frac{d^4}{d\tau_1^4}\left(\frac{d^2}{d\tau_1^2} - \alpha^2\right). \tag{5.43}$$

После применения этого оператора получаем вместо дифференциальных уравнений условия:

$$\overline{W}_s(t, \tau) = 0, \qquad \overline{W}_v(t, \tau) = 0, \tag{5.44}$$

т. е. искомые импульсные функции не содержат регулярных составляющих. Поскольку дисперсия второй производной $\ddot{s}(t)$ ограничена, а третьей производной $\dddot{s}(t)$ бесконечна, то искомые импульсные переходные функции включают δ-функции и ее первые и вторые производные:

$$\left.\begin{aligned} W_s(t, \tau) &= F_1^{(s)}(t)\delta(\tau) + F_2^{(s)}(t)\delta'(\tau) + F_3^{(s)}(t)\delta''(\tau) + \\ &+ G_1^{(s)}(t)\delta(\tau - T) + G_2^{(s)}(t)\delta'(\tau - T) + G_3^{(s)}(t)\delta''(\tau - T), \\ W_v(t, \tau) &= F_1^{(v)}(t)\delta(\tau) + F_2^{(v)}(t)\delta'(\tau) + F_3^{(v)}(t)\delta''(\tau) + \\ &+ G_1^{(v)}(t)\delta(\tau - T) + G_2^{(v)}(t)\delta'(\tau - T) + G_3^{(v)}(t)\delta''(\tau - T). \end{aligned}\right\} \tag{5.45}$$

Таким образом, из всей предыстории используется шесть величин: начальные и конечные (соответственно при $t=0$ и при $t=T$) значения координаты, скорости и ускорения.

Уравнения для искомых весовых коэффициентов F_i и G_i можно получить или из условий тождественного удовлетворения исходных интегральных уравнений, или в результате непосредственной минимизации дисперсии ошибки по этим коэффициентам. Выражения для весовых коэффициентов и дисперсий ошибок в координате и скорости в общем виде весьма громоздки и поэтому здесь не выписаны. Как и в случае движения со стационарной скоростью, представляет особый интерес случай достаточно больших значений T. Если при этом $\Delta t = t - T$ остается конечным, то выражения для дисперсий ошибок имеют конечный предел при $T \to \infty$. В этом предельном случае получаем:

$$\left.\begin{aligned} D_s(t) &= \frac{A^2}{\alpha^4}\left[\frac{2}{3}(\alpha\Delta t)^3 - 2(\alpha\Delta t)^2 + \right. \\ &\qquad \left. + 2\alpha\Delta t(1 - 2e^{-\alpha\Delta t}) + 1 - e^{-2\alpha\Delta t}\right], \\ D_v(t) &= \frac{A^2}{\alpha^2}(2\alpha\Delta t - 3 + 4e^{-\alpha\Delta t} - e^{-2\alpha\Delta t}). \end{aligned}\right\} \tag{5.46}$$

Сравнив эти выражения с выражениями (5.23), легко установить, что они совпадут, если в последних положить $C_2=0$ и заменить t на Δt. Следовательно, как и в случае движения со стационарной скоростью, знание достаточно большой предыстории позволяет только устранить части ошибок, происходящие от детерминированных составляющих, но не дает возможности уменьшить влияние недетерминированных составляющих. При малых Δt выражения (5.46) переходят в выражения (5.24).

ГЛАВА 6

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛА ПОЗИЦИОННОГО ИЗМЕРИТЕЛЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ ДВИЖЕНИЯ СО СТАЦИОНАРНОЙ СКОРОСТЬЮ

Рассмотрение общего решения интегрального уравнения задачи позволяет выделить «переходный процесс» и установившийся режим. Для осуществления оптимального режима преобразования в течение «переходного процесса» фильтр должен быть нестационарным, однако использование разложений корреляционных функций в ряды позволяет получить простые, легко реализуемые выражения импульсных переходных функций. В установившемся режиме фильтр становится стационарным. При применении метода логарифмических характеристик получается, что уравнение фильтра имеет второй порядок и является асимптотически несмещенным относительно детерминированных составляющих полезного сигнала. В целом устройство, непрерывно обеспечивающее максимальную точность, может быть выполнено в виде совокупности трех блоков, последовательно подключаемых на выход системы. При использовании более точного описания свойств полезного сигнала и характеристик объекта вид решения меняется, однако фильтры по-прежнему остаются легко реализуемыми. Анализ критичности рассчитанных стационарных фильтров показывает, что проигрыш в точности остается незначительным при изменении свойств сигналов в весьма широких пределах. В заключение главы рассмотрены некоторые сложные режимы работы фильтра (режим «памяти», скачкообразные изменения характеристик движения объекта).

6.1. Общее решение

Основным источником информации о движении объекта является позиционный измеритель, выходной сигнал которого $x(t)$ непрерывен. Помимо этого в вычислительное устройство вводятся априорные данные — математические ожидания координаты и скорости. Сигнал позиционного измерителя

$$x(t)=s(t)+n(t) \tag{6.1}$$

включает стационарную ошибку $n(t)$. В соответствии со сказанным в § 2.5, предполагается, что ошибка состоит из двух составляющих:

$$n(t)=n_1(t)+n_2(t). \tag{6.2}$$

Вероятностные свойства флюктуационной $n_1(t)$ и медленно меняющейся $n_2(t)$ составляющих определяются корреляционными функциями

$$R_{n_1n_1}(\tau_1, \tau_2)=\sigma^2\delta(\tau_1-\tau_2), \quad R_{n_2n_2}(\tau_1, \tau_2)=B^2e^{-\gamma|\tau_1-\tau_2|} \tag{6.3}$$

и постоянным математическим ожиданием m_B.

В ряде случаев мы будем принимать, что величина γ достаточно мала, так что на всех интервалах времени медленно меняющуюся составляющую ошибки можно считать постоянной (это допущение будет каждый раз специально оговариваться).

Примем, что сигнал позиционного измерителя поступает с момента начала движения $t=0$ вплоть до текущего момента t, для которого определяются координата и скорость. Тогда выходные сигналы вычислительного устройства, работающего в индикаторном режиме, формируются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} q(t)&=m(t)+z(t),\ z(t)=\int_0^t W_s(t, \tau)[x(\tau)-m_B]d\tau;\\ p(t)&=\dot{m}(t)+v(t),\ v(t)=\int_0^t W_v(t, \tau)[x(\tau)-m_B]d\tau. \end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

Введение слагаемого $-m_B$ означает компенсацию математического ожидания ошибки (см. § 3.1). В результате

минимизации дисперсий ошибок в координате и скорости для искомых импульсных переходных функций $W_s(t, \tau)$ и $W_v(t, \tau)$ получаем интегральные уравнения. После приведения к виду, удобному для решения обобщенным методом Заде — Рагаззини (см. § 3.2), они принимают вид:

$$\int_0^t W(t, \tau_2)\left\{\frac{C^2}{\beta}\left[2\min(\tau_1, \tau_2)+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\beta}\left(-1+e^{-\beta\tau_1}+e^{-\beta\tau_2}-e^{-\beta|\tau_1-\tau_2|}\right)\right]+$$
$$\left.+B^2e^{-\gamma|\tau_1-\tau_2|}+\sigma^2\delta(\tau_1-\tau_2)\right\}d\tau_2=Z(t, \tau_1) \quad (6.5)$$
$$(0\leqslant\tau_1\leqslant t).$$

Для задачи определения координаты правая часть записывается следующим образом:

$$Z_s(t, \tau_1)=\lambda_1^{(s)}(t)C_0^2+\lambda_2^{(s)}(t)\tau_1C_1^2+$$
$$+\frac{C^2}{\beta}\left\{2\tau_1+\frac{1}{\beta}\left[-1+e^{-\beta t}+e^{-\beta\tau_1}-e^{-\beta(t-\tau_1)}\right]\right\}, \quad (6.6)$$

где

$$\lambda_1^{(s)}(t)=1-\int_0^t W_s(t, \tau)\,d\tau, \qquad \lambda_2^{(s)}(t)=t-\int_0^t \tau W_s(t, \tau)\,d\tau. \quad (6.7)$$

Для задачи определения скорости правая часть записывается иначе:

$$Z_v(t, \tau_1)=\lambda_1^{(v)}(t)C_0^2+\lambda_2^{(v)}(t)\tau_1C_1^2+\frac{C^2}{\beta}\left(-e^{-\beta t}+e^{-\beta(t-\tau_1)}\right), \quad (6.8)$$

где

$$\lambda_1^{(v)}(t)=-\int_0^t W_v(t, \tau)\,d\tau, \qquad \lambda_2^{(v)}(t)=1-\int_0^t \tau W_v(t, \tau)\,d\tau. \quad (6.9)$$

Выражение условной спектральной плотности недетерминированной составляющей сигнала $x(t)$ имеет вид:

$$S_{x'x'}(\omega)=\frac{2\beta C^2}{\omega^2(\omega^2+\beta^2)}+\frac{2\gamma B^2}{\omega^2+\gamma^2}+\sigma^2. \quad (6.10)$$

В результате применения дифференциального оператора

$$Q\left(\frac{d}{d\tau_1}\right)=\frac{d^2}{d\tau_1^2}\left(\frac{d^2}{d\tau_1^2}-\beta^2\right)\left(\frac{d^2}{d\tau_1^2}-\gamma^2\right) \tag{6.11}$$

для регулярных частей искомых импульсных переходных функций получаются одинаковые однородные дифференциальные уравнения шестого порядка вида

$$\frac{d^6W}{d\tau^6}-\left(\beta^2+\gamma^2+\frac{2\gamma B^2}{\sigma^2}\right)\frac{d^4W}{d\tau^4}+$$
$$+\left(\beta^2\gamma^2+\frac{2\beta C^2}{\sigma^2}+\frac{2\gamma\beta^2B^2}{\sigma^2}\right)\frac{d^2W}{d\tau^2}-\frac{2\beta\gamma^2C^2}{\sigma^2}W=0. \tag{6.12}$$

Искомые импульсные переходные функции не содержат δ-функций и ее производных, так как дисперсия сигнала бесконечна [из-за наличия белого шума $n_1(t)$]. Поэтому решения записываются в форме

$$W_s(t,\tau)=\sum_{i=1}^{6}A_i^{(s)}(t)\,e^{\xi_i\tau},\quad W_v(t,\tau)=\sum_{i=1}^{6}A_i^{(v)}(t)\,e^{\xi_i\tau}, \tag{6.13}$$

где ξ_i — корни уравнения

$$\xi^6-\left(\beta^2+\gamma^2+\frac{2\gamma B^2}{\sigma^2}\right)\xi^4+$$
$$+\left(\beta^2\gamma^2+\frac{2\beta C^2}{\sigma^2}+\frac{2\gamma\beta^2B^2}{\sigma^2}\right)\xi^2-\frac{2\beta\gamma^2C^2}{\sigma^2}=0. \tag{6.14}$$

Из условия тождественного удовлетворения исходного интегрального уравнения (6.5) получается система шести линейных алгебраических уравнений. Вместе с соотношениями (6.7) или (6.9) они образуют замкнутую систему восьми уравнений относительно восьми неизвестных A_i и λ_i.

Если считать медленно меняющуюся составляющую ошибки измерителя постоянной (положить $B=0$), то вместо дифференциального уравнения (6.12) шестого порядка получится уравнение четвертого порядка

$$\frac{d^4W}{d\tau^4}-\beta^2\frac{d^2W}{d\tau^2}+\frac{2\beta C^2}{\sigma^2}W=0. \tag{6.15}$$

Решение в этом случае записывается в виде

$$W_s(t, \tau) = \sum_{i=1}^{4} A_i^{(s)}(t) e^{\xi_i \tau}, \quad W_v(t, \tau) = \sum_{i=1}^{4} A_i^{(v)}(t) e^{\xi_i \tau}, \quad (6.16)$$

где ξ_i — корни уравнения

$$\xi^4 - \beta^2 \xi^2 + \frac{2\beta C^2}{\sigma^2} = 0. \quad (6.17)$$

Коэффициенты A_i и λ_i определяются при этом из системы шести уравнений.

Из общего решения могут быть получены решения, соответствующие условиям несмещенности относительно различных составляющих сигналов (см. § 3.2). Так, положив $C_0 \to \infty$, получим несмещенность относительно начального значения координаты; положив $C_1 \to \infty$, — несмещенность по отношению к средней скорости. В этих случаях из решения системы уравнений получаются соответственно условия $\lambda_1(t) \to 0$ или $\lambda_2(t) \to 0$. Решение задачи по изложенному выше плану без предварительных упрощений приводит к весьма громоздким вычислениям. В следующем параграфе показано, что применение приближенных методов, описанных в § 3.5, позволяет получить решение в общем виде. Однако представляется целесообразным предварительно по результатам точного решения дать общую характеристику работы оптимальной системы.

На рис. 6.1 сплошными кривыми *1*, *2*, *3*, *4* и *5* представлены рассчитанные численно зависимости среднеквадратичной ошибки в координате σ_s. Пунктиром изображены среднеквадратичные ошибки при счислении пути в режиме «памяти» (см. § 5.1). Прежде всего необходимо отметить, что кривые *2* и *4*, соответствующие конечным C_0 и C_1, начинаются (при $t=0$) от значения C_0. Сначала кривые *1*, *2*, *3* и *4* практически совпадают с соответствующими пунктирными кривыми. Это означает, что при достаточно малых t сглаживание флюктуационной составляющей ошибки еще не дает результатов — вычислительное устройство практически работает только по априорным данным. Затем сглаживание постепенно становится все более эффективным — среднеквадратичные ошибки уменьшаются, стремясь к постоянному

значению. Это установившееся значение определяется характеристиками недетерминированных составляющих сигналов (параметрами C, β, σ, B и γ).

Кривая *5* получена при наложении условий несмещенности одновременно относительно начального значения координаты и средней скорости. Поскольку при

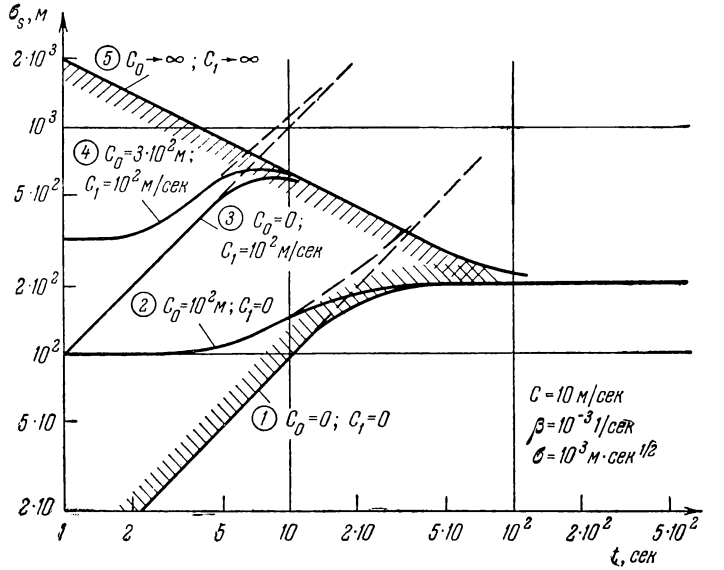

Рис. 6.1.

$C_0\to\infty$ и $C_1\to\infty$ определение координаты по априорным данным теряет смысл, то при малых t дисперсия ошибки в координате велика. При увеличении t среднеквадратичная ошибка монотонно уменьшается, стремясь к тому же установившемуся значению.

Кривая *1* соответствует случаю точно известного начального значения координаты и точно известной средней скорости. При этом характерным является монотонный рост среднеквадратичной ошибки до установившегося значения (это установившееся значение может быть иным, чем для остальных кривых). Область между кривыми *1* и *5* (на рис. 6.1 отштрихована) определяет пре-

делы изменения среднеквадратичной ошибки в координате при любых C_0 и C_1, т. е. тогда, когда ошибками в начальном значении координаты и в средней скорости нельзя пренебречь, но эти ошибки не так велики, чтобы имело смысл налагать условия несмещенности. По ширине области между кривыми *1* и *5*, таким образом, можно судить о возможном выигрыше, который получается в результате уточнения априорных данных (в результате уменьшения C_0 и C_1). С ростом t выигрыш уменьшается. Заметим, что при навигации по априорным данным было иное положение (см. § 5.1): при достаточно больших t рост ошибок определялся величиной C_1.

Применение приближенных методов позволяет дать простое аналитическое описание тем качественным закономерностям, которые выяснены при рассмотрении рис. 6.1. Этому посвящены § 6.2 и 6.3.

6.2. Начальный участок

Из рассмотрения рис. 6.1 следует, что в оптимальной системе после включения протекает «переходный процесс», заканчивающийся установлением постоянной дисперсии ошибки. Длительность этого «переходного процесса» имеет порядок постоянной времени

$$T=\frac{1}{\min|\operatorname{Re}\xi_i|}, \tag{6.18}$$

где ξ_i — корни уравнения (6.14) или (6.17).

Предположим сначала, что медленно меняющаяся составляющая ошибки отсутствует: $B=0$. Тогда из уравнения (6.17) получаем:

$$\xi^2=\frac{\beta^2}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\beta^2}{2}\right)^2-\frac{2\beta C^2}{\sigma^2}}. \tag{6.19}$$

Практически всегда выполняется условие

$$\sigma^2\ll\frac{8C^2}{\beta^3}. \tag{6.20}$$

Это означает, что позиционный измеритель предполагается достаточно точным. На рис. 6.2 на плоскости

параметров σ, β отделена область, для которой условие (6.20) выполняется. Для самолета при характерных

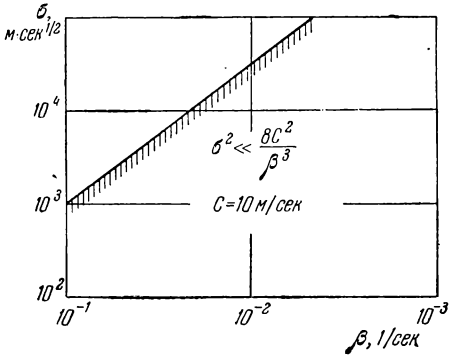

Рис. 6.2.

данных $C=10$ *м/сек*, $\beta=10^{-3}$ *1/сек*, $\sigma=10^3$ *м · сек*$^{1/2}$ неравенство (6.20) выполняется с большим запасом. Тогда получаем приближенно:

$$\xi_{1-4}\approx\rho(\pm 1\pm j)\qquad\left[\rho=\left(\frac{\beta}{2}\right)^{1/4}C^{1/2}\sigma^{-1/2}\right]. \tag{6.21}$$

Следовательно, постоянная времени (6.18) равна:

$$T=\left(\frac{\beta}{2}\right)^{-1/4}C^{-1/2}\sigma^{1/2}. \tag{6.22}$$

Имея в виду условие (6.20), получаем, что $T\ll 1/\beta$. Постоянная времени T определяет естественный масштаб времени, по отношению к которому следует определять пределы, в которых справедливы приближенные решения (см. далее и § 6.3). Можно считать, что продолжительность «переходного процесса» составляет $(2\div 4)T$. Если «запас» у неравенства (6.20) достаточно велик, так что $10^3\sigma^2<C^2/\beta^3$ (для самолета это справедливо), то весь «переходный процесс» укладывается в интервал корреляции $\tau_0=1/\beta$. Поэтому при расчете всего «переходного процесса» допустимо использовать разложение корреляционных функций $R_{ss}(\tau_1, \tau_2)$ и $R_{n_2n_2}(\tau_1, \tau_2)$ в ряды по степеням τ_1 и τ_2.

Ограничимся слагаемыми нулевого порядка малости (малыми параметрами считаются β и γ), т. е. примем

$$R_{ss}(\tau_1, \tau_2) \approx C_0^2 + \bar{C}_1^2 \tau_1 \tau_2 \quad (\bar{C}_1^2 = C_1^2 + C^2), \quad R_{n_2 n_2}(\tau_1, \tau_2) \approx B^2. \tag{6.23}$$

Такие аппроксимации соответствуют гипотезам о равномерном движении объекта и постоянстве составляющей ошибки, которая в общем случае считается медленно меняющейся. Будем считать, что интервал корреляции флюктуационной составляющей ошибки достаточно мал, так что ее по-прежнему можно считать белым шумом.

При введенных таким образом упрощающих предположениях вместо громоздкого уравнения (6.5) получаем:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma^2 \int_0^t W(t, \tau_2)\, \delta(\tau_1 - \tau_2)\, d\tau_2 = Z(t, \tau_1) \\ &\text{или} \\ &\sigma^2 W(t, \tau_1) = Z(t, \tau_1), \end{aligned}\right\} \tag{6.24}$$

где для задачи определения координаты

$$Z_s(t, \tau_1) = \lambda_1^{(s)}(t) C_0^2 + \lambda_2^{(s)}(t) \tau_1 \bar{C}_1^2 + [\lambda_1^{(s)}(t) - 1] B^2, \tag{6.25}$$

а для задачи определения скорости

$$Z_v(t, \tau_1) = \lambda_1^{(v)}(t) C_0^2 + \lambda_2^{(v)}(t) \tau_1 \bar{C}_1^2 + \lambda_1^{(v)}(t) B^2. \tag{6.26}$$

Множители λ_i по-прежнему определяются выражениями (6.7) и (6.9). И полезный сигнал и ошибка включают постоянные составляющие. В зависимости от соотношения между их дисперсиями C_0^2 и B^2 качественные особенности решений несколько различаются.

а) $B^2 < C_0^2$.

Это неравенство означает, что ошибки априорных данных о начальном значении координаты значительно превосходят возможные «систематические» ошибки измерителя. В этом случае вместо уравнений (6.25) и (6.26) можно записать:

$$Z_s(t, \tau_1) \approx \lambda_1^{(s)}(t) C_0^2 + \lambda_2^{(s)}(t) \tau_1 \bar{C}_1^2, \tag{6.27}$$

$$Z_v(t, \tau_1) \approx \lambda_1^{(v)}(t) C_0^2 + \lambda_2^{(v)}(t) \tau_1 \bar{C}_1^2. \tag{6.28}$$

Естественно, при этом искомые импульсные переходные функции не будут зависеть от B^2. Для задачи определения координаты решение уравнения (6.24) будет иметь вид:

$$W_s(t, \tau) = \frac{1}{\sigma^2 \Delta(t)} \left[C_0^2 \left(\sigma^2 - \bar{C}_1^2 \frac{t^3}{6} \right) + \bar{C}_1^2 t\tau \left(\sigma^2 + C_0^2 \frac{t}{2} \right) \right], \tag{6.29}$$

где

$$\Delta(t) = \sigma^2 + C_0^2 t + \frac{1}{3} \bar{C}_1^2 t^3 + \frac{1}{12} \frac{C_0^2 \bar{C}_1^2}{\sigma^2} t^4. \tag{6.30}$$

Дисперсия ошибки в координате оказывается равной:

$$D_s(t) = \frac{\sigma^2}{\Delta(t)} \left(C_0^2 + \bar{C}_1^2 t^2 + \frac{1}{3} \frac{C_0 \bar{C}_1^2}{\sigma^2} t^3 \right) + B^2. \tag{6.31}$$

При наложении условий несмещенности ($C_0 \to \infty$ и $C_1 \to \to \infty$) получаем:

$$D_s(t) = \frac{4\sigma^2}{t} + B^2. \tag{6.32}$$

Для задачи определения скорости находим:

$$W_v(t, \tau) = \frac{1}{\sigma^2 \Delta(t)} \left[-\frac{1}{2} C_0^2 \bar{C}_1^2 t^2 + \bar{C}_1^2 \tau (\sigma^2 + C_0^2 t) \right], \tag{6.33}$$

$$D_v(t) = \frac{\bar{C}_1^2}{\Delta(t)} (\sigma^2 + C_0^2 t), \tag{6.34}$$

а при условиях несмещенности

$$D_v(t) = \frac{12\sigma^2}{t^3}. \tag{6.35}$$

Сравнение результатов расчетов по этим формулам с тем, что дает решение полных уравнений (6.5), показывает хорошее совпадение при $t < (\beta/2)^{-1/4} C^{-1/2} \sigma^{1/2}$.

Начальные участки кривых среднеквадратичных ошибок в координате изображены на рис. 6.3. Во всех случаях (кроме предельного при $C_1 \to \infty$) ошибки сначала возрастают. Как было отмечено в § 6.1, эти начальные участки совпадают с кривыми изменения ошибок при работе навигационной системы в режиме «памяти»

при наличии только априорных данных (см. § 5.1). Действительно, при очень малых t выражения (6.31) и (6.34) переходят в выражение (5.4) и второе выражение (5.3). Начиная с некоторого значения t, система вырабатывает более точные значения координаты и скорости, чем при использовании только априорных данных.

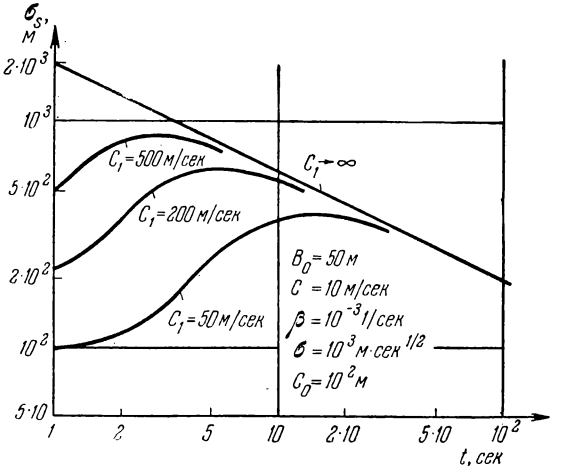

Рис. 6.3.

Среднеквадратичная ошибка в координате растет медленнее, достигает максимума, а затем начинает уменьшаться. При этом вскоре после максимума все кривые становятся достаточно близкими к кривой, полученной при условиях несмещенности и определяемой выражением (6.32). Чем больше значение $\bar{C}_1$, тем дальше влево смещается максимум и тем с меньших значений t становится справедливым выражение (6.32). Предел, до которого это выражение можно считать справедливым, определяется выходом на установившийся режим, когда уже становится необходимым учитывать недетерминированный характер медленно меняющихся составляющих сигналов. Поэтому «установившееся значение» дисперсии ошибки, получаемое из формулы (6.32), может быть далеким от действительности.

б) $B^2 > C_0^2$.

Это неравенство означает, что точка старта определена достаточно точно. Потенциальная возможность повышения точности системы в этом случае существует потому, что на начальном участке движения из сигнала измерителя можно выделить линейно растущий (практически от нуля) полезный сигнал и постоянную составляющую ошибки измерителя. Выигрыш в точности системы, таким образом, достигается посредством выделения, а затем частичной компенсации постоянной составляющей ошибки.

Правые части (6.25) и (6.26) уравнений (6.24) в рассматриваемом случае записываются так:

$$Z_s(t, \tau_1) = \lambda_2^{(s)}(t)\tau_1\overline{C}_1^2 + [1 - \lambda_1^{(s)}(t)]B^2, \tag{6.36}$$

$$Z_v(t, \tau_1) = \lambda_2^{(v)}(t)\tau_1\overline{C}_1^2 + [1 - \lambda_1^{(v)}(t)]B^2. \tag{6.37}$$

Решения уравнений (6.24) имеют вид:

$$W_s(t, \tau) = \frac{1}{\sigma^2\Delta(t)}\left[-\frac{1}{2}B^2\overline{C}_1^2t^3 + \overline{C}_1^2t\tau(\sigma^2 + B^2t)\right], \tag{6.38}$$

$$W_v(t, \tau) = \frac{1}{\sigma^2\Delta(t)}\left[-\frac{1}{2}B^2\overline{C}_1^2t^2 + \overline{C}_1^2\tau(\sigma^2 + B^2t)\right], \tag{6.39}$$

где

$$\Delta(t) = \sigma^4 + \sigma^2t\left(B^2 + \frac{1}{3}\overline{C}_1^2t^2\right) + \frac{1}{12}B^2\overline{C}_1^2t^4. \tag{6.40}$$

Дисперсии ошибок в координате и скорости оказываются равными:

$$D_s(t) = \frac{\overline{C}_1^2t^2}{\Delta(t)}\left(\sigma^2 + \frac{1}{2}B^2t\right) + C_0^2, \tag{6.41}$$

$$D_v(t) = \frac{\overline{C}_1^2}{\Delta(t)}(\sigma^2 + B^2t). \tag{6.42}$$

При двух условиях несмещенности ($B \to \infty$, $\overline{C}_1 \to \infty$) получаем:

$$D_s(t) = \frac{6\sigma^2}{t} + C_0^2, \tag{6.43}$$

$$D_v(t) = \frac{12\sigma^2}{t^3}. \tag{6.44}$$

При одном условии несмещенности в идеальном случае отсутствия систематической составляющей ошибки ($B=0$) получаем:

$$D_s(t)=\frac{3\sigma^2}{t}+C_0^2, \tag{6.45}$$

$$D_v(t)=\frac{12\sigma^2}{t^3}. \tag{6.46}$$

Кривые изменения среднеквадратичной ошибки имеют в целом такой же вид, как показано на рис. 6.3.

Полученные в обоих случаях решения остаются справедливыми при достаточно малых t. Применение импульсных переходных функций (6.29), (6.33), (6.38) и (6.39), найденных по существу при использовании предположения о строгом постоянстве скорости движения, приводит к существенному увеличению ошибок, если интервалы времени становятся достаточно большими. Расчет дисперсий ошибок на выходе системы, свойства которой определяются этими импульсными переходными функциями, с использованием точного выражения (2.39) для корреляционной функции недетерминированной составляющей полезного сигнала дает следующие асимптотические формулы, справедливые при достаточно больших t:

$$D_s(t)\approx\frac{2C^2}{5\beta}t, \tag{6.47}$$

$$D_v(t)\approx C^2. \tag{6.48}$$

Таким образом, при больших t ошибки в координате не только перестают убывать, но даже начинают нарастать. Границы, до которых решения, найденные в этом параграфе, можно считать оптимальными, определяются после рассмотрения установившегося режима.

6.3. Установившийся режим

При преобразовании сигнала позиционного измерителя установившийся режим характеризуется постоянством дисперсии ошибки и стационарностью вычислительного устройства. Соответствующее решение может быть получено предельным переходом (при $t\to\infty$) из общего решения (см. § 6.1). Однако использование

метода логарифмических характеристик (см. § 3.5) позволяет получить решение при минимальной затрате труда.

Предположим сначала, что вторая составляющая ошибки измерителя является не медленно меняющейся, а строго постоянной. В § 6.2 было показано, что дисперсия ошибки в координате включает слагаемое

$$\min(C_0^2,\ B^2), \tag{6.49}$$

если полезный сигнал можно считать детерминированным. Естественно предположить, что при наличии недетерминированной составляющей, по крайней мере при постоянстве второй составляющей ошибки, слагаемое (6.49) также присутствует в выражении дисперсии ошибки. Как отмечалось в § 3.3, характеристики тех детерминированных составляющих, которые присутствуют только в полезном сигнале, не входят в выражение установившейся дисперсии ошибки. Таким образом, установившаяся дисперсия ошибки в координате может быть записана в виде суммы

$$D_{s0} = D_r + \min(C_0^2,\ B^2). \tag{6.50}$$

Здесь D_r зависит только от характеристик недетерминированных составляющих сигналов. Установившаяся дисперсия ошибки в скорости D_{v0} вообще не зависит от характеристик детерминированных составляющих. Решение задачи при учете только недетерминированных составляющих находится методом неопределенных коэффициентов (см. § 3.4). Получим сначала решение, используя общую методику и не применяя метод логарифмических характеристик.

Передаточные функции $K_s(j\omega)$ и $K_v(j\omega)$, которые вводятся вместо импульсных переходных функций $W_s(t,\ \tau)$ и $W_v(t,\ \tau)$, следует искать в виде

$$K(j\omega) = \frac{A_1}{j\omega - \xi_1} + \frac{A_2}{j\omega - \xi_2}, \tag{6.51}$$

где ξ_1 и ξ_2 — те корни уравнения (6.17), которые имеют отрицательные вещественные части. Постоянные A_1 и A_2 определяются из условий удовлетворения уравнения (см. § 3.4)

$$K_s(j\omega)\, S_{x'x'}(\omega) - S_{rr}(\omega) = X_1(j\omega) \tag{6.52}$$

или уравнения

$$K_v(j\omega)\,S_{x'x'}(\omega)-S_{r\dot{r}}(\omega)=X_2(j\omega), \qquad (6.53)$$

где $X_1(j\omega)$ и $X_2(j\omega)$ — неизвестные функции, не имеющие полюсов в верхней полуплоскости комплексной плоскости ω, $S_{x'x'}(\omega)$ и $S_{rr}(\omega)$ — спектральные плотности недетерминированных составляющих входного сигнала и координаты, а $S_{\dot{r}r}(\omega)$ — взаимная спектральная плотность недетерминированных составляющих координаты и скорости. Будем считать, что выполнено (6.20), так что

$$\xi_{1,2}=\rho(-1\pm j) \qquad \left[\rho=\left(\frac{\beta}{2}\right)^{1/4}C^{1/2}\sigma^{-1/2}\right]. \qquad (6.54)$$

Тогда получаем:

$$K_s(j\omega)=\frac{b_1 j\omega+2\rho^2}{(j\omega)^2+2\rho j\omega+2\rho^2},\quad K_v(j\omega)=\frac{b_2 j\omega}{(j\omega)^2+2\rho j\omega+2\rho^2}; \qquad (6.55)$$

$$b_1=\frac{2\rho^2(2\rho+\beta)}{2\rho^2+2\rho\beta+\beta^2}, \qquad b_2=\frac{4\rho^4}{2\rho^2+2\rho\beta+\beta^2}; \qquad (6.56)$$

$$D_r=\frac{1}{2\beta}\sigma^2 b_1^2, \qquad D_{v0}=\frac{1}{2\beta}\sigma^2(4\rho^4-b_2^2). \qquad (6.57)$$

Заметим, что для $K_s(j\omega)$ оказывается выполненным необходимое условие конечности дисперсии $K_s(0)=1$. Это условие обеспечивает асимптотическую несмещенность по отношению к постоянной составляющей полезного сигнала.

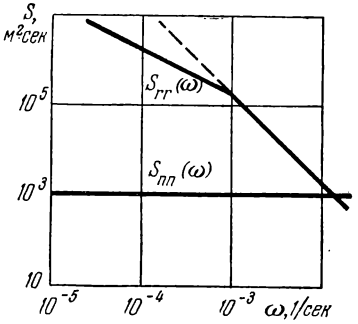

Рис. 6.4.

Рассмотрим теперь приближенное решение задачи с применением логарифмических характеристик. Кривые условных спектральных плотностей, построенные в логарифмической сетке, изображены на рис. 6.4. Условие (6.20) означает, что перелом кривой $S_{rr}(\omega)$ находится левее точки пересечения кривых $S_{rr}(\omega)$ и $S_{nn}(\omega)$. В § 3.5 было особо отмечено, что свойства фильтра определяются локальным поведением кривых спектральных

плотностей вблизи точки их пересечения. Спрямим кривую $S_{rr}(\omega)$ (на рис. 6.4 — пунктир), т. е. примем, что

$$S_{rr}(\omega) \approx \frac{2\beta C^2}{\omega^4}. \tag{6.58}$$

Из условия конечности дисперсии ошибки в координате следует, что выражение $[1-K_s(j\omega)]$ должно иметь двойной нулевой корень (этим обеспечивается выполнение условия асимптотической несмещенности по отношению к линейно изменяющемуся полезному сигналу). Отсюда сразу получаем:

$$K_s(j\omega) = \frac{2\rho j\omega + 2\rho^2}{(j\omega)^2 + 2\rho j\omega + 2\rho^2}. \tag{6.59}$$

Точно так же, исходя только из требования конечности дисперсии ошибки в скорости, получаем:

$$K_v(j\omega) = \frac{2\rho^2 j\omega}{(j\omega)^2 + 2\rho j\omega + 2\rho^2}. \tag{6.60}$$

Отметим, что, в отличие от задач главы 8, выходные сигналы, представляющие собой оценки текущих значений координаты и скорости, не связаны операциями

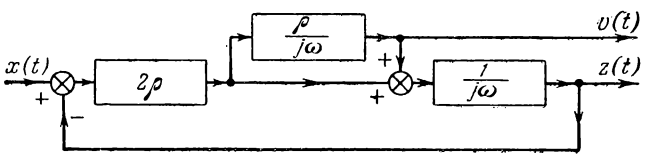

Рис. 6.5.

интегрирования или дифференцирования. Если желательно получить оба сигнала в одной и той же цепи, то блок-схема фильтра должна иметь такой вид, как показано на рис. 6.5.

Если учесть, что из неравенства (6.20) следует, что

$$\rho \gg \beta, \tag{6.61}$$

то легко установить, что выражения (6.55), (6.59) и (6.60) соответственно близки друг другу. При использовании передаточных функций (6.59), (6.60) и выражения (6.58) для условной спектральной плотности полез-

ного сигнала установившиеся дисперсии ошибок в координате и скорости равны:

$$D_{s0} \approx 2\left(\frac{\beta}{2}\right)^{1/4} C^{1/2}\sigma^{3/2} + \min(B^2, C_0^2), \qquad D_{v0} \approx 2(2\beta)^{3/4} C^{3/2}\sigma^{1/2}. \tag{6.62}$$

Из этих формул ясно видно, что ошибки в координате в основном определяются значением σ, мало зависят от C и еще меньше от β, ошибки же в скорости в большей степени зависят от C и в меньшей от β и σ. Применение приближенных формул (6.62) при исходных данных, соответствующих типичной задаче навигации самолета, дает достаточно высокую точность: погрешность в вычислении дисперсии ошибки координаты получается всего 1,7% по сравнению с тем, что дает использование исходного выражения условной спектральной плотности полезного сигнала и более точных выражений (6.55) передаточной функции. В то же время использование передаточной функции (6.59) и исходной спектральной плотности приводит к отличию на 0,9%. Таким образом, при рассматриваемых исходных данных замена условной спектральной плотности полезного сигнала выражением (6.58) допустима как при определении передаточной функции, так и при расчете дисперсии ошибки.

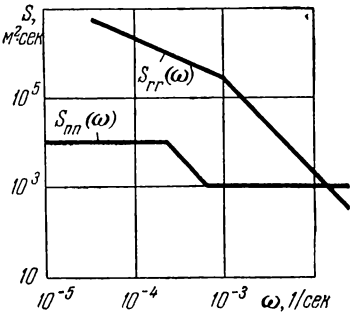

Рис. 6.6.

Примем теперь, что вторая составляющая ошибки позиционного измерителя является не постоянной, а медленно меняющейся. Кривые условных спектральных плотностей сигналов в этом случае будут иметь такой вид, как показано на рис. 6.6 [подъем кривой $S_{nn}(\omega)$ при малых ω происходит от введенной в рассмотрение медленно меняющейся составляющей]. Естественно ожидать, что эта составляющая достаточно мала, так что новые точки пересечения кривых $S_{rr}(\omega)$ и $S_{nn}(\omega)$ не появляются. В соответствии со

сказанным в § 3.5, в этом случае вид оптимальной передаточной функции не меняется. Поскольку при малых ω $K_s(j\omega) \approx 1$, то вторая составляющая ошибки проходит на выход фильтра без искажения, следовательно, в выражение дисперсии ошибки в координате войдет дисперсия B^2 второй составляющей. Таким образом, первое выражение (6.22) должно быть заменено на

$$D_{s0} \approx 2\left(\frac{\beta}{2}\right)^{1/4} C^{1/2}\sigma^{3/2} + B^2. \qquad (6.63)$$

Вместо второго выражения (6.62) получаем:

$$D_{v0} \approx 2(2\beta)^{3/4} C^{3/2}\sigma^{1/2} + B^2\gamma(8\beta)^{-1/4} C^{-1/2}\sigma^{1/2}. \qquad (6.64)$$

Из сравнения выражений (6.63) и (6.64) с выражениями (6.62) следует, что учет случайного характера изменения составляющих ошибок, которые часто относят к разряду систематических, может существенно изменить конечные выводы. Из рассмотрения первого выражения (6.62) следовало, что целесообразно уменьшать C_0 — уточнять начальное значение координаты, формула же (6.63) показывает, что для установившегося режима это уточнение ничего не дает. Физический смысл этого вывода понятен: если иметь в виду непостоянство медленно меняющейся составляющей, то исчезает возможность определения ее в начальном интервале движения, а следовательно, и возможность компенсации ее в течение длительного времени. Оптимальное вычислительное устройство может эффективно осуществлять эту операцию только на интервале, соизмеримом со временем корреляции медленно изменяющейся составляющей ошибки. На рис. 6.7 показан примерный вид кривой изменения среднеквадратичной ошибки в координате при $C_0 < B$. После «переходного процесса» устанавливается среднеквадратичная ошибка, определяемая первым выражением (6.62) [в интервале (0, t_2) медленно меняю-

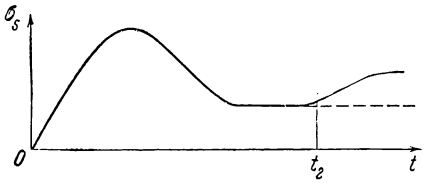

Рис. 6.7.

щуюся составляющую ошибки можно считать постоянной], а затем ошибка возрастает до конечного установившегося значения, определяемого выражением (6.63). Если бы медленно меняющаяся составляющая оставалась строго постоянной, то среднеквадратичная ошибка не возрастала бы (пунктир). При $C_0 > B$ практически не имеет значения, является ли вторая составляющая ошибка строго постоянной или медленно изменяется: в выражения дисперсии ошибки в обоих случаях входит слагаемое B^2.

Из рассмотрения выражений (6.63) и (6.64) при конкретных данных можно сделать выводы относительно того, на какие факторы следует ориентироваться при реализации систем, близких к оптимальным. Если в выражениях (6.63) и (6.64) первые слагаемые имеют малый удельный вес по сравнению со вторыми, то можно допускать значительные отклонения действительных динамических свойств фильтров от расчетных: все равно точность в основном определяется «систематическими» (постоянными или медленно меняющимися) составляющими. При этом необходимо лишь с достаточной точностью выдерживать условия асимптотической несмещенности относительно линейно изменяющегося полезного сигнала. Если же первые слагаемые являются основными, то вопросу оптимальной фильтрации флюктуационной составляющей помехи следует уделять внимание: нужно, чтобы частотные характеристики реальных устройств были близки к расчетным. Вопрос о критичности оптимального преобразования по отношению к различным факторам подробно рассмотрен в § 6.5.

6.4. Пути реализации вычислительного устройства с характеристиками, близкими к оптимальным

Если необходимо осуществлять преобразование, близкое к оптимальному, с момента начала движения, то приходится возвращаться к общему решению интегрального уравнения (§ 6.2). Однако непосредственная реализация импульсных переходных функций, соответствующих общему решению, сложна даже при использовании быстродействующей ЦВМ (требуется большой объем

памяти). Приближенные решения, полученные в § 6.2 и 6.3, дают основу для осуществления вычислительных алгоритмов, близких к оптимальным и в то же время достаточно простых в реализации.

Рассмотрим только задачу определения координаты. Из § 6.2 и 6.3 следует, что по характеру операций, выполняемых вычислительным устройством, и по виду зависимости среднеквадратичной ошибки от времени (на

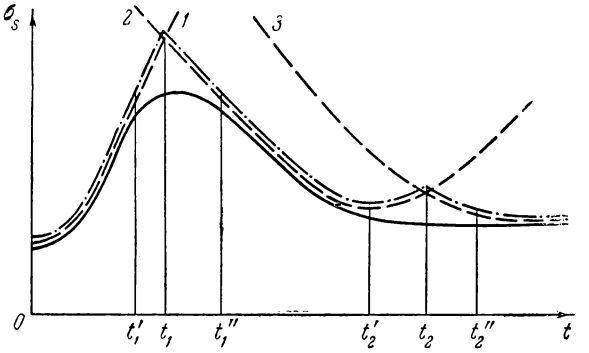

Рис. 6.8.

рис. 6.8 сплошная кривая) все время работы может быть разбито на три основных интервала.

1. $0 < t < t_1'$. Вычислительное устройство производит экстраполяцию координаты по априорным данным, т. е. вырабатывает сигналы

$$q(t) = m(t), \qquad z(t) = 0. \tag{6.65}$$

2. $t_1'' < t < t_2'$. Вычислительное устройство осуществляет фильтрацию сигнала измерителя. Дисперсия ошибки оптимального фильтра в этом интервале практически совпадает с дисперсией ошибки фильтра, оптимального при представлении полезного сигнала в виде детерминированного и при наложении условий несмещенности (см. § 6.2). Поэтому можно принять, что в этом интервале преобразование сигнала $x(t)$ допустимо производить в соответствии с первым выражением (6.4),

в котором $W_s(t, \tau)$ определяется из решения (6.29) путем предельного перехода при $C_0 \to \infty$ и $C_1 \to \infty$:

$$W_s(t, \tau) = \frac{2}{t}\left(\frac{3\tau}{t} - 1\right). \tag{6.66}$$

Фильтр с такой импульсной переходной функцией является нестационарным, однако его реализация достаточно проста. Заметим, что на рассмотренных двух этапах алгоритмы преобразования не зависят от свойств сигналов (от параметров C_0, C_1, C, β, σ).

3. $t > t_2''$. Этот интервал характеризуется установившейся дисперсией ошибки. Поэтому вычислительное устройство должно осуществлять стационарную фильтрацию; выходной сигнал фильтра определяется первым выражением (6.4), в котором импульсная переходная функция $W_s(t, \tau)$ соответствует передаточной функции (6.59).

На промежуточных интервалах (t_1', t_1'') и (t_2', t_2'') оптимальное вычислительное устройство выполняет операции, вообще говоря, существенно отличные от перечисленных выше. Однако, во-первых, эти интервалы имеют незначительный удельный вес, а во-вторых, как показывают численные расчеты, операции, оптимальные для смежных участков, дают небольшой проигрыш в точности. Поэтому потребуем, чтобы вычислительное устройство выполняло операцию (6.65) для $0 < t < t_1$, операцию (6.4) при импульсной переходной функции (6.66) для $t_1 < t < t_2$ и стационарное преобразование при передаточной функции (6.59) для $t > t_2$. Графики изменения среднеквадратичной ошибки, представленные на рис. 6.8 кривыми *1*, *2* и *3*, строятся по трем зависимостям, определяющим величины дисперсии ошибки каждого преобразования. При переходе от первого преобразования ко второму, а затем к третьему среднеквадратичная ошибка будет меняться так, как показывает штрих-пунктирная кривая. Моменты времени смены формул преобразования находятся из условий равенства дисперсий ошибок для смежных участков:

t_1 — из условия равенства выражений (5.4) и (6.32):

$$C_0^2 + \bar{C}_1^2 t_1^2 = \frac{4\sigma^2}{t_1} + B^2, \tag{6.67}$$

t_2 — из условия равенства выражений (6.32) и (6.63):

$$\frac{4\sigma^2}{t_2} = 2\left(\frac{\beta}{2}\right)^{1/4} C^{1/2}\sigma^{3/2}. \qquad (6.68)$$

Заметим, что моменты t_1 и t_2 зависят от параметров сигналов, в то время как сами алгоритмы преобразования на первом и втором этапах от них не зависят.

Блок-схема соответствующего устройства с переменной структурой изображена на рис. 6.9. В блок *1* — экстраполятор по априорным данным — вводятся только данные для вычисления математического ожидания координаты. В блоки *2* и *3* непрерывно поступает сигнал $x(t)$. Ключ *Кл* осуществляет поочередное подключение блоков на выход системы. Управление ключом *Кл* осуществляется с помощью программного устройства *Пр*, в которое вводятся априори известные статистические данные о множестве реализаций (параметры C_0, C_1, C, B, β, σ). Пунктиром показана возможная связь, содействующая более быстрому протеканию переходных процессов.

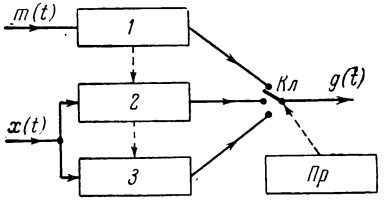

Рис. 6.9.

Если требования по точности задаются с учетом жесткого допуска σ_0 на среднеквадратичную ошибку, то, возможно, не будет необходимости в реализации описанной схемы с переменной структурой. Если ошибки даже оптимального фильтра на некотором интервале $(0, t_3^*)$ являются недопустимо большими (рис. 6.10), так что практически удовлетворительным можно считать только установившийся режим, то следует ограничиться стационарным фильтром, оптимальным для установившегося режима. На рис. 6.10 кривые *1* и *2* показывают изменение среднеквадратичной ошибки на выходе такого стационарного фильтра, а кривая *3* — на выходе оптимального фильтра. Хотя в переходном режиме фильтр дает значительно большие ошибки, это не имеет практическо-

го значения, важно лишь различие моментов t_1^*, t_2^* и t_3^*, начиная с которых среднеквадратичные ошибки меньше допуска σ_0.

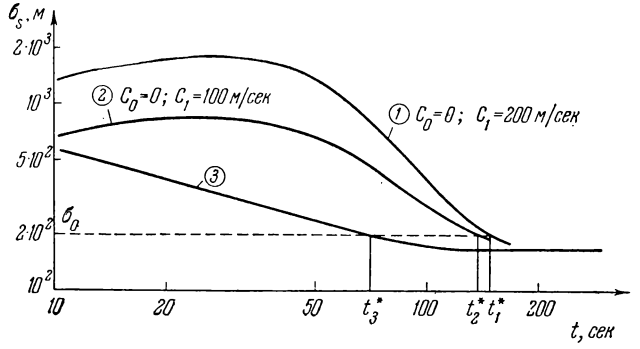

Рис. 6.10.

Рассмотрим подробнее стационарный фильтр, свойства которого определяются передаточной функцией (6.59). Относительный коэффициент демпфирования фильтра не зависит от свойств сигналов:

$$\delta=\frac{\rho}{\rho\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (6.69)$$

Частота среза $\omega_0=\rho\sqrt{2}$ зависит от всех параметров сигналов (C, β и σ). По-видимому, в реальных условиях лишь величина σ может меняться в широком диапазоне. На рис. 6.11 показана зависимость частоты среза ω_0 и постоянной времени $T_0=1/\omega_0$ от величины σ. Для всех мыслимых вариантов позиционных измерителей величина σ находится в пределах 10^2 *м·сек*$^{1/2}<\sigma<10^5$ *м·сек*$^{1/2}$. При этом диапазон изменения величины T_0 получается не слишком большим: 18 *сек*$<T_0<$500 *сек*. Соответственно продолжительность переходных процессов составляет 50÷1500 *сек*.

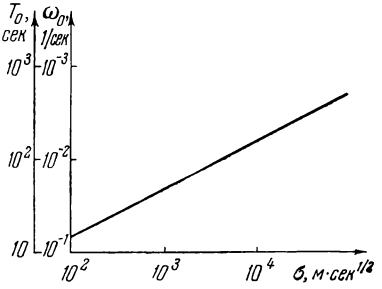

Рис. 6.11.

Сведения о частоте среза непрерывного фильтра позволяют сделать определенные выводы о требованиях, предъявляемых к точности выдерживания частотной характеристики: при $\omega \gg \omega_0$ должно быть $|K(j\omega)| \ll 1$ и при этом точное воспроизведение выражения (6.59) не необходимо. Кроме того, на этом этапе может быть решен вопрос о допустимости принятой аппроксимации (6.58) условной спектральной плотности недетерминированной составляющей полезного сигнала. Найденное решение перестанет быть справедливым, если постоянная времени объекта T_1 больше постоянной времени фильтра T_0, т. е. если вместо простейшего выражения (2.1) передаточной функции объекта следует использовать выражение (2.2) или (2.3) или если при $\omega = \omega_0$ становится значительным влияние турбулентности атмосферы.

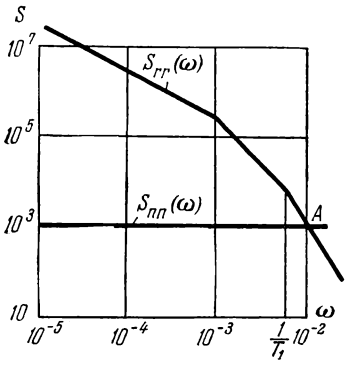

Рис. 6.12.

Примем, что необходимо использовать аппроксимацию (2.2). Тогда взаимное расположение кривых спектральных плотностей оказывается таким, как показано на рис. 6.12. Вблизи точки A пересечения кривых условная спектральная плотность недетерминированной составляющей полезного сигнала может быть приближенно представлена в виде

$$S_{rr}(\omega) \approx \frac{2\beta C^2}{T_1^2 \omega^6}. \tag{6.70}$$

Если принять, что помеха по-прежнему представляет собой белый шум интенсивности σ^2, то получается, что полюсы передаточной функции фильтра представляют собой корни уравнения

$$\xi^6 - \frac{2\beta C^2}{\sigma^2 T_1^2} = 0, \tag{6.71}$$

имеющие отрицательные вещественные части. При этом из условия конечности дисперсии ошибки сразу получаем следующее выражение для передаточной функции оптимального фильтра:

$$K_s(j\omega) = \frac{2\rho_1 (j\omega)^2 + 2\rho_1^2 j\omega + \rho_1^3}{(j\omega)^3 + 2\rho_1 (j\omega)^2 + 2\rho_1^2 j\omega + \rho_1^3} \tag{6.72}$$

$$[\rho_1 = (2\beta)^{1/6} T_1^{-1/3} C^{1/3} \sigma^{-1/3}].$$

Дисперсия установившейся ошибки в координате равна:

$$D_r = \frac{2}{3} (2\beta)^{1/6} T_1^{-1/3} C^{1/3} \sigma^{5/3}. \tag{6.73}$$

Выражение (6.72) показывает, что в рассматриваемом случае оптимальный фильтр не только обеспечивает нулевую установившуюся ошибку от детерминированных составляющих полезного сигнала, но и является асимптотически несмещенным по отношению к квадратично изменяющемуся сигналу. Можно ожидать, что это свойство должно быть характерным в случае движения со стационарным ускорением. И действительно, в § 7.2 показано, что полученное здесь решение имеет тот же вид для движения со стационарным ускорением при условии, однако, что свойства объекта характеризуются простейшей передаточной функцией (2.4).

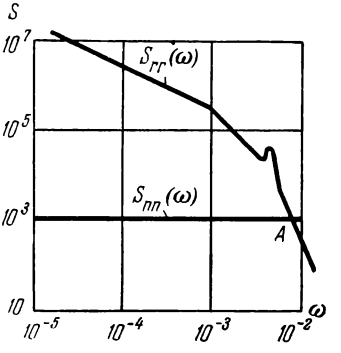

Рис. 6.13.

Теперь предположим, что необходимо использовать аппроксимацию (2.3), причем кривые условных спектральных плотностей располагаются так, как показано на рис. 6.13. Тогда для условной спектральной плотности недетерминированной части полезного сигнала следует использовать выражение

$$S_{rr}(\omega) \approx \frac{2\beta C^2}{T_2^4 \omega^8}. \tag{6.74}$$

Полюсы передаточной функции фильтра представляют собой теперь корни уравнения

$$\xi^8 + \frac{2\beta C^2}{\sigma^2 T_2^4} = 0, \tag{6.75}$$

имеющие отрицательные вещественные части. Из условий конечности дисперсии ошибки получаем:

$$\left.\begin{aligned} K_s(j\omega) = \frac{2{,}67\rho_2 (j\omega)^3 + 3{,}42\rho_2^2 (j\omega)^2 + 2{,}67\rho_2^3 j\omega + \rho_2^4}{(j\omega)^4 + 2{,}67\rho_2 (j\omega)^3 + 3{,}42\rho_2^2 (j\omega)^2 + 2{,}67\rho_2^3 j\omega + \rho_2^4} \\ [\rho_2 = (2\beta)^{1/8} C^{1/4} \sigma^{-1/4} T_2^{-1/2}]. \end{aligned}\right\} \tag{6.76}$$

Дисперсия установившейся ошибки в координате равна:

$$D_r = 0{,}64 (2\beta)^{1/8} T_2^{-1/2} C^{1/4} \sigma^{7/4}. \tag{6.77}$$

Видно, что порядок астатизма фильтра повысился еще на единицу.

Рассмотрим теперь для стационарного случая работу навигационной системы в режиме управления. В этом случае управляющий сигнал (программа движения) вводится так, как было показано на рис. 3.4. Вопрос о выборе передаточных функций $Y_1(j\omega)$ и $Y_2(j\omega)$ здесь не рассматривается. Для режима управления выражения (6.59) и (6.60) в случае простейшей аппроксимации (2.1) передаточной функции объекта представляют собой передаточные функции замкнутой системы. Передаточные функции фильтра, включенного в замкнутую систему, определяются по формулам (6.59) и (6.60). Отсюда получаем для задачи управления координатой

$$K_s^*(j\omega) = 2\rho\left(1 + \frac{\rho}{j\omega}\right), \tag{6.78}$$

а для задачи стабилизации скорости

$$K_v^*(j\omega) = \frac{2\rho^2}{j\omega + 2\rho}. \tag{6.79}$$

Таким образом, в первом случае регулятор должен быть астатическим, во втором случае — статическим с постоянной времени $T = 1/2\rho$. Установившиеся дисперсии ошибок в координате и скорости по-прежнему определяются

выражениями (6.63) и (6.64) (на этот раз имеются в виду ошибки не измерения, а выполнения программы движения).

При более сложной аппроксимации передаточной функции объекта выражениями (2.2) или (2.3) находим для задачи управления координатой соответственно:

$$K_s^*(j\omega)=\rho_1\left[2T_1 j\omega+2(1+\rho_1 T_1)+\frac{\rho_1(2+\rho_1 T_1)}{j\omega}+\frac{\rho_1^2}{(j\omega)^2}\right], \tag{6.80}$$

$$K_s^*(j\omega)=2{,}67\rho_2\Big[T_2^2(j\omega)^2+(T_1+1{,}28\rho_2 T_2^2)j\omega+$$
$$+(1+1{,}28\rho_2 T_1+\rho_2^2 T_2^2)+\frac{\rho_2(1{,}28+\rho_2 T_1+0{,}37\rho_2^2 T_2^2)}{j\omega}+$$
$$+\frac{\rho_2^2(1+0{,}37\rho_2 T_1)}{(j\omega)^2}+\frac{0{,}37\rho_2^3}{(j\omega)^3}\Big]. \tag{6.81}$$

Необходимость компенсации инерционности объекта требует, таким образом, введения дополнительных корректирующих сигналов, пропорциональных производным и интегралам преобразуемого сигнала.

6.5. Критичность оптимального преобразования

Практическая ценность полученных алгоритмов оптимального преобразования определяется в значительной мере их критичностью по отношению к изменяющимся условиям работы. Во всех случаях критичность оценивается по относительному увеличению дисперсии ошибки в координате.

а) Наименее стабильной в реальных условиях, по-видимому, является величина σ. Данные расчетов на критичность по отношению к этому фактору представлены на рис. 6.14. Кривые *1, 2, 3* и *4* показывают зависимости среднеквадратичной ошибки в координате для фильтров, параметры которых определены по расчетным значениям σ_0. Огибающая этих кривых — кривая *5* — изображает среднеквадратичную ошибку фильтра, перестраивающегося с изменением σ так, что при любом σ он остается оптимальным. Таким образом, кривая *5* определяет достижимые пределы по точности при

идеальной самонастройке. По отклонению от этой кривой определяется относительное качество любого фильтра. Пунктирная линия *6* отмечает уровень среднеквадратичной ошибки, на 40% большей по сравнению с минимально возможной при каждом данном значении σ. Если считать допустимым такой проигрыш в точности,

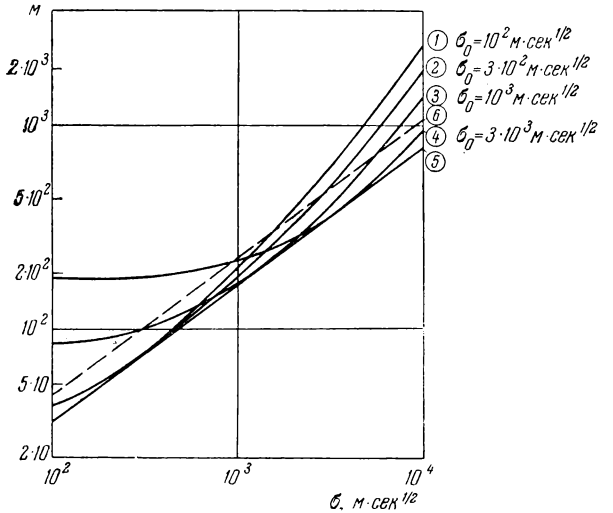

Рис. 6.14.

то из рассмотрения графиков видно, например, что фильтр, оптимальный для $\sigma_0 = 10^3$ *м · сек*$^{1/2}$, годится для диапазона $3 \cdot 10^2$ *м · сек*$^{1/2} < \sigma < 3 \cdot 10^3$ *м · сек*$^{1/2}$, а два фильтра перекрывают диапазон 10^2 *м · сек*$^{1/2} < \sigma < 10^4$ *м · сек*$^{1/2}$. Отсюда следует, что стационарный оптимальный фильтр некритичен по отношению к изменениям σ; в навигационной системе можно обойтись без самонастройки по этому параметру или в крайнем случае достаточно ввести грубую самонастройку с переключением по двум или трем ступеням. Заметим, что сама абсолютная величина среднеквадратичной ошибки σ_s меняется в широких пределах, так что относительный проигрыш в точности от неправильной настройки может не иметь значения и в более широком диапазоне.

б) Для получения более обоснованных данных о критичности фильтра по отношению к изменению условий работы необходимо рассмотреть эффект совместного изменения нескольких параметров сигналов. Для примера на рис. 6.15 на плоскости параметров C, σ построены кривые равных значений относительного увеличения на 20% и 40% среднеквадратичной ошибки для

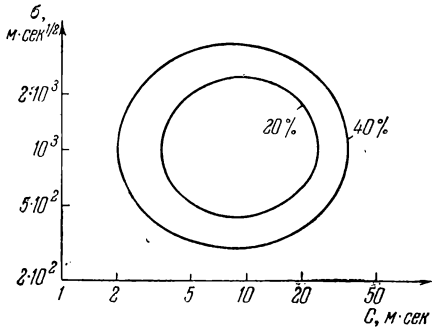

Рис. 6.15.

фильтра, оптимального при $\sigma=\sigma_0=10^3$ *м · сек*$^{1/2}$ и $C=$ $=10$ *м/сек*. Расположение кривых свидетельствует о том, что фильтр некритичен и по отношению к совместному изменению обоих параметров.

в) Представляется важным также оценить критичность фильтра по отношению к отклонениям его свойств от расчетных. Основными параметрами фильтра являются частота среза и относительное демпфирование. Отклонение частоты среза от расчетного значения пересчитывается в эквивалентное изменение величины σ, и поэтому оценка критичности по отношению к этому фактору может быть сделана по данным п. а) этого параграфа. Предполагая, что частота среза фильтра соответствует расчетному значению, а относительное демпфирование, характеризуемое коэффициентом δ, может быть различным, получаем следующее выражение для дисперсии ошибки в координате:

$$D_r=(2\beta)^{1/4}\,C^{1/2}\sigma^{3/2}\left(\delta+\frac{1}{2\delta}\right). \qquad (6.82)$$

Зависимость относительной величины σ_s/σ_{s0} среднеквадратичной ошибки от коэффициента δ изображена на рис. 6.16. Видно, что изменение величины δ в диапазоне $0{,}25<\delta<2{,}4$ приводит к увеличению σ_s не более чем на 40%. Таким образом, фильтр некритичен и по отношению к этому фактору.

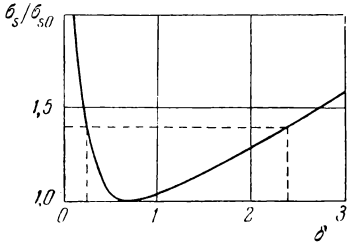

Рис. 6.16.

г) Для режима управления важно оценить влияние отклонений характеристик объекта от расчетных. Пусть характеристики фильтра выбраны при аппроксимации передаточной функции объекта выражением (2.1), а в действительности следовало бы использовать более сложное выражение (2.2). Передаточная функция фильтра имеет вид (6.59). В этом случае получаем следующее выражение для дисперсии ошибки:

$$D_r = 2\left(\frac{\beta}{2}\right)^{1/4} C^{1/2}\sigma^{3/2}\frac{1+2\rho^2T_1^2}{1+\rho T_1}. \qquad (6.83)$$

Зависимость относительной величины σ_s/σ_{s0} среднеквадратичной ошибки от произведения ρT_1 представлена на рис. 6.17. Увеличению σ_s на 40% соответствует $\rho T_1 \approx 1{,}4$. Этим определяется граница, до которой допустимо пренебрегать постоянной времени объекта.

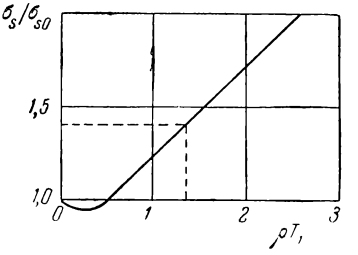

Рис. 6.17.

Обычное возражение против использования принятой методики синтеза корректирующего устройства в замкнутой системе (определение оператора замкнутой системы в целом, а затем нахождение по нему оператора корректирующего устройства) формулируется так: корректирующее устройство должно «компенсировать» инерционность объекта, причем эта «компенсация» требует введения производных высокого порядка, что ока-

зывается практически сложным, а иногда и неосуществимым. Однако в действительности нет необходимости стремиться к возможно более полной «компенсации». Приведенные выше результаты расчетов показывают, что практически можно пренебрегать дополнительными постоянными времени, если даже они не очень малы. Заметим, что граничное значение постоянной времени определяется частотой среза ω_0 оптимального фильтра. Таким образом, не решенный априори вопрос о допустимости той или иной аппроксимации характеристик объекта решается в конечном счете по результатам расчета индикаторного режима.

6.6. Сложные режимы

Ниже кратко рассмотрены результаты решения задачи оптимальной обработки сигнала, свойства которого претерпевают однократное изменение во время работы вычислительного устройства.

А) Режим памяти.

Сигнал $x(t)$ позиционного измерителя поступает на интервале $(0, T)$. В момент времени $t=T$ измеритель отключается и при $t>T$ выдает нулевой сигнал. На интервале (T, t) вычислительное устройство осуществляет экстраполяцию данных. Выходные сигналы навигационной системы формируются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} q(t) &= m(t)+z(t), \qquad z(t)=\int_0^T W_s(t,\tau)\,x(\tau)\,d\tau; \\ p(t) &= \dot{m}(t)+v(t), \qquad v(t)=\int_0^T W_v(t,\tau)\,x(\tau)\,d\tau. \end{aligned}\right\} \tag{6.84}$$

Интегральные уравнения для искомых импульсных переходных функций $W_s(t, \tau)$ и $W_v(t, \tau)$ имеют вид:

$$\int_0^T W(t,\tau)\Big\{\frac{C^2}{\beta}\Big[2\min(\tau_1,\tau_2)+ \\ +\frac{1}{\beta}\left(-1+e^{-\beta\tau_1}+e^{-\beta\tau_2}-e^{-\beta|\tau_1-\tau_2|}\right)\Big]+ \\ +\sigma^2\delta(\tau_1-\tau_2)\Big\}\,d\tau_2=Z(t,\tau_1) \qquad (0\leqslant\tau\leqslant T), \tag{6.85}$$

где правая часть определяется выражением (6.6) для задачи определения координаты и выражением (6.8) для задачи определения скорости. Общая методика решения задачи остается той же, что и в § 6.1. На рис. 6.18 приведена кривая изменения среднеквадратичной ошибки в координате. Здесь же для сравнения пунктиром изображена среднеквадратичная ошибка при известной предыстории (см. § 5.3). Последнюю кривую можно рассматривать как предельную при неограниченном повышении точности позиционного измерителя.

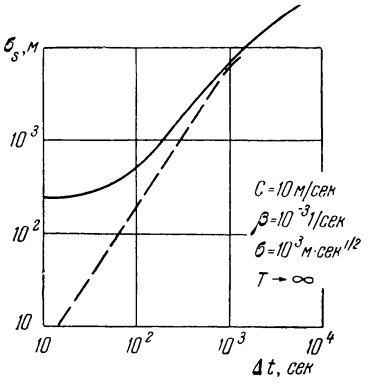

Рис. 6.18.

Для неидеального измерителя характерным является то, что среднеквадратичная ошибка экстраполяции начинает нарастать не от нуля, а от конечного значения (эта величина определяется из решения задачи фильтрации при $t=T$). При увеличении времени экстраполяции $\Delta t=t-T$ характер изменения среднеквадратичной ошибки тот же, что и при известной предыстории.

Для относительно малых интервалов экстраполяции могут быть получены достаточно простые алгоритмы преобразования данных. Разложим корреляционные функции в правых частях интегральных уравнений (6.85) в ряд по степеням Δt и сохраним только первые члены разложения [интервал $(0, T)$ при этом может не быть малым]. Легко проверить, что в этом случае правые части интегральных уравнений могут быть записаны в виде

$$\left.\begin{aligned} Z_s(t, \tau_1) &= [\lambda_1^{(s)}(T) C_0^2 + \lambda_2^{(s)}(T) \tau_1 C_1^2 + R_{rr}(T, \tau_1)] + \\ &\quad + [\lambda_1^{(v)}(T) C_0^2 + \lambda_2^{(v)}(T) \tau_1 C_1^2 + R_{\dot r\dot r}(T, \tau_1)] \Delta t, \\ Z_v(t, \tau_1) &= \lambda_1^{(v)}(T) C_0^2 + \lambda_2^{(v)}(T) \tau_1 C_1^2 + R_{\dot r\dot r}(T, \tau_1). \end{aligned}\right\} \quad (6.80)$$

Величина Δt в левые части не входит. Поэтому решения могут быть записаны в виде

$$W_s(t, \tau) \approx W'(T, \tau) + W''(T, \tau)\Delta t, \quad W_v(t, \tau) \approx W'(T, \tau), \tag{6.87}$$

где $W'(T, \tau)$ и $W''(T, \tau)$ — решения интегральных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^T W'(T, \tau_2) R_{xx}(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_2 = R_{ss}(T, \tau_1), \\ &\int_0^T W''(T, \tau_2) R_{xx}(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_2 = R_{\dot{s}s}(T, \tau_1). \end{aligned}\right\} \tag{6.88}$$

Последние интегральные уравнения соответствуют задачам оптимального определения координаты и скорости в момент времени $t=T$. Таким образом, выражения (6.87) показывают, что в задаче определения координаты система должна запоминать значения координаты и скорости в момент времени $t=T$ и по ним производить линейную экстраполяцию, а в задаче определения скорости — просто выдавать постоянное значение скорости, которое она запомнила. Заметим, что это общее свойство решения задачи экстраполяции получается независимо от конкретного вида измерителя; оно имело место также и в предельном случае точно известной предыстории движения (см. § 5.3). Можно показать, что это же свойство остается справедливым и для любой комплексной системы, включающей несколько непрерывных измерителей. Следовательно, экстраполятор может иметь одинаковую структуру, по крайней мере для малых интервалов времени, независимо от состава навигационного комплекса.

При $B \neq 0$ и при достаточно больших T, когда к моменту $t=T$ дисперсию ошибки фильтрации сигнала позиционного измерителя можно считать установившейся, получаем следующее приближенное выражение дисперсии ошибки экстраполяции координаты, справедливое по-прежнему для малых Δt:

$$D_s(t) \approx \frac{2}{3}\frac{C^2}{\beta^2}(\beta\Delta t)^3 + 2\left(\frac{\beta}{2}\right)^{1/4} C^{1/2}\sigma^{3/2} + B^2. \tag{6.89}$$

Первое слагаемое зависит только от свойств полезного сигнала и связано с принципиальной невозможностью точной экстраполяции недетерминированного случайного процесса (см. § 5.3), остальные слагаемые определяются ошибками измерителя. Формула (6.89) подтверждает вывод, уже сделанный на основе сравнения результатов численных решений: сначала ошибки экстраполяции преимущественно зависят от ошибок измерителя, а потом, при увеличении Δt, основное значение преобретают ошибки идеального экстраполятора.

Б) Изменение средней скорости движения.

Предположим, что преднамеренно осуществляется быстрое изменение режима полета, вследствие чего в известный момент времени $t=t_1$ скачком изменяется средняя скорость (величина c_1). Сведения об изменении режима могут быть непосредственно введены в вычислительное устройство навигационной системы, если, например, мощность двигателя контролируется независимым измерителем. Если бы по показанию этого измерителя можно было совершенно точно рассчитать приращение средней скорости, то по отношению к этому фактору могла бы быть обеспечена полная инвариантность.

В действительности приращение средней скорости определяется со случайной ошибкой Δc_1, дисперсия которой равна $(\Delta C_1)^2$. Будем предполагать, что ошибка Δc_1 статистически независима от всех остальных. Выходные сигналы навигационной системы формируются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} q(t) &= m(t) + m_{\Delta v}(t-t_1) + z(t), \\ z(t) &= \int_0^t W_s(t,\tau)\,x(\tau)\,d\tau; \\ p(t) &= \dot{m}(t) + m_{\Delta v} + v(t), \\ v(t) &= \int_0^t W_v(t,\tau)\,x(\tau)\,d\tau, \end{aligned}\right\} \qquad (6.90)$$

где $m_{\Delta v}$ — математическое ожидание приращения скорости, вводимое в вычислительное устройство и рассчи-

танное по сведениям об изменении режима работы. Если в действительности эти сведения отсутствуют или они не вводятся, то следует считать $m_{\Delta v}=0$; при этом $(\Delta C_1)^2$ будет представлять собой дисперсию скачка скорости. Импульсные переходные функции $W_s(t, \tau)$ и $W_v(t, \tau)$ следует искать в виде различных аналитических выражений на интервалах $(0, t_1)$ и (t_1, t):

$$W(t, \tau)=\begin{cases} W^{(1)}(t, \tau) & \text{при} \quad 0 \leqslant \tau < t_1, \\ W^{(2)}(t, \tau) & \text{при} \quad t_1 \leqslant \tau \leqslant t. \end{cases} \tag{6.91}$$

Поскольку свойства недетерминированных составляющих сигналов не меняются, то оба интегральных уравнения относительно обоих неизвестных $W^{(1)}(t, \tau)$ и $W^{(2)}(t, \tau)$ могут быть записаны одинаковым образом:

$$\int_0^t W(t, \tau_2)\Big\{\frac{C^2}{\beta}\Big[2\min(\tau_1, \tau_2)+ \\ +\frac{1}{\beta}(-1+e^{-\beta\tau_1}+e^{-\beta\tau_2}-e^{-\beta|\tau_1-\tau_2|})\Big]+ \\ +\sigma^2\delta(\tau_1-\tau_2)\Big\}\,d\tau_2=Z(t, \tau_1) \quad (0 \leqslant \tau_1 < t), \tag{6.92}$$

где для задачи определения координаты

$$\left.\begin{aligned} Z(t, \tau_1)&=\lambda_{11}^{(s)}(t)C_0^2+\lambda_{21}^{(s)}(t)C_1^2\tau_1+ \\ &+\frac{C^2}{\beta}\Big[2\tau_1+\frac{1}{\beta}(-1+e^{-\beta t}+e^{-\beta\tau_1}-e^{-\beta(t-\tau_1)})\Big] \\ &\qquad\qquad \text{при } 0<\tau_1\leqslant t_1; \\ Z(t, \tau_1)&=\lambda_{12}^{(s)}(t)C_0^2+\lambda_{22}^{(s)}(t)\tau_1[C_1^2+(\Delta C_1)^2]+ \\ &+\frac{C^2}{\beta}\Big[2\tau_1+\frac{1}{\beta}(-1+e^{-\beta t}+e^{-\beta\tau_1}-e^{-\beta(t-\tau_1)})\Big] \\ &\qquad\qquad \text{при } t_1<\tau_1\leqslant t. \end{aligned}\right\} \tag{6.93}$$

Множители $\lambda_{ij}^{(s)}(t)$ определяются выражениями вида (6.7).

На рис. 6.19 сплошными линиями представлены кривые изменения среднеквадратичной ошибки в координате, построенные для различных значений ΔC_1. Во всех

случаях после момента $t=t_1$ среднеквадратичные ошибки начинают расти от установившегося значения, достигают максимума (величина максимума зависит от ΔC_1) и вновь уменьшаются до того же установившегося значения. Различие между кривыми показывает выгоду от введения в навигационную систему более точных данных о величине скачка средней скорости. Как видно из

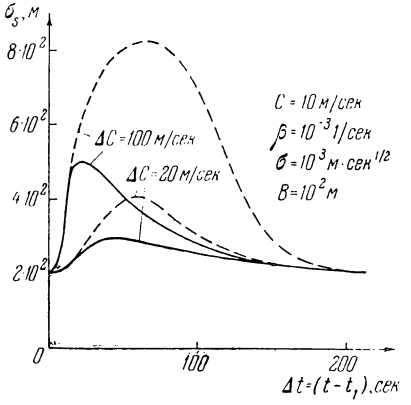

Рис. 6.19.

графиков, заметный выигрыш в точности получается только на достаточно малом интервале времени, соизмеримом с постоянной времени стационарного фильтра.

Реализация оптимальной импульсной переходной функции достаточно сложна. Поэтому интересно проверить, что дает простейшее, заведомо неоптимальное решение. В § 6.4 было отмечено, что в большинстве случаев можно ограничиться только стационарным фильтром второго порядка с передаточной функцией (6.59). Примем, что свойства фильтра остаются неизменными и при появлении скачка скорости. Кривые изменения среднеквадратичной ошибки для этого случая при различных ΔC изображены на рис. 6.19 пунктиром. Сравнение с оптимальными кривыми показывает, что в переходном процессе ошибки стационарного фильтра могут достигать больших величин, однако продолжительность переходного процесса имеет тот же порядок.

ГЛАВА 7

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛА ПОЗИЦИОННОГО ИЗМЕРИТЕЛЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ ДВИЖЕНИЯ СО СТАЦИОНАРНЫМ УСКОРЕНИЕМ И ДЛЯ СЛУЧАЯ СМЕШАННОГО ДВИЖЕНИЯ

В случае движения со стационарным ускорением многие качественные особенности оптимального решения оказываются сходными с особенностями движения со стационарной скоростью: весь интервал работы фильтра можно разбить на три этапа, причем для двух первых этапов фильтр нестационарен (при приближенном решении интегрального уравнения используется разложение корреляционных функций), а для третьего этапа (установившийся режим) фильтр становится стационарным (его передаточная функция легко находится методом логарифмических характеристик). Уравнение стационарного фильтра в простейшем случае имеет третий порядок, при необходимости учета постоянных времени объекта порядок фильтра повышается до четвертого или пятого. Для случая смешанного движения, когда имеются составляющие, характерные как для движения со стационарной скоростью, так и для движения со стационарным ускорением, оптимальное решение совпадает чаще всего с решением или для случая движения со стационарной скоростью, или для случая движения со стационарным ускорением.

7.1. Общее решение для случая движения со стационарным ускорением

Как и в задаче, рассмотренной в главе 6, вычислительное устройство преобразует априорные данные и непрерывно поступающий сигнал позиционного измерителя.

Статистические свойства помехи определяются выражениями (6.3), свойства полезного сигнала — корреляционной функцией (2.42). Примем, что система работает в индикаторном режиме и решает только задачу определения координаты.

Выходной сигнал вычислительного устройства формируется следующим образом:

$$q(t)=m(t)+z(t), \qquad z(t)=\int_0^t W(t,\ \tau)\,d\tau. \tag{7.1}$$

Интегральное уравнение для искомой импульсной переходной функции имеет вид:

$$\int_0^t W(t,\ \tau_2)\Big\{\frac{A^2}{\alpha}\Big[\frac{2}{3}\min(\tau_1^3,\ \tau_2^3)+\frac{1}{\alpha^3}(1-e^{-\alpha\tau_1}(\alpha\tau_1+1)-$$
$$-e^{-\alpha\tau_2}(\alpha\tau_2+1)+e^{-\alpha|\tau_1-\tau_2|}(1+\alpha|\tau_1-\tau_2|-\alpha^2\tau_1\tau_2))\Big]+$$
$$+B^2e^{-\gamma|\tau_1-\tau_2|}+\sigma^2\delta(\tau_1-\tau_2)\Big\}\,d\tau_2=Z(t,\ \tau_1) \tag{7.2}$$
$$(0\leqslant\tau_1\leqslant t),$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&Z(t,\ \tau_1)=\lambda_1(t)C_0^2+\lambda_2(t)\tau_1C_1^2+\frac{1}{4}\lambda_3(t)\tau_1^2C_2^2+\\
&+\frac{A^2}{\alpha}\Big\{\frac{2}{3}\tau_1^3+\frac{1}{\alpha^3}[1-e^{-\alpha t}(\alpha t+1)-e^{-\alpha\tau_1}(\alpha\tau_1+1)]+\\
&\qquad\qquad+e^{-\alpha(t-\tau_1)}[1+\alpha(t-\tau_1)-\alpha^2t\tau_1]\Big\},\\
&\lambda_1(t)=1-\int_0^t W(t,\ \tau)\,d\tau, \qquad \lambda_2(t)=t-\int_0^t \tau W(t,\ \tau)\,d\tau,\\
&\qquad\qquad \lambda_3(t)=t^2-\int_0^t \tau^2W(t,\ \tau)\,d\tau.
\end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

Выражение для условной спектральной плотности недетерминированной составляющей входного сигнала $x(t)$ записывается следующим образом:

$$S_{x'x'}(\omega)=\frac{2\alpha A^2}{\omega^4(\omega^2+\alpha^2)}+\frac{2\gamma B^2}{\omega^2+\gamma^2}+\sigma^2. \tag{7.4}$$

Примем $B=0$. Тогда в результате применения к интегральному уравнению (7.2) дифференциального оператора

$$Q\left(\frac{d}{d\tau_1}\right)=\frac{d^4}{d\tau_1^4}\left(\frac{d^2}{d\tau_1^2}-\alpha^2\right) \tag{7.5}$$

получаем следующее дифференциальное уравнение шестого порядка:

$$\frac{d^6W}{d\tau^6}-\alpha^2\frac{d^4W}{d\tau^4}-\frac{2\alpha A^2}{\sigma^2}W=0. \tag{7.6}$$

Искомая импульсная переходная функция не содержит δ-функций и её производных, поэтому решение записывается в виде

$$W(t,\ \tau)=\sum_{i=1}^{6}A_i(t)\,e^{\xi_i\tau}, \tag{7.7}$$

где ξ_i — корни уравнения

$$\xi^6-\alpha^2\xi^4-\frac{2\alpha A^2}{\sigma^2}=0. \tag{7.8}$$

В дальнейшем будем считать, что σ^2 мало (позиционный измеритель достаточно точен), так что

$$\sigma^2\ll\frac{2A^2}{\alpha^5}. \tag{7.9}$$

Тогда корни уравнения (7.8) оказываются приближенно равными:

$$\xi_{1,2}\approx\pm\rho,\qquad \xi_{3-6}\approx\rho\left(\pm\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}j\right) \tag{7.10}$$

$$[\rho=(2\alpha)^{1/6}A^{1/3}\sigma^{-1/3}].$$

Постоянные $A_i(t)$, а также множители $\lambda_i(t)$ (всего 9 неизвестных) определяются из условий тождественного удовлетворения исходного интегрального уравнения (7.2). Решение задачи может быть осуществлено при условиях несмещенности относительно начального значения координаты ($C_0\to\infty$), начального значения скорости ($C_1\to\infty$) и среднего ускорения ($C_2\to\infty$). Эти условия могут быть наложены в различных сочетаниях.

Качественные особенности оптимального решения оказываются в основном теми же, что и для движения со стационарной скоростью (рис. 7.1): среднеквадратичная ошибка σ_s возрастает от величины C_0, достигает

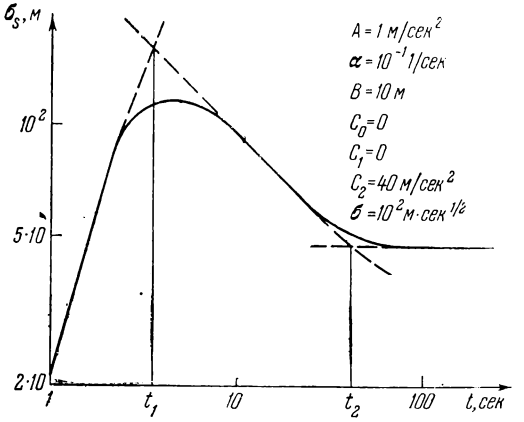

Рис. 7.1.

максимума, а затем стремится к установившемуся значению. Чтобы получить приближенное описание свойств фильтров, выяснить пути их реализации и найти простые расчетные формулы для оценки точности, необходимо использовать приемы, уже примененные в § 6.2 и 6.3.

7.2. Начальный участок и установившийся режим для случая движения со стационарным ускорением

Весь интервал работы вычислительного устройства можно разделить на три довольно четко выраженных этапа (см. рис. 7.1):

1. $0<t<t_1$ — экстраполяция координаты по априорным данным.

2. $t_1<t<t_2$ — фильтрация полезного сигнала, рассматриваемого как детерминированный сигнал, при наложении условий несмещенности.

3. $t>t_2$ — установившийся режим.

Ниже кратко охарактеризованы все три этапа.

На первом этапе ($0<t<t_1$) выходной сигнал формируется следующим образом:

$$q(t)=m(t). \tag{7.11}$$

Дисперсия ошибки определяется первым выражением (5.8).

На втором этапе ($t_1<t<t_2$) приближенное решение получается при аппроксимации корреляционной функции полезного сигнала выражением

$$R_{ss}(\tau_1, \tau_2) \approx C_0^2 + C_1^2\tau_1\tau_2 + \frac{1}{4}\bar{C}_2^2\tau_1^2\tau_2^2. \tag{7.12}$$

Будем считать, что $B^2 \ll C_0^2$. Тогда можно показать, что в этом случае импульсная переходная функция фильтра практически не зависит от B^2. Выходной сигнал формируется следующим образом:

$$z(t)=\int_0^t W(t, \tau)x(\tau)\,d\tau. \tag{7.13}$$

Импульсная переходная функция $W(t, \tau)$ находится при условии несмещенности относительно детерминированных составляющих полезного сигнала. В результате получаем:

$$W(t, \tau)=\frac{3}{t}\left(\frac{10\tau^2}{t^2}-\frac{8\tau}{t}+1\right). \tag{7.14}$$

Дисперсия ошибки при этом равна:

$$D_s(t) \approx \frac{9\sigma^2}{t}+B^2. \tag{7.15}$$

На третьем этапе ($t>t_2$) фильтр становится практически стационарным. Передаточная функция $K_s(j\omega)$, которую удобно рассматривать вместо импульсной переходной функции $W(t, \tau) \equiv W(t-\tau)$, может быть легко определена методом логарифмических характеристик, исходя только из требования конечности дисперсии ошибки.

При соблюдении неравенства (7.9) кривые условных спектральных плотностей полезного сигнала и помехи

пересекаются так, как показано на рис. 7.2. Спрямлению кривой $S_{rr}(\omega)$ (пунктир) соответствует аппроксимация

$$S_{rr}(\omega) \approx \frac{2\alpha A^2}{\omega^6}. \tag{7.16}$$

Из условия конечности дисперсии ошибки получаем, что степень числителя $K_s(j\omega)$ должна быть ниже степени знаменателя, а выражение $[1-K_s(j\omega)]$ должно иметь тройной нулевой корень. Имея в виду, что полюсами $K_s(j\omega)$ являются те из выражений (7.10), которые имеют отрицательные вещественные части, сразу получаем:

$$K_s(j\omega) = \frac{2\rho(j\omega)^2 + 2\rho^2 j\omega + \rho^3}{(j\omega)^3 + 2\rho(j\omega)^2 + 2\rho^2 j\omega + \rho^3} \qquad [\rho = (2\alpha)^{1/6} A^{1/3} \sigma^{-1/3}]. \tag{7.17}$$

Выражение того же вида [см. выражение (6.72)] было получено ранее для случая движения со стационарной скоростью при условии, что постоянная времени объекта достаточно велика. Это и естественно, так как приближенные выражения условных спектральных плотностей полезного сигнала в обеих задачах имеют одинаковый вид. Передаточная функция (7.17) обеспечивает асимптотическую несмещенность по отношению к детерминированной составляющей, изменяющейся по квадратичному закону.

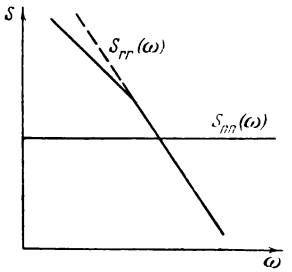

Рис. 7.2.

Если фильтр, близкий к оптимальному, приближенно реализовать в виде группы последовательно подключаемых фильтров, то среднеквадратичная ошибка будет меняться так, как показано на рис. 7.1 пунктирной линией.

Установившаяся дисперсия ошибки приближенно равна:

$$D_{s0} \approx \frac{2}{3}(2\alpha)^{1/6} A^{1/3} \sigma^{5/3} + B^2. \tag{7.18}$$

Величина первого слагаемого определяется в основном значением σ и очень мало зависит от параметров полез-

ного сигнала [меньше, чем в случае движения со стационарной скоростью; см. выражение (6.63)]. В зависимости от соотношения величины слагаемых выражения (7.18) при конкретных данных можно сделать вывод о том, стоит ли стремиться приближать характеристики реального фильтра к оптимальным. Если второе слагаемое имеет основной вес, то важно сохранить лишь свойство асимптотической несмещенности относительно детерминированных составляющих полезного сигнала. В тех случаях, когда вместо простейшего выражения (2.4) передаточной функции объекта нужно использовать выражения (2.5) или (2.6), вместо передаточной функции (7.17) получаем соответственно:

$$\left.\begin{aligned} K_s(j\omega) &= \frac{2{,}67\rho_1(j\omega)^3 + 3{,}42\rho_1^2(j\omega)^2 + 2{,}67\rho_1^3 j\omega + \rho_1^4}{(j\omega)^4 + 2{,}67\rho_1(j\omega)^3 + 3{,}42\rho_1^2(j\omega)^2 + 2{,}67\rho_1^3 j\omega + \rho_1^4} \\ &\left[\rho_1 = (2\alpha)^{1/8} A^{1/4}\sigma^{-1/4}T_1^{-1/4}\right], \end{aligned}\right\} \quad (7.19)$$

$$\left.\begin{aligned} &K_s(j\omega) = \\ &= \frac{3{,}23\rho_2(j\omega)^4 + 5{,}23\rho_2^2(j\omega)^3 + 5{,}23\rho_2^3(j\omega)^2 + 3{,}23\rho_2^4 j\omega + \rho_2^5}{(j\omega)^5 + 3{,}23\rho_2(j\omega)^4 + 5{,}23\rho_2^2(j\omega)^3 + 5{,}23\rho_2^3(j\omega)^2 + 3{,}23\rho_2^4 j\omega + \rho_2^5} \\ &\left[\rho_2 = (2\alpha)^{1/10} A^{1/5}\sigma^{-1/5}T_2^{-2/5}\right], \end{aligned}\right\} \quad (7.20)$$

а вместо выражения (7.18) для дисперсии ошибки — выражения

$$D_{s0} = 0{,}64\,(2\alpha)^{1/8}\,T_1^{-1/4}A^{1/4}\sigma^{7/4} + B^2, \qquad (7.21)$$

$$D_{s0} = 0{,}63\,(2\alpha)^{1/10}\,T_2^{-2/5}A^{1/5}\sigma^{9/5} + B^2. \qquad (7.22)$$

Отметим, что степень астатизма фильтра все повышается, а ошибки все меньше и меньше зависят от характеристик полезного сигнала.

В результате расчета установившегося режима для задачи определения скорости [при простейшей аппроксимации передаточной функции объекта выражением

(2.4)] получаем следующие выражения для передаточной функции фильтра и установившейся дисперсии ошибки:

$$K_v(j\omega) = \frac{j\omega(2\rho^2 j\omega + \rho^3)}{(j\omega)^3 + 2\rho(j\omega)^2 + 2\rho^2 j\omega + \rho^3}, \tag{7.23}$$

$$D_{v0} = 3(2\alpha)^{1/2} A\sigma. \tag{7.24}$$

Интересно, что ошибки в скорости в равной степени зависят и от мощности полезного сигнала и от мощности помехи.

Если желательно непрерывно обеспечивать режим работы, близкий к оптимальному, начиная с момента начала движения, то вычислительное устройство целесообразно выполнить в виде трех блоков, последовательно подключаемых на выход (см. рис. 6.9). Если же допустимо значительное увеличение ошибок в «переходном процессе», то можно ограничиться только фильтрами третьего, четвертого или пятого порядка с передаточными функциями (7.17), (7.19) или (7.20).

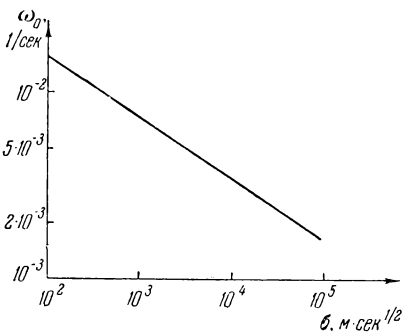

Рис. 7.3.

Динамические свойства стационарных оптимальных фильтров определяются в первую очередь частотой среза ω_0. Частота среза очень мало зависит от параметров сигналов, в частности от σ (рис. 7.3). По-видимому, в большинстве случаев величина ω_0 меняется в пределах $10^{-3}\frac{1}{сек} < \omega_0 < 10^{-2}\frac{1}{сек}$. По величине $T_0 = 1/\omega_0$ можно судить о быстродействии стационарного фильтра.

Для работы навигационной системы в режиме управления по координате выражения (7.17), (7.19) или (7.20) представляют собой передаточные функции замкнутой системы. В этом случае передаточные функции фильтра пересчитываются по формуле (3.13). Используя

соответствующие выражения для передаточных функций объекта (2.4), (2.5) или (2.6), получаем следующие передаточные функции фильтров:

$$K_s^*(j\omega) = 2\rho j\omega + 2\rho^2 + \frac{\rho^3}{j\omega} \qquad [\rho = (2\alpha)^{1/6} A^{1/3}\sigma^{-1/3}], \quad (7.25)$$

$$\left.\begin{aligned} K_s^*(j\omega) = 2{,}67\,[&\rho_1 T_1 (j\omega)^2 + \rho_1 j\omega(1 + 1{,}29\rho_1 T_1) + \\ &+ \rho_1^2(1{,}29 + \rho_1 T_1) + \frac{\rho_1^3(1 + 0{,}37\rho_1 T_1)}{j\omega} + \frac{0{,}37\rho_1^4}{(j\omega)^2}] \\ &[\rho_1 = (2\alpha)^{1/8} A^{1/4}\sigma^{-1/4} T_1^{-1/4}], \end{aligned}\right\} \quad (7.26)$$

$$\left.\begin{aligned} K_s^*(j\omega) = 3{,}23\,[&\rho_2 T_2^2 (j\omega)^3 + (\rho_2 T_1 + 1{,}62\rho_2^2 T_2^2)(j\omega)^2 + \\ &+ \rho_2(1 + 1{,}62\rho_2 T_1 + 1{,}62\rho_2^2 T_2^2) j\omega + \\ &+ \rho_2^2(1{,}62 + 1{,}62\rho_2 T_1 + \rho_2^2 T_2^2) + \\ &+ \frac{\rho_2^3(1{,}62 + \rho_2 T_1 + 0{,}31\rho_2^2 T_2^2)}{j\omega} + \frac{\rho_2^4(1 + 0{,}31\rho_2 T_1)}{(j\omega)^2} + \frac{0{,}31\rho_2^5}{(j\omega)^3}] \\ &[\rho_2 = (2\alpha)^{1/10} A^{1/5}\sigma^{-1/5} T_2^{-2/5}]. \end{aligned}\right\} \quad (7.27)$$

Эти законы управления могут быть легко реализованы. Дисперсии отклонений координаты от программы определяются соответственно выражениями (7.18), (7.21) и (7.22).

7.3. Установившийся режим для случая смешанного движения

Ограничимся рассмотрением только установившегося режима. Для нахождения передаточной функции фильтра будем использовать метод логарифмических характеристик. В соответствии с выражением (2.44) кривые составляющих условной спектральной плотности полезного сигнала для случая смешанного движения имеют такой вид, как показано на рис. 7.4 пунктирными линиями *1* и *2*. Их сумму изображает сплошная линия. В результате получаем три характерных варианта взаимного расположения кривых спектральных плотностей (рис. 7.5, *а*, *б*, *в*). На всех графиках штрих-пунктирными линиями показаны продолжения участков кривых в сторону низких частот. Рассмотрим варианты последовательно.

1. Особенностью варианта является то, что кривая условной спектральной плотности полезного сигнала не пересекает штрих-пунктирную линию — спрямленную кривую спектральной плотности составляющей движения со стационарной скоростью. Такое положение будет иметь место, если выполнено условие

$$2\beta C^2 > \frac{2A^2}{\alpha}. \tag{7.28}$$

При решении задачи методом логарифмических характеристик используются спрямленные кривые спектральных плотностей. Поскольку в рассматриваемом случае действительная кривая условной спектральной плотности вписывается в спрямленную, то передаточная функция оптимального фильтра попрежнему определяется по спрямленной кривой, т. е. имеет вид (6.59), причем относительные отклонения от оптимальности будут еще меньшими, чем в задаче со стационарной скоростью. Таким образом, получается, что добавление составляющей, соответствующей движению со стационарным ускорением, не меняет свойств стационарного фильтра, если при решении учитывать только недетерминированные составляющие. Однако следует иметь в виду, что передаточная функция (6.59) не обеспечивает асимптотической несмещенности относительно детерминированной составляющей $\frac{1}{2}c_2t^2$, и добавочная компонента дисперсии ошибки будет равна:

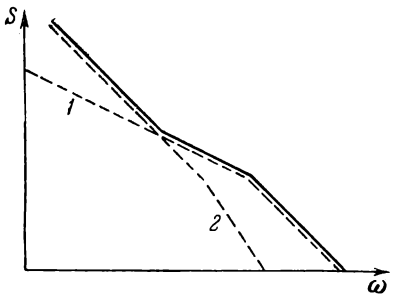

Рис. 7.4.

$$\Delta D_{s0} = \frac{1}{16\rho^4} C_2^2, \tag{7.29}$$

где C_2^2 — дисперсия случайной величины c_2. Если желательно устранить эту ошибку, то передаточную функцию

(6.59) можно заменить на

$$K_s(j\omega)=\frac{(2\rho+\nu)(j\omega)^2+2\rho j\omega(\rho+\nu)+2\rho^2\nu}{(j\omega+\nu)\,[(j\omega)^2+2\rho j\omega+2\rho^2]}. \qquad (7.30)$$

Здесь ν произвольно, но должно удовлетворять условию $\nu \ll \rho$. В этом случае дисперсия ошибки по-прежнему будет определяться выражением (6.63).

2. Особенность этого варианта заключается в том, что локальные свойства кривых $S_{rr}(\omega)$ и $S_{nn}(\omega)$ вблизи точки их пересечения остаются теми же, что и для случая движения со стационарной скоростью, однако кривая действительной условной спектральной плотности не вписывается в спрямленную. Это имеет место, если выполняются условия:

$$\left.\begin{aligned} 2\beta C^2 &< \frac{2A^2}{\alpha}, \\ (2\beta)^{3/2}C^3 &> 2\alpha A^2\sigma. \end{aligned}\right\} \qquad (7.31)$$

Поскольку локальное поведение кривых вблизи точки их пересечения не меняется, то метод логарифмических характеристик по-прежнему приведет к выражению (6.59). Однако так как здесь в области низких частот кривая спектральной плотности полезного сигнала идет выше расчетной, то можно ожидать, что ошибки от использования метода могут быть значительными. Оценим, до каких пределов можно не учитывать составляющую, соответствующую движению

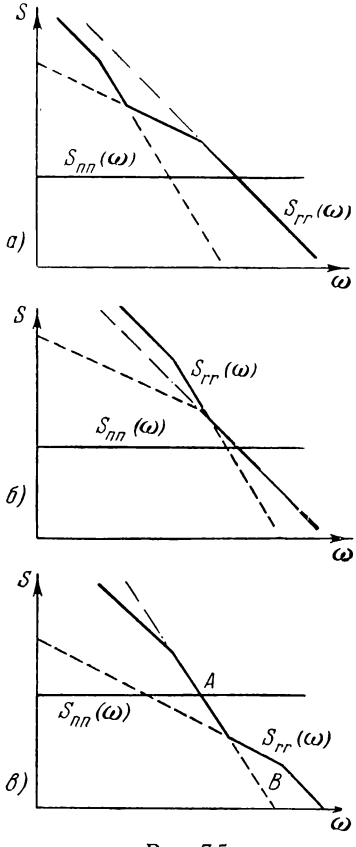

Рис. 7.5.

со стационарным ускорением. Приращение дисперсии ошибки, обусловленное составляющей движения со стационарным ускорением, при передаточной функции (6.59) оказывается равным:

$$\Delta D_r = \frac{A^2 (2\rho + \alpha)}{4\rho^3 (2\rho^2 + 2\alpha\rho + \alpha^2)}. \tag{7.32}$$

При $\alpha < \rho$ (это условие всегда выполняется для такого расположения кривых спектральных плотностей, как показано на рис. 7.5, *б*) относительная величина приращения приближенно равна:

$$\frac{\Delta D_r}{D_r} \approx \frac{A^2}{\alpha\beta C^2} \frac{\alpha}{4\rho}. \tag{7.33}$$

Для рассматриваемого случая первый сомножитель больше единицы, второй — меньше единицы. Если выражение (7.33) меньше единицы (это соответствует увеличению среднеквадратичной ошибки не более чем на 40%), то составляющую движения со стационарным ускорением можно не учитывать ни при построении оптимального фильтра, ни при расчете ошибок. Фильтр с передаточной функцией (6.59) остается близким к оптимальному, более сложному фильтру даже при больших значениях A^2, чем это следовало бы из формулы (7.33).

3. Этот вариант характерен тем, что локальное поведение кривых $S_{rr}(\omega)$ и $S_{nn}(\omega)$ вблизи точки пересечения A то же, что и в случае движения со стационарным ускорением, причем составляющая, соответствующая движению со стационарной скоростью, проявляется только при достаточно высоких частотах [точка перелома B кривой $S_{rr}(\omega)$ лежит правее точки пересечения A]. Такое положение имеет место, если выполнены условия

$$2\beta C^2 < \frac{2A^2}{\alpha}, \qquad (2\beta)^{3/2} C^3 < 2\alpha A^2 \sigma. \tag{7.34}$$

В этом случае оптимальное решение совпадает с решением для движения со стационарным ускорением: передаточная функция фильтра определяется выражением (7.17), а дисперсия — выражением (7.18). Составляющую, соответствующую движению со стационарной скоростью при условиях (7.34), можно с самого начала исключить из рассмотрения.

ГЛАВА 8

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛОВ ИЗМЕРИТЕЛЯ СКОРОСТИ И АКСЕЛЕРОМЕТРА

Задачи оптимального преобразования сигналов измерителя скорости и акселерометра характерны тем, что преобразованию в вычислительном устройстве подлежит не сам полезный сигнал, смешанный с помехой, а его первая производная или сумма второй производной и самого полезного сигнала. Общие свойства помехи в выходном сигнале акселерометра зависят от способа стабилизации его оси, поэтому рассматриваются раздельно задачи преобразования сигнала в астроинерциальной и гироинерциальной системах. Для всех задач составляются в полном виде интегральные уравнения. Однако практически решения находятся с использованием или разложения корреляционных функций в ряды, или метода логарифмических характеристик. В результате решения задачи преобразования сигнала измерителя скорости получается, что, за исключением начального интервала времени, простое интегрирование дает результаты, достаточно близкие к оптимальным (операция интегрирования сама по себе обеспечивает требуемую фильтрацию помехи). Свойства оптимального преобразования сигнала акселерометра существенно зависят от величин коэффициентов при детерминированных составляющих и времени работы системы: для малых интервалов времени при точно известных начальных условиях оптимальный фильтр близок к шулеровскому контуру, при больших ошибках в начальных условиях фильтр получается таким, как в случае позиционного измерителя; для больших интервалов времени оптимальный

фильтр представляет собой слабо демпфированное колебательное звено. В этой главе и далее исследование проводится только для случая движения со стационарной скоростью.

8.1. Преобразование сигнала измерителя скорости

В вычислительное устройство помимо априорных данных непрерывно поступает сигнал измерителя скорости

$$x(t) = \dot{s}(t) + n(t). \tag{8.1}$$

Предполагается, что измеритель скорости измеряет абсолютную скорость (относительно поверхности Земли). В противном случае (например, когда измеритель представляет собой датчик воздушной скорости) вместо $\dot{s}(t)$ в выражение (8.1) входила бы только составляющая относительной скорости. Ошибка измерителя $n(t)$ включает две составляющие:

$$n(t) = n_1(t) + n_2(t), \tag{8.2}$$

где $n_1(t)$ — белый шум интенсивности σ^2, а $n_2(t)$ — медленно меняющаяся («систематическая») составляющая. Их корреляционные функции имеют вид:

$$R_{n_1 n_1}(\tau_1, \tau_2) = \sigma^2 \delta(\tau_1 - \tau_2), \quad R_{n_2 n_2}(\tau_1, \tau_2) = B^2 e^{-\gamma|\tau_1 - \tau_2|}. \tag{8.3}$$

При работе навигационной системы в индикаторном режиме выходные сигналы вычислительного устройства формируются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} q(t) &= m(t) + z(t), \qquad z(t) = \int_0^t W_s(t, \tau)\, x(\tau)\, d\tau; \\ p(t) &= \dot{m}(t) + v(t), \qquad v(t) = \int_0^t W_v(t, \tau)\, x(\tau)\, d\tau. \end{aligned}\right\} \tag{8.4}$$

Интегральные уравнения для искомых импульсных переходных функций имеют вид:

$$\int_0^t W(t, \tau_2)[C^2 e^{-\beta|\tau_1 - \tau_2|} + B^2 e^{-\gamma|\tau_1 - \tau_2|} + \\ + \sigma^2 \delta(\tau_1 - \tau_2)]\, d\tau_2 = Z(t, \tau_1) \tag{8.5}$$

$$(0 \leqslant \tau_1 \leqslant t),$$

где для задачи определения координаты

$$\left.\begin{aligned} Z_s(t,\ \tau_1) &= \lambda^{(s)}(t)\,C_1^2 + \frac{C^2}{\beta}\left(2 - e^{-\beta\tau_1} - e^{-\beta(t-\tau_1)}\right), \\ \lambda^{(s)}(t) &= t - \int\limits_0^t W_s(t,\ \tau)\,d\tau, \end{aligned}\right\} \tag{8.6}$$

а для задачи определения скорости

$$\left.\begin{aligned} Z_v(t,\ \tau_1) &= \lambda^{(v)}(t)\,C_1^2 + C^2 e^{-\beta(t-\tau_1)}, \\ \lambda^{(v)}(t) &= 1 - \int\limits_0^t W_v(t,\ \tau)\,d\tau. \end{aligned}\right\} \tag{8.7}$$

Заметим, что C_0^2 не входит в интегральное уравнение, следовательно, как и можно было ожидать, величина C_0^2 войдет в качестве слагаемого в выражение дисперсии ошибки в координате и не войдет в выражение дисперсии ошибки в скорости.

Рассмотрим сначала случай, когда $B=0$. Недетерминированная составляющая входного сигнала $x'(t)$ стационарна, ее спектральная плотность имеет вид:

$$S_{x'x'}(\omega) = \frac{2\beta C^2}{\omega^2+\beta^2} + \sigma^2. \tag{8.8}$$

Следовательно, к интегральному уравнению (8.5) следует применить оператор

$$Q\left(\frac{d}{d\tau_1}\right) = \frac{d^2}{d\tau_1^2} - \beta^2. \tag{8.9}$$

В результате для искомых импульсных переходных функций получаем неоднородные дифференциальные уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2W_s}{d\tau_1^2} - \left(\beta^2 + \frac{2\beta C^2}{\sigma^2}\right) W_s &= -\beta^2 C_1^2 t, \\ \frac{d^2W_v}{d\tau_1^2} - \left(\beta^2 + \frac{2\beta C^2}{\sigma^2}\right) W_v &= -\beta^2 C_1^2. \end{aligned}\right\} \tag{8.10}$$

Решения уравнений записываются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} W_s(t, \tau) &= \sum_{i=1}^{2} A_i^{(s)}(t)\, e^{\xi_i \tau} + \frac{\beta^2 C_1^2 t}{\beta^2 + \frac{2\beta C^2}{\sigma^2}}, \\ W_v(t, \tau) &= \sum_{i=1}^{2} A_i^{(v)}(t)\, e^{\xi_i \tau} + \frac{\beta^2 C_1^2}{\beta^2 + \frac{2\beta C^2}{\sigma^2}}, \end{aligned}\right\} \tag{8.11}$$

где ξ_1 и ξ_2 — корни уравнения

$$\xi^2 - \left(\beta^2 + \frac{2\beta C^2}{\sigma^2}\right) = 0. \tag{8.12}$$

Во всех случаях, представляющих практический интерес, выполняется условие

$$\sigma^2 \ll \frac{2C^2}{\beta}. \tag{8.13}$$

Общий смысл этого неравенства (измеритель скорости предполагается достаточно точным) ясен непосредственно. Однако это неравенство допускает и более конкретную интерпретацию: простое интегрирование сигнала измерителя скорости дает на достаточно большом интервале времени более точные результаты, чем счисление пути в режиме памяти при точно известной предыстории (см. § 5.3). При выполнении условия (8.13) можно записать приближенно:

$$\xi_{1,2} \approx \mp \rho \qquad \left[\rho = (2\beta)^{1/2} \frac{C}{\sigma}\right]. \tag{8.14}$$

Неизвестные $A_i(t)$ и $\lambda(t)$ определяются из четырех уравнений, получающихся из условий тождественного удовлетворения интегрального уравнения (8.5).

Результаты численного решения — кривые среднеквадратичной ошибки в координате при конкретных исходных данных — приведены на рис. 8.1. Для всех случаев характерно монотонное нарастание ошибки. Сначала скорость роста относительно велика: ошибки совпадают с ошибками навигации по априорным данным (для сравнения на рис. 8.1 пунктиром показаны соответствующие кривые, перенесенные с рис. 5.1). Затем, когда сглаживание флюктуационной составляющей

ошибки становится эффективным, ошибки растут медленнее. При больших значениях t скорость роста определяется в основном постоянной ошибкой измерителя скорости.

Для получения решения на начальном этапе целесообразно использовать приближенные выражения корреляционной функции полезного сигнала и составляющей

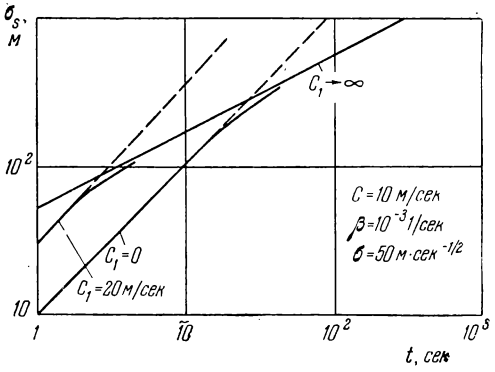

Рис. 8.1.

помехи $n_2(t)$, полученные в результате разложения в ряд [выражения (6.23)]. В этом случае вместо интегрального уравнения (8.5) получаем для задачи определения координаты

$$\sigma^2 W_s(t, \tau) = \lambda^{(s)}(t)\bar{C}_1^2 + [\lambda^{(s)}(t) - t]B^2, \qquad (8.15)$$

а для задачи определения скорости

$$\sigma^2 W_v(t, \tau) = \lambda^{(v)}(t)\bar{C}_1^2 + [\lambda^{(v)}(t) - 1]B^2. \qquad (8.16)$$

Примем, что $\bar{C}_1^2 > B^2$ [это неравенство имеет тот же смысл, что и (8.13)]. Тогда B^2 можно исключить из выражений (8.15) и (8.16). При этом в выражения дисперсий ошибок войдут соответствующие слагаемые, пропорциональные B^2. Из соотношений (8.15) и (8.16) получаем:

$$W_s(t, \tau) = \frac{\bar{C}_1^2 t}{\sigma^2 + \bar{C}_1^2 t}, \qquad W_v(t, \tau) = \frac{\bar{C}_1^2}{\sigma^2 + \bar{C}_1^2 t}. \qquad (8.17)$$

Отметим, что текущая оптимальная оценка координаты получается не интегрированием оценки скорости (схема, приведенная на рис. 5.3, не годится). Для дисперсий ошибок в координате и скорости получаем выражения:

$$D_s(t)=C_0^2+B^2t^2+\frac{\sigma^2\overline{C}_1^2t^2}{\sigma^2+\overline{C}_1^2t},\qquad D_v(t)=B^2+\frac{\sigma^2\overline{C}_1^2}{\sigma^2+\overline{C}_1^2t}. \tag{8.18}$$

При наложении условия несмещенности ($C_1\to\infty$) из выражений (8.17) и (8.18) находим:

$$\left.\begin{aligned} &W_s(t,\tau)=1,\quad W_v(t,\tau)=\frac{1}{t},\\ &D_s(t)=C_0^2+B^2t^2+\sigma^2t,\quad D_v(t)=B^2+\frac{\sigma^2}{t}.\end{aligned}\right\} \tag{8.19}$$

Продолжительность «переходного процесса» определяется постоянной времени

$$T=\frac{1}{\rho}=(2\beta)^{-1/2}\frac{\sigma}{C}. \tag{8.20}$$

При $t\gg T$ оптимальный фильтр становится стационарным; установившийся режим характеризуется нарастающей дисперсией ошибки в координате и постоянной дисперсией ошибки в скорости. Передаточные функции стационарных фильтров, найденные методом неопределенных коэффициентов (см. § 3.4), имеют вид:

$$K_s(j\omega)=\frac{\rho-\beta}{\rho j\omega}\left(1+\frac{\beta}{j\omega+\rho}\right),\quad K_v(j\omega)=\frac{\rho-\beta}{j\omega+\rho}. \tag{8.21}$$

Дисперсии ошибок в установившемся режиме при $\gamma=0$ определяются выражениями

$$D_s(t)=\frac{\rho^2-\beta^2}{\rho^2}\sigma^2t+C_0^2+B^2t^2,\quad D_{v0}=\sigma^2\rho+B^2. \tag{8.22}$$

Обычно при счислении координаты по сигналу измерителя скорости осуществляют просто операцию интегрирования $\left[K_s(j\omega)=\frac{1}{j\omega}\right]$. В этом случае получаем:

$$D_s(t)=\sigma^2t+C_0^2+B^2t^2. \tag{8.23}$$

Первые слагаемые выражений (8.22) и (8.23) различаются мало, так как $\rho>\beta$. Таким образом, в задаче

определения координаты простое интегрирование сигнала измерителя скорости (при этом обеспечивается полная инвариантность относительно полезного сигнала) дает результаты, достаточно близкие к оптимальным. В то же время в задаче определения скорости фильтрация флюктуационной составляющей ошибки существенно необходима (полная инвариантность по отношению к полезному сигналу невозможна). При учете неравенства (8.13) получаем следующее приближенное выражение для установившейся дисперсии ошибки в скорости:

$$D_{v0} = (2\beta)^{1/2} C\sigma + B^2. \tag{8.24}$$

Если учесть медленное изменение «систематической» составляющей ошибки ($\gamma \neq 0$), то выражения оптимальных передаточных функций и дисперсии ошибки в скорости практически не изменяются. Иным будет только выражение дисперсии ошибки в координате: вместо выражения (8.23) получим:

$$D_s(t) = \sigma^2 t + C_0^2 + \frac{2B^2}{\gamma}\left[t + \frac{1}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t})\right]. \tag{8.25}$$

В реальных системах для сокращения рабочего диапазона интегратора по входу перед ним включают фильтры с большими постоянными времени. Рассмотрим, к чему приводит замена простого интегратора звеном с передаточной функцией

$$K_s(j\omega) = \frac{1}{j\omega(T_1 j\omega + 1)}. \tag{8.26}$$

В этом случае, во-первых, возникает дополнительный переходный процесс с постоянной времени T_1, а во-вторых, появляется постоянная добавка к дисперсии ошибки в установившемся режиме

$$\Delta D_{s0} = C_1^2 T_1^2 + \frac{C^2 T_1^2}{1 + \beta T_1} - \sigma^2 \frac{3T_1}{2}. \tag{8.27}$$

При больших значениях t и не слишком больших значениях T_1 относительный удельный вес этой добавки невелик.

Для случая работы навигационной системы в режиме управления по координате в результате пересчета передаточной функции замкнутой системы по формуле (3.13) приходим к требованию

$$K_s^*(j\omega) = K_s^* \to \infty. \tag{8.28}$$

Таким образом, в этом случае желательно, чтобы весь контур управления представлял собой возможно более точную следящую систему. Однако практически нет необходимости вводить очень большой коэффициент усиления через обратную связь. Рассмотрим, каковы будут ошибки системы, если $K_s^*(j\omega) = K_s^*$ — конечная величина. В этом случае вместо выражения (8.23) при больших значениях t справедливо выражение

$$D_s(t) = \left(\frac{K_s^*}{1+K_s^*}\right)^2 (\sigma^2 t + B^2 t^2) + \left(\frac{1}{1+K_s^*}\right)^2 \left(\frac{2C^2}{\beta} t + C_1^2 t^2\right). \tag{8.29}$$

Величину K_s^* следует выбирать такой, чтобы второе слагаемое оставалось меньше первого.

Для случая работы навигационной системы в режиме стабилизации скорости получаем:

$$K_v^*(j\omega) = \frac{\rho}{j\omega}. \tag{8.30}$$

8.2. Преобразование сигнала акселерометра астроинерциальной системы

В вычислительное устройство поступает сигнал акселерометра, ось чувствительности которого расположена в начальный момент горизонтально (с точностью до ошибки выставки). При движении объекта ось акселерометра удерживается с помощью визирных устройств, снабженных фотоследящими системами, в неизменном положении относительно инерциальной системы координат и, следовательно, поворачивается относительно текущей вертикали. Для астроинерциальной системы характерно, что ошибку акселерометра можно считать ста-

ционарной (см. § 2.8). Выражение выходного сигнала акселерометра имеет вид:

$$x(t) = \ddot{s}(t) + \Omega^2 s(t) + n_1(t) + n_2(t), \qquad (8.31)$$

где Ω — частота Шулера ($\Omega = 1{,}24 \cdot 10^{-3}$ 1/*сек*), $n_1(t)$ — флюктуационная составляющая ошибки, $n_2(t)$ — «систематическая» (медленно меняющаяся или постоянная) составляющая. Статистические свойства ошибки определяются корреляционными функциями

$$R_{n_1 n_1}(\tau_1, \tau_2) = \sigma^2 \delta(\tau_1 - \tau_2), \quad R_{n_2 n_2}(\tau_1, \tau_2) = B^2 e^{-\gamma|\tau_1 - \tau_2|}. \qquad (8.32)$$

При аналитическом рассмотрении астроинерциальных систем традиционными являются два подхода.

1. Из двух первых слагаемых сигнала (8.31) полезным считается второе, а первое рассматривается как помеха. Такая точка зрения обычна в морской навигации, где характерны малые ускорения движения основания, на котором находится прибор. В этом случае влияние ускорений можно сравнительно легко уменьшить до допустимого уровня, увеличивая постоянные времени приборов до нескольких минут. Поэтому до последнего времени в морской навигации распространены короткопериодические и апериодические вертикали, используемые в качестве базы для астроориентации. При этом подходе астроинерциальная система рассматривается по существу как вариант позиционного измерителя.

2. Из двух первых слагаемых выражения (8.31) полезным считается первое, а второе рассматривается как медленно меняющаяся помеха. Эта точка зрения распространена в ракетной технике, где действующие ускорения велики, а продолжительность работы системы мала. Основной задачей вычислительного устройства в этом случае считается операция двойного интегрирования. При этом прибор, естественно, теряет свойства позиционного измерителя: начальные ошибки в координате и скорости дают нарастающие ошибки счисления пути. Усложнение системы введением обратной связи (при этом система превращается в шулеровскую) обеспечивает «автокомпенсацию» второго слагаемого, т. е. дает полную инвариантность относительно закона движения

основания. Однако в этом случае ошибки от начальных ошибок если не возрастают, то и не затухают.

Подход к задаче с позиций теории преобразования случайных сигналов позволяет определить границы, до которых эти точки зрения можно считать правильными. Ниже рассматривается только задача определения координаты.

Выходной сигнал навигационной системы формируется следующим образом:

$$q(t)=m(t)+z(t), \qquad z(t)=\int_0^t W(t,\tau)x(\tau)d\tau. \quad (8.33)$$

Корреляционная функция сигнала $x(t)$ и взаимно корреляционная функция сигналов $x(t)$ и $s(t)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} R_{xx}(\tau_1,\tau_2)&=R_{\ddot{s}\ddot{s}}(\tau_1,\tau_2)+\Omega^2[R_{\ddot{s}s}(\tau_1,\tau_2)+R_{s\ddot{s}}(\tau_1,\tau_2)]+\\ &+\Omega^4R_{ss}(\tau_1,\tau_2)+R_{n_1n_1}(\tau_1,\tau_2)+R_{n_2n_2}(\tau_1,\tau_2)=\\ &=\Omega^4\left(C_0^2-\frac{C^2}{\beta^2}\right)+\Omega^4C_1^2\tau_1\tau_2+\frac{2\Omega^4C^2}{\beta}\min(\tau_1,\tau_2)+\\ &+\Omega^2C^2\left(1+\frac{\Omega^2}{\beta^2}\right)(e^{-\beta\tau_1}+e^{-\beta\tau_2})-\\ &-\beta^2C^2\left(1+\frac{\Omega^2}{\beta^2}\right)^2e^{-\beta|\tau_1-\tau_2|}+(2\beta C^2+\sigma^2)\delta(\tau_1-\tau_2)+\\ &+B^2e^{-\gamma|\tau_1-\tau_2|}, \end{aligned} \quad (8.34)$$

$$\begin{aligned} R_{sx}(\tau_1,\tau_2)&=R_{s\ddot{s}}(\tau_1,\tau_2)+\Omega^2R_{ss}(\tau_1,\tau_2)=\\ &=\Omega^2\left\{C_0^2+C_1^2\tau_1\tau_2+\frac{C^2}{\beta}\left[2\tau_2+\frac{1}{\beta}\left(-1+\left(1+\frac{\beta^2}{\Omega^2}\right)e^{-\beta\tau_1}+\right.\right.\right.\\ &\left.\left.\left.+e^{-\beta\tau_2}-\left(1+\frac{\beta^2}{\Omega^2}\right)e^{-\beta(t-\tau_1)}\right)\right]\right\}. \end{aligned} \quad (8.35)$$

Считается, что акселерометр включается в момент $t=+0$ (движение начинается в момент $t=-0$). Физически это соответствует предположению, что в момент старта и на интервале установления скорости (этот интервал считается пренебрежимо малым) акселерометр оставался выключенным. В этом случае принимается, что начальная скорость (строго говоря, в момент времени $t=+0$) вводится от посторонних источников информации

и ее ошибка характеризуется дисперсией $\overline{C_1^2}$. В реальной системе начальная скорость может быть получена от той же инерциальной системы, работающей в режиме интегрирования больших ускорений.

Решение интегрального уравнения оптимального фильтра при корреляционных функциях (8.34) и (8.35) может быть осуществлено обобщенным методом Заде — Рагаззини (§ 3.2). Будем считать «систематическую» составляющую ошибки постоянной (примем $\gamma=0$). В этом случае к интегральному уравнению следует применить дифференциальный оператор

$$Q\left(\frac{d}{d\tau_1}\right)=\frac{d^2}{d\tau_1^2}\left(\frac{d^2}{d\tau_1^2}-\beta^2\right). \tag{8.36}$$

В результате для искомой импульсной переходной функции получаем дифференциальное уравнение четвертого порядка:

$$\left(1+\frac{\sigma^2}{2\beta C^2}\right)\frac{d^4W}{d\tau_1^2}+\left(2\Omega^2-\frac{\beta\sigma^2}{2C^2}\right)\frac{d^2W}{d\tau_1^2}+\Omega^4W=0. \tag{8.37}$$

Практически всегда выполняется условие $\sigma^2 \ll 2\beta C^2$. Решение уравнения (8.37) имеет вид:

$$W(t,\ \tau)=\sum_{i=1}^{4}A_i(t)\,e^{\xi_i\tau}, \tag{8.38}$$

где ξ_i — корни уравнения

$$\xi^4\left(1+\frac{\sigma^2}{2\beta C^2}\right)+\xi^2\left(2\Omega^2-\frac{\beta\sigma^2}{2C^2}\right)+\Omega^4=0. \tag{8.39}$$

Постоянные A_i и множители λ_i, входящие в интегральное уравнение, находятся из условия его тождественного удовлетворения.

Результаты численного расчета среднеквадратичной ошибки в координате при оптимальном преобразовании сигнала акселерометра представлены на рис. 8.2. В целом характер изменения ошибок тот же, что и у позиционного измерителя (ср. с рис. 6.1). На начальном этапе ошибки совпадают с ошибками счисления пути по априорным данным; при достаточно больших значениях t среднеквадратичные ошибки стремятся к установившемуся значению, не зависящему от начальных условий.

Две крайние кривые, одна из которых соответствует точно известным начальной координате и начальной скорости ($C_0=0$, $C_1^*=0$), а другая соответствует преобразованию, несмещенному относительно детерминированных

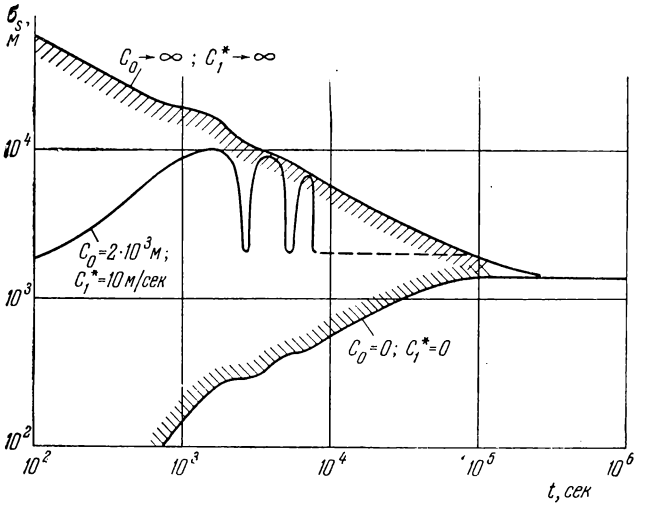

Рис. 8.2.

составляющих полезного сигнала ($C_0 \to \infty$, $C_1^* \to \infty$), определяют пределы изменения среднеквадратичных ошибок при произвольных C_0 и C_1^*. Как и в случае позиционного измерителя, предельные кривые сближаются с увеличением t. Однако масштаб времени здесь существенно иной. Если при типичном для самолета позиционном измерителе «переходный процесс» заканчивается за сотни секунд, то у типичной астроинерциальной системы он затягивается до 10^5 *сек*. Это означает, что для астроинерциальной системы обычно такое положение, когда точность установки начальных условий имеет значение в течение всего времени движения объекта, а установившийся режим так и не достигается. По-видимому, рассмотрение установившегося режима может представить интерес только для корабельных инерциальных навигационных систем.

Для расчета оптимального фильтра на начальном этапе (при $t<1/\beta$) будем использовать приближенные выражения корреляционных функций, получающиеся после разложения последних в ряды по степеням τ_1 и τ_2. Считая β малым параметром, ограничимся слагаемыми первого порядка малости. Получаем:

$$R_{xx}(\tau_1, \tau_2) \approx \Omega^4 C_0^2 + \Omega^4 C_1^2 \tau_1 \tau_2 - \beta\Omega^2 C^2 (\tau_1 + \tau_2) + \\ + 2\beta\Omega^2 C^2 |\tau_1 - \tau_2| + (2\beta C^2 + \sigma^2)\,\delta(\tau_1 - \tau_2), \quad (8.40)$$

$$R_{sx}(\tau_1, \tau_2) \approx \Omega^2 C_0^2 + \Omega^2 C_1^2 \tau_1 \tau_2 - \beta C^2 \tau_2. \quad (8.41)$$

Здесь и в дальнейшем считаем, что «систематическая» ошибка отсутствует ($B=0$). Заметим, что здесь нельзя ограничиться слагаемыми нулевого порядка малости (как при рассмотрении позиционного измерителя), поскольку при этом задача теряет свою специфику и, как будет ясно из дальнейшего, получаются существенно неверные результаты. Применим к интегральному уравнению, в которое подставлены выражения (8.40) и (8.41), дифференциальный оператор

$$Q\left(\frac{d}{d\tau_1}\right) = \frac{d^2}{d\tau_1^2}. \quad (8.42)$$

Получим дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\left(1 + \frac{\sigma^2}{2\beta C^2}\right)\frac{d^2 W}{d\tau_1^2} + 2\Omega^2 W = 0. \quad (8.43)$$

Его решение имеет вид:

$$W(t, \tau) = A_1(t)\cos\xi\tau + A_2(t)\sin\xi\tau, \quad (8.44)$$

где

$$\xi = \Omega\left(\frac{1}{2} + \frac{\sigma^2}{4\beta C^2}\right)^{-1/2}. \quad (8.45)$$

При условиях $\beta<\Omega$ и $\sigma^2 \ll 2\beta C^2$ приближенно получаем:

$$\xi \approx \Omega\sqrt{2}. \quad (8.46)$$

Таким образом, искомый фильтр представляет собой недемпфированное колебательное звено, собственная частота которого, вопреки тому, что можно было ожидать,

не равна частоте Шулера. При приведенных упрощениях постоянные $A_1(t)$ и $A_2(t)$, которые должны быть определены из условия тождественного удовлетворения интегрального уравнения, не могут быть получены в общем виде.

При достаточно малых значениях t (при $t<1/\Omega$) искомая импульсная переходная функция (8.44) может быть аппроксимирована линейной функцией

$$W(t, \tau) = A_1(t) + A_2(t)\tau. \tag{8.47}$$

Можно ожидать, что это выражение может быть получено из интегрального уравнения путем его дальнейшего упрощения. Действительно, сохранив в выражениях (8.41) и (8.40) слагаемые нулевого порядка малости, а также слагаемое $(2\beta C^2+\sigma^2)\delta(\tau_1-\tau_2)$ в выражении (8.40), получим следующее интегральное уравнение:

$$(2\beta C^2+\sigma^2)\int_0^t W(t, \tau_2)\delta(\tau_1-\tau_2)\,d\tau_2 = Z(t, \tau_1), \tag{8.48}$$

где

$$Z(t, \tau_1) = \lambda_1(t)C_0^2 + \lambda_2(t)\tau_1\overline{C_1^2} + [\lambda_2(t)-1]\tau_1 B_1^2, \tag{8.49}$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1(t) &= \Omega^2\left[1-\Omega^2\int_0^t W(t, \tau)\,d\tau\right], \\ \lambda_2(t) &= \Omega^2\left[1-\Omega^2\int_0^t \tau W(t, \tau)\,d\tau\right]. \end{aligned}\right\} \tag{8.50}$$

Вид интегрального уравнения в точности тот же, что и в задаче преобразования сигнала позиционного измерителя на начальном этапе (см. § 6.2), причем роль интенсивности помехи играет сумма $(2\beta C^2+\sigma^2)$. Следовательно, на малых интервалах времени астроинерциальная система обладает свойствами позиционного измерителя. Этот вывод соответствует той точке зрения, что в сигнале (8.31) акселерометра «полезным» является второе слагаемое.

При наложении условий несмещенности относительно детерминированных составляющих полезного сигнала ($C_0 \to \infty$, $C_1 \to \infty$) получаем:

$$W(t, \tau) = \frac{2}{\Omega^2 t}\left(\frac{3\tau}{t} - 1\right). \tag{8.51}$$

Дисперсия ошибки в этом случае приближенно равна:

$$D_s(t) \approx \frac{4}{\Omega^4 t}(2\beta C^2 + \sigma^2). \tag{8.52}$$

Важной качественной особенностью задачи является то, что дисперсия ошибки не обращается в нуль при $\sigma = 0$: задача оптимального преобразования сохраняет смысл и при отсутствии ошибок источника информации. Роль интенсивности дополнительной «помехи» играет величина $N = 2\beta C^2$. Как видно из рассмотрения рис. 8.3, на котором в логарифмической шкале изображена кривая спектральной плотности ускорения движения объекта (кривая имеет такой вид только для используемой модели движения со стационарной скоростью), N представляет собой интенсивность эквивалентного белого шума (при $\omega \gg \beta$ ускорение обладает свойствами белого шума). При этом на малых интервалах времени этот шум можно приближенно считать некоррелированным с полезным сигналом $[R_{s\ddot{s}}(\tau_1, \tau_2) \approx 0]$. Как было отмечено выше, практически всегда выполняется условие $\sigma^2 \ll 2\beta C^2$, т. е. уровень ошибок измерения ускорений ниже уровня самих ускорений. Поэтому при наложении условий $C_0 \to \infty$ и $C_1 \to \infty$, т. е. при больших ошибках в начальной координате и скорости, ошибки системы определяются исключительно уровнем ускорений движения объекта. Только при малых ускорениях (неподвижный надводный корабль, подводная лодка) дополнительная

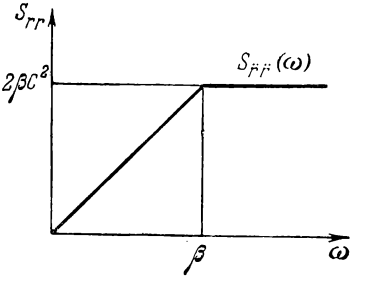

Рис. 8.3.

«помеха» мала и, следовательно, существует возможность быстрого определения достаточно точных значений координат астроинерциальной системой.

Если скорость движения пренебрежимо мала (за время t координата практически не изменяется), а начальное значение координаты известно с низкой точностью, то вместо двух условий несмещенности можно ввести условия $C_0 \to \infty$, $C_1 = 0$. В этом случае вместо выражений (8.51) и (8.52) получаем:

$$W(t, \tau) = \frac{1}{\Omega^2 t}, \tag{8.53}$$

$$D_s(t) \approx \frac{1}{\Omega^4 t}(2\beta C^2 + \sigma^2). \tag{8.54}$$

Следует иметь в виду, что для достаточно малых интервалов времени может оказаться неприемлемой используемая аппроксимация спектральной плотности ускорения. В частности, существенное значение могут иметь линейные ускорения, возникающие в результате угловых колебаний объекта. Примерный вид изменения спектральной плотности ускорений с учетом этого фактора показан на рис. 8.4 (пунктиром показан вид кривой при учете только случайных изменений скорости). Если $\omega^* t < 1$, то уточнение сведений о спектральной плотности ускорений необходимо, если $\omega^* t > 1$, то можно оставаться в рамках прежних упрощенных представлений.

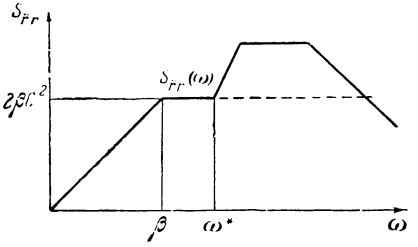

Рис. 8.4.

После начального этапа может быть легко рассчитан установившийся режим. Для установившегося режима оптимальное преобразование стационарно, а дисперсия ошибки постоянна. Полюсы передаточной функции оптимального фильтра представляют собой корни уравнения (8.39), имеющие отрицательные вещественные части. В зависимости от соотношения между пара-

метрами сигналов и соответственно от взаимного расположения кривых условных спектральных плотностей полезного сигнала и приведенной помехи оптимальный

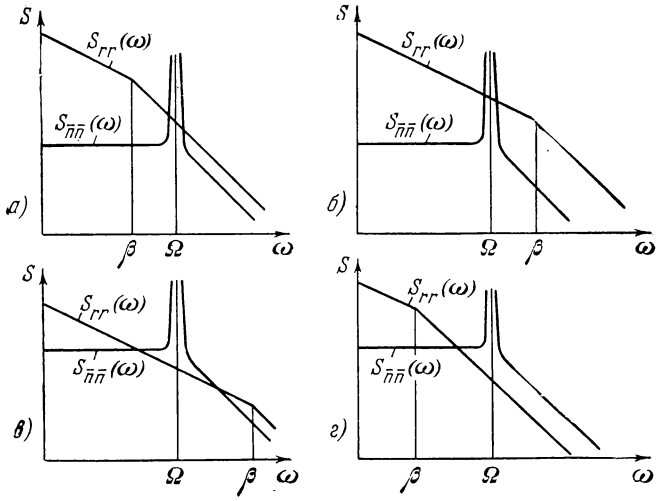

Рис. 8.5.

фильтр обладает разными свойствами. Всего возможно пять вариантов (рис. 8.5). Рассмотрим их последовательно.

1) $$\beta < \Omega, \qquad \sigma^2 < 2\beta C^2. \tag{8.55}$$

Этот случай (так же, как и последующий) характеризуется относительно высокой точностью инерциальной системы. Корни уравнения (8.39), имеющие отрицательные вещественные части, приближенно равны:

$$\xi_{1,2} \approx \Omega(-\nu \pm j) \qquad \left[\nu = \frac{1}{2}(2\beta)^{-1/2}\frac{\sigma}{C}\right]. \tag{8.56}$$

Передаточная функция оптимального фильтра имеет вид:

$$K(j\omega) = \frac{2\nu\Omega j\omega + \Omega^2}{\Omega^2[(j\omega)^2 + 2\nu\Omega j\omega + \Omega^2]}. \tag{8.57}$$

Таким образом, оптимальная система представляет собой колебательное слабо демпфированное звено с собственной частотой, равной частоте Шулера. Это звено легко реализуется на аналоговых элементах по обычной схеме (рис. 8.6). Обратная связь (изображенная на схеме электрической) может быть выполнена также механически (акселерометр поворачивается на угол, пропорциональный выходному сигналу второго интегратора).

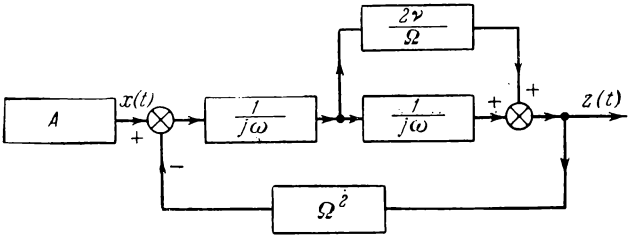

Рис. 8.6.

При этом получается классический вариант демпфированной астроинерциальной системы. Интересно, что именно такой способ осуществления демпфирования (введена дополнительная цепь, обходящая второй интегратор) ранее был предложен (см., например, [30]), исходя только из требования астатизма второго порядка. Здесь же такая структура получается только из требования минимума дисперсии ошибки.

Установившаяся дисперсия ошибки приближенно равна:

$$D_r \approx \frac{2(2\beta)^{1/2}}{\Omega^3} C\sigma. \tag{8.58}$$

Как и следовало ожидать, установившаяся дисперсия ошибки уменьшается с уменьшением σ. Однако это всегда связано с увеличением постоянной времени

$$T = (2\beta)^{1/2} \frac{2C}{\Omega\sigma}. \tag{8.59}$$

2) $$\beta > \Omega, \quad \sigma^2 < 2\beta C^2, \quad \beta\sigma^2 < 2\Omega^2 C^2. \tag{8.60}$$

Корни уравнения (8.39), имеющие отрицательные вещественные части, приближенно равны:

$$\xi_{1,2} \approx \Omega(-\nu \pm j) \qquad \left[\nu = \frac{1}{4\Omega}(2\beta)^{1/2}\frac{\sigma}{C}\right]. \tag{8.61}$$

Передаточная функция оптимального фильтра имеет вид (8.57), а установившаяся дисперсия ошибки приближенно равна:

$$D_r \approx \frac{4(2\beta)^{-1/2}}{\Omega^2} C\sigma. \tag{8.62}$$

Качественные особенности системы оказываются теми же, что и для варианта 1).

3) $$\beta > \Omega, \quad \sigma^2 > 2\beta C^2. \tag{8.63}$$

Этот случай (так же, как и последующие) имеет место при относительно низком уровне ускорений движения объекта. Единственный отрицательный корень уравнения (8.39), представляющий интерес, приближенно равен:

$$\xi_1 \approx -\rho \qquad \left[\rho = 2\Omega^2(2\beta)^{-1/2}\frac{C}{\sigma}\right]. \tag{8.64}$$

Передаточная функция фильтра в этом случае имеет первый порядок:

$$K(j\omega) = \frac{\rho}{j\omega + \rho}. \tag{8.65}$$

Дисперсия установившейся ошибки приближенно равна:

$$D_r \approx \frac{2(2\beta)^{-1/2}}{\Omega^2} C\sigma. \tag{8.66}$$

Таким образом, в этом случае оптимальная система далека от шулеровской и не является асимптотически несмещенной относительно детерминированной составляющей полезного сигнала. Если желательно получить несмещенность, то передаточную функцию (8.65) следует заменить на

$$K(j\omega) = \frac{(\rho + \mu)\, j\omega + \rho\mu}{(j\omega + \rho)(j\omega + \mu)}, \tag{8.67}$$

где $\mu \ll \rho$. Быстродействие фильтра оказывается низким и определяется постоянной времени $T = 1/\mu$.

4) $$\beta < \Omega, \quad \sigma^2 > 2\beta C^2. \tag{8.68}$$

Корни уравнения (8.39), имеющие отрицательные вещественные части, приближенно равны:

$$\xi_{1,2} \approx \rho(-1 \pm j) \qquad \left[\rho = \Omega\left(\frac{\beta}{2}\right)^{1/4} C^{1/2}\sigma^{-1/2}\right]. \tag{8.69}$$

В этом случае получаем:

$$K(j\omega) = \frac{2\rho j\omega + 2\rho^2}{(j\omega)^2 + 2\rho j\omega + 2\rho^2}, \tag{8.70}$$

$$D_r \approx \frac{3}{\Omega^3}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{1/4} C^{1/2}\sigma^{3/2}. \tag{8.71}$$

Оптимальный фильтр существенно отличается от шулеровской системы и обладает теми же свойствами, что и при позиционном измерителе (см. § 6.3). Быстродействие фильтра, как и в предыдущих случаях, определяется большой постоянной времени

$$T = \frac{1}{\Omega}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{-1/4} C^{-1/2}\sigma^{1/2}. \tag{8.72}$$

5) $$\beta > \Omega, \qquad \sigma^2 < 2\beta C^2, \qquad \beta\sigma^2 > 2\Omega^2 C^2. \tag{8.73}$$

В этом случае меньший по абсолютной величине корень уравнения (8.39) определяется выражением (8.64). Свойства оптимального фильтра в основном те же, что и у варианта 3).

Таким образом, в установившемся режиме оптимальный фильтр никогда не превращается в недемпфированную шулеровскую систему. При относительно высоком уровне ускорений движения основания оптимальная система является колебательной и близка к шулеровской, при низком — становится апериодической.

Для среднего интервала времени, на котором приближенные выражения (8.40) и (8.41) уже не годятся, а установившийся режим не достигнут, не удалось получить компактных выражений для импульсной переходной функции и дисперсии ошибки. Численные расчеты показывают, что при относительно больших значениях C_0 и C_1 общий характер изменения среднеквадратичной ошибки сохраняется тем же, что и на начальном этапе — ошибки убывают (не обязательно монотонно; рис. 8.2). Интересно отметить, что при уменьшении σ на большом

интервале времени ошибки не меняются, а происходит просто затягивание «переходного процесса» (рис. 8.7). Это означает, что при больших ошибках в выставке начальных условий точность самой инерциальной системы практически не влияет на точность выработки выходных данных.

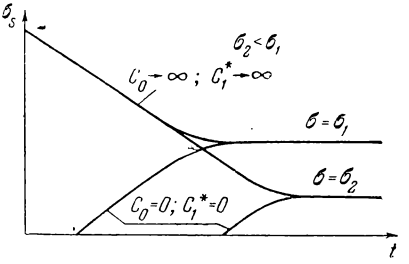

Рис. 8.7.

При малых значениях C_0 и C_1^* на всем интервале «переходного процесса» ошибки системы начинают существенно зависеть от величины σ. В предельном случае при $C_0=0$ и $C_1^*=0$ среднеквадратичная ошибка монотонно растет от нуля до установившегося значения. На рис. 8.8 представлены

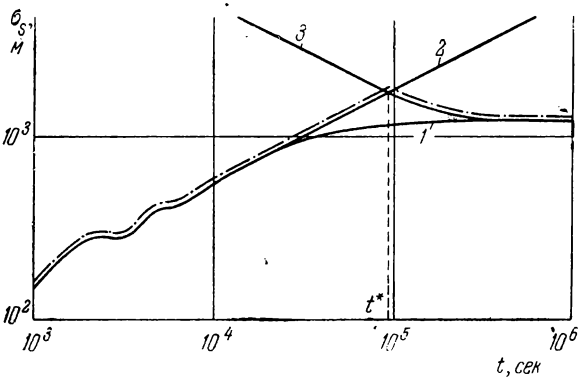

Рис. 8.8.

зависимости от t среднеквадратичных ошибок оптимального фильтра (кривая *1*) и недемпфированной шулеровской системы с передаточной функцией

$$K(j\omega)=\frac{1}{(j\omega)^2+\Omega^2} \tag{8.74}$$

(кривая *2*). Среднеквадратичная ошибка последней неограниченно нарастает со временем. Однако на достаточно большом интервале времени $(0, t^*)$ кривые практически совпадают. Величина t^* тем больше, чем меньше σ. Отсюда следует, что распространенная точка зрения о целесообразности применения недемпфированной шулеровской системы оказывается оправданной для не слишком больших интервалов времени и при достаточно точной выставке начальных условий.

Дисперсия ошибки недемпфированной шулеровской системы, инвариантной по отношению к закону движения объекта, с учетом постоянной ошибки акселерометра определяется выражением [35]

$$D_s(t) = C_0^2 \cos^2 \Omega t + \frac{\overline{C}_1^2}{\Omega^2} \sin^2 \Omega t + \\ + \frac{\sigma^2}{4\Omega^2}\left(2t - \frac{1}{\Omega}\sin 2\Omega t\right) + \frac{B^2}{\Omega^4}(1 - \cos \Omega t)^2. \quad (8.75)$$

При малых значениях t (при $t < \frac{1}{\Omega}$) приближенно получаем:

$$D_s(t) \approx C_0^2 + \overline{C}_1^2 t^2 + \frac{\sigma^2 t^3}{24} + B^2 \frac{t^4}{4}, \quad (8.76)$$

а при больших —

$$D_s(t) \approx \frac{\sigma^2 t}{2\Omega^2}. \quad (8.77)$$

Если система предназначена для непрерывной работы в течение длительного времени, то близкой к оптимальной будет простая схема с переменной структурой, состоящая из двух звеньев: первое — с передаточной функцией (8.74), а второе — с одной из передаточных функций (8.57), (8.70) или (8.65). На рис. 8.8 штрихпунктирная кривая показывает изменение среднеквадратичной ошибки на выходе системы, кривая *3* — на выходе демпфированного звена, оптимального для установившегося режима.

Предположим теперь, что астроинерциальная система работает в режиме управления. Ограничимся рассмотрением случая, когда выполнены условия (8.55). Тогда передаточной функцией замкнутой системы дол-

жна быть функция (8.57). Используя простейшую аппроксимацию (2.1) передаточной функции объекта, по формуле (3.13) получаем очень простое выражение для передаточной функции фильтра для замкнутой системы:

$$K^*(j\omega) = \frac{1}{2\nu\Omega}. \tag{8.78}$$

Этот результат представляет большой интерес. Оказывается, чтобы получить в замкнутой системе затухающие колебания с частотой Шулера и при этом получить передаточную функцию (8.57), достаточно в автопилот в качестве корректирующего сигнала ввести непосредственно сигнал акселерометра, ось чувствительности которого стабилизирована в инерциальном пространстве. Интеграторы, охваченные обратной связью, в этом случае не нужны: шулеровский колебательный контур здесь образуется всей замкнутой системой. Интересно, что для получения меньшего коэффициента демпфирования нужно увеличивать K^*, т. е. усиливать обратную связь в замкнутом контуре управления. При достаточно больших значениях K^* система становится практически недемпфированной.

На своеобразие свойств инерциальной системы, работающей в режиме управления, обращалось внимание, например, в работе [5], где было получено, что при включении инерциальной системы с демпфирующей связью в замкнутую систему демпфирование исчезает. Результат, полученный выше, показывает, что демпфирование в замкнутой системе достигается гораздо проще, чем это можно было предположить.

В сигнале акселерометра, установленного на реальном объекте, бывает сильно выражена высокочастотная часть спектра. Выясним, к чему приведет использование сглаживания этого сигнала фильтром первого порядка с передаточной функцией:

$$Y(j\omega) = \frac{1}{Tj\omega + 1}. \tag{8.79}$$

При том же передаточном коэффициенте (8.78) вместо выражений (8.56) получаем следующие приближенные выражения:

$$\xi_{1,2} \approx \Omega[-\nu \pm j(1 - \nu\Omega T)]. \tag{8.80}$$

Отсюда следует, что влияние сглаживания на динамику замкнутой системы будет малым, если будет выполнено условие

$$2\nu\Omega T \ll 1. \tag{8.81}$$

Та же оценка справедлива и по отношению к постоянной времени T_1 объекта при аппроксимации его передаточной функции выражением (2.2).

8.3. Преобразование сигнала акселерометра гироинерциальной системы

В отличие от астроинерциальной системы в гироинерциальной системе ошибка существенно нестационарна; ее свойства определяются корреляционной функцией

$$R_{nn}(\tau_1, \tau_2) = \sigma^2\delta(\tau_1 - \tau_2) + B_0^2 + B_1^2\tau_1\tau_2 + \\ + \frac{B^2}{\gamma}\left[2\min(\tau_1, \tau_2) + \frac{1}{\gamma}(-1 + e^{-\gamma\tau_1} + e^{-\gamma\tau_2} - e^{-\gamma|\tau_1-\tau_2|})\right]. \tag{8.82}$$

Первое слагаемое определяет стационарную часть (шум акселерометра), второе — ошибку в начальной выставке, остальные — нестационарную часть, обусловленную уходом гироскопа. Интегральное уравнение оптимального фильтра решается, как обычно, обобщенным методом Заде — Рагаззини. К интегральному уравнению оптимального фильтра следует применить оператор

$$Q\left(\frac{d}{d\tau_1}\right) = \frac{d^2}{d\tau_1^2}\left(\frac{d^2}{d\tau_1^2} - \beta^2\right)\left(\frac{d^2}{d\tau_1^2} - \gamma^2\right). \tag{8.83}$$

В результате искомая импульсная переходная функция записывается следующим образом:

$$W(t, \tau) = \sum_{i=1}^{6} A_i(t)\, e^{\xi_i\tau}, \tag{8.84}$$

где ξ_i — корни уравнения

$$\xi^6\left(1 + \frac{\sigma^2}{2\beta C^2}\right) + \xi^4\left[2\Omega^2 - \gamma^2 - \frac{\sigma^2}{2\beta C^2}(\beta^2 + \gamma^2)\right] + \\ + \xi^2\left(\Omega^4 - 2\gamma^2\Omega^2 + \frac{\gamma B^2}{\beta C^2} + \frac{\beta\gamma^2\sigma^2}{2C^2}\right) - \left(\gamma^2\Omega^4 + \frac{\beta\gamma B^2}{C^2}\right) = 0. \tag{8.85}$$

На рис. 8.9 сплошными линиями изображены кривые *1* и *3* среднеквадратичных ошибок оптимальной гироинерциальной системы для различных значений параметров сигналов (здесь и далее для простоты считаем медленно меняющуюся составляющую скорости ухода гироскопа постоянной). На том же графике для сравнения

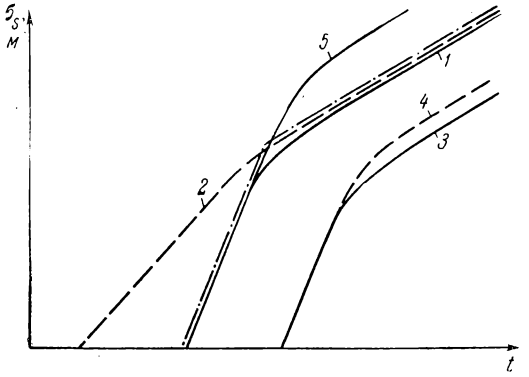

Рис. 8.9.

пунктиром показана ошибка определения координаты по начальным условиям (кривая *2*). Для гироинерциальной системы характерно неограниченное нарастание ошибок во времени. При малых значениях t, если достаточно точно известна начальная скорость, гироинерциальная система дает всегда лучшие результаты, чем счисление пути по начальным условиям. Однако при больших B_1 и B ошибки оптимальной гироинерциальной системы скоро становятся практически равными ошибкам счисления пути по начальным условиям (кривые *1* и *2*). Смысл этого результата очевиден: при большой скорости ухода гироскопа ошибка гироинерциальной системы быстро нарастает, так что ее сигнал несет мало полезной информации даже по сравнению с исходными начальными данными. Существенным является то обстоятельство, что при не очень малых t структура ошибок гироинерциальной системы и системы экстраполяции координаты по начальным условиям практически

одинакова, поэтому не существует объективных возможностей заметного повышения точности.

При больших t скорость нарастания ошибок гироинерциальной системы определяется в основном детерминированной составляющей помехи (постоянной скоростью ухода гироскопа). Напомним, что в астроинерциальной системе без демпфирования неограниченный рост ошибок происходил из-за воздействия недетерминированной составляющей помехи.

Легко получить, что ошибки гироинерциальной системы при достаточно больших t меньше ошибок экстраполяции по начальным условиям, если $B_1 < \Omega^2 C_1$. В идеальном случае отсутствия постоянной составляющей ухода гироскопа ($B_1 = 0$) ошибки при оптимальном преобразовании также неограниченно нарастают.

Если сравнить это с идеальным случаем ($C_1 = 0$) задачи экстраполяции координаты по начальным условиям, то получится, что гироинерциальная система дает лучшие результаты при условии $B < \Omega^2 \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{1/2} C$.

При малых t, как и в случае астроинерциальной системы, стационарный шулеровский контур с передаточной функцией (8.74) дает результаты, весьма близкие к оптимальным.

Для больших t оптимальный фильтр стационарен, но не является инвариантным относительно полезного сигнала; при условиях $B^2 < \beta\gamma\Omega^2 C^2$, $\gamma\Omega^2\sigma^2 < 2B^2$ его передаточная функция имеет вид:

$$K(j\omega) = \frac{2\nu\Omega j\omega + \Omega^2}{\Omega^2 [(j\omega)^2 + 2\nu\Omega j\omega + \Omega^2]}, \tag{8.86}$$

где

$$\nu = \frac{(\beta\gamma)^{1/2} C}{2\Omega^3 B}. \tag{8.87}$$

Следовательно, как и для вариантов 1) и 2) астроинерциальной системы, оптимальное преобразование осуществляет слабо демпфированное звено с собственной частотой, равной частоте Шулера. Но в то время как в астроинерциальной системе демпфирование было существенно необходимо, так как обеспечивало ограниченность дисперсии ошибки, здесь оно мало изменяет

результаты (на рис. 8.9 пунктирная кривая *4*). Действительно, при больших t для невозмущаемой шулеровской системы [передаточная функция (8.74)] приближенно получаем:

$$D_s(t) \approx \frac{3B^2t}{\gamma\Omega^3} + \frac{1}{\Omega^4} B_1^2 t^2, \tag{8.88}$$

а для оптимально демпфированной системы [передаточная функция (8.86)] —

$$D_s(t) \approx \frac{2B^2t}{\gamma\Omega^3} + \frac{1}{\Omega^4} B_1^2 t^2. \tag{8.89}$$

Даже при $B_1=0$ выигрыш в среднеквадратичной ошибке составляет всего 22%. При $B_1 \neq 0$ он еще меньше.

Таким образом, при достаточно точной выставке начальных условий близкими к оптимальным являются следующие режимы работы системы:

1) При $B_1 > \Omega^2 C_1$ и $\beta^{1/2}B > \gamma^{1/2}\Omega^2 C$ (низкое качество гироскопов) производится сначала несмещенное преобразование сигнала акселерометра с передаточной функцией (8.74) (изменение ошибки происходит по кривой *5* на рис. 8.9), а затем экстраполяция координаты по начальным условиям. Изменение среднеквадратичной ошибки в этом случае происходит так, как показывает на рис. 8.9 штрих-пунктирная кривая. Момент перехода от одного способа к другому определяется пересечением кривой *5* (среднеквадратичная ошибка невозмущаемой гироинерциальной системы) и кривой *2* (среднеквадратичная ошибка экстраполяции по начальным условиям).

2) При $B_1 < \Omega^2 C_1$ и $\beta^{1/2}B < \gamma^{1/2}\Omega^2 C$ (высокое качество гироскопов) при любых t невозмущаемая система близка к оптимальной. Изменение среднеквадратичной ошибки в этом случае также показано на рис. 8.9 (кривая *4*). Проигрыш в точности по сравнению с оптимальной демпфированной системой (кривая *3*) даже при больших t невелик. Для этого второго случая общий характер оптимального решения тот же, что и для задачи счисления пути по сигналу измерителя скорости: близким к оптимальному оказывается преобразование, инвариантное относительно полезного сигнала.

ГЛАВА 9

ОПТИМАЛЬНОЕ СОВМЕСТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛОВ ПОЗИЦИОННОГО ИЗМЕРИТЕЛЯ И ИЗМЕРИТЕЛЯ СКОРОСТИ

Простейшей задачей комплексирования двух источников информации является рассмотренная здесь задача обработки непрерывных сигналов позиционного измерителя и измерителя скорости. Импульсные переходные функции фильтров находятся из системы двух интегральных уравнений. Исследование решения дало возможность выделить несколько этапов работы фильтра, причем последний этап характеризует собой установившийся режим, а предыдущие — «переходный процесс». Сравнение с результатами, полученными в главе 6 и § 8.1, позволяет установить выгоду от комплексирования.

Наиболее подробно исследован установившийся режим. Оказывается, что совместное преобразование обоих сигналов целесообразно лишь при выполнении определенных соотношений между параметрами сигналов. В этом случае из решения вытекает требование инвариантности системы относительно полезного сигнала. В результате применения метода логарифмических характеристик получены простые выражения для дисперсии ошибки и постоянных времени фильтров. В заключение рассмотрена задача о коррекции постоянно работающей системы счисления пути за счет использования сигнала позиционного измерителя, включенного в течение малого интервала времени.

В этой главе и далее рассматривается только задача определения координаты.

9.1. Одновременная работа измерителей. Общее решение

Примем, что позиционный измеритель и измеритель скорости включаются одновременно в момент времени $t=0$ и непрерывно работают вплоть до текущего момента t. Выходной сигнал навигационной системы формируется следующим образом:

$$q(t)=m(t)+z(t), \quad z(t)=\int_0^t W_1(t,\tau)x_1(\tau)\,d\tau+ \\ +\int_0^t W_2(t,\tau)x_2(\tau)\,d\tau, \qquad (9.1)$$

где $W_1(t,\tau)$ и $W_2(t,\tau)$ — импульсные переходные функции фильтров, подлежащие определению, $x_1(t)$ — сигнал позиционного измерителя, а $x_2(t)$ — сигнал измерителя скорости, причем

$$x_1(t)=s(t)+n_1(t), \qquad x_2(t)=\dot{s}(t)+n_2(t). \qquad (9.2)$$

Предполагаем, что ошибки в обоих каналах статистически независимы, «систематические» составляющие ошибок постоянны, а флюктуационные составляющие представляют собой белые шумы. При этом статистические свойства сигналов будут определяться системой корреляционных функций:

$$\left.\begin{aligned} R_{x_1x_1}(\tau_1,\tau_2)&=R_{ss}(\tau_1,\tau_2)+B_1^2+\sigma_1^2\delta(\tau_1-\tau_2),\\ R_{x_2x_2}(\tau_1,\tau_2)&=R_{\dot{s}\dot{s}}(\tau_1,\tau_2)+B_2^2+\sigma_2^2\delta(\tau_1-\tau_2),\\ R_{x_1x_2}(\tau_1,\tau_2)&=R_{sx_2}(\tau_1,\tau_2)=R_{s\dot{s}}(\tau_1,\tau_2),\\ R_{sx_1}(\tau_1,\tau_2)&=R_{ss}(\tau_1,\tau_2). \end{aligned}\right\} \qquad (9.3)$$

Корреляционные функции $R_{ss}(\tau_1,\tau_2)$ и $R_{s\dot{s}}(\tau_1,\tau_2)$ для случая движения со стационарной скоростью определяются соответственно выражениями (2.38) и (5.30).

Из условия минимума дисперсии ошибки в момент времени t получаем следующую систему интегральных

уравнений относительно искомых импульсных переходных функций (см. § 4.1):

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^t W_1(t,\tau_2)R_{x_1x_1}(\tau_1,\tau_2)d\tau_2+\\
&\qquad+\int_0^t W_2(t,\tau_2)R_{x_1x_2}(\tau_1,\tau_2)d\tau_2=R_{sx_1}(t,\tau_1),\\
&\int_0^t W_1(t,\tau_2)R_{x_2x_1}(\tau_1,\tau_2)d\tau_2+\\
&\qquad+\int_0^t W_2(t,\tau_2)R_{x_2x_2}(\tau_1,\tau_2)d\tau_2=R_{sx_2}(t,\tau_1)\\
&\qquad\qquad(0\leqslant\tau_1\leqslant t).
\end{aligned}\right\}\quad(9.4)$$

Чтобы сделать возможным применение обобщенного метода Заде — Рагаззини, эту систему уравнений следует переписать следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^t W_1(t,\tau_2)\Big\{\frac{C^2}{\beta}\Big[2\min(\tau_1,\tau_2)+\\
&\qquad+\frac{1}{\beta}(-1+e^{-\beta\tau_1}+e^{-\beta\tau_2}-e^{-\beta|\tau_1-\tau_2|})\Big]+\\
&+\sigma_1^2\delta(\tau_1-\tau_2)\Big\}d\tau_2+\int_0^t W_2(t,\tau_2)\Big\{\frac{C^2}{\beta}[1-e^{-\beta\tau_2}+\\
&\qquad+(1-e^{-\beta|\tau_1-\tau_2|})\operatorname{sgn}(\tau_1-\tau_2)]\Big\}d\tau_2=Z_1(t,\tau_1),\\
&\int_0^t W_1(t,\tau_2)\Big\{\frac{C^2}{\beta}[1-e^{-\beta\tau_1}+\\
&\qquad+(1-e^{-\beta|\tau_1-\tau_2|})\operatorname{sgn}(\tau_1-\tau_2)]\Big\}d\tau_2+\\
&+\int_0^t W_2(t,\tau_2)[C^2e^{-\beta|\tau_1-\tau_2|}+\sigma_2^2\delta(\tau_1-\tau_2)]\,d\tau_2=\\
&\qquad\qquad=Z_2(t,\tau_1),
\end{aligned}\right\}\quad(9.5)$$

$$\left.\begin{aligned} Z_1(t,\tau_1) &= \lambda_1(t)C_0^2+[\lambda_2(t)+\lambda_3(t)]\tau_1C_1^2+\lambda_4(t)B_1^2+\\ &+\frac{C^2}{\beta}\left[2\tau_1+\frac{1}{\beta}(-1+e^{-\beta t}+e^{-\beta\tau_1}-e^{-\beta(t-\tau_1)})\right],\\ Z_2(t,\tau_1) &= [\lambda_2(t)+\lambda_3(t)]C_1^2+\lambda_3(t)B_2^2+C^2e^{-\beta(t-\tau_1)}, \end{aligned}\right\} \quad (9.5)$$

где

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1(t) &= 1-\int_0^t W_1(t,\tau)\,d\tau,\\ \lambda_2(t) &= t-\int_0^t \tau W_1(t,\tau)\,d\tau,\\ \lambda_3(t) &= -\int_0^t W_2(t,\tau)\,d\tau, \qquad \lambda_4(t)=\lambda_1(t)-1. \end{aligned}\right\} \quad (9.6)$$

Из рассмотрения выражений условных спектральных плотностей сигналов получаем, что к интегральным уравнениям (9.5) следует применить дифференциальный оператор

$$Q\left(\frac{d}{d\tau_1}\right)=\frac{d^2}{d\tau_1^2}\left(\frac{d^2}{d\tau_1^2}-\beta^2\right). \quad (9.7)$$

В результате получается система двух дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \left(\sigma_1^2\frac{d^4W_1}{d\tau_1^4}-\sigma_1^2\beta^2\frac{d^2W_1}{d\tau_1^2}+2\beta C^2W_1\right)+2\beta C^2W_2=0,\\ 2\beta C^2W_1+\left(-\sigma_2^2\frac{d^2W_2}{d\tau_1^2}+2\beta C^2W_2\right)=0. \end{aligned}\right\} \quad (9.8)$$

Решение этой системы записывается в виде

$$W_1(t,\tau)=\sum_{i=1}^4 A_i^{(1)}(t)e^{\xi_i\tau}, \quad W_2(t,\tau)=\sum_{i=1}^4 A_i^{(2)}(t)e^{\xi_i\tau}, \quad (9.9)$$

где ξ_i — корни характеристического уравнения

$$\xi^4-\left(\beta^2+\frac{2\beta C^2}{\sigma_2^2}\right)\xi^2+\frac{2\beta C^2(\beta^2\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{\sigma_1^2\sigma_2^2}=0. \quad (9.10)$$

Коэффициенты $A_i(t)$ и множители $\lambda_i(t)$ определяются из условия тождественного удовлетворения системы интегральных уравнений (9.5). При решении могут быть наложены условия несмещенности относительно начального значения координаты ($C_0 \to \infty$), средней скорости ($C_1 \to \infty$), постоянной ошибки позиционного измерителя ($B_1 \to \infty$) и постоянной ошибки измерителя скорости ($B_2 \to \infty$). Эти условия можно использовать в различных комбинациях, имея, однако, в виду, что условия $C_0 \to \infty$ и $B_1 \to \infty$ несовместимы.

На рис. 9.1 представлены результаты численного расчета среднеквадратичной ошибки. Сплошные кривые *1*

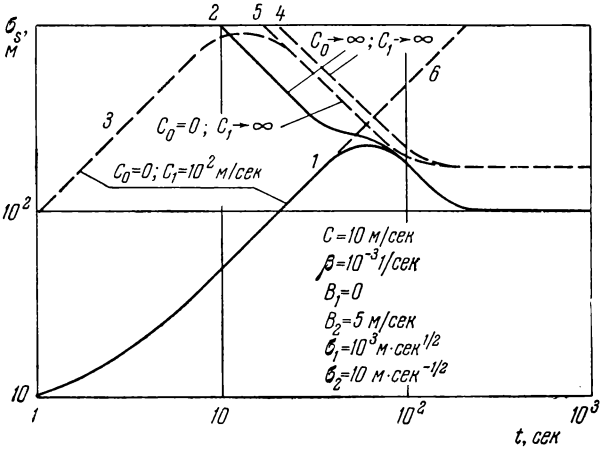

Рис. 9.1.

и *2* относятся к рассматриваемой оптимальной комплексной системе. Как и в случае использования сигнала только позиционного измерителя (ср. с § 6.1), на первом этапе (на рис. 9.1 примерно до 50 *сек*) ошибки существенно зависят от априорных данных (от значений C_0 и C_1). При условиях несмещенности относительно детерминированных составляющих полезного сигнала ($C_0 \to \infty, C_1 \to \infty$) ошибка монотонно уменьшается, стремясь к установившемуся значению; при малых значениях C_0 она сначала возрастает, достигает максимума, а затем

также стремится к установившемуся значению. При $B_1=0$ установившаяся среднеквадратичная ошибка не зависит от C_0, C_1 и B_2.

Для выяснения качественных особенностей двухканальной системы на рис. 9.1 изображены кривые среднеквадратичных ошибок одноканальных систем (*3*, *4* и *5* — для позиционного измерителя, *6* — для измерителя скорости). Как и следовало ожидать, при любых фиксированных C_0 и C_1 и при любом t оптимальная двухканальная система лучше любой одноканальной. Однако относительная выгода получается различной в зависимости от условий. Для $C_0=0$ на начальном этапе ошибки комплексной системы и одноканальной системы с измерителем скорости практически совпадают (кривые *1* и *6*). В то же время на этом интервале выигрыш по сравнению со случаем использования только позиционного измерителя (кривая *3*) оказывается значительным. Для несмещенного преобразования на начальном этапе и в установившемся режиме двухканальная система также существенно точнее одноканальной. Чтобы получить достаточно простые алгоритмы преобразования данных, удобные для практической реализации, и одновременно простые выражения дисперсии ошибки, целесообразно находить решения отдельно для начального этапа и для установившегося режима.

9.2. Начальный участок

При достаточно малых t могут быть использованы следующие выражения, представляющие собой первые слагаемые разложения корреляционных функций в ряды по степеням τ_1 и τ_2:

$$\left.\begin{aligned} R_{ss}(\tau_1, \tau_2) \approx C_0^2 + \bar{C}_1^2\tau_1\tau_2, \qquad R_{s\dot{s}}(\tau_1, \tau_2) \approx \bar{C}_1^2\tau_1, \\ R_{\dot{s}\dot{s}}(\tau_1, \tau_2) \approx \bar{C}_1^2. \end{aligned}\right\} \tag{9.11}$$

В этом случае интегральные уравнения (9.5) вырождаются. В результате решения получающихся таким образом алгебраических уравнений получаем следующие выражения для искомых импульсных переходных функций:

$$W_1(t, \tau) = \mu_1(t) + \mu_2(t)\tau, \qquad W_2(t, \tau) = \mu_3(t), \tag{9.12}$$

причем коэффициенты μ_1, μ_2 и μ_3 находятся из системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \mu_1(\sigma_1^2+C_0^2t+B_1^2t)+\mu_2(C_0^2+B_1^2)\frac{t^2}{2}=C_0^2,\\ \mu_1\bar{C}_1^2\frac{t^2}{2}+\mu_2\left(\sigma_1^2+\bar{C}_1^2\frac{t^3}{3}\right)+\mu_3\bar{C}_1^2t=\bar{C}_1^2t,\\ \mu_2\sigma_1^2-\mu_3(\sigma_2^2+B_2^2t)=0. \end{aligned}\right\} \quad (9.13)$$

Рассмотрим два частных случая, представляющих наибольший интерес.

1. Преобразование является несмещенным относительно детерминированных составляющих полезного сигнала ($C_0\to\infty$, $C_1\to\infty$). В этом случае

$$\left.\begin{aligned} \mu_1(t)=\frac{12\sigma_1^2-2t^2(\sigma_2^2+B_2^2t)}{t\left[12\sigma_1^2+t^2(\sigma_2^2+B_2^2t)\right]},\\ \mu_2(t)=\frac{6(\sigma_2^2+B_2^2t)}{12\sigma_1^2+t^2(\sigma_2^2+B_2^2t)},\\ \mu_3(t)=\frac{6\sigma_1^2}{12\sigma_1^2+t^2(\sigma_2^2+B_2^2t)}. \end{aligned}\right\} \quad (9.14)$$

Дисперсия ошибки при этом равна:

$$D_s(t)=\frac{\sigma_1^2\left[12\sigma_1^2+4t^2(\sigma_2^2+B_2^2t)\right]}{t\left[12\sigma_1^2+t^2(\sigma_2^2+B_2^2t)\right]}+B_1^2. \quad (9.15)$$

При очень малых значениях t (при $t<4\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ и $t<3\sigma_1^{2/3}B_2^{-2/3}$) приближенно получаем:

$$\mu_1(t)\approx\frac{1}{t},\qquad \mu_2(t)\approx\frac{1}{2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2},\qquad \mu_3(t)\approx\frac{1}{2}; \quad (9.16)$$

$$D_s(t)\approx\frac{\sigma_1^2}{t}+B_1^2. \quad (9.17)$$

Фильтр с такой импульсной переходной функцией легко реализуем. Отметим, что дисперсия ошибки не зависит от σ_2 и B_2 (при этом, однако, следует иметь в виду, что при увеличении σ_2 и B_2 сокращается интервал

времени, на котором это выражение справедливо). Интересно отметить, что использование сигнала скорости снижает вчетверо составляющую дисперсии ошибки, обусловленную флюктуационной составляющей ошибки позиционного измерителя [ср. выражение (9.17) с (6.32)].

При не очень малых t (при $t > 4\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$) вместо выражения (9.17) получаем:

$$D_s(t) \approx \frac{4\sigma_1^2}{t} + B_1^2, \tag{9.18}$$

т. е. выигрыш от введения сигнала измерителя скорости практически пропадает. Однако нужно учитывать, что при больших значениях t выражение (9.18) перестает быть справедливым (дисперсия ошибки стремится к установившемуся значению, зависящему от соотношения мощностей недетерминированных составляющих полезного сигнала и помехи).

2. Начальное значение координаты точно известно, преобразование является несмещенным относительно средней скорости ($C_0=0$, $C_1\to\infty$). В этом случае

$$\left.\begin{aligned} \mu_2(t) &= \frac{12\left(\sigma_1^2+B_1^2t\right)\left(\sigma_2^2+B_2^2t\right)}{t^2\left(\sigma_2^2+B_2^2t\right)\left(4\sigma_1^2+B_1^2t\right)+12\sigma_1^2\left(\sigma_1^2+B_1^2t\right)}, \\ \mu_1(t) &= -\frac{B_1^2\frac{t^2}{2}}{\sigma_1^2+B_1^2t}\mu_2(t), \qquad \mu_3(t) = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2+B_2^2t}\mu_2(t); \end{aligned}\right\} \tag{9.19}$$

$$D_s(t) = \frac{6\sigma_1^2t\left(2\sigma_1^2+B_1^2t\right)\left(\sigma_2^2+B_2^2t\right)}{t^2\left(\sigma_2^2+B_2^2t\right)\left(4\sigma_1^2+B_1^2t\right)+12\sigma_1^2\left(\sigma_1^2+B_1^2t\right)}. \tag{9.20}$$

Дисперсия ошибки имеет конечный предел при $B_1\to\infty$. При этом условии получаем:

$$D_s(t) = \frac{6\sigma_1^2t\left(\sigma_2^2+B_2^2t\right)}{t^2\left(\sigma_2^2+B_2^2t\right)+12\sigma_1^2}. \tag{9.21}$$

Если $B_1\neq\infty$, то при достаточно больших значениях t может быть получено $D_s(t) < B_1^2$. Этим второй случай отличается от первого. Там постоянная составляющая

ошибки позиционного измерителя принципиально не могла быть уменьшена.

При малых значениях t выражение (9.21) переходит в более простое:

$$D_s(t) \approx \frac{1}{2}\sigma_2^2 t. \tag{9.22}$$

При больших значениях t [предполагается, что исходные упрощенные выражения (9.11) можно считать справедливыми] получаем:

$$D_s(t) \approx \frac{6\sigma_1^2}{t}. \tag{9.23}$$

В общем случае при $C_0 \neq 0, \infty$; $\overline{C}_1 \neq \infty$ оказывается, что при очень малых значениях t дисперсия ошибки практически совпадает с дисперсией ошибки счисления по априорным данным [см. выражение (5.4)]. При бо́льших значениях t можно частично компенсировать постоянную ошибку позиционного измерителя [можно получить $D_s(t) < B_1^2$], если $C_0 < B_1$. Если же $C_0 > B_1$, то B входит в виде слагаемого в выражение для дисперсии ошибки. Начальный участок переходит в установившийся режим, для расчета которого необходимо учитывать недетерминированный характер медленно меняющейся составляющей полезного сигнала.

9.3. Установившийся режим

В дальнейшем будем предполагать, что $B_1 < C_0$. В этом случае установившаяся дисперсия ошибки состоит из двух слагаемых:

$$D_{s0} = D_r + B_1^2. \tag{9.24}$$

Первое слагаемое зависит только от характеристик недетерминированных составляющих сигналов. Поэтому в дальнейшем учитываются только эти составляющие. Решение может быть получено из общего решения (см. § 9.1) предельным переходом. При этом оказывается, что при достаточно больших значениях t импульсные переходные функции $W_1(t, \tau)$ и $W_2(t, \tau)$ зависят только от разности $(t-\tau)$, т. е. фильтры становятся стационар-

ными. Система уравнений для соответствующих передаточных функций $K_1(j\omega)$ и $K_2(j\omega)$, эквивалентная системе интегральных уравнений (9.5), имеет вид (см. § 4.2):

$$\left.\begin{aligned} K_1(j\omega)S_{x_1'x_1'}(\omega)+K_2(j\omega)S_{x_1'x_2'}(\omega)-S_{rx_1'}(\omega)=X_1(j\omega),\\ K_1(j\omega)S_{x_2'x_1'}(\omega)+K_2(j\omega)S_{x_2'x_2'}(\omega)-S_{rx_2'}(\omega)=X_2(j\omega).\end{aligned}\right\}\quad(9.25)$$

Здесь $X_1(j\omega)$ и $X_2(j\omega)$ — неизвестные функции, не имеющие особенностей в верхней полуплоскости комплексной плоскости ω, а $S_{x_1'x_1'}$, $S_{x_1'x_2'}$, $S_{x_2'x_2'}$, $S_{x_2'x_1'}$, $S_{rx_1'}$, $S_{rx_2'}$ — условные спектральные плотности сигналов, определяемые следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &S_{x_1'x_1'}(\omega)=S_{rr}(\omega)+\sigma_1^2, && S_{x_1'x_2'}(\omega)=j\omega S_{rr}(\omega),\\ &S_{x_2'x_2'}(\omega)=S_{rr}(\omega)+\sigma_2^2, && S_{x_2'x_1'}(\omega)=-j\omega S_{rr}(\omega),\\ &S_{rx_1'}(\omega)=S_{rr}(\omega), && S_{rx_2'}(\omega)=j\omega S_{rr}(\omega).\end{aligned}\right\}\quad(9.26)$$

Кривые условных спектральных плотностей полезного сигнала и приведенных помех изображены на рис. 9.2,*а*,*б*. Практически всегда выполняется неравенство (8.13)

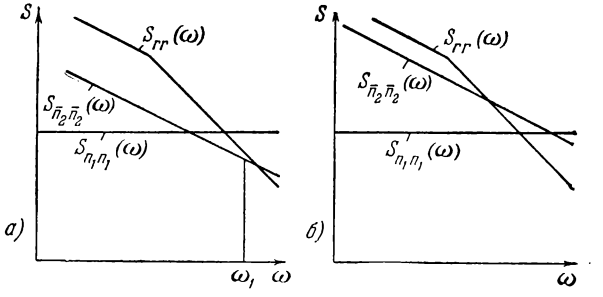

Рис. 9.2.

(смысл его пояснен в § 8.1). При этом условии возможны только два изображенных на рис. 9.2, *а*, *б* варианта взаимного расположения кривых спектральных плотностей. В обоих вариантах нижняя точка пересечения кривой $S_{rr}(\omega)$ с двумя другими кривыми находится на

участке, на котором справедливо приближенное выражение (6.58). Таким образом, введенная в § 6.3 аппроксимация (6.58) спектральной плотности полезного сигнала допустима и для рассматриваемой задачи.

Приведем сначала результаты общего решения задачи, полученные без новых упрощений. Передаточные функции оптимальных фильтров имеют вид:

$$K_1(j\omega)=\frac{A_1^{(1)}}{j\omega-\xi_1}+\frac{A_2^{(1)}}{j\omega-\xi_2},\qquad K_2(j\omega)=\frac{A_1^{(2)}}{j\omega-\xi_1}+\frac{A_2^{(2)}}{j\omega-\xi_2},\tag{9.27}$$

где ξ_1 и ξ_2 — корни уравнения

$$\xi^4-\xi^2\frac{2\beta C^2}{\sigma_2^2}+\frac{2\beta C^2(\beta^2\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{\sigma_1^2\sigma_2^2}=0,\tag{9.28}$$

имеющие отрицательные вещественные части. После подстановки выражений (9.27) в уравнения (9.25) потребуем, чтобы левые части этих уравнений не имели особенностей в верхней полуплоскости комплексной плоскости ω. Тогда получаем:

$$\left.\begin{aligned}K_1(j\omega)&=\frac{-(1-a)(\xi_1+\xi_2)j\omega+\xi_1\xi_2}{(j\omega)^2-(\xi_1+\xi_2)j\omega+\xi_1\xi_2},\\ K_2(j\omega)&=\frac{a[j\omega-(\xi_1+\xi_2)]}{(j\omega)^2-(\xi_1+\xi_2)j\omega+\xi_1\xi_2},\end{aligned}\right\}\tag{9.29}$$

где

$$a=\frac{(2\beta)^{1/2}C\sigma_1}{\sigma_2^2+(2\beta)^{1/2}C\sigma_1}.\tag{9.30}$$

При этом, как и следовало ожидать (по условию конечности спектральной плотности ошибки при $\omega=0$), передаточная функция для ошибки по отношению к полезному сигналу имеет двойной нулевой корень

$$1-K_1(j\omega)-j\omega K_2(j\omega)=\frac{(1-a)(j\omega)^2}{(j\omega)^2-(\xi_1+\xi_2)j\omega+\xi_1\xi_2}.\tag{9.31}$$

Таким образом, система является асимптотически несмещенной относительно детерминированной составляющей полезного сигнала.

Рассмотрим теперь два случая, соответствующие двум вариантам взаимного расположения кривых спектральных плотностей (рис. 9.2, *а*, *б*).

а) Выполнено условие

$$\sigma_2^2 < (2\beta)^{1/2} C\sigma_1. \tag{9.32}$$

Корни уравнения (9.28) при этом приближенно равны:

$$\xi_1 = -\rho \approx -\frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \qquad \xi_2 \approx -\frac{(2\beta)^{1/2} C}{\sigma_2}. \tag{9.33}$$

Из равенства (9.30) получается $a \approx 1$. В результате находим следующие приближенные выражения для передаточных функций:

$$K_1(j\omega) \approx \frac{\rho}{j\omega + \rho}, \qquad K_2(j\omega) \approx \frac{1}{j\omega + \rho}. \tag{9.34}$$

При этом приближенно выполняется условие инвариантности относительно полезного сигнала:

$$1 - K_1(j\omega) - j\omega K_2(j\omega) = 0. \tag{9.35}$$

Если бы было заранее известно, что оптимальная система инвариантна по отношению к полезному сигналу, то вместо системы двух уравнений (9.25) следовало бы решать только одно:

$$\left.\begin{aligned} &K_1(j\omega)\left[S_{n_1n_1}(\omega) + S_{\bar{n}_2\bar{n}_2}(\omega)\right] - S_{\bar{n}_2\bar{n}_2}(\omega) = X(j\omega) \\ &\left[S_{\bar{n}_2\bar{n}_2}(\omega) = \frac{1}{\omega^2} S_{n_2n_2}(\omega)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{9.36}$$

Приближенное решение при условии (9.32) можно найти не путем упрощения общего решения, а непосредственно из рассмотрения кривых условных спектральных плотностей (рис. 9.2, *а*). На интервале $(0, \omega_1)$ выполняется условие $S_{rr}(\omega) \gg S_{n_1n_1}(\omega)$, $S_{\bar{n}_2\bar{n}_2}(\omega)$ [кривая $S_{rr}(\omega)$ идет выше двух других]. Поэтому меньший по абсолютной величине полюс передаточных функций находится (см. § 3.5) как корень уравнения

$$S_{n_1n_1}(\omega) + \frac{1}{\omega^2} S_{n_2n_2}(\omega) = 0 \qquad (j\omega = \xi). \tag{9.37}$$

Он определяется точкой пересечения кривых $S_{n_1n_1}(\omega)$ и $S_{\bar{n}_2\bar{n}_2}(\omega)$. Отсюда получаем первое из выражений (9.33),

Второй полюс передаточных функций определяется пересечением кривых $S_{rr}(\omega)$ и $S_{\overline{n_2}\overline{n_2}}(\omega)$. Однако учет этого полюса уточняет поведение частотных характеристик фильтров при достаточно высоких частотах. Чем сильнее неравенство (9.32), тем к меньшему проигрышу в точности ведет упрощение частотных характеристик фильтров. Примем это упрощение, т. е. будем считать, что интервал $(0, \omega_1)$ представляет собой диапазон существенных частот. Тогда, так как кривая $S_{rr}(\omega)$ в этом диапазоне идет выше других, система должна быть инвариантной относительно полезного сигнала. Используя только это условие, а также требование конечности установившейся дисперсии ошибки, получаем выражения (9.34). Быстродействие фильтров определяется постоянной времени

$$T = \frac{1}{\rho} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}. \tag{9.38}$$

Установившаяся дисперсия ошибки равна:

$$D_{s0} = \sigma_1\sigma_2 + B_1^2 + \frac{1}{\rho^2} B_2^2. \tag{9.39}$$

Рассчитанные фильтры оптимальны при отсутствии постоянных составляющих ошибок. Незначительным изменением передаточных функций (9.34) легко исключить из дисперсии ошибки (9.39) последнее слагаемое. Положим:

$$K_1(j\omega) = \frac{(\rho+\nu)\, j\omega + \nu\rho}{(j\omega+\nu)(j\omega+\rho)}, \quad K_2(j\omega) = \frac{j\omega}{(j\omega+\nu)(j\omega+\rho)}, \tag{9.40}$$

где ν произвольно, но удовлетворяет условию $\nu \ll \rho$. Этим самым в фильтры вводится большая постоянная времени, снижающая быстродействие. Изложенный способ устранения влияния постоянной ошибки измерителя скорости — не единственно возможный.

При условии инвариантности относительно полезного сигнала система может быть выполнена не в виде параллельно включенных фильтров (рис. 4.1), а так, как показано на рис. 4.4, *а*. Эта схема, динамически совершенно эквивалентная прежней, но содержащая только один фильтр вместо двух (схема вычитания сигналов), про-

ще в реализации. Принцип работы такой схемы в общих чертах пояснен в § 4.3. В данном случае на фильтр поступает разность помех, приведенных к скорости. Задача фильтра состоит в наилучшем выделении помехи $n_1(t)$. После этого наилучшая оценка помехи $n_1(t)$ вычитается из сигнала $x_1(t)$. Эта последняя операция осуществляет наилучшую компенсацию ошибки $n_1(t)$.

При работе навигационной системы в режиме управления из требования инвариантности относительно полезного сигнала вытекает, что величина коэффициента усиления для сигнала, проходящего через навигационную систему, должна быть возможно большей. Выводы о том, какие значения коэффициента можно считать достаточными, нетрудно сделать на основании рассмотрения, аналогичного проведенному в § 8.1.

б) Выполнено условие

$$\sigma_2^2 > (2\beta)^{1/2} C\sigma_1. \tag{9.41}$$

Корни уравнения (9.28) при этом приближенно равны:

$$\xi_{1,2} \approx \rho(-1 \pm j) \qquad \left[\rho = \left(\frac{\beta}{2}\right)^{1/4} C^{1/2}\sigma_1^{-1/2}\right]. \tag{9.42}$$

Из равенства (9.30) получается $a \approx 0$. В результате находим, что $K_2(j\omega) \approx 0$, а выражение для $K_1(j\omega)$ совпадает с выражением (6.59) для $K_s(j\omega)$. Таким образом, оптимальная система становится одноканальной (сигнал измерителя скорости не используется). Фильтр оказывается не инвариантным относительно полезного сигнала, а лишь асимптотически несмещенным относительно детерминированных составляющих полезного сигнала. Этот же результат легко получается не из общих выражений (9.29) и (9.30), а из рассмотрения кривых спектральных плотностей. Поскольку кривая $S_{\bar{n}_2\bar{n}_2}(\omega)$ всегда идет выше по крайней мере одной из кривых $S_{rr}(\omega)$ и $S_{n_1n_1}(\omega)$, то оптимальная система должна быть инвариантна относительно сигнала измерителя скорости.

Рассмотрим плоскость параметров (σ_1, σ_2) (рис. 9.3, *а*). Отрезки кривых $\sigma_2 = \left(\frac{\beta}{2}\right)^{-1/2} C$ и $\sigma_2^2 = (2\beta)^{1/2} C\sigma_1$ выделяют область *1*, для точек которой, достаточно удаленных

от границ, оптимальная система инвариантна относительно полезного сигнала. Точки области *2*, также достаточно удаленные от границ, соответствуют оптимальной

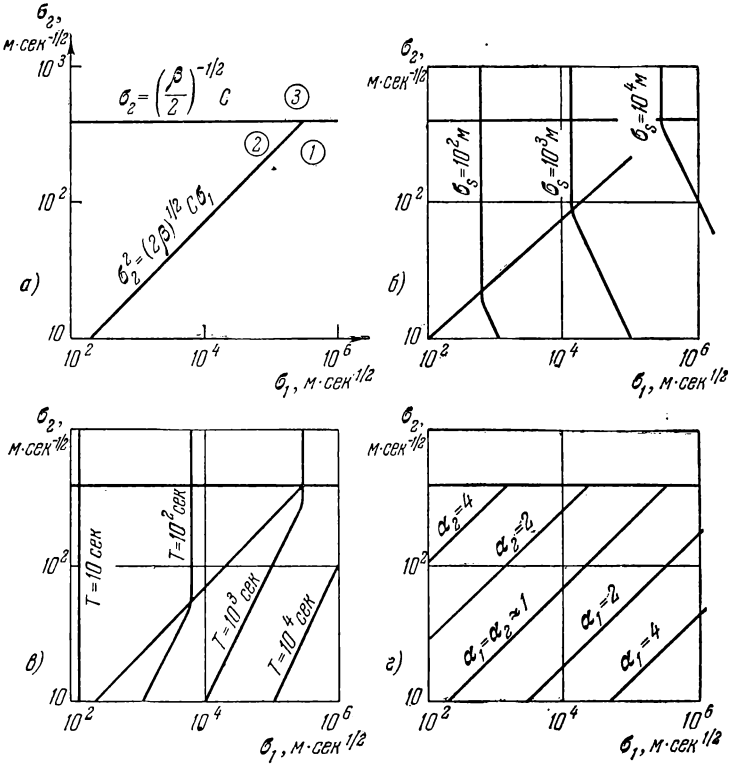

Рис. 9.3.

системе, в которой практически не нужно использовать сигнал измерителя скорости, причем обеспечивается только асимптотическая несмещенность относительно детерминированной составляющей полезного сигнала. В области *3* не выполняется условие (8.13), поэтому рассмотрение задачи для нее интереса не представляет.

Можно было бы ожидать, что для точек вблизи границы областей *1* и *2* необходимо использование сигнала $x_2(t)$ измерителя скорости и в то же время нецелесообразно наложение условия инвариантности относительно полезного сигнала. Однако расчет для точек на самой границе показал, что такое более точное решение дает выигрыш в среднеквадратичной ошибке всего в 4% по сравнению с каждым из приближенных решений. Таким образом, можно считать, что система, инвариантная относительно полезного сигнала, и одноканальная система с позиционным измерителем остаются практически оптимальными соответственно для целых областей *1* и *2* вплоть до их границы.

На рис. 9.3, *б* на плоскости параметров σ_1, σ_2 построены кривые равных значений среднеквадратичных ошибок оптимальных систем; на рис. 9.3, *в* — кривые равных значений постоянных времени.

Наложение условия инвариантности относительно полезного сигнала для области *2* (рис. 9.3, *а*) приводит к более или менее значительному проигрышу в точности. Величина проигрыша определяется отношением

$$\alpha_1 = \frac{\overline{\sigma}_s}{\sigma_{s0}} = (8\beta)^{-1/8} C^{-1/4} \sigma_1^{-1/4} \sigma_2^{1/2}, \qquad (9.43)$$

где σ_{s0} — среднеквадратичная ошибка оптимальной одноканальной системы (при $B_1=0$), $\overline{\sigma}_s$ — среднеквадратичная ошибка системы, оптимальной при условии инвариантности. Кривые равных значений коэффициента α_1 построены на рис. 9.3, *г*.

В области *1* к снижению точности приводит отказ от использования сигнала измерителя скорости. Величина проигрыша оценивается коэффициентом $\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1}$. Кривые равных значений коэффициента α_2 также построены на рис. 9.3, *г*. Коэффициент α_2, таким образом, характеризует выгоду от комплексирования, существующую лишь для области *1*.

При реализации системы, близкой к оптимальной при любом t, в основу могут быть положены приближенные решения, найденные в § 9.2 и 9.3. Такая система может быть выполнена в виде четырех блоков,

подключаемых на выход в последовательные интервалы времени (рис. 9.4). На первом интервале $(0, t_1)$ блок *1* осуществляет счисление пути по априорным данным. На втором интервале (t_1, t_2) блок *2* производит счисление пути по сигналу измерителя скорости. На третьем интервале (t_2, t_3) блоком *3* осуществляется комплексное нестационарное преобразование сигналов обоих источников информации, причем алгоритм преобразования определяется на основе использования приближенных выражений для корреляционных функций (см. § 9.2). На четвертом

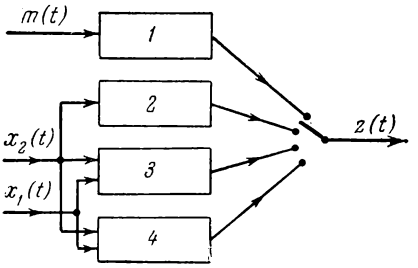

Рис. 9.4.

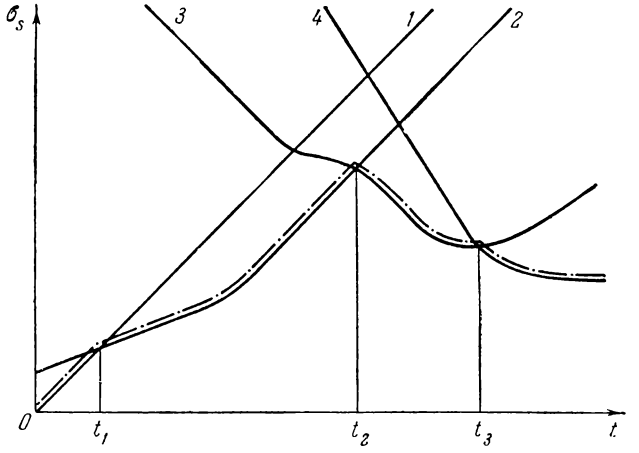

Рис. 9.5.

интервале $(t > t_3)$ блок *4* производит стационарное преобразование сигналов.

Характер изменения среднеквадратичных ошибок на выходах блоков показан на рис. 9.5 сплошными кри-

выми *1*, *2*, *3*, *4*. Моменты переключения блоков соответствуют точкам пересечения кривых. В этом случае среднеквадратичная ошибка будет изменяться так, как показывает штрих-пунктирная линия. Если допустимо, чтобы в течение «переходного процесса» ошибки были значительно выше минимально возможных, то при реализации можно ограничиться одним блоком стационарных фильтров (блок 4).

9.4. Коррекция измерителя скорости при малом времени совместной работы обоих измерителей

Наиболее распространенным является, по-видимому, такое положение, когда измерители работают в течение различных (перекрывающихся или неперекрывающихся) интервалов времени. Ниже рассматривается одна задача такого рода: измеритель скорости работает непрерывно с начала движения до текущего момента времени [на интервале $(0, t)$], а позиционный измеритель — на малом отрезке времени с начала движения [на интервале $(0, T)$]. Смысл задачи комплексирования в этом случае можно установить из общих соображений: во-первых, позиционный измеритель дает начальные условия для счисления пути по сигналу измерителя скорости для интервала автономной работы последнего, а во-вторых, позиционный измеритель во время совместной работы при $0<t<T$ дает возможность выявить, а затем и частично скомпенсировать постоянную или медленно меняющуюся ошибку измерителя скорости. Решение находится для двух случаев, различающихся характером упрощений в решении задачи.

а) Оба интервала $(0, T)$ и (T, t) малы, так что при нахождении решения на них можно считать справедливыми приближенные выражения (9.11) корреляционных функций сигналов. Выходной сигнал навигационной системы формируется следующим образом:

$$z(t)=\int_0^T W_1(t, \tau)\, x_1(\tau)\, d\tau+\int_0^t W_2(t, \tau)\, x_2(\tau)\, d\tau. \qquad (9.44)$$

Система интегральных уравнений для искомых импульсных переходных функций $W_1(t, \tau)$ и $W_2(t, \tau)$

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^T W_1(t, \tau_2) R_{x_1x_1}(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_2 + \\
&\qquad + \int_0^t W_2(t, \tau_2) R_{x_1x_2}(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_2 = R_{sx_1}(t, \tau_1) \\
&\qquad\qquad (0 \leqslant \tau_1 \leqslant T), \\
&\int_0^T W_1(t, \tau_2) R_{x_2x_1}(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_2 + \\
&\qquad + \int_0^t W_2(t, \tau_2) R_{x_2x_2}(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_2 = R_{sx_2}(t, \tau_1) \\
&\qquad\qquad (T \leqslant \tau_1 \leqslant t)
\end{aligned}\right\} \quad (9.45)$$

вырождается в систему алгебраических уравнений. Решение имеет вид:

$$\left.\begin{aligned}
&W_1(t, \tau) = \mu_1(t) + \mu_2(t)\tau, \\
&W_2(t, \tau) = \begin{cases} \mu_3^{(1)}(t) & \text{при} \quad 0 \leqslant \tau < T, \\ \mu_3^{(2)}(t) & \text{при} \quad T \leqslant \tau \leqslant t. \end{cases}
\end{aligned}\right\} \quad (9.46)$$

В соответствии со сказанным в § 4.2, импульсная переходная функция $W_2(t, \tau)$, вообще говоря, имеет различное аналитическое выражение для интервалов. Однако из решения сразу получается $\mu_3^{(1)} = \mu_3^{(2)} = \mu_3$. Коэффициенты μ_1, μ_2 и μ_3 находятся из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&\mu_1(\sigma_1^2 + C_0^2 T + B_1^2 T) + \mu_2 C_0^2 \frac{T^2}{2} = C_0^2, \\
&\mu_1 \bar{C}_1^2 \frac{T^2}{2} + \mu_2\left(\sigma_1^2 + \bar{C}_1^2 \frac{T^3}{3}\right) + \mu_3 \bar{C}_1^2 t = \bar{C}_1^2 t, \\
&\mu_2 \sigma_1^2 - \mu_3(\sigma_2^2 + B_2^2 t) = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (9.47)$$

При наложении условий несмещенности относительно детерминированных составляющих полезного сигнала

($C_0 \to \infty$, $\bar{C}_1 \to \infty$) получаем:

$$\left.\begin{aligned}
\mu_1(t) &= \frac{-2T^2(3t-2T)\left(\sigma_2^2+B_2^2t\right)+12\sigma_1^2t}{T^4\left(\sigma_2^2+B_2^2t\right)+12\sigma_1^2tT},\\
\mu_2(t) &= \frac{6(2t-T)\left(\sigma_2^2+B_2^2t\right)}{T^3\left(\sigma_2^2+B_2^2t\right)+12\sigma_1^2t},\\
\mu_3(t) &= \frac{6\sigma_1^2(2t-T)}{T^3\left(\sigma_2^2+B_2^2t\right)+12\sigma_1^2t};
\end{aligned}\right\} \tag{9.48}$$

$$D_s(t) = \frac{\sigma_1^2\left\{[12Tt(t-T)+4T^3]\left(\sigma_2^2+B_2^2t\right)+12\sigma_1^2t\right\}}{T^4\left(\sigma_2^2+B_2^2t\right)+12\sigma_1^2Tt}+B_1^2. \tag{9.49}$$

При $t=T$ эти выражения переходят соответственно в выражения (9.14) и (9.15). При $t \gg T$ (интервал совместной работы измерителей относительно мал) находим приближенное выражение

$$D_s(t) \approx \sigma_1^2\frac{12B_2^2t^2}{B_2^2T^3+12\sigma_1^2}. \tag{9.50}$$

В выражении для дисперсии ошибки сохранено слагаемое с самой высокой степенью t. Если при этом T так мало, что $B_2^2T^3 < 12\sigma_1^2$, то

$$D_s(t) \approx B_2^2t^2. \tag{9.51}$$

Если T достаточно велико, так что $B_2^2T^3 > 12\sigma_1^2$, то

$$D_s(t) \approx \frac{12\sigma_1^2t^2}{T^3}. \tag{9.52}$$

Полученные результаты имеют ясный физический смысл. При малом времени работы позиционного измерителя он может только установить начальное условие по координате для счисления пути. При этом по сигналу позиционного измерителя к моменту T может быть определена также и скорость, однако с большой ошибкой, так что нет возможности уточнить показания измерителя скорости. Поэтому при $t \gg T$ ошибки счисления

пути в основном определяются нескорректированной постоянной ошибкой измерителя скорости.

При больших значениях T ошибки вычисления скорости по сигналу позиционного измерителя становятся достаточно малыми, так что экстраполяция только по этим данным дает более точные результаты, чем счисление пути по сигналу измерителя скорости. Поэтому в комплексной системе дисперсия ошибки в координате [выражение (9.52)] пропорциональна дисперсии ошибки в вычислении скорости $\sigma_v^2 = \frac{12\sigma_1^2}{T^3}$ в момент времени T и не зависит от характеристик сигнала измерителя скорости. При этом предполагается, что приближенные выражения корреляционных функций (9.11) остаются достаточно точными, или, что то же самое, скорость движения объекта можно считать постоянной. При больших значениях t это предположение заведомо несправедливо.

б) Интервал $(0, T)$ мал, а интервал (T, t) нельзя считать малым, так что в пределах первого интервала можно считать справедливыми приближенные выражения корреляционных функций, а в пределах второго это недопустимо. В этом случае аналитическое выражение импульсной переходной функции $W_2(t, \tau)$ действительно оказывается различным для интервалов:

$$W_2(t, \tau) = \begin{cases} W_2^{(1)}(t, \tau) & \text{при} \quad 0 \leqslant \tau < T, \\ W_2^{(2)}(t, \tau) & \text{при} \quad T \leqslant \tau \leqslant t. \end{cases} \tag{9.53}$$

Задача полного синтеза динамических характеристик системы приводит к трем интегральным уравнениям относительно трех неизвестных $W_1(t, \tau)$, $W_2^{(1)}(t, \tau)$ и $W_2^{(2)}(t, \tau)$. Имея в виду простоту реализации, рассмотрим только задачу неполного синтеза при заданном $W_2^{(2)}(t, \tau) = 1$. В этом случае выходной сигнал навигационной системы формируется следующим образом:

$$z(t) = \int_T^t x_2(\tau)\, d\tau + \Delta z(t), \tag{9.54}$$

где

$$\Delta z(t)=\int_0^T W_1(t,\tau)x_1(\tau)\,d\tau+\int_0^T W_2^{(1)}(t,\tau)x_2(\tau)\,d\tau. \quad (9.55)$$

Есть основания предполагать, что такое задание $W_2^{(2)}(t,\tau)$ даст результаты, близкие к оптимальным, поскольку при длительной работе измерителя скорости практически наилучшей операцией является простое интегрирование его сигнала (см. § 8.1). Интегрирование используется для всего интервала времени (T, t), на котором позиционный измеритель не работает. Введение в сигнал (9.54) поправки $\Delta z(t)$ обеспечивает уточнение начальных условий и, если возможно, частичную коррекцию постоянной составляющей ошибки измерителя скорости.

Выражения для искомых импульсных переходных функций имеют вид:

$$W_1(t,\tau)=\mu_1(t)+\mu_2(t)\tau, \qquad W_2^{(1)}(t,\tau)=\mu_3(t), \quad (9.56)$$

где коэффициенты μ_1, μ_2, μ_3 определяются из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned}\mu_1(\sigma_1^2+C_0^2T+B_1^2T)+\mu_2C_0^2\frac{T^2}{2}&=C_0^2,\\ \mu_1\bar{C}_1^2\frac{T^2}{2}+\mu_2\left(\sigma_1^2+\bar{C}_1^2\frac{T^3}{3}\right)+\mu_3\bar{C}_1^2T&=\bar{C}_1^2T,\\ \mu_2\sigma_1^2-\mu_3(\sigma_2^2+B_2^2T)&=B_2^2(t-T).\end{aligned}\right\} \quad (9.57)$$

При наложении условий несмещенности относительно детерминированных составляющих полезного сигнала (при $C_0\to\infty$ и $\bar{C}_1\to\infty$), а также относительно постоянной ошибки измерителя скорости ($B_2\to\infty$) получаем:

$$\left.\begin{aligned}\mu_1(t)=-\frac{2}{T}\left(\frac{3t}{T}-2\right),\quad \mu_2(t)=\frac{6}{T^2}\left(\frac{2t}{T}-1\right),\\ \mu_3(t)=-\left(\frac{t}{T}-1\right).\end{aligned}\right\} \quad (9.58)$$

С точностью до слагаемых, включающих множителем самую высокую степень t (а именно t^2), находим

следующее приближенное выражение для дисперсии ошибки:

$$D_s(t) \approx \left(\frac{12\sigma_1^2}{T^3} + \frac{\sigma_2^2}{T}\right) t^2. \qquad (9.59)$$

Это выражение справедливо для малых значений T и как угодно больших значений t [в отличие от выражения

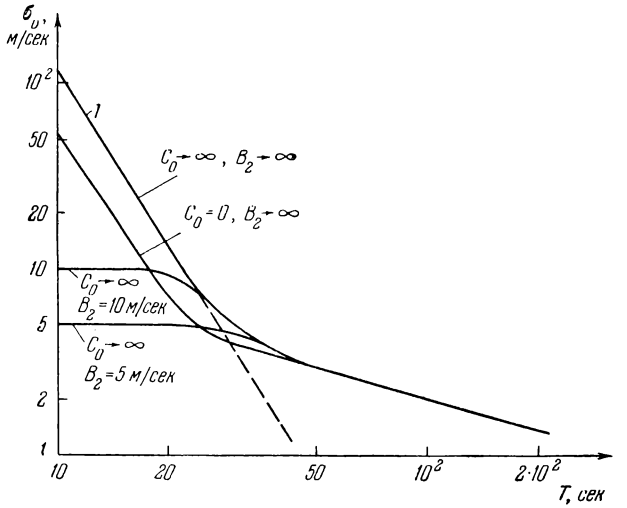

Рис. 9.6.

(9.52), справедливого только для достаточно малых t]. Заметим, что выражение (9.59) отличается от выражения (9.52) вторым слагаемым; при малых T (при $T < 4\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$) это различие несущественно. Величина $\sigma_v^2 = \frac{1}{t^2} D_s(t)$ представляет собой дисперсию нескомпенсированной постоянной составляющей ошибки в скорости, проявляющейся на этапе автономной работы измерителя скорости.

На рис. 9.6 построены кривые σ_v для различных значений B_2, рассчитанные по уравнениям (9.57) при $\overline{C}_1 \to \infty$. Пунктирное продолжение кривой *1* соответ-

ствует приближенному решению, полученному в п. а) [формула (9.52)]. Ясно видно, что при малых T постоянная ошибка в скорости не может быть выявлена и уменьшена; при достаточно больших T такая возможность появляется. Использование преобразования, несмещенного относительно B_2, в случае, когда в действительности нужно учитывать конечность B_2, может привести при малых T к увеличению ошибок. Лишь при достаточно больших T преобразование, оптимальное для конечного B_2, практически всегда совпадает с несмещенным.

При точно известной начальной координате ($C_0=0$) и при условиях несмещенности $\bar{C}_1 \to \infty$ и $B_2 \to \infty$ вместо выражения (9.59) получаем:

$$D_s(t) \approx \left(\frac{3\sigma_1^2}{T^3} + \frac{\sigma_2^2}{T}\right) t^2. \tag{9.60}$$

Заметим, что величина σ_v сравнительно слабо зависит от способа выработки поправки $\Delta z(t)$. Примем, например, следующий (неоптимальный) способ формирования $\Delta z(t)$:

$$\Delta z(t) = \frac{2t^2}{T^2}\left[\int_0^T x_1(\tau)\,d\tau - \int_0^T d\tau_1 \int_0^{\tau_1} x_2(\tau_2)\,d\tau_2\right]. \tag{9.61}$$

Легко проверить, что при $C_0=0$ эта операция является несмещенной относительно $\bar{C}_1$ и B_2. В этом случае при $B_1=0$ получаем:

$$D_s(t) = \left(\frac{4\sigma_1^2}{T^3} + \frac{4}{3}\frac{\sigma_2^2}{T}\right) t^2. \tag{9.62}$$

Таким образом, операция (9.61) дает увеличение среднеквадратичной ошибки по сравнению с оптимальным значением всего на 15%.

Для рассматриваемой задачи существенное значение имеет постоянство «систематической» составляющей ошибки измерителя скорости на всем интервале $(0, t)$. Предположим теперь, что эта ошибка существенно недетерминирована:

$$R_{n_2 n_2}(\tau_1, \tau_2) = B_2^2 e^{-\gamma|\tau_1-\tau_2|}, \tag{9.63}$$

так что $\gamma t > 1$. Пусть при этом на интервале $(0, T)$ эту ошибку можно считать постоянной $(\gamma T \ll 1)$. При известных начальных условиях счисление пути по сигналу измерителя скорости дает следующее приближенное выражение для дисперсии ошибки, справедливое при достаточно больших t:

$$D_s(t) \approx \left(\frac{2B_2^2}{\gamma} + \sigma_2^2\right) t. \tag{9.64}$$

В то же время, если в основу построения оптимальной операции положено уже несправедливое предположение о постоянстве ошибки, то при больших t

$$D_s(t) \approx 2B_2^2 t^2. \tag{9.65}$$

Таким образом, получается значительный проигрыш в точности. Этим еще раз подтверждается необходимость четкого выяснения характера ошибок, обычно квалифицируемых как систематические.

ГЛАВА 10

ОПТИМАЛЬНОЕ СОВМЕСТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ СИГНАЛОВ ДРУГИХ ИСТОЧНИКОВ ИНФОРМАЦИИ В УСТАНОВИВШЕМСЯ РЕЖИМЕ

В этой главе рассмотрены задачи стационарного преобразования сигналов двух и трех разнородных измерителей, взятых в таких сочетаниях, которые обеспечивают конечность установившейся дисперсии ошибки. Последовательность решения во всех случаях одна и та же: выписываются уравнения для передаточных функций фильтров и на основе рассмотрения кривых условных спектральных плотностей выделяются характерные случаи, которые затем исследуются раздельно. В первую очередь обращается внимание на основные качественные особенности — вырождается ли двухканальная система в одноканальную и необходимо ли выполнение условия инвариантности относительно полезного сигнала. После этого проводится анализ полученных выражений для постоянных времени фильтров и дисперсий ошибок (при расчете последних учитываются только недетерминированные составляющие сигналов). Все результаты представлены в виде графиков на плоскости параметров, характеризующих мощность ошибок измерителей. Величины постоянных времени стационарных фильтров определяют границы практической применимости найденных решений: решения могут быть использованы, если интервалы работы систем больше постоянных времени. В противном случае необходимо рассмотрение неустановившихся режимов.

10.1. Совместная работа позиционного измерителя и астроинерциальной системы

В состав комплексной системы входят два источника информации: позиционный измеритель и акселерометр, ось чувствительности которого стабилизирована в инерциальном пространстве от астросредств. Пусть $x_1(t)$ — выходной сигнал позиционного измерителя, $x_2(t)$ — выходной сигнал акселерометра. Осуществим предварительное приведение сигнала акселерометра к полезному сигналу, пропустив его через звено с передаточной функцией

$$Y(j\omega)=\frac{1}{(j\omega)^2+\Omega^2}. \tag{10.1}$$

Условные спектральные плотности полезного сигнала $s(t)$, ошибки позиционного измерителя $n_1(t)$ и ошибки инерциальной системы (приведенной к полезному сигналу) $\bar{n}_2(t)$ равны:

$$S_{rr}(\omega)=\frac{2\beta C^2}{\omega^2(\omega^2+\beta^2)},\qquad S_{n_1n_1}(\omega)=\sigma_1^2,\qquad S_{\bar{n}_2\bar{n}_2}(\omega)=\frac{\sigma_3^2}{(\omega^2-\Omega^2)^2}. \tag{10.2}$$

Таким образом, учитываются только флюктуационные ошибки источников информации типа белых шумов. В результате решения системы двух уравнений вида (4.25) методом неопределенных коэффициентов получаем:

$$\left.\begin{aligned} K_1(j\omega)&=\frac{-a(\xi_1+\xi_2)j\omega+b\xi_1\xi_2}{(j\omega)^2-(\xi_1+\xi_2)j\omega+\xi_1\xi_2},\\ K_2(j\omega)&=Y(j\omega)\bar{K}_2(j\omega)=\\ &=\frac{-(1-a)(\xi_1+\xi_2)j\omega+(1-b)\xi_1\xi_2}{\Omega^2[(j\omega)^2-(\xi_1+\xi_2)j\omega+\xi_1\xi_2]}. \end{aligned}\right\} \tag{10.3}$$

При этом

$$1-K_1(j\omega)-\bar{K}_2(j\omega)=\\ =\frac{(1-a)(\xi_1+\xi_2)(j\omega)^3-[\Omega^2-(1-b)\xi_1\xi_2](j\omega)^2}{\Omega^2[(j\omega)^2-(\xi_1+\xi_2)j\omega+\xi_1\xi_2]}. \tag{10.4}$$

В выражениях (10.3) и (10.4) ξ_1 и ξ_2 — корни уравнения

$$\xi^4\left(1+\frac{\sigma_3^2}{2\beta C^2}\right)+2\xi^2\Omega^2\left(1-\frac{\beta\sigma_3^2}{4\Omega^2C^2}\right)+\Omega^2\left(1+\frac{\sigma_3^2}{\Omega^4\sigma_1^2}\right)=0, \tag{10.5}$$

имеющие отрицательные вещественные части, а коэффициенты a и b определяются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} a&=\frac{\sigma_3^2+2\beta C^2}{\Omega^4\sigma_1^2+\sigma_3^2+2\beta C^2},\\ b&=\frac{\sigma_3^2+2\beta C^2\left[1-\left(1+\frac{\sigma_3^2}{\Omega^4\sigma_1^2}\right)^{-1/2}\right]}{\Omega^4\sigma_1^2+\sigma_3^2+2\beta C^2}.\end{aligned}\right\} \tag{10.6}$$

В зависимости от соотношений между параметрами сигналов решения приобретают те или иные качественные особенности. На рис. 10.1 представлены пять наиболее характерных вариантов взаимного расположения кривых условных спектральных плотностей (здесь и далее принято условие $\beta<\Omega$, которое, по-видимому, всегда выполняется как для самолетов, так и для судов). Соответственно на плоскости параметров σ_1, σ_3 выделено пять областей (рис. 10.2, *а*). Рассмотрим эти области.

1) Область *1*, для которой

$$\Omega^2\sigma_1<\sigma_3, \qquad \sigma_3<(2\beta)^{1/2}C. \tag{10.7}$$

Взаимное расположение кривых спектральных плотностей для этого случая показано на рис. 10.1, *а*. Первое условие (10.7) означает, что позиционный измеритель весьма точен, а инерциальная система относительно менее точна. Второе условие (10.7) практически всегда выполняется. По характеру расположения кривых спектральных плотностей видно, что система должна быть инвариантной относительно полезного сигнала [кривая $S_{rr}(\omega)$ не выходит ниже кривых $S_{n_1n_1}(\omega)$ и $S_{\bar{n}_2\bar{n}_2}(\omega)$]. Локальное поведение кривых $S_{n_1n_1}(\omega)$ и $S_{\bar{n}_2\bar{n}_2}(\omega)$ вблизи точки их пересечения оказывается тем же, что и для

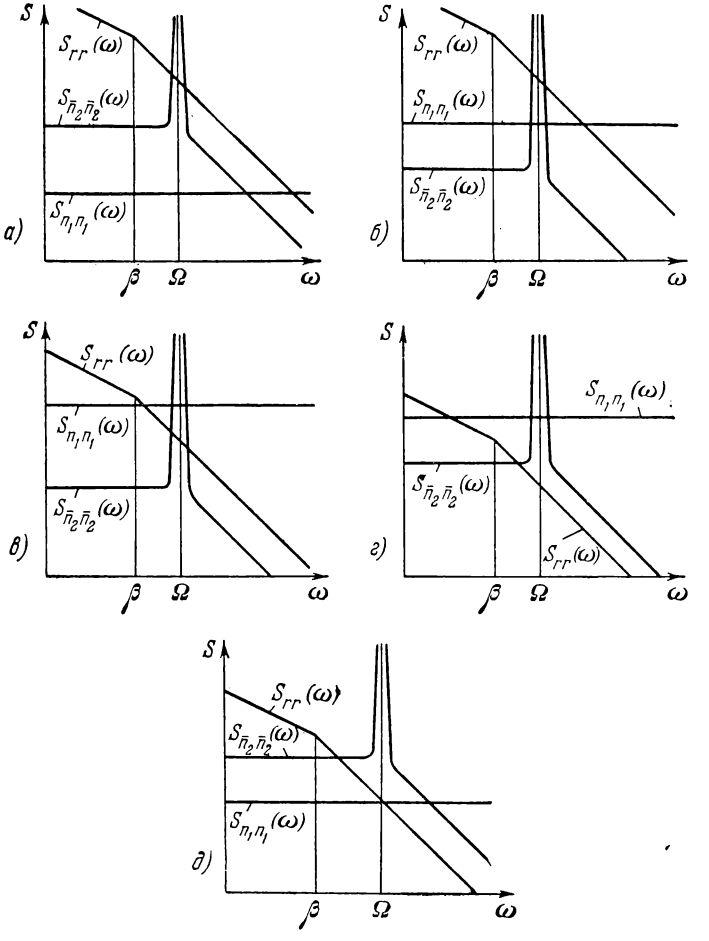
а)
б)
в)
г)
д)
S
ω
β
Ω
$S_{rr}(\omega)$
$S_{\bar{n}_2\bar{n}_2}(\omega)$
$S_{n_1n_1}(\omega)$
$S'_{n_1n_1}(\omega)$
$S'_{\bar{n}_2\bar{n}_2}(\omega)$

Рис. 10.1.

задачи преобразования сигнала позиционного измерителя (см. рис. 6.4). Поэтому в результатах решения обеих задач ясно видна аналогия. Уравнение (10.5) в

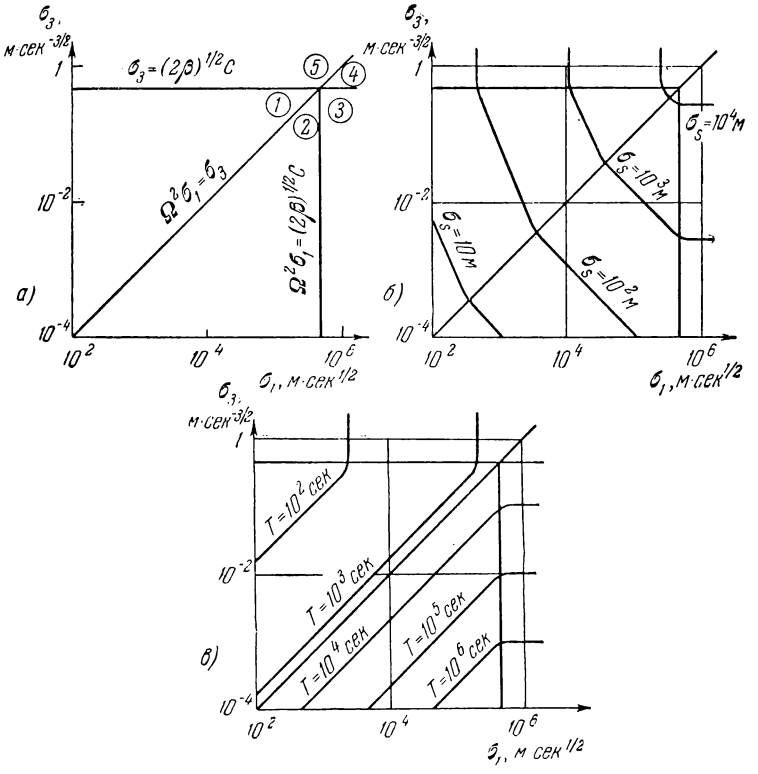

Рис. 10.2.

рассматриваемом случае приближенно записывается в виде

$$\xi^4 + \frac{\sigma_3^2}{\sigma_1^2} = 0. \qquad (10.8)$$

Следовательно, получаем:

$$\xi_{1,2} \approx \rho(-1 \pm j) \qquad [\rho = (2\sigma_1)^{-1/2}\,\sigma_3^{1/2}]. \qquad (10.9)$$

Передаточные функции фильтров имеют вид:

$$K_1(j\omega)=\frac{2\rho j\omega+2\rho^2}{(j\omega)^2+2\rho j\omega+2\rho^2},\qquad K_2(j\omega)=\frac{1}{(j\omega)^2+2\rho j\omega+2\rho^2}. \tag{10.10}$$

Здесь, как и в следующих вариантах, вторая передаточная функция включает в себя также передаточную функцию предварительного преобразования (10.1), т. е. определяет фильтр, на вход которого поступает сигнал акселерометра, а не шулеровской инерциальной системы. Таким образом, в реальной системе совсем не нужно на самом деле приводить сигнал акселерометра к полезному сигналу, создавая недемпфированный шулеровский контур. Для передаточных функций (10.10) приближенно выполняется условие инвариантности относительно полезного сигнала

$$1-K_1(j\omega)-[(j\omega)^2+\Omega^2]K_2(j\omega)=0. \tag{10.11}$$

Установившаяся дисперсия ошибки равна

$$D_r=\sigma_1^{3/2}(2\sigma_3)^{1/2}. \tag{10.12}$$

В результатах действительно видна аналогия со случаем преобразования сигнала позиционного измерителя: фильтр с передаточной функцией $K_1(j\omega)$ [см. (10.10)]

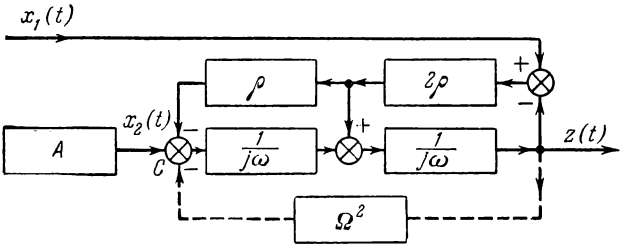

Рис. 10.3.

обладает астатизмом второго порядка; дисперсия ошибки зависит в основном от величины σ_1. Быстродействие системы определяется постоянной времени

$$T=(2\sigma_1)^{1/2}\sigma_3^{-1/2}\left(<\frac{1}{\Omega}\right). \tag{10.13}$$

Блок-схема комплексной системы с передаточными

функциями (10.10) изображена на рис. 10.3. Именно такая схема предлагалась ранее (см., например, [30]) для коррекции астроинерциальной системы от позиционного измерителя. Обратная связь может осуществляться электрически (суммирование электрических сигналов производится в сумматоре C) или механически (вместо суммирования электрических сигналов производится поворот акселерометра на угол, пропорциональный сигналу в цепи обратной связи). Как отмечалось в § 2.8, оба способа динамически совершенно эквивалентны. Применяя установившуюся терминологию, можно сказать, что сигнал позиционного измерителя используется для демпфирования астроинерциальной системы и сокращения ее периода (по сравнению с шулеровским). Однако необходимо отметить, что все же основную роль играет позиционный измеритель [это, в частности, подтверждает формула (10.12)], и, следовательно, точность комплексной системы в большей степени зависит от точности позиционного измерителя, чем от точности инерциальной системы. Поэтому правильнее считать, что для рассматриваемого случая сигнал позиционного измерителя сглаживается с помощью астроинерциальной системы. Из сигнала акселерометра используется относительно высокочастотная часть; здесь становится несущественным то обстоятельство, что акселерометр дает сведения также о полезном сигнале непосредственно: при условиях (10.7) получаются те же результаты, если с самого начала решения принять, что сигнал акселерометра содержит только вторую производную полезного сигнала.

2) Область *2*, для которой

$$\Omega^2\sigma_1 > \sigma_3, \qquad \Omega^2\sigma_1 < (2\beta)^{1/2} C. \tag{10.14}$$

Взаимное расположение кривых спектральных плотностей для этого случая показано на рис. 10.1, *б*. Условия (10.14) означают, что астроинерциальная система весьма точна, позиционный измеритель относительно менее точен, однако его ошибки все же ограничены вторым неравенством (10.14).

Из рассмотрения кривых на рис. 10.1, *б* следует, что оптимальная система инвариантна относительно полезного сигнала. Корни уравнения (10.5), имеющие отри-

цательные вещественные части, приближенно равны:

$$\xi_{1,2} \approx \Omega(-\nu \pm j) \qquad \left(\nu = \frac{\sigma_3}{2\Omega^2\sigma_1} < 1\right). \qquad (10.15)$$

Передаточные функции фильтров имеют вид:

$$K_1(j\omega) = \frac{2\nu\Omega j\omega}{(j\omega)^2 + 2\nu\Omega j\omega + \Omega^2}, \qquad K_2(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + 2\nu\Omega j\omega + \Omega^2}. \qquad (10.16)$$

Как и в случае 1), выполняется условие (10.11) инвариантности относительно полезного сигнала. Установившаяся дисперсия ошибки равна:

$$D_r = \frac{1}{\Omega^2}\sigma_1\sigma_3. \qquad (10.17)$$

Блок-схема системы с передаточными функциями (10.16), изображенная на рис. 10.4, отличается от схемы на рис. 10.3 тем, что в ней отсутствует связь, сокращающая период свободных колебаний. Здесь сигнал

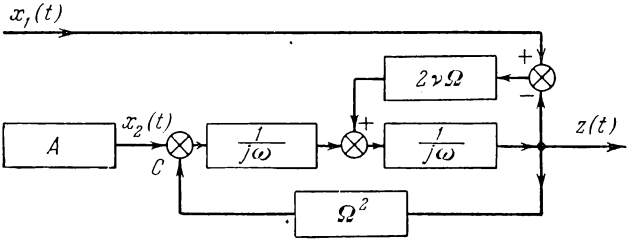

Рис. 10.4.

позиционного измерителя используется только для демпфирования. По виду кривых спектральных плотностей, виду выражений передаточных функций и дисперсии ошибки можно установить, что рассматриваемый случай напоминает задачу о преобразовании сигнала одной астроинерциальной системы. Поэтому в рассматриваемом случае в комплексной системе основной является астроинерциальная система, а позиционный измеритель осуществляет более или менее слабую ее коррекцию.

3) Область *3*, для которой

$$\Omega^2\sigma_1 > (2\beta)^{1/2}C, \qquad \sigma_3 < (2\beta)^{1/2}C. \qquad (10.18)$$

Взаимное расположение кривых спектральных плотностей для этого случая показано на рис. 10.1, *в*. Характерным является очень высокий уровень ошибок позиционного измерителя. Из рассмотрения рис. 10.1, *в* следует, что оптимальная система должна быть инвариантной относительно сигнала позиционного измерителя, т. е. $K_1(j\omega)=0$. Выражения для $K_2(j\omega)$ и дисперсии ошибки совпадают с выражениями (8.57) и (8.58). При этом система не инвариантна относительно полезного сигнала, а лишь является асимптотически несмещенной относительно его детерминированных составляющих.

4) Область *4*, для которой

$$\Omega^2\sigma_1 > \sigma_3, \qquad \sigma_3 > (2\beta)^{1/2} C. \tag{10.19}$$

Взаимное расположение кривых спектральных плотностей показано на рис. 10.1, *г*. Из рассмотрения кривых следует, что в этом случае также не используется сигнал позиционного измерителя $[K_1(j\omega)=0]$. Однако исходные условия (10.19) представляются нереальными (интенсивность шума акселерометра больше интенсивности ускорения движения). Поэтому решение задачи при условиях (10.19) интереса не представляет.

5) Область *5*, для которой

$$\Omega^2\sigma_1 < \sigma_3, \qquad \sigma_3 > (2\beta)^{1/2} C. \tag{10.20}$$

Взаимное расположение кривых спектральных плотностей показано на рис. 10.1, *д*. Характерна низкая точность астроинерциальной системы и относительно высокая точность позиционного измерителя. Из рис. 10.1, *д* видно, что оптимальная система должна быть инвариантной относительно сигнала инерциальной системы $[K_2(j\omega)=0]$. Однако, как и в случае 4), задача в целом интереса не представляет по той же причине.

На плоскости параметров σ_1, σ_3 (см. рис. 10.2, *а*) области, соответствующие рассмотренным выше пяти случаям, разделены прямыми

$$\Omega^2\sigma_1 = \sigma_3, \qquad \Omega^2\sigma_1 = (2\beta)^{1/2} C, \qquad \sigma_3 = (2\beta)^{1/2} C. \tag{10.21}$$

Полученные результаты, строго говоря, справедливы для точек, достаточно удаленных от границ. Однако расчеты показывают, что системы, построенные по правилам,

которые обеспечивают оптимальность для удаленных точек, оказываются достаточно близкими к оптимальным вблизи границ. На рис. 10.2, *б* и 10.2, *в* на плоскости тех же параметров σ_1, σ_3 построены кривые равных значений среднеквадратичных ошибок и постоянных времени.

Сопоставляя все данные, можно кратко охарактеризовать области следующим образом.

В области *1* система инвариантна относительно полезного сигнала. Она сильно демпфирована, постоянные времени относительно малы (по сравнению с периодом Шулера), ошибки относительно малы.

В области *2* система также инвариантна относительно полезного сигнала, но отличается малым демпфированием (представляет собой слабо демпфированное звено с периодом Шулера). Постоянные времени относительно велики, ошибки относительно малы.

В области *3* оптимальная система является одноканальной (сигнал позиционного измерителя не используется). Как и в области *2*, система обладает малым демпфированием. Постоянные времени очень велики.

В области *4* оптимальная система также является одноканальной. Постоянные времени и ошибки велики.

В области *5* оптимальная система не использует сигнала инерциальной системы. Постоянные времени и ошибки относительно невелики.

Если в реальных условиях параметры сигналов меняются в очень широких пределах, то в вычислительном устройстве должны осуществляться соответствующие изменения структуры. Для областей *2*, *3* и *4* постоянные времени так велики, что установившийся режим вообще, как правило, не достигается. В этих случаях при определении оптимальных динамических характеристик существенно необходимо учитывать конечность времени работы.

Рассмотрим, к чему приводят для установившихся режимов различные упрощения, задаваемые априори, без учета конкретных значений параметров сигналов.

а) Условие инвариантности относительно полезного сигнала.

Для областей *1* и *2* это условие появляется в процессе самого решения задачи и поэтому оправдано. Для

других областей предварительное наложение этого условия дает снижение точности. На рис. 10.5, *а* на плоскости параметров σ_1, σ_3 изображены кривые равных значений коэффициента $\alpha_1 = \bar{\sigma}_s/\sigma_{s0}$, где σ_{s0} — среднеквадратичная ошибка оптимальной (в данном случае одноканальной) системы, $\bar{\sigma}_s$ — среднеквадратичная ошибка системы, оптимальной при условии инвариантности относительно полезного сигнала. Из рассмотрения кривых видно, что

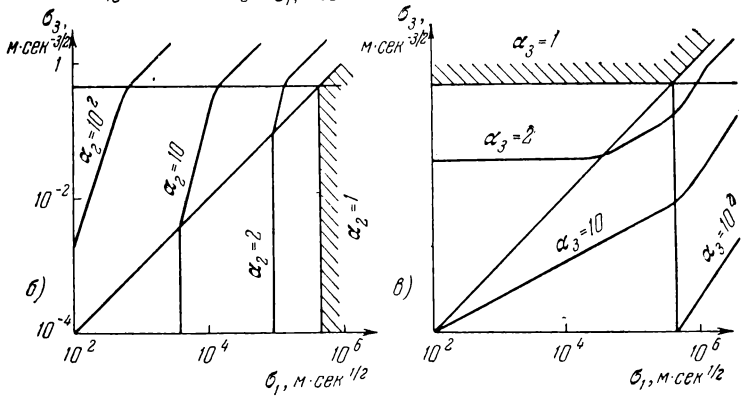

Рис. 10.5.

в областях *3* и *4* по мере удаления от границы с областью *2* снижение точности происходит довольно быстро, в области *5* — гораздо медленнее (при увеличении σ_3 в 16 раз α_1 уменьшается всего вдвое). Проигрыш в точности из-за необоснованного наложения условия инвариантности относительно полезного сигнала появляется как следствие отказа от использования данных о свойствах полезного сигнала, в то время как для областей *3*, *4* и *5* эти данные более ценны, чем информация от менее точного из двух приборов.

б) Исключение позиционного измерителя.

Для областей *3* и *4* получается, что позиционный измеритель не нужен. Для остальных областей исключение его из комплексной системы приводит к потере точности. На рис. 10.5, *б* построены кривые постоянных значений коэффициента $\alpha_2 = \sigma_{sa}/\sigma_{so}$, где σ_{sa} — среднеквадратичная ошибка оптимальной астроинерциальной системы. По этим данным можно судить о роли позиционного измерителя как средства коррекции астроинерциальной системы.

в) Исключение астроинерциальной системы.

Для области *5* астроинерциальная система является излишней. Для остальных областей исключение астроинерциальной системы приводит к снижению точности. На рис. 10.5, *в* построены кривые равных значений коэффициента $\alpha_3 = \sigma_{sп}/\sigma_{so}$, где $\sigma_{sп}$ — среднеквадратичная ошибка при оптимальном преобразовании сигнала только позиционного измерителя. Отметим, что в области *2*, представляющей наибольший интерес (для этой области характерны малые установившиеся дисперсии ошибки и малые постоянные времени), повышение точности астроинерциальной системы при комплексной обработке данных дает сравнительно малый эффект.

10.2. Совместная работа позиционного измерителя и гироинерциальной системы

В состав комплексной системы входят два источника информации: позиционный измеритель и акселерометр, ось чувствительности которого стабилизирована в инерциальном пространстве от свободного гироскопа. Пусть $x_1(t)$ — выходной сигнал позиционного измерителя, $x_2(t)$ — выходной сигнал акселерометра. Условные спектральные плотности полезного сигнала $s(t)$, ошибки позиционного измерителя $n_1(t)$ и ошибки гироинерциальной системы $\bar{n}_2(t)$ [после приведения к полезному сигналу, которое осуществляется звеном с передаточной функцией (10.1)] равны:

$$\left.\begin{aligned} &S_{rr}(\omega) = \frac{2\beta C^2}{\omega^2(\omega^2+\beta^2)}, \qquad S_{n_1 n_1}(\omega) = \sigma_1^2, \\ &S_{\bar{n}_2\bar{n}_2}(\omega) = \frac{2\gamma B_4^2}{\omega^2(\omega^2+\gamma^2)(\omega^2-\Omega^2)^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.22)$$

Общее решение этой задачи более громоздко, чем задачи, приведенной в § 10.1, поэтому ниже сразу рас-

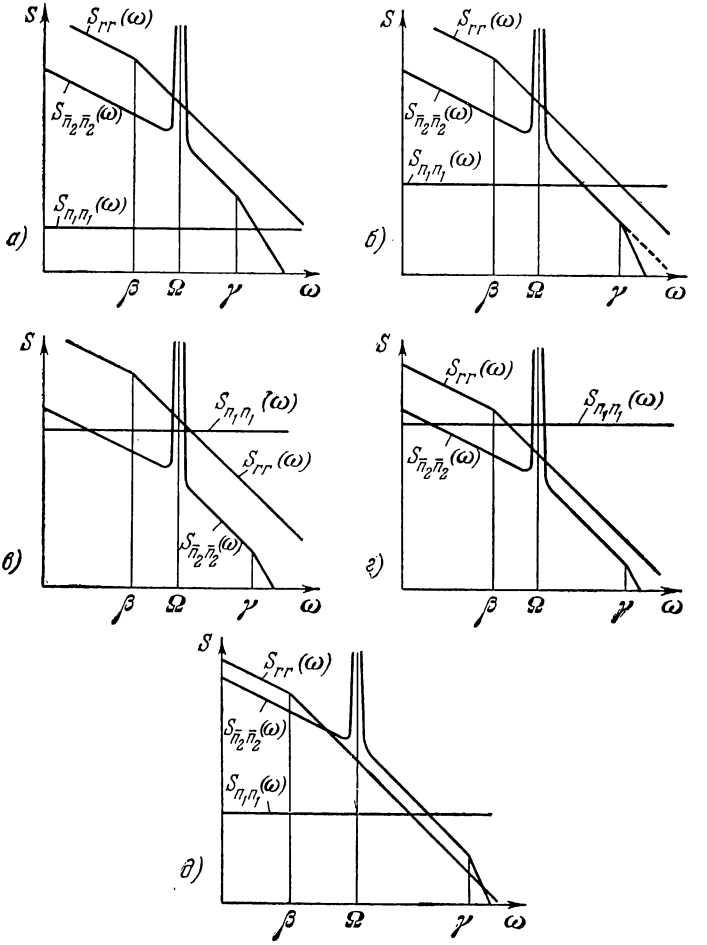

Рис. 10.6.

сматриваются различные варианты соотношений между параметрами сигналов; кривые условных спектральных плотностей изображены на рис. 10.6. Как и в § 10.1,

принято, что $\sigma_1^2 < \frac{2C^2}{\beta^3}$. Кроме того, предполагается, что $\beta < \Omega < \gamma$ (это справедливо по крайней мере для шарико-

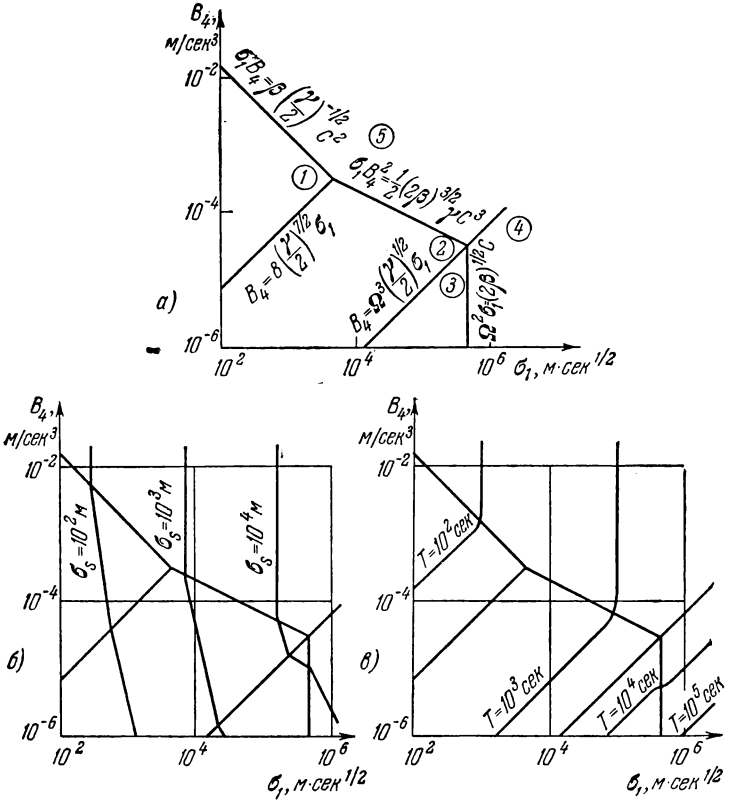

Рис. 10.7.

подшипниковых гироскопов). На плоскости параметров σ_1, B_4 может быть выделено пять областей (рис. 10.7, *а*).

1) Область *1*, для которой

$$B_4 > 8\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{7/2}\sigma_1, \quad \sigma_1 B_4 < \beta\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{-1/2} C^2, \qquad (10.23)$$

Расположение кривых спектральных плотностей показано на рис. 10.6, *а*. Первое условие (10.23) означает, что позиционный измеритель весьма точен. Из рассмотрения кривых следует, что оптимальная система должна быть инвариантной относительно полезного сигнала. Используя приближенные выражения спектральных плотностей ошибок, приведенных к полезному сигналу, получаем, что полюсы искомых передаточных функций представляют собой корни уравнения

$$\xi^8 + \frac{2\gamma B_4^2}{\sigma_1^2} = 0, \tag{10.24}$$

имеющие отрицательные вещественные части. Получаем:

$$\left.\begin{aligned} &\xi_{1,2} = \rho(-0{,}413 \pm 0{,}923j), \\ &\xi_{3,4} = \rho(-0{,}923 \pm 0{,}413j) \qquad [\rho = (2\gamma)^{1/8} B_4^{1/4} \sigma_1^{-1/4}]. \end{aligned}\right\} \tag{10.25}$$

Таким образом, искомые передаточные функции должны иметь четвертый порядок. Из условия конечности дисперсии ошибки при приближенных выражениях спектральных плотностей получаем:

$$\left.\begin{aligned} K_1(j\omega) &= \frac{2{,}67\rho\,(j\omega)^3 + 3{,}42\rho^2\,(j\omega)^2 + 2{,}67\rho^3 j\omega + \rho^4}{(j\omega)^4 + 2{,}67\rho\,(j\omega)^3 + 3{,}42\rho^2\,(j\omega)^2 + 2{,}67\rho^3 j\omega + \rho^4}, \\ K_2(j\omega) &= \frac{(j\omega)^2}{(j\omega)^4 + 2{,}67\rho\,(j\omega)^3 + 3{,}42\rho^2\,(j\omega)^2 + 2{,}67\rho^3 j\omega + \rho^4}. \end{aligned}\right\} \tag{10.26}$$

Как и в § 10.1, предварительное преобразование сигнала акселерометра к полезному сигналу включается в $K_2(j\omega)$. Отметим, что фильтр с передаточной функцией $K_2(j\omega)$ обеспечивает асимптотическую инвариантность относительно постоянной скорости ухода гироскопа. Блок-схема аналогового устройства с передаточными функциями (10.26) изображена на рис. 10.8. Обратная связь может осуществляться, как это обычно делается в реальных системах, путем подачи сигнала на датчик момента гироскопа. Ни по виду полюсов (10.25) передаточных функций, ни по виду блок-схемы система не похожа на известные варианты инерциальных систем, корректируемых от посторонних источников информации.

Установившаяся дисперсия ошибки равна:

$$D_r = 0{,}64\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{-1/8} B_4^{1/4}\sigma_1^{7/4}. \qquad (10.27)$$

Таким образом, точность комплексной системы определяется исключительно точностью позиционного измерителя и лишь в очень малой степени зависит от харак-

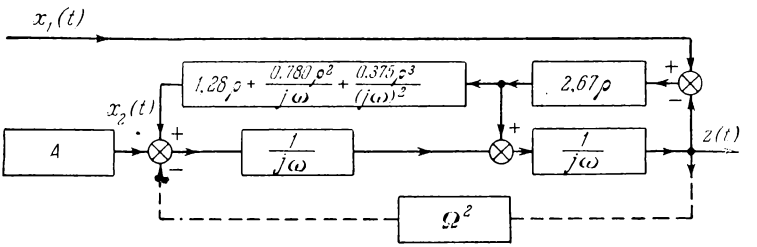

Рис. 10.8.

теристик ухода гироскопа. Быстродействие системы определяется постоянной времени

$$T = 2{,}42\,(2\gamma)^{-1/8} B_4^{-1/4}\sigma_1^{1/4}. \qquad (10.28)$$

2) Область *2*, для которой

$$B_4 < 8\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{7/2}\sigma_1, \qquad B_4 > \Omega^3\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{1/2}\sigma_1, \qquad \sigma_1 B_4^2 < \frac{1}{2}(2\beta)^{3/2}\gamma C^3. \qquad (10.29)$$

Расположение кривых спектральных плотностей показано на рис. 10.6, *б*. Рассматриваемый здесь случай характеризуется бо́льшими ошибками позиционного измерителя, чем слчуай 1). Система также является инвариантной относительно полезного сигнала. Пересечение кривых $S_{n_1n_1}(\omega)$ и $S_{\overline{n_2}\overline{n_2}}(\omega)$ происходит выше последнего перелома кривой $S_{\overline{n_2}\overline{n_2}}(\omega)$. Поэтому, используя упрощенное представление кривой $S_{\overline{n_2}\overline{n_2}}(\omega)$ (пунктир), получаем передаточные функции фильтров третьего порядка, а не

четвертого, как в случае 1). Полюсы передаточных функций приближенно равны:

$$\xi_1 \approx -\rho, \quad \xi_{2,3} \approx \rho\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} j\right) \quad \left[\rho = \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{-1/6} B_4^{1/3} \sigma_1^{-1/3}\right]. \tag{10.30}$$

Из условия конечности дисперсии ошибки получаем:

$$\left.\begin{aligned} K_1(j\omega) &= \frac{2\rho(j\omega)^2 + 2\rho^2 j\omega + \rho^3}{(j\omega)^3 + 2\rho(j\omega)^2 + 2\rho^2 j\omega + \rho^3}, \\ K_2(j\omega) &= \frac{j\omega}{(j\omega)^3 + 2\rho(j\omega)^2 + 2\rho^2 j\omega + \rho^3}. \end{aligned}\right\} \tag{10.31}$$

Блок-схема системы представлена на рис. 10.9. Полученная передаточная функция $K_2(j\omega)$ не дает асимптотической инвариантности относительно постоянной

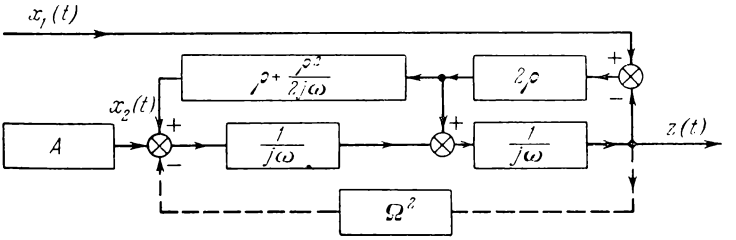

Рис. 10.9.

скорости ухода гироскопа. Однако это свойство можно получить, заменив, например, передаточные функции (10.31) выражениями

$$\left.\begin{aligned} K_1(j\omega) &= \frac{1}{j\omega + \mu} \frac{2\rho(j\omega)^3 + 2\rho^2(j\omega)^2 + \rho^3 j\omega + \mu\rho^3}{(j\omega)^3 + 2\rho(j\omega)^2 + 2\rho^2 j\omega + \rho^3}, \\ K_2(j\omega) &= \frac{1}{j\omega + \mu} \frac{(j\omega)^2}{(j\omega)^3 + 2\rho(j\omega)^2 + 2\rho^2 j\omega + \rho^3}, \end{aligned}\right\} \tag{10.32}$$

где μ произвольно, но удовлетворяет условию $\mu \ll \rho$. При этом свойства фильтров по отношению к недетерминированным составляющим практически не меняются.

Установившаяся дисперсия ошибки приближенно равна:

$$D_r \approx \frac{2}{3}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{-1/6} B_4^{1/3}\sigma_1^{5/3}. \tag{10.33}$$

Как и в случае 1), ошибки определяются в основном ошибками позиционного измерителя, однако здесь точность гироскопа имеет все же несколько большее значение. Быстродействие системы с передаточными функциями (10.31) определяется постоянной времени

$$T = 2\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{1/6} B_4^{-1/3}\sigma_1^{1/3}, \tag{10.34}$$

а системы с передаточными функциями (10.32) — дополнительно введенной большой постоянной $T = \frac{1}{\mu}$.

3) Область *3*, для которой

$$B_4 < \Omega^3\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{1/2}\sigma_1, \qquad \Omega^2\sigma_1 < (2\beta)^{1/2} C. \tag{10.35}$$

Расположение кривых спектральных плотностей показано на рис. 10.6, *в*. Отличие от случая 2) здесь в том, что ошибки позиционного измерителя предполагаются еще бо́льшими. Из рассмотрения кривых следует, что система должна быть инвариантной относительно полезного сигнала. Полюсы передаточных функций приближенно равны:

$$\xi_1 \approx -2\nu\Omega, \quad \xi_{2,3} \approx \Omega(-\nu \pm j) \quad \left[\nu = \frac{1}{2\Omega^3}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{-1/2}\frac{B_4}{\sigma_1} < 1\right]. \tag{10.36}$$

Передаточные функции имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} K_1(j\omega) &= \frac{4\nu\Omega(j\omega)^2 + 2\nu\Omega^3}{(j\omega)^3 + 4\nu\Omega(j\omega)^2 + \Omega^2 j\omega + 2\nu\Omega^3}, \\ K_2(j\omega) &= \frac{j\omega}{(j\omega)^3 + 4\nu\Omega(j\omega)^2 + \Omega^2 j\omega + 2\nu\Omega^3}. \end{aligned}\right\} \tag{10.37}$$

Блок-схема системы изображена на рис. 10.10. В отличие от двух предыдущих случаев, система близка к шулеровской (комплексно-сопряженные полюсы $\xi_{2,3}$ имеют малые вещественные части). Установившаяся дисперсия ошибки равна:

$$D_r = \frac{4}{\Omega^2}(2\gamma)^{-1/2} B_4\sigma_1. \tag{10.38}$$

Из сравнения этого выражения с выражениями (10.27) и (10.33) видно, что здесь точность гироинерциальной системы оказывает бо́льшее влияние на точность комплексной системы. Быстродействие системы оказывается достаточно низким и определяется постоянной времени

$$T = 2\Omega^2 \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{1/2} \frac{\sigma_1}{B_4}. \qquad (10.39)$$

4) Область *4*, для которой

$$B_4 < \Omega^3 \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{1/2} \sigma_1, \qquad \Omega^2 \sigma_1 > (2\beta)^{1/2} C. \qquad (10.40)$$

Расположение кривых спектральных плотностей показано на рис. 10.6, *г*. Ошибки позиционного измерителя предполагаются еще бо́льшими, чем в случае 3). По

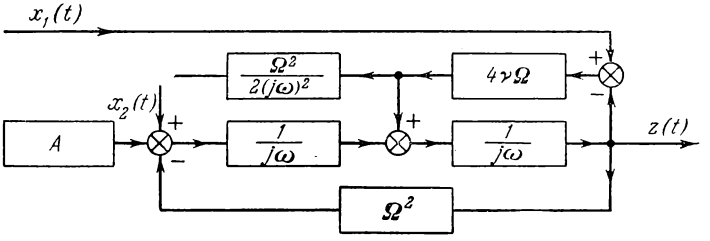

Рис. 10.10.

кривым спектральных плотностей видно, что система использует сигналы обоих измерителей и в то же время не является инвариантной относительно полезного сигнала. Полюсы передаточных функций фильтров приближенно равны:

$$\xi_1 \approx -2\nu\Omega, \qquad \xi_{2,3} \approx \Omega(-\mu \pm j) \qquad (10.41)$$

$$\left[\nu = \frac{1}{2\Omega^3}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{-1/2} \frac{B_4}{\sigma_1}, \ \mu = \frac{(\beta\gamma)^{-1/2}}{2\Omega} \frac{B_4}{C}, \ \mu > \nu\right].$$

Передаточные функции фильтров имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} K_1(j\omega) &= \frac{4\mu\nu\Omega^2 j\omega + 2\nu\Omega^3}{(j\omega + 2\nu\Omega)\,[(j\omega)^2 + 2\mu\Omega j\omega + \Omega^2]}, \\ K_2(j\omega) &= \frac{j\omega}{(j\omega + 2\nu\Omega)\,[(j\omega)^2 + 2\mu\Omega j\omega + \Omega^2]}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.42)$$

Блок-схема системы изображена на рис. 10.11. Для рассматриваемого случая характерно, что демпфирование инерциальной системы осуществляется внутренней связью, а позиционный измеритель осуществляет только слабую коррекцию по координате. Система является сильно колебательной, однако в переходном процессе

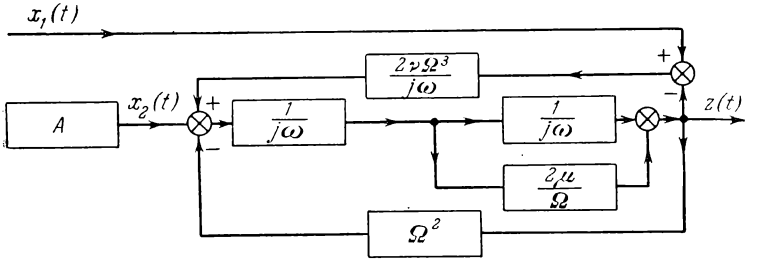

Рис. 10.11.

наиболее затянутой во времени является апериодическая составляющая от позиционной коррекции. Установившаяся дисперсия ошибки равна:

$$D_r = \frac{3}{\Omega^2}(2\gamma)^{-1/2} B_4\sigma_1 + \frac{1}{\Omega^4}\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{1/2} B_4 C. \qquad (10.43)$$

Это первый случай, когда дисперсия ошибки зависит одновременно от характеристик полезного сигнала и обеих ошибок. Быстродействие системы является очень низким и определяется постоянной времени

$$T = \Omega^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{1/2}\frac{\sigma_1}{B_4}. \qquad (10.44)$$

Поскольку это первый пример системы, в которой, во-первых, нужно использовать сигналы обоих источников информации, а во-вторых, не выполняется условие инвариантности относительно полезного сигнала, то интересно проверить, является ли существенным это отклонение от общего правила. Потребуем, чтобы система была инвариантна относительно полезного сигнала, т. е. чтобы демпфирование как и позиционная коррекция осуществлялось от позиционного измерителя. В этом

случае передаточные функции фильтров определяются выражениями (10.37), а дисперсия ошибки — выражением (10.38). Сравнение соотношений (10.43) и (10.38) при условиях (10.40) показывает, что системы мало различаются по точности. Таким образом, алгоритм преобразования, оптимальный в случае 3), дает хорошие результаты и здесь.

5) Область *5*, для которой

$$B_4 > \Omega^3\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{1/2}\sigma_1, \quad \sigma_1 B_4^2 > \frac{1}{2}(2\beta)^{3/2}\gamma C^3, \quad \sigma_1 B_4 > \beta\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{-1/2} C^2. \tag{10.45}$$

Расположение кривых спектральных плотностей показано на рис. 10.6, *д*. Для этого случая характерны большие ошибки и позиционного измерителя, и инерциальной системы. Оптимальная система является одноканальной и не использует сигнала инерциальной системы $[K_2(j\omega)=0]$.

Границами областей на плоскости параметров σ_1, B_4 (см. рис. 10.7, *а*) являются кривые:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_1 B_4 = \beta\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{-1/2} C^2, \quad \sigma_1 B_4^2 = \frac{1}{2}(2\beta)^{3/2}\gamma C^3, \\ &B_4 = \Omega^3\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{1/2}\sigma_1, \quad B_4 = 8\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{7/2}\sigma_1, \quad \Omega^2\sigma_1 = (2\beta)^{1/2} C. \end{aligned}\right\} \tag{10.46}$$

На рис. 10.7, *б* и 10.7, *в* построены кривые равных значений среднеквадратичных ошибок и постоянных времени. Сопоставляя все данные, можно охарактеризовать области следующим образом.

В области *1* система инвариантна относительно полезного сигнала. Передаточные функции фильтров имеют четвертый порядок и обладают достаточно высоким демпфированием. Ошибки системы и постоянные времени относительно малы.

В области *2* система также инвариантна относительно полезного сигнала, но передаточные функции фильтров имеют третий порядок; они также достаточно сильно демпфированы. Ошибки системы и постоянные времени относительно малы.

В области *3* условие инвариантности относительно полезного сигнала сохраняется. Система близка к шуле-ровской, по сигналу позиционного измерителя осуществляется позиционная коррекция и демпфирование инерциальной системы. Ошибки системы относительно малы, быстродействие весьма низко.

В области *4* при очень больших ошибках позиционного измерителя оптимальная система не инвариантна относительно полезного сигнала и использует сигналы обоих измерителей. Система имеет свойства слабо демпфированного (за счет внутренней связи) колебательного контура с периодом Шулера. Сигнал позиционного измерителя используется для слабой позиционной коррекции. Ошибки системы и постоянные времени очень велики.

В области *5* оптимальная система не инвариантна относительно полезного сигнала и использует сигнал только позиционного измерителя.

В отличие от комплексной системы, включающей астроинерциальную систему (см. § 10.1), здесь нет области, для которой оптимальная система может не использовать сигнала позиционного измерителя. Это легко понять, так как гироинерциальная система не может обеспечить ограниченную установившуюся дисперсию ошибки.

Все перечисленные качественные выводы справедливы только для достаточно больших интервалов времени. Для областей *3* и *4* постоянные времени велики, так что установившийся режим практически никогда не будет достигаться. В этих случаях необходимо искать решение с учетом конечности времени работы системы.

Если ограничиться рассмотрением установившихся среднеквадратичных ошибок, то из сопоставления приведенных выше результатов можно установить, к чему приводят априори наложенные ограничения при решении.

а) Условие инвариантности относительно полезного сигнала.

Для областей *1* и *2* это условие получается при оптимальном решении, для областей *4* и *5* оно приводит к потере точности, для области *3*, как отмечалось выше,

оно может быть принято без заметного ущерба для точности. На рис. 10.12, *а* на плоскости параметров σ_1, B_4 построены кривые равных значений коэффициента α_1 (обозначения те же, что и в § 10.1). По мере удаления от границ относительное увеличение ошибок происходит довольно медленно.

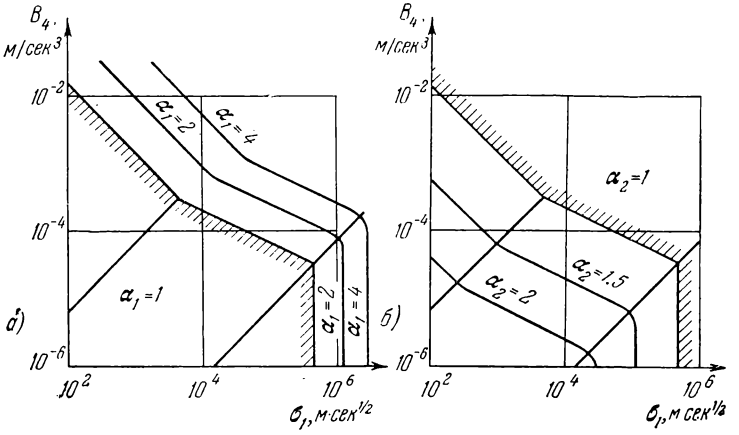

Рис. 10.12.

б) Исключение инерциальной системы.

Для областей *4* и *5* оптимальная система является одноканальной, для областей *1*, *2* и *3* комплексная система обладает более высокой точностью. На рис. 10.12, *б* построены кривые равных значений коэффициента α_2, характеризующего выгоду от использования сигнала второго источника информации — гироинерциальной системы.

По-видимому, наибольший интерес представляют области *1* и *2*. Отметим, что в них постоянные времени невелики и меняются в довольно узких пределах (особенности в области *1*), а среднеквадратичные ошибки определяются в основном ошибками позиционного измерителя и очень мало зависят от точности инерциальной системы. Таким образом, в большинстве случаев выгода от включения гироинерциальной системы невелика.

Преимущества от комплексного использования рассматриваемых источников информации проявляются гораздо яснее, когда позиционный измеритель включен на ограниченном интервале времени, а гироинерциальная система работает непрерывно.

10.3. Совместная работа астроинерциальной системы и измерителя скорости

В состав комплексной системы входят два источника информации: акселерометр, стабилизированный от астросредств, и измеритель скорости. Пусть $x_1(t)$ — сигнал акселерометра, а $x_2(t)$ — сигнал измерителя скорости. Условные спектральные плотности полезного сигнала $s(t)$ и приведенных к полезному сигналу ошибок астроинерциальной системы $\bar{n}_1(t)$ и измерителя скорости $\bar{n}_2(t)$ соответственно равны:

$$S_{rr}(\omega)=\frac{2\beta C^2}{\omega^2(\omega^2+\beta^2)},\quad S_{\bar{n}_1\bar{n}_1}(\omega)=\frac{\sigma_3^2}{(\omega^2-\Omega^2)^2},\quad S_{\bar{n}_2\bar{n}_2}(\omega)=\frac{\sigma_2^2}{\omega^2}. \tag{10.47}$$

В результате решения задачи методом неопределенных коэффициентов получается, что передаточные функции фильтров имеют второй порядок, причем полюсы передаточных функций представляют собой корни уравнения

$$\xi^4\left(1+\frac{\sigma_3^2}{2\beta C^2}\right)+2\xi^2\Omega^2\left(1-\frac{\beta\sigma_3^2}{4\Omega^2C^2}-\frac{\sigma_3^2}{2\Omega^2\sigma_2^2}\right)+\Omega^4=0, \tag{10.48}$$

имеющие отрицательные вещественные части. Из уравнения (10.48) сразу вытекает, что $|\xi_1|\,|\xi_2|=\Omega^2$. Следовательно, стационарные фильтры имеют существенно ограниченное быстродействие, определяемое постоянной времени $T\geqslant\frac{1}{\Omega}$. Таким образом, при любых параметрах сигналов продолжительность переходных процессов достаточно велика и соизмерима с периодом Шулера.

Основные варианты взаимного расположения кривых условных спектральных плотностей изображены на

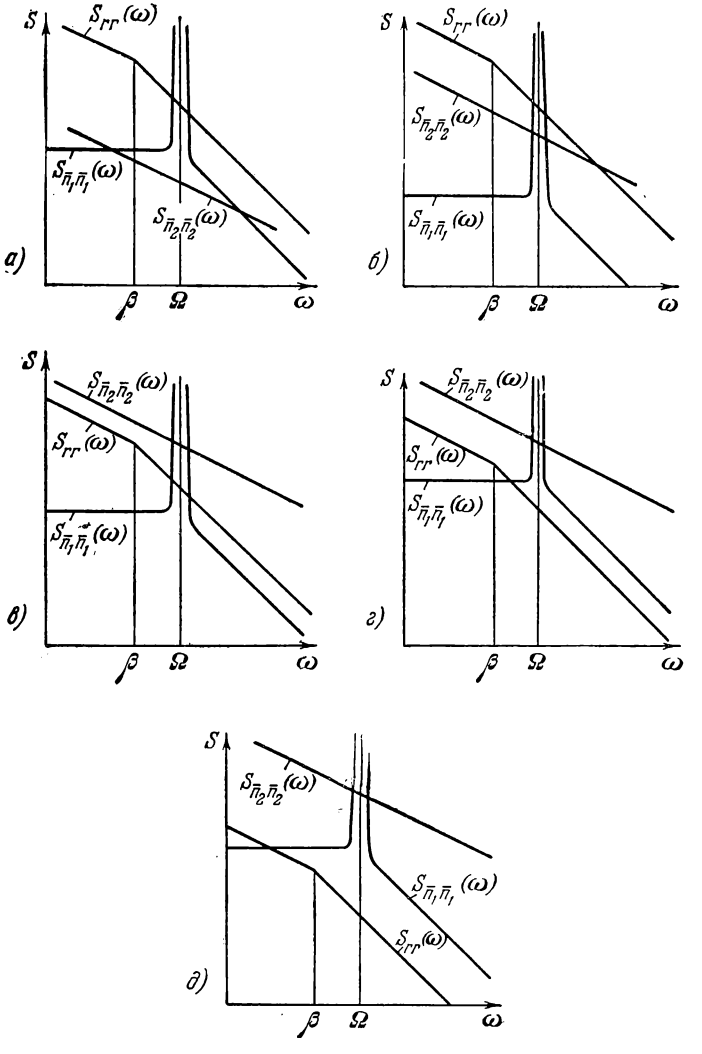

Рис. 10.13.

рис. 10.13. Соответственно могут быть выделены на плоскости параметров σ_2, σ_3 пять областей (рис. 10.14, *а*).

1) Область *1*, для которой

$$\Omega\sigma_2 < \sigma_3, \quad \sigma_2 < 2(2\beta)^{-1/2}C, \quad \Omega^2\sigma_2^2 < (2\beta)^{1/2}C\sigma_3. \quad (10.49)$$

Расположение кривых спектральных плотностей показано на рис. 10.13, *а*. Видно, что оптимальная система

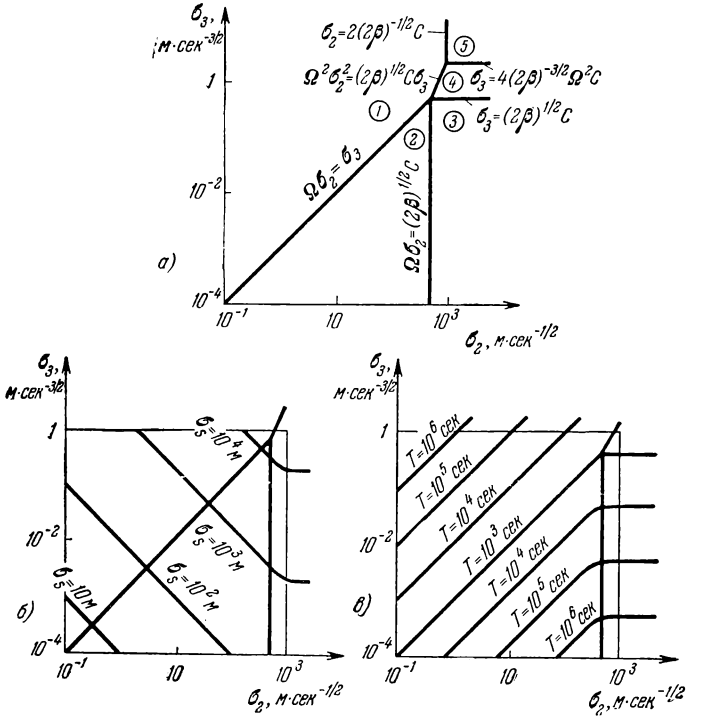

Рис. 10.14.

должна быть инвариантной относительно полезного сигнала. Корни уравнения (10.48), имеющие отрицательные вещественные части, приближенно равны:

$$\xi_1 \approx -\nu\Omega, \quad \xi_2 \approx -\frac{1}{\nu}\Omega \quad \left(\nu = \frac{\Omega\sigma_2}{\sigma_3} < 1\right). \quad (10.50)$$

Второй корень определяет изменения в высокочастотной части характеристик фильтров. Если учитывать только первый корень, который может быть легко получен из рассмотрения спрямленных кривых спектральных плотностей, то передаточные функции фильтров равны:

$$K_1(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + \frac{1}{\nu}\Omega j\omega + \Omega^2}, \quad K_2(j\omega) = \frac{\frac{1}{\nu}\Omega}{(j\omega)^2 + \frac{1}{\nu}\Omega j\omega + \Omega^2}. \tag{10.51}$$

Блок-схема оптимальной системы при учете второго корня представлена на рис. 10.15. Это ранее предлагавшаяся схема демпфирования астроинерциальной системы [12, 30]. Однако здесь коэффициент $\frac{1}{\nu}\Omega$ в демпфирующей связи велик, так что фильтры становятся

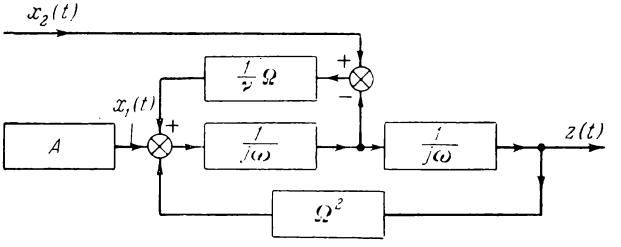

Рис. 10.15.

апериодическими. По динамическим свойствам они близки к фильтрам с передаточными функциями первого порядка вида (9.34) в задаче преобразования сигналов позиционного измерителя и измерителя скорости (см. § 9.3). При необходимости здесь аналогичным образом может быть обеспечена инвариантность системы относительно постоянной ошибки измерителя скорости.

Установившаяся дисперсия ошибки равна:

$$D_r = \frac{1}{\Omega^2}\sigma_2\sigma_3. \tag{10.52}$$

Быстродействие системы низко и определяется постоянной времени

$$T=\frac{1}{\Omega^2}\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\left(>\frac{1}{\Omega}\right). \tag{10.53}$$

2) Область *2*, для которой

$$\sigma_3<\Omega\sigma_2, \qquad \Omega\sigma_2<(2\beta)^{1/2}C. \tag{10.54}$$

Расположение кривых спектральных плотностей показано на рис. 10.13, *б*. Оптимальная система инвариантна относительно полезного сигнала. Корни уравнения (10.48), имеющие отрицательные вещественные части, приближенно равны:

$$\xi_{1,2}\approx\Omega(-\nu\pm j) \qquad \left(\nu=\frac{\sigma_3}{2\Omega\sigma_2}<1\right). \tag{10.55}$$

Передаточные функции фильтров равны:

$$K_1(j\omega)=\frac{1}{(j\omega)^2+2\nu\Omega j\omega+\Omega^2}, \quad K_2(j\omega)=\frac{2\nu\Omega}{(j\omega)^2+2\nu\Omega j\omega+\Omega^2}. \tag{10.56}$$

Блок-схема системы имеет такой вид, как показано на рис. 10.16. Демпфирующая связь здесь достаточно

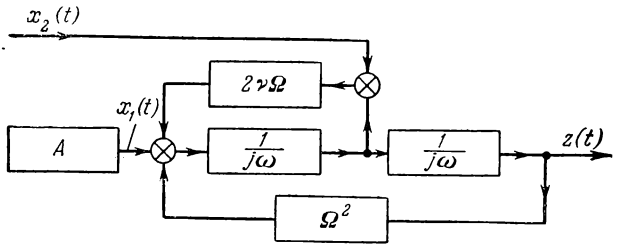

Рис. 10.16.

слаба. В результате получается классическая схема демпфирования астроинерциальной системы от измерителя скорости (см., например, [12, 30]). Установившаяся дисперсия ошибки по-прежнему определяется выраже-

нием (10.52). Быстродействие достаточно низко и характеризуется постоянной времени

$$T = \frac{2\sigma_2}{\sigma_3}\left(> \frac{1}{\Omega}\right). \tag{10.57}$$

3) Область *3*, для которой

$$\sigma_3 < (2\beta)^{1/2} C, \qquad \Omega\sigma_2 > (2\beta)^{1/2} C. \tag{10.58}$$

Расположение кривых спектральных плотностей показано на рис. 10.13, *в*. Система в этом случае становится одноканальной и не использует сигнала измерителя скорости. Решение соответствующей задачи было получено в § 8.2 [случай 1)].

4) Область *4*, для которой

$$(2\beta)^{1/2} C < \sigma_3 < 4(2\beta)^{-3/2}\Omega^2 C, \qquad \Omega^2\sigma_2^2 > (2\beta)^{1/2} C\sigma_3. \tag{10.59}$$

Расположение кривых спектральных плотностей показано на рис. 10.13, *г*. Оптимальная система также является одноканальной. Решение соответствующей задачи было получено в § 8.2 [случай 4)].

5) Область *5*, для которой

$$\sigma_3 > 4(2\beta)^{-3/2}\Omega^2 C, \qquad \sigma_2 > 2(2\beta)^{-1/2} C. \tag{10.60}$$

Расположение кривых спектральных плотностей показано на рис. 10.13, *д*. Оптимальная система является одноканальной, решение задачи получено в § 8.2 [случай 3)].

Все три последних варианта характеризуются большими ошибками и очень низким быстродействием.

На рис. 10.14, *б* и 10.14, *в* на плоскости параметров σ_2, σ_3 построены кривые равных значений среднеквадратичных ошибок и постоянных времени. Стационарные режимы могут представлять практический интерес вблизи границ областей *1* и *2*. По мере удаления от границ постоянные времени растут, так что при этом решение задачи следует находить с учетом конечности времени поступления сигналов.

Если ограничиться рассмотрением только установившихся режимов, то области характеризуются следующими отличительными чертами.

В области *1* оптимальная система инвариантна относительно полезного сигнала. Передаточные функции фильтров имеют первый порядок.

В области *2* оптимальная система также инвариантна относительно полезного сигнала, но представляет собой слабо демпфированное колебательное звено с периодом Шулера.

В областях *3*, *4* и *5* оптимальная система становится одноканальной и не использует сигнала измерителя скорости.

Все эти выводы справедливы, если время поступления сигналов больше постоянных времени. В противном случае выводы о точности и оптимальной структуре могут существенно отличаться от полученных выше.

10.4. Совместная работа двух позиционных измерителей

Задача, рассматриваемая в этом параграфе, отличается от предыдущих тем, что в состав комплексной системы входят два однородных, а не разнородных измерителя. Разница в свойствах измерителей при этом проявляется в том, что у них существенно различны соотношения между медленно меняющимися («систематическими») и флюктуационными составляющими ошибок.

Примем, что ошибки измерителей статистически независимы, а спектральные плотности ошибок имеют вид:

$$S_{n_1n_1}(\omega)=\sigma_1^2+\frac{2\gamma_1B_1^2}{\omega^2+\gamma_1^2},\qquad S_{n_2n_2}(\omega)=\sigma_2^2+\frac{2\gamma_2B_2^2}{\omega^2+\gamma_2^2}. \quad (10.61)$$

В дальнейшем для определенности примем, что $\sigma_1>\sigma_2$. Для условной спектральной плотности полезного сигнала по-прежнему считаем справедливым выражение (6.58). Типичными являются четыре варианта взаимного расположения кривых спектральных плотностей (рис. 10.17). Для всех вариантов характерно, что кривая $S_{rr}(\omega)$ пересекается с кривыми $S_{n_1n_1}(\omega)$ и $S_{n_2n_2}(\omega)$ при достаточно больших значениях ω, где допустимо считать

$$S_{n_1n_1}(\omega)\approx\sigma_1^2,\qquad S_{n_2n_2}(\omega)\approx\sigma_2^2. \quad (10.62)$$

По виду пересечения всех трех кривых видно, что корни определителя системы уравнений, составленных

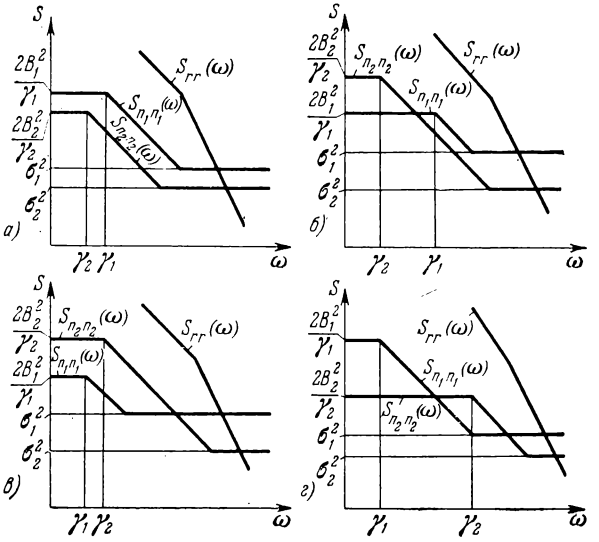

Рис. 10.17.

для передаточных функций фильтров, разделяются на две группы (см. § 4.3):

а) в диапазоне $0<\omega<\omega_1$ выполняется условие $S_{rr}(\omega) \gg S_{n_1n_1}(\omega)$, $S_{n_2n_2}(\omega)$, следовательно, соответствующая группа корней находится из уравнения

$$S_{n_1n_1}(\omega)+S_{n_2n_2}(\omega)=0; \tag{10.63}$$

б) в диапазоне $\omega_1<\omega<\infty$ выполняется условие $S_{n_1n_1}(\omega) \gg S_{rr}(\omega)$, $S_{n_2n_2}(\omega)$, следовательно, вторая группа корней находится из уравнения

$$S_{rr}(\omega)+\sigma_2^2=0. \tag{10.64}$$

Полюсами передаточных функций являются те корни уравнений (10.63) и (10.64), которые лежат в верхней полуплоскости комплексной плоскости ω. Заметим, что уравнение (10.64) определяет полюсы, относительно

большие по абсолютной величине, уравнение (10.63) — относительно малые. По виду кривых спектральных плотностей легко установить, что каждому из уравнений (10.63) и (10.64) соответствует по паре полюсов передаточных функций. Первые два полюса находятся как корни уравнения

$$\xi^4(\sigma_1^2+\sigma_2^2)-\xi^2\left[(\sigma_1^2+\sigma_2^2)(\gamma_1^2+\gamma_2^2)+2\gamma_1B_1^2+2\gamma_2B_2^2\right]+$$
$$+\left[(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\gamma_1^2\gamma_2^2+2\gamma_1\gamma_2^2B_1^2+2\gamma_1^2\gamma_2B_2^2\right]=0, \quad (10.65)$$

имеющие отрицательные вещественные части, а два других полюса приближенно равны:

$$\xi_{3,4}\approx\rho(-1\pm j) \qquad \left[\rho=\left(\frac{\beta}{2}\right)^{1/4}C^{1/2}\sigma_2^{-1/2}\right]. \quad (10.66)$$

В дальнейшем будем принимать:

$$\frac{2B_1^2}{\gamma_1}\gg\sigma_1^2, \qquad \frac{2B_2^2}{\gamma_2}\gg\sigma_2^2. \quad (10.67)$$

Для различных случаев взаимного расположения кривых $S_{n_1n_1}(\omega)$ и $S_{n_2n_2}(\omega)$ решение может быть получено в компактном виде. Рассмотрим четыре варианта.

1) Кривые спектральных плотностей ошибок не пересекаются (рис. 10.17, *а*). В этом случае

$$\frac{\gamma_2B_1^2}{\gamma_1B_2^2}>1, \qquad \frac{\gamma_1B_1^2}{\gamma_2B_2^2}>1. \quad (10.68)$$

Из решения задачи получаем $K_1(j\omega)=0$. Как и следовало ожидать, сигнал первого измерителя не следует использовать, так как второй измеритель характеризуется меньшей мощностью ошибок на всех частотах.

2) Кривые спектральных плотностей ошибок пересекаются в одной точке (рис. 10.17, *б*), так что

$$\frac{\gamma_2B_1^2}{\gamma_1B_2^2}<1, \qquad \frac{\gamma_1B_1^2}{\gamma_2B_2^2}>1. \quad (10.69)$$

В этом случае получаем:

$$\left.\begin{aligned} K_1(j\omega)&=\frac{\tau}{j\omega+\tau}\,\frac{2\rho j\omega+2\rho^2}{(j\omega)^2+2\rho j\omega+2\rho^2},\\ K_2(j\omega)&=\frac{j\omega}{j\omega+\tau}\,\frac{2\rho j\omega+2\rho^2}{(j\omega)^2+2\rho j\omega+2\rho^2},\end{aligned}\right\} \quad (10.70)$$

где

$$\rho = \left(\frac{\beta}{2}\right)^{1/4} C^{1/2}\sigma_2^{-1/2}, \qquad \tau = \frac{B_2}{B_1}(\gamma_1\gamma_2)^{1/2} \qquad (\tau < \rho). \quad (10.71)$$

Установившаяся дисперсия ошибки приближенно равна:

$$D_{s0} = (2\beta)^{1/4} C^{1/2}\sigma_2^{3/2} + 2\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^{1/2} B_1 B_2. \qquad (10.72)$$

Первое слагаемое зависит от мощности флюктуационной помехи только второго канала и имеет тот же вид, что и в задаче о преобразовании сигнала одного позиционного измерителя (см. § 6.3). Это получается потому, что при $\omega \gg \tau$ выполняется неравенство $|K_1(j\omega)| \ll |K_2(j\omega)|$. Первое слагаемое выражения дисперсии ошибки зависит от характеристик медленно меняющихся ошибок обоих измерителей. Заметим, что из условий (10.69) следует, что $\gamma_2 < \gamma_1$. При большой разнице в значениях γ_2 и γ_1 будут выполняться условия

$$2\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^{1/2} B_1 B_2 < B_1^2, \qquad 2\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^{1/2} B_1 B_2 < B_2^2, \quad (10.73)$$

т. е. система даст уменьшение «систематических» ошибок по сравнению с каждым измерителем в отдельности.

3) Кривые спектральных плотностей ошибок пересекаются в одной точке (рис. 10.17, *в*), так что

$$\frac{\gamma_2 B_1^2}{\gamma_1 B_2^2} < 1, \qquad \frac{\gamma_1 B_1^2}{\gamma_2 B_2^2} < 1. \qquad (10.74)$$

Из этих условий вытекает, что $B_1^2 < B_2^2$. Передаточные функции фильтров имеют тот же вид (10.70), причем значение ρ определяется по-прежнему первым выражением (10.71), а τ находится иначе:

$$\tau = \frac{B_2}{\sigma_1}(2\gamma_2)^{1/2}. \qquad (10.75)$$

Установившаяся дисперсия ошибки равна:

$$D_{s0} = (2\beta)^{1/4} C^{1/2}\sigma_2^{3/2} + B_1^2. \qquad (10.76)$$

В рассматриваемом случае, таким образом, получается наиболее отчетливый физический результат: оптимальная система использует преимущества первого канала

в низкочастотной области, а второго канала в высокочастотной. Поэтому в выражение (10.76) входят дисперсия «систематической» ошибки первого измерителя и результат фильтрации флюктуационной составляющей ошибки второго измерителя.

4) Кривые спектральных плотностей ошибок пересекаются в двух точках (рис. 10.17, *г*). В этом случае

$$\frac{\gamma_2 B_1^2}{\gamma_1 B_2^2} > 1, \quad \frac{\gamma_1 B_1^2}{\gamma_2 B_2^2} < 1. \tag{10.77}$$

Для передаточных функций фильтров получаем следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} K_1(j\omega) &= \frac{j\omega(\tau_1+\tau_2)}{(j\omega)^2+(\tau_1+\tau_2)j\omega+\tau_1\tau_2}\,\frac{2\rho j\omega+2\rho^2}{(j\omega)^2+2\rho j\omega+2\rho^2}, \\ K_2(j\omega) &= \frac{(j\omega)^2+\tau_1\tau_2}{(j\omega)^2+(\tau_1+\tau_2)j\omega+\tau_1\tau_2}\,\frac{2\rho j\omega+2\rho^2}{(j\omega)^2+2\rho j\omega+2\rho^2}. \end{aligned}\right\} \tag{10.78}$$

Здесь ρ определяется первым выражением (10.71), а τ_1 и τ_2 находятся следующим образом:

$$\tau_1 = \frac{B_1}{B_2}(\gamma_1\gamma_2)^{1/2}, \quad \tau_2 = \frac{B_2}{\sigma_1}(2\gamma_2)^{1/2}. \tag{10.79}$$

Установившаяся дисперсия ошибки равна:

$$D_{s0} = (2\beta)^{1/4} C^{1/2}\sigma_2^{3/2} + B_2\sigma_1\left(\frac{\gamma_2}{2}\right)^{1/2} + B_1 B_2\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)^{1/2}. \tag{10.80}$$

Отметим, что во всех четырех случаях система не инвариантна относительно полезного сигнала.

Интересно сравнить результаты с тем, что получается при строго постоянных «систематических» ошибках. Примем, что в выражениях (10.61) $\gamma_1=0$ и $\gamma_2=0$. Введем при этом обозначения $B_1=B_{10}$ и $B_2=B_{20}$. Как обычно получается в подобных случаях, при неограниченном времени поступления сигналов можно получить дисперсию ошибки

$$D_{s0} = D_r + \min(B_{10}^2,\ B_{20}^2), \tag{10.81}$$

где D_r определяется характеристиками только недетерминированных составляющих. В частности, можно выбрать передаточные функции в том же виде, что и при

медленно меняющихся «систематических» составляющих. Рассмотрим два варианта задачи.

1)* $$B_{10} > B_{20}. \tag{10.82}$$

В этом случае практически оптимальной оказывается одноканальная система $[K_1(j\omega)=0]$. Дисперсия ошибки равна:

$$D_{s0} = (2\beta)^{1/4} C^{1/2} \sigma_2^{3/2} + B_{20}^2. \tag{10.83}$$

2)* $$B_{10} < B_{20}. \tag{10.84}$$

В этом случае результаты, близкие к оптимальным, получаются при передаточных функциях вида (10.70), в которых, однако, значение τ произвольно. Налагается лишь ограничение сверху: $\tau \ll \rho$. При $\tau \to 0$ дисперсия ошибки оказывается равной:

$$D_{s0} = (2\beta)^{1/4} C^{1/2} \sigma_2^{3/2} + B_{10}^2. \tag{10.85}$$

Это выражение по форме совпадает с выражением (10.76) и имеет тот же смысл: точность оптимальной системы характеризуется «систематической» ошибкой первого измерителя и результатом фильтрации флюктуационной ошибки второго измерителя.

Если рассматривать постоянные «систематические» ошибки лишь как идеализацию медленно изменяющихся ошибок, то следует обратить внимание на неполное совпадение результатов для случаев 1) и 2) с более точными. Для случая 1) $(B_1 > B_2)$ приближенное рассмотрение годится [так же, как и в случае 1)*, получается $K_1(j\omega)=0$]. Для случая 3) $(B_1 < B_2)$ передаточные функции в форме (10.70) одинаково пригодны и для приближенного и для более точного решения. Однако значение параметра τ в случае 2)* в значительной мере произвольно, а в случае 3) — вполне определенно [выражение (10.75)]. Если при $\gamma_1 \neq 0$ и $\gamma_2 \neq 0$ положить $\tau \to 0$, то вместо выражения (10.76) получим:

$$D_{s0} = (2\beta)^{1/4} C^{1/2} \sigma_2^{3/2} + B_2^2, \tag{10.86}$$

что свидетельствует о потере точности, так как $B_2 > B_1$.

Наконец, в случаях 2) и 4) может быть как $B_1 > B_2$, так и $B_2 > B_1$. Решения при этом существенно отличаются

от полученных в случаях 1) и 3), для которых годится приближенное рассмотрение. Использование же передаточных функций, оптимальных для случаев 1) и 3), приведет к большему или меньшему проигрышу в точности. Отсюда следует, что в рассматриваемой задаче оптимального преобразования существенно необходимо детально знать характеристики «систематических» составляющих ошибок; сведений о соотношении их среднеквадратичных значений (B_1 и B_2) недостаточно.

10.5. Совместная работа позиционного измерителя, измерителя скорости и гироинерциальной системы

Рассмотрим теперь более сложную, трехканальную комплексную систему, в которую входят позиционный измеритель [его выходной сигнал $x_1(t)$], измеритель скорости [выходной сигнал $x_2(t)$] и гироинерциальная система [выходной сигнал ее акселерометра $x_3(t)$]. Условные спектральные плотности полезного сигнала и ошибок, приведенных к полезному сигналу, имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &S_{rr}(\omega)=\frac{2\beta C^2}{\omega^2(\omega^2+\beta^2)}, \quad S_{n_1n_1}(\omega)=\sigma_1^2,\\ &S_{\bar{n}_2\bar{n}_2}(\omega)=\frac{\sigma_2^2}{\omega^2}, \quad S_{\bar{n}_3\bar{n}_3}(\omega)=\frac{2\gamma B_4^2}{\omega^2(\omega^2+\gamma^2)(\omega^2-\Omega^2)^2}. \end{aligned}\right\} \quad (10.87)$$

Все помехи считаются взаимно статистически независимыми. Для позиционного измерителя и измерителя скорости пренебрегаем медленно меняющимися составляющими ошибок, для гироинерциальной системы пренебрегаем стационарными составляющими ошибок и учитываем только ошибки от ухода гироскопа.

При решении задачи методом неопределенных коэффициентов для передаточных функций $K_1(j\omega)$, $K_2(j\omega)$ и $K_3(j\omega)$ получается система трех уравнений (см. § 4.3). Полюсы передаточных функций представляют собой корни уравнения

$$\xi^8+\xi^6(2\Omega^2-\gamma^2)+\xi^4\left(\Omega^4-2\Omega^2\gamma^2+\frac{\gamma B_4^2}{\beta C^2}\right)-$$
$$-\xi^2\left(\Omega^4\gamma^2+\frac{2\gamma B_4^2}{\sigma_2^2}+\frac{\gamma\beta B_4^2}{C^2}\right)+\frac{2\gamma B_4^2}{\sigma_1^2}=0, \quad (10.88)$$

имеющие отрицательные вещественные части. В общем случае корни этого уравнения зависят от шести параметров сигналов (C, β, σ_1, σ_2, B_4, γ). Качественное исследование решений становится очень простым, если использовать кривые условных спектральных плотностей.

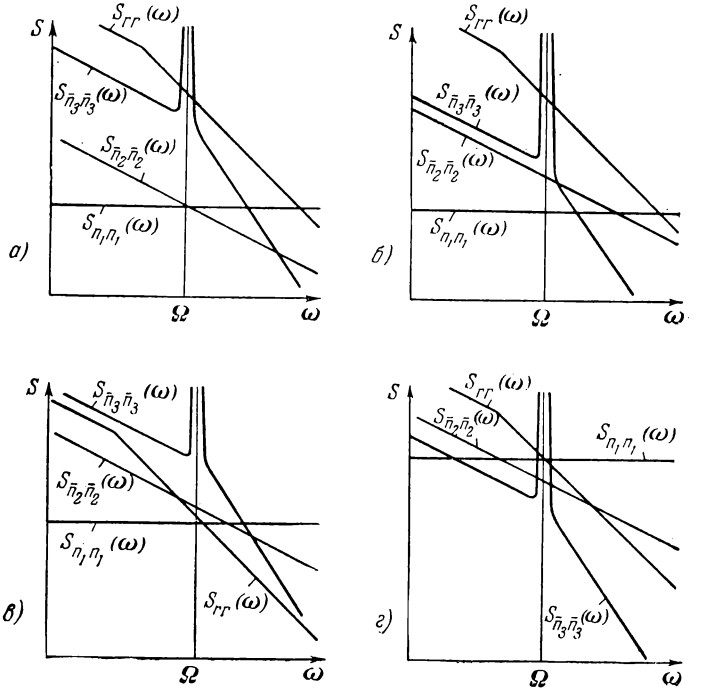

Рис. 10.18.

Различные варианты взаимного расположения этих кривых для случаев, представляющих наибольший интерес, изображены на рис. 10.18. Видно, что в трех из приведенных четырех случаев оптимальная трехканальная система или вырождается в двухканальную, причем должно быть выполнено условие инвариантности относительно полезного сигнала, или в одноканальную.

В случае 1) (рис. 10.18, *а*) оптимальная система использует сигналы позиционного измерителя и измерителя скорости и инвариантна относительно полезного сигнала.

В случае 2) (рис. 10.18, *б*) оптимальная система использует сигналы позиционного измерителя и инерциальной системы и также инвариантна относительно полезного сигнала.

В случае 3) (рис. 10.18, *в*) оптимальная система использует только сигнал позиционного измерителя и не инвариантна относительно полезного сигнала.

Исключение составляет только случай 4) (рис. 10.18, *г*), в котором оптимальная система использует все три сигнала измерителей и инвариантна относительно полезного сигнала: позиционный измеритель осуществляет слабую позиционную коррекцию гироинерциальной системы, а измеритель скорости — ее демпфирование. Однако численные расчеты показывают, что если для демпфирования также использовать сигнал позиционного измерителя, то проигрыш в точности получается небольшим. Таким образом, и в этом случае можно считать, что оптимальная система вырождается в двухканальную.

Оптимальные решения для двухканальных систем найдены в главе 9 и предыдущих параграфах данной главы.

Из всего сказанного не вытекает вывода о том, что в состав навигационного комплекса нет необходимости включать более двух измерителей. Следует иметь в виду два обстоятельства:

1. Параметры ошибок медленно меняются в течение полета, так что на различных интервалах времени целесообразно использовать различные сочетания приборов.

2. При учете конечности интервалов времени работы приборов (неустановившиеся режимы) даже при неизменных свойствах сигналов может оказаться целесообразным использование сигналов трех или даже большего числа измерителей. Такое положение вероятно в особенности тогда, когда измерители включаются в работу и выключаются неодновременно.

ГЛАВА 11

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ДИСКРЕТНЫХ ДАННЫХ

Дискретный характер данных, подлежащих обработке, может быть обусловлен как принципом работы источников информации или заданием из посторонних соображений режима их работы, так и спецификой ввода данных в вычислительное устройство. В первом случае характерно нерегулярное поступление данных, во втором — периодическое. В этой главе рассматриваются немногие задачи и того и другого вида. В задачах, сформулированных и решенных в более частной постановке, чем в предыдущих главах, внимание уделяется анализу основных качественных эффектов. Во-первых, выясняется, какая потеря точности связана только с дискретным характером поступления данных. Ответ на этот вопрос дают решения задач чистой экстраполяции по идеально точным данным. Во-вторых, рассматриваются пути и перспективы использования дискретных источников информации для коррекции непрерывных, менее точных данных. При этом коррекция позволяет не только «сбросить» ошибки в момент поступления дискретных данных, но и выявить постоянные ошибки непрерывных измерителей и этим повысить их точность.

11.1. Преобразование результатов двух дискретных измерений координаты

В вычислительное устройство поступают результаты двух измерений координаты в моменты времени $t=0$ и $t=T$, т. е. величины

$$x(0)=s(0)+n_1, \qquad x(T)=s(T)+n_2. \tag{11.1}$$

Будем предполагать, что ошибки измерения n_1 и n_2 — статистически независимые случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и одинаковыми дисперсиями, равными σ^2. Выходной сигнал навигационной системы формируется следующим образом:

$$q(t) = m(t) + a_1(t)\,x(0) + a_2(t)\,x(T). \tag{11.2}$$

Из условия минимума дисперсии ошибки (см. § 3.7) получаются следующие уравнения для весовых коэффициентов a_1 и a_2:

$$\left.\begin{aligned} &a_1(C_0^2+\sigma^2)+a_2C_0^2=C_0^2,\\ &a_1C_0^2+a_2\left\{C_0^2+C_1^2T^2+\frac{2C^2}{\beta}\left[T-\frac{1}{\beta}(1-e^{-\beta T})\right]+\sigma^2\right\}=\\ &=C_0^2+C_1^2tT+\frac{C^2}{\beta}\left\{2T+\frac{1}{\beta}\left[-1+e^{-\beta t}+e^{-\beta T}-e^{-\beta(t-T)}\right]\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{11.3}$$

Если пренебречь ошибками измерения (принять $\sigma=0$), то коэффициенты a_1 и a_2 будут равны:

$$\left.\begin{aligned} &a_2=\frac{C_1^2Tt+\frac{C^2}{\beta}\left\{2T+\frac{1}{\beta}\left[-1+e^{-\beta t}+e^{-\beta T}-e^{-\beta(t-T)}\right]\right\}}{C_1^2T^2+\frac{2C^2}{\beta}\left[T-\frac{1}{\beta}(1-e^{-\beta T})\right]},\\ &a_1=1-a_2. \end{aligned}\right\} \tag{11.4}$$

При наложении условия несмещенности относительно детерминированной составляющей полезного сигнала ($C_1\to\infty$) при любом C_0, а также при больших $\Delta t=t-T$ ($\Delta t\gg 1/\beta$) и при малых Δt ($\Delta t\ll 1/\beta$) для коэффициентов получаются одни и те же приближенные выражения:

$$a_1(t)\approx 1-\frac{t}{T},\qquad a_2(t)\approx\frac{t}{T}. \tag{11.5}$$

Таким образом, в этих предельных случаях оптимальная система должна осуществлять просто линейную экстраполяцию по двум точкам. Это хорошо согласуется с результатами главы 5. При малых Δt дисперсия ошибки приближенно равна:

$$D_s(t)\approx\frac{2}{3}C^2\beta t\,(\Delta t)^2. \tag{11.6}$$

При $T \to 0$ это выражение переходит в первое выражение (5.39). Это и понятно: при точных измерениях знание двух близких значений координаты эквивалентно знанию координаты и ее производной в тот же момент времени. При фиксированном Δt сближение моментов измерения (уменьшение T) повышает точность экстраполяции. Это свойство является следствием сделанного выше предположения об идеальной точности измерений ($\sigma = 0$).

Учтем теперь ошибки измерения, т. е. примем $\sigma \neq 0$. При малых Δt коэффициенты a_1 и a_2 будут по-прежнему определяться приближенно выражениями (11.5). При малых Δt для дисперсии ошибки получаем:

$$D_s(t) \approx \frac{2}{3} C^2 \beta t (t - T)^2 + \sigma^2 \frac{2t^2}{T^2} \left(1 - \frac{T}{t} + \frac{T^2}{2t^2}\right). \quad (11.7)$$

Составляющая дисперсии ошибки, происходящая от ошибок в измерении координаты (второе слагаемое), растет с уменьшением T. При малых Δt первое слагаемое мало. При увеличении Δt первое слагаемое растет быстрее, чем второе. Отсюда следует, что при расчете ошибок при малых Δt хорошие результаты можно получить, учитывая только ошибки измерения и игнорируя недетерминированный характер изменения координаты; при достаточно больших Δt недетерминированный характер изменения координаты может иметь основное значение. При больших Δt качественные особенности решения и количественные оценки получаются теми же, что в задаче экстраполяции по точно известным начальным условиям (см. § 5.2). С увеличением Δt влияние ошибок измерения координаты становится все меньше.

11.2. Преобразование большого числа точных дискретных данных

Рассмотрим задачу преобразования дискретных значений координаты, поступающих через равные интервалы времени в моменты $t = 0$, T, $2T$, ... К такой задаче мы приходим в следующих случаях:

1. Навигационный прибор является дискретным по самому принципу действия.

2. Преобразование данных осуществляет ЦВМ. В этом случае T представляет собой или период «опроса» датчиков, или время такта машины.

Навигационная система должна непрерывно вырабатывать текущие значения координаты. Однако в дальнейшем рассматривается упрощенная постановка задачи: вычислительное устройство определяет значения координаты в дискретные моменты времени $t=T-0$, $2T-0$, ... В результате расчета точности такой чисто дискретной системы мы получим оценки для максимальной (во времени) дисперсии ошибки другой системы, вырабатывающей данные непрерывно. Действительно, в установившемся режиме дисперсия ошибки непрерывной системы является периодической функцией времени. При этом максимум достигается каждый раз непосредственно

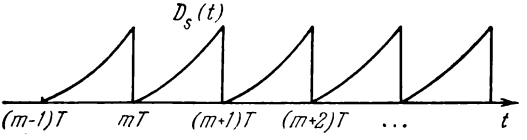

Рис. 11.1.

перед получением очередного дискретного значения координаты (рис. 11.1). Величина максимума получается из решения задачи экстраполяции на один такт.

Ниже рассматривается более общая задача экстраполяции на N тактов [известны значения входного сигнала в моменты времени ..., $(m-1)T$, mT; определению подлежит значение полезного сигнала в момент $(m+N)T$]. Этим учитывается возможность сбоя на несколько тактов измерителя или канала передачи данных. Решается задача чистой экстраполяции, т. е. предполагается, что измеритель дает точные дискретные значения сигнала. По отношению к реальным условиям такая идеализация дает возможность оценить пределы по точности, обусловленные только дискретным характером поступления данных.

При достаточно большом времени поступления данных процесс оптимального преобразования переходит в установившийся. Детерминированные составляющие сиг-

налов играют роль только в течение «переходного процесса». Поэтому при расчете установившегося режима (время поступления данных так велико, что его можно считать бесконечным) следует учитывать только недетерминированную составляющую полезного сигнала. Задача решается с помощью z-преобразования. Свойства экстраполятора определяются дискретной передаточной функцией $K(z)$.

Условие минимума дисперсии ошибки экстраполяции на N тактов имеет вид [17]:

$$\frac{1}{z}K(z)S_{rr}(z)-\frac{1}{z}S_{lr}(z)=X(z). \qquad (11.8)$$

Здесь $X(z)$ — неизвестная функция комплексной переменной z, не имеющая особенностей внутри круга единичного радиуса, $S_{rr}(z)$ — спектральная плотность дискретных значений недетерминированной составляющей полезного сигнала, $S_{lr}(z)$ — взаимная спектральная плотность дискретных значений недетерминированной составляющей полезного сигнала и этой же составляющей, экстраполированной на N тактов:

$$S_{lr}(z)=z^N S_{rr}(z). \qquad (11.9)$$

По таблицам z-преобразований [17] находим:

$$S_{rr}(z)=\frac{D^2(1-\mu z)(1-\mu z^{-1})}{(1-dz)(1-dz^{-1})(1-z)(1-z^{-1})}, \qquad (11.10)$$

где

$$D^2=\frac{C^2}{\beta\mu}\left(2Td-\frac{1-d^2}{\beta}\right), \quad \mu=e^{-\xi T}, \quad d=e^{-\beta T}. \qquad (11.11)$$

Значение ξ определяется выражением

$$\operatorname{ch}\xi T=\frac{\beta T(1+d^2)-(1-d^2)}{2\beta Td-(1-d^2)}. \qquad (11.12)$$

Правая часть последнего выражения больше единицы, поэтому уравнение всегда имеет решение.

Уравнение (11.8) решается методом неопределенных коэффициентов (он аналогичен методу неопределенных коэффициентов в теории непрерывных систем; см. § 3.4). Полюсы $K(z)$ представляют собой корни уравнения $S_{rr}(z)=0$, лежащие внутри круга единичного радиуса.

Единственный такой корень есть $z=\mu$. Поэтому искомую передаточную функцию следует искать в форме

$$K(z)=\frac{A_0 z+A_1}{z-\mu}. \tag{11.13}$$

Из условия удовлетворения исходного уравнения (11.8) получаем:

$$A_0=\frac{1-\mu+d^N(d-\mu)}{1-d}, \quad A_1=\frac{d^N(d-\mu)-d(1-\mu)}{1-d}. \tag{11.14}$$

Дисперсия ошибки равна:

$$D_s=\frac{C^2}{\beta^2}\left\{2\beta T\left[N+\frac{(\mu-d)(1-d^N)}{(1-d)(1-\mu)}\right]-\right.$$
$$\left.-(1-d^N)\frac{1-\mu d-d^N(d-\mu)}{1-\mu d}\right\}. \tag{11.15}$$

При малых T приближенно получаем:

$$D_s\approx\frac{2}{3}\frac{C^2}{\beta^2}N(\beta T)^3. \tag{11.16}$$

По этой формуле может быть оценено допустимое время такта ЦВМ (при $N=1$ для идеального случая отсутствия сбоев в поступлении данных; при $N=2$, когда допускаются редкие сбои на один такт, при $N=3$ — на два такта и т. д.).

В предельном случае при $T\to 0$ и $NT=T_0$ получаем:

$$D_s\to\frac{2}{3}\frac{C^2}{\beta^2}(\beta T_0)^3. \tag{11.17}$$

Это же выражение, характеризовавшее непрерывный экстраполятор, работавший при полностью известной предыстории движения, было получено в § 5.3.

11.3. Использование результата однократного измерения координаты для коррекции измерителя скорости

Пусть данные о движении объекта поступают от двух измерителей: дискретного позиционного измерителя и непрерывного измерителя скорости. Позиционный измери-

тель выдает результат единственного измерения координаты в момент времени $t=T$:

$$x_1(T)=s(T)+b_1, \tag{11.18}$$

где b_1 — случайная ошибка с дисперсией B_1^2. Измеритель скорости работает непрерывно от момента начала движения ($t=0$) до текущего момента времени t, для которого должно быть определено значение координаты. Его выходной сигнал равен:

$$x_2(t)=\dot{s}(t)+n_2(t)+b_2, \tag{11.19}$$

где $n_2(t)$ — белый шум интенсивности σ_2^2, b_2 — постоянная ошибка с дисперсией B_2^2.

Смысл поставленной задачи в основном тот же, что и в § 9.4. На интервале $(0, T)$ осуществляется счисление пути по сигналу измерителя скорости. Получаемое от позиционного измерителя дискретное значение координаты позволяет, во-первых, уточнить начальное условие для счисления пути, а во-вторых, частично выявить, а затем и скомпенсировать постоянную ошибку измерителя скорости (если начальное значение координаты известно достаточно точно).

Выходной сигнал навигационной системы формируется следующим образом:

$$z(t)=a(t)\,x_1(T)+\int_0^t W(t,\tau)\,x_2(\tau)\,d\tau. \tag{11.20}$$

Интервал времени $(0, T)$ считается достаточно малым, так что в его пределах возможно использовать только первые слагаемые разложения корреляционных функций в степенные ряды [выражения (9.11)]. Относительно интервала (T, t) можно или принимать, или не принимать это допущение. Соответственно ниже рассматриваются два случая.

а) Интервал (T, t) также достаточно мал. Система уравнений для весового коэффициента $a(t)$ и импульсной

переходной функции $W(t, \tau)$ имеет вид (см. § 4.4):

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^t W(t, \tau_2) R_{x_2x_2}(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_2 = \\ &\qquad = R_{sx_2}(t, \tau_1) - aR_{x_1x_2}(T, \tau_1), \\ &aR_{x_1x_1}(T, T) = \\ &\qquad = R_{sx_1}(t, T) - \int_0^t W(t, \tau_2) R_{x_1x_2}(t, \tau_2)\, d\tau_2. \end{aligned}\right\} \quad (11.21)$$

При использовании приближенных выражений (9.11) интегральное уравнение вырождается. Так как $W(t, \tau)$, вообще говоря, должно иметь различные аналитические выражения на интервалах $(0, T)$ и (T, t), то следует записать:

$$W(t, \tau) = \begin{cases} \mu_1(t) & \text{при} \quad 0 \leqslant \tau < T, \\ \mu_2(t) & \text{при} \quad T \leqslant \tau < t. \end{cases}$$

Однако одно из условий удовлетворения уравнений (11.21) сразу дает $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Получаем два уравнения относительно $a(t)$ и $\mu(t)$:

$$\left.\begin{aligned} &\mu(\bar{C}_1^2 t + \sigma_2^2 + B_2^2 t) + a\bar{C}_1^2 T = \bar{C}_1^2 t, \\ &\mu\bar{C}_1^2 Tt + a(C_0^2 + \bar{C}_1^2 T^2 + B_1^2) = C_0^2 + \bar{C}_1^2 Tt. \end{aligned}\right\} \quad (11.22)$$

При наложении условий несмещенности относительно детерминированной составляющей полезного сигнала ($C_0 \to \infty$, $\bar{C}_1 \to \infty$) получаем:

$$a = 1, \quad \mu = \frac{t-T}{t}, \quad D_s(t) = B_1^2 + B_2^2 (t-T)^2 + \sigma_2^2 \frac{(t-T)^2}{t}. \quad (11.23)$$

В этом случае позиционный измеритель просто устанавливает начальное условие (с ошибкой, дисперсия которой равна B_1^2).

При точно известном начальном значении координаты ($C_0 = 0$) и при наложении условий несмещенности относительно постоянной составляющей скорости ($\bar{C}_1 \to \infty$)

и постоянной составляющей ошибки измерителя скорости ($B_2 \to \infty$) получаем:

$$\mu = 0, \qquad a = \frac{t}{T}, \qquad D_s(t) = \frac{B_1^2 t^2}{T^2}. \tag{11.24}$$

В этом случае сигнал измерителя скорости совсем не используется, а вычислительное устройство должно осуществлять линейную экстраполяцию по априори точно известному начальному и измеренному в момент T значениям координаты. Такой вывод получается как следствие допущения о постоянстве скорости, что можно считать справедливым только для малых интервалов $(0, T)$ и (T, t).

б) Интервал (T, t) произволен. При этом на интервалах $(0, T)$ и (T, t) искомая импульсная переходная функция $W(t, \tau)$ будет иметь различные аналитические выражения. Как и в § 9.4, п. б), рассмотрим решение задачи частичного синтеза, когда на интервале (T, t) из физических соображений задано $W(t, \tau) = 1$. В этом случае выходной сигнал вычислительного устройства формируется следующим образом:

$$z(t) = \int_T^t x_2(\tau)\, d\tau + \Delta z(t), \tag{11.25}$$

где

$$\Delta z(t) = a(t)\, x_1(T) + \int_0^T W(t, \tau)\, x_2(\tau)\, d\tau. \tag{11.26}$$

В результате минимизации дисперсии ошибки получаем систему уравнений относительно $a(t)$ и $W(t, \tau)$. Из одного уравнения сразу следует, что

$$W(t, \tau) = \mu(t). \tag{11.27}$$

Остальные два уравнения имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &\mu(\bar{C}_1^2 T + \sigma_2^2 + B_2^2 T) + a\bar{C}_1^2 T = \bar{C}_1^2 T - B_2^2 (t - T), \\ &\mu \bar{C}_1^2 T^2 + a(C_0^2 + \bar{C}_1^2 T^2 + B_1^2) = C_0^2 + \bar{C}_1^2 T^2. \end{aligned}\right\} \tag{11.28}$$

При наложении условий несмещенности относительно детерминированных составляющих полезного сигнала ($C_0 \to \infty$, $C_1 \to \infty$) получаем:

$$\mu = 0, \qquad a = 1. \tag{11.29}$$

Этот результат имеет тот же смысл, что и в случае а): позиционный измеритель только устанавливает начальное условие для счисления пути интегрированием сигнала измерителя скорости.

При точно известной начальной координате ($C_0 = 0$) и при условиях несмещенности $\overline{C}_1 \to \infty$, $B_2 \to \infty$ получаем:

$$\mu(t) = 1 - \frac{t}{T}, \qquad a(t) = \frac{t}{T}. \tag{11.30}$$

При этом для больших t получаем следующее приближенное выражение дисперсии ошибки:

$$D_s(t) \approx \left(\frac{B_1^2}{T^2} + \frac{\sigma_1^2}{T}\right) t^2. \tag{11.31}$$

Отношение

$$\sigma_v^2(t) = \frac{D_s(t)}{t^2} \approx \frac{B_1^2}{T^2} + \frac{\sigma_1^2}{T} \tag{11.32}$$

представляет собой дисперсию остаточной постоянной ошибки в скорости. Как и следовало ожидать, эта величина убывает с увеличением «базы» T. При этом, однако, предполагается, что T остается достаточно малым, так что приближенные выражения корреляционных функций сохраняют точность.

Если при $C_0 = 0$ не наложено условие $B_2 \to \infty$, то качественные особенности решения те же, что и в § 9.4: при малых T и больших t получается $\sigma_v^2 \approx B_2^2$, а затем при увеличении T эта величина уменьшается по закону (11.32). Таким образом, возможность снижения постоянной ошибки измерителя скорости появляется лишь при достаточно большой «базе» T. Если же «систематическая» ошибка измерителя скорости в действительности непостоянна, то частичная компенсация ее становится возможной лишь на интервалах времени, соизмеримых со временем ее корреляции.

11.4. Использование результата однократного измерения координаты для коррекции астроинерциальной системы

В § 8.2 и 8.3 отмечалось, что ошибки автономных инерциальных систем в течение очень больших интервалов времени существенно зависят от точности установки начальных условий. В случаях, когда инерциальная система работает совместно с другими непрерывными источниками информации, она часто играет вспомогательную роль и лишь незначительно повышает точность (см. § 11.1, 11.2). Однако есть группа задач, в которых коррекция существенно повышает точность инерциальной системы, в то время как сами корректирующие сигналы не дают возможности с достаточной точностью определять текущие значения координат. Такое положение имеет место при дискретной коррекции инерциальных систем, когда оказывается возможным существенно снизить ошибки от неточной выставки начальных условий. В то же время экстраполяция только по дискретным данным дает плохие результаты. Следовательно, это задачи, в которых комплексирование оказывается весьма эффективным.

Рассмотрим одну из простейших задач этой группы. Астроинерциальная система характеризуется весьма низким уровнем помехи, приведенной к выходу акселерометра, так что в течение длительного времени единственным источником ошибок можно считать ошибки в начальных условиях. Примем, что начальное значение координаты точно известно $[s(0)=0]$, а неизвестна только начальная скорость $\dot{s}(0)$. В момент $t=T$ поступает дискретный сигнал позиционного измерителя

$$x_1(T)=s(T)+b_1, \tag{11.33}$$

причем дисперсия ошибки b_1 равна B_1^2. Выходной сигнал навигационной системы формируется следующим образом:

$$z(t)=a(t)x_1(T)+\int_0^t W(t,\tau)x_2(\tau)\,d\tau, \tag{11.34}$$

где $x_2(t)$ — выходной сигнал акселерометра, ось чувствительности которого стабилизирована в инерциальном

пространстве. В дальнейшем удобно иметь дело не с сигналом акселерометра $x_2(t)$, а с выходным сигналом недемпфированного шулеровского контура

$$\bar{x}_2(t) = s(t) - \frac{\dot{s}(0)}{\Omega} \sin \Omega t. \tag{11.35}$$

Наложим условие инвариантности относительно полезного сигнала $s(t)$. При этом выражение (11.34) будет иметь вид:

$$z(t) = \bar{x}_2(t) + \Delta z(t), \tag{11.36}$$

где

$$\Delta z(t) = a(t)[\bar{x}_2(T) - x_1(T)]. \tag{11.37}$$

Из условия минимума дисперсии ошибки в момент времени t находим:

$$a(t) = \frac{\frac{C_1^{*2}}{\Omega^2} \sin \Omega T \sin \Omega t}{B_1^2 + \frac{C_1^{*2}}{\Omega^2} \sin^2 \Omega T}, \quad D_s(t) = \frac{B_1^2 \frac{C_1^{*2}}{\Omega^2} \sin^2 \Omega t}{B_1^2 + \frac{C_1^{*2}}{\Omega^2} \sin^2 \Omega T},$$

где C_1^{*2} — дисперсия начального значения скорости $\dot{s}(0)$. Как и следовало ожидать, среднеквадратичная ошибка изменяется по гармоническому закону синфазно с ошибкой некорректированной инерциальной системы. Достижимая точность коррекции определяется соотношением величин B_1^2 и $(C_1^{*2}/\Omega^2)\sin^2 \Omega T$. При $B_1^2 < (C_1^{*2}/\Omega^2)\sin^2 \Omega T$ (это соответствует условию несмещенности $C_1^* \to \infty$)

$$D_s(t) \approx B_1^2 \frac{\sin^2 \Omega t}{\sin^2 \Omega T}.$$

При $B_1^2 > (C_1^{*2}/\Omega^2) \sin^2 \Omega T$ получаем:

$$D_s(t) \approx \frac{C_1^{*2}}{\Omega^2} \sin^2 \Omega t.$$

Последнее выражение представляет собой дисперсию ошибки некорректированной инерциальной системы, следовательно, коррекция оказывается неэффективной. Такое положение может иметь место или из-за низкой точности позиционного измерителя (B_1 велико), или из-за недостаточной длины «базы» (T мало).

ГЛАВА 12

САМОНАСТРОЙКА. АВТОМАТИЧЕСКОЕ ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ. АВТОМАТИЧЕСКАЯ ИНДИКАЦИЯ ТОЧНОСТИ

Чтобы обеспечить нормальное и эффективное функционирование системы комплексной обработки сигналов навигационных измерителей, нужно располагать надежными сведениями о режиме их использования и о свойствах сигналов. Может иметь место положение, когда все данные известны заранее, перед полетом: определена трасса и график ее прохождения по времени, составлено расписание использования источников информации и на основании статистической обработки экспериментальных данных получены характеристики ошибок измерения. В этом случае алгоритм оптимального преобразования данных может быть точно рассчитан заранее. Однако типичной является другая ситуация, когда многие исходные данные известны лишь весьма приближенно, а некоторые из них (например, графики предполагаемого использования измерителей во времени) могут совсем отсутствовать. В этом случае в системе должны быть предусмотрены автоматические устройства, переключающие схемы преобразования при резких и значительных изменениях свойств сигналов и подстраивающие параметры, когда эти изменения не очень велики. Исходная информация может быть получена как из командных устройств (сведения об умышленном включении или выключении отдельных измерителей), так и непосредственно из выходных сигналов измерителей. Задача строго оптимального преобразования данных для изменяющихся условий представляется весьма сложной: помимо прежней задачи оптимального преобразования

сигналов с известными свойствами здесь встает вопрос о наилучшем определении свойств сигналов. При этом обе задачи следует решать совместно: нужно обеспечить оптимальность определения характеристик так, чтобы их использование в конечном счете привело к минимуму дисперсии ошибки в координате. Ввиду большой сложности этой проблемы в настоящей главе лишь обсуждаются принципиально возможные пути решения этих задач, а для практической реализации предлагаются достаточно простые схемы, составленные на основе физических соображений. К задачам самонастройки и изменения структуры примыкают задачи автоматической индикации точности, также рассматриваемые в этой главе. Ошибки навигационной системы в выработке выходных данных не могут быть непосредственно измерены, однако по косвенным данным можно рассчитать дисперсии ошибок. Эти данные часто необходимы для обеспечения правильной и эффективной работы комплексов, использующих сигналы навигационной системы. В целом именно совокупность устройств, отдельным вопросам теории которых посвящена эта глава, в конечном счете может обеспечить использование на практике результатов разработки теории оптимального преобразования навигационных данных.

12.1. Основные способы автоматической перестройки фильтров

Начнем рассмотрение с задач самонастройки, т. е. автоматического и целенаправленного изменения характеристик фильтров в зависимости от заранее непредусмотренного изменения условий работы. Прежде всего возникает вопрос о необходимости самонастройки вообще. В предыдущих главах не раз отмечалось, что при типичных исходных данных оптимальные фильтры обычно совершенно некритичны по отношению к изменениям параметров сигналов. Это означает, в частности, что в очень широких пределах можно не учитывать параметрической нестационарности сигналов. Все же в практических приложениях весьма вероятны условия, в которых изменения параметров сигналов происходят в столь

широком диапазоне, что стационарный фильтр дает слишком большой проигрыш в точности.

Когда учет разброса характеристик сигналов и параметрической нестационарности сигналов может дать существенный эффект, введение самонастройки представляется желательным. Автоматическая система обработки данных тогда должна выполнять четыре операции:

1. Рассчитывать оценки корреляционных функций сигналов (или параметров корреляционных функций).

2. Определять оптимальные динамические характеристики фильтров, соответствующие этим оценкам.

3. Перестраивать фильтры, осуществляющие преобразование сигналов.

4. Преобразовывать сигналы измерителей.

Ниже дана краткая характеристика этих операций и перечислены основные пути их реализации.

В зависимости от полноты априорной информации о свойствах сигналов и простоты введения этой информации могут быть использованы три основных варианта выполнения первой операции.

1) Если желаемая траектория заранее известна и известны формулы, по которым при любой данной траектории могут быть рассчитаны вероятностные свойства сигналов, то первая операция — расчет оценок корреляционных функций (так же как и вторая — определение вида соответствующих оптимальных преобразований) — может быть выполнена заранее, до старта, и, следовательно, программа изменения характеристик фильтров оказывается полностью определенной. В этом случае самонастройка превращается в предстартовую настройку программного устройства. Расчет оптимальных импульсных переходных функций фильтров может быть произведен методом последовательных приближений [41]. Блок-схема системы, работающей по такому принципу, изображена на рис. 12.1, *а*, где *Ф* — блок фильтров, *Пр* — блок программы переменных коэффициентов, *Н* — блок, непосредственно осуществляющий настройку фильтров. Следует обратить внимание на полную автономность блока *Пр*.

2) Траектория заранее неизвестна, но известны соотношения, связывающие характеристики сигналов с на-

вигационными параметрами или с другими величинами, которые измеряются в процессе движения. В этом случае импульсные переходные функции оптимальных фильтров не могут быть рассчитаны заранее. Блок-схема системы изображена на рис. 12.1, *б*. Характерным является то, что в блок *Н* непрерывно поступают сведения с выхода самой навигационной системы. Для определения вероятностных свойств сигналов используются априори заданные зависимости этих свойств от навигационных параметров. Например, в блок *Н* могут вводиться сведения о температуре, давлении, характере подстилающей земной поверхности и т. д. В схемах самонастраивающихся автопилотов, известных по литературным источникам [5,6], применяется в основном именно этот способ самонастройки (передаточные числа каналов угловой стабилизации изменяются в зависимости от высоты и скоростного напора).

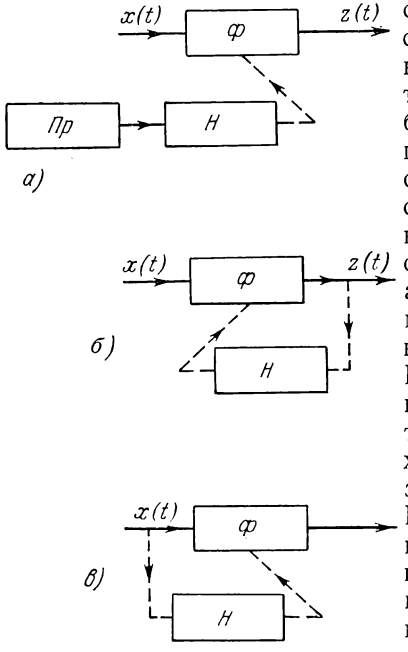

Рис. 12.1.

3) Заранее неизвестны ни траектория, ни зависимости характеристик сигналов от непосредственно измеряемых параметров. В этом случае система самонастройки может использовать только непрерывно поступающие выходные сигналы приборов и некоторые достаточно общие априорные сведения. Остается один путь определения корреляционных функций сигналов: построение оценок по непрерывно поступающим реализациям. Блок-схема системы для такого случая изображена на

рис. 12.1, *в*. В отличие от случая 2), в блок самонастройки не поступают никакие другие сигналы, кроме выходных сигналов измерителей. Согласно [34], такой способ самонастройки именуется *параметрической компенсацией по результатам текущих оценок вероятностных свойств сигналов*; в [1] подобные самонастраивающиеся системы называются *аналитическими*. Заметим, что хорошо известный способ экстремальной самонастройки следящих систем с поиском, основанный на непосредственном измерении ошибок, неприменим для измерительных систем вообще и систем преобразования навигационных данных в частности, так как ошибка не может быть непосредственно измерена.

Наряду с тремя основными вариантами могут быть использованы их любые комбинации, с одной стороны, допускающие достаточно простую реализацию, а с другой, возможно более полно использующие дополнительную информацию. Теория всех вариантов достаточно хорошо разработана в применении к одноканальной системе [1, 34]. При составлении конкретных алгоритмов самонастройки обычно бывает необходимо задавать заранее вид корреляционных функций с точностью до некоторых параметров $a_1, a_2, \ldots, a_q$:

$$R(\tau_1, \tau_2) = R(\tau_1, \tau_2, a_1, a_2, \ldots, a_q). \qquad (12.1)$$

Параметры считаются или случайными величинами, постоянными для каждой реализации, но различными для различных реализаций, или медленно меняющимися функциями времени $a_1(\tau_1, \tau_2)$, $a_2(\tau_1, \tau_2)$, ..., $a_q(\tau_1, \tau_2)$. Такое представление создает основу для практического решения всех трех вариантов выполнения первой операции. Так, определение неизвестных значений параметров может быть произведено сравнением между собой сглаженных выходных сигналов детекторов, включенных после специально подобранных фильтров. Вторая и третья операции — определение оптимальных динамических характеристик фильтров и их перестройка — в значительной мере могут быть подготовлены заранее. Действительно, поскольку общий вид корреляционных функций (12.1) заранее известен, также заранее может быть

установлен общий вид импульсных переходных функций $W(t, \tau, a_1, a_2, \ldots, a_q)$ или передаточных функций $K(j\omega, a_1, a_2, \ldots, a_q)$. После этого остается осуществить заданное, в общем случае нелинейное преобразование параметров $a_1, \ldots, a_q$ в соответствующие изменения параметров фильтров. Блок-схема типичной схемы такого типа изображена на рис. 12.2, где пунктиром выделена цепь самонастройки ($УФ_1$ и $УФ_2$ — узкополосные

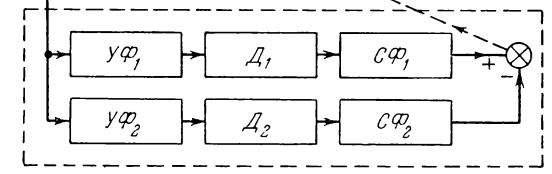

Рис. 12.2.

фильтры, $Д_1$ и $Д_2$ — детекторы, $СФ_1$ и $СФ_2$ — сглаживающие фильтры). Для управления основным фильтром $Ф$ используется разность сигналов сглаживающих фильтров.

Прежде чем перейти к рассмотрению схем самонастройки для конкретных задач преобразования навигационных данных, целесообразно установить их некоторые качественные особенности.

12.2. Возможности самонастройки в одноканальной и многоканальной системах

Блок-схема одноканальной самонастраивающейся системы, построенной по принципу параметрической компенсации по результатам текущих оценок вероятностных свойств сигналов, изображена на рис. 12.1, *в*. В блок самонастройки H поступает только выходной сигнал измерителя $x(t)$. Блок самонастройки должен перестраивать фильтр $Ф$ так, чтобы для каждой данной реализации

выполнялось интегральное уравнение

$$\int_0^t W(t, \tau_2) R^*_{xx}(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_2 = R^*_{sx}(t, \tau_1) \quad (0 \leqslant \tau_1 \leqslant t). \qquad (12.2)$$

Здесь корреляционная функция $R^*_{xx}(\tau_1, \tau_2)$ характеризует статистические свойства мыслимого множества реализаций, получающихся в тех же условиях, что и данная реализация.

Для одноканальной системы принципиальным является то обстоятельство, что при отсутствии априорных сведений самонастройка не может быть создана. Действительно, по единственному измеряемому сигналу $x(t)$ можно построить оценку только одной корреляционной функции, а для определения характеристики фильтра нужно знать две корреляционные функции. Поэтому априорные сведения о характере сигналов совершенно необходимы. В литературе, посвященной описанию таких систем, всегда предполагается, что сигналы близки к стационарным, т. е. имеет место только параметрическая нестационарность, причем помеха и полезный сигнал статистически независимы. Кроме того, принимается одно из следующих допущений:

1. Корреляционная функция полезного сигнала $R^*_{ss}(\tau_1, \tau_2) = R^*_{sx}(\tau_1, \tau_2)$ заранее известна [9]. В этом случае самонастройка рассчитана только на изменение свойств помехи. Блок самонастройки определяет оценку $R^*_{xx}(\tau_1, \tau_2)$ корреляционной функции $R^*_{xx}(\tau_1, \tau_2)$. Этим обеспечиваются все исходные данные для решения интегрального уравнения (12.2).

2. Корреляционная функция ошибки $R^*_{nn}(\tau_1, \tau_2)$ заранее известна [9]. Блок самонастройки определяет оценку $R^{**}_{xx}(\tau_1, \tau_2)$ корреляционной функции $R^*_{xx}(\tau_1, \tau_2)$ и по ней рассчитывает оценку корреляционной функции полезного сигнала

$$R^{**}_{ss}(\tau_1, \tau_2) = R^{**}_{xx}(\tau_1, \tau_2) - R^*_{nn}(\tau_1, \tau_2). \qquad (12.3)$$

В этом случае самонастройка рассчитана на изменение свойств только полезного сигнала.

3. Корреляционные функции $R^*_{ss}(\tau_1, \tau_2)$ и $R^*_{nn}(\tau_1, \tau_2)$ известны с точностью до параметров, причем они существенно различаются по виду [37]. В частности, если параметры a_i входят линейно:

$$\left.\begin{aligned} R^*_{ss}(\tau_1, \tau_2) &= \sum_i a_i^{(s)} g_i^{(s)}(\tau_1, \tau_2), \\ R^*_{nn}(\tau_1, \tau_2) &= \sum a_i^{(n)} g_i^{(n)}(\tau_1, \tau_2), \end{aligned}\right\} \tag{12.4}$$

то предполагается, что все функции $g_i^{(s)}(\tau_1, \tau_2)$ отличаются от всех функций $g_i^{(n)}(\tau_1, \tau_2)$. После определения оценки $R^{**}_{xx}(\tau_1, \tau_2)$ производится разделение ее на слагаемые $R^{**}_{ss}(\tau_1, \tau_2)$ и $R^{**}_{nn}(\tau_1, \tau_2)$. Если обе корреляционные функции действительно не содержат слагаемых одного и того же вида, такое разделение возможно.

Особенность навигационных задач заключается в том, что по крайней мере полезный сигнал существенно нестационарен. Поэтому процесс определения оценки $R^{**}_{xx}(\tau_1, \tau_2)$ является несколько более сложным. Сначала необходимо преобразовать сигнал $x(t)$ в сигнал $y(t)$, не обладающий существенной нестационарностью. Поскольку вид существенной нестационарности известен, это всегда можно сделать и притом многими способами. В частности, для сигнала со стационарной производной такое преобразование осуществляет передаточная функция

$$Y(j\omega) = \frac{j\omega}{Tj\omega + 1}. \tag{12.5}$$

Далее определяются оценки a_i^* параметров a_i, от которых зависит корреляционная функция.

При преобразовании сигнала $x(t)$ основным фильтром принципиально существуют две возможности:

1) Сигнал $x(t)$ непрерывно проходит через фильтр, параметры которого меняются так, что его передаточная функция в каждый момент соответствует значениям a_i^* именно для этого момента времени. Если бы для каждой реализации параметр a_i^* был постоянным, то самонастройка была бы асимптотически оптимальной.

В дальнейшем этот способ осуществления самонастройки будем называть *текущей настройкой.*

2) Для каждого момента времени определяются $a_i^*(t)$, а по ним определяются импульсные переходные функции для всей предыстории (всего интервала поступления сигнала). Соответствующее преобразование применяется ко всей реализации. Поскольку вид этого преобразования определяется только к конечному моменту времени, то необходимо осуществлять запись реализации на всем интервале и пропускать эту запись через фильтр после того, как импульсная переходная функция определена. Если выходной сигнал необходимо вырабатывать непрерывно, то пропускание пополняющейся записи через фильтр следует производить многократно. Такой способ осуществления самонастройки будем называть *настройкой с полным использованием информации.*

Для практической реализации, по-видимому, пригоден только первый способ; рассмотрение второго способа позволяет установить теоретические пределы точности самонастраивающейся системы.

Рассмотрим теперь некоторые принципиальные особенности оптимальной многоканальной самонастраивающейся системы, построенной по принципу параметрической компенсации по результатам текущих оценок корреляционных функций сигналов [42]. Блок-схема системы изображена на рис. 12.3. В блок самонастройки H поступают N сигналов измерителей $x_i(t)$. Самонастройка должна обеспечивать выполнение системы интегральных уравнений

$$\sum_{j=1}^{N} \int_0^t W_j(t, \tau_2) R^*_{x_i x_j}(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_2 = R^*_{s x_i}(t, \tau_1) \qquad (12.6)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, N).$$

Как и при рассмотрении одноканальной системы, предполагается, что корреляционные функции описывают свойства реализаций, полученных при неизменных условиях.

В самом общем случае для работы системы самонастройки необходимы априорные сведения о свойствах сигналов. Действительно, для того чтобы система урав-

нений (12.6) была определена, необходимо знать $N(N+1)$ взаимно корреляционных функций $R^*_{x_i x_j}(\tau_1, \tau_2)$ и $R^*_{sx_i}(\tau_1, \tau_2)$, в то время как по N сигналам $x_i(t)$ могут быть построены оценки только N^2 взаимно корреляционных функций $R^*_{x_i x_j}(\tau_1, \tau_2)$. Поэтому априорные сведения должны так дополнять результаты вычисления текущих

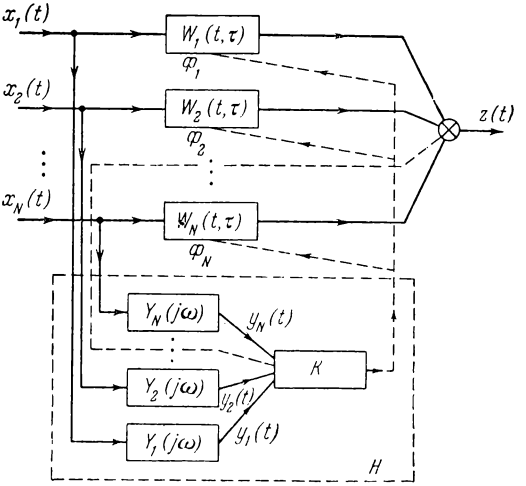

Рис. 12.3.

оценок корреляционных функций, чтобы по ним могли быть определены все $N(N+1)$ корреляционных функций.

Однако в многоканальных системах часто выполняется условие, при котором система самонастройки может работать при отсутствии априорных сведений о свойствах сигналов. Это условие заключается в том, что ошибки по крайней мере в двух каналах статистически независимы друг от друга, от полезного сигнала и от остальных ошибок.

Пусть ошибки взаимно статистически независимы в l-м и m-м каналах. В этом случае оценка $R^{**}_{x_l x_m}(\tau_1, \tau_2)$ корреляционной функции $R^*_{x_l x_m}(\tau_1, \tau_2)$ является одновременно оценкой $2(N-2)$ корреляционных функций

$R^*_{x_l x_i}(\tau_1, \tau_2)$ и $R^*_{x_i x_l}(\tau_1, \tau_2)$. Таким образом, оценки всех взаимно корреляционных функций строятся без использования каких-либо априорных данных.

На рис. 12.3 блок самонастройки выделен пунктиром. Звенья с передаточными функциями $Y_i(j\omega)$ преобразуют сигналы $x_i(t)$ в сигналы $y_i(t)$, не обладающие существенной нестационарностью. Далее блок K выполняет операции по вычислению текущих оценок $R^{**}_{y_i y_j}$ взаимно корреляционных функций $R^*_{y_i y_j}$. По ним определяются оценки $R^{**}_{x_i x_j}$ и $R^{**}_{s x_i}$ взаимно корреляционных функций $R^*_{x_i x_j}$ и $R^*_{s x_i}$. Этим самым обеспечиваются все исходные данные для расчета характеристик оптимальной системы.

12.3. Пути реализации самонастройки

В предыдущем параграфе задача определения оценок корреляционных функций выделялась как самостоятельная проблема. В действительности же следует иметь в виду, что оценки корреляционных функций являются исходным материалом для получения оптимальных импульсных переходных функций. Поэтому можно ожидать, что в конкретных условиях для точного построения импульсных переходных функций иногда будут достаточными немногие и весьма скудные сведения о статистических свойствах сигналов. Действительно, на малых интервалах времени для решения задачи синтеза динамических характеристик фильтров могут быть использованы первые слагаемые разложения корреляционных функций в ряды. По отношению к полезному сигналу это равносильно гипотезе о постоянной скорости движения. Если для типовых условий признано целесообразным ввести условия несмещенности относительно линейно изменяющегося полезного сигнала, то изменения значений C_1^2 и C_0^2 (т. е. изменение корреляционной функции полезного сигнала) никак не сказываются на виде импульсной переходной функции фильтра. С другой стороны, на достаточно малом начальном отрезке времени оптимальная система обычно осуществляет экстраполяцию по начальным условиям (см., например, § 6.2, 9.2),

и для осуществления этой операции также не нужно знать величин C_1^2 и C_0^2. Таким образом, в течение некоторого времени практически можно не иметь никаких сведений о действительной корреляционной функции полезного сигнала, а использовать только априорное знание ее вида.

В установившемся режиме передаточные функции фильтров зависят от спектральных плотностей недетерминированных компонент полезного сигнала и приведенных помех. Однако по существу не важен вид кривой каждой спектральной плотности — решающее значение имеет поведение каждой кривой вблизи точек пересечения. Следовательно, достаточно, чтобы система самонастройки контролировала участки кривых спектральных плотностей вблизи точек их пересечения. При этом важны не все точки пересечения. В многоканальной (в частности, в двухканальной) системе, работающей в установившемся режиме, свойства фильтров определяются видом пересечения кривых спектральных плотностей, включающихся в обход снизу (см. § 4.3). Если кривая условной спектральной плотности полезного сигнала идет всегда выше по крайней мере одной из кривых приведенных помех, то оптимальная система всегда должна быть инвариантной относительно полезного сигнала. Если есть уверенность, что такое положение сохранится при всех возможных изменениях параметров полезного сигнала и помех, то система самонастройки может совсем не контролировать изменения спектральной плотности полезного сигнала. Вообще, как было не раз показано, в установившемся режиме работы комплексная система или становится инвариантной относительно полезного сигнала (в этом случае она использует сигналы двух измерителей), или превращается в одноканальную. Поэтому блок самонастройки должен контролировать не $N(N+1)$ спектральных плотностей, а только две из них, т. е. аналитическая часть системы самонастройки многоканальной системы оказывается не сложнее, чем одноканальной. Следует, однако, иметь в виду, что при изменении параметров сигналов в очень широких пределах, когда точка, изображающая ситуацию на плоскости параметров помех, может переходить из одной области в

другую (см. главу 10), оптимальная система должна переключаться или с одной пары измерителей на другую, или с двух измерителей на один, или с одного на два. В этих случаях или каждый измеритель должен быть снабжен постоянным анализатором, или анализаторы должны подключаться к различным измерителям. Далее в качестве примера рассмотрена система самонастройки позиционного измерителя. По-видимому, многие из приемов, описанных в применении к этому частному случаю, смогут найти применение в других задачах.

12.4. Самонастройка для установившегося режима обработки сигнала позиционного измерителя

Предположим, что статистические свойства полезного сигнала неизменны, а интенсивность σ^2 флюктуационной составляющей помехи изменяется, причем скорость изменения мала по сравнению с постоянными времени оптимальных стационарных фильтров. В этом случае допустимо ограничиться соответствующим изменением параметров стационарного фильтра вида (6.59).

Прежде всего следует определить, необходима ли самонастройка вообще. Из § 6.3 следует, что фильтр остается близким к оптимальному (относительное увеличение среднеквадратичной ошибки не превосходит 40%), если величина σ изменяется в пределах от $0{,}3\sigma_0$ до $6\sigma_0$, где σ_0 — расчетное значение. Возможно, используемый измеритель вообще не может нормально работать в более широком диапазоне изменения σ. Тогда самонастройка не нужна совсем.

Предположим, что σ может изменяться в более широких пределах. Однако и в этом случае, возможно, самонастройка окажется практически не нужной. Это будет иметь место при выполнении двух условий:

а) при уменьшении σ ниже номинального значения величина σ_s становится значительно ниже допуска (см. рис. 6.14) и поэтому нет смысла принимать меры, чтобы приблизиться к оптимальному преобразованию;

б) при увеличении σ выше номинального значения величина σ_s становится недопустимо большой даже при оптимальном преобразовании.

При этом предполагается, что фиксированная настройка обеспечивает хорошую работу при изменении σ

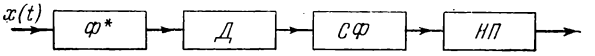

Рис. 12.4.

от нуля до значения, несколько превышающего номинальное. В дальнейшем будем иметь в виду случаи, в которых задача приближения к оптимуму в широком диапазоне изменения σ сохраняет смысл и самонастройка нужна.

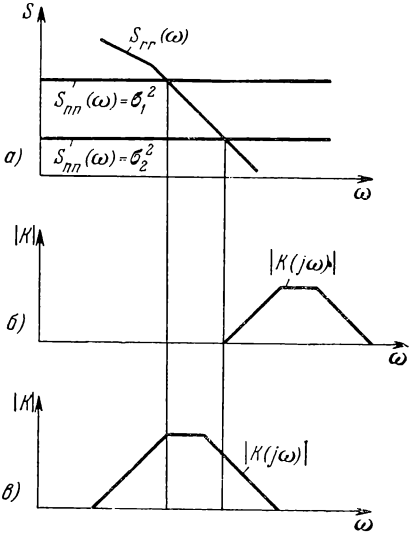

Рис. 12.5.

Рассмотрим возможные способы решения задачи определения текущего значения σ. В зависимости от надежности и полноты предварительных сведений о флюктуационной помехе могут быть использованы следующие варианты первого звена схемы, показанной на рис. 12.4.

1) Широкополосный фильтр с частотной характеристикой, изображенной на рис. 12.5, *б* (на рис. 12.5, *а* показаны кривые условных спектральных плотностей). Полоса пропускания фильтра лежит выше предельно возможной частоты среза оптимального фильтра. В этом случае в выходном сигнале фильтра всегда присутствует практически только помеха. Дисперсия сигнала фильтра пропорциональна величине σ^2. Недостатком устройства с такой характеристикой является то, что контролируется высокочастотный участок спектральной плотности, обычно далекий

от точки пересечения кривых спектральных плотностей. В этих условиях гипотеза о постоянстве спектральной плотности помехи в широком диапазоне частот имеет существенное значение.

2) Широкополосный фильтр с частотной характеристикой, максимум которой сдвинут в диапазон возможных изменений частоты среза оптимального фильтра (рис. 12.5, *в*). Выходной сигнал фильтра в этом случае зависит от параметров и полезного сигнала и помехи. Недостатком является слабая зависимость дисперсии выходного сигнала фильтра от σ^2, когда σ относительно мало. Правда, это обстоятельство может не иметь существенного значения, если допускается отход от оптимальности, когда σ все равно мало.

3) Широкополосный фильтр, перестраиваемый вместе с основным фильтром, так что максимум его частотной характеристики все время несколько выше частоты среза основного фильтра. При реализации этого варианта оказывается возможным контролировать именно то, что нужно — интенсивность помехи вблизи точки пересечения кривых спектральных плотностей. Отметим, что если действительная спектральная плотность значительно отличается от постоянной (гипотеза о белом шуме несправедлива), то здесь это не имеет значения.

Передаточные функции широкополосных фильтров для вариантов 1) и 2) могут быть выбраны, например, в форме

$$Z(j\omega) = \frac{(j\omega)^2}{(j\omega + \alpha_0)^3}. \tag{12.7}$$

Для варианта 3) фильтр может быть частично совмещен с основным, добавляется лишь дополнительный фильтр с передаточной функцией

$$Z'(j\omega) = \frac{\rho}{j\omega + 2\rho}. \tag{12.8}$$

После фильтра, согласно схеме на рис. 12.4, должны следовать детектор *Д*, сглаживающий фильтр *СФ* и элемент с нелинейной характеристикой *НП*, преобразующий выходной сигнал *СФ* в параметры фильтров. Однако эта часть схемы может быть упрощена путем совмещения детектора и нелинейного преобразователя

(рис. 12.6). Характеристика детектора *Д* здесь выбирается так, чтобы среднее по времени значение сигнала на его выходе было пропорционально параметру, подлежащему изменению. Так, при передаточной функции

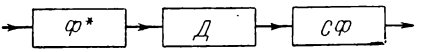

Рис. 12.6.

широкополосного фильтра, заданной в виде (12.7), дисперсия сигнала на его выходе равна:

$$D=\frac{3\sigma^2}{16\alpha_0}\left(1+\frac{2\beta C^2}{\alpha_0^4\sigma^2}\right). \qquad (12.9)$$

Примем, что выполнено условие отстройки фильтра в сторону высоких частот

$$\frac{2\beta C^2}{\alpha_0^4\sigma^2_{\min}}<1. \qquad (12.10)$$

Тогда, если задать характеристику детектора в виде

$$v=F(u)=u^{1/2}, \qquad (12.11)$$

то среднее (по времени) значение сигнала на его выходе будет равно:

$$\bar{v}=0{,}55\gamma T\beta^{1/4}C^{1/2} \qquad \left(T=\frac{1}{\rho}\right), \qquad (12.12)$$

где ρ — параметр оптимальной передаточной функции, соответствующий текущему значению σ, а γ — коэффициент, зависящий от закона распределения сигнала [для обычных законов распределения не более чем с одним максимумом (нормального, равномерного, треугольного) он изменяется в узких пределах: $0{,}75<\gamma<1{,}08$]. Таким образом, сигнал $\bar{v}$ на выходе сглаживающего фильтра будет пропорционален требуемому значению постоянной времени основного фильтра.

Операция перестройки основного фильтра может осуществляться непрерывно. Однако практически в этом

нет необходимости: как было показано в § 6.5, два дискретных значения настройки обеспечивают перекрытие диапазона изменения σ в 600 раз, чего, по-видимому, практически всегда достаточно. Поэтому выход сглаживающего фильтра блока самонастройки следует подать на двухпозиционный пороговый элемент, переключающий передаточную функцию

$$K_1(j\omega) = \frac{2\rho_1 j\omega + 2\rho_1^2}{(j\omega)^2 + 2\rho_1 j\omega + 2\rho_1^2} \tag{12.13}$$

на передаточную функцию

$$K_2(j\omega) = \frac{2\rho_2 j\omega + 2\rho_2^2}{(j\omega)^2 + 2\rho_2 j\omega + 2\rho_2^2} \qquad (\rho_2 \approx 5\rho_1) \tag{12.14}$$

или обратно. Заметим, что при таком переключении постоянных времени фильтра детерминированные составляющие полезного сигнала не вызывают переходных процессов, так как в установившемся режиме обе передаточные функции обеспечивают их несмещенное воспроизведение. Переходный процесс от недетерминированных составляющих оказывается несущественным.

12.5. Автоматическое изменение структуры фильтров при изменении режима работы

Систему, в которой при изменении условий работы автоматически осуществляются целенаправленные переключения, можно рассматривать как самонастраивающуюся систему особого вида (процесс самонастройки осуществляется ступенчато). По сравнению с непрерывной системой самонастройки такая система является более грубой, но она более проста в реализации и более надежна. Необходимость изменения структуры при изменении условий связана с обстоятельствами двух родов:

а) изменяются свойства сигналов и характеристики звеньев навигационной системы;

б) отдельные измерители могут включаться и выключаться.

Второе обстоятельство естественным образом определяет ступенчатый характер самонастройки.

По характеру сведений об изменении режима все возможные ситуации можно разделить на три основных варианта.

1) Моменты изменения режима заранее известны. В этом случае алгоритмы преобразования могут быть заранее рассчитаны и запрограммированы.

2) Моменты изменения режима заранее неизвестны, но каждый раз в эти моменты в систему поступают сведения о том, какие именно изменения произошли. Такое положение имеет место, когда включение или выключение измерителя осуществляется умышленно, в соответствии, например, с тактическими соображениями. В этом случае, вообще говоря, должны быть заранее запрограммированы оптимальные алгоритмы преобразований для всех возможных вариантов изменения режима, а по команде должно осуществляться лишь включение нужных из них.

3) Об изменении режима работы системы можно судить только по изменениям свойств сигналов. Такое положение имеет место, например, тогда, когда происходит сбой того или иного измерителя вследствие естественных причин или специально организованных помех. В этих случаях обычно сразу нельзя достоверно установить, вышел ли из строя один из измерителей, а если вышел, то какой именно. Поэтому наряду с набором программ для оптимальных алгоритмов должна быть предусмотрена схема автоматического распознавания ситуации.

При переходе от варианта 1) к варианту 2) уменьшается объем непосредственно вводимой информации и усложняется устройство системы. Алгоритмы оптимальных преобразований для варианта 1) могут быть составлены непосредственно по результатам решения задач, рассмотренных в главах 5—11. Пусть, например, заранее известно, что при $0<t<T_1$ работает только измеритель скорости, при $T_1<t<T_2$ — измеритель скорости и позиционный измеритель, при $t>T_2$ — снова только измеритель скорости. Тогда выходной сигнал навигационной системы будет записываться различным образом для

интервалов $(0, T_1)$, (T_1, T_2), (T_2, t):

$$z(t) = \int_0^t W_2^{(11)}(t, \tau) x_2(\tau)\, d\tau \quad \text{при} \quad 0 < t < T_1, \tag{12.15}$$

$$z(t) = \int_{T_1}^t W_1^{(22)}(t, \tau) x_1(\tau)\, d\tau + \int_0^{T_1} W_2^{(21)}(t, \tau) x_2(\tau)\, d\tau + \\ + \int_{T_1}^t W_2^{(22)}(t, \tau) x_2(\tau)\, d\tau \quad \text{при} \quad T_1 < t < T_2, \tag{12.16}$$

$$z(t) = \int_{T_1}^{T_2} W_1^{(32)}(t, \tau) x_1(\tau)\, d\tau + \int_0^{T_1} W_2^{(31)}(t, \tau) x_2(\tau)\, d\tau + \\ + \int_{T_1}^{T_2} W_2^{(32)}(t, \tau) x_2(\tau)\, d\tau + \int_{T_2}^t W_2^{(33)}(t, \tau) x_2(\tau)\, d\tau \quad \text{при} \quad t > T_2, \tag{12.17}$$

где $x_1(t)$ — сигнал позиционного измерителя, $x_2(t)$ — сигнал измерителя скорости. Импульсные переходные функции находятся в результате минимизации дисперсии ошибки. Для первых двух интервалов решения получены в § 8.1 и 9.4. Однако следует иметь в виду, что непосредственная реализация таких фильтров оказывается довольно сложной. Дело в том, что импульсные переходные функции оказываются различными. Особо отметим, что

$$\left.\begin{aligned} &W_1^{(22)}(t, \tau) \neq W_1^{(32)}(t, \tau), \\ &W_2^{(11)}(t, \tau) \neq W_2^{(21)}(t, \tau) \neq W_2^{(31)}(t, \tau). \end{aligned}\right\} \tag{12.18}$$

Следовательно, при $t < T_1$ следует производить независимое и параллельное преобразование сигнала $x_2(t)$, имея в виду его оптимальное использование на трех интервалах. Блок-схема системы фильтров изображена на рис. 12.7. Здесь ключи $Кл_1$ и $Кл_2$ переключаются в моменты $t = T_1$ и $t = T_2$.

Важно отметить, что для оптимальной обработки сигналов нужно знать будущие моменты изменения ре-

жима. В частности, функция $W_2^{(31)}(t, \tau)$, определяющая обработку сигнала $x_2(t)$ на интервале $(0, T_1)$, зависит от величин T_1 и T_2.

В более общем случае, когда в состав системы входит большое число измерителей и число моментов переключения больше двух, система окажется еще более сложной (сигналы одних и тех же измерителей придется параллельно преобразовывать в большом числе

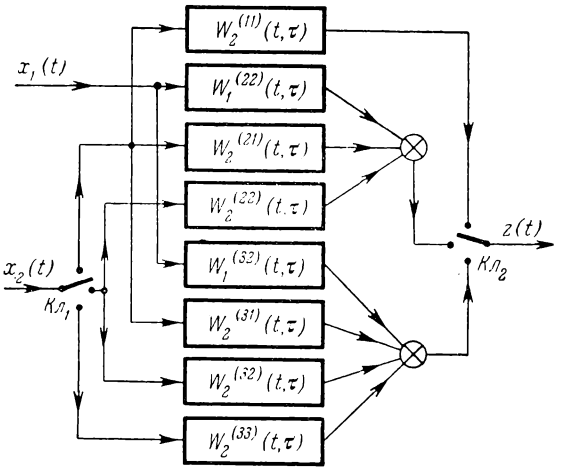

Рис. 12.7.

фильтров), причем нужно заранее знать все моменты включения и выключения всех измерителей. Последнее обстоятельство является серьезным препятствием для буквальной реализации оптимальных фильтров в случае варианта 2). Действительно, если моменты включений и выключений (в рассмотренном примере — моменты T_1 и T_2) заранее неизвестны, то при $t<T_1$ не может быть произведена обработка непрерывно поступающего сигнала $x_2(t)$ фильтром с импульсной переходной функцией $W_2^{(31)}(t, \tau)$. Принципиально возможен способ, аналогичный самонастройке с полным использованием информации: непрерывно производится запись реализаций сигналов, после переключений рассчитываются «задним

числом» импульсные переходные функции, характеризующие преобразования, которые следует применить ко всему прошлому (теперь уже моменты переключений известны), и далее записи реализаций от момента начала работы системы до текущего момента пропускаются через соответствующие фильтры. В случае варианта 3) процедура преобразования остается в целом той же самой, но импульсные переходные функции могут быть рассчитаны не непосредственно после момента изменения режима, а после того, как будет установлено, какие именно изменения произошли в системе. Однако практически вряд ли имеет смысл реализовывать такие сложные схемы с записью и последующим «просматриванием» реализаций. Поэтому встает вопрос о нахождении путей упрощения решений для вариантов 2) и 3).

Укажем на два основных приема, позволяющих получить легко реализуемые алгоритмы работы автоматически переключающейся системы.

1. Запоминание значений координаты и скорости в момент изменения режима и использование их в дальнейшем как начальных условий. Этот прием особенно

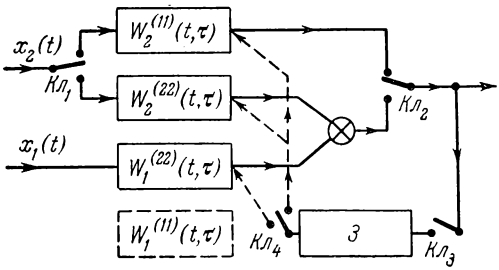

Рис. 12.8.

удобен для варианта 2). Рассмотрим алгоритм работы для приведенного выше примера: при $0<t<T_1$ работает только измеритель скорости, при $T_1<t<T_2$ — измеритель скорости и позиционный измеритель, при $t>T_2$ — снова только измеритель скорости. Блок-схема системы для этого случая изображена на рис. 12.8. Особенностью схемы является блок *З*, который в установившемся режиме повторяет вырабатываемые навигационной системой

текущие значения координаты и скорости, а начиная с каждого момента изменения режима (T_1 или T_2), фиксирует значения этих величин, используемых в дальнейшем как начальные условия. При этом на втором этапе алгоритм преобразования находится так, как если бы оба измерителя работали только с момента $t=T_1$, а начальные условия были некоррелированны с текущими значениями преобразуемых сигналов. В действительности между ними существует корреляция, так как начальные условия получены с использованием сигналов того же измерителя скорости. Вводя допущение о некоррелированности, мы допускаем снижение точности по сравнению с действительно оптимальным преобразованием. На третьем интервале времени ($t>T_2$) осуществляется обычное счисление пути при начальных условиях, полученных из второго этапа и снова считающихся некоррелированными с сигналом измерителя скорости.

Описанный прием позволяет значительно снизить многообразие задач оптимального преобразования. Действительно, в вычислительное устройство должен быть заложен набор алгоритмов преобразования лишь для случаев, когда измерители работают по отдельности или попарно при условии, что интервалы работы измерителей совпадают. Так, если в состав навигационной системы входят два измерителя, то независимо от сложности графика их использования вычислительное устройство должно запомнить четыре импульсные переходные функции (две — для случаев раздельной работы и две — для совместной).

Дополнительные упрощения могут быть введены, если учесть, что не для всех сочетаний измерителей использование начальных условий дает существенный эффект. Так, для рассмотренного выше примера на втором этапе роль начальных условий сказывается в течение весьма ограниченного интервала времени, соизмеримого с постоянной времени (9.38). Если продолжительность второго интервала достаточно велика $\left[(T_2-T_1)>\frac{1}{\rho}\right]$, причем в течение короткого отрезка времени после $t=T_1$ допускаются большие ошибки, то для фильтров могут быть взяты передаточные функции (9.34), при этом

начальные условия совсем не используются (блок *3* совсем не включается в работу при переходе от первого интервала ко второму). Для третьего интервала начальное условие по координате обязательно должно быть использовано, начальное значение по скорости может быть опущено. Таким образом, для рассмотренного примера блок *3* запоминает только значение координаты при переходе от второго интервала к третьему. При

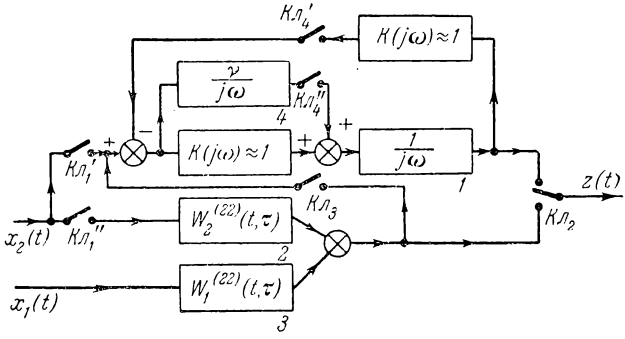

Рис. 12.9.

построении соответствующей схемы на аналоговых элементах одни и те же блоки могут выполнять несколько различных функций (рис. 12.9). На первом интервале ключи $Кл_3$, $Кл_4'$ и $Кл_4''$ разомкнуты, интегратор *1* интегрирует сигнал измерителя скорости. На втором интервале ключи $Кл_3$, $Кл_4'$ и $Кл_4''$ замкнуты, а ключ $Кл_1'$ разомкнут: работают фильтры *2* и *3*, а интегратор *1*, охваченный обратной связью, является повторителем координаты (интегратор *4* играет роль изодрома, ликвидирующего скоростную ошибку). При переходе на третий этап размыкаются ключи $Кл_3$, $Кл_4'$ и $Кл_4''$, интегратор *1* запоминает на выходе последнее значение координаты и снова интегрирует сигнал измерителя скорости. Кривая изменения среднеквадратичной ошибки на выходе такой схемы показана на рис. 12.10. Выброс после момента $t=T_1$ определяется переходными процессами в фильтрах *2* и *3*. В аналогичных схемах этот эффект обычно

называют *ошибкой включения*. Ошибки включения можно устранить или по крайней мере значительно уменьшить, оставив прежнюю схему, но лишь несколько изменив режим коммутации: перебрасывание ключа $Кл_2$ с выхода интегратора *1* на выход фильтров *2* и *3* должно происходить не в момент $t=T_1$, а с некоторым запаздыванием, в момент $t=T_1+\Delta$, когда переходный процесс можно считать практически затухшим. В этом случае среднеквадратичная ошибка на выходе системы будет изменяться так, как показано на рис. 12.10 пунктиром. Чтобы максимальное значение среднеквадратичной ошибки при переходе от одного установившегося режима к другому было минимальным, величину Δ следует выбирать из условия равенства дисперсий ошибок одноканальной и двухканальной систем (чтобы $T_1+\Delta=t_1$).

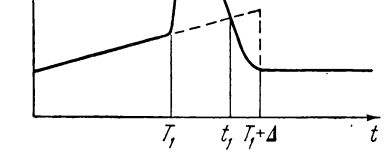

Рис. 12.10.

Этот прием устранения ошибок включения путем введения запаздывания оказывается полезным и в других задачах, когда осуществляется переход от более простой схемы к более сложной (и обычно более точной), причем ошибки первой из них или не нарастают, или нарастают медленно, а введение начальных условий во вторую схему, постоянные времени которой не очень велики, затруднительно.

Как было показано выше, совмещение функций запоминания с задачей основного преобразования в одном из блоков дает некоторое упрощение схемы. Представлялось бы желательным создание таких схем, в которых не было бы коммутации выходных сигналов фильтров. Изменение режима достигалось бы в них отключением или включением входных сигналов и, возможно, переключением внутренних связей, а на выход подавался бы сигнал из одной точки схемы. Реализация этой идеи в ряде случаев оказывается возможной.

Рассмотрим, например, комплексную систему, включающую позиционный измеритель и астроинерциальную систему. Для стационарного режима одновременной работы обоих источников информации блок-схема фильтров имеет такой вид, как показано на рис. 12.11 сплошными линиями (см. § 10.1). Спрашивается, удастся ли при отключении одного из источников информации (позиционного измерителя или акселерометра) разомкнуть

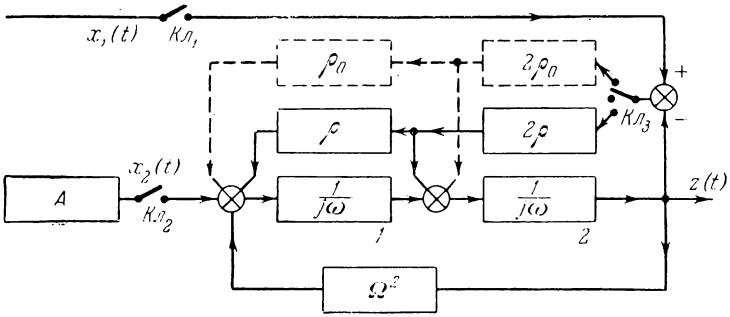

Рис. 12.11.

один из ключей $Кл_1$ или $Кл_2$, изменить некоторые передаточные числа и при этом не вводить новых интеграторов или вообще новых инерционных элементов? Очевидно, что при переходе от комплексного преобразования на один позиционный измеритель это возможно: следует переключением заменить коэффициенты 2ρ и ρ коэффициентами $2\rho_0$ и ρ_0. Тогда передаточная функция фильтра будет иметь вид (6.59), т. е. будет оптимальной для одного позиционного измерителя. Переходный процесс, возникающий при этом, будет достаточно коротким. Рассмотрим, что произойдет при переходе на режим автономной работы инерциальной системы. Размыканием ключа $Кл_3$ легко получить требуемый шулеровский контур. На выходе интегратора *2* запомненная в момент переключения величина будет представлять собой требуемое начальное значение координаты, определенное к рассматриваемому моменту времени оптимальным образом. На выходе интегратора *1* запомненная величина будет представлять собой оптимальное

значение скорости (это следует, например, из сравнения рис. 12.11 с рис. 6.5). Таким образом, начальные условия для этапа автономной работы инерциальной системы будут установлены так точно, как это позволяет комплексная система. Заметим, что та же схема обеспечивает в указанном смысле оптимальный переход от одного позиционного измерителя на инерциальную систему.

Такое простое схемное решение задачи оптимального перехода с режима на режим оказалось возможным благодаря удачно угаданной структуре фильтра (то обстоятельство, что на интеграторе *1* оказывается запомненной именно оптимальная оценка скорости, представляется особенностью только данной конкретной схемы). Выяснение возможностей построения схем, в которых переход на экстраполяцию или на инерциальную систему достигался бы без введения дополнительных инерционных элементов, представило бы большой интерес. Весьма вероятно, что в некоторых случаях для фиксации значения скорости в момент переключения потребуется дополнительный запоминающий элемент. Заметим вообще, что необходимость в дополнительных запоминающих элементах практически возникает тогда, когда по крайней мере в одном из режимов переходные процессы слишком затягиваются или не затухают, так что «преемственность» этапов оказывается эффективной.

2. Использование в течение переходного режима наиболее надежных (хотя, возможно, менее точных) данных. Этот прием целесообразно использовать для варианта 3), когда в момент изменения режима ситуация неясна. Пусть, например, в состав комплексной системы входят позиционный измеритель, астроинерциальная система и измеритель скорости, причем, когда они все работают, используются только два первых источника информации. При сигнале об изменении режима нельзя в течение некоторого интервала времени достоверно установить, какой из используемых источников информации вышел из строя. В этом случае можно пойти по двум путям:

а) перейти на счисление пути по сигналу измерителя скорости;

б) перейти на экстраполяцию по начальным условиям.

Соответствующие блок-схемы изображены на рис. 12.12, *а* и *б*. В первом случае в нормальном режиме интегратор *1* повторяет выход двухканальной комплексной системы (на рис. 12.12 она изображена одним блоком *Ф*); при сигнале об изменении режима на его вход

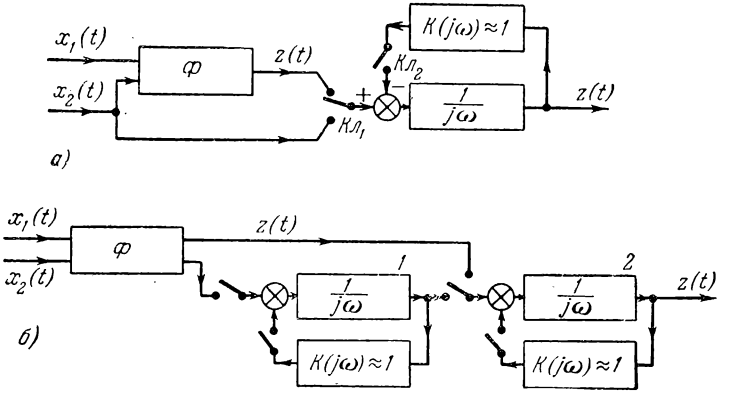

Рис. 12.12.

начинает поступать сигнал измерителя скорости $x_2(t)$, а обратная связь размыкается. Во втором случае из двухканальной комплексной системы одновременно поступают текущие значения координаты и скорости, в нормальном режиме их повторяют интеграторы *1* и *2*; при изменении режима интеграторы включаются последовательно. В первом случае имеет место бóльшая точность, зато во втором — бóльшая надежность. Обе схемы могут быть совмещены. Вообще в любой системе с измерителями, не обладающими высокой степенью надежности, целесообразно иметь простой линейный экстраполятор и во всех сомнительных случаях переходить в режим «памяти». Такой прием оправдан, если время прихода в новый установившийся режим достаточно мало́ (данные об изменении точности во времени для режима «памяти» приведены в § 5.3). В других случаях следует переходить или на измеритель воздушной скорости, или,

возможно, на инерциальную систему, как на источники, обладающие наибольшей помехозащищенностью.

Для варианта 3) важной проблемой является выяснение характера нарушения режима. Предположим, что изменение режима может произойти только из-за сбоя одного из измерителей. Тогда могут быть использованы две основные группы методов.

1. *Методы теории надежности.* Например, в трехканальной системе имеется возможность независимого вычисления координат по сигналам всех трех измерителей

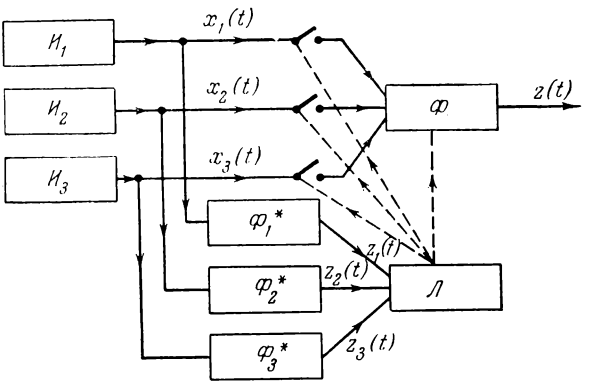

Рис. 12.13.

и сопоставления всех данных. На рис. 12.13: $И_1$, $И_2$, $И_3$ — измерители, $Ф$ — блок фильтров, осуществляющих основное оптимальное комплексное преобразование данных, $Ф_1^*$, $Ф_2^*$, $Ф_3^*$ — фильтры, приводящие все сигналы к координате, $Л$ — логическое устройство, в которое поступают выходные сигналы фильтров $z_1(t)$, $z_2(t)$, $z_3(t)$. В логическом устройстве формируются разности:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_{12}(t)=|z_1(t)-z_2(t)|, \quad \Delta_{23}(t)=|z_2(t)-z_3(t)|, \\ \Delta_{31}(t)=|z_3(t)-z_1(t)|. \end{aligned}\right\} \quad (12.19)$$

Если две из разностей, например Δ_{12} и Δ_{23}, превосходят некоторое пороговое значение Δ_0 и при этом третья разность Δ_{31} мала, то отсюда следует, что ошибки второго измерителя недопустимо велики и что его показания,

по-видимому, недостоверны. Устройство *Л* в этом случае должно отключать этот измеритель и производить соответствующую коммутацию в основном блоке *Ф*.

Однако следует иметь в виду, что такой способ применим практически лишь тогда, когда все измерители дают ошибки в координате, не нарастающие во времени неограниченно. В противном случае, например, когда в состав системы входит измеритель скорости, постоянный допуск будет превзойден через некоторое время даже при нормальной работе всех измерителей. В ряде случаев выход из положения заключается в сравнении значений не координат, а скоростей [выходные сигналы $z_1(t)$, $z_2(t)$ и $z_3(t)$ фильтров Φ_1^*, Φ_2^* и Φ_3^* представляют собой приближенные и частично сглаженные значения скорости]. При этом система также становится более мобильной: сбой измерителя быстрее сказывается в скорости, чем в координате. Однако в случае, когда в состав системы входит гироинерциальная система, у которой ошибки в скорости могут расти до больших величин, такая система непосредственно не может быть использована.

2. *Методы, учитывающие индивидуальные особенности измерителей.* Часто факт сбоя каждого измерителя может быть установлен по некоторым характерным признакам: резкому увеличению уровня ошибок в следящих системах, выходу отдельных элементов на ограничение, быстрым и беспорядочным изменениям отдельных параметров и т. д. Системы анализа, построенные на учете этих обстоятельств, не нуждаются в структурной избыточности (навигационная система может быть двухканальной и одноканальной), они могут обеспечить более быстрое распознавание ситуации, но являются более сложными в реализации.

12.6. Автоматическая индикация точности

Ошибка определения текущих значений координат и скорости в навигационной системе не может быть измерена. Однако может быть построена автоматическая система, которая будет вырабатывать некоторые сведения о величине среднеквадратичной ошибки в каждый

момент времени. Можно указать на следующие характерные ситуации, в которых навигационную систему желательно дополнить автоматическими устройствами индикации точности.

1. От точности определения местоположения зависит, может ли быть выполнена та или иная задача вообще (например, посадка на короткую и узкую посадочную полосу, встреча в воздухе для совместного выполнения операций). В этих случаях показания индикаторов точности дают ценную информацию для принятия экипажем тех или иных решений.

2. От точности определения местоположения зависит эффективность той или иной операции (например, при бомбометании — средняя величина пораженной площади цели).

3. Счисление пути производится по сигналам непрерывных источников информации, ошибки которых, приведенные к координате, нарастают. Система периодически корректируется от дискретного позиционного измерителя. В этом случае по сигналам системы индикации точности определяются моменты, в которые необходимо включать коррекцию, чтобы дисперсия ошибки определения координаты в течение всего времени полета не превосходила заданную величину.

Если бы условия полета были заранее достаточно точно известны, то график изменения среднеквадратичной ошибки определения координат мог бы быть рассчитан заранее. Однако, во-первых, во многих случаях проще рассчитывать ошибки прямо на борту, а во-вторых, условия в действительности точно не известны (имеет место параметрическая нестационарность сигналов). В основном доводы в пользу расчета уровня ошибок на борту, а не заранее, те же, что и в пользу самонастройки в противоположность предварительной настройке. Однако необходимо отметить, что при изменении параметров сигналов отличия значения дисперсии ошибки от расчетного обычно имеют тот же порядок. Таким образом, некритичность, характерная для алгоритма оптимального преобразования, здесь не имеет места. Поэтому предварительный расчет ошибок, если даже он возможен, может давать плохие результаты.

Система автоматической индикации точности может использовать следующие данные: 1) статистические сведения о свойствах ошибок; 2) текущие измерения уровня флюктуационных ошибок; 3) сведения о точности отдельных измерителей, полученные на тех интервалах, на которых работало несколько измерителей.

В зависимости от конкретных условий оказывается возможным использовать или один вид сведений, или их различные сочетания.

Пример 1. Рассмотрим задачу индикации точности для одного позиционного измерителя, работающего в установившемся режиме. Установившаяся дисперсия ошибки оптимального фильтра равна (см. § 6.3):

$$D_{s0} = 2\left(\frac{\beta}{2}\right)^{1/4} C^{1/2}\sigma^{3/2} + B^2. \qquad (12.20)$$

Предположим сначала, что интенсивность флюктуационной составляющей помехи σ^2 медленно меняется, а система самонастройки непрерывно подстраивает параметры фильтра, так что он остается оптимальным. В этом случае выражение (12.20) приближенно справедливо и при переменном σ. Устройство автоматической индикации точности должно вырабатывать величину $2\sqrt{D_{s0}}$ или $3\sqrt{D_{s0}}$ (удвоенную или утроенную среднеквадратичную ошибку).

При длительной работе измерителя медленно меняющаяся «систематическая» ошибка не может быть измерена. Здесь можно пойти по одному из трех путей:

а) величина B^2 вводится заранее как постоянная в соответствии с паспортными данными или с данными статистики (осреднение проводится по всем условиям);

б) величина B^2 непрерывно рассчитывается по косвенным данным (по высоте полета, расстояниям до наземных станций и т. д.); в этом случае величина B^2 в течение полета меняется;

в) если начальная координата была известна достаточно точно, то на начальном интервале может быть определена «систематическая» ошибка b [см. § 6.2, п. б]; если эта ошибка медленно меняется, но ее можно считать стационарной, то величину b^2 для данной реализации можно считать оценкой дисперсии B^2.

Вариант а) проще в реализации, но он будет давать плохие результаты, если дисперсия «систематической» ошибки меняется по трассе в широком диапазоне. Вариант б)сложнее, но дает бо́льшую точность. Однако при этом не учитывается тот факт, что точность может заметно меняться от полета к полету. Вариант в) требует для своего осуществления определенных условий (необходимо достаточно точное знание начального значения координаты) и предполагает постоянство характеристик ошибок во времени. Кроме того, вариант в) дает ненадежные результаты, так как величина b^2 как оценка дисперсии B^2 характеризуется весьма низким качеством. Этому варианту, возможно, следует отдать предпочтение, если фактор изменения величин «систематических» ошибок от полета к полету является основным. Все же два первых варианта, по-видимому, являются более перспективными.

Первое слагаемое выражения (12.20) целесообразно рассчитывать по текущим данным, поскольку величина σ всегда менее стабильна, чем остальные параметры.

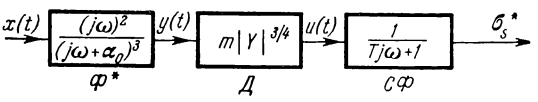

Рис. 12.14.

На рис. 12.14 изображена простая схема, предназначенная для определения этого слагаемого. Первым звеном является широкополосный фильтр Φ^*, полоса пропускания которого лежит выше частоты среза оптимального фильтра. При этом положение полосы пропускания желательно выбирать в диапазоне частот, в котором гипотезу о постоянстве спектральной плотности флюктуационной составляющей помехи можно считать справедливой. После фильтра следует детектор $Д$ с определенным образом выбранной характеристикой, так что после сглаживания фильтром $СФ$ на выходе сразу получается величина среднеквадратичной ошибки.

В выражении (12.20) может превалировать или первое, или второе слагаемое. Если в течение всего време-

ни полета свойство ошибок таково, что основным является второе слагаемое, то в системе автоматической индикации можно ограничиться одним устройством, определяющим «систематическую» ошибку по априорным данным. Если же в зависимости от условий соотношение между слагаемыми может быть различным, то должны быть предусмотрены два блока. Когда основную роль играет первое слагаемое, то из выражения (12.20) следует, что среднеквадратичная ошибка существенным образом зависит от σ. При этом сам оптимальный фильтр некритичен по отношению к σ (см. § 6.5).

Предположим теперь, что основной фильтр навигационной системы настроен на некоторое значение $\sigma = \sigma_0$. В этом случае первое слагаемое для выражения установившейся дисперсии ошибки будет иметь вид:

$$D_r = \left(\frac{\beta}{2}\right)^{1/4} C^{1/2} \sigma_0^{3/2} \left(1 + \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}\right). \qquad (12.21)$$

Эту зависимость следовало бы заложить в схему, аналогичную изображенной на рис. 12.14. Однако при изменении σ даже в довольно широких пределах выражение (12.21) мало отличается от первого слагаемого выражения (12.20) (сказывается некритичность оптимального фильтра). Поэтому схему, приведенную на рис. 12. 14, в большинстве случаев можно использовать и тогда, когда основной фильтр имеет фиксированную настройку.

Пример 2. Рассмотрим задачу индикации точности при счислении пути по сигналу измерителя скорости. В § 8.1 было получено, что после интегрирования сигнала измерителя скорости дисперсия ошибки в координате равна:

$$D_s(t) = \sigma^2 t + B^2 t^2 + C_0^2. \qquad (12.22)$$

Однако это выражение справедливо, если B^2 и σ^2 постоянны. Если же эти величины представляют собой медленно меняющиеся функции времени, то вместо выражения (12.22) следует записать:

$$D_s(t) = \int_0^t \sigma^2(\tau)\, d\tau + B_{\text{ср}}^2 t^2 + C_0^2. \qquad (12.23)$$

В отличие от первого примера устройство автоматической индикации должно производить интегрирование входных данных. Величина $B^2_{ср}$ определяется в результате осреднения экспериментальных данных, величину σ целесообразно определять в полете. Поскольку первое слагаемое выражения (12.23) растет при больших значениях t всегда медленнее, чем второе, то учет флюктуационной ошибки необходим на ограниченном интервале времени, величина которого может быть оценена заранее. Если допустимо считать величину $B^2_{ср}$ не зависящей от условий, то индикатор точности может быть выполнен просто в виде часового механизма, запускаемого в момент перехода в режим счисления пути по сигналу измерителя скорости. Во многих случаях достаточно не непрерывно получать сведения о точности, а фиксировать момент, начиная с которого среднеквадратичная ошибка становится выше допустимого значения σ_0 (например, для того, чтобы вовремя включать устройства дискретной коррекции). В таких условиях устройства индикации точности еще больше упрощаются.

В комплексных системах принципиальные возможности автоматической индикации точности шире, чем в одноканальных, поскольку при статистической независимости помех в каналах могут быть построены оценки корреляционных функций всех сигналов. В частности, если в состав системы входят два позиционных измерителя (или позиционный измеритель и астроинерциальная система), существует возможность определения среднеквадратичных значений «систематических» ошибок всех источников информации. Однако определение среднеквадратичного значения ошибки самого точного измерителя (именно от нее зависит среднеквадратичное значение «систематической ошибки всей системы) требует слишком большого времени непрерывной работы системы. Поэтому для индикации точности в комплексной системе, по-видимому, нужно использовать статистические сведения о «систематической» ошибке самого точного измерителя, а остальные данные получать обработкой текущих сигналов.

В комплексной системе, в которой измерители работают неодновременно или некоторые из них являются

дискретными, данные о «систематических» ошибках менее точных измерителей могут быть использованы на интервалах автономной работы последних. На рис. 12.15

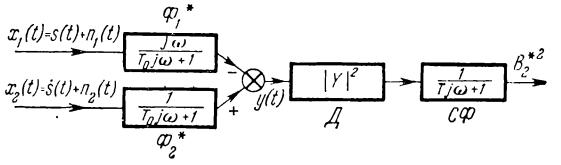

Рис. 12.15.

изображена блок-схема устройства, определяющего среднеквадратичное значение систематической ошибки измерителя скорости в комплексной системе, включающей непрерывный позиционный измеритель и измеритель скорости. Частота среза фильтра Φ_1^*, постоянная времени которого T_0 достаточно велика, определяет диапазон частот, в котором ошибки условно считаются «систематическими». После квадратичного детектора *Д* следует сглаживающий фильтр *СФ*, постоянная времени которого еще больше постоянной времени первого фильтра.

В комплексной системе, включающей два позиционных измерителя, один из которых непрерывный, а другой (более точный) — дискретный [их выходные сигналы соответственно $x_1(t)$ и $x_2(t_i)$ $(i=1, 2, \ldots, N)$], оценка величины дисперсии «систематической» ошибки непрерывного измерителя строится следующим образом:

$$B_1^{*2}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{\int_0^{t_i} W_1(t, \tau)\, x_1(\tau)\, d\tau - x_2(t_i)\right\}^2. \qquad (12.24)$$

Для всех рассмотренных случаев могут быть поставлены, а иногда и решены задачи оптимальных оценок среднеквадратичных значений ошибок. Однако для решения этих задач должен быть использован гораздо более сложный аппарат теории оптимальных нелинейных преобразований. Сложность процесса решения при этом многократно возрастает.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аналитические самонастраивающиеся системы автоматического управления. Под ред. В. В. Солодовникова, Изд-во «Машиностроение», 1965.
2. Астафьев Г. П., Шебшаевич В. С., Юрков Ю. А., Радиотехнические средства навигации летательных аппаратов, Изд-во «Советское радио», 1962.
3. Беляев Б. Н., Болдырев В. С., Применение теории случайных функций к изучению морских течений, Океанология, вып. 6, 1963.
4. Бендат Дж., Основы теории случайных шумов и ее применения, Изд-во «Наука», 1965.
5. Боднер В. А., Теория автоматического управления полетом, Изд-во «Наука», 1964.
6. Боднер В. А., Козлов М. С., Стабилизация летательных аппаратов и автопилоты, Оборонгиз, 1961.
7. Вайнштейн Л. А., Зубаков В. Д., Выделение сигналов на фоне случайных помех, Изд-во «Советское радио», 1960.
8. Горенштейн И. А., Шульман И. А., Сафарян А. С., Инерциальная навигация, Изд-во «Советское радио», 1962.
9. Горский А. А., Автоматическая оптимальная фильтрация, Известия АН СССР, ОТН, Энергетика и автоматика, № 5, 1962.
10. Давенпорт В. Б., Рут В. Л., Введение в теорию случайных сигналов и шумов, ИЛ, 1960.
11. Денисов В. Г., Навигационное оборудование летательных аппаратов, Оборонгиз, 1963.
12. Дункан Д., Комбинированные допплеровские радиолокационные и инерциальные навигационные системы, Вопросы ракетной техники, № 10, 1959.
13. Заварина М. В., Обработка данных об изменчивости ветров, Аэроклиматология, Труды ГГО, серия 1, вып. 21, 1946.
14. Катковник В. Я., Полуэктов Р. А., Об оптимальной передаче непрерывного сигнала через импульсную цепь, Автоматика и телемеханика, т. XXV, № 2, 1964.
15. Катковник В. Я., Полуэктов Р. А., О задаче синтеза оптимальной многомерной системы управления, Автоматика и телемеханика, т. XXVI, № 1, 1965.
16. Катковник В. Я., Полуэктов Р. А., Челпанов И. Б., Синтез комплексных дискретных систем, включающих непрерывные звенья, Известия АН СССР, ОТН, Техническая кибернетика, № 2, 1963.

17. Кузин Л. Т., Расчет и проектирование дискретных систем управления, Машгиз, 1962.
18. Кухтенко А. И., Проблема инвариантности в автоматике, Гостехиздат УССР, 1963.
19. Миддлтон Д., Введение в статистическую теорию связи, т. I, Изд-во «Советское радио», 1961.
20. Молоканов Г. Д., Учет ветра в дальних полетах, Оборонгиз, 1957.
21. Мак-Клур К. Л., Теория инерциальной навигации, Физматгиз, 1964.
22. Ньютон Дж. К., Гулд Л. А., Кайзер Дж. Ф., Теория линейных следящих систем, Физматгиз, 1961.
23. Основы автоматического управления. Под ред. В. С. Пугачева, Физматгиз, 1963.
24. Перов В. П., Статистический синтез импульсных систем, Изд-во «Советское радио», 1959.
25. Питерсон И. Л., Статистический анализ и оптимизация систем автоматического управления, Изд-во «Советское радио», 1964.
26. Пугачев В. С., Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, Физматгиз, 1960.
27. Ривкин С. С., Теория гироскопических устройств, Судпромгиз, т. 1, 1962, т. 2, 1964.
28. Роберсон Р., Измерение угла рысканья спутника при помощи гироскопа, Труды Первого международного конгресса ИФАК, т. III, Изд-во АН СССР, 1961.
29. Свешников А. А., Исследование поведения линейных динамических систем под воздействием нелинейных функций случайных процессов, Прикладная математика и механика, т. XXV, № 3, 1961.
30. Селезнев В. П., Навигационные устройства, Оборонгиз, 1961.
31. Солодовников В. В., Статистическая динамика линейных систем автоматического управления, Физматгиз, 1960.
32. Стивенс С. Т., Линг Д. П., Коррекция ошибок аппаратуры инерциальной навигации, Вопросы ракетной техники, № 3, 1958.
33. Стрэттон А., Сочетание инерциальной навигации и радиосредств, В сб. «Проблемы инерциальной навигации», под ред. Н. И. Борисова, ИЛ, 1961.
34. Фельдбаум А. А., Вычислительные устройства в автоматических системах, Физматгиз, 1960.
35. Хаммон Н., Влияние случайных ошибок на инерциальные системы управления, Вопросы ракетной техники, № 12, 1963.
36. Цыпкин Я. З., Теория линейных импульсных систем, Физматгиз, 1963.
37. Чанг Ш. С., Синтез оптимальных систем автоматического управления, Изд-во «Машиностроение», 1964.
38. Челпанов И. Б., Синтез динамических характеристик систем преобразования навигационных данных для индикаторного режима, Изв. ВУЗов, серия «Приборостроение», № 6, 1964.
39. Челпанов И. Б., Синтез динамических характеристик систем преобразования навигационных данных для режима управления, Изв. ВУЗов, серия «Приборостроение», № 1, 1965.

40. Челпанов И. Б., Синтез оптимального фильтра для сигналов, изменяющих статистические свойства в последовательные интервалы времени, Автоматика и телемеханика, т. XXIV, № 10, 1963.
41. Челпанов И. Б., Приближенный способ решения интегральных уравнений оптимальной фильтрации, Автоматика и телемеханика, т. XXIV, № 11, 1963.
42. Челпанов И. Б., Комплексная самонастраивающаяся система без использования априорных сведений о свойствах сигналов, Автоматика и телемеханика, т. XXVI, № 1, 1965.
43. Челпанов И. Б., Построение оптимального фильтра при неполных сведениях о статистических свойствах сигналов, Известия АН СССР, ОТН, Техническая кибернетика, № 3, 1963.
44. Челпанов И. Б., Синтез динамических характеристик многоканальных систем, Известия АН СССР, Техническая кибернетика, № 6, 1963.
45. Челпанов И. Б., Синтез комплексной системы, состоящей из непрерывного и дискретного каналов, Известия АН СССР, ОТН, Техническая кибернетика, № 1, 1964.
46. Эткин Б., Динамика полета, Изд-во «Машиностроение», 1964.
47. Яглом А. М., Корреляционная теория процессов со случайными стационарными n-ми приращениями, Математический сборник, № 27, Изд-во АН СССР, 1955.
48. Hammon N., An application of random process theory to gyro drift analysis, IRE Transactions, v. PGANE-7, No. 3, 1960.
49. Hsieh H. C., Leondes C. T., Techniques for the optimum synthesis of multipole control systems with random processes as inputs, IRE Transactions, v. AC-4, No. 3, 1959.
50. Huang J. C., Inertial double measurement with both sampled and continuous inputs, IRE Intern. Conv. Record, pt. 2, 1962.
51. Newton G. C., Inertial-guidance limitations imposed by fluctuation phenomena in gyroscopes, Proc. IRE, v. 48, No. 4, 1960.
52. Strazulla R., Widebound equipment application, IRE Transactions, v. AC-1, No. 1, 1956.
53. Stiyers C. J., An accuracy study of a doppler navigation system assuming time-stationary random inputs errors, IEEE Transactions, v. ANE-10, No. 1, 1963.
54. Westcott J. H., Design of multivariable optimum filters Transactions ASME, v. 80, No. 2, 1958.
55. Zadeh L. A., Ragazzini J. R., An extension of Wiener's theory of prediction, J. Appl. Phys., v. 21, July, 1950.