

ПО ФИЗИКЕ
С РЕШЕНИЯМИ

МИН ЧЕН ЗАДАЧИ

МИН ЧЕН



МИН ЧЕН

ЗАДАЧИ

ПО ФИЗИКЕ

С РЕШЕНИЯМИ

Издательство

Мир

Москва



**University of California,
Berkeley**

PHYSICS PROBLEMS

With Solutions

MIN CHEN

**Massachusetts Institute
of Technology**

**Prentice-Hall, Inc.,
Englewood Cliffs, New Jersey**

МИН ЧЕН

**ЗАДАЧИ
ПО ФИЗИКЕ
С РЕШЕНИЯМИ**

Перевод с английского
Ю. А. ЯНАЙТА

Под редакцией
В. И. ГРИГОРЬЕВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
МОСКВА 1978

Сборник задач по физике с ответами и решениями включает около 300 задач по основным разделам современной физики — механике, электричеству и магнетизму, оптике, теплоте и статистической физике, квантовой механике, атомной и ядерной физике. Задачи предлагались студентам старших курсов Калифорнийского университета в Беркли в 1959—1968 гг.

Сборник предназначен для студентов, изучающих физику в университетах, педагогических институтах и высших технических учебных заведениях, а также для преподавателей физических дисциплин.

Редакция литературы по физике

Original English language edition published by Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, U. S. A. Copyright © 1974 by Prentice-Hall, Inc.

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Калифорнийский университет в Беркли занимает одно из ведущих мест в системе подготовки научных кадров и проведения научных исследований в США. Курс физики в пяти томах, известный под названием Берклеевского, подготовленный крупными учеными-физиками в Беркли, переведен на русский язык в издательстве «Наука» и пользуется популярностью среди физиков в нашей стране. Вполне вероятно, что читатели с интересом встретят и выпуск сборника задач по физике, также подготовленного в стенах этого университета.

В настоящем сборнике приведено около 300 задач по основным разделам университетского курса физики — механике, электричеству и магнетизму, оптике, теплоте и статистической физике, квантовой механике, атомной и ядерной физике. В него включено также небольшое число задач по математическим дисциплинам. Задачи такого типа предлагаются на вступительных экзаменах по физике для аспирантов физического факультета в Беркли.

Построение сборника довольно своеобразно: оно отражает специфику письменных экзаменов по физике в университетах США. Будущий аспирант, прежде чем приступить к выполнению самостоятельной научно-исследовательской работы, должен помимо устных экзаменов выдержать четыре письменных экзамена, решив каждый раз серию задач по определенным разделам курса физики. Именно по таким сериям и сгруппированы задачи в данном сборнике. Естественно, что при такой подборке задач оказалось невозможным систематизировать их по темам. Все серии задач оценены одинаковым числом баллов (которыми характеризуется степень трудности каждой задачи), но вряд ли можно считать такую оценку вполне объективной. На наш взгляд лучше решить 3—4 довольно сложных, чем 20—25 элементарных задач, с которыми вполне может справиться выпускник средней школы. Преподаватели, которые всерьез ознакомятся с содержанием этого сборника, смогут получить представление об уровне подготовки физиков в Калифорнийском университете и о требованиях, предъявляемых к тем студентам, которые стремятся получить углубленную подготовку в одной из областей физики.

Автор сборника взял на себя нелегкий труд — составить ответы и решения ко всем задачам. Разумеется, это не обошлось без некоторых ошибок и неточностей. Поэтому при переводе в решения некоторых задач внесены, с любезного разрешения автора, необходимые уточнения или даны соответствующие примечания. Вполне возможно, что некоторые погрешности остались незамеченными. Опечатки, обнаруженные при переводе американского издания сборника, устранены; обозначения ряда физических величин заменены общепринятыми.

При решении задач можно руководствоваться общеизвестным Берклеевским курсом физики в пяти томах, Фейнмановскими лекциями по физике и рядом других учебных пособий, приведенных в списке литературы в конце книги. Сборник может оказаться полезным для студентов, изучающих физику в университетах, педагогических институтах и высших технических учебных заведениях, а также для преподавателей физических дисциплин.

В. И. Григорьев, Ю. А. Янайт

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

В данный сборник включены задачи, отобранные из числа предлагавшихся на письменных вступительных экзаменах в аспирантуру Калифорнийского университета в Беркли в период 1959—1968 гг. Они составлены преподавателями физического факультета в Беркли, принимавшими постоянное участие в экзаменационных комиссиях на протяжении этих девяти лет. Такие экзамены проводятся два раза в год. Все поступающие в аспирантуру обязаны в течение двух дней пройти испытания по таким разделам университетского курса физики, как механика, электричество и магнетизм, оптика, теплота и атомная физика. Экзамен проводится в четыре этапа, на каждый из которых отводится три часа. Пользоваться при этом конспектами, таблицами и другими источниками не разрешается. С момента утверждения данного сборника к печати по существу изменилось только одно: теперь несколько повышены требования к знанию основ квантовой механики.

Проведение экзамена преследует две цели. С одной стороны, он позволяет установить, необходимо ли поступающему в аспирантуру дополнительное изучение определенных разделов университетского курса физики (так называемый placement test); с другой стороны, он служит квалификационным экзаменом (qualification test) для получения ученой степени. Сдавшие его успешно сразу же получают допуск к устному вступительному экзамену. Студентам предоставлены три возможности для сдачи письменного экзамена: один раз как «placement test» и дважды, если это необходимо, в качестве квалификационного. Студенту, не сдавшему экзамен повторно, может быть отказано в приеме в аспирантуру на соискание степени доктора философии в Калифорнийском университете в Беркли.

Отобранные задачи объединены в серии подобно тому, как это было принято на самих вступительных экзаменах. Степень трудности каждой задачи оценивается в баллах (они помещены в скобках рядом с номерами задач); сумма баллов в каждой серии задач равна 100. На решение задач одной серии должно затрачиваться не более трех часов. Чтобы настоящий сборник принес максимальную пользу, читатели должны попытаться вначале решать задачи самостоятельно, не обращаясь ни к приведенным решениям, ни к каким-либо другим руководствам.

Мы надеемся, что данный сборник задач с решениями будет благожелательно воспринят студентами как в университете в Беркли, так и в других университетах. Он может оказать существенную помощь при подготовке к экзамену, а в более широком плане — в оценке своего опыта и способностей. Подготовка по этому задачнику в обществе одного-двух друзей может даже стать занимательным занятием.

В конце сборника приведен список литературы; в ней содержатся все основные сведения, которые могут потребоваться студенту в затруднительных случаях. Чаще всего, однако, наилучшим пособием служит материал уже знакомого учебника.

Решения задач выполнены автором и проверены д-рами Ч. Фонгом, Р. Кунцельманом, К. Вангом, Ч. Ф. Чэном и Чинфу-Цзяном. Несмотря на тщательное выполнение решений и их проверку рецензентами, ошибки все же возможны. Автор будет очень рад присланным замечаниям. За правильность решений задач руководство физического факультета Калифорнийского университета в Беркли ответственности не несет.

Автор весьма признателен профессору Эмилио Сегре за оказанную им поддержку и ценные советы. Он выражает также свою благодарность рецензентам за добросовестно выполненную ими работу и многочисленные предложения и особенно Сюзанне за проявленное ею терпение при оформлении рукописи.

Мин Чен

I. МЕХАНИКА

ЗАДАЧИ

I.1.1 (15 баллов). Частица массой m_1 и импульсом P_1 упруго сталкивается с частицей массой m_2 , которая первоначально находилась в покое.

а) Определите максимально возможный импульс частицы m_2 в лабораторной системе отсчета после столкновения. (Используйте формулы релятивистской теории.)

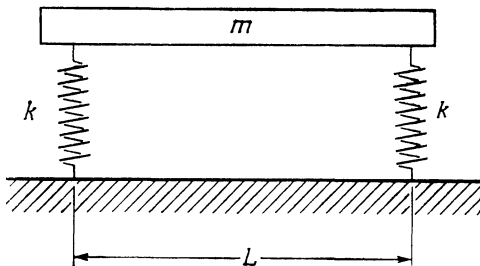
б) Примените полученный результат к случаю столкновения протона, импульс которого равен отношению энергии покоя протона к скорости света c , с неподвижным электроном. Найдите численное значение максимального импульса электрона в МэВ/с после столкновения.

I.1.2 (15 баллов). На гладкой ровной поверхности обыкновенного стола лежит тонкий однородный стержень массой m и длиной L . На конце стержня перпендикулярно его оси действует импульс силы F , направленный горизонтально.

а) На какое расстояние передвинется центр масс стержня за время полного своего оборота?

б) Чему равны энергии поступательного и вращательного движений стержня и его полная кинетическая энергия после воздействия импульса силы?

I.1.3 (15 баллов). Однородная балка массой m и длиной L поддерживается на своих концах двумя одинаковыми пружинами с жесткостью k . Балку приводят в движение, нажимая на один из ее концов, смещая его вниз на небольшое расстояние a и затем освобождая. Решите задачу о движении балки, вводя нормальные моды и частоты колебаний. Схематически изобразите нормальные моды.



1.1.4 (10 баллов). Дана матрица A из $N \times N$ действительных элементов.

- а) Пусть A — симметрическая матрица, т. е. $A_{ij} = A_{ji}$. Докажите, что все ее собственные значения действительны.
 б) Пусть A не является симметрической матрицей; докажите, что любые ее комплексные собственные значения образуют сопряженные пары.

1.1.5 (15 баллов). В северном полушарии на широте 45° с высоты h (h много меньше радиуса Земли) падает покоившееся вначале тело массой m . В каком месте оно упадет относительно отвеса, опущенного из исходной точки? Не забудьте указать не только величину, но и направление смещения.

1.1.6 (15 баллов). Упругая струна длиной L подвешена между двумя опорами. Натяжение струны T , а ее линейная плотность ρ . Общая масса струны $M = \rho L$. Колебания струны возбуждаются ударом молоточка, который сообщает небольшому участку длиной a в середине струны поперечную скорость v_0 . Определите амплитуды первых трех низкочастотных гармоник.

1.1.7 (5 баллов). Твердое тело движется в воздухе с очень большой скоростью V (превышающей среднюю скорость движения молекул воздуха). Докажите, что сила сопротивления пропорциональна AV^2 , где A — площадь лобовой поверхности тела.

1.1.8 (5 баллов). Какой стала бы продолжительность суток на Земле, если Земля вращалась бы с такой скоростью, что тела на экваторе парили в невесомости?

1.1.9 (5 баллов). Дайте определение циклической координаты. Какие преимущества она дает при решении задач?

1.2.1 (10 баллов).

- а) (5 баллов). Покажите, что косоэрмитова матрица ($A^+ = -A$) может иметь только одно вещественное собственное значение, и оно равно нулю.
 б) (5 баллов). Используя метод вычетов, вычислите

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$$

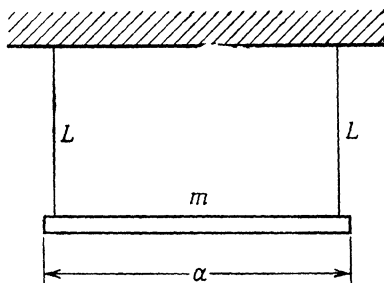
1.2.2 (15 баллов).

- а) (10 баллов). Сколь огромную энергию пришлось бы затратить, чтобы «разнести» всю Землю (т. е. удалить все ее составные части на ∞)?

б) (5 баллов). Предположим, что затем произошло бы быстрое (без потерь энергии на излучение) воссоединение разнесенных на бесконечность этих частей Земли. Расплавилась бы она? Свой ответ обоснуйте.

1.2.3 (30 баллов).

а) (20 баллов). Жесткий стержень массой m и длиной a подвешен с обоих концов на невесомых нитях, имеющих одинаковую длину L .



Стержень выводят из состояния покоя, прикладывая небольшой импульс силы P к одному из его концов в направлении, перпендикулярном стержню и нити. Определите частоты и амплитуды нормальных мод колебаний.

б) (10 баллов). Стержень находится в покое. Каково натяжение одной из нитей сразу после того, как другую мгновенно перережут?

1.2.4 (25 баллов). Частица массой m движется в поле центральной силы с потенциалом $V(r) = Kr^3$ ($K > 0$).

а) (10 баллов). Определите кинетическую энергию и момент импульса частицы при движении ее по круговой орбите (радиусом a).

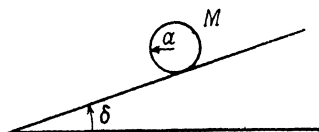
б) (5 баллов). Чему равен период такого кругового движения?

в) (10 баллов). Каков период малых радиальных колебаний частицы относительно $r = a$, если ее движение под действием возмущений слегка отклонилось от кругового?

1.2.5 (20 баллов). Полагают, что можно получить моноэнергетические фотоны высоких энергий путем рассеяния лазерного излучения на пучке быстрых электронов, выходящих из электронного ускорителя. Выведите формулу для максимальной энергии каждого из рассеиваемых фотонов в зависимости от энергии фотонов лазерного излучения и энергии электронов в пучке. Выполните численные расчеты в случае излучения

рубинового лазера, которое рассеивается на электронах с энергией 20 ГэВ, получаемых от Стэнфордского линейного ускорителя.

1.3.1 (15 баллов). Шарик массой M и радиусом a скатывается без скольжения по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол δ .

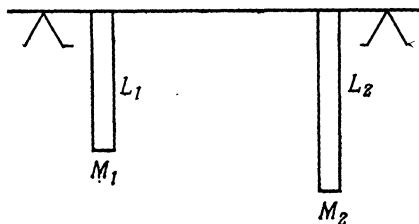


- Определите ускорение центра масс шарика.
- Если шарик толкнуть вверх по наклонной плоскости с начальной скоростью v_0 , то через какой промежуток времени он вернется в исходную точку?

1.3.2 (15 баллов). Нестабильная частица с энергией покоя 1000 МэВ и средним временем жизни в состоянии покоя 10^{-8} с распадается на мю-мезон ($m_{\mu}c^2 = 100$ МэВ) и нейтрино.

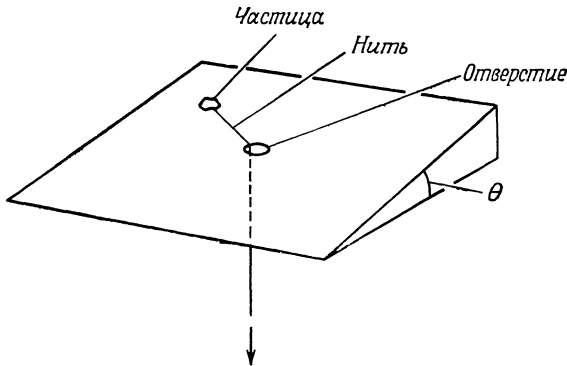
- Вычислите среднюю длину распада, если частица имеет импульс 1000 МэВ/с.
- Какова энергия мю-мезона в последнем случае, если он испущен под углом 15° ?

1.3.3 (15 баллов). Рассмотрим две балки массами M_1 и M_2 и длиной L_1 и L_2 , жестко прикрепленные к горизонтальному невесомому стержню. Концы стержня лежат на опорах; стержень обладает крутильной жесткостью K и может вращаться только вокруг своей продольной оси. Система совершает колебания под действием силы тяжести. Напишите лагранжиан системы (введя свои переменные) и найдите уравнения движения.



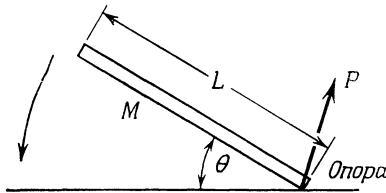
1.3.4 (25 баллов). На шероховатой плоскости, наклоненной под углом θ ($\operatorname{tg} \theta = \mu$, где μ — коэффициент трения как покоя, так и скольжения), расположена частица. К частице прикрепле-

на нить, проходящая через небольшое отверстие в наклонной плоскости.



Нить очень медленно подтягивают, и можно считать, что частица все время находится в почти статическом равновесии. Определите траекторию частицы на наклонной плоскости.

1.3.5 (15 баллов). Стержень массой M и длиной L свободно падает в вертикальной плоскости, как показано на рисунке.



В начальном состоянии покоя стержень составлял с горизонталью угол 30° . Определите давление на ось вращения стержня в тот момент, когда он проходит горизонтальное положение.

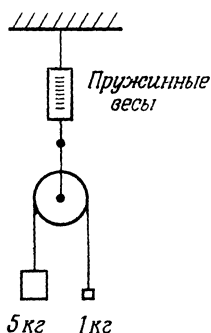
1.3.6 (15 баллов). Движущийся протон сталкивается с другим протоном, который первоначально находился в покое. Какой минимальной кинетической энергией должен обладать движущийся протон, чтобы стала возможной реакция $p + p = p + p + \bar{p} + p$? Масса антипротона \bar{p} равна массе протона. Представьте полученный вами результат в виде отношения кинетической энергии к энергии покоя протона. Каково приближенно численное значение кинетической энергии в МэВ?

1.4.1 (15 баллов). Предположим, что приливные волны на Земле вызываются только Солнцем.

а) Откуда черпается энергия, рассеиваемая во время приливов, и чему равна максимальная величина этой энергии?

б) Какие процессы обеспечивают сохранение суммарного момента импульса системы?

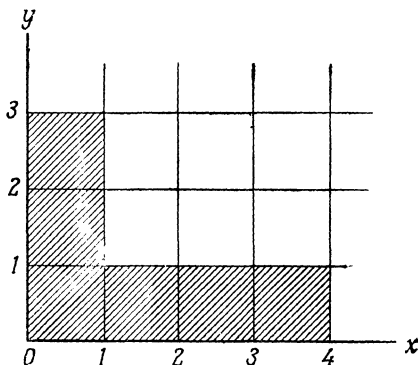
1.4.2 (5 баллов). Время жизни мю-мезона составляет $2 \cdot 10^{-6}$ с. Пучок мю-мезонов выходит из циклотрона со скоростью $0,8c$, где c — скорость света. Каково должно быть время жизни мю-мезонов в этом пучке в лабораторной системе отсчета?



1.4.3 (5 баллов). На рисунке показан блок пренебрежимо малой массы, подвешенный к пружинным весам. К концам нити, переброшенной через блок, прикреплены грузы массами 1 и 5 кг. Грузы движутся с ускорением под действием силы тяжести. Какой вес покажут пружинные весы при движении грузов — 6 кг, меньше или больше?

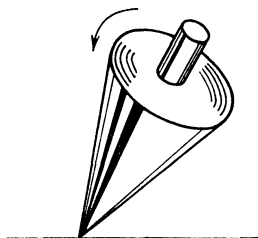
1.4.4 (5 баллов). Из винтовки вылетает пуля. Если допустить свободную отдачу (т. е. движению винтовки не противодействует плечо стрелка), то будет ли кинетическая энергия винтовки после выстрела равна, меньше или больше кинетической энергии пули?

1.4.5 (5 баллов). На рисунке заштрихованная область представляет однородную пластину в форме буквы L . Определите координаты \bar{x} и \bar{y} ее центра масс.



1.4.6 (5 баллов). В стакане с водой при температуре 0°C плавает кубик льда. Лед растаял. Поднимется, упадет или останется прежним уровень воды в стакане?

1.4.7 (5 баллов). Волчок вращается вокруг своей оси в направлении, указанном на рисунке. Острие волчка упирается в стол. По часовой стрелке или против нее прецессирует ось волчка, если смотреть на него сверху?



1.4.8 (5 баллов). К концам пружины жесткостью k прикреплены грузы с массами m и $3m$. Чему равен период колебаний системы?

1.4.9 (5 баллов). Зависимость потенциальной энергии взаимодействия двух частиц V от расстояния r между ними дается выражением

$$V = \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r},$$

где a и b — положительные коэффициенты. На каком расстоянии r частицы находятся в статическом равновесии?

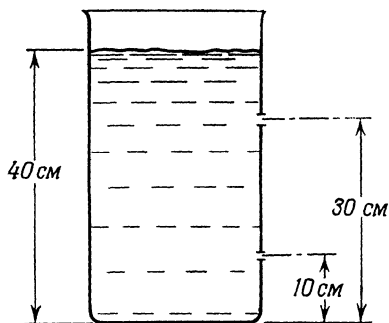
1.4.10 (5 баллов). Две частицы с одинаковыми массами скреплены пружинами, как показано на рисунке. Частицы могут свободно колебаться в продольном направлении. Изобразите стрелками (или опишите) соотношения амплитуд и фаз колебаний частиц, соответствующих двум нормальным модам (1 и 2).



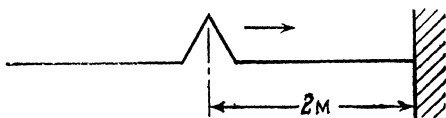
1.4.11 (5 баллов). Предположим, что радиус Земли сократился на 1%, а масса ее осталась неизменной. Увеличится или уменьшится ускорение свободного падения g на поверхности Земли? Если да, то на сколько процентов?

1.4.12 (5 баллов). Пустая цилиндрическая консервная банка и такая же банка, но с плотно набитым колбасным фаршем начинают одновременно скатываться по наклонной плоскости. Какая из банок скатится вниз первой?

1.4.13 (5 баллов). Цилиндрический стакан наполнен водой до уровня 40 см. В стенке стакана имеются два одинаковых отверстия: одно — на высоте 10 см, а другое — на высоте 30 см. Чему равно отношение масс воды в начальный момент времени, вытекающей за 1 с из обоих отверстий?



1.4.14 (5 баллов). Длинная натянутая струна прикреплена справа к жесткой стене. По струне слева направо распространяется со скоростью 1 м/с поперечное возмущение, имеющее вид равнобедренного треугольного импульса. В начальный момент времени вершина этого импульса отстоит от стены на расстояние 2 м. Нарисуйте профиль струны спустя 2 с и спустя 5 с от начала отсчета.



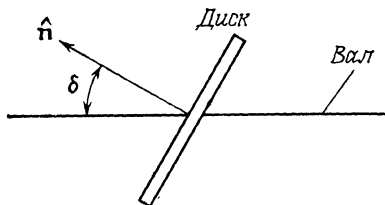
1.4.15 (10 баллов). Формула для кориолисовой силы имеет вид

$$\mathbf{F} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}.$$

- В каком случае применяют эту формулу и какой смысл имеют входящие в нее символы?
- Река в северном полушарии течет к югу. Ширина русла реки на широте λ равна W . Уровни воды на восточном и западном берегах реки должны быть различными. Какой из них будет выше?
- Выведите формулу для разности уровней, подробно поясняя значение каждого используемого в ней символа.
- Оцените весьма приближенно эту разность уровней для

реки Миссисипи¹⁾. Укажите числовые данные, которые вы приписали (пусть даже по догадке) различным параметрам.

I.4.16 (10 баллов). Диск плотно насажен на вал, проходящий через центр диска, причем ось симметрии диска \hat{n} образует с валом угол δ .

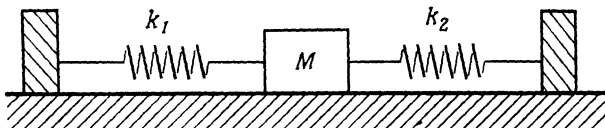


Главный центральный момент инерции диска относительно оси симметрии \hat{n} обозначим через C , а относительно любой оси \hat{n}' , перпендикулярной \hat{n} , — через A . Вал вращается в подшипниках с постоянной угловой скоростью ω . Определите величину вращающего момента, действующего на подшипники.

I.5.1 (10 баллов). Брусок массой M лежит на идеально гладком горизонтальном столе и посредством пружин, характеризующих жесткостью k_1 и k_2 , связан с двумя неподвижными опорами.

а) Какова будет частота продольных колебаний бруска, если его слегка вывести из равновесного положения? Предположим, что амплитуда колебаний бруска равна A и в тот момент, когда он проходит положение равновесия, к нему прилипает упавший сверху груз массой m . Определите:

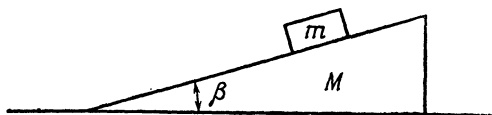
- б) новую частоту колебаний,
в) новую амплитуду колебаний.



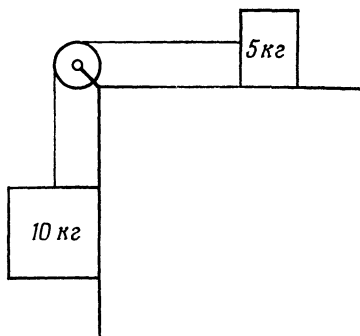
I.5.2 (10 баллов). На гладком горизонтальном столе расположен клин с углом β при вершине. Масса клина равна M . На наклонную поверхность клина помещают брусок массой m ,

¹⁾ Вместо этого попытайтесь оценить разность уровней у знакомой вам реки. О правильности ответа можно судить по сопоставлению ваших числовых данных с теми, что приводит автор. — Прим. ред.

который начинает скользить вниз. Трением между любыми поверхностями можно пренебречь. Чему равно ускорение клина относительно стола (до того момента, когда брусок коснется стола)?



1.5.3 (3 балла). К краю стола, как показано на рисунке, прикреплен блок, массой и коэффициентом трения которого можно пренебречь. Трение на поверхности стола также можно не учитывать. Через блок переброшена невесомая нить, к концам которой прикреплены два бруска массами 10 и 5 кг. Будет ли натяжение нити больше, равно или меньше, чем в том случае, когда брусок массой 5 кг приклеен к столу?

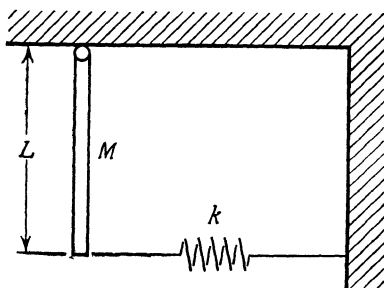


1.5.4 (3 балла). Диск вращается в горизонтальной плоскости вокруг своей оси. В узкую радиальную канавку, расположенную на верхней поверхности диска, вставлено лезвие безопасной бритвы. В каком направлении — в сторону или против вращения — начнет падать лезвие, если оно будет двигаться по направлению к центру диска?

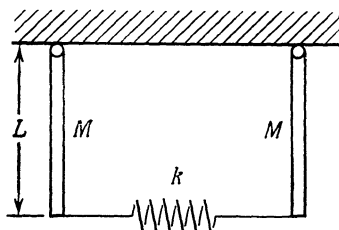
1.5.5 (3 балла). Представьте себе, что радиус Земли уменьшился на 1%, а масса ее осталась прежней. Увеличится ли, останется прежней или уменьшится энергия вращения Земли? Если изменится, то на сколько процентов?

1.5.6 (3 балла). Однородный тонкий стержень массой M и длиной L висит на шарнире без трения. В нижней своей части, как показано на рисунке, он связан со стеной посредством пружины.

жины, обладающей жесткостью k . Чему равен период колебаний стержня?



1.5.7 (3 балла). Два тонких стержня каждый массой M и длиной L подвешены на шарнирах и соединены внизу пружиной таким образом, что в состоянии покоя они находятся в вертикальном положении. Жесткость пружины равна k . Покажите стрелками характер колебаний, соответствующих двум нормальным модам. Какие частоты соответствуют этим нормальным модам?



1.5.8 (3 балла). Каково (с точностью до одной значащей цифры) отношение масс Солнца и Земли?

1.5.9 (3 балла). Два человека одинакового веса держатся руками за концы каната, переброшенного через блок. Оба начинают подниматься по канату вверх. Один из них взбирается со скоростью (относительно каната), вдвое превышающей скорость другого. Трением в блоке можно пренебречь. Кто первым достигнет блока: а) более быстрый, б) менее быстрый, в) оба одновременно или г) ответ неоднозначен?

1.5.10 (3 балла). Пробка погружена в ведро с водой и удерживается в ней с помощью пружины, прикрепленной ко дну ведра. Ведро держит в руке человек, находящийся в лифте. Что произойдет с пружиной в начале спуска лифта, когда он движется ускоренно: а) пружина растянется, б) сожмется или в) ее состояние не изменится?

1.5.11 (3 балла). Один из спутников запущен на круговую орбиту радиусом R . Другой — на орбиту радиусом $1,01 R$. Будет ли период обращения второго спутника больше, равен или меньше периода обращения первого спутника? Если периоды обращения различаются, то на сколько процентов?

1.5.12 (3 балла). Шарик радиусом R погружается в жидкость, коэффициент вязкости которой равен η . Сила сопротивления, действующая на шарик со стороны жидкости, по закону Стокса равна $6\pi\eta Rv$. Одновременно в жидкость погружается другой шарик той же массы, но радиусом $2R$. Чему равны отношения

а) их начальных ускорений a_R/a_{2R} ,

б) их установившихся скоростей v_R/v_{2R} ?

1.5.13 (3 балла). Частица движется в поле одной из сил, определяемых следующими выражениями:

1) $F_x = 2yz(1 - 6xyz)$, $F_y = 2xz(1 - 6xyz)$, $F_z = 2xy(1 - 6xyz)$

и

2) $F_x = y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$, $F_y = x^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$,
 $F_z = x^2 + y^2 + 2(xy + yz + zx)$.

а) Для какой из них можно ввести потенциал $V(x, y, z)$?

б) В поле какой силы сохраняется полная (кинетическая плюс потенциальная) энергия движущейся частицы?

1.5.14 (20 баллов). Шар радиусом r вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω . Ось вращения горизонтальна. Шар падает на ровную поверхность, некоторое время вращается на месте, а затем начинает катиться без скольжения. Коэффициент трения равен μ .

а) Чему равна конечная скорость центра масс шара?

б) Какое расстояние пройдет шар, прежде чем установится эта скорость?

в) Вычислите конечную скорость центра масс шара для случая большого μ , когда начальное скольжение полностью отсутствует.

1.5.15 (13 баллов). Мяч в форме эллипсоида вращения имеет главные центральные моменты инерции I_1 , I_2 и I_3 ¹⁾. При броске ему случайно сообщили вращение с угловой скоростью ω под углом θ ($< 90^\circ$) к большой оси мяча.

а) Определите величину и направление момента импульса (относительно большой оси мяча).

б) Чему равна угловая скорость прецессии? (Влиянием сопротивления воздуха и силы тяжести пренебречь.)

1.5.16 (14 баллов). Частица движется в поле центральной силы. Рассмотрите только радиальную часть движения.

¹⁾ У эллипсоида вращения два главных центральных момента инерции совпадают ($I_3 = I_2$). — *Прим. перев.*

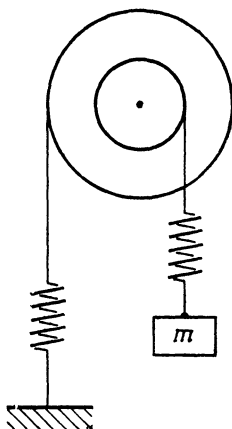
- а) Что представляет собой «эффективный» потенциал, описывающий радиальную часть движения частицы? (Нарисуйте графики этого потенциала и его составляющих.)
 б) Какому условию удовлетворяет эффективный потенциал в случае кругового движения?
 в) Вычислите угловую скорость кругового движения в центральном поле с потенциалом $V(r) = kr^2/2$.

I.6.1 (10 баллов). Тонкая прямоугольная пластина со сторонами a и $2a$ вращается вокруг оси, совпадающей с одной из ее диагоналей, с постоянной угловой скоростью ω .

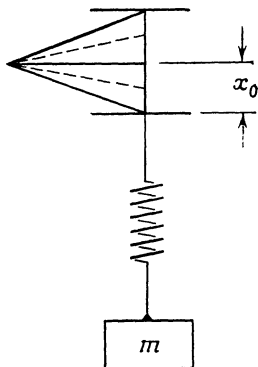
- а) Вычислите главные центральные моменты инерции.
 б) Определите момент импульса и его направление.
 в) Вычислите момент, действующий на ось вращения.

I.6.2 (10 баллов). Космический корабль движется по круговой орбите радиусом r_0 . Ракетный двигатель мгновенно увеличивает линейную скорость корабля на 8%. Каково расстояние до апогея новой орбиты? Нарисуйте аккуратно новую стационарную орбиту. Постройте график одномерного эффективного потенциала и покажите, как он изменился после сообщения кораблю дополнительного импульса.

I.6.3 (10 баллов). Однородный диск массой m и радиусом a вращается вокруг неподвижной оси. По внешней окружности диска проходит невесомая нить, прикрепленная с одной стороны к диску, а с другой — к пружине, противоположный конец которой закреплен неподвижно. По окружности радиусом $a/2$ проходит другая нить, которая через пружину связана с грузом, имеющим массу m . Напишите уравнения Лагранжа для диска и груза. (Уравнения не решайте.)

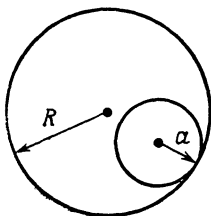


I. 6.4 (10 баллов). Груз массой m прикреплен к пружине, а пружина — к точке подвеса. Под действием внешней силы точка подвеса совершает вертикальное движение по закону $x = x_0 \cos \omega t$. Какова амплитуда стационарных колебаний груза в вязкой среде, если ее сила сопротивления равна $-b\dot{x}$?



I. 6.5 (10 баллов). Сплошной однородный цилиндр радиусом a катится без скольжения по внутренней поверхности неподвижного цилиндра большего радиуса R .

- Выпишите лагранжиан для этой системы.
- Найдите уравнение движения.
- Определите частоту малых колебаний цилиндра около положения устойчивого равновесия.



I. 6.6 (10 баллов).

- Определите радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n.$$

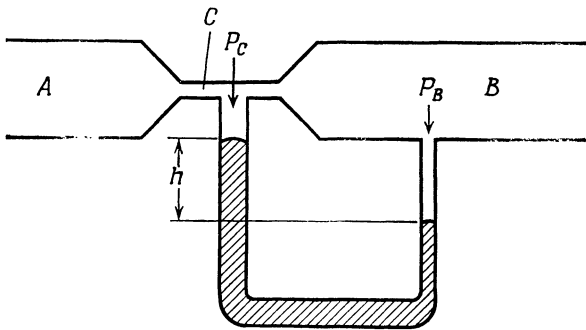
- Используя метод вычетов, докажите следующее тождество:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{(x+c)^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-a|m|} \cos mc,$$

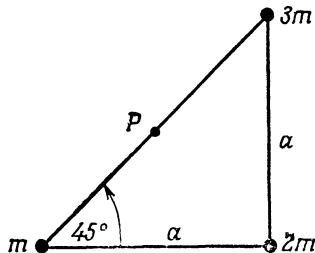
где a и c — действительные величины, причем $a > 0$.

1.6.7 (10 баллов). Спутник движется по сильно вытянутой эллиптической орбите в плоскости земного экватора. Нарисуйте эту орбиту, отметьте положение Земли и опишите влияние небольшого сопротивления атмосферы на траекторию спутника. Рассмотрите особо любые изменения, которые могут возникнуть у эксцентриситета орбиты e , периода обращения спутника T , большой полуоси орбиты a и расстояния кратчайшего сближения с Землей R_1 .

1.6.8 (10 баллов). В трубу A (см. рисунок) мощным насосом нагнетают воду. Течение ламинарное. В трубе B скорость течения равна 20 см/с. Сечение трубы B равно 6 см², сечение трубки C составляет $1,0$ см². Определите разность уровней h ртутного манометра.



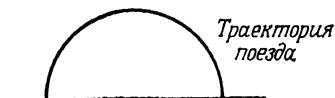
1.6.9 (5 баллов). Три материальные точки расположены в вершинах прямоугольного треугольника, как показано на рисунке. Найдите главные моменты инерции относительно осей, проходящих через точку P , расположенную в середине гипотенузы. Укажите ориентацию главных осей относительно одной из сторон треугольника.



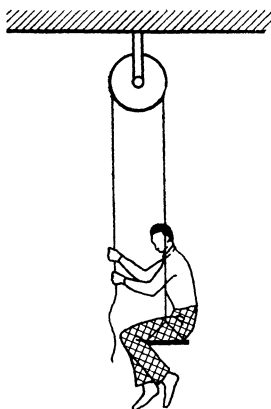
1.6.10 (10 баллов). Ребенок, едущий в поезде, держит за ниточку длиной 1 м шар, наполненный гелием. Поезд мчится со

скоростью 100 км/час по искривленному дугой пути радиусом 3 км.

- Каков угол отклонения нити от вертикали?
- На приведенном внизу рисунке отметьте направление проекции нити в горизонтальной плоскости.



I. 6.11 (5 баллов). Человек, изображенный на рисунке, весит 70 кг. Он сидит на перекладине и медленно поднимает себя, подтягивая веревку, переброшенную через блок. С какой силой он должен тянуть веревку?



I. 7.1 (20 баллов). Представьте себе, что вы ритмично хлопаете в ладони, причем промежуток времени между двумя последовательными хлопками равен T_1 . Каждый хлопок дает звук в течение весьма короткого (по сравнению с T_1) интервала времени Δt . В течение интервала времени Δt звуковое давление около вашего уха можно считать постоянным. В остальное время оно равно нулю.

- Покажите качественно, что дает фурье-преобразование звука хлопка. (Для этого *не нужно* выполнять непосредственно разложение в ряд Фурье.)
- Представьте себе, что вместо ритмично повторяющихся хлопков имеется только один хлопок длительностью Δt . Как будет выглядеть качественно фурье-преобразование в этом случае? Сравните его с предыдущим результатом.

В обоих случаях (а и б) требуется показать с помощью графиков «спектр» Фурье, т. е. показать зависимость интенсивности от частоты с соответствующими масштабными соотношениями, поясняющими качественно форму спектра.

1.7.2 (10 баллов). Даны унитарная матрица S и матрица T , связанные друг с другом соотношением $S = 1 - 2iT$. Покажите, что

а) в предельном случае, когда $|T_{ij}| \ll 1,0$, матрица T является эрмитовой и

б) для любой матрицы T справедливо следующее равенство:

$$\text{Im}(\langle a | T | a \rangle) = - \sum_n \langle n | T | a \rangle^2,$$

где $|a\rangle$ — произвольный вектор состояния в пространстве, в котором действуют операторы S и T , а $|n\rangle$ представляет полный набор таких векторов состояния.

1.7.3 (15 баллов). В кузове грузовика лежит деревянный ящик, частично загруженный кирпичом. Дно ящика — квадрат со стороной 1 м, масса ящика по сравнению с массой кирпича пренебрежимо мала. Известно, что ящик начинает скользить, если грузовик трогается с ускорением, большим чем 6 м/с^2 . До какой высоты можно уложить кирпичи в ящике без опасения, что он опрокинется при таком ускорении?

1.7.4 (15 баллов). Ящик с точными приборами поставлен на амортизирующую прокладку для защиты от вертикальных вибраций.

а) Под нагрузкой прокладка сдавливается на 6 см. Чему равен период собственных колебаний ящика?

б) Пол вибрирует с частотой 20 Гц. Каково отношение амплитуд колебаний ящика и пола?

1.7.5 (20 баллов). Капитан небольшого судна, попавшего в экваториальную штилевую полосу, решил прибегнуть к хитрости, а именно поднять якорь массой 200 кг на верх двадцатиметровой мачты. Масса остальной части судна равна 1000 кг. (Радиус Земли 6400 км.) Судно придет в движение.

а) Почему?

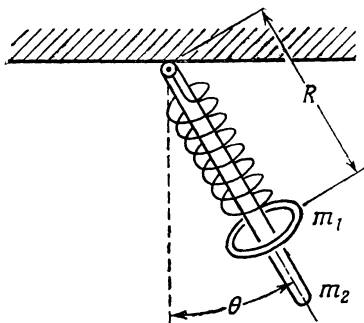
б) В каком направлении?

в) С какой скоростью?

г) Откуда берется энергия, приводящая судно в движение?

1.7.6 (20 баллов). Кольцо массой m_1 может скользить по стержню массой m_2 и длиной L , который на одном конце прикреплен к неподвижному шарниру и висит вертикально. Кольцо

связано с шарниром через невесомую пружину с жесткостью k так, что при равновесии центры масс кольца и стержня совпадают. Движение происходит в вертикальной плоскости под действием силы тяжести.



- Составьте лагранжиан системы в координатах θ и R , показанных на рисунке.
- Получите дифференциальные уравнения движения в координатах θ и R .
- Найдите одну из нормальных мод и соответствующую ей частоту колебаний (в предположении, что амплитуда колебаний мала).

1.8.1 (10 баллов). Покажите, что любая действительная и всюду аналитическая функция должна быть постоянной.

1.8.2 (10 баллов). Даны вектор \mathbf{V} и тензор T :

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

на плоскости x_1, x_2 в декартовой системе координат. Вычислите компоненты вектора и тензора в новой системе координат, полученной путем поворота старой системы на $+90^\circ$ вокруг оси $x_1 \times x_2$.

1.8.3 (20 баллов). Докажите, что функция $f(r) = e^{-\alpha r}/r$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

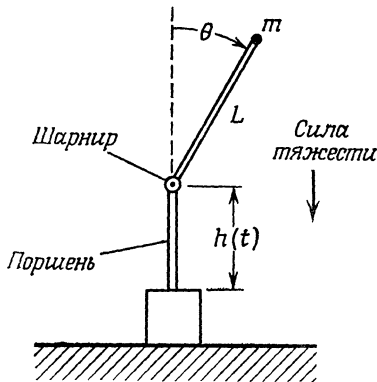
$$\nabla^2 f - \alpha^2 f = -4\pi\delta(\mathbf{r}).$$

1.8.4 (20 баллов). Составьте лагранжиан и найдите уравнение движения для системы, состоящей из материальной точки массой m , расположенной на верхнем конце невесомого стержня длиной L . Нижний конец стержня прикреплен к шарниру (тре-

ние в шарнире не учитывать). Шарнир совершает вертикальные колебания по гармоническому закону

$$h(t) = h_0 \cos \omega t.$$

Единственной степени свободы отвечает координата θ между стержнем и вертикалью. (Такую систему называют *обращенным маятником*.)



I.8.5 (20 баллов). В аэропорту, расположенном на широте экватора, имеются трое одинаковых маятниковых часов. Часы А оставляют в аэропорту, часы В помещают в самолет, отлетающий на восток, а часы З — в самолет, отлетающий на запад. Однажды точно в полдень, когда все часы показывают одно и то же время, самолеты взлетают. Самолет В облетает земной шар по экватору в восточном направлении с постоянной путевой скоростью. Самолет З облетает земной шар в западном направлении с той же путевой скоростью. На следующие сутки оба самолета прибывают в аэропорт одновременно, поскольку путевые скорости у них одинаковы. Часы А, оставленные в аэропорту, показывают в момент прибытия самолетов точно полдень, т. е. между взлетом и посадкой обоих самолетов прошло 24 ч, 0 мин и 0,00000000 с.

а) Будут ли эти трое часов по-прежнему показывать одно и то же время? Если нет, то перечислите физические причины, которые, по вашему мнению, могли бы вызвать это расхождение.

б) Примите во внимание наиболее существенную причину и определите показания часов В и З в тот момент, когда часы А в аэропорту показывают полдень (после 24-часового полета). Радиус Земли можно считать равным 6000 км.

I.8.6 (20 баллов). Согласно ньютоновской теории тяготения, гравитационный потенциал Солнца определяется (в предположении сферической симметрии) формулой

$$-\varphi = \frac{GM}{r},$$

где $G = 67 \cdot 10^{-9}$ ед. СГС (гравитационная постоянная), $GM = 1,3 \cdot 10^{26}$ ед. СГС, M — масса Солнца, r — расстояние от его центра.

- а) Получите формулу для силы, действующей на частицу массой m , удаленную от Солнца на расстояние r .
- б) По Эйнштейну, ньютоновская теория требует уточнения. Если ввести поправку первого порядка, то гравитационный потенциал можно записать в виде

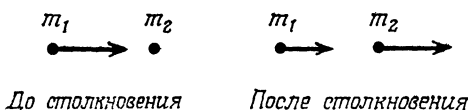
$$-\varphi = \frac{GM}{r} + \frac{A}{r^2}.$$

Исходя из соображений размерностей, попытайтесь найти выражение для поправочного коэффициента A . Он должен зависеть от скорости света, а также от G и M . Хорошим считается только решение, полученное с точностью до множителя 2.

- в) Оцените относительную величину поправки (к ньютоновскому потенциалу), приняв расстояние от Солнца до Земли равным $r = 1,5 \cdot 10^{13}$ см.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

I. 1.1. Пусть \mathbf{P}_3 и \mathbf{P}_4 — импульсы частиц соответственно 1 и 2 после столкновения, а $|\mathbf{P}_4|$ — максимально возможный импульс частицы массой m_2 , когда в системе, связанной с центром масс, частица 1 после столкновения движется назад. При этом \mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_3 и \mathbf{P}_4 имеют одно и то же направление.



а) $|\mathbf{P}_4|$ можно найти из уравнений, выражающих законы сохранения импульса и энергии:

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_4, \quad (1)$$

$$E_1 + m_2 = E_3 + E_4, \quad (2)$$

где

$$E_1 = \sqrt{\mathbf{P}_1^2 + m_1^2}, \quad E_3 = \sqrt{\mathbf{P}_3^2 + m_1^2} \quad \text{и} \quad E_4 = \sqrt{\mathbf{P}_4^2 + m_2^2}.$$

Но удобнее использовать 4-векторы. Введем 4-векторы

$$P_i = (\mathbf{P}_i, jE_i), \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

При этом для удобства мы приняли $c = 1$, а $j = \sqrt{-1}$. Тогда уравнения (1) и (2) можно заменить одним уравнением

$$P_1 + P_2 = P_3 + P_4, \quad (3)$$

или

$$P_3 = P_1 + P_2 - P_4.$$

Рассмотрим скалярное произведение

$$P_3^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_4^2 + 2(P_1 \cdot P_2) - 2(P_1 \cdot P_4) - 2(P_2 \cdot P_4),$$

которое является инвариантом, и воспользуемся следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} P_i^2 &= -m_i^2, \\ P_i \cdot P_j &= -E_i E_j + \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_j, \end{aligned} \quad (4)$$

где $i, j = 1, 2, 3, 4$. Отсюда имеем

$$-m_1^2 = -m_1^2 - 2m_2^2 - 2m_2E_1 + 2m_2E_4 + 2E_1E_4 - 2\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_4;$$

это соотношение можно упростить, учитывая, что \mathbf{P}_4 параллельно \mathbf{P}_1 . Таким образом, можно написать уравнение

$$(m_2 + E_1)\sqrt{\mathbf{P}_4^2 + m_2^2} - |\mathbf{P}_1| \cdot |\mathbf{P}_4| - (m_2^2 + m_2E_1) = 0, \quad (5)$$

откуда получаем

$$|\mathbf{P}_4| = \frac{2m_2(m_2 + E_1)|\mathbf{P}_1|}{(m_2 + E_1)^2 - |\mathbf{F}_1|^2}. \quad (6)$$

При этом мы отбросили второе, тривиальное решение уравнения (5), а именно $|\mathbf{P}_4| = 0$.

б) Дано

$$|\mathbf{P}_1| = m_1 = 938,2 \text{ МэВ.}$$

Следовательно,

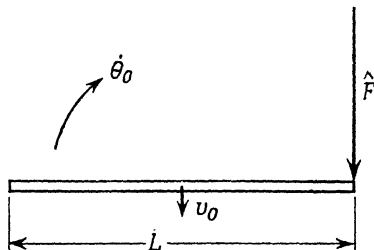
$$E_1 = \sqrt{\mathbf{P}_1^2 + m_1^2} = 938,2 \cdot \sqrt{2}.$$

Подставляя в (6) эти значения и $m_2 = 0,5 \text{ МэВ}$, находим максимальный импульс электрона после столкновения:

$$\begin{aligned} |\mathbf{P}_4| &= \frac{2(0,5)(0,5 + 938,2\sqrt{2})}{(0,5 + 938,2\sqrt{2})^2 - (938,2)^2} 938,2 = \\ &= \frac{1327}{(1327)^2 - (938,2)^2} 938,2 = 1,4 \text{ МэВ/}c. \end{aligned}$$

I. 1.2.

а) Пусть v_0 — скорость центра масс стержня, а $\dot{\theta}_0$ — угловая скорость вращения стержня относительно центра масс.



В случае импульсного воздействия справедливы следующие уравнения движения:

$$\hat{F} = mv_0 \quad (1)$$

и

$$\frac{\hat{F}L}{2} = I\dot{\theta}_0,$$

или

$$\dot{\theta}_0 = \frac{\hat{F}L}{2I}, \quad (2)$$

где $I = (1/3)m(L/2)^2$ — момент инерции стержня относительно оси, проходящей через центр масс.

Если за время t стержень совершает полный оборот, то

$$\dot{\theta}_0 t = 2\pi, \quad (3)$$

откуда

$$t = \frac{2\pi}{\dot{\theta}_0}.$$

Следовательно, за время полного оборота центр стержня переместится на расстояние

$$S = v_0 t = \frac{\hat{F}}{m} \frac{2\pi}{\dot{\theta}_0}.$$

Подставляя сюда выражение (2), находим

$$S = \frac{\hat{F}}{m} \frac{\pi m L^2}{3 \hat{F} L} = \frac{\pi L}{3}. \quad (4)$$

б) Энергия поступательного движения

$$T_t = \frac{m}{2} v_0^2 = \frac{1}{2} m \frac{\hat{F}^2}{m^2} = \frac{1}{2} \frac{\hat{F}^2}{m}. \quad (5)$$

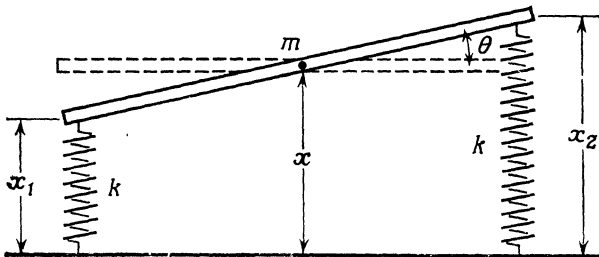
Энергия вращательного движения

$$T_r = \frac{1}{2} I \dot{\theta}_0^2 = \frac{1}{2} I \left(\frac{L \hat{F}}{2I} \right)^2 = \frac{3}{2} \frac{\hat{F}^2}{m}. \quad (6)$$

Полная кинетическая энергия стержня равна их сумме:

$$T_{\text{полн}} = T_t + T_r = \frac{2\hat{F}^2}{m}.$$

1.1.3. Пусть b — длина каждой пружины в состоянии покоя (заметьте, что в поле силы тяжести она не совпадает с длиной свободной пружины: $b = \text{Длина свободной пружины} - mg/2k$), а x_1 , x_2 и x — соответственно длины пружин 1 и 2 и высота центра масс стержня в момент времени t .



Для абсолютно жесткого стержня $x_1 + x_2 = 2x$. В соответствии со вторым законом Ньютона имеем

$$m\ddot{x} = -k(x_1 - b) - k(x_2 - b),$$

или

$$m\ddot{x} = -k(x_1 + x_2) + 2kb,$$

откуда

$$\ddot{x} = -\frac{1}{m}(2kx - 2kb) = -\frac{2k}{m}(x - b). \quad (1)$$

Положим теперь

$$x_2 = x + \frac{L}{2}\theta \quad \text{и} \quad x_1 = x - \frac{L}{2}\theta.$$

Из уравнения

$$J_0 = \text{Вращающий момент}$$

получаем

$$I\ddot{\theta} = -k(x_2 - b)\frac{L}{2} + k(x_1 - b)\frac{L}{2},$$

или, поскольку $x_2 - x_1 = L\theta$,

$$I\ddot{\theta} = \frac{-kL}{2}(x_2 - x_1) = -\frac{1}{2}kL^2\theta. \quad (2)$$

Подставляя сюда $I = mL^2/12$, получаем

$$\ddot{\theta} + \frac{6k}{m}\theta = 0. \quad (3)$$

Решения уравнений (1) и (3) записываются соответственно в виде

$$x = A \cos(\omega_1 t + B), \quad (4)$$

$$\theta = C \cos(\omega_2 t + D), \quad (5)$$

где

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad \text{и} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{6k}{m}}.$$

Запишем начальные условия при $t = 0$:

$$x = \left(b - \frac{a}{2}\right),$$

$$\theta = \frac{a}{L}, \quad (6)$$

$$\dot{x} = 0 \quad \text{и} \quad \dot{\theta} = 0.$$

Подставляя (6) в (4) и (5), имеем

$$b - \frac{a}{2} = A \cos B, \quad (7)$$

$$0 = -A\omega_1 \sin B, \quad (8)$$

$$\frac{a}{L} = C \cos D, \quad (9)$$

$$0 = -C\omega_2 \sin D. \quad (10)$$

Из (8) и (10) следует

$$B = D = 0, \quad (11)$$

а из (7) и (9) с учетом (11)

$$A = b - \frac{a}{2} \quad \text{и} \quad C = \frac{a}{L}. \quad (12)$$

После подстановки (11) и (12) в (4) и (5) получаем

$$x = \frac{2b - a}{2} \cos \omega_1 t, \quad \text{где} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}},$$

и

$$\theta = \frac{a}{L} \cos \omega_2 t, \quad \text{где} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{6k}{m}}.$$

Обе нормальные моды колебаний определяются выражениями

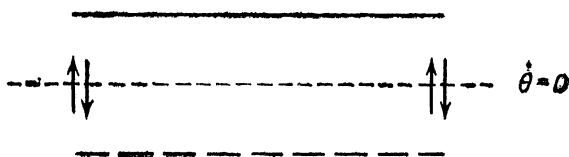
$$X_1 = x_1 + x_2 = (2b - a) \cos \omega_1 t, \quad (13)$$

$$X_2 = x_2 - x_1 = a \cos \omega_2 t. \quad (14)$$

В случае $X_1 = 0$ имеем $x_2 = -x_1$, или моду X_2 .



Если же $X_2 = 0$, то имеем $x_2 = x_1$, или моду X_1 .



I. 1.4.

а) Матрица A — симметрическая, т. е. $A_{ij} = A_{ji}$. Мы имеем

$$\sum_j A_{ij} \psi_j = a \psi_i; \quad (1)$$

здесь ψ_i — собственный вектор матрицы A и a — соответствующее ему собственное значение матрицы A . Умножим (1) на ψ_i^* слева и просуммируем по всем i :

$$\sum_{i,j} \psi_i^* A_{ij} \psi_j = a \sum_i \psi_i^* \psi_i. \quad (2)$$

Перейдем от (1) к его комплексно сопряженному выражению и умножим обе его части на ψ_i слева:

$$\sum_j A_{ij}^* \psi_j^* = a^* \psi_i^*, \quad (3)$$

$$\sum_{i,j} \psi_i A_{ij}^* \psi_j^* = a^* \sum_i \psi_i \psi_i^*. \quad (4)$$

В равенстве (4) ψ_i и ψ_j^* можно поменять местами:

$$\sum_{i,j} \psi_j^* A_{ij}^* \psi_i = a^* \sum_i \psi_i^* \psi_i. \quad (5)$$

Поскольку A — действительная матрица, то $A^* = A$. Более того, если она еще и симметрическая, то $A_{ij}^* = A_{ji}$. Меняя местами индексы i и j в левой части выражения (5) и учитывая свойство $A_{ij}^* = A_{ji}$, получаем

$$\sum_{i,j} \psi_i^* A_{ij} \psi_j = a^* \sum_i \psi_i^* \psi_i. \quad (6)$$

Сравнивая выражения (2) и (6), заключаем, что $a = a^*$, т. е. a — действительная величина.

б) Пусть a — одно из собственных значений, тогда

$$\sum_j A_{ij} \psi_j = a \psi_i; \quad (7)$$

здесь A_{ij} — элементы действительной матрицы, которая не является симметрической. Перейдем в (7) к комплексно сопряженным величинам:

$$\sum_j A_{ij} \psi_j^* = a^* \psi_i^*.$$

Отсюда следует, что a^* также представляет собой собственное значение матрицы A .

1.1.5. В системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью ω , уравнение движения записывается в виде

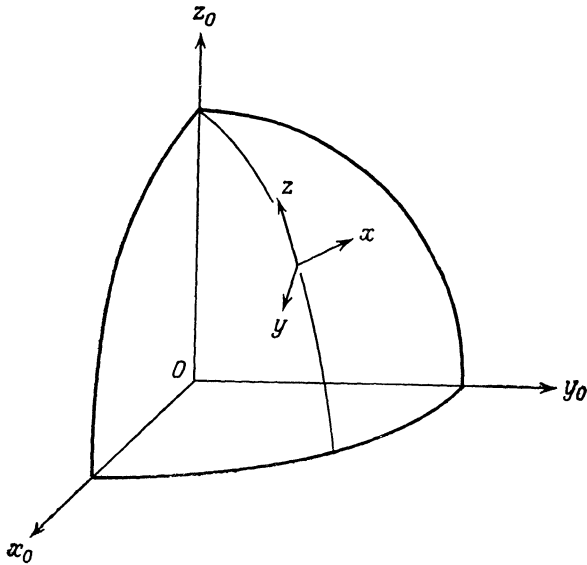
$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}), \quad (1)$$

где

$$\frac{\mathbf{F}}{m} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) = \mathbf{g}$$

— действующее ускорение свободного падения, а $\omega = 2\pi/86400 = 7 \cdot 10^{-5}$ рад/с — угловая скорость вращения Земли. В результате уравнение (1) принимает вид

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}. \quad (2)$$



В системе отсчета, показанной на рисунке, получаем

$$a_y = g, \quad \text{или} \quad v_y = a_y t = gt, \quad (3)$$

$$a_x = 2\omega v_y \sin 45^\circ. \quad (4)$$

Следовательно,

$$\dot{x} = \int_0^t a_x dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \omega g t^2$$

и

$$x = \int_0^t \dot{x} dt = \frac{\sqrt{2}}{6} \omega g t^3. \quad (5)$$

Из выражения (3) имеем

$$h = \frac{1}{2} g t^2, \quad \text{откуда} \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (6)$$

Подставляя выражение для t в (5), находим

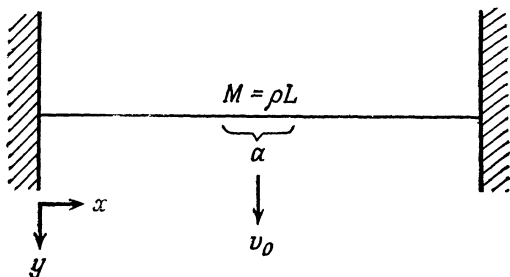
$$x = \frac{2\omega}{3} \sqrt{\frac{h^3}{g}}.$$

Тело упадет к востоку от отвеса, опущенного из исходной точки.

1.1.6. Движение струны описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \quad (1)$$

где T — натяжение, а ρ — линейная плотность струны.



Начальные условия при $t = 0$ записываются в виде

$$y = 0 \text{ при всех значениях } x,$$

$$\dot{y} = \begin{cases} 0 & \text{при } \left(\frac{L}{2} + \frac{a}{2}\right) < x < \left(\frac{L}{2} - \frac{a}{2}\right), \\ v_0 & \text{при } \left(\frac{L}{2} - \frac{a}{2}\right) < x < \left(\frac{L}{2} + \frac{a}{2}\right). \end{cases}$$

Запишем общее решение уравнения (1):

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho}} t + B_n \sin \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho}} t \right) \cdot \sin \frac{n\pi}{L} x. \quad (2)$$

При $t = 0$ имеем $y = 0$. Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{L} x = 0 \text{ при любом значении } x.$$

Это справедливо только в том случае, когда все коэффициенты A_n равны нулю:

$$A_n = 0 \text{ при любом значении } n. \quad (3)$$

Таким образом, из решения (2) имеем

$$\dot{y}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho}} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (t = 0). \quad (4)$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{n\pi} \sqrt{\frac{\rho}{T}} \int_0^L \dot{y}(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \\ &= \frac{2v_0}{n\pi} \sqrt{\frac{\rho}{T}} \int_{(L-a)/2}^{(L+a)/2} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \\ &= \frac{2v_0 L}{n^2 \pi^2} \sqrt{\frac{\rho}{T}} \left\{ \cos \left[\frac{n\pi}{2} \left(1 - \frac{a}{L} \right) \right] - \cos \left[\frac{n\pi}{2} \left(1 + \frac{a}{L} \right) \right] \right\}. \quad (5) \end{aligned}$$

Искомые амплитуды B_1 , B_2 и B_3 первых трех низкочастотных гармоник можно определить, подставляя в (5) значения $n = 1, 2$ и 3^1).

I.1.7. Число молекул воздуха, которым за промежуток времени Δt сообщена скорость V , пропорционально $AV \Delta t$. Следовательно, полный импульс ΔP этих молекул пропорционален $AV^2 \Delta t$. Сила сопротивления воздуха

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t},$$

как видно из предыдущего, пропорциональна AV^2 .

I.1.8. Чтобы тела парили в невесомости, центробежная сила на экваторе должна уравновешивать силу земного притяжения, т. е.

$$R\dot{\theta}^2 = g.$$

¹) Дальнейшее упрощение формулы (5) дает

$$B_n = \frac{4v_0 L}{n^2 \pi^2} \sqrt{\frac{\rho}{T}} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi a}{2L} \approx \frac{2v_0 a}{n\pi} \sqrt{\frac{\rho}{T}} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

В результате имеем

$$B_1 = \frac{2v_0 a}{\pi} \sqrt{\frac{\rho}{T}}, \quad B_2 = 0, \quad |B_3| = B_1/3.$$

Подставляя сюда $R = 6 \cdot 10^6$ м и $g = 9,8$ м/с², получаем

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{g}{R}} \approx \frac{1}{800} \text{ с}^{-1},$$

откуда

$$T = \frac{2\pi}{\dot{\theta}} \approx 1600\pi \text{ с} \approx 1,5 \text{ ч.}$$

Примерно такой период обращения имеют искусственные спутники Земли на малых высотах.

I. 1.9. Циклическими называются такие координаты, от которых гамильтониан не зависит в явном виде. Поскольку

$$\dot{p}_c = \frac{\partial H}{\partial x_c} = 0,$$

то импульсы, сопряженные с циклическими координатами, являются интегралами движения.

I. 2.1.

а) Пусть a — действительное собственное значение косоэрмитовой матрицы A , т. е.

$$A\psi = a\psi. \quad (1)$$

Умножая обе части равенства (1) на ψ^+ слева, получаем

$$\psi^+ A \psi = a \psi^+ \psi. \quad (2)$$

Для эрмитово-сопряженной матрицы имеем

$$\psi^+ A^+ = a \psi^+ \quad (3)$$

(здесь мы воспользовались условием $a^* = a$). Если мы умножим обе части равенства (3) на ψ справа, то получим

$$\psi^+ A^+ \psi = a \psi^+ \psi. \quad (4)$$

Но $A^+ = -A$, и (4) принимает вид

$$\psi^+ A \psi = -a \psi^+ \psi. \quad (5)$$

Из (2) и (5) следует

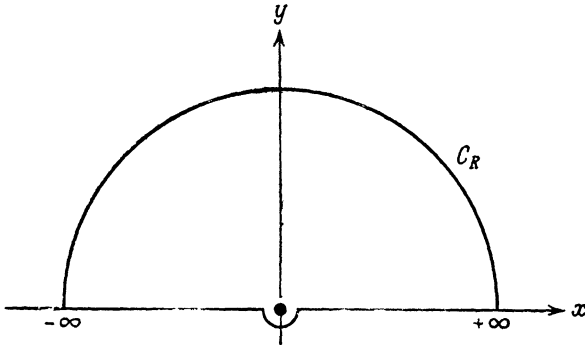
$$a \equiv 0. \quad (6)$$

б) Нам нужно вычислить

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$$

Поскольку функция $\sin z$ не определена при $z = x + iy \rightarrow \infty$, мы должны выразить функцию $\sin^2 x$ через e^{ix} . Имеем

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \operatorname{Re} \frac{1 - e^{2ix}}{2}.$$



В верхней полуплоскости e^{i2z} убывает экспоненциально, и, следовательно, интеграл

$$\int \frac{1 - e^{i2z}}{z^2} dz$$

по дуге C_R обращается в нуль. Теперь можно вычислить I , заменяя вначале x на z и выполняя затем интегрирование вдоль границы верхнего полукруга:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{i2x}}{2x^2} dx + \operatorname{Re} \int_{C_R} \frac{1 - e^{i2z}}{2z^2} dz = \\ &= \operatorname{Re} \oint \frac{1 - e^{i2z}}{2z^2} dz = \operatorname{Re} \{ \pi i \operatorname{Выч} [f(z), 0] \}, \end{aligned}$$

где $\operatorname{Выч} [f(z), 0]$ — вычет подынтегральной функции в точке $z = 0$. В данном случае подынтегральная функция имеет в этой точке полюс порядка $n = 2$. Таким образом,

$$\operatorname{Выч} [f(z), 0] = \left. \frac{d}{dx} \left(\frac{1 - e^{i2x}}{2} \right) \right|_{x=0} = -i.$$

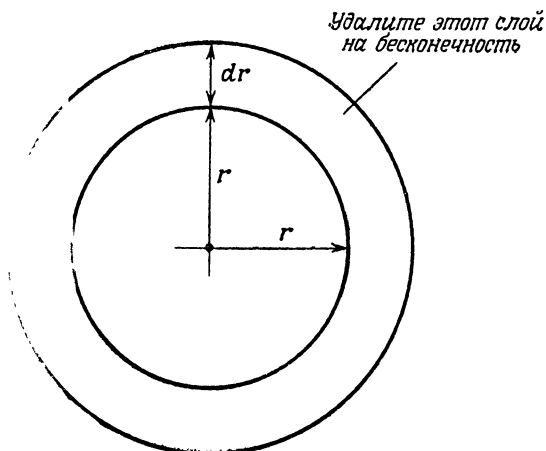
Окончательно получаем

$$I = \operatorname{Re} (\pi) = \pi.$$

1.2.2.

а) Будем производить эту разрушительную работу постепенно, удаляя каждый раз с Земли тонкий слой толщиной dr .

Чтобы удалить такой слой на бесконечность, нужно затратить энергию, или совершить работу, численно равную потенциальной



энергии взаимодействия этого слоя с оставшейся массой, но взятую с обратным знаком:

$$d(\text{Работа}) = -d(\text{Потенц. эн.}) = G \frac{M_r dm_r}{r}, \quad (1)$$

где $M_r = (4\pi/3)\rho r^3$ — масса, заключенная внутри сферы радиусом r , $dm_r = 4\pi r^2 dr$ — масса сферического слоя толщиной dr и радиусом r , а ρ — плотность Земли. После подстановки получаем

$$d(\text{Работа}) = -d(\text{Потенц. эн.}) = -G \frac{16\pi^2}{3} \rho^2 r^4 dr. \quad (2)$$

Полная работа, которую необходимо произвести, равна интегралу от правой части равенства (2) в пределах от $r = R$ до $r = 0$:

$$\text{Работа} = \frac{-G(4\pi)^2}{3} \rho^2 \int_R^0 r^4 dr = \frac{G(4\pi)^2}{3} \rho^2 \frac{R^5}{5} = \frac{3}{5} G \frac{M^2}{R}; \quad (3)$$

здесь M — масса, а R — радиус Земли.

б) Предположим, что вся потенциальная энергия $(\frac{3}{5}) \times (GM^2/R)$ преобразуется в тепловую. Считая теплоемкость Земли постоянной, приходим к следующему соотношению:

$$\frac{3}{5} G \frac{M^2}{R} = MC_V \Delta T, \quad (4)$$

где ΔT — приращение температуры Земли вследствие поглощения ею выделенного тепла. Полагая

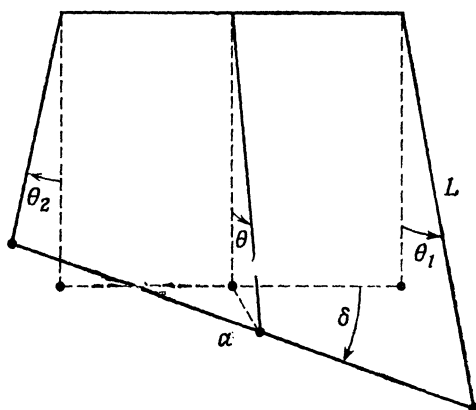
$$C_V \approx 0,3 \text{ кал}/(\text{г} \cdot \text{К}) = 1,2 \cdot 10^3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}),$$

находим

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{3}{5} G \frac{M}{R} \frac{1}{C_V} = \frac{3}{5} gR \frac{1}{C_V} \approx \\ &\approx \frac{3}{5} \cdot 10 \cdot 6 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{C_V} = \frac{36 \cdot 10^6}{C_V} \approx 3 \cdot 10^4 \text{ К}. \end{aligned}$$

Действительно, Земля бы расплавилась.

1.2.3.



а) Пусть θ_1 и θ_2 — углы отклонения нитей от вертикали. Угловая скорость центра масс стержня

$$\dot{\theta} = \frac{1}{2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2).$$

Кинетическая энергия поступательного движения стержня равна

$$T_t = \frac{m}{2} L^2 \dot{\theta}^2 = \frac{m}{8} L^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2. \quad (1)$$

Между углами δ , θ_1 и θ_2 существует соотношение

$$\delta = \frac{L}{a} (\theta_1 - \theta_2).$$

Кинетическая энергия вращательного движения записывается в виде

$$T_r = I \frac{\dot{\delta}^2}{2} = \frac{IL^2}{2a^2} (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)^2 = \frac{mL^2}{24} (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)^2, \quad (2)$$

где $I = ma^2/12$ — момент инерции стержня.

Потенциальная энергия (при малых углах θ_1 и θ_2) равна

$$V = \frac{1}{2} mgL [(1 - \cos \theta_1) + (1 - \cos \theta_2)] \approx \frac{mgL}{4} (\theta_1^2 + \theta_2^2); \quad (3)$$

здесь мы воспользовались разложением функций $\cos \theta_{1,2}$ в степенной ряд. Из выражений (1), (2) и (3) получаем выражение для лагранжиана:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{mL^2}{8} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \frac{mL^2}{24} (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)^2 - \frac{1}{4} mgL (\theta_1^2 + \theta_2^2), \quad (4)$$

где $T = T_t + T_r$.

Из уравнения Лагранжа следуют два уравнения движения:

$$\frac{mL^2}{4} (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + \frac{mL^2}{12} (\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2) + \frac{1}{2} mgL \theta_1 = 0, \quad (5)$$

$$\frac{mL^2}{4} (\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1) + \frac{mL^2}{12} (\ddot{\theta}_2 - \ddot{\theta}_1) + \frac{1}{2} mgL \theta_2 = 0. \quad (6)$$

Суммируя оба уравнения и вычитая одно из другого, получаем

$$\frac{mL^2}{3} (\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2) + mgL (\theta_1 - \theta_2) = 0,$$

или

$$(\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2) + \frac{3g}{L} (\theta_1 - \theta_2) = 0; \quad (7)$$

$$mL^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + mgL (\theta_1 + \theta_2) = 0,$$

или

$$(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + \frac{g}{L} (\theta_1 + \theta_2) = 0. \quad (8)$$

Решения уравнений (7) и (8) можно записать в виде

$$X_1 = \theta_1 - \theta_2 = 2A \sin \omega_1 t + 2A' \cos \omega_1 t,$$

$$X_2 = \theta_1 + \theta_2 = 2B \sin \omega_2 t + 2B' \cos \omega_2 t;$$

здесь ω_1 и ω_2 — частоты, соответствующие этим решениям:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{L}}, \quad (9)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{L}}. \quad (10)$$

Удовлетворяя начальным условиям $\theta_1 = 0$ и $\theta_2 = 0$, получаем

$$A' = B' = 0. \quad (11)$$

Следовательно,

$$\theta_1 = A \sin \omega_1 t + B \sin \omega_2 t, \quad (12)$$

$$\theta_2 = -A \sin \omega_1 t + B \sin \omega_2 t. \quad (13)$$

Начальные значения $\dot{\theta}_1$ и $\dot{\theta}_2$ при $t = 0$ можно найти из выражений для импульса

$$\hat{P} \frac{a}{2} = I \dot{\theta} = \frac{ma^2}{12} \cdot \frac{L}{a} (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) = \frac{maL}{12} (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2), \quad (14)$$

$$\hat{P} = mv = mL \dot{\theta} = m \frac{L}{2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2), \quad (15)$$

откуда

$$\dot{\theta}_1 = \frac{4\hat{P}}{mL}, \quad (16)$$

$$\dot{\theta}_2 = -\frac{2\hat{P}}{mL}. \quad (17)$$

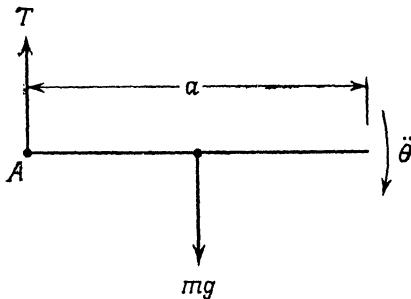
Из (12), (13), (16) и (17) определяем амплитуды нормальных мод:

$$A = \frac{3\hat{P}}{mL\omega_1} = \frac{3\hat{P}}{m\sqrt{3Lg}},$$

$$B = \frac{\hat{P}}{mL\omega_2} = \frac{\hat{P}}{m\sqrt{Lg}}.$$

б) Пусть T — натяжение нити. В соответствии со вторым законом Ньютона имеем

$$mg - T = \frac{ma}{2} \ddot{\theta}. \quad (18)$$



Кроме того, имеем уравнение для вращающего момента относительно точки A :

$$mg \frac{a}{2} = I \ddot{\theta} = \frac{m}{3} a^2 \ddot{\theta}. \quad (19)$$

Подставляя $\ddot{\theta}$ из уравнения (19) в (18), находим

$$T = \frac{1}{4} mg. \quad (20)$$

1.2.4.

а) В случае круговой орбиты сила притяжения $-dV/dr$ должна быть равна центростремительной силе:

$$\frac{v^2}{r} = 3Kr^2,$$

откуда

$$v = r \sqrt{3Kr} = a \sqrt{3Ka}. \quad (1)$$

При этом кинетическая энергия частицы дается выражением

$$T = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{3Kmr^3}{2} = \frac{3Kma^3}{2}, \quad (2)$$

а момент импульса частицы

$$J = mr^2 \dot{\theta} = mrv = mr^2 \sqrt{3Kr} = ma^2 \sqrt{3Ka}, \quad (3)$$

где использовано соотношение $\dot{\theta} = v/r = v/a$.

б) Зная угловую скорость $\dot{\theta} = \sqrt{3Ka}$, находим период кругового движения

$$T = \frac{2\pi}{\dot{\theta}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3Ka}}.$$

в) После воздействия возмущения расстояние частицы от центра будет меняться вблизи $r = a$ по некоторому закону $r = r(t)$. Запишем r в виде $r = a + x$, где x — малая величина. Движение по x в первом приближении описывается уравнением

$$\ddot{x} + \left[\frac{3V'(a)}{a} + V''(a) \right] x = 0, \quad (4)$$

где

$$V'(a) = \left. \frac{dV(r)}{dr} \right|_{r=a} = 3Ka^2,$$

$$V''(a) = \left. \frac{d^2V(r)}{dr^2} \right|_{r=a} = 6Ka.$$

Подставляя полученные выражения для $V'(a)$ и $V''(a)$ в (4), приходим к уравнению гармонического осциллятора

$$\ddot{x} + 15Kax = 0$$

с частотой

$$\omega = \sqrt{15Ka}.$$

1.2.5.

Введем следующие 4-векторы, условившись считать $c = 1$ и $j = \sqrt{-1}$:

$$P_1 = (\mathbf{P}_1, jE_1), \quad P_3 = (\mathbf{P}_3, jE_3),$$

$$P_2 = (\mathbf{P}_2, j|\mathbf{P}_2|), \quad P_4 = (\mathbf{P}_4, j|\mathbf{P}_4|).$$

Из законов сохранения импульса и энергии следует

$$P_1 + P_2 = P_3 + P_4, \tag{1}$$

или

$$P_3 = P_1 + P_2 - P_4.$$

После возведения в квадрат получаем

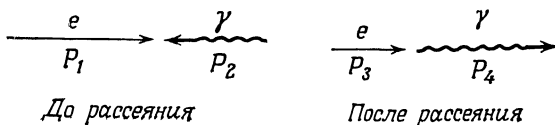
$$-m_e^2 = -m_e^2 + 2(E_1 - |\mathbf{P}_1| \cos \theta_{14})E_4 - 2(E_1 - |\mathbf{P}_1| \cos \theta_{12})E_2 +$$

$$+ 2(1 - \cos \theta_{24})E_2E_4.$$

(Замечание. Вернитесь к решению задачи I.1.1 и обратите внимание на некоторые отличия, возникшие на данном этапе решения.) Отсюда находим E_4 :

$$E_4 = \frac{(E_1 - |\mathbf{P}_1| \cos \theta_{12})E_2}{(E_1 - |\mathbf{P}_1| \cos \theta_{14}) + (1 - \cos \theta_{24})E_2}. \tag{2}$$

При энергии электронов 20 ГэВ величина m_e ничтожно мала по сравнению с E_1 , следовательно, $E_1 \approx |\mathbf{P}_1|$. Чтобы получить максимальную величину E_4 , следует принять $\cos \theta_{12} = -1$, $\cos \theta_{14} = 1$ и $\cos \theta_{24} = -1$. При этом вектор \mathbf{P}_4 по направлению совпадает с \mathbf{P}_1 и противоположен \mathbf{P}_2 .



Из (2) следует

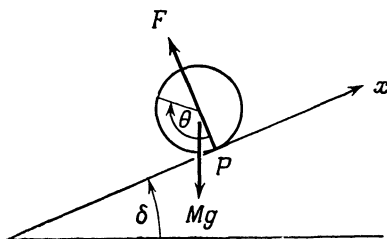
$$E_4 \approx \frac{2E_1}{2E_2} E_2 = E_1,$$

т. е. энергия рассеянного фотона почти совпадает с энергией

¹⁾ Для фотонов $E_2 = |\mathbf{P}_2|$ и $E_4 = |\mathbf{P}_4|$. В дальнейших формулах θ_{12} обозначает угол между направлениями импульсов электрона и фотона до рассеяния, θ_{14} — угол между направлениями импульсов налетающего электрона и рассеянного фотона, θ_{24} — угол рассеяния фотона. Приводимый в данной задаче рисунок поясняет рассеяние фотонов на встречном пучке быстрых электронов, когда $\theta_{12} = \theta_{24} = \pi$ и $\theta_{14} = 0$. — Прим. перев.

встречного электрона.

1.3.1.



а) Пусть P — положение мгновенного центра вращения шарика на наклонной плоскости в момент времени t . Вращение шарика относительно этого центра описывается уравнением

$$-Mga \sin \delta = I_0 \ddot{\theta}, \quad (1)$$

где I_0 — момент инерции шарика относительно оси, проходящей через точку P . Согласно теореме о параллельных осях¹⁾, имеем

$$I_0 = \frac{2}{5} Ma^2 + Ma^2 = \frac{7}{5} Ma^2.$$

Следовательно, ускорение центра масс шарика равно

$$\ddot{x} = a\ddot{\theta} = -\frac{5}{7} g \sin \delta. \quad (2)$$

б) Из закона сохранения энергии следует, что в исходной точке шарик должен обладать той же скоростью v_0 , с которой его толкнули, но противоположно направленной. Для движения с постоянным ускорением

$$v_f = v_i + \ddot{x}t, \quad (3)$$

где v_i и v_f — начальная и конечная скорости соответственно. Подставляя сюда $v_f = -v_0$, $v_i = v_0$ и $\ddot{x} = -(\frac{5}{7})g \sin \delta$, получаем

$$2v_0 = \frac{5}{7} gt \sin \delta, \quad (4)$$

откуда

$$t = \frac{14v_0}{5g \sin \delta}. \quad (5)$$

1.3.2.

а) Частица имеет массу покоя $m_0 = 1000 \text{ МэВ}/c^2$ и обладает импульсом $P = 1000 \text{ МэВ}/c$. Скорость частицы равна²⁾

$$v = \frac{Pc^2}{mc^2} = \frac{1000}{\sqrt{2} \cdot 1000} c = \frac{c}{\sqrt{2}}. \quad (1)$$

¹⁾ Она называется также теоремой Штейнера. — Прим. перев.

²⁾ В формуле (1) $m = \sqrt{2} m_0$. Это следует из релятивистского соотношения $mc^2 = \sqrt{P^2 c^2 + m_0^2 c^4}$. — Прим. перев.

Найдем среднее время жизни частицы:

$$\bar{T} = (1 - \beta^2)^{-1/2} T_0 = \frac{m}{m_0} T_0 = \sqrt{2} \cdot 10^{-8} \text{ с.} \quad (2)$$

Следовательно, средняя длина распада частицы равна

$$\bar{S} = v\bar{T} = 300 \text{ см.}$$

б) Введем 4-векторы:

$$P_x = (\mathbf{P}_x, jE_x), \quad P_\mu = (\mathbf{P}_\mu, jE_\mu) \quad \text{и} \quad P_\nu = (\mathbf{P}_\nu, jE_\nu). \quad (3)$$

В соответствии с законом сохранения энергии и импульса имеем

$$P_\nu = P_x - P_\mu. \quad (4)$$

Возведем обе части уравнения (4) в квадрат:

$$P_\nu^2 = (P_x - P_\mu)^2,$$

или

$$0 = -m_\nu^2 - m_\mu^2 + 2E_x E_\mu - 2|\mathbf{P}_x| \cdot |\mathbf{P}_\mu| \cos 15^\circ.$$

Подставляя известные значения E_x , $|\mathbf{P}_\mu|$, m_μ и m_ν , получаем

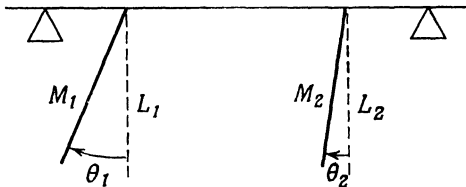
$$2000 \sqrt{2} E_\mu - 2000 |\mathbf{P}_\mu| \cos 15^\circ = 1000^2 + 100^2.$$

При столь высокой энергии мю-мезона членом m_μ^2 можно пренебречь и положить $E_\mu \approx P_\mu$. Таким образом,

$$E_\mu \approx \frac{500}{\sqrt{2} - \cos 15^\circ} \approx 1100 \text{ МэВ.}$$

Более подробно об операциях с 4-векторами см. в задаче I.1.1.

I.3.3. Пусть θ_1 и θ_2 — углы отклонения каждого из стерж-



ней от вертикали. Моменты инерции стержней равны

$$I_1 = \frac{1}{3} M_1 L_1^2, \quad I_2 = \frac{1}{3} M_2 L_2^2, \quad (1)$$

а сумма кинетических энергий

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2 = \frac{1}{6} M_1 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{6} M_2 L_2^2 \dot{\theta}_2^2. \quad (2)$$

Потенциальная энергия всей системы

$$V = M_1 g \frac{L_1}{2} (1 - \cos \theta_1) + M_2 g \frac{L_2}{2} (1 - \cos \theta_2) + \frac{K}{2} (\theta_1 - \theta_2)^2. \quad (3)$$

Лагранжиан системы записывается в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = T - V &= \frac{1}{6} M_1 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{6} M_2 L_2^2 \dot{\theta}_2^2 - \\ &- \frac{L_1}{2} M_1 g (1 - \cos \theta_1) - \frac{L_2}{2} M_2 g (1 - \cos \theta_2) - \frac{K}{2} (\theta_1 - \theta_2)^2 \approx \\ &\approx \frac{1}{6} M_1 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{6} M_2 L_2^2 \dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{4} M_1 L_1 g \theta_1^2 - \frac{1}{4} M_2 L_2 g \theta_2^2 - \frac{K}{2} (\theta_1 - \theta_2)^2 \end{aligned} \quad (4)$$

(при этом мы произвели разложение $\cos \theta_1$ и $\cos \theta_2$ в степенной ряд). Из выражения (4) находим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= \frac{1}{3} M_1 L_1^2 \ddot{\theta}_1, \\ - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} &= \frac{1}{2} M_1 L_1 g \theta_1 + K (\theta_1 - \theta_2), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= \frac{1}{3} M_2 L_2^2 \ddot{\theta}_2, \\ - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} &= \frac{1}{2} M_2 L_2 g \theta_2 - K (\theta_1 - \theta_2). \end{aligned} \quad (5)$$

После подстановки этих выражений в уравнение Лагранжа получаем следующие уравнения движения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} M_1 L_1^2 \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2} M_1 L_1 g \theta_1 + K (\theta_1 - \theta_2) &= 0, \\ \frac{1}{3} M_2 L_2^2 \ddot{\theta}_2 + \frac{1}{2} M_2 L_2 g \theta_2 - K (\theta_1 - \theta_2) &= 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} 2L_1 \ddot{\theta}_1 + 3g\theta_1 + \frac{6K}{M_1 L_1} (\theta_1 - \theta_2) &= 0, \\ 2L_2 \ddot{\theta}_2 + 3g\theta_2 - \frac{6K}{M_2 L_2} (\theta_1 - \theta_2) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Положим $\theta_1 = Ae^{i\omega t}$ и $\theta_2 = Be^{i\omega t}$. Тогда уравнения (6) принимают вид

$$\begin{aligned} -2L_1 \omega^2 A + 3gA + \frac{6K}{M_1 L_1} (A - B) &= 0, \\ -2L_2 \omega^2 B + 3gB - \frac{6K}{M_2 L_2} (A - B) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Преобразуем эти уравнения к виду

$$\begin{aligned} \left(-2L_1\omega^2 + 3g + \frac{6K}{M_1L_1}\right)A - \frac{6K}{M_1L_1}B &= 0, \\ -\frac{6K}{M_2L_2}A + \left(-2L_2\omega^2 + 3g + \frac{6K}{M_2L_2}\right)B &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Чтобы уравнения (8) не противоречили одно другому, должно выполняться следующее условие:

$$\begin{vmatrix} -2L_1\omega^2 + 3g + \frac{6K}{M_1L_1} & -\frac{6K}{M_1L_1} \\ -\frac{6K}{M_2L_2} & -2L_2\omega^2 + 3g + \frac{6K}{M_2L_2} \end{vmatrix} = 0, \quad (9)$$

откуда

$$\left(-2L_1\omega^2 + 3g + \frac{6K}{M_1L_1}\right)\left(-2L_2\omega^2 + 3g + \frac{6K}{M_2L_2}\right) - \frac{36K^2}{M_1M_2L_1L_2} = 0,$$

или

$$\begin{aligned} 4L_1L_2\omega^4 - \left[6g(L_1 + L_2) + \frac{12K(M_1L_1^2 + M_2L_2^2)}{M_1M_2L_1L_2}\right]\omega^2 + \\ + \left[9g + \frac{18K(M_1L_1 + M_2L_2)}{M_1M_2L_1L_2}\right]g = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

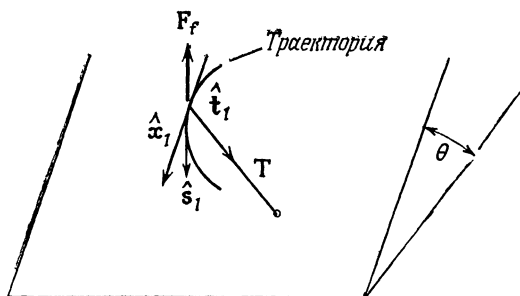
Уравнение (10) можно решить и определить частоты $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и ω_4 ¹⁾. Подставляя найденные частоты ω_j ($j=1, 2, 3, 4$) в уравнения (8), можно получить соответствующие этим частотам соотношения амплитуд A_j и B_j . Таким образом, общее решение системы (6) записывается в виде

$$\theta_1 = \sum_{j=1}^4 A_j e^{i\omega_j t} \quad \text{и} \quad \theta_2 = \sum_{j=1}^4 B_j e^{i\omega_j t}.$$

И.3.4. Введем три единичных вектора: \hat{x}_1 — в направлении кратчайшего спуска по наклонной плоскости, \hat{s}_1 — в направлении

¹⁾ Нужно не забывать, что в системе с двумя степенями свободы возможны колебания только с двумя частотами. Из уравнения (10) следуют четыре значения частоты. Два из них положительные, а два других отличаются от последних только знаком. В данной задаче им соответствуют синфазные (ω_c^2) и противофазные ($\omega_n^2 > \omega_c^2$) колебания. — Прим. перев.

касательной к траектории частицы и $\hat{\mathbf{t}}_1$ — вдоль нити по направлению к отверстию (см. рисунок).



Условие квазистатического равновесия частицы, когда она едва движется, записывается в виде

$$\mathbf{T} + mg \sin \theta \hat{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{F}_f = 0; \quad (1)$$

здесь \mathbf{F}_f — сила трения, действующая на частицу со стороны плоскости и всегда противоположная направлению движения, а \mathbf{T} — натяжение нити. По определению $\mathbf{F}_f = -\mu F_n \hat{\mathbf{s}}_1$. Подставляя сюда $F_n = mg \cos \theta$ и $\mu = \operatorname{tg} \theta$, получаем

$$\mathbf{F}_f = -mg \sin \theta \hat{\mathbf{s}}_1.$$

Теперь уравнение (1) принимает вид

$$\mathbf{T} + mg \sin \theta \hat{\mathbf{x}}_1 = mg \sin \theta \hat{\mathbf{s}}_1. \quad (2)$$

Возведем обе части уравнения (2) в квадрат:

$$T^2 + m^2 g^2 \sin^2 \theta + 2Tmg \sin \theta (\hat{\mathbf{t}}_1 \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) = m^2 g^2 \sin^2 \theta.$$

После упрощения получаем

$$T(T + 2mg \sin \theta \cos \delta) = 0, \quad (3)$$

где $\cos \delta = (\hat{\mathbf{t}}_1 \cdot \hat{\mathbf{x}}_1)$.

Если частица находится выше отверстия, т. е. когда

$$0 \leq \delta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad 0 \leq \cos \delta \leq 1,$$

то из уравнения (3) следует, что $T \leq 0$. Таким образом, поскольку натяжение нити T не может быть отрицательным, принимаем $T = 0$.

Если же частица находится ниже отверстия, т. е. когда

$$\frac{\pi}{2} \leq \delta \leq \pi \quad \text{и} \quad -1 \leq \cos \delta \leq 0,$$

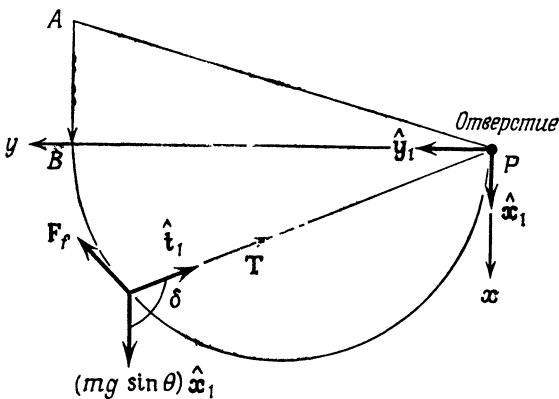
то натяжение T оказывается положительным:

$$T = -2mg \sin \theta \cos \delta > 0.$$

Траекторию частицы определяет результирующая сила

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{T} + mg \sin \theta \hat{\mathbf{x}}_1 = mg \sin \theta (\hat{\mathbf{x}}_1 - 2 \cos \delta \hat{\mathbf{t}}_1) = \\ &= mg \sin \theta [\hat{\mathbf{x}}_1 + 2 \cos \delta (\sin \delta \hat{\mathbf{y}}_1 - \cos \delta \hat{\mathbf{x}}_1)] = \\ &= mg \sin \theta [1 - 2 \cos^2 \delta] \hat{\mathbf{x}}_1 + 2 \cos \delta \sin \delta \hat{\mathbf{y}}_1 = \\ &= mg \sin \theta \cos 2\delta (-\hat{\mathbf{x}}_1 + \operatorname{tg} 2\delta \hat{\mathbf{y}}_1). \end{aligned} \quad (4)$$

Направление $\hat{\mathbf{y}}_1$ показано на рисунке, приведенном ниже.



Траекторию частицы можно построить следующим образом. На участке от A до B натяжение нити бесконечно мало (но положительно) и частица просто соскальзывает вниз по наклонной плоскости. Пусть $\delta \geq \pi/2$; из (4) мы получаем уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg} 2\delta = -\frac{2 \sin \delta \cos \delta}{\cos^2 \delta - \sin^2 \delta} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}, \quad (5)$$

где

$$x = r \cos(\pi - \delta) = -r \cos \delta \quad \text{и} \quad y = r \sin(\pi - \delta) = r \sin \delta.$$

Это уравнение можно преобразовать к виду

$$(x^2 - y^2) dy - 2xy dx = 0. \quad (6)$$

Оно имеет следующее решение:

$$\frac{x^2}{y} + y = C, \quad \text{или} \quad x^2 + \left(y - \frac{C}{2}\right)^2 = \frac{C^2}{4}, \quad (7)$$

где C — постоянная, определяемая из условия $C = y = BP$ при $x = 0$.

Таким образом, траектория частицы между точками B и P , описываемая уравнением (7), представляет собой полуокружность радиусом $C/2$ с центром в точке $x=0$, $y=C/2$.

I. 3.5. Пусть P_y — вертикальная составляющая реакции опоры. Сила, действующая на опору по вертикали, равна $-P_y$. Когда стержень проходит горизонтальное положение, он обладает кинетической энергией $I\dot{\theta}^2/2$, которая соответствует разности потенциальных энергий стержня в начальном и конечном состояниях:

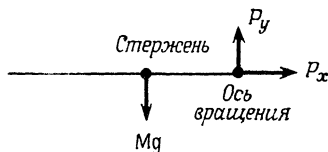
$$\frac{I\dot{\theta}^2}{2} = \frac{1}{2}MgL \sin 30^\circ;$$

здесь I — момент инерции стержня относительно оси вращения. Для однородного стержня, закрепленного на одном конце, $I = ML^2/3$. Следовательно,

$$\frac{1}{6}ML^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{4}MgL. \quad (1)$$

Ордината центра масс стержня $y = (L/2) \sin \theta$, и мы имеем

$$\dot{y} = \frac{1}{2}L\dot{\theta} \cos \theta \quad \text{и} \quad \ddot{y} = \frac{1}{2}L(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta).$$



Уравнение движения центра масс стержня имеет вид

$$Mg - P_y = M\ddot{y} = \frac{1}{2}ML(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta). \quad (2)$$

При горизонтальном положении стержня $\dot{\theta}^2 \sin \theta \equiv 0$. Вращательное движение стержня относительно центра масс описывается уравнением

$$\frac{1}{2}LP_y \cos \theta = I_{ц.м}\ddot{\theta}.$$

Подставляя сюда $I_{ц.м} = ML^2/12$, получаем

$$P_y \cos \theta = \frac{1}{6}ML\ddot{\theta}. \quad (3)$$

Подставляя $\ddot{\theta}$ из выражения (3) в уравнение (2), получаем

$$Mg - P_y = 3P_y,$$

откуда

$$P_y = \frac{Mg}{4}. \quad (4)$$

Величина $-P_y$ представляет собой составляющую силы, действующую вертикально вниз на ось вращения стержня. Реакцию опоры P_x можно найти из условия, что P_x должна быть равна центростремительной силе, действующей на стержень. В момент времени, когда стержень проходит горизонтальное положение,

$$P_x = \int_0^L \frac{M}{L} x \dot{\theta}^2 dx = \frac{1}{2} ML \dot{\theta}^2. \quad (5)$$

Подставляя сюда выражение для $\dot{\theta}^2$ из (1), находим

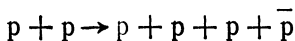
$$P_x = \frac{3}{4} Mg.$$

Сила $-P_x$ направлена так, что она стремится сдвинуть ось вращения стержня влево.

1.3.6. Пороговое значение энергии движущегося протона определяется выражением

$$T_{\text{пор}} = \Delta M \left(1 + \frac{m_1}{m_2} + \frac{\Delta M}{2m_2} \right). \quad (1)$$

В случае реакции



имеем

$$\Delta M = 2m_p \quad \text{и} \quad m_1 = m_2 = m_p.$$

Следовательно,

$$T_{\text{пор}} = 6m_p = 5,62 \text{ ГэВ.}$$

Замечание. Вывод формулы (1) см. в книге: *J. D. Jackson, Classical Electrodynamics*, стр. 397—400¹⁾. Другой подход см. в решении задачи IV.11.7, разд. «Атомная физика и квантовая механика» настоящего сборника.

1.4.1.

а) Приливные волны совершают работу за счет энергии вращения Земли. Максимальная энергия, которую могут рассеять приливные волны, равна кинетической энергии вращения Земли $I\omega^2/2$, где I — момент инерции Земли, а ω — угловая скорость ее вращения.

б) Рассечем мысленно Землю пополам плоскостью, перпендикулярной плоскости земной орбиты и проходящей через центры Солнца и Земли. Поскольку форма Земли несколько отличается от шарообразной, одна из ее половин окажется несколько ближе к Солнцу, чем другая. Поэтому в соответствии с законом

¹⁾ См. перевод: *Дж. Джексон, Классическая электродинамика*, «Мир», М., 1965, стр. 435—439. — *Прим. перев.*

обратных квадратов она будет притягиваться к Солнцу сильнее, чем другая половина.

Пусть \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 — радиус-векторы, определяющие положения центров масс двух половин Земли относительно Солнца, \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 — силы притяжения рассматриваемых половин Земли Солнцем и \mathbf{r}_0 — радиус-вектор, определяющий положение центра масс первой половины относительно центра масс Земли. Таким образом, мы имеем¹⁾

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + \mathbf{r}_0 \quad \text{и} \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0.$$

Вращающий момент, действующий на Землю со стороны Солнца, приблизительно равен нулю, и можно записать

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = 0 &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{r}_0 \times (\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2) + \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \equiv \\ &\equiv \mathbf{C} + \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь этот момент мы представили в виде суммы момента пары сил $\mathbf{C} = \mathbf{r}_0 \times (\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2)$ относительно центра масс Земли и момента силы \mathbf{F} , приложенной к центру масс Земли, относительно Солнца. Момент пары \mathbf{C} уменьшает угловую скорость вращения Земли, в то время как момент $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ увеличивает орбитальный момент Земли $\mathbf{L}_{\text{орб}}$. С увеличением последнего возрастает радиус земной орбиты, а также период обращения Земли (в соответствии с законом Кеплера $\omega^2 r^3 = 4\pi^2 r^3 / T^2 = \text{const}$). Сохранение суммарного момента импульса наглядно видно из уравнения (1): уменьшение момента, связанного с суточным вращением Земли, приводит к немедленному возрастанию орбитального момента Земли на ту же самую величину.

1.4.2. Среднее время жизни $= 2 \cdot 10^{-6} / \sqrt{1 - (0,8)^2} = 3 \cdot 10^{-6}$ с.

1.4.3. Меньше.

1.4.4. Меньше.

1.4.5. $\bar{x} = 1,5$ и $\bar{y} = 1$.

1.4.6. Останется прежним.

1.4.7. Из векторного соотношения между моментом внешней силы \mathbf{M} , угловой скоростью прецессии $\mathbf{\Omega}$ и собственным моментом импульса \mathbf{L} волчка

$$\mathbf{M} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{L}$$

следует, что вектор $\mathbf{\Omega}$ направлен вверх, поэтому ось волчка прецессирует против часовой стрелки.

¹⁾ Радиус-вектор \mathbf{r} определяет положение центра масс Земли относительно центра Солнца. — Прим. перев.

I. 4.8. Приведенная масса системы равна

$$\frac{3 \cdot 1}{3+1} m = \frac{3}{4} m.$$

Следовательно, период колебаний равен

$$2\pi \sqrt{\frac{3m}{4k}} = \pi \sqrt{\frac{3m}{k}}.$$

I. 4.9. При статическом равновесии

$$\frac{dV}{dr} = 0 \quad \left(\text{поскольку } F = -\frac{dV}{dr} \right).$$

Таким образом,

$$-2ar^{-3} + br^{-2} = 0,$$

откуда

$$r = \frac{2a}{b}.$$

I. 4.10.

- а) $\leftarrow \rightarrow$ или $\rightarrow \leftarrow$ — колебания в противофазе (мода 1);
 б) $\leftarrow \leftarrow$ или $\rightarrow \rightarrow$ — колебания в фазе (мода 2).

I. 4.11. Поскольку $g = GM/R^2$, то $\Delta g/g = -2\Delta R/R$. Следовательно, уменьшение радиуса Земли на 1% привело бы к увеличению ускорения свободного падения g на 2%.

I. 4.12. Пусть P — мгновенная ось вращения банки в момент времени t . Запишем уравнение вращательного движения относительно P :

$$I\ddot{\theta} = Mk^2\ddot{\theta} = MgR \sin \theta, \quad \text{или} \quad k^2\ddot{\theta} = gR \sin \theta,$$

где I — момент инерции банки относительно оси P , а k^2 — квадрат радиуса инерции банки. Для пустой банки

$$k_1^2 = \frac{I_1}{M_1} = R^2 + R^2 = 2R^2,$$

а для заполненной

$$k_2^2 = \frac{I_2}{M_2} = \frac{1}{2}R^2 + R^2 = \frac{3}{2}R^2.$$

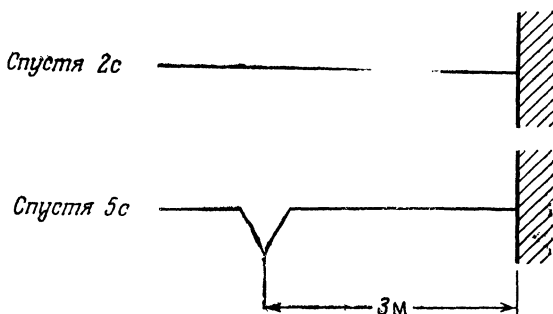
Отсюда видно, что $k_1^2 > k_2^2$, и, следовательно, $\ddot{\theta}_2 > \ddot{\theta}_1$. Заполненная банка скатится первой.

I. 4.13.

$$\frac{\text{Скорость потока из нижн. отв.}}{\text{Скорость потока из верхн. отв.}} = \frac{\sqrt{P_1}}{\sqrt{P_2}} = \sqrt{3};$$

здесь P_l — давление воды у нижнего отверстия, а P_u — у верхнего отверстия.

I. 4.14.



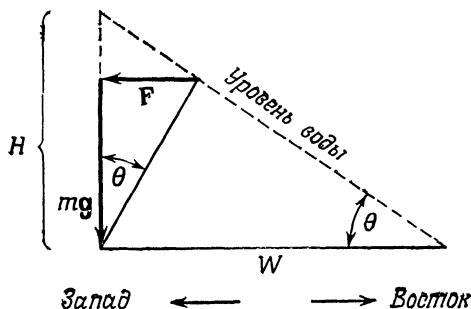
I. 4.15. Кориолисова сила

$$\mathbf{F} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}.$$

а) Она действует на частицу массой m , за которой наблюдают в системе координат, вращающейся с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ относительно инерциальной системы; \mathbf{v} — скорость этой частицы во вращающейся системе координат.

б) Кориолисова сила направлена на запад. Поэтому уровень воды на западном берегу выше, чем на восточном.

в)



Поскольку $|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}| = \omega v \sin \lambda$, то

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2\omega v \sin \lambda}{g}. \quad (1)$$

Разность уровней

$$H = W \operatorname{tg} \theta = \frac{2W\omega v \sin \lambda}{g}; \quad (2)$$

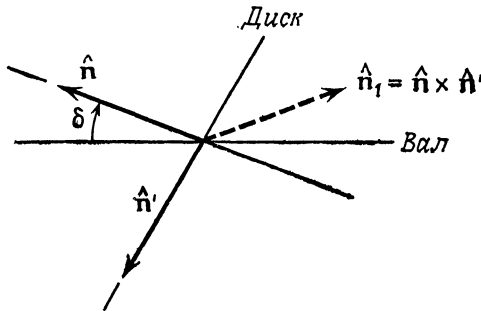
здесь v — скорость течения воды, λ — географическая широта, ω — угловая скорость вращения Земли, W — ширина реки, g — ускорение свободного падения на поверхности Земли.

г) $v = 8 \text{ км/ч} \approx 2,2 \cdot 10^2 \text{ см/с}$; $\lambda = 30^\circ$, $\sin \lambda = 0,5$; $\omega = 2\pi/T = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ рад/с}$ ($T = 86400 \text{ с}$); $W \approx 4 \text{ км} = 4 \cdot 10^5 \text{ см}$; $g \approx 10^3 \text{ см/с}^2$.

Подставляя эти значения в формулу (2), получаем

$$H = 2W\omega v \frac{\sin \lambda}{g} = 2(4 \cdot 10^5)(7,3 \cdot 10^{-5})(2,2 \cdot 10^2)0,5 \cdot 10^{-3} \approx 6,4 \text{ см.}$$

1. 4.16.



Как показано на рисунке, единичный вектор \hat{n} направлен вдоль оси диска, вектор \hat{n}' перпендикулярен вектору \hat{n} и лежит в плоскости рисунка, а вектор \hat{n}_1 перпендикулярен плоскости рисунка. Угловую скорость ω можно разложить на две составляющие по направлениям \hat{n} и \hat{n}' :

$$\omega = \hat{n}\omega \cos \delta + \hat{n}'\omega \sin \delta. \quad (1)$$

Момент импульса диска записывается в виде

$$\mathbf{M} = \hat{n}C\omega \cos \delta + \hat{n}'A\omega \sin \delta. \quad (2)$$

Уравнение движения диска в системе координат, вращающейся с угловой скоростью ω , имеет вид

$$\text{Вращающий момент} = \left(\frac{d\mathbf{M}}{dt} \right)_0 = \omega \times \mathbf{M} + \frac{d\mathbf{M}}{dt}, \quad (3)$$

где производная $(d/dt)_0$ относится к лабораторной системе, а d/dt — к вращающейся системе координат. Поскольку во вращающейся вместе с диском системе координат диск неподвижен, то второй член в правой части уравнения (3) равен нулю. Следовательно,

$$\begin{aligned} \text{Вращающий момент} &= \hat{n}_1(A\omega^2 \sin \delta \cos \delta - C\omega^2 \sin \delta \cos \delta) = \\ &= \hat{n}_1(A - C)\omega^2 \sin \delta \cos \delta, \end{aligned}$$

где $\hat{n}_1 = \hat{n} \times \hat{n}'$.

1.5.1.

а) Пусть x — расстояние, на которое брусок смещается относительно положения равновесия. Из уравнения движения

$$M\ddot{x} + (k_1 + k_2)x = 0 \quad (1)$$

определяем частоту колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{M}}. \quad (2)$$

б) Новая система, масса которой равна $M + m$, имеет частоту колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{M + m}}. \quad (3)$$

в) Пусть v_i — скорость бруска, с которой он проходит положение равновесия. В соответствии с законом сохранения энергии имеем

$$\frac{1}{2} M v_i^2 = \frac{1}{2} (k_1 + k_2) A^2, \quad (4)$$

где A — амплитуда колебаний. Запишем закон сохранения импульса

$$M v_i = (M + m) v_f, \quad (5)$$

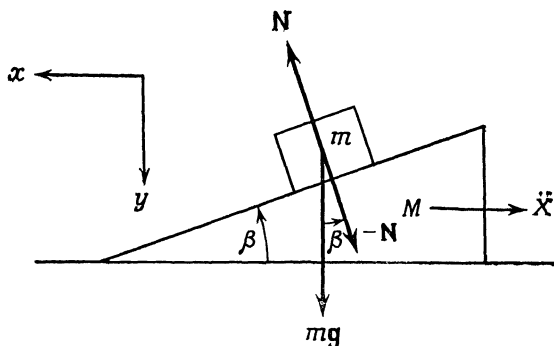
где v_f — скорость бруска с прилипшим к нему грузом m . Выразим переход кинетической энергии в потенциальную в виде

$$\frac{1}{2} (M + m) v_f^2 = \frac{1}{2} (k_1 + k_2) B^2. \quad (6)$$

Исключая из уравнений (4)–(6) v_i и v_f , находим соотношение между новой амплитудой колебаний B и амплитудой A :

$$B = \sqrt{\frac{M}{M + m}} A.$$

1.5.2.



Пусть N — нормальная сила реакции, действующая на массу m со стороны клина. Уравнение движения бруска массой m

в направлении y записывается в виде

$$m\ddot{y} = mg - N \cos \beta, \quad (1)$$

а в направлении x

$$m\ddot{x} = N \sin \beta. \quad (2)$$

Уравнение движения клина массой M в направлении x имеет вид

$$M\ddot{X} = -N \sin \beta. \quad (3)$$

Поскольку брусок движется по клину, мы можем написать следующее уравнение связи:

$$\frac{\ddot{y}}{\dot{x} - \dot{X}} = \operatorname{tg} \beta. \quad (4)$$

Из уравнений (2) и (3) имеем

$$\dot{x} = -\frac{M}{m} \dot{X}. \quad (5)$$

Подставляя N из уравнения (2) в (1) и учитывая (5), получаем

$$m\ddot{y} = mg + M\ddot{X} \operatorname{ctg} \beta. \quad (6)$$

Подставляя \dot{x} из (5) в (4), находим

$$\ddot{X} = -\ddot{y} \frac{\operatorname{ctg} \beta}{1 + M/m}. \quad (7)$$

Наконец, исключая \ddot{y} в (7) с помощью (6), получаем ускорение клина относительно стола

$$\ddot{X} = -\frac{mg \operatorname{ctg} \beta}{M + m + M \operatorname{ctg}^2 \beta}.$$

I. 5.3. Натяжение нити меньше, чем в случае, когда брусок массой 5 кг приклеен к столу.

I. 5.4. Кориолисова сила $-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ действует в направлении линейной скорости, с которой вращается диск. Следовательно, лезвие падает по направлению вращения диска.

I. 5.5. Поскольку должен выполняться закон сохранения момента импульса, мы имеем

$$J = I\dot{\theta} = \operatorname{const}. \quad (1)$$

Так как момент инерции I пропорционален R^2 , уравнение (1) принимает вид

$$R^2\dot{\theta} = \operatorname{const},$$

или

$$2 \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta \dot{\theta}}{\dot{\theta}} = 0.$$

Следовательно, сокращение радиуса Земли на 1% приведет к увеличению $\dot{\theta}$ на 2%. Поскольку энергия вращения Земли пропорциональна $\dot{\theta}$:

$$T_{\text{вр}} = \frac{I\dot{\theta}^2}{2} = \frac{I\dot{\theta}}{2},$$

то она также увеличится на 2%.

1.5.6. Обозначим через θ угол отклонения стержня от вертикали. Уравнение движения стержня записывается следующим образом:

$$I\ddot{\theta} = -(Mg \sin \theta) \frac{L}{2} - kL \sin \theta.$$

При малых углах отклонения θ ($\sin \theta \approx \theta$) оно принимает вид

$$I\ddot{\theta} + \left(\frac{1}{2} MgL + kL\right) \theta = 0.$$

После подстановки выражения для момента инерции стержня $I = ML^2/3$ имеем

$$\frac{ML}{3} \ddot{\theta} + \left(\frac{Mg}{2} + k\right) \theta = 0.$$

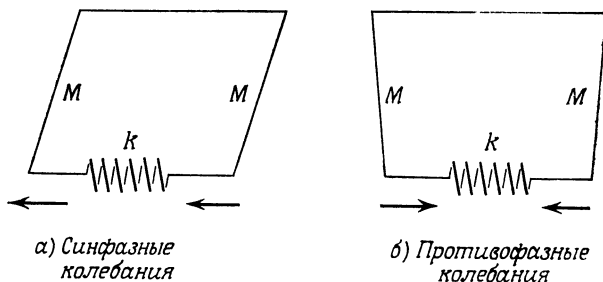
Отсюда получаем частоту колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{Mg + 2k}{ML}}$$

и период

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3} \frac{ML}{Mg + 2k}}.$$

1.5.7.



В случае малых отклонений уравнения движения стержней записываются в виде

$$\frac{ML^2}{3} \ddot{\theta} + Mg\theta \frac{L}{2} = 0,$$

$$\frac{ML^2}{3} \ddot{\theta} + Mg\theta \frac{L}{2} + 2kL^2\theta = 0.$$

Соответствующие частоты колебаний равны

$$\text{а) } \omega = \sqrt{\frac{3g}{2L}} \quad \text{и} \quad \text{б) } \omega = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{Mg + 4kL}{ML}}.$$

I. 5.8. Отношение масс Солнца и Земли равно $3 \cdot 10^5$.

I. 5.9. в) Оба одновременно.

I. 5.10. б) Пружина сожмется. Деформация пружины описывается выражением

$$d \sim (\rho_{\text{вода}} - \rho_{\text{пробка}}) \cdot \text{Объем} \cdot g_{\text{эфф}}.$$

Когда лифт спускается с ускорением, то $g_{\text{эфф}}$ становится меньше и пружина сокращается.

I. 5.11. Квадрат периода обращения спутника пропорционален кубу радиуса его орбиты. Следовательно, период обращения второго спутника на 1,5% больше первого.

I. 5.12.

а) В начальный момент времени $t=0$ имеем $v=0$; поэтому $a_R/a_{2R}=1$.

б) В случае двух шариков с одинаковыми массами установившаяся скорость обратно пропорциональна силе сопротивления среды. Следовательно,

$$\frac{v_R}{v_{2R}} = \frac{2R}{R} = 2.$$

I. 5.13. а) Обе силы удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad \text{и т. д.}$$

Следовательно, для них можно ввести потенциалы

$$V_1 = -2xyz + 6x^2y^2z^2 + \text{const}$$

и

$$V_2 = -(xy^2 + yx^2 + xz^2 + zx^2 + yz^2 + zy^2 + 2xyz) + \text{const}.$$

б) Полная энергия сохраняется в поле обеих сил.

I. 5.14. Запишем уравнение движения шара в направлении x :

$$m\ddot{x} = \mu mg, \quad \text{или} \quad \ddot{x} = \mu g. \quad (1)$$

¹⁾ Автор пренебрегает подъемной силой (силой Архимеда), которая в отличие от силы тяжести не одинакова для обоих шариков. С учетом этой силы отношения a_R/a_{2R} и v_R/v_{2R} должны быть больше 1 и 2 соответственно.—
Прим. перев.

Вращение шара вокруг его оси описывается уравнением

$$I\ddot{\theta} = -\mu mgr, \quad (2)$$

где $I = 2mr^2/5$ — момент инерции шара.

Интегрируя уравнения (1) и (2), получаем

$$\dot{x} = \mu gt, \quad (3)$$

$$\dot{\theta} = -\frac{5\mu g}{2r}t + \omega. \quad (4)$$

Пусть, начиная с момента $t = t_1$, шар катится без скольжения:

$$r\dot{\theta} = \dot{x}. \quad (5)$$

Подставляя это условие в уравнения (3) и (4), получаем

$$r\left(\omega - \frac{5}{2r}\mu gt_1\right) = \mu gt_1,$$

откуда

$$t_1 = \frac{2\omega r}{7\mu g}. \quad (6)$$

а) Конечную скорость движения центра масс шара находим из уравнения (3), подставляя в него выражение (6) для t_1 :

$$\dot{x}_{ц.м} = \mu gt_1 = \frac{2}{7}\omega r. \quad (7)$$

б) Прежде чем установится эта скорость, шар пройдет расстояние

$$S = \frac{1}{2}\mu gt_1^2 = \frac{1}{2}\mu g\left(\frac{2\omega r}{7\mu g}\right)^2 = \frac{2\omega^2 r^2}{49\mu g}.$$

в) При движении без скольжения момент внешних сил равен нулю, поэтому должен выполняться закон сохранения момента импульса

$$I_0\omega = I\omega_f, \quad (8)$$

где $I_0 = 2mr^2/5$, а I — момент инерции шара относительно мгновенной оси: $I = I_0 + mr^2 = 7mr^2/5$. Таким образом,

$$\omega_f = \frac{2\omega}{7},$$

и конечная скорость движения центра масс шара равна

$$v_f = \omega_f r = \frac{2\omega r}{7},$$

что совпадает с полученной ранее скоростью [см. выражение (7)].

1. 5.15.

а) Момент импульса равен

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= I_1 \omega_1 \hat{\mathbf{i}} + I_2 \omega_2 \hat{\mathbf{j}} + I_3 \omega_3 \hat{\mathbf{k}} = \\ &= I_1 \omega \sin \theta \hat{\mathbf{i}} + I_3 \omega \cos \theta \hat{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$, $I_1 > I_3$, $\hat{\mathbf{k}}$ — направляющий вектор вдоль оси симметрии эллипсоида.

б) Частота прецессии определяется по формуле

$$\omega_p = \frac{\omega (I_1 - I_3) \cos \theta}{I_1}, \quad (2)$$

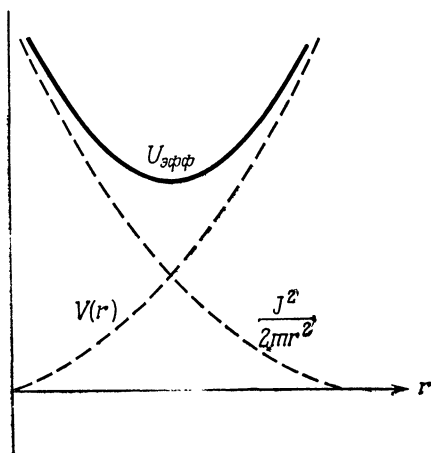
которая непосредственно следует из динамических уравнений Эйлера.

1. 5.16.

а) Эффективный потенциал определяют следующим образом:

$$U_{\text{эфф}} = \frac{J_0^2}{2mr^2} + V(r).$$

На рисунке показана зависимость эффективного потенциала от r для конкретного случая, когда $V(r) = kr^2/2$.



б) Круговое движение имеет место при равенстве полной энергии E минимальному значению $U_{\text{эфф}}$. Радиус орбиты R можно найти из уравнения

$$\left. \frac{dU_{\text{эфф}}}{dr} \right|_{r=R} = 0.$$

в) Если $V(r) = kr^2/2$, то

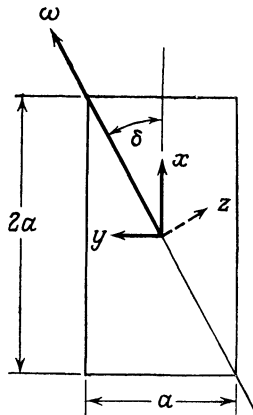
$$U_{\text{эфф}} = \frac{J_0^2}{2mr^2} + \frac{kr^2}{2}.$$

Условие минимума $U_{\text{эфф}}$ записывается в виде

$$-\frac{dU_{\text{эфф}}}{dr} = m \frac{v^2}{R} - kR = 0,$$

откуда находим $(v/R)^2 = k/m$. Следовательно, угловая скорость кругового движения равна $\sqrt{k/m}$.

1.6.1.



а) Моменты инерции относительно главных центральных осей I_x и I_y вычисляются непосредственно:

$$I_x = \frac{1}{3} m \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} ma^2, \quad (1)$$

$$I_y = \frac{1}{3} m \left(\frac{2a}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} ma^2. \quad (2)$$

Момент инерции I_z для тонкой пластины равен сумме I_x и I_y :

$$I_z = I_x + I_y = \frac{5}{12} ma^2. \quad (3)$$

б) Пусть \hat{i} , \hat{j} и \hat{k} — единичные векторы вдоль осей x , y и z соответственно. Вектор момента импульса \mathbf{L} (а также вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$) не совпадает ни с одной из главных осей, но располагается в плоскости x, y . Его величина и направление даются выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \hat{i} I_x \omega_x + \hat{j} I_y \omega_y = \hat{i} I_x \omega \cos \delta + \hat{j} I_y \omega \sin \delta = \\ &= \hat{i} \frac{1}{12} ma^2 \cos \delta + \hat{j} \frac{1}{3} ma^2 \omega \sin \delta. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь I_x и I_y заменены выражениями (1) и (2) соответственно. Отметим, что в этой формуле δ — угол между векторами ω и \hat{i} .

в) На ось вращения действует момент

$$\mathbf{N} = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt} \right)_0, \quad (5)$$

где $(d\mathbf{L}/dt)_0$ — производная по времени вектора \mathbf{L} в инерциальной системе отсчета. В общем случае

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt} \right)_0 = \frac{d\mathbf{L}}{dt} + \omega \times \mathbf{L}. \quad (6)$$

Во вращающейся с телом системе отсчета первый член в правой части уравнения (6) обращается в нуль. Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{N} = \omega \times \mathbf{L} &= \left(\frac{1}{3} ma^2 \omega^2 \sin \delta \cos \delta - \frac{1}{12} ma^2 \omega^2 \sin \delta \cos \delta \right) \hat{\mathbf{k}} = \\ &= \frac{1}{4} ma^2 \omega^2 \sin \delta \cos \delta \hat{\mathbf{k}}. \end{aligned}$$

1.6.2. Космический корабль движется по круговой орбите радиусом r_0 . При этом центробежная сила инерции должна уравновешивать силу притяжения, действующую по закону обратных квадратов:

$$mr_0 \dot{\theta}^2 = \frac{k}{r_0^2}. \quad (1)$$

Следовательно, момент импульса корабля

$$J_0 = m \dot{\theta} r_0^2 = \sqrt{mkr_0}. \quad (2)$$

Возрастание линейной скорости корабля на 8% вызывает увеличение момента импульса также на 8%. Таким образом, $J = 1,08J_0$. Дифференциальное уравнение движения корабля имеет вид

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{km}{J^2}, \quad (3)$$

где $u = 1/r$.

Это уравнение имеет следующее решение:

$$r = \frac{1}{u} = \frac{1}{km/J^2 + A \cos \theta}, \quad (4)$$

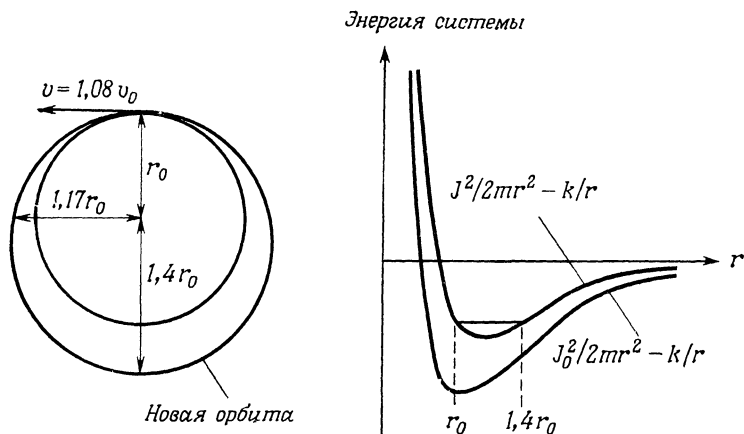
где A — постоянная. Используя начальное условие $r = r_0 = J_0^2/km$ при $\theta = 0$, можно определить A :

$$A = \frac{1}{r_0} - \frac{km}{J^2} = \frac{1}{r_0} \left[1 - \left(\frac{J_0}{J} \right)^2 \right] \approx 0,14 \frac{1}{r_0}. \quad (5)$$

Следовательно,

$$r = \frac{r_0}{0,86 + 0,14 \cos \theta}. \quad (6)$$

Отсюда находим, что расстояние до апогея равно $1,40r_0$.



Другое решение. Пусть \bar{V} и R — скорость корабля и расстояние до него в апогее. В соответствии с законом сохранения момента импульса и энергии имеем

$$mvr_0 = m\bar{V}R, \quad (7)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r_0} = \frac{1}{2}m\bar{V}^2 - \frac{k}{R}. \quad (8)$$

Из уравнений (7) и (8) находим

$$R = \frac{v^2}{2k/mr_0 - v^2} r_0. \quad (9)$$

Подставляя сюда выражение для k/r_0 из равенства (1), т. е.

$$\frac{k}{r_0} = mv_0^2, \quad (10)$$

получаем $R \approx 1,4r_0$.

I. 6.3. Пусть b_1 и b_2 — первоначальные длины пружин 1 и 2, когда вся система находится в равновесии, и диск не вращается. При повороте диска на угол θ от положения равновесия пружина 1 растягивается на длину $x_1 = a\theta$. Если при этом растягивается и пружина 2 на длину x_2 , то груз опускается на длину $x_3 = a\theta/2 + x_2$. Кинетическая энергия системы T равна сумме кинетической энергии диска T_d и кинетической энергии груза $T_{гр}$:

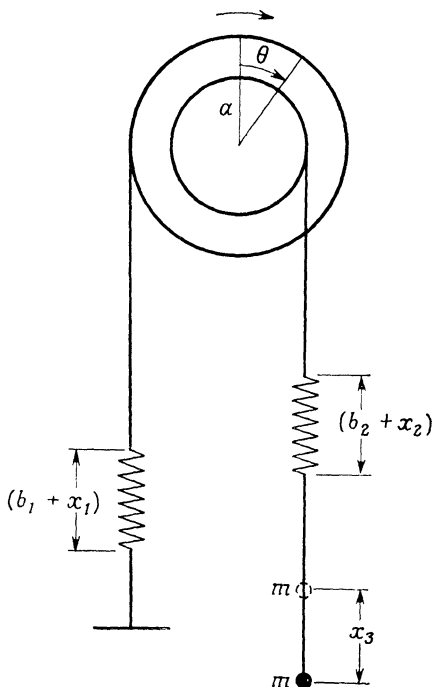
$$T_d = \frac{I\dot{\theta}^2}{2} = \frac{ma^2\dot{\theta}^2}{4}, \quad (1)$$

$$T_{гр} = \frac{m\dot{x}_3^2}{2} = \frac{m}{2} \left(\frac{a\dot{\theta}}{2} + \dot{x}_2 \right)^2. \quad (2)$$

Потенциальная энергия системы

$$V = \frac{1}{2} ka^2\theta^2 + \frac{1}{2} kx_2^2 - mgx_3 =$$

$$= \frac{1}{2} ka^2\theta^2 + \frac{1}{2} kx_2^2 - mg\left(\frac{1}{2}a\theta + x_2\right). \quad (3)$$



Составляем функцию Лагранжа

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{4} ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{1}{4} a^2\dot{\theta}^2 + a\dot{x}_2 + \dot{x}_2^2 \right) -$$

$$- \frac{k}{2} (a^2\theta^2 + x_2^2) + mg \left(\frac{1}{2} a\theta + x_2 \right). \quad (4)$$

Уравнения Лагранжа записываются в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0. \quad (5)$$

Подставляя выражение для лагранжиана (4) в эти уравнения, мы непосредственно получаем два уравнения движения.

1.6.4. Обозначим через x смещение груза от положения равновесия в момент времени t . При этом пружина растягивается

на длину $x = x_0 e^{i\omega t}$. Уравнение движения груза записывается в виде

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = kx_0 e^{i\omega t}.$$

Оно имеет частное (стационарное) решение

$$x = \frac{kx_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \cos(\omega t - \delta),$$

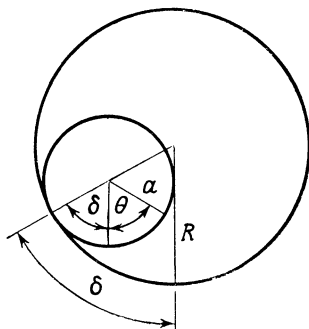
где

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{b\omega}{k - m\omega^2}.$$

Амплитуда стационарного движения, установившегося по прошествии достаточно длительного времени, равна

$$\frac{kx_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}}.$$

I. 6.5.



а) Кинетическую энергию цилиндра можно представить в виде суммы энергии поступательного движения центра масс цилиндра и энергии вращения его относительно центра масс. Обозначим через $\dot{\theta}$ угловую скорость вращения цилиндра. Кинетическую энергию цилиндра можно записать в виде

$$T = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m (R - a)^2 \dot{\delta}^2, \quad (1)$$

где для сплошного цилиндра $I_0 = ma^2/2$. При движении без скольжения $a\dot{\theta} = (R - a)\dot{\delta}$. Следовательно, выражение (1) принимает вид

$$T = \frac{m}{4} (R - a)^2 \dot{\delta}^2 + \frac{m}{2} (R - a)^2 \dot{\delta}^2 = \frac{3}{4} m (R - a)^2 \dot{\delta}^2. \quad (2)$$

Потенциальная энергия цилиндра равна

$$V = -(R - a) mg \cos \delta \quad (V = 0 \text{ при } \delta = 90^\circ). \quad (3)$$

Составляем функцию Лагранжа

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{3}{4} m(R - a)^2 \dot{\delta}^2 + mg(R - a) \cos \delta. \quad (4)$$

б) Подставляя выражение (4) в уравнение Лагранжа, получаем уравнение движения

$$\frac{3}{2} (R - a) \ddot{\delta} + g \sin \delta = 0. \quad (5)$$

в) В случае малых колебаний $\sin \delta \approx \delta$, и уравнение (5) записывается в виде

$$\ddot{\delta} + \frac{2g}{3(R - a)} \delta = 0,$$

откуда получаем

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{3(R - a)}}.$$

1. 6.6.

а) Чтобы определить значения x , при которых заданный ряд сходится, можно использовать следующий признак сходимости: если для любого бесконечного ряда модуль отношения n -го члена ряда к $(n - 1)$ -му члену имеет предел $A < 1$, то такой ряд сходится. Мы имеем

$$\begin{aligned} R &= \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n! x^n (n-1)^{n-1}}{n! (n-1)! x^{n-1}} = \frac{nx(n-1)^{n-1}}{n^n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} x = \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{x}{e} \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1)$$

Следовательно, при $|x| < e$ ряд сходится абсолютно. В случае $x = -e$ знаки членов ряда чередуются, члены ряда монотонно убывают по величине и n -й член в пределе стремится к нулю. Поэтому при $x = -e$ ряд сходится¹⁾. В случае $x = e$ применим асимптотическую формулу Стирлинга

$$\frac{n!}{n^n} = \sqrt{2\pi n} e^{-n} \left[1 + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right].$$

Таким образом, из выражения (1) имеем

$$R = 1 + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

и ряд при $x = e$, согласно признаку Раабе, расходится.

¹⁾ Согласно теореме Лейбница о сходимости знакопеременного ряда. — *Прим. перев.*

б) Преобразуем заданный нам интеграл следующим образом:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{(x+c)^2 + a^2} dx = \operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{imx}}{(x+c)^2 + a^2} dx \right] = \\ = \operatorname{Re} \left[\oint \frac{e^{imz}}{(z+c)^2 + a^2} dz \right] \quad (z = x + iy).$$

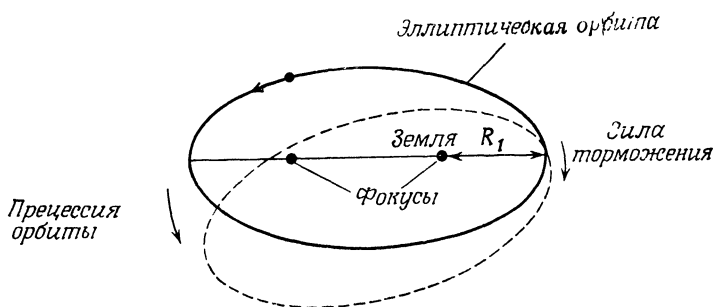
Здесь интегрирование выполняется в верхней полуплоскости, если $m > 0$, и соответственно в нижней полуплоскости, если $m < 0$. Следовательно, при $m > 0$

$$I = \operatorname{Re} \{ 2\pi i \operatorname{Выч} [f(z); -c + ia] \} = \\ = \operatorname{Re} \left[2\pi i \frac{e^{im(-c+ia)}}{2ia} \right] = \frac{\pi}{a} e^{-am} \cos mc.$$

При $m < 0$ имеем

$$I = \operatorname{Re} \{ 2\pi i \operatorname{Выч} [f(z); -c - ia] \} = \\ = \operatorname{Re} \left[2\pi i \frac{e^{im(-c-ia)}}{-2ia} \right] = -\frac{\pi}{a} e^{-a|m|} \cos mc.$$

1.6.7.



Как известно из первого закона Кеплера, Земля должна находиться в одном из фокусов эллиптической орбиты.

Тормозящее действие атмосферы проявляется при движении спутника только вблизи Земли. Пусть в результате этого торможения спутник теряет за один оборот импульс ΔP . При этом момент импульса спутника уменьшается на

$$\Delta J = -\Delta P R_1, \quad (1)$$

где R_1 — показанное на рисунке расстояние от центра Земли до перигея орбиты. Эксцентриситет орбиты e связан с моментом импульса J соотношением

$$e = \left(1 + \frac{2EJ^2}{mk^2} \right)^{1/2} \approx 1 + \frac{EJ^2}{mk^2}, \quad (2)$$

где E — полная энергия системы, k — постоянная в выражении для потенциальной энергии $V = -mk/r$. В случае эллиптической орбиты полная энергия E отрицательна и $0 < e < 1$. Дифференцируя соотношение (2), затем находим

$$\frac{\Delta e}{e} = \frac{J^2 \Delta E + 2EJ \Delta J}{emk^2}; \quad (3)$$

здесь ΔE — энергия, теряемая спутником за один оборот. Используя соотношения

$$\frac{J^2}{mR_1^2} = 2[E - V(R_1)] \quad \text{и} \quad \Delta E = \frac{P}{m} \Delta P = \frac{J \Delta J}{mR_1^2},$$

получаем

$$\frac{\Delta e}{e} = \frac{2[2E - V(R_1)] J \Delta J}{emk^2}. \quad (4)$$

В случае эллиптической орбиты

$$2E - V(R_1) = mk \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{a} \right) > 0. \quad (5)$$

Поскольку знак ΔJ отрицателен, из (4) и (5) следует

$$\frac{\Delta e}{e} < 0.$$

Из этой формулы мы видим, что эксцентриситет орбиты уменьшается. С каждым оборотом спутник становится ближе к Земле. Его орбита все больше и больше приближается к круговой.

Большая полуось орбиты a пропорциональна $1/W$, где W — энергия связи: $W = -E$. Поскольку спутник теряет энергию, то W возрастает. Следовательно, a уменьшается. Уменьшается также и период его обращения T , так как в соответствии с третьим законом Кеплера квадрат периода пропорционален кубу большой полуоси.

Спутник теряет свою энергию на торможение лишь при сближении с Землей. Поэтому подавляющую часть периода обращения он движется вне атмосферы, а остальную, меньшую, часть — в ней. С каждым оборотом полярный угол, соответствующий наибольшему сближению с Землей, увеличивается. При этом орбита спутника прецессирует в направлении, показанном на рисунке. Кратчайшее расстояние между спутником и Землей R_1 можно найти, пользуясь законами сохранения момента импульса и энергии:

$$\begin{aligned} R_1 &= -\frac{k}{2E} - \sqrt{\frac{k^2}{4E^2} + \frac{J^2}{2mE}} = -\frac{k}{2E} + \frac{k}{2E} \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{mk^2}} \approx \\ &\approx -\frac{k}{2E} + \frac{k}{2E} \left(1 + \frac{EJ^2}{mk^2} \right) = \frac{J^2}{2mk}; \end{aligned}$$

здесь, поскольку $E < 0$, знак корня во втором выражении изменен на противоположный. Следовательно, по мере уменьшения J расстояние R_1 сокращается.

1.6.8. Обе трубы горизонтальны; следовательно, каких-либо изменений потенциальной энергии жидкости нет. В сечении C кинетическая энергия единичного объема жидкости равна $\rho v_C^2/2$, а в сечении B $\rho v_B^2/2$. Дано, что $v_B = 20$ см/с. Скорость v_C можно найти из закона сохранения массы

$$v_C = v_B \frac{\text{Площадь сечения } B}{\text{Площадь сечения } C} = 120 \text{ см/с.}$$

Разность давлений в сечениях B и C находим из закона сохранения энергии для 1 см^3 воды:

$$P_B - P_C = \frac{1}{2} \rho v_C^2 - \frac{1}{2} \rho v_B^2 = 7000 \text{ г/(см} \cdot \text{с}^2)^1);$$

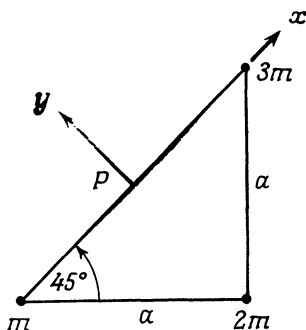
она должна быть равна разности давлений в трубках манометра, подсоединенных к B и C , которая определяется по высоте водяного столба ($\rho = 1$) между уровнями²⁾:

$$gh = P_B - P_C.$$

Следовательно,

$$h \approx 7 \text{ см.}$$

1.6.9. Поскольку рассматриваемые материальные точки рас-



положены в одной плоскости, то ось, перпендикулярная этой плоскости в точке P , является одной из главных осей инерции.

¹⁾ Это частный вид уравнения Бернулли для стационарного движения несжимаемой жидкости. — Прим. перев.

²⁾ Расчет справедлив для манометра, в котором плотность жидкости вдвое превышает плотность воды. В случае ртутного манометра следует применить формулу $(\rho_{рт} - \rho_{воды})gh = P_B - P_C$; тогда $\rho_{рт} - \rho_{воды} = 12,5$ и $h \approx 5,5$ мм. — Прим. перев.

Назовем ее осью z . Тогда момент инерции относительно этой оси записывается в виде

$$I_z = 3m \frac{a^2}{2} + 2m \frac{a^2}{2} + m \frac{a^2}{2} = 3ma^2. \quad (1)$$

Очевидно, второй главной осью инерции должна быть гипотенуза треугольника, так как вне ее расположена только одна материальная точка. Следовательно,

$$I_x = 2m \frac{a^2}{2} = ma^2. \quad (2)$$

Используя соотношение $I_x + I_y = I_z$, находим

$$I_y = 2ma^2.$$

1. 6.10.

а) Плотность гелия составляет примерно $1/7$ плотности воздуха. Поскольку шар находится в воздухе, простой путь решения задачи состоит в следующем: считать плотность шара равной $-6/7 \rho_{\text{возд}}$ и не обращать в дальнейшем внимания на присутствие воздуха. Действующее ускорение «свободного падения» шара равно в этом случае $-6/7 g$, а центробежное ускорение $-6a/7$, причем

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{100^2 \cdot 10^5}{3 \cdot 3600^2} = 25,7 \text{ см/с}^2.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{- (6/7) a}{- (6/7) g} = \frac{a}{g} = \frac{v^2}{gR} = \frac{25,7}{981} = 0,0262,$$

или

$$\theta = \operatorname{arctg} 0,0262 \approx 1^\circ 30'.$$

б) К центру кривизны пути.

1. 6.11. Пусть T — натяжение веревки. В состоянии равновесия $2T = W = 70$ кг. Отсюда $T = 35$ кг.

1. 7.1. Разложение функции $f(t)$ в ряд Фурье записывается в виде

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\omega t. \quad (1)$$

а) Прежде всего отметим, что в нашем случае $f(t)$ — четная функция времени t ; следовательно, все B_n должны обращаться в нуль. Кроме того, заданный сигнал является периодическим (с периодом T_1). Таким образом, мы имеем следующее условие:

$$f(t + T_1) = f(t). \quad (2)$$

Из (1) и (2) находим

$$\omega = \omega_1 \equiv \frac{2\pi}{T_1}, \quad (3)$$

и разложение (1) принимает вид

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{2\pi n t}{T_1} + \frac{A_0}{2}. \quad (4)$$

Нетрудно заметить, что сумма большого числа фурье-компонент с приблизительно одинаковыми амплитудами обращается в нуль, за исключением тех промежутков времени, где многие из этих компонент оказываются в фазе. В соответствии с заданной волновой картиной фурье-компоненты должны находиться в фазе лишь в течение тех промежутков времени, когда делятся хлопки, т. е. в промежутках

$$m_1 T_1 \leq t \leq m_1 T_1 + \Delta t, \quad m_1 = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

должно выполняться условие

$$\cos n\omega_1 t \approx 1.$$

Оно справедливо при

$$n\omega_1 \Delta t \ll 1 \quad \text{или} \quad n \ll \frac{1}{\omega_1 \Delta t}.$$

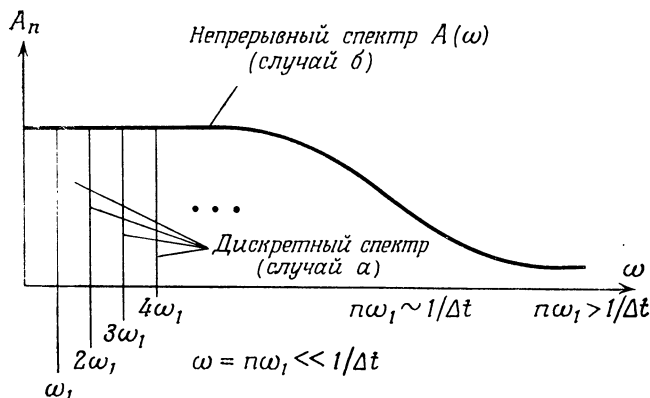
Таким образом, приходим к заключению, что

$$A_n \approx \text{const} \quad \text{при} \quad n \ll \frac{1}{\omega_1 \Delta t}.$$

Чтобы остальные компоненты не вызывали существенного искажения исходной волновой картины, они должны быть достаточно малыми:

$$A_n \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n > \frac{1}{\omega_1 \Delta t}.$$

В результате получаем следующее распределение:



б) Пусть T_2 — временной интервал, внутри которого можно услышать звук одиночного хлопка. Этот интервал может быть сколь угодно большим, но обязательно конечным. Если допустить, что в случае „а” интервал T_1 между двумя последовательными хлопками превышает T_2 , то к решению данной задачи можно применить результат, полученный выше. Однако в том случае, когда T_2 произвольно велико, частота ω_1 , определяемая формулой (3), становится весьма малой. Отсюда следует, что спектр одиночного хлопка является непрерывным.

К такому же выводу можно прийти, выполняя преобразование Фурье, т. е. записывая функцию $f(t)$ в виде

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} A(\omega) d\omega,$$

причем

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} e^{-i\omega t} dt.$$

Таким образом, мы и здесь получаем непрерывный спектр $A(\omega)$. Его поведение отражено выше на рисунке.

I. 7.2.

а) S — унитарная матрица, следовательно,

$$S^+ S = 1. \quad (1)$$

Подставляя сюда заданное в условии задачи соотношение

$$S = 1 - 2iT,$$

получаем

$$(1 + 2iT^+)(1 - 2iT) = 1$$

или

$$1 - 2i(T - T^+) + 4T^+ T = 1. \quad (2)$$

При $|T_{ij}| \ll 1$ членом $T^+ T$ можно пренебречь. Тогда выражение (2) принимает вид

$$T - T^+ = 0 \quad \text{или} \quad T = T^+,$$

т. е. T — эрмитова матрица.

б) Из выражения (2) имеем

$$i(T - T^+) = 2T^+ T. \quad (3)$$

Для упругих переходов ($a \rightarrow a$) равенство (3) можно переписать в виде

$$i(\langle a | T | a \rangle - \langle a | T^+ | a \rangle) = \sum_n 2 \langle a | T^+ | n \rangle \langle n | T | a \rangle,$$

где

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = 1,$$

поскольку $|n\rangle$ — полный набор промежуточных состояний.

Так как $T_{aa}^+ = T_{aa}^*$, то приведенное выше равенство принимает вид

$$i[\langle a|T|a\rangle - (\langle a|T|a\rangle)^*] = \sum_n 2\langle a|T^+|n\rangle\langle n|T|a\rangle.$$

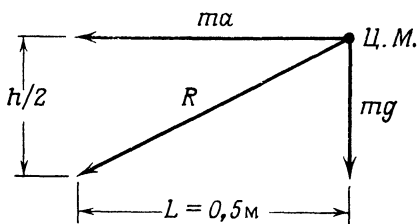
Используя соотношение

$$T_{ij} - T_{ij}^* = 2i \operatorname{Im} T_{ij},$$

получаем окончательно

$$\operatorname{Im} (\langle a|T|a\rangle) = - \sum_n (\langle n|T|a\rangle)^2.$$

I. 7.3.



Предельная высота кладки h соответствует случаю, когда результирующая сила R направлена в сторону нижнего ребра ящика: при большей высоте кладки ящик опрокидывается. Для моментов сил имеем

$$mgL = ma \frac{h}{2}, \quad \text{т. е.} \quad 9,8 \cdot 0,5 = 6 \frac{h}{2},$$

откуда $h = 1,6$ м.

I. 7.4.

а) В состоянии покоя вертикальная составляющая сил должна быть равна нулю:

$$mg + kx = 0.$$

Нам дано $x = -6$ см. Следовательно,

$$k = \frac{mg}{6}. \quad (1)$$

При возникновении собственных колебаний их период равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{6}{g}} \approx 0,5 \text{ с.}$$

б) Если пол вибрирует по закону $Ae^{i\omega_0 t}$, то уравнение движения записывается в виде

$$m\ddot{x} + kx = Ake^{i\omega_0 t}; \quad (2)$$

здесь мы приняли, что состоянию равновесия соответствует значение координаты $x = 0$. Перепишем уравнение (2), подставляя вместо k его выражение (1):

$$\ddot{x} + \frac{1}{6}gx = \frac{1}{6}Age^{i\omega_0 t}. \quad (3)$$

Это уравнение имеет стационарное решение

$$x = \frac{A}{1 - 6\omega_0^2/g} e^{i\omega_0 t}.$$

Следовательно, искомое отношение амплитуд при $\omega_0 = 40\pi$ рад/с равно

$$\frac{1}{|1 - 6\omega_0^2/g|} \approx 0,01.$$

1. 7.5.

а) При подъеме якоря возникает кориолисова сила

$$\mathbf{F} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v},$$

действующая на судно и вызывающая его движение.

б) Судно станет относить на запад.

в) Пусть v — скорость, с которой поднимают якорь на мачту. Тогда судно приобретает ускорение

$$a = \frac{2m\omega v}{m + M},$$

где m — масса якоря, M — масса судна. Высота мачты S и время T поднятия якоря связаны со скоростью v соотношением

$$S = \int_0^T v dt.$$

Конечная скорость судна равна

$$\begin{aligned} V &= \int_0^T a dt = \frac{2m\omega}{m + M} \int_0^T v dt = \frac{2m\omega}{m + M} S = \\ &= \frac{2 \cdot 200 \cdot 7,29 \cdot 10^{-5} \cdot 20}{1200} = 4,9 \cdot 10^{-4} \text{ м/с.} \end{aligned}$$

Здесь $7,29 \cdot 10^{-5}$ рад/с — угловая скорость вращения Земли ($\omega = 2\pi/T_3 = 6,283/86\,400$ рад/с = $7,29 \cdot 10^{-5}$ рад/с).

Другое решение.

в) Воспользуемся свойством сохранения момента импульса судна и якоря относительно центра масс Земли в инерциальной системе:

$$(M + m)\omega r^2 = [Mr^2 + m(r + S)^2]\omega'.$$

Отсюда

$$\omega' \approx \omega - \frac{2m\omega S}{(M + m)r},$$

и для скорости судна относительно воды получаем

$$\bar{V} = (\omega' - \omega)r = -\frac{2m\omega}{M + m}S \quad (\text{направлена на запад}).$$

г) Судно фактически теряет кинетическую энергию за счет работы, совершаемой против центробежной силы.

1. 7.6.

а) Пусть R_0 — длина пружины в свободном состоянии. Условие равновесия системы записывается в виде

$$k\left(\frac{L}{2} - R_0\right) = m_1g.$$

Следовательно,

$$R_0 = \frac{L}{2} - \frac{m_1g}{k}. \quad (1)$$

При растяжении пружины до длины R она запасает потенциальную энергию

$$\frac{k}{2}(R - R_0)^2 = \frac{k}{2}\left(R - \frac{L}{2} + \frac{m_1g}{k}\right)^2.$$

Потенциальная энергия стержня и кольца в поле силы тяжести

$$V = -m_1gR \cos \theta - \frac{1}{2}m_2gL \cos \theta.$$

При $\theta = 90^\circ$ эта потенциальная энергия принимается равной нулю.

Кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий вращательного и поступательного движения стержня и кольца:

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_1(\dot{R}_1^2 + R^2\dot{\theta}^2) = \frac{1}{6}m_2L^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_1(\dot{R}^2 + R^2\dot{\theta}^2).$$

Лагранжиан системы записывается в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = T - V = & \frac{1}{6}m_2L^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_1(\dot{R}^2 + R^2\dot{\theta}^2) + \left(m_1gR + m_2g\frac{L}{2}\right)\cos \theta - \\ & - \frac{k}{2}\left(R - \frac{L}{2} + \frac{m_1g}{k}\right)^2. \quad (2) \end{aligned}$$

б) Подставляя выражение (2) в уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{R}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R} = 0,$$

получаем уравнения движения

$$\left(m_1 R^2 + \frac{1}{3} m_2 L^2 \right) \ddot{\theta} + \left(m_1 R + m_2 \frac{L}{2} \right) g \sin \theta = 0, \quad (3)$$

$$m_1 \ddot{R} + (k - m_1 \dot{\theta}^2) R + m_1 g (1 - \cos \theta) - \frac{1}{2} k L = 0. \quad (4)$$

в) В случае малых колебаний $\theta \ll 1$ и $R - L/2 \ll L/2$. Поэтому в уравнении (3) можно положить $\sin \theta \approx \theta$, а в (4) $\cos \theta = 1$ и $\dot{\theta} = 0$. Таким образом, уравнения (3) и (4) принимают вид

$$\left(m_1 R^2 + \frac{1}{3} m_2 L^2 \right) \ddot{\theta} + \left(m_1 R + \frac{1}{2} m_2 L \right) g \theta = 0, \quad (5)$$

$$m_1 \ddot{R} + k \left(R - \frac{L}{2} \right) = 0. \quad (6)$$

Из последнего уравнения сразу находим частоту одной из нормальных мод:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}}.$$

1.8.1. Действительную и аналитическую функцию можно разложить в степенной ряд:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Отсюда следует, что при $x \rightarrow \infty$ все члены этого ряда, за исключением первого, неограниченно возрастают. Таким образом, если $f(x)$ — аналитическая функция при $x \rightarrow \infty$, то все коэффициенты a_n при возрастающих членах должны быть равны нулю. Поэтому

$$f(x) = a_0 = \text{const.}$$

1.8.2. Матрица преобразования при повороте системы координат записывается в виде

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}_{\theta=90^\circ} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через \mathbf{V}' и T' вектор \mathbf{V} и тензор T соответственно в новой системе координат. Тогда

$$\mathbf{V}' = R\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix},$$

$$T' = R^+ T R = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

I. 8.3. Если радиус-вектор \mathbf{r} отличен от нуля, то левую часть дифференциального уравнения $\nabla^2 f - \alpha^2 f = -4\pi\delta(\mathbf{r})$ можно записать в сферических координатах r , θ и φ . Мы имеем

$$\nabla^2 f - \alpha^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rf) + Lf - \alpha^2 f,$$

где L — оператор, зависящий от $\partial/\partial\theta$ и $\partial/\partial\varphi$. Поскольку $f = e^{-\alpha r}/r$, то $Lf \equiv 0$. Следовательно, при $r \neq 0$

$$\nabla^2 f - \alpha^2 f = \frac{1}{r} (-\alpha)^2 e^{-\alpha r} - \alpha^2 \frac{e^{-\alpha r}}{r} = 0. \quad (1)$$

Пусть теперь $r \rightarrow 0$; вычислим интеграл

$$I = \int (\nabla^2 f - \alpha^2 f) dV$$

по объему, ограниченному сферой радиусом a с центром в точке $r = 0$. В результате прямых вычислений и применения формулы для дивергенции имеем

$$I = \int (\nabla f \cdot d\mathbf{S}) - \alpha^2 \int f dV = 4\pi - \alpha a e^{-\alpha a} - \alpha^2 \int_0^a e^{-\alpha r} 4\pi r^2 dr.$$

В предельном случае, когда $a \rightarrow 0$,

$$I = -4\pi. \quad (2)$$

Учитывая совместно (1) и (2), получаем

$$\nabla^2 f - \alpha^2 f = -4\pi\delta(\mathbf{r}).$$

(Более подробное решение см. в задаче II. 2.1, разд. «Электричество и магнетизм».)

I. 8.4. Координаты x и y материальной точки зависят от L , $h(t)$ и θ :

$$\begin{aligned} x &= L \sin \theta, \\ y &= h(t) + L \cos \theta = h_0 \cos \omega t + L \cos \theta. \end{aligned} \quad (1)$$

Дифференцируя выражения (1) по t , получаем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{\theta} L \cos \theta, \\ \dot{y} &= -(\omega h_0 \sin \omega t + \dot{\theta} L \sin \theta). \end{aligned} \quad (2)$$

Кинетическая энергия материальной точки записывается в виде

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \\
 &= \frac{m}{2} (\dot{\theta}^2 L^2 \cos^2 \theta + \dot{\theta}^2 L^2 \sin^2 \theta + \omega^2 h_0^2 \sin^2 \omega t + 2\omega h_0 \dot{\theta} L \sin \theta \sin \omega t) = \\
 &= \frac{m}{2} (\dot{\theta}^2 L^2 + \omega^2 h_0^2 \sin^2 \omega t + 2\omega h_0 \dot{\theta} L \sin \theta \sin \omega t). \quad (3)
 \end{aligned}$$

Потенциальная энергия

$$V = mgy = mg(h_0 \cos \omega t + L \cos \theta). \quad (4)$$

Составляем лагранжиан системы:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = T - V &= \frac{m}{2} [\dot{\theta}^2 L^2 + \omega^2 h_0^2 \sin^2 \omega t + 2\omega h_0 \dot{\theta} L \sin \theta \sin \omega t - \\
 &\quad - 2g(h_0 \cos \omega t + L \cos \theta)]. \quad (5)
 \end{aligned}$$

Подставляя его в уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0,$$

находим уравнение движения

$$\begin{aligned}
 L^2 \ddot{\theta} + \omega^2 h_0 L \sin \theta \cos \omega t + \omega h_0 L \dot{\theta} \cos \theta \sin \omega t - \\
 - \omega h_0 L \dot{\theta} \cos \theta \sin \omega t - gL \sin \theta = 0,
 \end{aligned}$$

или

$$L \ddot{\theta} + \omega^2 h_0 \sin \theta \cos \omega t - g \sin \theta = 0.$$

Рассмотрим случай малых колебаний. Перейдем к переменной $\theta' = \theta - \pi$; тогда можно написать

$$\sin \theta = -\sin \theta' \approx -\theta',$$

и последнее уравнение движения принимает вид

$$L \ddot{\theta}' + (g - \omega^2 h_0 \cos \omega t) \theta' = 0.$$

Если шарнир закреплен неподвижно, т. е. $h_0 = 0$, то полученное уравнение совпадает с уравнением движения математического маятника.

1.8.5.

а) Нет, часы будут показывать разное время благодаря действию следующих эффектов:

- 1) ускорения Кориолиса $-2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$,
- 2) ослабления гравитационного притяжения с ростом высоты.
- 3) центростремительного ускорения $-v^2 \hat{\mathbf{r}}_1 / r$,

- 4) сил трения между воздухом и маятником,
 5) релятивистского эффекта $t = \tau / \sqrt{1 - (v/c)^2}$,
 6) ускорения при взлете и посадке,
 7) ускорения, связанного с орбитальным движением Земли,
 и т. д.

б) В качестве системы отсчета выберем инерциальную систему с началом координат в центре Земли. В этой системе кориолисова сила отсутствует. Действующее ускорение свободного падения $g_{\text{эфф}}$ для объекта, движущегося вблизи земной поверхности с угловой скоростью ω , дается выражением

$$g_{\text{эфф}} = -\frac{GM}{R^2} \hat{\mathbf{R}} - \omega \times (\omega \times \mathbf{R}) = \left(-\frac{GM}{R^2} + \omega^2 R\right) \hat{\mathbf{R}} \equiv -g \hat{\mathbf{R}},$$

т. е.

$$g_{\text{эфф}} \equiv g = \frac{GM}{R^2} - \omega^2 R = g_0 - \omega^2 R,$$

где $g_0 = GM/R^2$.

Период колебаний математического маятника равен, как известно, $T = 2\pi \sqrt{L/g}$, где L — длина маятника, которую мы считаем неизменной. Угловая скорость самолета З, летящего на запад, в инерциальной системе равна нулю. Поэтому период колебаний маятника в нем

$$\begin{aligned} T_3 &= 2\pi \sqrt{\frac{L}{g_0}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g + \omega^2 R}} = \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \sqrt{\frac{1}{1 + \omega^2 R/g}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R/g}}; \end{aligned} \quad (2)$$

здесь $T_0 = 2\pi \sqrt{L/g}$ — период колебаний часов, оставленных в аэропорту. Угловая скорость самолета В, летящего на восток, вдвое превышает угловую скорость вращения Земли. Следовательно,

$$\begin{aligned} T_B &= 2\pi \sqrt{\frac{L}{g_0 - 4\omega^2 R}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g - 3\omega^2 R}} = \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \sqrt{\frac{1}{1 - 3\omega^2 R/g}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - 3\omega^2 R/g}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Учитывая, что $\omega^2 R \ll g$, периоды колебаний обоих маятниковых часов в летящих самолетах можно приближенно представить следующими выражениями:

$$T_B = T_0 + \frac{1}{2} T_0 \frac{\omega^2 R}{g_0 - \omega^2 R} = T_0 + \frac{3\Delta T}{2}$$

и

$$T_3 = T_0 - \frac{1}{2} T_0 \frac{\omega^2 R}{g_0 - \omega^2 R} = T_0 - \frac{\Delta T}{2}.$$

Подставляя сюда $g = g_0 - \omega^2 R = 9,8 \text{ м/с}^2$, $R = 6 \cdot 10^6 \text{ м}$ и $T_0 = 24 \text{ ч}$ и учитывая, что $\omega = 2\pi/T_0$, получаем

$$\Delta T = \frac{4\pi^2 \cdot 6 \cdot 10^6}{9,8 \cdot 24 \cdot 3600} = 280 \text{ с.}$$

Поскольку $T_B > T_0$, часы В идут медленнее часов А, а поскольку $T_3 < T_0$, часы T_3 идут быстрее. По прибытии самолетов в аэропорт часы В отстанут на 420 с, а часы З уйдут вперед на 140 с относительно часов А, оставленных в аэропорту.

1. 8.6.

а) Поскольку Солнце представляет собой однородный шар, то сила равна

$$f = -G \frac{mM}{r^2}. \quad (1)$$

б) Согласно общей теории относительности, гравитационный потенциал записывается в виде

$$-\varphi = \frac{GM}{r} + \frac{A}{r^2}, \quad (2)$$

где A может зависеть только от c , G и M .

Пусть $D(A)$ — размерность параметра A . Из (2) приходим к следующему соотношению:

$$D(A) = D(GMr). \quad (3)$$

Используя соотношение

$$D\left(\frac{GmM}{r}\right) = D(mc^2) \equiv D(\text{энергия}),$$

получаем

$$D(r) = D\left(\frac{GM}{c^2}\right). \quad (4)$$

Из (3) и (4) имеем

$$D(A) = D\left(\frac{G^2 M^2}{c^2}\right).$$

Следовательно,

$$A \sim \frac{G^2 M^2}{c^2}.$$

в) Отношение второго члена к первому в формуле (2) равно

$$\frac{GM}{rc^2} = \frac{1,3 \cdot 10^{26}}{1,5 \cdot 10^{13} \cdot 9 \cdot 10^{20}} \approx 10^{-8}.$$

Для Земли эта величина очень мала. Только для Меркурия эта поправка является ощутимой.

II. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

ЗАДАЧИ

II. 1.1 (20 баллов).

- Каково отношение толщины скин-слоя в меди на частоте 1 кГц к его толщине на частоте 100 МГц?
- Чему равна напряженность электрического поля в лазерном пучке при плотности энергии в нем 10^6 Дж/см³?
- Как связаны между собой параметры R , L и C последовательного колебательного контура в случае критического затухания?

II. 1.2 (20 баллов). Предположим, что электрон колеблется с частотой $\omega = 10^{15}$ рад/с. Начальная амплитуда $A = 10^{-8}$ см.

- Вычислите энергию, излучаемую электроном за один период.
- Чему равно отношение энергии, излучаемой за один период, к средней механической энергии электрона?
- За какое время τ энергия электрона уменьшится вдвое?

II. 1.3 (20 баллов).

- Чему равна энергия взаимодействия двух параллельных диполей, расположенных на расстоянии d друг от друга? Предположите, что вектор, соединяющий оба диполя, перпендикулярен направлениям их дипольных моментов.
- Две проводящие сферы (радиусом R каждая) помещены в однородное электростатическое поле \mathbf{E} , направленное перпендикулярно линии, соединяющей обе сферы. Расстояние между центрами сфер равно d . Определите силу взаимодействия между сферами, считая $R \ll d$.

II. 1.4 (20 баллов). Имеется цилиндр радиусом a и длиной L , однородно заполненный полностью ионизованным газом, текущим со скоростью v вдоль оси цилиндра, с плотностью электрического заряда ρ .

- Определите магнитное поле на расстоянии r от оси цилиндра. (Краевыми эффектами пренебречь.)
- Предположим, что в цилиндр инжектируется параллельный пучок быстрых протонов массой m и начальной скоростью V' , направленной параллельно оси цилиндра. Такую систему можно использовать для фокусировки про-

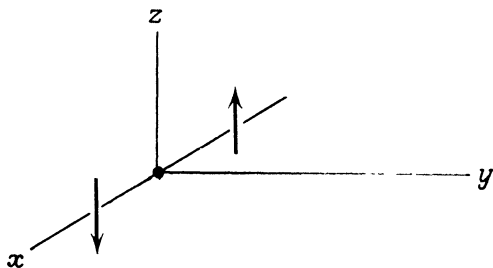
тонов в некоторую точку, расположенную на оси цилиндра. Определите фокусное расстояние f , предполагая $L \ll f$ и пренебрегая электростатическими и релятивистскими эффектами. (Фокусное расстояние f — это расстояние от конца цилиндра до фокуса.)

II.1.5 (20 баллов). Вычислите поле равномерно движущегося точечного заряда, применяя к 4-вектору потенциала (A_x, A_y, A_z, iV) преобразование Лоренца от системы отсчета, связанной с зарядом, к лабораторной системе отсчета.

II.2.1 (15 баллов). Докажите, что $\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r}|} = -4\pi\delta(\mathbf{r})$.

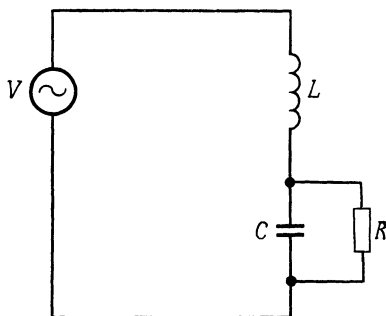
II.2.2 (15 баллов). Четыре положительных заряда и столько же отрицательных зарядов расположены по одному в вершинах куба. Знаки зарядов чередуются от вершины к вершине, так что ближайšie к каждому заряду три других заряда противоположны ему по знаку. Как зависит от расстояния результирующее электростатическое поле в точках, значительно удаленных от этой системы?

II.2.3 (15 баллов). Два электрических диполя, расположенные на оси x и противоположно ориентированные вдоль оси z , осциллируют точно в противофазе. Их x -координаты отличаются на $\lambda/2$. Вычислите вектор Пойнтинга на больших расстояниях от этой системы.



II.2.4 (15 баллов). Две одинаковые круговые петли из сверхпроводника, обладающие каждая индуктивностью L , расположены коаксиально на большом расстоянии друг от друга. В каждой петле в одном и том же направлении течет ток I . Петли затем совмещают. Каков будет результирующий ток $I'_{1,2}$ в каждой петле? Чему равны энергии системы в исходном и конечном состояниях? Какие переходы энергии при этом происходят?

II. 2.5 (15 баллов). В изображенной ниже электрической цепи, запатентованной Штейнмецем¹⁾, частота приложенного переменного напряжения V равна $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Определите зависимость тока, протекающего через резистор, от этого напряжения и параметров цепи.



II. 2.6 (15 баллов). Плоская электромагнитная волна падает нормально на проводник, диэлектрическая и магнитная проницаемости которого принимаются такими же, как у свободного пространства. Частота волны и проводимость проводника таковы, что величины токов проводимости и смещения внутри проводника равны друг другу. Определите коэффициент отражения волны, т. е. отношение энергии отраженной волны к энергии падающей волны.

II. 2.7 (10 баллов). Незаряженная проводящая сфера помещена в однородное электрическое поле. Запишите в полярных координатах возмущение поля, вызванное сферой, в произвольных точках пространства вне сферы.

II. 3.1 (20 баллов). Согласно классической теории, электрон вращается по круговой орбите вокруг протона. Исходя из классической теории излучения, получите дифференциальное уравнение, описывающее изменение энергии электрона. Используя найденное уравнение, вычислите ориентировочно время «падения» слабо связанного (почти свободного) электрона на первую боровскую орбиту.

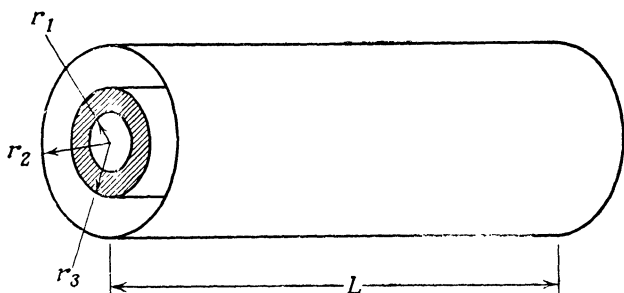
II. 3.2 (20 баллов). Какому распределению зарядов соответствует сферически симметричный потенциал $V(r) = e^{-\lambda r}/r$?

II. 3.3 (10 баллов). Плоская электромагнитная волна с напряженностью электрического поля $E = 10^6$ ед. СГСЭ падает

¹ Чарлз (Карл) Штейнмец (1865—1923) — широко известный на рубеже XIX—XX вв. теоретик и практик в области электротехники. — *Прим. перев.*

нормально на плоскую поверхность диэлектрика, диэлектрическая проницаемость которого $\varepsilon = 1,44$. Вычислите давление волны на поверхность. (Показатель преломления n полагайте равным $\sqrt{\varepsilon}$.)

II.3.4 (20 баллов). Обкладки конденсатора (см. рисунок) представляют собой два concentрических цилиндра радиусами r_1 и r_2 ($r_1 < r_2$) и длиной $L \gg r_2$. Область, ограниченная радиусами r_1 и $r_3 = \sqrt{r_1 r_2}$, заполнена диэлектриком с диэлектрической постоянной K (в образовавшемся зазоре — воздух).



- Какова емкость такого конденсатора?
- Чему равны величины E , P и D внутри диэлектрика ($r_1 < r < r_3$) и в воздушном зазоре ($r_3 < r < r_2$) на расстоянии r от оси конденсатора, если разность потенциалов на обкладках конденсатора равна V ?
- Какую работу нужно затратить, чтобы удалить из конденсатора диэлектрик при условии, что разность потенциалов на обкладках конденсатора поддерживается постоянной?

II.3.5 (10 баллов). На кольцевой железный сердечник радиусом d и площадью поперечного сечения A ($d^2 \gg A$) намотана катушка из N витков провода. Предположите, что магнитная проницаемость железа $\mu = \text{const} \gg 1$.

- Как зависит магнитный поток в сердечнике $\Phi = \int B_n dA$ от тока I , протекающего через катушку?
- Если в сердечнике сделать зазор шириной δ ($\delta^2 \ll A$), то каким станет магнитный поток при той же величине тока I ?
- Какова энергия магнитного поля в сердечнике, в зазоре?
- Вычислите индуктивность катушки при наличии зазора.

II.3.6 (20 баллов). Круговая петля радиусом a расположена концентрически в плоскости другой, значительно большей петли радиусом b ($a \ll b$). Большая петля закреплена неподвижно, и по ней протекает постоянный ток I , а меньшую петлю вращают вокруг диаметра с угловой частотой ω (ее электрическое сопротивление равно R , а индуктивность пренебрежимо мала).

а) Определите, как зависит ток в малой петле от времени.

б) Найдите, какой момент силы должен быть приложен к малой петле, чтобы привести ее во вращение с указанной частотой?

в) Определите э. д. с., индуцируемую в большой петле, как функцию времени.

II.4.1 (5 баллов). Вычислите энергию взаимодействия E трех зарядов q , q и $-q$, расположенных в вершинах равностороннего треугольника с длиной сторон a .

II.4.2 (5 баллов). Каков порядок величины отношения сил электростатического и гравитационного притяжения между протоном и электроном?

II.4.3 (5 баллов). Точечный заряд q находится на расстоянии d от проводящей плоскости. Какую энергию нужно затратить, чтобы удалить его на бесконечное расстояние от плоскости?

II.4.4 (5 баллов). Некоторое распределение зарядов создает однородное электрическое поле E_0 , направленное по оси x . В это поле в плоскости $x = 0$ вводят гонкую пластинку с поверхностной плотностью заряда σ . Предполагая, что введение пластинки не нарушает исходного распределения зарядов, найдите результирующее поле по обе стороны от пластинки.

II.4.5 (5 баллов). Рассмотрим две концентрично расположенные металлические сферы радиусами r_1 и r_2 ($r_2 > r_1$). Наружная сфера несет заряд q , а внутренняя сфера заземлена. Чему равен заряд на внутренней сфере?

II.4.6 (5 баллов). Определите распределение магнитного поля внутри длинного прямолинейного однородного проводника радиусом R , по которому течет ток I .

II.4.7 (5 баллов). На два одинаковых железных тороидальных сердечника намотано соответственно N и $2N$ витков одного и того же провода. Предположим, что на вторую обмотку ушло ровно вдвое больше провода, чем на первую. Соединим обе обмотки последовательно. Каково будет отношение напряжений на обмотках, когда в них течет

- а) постоянный ток?
- б) переменный ток высокой частоты?

II.4.8 (5 баллов). На расстоянии d от плоской границы среды из мягкого железа, заполняющего полупространство, расположен параллельно ей тонкий длинный проводник с током I . Предположите, что магнитная проницаемость железа бесконечно велика ($\mu = \infty$). Определите силу, действующую на единицу длины проводника. Является ли она притягивающей или отталкивающей?

II.4.9 (5 баллов). Однородно намагниченная бусинка объемом V расположена в центре круговой петли радиусом r , по которой протекает ток I . Магнитный момент единицы объема бусинки направлен параллельно плоскости петли и равен M . Определите вращающий момент, действующий на петлю.

II.4.10 (5 баллов). К рельсам железнодорожного пути, изолированным от земли и друг от друга, подключен милливольтметр. Определите его показания, когда по ним идет поезд со скоростью 180 км/ч. Предположите, что вертикальная составляющая магнитного поля Земли равна 0,2 Гс, а расстояние между рельсами $L = 1$ м.

II.4.11 (5 баллов). Электрический диполь p помещен в постоянное электрическое поле E под углом α к направлению поля. Какую нужно затратить работу, чтобы повернуть диполь вокруг перпендикулярной ему оси на 180° ?

II.4.12 (5 баллов). В однородное электрическое поле E_0 вдоль его направления помещен очень длинный тонкий стержень с диэлектрической проницаемостью K . Определите напряженность поля E и электрическую индукцию D внутри стержня.

II.4.13 (5 баллов). Как связаны между собой параметры R , L и C последовательного колебательного контура в случае критического затухания?

II.4.14 (5 баллов). Освещенность земной поверхности равна в среднем $1,3 \cdot 10^3$ Дж/(м²·с). Каковы амплитуды полей E в В/м и B в Вб/м², если предположить, что земная поверхность освещается монохроматическим светом?

II.4.15 (5 баллов). На границе раздела двух диэлектриков имеется поверхностный заряд плотностью σ . Напишите граничные условия для компонент вектора напряженности электрического поля.

II.4.16 (5 баллов). Как зависит от расстояния r потенциал электрического поля диполя?

II.4.17 (5 баллов). Чему ориентировочно равна напряженность магнитного поля Земли на ее поверхности?

II.4.18 (5 баллов). Чему равен электрический потенциал внутри изолированной проводящей сферы радиусом R , которой сообщен заряд Q ?

II.4.19 (5 баллов). Напишите выражения для плотностей энергии и импульса электромагнитного поля в вакууме.

II.4.20 (5 баллов). Определите величину и направление вектора Пойнтинга на поверхности длинного прямолинейного проводника кругового сечения, по которому течет постоянный ток I . Радиус провода b , а сопротивление провода на единицу длины равно R .

II.5.1 (5 баллов). Каким сопротивлением — емкостным или индуктивным — обладает параллельный LC -контур на частоте ω ниже резонансной ω_0 ?

II.5.2 (5 баллов). Определите силу, действующую на электрический диполь в однородном электрическом поле.

II.5.3 (5 баллов). N идентичных конденсаторов соединены параллельно и подключены к источнику напряжения V . Затем их отключают от источника, разъединяют и, не разряжая, вновь соединяют, но последовательно. Определите результирующее напряжение на конденсаторах.

II.5.4 (5 баллов). Две одинаковые катушки, каждая из которых обладает индуктивностью L , соединены последовательно и расположены так близко друг от друга, что магнитный поток одной катушки полностью пронизывает другую. Чему равна общая индуктивность такой цепи?

II.5.5 (5 баллов). Изолированный металлический объект заряжают в вакууме до потенциала V_0 , и он запасает электрическую энергию W_0 . Затем объект отключают от источника потенциала (заряд объекта при этом не изменяется) и погружают в диэлектрическую среду, занимающую большой объем и характеризующуюся диэлектрической проницаемостью K . Какова будет теперь энергия электрического поля?

II.5.6 (5 баллов). Как изменяется с расстоянием r от источника напряженность электрического поля сферической электромагнитной волны при больших значениях r ?

II.5.7 (5 баллов). Электромагнитная волна падает нормально на идеальную проводящую поверхность. Изменяются ли при отражении волны фазы векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} на 180° ? Если да, то какого из них?

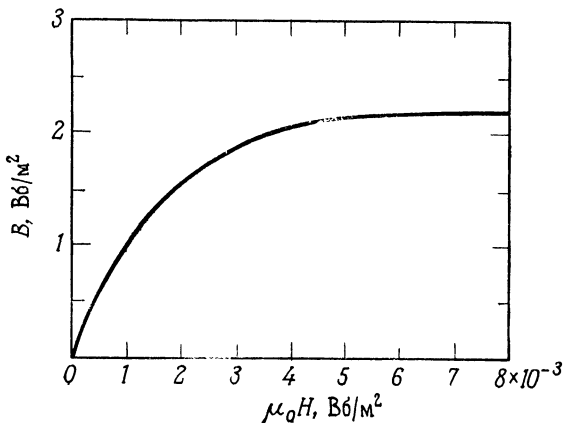
II.5.8 (5 баллов). Центры двух металлических сфер радиусом R каждая отстоят друг от друга на расстоянии d ($d > 2R$). Заряд одной из сфер равен Q , а другой $-Q$. Будет ли сила взаимодействия между ними больше, равна или меньше силы взаимодействия точечных зарядов Q и $-Q$, разнесенных на то же расстояние d ?

II.5.9 (5 баллов). Напишите выражение для силы взаимодействия (отнесенной к единице длины) двух длинных параллельных проводов с токами I , текущими в одном и том же направлении; расстояние между проводами d . Является ли эта сила притягивающей или отталкивающей?

II.5.10 (5 баллов). Лабораторный кольцевой электромагнит имеет диаметр полюсов сердечника 15 см, воздушный зазор между ними 1 см и длину магнитопровода 1 м. Обмотка магнита состоит из 22 000 витков медного провода.

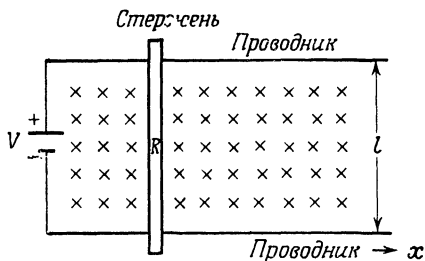
а) Вычислите магнитную индукцию в зазоре в единицах $\text{Вб}/(\text{м}^2 \cdot \text{А})$, т. е. отнесенную к току 1 А, при условии, что начальная магнитная проницаемость сердечника равна 1000.

б) При токах свыше 0,5 А происходит насыщение сердечника. Оцените магнитную индукцию в зазоре при токе 1 А, пользуясь приведенным на рисунке графиком $B(H)$.



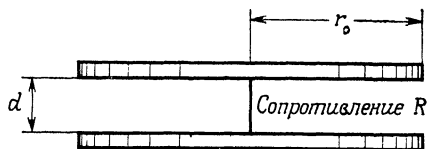
II.5.11 (20 баллов). Рассмотрим простой преобразователь электрической энергии в механическую, схематически показанный ниже на рисунке. К источнику напряжения V подключены два длинных параллельных проводника с нулевым сопротивлением, расположенных на расстоянии l один от другого. Их замыкает скользящий вдоль них стержень, обладающий сопротив-

лением R , который движется параллельно самому себе и остается перпендикулярным проводникам. Перпендикулярно плоскости проводников приложено внешнее однородное магнитное поле B .



- Чему равна установившаяся скорость стержня в отсутствие внешней механической нагрузки?
- Получите выражение для скорости движения стержня в зависимости от времени, считая массу стержня равной m , а началом движения момент $t = 0$.
- Определите установившуюся скорость стержня в случае, когда к нему приложена сила F в направлении, противоположном движению.
- Чему в случае «в» равен к. п. д. преобразователя, т. е. какая часть электрической энергии, отбираемой от источника напряжения, преобразуется в механическую работу?

II. 5.12 (20 баллов). Пластинами плоского конденсатора служат два диска радиусом r_0 с небольшим зазором шириной d ($d \ll r_0$). Пластинам сообщены заряды Q_0 и $-Q_0$. В момент времени $t = 0$ центры пластин соединяют тонким прямым проводом, имеющим сопротивление R . Пусть R столь велико, что индуктивностью цепи можно пренебречь, а поле между пластинами в любой момент времени можно считать однородным.



- Найдите зависимость заряда на каждой пластине конденсатора от времени.
- Определите ток $i(t)$, протекающий через круговое сечение радиусом ρ ($\rho < r_0$) любой из пластин. (Сечение

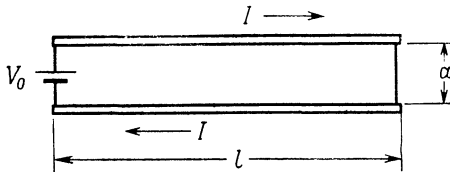
является концентрическим относительно пластины конденсатора.)

в) Получите зависимость магнитного поля между пластинами от времени и от радиальной координаты.

г) Объясните подробно, почему только азимутальная компонента магнитного поля отлична от нуля.

II.5.13 (10 баллов). Световая волна имеет частоту $f = 4 \cdot 10^{14}$ Гц и длину волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м. Какова скорость распространения этой волны? Чему равен показатель преломления среды n , в которой она распространяется? Какова длина волны света λ_0 , после того как он вышел из данной среды и стал распространяться в воздухе?

II.6.1 (20 баллов). Система, показанная на рисунке, состоит из двух плоских проводящих пластин длиной l , шириной b (в направлении, перпендикулярном рисунку) и зазором a между ними ($a \ll b, l$). Справа пластины закорочены, а слева к ним мгновенно подключают источник напряжения V_0 . Будем предполагать, что ток в пластинах протекает только по направлению l . Всеми сопротивлениями и всеми эффектами, связанными с конечной скоростью распространения электромагнитных полей, можно пренебречь.



а) Определите зависимость магнитного поля B в зазоре между пластинами от тока I , протекающего в цепи.

б) Чему равна индуктивность цепи?

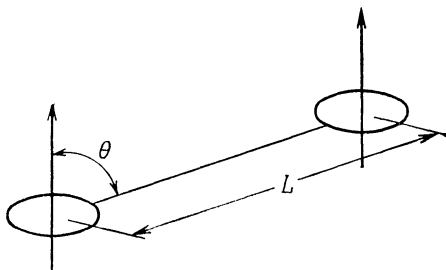
в) Найдите зависимость тока в цепи от времени.

г) Чему равно напряжение на пластинах на расстоянии x от закороченного конца?

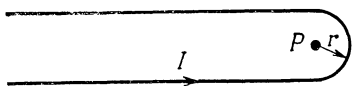
д) Каков поток энергии в системе на расстоянии x от закороченного конца?

II.6.2 (20 баллов). В двух круговых петлях радиусами R и расстоянием между центрами L ($L \gg R$) протекают в одном и том же направлении равные токи I . Определите вращательный момент, действующий на петли и силу взаимодействия между ними

в зависимости от угла θ , образованного осями петель с направлением L .



II. 6.3 (10 баллов). Длинный провод изогнут подобно шпильке для волос, как показано на рисунке. Получите точное выражение для магнитного поля в точке P , находящейся в центре полуокружности.



II. 6.4 (20 баллов). Определите самую низкочастотную моду электромагнитных колебаний в прямоугольном объемном резонаторе со сторонами $a > b > d$ и идеально проводящими стенками. Найдите соответствующую ей резонансную частоту и опишите зависимость поля от пространственных координат.

II. 6.5 (20 баллов). Плоская электромагнитная волна частотой ω падает нормально на поверхность немагнитного металла, имеющего проводимость σ .

а) Напишите дифференциальное уравнение в частных производных для магнитного поля внутри металла. Частоту ω считайте достаточно низкой, так что токами смещения внутри металла можно пренебречь.

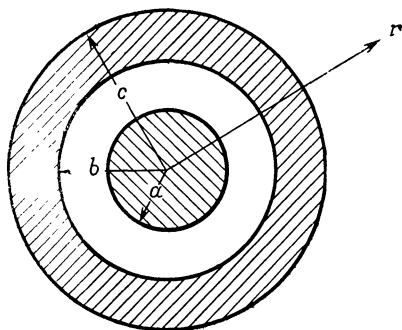
б) Задайте граничные условия для тангенциальных компонент E^t и H^t электрического и магнитного полей на поверхности.

в) Пользуясь формулой $\mathbf{E}^t = Z\mathbf{H}^t \times \hat{\mathbf{n}}$, где $\hat{\mathbf{n}}$ — единичный вектор нормали к поверхности, найдите выражение для поверхностного импеданса $Z(\sigma, \omega)$.

II. 6.6 (10 баллов). По прямолинейному круглому проводу с однородной проводимостью σ и площадью поперечного сечения A течет постоянный ток I . Определите направление и величину вектора Пойнтинга на поверхности провода. Возьмите интеграл от нормальной компоненты вектора Пойнтинга по поверхности

провода на отрезке длиной L и сравните полученный результат с количеством джоулева тепла, выделяемого током на этом отрезке.

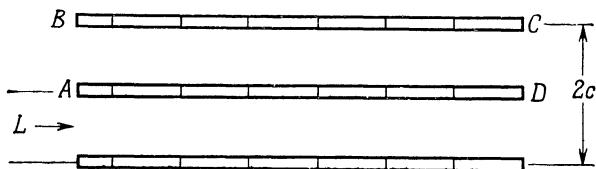
II.7.1 (20 баллов). По центральному проводнику длинного коаксиального кабеля (на рисунке показано поперечное сечение такого кабеля) и по наружному цилиндрическому проводнику текут одинаковые по величине, но противоположно направленные токи I .



а) Определите распределение магнитного поля в четырех различных областях:

- 1) $r < a$,
- 2) $a < r < b$,
- 3) $b < r < c$,
- 4) $r > c$.

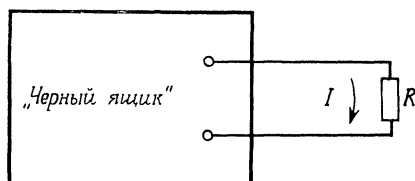
б) Вычислите индуктивность L отрезка этого кабеля длиной 10 см (толщиной цилиндрического проводника можно пренебречь, полагая $c \gg a$ и $c \gg c - b$).



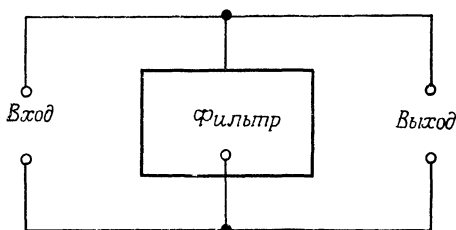
II.7.2 (20 баллов).

а) «Черный ящик» содержит источники неизвестного напряжения и резисторы с неизвестными сопротивлениями. Схема соединения их не дана. Известно лишь, что если подключить к выходным клеммам черного ящика

резистор с сопротивлением $R = 10$ Ом, то через него будет протекать ток силой 1 А, а при подключении резистора с сопротивлением $R = 18$ Ом ток составит 0,6 А. Определите, какое сопротивление должен иметь подключенный резистор, чтобы ток стал равным 0,1 А.



б) Предложите простой фильтр, способный сильно ослабить пульсации напряжения частотой 60 Гц на выходе электрической цепи, приведенной на рисунке¹⁾.



II.7.3 (20 баллов). Центры двух магнитных диполей μ_1 и μ_2 находятся на фиксированном расстоянии r друг от друга. Диполи могут свободно вращаться вокруг своих центров.

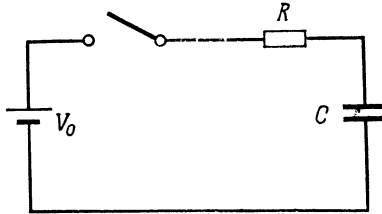
а) Покажите расположение диполей, соответствующее максимальной энергии $E_{\text{макс}}$ взаимодействия между ними, и вычислите эту энергию.

б) Покажите взаимное расположение диполей, соответствующее минимальной энергии $E_{\text{мин}}$, и вычислите эту энергию.

II.7.4 (10 баллов). Конденсатор $C = 1$ мкФ мгновенно подключают к источнику постоянного напряжения $V_0 = 100$ В через

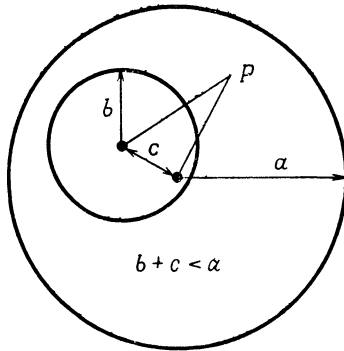
¹⁾ Для определенности предположите, что к входным клеммам подключен либо генератор тока (обладающий, согласно определению, бесконечным внутренним сопротивлением), либо генератор э. д. с. с конечным внутренним сопротивлением. — *Прим. перев.*

резистор $R = 100$ Ом. За какой промежуток времени конденсатор зарядится до напряжения 50 В?



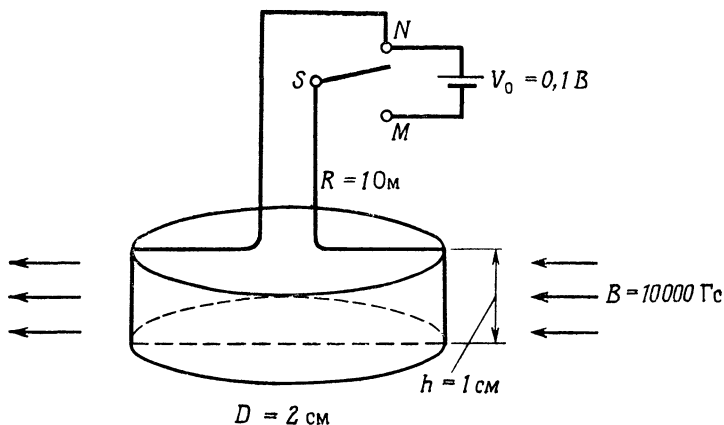
II. 7.5 (10 баллов). Электрон влетает в однородное магнитное поле $H = 10^4$ Э под углом 45° со скоростью $v = 10^4$ см/с. Рассчитайте полностью все последующее движение электрона. (Имейте в виду, что нужно получить точные количественные характеристики этого движения.)

II. 7.6 (20 баллов). Длинный прямолинейный проводник радиусом a имеет внутри круглое отверстие радиусом b , вытянутое параллельно оси проводника, но смещенное относительно этой оси на расстояние c , причем $b + c < a$. В проводнике течет ток I , равномерно распределенный по его сечению. Определите магнитное поле в произвольной точке пространства.



II. 8.1 (20 баллов). Пластмассовый диск диаметром $D = 2$ см, высотой $h = 1$ см и плотностью $\rho = 1$ г/см³ плотно огибает рамка из латунного провода с общим сопротивлением $R = 1$ Ом. В подвешенном состоянии эта система представляет собой крутильный маятник без трения с периодом колебаний $T = 10$ с. В исходном состоянии диск покоится в однородном магнитном поле $B = 10\,000$ Гс, направленном параллельно плоскости рамки (как показано на рисунке). В момент $t = 0$ переключатель S

переводят в положение M , и на рамку подается напряжение $V_0 = 0,1$ В. Затем в момент времени $t = T_1 = 10^{-4}$ с переключатель ставят в исходное положение N . Определите зависи-



мость амплитуды колебаний маятника (в радианах) от времени t .

II. 8.2 (20 баллов). Имеется ящик, снабженный двумя клеммами. Известно, что в нем находятся катушка индуктивности с пренебрежимо малым сопротивлением, конденсатор и резистор. Если на клеммы подать постоянное напряжение 100 В, то через них потечет ток силой 0,1 А. При подаче же на них переменного напряжения 100 В частотой 60 Гц ток равен 1 А. Если амплитуду переменного напряжения поддерживать постоянной, а частоту его повышать, то при частоте 1000 Гц ток очень сильно возрастает. Как соединены упомянутые три элемента внутри ящика и каковы значения их параметров?

II. 8.3 (20 баллов). Исходя из уравнений Максвелла, получите выражение, описывающее распространение плоской электромагнитной волны с частотой ω в неограниченной среде, имеющей проводимость σ , диэлектрическую и магнитную проницаемости ϵ и μ .

II. 8.4 (10 баллов). Какой минимальной энергией (в МэВ) должен обладать протон, чтобы при столкновении его с дейтроном образовалась пара протон — антипротон?

II. 8.5 (10 баллов). Катушку индуктивности L мгновенно подключают через резистор R к батарее с напряжением V . Определите стационарное значение тока в цепи. Через какой промежуток времени ток в цепи нарастет до половины стационарного значения?

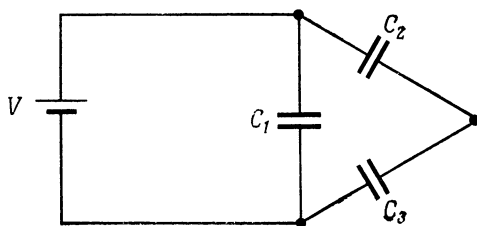
II.8.6 (20 баллов). Запишите выражения для скалярного и векторного потенциалов, соответствующие следующему магнитному полю:

$$\mathbf{B} = k(y\hat{\mathbf{i}} + x\hat{\mathbf{j}}).$$

II.9.1 (15 баллов). В длинной трубке, содержащей полностью ионизованный газ (водород), вдоль ее оси движутся электроны со средней скоростью 10^5 см/с, образуя цилиндрический пучок диаметром 50 см. Полный ток пучка равен 10^4 А. Определите величину и направление силы F , действующей на отдельный электрон на боковой поверхности пучка.

II.9.2 (20 баллов). Эффективная проводимость среды, содержащей N электронов в одном кубическом метре, определяется формулой $\sigma = -iNe^2/\omega m$, где e и m — заряд и масса электрона. Пользуясь уравнениями Максвелла, получите выражение для скорости распространения электромагнитных волн в этой среде, а из него — показатель преломления среды. Объясните, как эта задача связана с отражением радиоволн от ионосферы.

II.9.3 (10 баллов). Электрическая цепь подключена к источ-

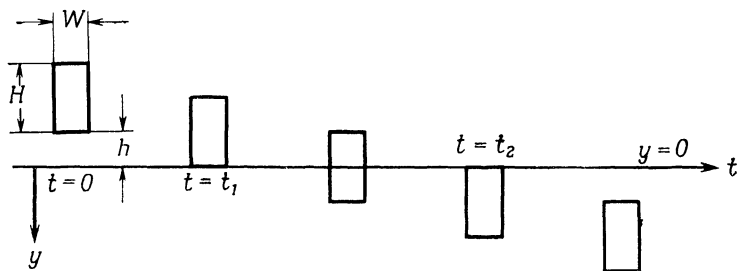


нику напряжения V . Определите электрическую энергию, запасенную в этой цепи.

II.9.4 (5 баллов). Чему равна (с точностью до двух порядков) величина остаточного давления газа внутри электронной лампы в миллиметрах ртутного столба?

II.9.5 (20 баллов). Прямоугольная замкнутая проволочная рамка имеет высоту H и ширину W . В момент времени $t = 0$ она начинает свободно падать. В начальный момент времени нижняя сторона рамки находится на высоте h над плоскостью $y = 0$. Выше этой плоскости магнитное (и электрическое) поле отсутствует, а ниже ее имеется однородное магнитное поле B , перпендикулярное плоскости рисунка и направленное на читателя. Масса рамки m , сопротивление R . Определите движение рамки во времени. Найдите скорость рамки v и постройте ее

зависимость от времени t . Особый интерес представляет движение в промежутках времени от $t=0$ до t_1 , от t_1 до t_2 и при $t > t_2$. Как изменится движение рамки, если увеличить пропорционально размеры H и W , оставляя неизменной толщину провода, из которой сделана рамка?



II. 9.6 (10 баллов). Точечный заряд q (измеряемый в кулонах) расположен на расстоянии d от неограниченной проводящей заземленной пластины. Восстановите нормаль от поверхности пластины к точке расположения заряда. Найдите плотность зарядов, индуцированных на поверхности пластины, как функцию расстояния r от этой нормали.

II. 9.7 (20 баллов). Пластины плоского конденсатора, имеющие форму квадрата со стороной 1 м, расположены на расстоянии 1 см друг от друга. Разность потенциалов между пластинами 1000 В.

а) Определите силу (в ньютонах), действующую между пластинами.

б) Пренебрегая краевыми эффектами, вычислите плотность заряда на пластинах (в кулонах на квадратный метр).

II. 10.1 (20 баллов). При комнатной температуре измеряют проводимость следующих материалов: меди высокой чистоты, германия n -типа и ниобия. Затем образцы погружают в жидкий гелий (при температуре 4 К) и снова проводят измерения. Изменится ли проводимость каждого материала? (Дайте лишь качественное объяснение.) В какую сторону? Почему?

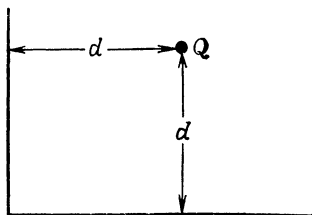
II. 10.2 (20 баллов). По тонкостенному проводящему цилиндру диаметром 10 см течет ток. Этот цилиндр расположен внутри другого проводящего цилиндра диаметром 20 см. Оба цилиндра являются концентрическими.

а) Вычислите индуктивность единицы длины такой системы, предполагая, что по внешнему цилиндру течет такой же по величине ток, что и по внутреннему цилиндру,

но в противоположном направлении и что оба цилиндра являются частью последовательной электрической цепи.

б) Выясните, стремится ли сила, действующая на внешний цилиндр, расширить или сжать его. (Обоснуйте ваш ответ.)

II.10.3 (20 баллов). Электрический заряд Q расположен на одном и том же расстоянии d от двух взаимно перпендикулярных бесконечных проводящих плоскостей. Определите потенциал поля в произвольной точке пространства.



II.10.4 (20 баллов). Тороидальный сердечник изготовлен из согнутого в кольцо стержня диаметром 1 см и длиной 1 м. На него равномерно намотана обмотка с плотностью 100 витков/см. Магнитную проницаемость стержня считайте равной проницаемости свободного пространства.

а) Каково магнитное поле в сердечнике, если через обмотку течет ток силой 100 А?

б) Найдите индуктивность обмотки (в генри), предполагая, что намотка является очень плотной и ее толщиной можно пренебречь;

в) Вычислите электрическую энергию, затрачиваемую на создание магнитного поля в сердечнике при токе силой 100 А;

г) Определите по известным значениям B и H энергию магнитного поля, сосредоточенного в сердечнике.

Пренебречь радиальным изменением поля, считать его однородным и равным по величине полю в центре сердечника. Указать всюду единицу измерения.

II.10.5 (20 баллов). Два конденсатора различной емкости C_1 и C_2 заряжены порознь от одного и того же источника напряжения V . Затем положительно заряженную обкладку одного конденсатора соединяют с отрицательно заряженной обкладкой другого конденсатора. Оставшиеся свободными обкладки затем соединяют между собой.

а) Определите результирующий заряд на каждом конденсаторе.

б) Вычислите изменение энергии электрического поля.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

II. 1.1.

а) Толщина скин-слоя определяется выражением

$$\delta = c/\sqrt{2\pi\mu\omega\sigma},$$

т. е. она обратно пропорциональна квадратному корню из частоты. Следовательно, мы имеем

$$\delta_1/\delta_2 = \sqrt{\omega_2/\omega_1} = \sqrt{10^8/10^3} \approx 300.$$

б) Плотность энергии лазерного луча связана с пиковым значением электрического поля E соотношением

$$\text{Плотность энергии} = E^2/8\pi.$$

Отсюда находим $E = \sqrt{8\pi \cdot 10^{13}} = 1,6 \cdot 10^7$ ед. СГСЭ $= 4,8 \cdot 10^{11}$ В/м.

в) Уравнение колебательного контура записывается в виде

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = 0. \quad (1)$$

Дифференцируя его по времени t , получаем следующее уравнение:

$$L \frac{d^2I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0. \quad (1a)$$

Ищем решение в виде

$$I = A_0 e^{-i\delta t}.$$

После подстановки его в уравнение получаем

$$L\delta^2 + R\delta i - \frac{1}{C} = 0.$$

Решения последнего уравнения записываются в виде

$$\delta = \frac{-iR \pm \sqrt{-R^2 + 4L/C}}{2L}.$$

Критическому затуханию соответствует условие

$$R^2 - 4L/C = 0.$$

II. 1.2. Пусть

$$x = A \sin \omega t.$$

Тогда энергия колебаний электрона массой m равна

$$E = \frac{1}{2} mA^2\omega^2, \quad (1)$$

откуда находим

$$A = \sqrt{2E/m\omega^2}. \quad (2)$$

Мощность излучения дается выражением

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2}{3c^3} e^2 a^2, \quad (3)$$

где $a = -A\omega^2 \sin \omega t$. Подставляя сюда выражение (2) для A и усредняя по периоду, получаем

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{1}{2} \omega^4 \frac{2E}{m\omega^2} = -\frac{2}{3} \frac{e^2 \omega^2}{mc^3} E. \quad (4)$$

Следовательно, энергия электрона зависит от времени t следующим образом:

$$E = E_0 \exp\left(-\frac{2e^2\omega^2}{3mc^3} t\right). \quad (5)$$

а)
$$\begin{aligned} \Delta E &\approx \Delta t \left\langle \frac{2e^2 a^2}{3c^3} \right\rangle = \frac{2\pi}{\omega} \frac{A^2}{3c^3} e^2 \omega^4 = \\ &= \frac{2\pi A^2 e^2 \omega^3}{3c^3} = \frac{10^{-16} \cdot 2\pi (4,8)^2 \cdot 10^{-20} \cdot 10^{45}}{3 \cdot 27 \cdot 10^{30}} = \\ &= 1,8 \cdot 10^{-21} \text{ эрг} = 1,1 \cdot 10^{-9} \text{ эВ}. \end{aligned}$$

б) Средняя механическая энергия электрона равна сумме средней кинетической и средней потенциальной энергий. Находим

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} mA^2\omega^2;$$

здесь $v = \omega A$ — максимальная скорость электрона. Отношение излучаемой за период энергии к средней механической энергии составляет

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{2\pi}{\omega} \frac{A^2}{3c^3} e^2 \omega^4 \frac{2}{mA^2\omega^2} = \frac{4\pi e^2 \omega}{3mc^3} = \frac{4\pi (4,8)^2 \cdot 10^{-20} \cdot 10^{15}}{3 \cdot 27 \cdot 10^{30} \cdot 9,1 \cdot 10^{-28}} = 3,9 \cdot 10^{-8}.$$

в) Искомое время τ можно найти из выражения (5), полагая в нем $E = E_0/2$:

$$\tau = \frac{3mc^3}{2e^2\omega^2} \ln 2 = \frac{0,69 \cdot 3 \cdot 27 \cdot 10^{30} \cdot 9,1 \cdot 10^{-28}}{2 (4,8)^2 \cdot 10^{-20} \cdot 10^{30}} \approx 1,1 \cdot 10^{-7} \text{ с}.$$

II.1.3.

а) Потенциал точечного заряда как функция расстояния r записывается в виде

$$V = q/r. \quad (1)$$

Дифференцируя это выражение по $-x$, получаем потенциал диполя, ориентированного в направлении оси x :

$$V_d = -\frac{dV}{dx} \Delta x = \frac{xq \Delta x}{r^3} = \frac{P \cos \theta}{r^2},$$

где $P = q \Delta x$ — дипольный момент. Электрическое поле диполя имеет вид ¹⁾

$$\mathbf{E}_d = \frac{P \sin \theta}{r^3} \hat{\theta}_1 + \frac{2P \cos \theta}{r^3} \hat{r}_1,$$

где $\hat{\theta}_1$ и \hat{r}_1 — единичные векторы. Принимая теперь $\theta = 90^\circ$ и $r = d$, находим потенциальную энергию взаимодействия двух параллельных диполей

$$W = -\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_d = P^2/d^3.$$

б) Дипольный момент проводящей сферы, помещенной в однородное электрическое поле E , равен $R^3 E$, где R — радиус сферы. Сила взаимодействия двух сфер $F = -dW/dr$, или

$$F = (ER^3)^2 \frac{3}{d^4} = \frac{3E^2 R^6}{d^4} \text{ (отталкивающая).}$$

II. 1.4.

а) Согласно закону Ампера, мы имеем

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{4\pi}{c} I;$$

здесь I — полный ток, проходящий через ограниченную замкнутым контуром поверхность. Подставляя $I = \rho v \pi r^2$ и учитывая независимость магнитного поля B от углов, получаем

$$2\pi r B = \frac{4\pi}{c} \rho v \pi r^2,$$

откуда

$$B = \frac{2\pi}{c} \rho v r.$$

б) Пусть $\delta = 2\pi \rho v/c$. Сила, действующая на протон, движущийся со скоростью V' на расстоянии $r = y_0$ от оси цилиндра, равна

$$F = m \frac{dv_y}{dt} = -\frac{eV'B}{c} = -\frac{e\delta V'}{c} y_0.$$

Отсюда находим

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{e\delta V'}{mc} y_0.$$

¹⁾ Автор использует систему единиц СГСЭ и записывает поле в сферической системе координат r , θ и φ с центром в середине диполя и полярной осью, направленной параллельно дипольному моменту. При этом $E = 0$. — *Прим. ред.*

После интегрирования получаем

$$v_y = -\frac{e \delta V'}{mc} y_0 t. \quad (1)$$

Следовательно,

$$\Delta y = -\frac{e \delta V'}{2mc} y_0 t^2 = -\frac{e \delta V'}{2mc} y_0 \left(\frac{L}{V'}\right)^2 = -\frac{e \delta L^2}{2mcV'} y_0.$$

В случае $L \ll f$ величина Δy очень мала по сравнению с y_0 , и направление движения протона при выходе его из цилиндра определяется соотношением

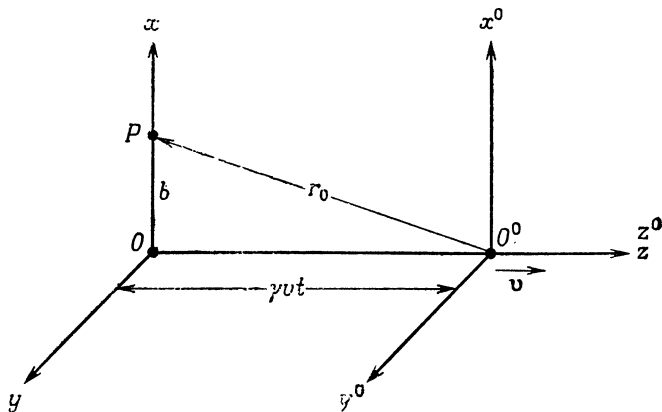
$$\frac{v_y}{V'} = \frac{y_0}{f}. \quad (2)$$

Подставляя сюда выражение (1) для v_y , находим

$$f = y_0 \frac{mcV'}{e \delta y_0 V' t} = \frac{mc}{e \delta t} = \frac{mc^2 V'}{2\pi r e v L} = \frac{mc^2}{2\pi e r L} \frac{V'}{v};$$

здесь для получения окончательного результата мы использовали следующие подстановки: $t = L/V'$ и $\delta = 2\pi r v/c$.

II. 1.5.



Обозначим через $Oxyz$ лабораторную систему отсчета, а через $O^0x^0y^0z^0$ — систему отсчета, связанную с движущимся зарядом (который поместим в начало отсчета O^0). Потенциалы точечного заряда в системе $O^0x^0y^0z^0$ определяются выражениями ¹⁾

$$A_x^0 = A_y^0 = A_z^0 = 0 \quad \text{и} \quad V^0 = \frac{e}{r_0},$$

¹⁾ Предложенное автором решение заменено более общим и одновременно более компактным. На рисунке, воспроизводимом без изменений, показано положение точки P с координатами $(b, 0, 0)$, в которой ранее отыскивались поля. Чтобы определить поля в этой конкретной точке, достаточно в общем решении положить $x = b, y = 0$ и $z = 0$. — *Прим. ред.*

где

$$r_0 = \sqrt{(x^0)^2 + (y^0)^2 + (z^0)^2}.$$

Преобразования Лоренца от системы отсчета $O^0x^0y^0z^0$, связанной с зарядом, к лабораторной системе $Oxyz$ описываются с помощью матрицы

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -i\beta\gamma \\ 0 & 0 & i\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

в предположении, что система $O^0x^0y^0z^0$ движется относительно системы $Oxyz$ вдоль оси z со скоростью v . Здесь $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ а $\beta = v/c$. Применяя эту матрицу преобразования к компонентам потенциала

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \\ iV \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ iV^0 \end{pmatrix},$$

получаем

$$A_x = 0, \quad A_y = 0, \quad A_z = \gamma\beta V^0 = \gamma\beta e/r_0 \quad \text{и} \quad V = \gamma V^0 = \gamma e/r_0.$$

Преобразования Лоренца для координат записываются в виде

$$x^0 = x, \quad y^0 = y, \quad z^0 = \gamma(z - vt) \quad \text{и} \quad t^0 = \gamma\left(t - \frac{vz}{c^2}\right).$$

Используя теперь выражения:

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

находим компоненты полей \mathbf{E} и \mathbf{B} , создаваемых в точке $P(x, y, z)$ равномерно движущимся зарядом:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\gamma e}{r_0} \right) = -\gamma e \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + \gamma^2 (z - vt)^2}} = \\ &= \frac{\gamma e x}{[x^2 + y^2 + \gamma^2 (z - vt)^2]^{3/2}}, \\ E_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\gamma e y}{[x^2 + y^2 + \gamma^2 (z - vt)^2]^{3/2}}, \\ E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} = \frac{\gamma e (z - vt)}{[x^2 + y^2 + \gamma^2 (z - vt)^2]^{3/2}}, \\ B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} = -\frac{\gamma \beta e y}{[x^2 + y^2 + \gamma^2 (z - vt)^2]^{3/2}}, \\ B_y &= -\frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\gamma \beta e x}{[x^2 + y^2 + \gamma^2 (z - vt)^2]^{3/2}}, \\ B_z &= 0. \end{aligned}$$

II.2.1. Пусть

$$f(r) = \nabla^2 \frac{1}{|r|}.$$

Проинтегрируем эту функцию по объему:

$$I = \int f(r) dV = \int \nabla^2 \frac{1}{r} dV = \iiint_S \nabla \frac{1}{r} \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{теорема Гаусса});$$

здесь S — поверхность, ограничивающая объем V . В сферических координатах интеграл принимает вид

$$\begin{aligned} I &= - \iint_S \frac{1}{r^2} r^2 \sin \theta d\varphi d\theta = - \iint_S \sin \theta d\varphi d\theta = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{если точка } r=0 \text{ не принадлежит области } V, \\ -4\pi, & \text{если точка } r=0 \text{ принадлежит области } V. \end{cases} \end{aligned}$$

Мы видим, что функция $f(r)$ является обобщенной функцией $-4\pi\delta(\mathbf{r})$. Следовательно,

$$f(r) = \nabla^2 \frac{1}{|r|} = -4\pi\delta(\mathbf{r}).$$

II.2.2. Один заряд создает электростатическое поле

$$E_0 = \frac{q}{r^2}.$$

Диполь на большом расстоянии создает поле

$$E_1 = - \frac{dE_0}{dx} \Delta x,$$

где Δx — расстояние между двумя зарядами. Чтобы найти поле E_2 двух противоположно ориентированных диполей (квадруполь), разделенных расстоянием Δy , нужно просто продифференцировать поле одного диполя E_1 по $-y$:

$$E_2 = \frac{d^2 E_0}{dy dx} \Delta x \Delta y.$$

Аналогично определяем поле E_3 восьми зарядов (октуполь), расположенных в вершинах куба:

$$E_3 = - \frac{d^3 E_0}{dz dy dx} \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Поскольку $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \text{const}$, отсюда следует, что поле E_3 обратно пропорционально r^5 .

II.2.3. В случае дипольного излучения векторы электрического и магнитного полей в волновой зоне можно найти по формулам

$$\mathbf{E} = k^2 (\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{n} \frac{e^{ikr}}{r}$$

и

$$\mathbf{B} = k^2 \mathbf{n} \times \mathbf{p} \frac{e^{ikr}}{r};$$

здесь $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, \mathbf{p} — дипольный момент, а \mathbf{n} — единичный вектор в направлении переноса излучения, которое в нашем случае совпадает с направлением радиус-вектора к точке наблюдения. (Поля пропорциональны $1/r$, поскольку их интенсивности изменяются по закону обратных квадратов. Направление переноса излучения определяется векторным произведением $\mathbf{E} \times \mathbf{B} \parallel \mathbf{n}$. В написанных выше выражениях для дипольного излучения один множитель k следует из разложения векторного потенциала, а другой — непосредственно из уравнения $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = ik \times \mathbf{A}$.) Электрическое поле, создаваемое двумя диполями вместе, записывается в виде

$$\mathbf{E}' = -\frac{\lambda}{2} \frac{d\mathbf{E}}{dx} \approx -\frac{i\lambda k^3}{2} (\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{n} \frac{xe^{ikr}}{r^2},$$

а индукция магнитного поля

$$\mathbf{B}' = -\frac{\lambda}{2} \frac{d\mathbf{B}}{dx} \approx -\frac{i\lambda k^3}{2} \mathbf{n} \times \mathbf{p} \frac{xe^{ikr}}{r^2};$$

при получении этих формул мы пренебрегли всеми членами, пропорциональными $1/r^3$. Искомый вектор Пойнтинга \mathbf{S} на больших расстояниях от излучателей будет ¹⁾

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E}' \times \mathbf{B}'^*) \approx \frac{\pi c k^4 p^2}{4r^2} \cos^2 \theta \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \mathbf{n};$$

здесь $\cos \theta = z/r$ и $\operatorname{tg} \varphi = y/x$.

II.2.4. Петля из сверхпроводника обладает чрезвычайно малым сопротивлением. Поэтому в случае каких-либо изменений магнитного потока Φ , пронизывающего петлю, индуцированная в ней э. д. с. должна незамедлительно вызывать большие изменения тока, чтобы сохранить этот поток Φ неизменным. До совмещения обеих петель каждую из них пронизывал поток

$$\Phi_{\text{нач}} = AB = CI, \quad (1)$$

где A — площадь петли, C — постоянная. Запишем выражение для магнитного потока, пронизывающего обе петли после их совмещения:

$$\Phi_{\text{конеч}} = CI' = C(I'_1 + I'_2); \quad (2)$$

Здесь I' — суммарный ток в совмещенных петлях. Из условия $\Phi_{\text{нач}} = \Phi_{\text{конеч}}$ имеем

$$I' = I, \quad \text{или} \quad I'_1 = I'_2 = I/2, \quad (3)$$

¹⁾ Обычно в дипольном приближении вычисляют не суммы напряженностей полей диполей, а поле суммарного дипольного момента. — *Прим. ред.*

поскольку обе петли одинаковы. Энергию системы в исходном состоянии можно записать в виде

$$W_{\text{нач}} = \frac{1}{2} LI^2 + \frac{1}{2} LI^2 = LI^2. \quad (4)$$

Энергию системы в конечном состоянии — в виде

$$W_{\text{конеч}} = \frac{1}{2} LI_1'^2 + \frac{1}{2} LI_2'^2 + MI_1'I_2'. \quad (5)$$

Учитывая (3) и то, что для совмещенных петель $M \equiv L$, получаем

$$W_{\text{конеч}} = \frac{1}{2} LI^2.$$

Энергия системы уменьшилась на

$$W_{\text{нач}} - W_{\text{конеч}} = \frac{1}{2} LI^2.$$

Это уменьшение связано с преобразованием энергии поля в механическую энергию (т. е. работу против сил, например, трения или удерживающей петлю руки) и энергию излучения.

II. 2.5. Полный импеданс электрической цепи равен ¹⁾

$$\begin{aligned} Z &= i\omega L + \frac{1}{1/R + i\omega C} = i\omega L + \frac{R - iR^2\omega C}{1 + (\omega RC)^2} = \\ &= \frac{R}{1 + (\omega RC)^2} + i \frac{\omega L + (\omega RC)^2 \omega L - \omega R^2 C}{1 + (\omega RC)^2}. \end{aligned}$$

Подставляя сюда $\omega = 1/\sqrt{LC}$, получаем

$$Z = \frac{RL}{L + R^2C} + i \frac{L^2}{(L + R^2C)\sqrt{LC}}.$$

¹⁾ Автор получает очень громоздкие формулы, не позволяющие раскрыть весьма интересную особенность данной электрической цепи, на которую, по-видимому, обратил внимание Штейнмец. Дадим более простое решение этой задачи. Для произвольной частоты ω

$$I_R = \frac{V_R}{R} = \frac{V}{R} \frac{Z_{RC}}{Z} = \frac{V}{R} \frac{\frac{R}{1 + i\omega RC}}{i\omega L + \frac{R}{1 + i\omega RC}} = \frac{V}{i\omega L + R(1 - \omega^2 LC)}.$$

В частном случае (см. условие задачи), когда $\omega^2 = 1/LC$, получаем

$$I_R = V/i\omega L = -iV/\sqrt{L/C}$$

— ток через резистор не зависит от его сопротивления. Иными словами, рассматриваемая цепь представляет собой простейший стабилизатор переменного тока. Физика процесса очевидна: если $R = 0$, то ток ограничен индуктивным сопротивлением. При $0 < R < \infty$ ток поддерживается на том же уровне вследствие резонанса напряжений на элементах C и L ; эти напряжения растут пропорционально R . — *Прим. перев.*

Общий ток, протекающий в цепи, равен

$$I_{\text{общ}} = \frac{V}{Z} = \frac{V_0}{Z} e^{i\omega t}.$$

Через резистор протекает ток

$$\begin{aligned} I_R &= \frac{1}{1 + i\omega RC} I_{\text{общ}} = \\ &= V_0 e^{i\omega t} \frac{1}{\frac{RL}{L + R^2C} + i \frac{L^2}{(L + R^2C)\sqrt{LC}}} \cdot \frac{1}{1 + i\omega RC} = \frac{V_0 e^{i\omega t}}{R_1 R_2} e^{-i(\delta_1 + \delta_2)}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= \left(\frac{RL}{L + R^2C} \right)^2 + \left(\frac{L^2}{L + R^2C} \right)^2 \frac{1}{LC} = \frac{L\sqrt{R^2 + L/C}}{L + R^2C}, \\ R_2 &= \sqrt{1 + (\omega RC)^2}, \\ \delta_1 &= \arctg\left(\frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}\right) \quad \text{и} \quad \delta_2 = \arctg(\omega RC). \end{aligned}$$

II. 2.6. Пусть электрическое поле изменяется по закону

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}.$$

Тогда для плотности тока смещения J_d имеем

$$J_d = \frac{\epsilon_0}{4\pi} \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{i\omega\epsilon_0 E}{4\pi},$$

а плотность тока проводимости равна σE . В случае равенства обоих токов по величине

$$\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon_0} = 1. \quad (1)$$

Определим теперь комплексный показатель преломления n :

$$n = \frac{1}{c} \sqrt{\left(\epsilon_0 - \frac{4\pi\sigma}{\omega} i\right) \mu_0} = \sqrt{1 - \frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon_0} i}.$$

Принимая во внимание равенство (1), получаем

$$n = \sqrt{1 - i} \equiv n_0(1 - i\kappa); \quad (2)$$

здесь n_0 и κ — действительные положительные величины. Величина κ называется коэффициентом поглощения. Из (2) находим

$$n_0 = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}} \approx 1,10 \quad \text{и} \quad \kappa = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \approx 0,414. \quad (3)$$

Определим теперь коэффициент отражения. При нормальном падении волны он связан с показателем преломления следующим образом:

$$r = \left| \frac{n-1}{n+1} \right|^2 = \frac{(n_0-1)^2 + (n_0\kappa)^2}{(n_0+1)^2 + (n_0\kappa)^2}.$$

Подставляя сюда из (3) значения n_0 и κ , находим $r = 0,047$.

II. 2.7. Введение незаряженной проводящей сферы в однородное электрическое поле вызывает такое же возмущение поля за ее пределами, как и помещенный вместо нее в точке, совпадающей с центром сферы, электрический диполь с моментом $P = R^3 E_0$, где R — радиус сферы. Следовательно, возмущение внешнего поля в сферических координатах r , θ и φ можно охарактеризовать полем диполя с компонентами:

$$E_r = \frac{2P \cos \theta}{r^3} \hat{r}_1, \quad E_\theta = \frac{P \sin \theta}{r^3} \hat{\theta}_1 \quad \text{и} \quad E_\varphi = 0.$$

III. 3.1. Если электрон движется с ускорением, то он теряет свою энергию на излучение. Полная энергия электронно-протонной системы убывает со скоростью

$$\frac{dE}{dt} = - \frac{2a^2 e^2}{3c^3}, \quad (1)$$

где a — ускорение, e — заряд электрона, а c — скорость света. Ускорение электрона a связано с радиусом r его орбиты следующим образом:

$$ma = e^2/r^2,$$

откуда

$$a = e^2/mr^2. \quad (2)$$

Используя последнее выражение и учитывая, что $a = v^2/r$, находим полную энергию электронно-протонной системы

$$E = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{e^2}{r} = - \frac{e^2}{2r}. \quad (3)$$

Подставляя выражение (3) и (2) в (1), получаем

$$- \frac{e^2}{2r^2} \frac{dr}{dt} = \frac{2e^6}{3m^2 r^4 c^3}, \quad (4)$$

или после очевидного упрощения

$$\frac{dr}{dt} = - \frac{4e^4}{3m^2 r^2 c^3}. \quad (5)$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$T = \int_0^T dt = -\frac{m^2 c^3}{4e^4} \int_R^{a_0} 3r^2 dr = \frac{m^2 c^3}{4e^4} (R^3 - a_0^3);$$

здесь R — начальное расстояние между протоном и электроном, a_0 — радиус первой боровской орбиты.

II. 3.2. Полагая $r \neq 0$, запишем уравнение Пуассона в сферических координатах

$$\nabla^2 V \equiv \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} rV(r) + \Delta V(r) = -4\pi\rho(r), \quad (1)$$

где Δ — дифференциальный оператор, зависящий только от углов. В случае сферически симметричного потенциала $\Delta V(r) = 0$. Подставляя в уравнение (1) выражение для $V(r)$ из условия задачи, получаем при $r \neq 0$

$$\rho(r) = -\frac{1}{4\pi r} \frac{d^2}{dr^2} e^{-\lambda r} = -\frac{\lambda^2 e^{-\lambda r}}{4\pi r}.$$

Перейдем теперь к случаю $r \rightarrow 0$. Тогда

$$V(r) = \frac{e^{-\lambda r}}{r} \rightarrow \frac{1}{r}.$$

Но, как было показано в решении задачи II. 2.1,

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(r).$$

Следовательно, в общем случае имеем

$$\rho(r) = \delta(r) - \frac{\lambda^2 e^{-\lambda r}}{4\pi r}.$$

При $r \rightarrow 0$ вклад в общий заряд дает только член $\delta(r)$, поскольку объем пропорционален r^3 .

II. 3.3. Пусть E , E' и E'' — амплитуды электрического поля падающей, преломленной и отраженной волн соответственно. Известно, что плотность импульса плоской волны дается следующими выражениями:

для преломленной волны в диэлектрике¹⁾

$$G_1 = \frac{1}{4\pi c} E' H',$$

для падающей волны в воздухе

$$G_2 = \frac{1}{4\pi c} E H,$$

¹⁾ Мы уточнили здесь используемое автором выражение для плотности импульса электромагнитной волны [см., например, В. Л. Гинзбург, В. А. Угаров, УФН, 118, 175 (1976).] — Прим. ред.

и для отраженной волны в воздухе

$$G_3 = \frac{1}{4\pi c} E'' H''.$$

Падающая волна передает единичной площадке среды в единицу времени импульс $P_2 = cG_2$, а преломленная и отраженная волны уносят импульс $P_{1,3} = \frac{c}{n} G_1 - cG_3$. В соответствии со вторым законом Ньютона давление на поверхность среды должно быть равным разности P_2 и $P_{1,3}$, т. е.

$$\text{Давление} = P_2 - P_{1,3} = \frac{1}{4\pi} \left(EH - \frac{1}{n} E' H' + E'' H'' \right).$$

В случае нормального падения волны E , E' и E'' связаны между собой довольно простыми соотношениями

$$E' = \frac{2}{n+1} E$$

и

$$E'' = \frac{n-1}{n+1} E,$$

а $H = E$, $H' = nE'$ и $H'' = E''$. После подстановки этих соотношений в формулу для давления находим

$$\begin{aligned} \text{Давление} &= \frac{1}{4\pi} E^2 \left[1 + \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2 - \left(\frac{2}{n+1} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} E^2 \frac{n^2 - 1}{(n+1)^2} = \frac{1}{6,28} \cdot 10^{12} \cdot \frac{0,44}{2,2^2} = 1,45 \cdot 10^{10} \text{ дин/см}^2. \end{aligned}$$

II. 3.4.

а) Пусть λ — линейная плотность заряда на цилиндре радиусом r_1 . По теореме Гаусса имеем¹⁾

$$\iint_A E_r dA = \frac{\lambda}{\epsilon}, \quad (1)$$

где A — площадь боковой поверхности цилиндрического сечения радиусом r и длиной, равной единице. Поскольку E_r зависит только от r , то из (1) сразу получаем

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r}. \quad (2)$$

¹⁾ Автор использует рационализированную формулу (система СИ). Здесь ϵ — диэлектрическая проницаемость. В случае воздушной среды она совпадает с электрической постоянной $\epsilon = \epsilon_0$. В случае диэлектрика с относительной диэлектрической проницаемостью K она равна $\epsilon = \epsilon_0 K$. — Прим. перев.

Разность потенциалов между двумя цилиндрами в соответствии с условиями задачи вычисляется следующим образом:

$$V = \int_{r_1}^{r_2} E_r dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} [(1/K) \ln(r_3/r_1) + \ln(r_2/r_3)]. \quad (3)$$

Таким образом, емкость конденсатора

$$C = \frac{\lambda L}{V} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{(1/K) \ln(r_3/r_1) + \ln(r_2/r_3)}. \quad (4)$$

б) Из выражения (3) можно найти плотность заряда λ :

$$\lambda = \frac{2\pi\epsilon_0 V}{(1/K) \ln(r_3/r_1) + \ln(r_2/r_3)}. \quad (5)$$

Применяя теорему Гаусса, определяем поле E в диэлектрике и в воздушном зазоре:

$$E = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 K r}, & r_1 < r < r_3, \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}, & r_3 < r < r_2. \end{cases} \quad (6)$$

Следовательно, электрическая индукция D в диэлектрике равна

$$D = \frac{\lambda}{2\pi r}, \quad r_1 < r < r_2, \quad (7)$$

а поляризация

$$P \equiv D - \epsilon_0 E = \begin{cases} \frac{(K-1)\lambda}{2\pi K r}, & r_1 < r < r_3, \\ 0, & r_3 < r < r_2. \end{cases} \quad (8)$$

в) В случае когда разность потенциалов между обкладками конденсатора поддерживается постоянной, конденсатор уже нельзя рассматривать как изолированную систему. Он должен быть подключен к источнику зарядов (батарее), или к источнику энергии. Пусть C' — емкость конденсатора в отсутствие диэлектрика. Из выражения (4) мы имеем

$$C' = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(r_2/r_1)}. \quad (9)$$

Работа, затрачиваемая на удаление диэлектрика, дается выражением

$$\text{Работа} = \frac{1}{2} C' V^2 - \frac{1}{2} C V^2 - (Q' - Q) V,$$

где Q' — заряд на одной из обкладок конденсатора после удаления диэлектрика. Поскольку $Q' = C'V$, а $Q = CV$, мы получаем

$$\begin{aligned} \text{Работа} &= \frac{V^2}{2} (C - C') = \\ &= \frac{V^2}{2} 2\pi\epsilon_0 L \left(\frac{1}{(1/K) \ln(r_3/r_1) + \ln(r_2/r_3)} - \frac{1}{\ln(r_2/r_1)} \right); \end{aligned}$$

здесь мы использовали выражения (4) и (9) для C и C' .

II. 3.5.

а) Магнитную индукцию в тороидальном сердечнике вычисляют по формуле

$$B = \mu\mu_0 \frac{NI}{2\pi d}.$$

Следовательно, полный поток Φ , пронизывающий поперечное сечение A этого тороида, равен

$$\Phi = \mu\mu_0 \frac{NIA}{2\pi d}, \quad d \gg \sqrt{A}.$$

б) Для эквивалентной магнитной цепи тороида справедливо следующее уравнение:

$$\Phi_1 R_1 + \Phi_2 R_2 = NI,$$

где R_1 — магнитное сопротивление части тороида с железом, а R_2 — магнитное сопротивление воздушного зазора. Учитывая, что $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$, и подставляя в последнее уравнение

$$R_1 = \frac{2\pi d - \delta}{\mu\mu_0 A} \quad \text{и} \quad R_2 = \frac{\delta}{\mu_0 A},$$

находим

$$\Phi = \mu_0 \frac{NIA}{(2\pi d - \delta)/\mu + \delta} = \mu\mu_0 \frac{NIA}{2\pi d + (\mu - 1)\delta} \approx \mu\mu_0 \frac{NIA}{\mu\delta + 2\pi d}.$$

в)

$$\text{Энергия поля в железе} = \frac{1}{2\mu\mu_0} B^2 \times \text{Объем} = \frac{\mu\mu_0 N^2 I^2 A d}{\left(\frac{\mu\delta}{2\pi} + d\right)^2 4\pi}.$$

$$\text{Энергия поля в зазоре} = \frac{\mu^2 \mu_0 N^2 I^2 A \delta}{8\pi^2 [(\mu\delta/2\pi) + d]^2}.$$

Мы видим, что в случае $\mu \gg 1$ создание поля в зазоре сопряжено с большими затратами энергии даже при очень малой ширине зазора δ .

г) Индуктивность отдельного витка равна $d\Phi/dI$. Всего тороид содержит N витков, и каждый виток пронизывается общим магнитным потоком; следовательно,

$$L = N \frac{d\Phi}{dI}.$$

Подставляя сюда

$$\Phi = \frac{\mu\mu_0 N A I}{\mu\delta + 2\pi d},$$

находим

$$L = \frac{\mu\mu_0 N^2 A}{\mu\delta + 2\pi d}.$$

II. 3.6.

а) Магнитная индукция, создаваемая током большой петли, в центре системы равна

$$B = \frac{\mu_0 I}{2b}. \quad (1)$$

Полный магнитный поток, пересекающий малую петлю, дается выражением

$$\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \frac{\pi a^2 \mu_0 I}{2b} \cos \theta \quad (a \ll b), \quad (2)$$

где \mathbf{A} — ориентированная площадь малой петли, а θ — угол между осями петель. При вращении малой петли с постоянной угловой скоростью ω мы имеем $\theta = \omega t$. Э. д. с., наводимая в петле, равна $-d\Phi/dt$. Используя выражение (2), получаем для малой петли

$$\text{Э. д. с.} = \frac{\pi a^2 \mu_0 I}{2b} \omega \sin \omega t. \quad (3)$$

Ток в малой петле I_1 определяем по закону Ома:

$$I_1 = \frac{\pi a^2 \mu_0 I}{2bR} \omega \sin \omega t. \quad (4)$$

б) В соответствии с законом сохранения энергии механическая мощность $\tau d\theta/dt$ должна быть равна мощности тока, наведенного в петле, т. е.

$$\tau \frac{d\theta}{dt} = -I_1 \frac{d\Phi}{dt}.$$

Используя выражения (4) и (2), получаем

$$\tau = -I_1 \frac{d\Phi}{d\theta} = -\frac{\pi a^2 \mu_0 I \omega}{2bR} \sin \omega t \frac{d\Phi}{d\theta} = \left(\frac{\pi a^2 \mu_0 I}{2b} \right)^2 \frac{\omega \sin^2 \omega t}{R}.$$

в) Из выражения (2) находим взаимную индуктивность двух петель

$$M = \frac{d\Phi}{dI} = \frac{\pi a^2 \mu_0}{2b} \cos \theta = \frac{\pi a^2 \mu_0}{2b} \cos \omega t.$$

Теперь можно определить э. д. с. взаимной индукции, наведенную в большой петле:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= -M \frac{dI_1}{dt} = -M \frac{d}{dt} \left(\frac{\pi a^2 \mu_0 I \omega}{2bR} \sin \omega t \right) = \\ &= -\frac{\pi^2 I \omega^2 a^4 \mu_0^2}{4b^2 R} \cos^2 \omega t = -\left(\frac{\pi a^2 \mu_0 \omega \cos \omega t}{2b} \right)^2 \frac{I}{R}. \end{aligned}$$

II. 4.1.

$$E = \frac{q^2}{a} - \frac{q^2}{a} - \frac{q^2}{a} = -\frac{q^2}{a}.$$

II. 4.2.

$$\frac{\text{Электрич. притяжение}}{\text{Гравитац. притяжение}} = \frac{e^2}{G m_e m_p} = \frac{(4,8)^2 \cdot 10^{-20}}{6,67 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{-27} \cdot 2000 \cdot 10^{-27}} \approx 10^{39}.$$

При вычислении этого отношения мы воспользовались значениями $e = 4,8 \cdot 10^{-10}$ ед. СГСЭ, $m_e \approx 10^{-27}$ г, $m_p \approx 2000 m_e$ и $G = 6,67 \cdot 10^{-8}$ ед. СГС.

II. 4.3. Потенциальная энергия взаимодействия точечного заряда q с плоскостью равна половине энергии взаимодействия двух точечных зарядов q и $-q$, разнесенных на расстояние $2d$. Следовательно,

$$E = -q^2/4d.$$

II. 4.4. Поле поверхностного заряда по обе стороны от пластинки определяем по теореме Гаусса; оно равно $\pm 2\pi\sigma$ для $x \geq 0$. Применяя принцип суперпозиции полей, находим результирующее поле

$$E = E_0 \pm 2\pi\sigma \quad \text{для } x \geq 0.$$

II. 4.5. Пусть q' — заряд на внутренней сфере. Потенциал этой сферы равен сумме потенциалов, обусловленных зарядами q и q' соответственно:

$$V = q/r_2 + q'/r_1.$$

Поскольку внутренняя сфера заземлена, $V = 0$. Следовательно,

$$q' = -\frac{r_1}{r_2} q.$$

II. 4.6. Применяя закон Ампера

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} I,$$

сразу находим

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r.$$

II. 4.7. Для постоянного тока

$$\frac{V_N}{V_{2N}} = \frac{R_N}{R_{2N}} = \frac{1}{2}.$$

Для высокочастотного тока

$$\frac{V_N}{V_{2N}} = \frac{Z_N}{Z_{2N}} \approx \frac{L_N}{L_{2N}} = \frac{N^2}{(2N)^2} = \frac{1}{4};$$

здесь L_i — индуктивность обмотки с числом витков i .

II. 4.8. Сила взаимодействия между проводником и средой такая же, как и сила взаимодействия между двумя параллельными проводниками с током I , разнесенными на расстояние $2d$. Следовательно,

$$F = -2 \cdot 10^{-7} \frac{I^2}{2d} \text{ Н/м (притягивающая).}$$

II. 4.9. Магнитная индукция B в центре петли записывается в виде

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r}.$$

Теперь можно найти вращающий момент, действующий на бу-синку:

$$\text{Вращающий момент} = H M V = \frac{B M V}{\mu_0} = \frac{M V I}{2r}.$$

Здесь мы исходили из концепции взаимодействия постоянных магнитов. Однако если решать эту задачу с точки зрения взаимодействия круговых токов, то M следует заменить на $M' \equiv M/\mu_0$, а H — на B . Аналогичная ситуация встречается в задачах II. 6.2 и II. 7.3.

II. 4.10. Прибор покажет напряжение, равное индуцированной идущим поездом э. д. с.:

$$\begin{aligned} \text{Э. д. с.} &= -\frac{d\Phi}{dt} = B L v = 2 \cdot 10^{-5} \cdot 1 \cdot \frac{180 \cdot 10^3}{3,6 \cdot 10^3} = \\ &= 2 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \text{ Вб/с} = 10^{-3} \text{ В.} \end{aligned}$$

II. 4.11. Искомая работа равна разности потенциальных энергий диполя до и после поворота его на 180° , т. е. $2pE \cos \alpha$.

II. 4.12. В силу непрерывности тангенциальной составляющей напряженности электрического поля на границе имеем $E = E_0$. Отсюда следует, что электрическая индукция

$$D = K E = K E_0.$$

II. 4.13. Как показано в решении задачи II. 1.1 (в), $R = 2\sqrt{L/C}$.

II. 4.14. Поскольку для освещенности монохроматическим светом справедлива следующая формула:

$$\text{Освещенность} = \left\langle \frac{c}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right) \right\rangle = \frac{c}{2} \epsilon_0 E_0^2 = \frac{c}{2\mu_0} B_0^2,$$

где E_0 и B_0 — амплитуды полей E и B , мы имеем

$$E_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,3 \cdot 10^3}{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^8}} \approx 10^3 \text{ В/м}$$

и

$$B_0 = \frac{E_0}{c} \approx \frac{10^3}{3 \cdot 10^8} \approx 3 \cdot 10^{-6} \text{ Вб/м}^2.$$

II. 4.15. Согласно теореме Гаусса, имеем следующее соотношение для нормальной составляющей напряженности E электрического поля:

$$\epsilon_1 E_{1n} - \epsilon_2 E_{2n} = \sigma / \epsilon_0.$$

Тангенциальная же составляющая электрического поля E сохраняется непрерывной. Следовательно,

$$E_{1t} = E_{2t}.$$

II. 4.16.

$$\frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sim \frac{1}{r^2}.$$

II. 4.17. 0,5 Гс.

II. 4.18. Внутри проводящей сферы электрический потенциал равен ¹⁾ $Q/4\pi\epsilon_0 R$.

II. 4.19. В системе единиц СИ

$$\text{Плотность энергии} = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right),$$

$$\text{Плотность импульса} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{c^2}.$$

II. 4.20.

$$\begin{aligned} \text{Вектор Пойнтинга} &= \mathbf{E} \times \mathbf{H} = (RI\hat{\mathbf{k}}) \times \left(\frac{I}{2\pi b} \hat{\boldsymbol{\theta}} \right) = \\ &= -\frac{RI^2}{2\pi b} \hat{\mathbf{r}}_1 \text{ (направлен внутрь провода)}. \end{aligned}$$

II. 5.1. Запишем сначала выражение для комплексной проводимости контура

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{i\omega L} + i\omega C = \frac{1 - \omega^2 LC}{i\omega L}.$$

¹⁾ С точностью до произвольной постоянной. — Прим. ред.

Отсюда находим комплексное сопротивление

$$Z = \frac{i\omega L}{1 - \omega^2 LC} = \frac{i\omega L}{1 - \omega^2/\omega_0^2}, \quad \text{где } \omega_0^2 \equiv 1/LC.$$

Поскольку $\omega^2 < \omega_0^2$, то Z имеет индуктивный характер.

II. 5.2. 0.

II. 5.3. Цепь из последовательно соединенных конденсаторов обладает емкостью C/N , где C — емкость каждого конденсатора. Результирующее напряжение равно

$$\frac{Q}{C/N} = N \frac{Q}{C} = NV$$

(Q — заряд на каждом конденсаторе), поскольку $V = Q/C$.

II. 5.4. $4L$.

II. 5.5. Используя тот факт, что диэлектрик не оказывает влияния на величину электрической индукции D , мы находим

$$W = \frac{D^2}{2K\epsilon_0} = \frac{D_0^2}{2K\epsilon_0} = \frac{W_0}{K}.$$

Другое доказательство:

$$W = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} (KC_0) \left(\frac{V}{K}\right)^2 = \frac{W_0}{K}.$$

II. 5.6. $E \sim \frac{1}{r}$, так как энергия волны убывает по закону обратных квадратов.

II. 5.7. Из условия непрерывности тангенциальной составляющей электрического поля имеем

$$\mathbf{E} + \mathbf{E}_R = 0, \quad \text{или } \mathbf{E}_R = -\mathbf{E},$$

где \mathbf{E}_R — электрический вектор отраженной волны. Как видно, он сдвинут по фазе на 180° относительно электрического вектора падающей волны \mathbf{E} .

II. 5.8. Больше. (Под действием сил притяжения заряды на металлических сферах перераспределяются таким образом, что расстояние между ними уменьшается.)

II. 5.9.

$$F = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}.$$

Сила вызывает притяжение проводов.

II. 5.10.

а) Криволинейный интеграл от напряженности магнитного поля по любому замкнутому контуру равен полному намагничивающему току через поверхность, натянутую на этот контур:

$$\oint H dl = I = ni;$$

здесь n — число витков провода. Поскольку ширина зазора значительно меньше диаметра полюсов магнита, то поле в зазоре можно считать однородным. В этом случае приведенная выше формула принимает вид

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 = ni,$$

где индексы 1 и 2 относятся к полям в воздушном зазоре и в железном сердечнике соответственно. H_1 и H_2 связаны с B_1 и B_2 соотношениями

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_1} = \frac{B_1}{\mu_0}, \quad H_2 = \frac{B_2}{\mu_2} = \frac{B_2}{\mu\mu_0}.$$

В случае очень узкого зазора $B_1 \approx B_2$, и мы получаем

$$\frac{B}{l} = \frac{n\mu_0}{l_1 + l_2/\mu} \approx 2,5 \text{ Вб}/(\text{м}^2 \cdot \text{А}).$$

б) Для тока $i = 0,5 \text{ А}$ имеем $\mu_0 H = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ Вб}/\text{м}^2$. При увеличении тока i до 1 А значение $\mu_0 H$ становится равным $2,5 \cdot 10^{-3} \text{ Вб}/\text{м}^2$. Из приведенного в условии задачи графика $B(H)$ определяем $B \approx 1,7 \text{ Вб}/\text{м}^2$ (тогда как при отсутствии насыщения $B = 2,5 \text{ Вб}/\text{м}^2$).

II. 5.11.

а) В системе устанавливается стационарное движение, когда индуцированная в ней э. д. с. компенсирует напряжение источника, т. е. когда

$$Blv = V.$$

Отсюда находим

$$v = V/Bl.$$

б) В любой момент времени t по стержню протекает ток¹⁾

$$i = \frac{V - Blv}{R}.$$

Отсюда находим уравнение движения стержня

$$m\dot{v} = F_x \equiv \frac{V - Blv}{R} Bl.$$

¹⁾ Автор пренебрегает реакцией тока i , порождающего противодействующее магнитное поле. — *Прим. ред.*

Его решение с учетом начального условия, а именно $v = 0$ при $t = 0$, записывается в виде

$$v = \frac{V}{Bl} \left(1 - e^{-\frac{B^2 l^2 t}{mR}} \right).$$

в) В этом случае уравнение движения принимает вид

$$m\dot{v} = \frac{V - Blv}{R} Bl - F.$$

Движение является установившимся, если $\dot{v} = 0$. Отсюда получаем

$$v = \frac{V}{Bl} - \frac{FR}{(Bl)^2}.$$

г) При условии, указанном в п. «в» нашей задачи, ток в стержне равен

$$i = \frac{V - Blv}{R} = \frac{F}{Bl}.$$

Отбираемая от источника мощность равна Vi . Часть этой мощности величиной Fv преобразуется в механическую работу. Следовательно,

$$К. н. \partial. = \frac{Fv}{Vi} = F \frac{(V/Bl) - FR/B^2 l^2}{FV/Bl} = 1 - \frac{FR}{VBl}.$$

II. 5.12.

а) Запишем уравнение цепи

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0.$$

Отсюда находим

$$Q = Q_0 e^{-t/RC}.$$

б) Поскольку заряд Q распределен равномерно по поверхности пластины конденсатора, часть этого заряда, сосредоточенная вне круга радиусом ρ , равна

$$q = \frac{Q}{r_0^2} (r_0^2 - \rho^2) = \frac{Q_0 (r_0^2 - \rho^2)}{r_0^2} e^{-t/RC}.$$

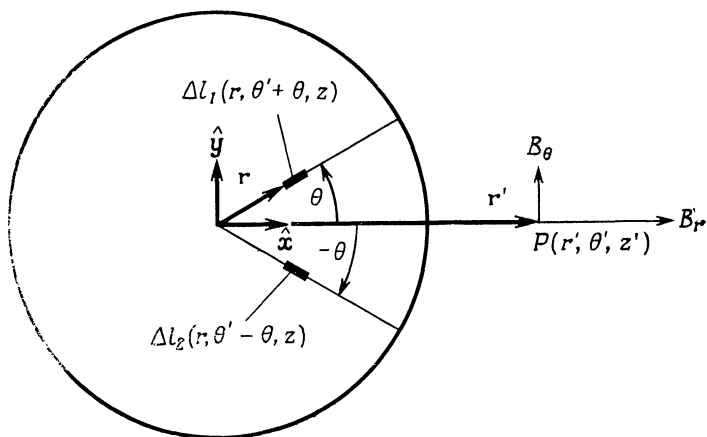
Отсюда находим ток через круговое сечение радиусом ρ :

$$i = - \frac{dq}{dt} = \frac{Q_0 (r_0^2 - \rho^2)}{r_0^2 RC} e^{-t/RC}.$$

в) Магнитное поле определяем по закону Ампера:

$$B_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 Q_0}{2\pi RC r} e^{-t/RC}.$$

г) Присутствие только θ -компоненты магнитного поля можно объяснить следующим образом (см. фиг. 1). Вычислим магнитные поля B_r и B_z в произвольной точке $P(r', \theta', z')$, где r' , θ' и z' — цилиндрические координаты рассматриваемой точки. Для этого определим сначала поля, индуцированные в данной точке токами, текущими по двум элементарным радиальным отрезкам Δl_1 и Δl_2 с координатами $(r, \theta' + \theta, z)$ и $(r, \theta' - \theta, z)$.



Фиг. 1.

В точке P (для простоты она выбрана в плоскости x, z) индуцируются поля

$$\mathbf{B}_1 \sim i_1 \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}') \sim (\cos \theta \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \hat{\mathbf{y}}) \times [(r \cos \theta - r') \hat{\mathbf{x}} + r \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + (z - z') \hat{\mathbf{z}}]$$

и

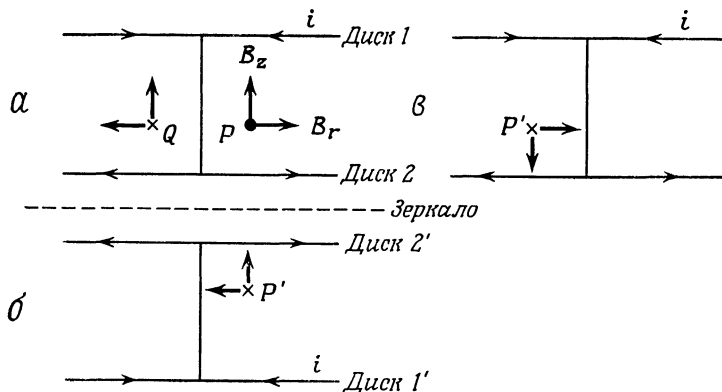
$$\mathbf{B}_2 \sim (\cos \theta \hat{\mathbf{x}} - \sin \theta \hat{\mathbf{y}}) \times [(r \cos \theta - r') \hat{\mathbf{x}} - r \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + (z - z') \hat{\mathbf{z}}].$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 &\sim 2 \cos \theta (z - z') (\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{z}}) = -2 \cos \theta (z - z') \hat{\mathbf{y}} = \\ &= -2 \cos \theta (z - z') \hat{\boldsymbol{\theta}}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что компоненты B_r и B_z магнитного поля, индуцированного в точке P токами на обоих отрезках, обращаются в нуль. Если проинтегрировать этот результат по r и θ и сложить затем полученные поля токов в обеих пластинах, то получим как раз искомое магнитное поле между пластинами конденсатора. Из проведенного нами решения можно сделать вывод, что единственная, отличная от нуля компонента магнитного поля имеет направление θ .

Другое доказательство. Поскольку векторы тока и положения точки являются полярными, то из закона Ампера следует, что магнитное поле представляет собой аксиальный вектор. Если считать законы электромагнетизма инвариантными относительно зеркального отражения пространства, то при таком отражении вектор магнитного поля должен изменять свое направление в пространстве. Пусть P и Q — две точки на плоскости, симметрично расположенные относительно центрального проводника (см. фиг. 2, а). В силу аксиальной симметрии магнитного поля



Фиг. 2.

компоненты B_r и B_z в этих точках связаны друг с другом так, как показано на фиг. 2, а. Пусть точка P' является зеркальным отражением точки P . Как видно из фиг. 2, б, компоненты магнитного поля в точке P' должны быть противоположны по направлению компонентам поля, отраженным в зеркале. Повернем теперь картину на фиг. 2, б на 180° . Тогда получим ситуацию, показанную на фиг. 2, в. Сравнивая ее с фиг. 2, а, мы видим, что точка P' совпадает с точкой Q , а направление поля $B_r(B_z)$ в точке P' противоположно направлению соответствующего поля в точке Q . Следовательно, компоненты B_r и B_z должны отсутствовать.

II. 5.13.

$$\begin{aligned} \text{Скорость} &= \text{Частота} \times \text{Длина волны} = \\ &= 4 \cdot 10^{14} \cdot 5 \cdot 10^{-7} = 2 \cdot 10^8 \text{ м/с.} \end{aligned}$$

Показатель преломления

$$n = c/v = 3/2.$$

Длина волны в воздухе

$$\lambda_0 = n\lambda = 7,5 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

II. 6.1.

а) Снаружи магнитное поле равно нулю, а в зазоре между пластинами оно отлично от нуля и является приблизительно однородным. Из формулы

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I,$$

где вектор $d\mathbf{s}$ перпендикулярен плоскости рисунка, получаем

$$Bb \approx \mu_0 I, \quad \text{или} \quad B \approx \frac{\mu_0 I}{b}$$

(вектор \mathbf{B} направлен от читателя к плоскости рисунка). Здесь мы учли, что $a \ll b$ и тем самым пренебрегли членами, зависящими от a/b .

б) Индуктивность цепи определяем по формуле

$$L = \left| \frac{d\Phi/dt}{di/dt} \right| = \left| \frac{d\Phi}{di} \right| = \frac{d}{di} (BA) = \frac{d}{di} \left(\frac{\mu_0 I}{b} la \right) = \frac{\mu_0 la}{b}.$$

в) Уравнение данной электрической цепи записывается в виде

$$V_0 - L \frac{di}{dt} = 0,$$

откуда находим

$$i = \frac{V_0}{L} t.$$

г) Индуктивность обеих пластин на расстоянии x от закороченного конца равна

$$L_1 = \frac{\mu_0 xa}{b}.$$

Следовательно,

$$V_x = L_1 \frac{di}{dt} = \frac{\mu_0 xa}{bL} V_0.$$

д) На расстоянии x от закороченного конца имеем

$$\text{Поток энергии} = V_x i = \frac{\mu_0 xa V_0}{bL} \frac{V_0}{L} t = \frac{\mu_0 xa}{b} \left(\frac{V_0}{L} \right)^2 t.$$

II. 6.2. При $L \gg R$ две петли с током взаимодействуют подобно двум магнитным диполям с моментами $\mu_0 IA$, где A — площадь петли. Индукцию B внутри второй петли, обусловленную током в первой петле, можно представить в виде векторной суммы двух компонент: B_r — в направлении возрастания радиус-вектора r и B_θ — в направлении увеличения угла θ . Мы имеем

$$B_r = \frac{\mu_0}{2} IR^2 \frac{\cos \theta}{L^3} = \frac{\mu_0}{2} IR^2 \frac{x}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$B_\theta = \frac{\mu_0}{4} IR^2 \frac{\sin \theta}{L^3} = \frac{\mu_0}{4} IR^2 \frac{y}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Здесь $x = L \cos \theta$, $y = L \sin \theta$, а $\mu_0 I \pi R^2$ — эквивалентный дипольный момент отдельной петли. Вращающий момент, действующий на вторую петлю, можно вычислить по формуле

$$\boldsymbol{\tau} = I \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mu_0 I (\mathbf{A} \times \mathbf{H}),$$

или

$$\tau = I \pi R^2 (B_r \sin \theta + B_\theta \cos \theta) = \frac{3\pi \mu_0 I^2 R^4 \sin \theta \cos \theta}{4L^3}.$$

Вектор вращающего момента направлен в плоскость чертежа. Сила, действующая на вторую петлю, равна

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_\theta + \mathbf{F}_r,$$

где

$$\begin{aligned} F_\theta &= IR^2 \frac{dB_\theta}{dx} = -\frac{\mu_0}{4} I^2 R^4 y \frac{2 \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^3} = \\ &= -\mu_0 (IR^2)^2 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^3} = -\mu_0 (IR^2)^2 \frac{\sin \theta \cos \theta}{L^4} \end{aligned}$$

и

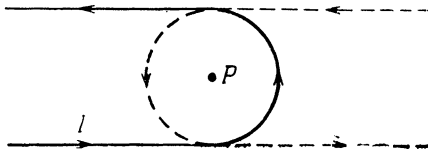
$$F_r = IR^2 \frac{dB_r}{dx} = \frac{1}{2} \mu_0 (IR^2)^2 \frac{y^2 - 3x^2}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{1}{2} \mu_0 (IR^2)^2 \frac{\sin^2 \theta - 3 \cos^2 \theta}{L^4}.$$

II.6.3. Магнитное поле в точке P , обусловленное током I в прямолинейных частях рассматриваемого провода, равно полю тока той же величины, протекающего в бесконечном прямолинейном проводе, расположенном от точки P на расстоянии r . Поле, создаваемое током I вдоль полуокружности, равно в точности половине поля кругового тока I . Следовательно, в точке P магнитное поле

$$B = 2 \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I}{2r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (2 + \pi).$$

Оно направлено по нормали к плоскости чертежа.

Приведенное здесь решение станет очевидным, если ввести в рассмотрение другой идентичный контур, как показано на рисунке штриховой линией. Теперь мы имеем два бесконечных прямолинейных провода и один круговой контур — все с токами I . Поскольку поле в точке P не зависит от поворота одного изогнутого провода относительно другого в плоскости чертежа и поля токов попросту суммируются, то поле тока в одном изогнутом проводе равно половине поля, обусловленного токами во всей рассматриваемой системе проводов.



II.6.4. Волновое уравнение в случае прямоугольного резонатора имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma^2\right)\psi = 0, \quad (1)$$

где

$$\gamma^2 = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\omega^2}{c^2} - k^2,$$

а вместо ψ может стоять любой из векторов **E** или **B** электромагнитного поля. Граничные условия для полей записываются следующим образом:

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad \text{при } x=0, a \text{ и } y=0, b.$$

Общее решение уравнения (1) имеет вид

$$\psi_{mn}(x, y) = B_0 \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, \quad (2)$$

где $m, n = 1, 2, 3, \dots$. Подставляя это решение в (1), находим

$$\gamma_{mn}^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right). \quad (3)$$

Зависимость полей от координаты z соответствует стоячим волнам:

$$\psi_k(z) = A \sin kz + C \cos kz.$$

Для выполнения граничных условий при $z = 0$ и $z = d$ множитель k должен удовлетворять соотношению

$$k = \frac{l\pi}{d}, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Собственные частоты резонатора определяем из формулы для γ после подстановки в нее выражений (4) и (3):

$$\omega_{mnl} = \frac{\pi c}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{l^2}{d^2}}.$$

В случае $a > b > d$ самая низкая частота колебаний соответствует значениям $m = 1, n = 0$ и $l = 0$, т. е.

$$\omega_{100} = \frac{\pi c}{a \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}.$$

Этой частоте соответствует поле

$$\psi_{100} = \psi_{10}(x, y) \psi_0(z) \sim \cos \frac{\pi x}{a}.$$

II. 6.5.

а) Уравнения Максвелла с учетом закона Ома $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ и в пренебрежении токами смещения¹⁾ записываются в виде

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{H} - \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E} &= 0.\end{aligned}\quad (1)$$

В случае гармонических колебаний с частотой ω во втором уравнении можно исключить поле \mathbf{E} и получить следующее волновое уравнение:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} + \frac{4\pi\sigma\mu\omega}{c^2} i\mathbf{H} = 0 \quad (2)$$

в предположении, что

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}r)}.$$

При нормальном падении плоской волны вектор \mathbf{H} параллелен границе раздела. Следовательно,

$$\nabla \approx -\mathbf{n} \frac{\partial}{\partial z},$$

а поскольку

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} = -\nabla^2 \mathbf{H} = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{H},$$

то уравнение (2) принимает вид

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) - \frac{4\pi\sigma\mu\omega}{c^2} i(\mathbf{n} \times \mathbf{H}) = 0. \quad (3)$$

где $\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{H}^t$. Это и есть искомое уравнение в частных производных.

б) Поскольку разность потенциалов электрического поля между двумя точками не зависит от пути, соединяющего эти точки, должно выполняться условие $\mathbf{E}^t = \mathbf{E}_c^t$, т. е. тангенциальная компонента электрического поля должна быть непрерывной. Если металл обладает высокой проводимостью, то заряды в его поверхностном слое движутся в такт с изменением электрического поля падающей плоской волны и \mathbf{H}_c^t в глубине металла отсутствует. Мы имеем

$$\mathbf{H}^t = \frac{4\pi}{c} \mathbf{K} \quad \text{и} \quad \mathbf{H}_c^t = 0, \quad (4)$$

¹⁾ Пренебрежение токами смещения соответствует переходу к квазистационарному приближению, в котором не учитывается запаздывание, а, значит, не могут быть описаны и электромагнитные волны. Таким образом, в этой задаче поле внутри проводника, описываемое получаемым ниже уравнением (2), не является волновым. — *Прим. ред.*

где \mathbf{K} — поверхностный ток, протекающий примерно в толще скин-слоя; $\mathbf{K} = \sigma \mathbf{E}^t$. При $z \rightarrow 0$ из (4) имеем $\mathbf{H}^t = \mathbf{H}_c^t$.

в) Используя уравнение (3), можно найти

$$\mathbf{H}_c^t = \mathbf{H}^t e^{-\frac{1+i}{\delta} z}. \quad (5)$$

Входящая в это выражение величина δ называется толщиной скин-слоя:

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\omega\sigma}}.$$

Подставляя (5) во второе уравнение Максвелла (1), получаем

$$\mathbf{E}^t = -\sqrt{\frac{\mu\omega}{8\pi\sigma}} (1+i) (\mathbf{n} \times \mathbf{H}^t) |_{z=0}.$$

Таким образом, находим поверхностный импеданс

$$Z = \sqrt{\frac{\mu\omega}{8\pi\sigma}} (1+i).$$

II. 6.6. Магнитное поле на поверхности провода имеет компоненты

$$B_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad \text{и} \quad B_r = 0, \quad (1)$$

где a — радиус провода. Электрическое поле связано с разностью потенциалов $V = IR$ на отрезке длиной L следующим образом:

$$E_L = \frac{V}{L} = \frac{IR}{L} = \frac{I}{\sigma A}. \quad (2)$$

Оно направлено вдоль провода. Вектор Пойнтинга на поверхности провода

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{\mu_0} \frac{IR}{L} \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \cdot (-\hat{\mathbf{r}}_1) = -\frac{I^2 R}{2\pi a L} \hat{\mathbf{r}}_1, \quad (3)$$

где $\hat{\mathbf{r}}_1$ — единичный вектор нормали. Как видно, вектор Пойнтинга направлен по радиусу внутрь проводника.

Энергия поля, поглощаемая проводом на длине L в единицу времени, равна

$$W = 2\pi a L S = I^2 R,$$

и она преобразуется в джоулево тепло.

II. 7.1.

а) В соответствии с законом Ампера

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 I', \quad (1)$$

где I' — ток через поверхность, ограниченную замкнутым контуром, по которому производится интегрирование.

1) $r < a$. В этом случае $I' = Ir^2/a^2$, и из (1) получаем

$$B_{\theta} = \frac{\mu_0 I'}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}. \quad (2)$$

2) $a < r < b$. $I' = I$, и из (1) следует

$$B_{\theta} = \frac{\mu_0 I'}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (3)$$

3) $b < r < c$.

$$I' = I - \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2} I = \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} I,$$

и из (1) находим

$$B_{\theta} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}.$$

4) $r > c$. В этом случае $I' = 0$. Следовательно, $B_{\theta} = 0$. Радиальные компоненты поля и компоненты вдоль оси z тождественно равны нулю во всех четырех областях.

б) Согласно определению,

$$L = \left| \frac{d\Phi/dt}{dI/dt} \right| = \left| \frac{d\Phi}{dI} \right|; \quad (4)$$

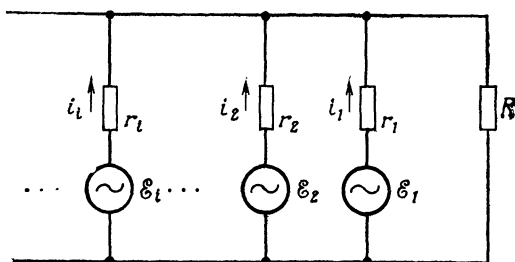
здесь Φ — полный магнитный поток, пронизывающий сечение $ABCD$. Используя выражение (3), находим

$$\Phi = l \int_a^b B_{\theta} dr = \frac{l\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

Следовательно, индуктивность

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

II. 7.2.



а) Сначала докажем общую теорию о том, что любой такой «черный ящик» эквивалентен одному источнику э. д. с. с последовательно включенным резистором. Приведенная на рисунке

схема показывает, как можно в самом общем виде соединить различные источники э. д. с. и резисторы внутри черного ящика. Пусть i_i — ток в i -й ветви электрической цепи. Для каждого замкнутого контура этой цепи можно составить следующее уравнение:

$$\mathcal{E}_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} i_j + b_i RI, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

где a_{ij} и b_i — коэффициенты, зависящие от сопротивлений резисторов. Систему (1) следует дополнить уравнением сохранения полного тока

$$\sum_{j=1}^N i_j = I. \quad (2)$$

Решая систему уравнений (1), находим токи i_j :

$$i_j = \sum_{i=1}^N (\mathcal{E}_i - b_i RI) A_{ij}, \quad j = 1, \dots, N; \quad (3)$$

здесь (A_{ij}) — обратная матрица по отношению к (a_{ij}) . Подставляя выражение (3) в (2), имеем

$$\sum_{j,i}^N (\mathcal{E}_i - b_i RI) A_{ij} = I,$$

или

$$\sum_{j,i} \mathcal{E}_i A_{ij} = I \left(1 + R \sum_{j,i} b_i A_{ij} \right). \quad (4)$$

Введем теперь обозначения

$$\mathcal{E} = \frac{\sum_{j,i} \mathcal{E}_i A_{ij}}{\sum_{j,i} b_i A_{ij}} \quad \text{и} \quad r = \frac{1}{\sum_{j,i} b_i A_{ij}}.$$

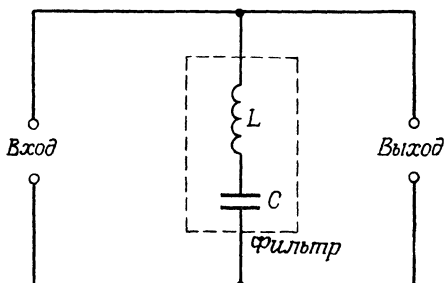
Тогда выражение (4) принимает вид

$$\mathcal{E} = I(R + r), \quad (5)$$

где \mathcal{E} — э. д. с. эквивалентного источника, r — сопротивление эквивалентного резистора.

Подставляя данные из условия задачи, получаем $\mathcal{E} = 12$ В и $r = 2$ Ом. Следовательно, чтобы в цепи протекал ток силой 0,1 А, нужно подключить резистор с сопротивлением $R = 118$ Ом.

б) Чтобы снизить пульсации напряжения частотой 60 Гц, фильтр, показанный на рисунке, должен иметь при этой частоте



очень низкое сопротивление. Следовательно,

$$LC = \frac{1}{\omega^2} = \left(\frac{1}{120\pi}\right)^2 \approx 7 \cdot 10^{-6}.$$

II. 7.3.

а)

$$\vec{\mu}_1 \leftarrow \vec{\mu}_2 E_{\text{макс}} = -\mu_1 \cdot \mathbf{H}_2 = -\mu_1 \frac{\mu_2 \cos \pi}{2\pi r^3 \mu_0} = \frac{\mu_1 \mu_2}{2\pi \mu_0 r^3}.$$

б)

$$\vec{\mu}_1 \rightarrow \vec{\mu}_2 E_{\text{мин}} = -\mu_1 \cdot \mathbf{H}_2 = -\mu_1 \frac{\mu_2 \cos 0}{2\pi r^3 \mu_0} = -\frac{\mu_1 \mu_2}{2\pi \mu_0 r^3}.$$

II. 7.4. Напряжение на конденсаторе изменяется по закону

$$V = V_0 (1 - e^{-t/RC}).$$

Подставляя сюда $V_0 = 100$ В и $V = 50$ В, находим

$$t = RC \ln 2 = (\ln 2) \cdot 10^{-4} \text{ с.}$$

II. 7.5. Перпендикулярная полю компонента скорости электрона равна

$$v_{\perp} = \frac{10^4}{\sqrt{2}} \text{ см/с} = 7,071 \cdot 10^3 \text{ см/с.}$$

Из условия равенства сил

$$\frac{mv_{\perp}^2}{R} = \frac{ev_{\perp} H}{c}$$

находим радиус траектории электрона

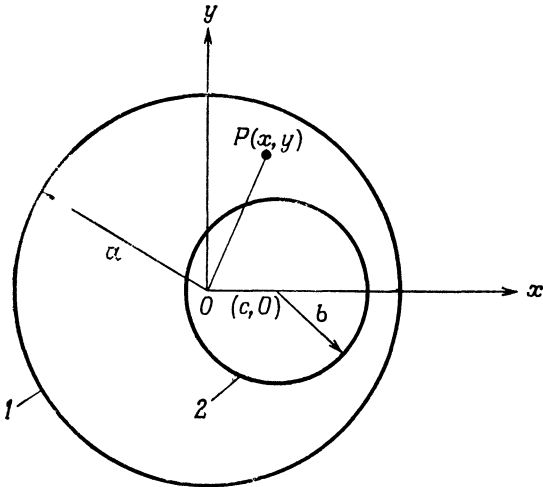
$$R = \frac{cv_{\perp} m}{eH} = \frac{(3 \cdot 10^{10}) (7,1 \cdot 10^3) (0,91 \cdot 10^{-27})}{4,8 \cdot 10^{-10} \cdot 10^4} = 4,0 \cdot 10^{-8} \text{ см.}$$

Зная v_{\perp} и R , находим частоту

$$f = v_{\perp} / 2\pi R = 2,8 \cdot 10^{10} \text{ Гц.}$$

Таким образом, электрон движется по спирали радиусом $R = 4 \cdot 10^{-8}$ см с шагом $v_{\perp} (2\pi mc / eH) = 2\pi R = 25 \cdot 10^{-8}$ см.

II. 7.6.



Рассматриваемую систему можно мысленно заменить двумя сплошными проводниками 1 и 2 радиусами a и b , по которым текут токи с плотностью J , что и в исходном проводнике. Только ток в проводнике 1 совпадает по направлению с током в исходном проводнике, а в проводнике 2 он имеет противоположное направление. Согласно принципу суперпозиции поле в любой точке пространства не изменится при такой замене. Применяя закон Ампера, находим магнитную индукцию B_1 , обусловленную током в проводнике 1:

$$B_1 = \frac{\mu_0 i}{2\pi r},$$

или

$$B_1 = \begin{cases} \frac{\mu_0 J r}{2\pi (a^2 - b^2)}, & r < a, \\ \frac{\mu_0 J a^2}{2\pi r (a^2 - b^2)}, & r > a. \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

При этом мы использовали выражения для плотности тока

$$J = \frac{I}{\pi (a^2 - b^2)};$$

$$i = J \cdot \text{Площадь} = \frac{I r^2}{a^2 - b^2} \quad \text{при} \quad r \leq a.$$

В прямоугольной системе координат, показанной на рисунке, вектор магнитной индукции \mathbf{B}_1 записывается в виде

$$\mathbf{B}_1 = B_1 \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{\mathbf{x}} - B_1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{\mathbf{y}}.$$

Мы предположили, что в проводнике 1 ток течет по направлению от читателя. Аналогично находим выражение для магнитной индукции B_2 , индуцированной током в проводнике 2:

$$B_2 = \begin{cases} \frac{\mu_0 I r'}{2\pi (a^2 - b^2)}, & r' \equiv \sqrt{(x - c)^2 + y^2} < b, \\ \frac{\mu_0 I b^2}{2\pi r' (a^2 - b^2)}, & r' > b. \end{cases}$$

Для вектора магнитной индукции \mathbf{B}_2 имеем

$$\mathbf{B}_2 = -B_2 \frac{y}{\sqrt{(x - c)^2 + y^2}} \hat{\mathbf{x}} + B_2 \frac{x - c}{\sqrt{(x - c)^2 + y^2}} \hat{\mathbf{y}}.$$

Искомое поле \mathbf{B} равно векторной сумме \mathbf{B}_1 и \mathbf{B}_2 :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \left(\frac{B_1 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{B_2 y}{\sqrt{(x - c)^2 + y^2}} \right) \hat{\mathbf{x}} - \left(\frac{B_1 x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{B_2 (x - c)}{\sqrt{(x - c)^2 + y^2}} \right) \hat{\mathbf{y}}.$$

В области $r > a$ имеем

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi (a^2 - b^2)} \left[y \left(\frac{a^2}{x^2 + y^2} - \frac{b^2}{(x - c)^2 + y^2} \right) \hat{\mathbf{x}} - \left(\frac{x a^2}{x^2 + y^2} - \frac{b^2 (x - c)}{(x - c)^2 + y^2} \right) \hat{\mathbf{y}} \right].$$

В области $r' < b$ (и $r < a$)

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi (a^2 - b^2)} \left[(y - y) \hat{\mathbf{x}} + (x - c - x) \hat{\mathbf{y}} \right] = - \frac{\mu_0 I c}{2\pi (a^2 - b^2)} \hat{\mathbf{y}}.$$

Наконец, в области $r' > b$ (но $r < a$)

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi (a^2 - b^2)} \left[\left(y - \frac{b^2 y}{(x - c)^2 + y^2} \right) \hat{\mathbf{x}} - \left(x - \frac{b^2 (x - c)}{(x - c)^2 + y^2} \right) \hat{\mathbf{y}} \right].$$

II. 8.1. При решении задачи влиянием индуктивности рамки можно пренебречь, поскольку мы рассматриваем довольно большой промежуток времени $T_1 = 10^{-4}$ с; кроме того, магнитное поле рамки пренебрежимо мало по сравнению с внешним полем. Следовательно, мы можем считать ток в рамке при $t \leq 10^{-4}$ с постоянным и равным 0,1 А. В магнитном поле B на боковые стороны рамки действуют силы

$$F_h = B l h = 10^{-3} \text{ Н} = 10^2 \text{ дин}, \quad (1)$$

а силы, действующие на верхнюю и нижнюю стороны рамки, равны нулю. Следовательно, импульс силы, действующей на каждую из боковых сторон, равен

$$\hat{F} = F_h \Delta t = 10^2 \text{ дин} \cdot 10^{-4} \text{ с} = 10^{-2} \text{ дин} \cdot \text{с}, \quad (2)$$

а импульс момента

$$\hat{\tau} = 0,02 \text{ дин} \cdot \text{см} \cdot \text{с}. \quad (3)$$

Момент инерции диска

$$I = \int_0^{D/2} \rho h x^2 2\pi x dx = \pi/2 \text{ г} \cdot \text{см}^2. \quad (4)$$

Начальная угловая скорость диска

$$\dot{\theta}_0 = \frac{\hat{\tau}}{I} = \frac{0,02}{\pi/2} \approx 0,013 \text{ рад/с}.$$

При вращении диска и рамки с угловой скоростью $\dot{\theta}$ в рамке наводятся электродвижущая сила $\dot{\theta} B h D \cos \theta$ и ток i , равный $\dot{\theta} B h D \cos \theta / R$. Следовательно, на рамку со стороны поля действует вращающий момент

$$\begin{aligned} \tau_1 &= - D h i B \dot{\theta} \cos \theta = - \frac{B^2 h^2 D^2 \cos^2 \theta}{R} \dot{\theta} = - 4 \cdot 10^{-8} \dot{\theta} \cos^2 \theta \text{ Н} \cdot \text{м} = \\ &= - 0,4 \dot{\theta} \cos^2 \theta \text{ дин} \cdot \text{см}. \end{aligned}$$

Пусть ω_0 — собственная частота колебаний маятника:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 0,628 \text{ с}^{-1}.$$

Поскольку $\dot{\theta}_0 \ll \omega_0^1$, то амплитуда колебаний мала: $A \ll 1$. Тогда уравнение движения диска записывается в виде

$$I \ddot{\theta} + I \omega_0^2 \theta = \tau_1,$$

или

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \frac{\tau_1}{I} = - \frac{B^2 h^2 D^2 \cos^2 \theta}{IR} \dot{\theta} \approx - \frac{B^2 h^2 D^2}{IR} \dot{\theta} = - b \dot{\theta}, \quad (5)$$

где $b = B^2 h^2 D^2 / IR = 0,26$. Здесь, поскольку отклонение θ мало, мы положили $\cos^2 \theta \approx 1$. Решение уравнения (5) имеет вид

$$\theta = A e^{\omega_+ t} + B e^{\omega_- t},$$

где

$$\omega_{\pm} = \frac{b \pm j \sqrt{4\omega_0^2 - b^2}}{2} = 0,13 \pm 0,615j \quad (j = \sqrt{-1}).$$

¹⁾ И начальное отклонение равно нулю. — Прим. ред.

Подставляя начальные условия $\theta = 0$ и $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0$ при $t = 0$, имеем

$$B = -A \quad \text{и} \quad A(\omega_+ - \omega_-) = \dot{\theta}_0,$$

откуда находим

$$A = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_+ - \omega_-} = \frac{0,013}{1,23j} = -0,0106j \text{ рад.}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \theta &= -0,0106 [e^{(-0,13+0,615j)t} - e^{(-0,13-0,615j)t}] j = \\ &= 0,0212e^{-0,13t} \sin(0,615t). \end{aligned}$$

Рамка с диском совершают затухающие колебания, амплитуда которых убывает по закону $0,0212e^{-0,13t}$.

II. 8.2. Ток сильно возрастает при частоте 1000 Гц. Этот факт заставляет предполагать, что внутри ящика элементы L и C соединены последовательно. Условие резонанса записывается как

$$LC = \frac{1}{\omega_R^2} = \frac{1}{(2\pi)^2 \cdot 10^6}. \quad (1)$$

При постоянном напряжении 100 В в цепи протекает ток 0,1 А. Отсюда находим сопротивление резистора

$$R = \frac{V}{I} = 1000 \text{ Ом.}$$

Резистор должен быть подключен параллельно цепи LC . Комплексная проводимость такой цепи дается выражением

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L - j/\omega C},$$

где $j = \sqrt{-1}$. Отсюда находим полный импеданс цепи

$$Z = \frac{e^{j\varphi}}{\sqrt{(1/R^2) + [\omega C/(\omega^2 LC - 1)]^2}}; \quad (2)$$

здесь

$$\varphi = \arctg \frac{\omega RC}{\omega^2 LC - 1}.$$

В соответствии с условием задачи при переменном напряжении $U_{\text{эфф}} = 100$ В, круговая частота которого $\omega = 2\pi \cdot 60$ рад/с, в цепи течет ток $I_{\text{эфф}} = 1$ А. Следовательно,

$$|Z| = \frac{U_{\text{эфф}}}{I_{\text{эфф}}} = 100 \text{ Ом.} \quad (3)$$

Из выражений (1)–(3) мы можем найти L и C . Имеем

$$\frac{1}{R^2} + \left(\frac{\omega C}{\omega^2/\omega_R^2 - 1} \right)^2 = 10^{-4},$$

откуда получаем $C = 2,63 \cdot 10^{-5}$ Ф. Индуктивность определяем из формулы (1): $L = 0,965 \cdot 10^{-3}$ Г.

П. 8.3. Запишем уравнения Максвелла в дифференциальной форме, предполагая, что поля изменяются по закону $e^{-j\omega t}$ ($j^2 = -1$):

$$\nabla \cdot \varepsilon \mathbf{E} = \rho = 0, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mu \mathbf{H} = 0, \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\mu \mathbf{H}}{c} = j \frac{\mu \omega}{c} \mathbf{H}, \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \mathbf{J} + \frac{\varepsilon}{c} \dot{\mathbf{E}} = \frac{\sigma}{c} \mathbf{E} - j \frac{\varepsilon \omega}{c} \mathbf{E} = \frac{\sigma - j\omega\varepsilon}{c} \mathbf{E}. \quad (4)$$

Исключая \mathbf{H} из уравнения (3) или \mathbf{E} из (4), получаем

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \frac{j\omega\mu}{c^2} (\sigma - j\omega\varepsilon) \mathbf{E} \quad (5)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \frac{j\omega\mu}{c^2} (\sigma - j\omega\varepsilon) \mathbf{H}. \quad (6)$$

Предположим, что плоская волна распространяется в направлении x . Тогда поля \mathbf{E} и \mathbf{H} являются функциями только x и t . Таким образом, уравнения (5) и (6) для отдельных компонент записываются в виде

$$-\frac{d^2 E_y}{dx^2} = \frac{\omega\mu}{c^2} (j\sigma + \omega\varepsilon) E_y,$$

$$-\frac{d^2 E_z}{dx^2} = \frac{\omega\mu}{c^2} (j\sigma + \omega\varepsilon) E_z,$$

$$-\frac{d^2 H_y}{dx^2} = \frac{\omega\mu}{c^2} (j\sigma + \omega\varepsilon) H_y,$$

$$-\frac{d^2 H_z}{dx^2} = \frac{\omega\mu}{c^2} (j\sigma + \omega\varepsilon) H_z.$$

Общее решение всех этих уравнений имеет вид

$$A = A_0 e^{jkx},$$

где

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu\varepsilon + j \frac{\mu\sigma}{\omega}}$$

— комплексное волновое число.

II. 8.4. Кинетическая энергия налетающей частицы минимальна, когда все частицы после столкновения движутся с одинаковыми скоростями. В данном случае это объясняется тем, что после столкновения все частицы относительно центра масс системы находятся в покое. Следовательно, инвариантная масса частиц после столкновения равна в точности сумме масс всех этих частиц:

$$M = m_p + m_n + 2m_p + m_{\bar{p}} \approx 5m_p. \quad (1)$$

Закон сохранения энергии и импульса можно записать в форме для 4-векторов:

$$P_p + P_d = P_f \equiv P_{p_1} + P_n + P_{p_2} + P_p + P_{\bar{p}}. \quad (2)$$

Квадраты 4-векторов импульса являются инвариантами:

$$(P_p \cdot P_p) = -m_p^2, \quad (P_d \cdot P_d) = -m_d^2 \quad \text{и} \quad (P_f \cdot P_f) = -M^2. \quad (3)$$

Здесь всюду принималось $c = 1$. Возведем равенство (2) в квадрат. Тогда, приняв во внимание (3), получим

$$m_p^2 + m_d^2 + 2E_p m_d = M^2;$$

здесь E_p — полная энергия протона. Она равна

$$E_p = \frac{M^2 - m_p^2 - m_d^2}{2m_d} = \frac{5}{2} m_p.$$

Следовательно, кинетическая энергия K_p налетающего протона равна

$$K_p = E_p - m_p = 3752 \text{ МэВ.}$$

II. 8.5. Цепь описывается уравнением

$$L \frac{di}{dt} + iR = V.$$

Его решение, удовлетворяющее начальному условию при $t = 0$, имеет вид

$$i = \frac{V}{R} (1 - e^{-(R/L)t}).$$

Стационарный ток в цепи равен V/R . Время t , в течение которого ток в цепи достигнет половины стационарного значения, находим из соотношения

$$0,5 = 1 - e^{-(R/L)t}.$$

Следовательно,

$$t = \frac{L}{R} \ln 2.$$

II. 8.6. Из уравнения $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$, записанного в виде

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = ky,$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = kx,$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0,$$

получаем два возможных решения для векторного потенциала \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = (kxz, -kyz, 0) \quad \text{и} \quad \mathbf{A}' = \frac{k}{2}(-x^2 + y^2) \hat{\mathbf{k}},$$

которые связаны между собой соотношением калибровочной инвариантности

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \frac{k}{2} \nabla(x^2z - y^2z);$$

следовательно, потенциалы \mathbf{A} и \mathbf{A}' тождественны.

Из уравнения $\mathbf{B} = -\nabla\varphi$, записанного в виде

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial x} = ky, \quad -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = kx \quad \text{и} \quad -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0,$$

находим выражение для скалярного потенциала φ ¹⁾:

$$\varphi = -kxy + C,$$

где C — константа.

II. 9.1. Магнитная индукция на боковой поверхности пучка равна

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ Вб/м}^2.$$

Следовательно, на электрон, движущийся вдоль границы пучка, действует сила

$$\mathbf{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Ее значение равно

$$F = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^3 \cdot 8 \cdot 10^{-3} = 1,28 \cdot 10^{-18} \text{ Н}.$$

Сила направлена к оси пучка и стремится сжать его.

¹⁾ Потенциал φ можно ввести во всем пространстве, за исключением точек, расположенных на оси z . — *Прим. ред.*

II. 9.2. В случае среды, заполненной электронами, уравнения Максвелла для гармонических полей можно записать в виде

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= i \frac{\omega}{c} \mathbf{B}, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= -i\mu\epsilon \frac{\omega}{c} \mathbf{E} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c} \mathbf{E}, & (1) \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0.\end{aligned}$$

Исключая либо \mathbf{B} , либо \mathbf{E} в первом или третьем уравнениях системы (1), приходим к волновому уравнению

$$\left(\nabla^2 + \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{4\pi\sigma\mu\omega}{c^2}\right) \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = 0, \quad (2)$$

из которого следует соотношение

$$-k^2 + \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{4\pi\mu N e^2}{m c^2} = 0; \quad (3)$$

здесь мы предположили, что \mathbf{E} и \mathbf{B} изменяются как $e^{-i\omega t + ikz}$. В случае $\mu = 1$ и $\epsilon = 1$ это соотношение принимает вид¹⁾

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right), \quad (4)$$

где

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi N e^2}{m}.$$

Частота ω_p называется плазменной частотой. Показатель преломления среды по определению равен

$$n = \frac{ck}{\omega}. \quad (5)$$

Из выражений (4) и (5) получаем

$$n = \sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}.$$

При высоких частотах падающей волны, когда $\omega > \omega_p$, показатель преломления n является действительным, и волна свободно проходит через плазму. При частотах ниже плазменной, когда $\omega < \omega_p$, показатель преломления n становится чисто мнимым. От ионосферы такие волны отражаются.

II. 9.3. Найдем сначала эквивалентную емкость C данной системы. Так как конденсаторы C_2 и C_3 соединены последовательно, то

$$\frac{1}{C_{23}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3},$$

¹⁾ Автор фактически предполагает, что среда представляет собой разреженный газ и частота ω значительно превышает все резонансные частоты вещества. — *Прим. ред.*

где C_{23} — эквивалентная емкость этих двух конденсаторов. Поскольку конденсатор C_1 соединен с цепью (C_2, C_3) параллельно, то

$$C = C_{23} + C_1 = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} + C_1.$$

Электрическая энергия, запасенная в системе, равна

$$W = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \left(C_1 + \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} \right) V^2 = \frac{(C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_1 C_3) V^2}{2 (C_2 + C_3)}.$$

II. 9.4. 10^{-5} мм рт. ст.

II. 9.5.

а) В течение времени $0 \leq t \leq t_1$ скорость рамки совпадает со скоростью свободно падающего тела, т. е. $v = gt$. К моменту времени $t = t_1$ ее скорость достигает значения

$$v_1 = gt_1 = \sqrt{2gh}.$$

б) В интервале времени $t_1 \leq t \leq t_2$ наводимая в рамке

$$\mathcal{E} \cdot \partial. \text{с.} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B \frac{dA}{dt} = -BWv,$$

где A — площадь рамки в области $y < 0$. Через рамку протекает ток

$$I = -\frac{BW}{R} v \text{ (направлен по часовой стрелке).}$$

Сила, действующая на рамку со стороны магнитного поля,

$$F = BWI = -\frac{B^2 W^2}{R} v \text{ (направлена вверх).}$$

Уравнение движения рамки записывается в виде

$$m\dot{v} = mg - \frac{B^2 W^2}{R} v.$$

Отсюда находим

$$v = \frac{mgR}{B^2 W^2} + \left(gt_1 - \frac{mgR}{B^2 W^2} \right) e^{-\frac{B^2 W^2}{mR} (t-t_1)}. \quad (1)$$

в) При $t \geq t_2$ на рамку действует только сила тяжести. Следовательно, ее скорость равна

$$v = \frac{mgR}{B^2 W^2} + \left(gt_1 - \frac{mgR}{B^2 W^2} \right) e^{-\frac{B^2 W^2}{mR} (t_2-t_1)} + g(t-t_2).$$

г) При увеличении размеров рамки в N раз на ее изготовление уйдет в N раз больше провода. Она будет иметь ширину $W' = NW$, массу $m' = Nm$ и сопротивление $R' = NR$.

Из п. «а» следует

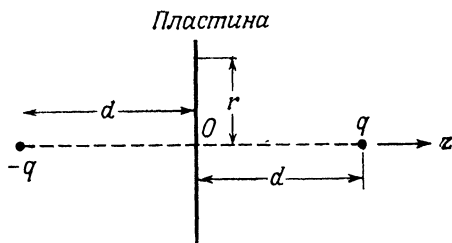
$$v' = v \text{ в интервале времени } 0 \leq t \leq t_1.$$

Подстановка R' , W' и m' вместо R , W и m оставляет прежним вид уравнения (1). Следовательно, в интервале времени $t_1 < t < t_2$

$$v' = \frac{mgR}{B^2W^2} + \left(gt_1 - \frac{mgR}{B^2W^2} \right) e^{-\frac{B \cdot W^2}{mR}(t-t_1)} = v.$$

Таким образом, пропорциональное увеличение размеров рамки не изменяет ее движения.

II. 9.6.



Если поместить заряд противоположного знака $-q$ на оси z на расстоянии d за пластиной, как показано на рисунке, и убрать пластину, то потенциал обоих зарядов во всех точках плоскости $z = 0$, в том числе и на бесконечности, будет равен нулю. Таким образом, потенциал новой системы удовлетворяет всем граничным условиям старой системы и в то же время является решением уравнения Лапласа. Поскольку при данных граничных условиях решение этого уравнения единственно, то очевидно, что поле справа от пластины эквивалентно полю упомянутых двух зарядов. Следовательно, в области $z \geq 0$ мы имеем

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(z-d)^2 + r^2}} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(z+d)^2 + r^2}}.$$

С помощью теоремы Гаусса можно получить выражение для поверхностной плотности заряда σ :

$$\sigma = \epsilon_0 E = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial V}{\partial z} \right|_{z=0},$$

или

$$\sigma = -\frac{qd}{2\pi(d^2 + r^2)^{3/2}}.$$

II. 9.7.

а) Полная энергия системы дается выражением

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \cdot \text{Объем} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 A x,$$

где $A = 1 \text{ м}^2$, $x = 0,01 \text{ м}$, $E = 10^5 \text{ В/м}$ и $\epsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$. Если увеличить расстояние x между пластинами на dx , то энергия электрического поля изменится на

$$dW = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 A dx.$$

Затраченная на это механическая работа $F dx$ должна быть равна изменению энергии dW . Следовательно,

$$F dx = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 A dx,$$

откуда находим

$$F = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 A = 0,5 \cdot 8,8 \cdot 10^{-12} \cdot (10^5)^2 \cdot 1 = 4,4 \cdot 10^{-2} \text{ Н.}$$

б) С помощью теоремы Гаусса находим

$$\sigma = \epsilon_0 E = 8,8 \cdot 10^{-12} \cdot 10^5 = 8,8 \cdot 10^{-7} \text{ Кл/м}^2.$$

II. 10.1.

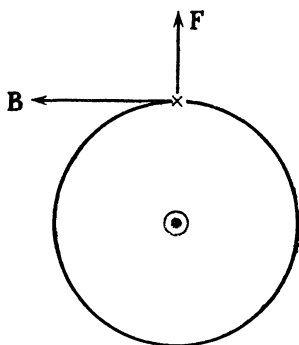
а) Медь — нормальный металл; при понижении температуры его проводимость увеличивается. Это происходит потому, что при понижении температуры энергия теплового движения электронов и атомов в металле уменьшается. Следовательно, число столкновений электронов между собой и электронов с атомами падает. Электрический ток при этом испытывает меньшее сопротивление, и проводимость увеличивается.

б) Ниобий — сверхпроводящий металл; его проводимость при температуре ниже критической температуры T_c становится бесконечной. Простое объяснение этого явления заключается в следующем. При температуре ниже критической электроны в ниобии оказываются связанными между собой посредством взаимодействия с фононами. В силу коллективного движения электронов столкновения между ними практически исключены. Поэтому в сверхпроводнике отсутствует ограничение тока в отличие от несверхпроводящего металла, где столкновения электронов играют решающую роль и вызывают переход электрической энергии в тепловую.

в) Германий — полупроводник. При очень низкой температуре большинство электронов занимает низшие энергетические уровни, и средняя энергия связи становится много больше энергии теплового движения ($3kT/2$). Количество электронов в зоне

проводимости уменьшается; следовательно, при низких температурах германий имеет плохую проводимость.

II. 10.2.

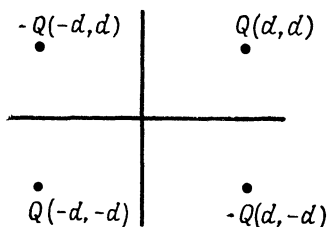


а) Решение аналогично решению задачи II. 7.1. Мы имеем

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{20}{10} = 1,4 \cdot 10^{-7} \text{ Г.}$$

б) Как показано на рисунке, сила, действующая на внешний цилиндр, направлена по радиусу и стремится разорвать цилиндр. Здесь действует такое правило: система, подключенная к источнику (например, к батарее) стремится запастись максимум энергии и увеличить свою индуктивность (так как $W = LI^2/2$).

II. 10.3.



Как показано на рисунке, при рассмотрении поля в первом квадранте действие двух проводящих плоскостей можно заметить действием трех точечных зарядов. В этом квадранте электрический потенциал определяется формулой

$$V(x, y) = Q \left(\frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + (y-d)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + (y+d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + (y+d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + (y-d)^2}} \right).$$

В остальной части пространства всюду $V(x, y) = 0$,

II. 10.4.

а) В соответствии с законом Ампера магнитное поле записывается в виде

$$B = \mu_0 \frac{Ni}{l}. \quad (1)$$

Подставляя сюда $N/l = 10\,000$ витков/м и $i = 100$ А, получаем

$$B = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10\,000 \cdot 100 = 4\pi \cdot 10^{-1} = 1,257 \text{ Вб/м}^2. \quad (2)$$

б) Магнитный поток, пронизывающий сечение сердечника, равен

$$\Phi = BA = 4\pi \cdot 10^{-1} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 10^{-4} = \pi^2 \cdot 10^{-5} \text{ Вб}, \quad (3)$$

и индуктивность

$$L = \frac{N\Phi}{i} = \frac{10^4 \cdot \pi^2 \cdot 10^{-5}}{10^2} = \pi^2 \cdot 10^{-3} \approx 10^{-2} \text{ Г}. \quad (4)$$

в) Электрическая энергия, затрачиваемая на создание магнитного поля, дается выражением

$$E = - \int_0^I \mathcal{E} i \, di, \quad (5)$$

где э. д. с. самоиндукции

$$\mathcal{E} = -L \frac{di}{dt}.$$

Подставляя ее в формулу (5), получаем

$$E = L \int_0^I i \, di = \frac{LI^2}{2} \approx 50 \text{ Дж}^1).$$

г) Энергия магнитного поля равна

$$E = \frac{B^2}{2\mu_0} Al = \frac{(4\pi \cdot 10^{-1})^2}{8\pi \cdot 10^{-7}} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 10^{-4} \cdot 1 = \frac{\pi^2}{2} \cdot 10 \approx 50 \text{ Дж}.$$

II. 10.5.

а) Начальные заряды на конденсаторах C_1 и C_2 равны соответственно C_1V и C_2V . После соединения конденсаторов на них остается общий заряд $Q = (C_1 - C_2)V$. Одна часть его

$$\frac{(C_1 - C_2)VC_1}{C_1 + C_2}$$

¹⁾ Не следует путать эту энергию с той, что отбирается от источника. Из-за различных потерь (тепловых, на излучение и др.) последняя оказывается всегда больше. Аналогичная ситуация имеет место при аккумуляции энергии электрического поля в конденсаторе. — *Прим. перев.*

сосредоточена на конденсаторе C_1 , другая

$$\frac{(C_1 - C_2)VC_2}{C_1 + C_2}$$

на конденсаторе C_2 .

б) Энергия конденсаторов до их соединения

$$E_0 = \frac{1}{2} (C_1 + C_2) V^2.$$

После соединения конденсаторов

$$E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_1 + C_2} = \frac{1}{2} \frac{(C_1 - C_2)^2 V^2}{C_1 + C_2}.$$

Следовательно, потери энергии составляют

$$\Delta E = E_0 - E = \frac{V^2}{2(C_1 + C_2)} [(C_1 + C_2)^2 - (C_1 - C_2)^2] = \frac{2C_1C_2}{C_1 + C_2} V^2.$$

III. ТЕПЛОТА, СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ОПТИКА

ЗАДАЧИ

III.1.1 (5 баллов). Оцените удельную теплоемкость одноцентовой монеты¹⁾.

III.1.2 (5 баллов). Оцените степень магнитной поляризации атомарного водорода в магнитном поле Земли на широте Беркли²⁾ при нормальных условиях³⁾.

III.1.3 (10 баллов). Молекулы газа распределены по двум состояниям с внутренними энергиями 0 и \mathcal{E} со статистическими весами g_1 и g_2 соответственно. Вычислите вклад этих состояний в молярную теплоемкость газа.

III.1.4 (5 баллов). На скалах Дувра расположена радиолокационная станция (РЛС), работающая на длине волны 5 м. С высоты 200 м она осуществляет обзор Английского канала⁴⁾. Над каналом в 20 км от РЛС на предельно малой высоте летит самолет. Оказывается, что сигналы от РЛС до него не доходят, и поэтому он не дает отраженных сигналов. Почему это происходит? С другой стороны, на определенных высотах самолет отражает чрезвычайно сильные сигналы. Что это за высоты? (Использование этого физического явления сыграло немаловажную роль для победы англичан в Битве за Англию во время второй мировой войны.)

III.1.5 (20 баллов). В камере-обскуре требуется получить изображение протяженного объекта желтого цвета. Расстояние от отверстия камеры до фогопленки равно D . Как следует выбрать диаметр отверстия d , чтобы получить изображение с максимальной резкостью? Как при таком оптимальном диаметре отверстия и неизменной чувствительности пленки время выдержки зависит от расстояния D ?

III.1.6 (20 баллов). В замкнутом сосуде объемом 1 л при комнатной температуре находится водород при начальном давлении 10^{-4} мм рт. ст. В момент времени $t = 0$ в нем мгновенно нагревают до яркого свечения проволочную спираль общей площадью поверхности $0,2$ см². Молекулы водорода при ударах о

¹⁾ Отчеканенной из меди. — *Прим. перев.*

²⁾ Примерно на средней широте. — *Прим. перев.*

³⁾ Нормальным условиям соответствуют температура 0°C и давление 760 мм рт. ст. — *Прим. перев.*

⁴⁾ Так в англосаксонских странах называют пролив Ла-Манш. — *Прим. перев.*

раскаленную спираль диссоциируют. Образовавшиеся нейтральные атомы водорода при контакте со стенками сосуда оседают на них. Чему равна приблизительно средняя длина свободного пробега молекул водорода при начальном давлении? Получите функциональную зависимость давления от времени t . Через какой промежуток времени давление в сосуде упадет до значения 10^{-7} мм рт. ст. Влиянием нагретой спирали на температуру газа можно пренебречь.

III. 1.7 (25 баллов). Тройной точке воды соответствуют следующие параметры:

- температура $0,01^\circ\text{C}$,
- давление $4,58$ мм рт. ст.,
- удельный объем твердой фазы $1,0907$ см³/г,
- удельный объем жидкой фазы $1,0001$ см³/г,
- удельная теплота парообразования 596 кал/г,
- удельная теплота плавления 80 кал/г.

Постройте диаграмму $P - T$. Детальное изображение ее не требуется, но она должна быть качественно правильной. Проследите, что произойдет с чистой водой, находящейся в сосуде при постоянной температуре -1°C и высоком начальном давлении, если в сосуде начать медленно уменьшать давление. Должны произойти два фазовых перехода. Опишите эти переходы и вычислите давления, при которых они происходят.

III. 2.1 (10 баллов). Дайте численные ответы (с точностью до одной значащей цифры) на следующие вопросы:

- а) Сколько молекул содержится в 1 см³ воздуха при нормальных условиях?
- б) Какова средняя длина свободного пробега молекулы азота в воздухе при нормальных условиях?
- в) При какой температуре среднеквадратичная скорость молекул азота станет такой, что они покинут Землю и удалятся в космос?

III. 2.2 (10 баллов).

- а) Вычислите скорость звука в воздухе при нормальных условиях.
- б) Каков предельный к. п. д. наиболее эффективных тепловых двигателей, работающих по круговому циклу сдвига тепловыми резервуарами при температурах T_1 и T_2 , когда $T_1 > T_2$?
- в) Какой физический эффект проявляется при адиабатическом размагничивании парамагнитной соли?

III. 2.3 (10 баллов)

- а) Опишите с помощью характеристических функций фазовый переход первого рода в веществе.

б) Напишите формулу Больцмана, связывающую энтропию системы в заданном состоянии с термодинамической вероятностью этого состояния.

в) Какому значению ближе всего соответствует удельная теплоемкость меди: 10^{-2} , 10^{-1} , 1 или 10 кал/(г·К)?

III.2.4 (10 баллов). Тело массой 100 г нагревают квазистатически и записывают зависимость его равновесной температуры от мощности нагрева (см. табл. 1). Затем нагрев прекращают и измеряют спад температуры (см. табл. 2). Определите

Таблица 1

Зависимость равновесной температуры тела от мощности нагрева

Мощность нагрева, Вт	Равновесная температура, °C
0	20
1	25
2	30
3	35
4	40

Таблица 2

Зависимость температуры тела от времени при охлаждении

Время, с	Температура, °C	Время, с	Температура, °C
0	40,00	300	24,74
50	35,74	350	23,75
100	32,39	400	22,95
150	29,76	450	22,32
200	27,68	500	21,83
250	26,05	—	—

удельную теплоемкость тела в Дж/(г·К), полагая, что при охлаждении температура внутри него всюду одинакова.

III.2.5 (5 баллов). Система состоит из N частиц, каждая из которых может иметь энергию $E = 0$, $E = kT$ и $E = 2kT$. Определите число частиц N , если в равновесном состоянии энергия системы равна $1000 kT$.

III.2.6 (10 баллов). Кусок льда при температуре 0°C и стакан с водой при той же температуре 0°C расположены рядом под небольшим колоколом, из которого полностью откачивают воздух.

а) Опишите конечное состояние системы под колоколом, если температура льда, воды и колокола поддерживается отдельными термостатами строго равной 0°C . Обоснуйте свой ответ. (Тройной точке воды соответствуют температура $0,0098^\circ\text{C}$ и давление $4,579$ мм рт. ст., а критической точке — температура 374°C и давление 218 атм.)

б) К какому конечному состоянию придет система, если убрать термостаты, а саму систему теплоизолировать?

III.2.7 (3 балла). Какой минимальный диаметр d должна иметь линза, чтобы с ее помощью с расстояния $D = 30$ км можно было различить два объекта, разнесенные на $x = 30$ см друг от друга?

III.2.8 (3 балла). На точечный источник света стали смотреть через плоскопараллельную стеклянную пластинку. Будет ли он казаться расположенным ближе, дальше или на том же расстоянии, что и без пластинки.

III.2.9 (3 балла). Диапроектор проецирует изображение предмета на экран. Расстояние от объектива до экрана равно $4,5$ м. Определите фокусное расстояние объектива, если предмет размером $2,5$ см оказывается увеличенным на экране до размера 60 см.

III.2.10 (3 балла). На каком расстоянии от глаза находится изображение, видимое в микроскопе?

III.2.11 (3 балла). Через узкую щель проходит монохроматический пучок света и создает на экране дифракционную картину Фраунгофера. Во сколько раз изменятся интенсивность света в центре экрана и энергия света, проходящего через щель, если увеличить ширину щели вдвое?

III.2.12 (3 балла). Кольца Ньютона формируются при соприкосновении выпуклой линзы с плоской стеклянной поверхностью. Их можно наблюдать в проходящем или отраженном свете. Больше или меньше интенсивность колец в отраженном свете, чем в проходящем, или она одинакова в обоих случаях?

III.2.13 (3 балла). Свет с круговой поляризацией падает на четвертьволновую пластинку. Какую поляризацию он имеет после выхода из пластинки?

III.2.14 (3 балла). На ирисовую диафрагму с переменным радиусом отверстия R , расположенную на расстоянии D от экрана, падает свет с длиной волны λ . Диафрагму постепенно открывают, начиная с $R \approx 0$. При каком радиусе R интенсивность света в центре экрана впервые обратится в нуль?

III. 2.15 (3 балла). Источник света и экран находятся на расстоянии l друг от друга. Между ними помещают тонкую линзу на таком расстоянии от экрана, что получают на нем четкое изображение источника. В каких пределах должно заключаться фокусное расстояние линзы, чтобы четкому изображению источника соответствовало одно положение линзы, два ее положения или не нашлось бы ни одного такого положения?

III. 2.16 (3 балла). Каковы приближенные численные значения показателя преломления стекла и его дисперсии $dn/d\lambda$ в видимой части спектра?

III. 2.17 (3 балла). При условии, данном в задаче III. 2.15, источник света имеет размер 2 см, а его изображение на экране 1 см. Линзу сдвигают в другое положение, при котором снова получают на экране четкое изображение источника. Каков размер этого изображения?

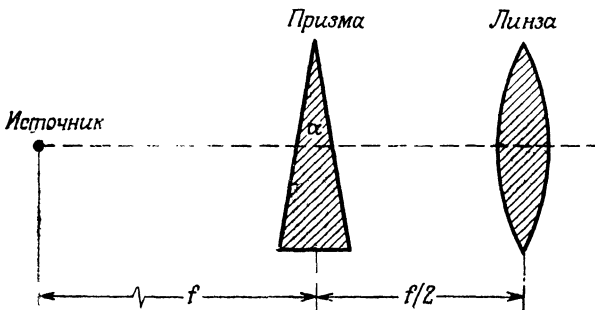
III. 2.18 (3 балла). На звезду смотрят ночью невооруженным глазом. Какой размер имеет ее изображение на сетчатке глаза?

III. 2.19 (3 балла). В каком случае плоское зеркало дает действительное изображение?

III. 2.20 (3 балла). В чем состоит сущность критерия Рэлея?

III. 2.21 (3 балла). Оптическая система состоит из двух тонких линз с фокусным расстоянием f , разнесенных на расстояние l друг от друга. Допустимы ли любые значения l ? Если нет, то при каких значениях l эта система линз имеет отрицательное фокусное расстояние?

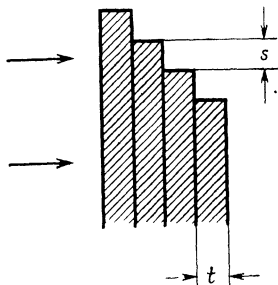
III. 3.1 (10 баллов). В оптической системе, показанной ниже на рисунке, лучи света от точечного источника вначале отклоняются призмой, а затем собираются тонкой линзой с фокусным расстоянием f . Призма изготовлена из стекла с показателем преломления n и имеет малый преломляющий угол α (т. е. допущена малоугловая аппроксимация).



а) На какой угол призма отклоняет лучи при почти нормальном падении на нее (т. е. почти перпендикулярном одной из ее граней)?

б) Определите положение изображения, формируемого системой, по горизонтали и вертикали для указанных на рисунке расстояний между источником, призмой и линзой.

III.3.2 (10 баллов). Стопа из N стеклянных пластинок с показателем преломления n и толщиной пластинок t собрана таким образом, что каждая пластинка выступает на высоту s относительно предыдущей, как показано на рисунке.



Слева на стопу падает пучок света с длиной волны λ . Рассмотрите пучки света, исходящие от каждой ступеньки, и определите условие образования интерференционной картины за стопой при малых углах падения входного пучка. Определите порядок интерференции, если $n = 1,5$, $t = 0,5$ см и $\lambda = 5000$ Å. Вычислите угловую дисперсию и разрешающую способность стопы, состоящей из 40 пластинок с тем же показателем преломления и той же толщиной пластинок. При этом предположите, что внутри стопы показатель преломления почти не меняется.

III.3.3 (10 баллов). Свет с круговой поляризацией падает на систему, состоящую из двух четвертьволновых пластинок, оптические оси которых скрещены под углом θ . Показатель преломления для необыкновенных лучей меньше, чем для обыкновенных.

а) Определите поляризацию света на выходе системы, если $\theta = 0, 45$ и 90° .

б) Можно ли утверждать, что две четвертьволновые пластинки по своему действию эквивалентны одной полуволновой пластинке?

Если среди ответов на поставленные вопросы окажется, что поляризация является круговой, то уточните, правая она или левая. Для линейной поляризации укажите ее направление. (Замечание. Если смотреть в направлении источника света, то пра-

вой круговой поляризации соответствует вращение электрического вектора волны по часовой стрелке.)

III. 3.4 (20 баллов). Предположим, что вам нужно опознать следующие оптические элементы:

- а) два линейных поляризатора,
- б) четвертьволновую пластинку,
- в) полуволновую пластинку,
- г) круговой поляризатор.

Опишите подробно, каким образом можно идентифицировать каждый из этих элементов, не прибегая к помощи других оптических устройств (за исключением лампы и экрана). Как бы вы поступили, если в п. «а» вам был бы предложен только один линейный поляризатор?

III. 3.5 (20 баллов). Рассмотрим образец из N атомов, обладающих магнитными моментами. Пусть спиновый магнитный момент каждого атома равен $1/2$. Известно, что при очень низких температурах такая система является ферромагнетиком, поскольку при $T \rightarrow 0$ все спины выстраиваются в одном направлении. Наоборот, при достаточно высоких температурах они ориентированы беспорядочно. Пренебрегая всеми степенями свободы, за исключением спиновой,

- а) определите энтропию этой системы методами статистической физики и термодинамики, выразив ее в последнем случае через теплоемкость и спиновую температуру,
- б) докажите, что теплоемкость $C(T)$ должна удовлетворять уравнению

$$\int_0^{\infty} \frac{C(T) dT}{T} = kN \ln 2$$

независимо от деталей взаимодействия, характерного для ферромагнетика, и, следовательно, без учета конкретной зависимости C от T .

III. 3.6 (20 баллов). Тонкостенный сосуд объемом V находится при постоянной температуре T . Из сосуда в окружающее безвоздушное пространство медленно вытекает газ через отверстие площадью A . Через какое время давление в сосуде упадет в e раз?

III. 3.7 (10 баллов). Предположим, что Земля и Солнце полностью поглощают падающее на них электромагнитное излучение и что Земля находится в равновесном состоянии при температуре T . Температура поверхности Солнца $T_0 = 5500$ К, радиус его $R = 7 \cdot 10^{10}$ см, радиус Земли $r = 6,4 \cdot 10^8$ см, а расстояние

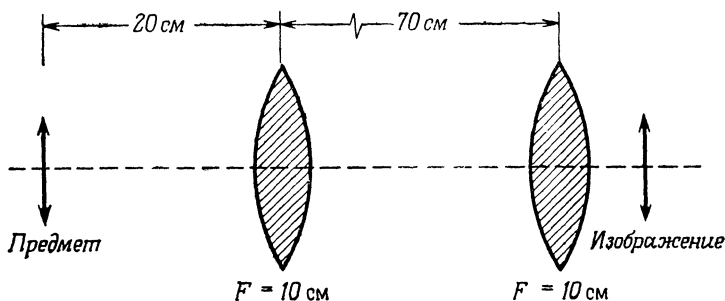
между Солнцем и Землей $D = 1,5 \cdot 10^{13}$ см. На основе этих данных вычислите температуру Земли T .

III. 4.1 (10 баллов).

а) Один литр газа N_2 , содержащийся в запаянном цилиндре при атмосферном давлении и температуре $0^\circ C$, нагревают до $100^\circ C$ посредством контакта с неограниченным тепловым резервуаром, имеющим температуру $100^\circ C$. Как изменится при этом энтропия газа и Вселенной?

б) Предположим, что одна из стенок этого цилиндра может перемещаться подобно поршню. Предложите способ повышения температуры газа до $100^\circ C$ (с конечным объемом 1 л) без изменения энтропии Вселенной. [Универсальную газовую постоянную R полагайте равной $2 \text{ кал}/(\text{моль} \cdot K)$.]

III. 4.2 (10 баллов). Покажите, как с помощью третьей линзы (см. рисунок) можно повысить светосилу оптической системы, не изменяя положений предмета и его изображения.



Укажите положение и фокусное расстояние этой дополнительной линзы.

III. 4.3 (5 баллов). Кольца Ньютона наблюдают в отраженном свете. Они формируются в тонком воздушном слое между плоской поверхностью и сферической радиусом 50 см . Определите длину волны света, если радиус третьего светлого кольца равен $0,09 \text{ см}$, а двадцать третьего — $0,25 \text{ см}$.

III. 4.4 (15 баллов). Камера заполнена воздухом. Температура ее стенок T_1 . На дне камеры разлито немного воды. Давление в камере p_1 , объем ее V_1 . Состояние системы равновесное. Объем камеры начали медленно увеличивать, сохраняя неизменной температуру стенок T_1 . Как только объем камеры удвоился ($V_2 = 2V_1$), вода на дне ее почти полностью исчезла.

- а) Определите температуру стенок T_1 , если вначале давление было $p_1 = 3$ атм, а потом стало $p_2 = 2$ атм.
- б) Каким станет давление в камере p_3 , если еще раз удвоить ее объем ($V_3 = 2V_2$)?
- в) Определите массу воды (в жидкой и парообразной фазах) и массу воздуха в камере, если известно, что $V_2 = 44,8$ л.

III.4.5 (10 баллов).

- а) Вычислите изменение энтропии одного моля идеального газа в результате свободного расширения его до удвоенного объема.
- б) Каково изменение энтропии, если два разнородных не взаимодействующих идеальных газа по одному молю каждый смешиваются вместе?
- в) Как изменится энтропия системы, если открыть клапан между двумя резервуарами равного объема, содержащими один и тот же газ при одинаковых давлениях и температуре?

III.4.6 (20 баллов). На вертикальной нити горизонтально подвешена поглощающая пластинка. Снизу ее освещает направленный вверх пучок света с правой круговой поляризацией (т. е. электрический вектор вращается по часовой стрелке, если смотреть в сторону источника света).

- а) Определите вращательный момент τ_a , действующий на пластинку в предположении, что она полностью поглощает свет, а мощность пучка поляризованного света равна 1 Вт и сосредоточена в видимой части спектра со средней длиной волны 6200 \AA . (Ответ выразите в дин·см, ответы на все последующие вопросы — в единицах τ_a .)
- б) Каким будет вращательный момент τ_b , если вместо поглощающей пластинки подвесить посеребренную с зеркальной поверхностью, так что свет будет отражаться назад, т. е. под углом 180° к первоначальному направлению?
- в) Предположим теперь, что подвешена прозрачная полуволновая пластинка. Свет проходит через нее и свободно распространяется дальше. Чему равен вращательный момент τ_b в этом случае? (Отражениями от поверхностей пластинки пренебречь.)
- г) Найдите вращательный момент τ_r , если подвешена прозрачная полуволновая пластинка с серебряным покрытием сверху — свет проходит через пластинку, отражается от ее зеркальной поверхности и снова проходит через нее.

д) Наконец, пусть подвешена прозрачная полуволновая пластинка, над которой закреплена четвертьволновая пластинка (не связанная механически с первой), посеребренная сверху (чтобы свет мог пройти через систему в обратном направлении). Какой вращательный момент τ_d действует на подвешенную пластинку?

III. 4.7 (20 баллов). Дайте краткие ответы на следующие вопросы.

а) Некая община решила ограничить у себя рождаемость и потребовала, чтобы каждая супружеская пара после рождения сына прекратила производить потомство. Какую долю среди детей будут составлять мальчики после введения этого ограничения, если до него она равнялась 51%? Ответ обоснуйте.

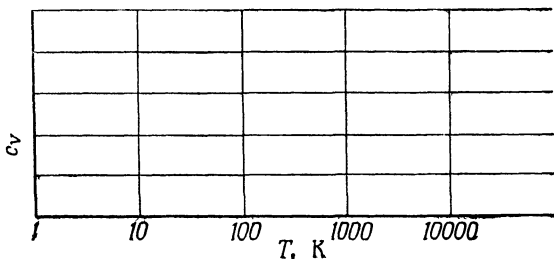
б) Предположим, что имеется устройство, способное порознь излучать электромагнитные волны и измерять их интенсивность от некоторого объекта на любой частоте. Как экспериментально определить, является ли данный объект абсолютно черным телом?

III. 4.8 (10 баллов). Образец (некоторый кристалл), содержащий большое количество протонов, помещен в однородное магнитное поле B . При облучении этого образца электромагнитными волнами с соответствующей поляризацией наблюдается максимум поглощения (связанный с переориентацией спинов протонов) при частоте 100 МГц. Какова поляризация P спинов протонов этого образца при комнатной температуре и наличии поля B ?

Замечание. P определяется следующим образом:

$$P = \frac{N(\uparrow) - N(\downarrow)}{N(\uparrow) + N(\downarrow)}.$$

III. 5.1 (5 баллов). Используя координатную сетку, изображенную на рисунке, постройте зависимость молярной теплоемкости водорода от температуры.



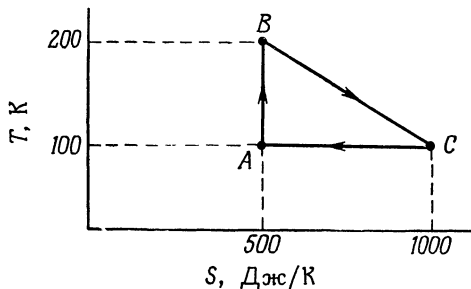
III. 5.2 (5 баллов). Через резистор сопротивлением 100 Ом течет ток 1 А. Температура резистора поддерживается с помощью термостата постоянной и равной 30 °С. Чему равна скорость увеличения энтропии резистора? Ответ выразите в Дж/(К·с).

III. 5.3 (5 баллов). При низких температурах в качестве теплообменной среды используют He^4 . Станет ли теплообмен лучше, хуже или совсем не изменится, если при тех же условиях He^4 заменить на He^3 ?

III. 5.4 (5 баллов). Заполненную газом трубку вращают вокруг одного из ее концов с угловой скоростью ω . Определите равновесное распределение плотности газа $\rho(x)$ в трубке.

III. 5.5 (5 баллов). Шарик (с моментом инерции I), подвешенный на тонкой проволоке (момент возвращающей силы равен $C\theta$), окружен газом с температурой T . Вычислите средние значения $\overline{\theta^2}$ и $\overline{\dot{\theta}^2}$. Как они изменятся, если уменьшить давление газа в миллион раз?

III. 5.6 (5 баллов). Вычислите к. п. д. обратимой машины, работающей по следующему замкнутому циклу:



III. 5.7 (5 баллов). Требуется охладить газ, пропуская его через пористую диафрагму. Что можно сказать о значении $(\partial h/\partial p)_T$ ¹⁾ при начальных условиях? Должно ли оно быть больше или меньше нуля или равно ему?

III. 5.8 (5 баллов). Частица совершает броуновское движение в газе при температуре T и давлении p_0 . Средний квадрат смещения частицы $\overline{d^2}$ обратно пропорционален вязкости газа. Увеличится, уменьшится или останется прежней величина $\overline{d^2}$, если давление газа уменьшить наполовину?

¹⁾ Символом h автор обозначает удельную энтальпию или удельную тепловую функцию. — *Прим. переа.*

III. 5.9 (5 баллов). Фотонный газ заполняет камеру объемом $V_{\text{нач}}$ при температуре $T_{\text{нач}}$. Эту систему адиабатически и обратимо расширяют до объема $V_{\text{конеч}} = 8V_{\text{нач}}$. Во сколько раз изменится температура системы?

III. 5.10 (5 баллов). Рассмотрим теплоизолированную систему, состоящую из груза, подвешенного на пружине. В исходном состоянии груз был смещен на расстояние A от положения равновесия. Затем его освободили, и система постепенно под влиянием вязкого трения пришла в состояние покоя. Изменилась ли при этом энтропия Вселенной? Если да, то на сколько?

III. 5.11 (5 баллов). Кусок меди объемом 1 см^3 находится при температуре, очень близкой к абсолютному нулю. Предположим, что электроны в нем ведут себя подобно вырожденному газу Ферми. Отметьте характерные особенности распределения электронов по энергиям (dN/dE и $E_{\text{макс}}$).

III. 5.12 (10 баллов). Вычислите минимальную работу (в джоулях), которую нужно затратить на замораживание одного литра воды с начальной температурой $T = 20^\circ\text{C}$, если используется тепловой резервуар при температуре 20°C . Удельная теплота плавления льда 80 кал/г .

III. 5.13 (15 баллов). Определите точку кипения воды на высоте 300 м над уровнем моря. Изложите подробно все этапы расчета и использованные приближения. Удельная теплота парообразования воды при нормальных условиях 540 кал/г .

III. 5.14 (10 баллов). При атмосферном давлении удельные теплоемкости воды и льда в пределах нескольких градусов t ниже точки замерзания определяются выражениями

$$c_p (\text{вода}) = 4222 - 22,6t \quad \text{Дж/(К} \cdot \text{кг)},$$

$$c_p (\text{лед}) = 2112 + 7,5t \quad \text{Дж/(К} \cdot \text{кг)}.$$

Определите удельную энтропию каждой фазы в $\text{Дж/(К} \cdot \text{кг)}$ при температуре -10°C (воспользуйтесь подходящей формулой). Какая из этих фаз находится в более упорядоченном состоянии?

III. 5.15 (10 баллов). Две линзы с фокусными расстояниями 20 и 30 см соответственно разнесены на расстояние 10 см . Перед первой линзой на расстоянии 30 см от нее перпендикулярно оптической оси системы расположен предмет высотой 5 см . Определите размер изображения, формируемого оптической системой. Выясните также, прямое оно или обратное.

III. 6.1 (10 баллов). В тонкой клинообразной пленке из пластмассы с показателем преломления $1,4$ наблюдают интерферен-

ционные полосы. Определите длину волны света, падающего нормально на пленку, если угол клина равен $20''$, а расстояние между полосами $0,25$ см.

III. 6.2 (10 баллов). Два одинаковых тела с постоянной теплоемкостью C_p используют в качестве тепловых резервуаров в тепловой машине. Их начальные температуры равны T_1 и T_2 соответственно. Получите выражение для максимальной работы, которую может совершить эта система, в предположении, что оба тела находятся при постоянном давлении и не претерпевают фазовых превращений.

III. 6.3 (10 баллов). Сосуд в форме куба с ребром 1 см содержит гелий при нормальных условиях. Каково по порядку величины

- число столкновений в секунду, испытываемых отдельным атомом гелия?
- число столкновений атомов с одной из стенок сосуда в одну секунду?

III. 6.4 (10 баллов). В идеальном электронном газе среднее число частиц в квантовом состоянии с энергией E_i равно

$$\bar{N}_i \sim \frac{1}{e^{\beta(E_i - \mu)} + 1}, \quad \text{где } \beta \equiv \frac{1}{kT}.$$

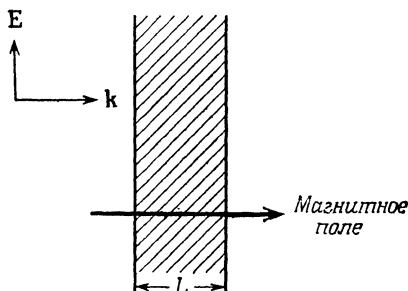
- Получите выражение, из которого можно найти μ в зависимости от плотности числа частиц n , температуры T и других параметров.
- Покажите, что эта формула в предельном случае $n\lambda^3 \ll 1$ (где λ — дебройлевская длина волны для теплового движения частиц) сводится к распределению Максвелла — Больцмана.
- Рассмотрите электронный газ в металле при комнатной температуре. Оцените степень несоответствия предельному случаю и покажите, что статистика Максвелла — Больцмана не применима к этому газу.

III. 6.5 (10 баллов). В ионизованной среде, находящейся в постоянном магнитном поле, распространяется в направлении поля плоская электромагнитная волна с частотой ω . Показатель преломления этой среды дается выражением

$$n_{\pm}^2(\omega) = 1 - \frac{K}{\omega(\omega \pm \Omega)},$$

где K и Ω — постоянные величины, а знак $+$ или $-$ соответствуют *вращению* электрического вектора волны в обратном или прямом направлении относительно вращения электронов в

данном магнитном поле. Рассмотрим в такой среде слой толщиной L , перпендикулярно которому направлено магнитное поле. Определите величину фарадеевского вращения, т. е. угол, на который поворачивается плоскость поляризации волны при прохождении ею этого слоя, в зависимости от приведенных постоянных. Отражениями волны от поверхностей слоя пренебрегите. Частоту ω полагайте достаточно большой, чтобы выполнялось условие $n_{\pm}^2 > 0$.



III. 6.6 (5 баллов). Аквариум заполняется водой. В нем неподвижно застыла рыбка — она смотрит вертикально вверх и видит расположенный над водой источник монохроматического света. Вычислите сдвиг частоты света $\Delta\nu$, наблюдаемого рыбкой, если уровень воды в аквариуме поднимается со скоростью dh/dt (показатель преломления воды равен n).

III. 6.7 (5 баллов). Показатели преломления кварца для света с длиной волны $5829,90 \text{ \AA}$ равны $n_e = 1,55379$ и $n_o = 1,54225$. Какой толщины должна быть четвертьволновая пластинка из этого кварца, вырезанная вдоль его оптической оси?

III. 6.8 (10 баллов). Разрешающая способность интерферометра Фабри — Перо определяется по формуле

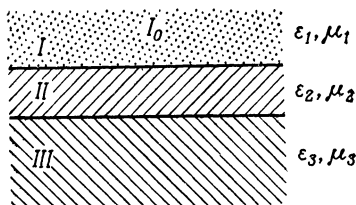
$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{m\pi r}{1 - r^2},$$

где m — порядок интерференции, r^2 — коэффициент отражения зеркал (r^2 чуть меньше единицы). Любой газовый лазер имеет на своих концах зеркала и излучает спектр линий, соответствующих различным порядкам интерференции волн между этими зеркалами. Предположим, что длина лазера равна 30 см и он излучает свет со средней длиной волны 6000 \AA .

- Определите разность длин волн $\Delta\lambda$ между двумя соседними линиями излучения вблизи длины волны 6000 \AA .
- Какой минимальный коэффициент отражения должны иметь зеркала в интерферометре Фабри — Перо, располо-

женные на расстоянии 1,5 см друг от друга, чтобы с его помощью можно было разрешить две линии с разностью длин волн $\Delta\lambda$, найденной в п. «а»?

III. 6.9 (20 баллов). Среда состоит из трех слоев, как показано ниже на рисунке. Из слоя I на слой II падает нормально электромагнитная волна с интенсивностью I_0 . Определите интенсивность волны, проходящей в слой III (считайте, что он простирается вниз до бесконечности), и интенсивность отраженной волны в слое I (распространяющейся в направлении, противоположном падающей волне).



III. 6.10 (5 баллов). Исходя из ограничений, налагаемых дифракцией, вычислите максимальное расстояние l , на котором человеческий глаз может различить две светящиеся фары автомобиля.

III. 6.11 (5 баллов).

- Свет, отраженный от плоской поверхности диэлектрика, полностью поляризован. Какой угол образуют отраженный и преломленный лучи света?
- Какой угол с нормалью составляет в этом случае преломленный луч?

III. 7.1 (3 балла). Две близко расположенные параллельные щели освещают вначале красным светом, а затем фиолетовым. В каком случае за щелями получается более широкая интерференционная картина?

III. 7.2 (3 балла). Где располагается изображение предмета, помещенного в центр кривизны вогнутого сферического зеркала?

III. 7.3 (3 балла). В какой плоскости расположен вектор \mathbf{E} поляризованного света после отражения его от стекла под углом Брюстера?

III. 7.4 (3 балла). Пучок света сходится в точке P . На пути пучка перед точкой P , ставят плоскопараллельную стеклянную пластинку. В каком направлении сместится точка сходимости пучка, если пластинка расположена перпендикулярно его оси?

III. 7.5 (3 балла). Объект расположен на главной оптической оси между тонкой собирающей линзой и ее фокусом. Где расположено изображение объекта?

III. 7.6 (3 балла). Какая граница спектра (красная или фиолетовая) данного порядка интерференции в дифракционной решетке расположена ближе к спектру следующего, более высокого порядка?

III. 7.7 (3 балла). Что можно сказать о фокусном расстоянии f тонкой собирающей линзы для красного света? Больше оно или меньше, чем для фиолетового света?

III. 7.8 (3 балла). Объект помещен за фокальной плоскостью тонкой рассеивающей линзы. Какое будет изображение — действительное или мнимое?

III. 7.9 (3 балла). Какие aberrации свойственны линзам, но отсутствуют в зеркалах?

III. 7.10 (3 балла). Какие опыты дают прямое подтверждение поперечности световых волн?

III. 7.11 (3 балла). Какому углу между отраженным и преломленным лучами соответствует отражение света с полной поляризацией?

III. 7.12 (3 балла). В каком случае луч, не параллельный главной оптической оси, проходит без изменения направления через толстую линзу?

III. 7.13 (3 балла). Какому диапазону частот соответствует видимый участок спектра электромагнитных волн?

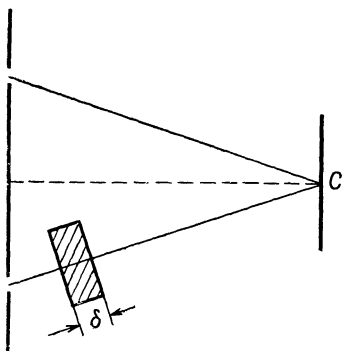
III. 7.14 (3 балла). Монохроматический пучок света падает из вакуума на среду с показателем преломления n . Как связаны между собой частоты падающей и преломленной волн? Каково соотношение между длинами этих волн?

III. 7.15 (3 балла). Пресс-папье в виде стеклянного полушария лежит на странице книги. Определите положение и масштаб изображения буквы, находящейся в центре, под плоской поверхностью пресс-папье. Дайте иллюстрацию своему расчету; изобразите ход лучей, используя в качестве предмета небольшую стрелку вместо буквы. Показатель преломления стекла полагайте равным 1,5.

III. 7.16 (15 баллов). Как показано на рисунке, две близко расположенные параллельные щели, каждая шириной w ($w \ll \ll \lambda$), освещаются монохроматическим светом от удаленного ис-

точника. На большом расстоянии от щелей наблюдают интерференционную картину.

Между одной из щелей и экраном вводят поочередно тонкие стеклянные пластинки различной толщины δ и измеряют интенсивность света в центре экрана C как функцию толщины δ . Поглощение света в стеклянных пластинках отсутствует. Пусть при $\delta = 0$ интенсивность света в центре экрана равна I_0 .



- а) Как зависит интенсивность света в центре экрана C от толщины пластинки δ ?
- б) При каких значениях δ интенсивность света в центре минимальна?
- в) Предположим, что ширину одной щели увеличили вдвое, а ширину другой оставили без изменения. Как в этом случае будет зависеть интенсивность в центре экрана от толщины δ ?

III. 7.17 (20 баллов). Скорость звука в воздухе ≈ 330 м/с. Имеется свисток, который издает непрерывный тон с частотой 3300 Гц. На большом расстоянии от свистка находится диск диаметром 2 м из идеального звукопоглощающего материала. Он расположен перпендикулярно линии, соединяющей свисток и центр диска.

Если вы находитесь непосредственно за диском, то никакого звука от свистка не услышите. Если вы отойдете от диска на большое расстояние и он по-прежнему будет скрывать свисток от вас, то вы, вероятно, сочтете, что опять не услышите звука. Однако это не так — вы его услышите, причем столь же явно, как и без диска.

- а) Почему это происходит? (*Замечание.* Пренебрегите влиянием земной поверхности, строений, деревьев и т. п. Считайте, что свисток расположен в однородном воздушном пространстве, а вы и диск «подвешены» в этом

пространстве, например, с помощью воздушных шаров или чего-либо еще.)

б) Получите формулу (по возможности наиболее простым путем), чтобы дать ответ на такой вопрос: на каком расстоянии (в метрах) вы должны находиться позади диска, чтобы при его введении интенсивность звука упала примерно вдвое? Определите это расстояние не более чем с двукратной ошибкой.

III. 7.18 (10 баллов). Пучок света ($\lambda = 6000 \text{ \AA}$) от находящегося на Земле лазера фокусируют с помощью телескопа, диаметр линзы (или зеркала) которого равен 2 м, на лунный кратер (расстояние от Земли до Луны 400 000 км). Каков будет размер светового пятна на Луне? Влиянием земной атмосферы пренебрегите.

III. 8.1 (5 баллов). В неподвижном сосуде содержится газ. Масса молекулы газа равна m . Предположим, что газ находится в равновесном состоянии при абсолютной температуре T . Обозначим через V_x компоненту скорости молекулы в направлении x . Определите средние значения \bar{V}_x , $\overline{V_x^2}$ и $\overline{V_x^3}$.

III. 8.2 (5 баллов). В опыте Милликена с падающими каплями установившаяся скорость масляной капли обратно пропорциональна вязкости воздуха. Как изменится установившаяся скорость падения капли (увеличится, уменьшится или останется постоянной), если возрастет температура воздуха?

III. 8.3 (5 баллов). 50 г молока с температурой T_1 медленно вливают в 250 г жидкого кофе с температурой T_2 . Их удельные теплоемкости полагайте такими же, как у воды. Какая установится конечная температура смеси T_f . Чему равно общее изменение энтропии ΔS ?

III. 8.4 (5 баллов). Идеальный одноатомный газ подвергают сжатию (без подвода или отвода тепла), и его объем уменьшается вдвое. Каково отношение нового давления к первоначальному?

III. 8.5 (5 баллов). Теплоемкость электронного газа в металле $C = \gamma T$, где T — абсолютная температура, γ — константа. Какой вклад оказывает этот электронный газ в энтропию металла S ?

III. 8.6 (5 баллов). Движение атомов, находящихся в состоянии теплового равновесия при абсолютной температуре T , приводит к доплеровскому уширению спектральной линии. Например, если v_z — компонента скорости атома в направлении z , а v_0 —

естественная частота линии, то излучение наблюдается с частотой $\nu = \nu_0(1 + v_z/c)$. Чему равен средний квадрат ширины линии $(\nu - \nu_0)^2$?

III. 8.7 (5 баллов). Твердое тело плотностью ρ_1 плавится при давлении p и абсолютной температуре T , превращаясь в жидкость плотностью ρ_2 . Удельная теплота плавления тела L . Определите изменение энтропии ΔS и изменение внутренней энергии ΔU в результате перехода одного грамма вещества в расплавленное состояние.

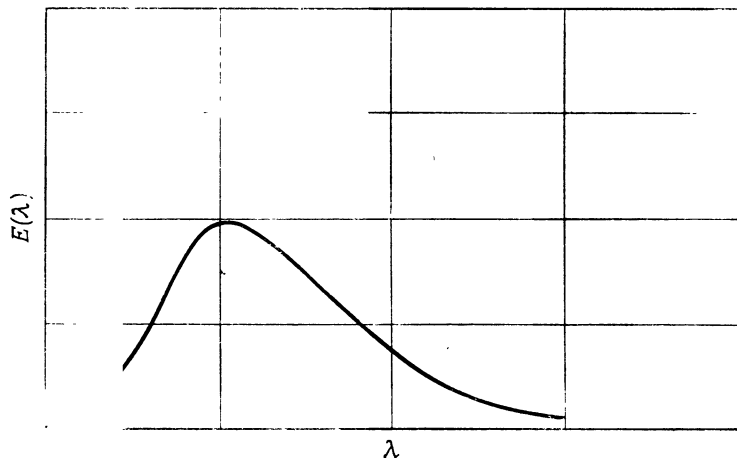
III. 8.8 (5 баллов). Атом может находиться в любом из двух квантовых состояний с разностью энергий E . Постройте качественную зависимость удельной теплоемкости C ансамбля таких атомов от абсолютной температуры T . Не забудьте правильно отразить предельные случаи $T \rightarrow 0$ и $T \rightarrow \infty$.

III. 8.9 (5 баллов). Газ состоит из двухатомных «жестких» (т. е. не колеблющихся) молекул. На основе квантовомеханического подхода определите молярную теплоемкость этого газа

- а) при «низких» температурах,
- б) при «высоких» температурах.

(Критерий для «низких» и «высоких» температур установите сами.)

III. 8.10 (5 баллов). Мощность излучения абсолютно черного тела в интервале длин волн от λ до $\lambda + d\lambda$ равна $E(\lambda)d\lambda$. Ниже на рисунке приведен график зависимости $E(\lambda)$ при температуре тела 2000 К. Постройте в этом же масштабе зависимость $E(\lambda)$ для температуры тела 1000 К.



III. 8.11 (20 баллов).

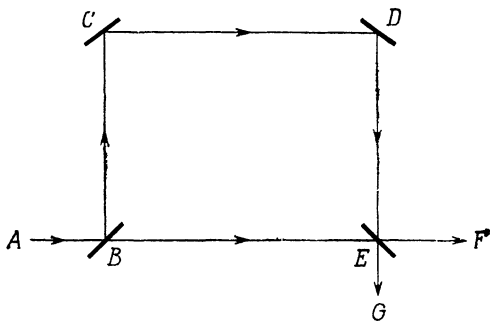
а) Вычислите максимальную работу (в джоулях), которую может произвести тепловая машина, если в качестве первого теплового резервуара используется кусок железа массой 200 кг с начальной температурой 1500°C , а в качестве второго — вода океана с температурой 12°C . Удельная теплоемкость железа постоянна и равна $0,6 \text{ Дж}/(\text{К}\cdot\text{г})$.

б) Вычислите изменение энтропии Вселенной, вызванное этим процессом.

III. 8.12 (20 баллов).

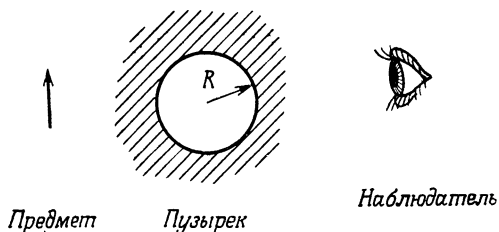
а) Полупрозрачное зеркало с серебряным покрытием отражает половину падающего на него света, а другую половину пропускает. Предположим, что на зеркало падает линейно-поляризованный свет, электрический вектор которого параллелен плоскости зеркала. Определите изменения фаз отраженной и прошедшей волн (полагая толщину зеркала равной нулю).

б) Пучок монохроматического когерентного света с такой же поляризацией, как и выше, проходит в направлении A на систему зеркал, расположенных в углах прямоугольника, как показано на рисунке. Зеркала B и E полупрозрачные, а C и D отражают свет полностью. Оптические длины путей подобраны так, что в направлении G происходит полное интерференционное гашение света. По закону сохранения энергии в направлении F должна наблюдаться интерференция с усилением света. Покажите, что это происходит на самом деле.



III. 8.13 (10 баллов). Лучи света от предмета, помещенного в воду (с показателем преломления $n = 4/3$) пересекают сфери-

ческий воздушный пузырек радиусом R , как показано на рисунке.



В каком месте располагается изображение предмета, если
 а) он удален от пузырька по горизонтали на огромное расстояние (практически на бесконечность)? Выясните, является ли изображение прямым или обратным, действительным или мнимым.

б) предмет касается пузырька с левой стороны?

Рассмотрите только лучи, проходящие вблизи горизонтальной оптической оси.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

III. 1.1. Здесь важно иметь в виду следующее: при обычных температурах к меди применим закон Дюлонга и Пти, т. е. ее молярная теплоемкость равна $3R \approx 6$ кал/(К·моль).

Атомы меди совершают колебания в трех направлениях относительно положения равновесия в узлах решетки. Потенциальная энергия атомов является квадратичной функцией смещений x , y и z от положения равновесия, а кинетическая энергия — квадратичной функцией скоростей dx/dt , dy/dt и dz/dt . Следовательно, имеется шесть степеней свободы¹⁾. Частоты колебаний таковы, что $kT \gg \hbar\omega$, поэтому справедлив классический закон о равномерном распределении энергии по степеням свободы, и молярная теплоемкость равна $6(R/2) = 3R$.

Удельная теплоемкость, или теплоемкость одного грамма вещества, показывает, во сколько раз она отличается от удельной теплоемкости воды, которая, согласно определению, равна 1 кал/(г·К). Следовательно, масса монеты здесь никакой роли не играет, существен лишь атомный вес меди:

$$c_v \approx 3R \text{ (кал/К} \cdot \text{моль)} \frac{1 \text{ моль}}{63,5 \text{ г}} = \frac{6}{63,5} \approx 0,1 \text{ кал/(К} \cdot \text{г)}.$$

III. 1.2. Здесь стоит вопрос о порядке величины. Степень поляризации будет порядка $\mu_B H/kT$, где μ_B — магнетон Бора. Она непосредственно следует из выражения для показателя степени при бoльцмановском распределении и в процентном отношении равна $100\mu_B H/kT$.

Большинство физиков знают, что $\mu_B \approx 10^{-20}$ эрг/Гс. Это значение нетрудно вычислить по формуле $\mu_B = e\hbar/2m_e c$. Магнитное поле Земли на средней широте равно примерно 0,5 Гс. Следовательно, при нормальных условиях

$$\mu_B H/kT \approx (10^{-20})(0,5)/(1,4 \cdot 10^{-16})(273) \approx 10^{-7}.$$

Отсюда видно, что поляризация в действительности очень мала.

¹⁾ В действительности здесь важно то, что число степеней свободы равно 3 и средняя кинетическая энергия молекул равна их средней потенциальной энергии. — *Прим. ред.*

III.1.3. Эту задачу можно решить формально, записав статистическую сумму

$$Z = g_1 + g_2 \exp(-\mathcal{E}/kT)$$

и используя затем формулу, связывающую внутреннюю энергию со статистической суммой. Однако мы дадим решение, в котором применяется только распределение Больцмана.

Пусть n_1 — число молекул в состоянии 1, а n_2 — число молекул в состоянии 2. Тогда

$$n_2/n_1 = (g_2/g_1) \exp(-\mathcal{E}/kT).$$

Рассмотрим один моль газа. В этом случае $n_1 + n_2 = N_0$ — число Авогадро. Выражая n_2 через N_0 и n_1 , имеем

$$(N_0 - n_1)/n_1 = (g_2/g_1) \exp(-\mathcal{E}/kT).$$

Отсюда находим

$$n_1 = \frac{N_0}{1 + (g_2/g_1) \exp(-\mathcal{E}/kT)}$$

и

$$n_2 = \frac{N_0 (g_2/g_1) \exp(-\mathcal{E}/kT)}{1 + (g_2/g_1) \exp(-\mathcal{E}/kT)}.$$

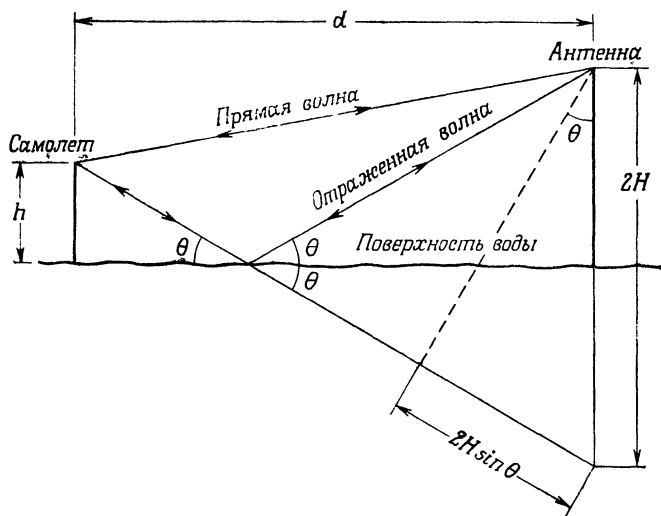
Следовательно, внутренняя энергия одного моля газа составляет

$$U_{\text{внутр}} = n_1 \mathcal{E}_1 + n_2 \mathcal{E}_2 = \frac{N_0 \mathcal{E} (g_2/g_1) \exp(-\mathcal{E}/kT)}{1 + (g_2/g_1) \exp(-\mathcal{E}/kT)}.$$

Искомая молярная теплоемкость газа при постоянном объеме будет

$$\begin{aligned} (C_V)_{\text{внутр}} &= \left(\frac{\partial U_{\text{внутр}}}{\partial T} \right)_V = \\ &= \frac{\left(1 + \frac{g_2}{g_1} e^{-\mathcal{E}/kT} \right) N_0 \mathcal{E} \frac{g_2}{g_1} e^{-\mathcal{E}/kT} (\mathcal{E}/kT^2) - N_0 \mathcal{E} \frac{g_2}{g_1} e^{-\mathcal{E}/kT} \frac{g_2}{g_1} e^{-\mathcal{E}/kT} (\mathcal{E}/kT^2)}{\left[1 + (g_2/g_1) e^{-\mathcal{E}/kT} \right]^2} = \\ &= \frac{(N_0 \mathcal{E}^2/kT^2) (g_2/g_1) e^{-\mathcal{E}/kT}}{\left[1 + (g_2/g_1) e^{-\mathcal{E}/kT} \right]^2} = \frac{(N_0 \mathcal{E}^2/kT^2) g_1 g_2 e^{+\mathcal{E}/kT}}{(g_1 e^{+\mathcal{E}/kT} + g_2)^2}. \end{aligned}$$

III. 1.4. Здесь мы имеем дело, по существу, с зеркалом Ллойда.



Когда самолет летит очень низко над водой, на него падают две волны: прямая волна от передающей антенны РЛС и волна, отраженная от водной поверхности, прошедшая путь такой же длины от передатчика. (На рисунке положение самолета изображено умышленно выше, чтобы не произошло наложения прямого и отраженного лучей.) Поскольку при отражении от воды фаза волны изменяется на противоположную, то прямая и отраженная волны, идущие под малым углом к самолету, взаимно уничтожают друг друга, и на него не поступает никакого сигнала.

При некоторой высоте самолета над водой разность хода между обеими волнами может достигнуть значения $\lambda/2$, тогда РЛС принимает сильный отраженный сигнал. Вообще, прием сильных сигналов соответствует разности хода $(n + 1/2)\lambda$, где $n = 0, 1, 2$ и т. д. При этом из рисунка видим, что $(n + 1/2)\lambda \approx 2H \sin \theta$, или $H + h \approx d \sin \theta = (n + 1/2)\lambda d/2H$. В рассматриваемом случае $\lambda d/2H = (5)(2 \cdot 10^4)/2(200) = 250$ м. Таким образом, прием сильных отраженных от самолета сигналов соответствует высотам $h = [(3/2, 5/2, \dots \text{ и т. д.}) \cdot 250 - 200]$ м.

III. 1.5. При достаточно большом отверстии камеры изображение любой точки объекта представляет собой геометрическую тень, отбрасываемую этим отверстием. Тень имеет форму диска с диаметром, примерно равным диаметру отверстия d .

При достаточно малом отверстии камеры изображение точки представляет собой дифракционный диск с угловым диаметром, равным приблизительно $2(1,22\lambda/d) \approx 2,4\lambda/d$, или линейным диаметром на фотопленке около $2,4\lambda D/d$. Чтобы получить резкое изображение объекта, эту величину следует уменьшить. Оптимальный диаметр отверстия соответствует случаю, когда размеры дифракционного изображения и геометрической тени одинаковы, т. е. когда

$$d \approx 2,4 \frac{\lambda D}{d}, \quad \text{или} \quad d = \sqrt{2,4\lambda D}.$$

Световой поток, пропускаемый отверстием камеры, пропорционален площади этого отверстия, т. е. d^2 . Площадь изображения объекта на фотопленке пропорциональна D^2 . Следовательно, освещенность пленки L пропорциональна отношению

$$\frac{d^2}{D^2} = 2,4 \frac{\lambda D}{D^2} = 2,4 \frac{\lambda}{D}, \quad \text{или} \quad L \sim \frac{\lambda}{D}.$$

Время выдержки обратно пропорционально освещенности L , или прямо пропорционально D .

III. 1.6. Средняя длина свободного пробега λ дается формулой $\lambda \approx 1/nS$, где n — число молекул в единице объема, а $S = \pi d^2$ — сечение столкновения. В нашем случае

$$n = (10^{-4}/760) (6,0 \cdot 10^{23}/22,4 \cdot 10^3) = 3,53 \cdot 10^{12} \text{ молекул/см}^3.$$

Для величины d можно принять значение, в четыре раза превышающее радиус первой борновской орбиты, т. е. $d \approx 2 \cdot 10^{-8}$ см. Подставляя в формулу для λ значения n и d , получаем

$$\lambda = 1/(3,5 \cdot 10^{12}) \pi (4 \cdot 10^{-16}) = 230 \text{ см.}$$

Столь большая величина λ указывает на то, что образовавшиеся в результате диссоциации молекулы атомарного водорода не испытывают никаких столкновений с остальными молекулами и беспрепятственно движутся к стенкам сосуда. Таким образом, скорость спада давления полностью определяется числом молекул, диссоциированных на разогретой спирали в единицу времени.

Число молекул, бомбардирующих поверхность спирали в единицу времени, равно $(1/4)n\bar{v}A$, где \bar{v} — средняя скорость молекул

$$(\bar{v} = \sqrt{8RT/\pi M}). \quad \text{Следовательно,}$$

$$\frac{d}{dt}(nV) = -\frac{1}{4}n\bar{v}A,$$

откуда

$$n = n_0 e^{-(\bar{v}A/4V)t};$$

здесь V — объем сосуда (1 л). Поскольку давление газа в сосуде пропорционально числу содержащихся в нем молекул n , то последнее выражение эквивалентно следующему:

$$p = p_0 e^{-(\bar{v}A/4V)t}.$$

Таким образом, давление p спадает со временем по экспоненциальному закону. Время t , в течение которого давление уменьшается в 10 раз, находим из уравнения

$$e^{-(\bar{v}A/4V)t} = 0,1, \quad \text{или} \quad -\frac{\bar{v}At}{4V} = -\frac{1}{0,4343}.$$

Следовательно,

$$t = \frac{4V}{0,4343\bar{v}A}.$$

Подставляя сюда $V = 10^3 \text{ см}^3$, $A = 0,2 \text{ см}^2$ и

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{(8)(8,31 \cdot 10^7)(300)}{2\pi}} = 17,8 \cdot 10^4 \text{ см/с},$$

получаем

$$t = \frac{(4)(10^3)}{(0,4343)(17,8 \cdot 10^4)(0,2)} = 0,26 \text{ с}.$$

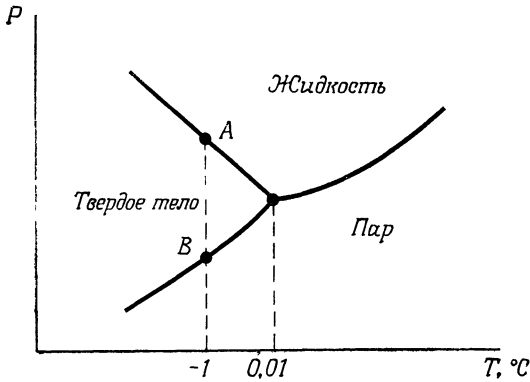
Это время, за которое давление спадает в 10 раз. Чтобы давление снизилось в 1000 раз требуется время $t = (3)(0,26) = 0,78 \text{ с}$.

III. 1.7. Диаграмма $P - T$ для воды приведена ниже на рисунке. Кривая плавления имеет отрицательный наклон, и ее производная терпит разрыв в тройной точке, где сходятся кривые сублимации (возгонки) и испарения. Обе эти особенности кривой следуют из уравнения Клапейрона — Клаузиуса

$$\frac{dP}{dT} = \frac{L}{T \Delta V}.$$

Отрицательный наклон кривой плавления объясняется тем, что объем воды при замораживании увеличивается. Наклон кривой испарения меньше наклона кривой сублимации вследствие

того, что теплота парообразования меньше теплоты сублимации довательно, при нормальных условиях



Процесс, который требуется рассмотреть в задаче, соответствует спуску по вертикальной прямой, проходящей через точки A и B . В точке A жидкость, находящаяся при высоком давлении, переходит в твердую фазу. В точке B происходит сублимация этой фазы.

Чтобы вычислить давление P_A в точке A , нужно найти изменение давления вдоль кривой плавления, соответствующее понижению температуры на 1,01 градуса. Определяем сначала

$$\frac{dP}{dT} = \frac{L}{T \Delta V} \approx \frac{(80)(4,184 \cdot 10^7)}{(273)(1,0001 - 1,0907)} \text{ (дин/см}^2 \cdot \text{К)} \cdot \frac{1 \text{ атм}}{1,013 \cdot 10^6 \text{ дин/см}^2} = -133,6 \text{ атм/К.}$$

Следовательно,

$$P_A = P \text{ (в тройной точке)} + 133,6 \cdot 1,01 = P \text{ (в тройной точке)} + 134,9 \text{ атм} \approx 135 \text{ атм.}$$

Чтобы найти давление P_B в точке B , мы должны найти изменение давления вдоль кривой сублимации при понижении температуры на те же 1,01 градуса. Для простоты будем полагать, что к пару применимо уравнение состояния идеального газа $PV = nRT$.

Отсюда

$$V_{\text{пар}} = \left(22,4 \cdot \frac{10^3}{18}\right) \left(\frac{760}{4,58}\right) = 2,06 \cdot 10^5 \text{ см}^3/\text{г}$$

и

$$\frac{dP}{dT} = \frac{(80 + 596)(4,184 \cdot 10^7)}{273 \cdot 2,06 \cdot 10^5} \cdot \frac{1 \text{ мм рт. ст.}}{1,359 \cdot 980 \text{ дин/см}^2} = 0,378 \text{ мм рт. ст./К.}$$

Следовательно,

$$P_B = P \text{ (в тройной точке)} = 0,378 \cdot 1,01 = \\ = 4,58 - 0,38 = 4,20 \text{ мм рт. ст.}$$

III. 2.1.

а)

$$n = \frac{N_0}{V_0} = \frac{6,02 \cdot 10^{23}}{22,4 \cdot 10^3} \approx 3 \cdot 10^{19} \text{ молекул/см}^3.$$

б) Средняя длина свободного пробега $L = 1/\pi n \sigma^2$, где σ — диаметр молекулы N_2 : $\sigma \approx 3 \cdot 10^{-8}$ см. Следовательно,

$$L = \frac{1}{\pi (3 \cdot 10^{19}) (3 \cdot 10^{-8})^2} = \frac{1}{85 \cdot 10^3} \approx 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ см.}$$

в) Среднюю кинетическую энергию одной молекулы N_2 , или

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle, \quad (1)$$

следует приравнять $(3/2)kT$:

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} kT, \quad (2)$$

откуда

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

Чтобы удалить молекулу азота с поверхности Земли, нужно совершить работу против поля земного притяжения. Эта работа дается выражением¹⁾

$$\text{Работа} = (\text{Разность потенциалов}) \cdot m = mg \int_{r_0}^{\infty} \frac{r_0^2}{r^2} dr = mgr_0, \quad (3)$$

где r_0 — радиус Земли. Используя выражения (1) и (3), найдем необходимое условие, когда молекулы N_2 удаляются в космос:

$$\frac{3}{2} kT = mgr_0,$$

откуда получаем

$$T = \frac{2mgr_0}{3k} = \frac{2Mgr_0}{3R} = \frac{2 \cdot 28 \cdot 980 \cdot 6,38 \cdot 10^8}{3 \cdot 8,31 \cdot 10^7} \approx 140 \text{ 000 К.}$$

Здесь M — молекулярная масса азота, равная 28 г/моль.

¹⁾ Автор использует неудачное выражение, скрывающее явную зависимость g от r_0 : $g = GM_3/r_0^2$. — Прим. пзд.

III. 2.2.

а) Скорость звука в воздухе дается выражением

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}},$$

где $M \approx 29$ г/моль — средняя молекулярная масса воздуха, $\gamma = c_p/c_v = 1,40$, $R = 8,31 \cdot 10^7$ эрг/(моль · К) и $T = 273$ К. После подстановки получаем

$$V \approx 331 \text{ м/с.}$$

б) К. п. д. = $(T_1 - T_2)/T_1$ ($T_1 > T_2$).

в) При адиабатическом размагничивании парамагнитной соли ее температура падает до очень низкого значения $\sim 0,01$ К.

III. 2.3.

а) Пусть $g_1(P, T)$ и $g_2(P, T)$ — термодинамические потенциалы Гиббса для двух фаз вещества. При фазовом переходе первого рода они обладают следующими свойствами:

$$g_1(P, T) = g_2(P, T),$$

но

$$\frac{\partial g_1(P, T)}{\partial T} \neq \frac{\partial g_2(P, T)}{\partial T}$$

и

$$\frac{\partial g_1(P, T)}{\partial P} \neq \frac{\partial g_2(P, T)}{\partial P};$$

здесь T и P — температура перехода и давление паров соответственно. Для простой системы, описываемой параметрами P , v и T , справедливо уравнение

$$dg = -s dT + v dP,$$

где

$$\left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)_P = -s \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial g}{\partial P}\right)_T = v.$$

Отсюда видно, что

$$s_1 \neq s_2 \quad \text{и} \quad v_1 \neq v_2.$$

б) $s = k \ln W$; здесь W — термодинамическая вероятность данного состояния.

в) Как было показано в решении задачи III. 1.1, молярная теплоемкость меди равна $3R$, а удельная теплоемкость

$$c_v = \frac{3R}{63} \approx 0,1 \text{ кал/(г · К).}$$

III. 2.4. Пусть $C(T)$ — теплоемкость тела, $W_{\text{нагр}}(T)$ — мощность нагрева и $W_{\text{потери}}$ — тепловая мощность, теряемая телом.

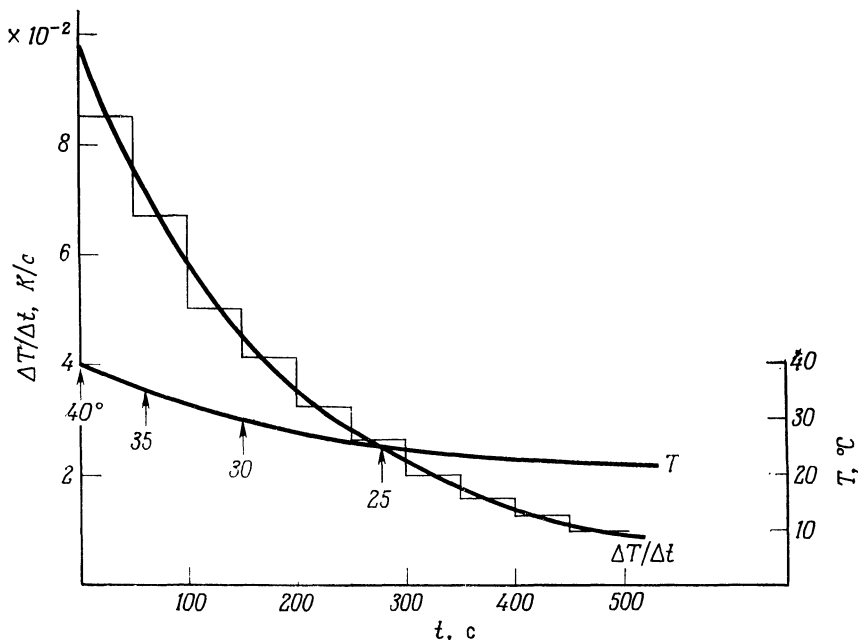
В равновесном состоянии

$$W_{\text{нагр}}(T) = W_{\text{потери}}(T).$$

В процессе охлаждения тела величина $W_{\text{потери}}(T)$ связана с теплоемкостью тела $C(T)$ и температурой T соотношением

$$C(T) \frac{\Delta T}{\Delta t} = W_{\text{потери}}(T), \quad (1)$$

где $\Delta T/\Delta t$ — изменение температуры в единицу времени. Пользуясь данными из табл. 3, строим графики зависимости T и



$\Delta T/\Delta t$ для процесса охлаждения. Из последней кривой определяем значения $\Delta T/\Delta t$ для температур $T = 25, 30, 35$ и 40°C .

Таблица 3

$T, ^\circ\text{C}$	$W_{\text{нагр}} = W_{\text{потери}}$ Вт	$\Delta T/\Delta t, \text{K/c}$	$C = \frac{W_{\text{нагр}}}{\Delta T/\Delta t}, \text{Дж/К}$
25	1	0,026	38
30	2	0,046	43,5
35	3	0,072	41,6
40	4	0,097	41

Подставляя их, а также значения $W_{\text{потери}} = W_{\text{нагр}}$ в формулу (1), определяем числовые значения $C(T)$, которые представлены в последнем столбце табл. 3.

Разделив значения $C(T)$ (см. табл. 3) на массу тела 100 г, получим удельную теплоемкость $c(T)$ в единицах Дж/(К·г).

III. 2.5. Согласно распределению Больцмана, число частиц $N_i(E_i)$, находящихся в i -м состоянии ($i = 1, 2, 3$), пропорционально $\exp(-E_i/kT)$. Поэтому для чисел частиц с энергиями $E_1 = 0$, $E_2 = E = kT$ и $E_3 = 2E = 2kT$ получаем следующее соотношение:

$$N_1 : N_2 : N_3 = 1 : e^{-1} : e^{-2}. \quad (1)$$

Поскольку общее число частиц должно сохраняться, то

$$N_1 + N_2 + N_3 = N. \quad (2)$$

Из формул (1) и (2) находим

$$N_1 = \frac{N}{1 + 1/e + 1/e^2},$$

$$N_2 = \frac{N}{1 + 1/e + 1/e^2} \frac{1}{e}$$

и

$$N_3 = \frac{N}{1 + 1/e + 1/e^2} \frac{1}{e^2}.$$

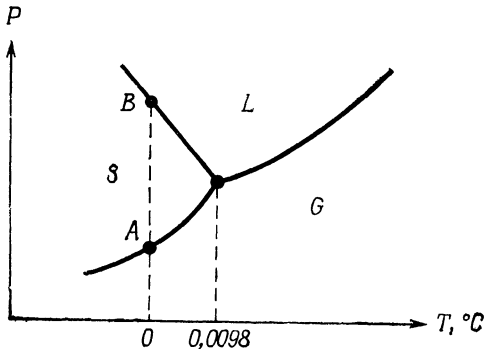
Полная энергия системы определяется выражением

$$E = E_1 N_1 + E_2 N_2 + E_3 N_3 = \frac{NkT}{1 + 1/e + 1/e^2} \left(\frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} \right)$$

и по условию задачи равна $1000 kT$. Следовательно, искомое число частиц равно

$$N = \frac{1000(1 + e^{-1} + e^{-2})}{e^{-1} + 2e^{-2}} \approx 2400.$$

III. 2.6.



Воспользуемся правилом фаз Гиббса

$$F = c - p + 2,$$

где F — число термодинамических степеней свободы, c — число компонент системы и p — число фаз.

а) В условии задачи сказано, что температура системы поддерживается постоянной и равной 0°C . Следовательно, одна степень свободы исчезает. Так как $c = 1$ и $p = 2$, а температура постоянна, мы имеем $F = 1 - 1 = 0$. Это говорит о том, что на диаграмме $P - T$ равновесному состоянию отвечает лишь одна точка. Ее положение зависит только от давления, и число фаз системы в этом состоянии не может быть больше двух. Начальное давление паров под колоколом равно нулю. Из диаграммы $P - T$ мы видим, что вода и лед должны испаряться. Давление паров растет до тех пор, пока не достигнет значения, соответствующего точке A . В конечном состоянии вся вода исчезнет: часть ее превратится в пар, а остальное — в лед. Именно этому конечному состоянию системы соответствует точка A на диаграмме $P - T$.

б) Если система теплоизолирована, то, согласно правилу фаз Гиббса, должны сосуществовать одновременно три фазы: при $c = 1$ и $F = 0$ имеем $p = 3$. Конечное состояние системы соответствует тройной точке.

III. 2.7. Предельное угловое разрешение круглой линзы дается формулой

$$\theta \equiv \frac{x}{D} = 1,22 \frac{\lambda}{D},$$

откуда находим выражение для диаметра линзы

$$d = 1,22 \frac{\lambda D}{x}.$$

Подставляя $\lambda = 5000 \text{ \AA} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$, $x = 0,3 \text{ м}$ и $D = 30 \text{ км} = 3 \cdot 10^4 \text{ м}$, получаем

$$d = 1,22 \cdot 5 \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^4 / 0,3 \approx 6,1 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 6,1 \text{ см}.$$

III. 2.8. Ближе.

III. 2.9. Увеличение диапроектора равно отношению расстояния q от объектива до экрана к расстоянию p от объектива до предмета. По условию задачи оно равно 24. Следовательно,

$$p = \frac{q}{24} = \frac{4,5}{24} \text{ м}.$$

Подставляя значения p и q в формулу линзы

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q},$$

получаем

$$f = 0,18 \text{ м.}$$

III. 2.10. По принятым нормам среднее расстояние наилучшего зрения равно 25 см, и обычно на этом расстоянии от глаза находится изображение предмета, видимое в микроскопе.

III. 2.11. Амплитуда волны в центре экрана пропорциональна ширине щели. Следовательно, интенсивность света в центре увеличится в 4 раза¹⁾. Энергия света, проходящего через щель, возрастет в 2 раза.

III. 2.12. Интенсивность колец в отраженном свете будет меньше, чем в проходящем, поскольку коэффициент отражения стекла при нормальном падении света мал²⁾.

III. 2.13. Поляризация будет линейной.

III. 2.14. Интенсивность света в центре экрана станет равной нулю, когда радиус диафрагмы совпадет с радиусом второй зоны Френеля, т. е.

$$R = \sqrt{2\lambda D}.$$

III. 2.15. Воспользуемся формулой линзы

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{l-p} = \frac{1}{f}$$

и найдем из нее p :

$$p = \frac{l}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4f}{l}} \right).$$

Отсюда получаем условия

$$l < 4f, \quad l = 4f \quad \text{и} \quad l > 4f,$$

соответствующие следующим числам реальных значений p , а именно 0, 1 и 2.

III. 2.16. $n = 1,5, \quad dn/d\lambda = 10^{-5} \text{ 1/\AA}.$

¹⁾ См. Г. С. Ландсберг, Оптика, «Наука», М., 1976, стр. 172—179.— *Прим. ред.*

²⁾ Автор, очевидно, имеет в виду максимальную и минимальную интенсивности света в наблюдаемой картине. Что касается ее контраста, то он в отраженном свете выше, чем в проходящем, так как в этом случае отсутствует «затушевание» и без того слабой интерференционной картины более интенсивным (проходящим) пучком света. — *Прим. перев.*

III. 2.17. Используем формулу $p_1 + q_1 = l$. В исходном положении линзы $M_1 = q_1/p_1 = 1/2$. Следовательно, $2q_1 + q_1 = l$. Отсюда $q_1 = l/3$ и $p_1 = 2l/3$. В другом положении линзы $p_2 = l/3$, а $q_2 = 2l/3$, поэтому $M_2 = q_2/p_2 = 2$. Таким образом, размер изображения вдвое превышает размер источника.

III. 2.18. Первый минимум в дифракционной картине Фраунгофера соответствует углу

$$\theta = 1,22 \frac{\lambda}{d},$$

где d — диаметр зрачка. Следовательно, изображение звезды на сетчатке глаза имеет диаметр

$$d_{\text{зв}} = 2 \left(1,22 \frac{\lambda}{d} \right) D = 2,44 \frac{\lambda D}{d}.$$

Здесь D — расстояние от зрачка до сетчатки. Если принять $d \approx 5 \text{ мм} = 0,5 \text{ см}$ и $D \approx 3 \text{ см}$, то $D/d \approx 6$ и

$$d_{\text{зв}} = 2,44 \cdot 6\lambda = 14,6 \cdot 5 \cdot 10^{-5} \text{ см} \approx 7 \cdot 10^{-4} \text{ см}.$$

III. 2.19. В случае мнимого объекта, расположенного в зеркале.

III. 2.20. Согласно критерию Рэлея, максимальная разрешающая способность оптического прибора соответствует условию, когда главный максимум дифракционной картины от одного точечного объекта точно совпадает с первым минимумом дифракционной картины от другого близко расположенного с первым точечного объекта. Этому условию отвечает минимальное угловое разрешение оптического прибора. Например, в случае круглой диафрагмы

$$\theta = 1,22 \frac{\lambda}{d},$$

где d — диаметр апертуры.

III. 2.21. Выбор l не произволен. Чтобы система имела отрицательное фокусное расстояние, должно выполняться условие $f < l < 2f$.

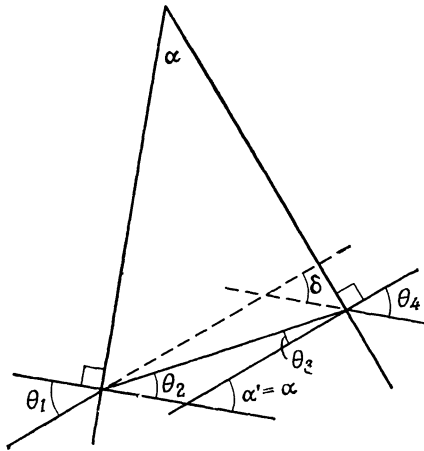
III. 3.1.

а) Согласно закону Снеллиуса

$$\sin \theta_1 = n \sin \theta_2. \quad (1)$$

Отсюда при малых углах падения θ_1 имеем

$$\theta_1 = n\theta_2. \quad (2)$$



Аналогично, поскольку угол α мал, для второй грани призмы можно записать

$$\theta_4 = n\theta_3. \quad (3)$$

Из простых геометрических соотношений между углами треугольников (первый рисунок) имеем

$$\alpha + \pi - \alpha' = \pi, \quad \text{или} \quad \alpha' = \alpha.$$

Следовательно,

$$\alpha = \theta_2 + \theta_3 \quad (4)$$

и

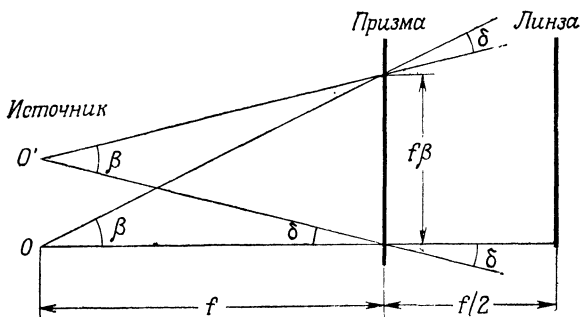
$$\delta = (\theta_1 - \theta_2) + (\theta_4 - \theta_3). \quad (5)$$

Из соотношений (2) — (5) находим угол отклонения лучей δ :

$$\delta = (n - 1) \alpha,$$

который, как мы видим, не зависит от угла падения θ_1 .

б) Пусть O' — мнимое изображение точечного источника в призме.



В п. «а» было показано, что любой луч, проходя через призму, отклоняется на угол δ .

Из второго рисунка мы видим, что расстояния от мнимого изображения O' и от источника O до призмы в первом приближении одинаковы, поскольку углы α и β малы. Подставляя расстояние

$$p = f + \frac{f}{2} = \frac{3}{2}f$$

в формулу Гаусса для линзы, получаем

$$\frac{1}{(3/2)f} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}.$$

Отсюда находим положение изображения по горизонтали

$$q = 3f.$$

Отклонение положения мнимого изображения источника OO' по вертикали связано с углом δ соотношением $OO' = f\delta$. Теперь легко найти положение изображения, даваемое линзой по вертикали II' . Поскольку

$$-\frac{II'}{OO'} = \frac{q}{p},$$

то

$$II' = -2 \frac{f}{f} OO' = -2f\delta = -2f(n-1)\alpha.$$

Здесь знак — означает, что изображение расположено ниже оси системы.

III. 3.2. Такой оптический прибор называется пропускающим эшеленом. Принцип действия его аналогичен щелевой дифрак-

ционной решетке. Изменение фазы δ , вносимое одной «щелью» относительно другой, дается выражением

$$\delta = \frac{2\pi [(n - \cos \theta) t + s \sin \theta]}{\lambda},$$

где θ — угол между дифрагированным лучом и падающим пучком. В случае малых углов дифракции θ имеем

$$\delta \approx \frac{2\pi [(n - 1) t + s\theta]}{\lambda}. \quad (1)$$

Применим теперь формулу для углового распределения интенсивности света на N -щелевой дифракционной решетке:

$$I \sim \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} \cdot \frac{\sin^2 N \frac{\delta}{2}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}; \quad (2)$$

здесь

$$\beta = \frac{\pi}{\lambda} s \sin \theta \approx \frac{\pi}{\lambda} s \theta.$$

Множитель $\sin^2 \beta / \beta^2$ обусловлен дифракцией от одной «щели», а множитель $\sin^2 (N\delta/2) / \sin^2 (\delta/2)$ связан с интерференцией пучков от N «щелей».

Дифракционные максимумы соответствуют значениям

$$\frac{\delta}{2} = 0, \pi, 2\pi, \dots,$$

или

$$\frac{\pi [(n - 1) t + s\theta]}{\lambda} = m\pi, \quad \text{где } m \text{ — целое число.}$$

Отсюда находим углы, соответствующие максимумам в дифракционной картине:

$$\theta = \frac{1}{s} [m\lambda - (n - 1) t] \equiv \theta_m. \quad (3)$$

Подставляя в формулу (3) значения $\theta \approx 0$, $n = 1,5$, $t = 0,5$ см и $\lambda = 5000 \text{ \AA}$, получаем

$$\frac{1}{s} [m(5 \cdot 10^{-5}) - (0,5)^2] \approx 0.$$

Следовательно, порядок интерференции

$$m = 5 \cdot 10^3. \quad (4)$$

Выражение для угловой дисперсии $\Delta\theta/\Delta\lambda$ можно получить непосредственно из формулы (3). Для малых значений $dn/d\lambda$ оно имеет вид

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} = \frac{1}{s} \left(m - t \frac{dn}{d\lambda} \right) \approx \frac{m}{s}. \quad (5)$$

Разрешающая способность эшелона зависит от углового расстояния $\Delta\theta$ между главным максимумом и ближайшим минимумом в интерференционной картине m -го порядка. Дифракционные минимумы соответствуют значениям

$$\frac{\delta}{2} = m\pi + \frac{\pi}{N},$$

или, если учесть (1), углам дифракции

$$\theta'_m = \frac{1}{s} \left[\frac{\lambda}{N} + m\lambda - (n-1)t \right]. \quad (6)$$

Из (6) и (3) находим угловую полуширину главного максимума

$$\Delta\theta = (\theta'_m - \theta_m) = \frac{1}{s} \frac{\lambda}{N}. \quad (7)$$

Пусть θ_1 и θ_2 — углы дифракции, соответствующие главным максимумам на длинах волн λ_1 и λ_2 . Предельное угловое разрешение эшелона дается формулой (7), когда $\Delta\theta$ равно разности углов дифракции θ_1 и θ_2 :

$$\Delta\theta \approx \theta_1 - \theta_2 = \frac{1}{s} \frac{\lambda}{N}.$$

Из формулы (3) находим $\theta_1 - \theta_2$. Тогда последнее выражение принимает вид

$$\frac{1}{s} [m\lambda_1 - (n-1)t] - \frac{1}{s} [m\lambda_2 - (n-1)t] = \frac{1}{s} \frac{\lambda}{N},$$

откуда следует, что разрешающая способность эшелона равна

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN = (5 \cdot 10^3)(40) = 2 \cdot 10^5.$$

III. 3.3. Компоненты электрического вектора световой волны с правой круговой поляризацией записываются следующим образом:

$$E_x = E_0 \sin \left(\omega t - \omega \frac{z}{v_x} \right)$$

и

$$E_y = E_0 \sin \left(\omega t + 90^\circ - \omega \frac{z}{v_y} \right).$$

Поскольку $n_e < n_o$, то $v_e > v_o$. Предположим, что оптическая ось первой пластинки направлена по оси x . Тогда компоненты электрического вектора на выходе первой пластинки принимают вид

$$E_x^{(1)} \sim \sin \omega t$$

и

$$E_y^{(1)} \sim \sin(\omega t + 90^\circ + 90^\circ) = -\sin \omega t,$$

т. е. свет на выходе пластинки является линейно-поляризованным, причем вектор поляризации составляет с оптической осью пластинки угол 45° .

а) В случае $\theta = 0$ компоненты электрического вектора на выходе второй пластинки равны

$$E_x^{(2)} \sim \sin \omega t$$

и

$$E_y^{(2)} \sim \sin(\omega t - 90^\circ) = -\cos \omega t.$$

Следовательно, свет имеет левую круговую поляризацию.

В случае $\theta = 45^\circ$ фаза компоненты E_x относительно E_y не изменится, и свет останется линейно-поляризованным, как и на выходе первой пластинки.

В случае $\theta = 90^\circ$ имеем

$$E_x^{(2)} \sim \sin(\omega t + 90^\circ) = \cos \omega t$$

и

$$E_y^{(2)} \sim -\sin \omega t,$$

т. е. получаем свет с правой круговой поляризацией.

б) Две четвертьволновые пластинки эквивалентны одной полуволновой только в одном случае: когда $\theta = 0$.

III. 3.4.

а) При наличии источника неполяризованного света оба поляризатора можно опознать по изменению интенсивности света, проходящего одновременно через них. Интенсивность пропорциональна $\cos^2 \theta$, где θ — угол, под которым скрещены оба поляризатора.

б) Скрестим оба поляризатора под углом $\theta = 90^\circ$. Свет через такую систему совершенно не проходит.

в) Поместим любой из остальных элементов между двумя поляризаторами и будем поворачивать его вокруг оси светового пучка. Пусть интенсивность света на выходе первого поляризатора равна $I/2$. Тогда

1) если максимальная интенсивность света на выходе второго поляризатора также равна $I/2$, то неизвестный элемент — полуволновая пластинка (этот случай соответствует повороту полуволновой пластинки относительно любого из поляризаторов на угол 45°);

2) если интенсивность света на выходе второго линейного поляризатора постоянна и равна $I/8$, то неизвестный элемент — круговой поляризатор (поскольку каждый из трех элементов ослабляет интенсивность света вдвое);

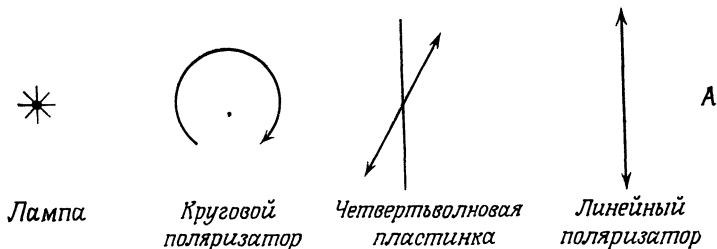
3) если интенсивность света на выходе второго линейного поляризатора изменяется от 0 до $I/4$, то имеем четвертьволновую пластинку (максимум интенсивности получает-

ся, когда оптическая ось пластинки образует угол 45° с оптической осью любого из поляризаторов и каждый из них ослабляет свет вдвое).

г) Если в наборе имеется только один линейный поляризатор, то его и круговой поляризатор можно отделить от остальных двух элементов, пользуясь тем, что любой из этих двух поляризаторов ослабляет интенсивность света от лампы вдвое, в то время как остальные элементы таким свойством не обладают.

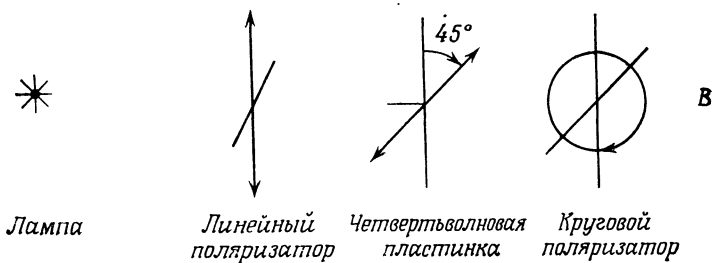
Теперь можно опознать каждый элемент отдельно, манипулируя между двумя поляризаторами любой из оставшихся двух пластинок, пока не представятся следующие два случая расположения:

1) Между четвертьволновой пластинкой и лампой находится круговой поляризатор. Вся эта система выполняет функцию линейного поляризатора, как показано на первом рисунке.



При вращении крайнего линейного поляризатора интенсивность света в направлении A должна изменяться как $\cos^2(\theta + \pi/4)$, где θ — угол между осями линейного поляризатора и четвертьволновой пластинки. Заметьте, что при вращении первого (кругового) поляризатора интенсивность света в направлении A меняться не должна.

2) Между четвертьволновой пластинкой и источником света расположен линейный поляризатор. Если оптические оси четвертьволновой пластинки и линейного поляризатора образуют угол $\pm 45^\circ$, то эта система выполняет функцию кругового поляризатора (см. второй рисунок).



В этом случае свет в направлении B либо проходит, либо не проходит в зависимости от того, под каким углом, $+45^\circ$ или -45° , скрещена пластинка относительно линейного поляризатора. Заметим, что интенсивность в направлении B остается постоянной при вращении второго (кругового) поляризатора.

Система, состоящая из полуволновой пластинки и двух остальных элементов, не способна полностью ослабить первоначально неполяризованный пучок света. Следовательно, произведя опыты по п. 1 и 2, мы тем самым идентифицировали все четыре оптических элемента.

III. 3.5.

а) В статистической физике энтропию определяют следующим образом:

$$S = k \ln W(n_i),$$

где n_i — среднее число частиц в i -м состоянии, а $W(n_i)$ — число всевозможных способов реализации системы из совокупностей частиц n_i , $i = 1, 2, \dots$. В нашем случае

$$W(n_i) = \frac{N!}{n_1!n_2!},$$

где n_1 и n_2 — число атомов с прямой и противоположной ориентациями спинов соответственно, причем $n_1 + n_2 = N$. Поскольку $n_i \gg 1$, можно воспользоваться формулой Стирлинга

$$\ln n! = n(\ln n - 1).$$

Таким образом, получаем

$$S = k[N \ln N - (n_1 \ln n_1 + n_2 \ln n_2) - N + (n_1 + n_2)] = -k \sum_i n_i \ln \frac{n_i}{N}.$$

В нашем случае $i = 1, 2$, т. е.

$$S = -k \left(n_1 \ln \frac{n_1}{N} + n_2 \ln \frac{n_2}{N} \right). \quad (1)$$

Энтропию можно определить и другим способом. Опытным путем было установлено, что если количество тепла, сообщаемое системе в каждой точке любого непрерывного процесса, разделить на температуру T и проинтегрировать полученное отношение, то результат оказывается независимым от пути интегрирования. Поскольку в физике инварианты играют большую роль, то приведем эту величину:

$$S_T = \int_0^T \frac{dQ}{T} = \int_0^T \frac{C dT}{T}. \quad (2)$$

б) При $T \rightarrow 0$ все спины принимают одинаковую ориентацию. Следовательно, $n_1 = N$, $n_2 = 0$, и из (1) получаем $S_0 = = 0^1$). При $T \rightarrow \infty$ спины ориентированы беспорядочно, и $n_1 = = n_2 = N/2$. В этом случае

$$S_\infty = -kN \ln \left(\frac{n_1}{N} \right) = kN \ln 2. \quad (3)$$

Из (2) и (3) следует

$$S_\infty = \int_0^\infty \frac{C(T) dT}{T} = kN \ln 2.$$

III. 3.6. Среднюю скорость теплового движения молекул газа v можно считать постоянной, поскольку температура сосуда неизменна²⁾.

Среднее значение скорости, с которой молекулы газа движутся через отверстие, определяется выражением

$$\bar{v} = \frac{\int_0^1 n(v \cos \theta) d(\cos \theta)}{\int_{-1}^{+1} n d(\cos \theta)} = \frac{v}{4}.$$

Число молекул, покидающих сосуд в единицу времени, равно

$$-\frac{dn}{dt} = \frac{n\bar{v}A}{V} = \frac{nvA}{4V}; \quad (1)$$

здесь n — число молекул, оставшихся в сосуде; A — площадь отверстия; V — объем сосуда. Решение уравнения (1) имеет вид

$$n = n_0 \exp \left(-\frac{vA}{4V} t \right).$$

Таким образом, полагая $n = n_0/e$, находим искомое время

$$t = \frac{4V}{vA}, \quad \text{где} \quad v = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}^3.$$

III. 3.7. Согласно закону Стефана — Больцмана, плотность мощности излучения абсолютно черного тела, имеющего температуру T , равна

$$E(T) = \sigma T^4,$$

¹⁾ Рассуждения автора непоследовательны, так как выведенное на основе формулы Стирлинга выражение (1) неприменимо при $n_2 \rightarrow 0$. Правильное доказательство $S_0 = 0$ (теорема Нернста) см. в учебниках по статистической физике. — *Прим. ред.*

²⁾ А также потому, что газ из него вытекает медленно. — *Прим. перев.*

³⁾ Здесь m — масса одной молекулы. — *Прим. перев.*

где σ — постоянная Стефана — Больцмана. Применяя к излучению закон обратных квадратов, находим плотность мощности солнечной радиации на Земле:

$$E_c = \sigma T_0^4 \left(\frac{R}{D}\right)^2.$$

Следовательно, Земля поглощает излучение мощностью

$$E_3 = \sigma T_0^4 \left(\frac{R}{D}\right)^2 \pi r^2, \quad (1)$$

которая предполагается равной мощности теплового излучения Земли:

$$E_3 = \sigma T^4 4\pi r^2. \quad (2)$$

Из (1) и (2) находим

$$T^4 = T_0^4 \left(\frac{R}{2D}\right)^2, \quad \text{или} \quad T = \sqrt{\frac{R}{2D}} T_0 = 4,82 \cdot 10^{-2} T_0.$$

Следовательно, $T \approx 275$ К, что не сильно отличается от комнатной температуры.

III. 4.1. В соответствии с первым началом термодинамики и определением энтропии имеем

$$T dS = C_V dT + P dV. \quad (1)$$

а) Изменение энтропии газообразного азота, если он занимает постоянный объем, а температура его повышается от $T_0 = 0^\circ\text{C}$ до $T = 100^\circ\text{C}$, вычисляется по формуле

$$\Delta S_{N_2} = \int_{T_0}^T \frac{C_V dT}{T} = C_V \ln \frac{373}{273} = 0,312 C_V. \quad (2)$$

Молярная теплоемкость двухатомного газа при комнатной температуре равна $(5/2)R$. Следовательно, теплоемкость одного литра этого газа составляет

$$C_V = \frac{5}{2} R \frac{1}{22,4} \approx \frac{5}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{22,4} = 0,223 \text{ кал/К}.$$

Подставляя это значение C_V в формулу (2), получаем

$$\Delta S_{N_2} = 0,312 \cdot 0,223 = 0,0696 \text{ кал/К}.$$

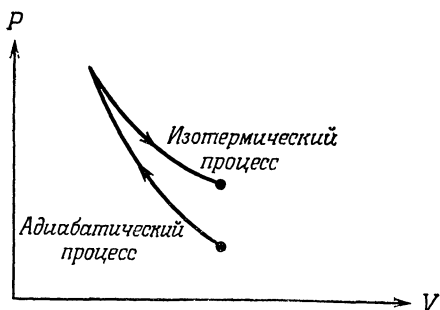
Изменение энтропии резервуара при температуре 100°C равно

$$\Delta S_{\text{рез}} = \frac{-\Delta Q}{T} = -\frac{(0,223)(100)}{373} = -0,0598 \text{ кал/К}.$$

Следовательно, энтропия Вселенной изменяется на

$$\Delta S_{\text{вс}} = \Delta S_{N_2} + \Delta S_{\text{рез}} = 9,8 \cdot 10^{-4} \text{ кал/К}.$$

б) Пользуясь тем, что одна из стенок сосуда подвижна, можно вначале газ сжать адиабатически, а затем, когда его температура поднимется до 100°C , привести сосуд в контакт с тепловым резервуаром и заставить газ расширяться изотермически до первоначального объема.



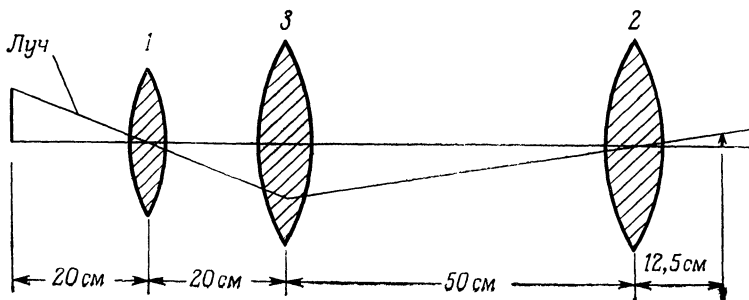
При адиабатическом процессе энтропия не изменяется. При изотермическом процессе изменение энтропии азота составляет (Q/T) , а теплового резервуара $(-Q/T)$. Таким образом, общее изменение энтропии Вселенной равно нулю:

$$(0) + (Q/T) + (-Q/T) = 0.$$

III.4.2. Подставляя в формулу линзы

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

значения $p = 20$ см и $f = 10$ см, определяем положение изображения, полученное с помощью первой линзы: $q = 20$ см. Это изображение служит объектом для второй линзы и находится от нее на расстоянии $70 - 20 = 50$ см. Пользуясь формулой линзы, находим положение изображения, даваемое второй линзой и отстоящее от нее на расстоянии 12,5 см, как показано на рисунке.



Если третью линзу поместить точно в то место, где расположено первое изображение, то для второй линзы его положение как объекта не изменится, и, следовательно, положение изображения в системе останется неизменным. Чтобы произошло увеличение светосилы системы, третья линза должна быть собирающей.

На рисунке показан луч света, теряемый в отсутствие промежуточной линзы. В лучевой оптике ее называют иногда полевой линзой.

III. 4.3. Положение светлых колец Ньютона дается формулой

$$2 \left(\frac{r_m^2}{2R} + d \right) = \left(m + \frac{1}{2} \right) \lambda,$$

где r_m — радиус m -го светлого кольца, а d — поправка к толщине слоя, учитывающая недостаточно плотное соприкосновение сферической и плоской поверхностей. Подставляя в эту формулу значения

$$R = 50 \text{ см}, \quad r_3 = 0,09 \text{ см} \quad \text{и} \quad r_{23} = 0,25 \text{ см},$$

получаем

$$2d + \frac{0,0081}{50} = \frac{7}{2} \lambda \quad \text{для} \quad m = 3 \quad (1)$$

и

$$2d + \frac{0,0625}{50} = \frac{47}{2} \lambda \quad \text{для} \quad m = 23. \quad (2)$$

Исключая d в одном из выражений (1) или (2), находим

$$\lambda = 5,44 \cdot 10^{-5} \text{ см} = 5440 \text{ \AA}.$$

III. 4.4.

а) Согласно условию задачи, вода и пар в состояниях 1 и 2 находятся в равновесии при температуре T_1 . Следовательно, давление паров воды p_n , которое в общем случае является функцией только температуры, остается постоянным. Обозначим через p_0 парциальное давление воздуха в системе в состоянии 1. Тогда придем к следующим соотношениям:

$$p_1 = p_n + p_0 = 3 \text{ атм}, \quad (1)$$

$$p_2 = p_n + \frac{p_0}{2} = 2 \text{ атм}, \quad (2)$$

из которых находим

$$p_n = 1 \text{ атм} \quad \text{и} \quad p_0 = 2 \text{ атм}.$$

Поскольку $p_{\text{п}}$ равно одной атмосфере, и этому давлению паров соответствует точка кипения воды при нормальных условиях, то приходим к выводу, что

$$T_1 = 100^\circ\text{C}.$$

б) Если $V_3 = 2V_2$, то $p_3 = p_2 V_2 / V_3 = 1$ атм.

в) Полагая $V_2 = 44,8$ л, $p_{\text{п}} = 1$ атм и $T_1 = 100^\circ\text{C}$, находим число молей воды и воздуха:

$$n_{\text{вода}} = n_{\text{возд}} = \left(\frac{273}{373} \right) (2) = 1,46 \text{ моль}.$$

Молекулярная масса воды составляет 18 г/моль, а воздуха 29 г/моль. Следовательно, масса воды в граммах равна $18 \cdot n_{\text{вода}} = 26,28$ г, а масса воздуха $29 \cdot n_{\text{возд}} = 42,34$ г.

III. 4.5.

а) Внутренняя энергия идеального газа зависит только от его температуры. Поэтому при свободном расширении этого газа изменения его энтропии не происходит:

$$T \Delta S = \Delta Q = \Delta U + \Delta W = 0 + 0 = 0.$$

б) Энтропия одного моля идеального газа, находящегося при температуре T и давлении p , дается выражением

$$S(T, p) = C_p \ln T - R \ln p + K,$$

где K — числовая константа. Для смеси двух молей идеального газа с одинаковыми температурами и объемами имеем

$$S_{12}(T, p) = (C_{p_1} + C_{p_2}) \ln T - 2R \ln p' + 2K.$$

Здесь p' — парциальное давление любого из газов. После смешения каждый газ занимает вдвое больший объем, поэтому

$$p' = \frac{1}{2} p.$$

Следовательно, изменение энтропии равно

$$S_{12} - 2S = 2R \ln p - 2R \ln \frac{p}{2} = 2R \ln 2.$$

в) В случае смешения двух объемов одного и того же газа давление газа в конечном состоянии равно давлению в исходном состоянии, поэтому изменения энтропии не происходит.

III. 4.6.

а) Энергия фотона с длиной волны 6200 \AA равна

$$E_{\gamma} = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} \approx 2 \text{ эВ}. \quad (1)$$

Следовательно, общее число фотонов, испускаемых в одну секунду источником света мощностью 1 Вт, составит

$$n_{\gamma} = \frac{1}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 3,1 \cdot 10^{18} \text{ фотон/с.} \quad (2)$$

Каждый фотон обладает моментом импульса

$$\frac{E_{\gamma}}{\omega} = \frac{\hbar\omega}{\omega} = \hbar. \quad (3)$$

Суммарный момент импульса ¹⁾, переносимый светом в одну секунду, равен

$$\tau_a = \frac{dJ}{dt} = n_{\gamma} \hbar \approx (3 \cdot 10^{18})(10^{-27}) = 3 \cdot 10^{-9} \text{ дин} \cdot \text{см.}$$

Его направление параллельно или антипараллельно направлению распространения в зависимости от того, является ли свет лево- или правополяризованным.

б) Пусть ПП обозначает правую круговую поляризацию фотонов, а ЛП — левую круговую поляризацию. При полном отражении света от зеркала электрический вектор волны изменяет фазу на π . Поэтому ПП-фотон после отражения становится ЛП-фотоном. Однако направление момента импульса в пространстве не изменяется. Следовательно, суммарный момент импульса, передаваемый пластинке в одну секунду, равен нулю.

в) После прохождения полуволновой пластинки ПП-фотон превращается в ЛП-фотон, поэтому на пластинку действует момент, вдвое превышающий вычисленный в п. «а»:

$$\tau_b = 2\tau_a.$$

г) Полуволновая пластинка превращает ПП-фотон в ЛП-фотон, который после отражения от посеребренной поверхности вновь становится ПП-фотоном, а пройдя еще раз полуволновую пластинку, оказывается ЛП-фотоном. Сравнивая этот фотон с первоначальным, заключаем, что вращательный момент, действующий на пластинку, равен нулю.

д)

1. ПП-фотоны на выходе полуволновой пластинки становятся ЛП-фотонами.
2. ЛП-фотоны на выходе четвертьволновой пластинки превращаются в линейно-поляризованные фотоны,
3. Линейно-поляризованные фотоны после отражения от зеркальной поверхности остаются линейно-поляризованными, причем направление вектора поляризации меняется на противоположное.

¹⁾ Автор рассматривает свет, поляризованный по кругу, что в квантовой теории соответствует одинаковому направлению спинов фотонов. — *Прим. ред.*

4. Линейно-поляризованные фотоны, проходя четверть-волновую пластинку в обратном направлении, становятся ЛП-фотонами.

5. ЛП-фотоны, проходя в обратном направлении через полуволновую пластинку, превращаются в ПП-фотоны.

Что касается пластинки, то на нее попадают один ПП-фотон снизу (передаваемый им момент импульса равен $\hbar\downarrow$) и один ЛП-фотон сверху (\downarrow), а покидают ее один ЛП-фотон вверх (\uparrow) и один ПП-фотон вниз (\uparrow). В результате имеем

$$\downarrow + \downarrow - \uparrow - \uparrow = 4\downarrow.$$

Таким образом,

$$\tau_d = 4\tau_a.$$

III. 4.7.

а) Число рождающихся мальчиков определяется выражением

$$n_m \sim P + (1 - P)P + (1 - P)^2 P + \dots + (1 - P)^n P + \dots = \\ = P [1 + (1 - P) + (1 - P)^2 + \dots]$$

где P — вероятность рождения мальчика, равная 51%. Число рождающихся девочек

$$n_d \sim (1 - P) + (1 - P)^2 + \dots + (1 - P)^n + \dots = \\ = (1 - P) [1 + (1 - P) + (1 - P)^2 + \dots]$$

Из этих соотношений получаем, что $n_m/n_d = P/(1 - P)$. Таким образом, после ограничения рождаемости мальчики будут, как и прежде, составлять 51% рождающихся детей.

б) Поступим следующим образом:

1. Направим электромагнитное излучение известной частоты ν_0 в направлении объекта.

2. Измерим интенсивность излучения объекта на нескольких частотах: ν_0 , $\nu_0 \pm \Delta\nu$, $\nu_0 \pm 2\Delta\nu$, ...

3. Построим зависимость интенсивности принятого устройством излучения от частоты. В случае абсолютно черного тела эта зависимость должна быть монотонной. Если же объект — не абсолютно черное тело, то на графике появится пик при частоте ν_0 , вызванный отражением от объекта падающего излучения, имеющим ту же частоту.

4. Для дополнительной проверки можно перестроить излучаемую устройством волну на новую частоту $\nu_0 + \Delta\nu$. Если объект является абсолютно черным телом, то спектр излучения его останется прежним. В противном случае отмеченный ранее пик сместится на частоту $\nu_0 + \Delta\nu$. На явлении отражения излучения основана работа радиолокатора.

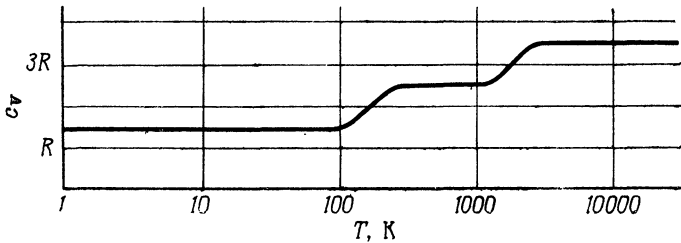
III. 4.8. При термодинамическом равновесии распределение протонов по состояниям описывается функцией распределения Максвелла — Больцмана ¹⁾

$$\frac{N(\uparrow)}{N(\downarrow)} \sim \exp\left[-\frac{E(\uparrow) - E(\downarrow)}{kT}\right] = \exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) = \exp\left(\frac{N\hbar\omega}{RT}\right) = \\ = \exp\frac{6 \cdot 10^{23} \cdot 10^{-34} \cdot 10^8}{2 \cdot 4,18 \cdot 300} = K \approx 1 + 2,4 \cdot 10^{-6}.$$

Следовательно, для поляризации P получаем

$$P = \frac{N(\uparrow) - N(\downarrow)}{N(\uparrow) + N(\downarrow)} = \frac{K - 1}{K + 1} = 1,2 \cdot 10^{-6}.$$

III. 5.1.



При низких температурах внутренняя энергия газа равна $E = \frac{3}{2}RT$, а молярная теплоемкость $c_v = \frac{3}{2}R$. Они соответствуют трем степеням свободы — трем компонентам импульса, квадратичная форма от которых определяет кинетическую энергию молекулы. Колебательные и вращательные движения запрещены, поскольку энергия теплового движения kT меньше разности энергетических уровней между первым возбужденным и основным состояниями молекулы. С ростом температуры молекулы начинают вращаться. При этом теплоемкость становится равной

$$c_v = \frac{5}{2}R,$$

поскольку у молекулы появляются две дополнительные степени свободы, связанные с ее вращением. При еще более высоких температурах $c_v = \frac{7}{2}R$. Увеличение коэффициента обусловлено возникновением у молекул двух колебательных степеней свободы. При очень высоких температурах мы должны учитывать возбуждение электронных уровней.

¹⁾ Здесь $E(\uparrow)$ и $E(\downarrow)$ обозначают энергии протонов со спинами, направленными по магнитному полю и против него. — Прим. ред.

III. 5.2.

$$\dot{S} = \frac{\dot{Q}}{T} = \frac{RI^2}{T} = \frac{100}{303} I^2 = 0,33I^2 \text{ Дж}/(\text{К} \cdot \text{с}).$$

III. 5.3. Хуже. Теплообмен пропорционален скорости потока жидкости. He^4 при температуре ниже точки λ -перехода ($T \approx \approx 2,2 \text{ К}$) становится сверхтекучим, и скорость потока его может быть огромной. He^3 ведет себя как нормальная жидкость и имеет обычную вязкость при низких температурах. Следовательно, скорость потока He^3 меньше скорости потока He^4 .

III. 5.4. При одномерном рассмотрении потенциальная энергия молекулы газа в трубке в точке x (отсчитываемой от оси вращения трубки) дается выражением

$$E = -\frac{m\omega^2 x^2}{2},$$

где m — масса молекулы. Плотность молекул подчиняется бoльцмановскому распределению:

$$\rho(x) = \rho(0) \exp\left(-\frac{M\omega^2 x^2}{2RT}\right);$$

здесь M — масса одного моля газа, а R — универсальная газовая постоянная.

Замечание. $M = N_0 m$ и $R = N_0 k$, где N_0 — число Авогадро и k — постоянная Больцмана.

III. 5.5. Согласно теореме Больцмана о равнораспределении энергии по степеням свободы, имеем

$$\overline{\text{Пот. эн.}} = \frac{1}{2} C \overline{\theta^2} = \frac{1}{2} kT,$$

$$\overline{\text{Кин. эн.}} = \frac{1}{2} I \overline{\dot{\theta}^2} = \frac{1}{2} kT.$$

Следовательно,

$$\overline{\theta^2} = \frac{kT}{C} \quad \text{и} \quad \overline{\dot{\theta}^2} = \frac{kT}{I}.$$

Эти величины от давления не зависят.

III.5.6. В процессе $B \rightarrow C$, показанном на рисунке в условии задачи, система поглощает тепло

$$Q_{BC} = \int_B^C T dS = \frac{300 \cdot 500}{2} = 75\,000 \text{ Дж}.$$

В процессе $C \rightarrow A$ она отдает тепло $Q_{CA} = 100 \cdot 500 = 50\,000$ Дж. Поскольку $Q_{AB} = 0$, то к. п. д. машины равен

$$\eta = \frac{\text{Работа}}{Q_{BC}} = \frac{Q_{BC} - Q_{CA}}{Q_{BC}} = 33,3\%.$$

III. 5.7. Разность удельных энтальпий системы между двумя близлежащими точками термодинамического равновесия дается выражением

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T dp,$$

где по определению

$$\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p = c_p.$$

Если газ охлаждать путем уменьшения давления p , то

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_h > 0.$$

Используя соотношение

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T = - \frac{(\partial h / \partial T)_p}{(\partial p / \partial T)_h} = - \frac{c_p}{(\partial p / \partial T)_h}$$

и тот факт, что $c_p > 0$, получаем

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T = - \frac{c_p}{(\partial p / \partial T)_h} < 0.$$

III. 5.8. Вязкость газа очень слабо зависит от давления (при увеличении давления до 1000 атм она при постоянной температуре возрастает всего на 20—40%). Поэтому средний квадрат смещения частицы не изменится.

III. 5.9. Для описания излучения абсолютно черного тела рассмотрим следующее уравнение для TdS :

$$T dS = C_V dT + T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dV$$

и соотношения ¹⁾

$$P = \frac{u}{3} = \frac{4\sigma T^4}{3c} \quad \text{и} \quad C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{16\sigma}{c} T^3 V.$$

Тогда получим

$$T dS = 0 = \frac{16\sigma}{c} T^3 V dT + \frac{16\sigma T^3}{3c} T dV,$$

откуда

$$\frac{dV}{V} + \frac{3dT}{T} = 0.$$

¹⁾ В этих соотношениях u — плотность энергии системы, $U = uV$ — ее внутренняя энергия, σ — постоянная Стефана — Больцмана и c — скорость света. — *Прим. перев.*

После интегрирования имеем

$$VT^3 = \text{const.}$$

Следовательно, в результате адиабатического расширения камеры получаем

$$T_{\text{конец}} = \left(\frac{V_{\text{нач}}}{V_{\text{конец}}} \right)^{1/3} T_{\text{нач.}}$$

Поскольку $V_{\text{конец}} = 8V_{\text{нач}}$, то

$$T_{\text{конец}} = \frac{1}{2} T_{\text{нач.}}$$

т. е. температура уменьшится в два раза.

III. 5.10. Изменение энтропии определяется выражением

$$\Delta S = \frac{\text{Механическая работа}}{T} = \frac{kA^2}{2T},$$

где k — жесткость пружины, T — абсолютная температура.

III. 5.11. При температуре абсолютного нуля все электроны занимают нижние энергетические уровни. В этом случае

$$dN \sim p^2 dp \sim \sqrt{E} dE.$$

В результате интегрирования в пределах от 0 до $E_{\text{макс}}$, где $E_{\text{макс}}$ — энергия Ферми, получаем

$$N \sim E_{\text{макс}}^{3/2}, \quad \text{или} \quad E_{\text{макс}} \sim N^{2/3}.$$

Энергия Ферми определяется выражением

$$E_{\text{макс}} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3\pi^2 N}{V} \right)^{2/3}.$$

III. 5.12. Пусть T и $T_{\text{рез}}$ — температуры воды и теплового резервуара соответственно. Максимальный к. п. д. процесса, который можно получить при использовании двух термостатов с температурами T и $T_{\text{рез}}$, равен

$$\eta = \frac{\Delta W}{\Delta Q} = \frac{T_{\text{рез}} - T}{T}.$$

Отсюда находим минимальную затрачиваемую работу

$$\begin{aligned} W &= - \int_{293}^{273} \frac{T_{\text{рез}} - T}{T} C_V dT + \frac{T_{\text{рез}} - 273}{273} \cdot 80 \cdot 1000 = \\ &= 293 \cdot 10^3 \ln \frac{293}{273} - 20 \cdot 10^3 + \frac{20 \cdot 80 \cdot 1000}{273} \approx 7 \cdot 10^3 \text{ Дж.} \end{aligned}$$

III. 5.13. Атмосферное давление зависит от высоты над поверхностью Земли:

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right) = P_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right).$$

Подставляя $h = 300$ м, $g = 9,80$ м/с², $M = 29$ г/моль, $R = 8,3$ Дж/(К·моль) и $T \approx 300$ К, получаем

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right) \approx P_0 \exp(-0,034) \approx (1 - 0,034) P_0,$$

т. е. $\Delta P = -0,034 P_0$. Испарение представляет собой фазовый переход первого рода, описываемый уравнением Клапейрона¹⁾

$$\frac{dP}{dT} = \frac{L}{T(v - v_v)},$$

где L — удельная теплота парообразования, v и v_v — удельные объемы пара и воды соответственно. Заметим, что $v_v \ll v$. Используя уравнение состояния идеального газа, отнесенное к одному грамму пара, или $v = RT/18P$, имеем

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{18L}{RT^2} \Delta T,$$

откуда

$$\Delta T = \frac{2 \cdot 373^2}{540 \cdot 18} \frac{\Delta P}{P_0} \approx -1^\circ\text{C} \quad \text{и}$$

$$t_{\text{кип}} = 100 - 1 = 99^\circ\text{C}.$$

III. 5.14. Из уравнения

$$T ds = c_p dT - T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dp$$

находим изменение энтропии при постоянном давлении:

$$ds = c_p \frac{dT}{T}.$$

Интегрируя последнее уравнение в интервале температур от 0 до -10°C , получаем следующие изменения энтропии:

$$s - s_0 = 4222 \ln\left(\frac{263}{273}\right) + 226 \quad (\text{для воды}) \quad (1)$$

и

$$s' - s'_0 = 2112 \ln\left(\frac{263}{273}\right) - 75 \quad (\text{для льда}); \quad (2)$$

¹⁾ Точнее, Клапейрона — Клаузиуса. С именем Клапейрона (а также Менделеева) связывают обычно уравнение состояния идеального газа. — *Прим. перев.*

здесь $s_0(s'_0)$ — энтропия воды (льда) при температуре 0°C , причем s_0 связано с s'_0 через удельную теплоту плавления l :

$$s_0 - s'_0 = \frac{l}{273} = \frac{80 \cdot 4,184 \cdot 10^3}{273} = 1227. \quad (3)$$

Суммируя значения (3) и (1), получаем

$$s - s'_0 = 4222 \ln\left(\frac{263}{273}\right) + 1453, \quad (4)$$

а вычитая (2) из (4), имеем

$$s - s' = 2110 \ln\left(\frac{263}{273}\right) + 1528 = 1450 > 0.$$

Поскольку $s > s'$, лед представляет собой более упорядоченную термодинамическую систему.

III. 5.15. Подставляя в формулу линзы

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{f_1} \quad (1)$$

значения $p_1 = 30$ см и $f_1 = 20$ см, находим $q_1 = 60$ см. Первая линза дает изображение 1, увеличенное в $5(q_1/p_1)$ раз, т. е. 10 см. Расстояние от этого изображения до второй линзы равно

$$p_2 = 10 - 60 = -50 \text{ см.} \quad (2)$$

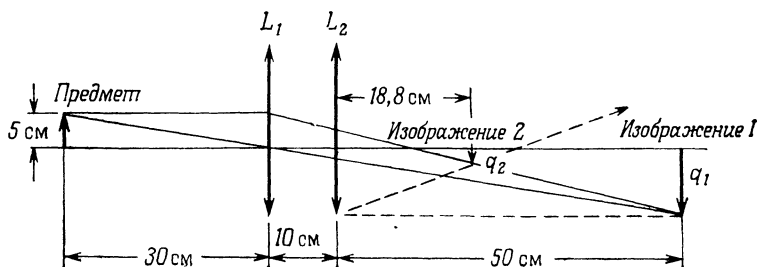
Снова воспользовавшись формулой линзы (1) для $p_2 = -50$ см и $f_2 = 30$ см, находим для изображения 2.

$$q_2 = \frac{1}{1/30 + 1/50} = \frac{150}{8} = 18,8 \text{ см.}$$

Размер изображения 2, полученный в системе линз, равен

$$10 \frac{q_2}{p_2} = 10 \times \frac{18,8}{-50} = -3,75 \text{ см.}$$

Таким образом, изображение получается обратным с высотой 3,75 см.



III. 6.1. Условие формирования светлых полос записывается в виде

$$2nd = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

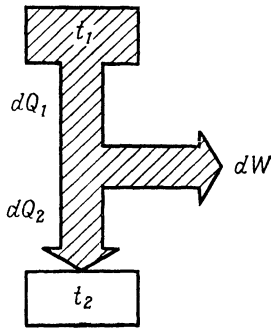
При переходе от одной полосы к следующей оптическая толщина клина nd изменяется на $\lambda/2$. Следовательно,

$$\lambda = 2n(\Delta d) = 2n(\Delta D) \operatorname{tg} \theta \approx 2n(\Delta D) \theta;$$

здесь ΔD — расстояние между полосами, равное 0,25 см. Подставляя данные из условия задачи, получаем

$$\lambda = 2 \cdot 1,4 \cdot 0,25 \frac{20}{60 \cdot 60 \cdot 57} 10^8 \approx 7000 \text{ \AA}.$$

III. 6.2. Пусть t_1 и t_2 — мгновенные значения температур тела 1 и тела 2, а dW — элементарная работа, совершаемая системой, когда этим телам сообщают тепло $-dQ_1$ и dQ_2 соответственно (знак минус перед dQ_1 означает, что это тепло фактиче-



ски отбирается от тела 1). В таком случае максимально достижимый

$$\text{К. п. д.} = \frac{t_1 - t_2}{t_1} = - \frac{dW}{dQ_1} = - \frac{dW}{C_p dt_1}.$$

Следовательно,

$$-dW = C_p \frac{t_1 - t_2}{t_1} dt_1. \quad (1)$$

В соответствии с первым законом термодинамики часть тепла, отбираемого от тела 1, затрачивается системой на работу, а оставшаяся часть передается телу 2, т. е.

$$C_p(T_1 - t_1) = W + C_p(t_2 - T_2),$$

или

$$-C_p t_2 = W + C_p(t_1 - T_1 - T_2). \quad (2)$$

Подставляя выражение (2) в (1), получаем

$$dW = -\frac{dt_1}{t_1} [W + C_p(2t_1 - T_1 - T_2)],$$

или

$$d(Wt_1) = -C_p(2t_1 - T_1 - T_2) dt_1. \quad (3)$$

Интегрируя это выражение в пределах от T_1 до T_f , где T_f — конечная температура обоих тел, имеем

$$WT_f = C_p [T_1^2 - T_f^2 - (T_1 + T_2)(T_1 - T_f)]. \quad (4)$$

Здесь мы учли начальное условие $W = 0$ при $t_1 = T_1$. Конечную температуру T_f находим из уравнения (2), полагая в нем $t_2 = t_1 = T_f$:

$$T_f = \frac{1}{2} \left(T_1 + T_2 - \frac{W}{C_p} \right). \quad (5)$$

Максимальную работу W , совершаемую рассматриваемой системой, не трудно найти, если подставить (5) в выражение (4).

III. 6.3.

а) Число столкновений = Число атомов в ед. объема \times Четырехкратная величина поперечного сечения атома \times Средняя скорость атомов = $(3 \cdot 10^{19}) (4\pi \cdot 10^{-16}) (10^5) \approx 4 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$. Здесь использована система единиц СГС.

б) Число столкновений со стенкой = Число атомов в ед. объема \times Средняя скорость атомов/6 = $0,5 \cdot 10^{24} \text{ с}^{-1}$.

III. 6.4.

а) Параметр μ можно найти из условия

$$\sum_i \bar{N}_i = n.$$

Используя приведенное в условии задачи выражение для \bar{N}_i , получаем

$$\frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{1}{e^{\beta(E-\mu)} + 1} d^3p = n; \quad (1)$$

здесь множитель 2 в числителе введен потому, что электроны обладают спином $1/2$. Так как $E = p^2/2m$, то выражение (1) принимает вид

$$\frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{1}{e^{\beta(p^2/2m-\mu)} + 1} 4\pi p^2 dp = n. \quad (2)$$

Отсюда можно найти μ . В случае $e^{\mu\beta} \ll 1$ подынтегральное выражение в (2) можно разложить в ряд и получить следующее

соотношение:

$$2 \left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{1/2} (e^{\mu\beta} - 2^{-1/2} e^{2\mu\beta} + \dots) = n. \quad (3)$$

б) Дебройлевская длина волны для теплового движения частицы с массой m и энергией μkT дается выражением

$$\lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mkT}}.$$

При $n\lambda^3 \ll 1$ в разложении (3) можно пренебречь членами высокого порядка малости и записать

$$e^{\mu\beta} = \frac{n\lambda^3}{2} = \frac{N}{2V} \lambda^3 \ll 1, \quad (4)$$

где V — объем, занимаемый частицами. Таким образом, среднее число частиц \bar{N}_i в состоянии с энергией E_i равно

$$\bar{N}_i \sim e^{-\beta(E_i - \mu)} = \frac{N}{2} \frac{\lambda^3}{V} e^{-\beta E_i}.$$

в) При комнатной температуре $kT \approx 1/40$ эВ; подставляя в формулу для λ это значение kT , а также постоянные $m_e c^2 \approx 0,5 \cdot 10^6$ эВ и $\hbar c = 1973$ эВ·А, получаем

$$\lambda \approx \sqrt{\frac{6,3 \cdot 1973^2}{0,5 \cdot 10^6 \cdot 1/40}} \approx 44 \text{ \AA}.$$

Следовательно,

$$n\lambda^3 \approx 10^{-19} \cdot 10^{24} = 10^5,$$

и статистика Максвелла — Больцмана к электронному газу не применима.

III. 6.5. Линейно-поляризованную волну можно представить в виде суперпозиции двух волн с круговой поляризацией, имеющих одинаковые амплитуды, но противоположные направления вращения вектора поляризации. После прохождения слоя ионизированной среды волна с положительной круговой поляризацией будет опережать волну с отрицательной круговой поляризацией по фазе на угол

$$\Delta = (n_+ - n_-) \frac{L}{\lambda} = \left[\frac{K}{\omega(\omega - \Omega)} - \frac{K}{\omega(\omega + \Omega)} \right] \frac{L}{\lambda} = \frac{KL}{\omega\lambda} \frac{2\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}.$$

Следовательно, угол поворота плоскости поляризации равен $\Delta/2$.

III. 6.6. Оптическая длина пути возрастает со скоростью

$$(n - 1) \frac{dh}{dt},$$

что равносильно удалению источника света от наблюдателя со скоростью

$$v = (n - 1) \frac{dh}{dt}.$$

Отсюда следует

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{n - 1}{c} \frac{dh}{dt}.$$

III. 6.7. Пусть x — толщина четвертьволновой пластинки. Тогда справедливо следующее соотношение:

$$(n_e - n_o) \frac{x}{\lambda} = \frac{1}{4}.$$

Отсюда находим

$$x = \frac{5,8299 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 0,01154} = 1,263 \cdot 10^{-3} \text{ см.}$$

III. 6.8.

а) Найдем разность фаз между двумя волнами излучения λ и λ' при прохождении ими расстояния d :

$$\delta = 2\pi \left(\frac{d}{\lambda} - \frac{d}{\lambda'} \right) \approx \frac{2\pi d}{\lambda^2} \Delta\lambda;$$

здесь $\Delta\lambda$ — разность длин волн. Подставляя в эту формулу $d = 2 \cdot 30 = 60$ см, $\lambda = 6000 \text{ \AA}$ и $\delta = 2\pi$, находим

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{d} \approx 6 \cdot 10^{-3} \text{ \AA}.$$

б) Разрешающая способность должна быть равна

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = 10^6.$$

Порядок интерференции

$$m = \frac{2d}{\lambda} = \frac{2 \cdot 1,5 \cdot 10^8}{6000} = 50\,000.$$

Из формулы, приведенной в задаче, находим, что коэффициент отражения должен удовлетворять условию

$$r^2 + \frac{\pi r}{20} - 1 \geq 0$$

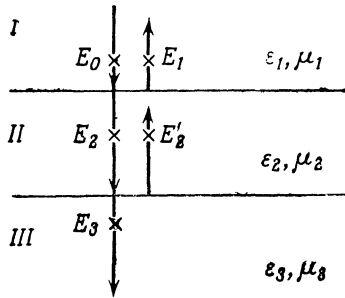
или

$$\left(r - 1 + \frac{\pi}{40} \right) \left(r + 1 + \frac{\pi}{40} \right) \geq \frac{\pi^2}{(40)^2} \approx 0.$$

Отсюда для разрешения двух линий с $\Delta\lambda = 6 \cdot 10^{-3} \text{ \AA}$ следует выбрать

$$r \approx 1 - \frac{\pi}{40} \approx 0,92.$$

III. 6.9. Обозначим напряженности электрических полей в области *I* через E_0 и E_1 , в области *II* через E_2 и E'_2 и в области *III* через E_3 соответственно.



При нормальном падении волны картина обладает вращательной симметрией. Поэтому будем считать, что электрические поля перпендикулярны плоскости рисунка. Граничные условия таковы, что компоненты электрического и магнитного поля, параллельные границе раздела в одном слое, должны оставаться в любой момент времени параллельными ей по другую сторону границы раздела. Отсюда мы имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} E_0 + E_1 &= E_2 + E'_2, \\ E_2 + E'_2 &= E_3, \\ \sqrt{\epsilon_1} (E_0 - E_1) &= \sqrt{\epsilon_2} (E_2 - E'_2), \\ \sqrt{\epsilon_2} (E_2 - E'_2) &= \sqrt{\epsilon_3} E_3. \end{aligned}$$

Из этих соотношений можно найти зависимость E_1 и E_3 от E_0 :

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1 - \sqrt{\epsilon_3/\epsilon_1}}{1 + \sqrt{\epsilon_3/\epsilon_1}} E_0 = \frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_3}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_3}} E_0, \\ E_3 &= \frac{2E_0}{1 + \sqrt{\epsilon_3/\epsilon_1}} = \frac{2\sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_3}} E_0. \end{aligned}$$

Мы видим, что искомые поля не зависят от ϵ_2 ¹⁾. Интенсивность волны в слое *III* пропорциональна E_3^2 , а интенсивность отраженной волны в слое *I* пропорциональна E_1^2 .

III. 6.10. В соответствии с критерием Рэлея

$$\frac{D}{l} = 1,22 \frac{\lambda}{d}$$

мы имеем

$$l = \frac{Dd}{1,22\lambda}.$$

¹⁾ Такой вывод можно получить только, не учитывая толщины слоя *II*. — Прим. ред.

Подставляя $d = 0,5$ см, $D \approx 1,22$ м и $\lambda = 5000$ Å, находим

$$l \approx \frac{1,22 \cdot 10^2 \cdot 0,5}{1,22 \cdot 5000 \cdot 10^{-8}} = \frac{5 \cdot 10}{5 \cdot 10^{-5}} = 10^6 \text{ см} = 10 \text{ км.}$$

III. 6.11.

а) 90° .

б) $\varphi = \arctg(n_1/n_2)$, где n_1 и n_2 — показатели преломления первой и второй диэлектрических сред.

III. 7.1. При освещении красным светом.

III. 7.2. В центре кривизны зеркала.

III. 7.3. В плоскости, перпендикулярной плоскости отражения.

III. 7.4. Если пучок света падает слева, то точка сходимости пучка сместится вправо от точки P .

III. 7.5. За фокусом по ту же сторону от линзы, что и объект,

III. 7.6. Красная.

III. 7.7. Фокусное расстояние обратно пропорционально величине $(n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$.

Поскольку $n_{\text{красн}} < n_{\text{фиол.}}$, то $f_{\text{красн}} > f_{\text{фиол.}}$

III. 7.8. Мнимое.

III. 7.9. Хроматическая аберрация.

III. 7.10. Свет не проходит через систему из скрещенных под прямым углом линейного поляризатора и анализатора¹⁾.

III. 7.11. $\pi/2$.

III. 7.12. Когда он проходит через оптический центр линзы.

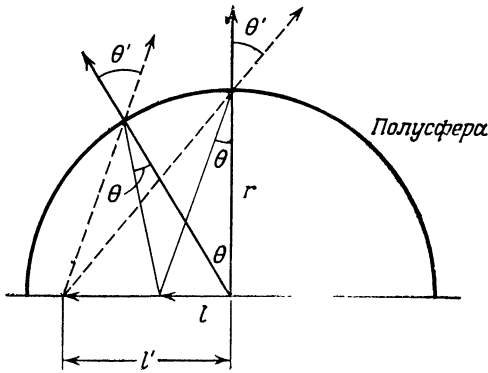
III. 7.13. Диапазону $4000\text{--}7000$ Å, что соответствует частотам $7,5 \cdot 10^{14}\text{--}4,3 \cdot 10^{14}$ Гц.

III. 7.14. $\omega_{\text{пад}} = \omega_{\text{пр}}; \lambda_{\text{пад}} = n\lambda_{\text{пр.}}$

III. 7.15. Лучи, идущие из центра круга, не преломляются. Поэтому изображение будет казаться расположенным в той же плоскости, где и буква. В случае малых углов θ имеем $\theta' = n\theta$

¹⁾ Вообще, любые поляризационные эксперименты показывают наличие поперечной компоненты. — *Прим. ред.*

(из закона Снеллиуса). Поскольку $l' = r\theta' = nr\theta = nl$, то размер изображения в n раз больше размера буквы.



III. 7.16.

а) Сдвиг фаз в точке C между лучами, исходящими от обеих щелей, равен

$$\Delta = \frac{2\pi n\delta}{\lambda} - \frac{2\pi\delta}{\lambda} = (n - 1) \frac{2\pi\delta}{\lambda}.$$

Интенсивность света в точке C пропорциональна $\cos^2(\Delta/2)$. Следовательно,

$$I_C = I_0 \cos^2 \frac{(n - 1) \pi\delta}{\lambda}. \quad (1)$$

б) Из формулы (1) получаем, что интенсивность минимальна при ¹⁾

$$\delta = \left(\frac{1}{n - 1} \right) \frac{\lambda}{2}.$$

в) Амплитуда волны в точке C равна

$$A_C = 2Ae^{i\omega t} + Ae^{i(\omega t + \Delta)} = Ae^{i\omega t} (2 + e^{i\Delta}).$$

Отсюда получаем интенсивность в точке C :

$$I_C \sim |A_C|^2 \sim 4 + 1 + 4 \operatorname{Re}[e^{i\Delta}] \sim 5 + 4 \cos \Delta \sim 5 + 4 \cos \frac{2\pi\delta (n - 1)}{\lambda}.$$

III.7.17. По существу это задача о дифракции Френеля на круглом экране. Длина звуковой волны от свистка $\lambda = v/f = 0,1$ м. Поскольку источник удален от диска на большое расстояние, звуковая волна в любой точке на поверхности диска

¹⁾ Точнее, при $\delta = (2k + 1)\lambda/2(n - 1)$, где $k = 0, 1, 2, \dots$ — Прим. ред.

имеет одну и ту же фазу. Для точки, расположенной на оси диска, радиус l -й зоны Френеля определяется выражением

$$R_l^2 + D^2 = \left(D + l \frac{\lambda}{2}\right)^2.$$

Отсюда получаем

$$R_l = \left(l D \lambda + \frac{l^2 \lambda^2}{4} \right)^{1/2};$$

здесь D — расстояние между наблюдателем и диском. Площадь проекции l -й зоны записывается в виде

$$(\pi R_l^2 - \pi R_{l-1}^2) \cos \theta \approx \pi \left(\lambda D + \frac{l \lambda^2}{2} \right) \cos \theta,$$

где

$$\cos \theta = \frac{D}{\sqrt{D^2 + R_l^2}}.$$

Результирующая амплитуда звуковой волны вдоль оси диска равна

$$A = \sum (-1)^l A_l,$$

где

$$A_l = \frac{\pi [\lambda D + (l \lambda^2 / 2)] \cos \theta}{\sqrt{R_l^2 + D^2}} \cos \theta = \frac{\pi [\lambda D + (l \lambda^2 / 2)] D^2}{(R_l^2 + D^2)^{3/2}}. \quad (1)$$

Компоненты амплитуды, перпендикулярные оси, отсутствуют в силу осевой симметрии.

а) Если наблюдатель находится непосредственно за диском, то $D = 0$. Следовательно, $A_l = 0$ для любого $l \neq 0$. Поскольку первой зоне Френеля, примыкающей к периферии диска, соответствует $l = r / (\lambda / 2)$ (где $r = 1$ м — радиус диска), то результирующая амплитуда звуковой волны равна нулю и свиста не слышно.

б) Если теперь отойти далеко за диск, то $D \gg \lambda$. Первой зоне Френеля, примыкающей с внешней стороны к диску, соответствует $l_1 = r^2 / \lambda D$, и для результирующей амплитуды получаем

$$\begin{aligned} A &= \sum_{l=l_1}^{\infty} (-1)^l A_l = \sum_{l=l_1, l_1+2, \dots}^{\infty} (-1)^l (A_l - A_{l+1}) \approx \\ &\approx \frac{1}{2} (-1)^{l_1} \sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{dA_l}{dl} \approx \frac{1}{2} (-1)^{l_1} \int_{l_1}^{\infty} \frac{dA_l}{dl} dl = \\ &= \frac{1}{2} (-1)^{l_1+1} (A_{l_1} - A_{\infty}). \end{aligned}$$

Поскольку $A_\infty = 0$, то

$$A = \frac{1}{2} (-1)^{l+1} A_{l_1}. \quad (2)$$

В отсутствие диска результирующая амплитуда

$$B = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l A_l \approx \frac{A_0}{2}. \quad (3)$$

Условие ослабления интенсивности звука в два раза при введении диска записывается в виде

$$A^2 = \frac{1}{2} B^2,$$

или

$$A_{l_1}^2 = \frac{1}{2} A_0^2.$$

Подставляя A_{l_1} из формулы (1), получаем

$$\left\{ \frac{\pi (\lambda D + l_1 \lambda^2 / 2) D^2}{(R_{l_1}^2 + D^2)^{3/2}} \right\}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi \lambda D^3}{D^3} \right)^2.$$

Поскольку $R_{l_1} = 1$ м, а $l_1 \lambda = 1/D$, последнее равенство принимает вид

$$\left\{ \frac{D^3 + D/2}{(1 + D^2)^{3/2}} \right\}^2 = \frac{1}{2}.$$

Отсюда получаем уравнение

$$D^6 - D^4 - 2,5 D^2 - 1 = 0,$$

из которого находим $D \approx 1,5$ м.

III. 7.18. Размер пятна равен приблизительно ширине центрального максимума дифракционной картины от круглого отверстия. Первое темное кольцо появляется при

$$\sin \alpha = 1,22 \frac{\lambda}{d},$$

где

$$\sin \alpha \approx \frac{\text{Радиус пятна}}{\text{Расстояние Земля - Луна}} = \frac{R}{D}.$$

При $\lambda = 6000 \text{ \AA}$, $d = 2$ м и $D = 400\,000$ км получаем

$$R = 1,22 \frac{\lambda D}{d} = \frac{1,22 (4 \cdot 10^8) (6 \cdot 10^{-7})}{2} \approx 1,5 \cdot 10^2 \text{ м.}$$

III. 8.1. $\bar{V}_x = 0$, так как V_x — нечетная функция. $\bar{V}_x^2 = \frac{kT}{m}$, поскольку $\bar{V}_x^2 = \bar{V}_y^2 = \bar{V}_z^2 = \frac{1}{3} \bar{V}^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{3kT}{m} \right)$. $\bar{V}_x^3 = 0$, так как V_x^3 — нечетная функция.

III. 8.2. Скорость падения капли уменьшится, поскольку с повышением температуры вязкость воздуха возрастает.

III. 8.3.

$$T_f = \frac{T_1 + 5T_2}{6}.$$

Общее изменение энтропии при смешении молока и кофе дается выражением

$$\begin{aligned} \Delta S &= 50 \int_{T_1}^{T_f} \frac{c_V dT}{T} + 250 \int_{T_2}^{T_f} \frac{c_V dT}{T} = 50c_V \ln\left(\frac{T_f}{T_1}\right) + 250c_V \ln\left(\frac{T_f}{T_2}\right) = \\ &= 50 \ln\left(\frac{T_1 + 5T_2}{6}\right) + 250 \ln\left(\frac{T_1 + 5T_2}{6}\right) \text{ кал/К,} \end{aligned}$$

поскольку для воды $c_V = 1$ кал/(г·К).

III. 8.4. Уравнение состояния для адиабатического процесса имеет вид

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma = \text{const},$$

причем для одноатомного газа $\gamma = 5/3$. Поскольку $V_2 = V_1/2$, то для отношения давлений получаем

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma = 2^{5/3} \approx 3,17.$$

III. 8.5. Из определения энтропии следует

$$S = \int_0^T \frac{C dT}{T} = \gamma \int_0^T dt = \gamma T.$$

III. 8.6.

$$\overline{(v - v_0)^2} = \frac{\overline{v_z^2}}{c^2} = \frac{kT}{mc^2}.$$

III. 8.7. Изменение энтропии равно $\Delta S = L/T$. В соответствии с первым законом термодинамики изменение внутренней энергии дается выражением

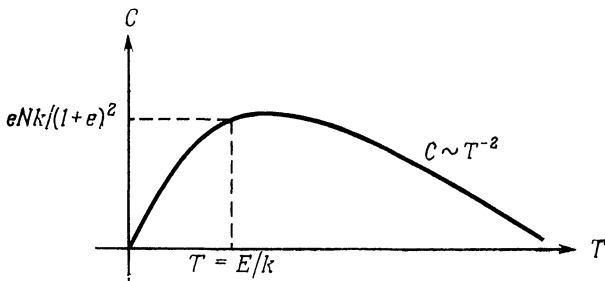
$$\Delta U = T \Delta S - P \Delta V = L - P \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right).$$

III. 8.8. Поскольку $N_2 \sim N e^{-E/kT}$, $N_1 \sim N$ и $N_1 + N_2 = N$, мы имеем

$$C = \frac{dE_{\text{полн}}}{dT} = E \frac{dN_2}{dT} = E \frac{d}{dT} \left(\frac{N e^{-E/kT}}{1 + e^{-E/kT}} \right) = NE^2 \frac{(1/kT^2) e^{E/kT}}{(e^{E/kT} + 1)^2}.$$

Следовательно,

$$C = \begin{cases} \frac{NE^2}{4kT^2} & \text{при } T \rightarrow \infty, \\ NE^2 \frac{1}{kT^2} e^{-E/kT} & \text{при } T \rightarrow 0. \end{cases}$$



III. 8.9.

а) $\frac{3}{2}R$ при $T \ll \Theta_{\text{вр}}$,

б) $\frac{5}{2}R$ при $T \gg \Theta_{\text{вр}}$,

где $\Theta_{\text{вр}}$ — характеристическая температура для вращения молекул.

III. 8.10. Площадь, ограниченная кривой, уменьшится в $2^4 = 16$ раз, а значение λ , соответствующее максимуму кривой, увеличится вдвое.

III. 8.11.

а) Теплоемкость железа равна

$$C_{\text{ж}} = 200 \cdot 10^3 \cdot 0,6 = 1,2 \cdot 10^5 \text{ Дж/К.}$$

Для тепловой машины с двумя тепловыми резервуарами при температурах T и T_1 ($T_1 = 12^\circ\text{C} = 285 \text{ К}$) максимальный

$$\text{к. п. д.} = \frac{T - 285}{T}.$$

Вычисляем максимальную работу

$$\begin{aligned} W &= C_{\text{ж}} \int_{285}^{1773} \frac{T - 285}{T} dT = C_{\text{ж}} \int_{285}^{1773} \left(1 - 285 \frac{1}{T}\right) dT = \\ &= \left(1488 - 285 \ln \frac{1773}{285}\right) C_{\text{ж}} = (1488 - 521) C_{\text{ж}} = \\ &= (967)(1,2 \cdot 10^5) = 1,16 \cdot 10^8 \text{ Дж.} \end{aligned}$$

б) Изменение энтропии тела, связанное с передачей ему тепла ΔQ , дается выражением

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}.$$

Следовательно, изменение энтропии железа

$$S_{\text{конеч}} - S_{\text{нач}} = \int \frac{dQ}{T} = C_{\text{ж}} \int_{1773}^{285} \frac{dT}{T} = C_{\text{ж}} \ln \left(\frac{1773}{285} \right) = \\ = -(\ln 6,22) C_{\text{ж}} = -1,83 C_{\text{ж}}$$

а изменение энтропии океана

$$S'_{\text{конеч}} - S'_{\text{нач}} = \frac{1488 C_{\text{ж}}}{285} = 5,22 C_{\text{ж}}.$$

Общее изменение энтропии равно их сумме:

$$\Delta S_{\text{общ}} = 3,39 C_{\text{ж}} = 4,07 \cdot 10^5 \text{ Дж/К}.$$

III. 8.12.

а) Пусть δ — сдвиг фазы отраженного света относительно падающего света с амплитудой A . Тогда амплитуды прошедшего и отраженного света связаны с A соотношениями

$$T = \frac{A}{\sqrt{2}}, \quad R = \frac{A}{\sqrt{2}} e^{i\delta} \quad (j^2 = -1). \quad (1)$$

Если теперь изменить направления отраженного и прошедшего лучей на противоположные, то по правилу обращения световых лучей мы должны получить первоначальный луч. При этом (см. рисунок) мы имеем

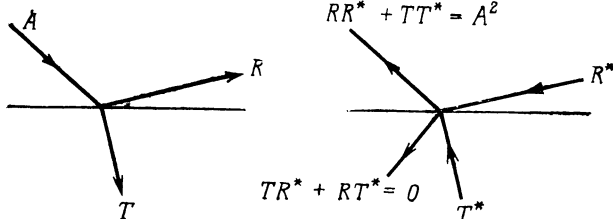
$$RR^* + TT^* = A^2$$

и

$$TR^* + RT^* = 0, \quad (2)$$

где

$$T^* = T \quad \text{и} \quad R^* = \frac{A}{\sqrt{2}} e^{-i\delta}.$$



После подстановки выражений (1) в (2) получаем

$$e^{i\delta} + e^{-i\delta} \equiv 2 \cos \delta = 0.$$

Отсюда $\delta = \pm\pi/2$.

б) Луч BEG (см. рисунок в условии задачи) претерпевает только одно отражение — от полупрозрачного зеркала E . Поэтому сдвиг фаз между лучами BEG и BEF равен $\pi/2$. Аналогично сдвиг фаз между лучами $BCDEF$ и $BCDEG$ равен также $\pi/2$. Следовательно, если лучи BEG и $BCDEG$ идут в противофазе, то лучи BEF и $BCDEF$ — в фазе. Математически это можно записать следующим образом:

$$\delta(BEG) - \delta(BEF) = m(2\pi) \pm \frac{\pi}{2},$$

$$\delta(BCDEF) - \delta(BCDEG) = n(2\pi) \pm \frac{\pi}{2},$$

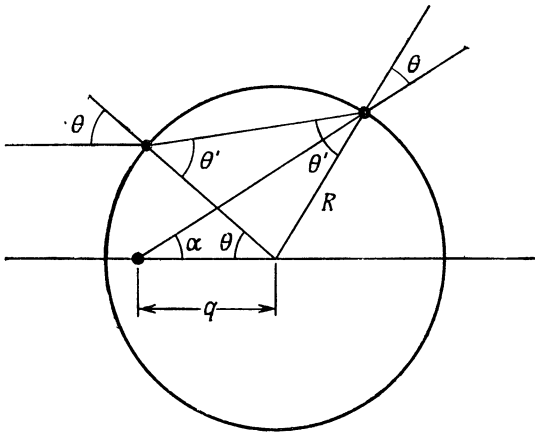
$$\delta(BCDEG) - \delta(BEG) = l(2\pi) + \pi \quad (\text{в противофазе}).$$

Для однотипных зеркал следует выбрать один определенный знак в правых частях первых двух выражений. Суммируя все три выражения и учитывая, что $+\pi/2 + \pi/2 + \pi = 2\pi$, а $-\pi/2 - \pi/2 + \pi = 0$, получаем

$$\delta(BCDEF) - \delta(BEF) = (l + m + n + 1) \cdot 2\pi,$$

т. е. лучи $BCDEF$ и BEF в направлении F идут в фазе.

III. 8.13.



а) По закону Снеллиуса мы имеем

$$\frac{\sin \theta'}{\sin \theta} = n = \frac{4}{3}.$$

(1)

Расстояние от центра пузырька до изображения, как показано на рисунке, равно $-q$. Оно является отрицательным, поскольку изображение располагается по ту же сторону от пузырька, что и предмет. Используя закон синусов для треугольника, можно найти соотношение между расстоянием q и радиусом пузырька

$$\frac{q}{\sin \theta} = \frac{R}{\sin \alpha}, \quad (2)$$

где $\alpha = \pi - (\pi - 2\theta' + \theta) - \theta = 2(\theta' - \theta)$. Таким образом,

$$q = R \frac{\sin \theta}{2 \sin(\theta' - \theta) \cos(\theta' - \theta)}. \quad (3)$$

Если лучи идут близко от горизонтальной оптической оси, то углы θ и θ' оказываются очень малыми. Поэтому в формулах (1) и (3) можно произвести следующую замену: $\sin \theta \approx \theta$, $\sin \theta' \approx \theta'$, $\sin(\theta' - \theta) \approx \theta' - \theta$ и $\cos(\theta' - \theta) \approx 1$, после чего формула (3) принимает вид

$$q = \frac{R\theta}{2(\theta' - \theta)}, \quad (3')$$

а формула (1) —

$$\theta' = 4/3\theta. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3'), получаем

$$q = \frac{3}{2} R. \quad (5)$$

Фактически это расстояние отрицательно, поскольку изображение расположено по ту же сторону от пузырька, что и предмет. Следовательно, изображение является мнимым и прямым. Так как предмет находится на бесконечности, то q по определению представляет собой фокусное расстояние пузырька.

Эту задачу можно решить и другим путем, если воспользоваться формулами для толстой линзы, выведенными для параксиальных лучей от точечного источника, претерпевающих преломление на сферических поверхностях радиусами R_1 или R_2 . Мы можем записать

$$\frac{n'}{f'_1} = \frac{n' - n}{R_1} \quad (6)$$

и

$$\frac{n}{f'_2} = \frac{n - n'}{R_2}; \quad (7)$$

здесь f'_1 и f'_2 — переднее и заднее фокусные расстояния для левой и правой сферических поверхностей соответственно. Подставляя в формулы $n = 4/3$, $n' = 1$, $R_1 = R$ и $R_2 = -R$, получаем

$$f'_1 = -3R \quad \text{и} \quad f'_2 = -4R. \quad (8)$$

Фокусное расстояние линзы f определяется выражением

$$\frac{n}{f} = \frac{1}{f'_1} + \frac{n}{f'_2} - \frac{2Rn}{f'_1 f'_2},$$

откуда находим

$$f = \frac{f'_1 f'_2}{f'_2/n + f'_1 - 2R}. \quad (9)$$

Подставляя в (9) выражения для f'_1 и f'_2 из формул (8), получаем

$$f = -\frac{3R}{2}. \quad (10)$$

Наконец, можно найти q , используя формулу Гаусса для линзы

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}. \quad (11)$$

Отсюда, полагая по условию задачи $p = \infty$, получаем

$$q = f = -\frac{3}{2}R.$$

б) При $p = R$ мы имеем

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{R} = -\frac{1}{R} \left(\frac{2}{3} + 1 \right) = -\frac{5}{3R}.$$

Следовательно,

$$q = -\frac{3}{5}R.$$

IV. АТОМНАЯ ФИЗИКА И КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

ЗАДАЧИ

IV. 1.1 (20 баллов).

а) Почему при Резерфордском рассеянии α -частиц в тонкой золотой фольге пренебрегают влиянием электронов атома на α -частицу?

б) Объясните, почему при Комptonовском рассеянии рентгеновских лучей не учитывают влияния ядер атомов.

IV. 1.2 (20 баллов). Оцените магнитное поле, действующее на протон в атоме водорода со стороны электрона, находящегося в состоянии $2p$.

IV. 1.3 (20 баллов). Ртутная лампа излучает 10^{18} фотонов в секунду на спектральной линии 2537 \AA . Полагая, что плотность паров ртути в лампе мала и они находятся в тепловом равновесии при температуре $T = 300 \text{ K}$, вычислите доплеровское уширение спектральной линии. Оцените ее естественную ширину. Какова мощность излучения лампы на этой спектральной линии?

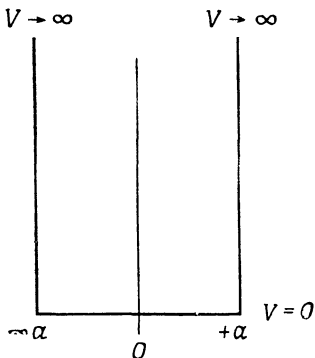
IV. 1.4 (20 баллов). Калий — щелочной металл с атомным номером $Z = 19$.

а) Какова конфигурация электронных оболочек этого атома в основном состоянии?

б) Какие квантовые числа L , S и J характеризуют основное состояние атома калия?

в) Опишите количественно Зеемановское расщепление уровней атома, находящегося в основном и первом возбужденном состояниях.

IV. 1.5 (20 баллов). Рассмотрим прямоугольную потенциальную яму с бесконечно высокими стенками и шириной $2a$, как показано на рисунке



Волновая функция частицы, находящейся в этой потенциальной яме, записывается в виде

$$\psi = C \left(\cos \frac{\pi x}{2a} + \sin \frac{3\pi x}{a} + \frac{1}{4} \cos \frac{3\pi x}{2a} \right) \quad (\text{внутри потенциальной ямы}),$$

$$\psi = 0 \quad (\text{вне потенциальной ямы}).$$

- Вычислите коэффициент C .
- Какие значения можно получить при измерении полной энергии частицы и какова вероятность появления каждого из этих значений?

IV. 2.1 (15 баллов). Дайте числовые значения следующих физических постоянных (в общепринятых единицах):

- массы нейтрона m_n ,
- постоянной Планка h ,
- постоянной тонкой структуры α ,
- комптоновской длины волны электрона λ_e ,
- классического радиуса электрона r_0 ,
- времени жизни атома водорода в возбужденном $2p$ -состоянии,
- магнитного момента протона μ_p ,
- времени жизни свободного нейтрона τ ,
- скорости электрона на первой боровской орбите v .

Ответы на п. «в», «г» и «д» выразите через фундаментальные постоянные e , \hbar , m_e и c .

IV. 2.2 (25 баллов).

- Одномерное движение частицы массой m в поле с потенциалом $V(x)$ описывается стационарным уравнением Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x).$$

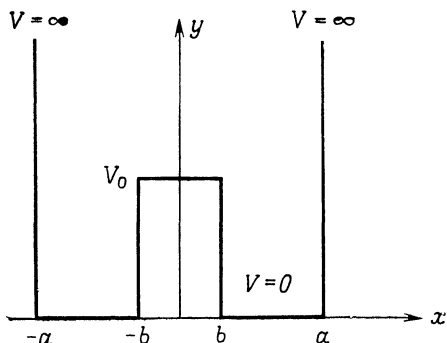
Предполагая $V(x) = V(-x)$, а решение $\psi(x)$ невырожденным, докажите, что $\psi(x)$ имеет определенную четность, т. е. что

$$\psi(x) = +\psi(-x) \quad \text{— четная функция}$$

или

$$\psi(x) = -\psi(-x) \quad \text{— нечетная функция.}$$

б) Рассмотрите движение частицы в потенциальном поле, показанном на следующем рисунке:



Постройте приближенную картину решений стационарного уравнения Шредингера, соответствующих двум самым низким собственным значениям энергии частицы в данном потенциальном поле. Обозначьте полученные решения через ψ_1 и ψ_2 , а соответствующие им энергии через E_1 и E_2 .

в) Частное решение полного уравнения Шредингера для приведенного выше потенциального поля можно представить в виде суперпозиции функций

$$\psi_1 e^{-i(E_1/\hbar)t} \quad \text{и} \quad \psi_2 e^{-i(E_2/\hbar)t}.$$

Получите волновой пакет ψ , который в момент времени $t = 0$ сосредоточен (почти) полностью в левой потенциальной яме. Опишите подробно дальнейшее движение пакета во времени.

IV. 2.3 (20 баллов). Позитрон имеет ту же массу, что и электрон, но положительный заряд и противоположный спиновый магнитный момент. Если в атоме водорода заменить протон позитроном, то получится атом позитрония.

а) Атом позитрония в основном состоянии имеет два очень близко расположенных энергетических уровня 1S_0 и 3S_1 . Какой из них расположен ниже?

б) Какова энергия связи электрона в атоме позитрония в основном состоянии?

в) Предположим, что атом позитрония покоится и, находясь в состоянии 1S_0 , аннигилирует с образованием двух γ -квантов. Определите энергию γ -квантов и относительные направления их разлета.

IV. 2.4 (15 баллов).

а) Вычислите значение матричного элемента

$$\langle l', m' | [L_+, L_-] | l, m \rangle.$$

б) Докажите, что

$$e^{i\sigma_y \theta/2} = \cos(\theta/2) + i\sigma_y \sin(\theta/2).$$

IV. 2.5 (25 баллов). На какую величину сдвинется энергетический уровень $1S$ атома водорода, если представить заряд протона не точечным, а равномерно распределенным по сферической оболочке радиусом 10^{-13} см? Воспользуйтесь первым приближением теории возмущений.

IV. 3.1 (5 баллов). Предположим, что заряд протона оказался вдвое большим. С каким зарядовым числом Z и массовым числом A существовало бы наиболее тяжелое устойчивое ядро?

IV. 3.2 (5 баллов). Оцените порядок величины магнитного поля, в котором обычное ядро вместо эффекта Зеемана давало бы эффект Пашена — Бака? (Такой эффект никогда не наблюдался.)

IV. 3.3 (5 баллов). Какой минимальной кинетической энергией должен обладать протон, чтобы при его столкновении с тяжелым ядром образовался антинейтрон?

IV. 3.4 (5 баллов). Попадая в вещество, отрицательно заряженные мюоны очень быстро втягиваются на боровские орбиты вокруг ядер, а затем постепенно захватываются протонами атомных ядер (K -захват). Эта картина очень напоминает процесс β -распада, только протекающий в обратном порядке. Вероятность такого захвата в различных веществах довольно точно подчиняется следующему закону:

$$\text{Вероятность захвата мюона} = \text{const} \cdot Z^p.$$

Объясните, почему в этом законе показатель степени p должен быть равен 4.

IV. 3.5 (5 баллов). До какого значения энергии протонов их рассеяние на нейтронах можно считать изогропным?

IV. 3.6 (15 баллов). Определите (без подробных вычислений) энергетические уровни частицы массой m , движущейся в одномерном потенциальном поле

$$V(x) = \begin{cases} +\infty, & x < 0, \\ +\frac{m\omega^2 x^2}{2}, & x > 0. \end{cases}$$

IV. 3.7 (5 баллов). Перечислите известные вам точные симметрии (законы сохранения). Приведите примеры приближенных симметрий.

IV. 3.8 (5 баллов). Имеется мезон, который может распадаться двумя возможными путями с образованием различных продуктов распада. Оба процесса характеризуются временами распада t_1 и t_2 . Напишите формулу для неопределенности массы этого мезона.

IV. 3.9 (5 баллов). Каковы фазовая и групповая скорости волны де Бройля у свободного электрона, движущегося со скоростью V , определяемой по классической теории?

IV. 3.10 (10 баллов). Укажите, в каких областях трехмерного конфигурационного пространства волновая функция ψ должна обращаться в нуль для каждого из перечисленных ниже энергетических состояний атома водорода:

- а) $1s$ -состояние,
- б) $2s$ -состояние,
- в) $2p$ -состояние (в этом случае рассмотрите отдельно каждое из возможных состояний).

IV. 3.11 (10 баллов). Напишите простейшую формулу для энергии связи электрона, находящегося на K -оболочке, с ядром атома, имеющим заряд Z . Рассмотрите, как изменится (увеличится или уменьшится) эта энергия связи, если учесть

- а) релятивистскую поправку,
- б) эффект экранировки центрального поля остальными электронами,
- в) конечный размер ядра.

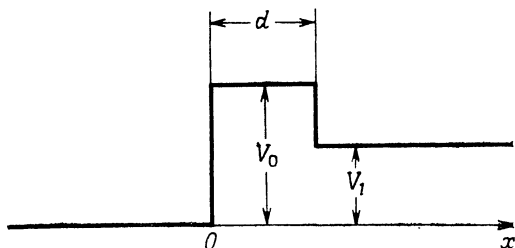
IV. 3.12 (10 баллов). Найдите зависимость (с точностью до знака) потенциальной энергии взаимодействия двух частиц от расстояния r между ними (r велико) для следующих конкретных случаев:

- а) два нейтральных атома,
- б) два ионизованных атома,
- в) один нейтральный атом и один ион,
- г) два нейтрона (учтите только ядерные силы),
- д) два нейтрона (с учетом электромагнитных сил).

IV. 3.13 (15 баллов). Рассмотрим квантовомеханическую модель — однородную сферу, которая может свободно вращаться относительно своего центра. Предположим, что центр сферы совпадает с началом координат. Поскольку точки на поверхности сферы не отличимы друг от друга, квадрат модуля волновой функции $|\psi(\theta, \varphi)|^2$ не зависит от углов θ и φ . Определите воз-

можные значения момента импульса сферы и покажите, как вы их получили.

IV. 4.1 (15 баллов). Одномерный потенциальный барьер имеет следующую форму:



Определите коэффициент прозрачности этого барьера для частиц массой m , движущихся к нему слева с энергией E ($V_1 < E < V_0$).

IV. 4.2 (5 баллов). Найдите собственные значения и нормированные собственные векторы следующей матрицы:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

IV. 4.3 (20 баллов). Предположим, что ψ является собственной функцией уравнения Шредингера для одной частицы. Введем в рассмотрение вектор \mathbf{C} , удовлетворяющий соотношению

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V \psi^* \psi dV \right) = - \int_V (\nabla \cdot \mathbf{C}) dV.$$

- Какой физический смысл имеет вектор \mathbf{C} ?
- Найдите выражение для \mathbf{C} в явном виде.

IV. 4.4 (20 баллов).

- Напишите волновую функцию для атома водорода в основном состоянии.
- Получите выражение для вероятности найти частицу (электрон) в шаровом слое между r и $r + dr$.
- При каком значении r эта вероятность максимальна?

IV. 4.5 (20 баллов). Дайте числовые значения (не более чем с трехкратной ошибкой) следующих физических величин:

- расстояния между ядрами атомов в молекуле водорода;
- длины волны, соответствующей максимуму спектральной плотности излучения абсолютно черного тела при температуре 3 К;

- в) ширины запрещенной зоны, расположенной между валентной зоной и зоной проводимости, в чистом кристалле германия;
- г) энергии, выделяемой при делении одного ядра урана-235;
- д) частоты излучения в красной области спектра;
- е) интервала времени, в течение которого свет проходит расстояние, равное диаметру одного протона;
- ж) магнитного момента свободного электрона.

IV. 4.6 (20 баллов). Частица массой m находится в основном состоянии в одномерной потенциальной яме с очень высокими («бесконечными») стенками, разделенными промежутком длиной a . Стенки ямы мгновенно и симметрично раздвигаются до расстояния $2a$.

- а) Какова вероятность того, что частица в этой расширенной системе находится в основном состоянии?
- б) Сохранится ли энергия частицы в результате раздвижения стенок?

IV. 5.1 (20 баллов). Кратко объясните:

- а) Что такое принцип соответствия?
- б) Что представляет собой закон Дюлонга и Пти?
- в) Почему в спектрах поглощения щелочных металлов наблюдается только главная серия?
- г) Почему g -фактор Ланде для всех синглетных уровней равен 1, а для всех S -уровней равен 2?
- д) Назовите два экспериментальных факта, непосредственно подтверждающих корпускулярную природу электромагнитного излучения.

IV. 5.2 (20 баллов). Мю-мезон (мюон) и протон образуют водородоподобный атом. Масса мю-мезона в 210 раз превышает массу электрона.

- а) Какой энергией обладает фотон, испускаемый таким атомом при переходе из первого возбужденного состояния в основное?
- б) Чему равен радиус первой боровской орбиты у такого атома?
- в) Какова скорость мю-мезона на n -й боровской орбите? n — главное квантовое число.

IV. 5.3 (20 баллов). Студенты, проходящие химический практикум, определяют присутствие малых примесей натрия в образце по характерному желтому окрашиванию (линия 5890 Å) пламени бунзеновской горелки, в котором сжигается образец. Этот эффект может показаться необъяснимым, так как темпера-

тура пламени сравнительно невелика (2000 К). Проведите количественный расчет и покажите, что здесь нет ничего странного.

IV. 5.4 (20 баллов). Частица движется в одномерном потенциальном поле

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ V_0, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Предположим, что она обладает энергией $E > V_0$ и движется слева направо.

- Определите волновую функцию частицы. Нормировать ее не нужно.
- Произведите нормировку волновой функции таким образом, чтобы она соответствовала единичному потоку движущихся частиц (одна частица в одну секунду).
- Решите задачу «а» для случая $E < V_0$ и сделайте вывод из полученного результата.

IV. 5.5 (20 баллов). Состояние частицы массой m характеризуется (ненормированной) волновой функцией

$$\psi_k(r) = \frac{e^{-ikr} + be^{ikr}}{r},$$

где r — расстояние от начала координат.

- Чему равна энергия частицы?
- Является ли эта частица свободной? Если нет, то опишите, по возможности, потенциальное поле, в котором она находится.

IV. 6.1 (15 баллов).

- В уравнения электродинамики входит уравнение непрерывности, которое связывает изменение плотности заряда во времени с дивергенцией плотности тока. Используйте аналогичное уравнение квантовой механики для того, чтобы получить выражение для потока вероятности в нерелятивистском случае.
- Вычислите поток вероятности для ненормированной волновой функции $\psi = e^{-ikx}$.
- Применимо ли понятие потока к действительной волновой функции?

IV. 6.2 (20 баллов). На лестнице стоит мальчик и с высоты H роняет вниз маленькие шарики массой m . Представим себе, что он целится идеально точно. Используя принцип неопределенности, оцените средний разброс шариков около мишени.

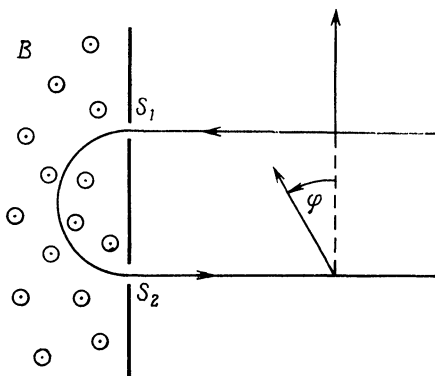
IV. 6.3 (20 баллов). Согласно закону Мозли, частота линии K_α рентгеновского излучения ν зависит от атомного номера элемента Z следующим образом:

$$\sqrt{\nu} = aZ - b.$$

- а) Выразите приближенно коэффициент a через фундаментальные физические постоянные.
 б) Объясните, почему частоты спектральных линий рентгеновского излучения изменяются от элемента к элементу в соответствии с таким простым законом, а частоты линий оптических спектров описываются более сложно.

IV. 6.4 (10 баллов). Частица с массой покоя m_1 налетает со скоростью v на покоящуюся частицу массой m_2 и поглощается ею. Определите массу покоя M и скорость V образовавшейся частицы.

IV. 6.5 (15 баллов). Электроны влетают через щель S_1 в область с однородным магнитным полем B и, описав в этой области полуокружность, покидают ее через щель S_2 . При входе в эту область спины электронов ориентированы вверх ($\varphi = 0$), как показано на рисунке. Магнитный момент электронов $\mu = -(eg/2m_e c)s$, где фактор $g = 2 + \alpha/\pi$ (здесь α — постоянная тонкой структуры).



- а) Определите частоту, с которой прецессирует спин электронов.
 б) Вычислите циклотронную частоту электронов.
 в) Под каким углом φ к первоначальному направлению ориентированы спины электронов при выходе из области с магнитным полем?

Замечание. Можно доказать, что квантовомеханическое выражение для изменения среднего значения спина электрона во вре-

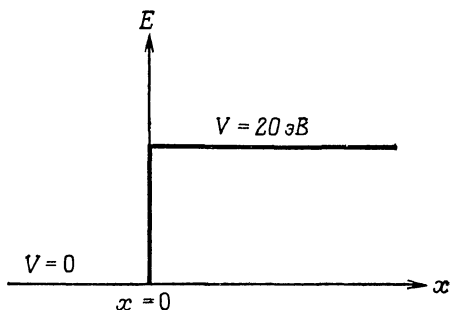
мени аналогично выражению из классической динамики. Следовательно, здесь может быть полностью оправдан классический подход к решению задачи, и его нужно использовать.

IV. 6.6 (20 баллов).

а) Используя классические формулы для кинетической и потенциальной энергий электронно-протонной системы и квантовый постулат Бора, получите выражение для энергии уровней в атоме водорода.

б) Оцените разность энергий между четвертым и вторым уровнями.

IV. 7.1 (20 баллов). Электрон движется параллельно оси x слева направо в потенциальном поле $V = 0$ в области $x < 0$ и $V = 20$ эВ в области $x > 0$ (см. рисунок).



Кинетическая энергия электрона при $x = -\infty$ равна 10 эВ. Будем рассматривать движение электрона как одномерную плоскую волну.

а) Напишите уравнение Шредингера для областей $x < 0$ и $x > 0$;

б) постройте на графике решения этого уравнения для обеих областей;

в) чему равна дебройлевская длина волны электрона (в сантиметрах) при $x < 0$?

г) найдите граничные условия при $x = 0$;

д) что можно сказать о вероятности нахождения электрона вблизи некоторого положительного значения координаты x ?

IV. 7.2 (20 баллов).

а) Рассмотрим *одномерный* гармонический осциллятор с характеристической частотой ν_0 . Каковы собственное значение энергии и четность собственного состояния, соответствующие квантовому числу n ?

Какие значения может принимать n ?

б) Волновую функцию *трехмерного* гармонического осциллятора можно записать в виде произведения трех собственных функций одномерного гармонического осциллятора, каждая из которых зависит от определенной декартовой координаты и соответствует квантовому числу n_x , n_y или n_z . Найдите энергию, четность и кратность вырождения четырех самых нижних *отдельных групп* энергетических уровней.

в) Задачу о трехмерном гармоническом осцилляторе можно решить и в сферических координатах. Несмотря на использование других собственных функций, собственные значения энергии окажутся *теми же самыми*. На основе своих знаний о четности и вырождении различных состояний установите, какому значению орбитального квантового числа l соответствует каждая группа уровней, о которых говорилось в п. «б».

IV. 7.3 (20 баллов). Свободный атом углерода имеет четыре электрона в s -состояниях и два электрона в p -состояниях.

а) Определите, пользуясь принципом Паули, число разрешенных состояний для последней пары электронов.

б) В предположении LS-связи квантовые числа для суммарного полного момента J , суммарного орбитального момента $L^2 = (l_1 + l_2)^2$ и суммарного спинового момента $S^2 = (s_1 + s_2)^2$ получаются «хорошими»¹⁾. Определите наборы квантовых чисел J , L и S для p -состояний обоих электронов и вычислите их мультиплетность.

в) Сложите мультиплетности термов, найденных в п. «б», и *убедитесь*, что полученный результат в точности совпадает с полученным в п. «а».

IV. 7.4 (20 баллов). Атомный номер натрия равен 11.

а) Какова электронная конфигурация этого атома в основном состоянии? (Используйте стандартное символическое обозначение, которое показывает распределение электронов атома по различным состояниям.)

б) Обозначьте основное состояние атома, как принято в спектроскопии. (Примером может служить обозначение 5^3F_2 .)

в) Самая низкочастотная линия в спектре поглощения натрия представляет собой дублет. Какие спектроскопические обозначения следует приписать соответствующей па-

¹⁾ «Хорошими» квантовыми числами называют те, которые определяют точно (или в некотором достаточно точном для рассматриваемой ситуации приближении) сохраняющиеся величины. — *Прим. ред.*

ре возбужденных энергетических уровней, на которые переходит атом в процессе поглощения.

г) Чем можно объяснить расщепление на эти два энергетических уровня?

д) Суммарный полный момент атома J различен для этих двух уровней. Выше или ниже расположен уровень, соответствующий большему значению J ?

е) Рассматриваемое расщепление на два уровня пропорционально средней величине r^n , где r — расстояние между валентным электроном и ядром атома. Вычислите наиболее простым путем значение n .

IV. 7.5 (20 баллов).

а) Выпишите все перестановочные соотношения для операторов момента импульса L_x , L_y , L_z и оператора L^2 .

б) Пусть ψ_{lm} — собственная функция операторов L^2 и L_z , отвечающая их собственным значениям $\hbar^2 l(l+1)$ и $\hbar m$ соответственно. Докажите, что $\varphi = (L_x + iL_y)\psi_{lm}$ также является собственной функцией операторов L^2 и L_z , и найдите их собственные значения.

в) Покажите, что в случае $l = 0$ функция ψ_{lm} , рассматриваемая в п. «б», является также собственной функцией операторов L_x и L_y .

IV. 8.1 (15 баллов). Определив квантовые числа S , L и J , запишите в принятых спектроскопических обозначениях следующие состояния атомов:

а) основное состояние нейтрального атома бора (атомный номер $Z = 5$),

б) основное состояние однократно ионизованного атома натрия ($Z = 11$),

в) основное состояние двукратно ионизованного атома натрия,

г) первое возбужденное состояние однократно ионизованного атома натрия,

д) основное состояние молекулы водорода.

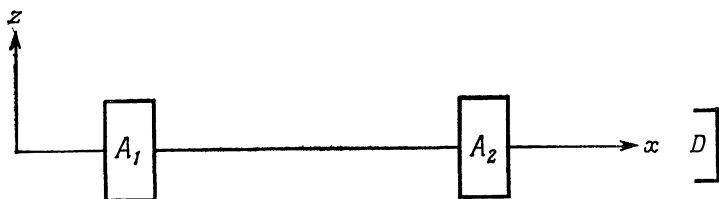
IV. 8.2 (10 баллов). Частица массой m находится в основном состоянии с энергией $E = -B$ в одномерной потенциальной яме шириной a . В решение уравнения Шредингера входят два параметра, имеющие размерность длины:

$$d_1 = a \quad \text{и} \quad d_2 = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2mB}}.$$

Ответьте качественно на следующий вопрос: до какого расстояния x можно считать отличной от нуля плотность вероятности

для этой частицы? Для иллюстрации ваших результатов постройте график волновой функции.

IV.8.3 (10 баллов). На рисунке представлена система из двух магнитов A_1 и A_2 ; каждый из них аналогичен магнитам, используемым в опытах Штерна и Герлаха. Через такую систему проходят атомы только в состояниях с $S_z = +1/2$ (имеются в виду атомы калия, узкий пучок которых падает слева). Представим теперь, что между магнитами A_1 и A_2 на пучок атомов в течение одной микросекунды воздействует пространственно однородное магнитное поле \mathbf{B} . Каковы должны быть величина и направление поля \mathbf{B} , чтобы ни один атом из этого пучка не попал на детектор D ?



IV.8.4 (10 баллов). Оцените приближенно время жизни τ атома водорода в возбужденном $2p$ -состоянии. Принимая во внимание принцип неопределенности, мы могли бы сказать, что энергетический уровень этого состояния имеет ширину¹⁾ $\Delta E \approx \hbar/\tau$. Однако в известной серии опытов, проведенных более двадцати лет назад, Лэмб и его сотрудники измерили энергию этого уровня с погрешностью примерно в тысячу раз меньшей, чем ΔE . Объясните этот парадокс.

IV.8.5 (15 баллов). Приведите формулы и числовые значения в сантиметрах (с точностью до одной значащей цифры) для

- радиуса первой боровской орбиты в атоме водорода,
- радиуса первой боровской орбиты в атоме ртути,
- комптоновской длины волны электрона,
- комптоновской длины волны пи-мезона,
- дебройлевской длины волны нейтрона с энергией 10 кэВ,
- дебройлевской длины волны протона с энергией 10 ГэВ,
- комптоновской длины волны нейтрино (с указанием типов нейтрино),
- радиуса наиболее тяжелого устойчивого ядра.

¹⁾ Здесь τ обозначает среднее время пребывания атома в возбужденном нестабильном состоянии, переход из которого является разрешенным. — Прим. ред.

IV. 8.6 (10 баллов).

а) Докажите, что для любого стационарного состояния квантовое среднее значение импульса p должно равняться нулю.

б) При каких условиях можно доказать, что квантовое среднее значение оператора положения r обращается в нуль?

IV. 8.7 (10 баллов).

а) Установите правила отбора для электрических дипольных переходов в атомах легких элементов.

б) Какие из них остаются в силе для тяжелых элементов?

в) для ядер?

IV. 8.8 (10 баллов). Расщепление линий в сверхтонкой структуре атома меньше расщепления в тонкой структуре примерно в m/MZ раз, где m — масса электрона, M — масса протона, а Z — атомный номер. Объясните, чем это вызвано.

IV. 8.9 (10 баллов). Рассмотрим функцию $f(x)$, определяемую степенным рядом вида

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^p},$$

где p — некоторое положительное целое число.

а) Какое суждение можно вынести о скорости возрастания этой функции (по сравнению со степенной функцией) при $x \rightarrow +\infty$?

б) Может ли эта функция служить решением какого-нибудь конкретного уравнения Шредингера, удовлетворяя одновременно условию нормировки

$$\int_0^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1?$$

Дайте объяснение.

IV. 9.1 (5 баллов). В некотором циклотроне дейтроны ускоряются до энергии 16 МэВ. До какой энергии будут ускорены α -частицы в этом циклотроне, если заменить в нем дейтерий гелием?

IV. 9.2 (5 баллов). Какова плотность вещества в ядре атома в г/см³?

IV. 9.3 (5 баллов). Протоны и α -частицы, обладающие одинаковыми кинетическими энергиями, проходят через золотую фольгу. Чему равно отношение их сечений кулоновского рассеяния (нерелятивистского)?

IV. 9.4 (5 баллов). Какая выделилась бы энергия (в джоулях), если бы метеор из антивещества массой 1 кг столкнулся с Землей?

IV. 9.5 (5 баллов). Определите энергию основного состояния атома, образованного из электрона и позитрона, которые связаны между собой силами кулоновского притяжения.

IV. 9.6 (5 баллов). На сколько компонент расщепляется спектральная линия атома натрия, соответствующая переходу ${}^2D_{3/2} \rightarrow {}^2D_{1/2}$ в случае нормального эффекта Зеемана?

IV. 9.7 (5 баллов). Частица массой m находится в потенциальной яме, имеющей форму полусферы радиусом R . Оцените приближенно кинетическую энергию частицы в основном состоянии. (Рассмотрите только нерелятивистский квантовый случай.)

IV. 9.8 (5 баллов). Определите границу коротковолнового рентгеновского излучения для трубки, находящейся под напряжением 25 кВ.

IV. 9.9 (5 баллов). Большое число идентичных фермионов находится в прямоугольном ящике объемом V , занимая низшие возможные уровни. Во сколько раз изменится максимальный импульс частиц, если удвоить объем ящика, а число частиц оставить неизменным?

IV. 9.10 (5 баллов). Укажите величину магнитного момента протона не более чем с двукратной ошибкой.

IV. 9.11 (5 баллов). Запишите в спектроскопических обозначениях основное состояние атома гелия.

IV. 9.12 (5 баллов). Пусть $\psi(r, t)$ — волновая функция частицы, движущейся в потенциальном поле $V = kr^2/2$. Рассмотрим другое состояние этой частицы с волновой функцией $\psi(\alpha r, t)$. Во сколько раз отличаются средние кинетическая и потенциальная энергии в этих двух случаях?

IV. 9.13 (10 баллов). Исходя из элементарной теории Бора:

а) вычислите магнитное поле в центре атома водорода, индуцированное электроном в основном состоянии;

б) оцените для этого состояния сверхтонкое расщепление энергетического уровня¹⁾;

в) вычислите частоту радиоизлучения атомарного водорода, распределенного в космосе (в пренебрежении магнитным моментом электрона).

IV. 9.14 (15 баллов). Рассмотрим атом, состоящий из двух протонов и одного электрона.

¹⁾ Без учета аномального магнитного момента протона. — Прим. ред.

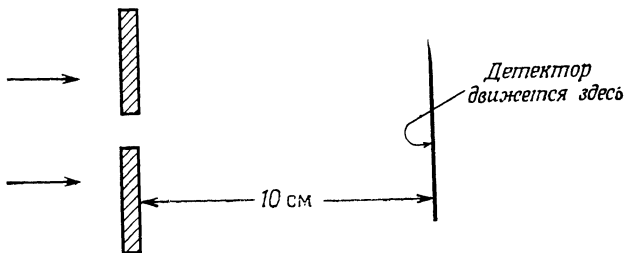
а) Предполагая, что расстояние R между протонами жестко зафиксировано и нам известна зависимость энергии электрона E_0 в основном состоянии от R , напишите выражения для $E_0(0)$ и $E_0(\infty)$ и оцените их численно.

б) Теперь предположите, что оба протона взаимодействуют друг с другом, и их «эффективная потенциальная энергия» $V(R)$ равна сумме $E_0(R)$ и энергии электростатического отталкивания. Определите, как зависит расстояние R между протонами в состоянии равновесия от $E_0(R)$.

в) Считая функцию $E_0(R)$ гладкой и монотонной в интервале между предельными значениями $E_0(0)$ и $E_0(\infty)$, постройте приближенно график зависимости $V(R)$.

г) До сих пор мы не учитывали собственного движения протонов. Охарактеризуйте качественно природу нижних энергетических подуровней основного состояния электрона и нижних возбужденных состояний обоих протонов.

IV. 9.15 (15 баллов). Параллельный пучок электронов, ускоренных в поле с разностью потенциалов 37 В, падает нормально на экран, в котором имеется щель шириной 1 Å (ясно, что такая щель нереальна и рассматривается абстрактная задача). За экраном, на расстоянии 10 см от него, перпендикулярно щели и направлению пучка перемещается детектор очень малых размеров (~ 1 Å).



а) Какова примерно ширина области, в которой детектор регистрирует электроны?

б) Какое распределение электронов будет регистрировать детектор, если в экране сделать еще одну такую же щель, параллельную первой и отстоящую от нее на расстояние 10 Å? Нарисуйте это распределение.

в) Предположим, что интенсивность электронного пучка уменьшилась настолько, что в любой момент времени в пространстве между экраном и плоскостью детектора имеется только один электрон. Произойдет ли изменение картины?

г) Какая наблюдалась бы картина, если бы одну из щелей перекрыли вторым (прозрачным для электронов) детектором, дающим нам информацию о том, через какую щель прошел каждый электрон?

IV. 10.1 (20 баллов).

а) Мюон — это частица с массой $206 m_e$, заряд которой равен заряду электрона. Предположим, что отрицательно заряженный мюон оказался захваченным атомом фосфора ($Z = 15$) и стал последовательно переходить на все более низкие энергетические уровни. Определите энергию фотона, испускаемого атомом, при переходе мюона с уровня $n = 3$ на уровень $n = 2$.

б) Для точного определения массы мюона можно использовать результаты прецизионного измерения энергии фотона, излучаемого так, как описано в п. «а». Случайно оказалось, что энергия фотона лежит примерно в середине длинноволновой границы K -полосы поглощения у свинца ($Z = 82$). Чтобы доказать, что данное утверждение справедливо, вычислите приближенно энергию, соответствующую границе K -полосы поглощения для свинца.

в) Как, используя этот факт, вы произвели бы точное измерение энергии фотона и почему упомянутый случайный факт можно отнести к разряду «счастливых»?

IV. 10.2 (25 баллов).

а) Исходя из выражения для мощности излучения ускоренно движущегося электрона

$$\frac{dw}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2 a^2}{c^3} \text{ эрг/с,}$$

получите формулу для сечения томсоновского рассеяния.

б) Опишите, какая существует связь между томсоновским и комптоновским рассеянием?

в) Считая, что γ -кванты с энергией $0,5 \text{ МэВ}$ рассеиваются атомами водорода под углом 90° , вычислите энергию γ -квантов, рассеянных на электронах и протонах, а также оцените по порядку величины отношение их сечений рассеяния $(\gamma + e^-)/(\gamma + p)$.

IV. 10.3 (20 баллов). Напишите классическую формулу для мощности излучения ускоренно движущегося заряда (см. задачу IV.10.2) и, применяя принцип соответствия, определите среднее время жизни простого гармонического осциллятора в возбужденном состоянии с высоко расположенными квантовыми уровнями энергии. Результат выразите через квантовое число

уровня n , классическую круговую частоту ω , массу m и заряд e осциллирующей частицы.

IV. 10.4 (20 баллов). Согласно одной из простых моделей, атомное ядро из N нейтронов и Z протонов рассматривается как совокупность нуклонов в бесконечно глубоком (квадратном) потенциальном ящике.

- Получите выражение для плотности энергетических уровней (т. е. для числа уровней, приходящихся на единичный энергетический интервал) в таком потенциальном ящике.
- Чему равна максимальная кинетическая энергия отдельного нуклона, если ядро атома находится на самом нижнем энергетическом уровне?
- Покажите, что при постоянной плотности ядра найденная выше максимальная энергия не зависит от числа нуклонов.
- Как следует изменить рассматриваемую модель, чтобы учесть электрическое взаимодействие между протонами?

IV. 10.5 (15 баллов). Парамагнитная соль титана подвергается действию магнитного поля $B = 10\,000$ Гс в гелиевом криостате при температуре 1 К. Вычислите приближенно, какая часть от общего числа ионов $Ti^{3+} [3d^1; {}^2D_{3/2}]$ имеет ориентацию спина по направлению поля.

IV. 11.1 (20 баллов). Представьте себе метательное копьё, которое, упираясь своим острием в неподвижную горизонтальную мраморную плиту, находится в «идеально сбалансированном» вертикальном положении. Используя принцип неопределенности, оцените время, через которое упадет это копьё.

IV. 11.2 (20 баллов). В некоторых магнитных материалах могут существовать спиновые волны с частотой $\omega = Dk^2$, где D — постоянная, а k — волновое число (модуль волнового вектора), соответствующее данной спиновой волне. Энергетические уровни квантованы: $E = n\hbar\omega$.

- Найдите зависимость фазовой v и групповой u скоростей этих волн от частоты ω .
- Определите температурную зависимость интегральной по спектру плотности энергии U , связанной со спиновыми волнами, в состоянии теплового равновесия.

Замечание. Спиновые волны являются бозонами, энергия теплового движения которых описывается законом Планка для излучения абсолютно черного тела. Здесь так же, как и в теории свободного электронного газа, можно определить число частиц $N(k)$, у которых волновые числа попадают в интервал между k

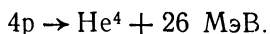
и $k + dk$ (только для спиновых волн не нужно писать множитель 2, учитывающий поляризацию, т. е. спиновые состояния электронов или, например, фотонов).

IV. 11.3 (20 баллов). Коротко опишите такие положения, рассматриваемые в квантовой механике, как

- физическая интерпретация волновой функции $\psi(x)$,
- правила векторного сложения моментов импульса,
- правила отбора, т. е. допустимые изменения квантовых чисел j , l и m для разрешенных излучательных электрических дипольных переходов,
- соотношение, налагаемое на динамические величины G и F , когда они одновременно могут иметь точно определенные значения.

IV. 11.4 (5 баллов). Оцените кинетическую энергию нуклона в ядре атома углерода. Диаметр ядра равен примерно 3×10^{-15} м.

IV. 11.5 (5 баллов). Мощность излучения Солнца (с учетом излучения нейтрино) равна $4 \cdot 10^{26}$ Вт. Предположим, что вся энергия выделяется в результате ядерной реакции, протекающей по протонно-протонному циклу:



Сколько рождается атомов гелия внутри Солнца в одну секунду?

IV. 11.6 (5 баллов). Какова (с точностью $\pm 30\%$) энергия фотонов в K -линиях характеристического рентгеновского спектра атома меди?

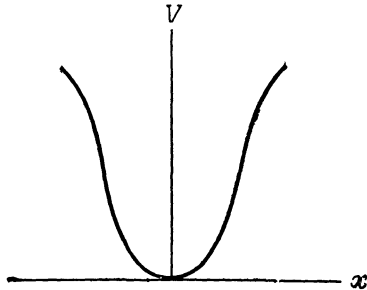
IV. 11.7 (5 баллов). Какой минимальной энергией должен обладать движущийся электрон, чтобы при его столкновении с другим покоящимся электроном образовалась пара электрон — позитрон:



IV. 11.8 (5 баллов). Атом с атомным номером $Z = 26$ часто проявляет валентность $+2$. Обозначьте символически конфигурацию электронных оболочек атома для этого случая. [Пример. Для кислорода она записывается в виде $(1s^2, 2s^2, 2p^4)^3P_2$.]

IV. 11.9 (5 баллов). Оцените зеемановское расщепление $\Delta\nu$ спектральных линий атома водорода в магнитном поле $B = 10\,000$ Гс.

IV. 11.10 (10 баллов). Частица движется в одномерной симметричной потенциальной яме вида



Укажите, как повлияют малые возмущения этого поля (они изображены ниже графически) на поведение частицы в различных состояниях:

- а) — в основном состоянии,
- б) — в первом возбужденном состоянии,
- в) — в основном состоянии.

Для краткости ответов введем следующие обозначения: A — если энергия состояния возрастет в первом приближении теории возмущений, B — если возрастет во втором приближении, C — если уменьшится в первом приближении, D — если уменьшится во втором приближении и E — если не изменится в обоих приближениях.

IV. 12.1 (20 баллов). Рассмотрим систему из двух частиц, имеющих одинаковые массы M . Пусть эти частицы совершают одномерное движение и взаимодействуют между собой с силой $F = -k(x_1 - x_2)$, где x_1 и x_2 — координаты частиц. Предположим, что состояние этой системы описывается волновой функцией

$$\psi = \exp\left[i \frac{P(x_1 + x_2)}{2\hbar}\right] \exp\left[-\frac{\sqrt{Mk/2} (x_1 - x_2)^2}{2\hbar}\right].$$

- а) Чему равно среднее значение полной энергии относительного движения частиц?
- б) Определите среднее значение модуля импульса относительного движения этих частиц.

в) Если измерить относительный импульс p , то с какой вероятностью можно получить значение

$$p < \sqrt{\hbar \sqrt{2Mk}}?$$

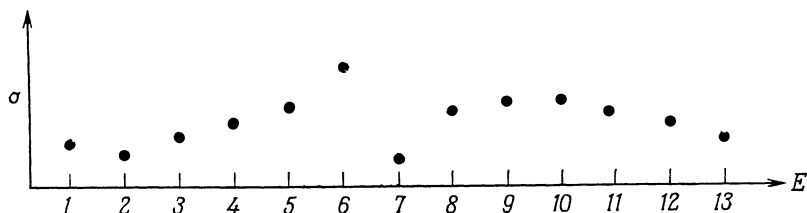
IV. 12.2 (10 баллов). При квантовомеханическом рассмотрении процесса рассеяния используют волновую функцию вида

$$\psi(r) \sim e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad r \rightarrow \infty.$$

а) Воспользуйтесь этой функцией ψ и получите выражения для падающего и рассеянного потоков вероятности.

б) Найдите соотношение, связывающее $f(\theta)$ и сечение рассеяния $\sigma(\theta)$.

IV. 12.3 (10 баллов).



На рисунке нанесены экспериментальные точки, отражающие, например, зависимость сечения рассеяния атома от энергии бомбардирующих электронов. Они нанесены довольно редко — нужно было получить самое общее представление о характере процесса. Предположим, что вам предоставлена возможность произвести пять дополнительных измерений. Какие значения координаты E вы бы приблизительно выбрали и почему?

IV. 12.4 (5 баллов). Счетчик регистрирует излучение долгоживущего радиоактивного препарата. Среднее показание его равно 10^4 импульсов в секунду. Какова вероятность того, что в течение одной секунды он зарегистрирует менее 9700 импульсов?

IV. 12.5 (5 баллов). Время жизни радиоактивного элемента в среднем составляет $\tau = 10$ дней. Какова вероятность того, что произвольный атом этого элемента распадается в течение пятого дня?

IV. 12.6 (5 баллов). Период полураспада свободного нейтрона ~ 12 мин. Какой энергией (в МэВ) должен обладать нейтрон, чтобы с вероятностью 50% он мог выжить, преодолев расстояние в 10 световых лет от звезды до Земли?

IV.12.7 (3 балла). K -мезон распадается на два нейтральных пиона с нулевым спином. Каким спином обладает K -мезон?

IV.12.8 (3 балла).

а) Какому расположению трех положительных зарядов на сфере отвечает состояние с наименьшей энергией?

б) В случае четырех зарядов?

IV.12.9 (3 балла). Оцените высоту кулоновского барьера, преодолеваемого α -частицами у поверхности ядра U^{238} при его распаде.

IV.12.10 (3 балла). Какой радиус имела бы $1s$ -оболочка воображаемого атома из нейтрона и электрона, связанных между собой силой только гравитационного взаимодействия?

IV.12.11 (3 балла). Как зависит радиус K -оболочки атома от его атомного номера Z ?

IV.12.12 (3 балла). Атом водорода находится в возбужденном состоянии, характеризуемом квантовыми числами $n = 3$ и $l = 2$. На какие нижние уровни он может совершить излучательные переходы? (Рассмотрите только электрические дипольные переходы.)

IV.12.13 (3 балла). Сколько электронов может уместиться на оболочке с главным квантовым числом $n = 5$?

IV.12.14 (3 балла). Рассмотрим атом из электрона и позитрона, находящийся в состоянии с орбитальным квантовым числом $l = 1$. Определите магнитный момент такого атома.

IV.12.15 (3 балла). Определите собственные значения следующих четырех операторов, относящихся к спину электрона:

$$s_x, s_y, s_z \text{ и } s^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2.$$

IV.12.16 (3 балла). Представьте себе, что электрон, помещенный в однородное магнитное поле, обладает только одной степенью свободы — спиновой. Напишите выражение для энергии электрона в различных состояниях в зависимости от магнитного поля B и фундаментальных констант e , \hbar , m и c .

IV.12.17 (3 балла). Покоящаяся частица (например, нейтральный пион) массой m распадается на два фотона. Определите импульс p каждого фотона.

IV.12.18 (3 балла). Фотон выбивает электрон из покоящегося атома водорода. При каком условии пренебрежение связью электрона с ядром и его движением не вызывает грубых ошибок при анализе этого процесса?

IV.12.19 (3 балла). Атом водорода находится в состоянии, характеризуемом главным квантовым числом $n = 2$. Какому орбитальному квантовому числу ($l = 0$ или $l = 1$) соответствует в полуклассическом представлении орбита с бóльшим эксцентриситетом?

IV.12.20 (3 балла). Какова (в электрон-вольтах) энергия связи электрона, находящегося в основном состоянии, с ядром однократно ионизованного атома гелия?

IV.12.21 (3 балла). Назовите два важных механизма, которыми можно объяснить ослабление пучка фотонов с энергией 500 кэВ при его прохождении через вещество.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

IV. 1.1.

а) α -частицы обладают низкими энергиями, и размер ядра атома оказывается малым по сравнению с длиной волны де Бройля — Комптона для этих частиц. Следовательно, рассеяние частиц на ядрах является когерентным, причем сечение такого когерентного рассеяния на протонах пропорционально Z^2 , где Z — число протонов в ядре. Рассеяние же α -частиц на электронах является некогерентным, поскольку радиус электронной орбиты намного превышает длину волны де Бройля для этих частиц. Сечение рассеяния α -частиц на электронах пропорционально Z . Отсюда видно, что рассеяние α -частиц на ядрах превалирует над рассеянием их на электронах. Более того, энергетические потери α -частиц при рассеянии на ядрах намного превышают их потери на ионизацию атома, поскольку энергия, передаваемая электрону при единичном акте рассеяния частицы на электроне, меньше $2m_e v_\alpha^2$. Наконец, угол рассеяния α -частиц на ядрах значительно больше, чем на электронах. Именно по этим основным причинам пренебрегают влиянием атомных электронов.

б) Сечение комптоновского рассеяния обратно пропорционально квадрату массы рассеивающей частицы. Следовательно,

$$\frac{\text{Сечение фотон-электронного рассеяния}}{\text{Сечение фотон-ядерного рассеяния}} = \left(\frac{m_N}{m_e}\right)^2 \gg 1,$$

откуда видно, что влияние ядер на рассеяние рентгеновских лучей пренебрежимо мало.

IV. 1.2. Магнитное поле в центре петли с током i вычисляем по формуле

$$B = \frac{\mu_0 i}{2a},$$

где a — радиус петли. Если электрон в атоме водорода находится в $2p$ -состоянии, то радиус его орбиты a и скорость орбитального движения v равны ¹⁾

$$a = n^2 a_0 \quad \text{и} \quad v = \alpha \frac{c}{n},$$

¹⁾ Оценка делается на основе модели атома Бора. — Прим. ред.

где a_0 — боровский радиус электронной орбиты в атоме водорода, α — постоянная тонкой структуры, а $n = 2$. Определяем ток i :

$$i = \frac{ev}{2\pi a} = \frac{eac}{2\pi n^3 a_0} = \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})(1/137)(3 \cdot 10^8)}{(2)(3,14)(8)(0,5 \cdot 10^{-10})} \approx 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ А.}$$

Следовательно,

$$B = \frac{(4\pi \cdot 10^{-7})(1,4 \cdot 10^{-4})}{(2)(2 \cdot 10^{-10})} \approx 0,43 \text{ Вб/м}^2.$$

IV. 1.3. В соответствии с классической волновой теорией относительное доплеровское уширение линии дается выражением

$$\frac{\Delta\omega_D}{\omega} \approx \frac{\sqrt{\langle V^2 \rangle}}{c}, \quad (1)$$

где в нашем случае $\sqrt{\langle V^2 \rangle}$ — среднеквадратичная скорость атомов ртути, а

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = 2\pi \frac{3,0 \cdot 10^8}{2,537 \cdot 10^{-7}} \approx 7,43 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}.$$

Согласно закону равнораспределения,

$$\frac{m}{2} \langle V^2 \rangle = \frac{kT}{2},$$

откуда

$$\sqrt{\langle V^2 \rangle} = \sqrt{\frac{kT}{m}} = c \sqrt{\frac{kT}{mc^2}} = c \sqrt{\frac{(1,38 \cdot 10^{-16})(3 \cdot 10^2)}{(202 \cdot 1,66 \cdot 10^{-24})(9 \cdot 10^{20})}} \approx 3,7 \cdot 10^{-7} c.$$

Таким образом, из формулы (1) получаем

$$\Delta\omega_D = 3,7 \cdot 10^{-7} \omega = (3,7 \cdot 10^{-7})(7,42 \cdot 10^{15}) \approx 3 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}.$$

Используя соотношение неопределенностей, находим естественную ширину спектральной линии

$$\Delta\omega_N = \frac{1}{\tau},$$

где τ — среднее время перехода, ответственного за излучение. Для электрического дипольного перехода $\tau \approx 10^{-8} \text{ с}$, так что

$$\Delta\omega_N \approx 10^8 \text{ с}^{-1} \ll \Delta\omega_D.$$

Полная энергия излучения за одну секунду на данной спектральной линии вычисляется по формуле

$$W = n\hbar\omega = n \frac{2\pi\hbar c}{\lambda}$$

(n — число испускаемых фотонов в одну секунду). Таким образом, находим ¹⁾

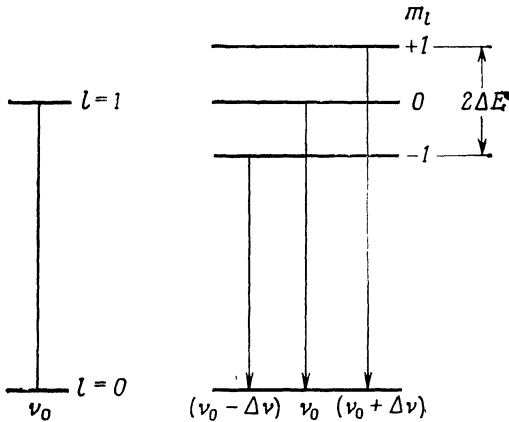
$$W = 10^{18} \frac{1973}{400} = 5 \cdot 10^{18} \text{ эВ} \approx 1 \text{ Дж.}$$

IV. 1.4.

а) $1s^2, 2s^2, 2p^6, 3s^2, 3p^6, 4s^1.$

б) $L = 0, S = 1/2, J = 1/2.$

в)



В случае нормального эффекта Зеемана мы должны рассматривать только то расщепление энергетического уровня, которое отвечает изменениям квантового числа m_l , соответствующего z -компоненте орбитального момента количества движения. Для основного состояния $m_l = 0$, а для первого возбужденного состояния ($4p$) оно может принимать значения $m_l = -1, 0$ и $+1$. На рисунке приведена диаграмма энергетических уровней и показаны разрешенные переходы. Сдвиг уровней ΔE в магнитном поле B составляет

$$\Delta E = \pm \frac{eh}{4\pi mc} B.$$

Согласно правилу отбора для разрешенных переходов с магнитных подуровней, имеем $\Delta m_l = 0$ или ± 1 . Им соответствует излучение с энергией

$$h\nu = h\nu_0 + \frac{eh}{4\pi mc} B, \quad \Delta m_l = +1,$$

$$h\nu = h\nu_0, \quad \Delta m_l = 0,$$

$$h\nu = h\nu_0 - \frac{eh}{4\pi mc} B, \quad \Delta m_l = -1.$$

¹⁾ Здесь в числителе дроби стоит значение hc в эВ·А, а в знаменателе — длина волны в А, деленная на 2π . — Прим. перев.

IV. 1.5.

а) Функция ψ должна быть нормированной. Из условия нормировки

$$\int_{-a}^{+a} \psi^2 dx = 1$$

получаем

$$C^2 \int_{-a}^{+a} \left[\cos^2 \left(\frac{\pi x}{2a} \right) + \sin^2 \left(\frac{3\pi x}{a} \right) + \frac{1}{16} \cos^2 \left(\frac{3\pi x}{2a} \right) \right] dx = 1.$$

Здесь из подынтегрального выражения отброшены произведения с перекрестными членами, поскольку при интегрировании они дают нули. Что касается оставшихся членов, то мы имеем

$$2aC^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{32} \right) = 1,$$

откуда

$$C = 4 \sqrt{\frac{1}{33a}}.$$

б) Подставляя поочередно каждый член волновой функции ψ в уравнение Шредингера, получаем

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \cos \left(\frac{\pi x}{2a} \right) &= \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{4a^2} \cos \left(\frac{\pi x}{2a} \right) = \\ &= \frac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^2} \cos \left(\frac{\pi x}{2a} \right) \equiv E_1 \cos \left(\frac{\pi x}{2a} \right), \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \sin \left(\frac{3\pi x}{a} \right) &= \frac{\hbar^2}{2m} \frac{9\pi^2}{a^2} \sin \left(\frac{3\pi x}{a} \right) \equiv E_2 \sin \left(\frac{3\pi x}{a} \right), \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \cos \left(\frac{3\pi x}{2a} \right) &= \frac{9\hbar^2 \pi^2}{8ma^2} \cos \left(\frac{3\pi x}{2a} \right) \equiv E_3 \cos \left(\frac{3\pi x}{2a} \right), \end{aligned}$$

Можно показать, что все члены волновой функции описывают собственные состояния системы, а E_1 , E_2 и E_3 являются собственными значениями энергий, соответствующими этим состояниям. Поскольку исходная волновая функция представляет собой линейную комбинацию трех собственных функций, то возможные результаты измерений энергии записываются следующим образом:

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^2}, \quad E_2 = \frac{9\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \quad \text{и} \quad E_3 = \frac{9\pi^2 \hbar^2}{8ma^2}.$$

Вероятность измерения каждого из этих значений пропорциональна квадрату веса соответствующего члена волновой функции, т. е.

$$P_1 : P_2 : P_3 = 1 : 1 : \frac{1}{16},$$

а так как $P_1 + P_2 + P_3 = 1$, получаем

$$P_1 = \frac{16}{33}, \quad P_2 = \frac{16}{33} \quad \text{и} \quad P_3 = \frac{1}{33}.$$

IV. 2.1.

а) $m_n = 939,5 \text{ МэВ}/c^2$, или $1,675 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$,

б) $h = 6,626 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с}$,

в) $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137},$

г) $\lambda_e = \frac{h}{m_e c} = \frac{2\pi\hbar c}{m_e c^2} = \frac{2\pi(1973)}{5 \cdot 10^5} \approx 0,0243 \text{ \AA},$

д) $r_0 = \frac{e}{m_e c^2} \approx 2,82 \cdot 10^{-13} \text{ см},$

е) $10^{-9} \text{ с},$

ж) $\mu_p \approx \frac{2,7e\hbar}{2m_p c} \approx 8 \cdot 10^{-18} \text{ МэВ}/\text{Гс},$

з) $\tau = 10^3 \text{ с}$, поскольку $c\tau = 3,03 \cdot 10^{13} \text{ см}$,

и) $v = \alpha c \approx 2,2 \cdot 10^8 \text{ см}/\text{с}.$

IV. 2.2.

а) В стационарном уравнении Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (1)$$

изменим знак координаты x . Тогда получим

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(-x)}{dx^2} + V(-x)\psi(-x) = E\psi(-x). \quad (2)$$

Считая $V(x) = V(-x)$, уравнение (2) можно переписать в виде

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(-x)}{dx^2} + V(x)\psi(-x) = E\psi(-x). \quad (3)$$

Следовательно, $\psi(-x)$ также является решением уравнения Шредингера, соответствующим тому же значению энергии E . Но из условия задачи известно, что решение уравнения должно быть невырожденным; поэтому $\psi(x)$ и $\psi(-x)$ должны быть линейно зависимыми. Если обе функции нормированы, то

$$\psi(x) = \pm \psi(-x); \quad (4)$$

здесь знак \pm означает, что решение может иметь либо положительную, либо отрицательную четность.

б) Заданное потенциальное поле $V(x)$ удовлетворяет условию $V(x) = V(-x)$. Значит, как было показано в предыдущем

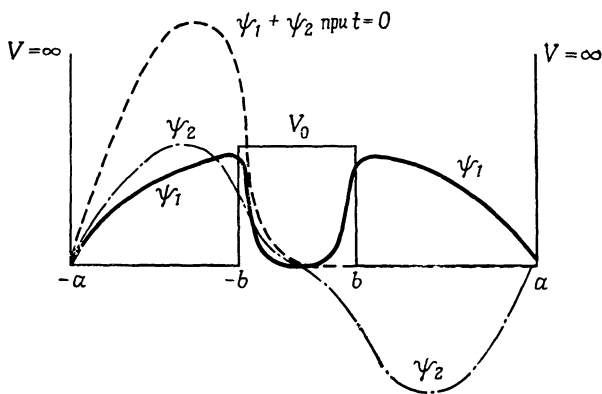
пункте, волновая функция имеет вполне определенную четность: либо $\psi(x) = +\psi(-x)$, либо $\psi(x) = -\psi(-x)$. Пусть

$$k_1 = \frac{n\pi}{2a} \quad \text{и} \quad k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mV_0 - k_1^2 \hbar^2},$$

где n — целое число. Поскольку волновая функция должна обращаться в нуль при $x = \pm a$, то $\psi(x)$ ведет себя в области $-a < x < -b$ подобно функции $\sin k_1(x+a)$, а в области $b < x < a$ — подобно функции $\pm \sin k_1(a-x)$. В областях же $-b < x < 0$ и $0 < x < b$ она изменяется экспоненциально как $-k_2(b+x)$ и $+(-)e^{-k_2(b-x)}$ соответственно¹⁾. Знак $+$ ($-$) отвечает положительной (отрицательной) четности волновой функции. Основное состояние ψ_1 системы имеет положительную четность (четно), а возбужденное состояние ψ_2 — отрицательную четность (нечетно). Энергию системы в n -м состоянии можно вычислить по формуле

$$E = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{8ma^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

На рисунке построены волновые функции ψ_1 , ψ_2 и $(\psi_1 + \psi_2)$ в зависимости от x для момента времени $t = 0$.



в) Запишем волновой пакет в виде

$$\psi = \psi_1 e^{-iE_1 t/\hbar} + \psi_2 e^{-iE_2 t/\hbar}.$$

Поскольку в правой потенциальной яме функции ψ_1 и ψ_2 складываются в противофазе (т. е. гасят друг друга), в левой потенциальной яме складываются в фазе (т. е. усиливают друг друга), а в области $-b < x < b$ они пренебрежимо малы, то в

¹⁾ Можно порекомендовать читателю найти более корректное решение этой задачи. — Прим. ред.

момент времени $t = 0$ волновой пакет ψ почти полностью сосредоточен в левой потенциальной яме. С течением времени разность фаз между обеими составляющими волнового пакета изменяется как $(E_2 - E_1)t/\hbar$. Это означает, что волновой пакет постепенно перемещается в правую потенциальную яму, а затем возвращается обратно. Период таких колебаний равен

$$\frac{2\pi\hbar}{E_2 - E_1}.$$

IV. 2.3.

а) Ниже расположен уровень 1S_0 , и вот почему. У позитрона направления магнитного и спинового моментов совпадают, а у электрона они противоположны друг другу. Из курса классической электродинамики нам известно, что система, состоящая из двух магнитных диполей, обладает минимальной потенциальной энергией, когда оба диполя ориентированы в одном направлении. Следовательно, в основном состоянии направления спинов позитрона и электрона противоположны.

б) Приведенная масса позитрония равна $\mu = 1/2m_e$. Следовательно,

$$\text{Энергия связи} = (1/2) (\text{Энергия связи в атоме водорода}) = 6,8 \text{ эВ}.$$

в) $E_\gamma = [2m_e - (\text{Энергия связи})]/2 \approx 0,5 \text{ МэВ}$. Согласно законам сохранения импульса и момента количества движения, оба γ -кванта разлетаются в противоположных направлениях с противоположно направленными моментами количества движения.

IV. 2.4.

а)

$$\begin{aligned} \langle l', m' | [L_+, L_-] | l, m \rangle &= \langle l', m' | [M_x + iM_y, M_x - iM_y] | l, m \rangle = \\ &= \langle l', m' | 2(iM_yM_x - iM_xM_y) | l, m \rangle = \langle l', m' | 2i[M_y, M_x] | l, m \rangle = \\ &= \langle l', m' | 2\hbar M_z | l, m \rangle = 2\hbar^2 m \delta(l - l') \delta(m - m'). \end{aligned}$$

б) Если x — некоторый оператор (матрица), то функции от этого оператора e^{ix} , $\cos x$ и $\sin x$ определяются с помощью формальных разложений в соответствующие ряды. Следовательно, мы можем написать ряд

$$\begin{aligned} e^{i\sigma_y \theta/2} &= 1 + \left(i\sigma_y \frac{\theta}{2} \right) + \frac{(i\sigma_y \theta/2)^2}{2!} + \dots = \\ &= 1 - \frac{(\sigma_y \theta/2)^2}{2!} + \frac{(\sigma_y \theta/2)^4}{4!} - \dots + \\ &\quad + i \left[\left(\sigma_y \frac{\theta}{2} \right) - \frac{(\sigma_y \theta/2)^3}{3!} + \frac{(\sigma_y \theta/2)^5}{5!} - \dots \right]. \end{aligned}$$

Пользуясь тем, что $\sigma_y^2 = 1$, получаем

$$e^{i\sigma_y\theta/2} = 1 - \frac{(\theta/2)^2}{2!} + \frac{(\theta/2)^4}{4!} - \dots + \\ + i\sigma_y \left[\frac{\theta}{2} - \frac{(\theta/2)^3}{3!} + \frac{(\theta/2)^5}{5!} - \dots \right] = \cos \frac{\theta}{2} + i\sigma_y \sin \frac{\theta}{2}.$$

IV. 2.5. Электрический потенциал внутри однородно заряженной сферы постоянен и равен $V = e/a$. Соответствующий потенциал точечного заряда изменяется как e/r . Определяем искомый сдвиг энергетического уровня:

$$\Delta E = \int \psi^* \left(\frac{e^2}{r} - \frac{e^2}{a} \right) \psi r^2 dr d\Omega = \left(\frac{1}{a_0} \right)^3 4 \int_0^a e^{-2r/a_0} \left(\frac{e^2}{r} - \frac{e^2}{a} \right) r^2 dr \approx \\ \approx \frac{2e^2 a^2}{3a_0^3} = \frac{4}{3} \frac{e^2}{2a_0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^2 = \frac{4}{3} (13,6 \text{ эВ}) \left(\frac{10^{-13}}{0,5 \cdot 10^{-8}} \right)^2 \approx 7 \cdot 10^{-9} \text{ эВ}.$$

Отсюда мы видим, что энергетический уровень поднимется. Следовательно, энергия связи уменьшится.

IV. 3.1. Устойчивость ядра зависит от величины отношения r , определяемого выражением ¹⁾

$$r = \frac{\text{Энергия кулоновского взаимодействия}}{\text{Поверхностная энергия ядра}}.$$

Поскольку радиус ядра $\sim A^{1/3}$, а площадь его поверхности $\sim A^{2/3}$, то

$$r \sim \frac{Z^2 e^2 / A^{1/3}}{A^{2/3}},$$

или

$$r = \text{const} \cdot \frac{Z^2 e^2}{A}.$$

При малых значениях r ядро устойчиво. Оно распадается при $r > r_0$, где r_0 — критическое значение r , соответствующее ядру с $Z = Z_0 \approx 80$ и $A = A_0 \approx 200$. Для устойчивого ядра с удвоенным зарядом должно выполняться соотношение

$$r_0 \equiv \text{const} \cdot \frac{Z_0^2 e^2}{A_0} \geq \text{const} \cdot \frac{Z^2 (2e)^2}{A} \equiv \text{const} \cdot \frac{4Z^2 e^2}{A}.$$

Отсюда находим

$$\frac{4Z^2}{A} \leq \frac{Z_0^2}{A_0} \approx \frac{(80)^2}{200} = 32,$$

¹⁾ Приводимый автором критерий устойчивости не является полным. — Прим. ред.

а так как

$$\frac{4Z^2}{A} \approx \frac{4Z^2}{2Z} = 2Z,$$

то получаем $2Z \leq 32$, или $Z \leq 16$. Наиболее тяжелому устойчивому ядру соответствовало бы $Z \approx 16$ и $A \approx 32$.

IV. 3.2. Эффект Пашена — Бака проявляется при увеличении магнитного поля B до таких значений, когда энергия $\mu_{\text{яд}}B$ становится сравнимой с величиной сверхтонкого расщепления энергетических уровней, имеющей порядок 10^{-6} эВ. Отсюда следует, что

$$B = \frac{10^{-6}}{\mu_{\text{яд}}} = \frac{10^{-6}}{3 \cdot 10^{-12}} \approx 3 \cdot 10^5 \text{ Гс.}$$

IV. 3.3. Кинетическая энергия равна $m_{\text{п}}c^2 + m_{\text{п}}c^2 = 2m_{\text{п}}c^2$.

IV. 3.4. Боровский радиус орбиты мюона пропорционален $1/Z$; число же протонов в ядре пропорционально Z . Следовательно, вероятность ¹⁾ того, что мюон попадет в объем, занимаемый ядром, пропорциональна Z^4 .

IV. 3.5. До значений энергии $E_{\text{р}}$, не превышающих 10 МэВ, при которых дебройлевская длина волны протона еще достаточно велика по сравнению с $\hbar/m_{\text{п}}c$, где $m_{\text{п}}$ — масса пиона ($J^P = = 0^{-1}$).

IV. 3.6. Данная задача аналогична задаче о линейном гармоническом осцилляторе. Потенциал, заданный в области $x > 0$, совпадает с потенциалом для гармонического осциллятора. Следовательно, уравнение Шредингера должно записываться аналогичным образом:

$$H\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2} kx^2\psi = 0, \quad x > 0.$$

Однако граничное условие в нашем случае имеет вид

$$\psi_n(x=0) = 0.$$

В случае линейного гармонического осциллятора четным значениям n соответствуют четные волновые функции. При $x = 0$ эти волновые функции отличны от нуля и, следовательно, не удовлетворяют записанному выше граничному условию. Нечетным зна-

¹⁾ Амплитуда вероятности захвата пропорциональна отношению объема ядра (который пропорционален Z) к размерам области, в которой может находиться мюон (этот размер порядка радиуса боровской орбиты, т. е. $\sim 1/Z$). Вероятность (т. е. квадрат модуля амплитуды) оказывается поэтому пропорциональной Z^4 . — Прим. ред.

чениям n отвечают нечетные волновые функции относительно x . Поэтому

$$\psi_{2m+1}(x=0) \equiv 0;$$

здесь m — любое положительное целое число. Отсюда мы видим, что функции

$$\psi_{2m+1}(x)$$

удовлетворяют уравнению Шредингера и заданному граничному условию и их можно считать допустимыми решениями. Им соответствуют собственные значения энергии

$$E_{2m+1} = \left(2m + \frac{3}{2}\right) \hbar\omega, \quad \text{где} \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

IV. 3.7. Ниже перечислены точные симметрии и законы сохранения:

- 1) комбинированная четность $CPT = 1$,
- 2) преобразования Лоренца,
- 3) закон сохранения вероятности (унитарность),
- 4) закон сохранения числа фермионов,
- 5) законы сохранения импульса, энергии и момента количества движения,
- 6) законы сохранения барионного и лептонного зарядов,
- 7) закон сохранения заряда.

Неуниверсальное сохранение имеет место для

- 1) четности,
- 2) зарядового сопряжения,
- 3) обращения времени,
- 4) зарядовой независимости ядерных сил,
- 5) G -четности,
- 6) странности,

и т. д.

IV. 3.8. Запишем отнесенную к единице времени вероятность распада частицы в момент t в дифференциальной форме

$$dP(t) \sim - \left(\frac{dt}{t_1} + \frac{dt}{t_2} \right) = - \frac{t_1 + t_2}{t_1 t_2} dt.$$

Отсюда определяем вероятность того, что к моменту времени t мезон еще существует:

$$P(t) \sim \exp \left(- \frac{t_1 + t_2}{t_1 t_2} t \right).$$

Таким образом, среднее время жизни частицы равно

$$\frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2}.$$

Согласно принципу неопределенности для энергии E имеем

$$\Delta E = \frac{\hbar (t_1 + t_2)}{t_1 t_2}.$$

Следовательно, неопределенность массы частицы

$$\Delta m = \frac{\hbar (t_1 + t_2)}{t_1 t_2 c^2}.$$

IV. 3.9. Групповая скорость $= \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp} = \frac{p}{m} = V.$

Фазовая скорость $= \lambda\nu = \frac{h}{mV} \nu = \frac{E}{mV} = \frac{c^2}{V}.$

IV. 3.10.

а) Для $1s$ -состояния волновая функция обращается в нуль только на бесконечности.

б) Для $2s$ -состояния она обращается в нуль как при $r = 2a_0$, так и при $r = \infty$.

в) Для $2p$ -состояния ($m = \pm 1$) волновая функция равна нулю при $\theta = 0, \pi$ и $r = 0, \infty$. Для $2p$ -состояния ($m = 0$) она равна нулю при $\theta = \pi/2, 3\pi/2$ и при $r = 0, \infty$. (Здесь m — магнитное квантовое число, θ — сферическая координата, дополняющая широту.)

IV. 3.11. Энергия связи дается формулой

$$\varepsilon = \frac{2\pi^2 m_e e^4 Z^2}{h^2}.$$

а) При учете релятивистской поправки масса электрона окажется больше. Следовательно, энергия связи увеличится (а энергетический уровень опустится).

б) Экранировка уменьшает поле ядра, или эффективное значение Z ; следовательно, станет меньше и энергия связи.

в) Если распределение заряда в ядре считать однородным и сферически симметричным, то потенциальная энергия взаимодействия электрона с ядром будет такая же, как и для электрона на определенной орбите в боровской модели. Однако, согласно квантовомеханическим представлениям, имеется некоторая конечная вероятность попадания этого электрона внутрь ядра атома. Отсюда следует, что учет конечного размера ядра атома приводит к уменьшению энергии связи. (См. задачу IV. 2.5.)

IV. 3.12.

а) Только гравитационное взаимодействие¹⁾, потенциал которого $V \sim -1/r$.

¹⁾ Автор имеет в виду такие большие расстояния r , на которых все «атомные» силы (например, силы Ван-дер-Ваальса) можно считать пренебрежимо малыми. — *Прим. ред.*

б) Кулоновское взаимодействие: $V \sim 1/r$.

в) В поле иона нейтральный атом ведет себя подобно электрическому диполю. В этом случае $V \sim -1/r^2$.

г) Ядерное взаимодействие, характеризуемое потенциалом $-e^{-kr}/r$.

д) Нейтроны — нейтральные частицы, не обладающие электрической поляризацией. Поэтому здесь нужно учесть только взаимодействие их магнитных моментов. Рассматривая нейтроны как два магнитных диполя, получаем следующий вклад в потенциальную энергию взаимодействия: $-2d_1d_2/r^3$, где $d_1 = d_2 = d$ (d — магнитный момент нейтрона).

IV. 3.13. Полную волновую функцию системы можно записать в виде произведения радиальной функции $R(r)$ и угловой функции $\psi(\theta, \varphi)$:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r) \psi(\theta, \varphi).$$

В свою очередь функцию $\psi(\theta, \varphi)$ можно представить как суперпозицию собственных функций оператора момента импульса системы:

$$\psi(\theta, \varphi) = \sum_{l, m} a_{l, m} Y_l^m(\theta, \varphi).$$

Здесь $Y_l^m(\theta, \varphi)$ — общеизвестные сферические функции с целочисленными индексами l и m , причем $0 \leq m \leq l$. Функция $Y_l^m(\theta, \varphi)$ характеризует состояние системы с собственным значением модуля момента импульса $\hbar \sqrt{l(l+1)}$. Квадраты всех этих функций

$$|Y_l^m(\theta, \varphi)|^2, \text{ за исключением } |Y_0^0(\theta, \varphi)|^2,$$

зависят от угла θ ; то же самое относится и к перекрестным произведениям¹⁾. Таким образом, единственной функцией, которая удовлетворяет условию независимости

$$|\psi(\theta, \varphi)|^2$$

¹⁾ Если сумма определенного числа произведений с перекрестными членами не зависит от θ и φ , т. е.

$$\sum_{i, j} a_{ij} [\psi_{l_i}^{m_i}(\theta, \varphi)]^* \psi_{l_j}^{m_j}(\theta, \varphi) = \text{const} = A,$$

то, интегрируя по всему угловому пространству и используя условие ортогональности

$$\int \psi_l^m(\theta, \varphi) \psi_{l'}^{m'}(\theta, \varphi) d\Omega = 0 \text{ для } l \neq l' \text{ или } m \neq m',$$

мы находим, что $4\pi A = 0$. Таким образом, произведения с перекрестными членами обращаются в нуль.

от углов θ и φ , является

$$\psi(\theta, \varphi) \equiv Y_0^0(\theta, \varphi);$$

следовательно, $l = m = 0$. Это означает, что единственно возможное значение момента импульса системы равно нулю, т. е. система должна находиться в S -состоянии.

IV. 4.1. Одномерное уравнение Шредингера записывается в виде

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = (E - V)\psi. \quad (1)$$

Если частицы расположены слева от барьера, то $V = 0$, и уравнение (1) принимает вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi.$$

Общее решение этого уравнения дается функцией

$$\psi_L = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}, \quad (2)$$

где

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}.$$

Для частиц, находящихся в центральной части, имеем $V = V_0$, причем $V_0 > E$. Соответствующее решение уравнения Шредингера для этой области записывается как

$$\psi_M = Ce^{k_2x} + De^{-k_2x}, \quad (3)$$

где

$$k_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}.$$

Наконец, для частиц, находящихся справа от выступа потенциального барьера, $V = V_1 < E$. Здесь, поскольку мы рассматриваем волну, распространяющуюся в положительном направлении оси x , решение уравнения (1) будет следующим:

$$\psi_R = Fe^{ik_3x}, \quad (4)$$

где

$$k_3 = \frac{\sqrt{2m(E - V_1)}}{\hbar}.$$

Запишем теперь граничные условия

$$Ae^{-ik_1d/2} + Be^{ik_1d/2} = Ce^{-k_2d/2} + De^{k_2d/2}, \quad (5)$$

$$ik_1Ae^{-ik_1d/2} - ik_1Be^{ik_1d/2} = k_2Ce^{-k_2d/2} - k_2De^{k_2d/2}, \quad (6)$$

$$Fe^{ik_3d/2} = Ce^{k_2d/2} + De^{-k_2d/2}, \quad (7)$$

$$ik_3Fe^{ik_3d/2} = k_2Ce^{k_2d/2} - k_2De^{-k_2d/2}. \quad (8)$$

Из условий (5) и (6) получаем

$$2ik_1 A e^{-ik_1 d/2} = (ik_1 + k_2) C e^{-k_2 d/2} + (ik_1 - k_2) D e^{k_2 d/2}, \quad (9)$$

а из условий (7) и (8) —

$$(k_2 + ik_3) F e^{ik_3 d/2} = 2k_2 C e^{k_2 d/2} \quad (10)$$

и

$$(k_2 - ik_3) F e^{ik_3 d/2} = 2k_2 D e^{-k_2 d/2}. \quad (11)$$

Путем исключения из уравнений (9), (10) и (11) коэффициентов C и D находим

$$\frac{2ik_1 A e^{-ik_1 d/2}}{F e^{ik_3 d/2}} = \frac{(ik_1 + k_2) e^{-k_2 d} (k_2 + ik_3)}{2k_2} + \frac{(ik_1 - k_2) e^{k_2 d} (k_2 - ik_3)}{2k_2},$$

откуда получаем следующее выражение для коэффициента прозрачности барьера:

$$\begin{aligned} \frac{k_3 |F|^2}{k_1 |A|^2} &= \frac{16k_1 k_2^2 k_3}{(k_2^2 - k_1 k_3)^2 (e^{-k_2 d} - e^{k_2 d})^2 + (k_1 k_2 + k_2 k_3)^2 (e^{-k_2 d} + e^{k_2 d})^2} = \\ &= \frac{\sqrt[4]{E} (V_0 - E) \sqrt{E - V_1}}{[(V_0 - E) - \sqrt{E} (E - V_1)]^2 \operatorname{sh}^2 k_2 d + (V_0 - E) (\sqrt{E} - \sqrt{E - V_1})^2 \operatorname{ch}^2 k_2 d}. \end{aligned}$$

IV. 4.2. Нам дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти собственные значения матрицы, нужно решить характеристическое уравнение

$$|A - \lambda I| = 0, \quad (1)$$

которое в нашем случае принимает вид

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

Отсюда следует

$$(3 - \lambda) \lambda + 4 = 0,$$

или

$$(\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0. \quad (3)$$

Следовательно, собственными значениями матрицы A являются $\lambda = 4$ и $\lambda = -1$. Пусть $\lambda = 4$. Согласно определению собственного вектора, имеем

$$\begin{pmatrix} 3 - 4 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (4)$$

Отсюда следует

$$-x_1 + 2x_2 = 0, \quad \text{или} \quad x_1 = 2x_2; \quad (5)$$

при этом компоненты вектора должны удовлетворять условию нормировки

$$x_1^2 + x_2^2 = 1. \quad (6)$$

Таким образом, собственному значению $\lambda = 4$ соответствует собственный вектор

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Для $\lambda = -1$ имеем

$$\begin{pmatrix} 3+1 & 2 \\ 2 & +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (7)$$

откуда

$$4y_1 + 2y_2 = 0, \quad \text{или} \quad y_1 = -\frac{1}{2}y_2, \quad (8)$$

и

$$y_1^2 + y_2^2 = 1. \quad (9)$$

В результате получаем собственный вектор

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix},$$

соответствующий собственному значению $\lambda = -1$.

IV. 4.3.

а) \mathbf{C} — вектор, характеризующий плотность потока вероятности. Его аналогом в классической электродинамике является вектор Пойнтинга.

б)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \psi^* \psi dV &= \int_V \left(\psi^* \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\psi^*}{dt} \psi \right) dV = \frac{i\hbar}{2m} \int_V [\psi^* \nabla^2 \psi - (\nabla^2 \psi^*) \psi] dV = \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \int_V \operatorname{div} [\psi^* \operatorname{grad} \psi - (\operatorname{grad} \psi^*) \psi] dV = - \int_V (\nabla \cdot \mathbf{C}) dV. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbf{C} = \frac{\hbar}{2im} [\psi^* \operatorname{grad} \psi - (\operatorname{grad} \psi^*) \psi].$$

IV. 4.4.

а) Волновая функция, отвечающая основному состоянию атома водорода, имеет вид

$$\psi_0 = 2 \left(\frac{1}{a_0} \right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp \left(- \frac{r}{a_0} \right),$$

где $a_0 = 0,5 \text{ \AA}$.

б) Вероятность нахождения электрона в слое между r и $r + dr$ вычисляется по формуле

$$P(r) dr = |\psi_0|^2 dV, \quad \text{где } dV = 4\pi r^2 dr.$$

Подставляя сюда выражение для волновой функции ψ_0 , получаем

$$P(r) dr = \left[2 \left(\frac{1}{a_0} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{r}{a_0} \right) \right]^2 r^2 dr. \quad (1)$$

в) При максимальном значении $P(r)$ производная $dP(r)/dr$ обращается в нуль. Следовательно, для нашего случая имеем

$$\frac{d}{dr} \left[r^2 \exp \left(- \frac{2r}{a_0} \right) \right] = 0,$$

или

$$2r - \frac{2r^2}{a_0} = 0. \quad (2)$$

Отсюда следует, что $P(r)$ принимает максимальное значение при $r = a_0$. Второе решение уравнения (2), $r = 0$, соответствует минимальному значению $P(r)$, равному нулю.

IV. 4.5.

а) $R \approx \frac{2\hbar^2}{me^2} \approx 1 \text{ \AA}$.

б) Из известного соотношения $\lambda_{\text{макс}} T = 0,29 \text{ К}\cdot\text{см}$ находим, что при $T = 3 \text{ К}$

$$\lambda \approx 10^{-1} \text{ см} = 10^7 \text{ \AA}.$$

в) Ширина запрещенной зоны $\approx 1,1 \text{ эВ}$.

г) При делении одного ядра освобождается энергия, примерно равная 200 МэВ . Она соответствует разности энергий связи в исходном и конечных ядрах.

д)

$$f = \frac{c}{\lambda} \approx \frac{3 \cdot 10^{10}}{7 \cdot 10^{-5}} \approx 4 \cdot 10^{14} \text{ Гц}.$$

е)

$$t = \frac{d}{c} = \frac{3 \cdot 10^{-13}}{3 \cdot 10^{10}} = 10^{-23} \text{ с}.$$

ж)

$$\mu_e = 0,9 \cdot 10^{-27} \text{ Дж/Гц.}$$

IV. 4.6. Основному состоянию частицы, находящейся между двумя непроницаемыми стенками, соответствует нормированная волновая функция вида

$$u^0(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos \frac{\pi x}{a},$$

где a — расстояние между стенками. Эта функция обращается в нуль при $x = -a/2$ и $x = a/2$.

а) Собственные функции состояний частицы в расширенном потенциальном барьере записываются в виде

$$v^n(x) = \sqrt{\frac{1}{a}} \cos \frac{n\pi x}{2a} \quad \text{для нечетных } n$$

и

$$v^n(x) = \sqrt{\frac{1}{a}} \sin \frac{n\pi x}{2a} \quad \text{для четных } n \text{ (исключая } n=0),$$

которые обращаются в нуль при $x = a$ и $x = -a$. Функцию $u^0(x)$ можно разложить в ряд по ортонормированным собственным функциям v^n :

$$u^0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n v^n(x),$$

где

$$a_n = \int_{-a/2}^{+a/2} u^0(x) v^n(x) dx$$

— амплитуда вероятности нахождения частицы в состоянии n . Вычисляем эту вероятность для основного состояния:

$$\begin{aligned} P = a_0^2 &= \left[\int_{-a/2}^{+a/2} \sqrt{\frac{2}{a}} \left(\cos \frac{\pi x}{a} \right) \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\cos \frac{\pi x}{2a} \right) dx \right]^2 = \\ &= \frac{2}{a^2} \left(\int_{-a/2}^{+a/2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi x}{2a} dx \right)^2 = \frac{64}{9\pi^2}. \end{aligned}$$

б) Энергия частицы сохраняется в статистическом смысле, т. е. энергия частицы в исходном состоянии $E(u^0)$ равна сумме энергий E_i всех возможных состояний v^i , взятых с весом P_i , который равен вероятности пребывания частицы в каждом из этих состояний:

$$E(u^0) = \sum_i E_i(v^i) P_i.$$

(См. задачу IV. 1.5.)

IV. 5.1.

а) Принцип соответствия: классическая механика является предельным случаем квантовой механики, когда постоянная Планка оказывается пренебрежимо малой относительно некоторого характерного параметра системы, например момента импульса. В этом случае все законы и предположения квантовой механики должны сводиться к классическим.

б) Закон Дюлонга и Пти утверждает, что молярная теплоемкость любого металла равна $3R$, или $6 \text{ кал/моль} \cdot \text{К}^1$).

в) Потому что первоначально каждый атом калия находится в основном, или S -состоянии, и при переходе любого из них в возбужденное $3S$ -состояние происходит поглощение только того фотона, длина волны которого соответствует главной серии.

г) Фактор g равен 2 для спинового момента электрона и 1 для орбитального момента.

д) Комптоновское рассеяние и фотоэффект.

IV. 5.2.

а) В случае системы, образуемой протоном и электроном, испускаемый фотон обладает энергией

$$\epsilon_e = 13,6 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n^2} \right) = 10,2 \text{ эВ, поскольку } n = 2.$$

Энергии уровней пропорциональны массе m , и она у мюона в 210 раз превышает массу электрона. Следовательно²⁾,

$$\epsilon_\mu \approx 2100 \text{ эВ.}$$

б) Радиус первой боровской орбиты обратно пропорционален массе m . Поскольку для электрона он равен $a_0 = 0,5 \text{ \AA}$, то для мюона получаем следующее значение:

$$a_\mu = 0,5 \cdot \frac{1}{210} \approx 0,0024 \text{ \AA}.$$

в) Скорость частицы на n -й боровской орбите $v = a_n \omega_n$ не зависит от массы частицы, потому что a_n обратно пропорционально m , а ω_n пропорционально ей. Следовательно,

$$v = \frac{e^2}{n\hbar} = \frac{\alpha c}{n};$$

здесь α — постоянная тонкой структуры.

IV. 5.3. Из известного соотношения $\lambda_{\text{макс}} T = 0,29 \text{ см} \cdot \text{К}$ находим, что максимум спектральной плотности излучения при температуре $T = 2000 \text{ К}$ приходится на длину волны $\lambda_{\text{макс}} =$

¹⁾ Этот закон справедлив при достаточно высоких температурах. — Прим. ред.

²⁾ Здесь не учитывается смещение ядра. — Прим. ред.

$= 1,45 \cdot 10^{-4}$ см $= 1,45 \cdot 10^4$ Å. Фотоны с этой длиной волны обладают энергией ≈ 1 эВ, что вдвое меньше энергии фотонов в желтой линии натрия (2,07 эВ).

Чтобы разрешить противоречие, нужно рассмотреть спектральное распределение энергии теплового излучения

$$I(\lambda) = \frac{c_1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{c_2/\lambda T} - 1} = \frac{c_1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{1,44 \cdot 10^8/\lambda T} - 1} = \frac{c_1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{7,22 \cdot 10^4/\lambda} - 1}.$$

Здесь подставлены числовые значения второй радиационной постоянной $c_2 = 1,44 \cdot 10^{-2}$ м·К $= 1,44 \cdot 10^8$ Å·К и температуры $T = 2000$ К. На длине волны $\lambda = 5890$ Å имеем

$$I(5890 \text{ Å}) \approx \frac{c_1}{(5890)^5} \frac{1}{e^{12,3} - 1}.$$

По сравнению с $I(14\,500 \text{ Å})$ это очень малая величина. Действительно,

$$\frac{I(5890 \text{ Å})}{I(14\,500 \text{ Å})} = \left(\frac{14\,500}{5890}\right)^5 \frac{e^{4,98} - 1}{e^{12,3} - 1} \approx (2,46)^5 \frac{1,44 \cdot 10^2}{2,20 \cdot 10^5} \approx \approx (88,6) (6,54 \cdot 10^{-4}) \approx 0,058.$$

В то же время она больше, чем $I(\lambda < 5890 \text{ Å})$. Поскольку все атомы натрия находятся в основном состоянии $3^2S_{1/2}$, то ближайшим разрешенным возбужденным состоянием является $3^2P_{1/2, 3/2}$. Переходам

$$3^2P_{1/2, 3/2} \rightarrow 3^2S_{1/2}$$

соответствует излучение линии 5890 Å. Для электрических дипольных переходов $\Delta L = \pm 1$, поэтому следующим близким возбужденным состоянием является $4p$, переход с которого отвечает излучению с $\lambda = 3300$ Å. Однако этим переходом можно пренебречь, поскольку $I(3300 \text{ Å}) \ll I(5890 \text{ Å})$ ¹⁾.

Мы приходим к выводу, что при такой низкой температуре наблюдается в основном только желтая линия.

IV.5.4. Запишем уравнение Шредингера. Для области $x \leq 0$ оно имеет вид

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi_1}{dx^2} + E\psi_1 = 0, \quad (1)$$

а для области $x > 0$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi_2}{dx^2} + (E - V_0)\psi_2 = 0. \quad (2)$$

¹⁾ Очевидно, что физиологическое восприятие рассматриваемого явления не изменилось бы и при противоположном неравенстве: излучение с $\lambda = 3300$ Å лежит вне области спектральной чувствительности человеческого глаза. — *Прим. перев.*

а) Уравнения (1) и (2) имеют следующие решения:

$$\psi_1 = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}, \quad x \leq 0, \quad (3)$$

$$\psi_2 = Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x}, \quad x > 0, \quad (4)$$

где

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad \text{и} \quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar}.$$

Если частицы движутся слева направо, то $D = 0$. Для сшивания решений воспользуемся граничными условиями

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \quad \text{и} \quad \frac{d\psi_1(0)}{dx} = \frac{d\psi_2(0)}{dx}. \quad (5)$$

Они дают

$$A + B = C$$

и

$$k_1(A - B) = k_2C.$$

Отсюда находим

$$C = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} A \quad (6)$$

и

$$B = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} A. \quad (7)$$

Из выражений (3), (4), (6) и (7) получаем

$$\psi_1 = A \left(e^{ik_1x} + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} e^{-ik_1x} \right), \quad (8)$$

$$\psi_2 = A \frac{2k_1}{k_1 + k_2} e^{ik_2x}.$$

б) Если частицы движутся к барьеру со скоростью $v = \sqrt{2E/m}$, то в ящике с единичным сечением и длиной $l = v$ будет находиться только одна частица. Плотность частиц, движущихся к барьеру, равна A^2 . Следовательно, мы имеем следующее условие нормировки:

$$A^2 v = 1,$$

откуда находим

$$A = \left(\frac{m}{2E} \right)^{1/4}. \quad (9)$$

в) В случае $E < V_0$ имеем

$$k_2 = i \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} \equiv ik_3.$$

Таким образом, волновые функции (8) принимают вид

$$\begin{aligned}\psi_1 &= A \left(e^{ik_1x} + \frac{k_1 - ik_3}{k_1 + ik_3} e^{-ik_1x} \right), \\ \psi_2 &= 2A \frac{k_1}{k_1 + ik_3} e^{-k_3x}.\end{aligned}\quad (10)$$

Частицы не могут полностью преодолеть потенциальный барьер и отражаются от него обратно. Характеристическое расстояние, на которое проникают частицы в глубь барьера ($x > 0$), равно

$$\frac{1}{k_3} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E)}}.$$

IV. 5.5. Подставим заданную волновую функцию в уравнение Шредингера, записанное в сферической системе координат:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi_k}{dr} \right) + V(r) \psi_k = E \psi_k. \quad (1)$$

Выполняя дифференцирование, получаем

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \psi_k + V(r) \psi_k = E \psi_k. \quad (2)$$

Функция $V(r)$ оказывается постоянной, и ее можно положить равной нулю. Из уравнения (2) мы видим, что

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}.$$

Следовательно, частица является свободной.

IV. 6.1.

а) Формула для потока вероятности имеет вид

$$J = -\frac{i\hbar}{2m} \int_S [\psi^* \text{grad } \psi - (\text{grad } \psi^*) \psi] dA.$$

(Ее вывод дан в решении задачи IV. 4.3.)

б) Подставляя $\psi = e^{ikx}$ и $\psi^* = e^{-ikx}$ в приведенную выше формулу, мы получаем

$$J_x = -\frac{i\hbar}{2m} \int_S [e^{-ikx} (ik) e^{ikx} - (-ik) e^{-ikx} e^{ikx}] dA_x = \frac{\hbar k}{m} \int_S dA_x;$$

здесь $\frac{\hbar k}{m}$ — скорость распространения волны.

в) Нет. Поток, соответствующий действительной волновой функции тождественно равен нулю.

IV. 6.2. При свободном падении тела в поле силы тяжести имеем

$$s = \Delta x + v_x t.$$

Здесь s — расстояние между шариком и отвесом, Δx — начальное смещение шарика, v_x — горизонтальная составляющая его скорости, равная $\Delta p_x/m$. Применяя соотношение неопределенностей

$$\Delta p_x \approx \frac{\hbar}{\Delta x},$$

получаем

$$s = \Delta x + \frac{\Delta p_x}{m} \sqrt{\frac{2H}{g}} \approx \Delta x + \frac{\hbar}{m} \sqrt{\frac{2H}{g}} \frac{1}{\Delta x}. \quad (1)$$

Минимальному значению s соответствует условие

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = 1 + \frac{\hbar}{m} \sqrt{\frac{2H}{g}} \left[-\frac{1}{(\Delta x)^2} \right] = 0,$$

или

$$(\Delta x)^2 = \frac{\hbar}{m} \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2\hbar^2 H}{m^2 g}}.$$

Отсюда находим

$$\Delta x = \left(\frac{2\hbar^2 H}{m^2 g} \right)^{1/4}.$$

Следовательно,

$$s \approx 2 \left(\frac{2\hbar^2 H}{m^2 g} \right)^{1/4}.$$

IV. 6.3.

а) Сравнивая формулы

$$\sqrt{v} = aZ - b$$

и

$$\hbar v = E_f - E_i = (Z - 1)^2 Rch \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{2\pi^2 me^4 (Z - 1)^2}{h^2} \frac{3}{4},$$

получаем

$$a = \frac{1}{2} \sqrt{3Rc} = \frac{\pi e^2}{2h} \sqrt{\frac{6m}{h}},$$

где R — постоянная Ридберга.

б) В атоме с большим атомным номером Z все электроны, за исключением $1s$ -электронов, удалены от ядра на довольно большое расстояние. Поэтому на положение энергетических уровней $1s$ -электронов остальные электроны не оказывают влияния. Считая, что

$$E(1s) \sim (Z - 1)^2,$$

а

$$E(2p) \sim (1/2^2)(Z - 1)^2,$$

получаем

$$v = \frac{E(2p) - E(1s)}{h} \sim (Z - 1)^2,$$

т. е. частный случай закона Мозли.

При анализе оптических спектров пренебрегать влиянием остальных электронов уже нельзя, поскольку именно они определяют уровни оптических переходов.

IV. 6.4. Направим ось x вдоль направления движения первой частицы. Тогда компоненты 4-импульсов обеих частиц записываются в виде

$$P_1 = (\gamma_1 m_1 v_1, 0, 0, i\gamma_1 m_1 c),$$

$$P_2 = (0, 0, 0, im_2 c),$$

где

$$\gamma_1 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}.$$

Определяем массу покоя образовавшейся частицы:

$$M = \left[- \sum_{i=1}^4 (P_1 + P_2)_i \cdot (P_1 + P_2)_i \right]^{1/2} \frac{1}{c} = (m_1^2 + m_2^2 + 2\gamma_1 m_1 m_2)^{1/2}.$$

Скорость V этой частицы можно найти из выражения для ее импульса P . Поскольку импульс сохраняется, мы имеем

$$P \equiv \frac{MV}{\sqrt{1 - (V^2/c^2)}} = \gamma_1 m_1 v.$$

Отсюда

$$\gamma_1^2 m_1^2 v^2 (c^2 - V^2) = M^2 V^2 c^2.$$

Следовательно,

$$V = \frac{\gamma_1 m_1 v c}{\sqrt{M^2 c^2 + \gamma_1^2 m_1^2 v^2}}.$$

IV. 6.5.

а) На каждый электрон, попавший в магнитное поле, действует вращающий момент

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} = - \frac{e}{2mc} g (\mathbf{s} \times \mathbf{B}),$$

или

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{egsB}{2mc} \quad (\text{поскольку } \mathbf{s} \perp \mathbf{B}).$$

Угловая скорость прецессии спина равна отношению вращающего момента к спину:

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{\mathbf{s} \times \boldsymbol{\tau}}{s^2},$$

или

$$\Omega = \frac{egB}{2mc},$$

причем вектор Ω совпадает по направлению с вектором магнитной индукции B .

б) Циклотронную частоту определяем по формуле $\omega = eg/2mc \approx 8,8 \cdot 10^6$ рад·с⁻¹·Гс (если пренебречь постоянной тонкой структуры α в выражении для фактора g).

в)

$$\varphi = \Omega t = \Omega \frac{\pi R}{v} = \pi \frac{egB}{2mc} \frac{mc}{eB} = \frac{\pi g}{2} = \pi + \frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно, измеряя φ , можно опытным путем определять численное значение α . На этом принципе основаны известные эксперименты по измерению малых отклонений g -фактора мюона от значения, равного 2.

IV. 6.6.

а) Если электрон движется по круговой стационарной орбите, то

$$\frac{e^2}{r^2} = m \frac{v^2}{r}; \quad (1)$$

здесь v — линейная скорость электрона, r — радиус орбиты. Согласно квантовому постулату Бора,

$$\text{Орбитальный момент электрона} = mvr = n\hbar, \quad (2)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$. Исключая v в формулах (1) и (2), находим

$$r = \frac{n^2 \hbar^2}{me^2}. \quad (3)$$

Потенциальная энергия электрона на орбите

$$V = -\frac{e^2}{r},$$

а кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{e^2}{2r}.$$

Следовательно, полная энергия электрона дается выражением

$$E = -\frac{e^2}{2r} = -\frac{me^4}{2n^2 \hbar^2} \quad (n = 1, 2, 3 \dots).$$

б)

$$E(n=4) - E(n=2) = \frac{me^4}{2\hbar^2} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} \right) = (13,6 \text{ эВ}) \frac{3}{16} \approx 2,55 \text{ эВ}.$$

IV. 7.1.

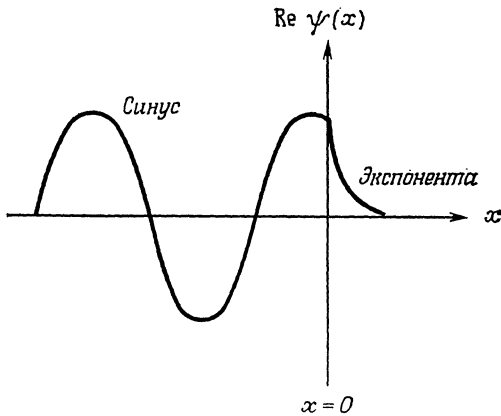
а) Уравнения Шредингера для рассматриваемых областей записываются следующим образом:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V_0\psi(x) = E\psi(x), \quad x > 0,$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x), \quad x < 0;$$

здесь $V_0 = 20$ эВ, $E = 10$ эВ.

б) Оба решения этих уравнений представлены на рисунке.



в) Дебройлевскую длину волны электрона вычисляем по формуле

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{(2mc^2) E}}.$$

Подставляя в нее значения $m = 0,5$ МэВ/ c^2 , $\hbar c = 1,973 \times 10^{-11}$ МэВ·см и $E = 10$ эВ, получаем

$$\lambda = \frac{(1,973 \cdot 10^{-11}) 2\pi}{3,2 \cdot 10^{-3}} \approx 4 \cdot 10^{-8} \text{ см};$$

здесь в знаменателе стоит числовое значение величины $\sqrt{(2mc^2) E} = \sqrt{1,02 \text{ МэВ} \cdot 10^{-5} \text{ МэВ}} \approx 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ МэВ}$.

г) Граничные условия: функция $\psi(x)$ и ее производная $d\psi(x)/dx$ при $x = 0$ должны быть непрерывными.

д) Вероятность нахождения электрона в области $x > 0$ пропорциональна $\exp(-2x/\lambda)$.

IV. 7.2.

а) Собственные значения энергии: $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\nu_0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Четность собственных состояний: $P = (-1)^n$.

б) Собственные значения энергии: $E_n = E_n^x + E_n^y + E_n^z = (n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2}) h\nu_0$.

Четность собственных состояний: $P = (-1)^{n_x + n_y + n_z}$.

Свойства состояний, соответствующих четырем самым нижним энергетическим уровням, сведены в следующую таблицу:

Таблица

$n_x + n_y + n_z$	E_n	Четность P	n_x	n_y	n_z	l	Кратность вырождения $\sum (2l+1)$
0	$\frac{3}{2} h\nu_0$	+1	0	0	0	0	1
1	$\frac{5}{2} h\nu_0$	-1	1	0	0	1	3
			0	1	0		
			0	0	1		
2	$\frac{7}{2} h\nu_0$	+1	1	1	0	2; 0	6
			0	1	1		
			1	0	1		
			2	0	0		
			0	2	0		
			0	0	2		
3	$\frac{9}{2} h\nu_0$	-1	1	1	1	3; 1	10
			2	1	0		
			1	2	0		
			2	0	1		
			1	0	2		
			0	2	1		
			0	1	2		
			3	0	0		
			0	3	0		
			0	0	3		

в) Используя выражения для четности $P = (-1)^l$ и числа вырожденных состояний $2l+1$, находим, что каждой группе уровней соответствуют те значения l , которые приведены в таблице.

IV. 7.3.

а) Всего имеется 6 различных $2p$ -состояний, поэтому число всевозможных состояний первого $2p$ -электрона равно 6, а второго, согласно принципу Паули, — только 5. Таким образом, число всевозможных размещений для двух $2p$ -электронов равно

30. Фактически же вследствие неразличимости обоих электронов число возможных состояний меньше, а именно $30/2 = 15$.

б) Пусть S и L — полные спиновый и орбитальный моменты обоих электронов. Общую волновую функцию ψ для обоих электронов можно представить в виде произведения спиновой волновой функции $\psi_s(s_1, s_2)$ и орбитальной волновой функции $\psi_L(r_1, r_2)$. Теперь, если мы поменяем местами оба электрона, то получим

$$\psi(r_1, r_2) = (-1)^L \psi_L(r_2, r_1)$$

и

$$\psi_S(s_1, s_2) = (-1)^{S+1} \psi_S(s_2, s_1).$$

Отсюда следует, что

$$\psi(1, 2) = (-1)^{L+S+1} \psi(2, 1), \quad (1)$$

но, согласно статистике Ферми, волновая функция для обоих электронов должна быть антисимметричной, т. е.

$$\psi(1, 2) = (-1) \psi(2, 1). \quad (2)$$

Поэтому из (1) и (2) получаем

$$S + L = \text{Четное число}. \quad (3)$$

В силу того что $S = s_1 + s_2$, сумма S может быть либо 0, либо 1, а поскольку $L = l_1 + l_2$, то L может принимать значения 0, 1 или 2. Отсюда получаем следующие возможные квантовые состояния, удовлетворяющие условию (3):

S	L	J	Мультиплетность состояний $2J + 1$
0	0	0	1
0	2	2	5
1	1	0	1
1	1	1	3
1	1	2	5

Полное число состояний равно 15.

IV. 7.4.

а) $1s^2, 2s^2, 2p^6, 3s^1$.

б) $3^2S_{1/2}$.

в) $3^2P_{1/2}, 3^2P_{3/2}$.

г) Структура тонкого расщепления обязана спин-орбитальному взаимодействию, т. е. взаимодействию спина электрона с

магнитным полем ядра B , если рассматривать это взаимодействие в системе отсчета, жестко связанной с электроном.

д) Энергетический уровень, соответствующий большему значению J , расположен выше.

е) Поскольку потенциал кулоновского поля $V \sim 1/r$, то $dV/dr \sim r^{-2}$. Следовательно, при фиксированном значении L энергия взаимодействия пропорциональна

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \sim r^{-3} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \sim r^{-3}.$$

Отсюда видно, что $n = -3$.

IV. 7.5.

а)

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z,$$

$$[L_y, L_z] = i\hbar L_x,$$

$$[L_z, L_x] = i\hbar L_y,$$

$$[L_i, L^2] = 0, \quad i = x, y, z.$$

б)

$$\begin{aligned} L^2\varphi &= L^2(L_x + iL_y)\psi_{lm} = (L_x + iL_y)L^2\psi_{lm} = \\ &= (L_x + iL_y)\hbar^2 l(l+1)\psi_{lm} = \hbar^2 l(l+1)\varphi. \end{aligned}$$

Таким образом доказано, что φ является собственным состоянием оператора L^2 .

$$\begin{aligned} L_z\varphi &= L_z(L_x + iL_y)\psi_{lm} = (i\hbar L_y + L_x L_z + \hbar L_x + iL_y L_z)\psi_{lm} = \\ &= (L_x + iL_y)(m\hbar + \hbar)\psi_{lm} = (m+1)\hbar(L_x + iL_y)\psi_{lm} = (m+1)\hbar\varphi. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что φ является также собственной функцией оператора L_z .

в) Предположим, что

$$L_x\psi_{00} = \sum_{l,m} A_{lm}\psi_{lm}; \quad (1)$$

здесь $m = 0, 1, 2, \dots, l$ и $l = 0, 1, 2, \dots$, а A_{lm} — постоянные коэффициенты. Действуя оператором L^2 на обе части равенства (1), получаем

$$L^2 L_x \psi_{00} = \hbar^2 \sum_{l,m} A_{lm} l(l+1) \psi_{lm}. \quad (2)$$

Левая часть полученного соотношения равна нулю, так как операторы L^2 и L_x коммутируют друг с другом, а $L^2\psi_{00} = 0$. Но функции ψ_{lm} являются ортонормированными; значит, все коэффициенты A_{lm} , за исключением A_{00} , в правой части соотношения (2) должны обращаться в нуль, т. е.

$$A_{lm} = 0 \quad (\text{кроме } A_{00}).$$

Таким образом мы доказали, что

$$L_x \psi_{00} = A_{00} \psi_{00}.$$

Аналогичным путем можно доказать и второе соотношение

$$L_y \psi_{00} = B_{00} \psi_{00}.$$

IV. 8.1.

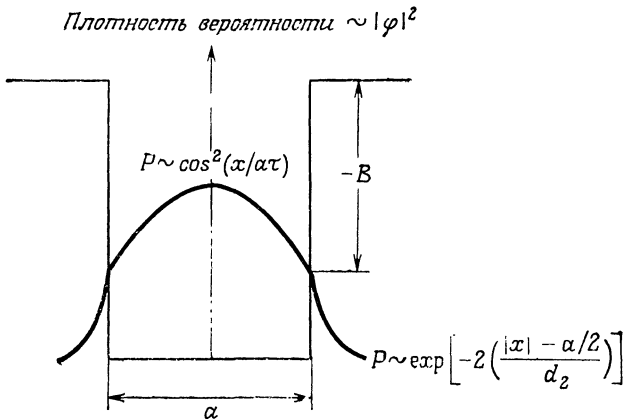
- а) ${}^2P_{1/2}$, поскольку имеется один неспаренный электрон.
- б) 1S_0 , так как отсутствует внешний электрон.
- в) ${}^2P_{3/2}$, поскольку имеется «дырка» в $2p$ -оболочке.
- г) В данном случае один из $2p$ -электронов переходит в состояние $3s$, образуя «дырку» в $2p$ -оболочке. Пользуясь правилом Хунда, находим

$$S = s_{2p} + s_{3s} = 1, \quad L = 1 \quad \text{и} \quad J = 0.$$

Следовательно, получаем возбужденное состояние 3P_0 .

- д) 1S_0 .

IV. 8.2. График волновой функции приведен на рисунке.



Волновая функция частицы, находящейся в потенциальной яме в основном состоянии, имеет только один максимум. Между стенками потенциальной ямы она характеризуется длиной волны $\sim 2a$. Вне потенциальной ямы плотность вероятности спадает экспоненциально:

$$P \sim \exp\left(-2 \frac{|x| - a/2}{d_2}\right).$$

На расстоянии $x \equiv d \gg a/2 + d$ вероятность нахождения частицы становится настолько малой, что ею можно пренебречь.

IV. 8.3. Спиновый магнитный момент электрона равен $g_s \mu_B s$. В магнитном поле спин электрона прецессирует с ларморовой частотой

$$\omega = \frac{g_s \mu_B s}{\hbar} B = \frac{eB}{2mc} \quad \left(g_s = 2, s = \frac{1}{2} \right). \quad (1)$$

Если при прохождении электронами области между A_1 и A_2 направления их спинов изменяются на большой угол, скажем 180° , то электроны не смогут пройти через магнитную систему A_2 , потому что в полях магнитов A_1 и A_2 на них действуют отклоняющие силы в одном и том же направлении. Таким образом, мы имеем условие

$$\theta \approx \pi = \omega t = \frac{eBt}{2mc}, \quad (2)$$

из которого находим магнитное поле

$$B \approx \frac{2mc\pi}{et} = \frac{\pi}{(8,8 \cdot 10^6)(10^{-6})} \approx 0,36 \text{ Гс.}$$

Это поле должно быть направлено либо параллельно пучку электронов, либо перпендикулярно плоскости x, z .

IV. 8.4. В атоме большинство разрешенных переходов между энергетическими уровнями происходит за время $\sim 10^{-9}$ с. Поэтому можно считать, что время жизни возбужденного $2p$ -состояния в атоме водорода тоже порядка 10^{-9} с. Пользуясь соотношением неопределенностей, находим ширину энергетического уровня

$$\Delta E \approx \frac{\hbar}{\tau} \approx \frac{6,6 \cdot 10^{-16}}{10^{-9}} = 6,6 \cdot 10^{-7} \text{ эВ}; \quad (1)$$

здесь мы использовали значение \hbar в следующих единицах:

$$\hbar = \frac{1,05 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с}}{1,6 \cdot 10^{-12} \text{ эрг/эВ}} \approx 6,6 \cdot 10^{-16} \text{ эВ} \cdot \text{с.}$$

Значениям $n = 2$ и $J = 1/2$ соответствуют два уровня с $l = 0$ и $l = 1$. Уровень с $l = 0$ является метастабильным, поэтому его энергия может быть измерена с гораздо более высокой степенью точности, чем та, которую дают вычисления по формуле (1). Что касается уровня с $l = 1$, то его положение более неопределенно. Однако оба уровня расположены настолько близко друг к другу, что частота перехода между ними лежит в микроволновом диапазоне. Поскольку радиочастоты можно измерить с весьма высокой точностью, то имеется возможность определить экспериментально среднюю частоту квантов, поглощенных на этом переходе, что равносильно измерению с большой точностью сред-

него энергетического сдвига между этими уровнями. Используя соотношение

$$\overline{E(l=1)} = \overline{E(l=1) - E(l=0)} + E(l=0),$$

можно определить среднюю энергию уровня, соответствующего $l=1$, с гораздо большей точностью, чем она дается формулой (1).

IV. 8.5.

а) $\alpha_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} \approx 0,53 \text{ \AA} = 5,3 \cdot 10^{-9} \text{ см.}$

б) $r_0 = \frac{\hbar^2}{mZe^2} \approx 6,6 \cdot 10^{-3} \text{ \AA} = 6,6 \cdot 10^{-11} \text{ см.}$

в) $\lambda = \frac{\hbar}{mc} \approx 3,8 \cdot 10^{-11} \text{ см; } \lambda = \frac{h}{mc} \approx 2,42 \cdot 10^{-10} \text{ см.}$

г) $\lambda = \frac{\hbar}{m_{\pi}c} \approx 1,4 \cdot 10^{-13} \text{ см; } \lambda = \frac{h}{m_{\pi}c} \approx 8,88 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$

д) $\lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{2m_n E}} = \frac{\hbar c}{\sqrt{2m_n c^2 E}} = \frac{1973}{\sqrt{2 \cdot 10^9 \cdot 10^4}} \approx 0,44 \cdot 10^{-3} \text{ \AA} = 44 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$

е) $\lambda = \frac{\hbar}{P} = \frac{\hbar c}{Pc} = \frac{1973}{10^{10}} = 1,973 \cdot 10^{-7} \text{ \AA} = 1,973 \cdot 10^{-15} \text{ см.}$

ж) Для мюонного нейтрино с $m_\nu < 1,2 \text{ МэВ}/c^2$ имеем $\lambda = \frac{\hbar}{m_\nu c} \geq 10^{-3} \text{ \AA} = 10^{-11} \text{ см}$, и для электронного нейтрино с $m_\nu < 60 \text{ эВ}/c^2$ имеем $\lambda = \frac{\hbar}{m_\nu c} \geq 30 \text{ \AA} = 3 \cdot 10^{-7} \text{ см}$.

з) Поскольку $r \approx 1,3 \cdot 10^{-13} \sqrt[3]{A} \text{ см}$, а $\sqrt[3]{A} \approx 6$, то получаем $r \approx 8 \cdot 10^{-13} \text{ см}$.

IV. 8.6.

а) Пусть P — оператор четности, который «отражает» все координаты относительно начала системы отсчета. Полагая, что все состояния имеют определенную четность, имеем

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \langle \psi, \mathbf{p}\psi \rangle = \langle P\psi, \mathbf{p}P\psi \rangle = \langle PP\psi, P\mathbf{p}P\psi \rangle = \\ &= \langle \psi, P\mathbf{p}P\psi \rangle = \langle \psi, -\mathbf{p}\psi \rangle = -\langle \psi, \mathbf{p}\psi \rangle = -\langle p \rangle, \end{aligned}$$

поскольку $PP = 1$. Следовательно, $\langle p \rangle \equiv 0$.

б) Если все собственные состояния, соответствующие собственному значению энергии E_i , имеют определенную и одинаковую четность, то среднее значение радиус-вектора \mathbf{r} должно равняться нулю.

IV. 8.7.

а) Полагая, что в атомах легких элементов преобладает LS связь, получаем следующие правила отбора для электрических дипольных переходов:

- 1) должна изменяться четность,
- 2) $\Delta L = \pm 1$, $\Delta M = \pm 1, 0$,
- 3) $\Delta S = 0$,
- 4) $\Delta J = 0, \pm 1$ (исключая переход $J_i = 0 \rightarrow J_f = 0$).

б) В атомах тяжелых элементов следует принимать во внимание $J - J$ -связь. Поэтому получаем следующие правила отбора:

- 1) в любой момент времени реализуется переход только для одного электрона,
- 2) $\Delta J = 0, \pm 1$, и для электрона, совершившего переход, $\Delta l = \pm 1$ и $\Delta j = 0$ или ± 1 ,
- 3) изменяется четность.

в) В случае ядер налагается ограничение на изменение ядерного спина $\Delta I = \pm 1, 0$. Четность также должна изменяться (но не для перехода $I_i = 0 \rightarrow I_f = 0$).

IV. 8.8. Сверхтонкое расщепление связано с взаимодействием магнитного момента ядра μ_n и магнитного поля \mathbf{B}_e , обусловленного орбитальным движением электрона. Энергия взаимодействия равна $\mu_n \cdot \mathbf{B}_e$; она обратно пропорциональна массе ядра M , поскольку $\mu_n = e\hbar/2Mc$ ¹⁾.

Тонкое расщепление объясняется взаимодействием магнитного момента электрона μ_e с кулоновским полем ядра \mathbf{E} . Энергия взаимодействия равна $\mu_e \cdot \mathbf{E}$. Она обратно пропорциональна массе электрона m_e , так как $\mu_e = e\hbar/2m_e c$. В то же время на малых расстояниях от ядра ($r \approx 0$) поле \mathbf{E} в пренебрежении эффектом экранировки растет пропорционально заряду ядра ($E \sim \sim Z$). Следовательно, энергия взаимодействия оказывается пропорциональной Z . В результате получаем

$$\frac{\text{Сверхтонкое расщепление}}{\text{Тонкое расщепление}} \sim \frac{1/M}{Z/m} = \frac{m}{MZ}.$$

IV. 8.9.

а) Дана функция

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^p} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

¹⁾ Магнитные моменты протонов и нейтронов, из которых состоят ядра, не сводятся к указанному выражению для μ_n , но имеют тот же порядок величины. — Прим. ред.

где

$$a_n = \frac{x^n}{(n!)^p}.$$

Мы видим, что при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x}{(n+1)^p} \rightarrow 0.$$

Следовательно, функция $f(x)$ конечна при любом конечном значении x . В случае $x \rightarrow \infty$ она стремится к бесконечности быстрее любой степенной функции.

б) Функция не относится к возможным решениям уравнения Шредингера, поскольку не является нормируемой из-за расходимости интеграла.

IV. 9.1. Обозначим через K_α и K_D кинетические энергии α -частицы и дейтрона соответственно. Тогда ¹⁾

$$K_\alpha = \frac{P_\alpha^2}{2M_\alpha} = \frac{(Q_\alpha BR)^2}{2M_\alpha},$$

$$K_D = \frac{P_D^2}{2M_D} = \frac{(Q_D BR)^2}{2M_D}.$$

Отсюда находим

$$\frac{K_\alpha}{K_D} = \frac{M_D}{M_\alpha} \frac{Q_\alpha^2}{Q_D^2} = \frac{(2)(2)^2}{(4)(1)} = 2.$$

Следовательно,

$$K_\alpha = 2K_D = 32 \text{ МэВ}.$$

IV. 9.2. Плотность ядра $\rho \sim 10^{15} \text{ г/см}^3$. Такая величина получается при умножении плотности обычного вещества на отношение объема атома к объему ядра:

$$\rho = (1 \text{ г/см}^3) \left(\frac{r_a}{r_n} \right)^3 \approx \left(\frac{10^{-8}}{10^{-13}} \right)^3 = 10^{15} \text{ г/см}^3.$$

IV. 9.3. Отношение сечений равно 4, поскольку кулоновское рассеяние пропорционально Z^2 .

IV. 9.4. $2mc^2 = 2 \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 1,8 \cdot 10^{17} \text{ Дж}.$

¹⁾ Здесь используются следующие обозначения: Q_α и Q_D — заряды α -частицы и дейтрона, M_α и M_D — их массы соответственно, B — индукция магнитного поля в циклотроне, а R — радиус орбиты. Возможности ускорения в циклотронах ограничены нерелятивистской областью энергий. Поэтому приводимые здесь формулы также не нуждаются в релятивистских поправках. — Прим ред.

IV. 9.5. Она равна 6,8 эВ, так как приведенная масса позитрония равна половине массы электрона.

IV. 9.6. Атом натрия имеет шесть уровней энергии с тремя парами различных переходов. Поэтому при зеемановском расщеплении будут наблюдаться три спектральные линии, соответствующие $\Delta m_J = +1, 0$ и -1 .

IV. 9.7. В соответствии с принципом неопределенности $p \approx \approx \hbar/R$. Следовательно,

$$\text{Кин. эн.} \approx \frac{\hbar^2}{2R^2m}.$$

IV. 9.8. Из соотношения $\hbar c/\lambda = 25$ кэВ находим $\lambda = 0,08$ А.

IV. 9.9. Максимальный импульс частиц изменится в $(1/2)^{1/3}$ раз, потому что $P_{\text{макс}} \sim V^{-1/3}$.

IV. 9.10. Магнитный момент протона равен $2,8\mu_{\text{яд}}$ ($\mu_{\text{яд}}$ — ядерный магнетон), т. е. $1,4 \cdot 10^{-23}$ эрг/Гс.

IV. 9.11. 1S_0 .

IV. 9.12. Кинетическая энергия увеличится в α^2 раз¹⁾:

$$\text{Кин. эн.} = \left\langle \psi(\alpha r), \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} \psi(\alpha r) \right\rangle = \alpha^2 \left\langle \psi(\alpha r), \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{d(\alpha r)^2} \psi(\alpha r) \right\rangle,$$

а потенциальная энергия уменьшится в α^2 раз:

$$\begin{aligned} \text{Пот. эн.} &= \left\langle \psi(\alpha r), \frac{k}{2} r^2 \psi(\alpha r) \right\rangle = \frac{1}{\alpha^2} \left\langle \psi(\alpha r), \frac{k}{2} \alpha^2 r^2 \psi(\alpha r) \right\rangle = \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \left\langle \psi(r), \frac{k}{2} r^2 \psi(r) \right\rangle. \end{aligned}$$

¹⁾ Приведенное автором решение требует уточнения. Дело в том, что нужно учесть изменение нормировки и правильно записать оператор кинетической энергии для трехмерного осциллятора. Для заданных условий имеем

$$\text{Кин. эн.} = -\frac{N\hbar^2}{2m} \int_0^\infty \psi^*(r, t) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial \psi(r, t)}{\partial r} \right] r^2 dr;$$

сюда входит нормировочный множитель N :

$$N = 1 \int_0^\infty \psi^*(r, t) \psi(r, t) r dr.$$

Следует заметить, что задача составлена формально, ибо состояние с волновой функцией $\psi(\alpha r, t)$ не является решением уравнения Шредингера для рассматриваемой задачи. Это очевидно хотя бы из того, что если первое состояние $\psi(r, t)$ было устойчивым, то изменение кинетической энергии в одну сторону, а потенциальной в противоположную обязательно нарушит такую устойчивость. — *Прим. ред.*

IV. 9.13.

а) Электрон в основном состоянии создает круговой ток

$$i = \frac{ev}{2\pi a_0}, \quad (1)$$

где e — заряд и v — скорость электрона, а a_0 — радиус борвской орбиты. Этот ток создает в центре орбиты радиусом a_0 магнитное поле

$$B = \frac{\mu_0 i}{2a_0} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ev}{a_0^2} = (10^{-7}) \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})(2,2 \cdot 10^6)}{(0,53 \cdot 10^{-10})^2} \approx 12,5 \text{ Вб/м}^2 = 1,25 \cdot 10^5 \text{ Гс};$$

здесь использована подстановка $v = \alpha c = 2,2 \cdot 10^6 \text{ м/с}$ и $a_0 = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

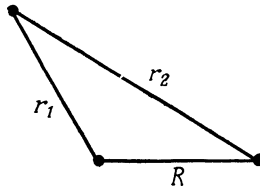
б) Разность энергий между состояниями протона со спином, направленным вверх и вниз, равна

$$\Delta E = 2B\mu_{\text{яд}} = (2,5 \cdot 10^5)(3,15 \cdot 10^{-12}) = 7,88 \cdot 10^{-7} \text{ эВ}.$$

Здесь $\mu_{\text{яд}} = 3,15 \cdot 10^{-12} \text{ эВ/Гс}$.

$$\text{в) } \omega = \frac{\Delta E}{\hbar} = \frac{\Delta E c}{\hbar c} = \frac{(7,88 \cdot 10^{-7} \text{ эВ})(3 \cdot 10^{18} \text{ \AA/c})}{1973 \text{ эВ} \cdot \text{\AA}} \approx 1,2 \cdot 10^9 \text{ рад/с}.$$

IV. 9.14.



а) При $R = 0$ оба положительных заряда находятся в начале координат. Следовательно, $E(0)$ в 4 раза должно превышать энергию связи электрона в атоме водорода в основном состоянии:

$$E_0(0) = -4(R_H) = -54,4 \text{ эВ}. \quad (1)$$

Если $R \rightarrow \infty$, то удаленный протон не оказывает никакого влияния на электрон. Поэтому

$$E_0(\infty) = -R_H = -13,6 \text{ эВ}. \quad (2)$$

б) Полная потенциальная энергия системы по условию задачи равна

$$V(R) = E_0(R) + \frac{e^2}{R}. \quad (3)$$

Условие равновесия протонов записывается следующим образом:

$$\frac{d}{dR} V(R) = 0. \quad (4)$$

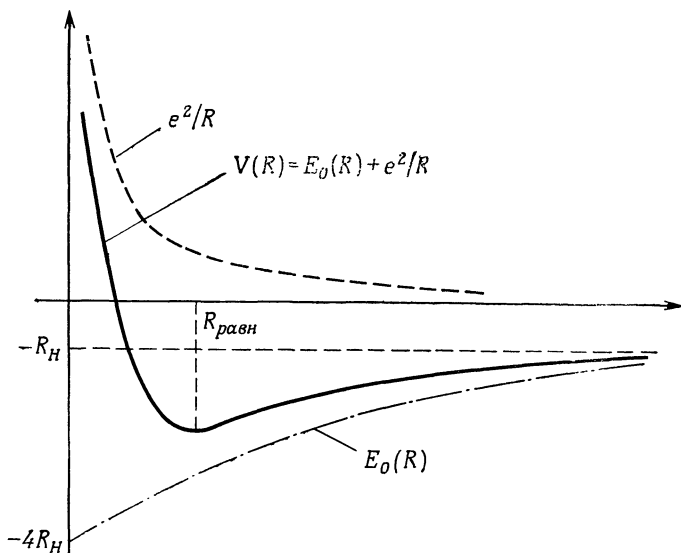
Подставляя выражение для потенциальной энергии (3) в (4), получаем

$$-\frac{e^2}{R^2} + \frac{dE_0(R)}{dR} = 0, \quad (5)$$

откуда находим

$$R_{\text{равн}} = \frac{e}{\sqrt{\left. \frac{dE_0(R)}{dR} \right|_{R=R_{\text{равн}}}}}. \quad (6)$$

в) Приблизительная зависимость $E_0(R)$ показана на следующем рисунке:



г) Если оба протона находятся в нижнем возбужденном состоянии, то следует учитывать дополнительные энергетические уровни, отвечающие колебательным и вращательным степеням свободы протонов, с энергиями

$$U_{\text{кол}} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_c, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

и

$$U_{\text{вр}} \sim \frac{1}{m_p} J(J+1), \quad J = 1, 2, 3, \dots,$$

причем ω_c можно выразить через $V(R)$, массу протона m_p и $R_{\text{равн}}$.

IV. 9.15.

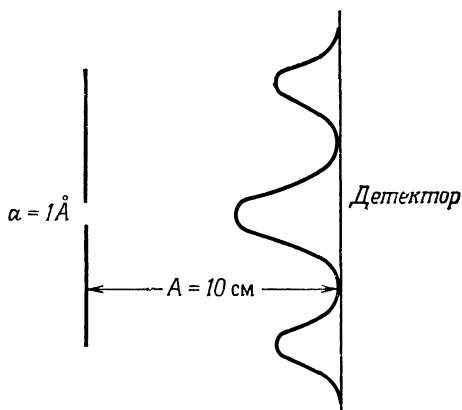
а) Конечная энергия каждого электрона равна 37 эВ. Следовательно, для дебройлевской длины волны электрона получаем

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{hc}{\sqrt{2mc^2E}} = \frac{1973}{\sqrt{(1,02 \cdot 10^6)(37)}} \approx 0,32 \text{ \AA}.$$

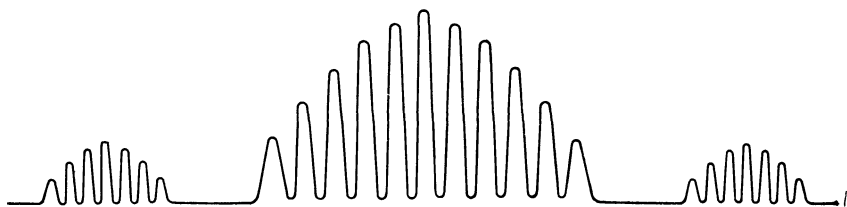
Ширина центрального максимума дифракционной картины определяется по формуле ¹⁾ из классической оптики:

$$x \approx \frac{2\lambda}{a} A \approx 6,4 \text{ см};$$

это та ширина, в пределах которой электрон может быть зарегистрирован.



б) При наличии двойной щели будет наблюдаться следующая интерференционная картина:



¹⁾ В данную формулу следует подставлять $\lambda = 2\pi\lambda$. Поскольку она справедлива лишь при $\lambda \ll a$, то ее применение нельзя считать оправданным. — Прим. перев.

в) Согласно квантовой механике, волновая функция одиночного электрона может интерферировать сама с собой. Поэтому должна наблюдаться та же картина, что и в п. «б».

г) Если бы существовал такой детектор и можно было бы регистрировать прохождение электронов через одну из щелей, то мы получили бы дифракционную картину от одной щели. Однако из-за неопределенности координат и импульсов сами электроны и детекторы оказываются столь ненадежными объектами (т. е. нельзя ни жестко закрепить второй детектор на щели, ни узнать, падают ли электроны на нее параллельным пучком), что вряд ли можно получить какую-либо достоверную информацию от второго детектора¹⁾. Сохранится интерференционная картина от двойной щели. (См. книгу: *R. M. Eisberg, Fundamental of Modern Physics, 1961, стр. 161.*)

IV. 10.1.

а) Поскольку $Z = 15$, а $m_\mu = 206m_e$, то для энергии излученного фотона получаем

$$E_{3 \rightarrow 2} = Z^2 R_\infty (206) \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) \approx 88 \text{ кэВ}$$

(здесь $R_\infty = 13,6 \text{ эВ}$).

б) Границе K -полосы поглощения у свинца соответствует энергия

$$E_K = (Z - 1)^2 R_\infty = (81)^2 (13,6 \text{ эВ}) \approx 89,3 \text{ кэВ},$$

и K -серия линий рентгеновского излучения простирается (от 67) до 89,3 кэВ. Поэтому, когда мю-мезон переходит с уровня $n = 3$ на уровень $n = 2$, он излучает фотон на частоте рентгеновского излучения, под действием которого электрон из K -оболочки атома свинца может перейти в возбужденное состояние. Следовательно, коэффициент поглощения у свинца оказывается довольно значительным.

в) Давайте поступим следующим образом:

1) Установим источник γ -квантов, энергия которых была определена в п. «а».

2) Поместим счетчик γ -квантов непосредственно за свинцовой фольгой, служащей поглотителем. Мы зафиксируем слабый сигнал от источника, поскольку элемент с $Z = 82$ обладает большим поглощением, как было показано в п. «б».

¹⁾ Объяснение автора может не удовлетворить читателя. Подробно об интерференционном опыте с электронами можно узнать из книги: *Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс, Фейнмановские лекции по физике, т. 3—4, «Мир», 1977, стр. 207—216, или из книги: Э. Вихман, Квантовая физика (БКФ), «Наука», 1974, стр. 206—207. Об аналогичном опыте с фотонами см. там же, стр. 168—178. — Прим. перев.*

3) Будем последовательно заменять свинец другими поглощающими элементами с меньшими номерами Z (81, 80, 79 ...), но с одинаковой радиационной длиной. Попытаемся зарегистрировать γ -кванты способом, указанным в п. 2.

4) Построим зависимость наблюдаемой интенсивности излучения γ -квантов от атомного номера Z соответствующего поглотителя. При некотором значении $Z = Z_1$ мы заметим резкое увеличение интенсивности наблюдаемого излучения. Иными словами, для веществ с $Z > Z_1$ регистрируются сравнительно сильные сигналы, а с $Z < Z_1$ — только слабые. Таким образом, получаем следующее неравенство:

Энергия границы K-полосы поглощения у элемента с номером $Z_1 + 1 \geq E_{3 \rightarrow 2} \geq$ Энергия границы K-полосы поглощения у элемента с номером Z_1 ,

где $Z_1 = 81$, или

$$E_K(Z_1 + 1) \geq E_{3 \rightarrow 2} \geq E_K(Z_1).$$

Из этого соотношения можно установить верхний и нижний пределы для массы мю-мезона:

$$203m_e \leq m_\mu \leq 209m_e.$$

Если бы масса мю-мезона оказалась значительно больше, то соответственно намного больше, чем 82, оказалось бы и число Z_1 . Элемент с таким номером вряд ли удалось бы найти среди известных нам устойчивых элементов, и, следовательно, он был бы для нас недоступен.

IV. 10.2.

а) Энергия рассеянного излучения равна энергии излучения движущегося заряда:

$$\frac{\text{Энергия рассеянного излучения}}{\text{Единица времени}} \equiv \frac{d\omega}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2 a^2}{c^3}. \quad (1)$$

Если электрическое поле падающего излучения в месте расположения заряда равно E , то

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -e \frac{\mathbf{E}}{m}. \quad (2)$$

Подставляя выражение (2) в (1), находим

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{2e^4 E^2}{3m^2 c^3}. \quad (3)$$

Интенсивность падающего излучения равна

$$I = \frac{cE^2}{4\pi}. \quad (4)$$

По определению сечение томсоновского рассеяния дается выражением

$$\sigma_T \equiv \frac{1}{I} \frac{d\omega}{dt}.$$

Таким образом, подставляя сюда выражения (3) и (4) для $d\omega/dt$ и I , получаем

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2. \quad (5)$$

б) Томсоновское рассеяние — это предельный нерелятивистский случай комптоновского рассеяния. Кроме того, они совпадают, если рассматривается рассеяние излучения в прямом направлении при малом изменении длины волны, т. е.

$$\sigma_K = \sigma_T f(\cos \theta, E_\gamma),$$

где $f(1, E_\gamma \ll m_e c^2) \approx 1$.

в) Используя законы сохранения энергии и импульса, мы получаем следующую формулу для комптоновского рассеяния:

$$E_{\text{расс}} = \frac{E_{\text{пад}}}{E_{\text{пад}}(1 - \cos \theta)/m_0 c^2 + 1}. \quad (6)$$

Подставляя в эту формулу $\theta = 90^\circ$, $m_0 c^2 = m_e c^2 = 0,5 \text{ МэВ}$ и $E_{\text{пад}} = 0,5 \text{ МэВ}$, находим энергию γ -квантов, рассеянных на электронах:

$$E_{\text{расс}} \approx 0,25 \text{ МэВ}.$$

Если происходит рассеяние на протоне, то $m_0 c^2 = m_p c^2 \gg \gg E_{\text{пад}}$ и

$$E_{\text{расс}} = E_{\text{пад}}.$$

Из формулы (5) следует, что сечение рассеяния пропорционально $1/m^2$. Отсюда для γ -квантов малых энергий получаем такое отношение сечений рассеяния на электронах и протонах:

$$\frac{\gamma + e^-}{\gamma + p^+} \approx \frac{m_p^2}{m_e^2} \approx 4 \cdot 10^6.$$

VI. 10.3. Энергия осциллятора с квантовым числом n равна

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega, \quad (1)$$

где ω — круговая частота осциллятора. Запишем соответствующее выражение для энергии из классической механики:

$$E_n = \frac{m}{2} A^2 \omega^2, \quad (2)$$

где A — амплитуда колебаний. Из (1) и (2) следует

$$A^2 = \left(2n + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar}{\omega m}. \quad (3)$$

Подставляя в формулу излучения ускоренно движущегося заряда

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2 a^2}{c^3}$$

величину $a = A\omega^2$, получаем

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2 A^2 \omega^4}{c^3} = \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega^3}{mc^3} (2n + 1) \hbar. \quad (4)$$

Согласно правилу отбора для осциллятора, $\Delta n = \pm 1$. Если электрон переходит из состояния с номером n в состояние с номером $n - 1$, мы говорим, что он больше не находится в состоянии n . Следовательно, среднее время жизни осциллятора на уровне n

$$\tau = \frac{E_n - E_{n-1}}{d\omega/dt} = \frac{3mc^3}{2e^2 \omega^2 (2n + 1)}.$$

IV. 10.4.

а) Частица массой m внутри потенциального ящика описывается уравнением Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = E\psi.$$

Поскольку на стенках ящика потенциал обращается в бесконечность, то на стенках волновая функция

$$\psi(x, y, z) = 0.$$

Собственные значения полной энергии E протона (или нейтрона) определяются выражением

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ma^2},$$

где n_x , n_y и n_z — положительные целые числа, а a — размер потенциального ящика. В результате получаем

$$\frac{dn}{dE} = \frac{ma^2}{\pi^2 \hbar^2 n}.$$

б) Поскольку полное число нейтронов (или протонов), связано с n соотношением

$$N \text{ (или } Z) = \frac{1}{8} \left(\frac{4}{3} \pi n^3 \right) \cdot 2 = \frac{\pi n^3}{3},$$

или

$$n^2 = \left(\frac{3N}{\pi} \right)^{2/3}$$

(здесь n — положительно и каждому его значению соответствуют два спиновых состояния частицы), то получаем для нейтрона

$$E_f = 3^{2/3} \pi^{4/3} \frac{\hbar^2 N^{2/3}}{2ma^2}$$

и аналогично для протона

$$E_f = 3^{2/3} \pi^{4/3} \frac{\hbar^2 Z^{2/3}}{2ma^2}.$$

в) Обозначим $A/a^3 = \rho$, $N/A = \alpha_n$ и $Z/A = \alpha_p$. (Замечание. Не забудьте, что $A = N + Z$.) Поскольку ρ , α_n и α_p являются постоянными, а $N = \alpha_n A = \alpha_n \rho a^3$ и $Z = \alpha_p A = \alpha_p \rho a^3$, то

$$\frac{N^{2/3}}{a^2} = (\alpha_n \rho)^{2/3} = \text{const},$$

$$\frac{Z^{2/3}}{a^2} = (\alpha_p \rho)^{2/3} = \text{const}.$$

Следовательно, энергия E_f в выше написанных формулах — постоянная величина.

г) Здесь для оценки можно ввести общее потенциальное поле для всех протонов¹⁾. При этом все энергетические уровни протонов повысятся.

IV. 10.5.

Если предположить, что орбитальный момент $3d$ -электрона в ионах Ti^{3+} полностью «заморожен», т. е. $\langle L_z \rangle = 0$, то орбитальное движение не дает никакого вклада в эффективный магнитный момент. (См. *Ch. Kittel, Introduction to Solid State Physics, 1971, стр. 629*²⁾.) В этом случае мы имеем дело с нормальным эффектом Зеемана: происходит расщепление энергетических уровней в магнитном поле на подуровни с различными значениями m_s . Обозначим через $N_{1/2}$ (и $N_{-1/2}$) число электронов,

¹⁾ В действительности этот потенциал не постоянен. — *Прим. ред.*

²⁾ См. перевод раннего издания этой книги (1956 г.): *Ч. Киттель, Введение в физику твердого тела, Физматгиз, 1963, стр. 244—251; см. также Ч. Киттель, Элементарная физика твердого тела, «Наука», 1965, стр. 267—271. — Прим. перев.*

спин которых параллелен (и антипараллелен) направлению поля B . Мы имеем следующее отношение:

$$N_{1/2} : N_{-1/2} = \exp\left(\frac{x}{kT}\right) : \exp\left(-\frac{x}{kT}\right),$$

где (в предположении $g = 2$)

$$x = \frac{e\hbar B}{2mc} = 0,93 \cdot 10^{-16} \text{ эрг.}$$

(Замечание. Поскольку заряд электрона отрицательный, то направления спинового и магнитного моментов противоположны друг другу.) Отсюда находим относительную долю ионов титана, спин которых направлен по полю:

$$f = \frac{N_{1/2}}{N_{1/2} + N_{-1/2}} = \frac{1}{1 + \exp(-2x/kT)} = \frac{1}{1 + \exp(-1,86/1,38)} \approx 0,79.$$

IV. 11.1. Согласно принципу неопределенности, момент импульса копья $J = l\dot{\theta}$ и сопряженная с ним угловая координата θ не могут быть одновременно определены с произвольно высокой точностью, т. е.

$$l\dot{\theta}_0 \cdot \theta_0 = \frac{1}{3} ml^2 \dot{\theta}_0 \theta_0 \approx \hbar; \quad (1)$$

здесь l — длина копья, а θ_0 и $\dot{\theta}_0$ — возможные начальные значения угловой координаты и угловой скорости копья. Для оценки времени падения копья нужно определить порядок значений $\dot{\theta}_0$ и θ_0 , соответствующих наилучшей балансировке копья в вертикальном положении. Проще всего предположить, что копье идеально сбалансировано, когда неопределенность его кинетической энергии равна по порядку величины неопределенности его потенциальной энергии¹⁾:

$$\frac{1}{2} \frac{ml^2}{3} \dot{\theta}_0^2 \approx \frac{1}{4} mg\theta_0^2 l$$

(в строго вертикальном положении потенциальная энергия копья принята равной нулю), или

$$\sqrt{\frac{l}{3}} \dot{\theta}_0 \approx \sqrt{\frac{g}{2}} \theta_0. \quad (2)$$

Из формул (1) и (2) получаем

$$\theta_0^2 \approx \frac{\hbar}{ml^2} \sqrt{\frac{6l}{g}} \quad (3)$$

¹⁾ В действительности это требует доказательства. — Прим. ред.

и

$$\dot{\theta}_0^2 \approx \frac{3\hbar}{ml^2} \sqrt{\frac{3g}{2l}}. \quad (4)$$

Уравнение движения копы записывается в виде

$$mg \frac{l \sin \theta}{2} \approx \frac{1}{2} mg l \theta \equiv \text{Вращающий момент} = I \ddot{\theta} = \frac{1}{3} ml^2 \ddot{\theta},$$

или

$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{2l} \theta.$$

Интегрируя это уравнение, находим решение

$$\theta = \theta_0 \exp \sqrt{\frac{3g}{2l}} t = \sqrt{\frac{\hbar}{ml^2}} \sqrt{\frac{6l}{g}} \exp \sqrt{\frac{3g}{2l}} t; \quad (5)$$

здесь мы учли начальное условие (3). При $\theta \approx 1$ копы можно считать практически упавшим. Таким образом, из (5) получаем искомое время

$$t = \sqrt{\frac{2l}{3g}} \ln \sqrt{\frac{ml^2}{\hbar}} \sqrt{\frac{g}{6l}}.$$

Если сюда подставить¹⁾ $l = 1000$ см и $m = 1$ г, то получим $t \approx 30$ с.

IV. 11.2.

а) Энергия волны квантована:

$$E = n\hbar\omega = n\hbar Dk^2.$$

Отсюда находим фазовую скорость

$$v = \frac{E}{P} = \frac{n\hbar Dk^2}{\hbar k} = n Dk = nD \sqrt{\frac{\omega}{D}} = n \sqrt{D\omega}$$

и групповую скорость волны

$$u = \frac{dE}{dP} = \frac{dk}{dP} \frac{dE}{dk} = \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dk} = \frac{1}{\hbar} (2n\hbar Dk) = 2n Dk = 2n \sqrt{D\omega}.$$

б) Согласно закону излучения абсолютно черного тела, тепловая энергия имеет следующее распределение:

$$W(E_n) \sim \frac{1}{\exp\left(\frac{E_n}{kT}\right) - 1}$$

¹⁾ Автор подставляет далекие от действительности цифры. Однако, ввиду того что под знаком логарифма получается огромное число ($\approx 2 \cdot 10^{18}$) и оно при подстановке реальных цифр изменяется не более чем на порядок, ответ оказывается практически тем же. — Прим. перев.

(здесь κ — постоянная Больцмана). Определяем интегральную по спектру плотность энергии:

$$u = \int_0^{\infty} E_n W(E_n) \frac{4\pi k^2 dk}{\hbar^3},$$

где $4\pi k^2 dk / \hbar^3$ — плотность состояний. Подставляя в эту формулу выражения для E_n и $W(E_n)$, получаем

$$\begin{aligned} u &= n\hbar D \int_0^{\infty} k^4 \left[\frac{1}{\exp\left(\frac{n\hbar D k^2}{\kappa T}\right) - 1} \right] \frac{4\pi dk}{\hbar^3} = \\ &= \frac{4\pi n D}{\hbar^2} \int_0^{\infty} \frac{k^4 dk}{\exp\left(\frac{n\hbar D k^2}{\kappa T}\right) - 1} = \frac{4\pi n D}{\hbar^2} \left(\frac{\kappa T}{n\hbar D}\right)^{5/2} \tilde{f}; \end{aligned}$$

здесь

$$\tilde{f} = \int_0^{\infty} \frac{x^4 dx}{\exp(x^2) - 1} = \text{const.}$$

Следовательно,

$$u \sim T^{5/2}.$$

IV. 11.3.

а) Волновая функция является функцией пространственных координат x, y, z и времени t , описывающей состояние системы. При этом:

- 1) Волновая функция представляет собой амплитуду вероятности и может интерферировать сама с собой.
- 2) Квадрат модуля волновой функции характеризует вероятностное состояние рассматриваемой системы.
- 3) Она описывает состояние одиночной частицы¹⁾ (фотона, электрона и т. д.) в отличие от статистической функции распределения, которая характеризует состояние большого числа таких частиц.

б) $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$; на это правило векторного сложения двух моментов импульса \mathbf{J}_1 и \mathbf{J}_2 налагается следующее условие:

$$|J| = |J_1| - |J_2|, \quad |J_1| - |J_2| + 1, \dots, \quad |J_1| + |J_2|;$$

здесь мы предположили, что $|J_1| > |J_2|$.

в) $\Delta j = 0, \pm 1$ (исключая $j = 0 \rightarrow j = 0$),

$$\Delta l = \pm 1,$$

$$\Delta m = \pm 1, 0.$$

¹⁾ В действительности важно не то, что частица одиночная (можно записать волновую функцию и для нескольких частиц), а отсутствие влияния «термостата». — *Прим. ред.*

г) Коммутатор операторов G и F должен быть равен нулю:

$$[G, F] = GF - FG = 0.$$

IV. 11.4. Используя принцип неопределенности, найдем сначала импульс нуклона. Если размер нуклона находится в пределах Δx , то его импульс должен быть порядка

$$\Delta P \approx \frac{\hbar}{\Delta x} \approx \frac{10^{-27}}{3 \cdot 10^{-13}} \approx 3 \cdot 10^{-15} \text{ дин} \cdot \text{с};$$

здесь Δx приближенно равно диаметру ядра углерода: $\Delta x \approx \approx 3 \cdot 10^{-13}$ см. Отсюда кинетическая энергия нуклона в основном состоянии равна

$$3 \frac{(\Delta P)^2}{2m} \approx \frac{3\hbar^2}{2(\Delta x)^2 m} \approx 7 \text{ МэВ}.$$

Средняя энергия нуклона должна быть несколько больше этого значения. В самом деле, применяя статистику Ферми для случая $kT \ll E_f$, мы получаем следующее выражение для средней энергии нуклона в ядре:

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \frac{3}{5} E_f = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3\pi^2 n}{V} \right)^{2/3} = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 c^2}{2mc^2} \left[\frac{3\pi^2 \cdot 6}{(4\pi/3)(3 \cdot 10^{-13})^3} \right]^{2/3} \approx \\ &\approx \frac{3 \cdot (1,973 \cdot 10^{-11})^2 \cdot 12,6}{9380 \cdot (10^{-13})^2 \cdot 9} \approx 17 \text{ МэВ} \end{aligned}$$

(вывод формулы для энергии Ферми E_f дан в решении задачи IV. 10.4).

IV. 11.5. В результате предполагаемой ядерной реакции на Солнце выделяется

$$\frac{4 \cdot 10^{26}}{26 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13}} \approx 10^{38} \text{ атомов He в секунду.}$$

IV. 11.6. Энергия фотонов рентгеновского излучения в K -линиях спектра меди равна $\sim 13,6 \cdot (29 - 1)^2 \text{ эВ} \approx 10,6 \text{ кэВ}$.

IV. 11.7. Воспользуемся законом сохранения 4-импульса

$$P_1 + P_2 = P_f,$$

где P_f — суммарный 4-импульс частиц после столкновения. Следовательно,

$$2m_e^2 c^2 + 2m_e E_e = m_f^2 c^2,$$

откуда

$$E_e = \frac{m_f^2 c^2 - 2m_e^2 c^2}{2m_e}.$$

Условию $m_j = 4m_e$ соответствует минимальная энергия движущегося электрона, при которой происходит рождение пары электрон — позитрон. Следовательно, $E_e = 7m_e c^2$, т. е. пороговая кинетическая энергия электрона равна приблизительно 3 МэВ.

IV. 11.8. Потенциальная энергия системы минимальна, когда магнитные моменты неспаренных электронов принимают одинаковую ориентацию и спины электронов в состояниях с $n = 3$ выстраиваются в одном направлении. Следовательно, $S = (1/2)(6-2) = 2$. Далее, согласно правилу Хунда, $L = 2$ и $J = 4$. Таким образом, атом находится в состоянии

$$(1s^2, 2s^2, 2p^6, 3s^2, 3p^6, 4s^2, 3d^6)^5 D_4.$$

IV. 11.9. Величина расщепления между энергетическими подуровнями соответствует частоте

$$\begin{aligned} \Delta\gamma &= \frac{1}{\hbar} 2\mu_e B = \frac{2e\hbar B}{\hbar 4\pi m c} g_s s = \frac{eB}{2\pi m c} = \frac{e}{m c} \frac{B}{2\pi} = \\ &= \frac{1,76 \cdot 10^7 \cdot 10^4}{6,28} \approx 3 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}. \end{aligned}$$

IV. 11.10.

- а) A , потому что $\Delta E_1 = \langle \psi_0, H_1 \psi_0 \rangle$ больше нуля при $\hat{H}_1 > 0$.
- б) A , так как $\Delta E_1 = \langle \psi_1, H_1 \psi_1 \rangle$ больше нуля.
- в) D , поскольку $\Delta E_1 = \langle \psi_0, H_1 \psi_0 \rangle = 0$ для нечетной функции H_1 , а во втором приближении

$$\Delta E_2 = \frac{|\langle \psi_0, H_1 \psi_1 \rangle|^2}{E_0 - E_1} < 0.$$

IV. 12.1.

а) Подставим $x = x_1 - x_2$, $R = x_1 + x_2$, $\psi = \psi_x \psi_R$ и приведенную массу $\mu = M/2$ в уравнение Шредингера для двух частиц с координатами x_1 и x_2 . Тогда получим следующее уравнение, описывающее относительное движение:

$$H\psi_x \equiv \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} kx^2 \right) \psi_x = E\psi_x.$$

После дифференцирования получаем

$$\left(-\frac{\mu k}{2\mu} x^2 + \frac{\hbar}{2\mu} \sqrt{\mu k} + \frac{1}{2} kx^2 \right) \psi_x = E\psi_x,$$

или

$$\frac{\hbar}{2\mu} \sqrt{\mu k} \psi_x = E\psi_x,$$

откуда находим

$$E = \frac{\sqrt{\mu k}}{2\mu} \hbar = \sqrt{\frac{k}{4\mu}} \hbar = \sqrt{\frac{k}{2M}} \hbar.$$

б) Введем обозначение $y^2 = \sqrt{\mu k} x^2 / \hbar$. Поскольку волновая функция для основного состояния системы записывается в виде

$$\psi_x = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{\pi}}} \exp\left(\frac{-y^2}{2}\right),$$

то

$$\begin{aligned} |\langle P_x \rangle| &= \left| \langle \psi_x, \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \psi_x \rangle / \langle \psi_x, \psi_x \rangle \right| = \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-y^2} y \frac{(\mu k \hbar^2)^{1/4}}{\sqrt{\pi}} dy = \frac{\sqrt{\hbar} \sqrt{\mu k}}{\sqrt{\pi}} 2 \int_0^{\infty} e^{-y^2} y dy = \frac{\sqrt{\hbar} \sqrt{\mu k}}{\sqrt{\pi}}; \end{aligned}$$

здесь мы учли, что

$$\int_0^{\infty} e^{-y^2} (2y dy) = \int_0^{\infty} e^{-z} dz = 1,$$

$$a \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}/2; \quad dy/dx = (\mu k / \hbar^2)^{1/4}.$$

в) Пусть $\psi(p)$ — волновая функция в p -представлении. Она связана с ψ_x посредством преобразования Фурье

$$\psi(p) = \int_0^{\infty} e^{ipx/\hbar} e^{-\alpha x^2} dx;$$

здесь $\alpha = \sqrt{\mu k} / 2\hbar$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \psi(p) &= \int_0^{\infty} \exp\left[-\alpha \left(x + \frac{ip}{2\hbar\alpha}\right)^2 - \alpha \left(\frac{ip}{2\hbar\alpha}\right)^2\right] dx \sim \exp\left(\frac{-p^2}{4\hbar^2\alpha}\right) \sim \\ &\sim \exp\left(-\frac{p^2}{2\hbar\sqrt{\mu k}}\right). \end{aligned}$$

Вероятность того, что импульс частицы примет значение $p < \sqrt{\hbar} \sqrt{2Mk} = p_0$, дается выражением

$$\int_0^{p_0} \psi^2(p) dp / \int_0^{\infty} \psi^2(p) dp = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{q_0} e^{-q^2} dq \equiv \Phi(q_0),$$

где $\Phi(q_0)$ — функция ошибок. Подставляя сюда

$$q_0 = \frac{p_0}{\sqrt{2\hbar\sqrt{\mu k}}} = \frac{\sqrt{\hbar}\sqrt{2Mk}}{\sqrt{2\hbar\sqrt{\mu k}}} = \frac{\sqrt{\sqrt{2M}}}{\sqrt{2\sqrt{\mu}}} = \frac{\sqrt{\sqrt{4\mu}}}{\sqrt{2\sqrt{\mu}}} = 1,$$

находим, что искомая вероятность равна

$$\Phi(1) = 0,84.$$

IV. 12.2.

а) Пусть $\psi_{\text{пад}} = e^{ikz}$ и $\psi_{\text{расс}} = f(\theta) e^{ikr}/r$. Тогда мы можем записать

$$J_{\text{пад}} = \left\langle \psi_{\text{пад}}, \frac{P_z}{m} \psi_{\text{пад}} \right\rangle = \left\langle \psi_{\text{пад}}, \frac{\hbar}{im} \frac{d}{dz} \psi_{\text{пад}} \right\rangle = \frac{\hbar k}{m}.$$

Если же использовать для J известное выражение, антисимметризованное относительно $\psi_{\text{пад}}$ и $\bar{\psi}_{\text{пад}}$, то

$$\begin{aligned} J_{\text{пад}} &= \frac{\hbar}{2im} \left[\bar{\psi}_{\text{пад}} \left(\frac{\partial}{\partial z} \psi_{\text{пад}} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial z} \bar{\psi}_{\text{пад}} \right) \psi_{\text{пад}} \right] = \\ &= \frac{\hbar}{2im} \left[(ik) e^{-ikz} e^{ikz} - (-ik) e^{-ikz} e^{ikz} \right] = \frac{\hbar}{2im} 2ik = \frac{\hbar k}{m} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} J_{\text{расс}} &= \frac{\hbar}{2im} \left[\bar{\psi}_{\text{расс}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \psi_{\text{расс}} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial r} \bar{\psi}_{\text{расс}} \right) \psi_{\text{расс}} \right] = \\ &= \frac{\hbar}{im} \left[f^*(\theta) \frac{e^{-ikr}}{r} ikf(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \right] = \frac{\hbar k}{m} \left(\frac{|f(\theta)|}{r} \right)^2. \end{aligned}$$

б) По определению дифференциального сечения рассеяния

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{r^2 J_{\text{расс}}}{J_{\text{пад}}} = |f(\theta)|^2.$$

IV. 12.3. Прежде всего следует уточнить положения максимума и минимума кривой и поведение кривой между ними. Поэтому следует произвести измерения при следующих значениях E : 5,5, 6,25, 6,5, 6,75 и 7,5. Представляет интерес также исследовать асимптотическое поведение кривой при $E \gg 13$. Если обработка результатов измерений σ занимает немного времени, то можно вначале произвести три измерения: при $E_1 = 5,5$, $E_2 = 6,5$ и $E_3 = 7,5$, а затем, используя полученные новые данные, определить подходящие значения E для оставшихся двух измерений. Здесь следует стремиться к тому, чтобы получить максимальную информацию о характере кривой в тех областях, где ее поведение отклоняется от монотонного. Например, если $\sigma(E_i)$ сильно отличается от $1/2[\sigma(E_i + 0,5) + \sigma(E_i - 0,5)]$, где $i = 1, 2$ или 3 , то нужно произвести дополнительные измерения в точках $E_i \pm 0,25$.

IV. 12.4. Вероятность отсчета n импульсов в секунду подчиняется нормальному (гауссову) закону распределения

$$P(n) = \frac{1}{\Delta n \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(n - N)^2}{2 \Delta n^2} \right];$$

здесь Δn — среднеквадратичное отклонение n , а N — среднее число отсчетов.

При $N \gg 1$ имеем $\Delta n \approx \sqrt{N}$. Вероятность того, что счетчик регистрирует $n < 9700$ импульсов, определяется по формуле

$$P(n < 9700) = \frac{1}{\Delta n \sqrt{2\pi}} \int_0^{9700} \exp\left[-\frac{(n-N)^2}{2\Delta n^2}\right] dn \approx \\ \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x_0} \exp(-x^2) dx \approx 0,0015.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$x = \frac{n-N}{\sqrt{2}\Delta n} = \frac{n-10\,000}{141,4}$$

и

$$x_0 = \frac{9700-N}{\sqrt{2}\Delta n} = \frac{-300}{141,4} \approx -2,13.$$

IV. 12.5. Вероятность распада атома, отнесенная к единице времени, в момент t равна

$$P(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} = \frac{1}{\tau} \times \text{Вероятность существования атома после момента времени } t,$$

где τ — среднее время жизни элемента, равное 10 дням. Вероятность распада атома в течение пятого дня составляет

$$\hat{P} = \int_4^5 P(t) dt = \frac{1}{\tau} \int_4^5 e^{-t/\tau} dt = -e^{-t/\tau} \Big|_{t=4}^{t=5} = \\ = e^{-0,4} - e^{-0,5} = 0,670 - 0,606 = 0,064.$$

IV. 12.6. Для преодоления столь огромного расстояния нейтрон должен двигаться со скоростью, близкой к скорости света, и поэтому обладать очень большой энергией. Чтобы достигнуть Земли, ему отведено время $t = 10$ лет, или около $\pi \cdot 10^8$ с. Согласно условию задачи, только половина нейтронов должна «выжить» к концу этого пути; отсюда мы получаем, что время, затрачиваемое нейтроном в его собственной системе отсчета на покрытие данного расстояния, должно быть равно периоду полураспада нейтрона, т. е. $t_0 = 12$ мин. Применяя соотношение

$$\gamma \equiv \frac{E_n}{m_n c^2} = \frac{t}{t_0},$$

где t — время, измеряемое на Земле, находим

$$E_n = \gamma(m_n c^2) = \frac{t}{t_0} m_n c^2 = \frac{\pi \cdot 10^8}{12 \cdot 60} m_n c^2 \approx (4,4 \cdot 10^5) m_n c^2 \approx \\ \approx (4,4 \cdot 10^5) (940 \text{ МэВ}) \approx 4 \cdot 10^8 \text{ МэВ.}$$

IV.12.7. Пусть $L\hbar$ — момент относительного импульса обоих пионов. Четность системы равна $(-1)^L$. Пионы подчиняются статистике Бозе, так что система из двух пионов должна находиться в четном состоянии¹⁾. Следовательно, L четно для двух таких бесспиновых частиц, как пионы. Значит, $S_K = L$ четно.

IV.12.8.

а) В случае трех зарядов минимальной энергии соответствует расположение зарядов в вершинах равностороннего треугольника со стороной $\sqrt{3} R$.

б) В случае четырех зарядов минимальной энергии соответствует расположение зарядов в вершинах правильного тетраэдра с ребром $2R/\sqrt{3}$.

При таких конфигурациях заряды разнесены на максимально возможные расстояния друг от друга, а сами состояния симметричны относительно перестановки любых двух зарядов.

IV.12.9.

$$\frac{Zze^2}{R} = \frac{90 \cdot 2 \cdot (4,8 \cdot 10^{-10})^2}{(1,3 \cdot 10^{-13}) \cdot 6 \cdot (1,6 \cdot 10^{-6})} \approx 30 \text{ МэВ};$$

здесь использована подстановка

$$R \approx \sqrt[3]{238} (1,3 \cdot 10^{-13} \text{ см}) \approx 6 \cdot 1,3 \cdot 10^{-13} \text{ см}.$$

IV.12.10. Из условия равенства сил

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

имеем

$$GM = v^2 r.$$

Применяя квантовый постулат Бора, находим

$$v = \frac{n\hbar}{mr}.$$

Таким образом,

$$GM = v^2 r = \left(\frac{n\hbar}{mr} \right)^2 r = \frac{n^2 \hbar^2}{m^2 r}.$$

Отсюда при $n = 1$ получаем

$$\begin{aligned} r = a &= \frac{n^2 \hbar^2}{GMm^2} = \frac{1}{GMm} \left(\frac{\hbar^2}{m} \right) = \frac{1}{GMm} (e^2 a_0) = \frac{(e/m)^2}{GM/m} a_0 = \\ &= \frac{(4,8 \cdot 10^{-10})^2}{(6,7 \cdot 10^{-8}) \cdot 1840 \cdot (9,1 \cdot 10^{-28})^2} a_0 \approx 0,24 \cdot 10^{40} a_0 \approx 1,2 \cdot 10^{31} \text{ см} \end{aligned}$$

(здесь $a_0 = 5 \cdot 10^{-9}$ см).

¹⁾ Здесь не учитывается, что пионы — псевдоскалярные поля. — *Прим. ред.*

IV. 12.11. Радиус K -оболочки обратно пропорционален Z .

IV. 12.12. На уровни с $n = 3$, $l = 1$ и $n = 2$, $l = 1$,

IV. 12.13.
$$\sum_{l=0}^4 2(2l + 1) = 50.$$

IV. 12.14. Согласно статистике Ферми, волновая функция системы фермион — антифермион должна быть антисимметричной. Поэтому $(-1)^{l+s+1} = -1$, т. е. сумма $l + s$ должна быть четной (см. задачу IV. 7.3). Отсюда при $l = 1$ получаем $s = 1$, т. е. спины электрона и позитрона имеют одинаковую ориентацию. Поскольку заряды электрона и позитрона противоположны по знаку, то магнитные моменты обеих частиц антипараллельны, и суммарный магнитный момент системы равен нулю.

IV. 12.15. $\pm^{1/2}, \pm^{1/2}, \pm^{1/2}, 3/4.$

IV. 12.16. $\pm \frac{e\hbar}{2mc} B.$

IV. 12.17. $p = mc/2.$

IV. 12.18. При $h\nu \gg \alpha^2 m_e c^2$, где $(1/2)\alpha^2 m_e c^2 = 13,6$ эВ — энергия связи.

IV. 12.19. В квантовой механике значению $l=0$ соответствует симметричное состояние. В полуклассической теории значение $l = 0$ исключается, а значению $l = 1$ соответствует круговая орбита (модель Зоммерфельда).

IV. 12.20. $4 \cdot 13,6$ эВ.

IV. 12.21. Комптоновское рассеяние и фотоэффект.

ПРИЛОЖЕНИЯ
НЕКОТОРЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ КОНСТАНТЫ
И СООТНОШЕНИЯ ¹⁾

<i>Физическая величина</i>	<i>Символ</i>	<i>Значение</i>
Гравитационная постоянная	G	$6,6732 \cdot 10^{-8}$ дин \cdot см ² /г ²
Ускорение свободного падения (на уровне моря, широта 45°)	g	980,62 см/с ²
*Скорость света в вакууме	c	$2,997925 \cdot 10^{10}$ см/с
Заряд электрона	e	$4,80325 \cdot 10^{-10}$ ед. СГСЭ _q $1,60219 \cdot 10^{-19}$ Кл
Масса электрона	m_e	$0,511004$ МэВ/с ² $0,910558 \cdot 10^{-27}$ г
Масса протона	m_p	$1836,1m_e = 938,26$ МэВ/с ²
*Удельный заряд электрона	e/m_e	$1,7588 \cdot 10^7$ ед. СГСМ _q /г
*Электрическая постоянная	ϵ_0	$8,854 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
*Магнитная постоянная	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ Г/м
Число Авогадро	N_0	$6,02217 \cdot 10^{23}$ моль ⁻¹
Постоянная Больцмана	k	$1,38062 \cdot 10^{-16}$ эрг/К $8,61708 \cdot 10^{-11}$ МэВ/К
*Универсальная газовая постоянная	R	$8,31434 \cdot 10^7$ эрг/(моль \cdot К) $1,987$ кал/(моль \cdot К)
*Объем одного моля идеального газа при нормальных условиях	V_0	22,4139 л
Постоянная Планка ($h/2\pi$)	\hbar	$1,05459 \cdot 10^{-27}$ эрг \cdot с $6,58218 \cdot 10^{-22}$ МэВ \cdot с
	h	$6,62620 \cdot 10^{-27}$ эрг \cdot с
*Постоянная Стефана — Больцмана	σ	$5,66961 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м ² \cdot К ⁴)

¹⁾ Значения физических постоянных соответствуют данным статьи *B. N. Taylor, W. H. Parker, D. N. Langenberg, Rev. Mod. Phys., 41, 375 (1969)*. Звездочкой отмечены постоянные и соотношения, добавленные при переводе — они используются автором в решениях задач. — *Прим. перера.*

*Вторая радиационная постоянная в законе излучения Планка	c_2	1,43883 см · К
*Постоянная Вина ($\lambda_{\text{макс}}T$)	b	0,2898 см · К
*Постоянная Ридберга для атома Н	R	109678 см ⁻¹
*Ионизационный потенциал атома Н	R_H	13,6 эВ
Постоянная тонкой структуры ($e^2/\hbar c$)	α	1/137,036 7,29735 · 10 ⁻³
Магнетон Бора ($e\hbar/2m_e c$)	μ_B	0,57864 · 10 ⁻¹⁴ МэВ/Гс 9,27096 · 10 ⁻²¹ эрг/Гс
Ядерный магнетон ($e\hbar/2m_p c$)	$\mu_{\text{яд}}$	3,1515 · 10 ⁻¹⁸ МэВ/Гс 5,04919 · 10 ⁻²⁴ эрг/Гс
1 МэВ = 1,60219 · 10 ⁻⁶ эрг		
1 кал = 4,184 Дж		
$\hbar c = 1,973 \cdot 10^{-11}$ МэВ ×		
× см = 1973 эВ · Å		
1 физ. атм =		
= 1,0332 (кг-сила)/см ² =		
= 1,0132 · 10 ⁵ Н/м ² =		
= 760 мм рт. ст.		
1 Å = 10 ⁻⁸ см = 10 ⁻¹⁰ м		

**ПЕРЕВОД ЕДИНИЦ СИСТЕМЫ СИ
В СИСТЕМУ СГС (ГАУССОВУ)**

<i>Физическая величина</i>	<i>Символ</i>	<i>СИ</i>	<i>СГС</i>
Длина	L, l, d, r	1 м	10 ² см
Масса	M, m	1 кг	10 ³ г
Время	t	1 с	1 с
Сила	F	1 Н	10 ⁵ дин
Работа и энергия	W, E, U	1 Дж	10 ⁷ эрг
Мощность	P	1 Вт	10 ⁷ эрг/с
Электрический заряд	q, Q	1 Кл	3 · 10 ⁹ ед. СГСЭ _q
Объемная плотность заряда	ρ	1 Кл/м ³	3 · 10 ³ ед. СГСЭ _q /см ³
Поверхностная плотность заряда	σ	1 Кл/м ²	3 · 10 ⁵ ед. СГСЭ _q /см ²

Электрический ток	i, I	1 А	$3 \cdot 10^9$ ед. СГСЭ _q /с
Плотность тока	J	1 А/м ²	$3 \cdot 10^5$ ед. СГСЭ _q /(с · см ²)
Потенциал	V	1 В	1/300 ед. СГСЭ _V
Напряженность электрического поля	E	1 В/м	$(1/3) 10^{-4}$ ед. СГСЭ _V /см
Электрическая по- ляризация	P	1 Кл/м ²	$3 \cdot 10^5$ ед. СГСЭ _V /см
Электрическая ин- дукция	D	1 Кл/м ²	$12\pi \cdot 10^5$ ед. СГСЭ _V /см
Проводимость	σ	1 См/м	$9 \cdot 10^9$ с ⁻¹
Сопротивление	r, R	1 Ом	$(1/9) \cdot 10^{-11}$ с/см
Емкость	C	1 Ф	$9 \cdot 10^{11}$ см
Магнитный поток	Φ	1 Вб	10^8 Гс · см ² 10^8 Мкс
Магнитная индук- ция	B	1 Вб/м ²	10^4 Гс
Напряженность магнитного поля	H	1 А/м	$4\pi \cdot 10^{-3}$ Э
Магнитная поля- ризация ¹⁾	M	1 Вб/м ²	$(1/4\pi)10^4$ Гс
Индуктивность	L	1 Г	$(1/9)10^{-11}$ с ² /см

¹⁾ Магнитный момент, огнесенный к единице объема. — Прим. перев.

ЛИТЕРАТУРА ¹⁾

МЕХАНИКА

- French A. P.*, Newtonian Mechanics, W. W. Norton, New York, 1971.
Sears F. W., Mechanics, Heat and Sound, Addison-Wesley, Reading (Mass.), 1950.
Kittel Ch., Knight W. D., Ruderman M. A., Berkeley Physics Course, Vol. I (Mechanics), McGraw-Hill, New York, 1965 [имеется перевод: Ч. Киттель, У. Найт, М. Рудерман, Берклевский курс физики, т. I (Механика), «Наука», 1975].
Symon K. R., Mechanics, Addison-Wesley, Reading (Mass.), 1971.
Goldstein H., Classical Mechanics, Addison-Wesley, Reading (Mass.), 1950 (имеется перевод: Г. Голдстейн, Классическая механика, «Наука», 1975).

ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

- Taylor E. F., Wheeler J. A.*, Spacetime Physics, W. H. Freeman, San Francisco, 1966 (имеется перевод: Э. Ф. Тейлор, Дж. А. Уилер, Физика пространства — времени, «Мир», 1971).

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

- Ford K. W.*, Classical and Modern Physics, Xerox, Stamford (Conn.), 1972.
Halliday D., Resnick R., Physics, Part 2, Wiley, New York, 1966.
Purcell E. M., Berkeley Physics Course, Vol. II (Electricity and Magnetism), McGraw-Hill, New York, 1965 [имеется перевод: Э. Парселл, Берклевский курс физики, т. II (Электричество и магнетизм), «Наука», 1975].
Hauser W., Introduction to Principles of Electricity, Addison-Wesley, Reading (Mass.), 1971.
Panofsky W. K., Phillips M., Classical Electricity and Magnetism, Addison-Wesley, Reading (Mass.), 1962 (имеется перевод: В. Пановский, М. Филлипс, Классическая электродинамика, Физматгиз, 1963).
Jackson J. D., Classical Electrodynamics, Wiley, New York, 1962 (имеется перевод: Дж. Джексон, Классическая электродинамика, «Мир», 1965).

ТЕПЛОТА

- Zemansky M. W.*, Heat and Thermodynamics: An Intermediate Textbook, McGraw-Hill, New York, 1968.
Morse P. M., Thermo Physics, W. A. Benjamin, Menlo Park (Calif.), 1969 (имеется перевод 1-го изд.: Ф. Морс, Теплофизика, «Наука», 1968).

ОПТИКА

- Jenkins F. A., White H. E.*, Fundamentals of Optics, McGraw-Hill, New York, 1957.
Rossi B., Optics, Addison-Wesley, Reading (Mass.), 1957.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

- Reif F.*, Berkeley Physics Course, Vol. V (Statistical Physics), McGraw-Hill, New York, 1967 [имеется перевод: Ф. Рейф, Берклевский курс физики, т. V (Статистическая физика), «Наука», 1977].
Tolman R. C., Principles of Statistical Mechanics, Oxford University Press, New York, 1938.

¹⁾ Литература дана в порядке возрастания сложности излагаемого в ней материала.

Huang K., *Statistical Mechanics*, Wiley, New York, 1963 (имеется перевод: К. Хуанг, *Статистическая механика*, «Мир», 1966).

ФИЗИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Kittel Ch., *Introduction to Solid State Physics*, Wiley, New York, 1971 (имеется перевод: Ч. Киттель, *Элементарная статистическая физика*, ИЛ, 1960).

Kittel Ch., *Introduction to Solid State Physics*, Wiley, New York, 1971 (имеется перевод издания 1956 г.: Ч. Киттель, *Введение в физику твердого тела*, Физматгиз, 1963).

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

Saxon D. S., *Elementary Quantum Mechanics*, Holden-Day, San Francisco, 1968.

Merzbacher E., *Quantum Mechanics*, Wiley, New York, 1970.

Bohm D., *Quantum Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (New Jersey), 1951 (имеется перевод: Д. Бом, *Квантовая теория*, «Наука», 1965).

Schiff L. I., *Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1968.

Messiah A., *Quantum Mechanics*, Wiley, New York, 1961-1962.

Bethe H. A., Jackiw R. W., *Intermediate Quantum Mechanics*, W. A. Benjamin, Menlo Park (Calif.), 1968 (имеется перевод другой книги одного из авторов: Г. А. Бере, *Квантовая механика*, «Мир», 1965).

АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

Acosta V. et al., *Essentials of Modern Physics*, Harper & Row, New York, 1973.

Eisberg R. M., *Fundamentals of Modern Physics*, Wiley, New York, 1961.

Harnwell G. P., Stephens W. E., *Atomic Physics: An Atomic Description of Physical Phenomena*, Dover, New York, 1966.

Reinman A. L., *Physics*, Harper & Row, New York, 1971.

Born M., *Atomic Physics*, Hafner & Blackie, Лондон, 1969 (имеется перевод издания 1963 г.: М. Борн, *Атомная физика*, «Мир», 1970).

Fermi E., *Nuclear Physics*, University of Chicago Press, Chicago, 1950 (имеется перевод: Э. Ферми, *Ядерная физика*, ИЛ, 1951).

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ ПЕРЕВОДЕ

Хайкин С. Э., *Физические основы механики*, «Наука», 1971.

Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М., *Фейнмановские лекции по физике*, «Мир», 1976—1978.

Сивухин Д. В., *Общий курс физики*, т. I—III, «Наука», 1974—1976.

Стрелков С. П., *Введение в теорию колебаний*, «Наука», 1964.

Борн М., *Эйнштейновская теория относительности*, «Мир», 1972.

Матвеев А. Н., *Механика и теория относительности*, «Высшая школа», 1976.

Угаров В. А., *Специальная теория относительности*, «Наука», 1969.

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Краткий курс теоретической физики*, кн. 1 (Механика. Электродинамика), «Наука», 1969.

Тамм И. Е., *Основы теории электричества*, «Наука», 1976.

Ландсберг Г. С., *Оптика*, «Наука», 1976.

Хир К., *Статистическая механика, кинетическая теория и стохастические процессы*, «Мир», 1976.

Терлецкий Я. П., *Статистическая физика*, «Высшая школа», 1973.

Широков Ю. М., Юдин Н. П., *Ядерная физика*, «Наука», 1972.

Фок В. А., *Начала квантовой механики*, «Наука», 1976.

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Краткий курс теоретической физики*, кн. 2 (Квантовая механика), «Наука», 1972.

Блохинцев Д. И., *Основы квантовой механики*, «Наука», 1976.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие к русскому изданию	5
Предисловие автора	7
Раздел I. Механика	9
Задачи	9
Ответы и решения	29
Раздел II. Электричество и магнетизм	84
Задачи	84
Ответы и решения	102
Раздел III. Теплота, статистическая физика и оптика	147
Задачи	147
Ответы и решения	168
Раздел IV. Атомная физика и квантовая механика	216
Задачи	216
Ответы и решения	239
Приложения	291
Некоторые физические константы и соотношения	291
Перевод единиц системы СИ в систему СГС (гауссову)	292
Литература	294

ИБ № 1044

Мин Чен

ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ С РЕШЕНИЯМИ

Редактор А. Н. Куксенко
Художник И. Б. Кравцов
Художественный редактор В. И. Шаповалов
Технический редактор Л. П. Чуркина
Корректор В. С. Соколов

Сдано в набор 26.08.77. Подписано к печати 17.02.78. Формат 60×90¹/₁₆. Бум. тип. № 1.
Литературная гарнитура. Высокая печать. 9,25 бум. л., 18,50 печ. л. Уч.-изд. л. 14,90.
Зак. 743. Цена 1 р. 40 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой
Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли,
198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект 29,