

Г. Г. ЧЕРНЫЙ

ТЕЧЕНИЯ ГАЗА
С БОЛЬШОЙ СВЕРХЗВУКОВОЙ
СКОРОСТЬЮ

07103400213-1969

Г. Г. ЧЕРНЫЙ

ТЕЧЕНИЯ ГАЗА

С БОЛЬШОЙ СВЕРХЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1959

Горимир Горимирович Черный

Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью

Редактор *С. Н. Шустов*

Техн. редактор *С. С. Гаврилов*

Корректор *А. С. Бакулова*

Сдано в набор 3/VII 1959 г. Подписано к печати 10/XI 1959 г. Бумага 60×92¹/₁₆.
Физ. печ. л. 13,75. Условн. печ. л. 13,75. Уч.-изд. л. 14,35.
Тираж 7 500 экз. Т-11041 Цена книги 9 р. 20 к. Заказ 559.

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Введение	9
§ 1. Замечания исторического характера и отличительные особенности аэродинамики больших сверхзвуковых скоростей	9
§ 2. Основные аэродинамические задачи, связанные с движением летательных аппаратов при большой сверхзвуковой скорости	14
§ 3. Некоторые сведения о свойствах воздуха при высокой температуре	17
§ 4. Методы экспериментального изучения течений газа при очень больших скоростях	23
Глава I. Общие сведения об обтекании тел идеальным газом с большой сверхзвуковой скоростью	29
§ 1. Постановка задачи о сверхзвуковом обтекании тела идеальным газом	29
§ 2. Дополнительные замечания к постановке задачи о сверхзвуковом обтекании тел	33
§ 3. Характерные свойства течений с большой сверхзвуковой скоростью	39
§ 4. Закон подобия при обтекании тел фиксированной формы с очень большой сверхзвуковой скоростью	49
Глава II. Обтекание тонких, заостренных впереди тел с большой сверхзвуковой скоростью	55
§ 1. Оценка величины возмущений, возникающих при сверхзвуковом движении тел в газе	55
§ 2. Закон подобия при обтекании тонких тел с большой сверхзвуковой скоростью	59
§ 3. Упрощение уравнений обтекания тонких тел при большой сверхзвуковой скорости	67
§ 4. Закон плоских сечений при обтекании тонких тел с большой сверхзвуковой скоростью	69
§ 5. Примеры использования закона плоских сечений	76
Глава III. Закон сопротивления Ньютона; метод касательных конусов (или клиньев); формула Буземана и метод пограничного слоя	90
§ 1. Закон сопротивления Ньютона	90
§ 2. Использование формулы Ньютона для определения аэродинамических характеристик тел и для нахождения тел с минимальным сопротивлением	99
§ 3. Метод касательных конусов (или клиньев)	105
§ 4. Формула Буземана	112

§ 5. Определение формы тел с наименьшим сопротивлением при использовании формулы Буземана	118
§ 6. Метод пограничного слоя	125
§ 7. Использование закона плоских сечений в методе пограничного слоя	134
§ 8. Метод пограничного слоя: примеры	138
Глава IV. Метод использования соотношений на скачке уплотнения и в простой волне	146
§ 1. Общие замечания о методах расчета сверхзвукового обтекания профилей	146
§ 2. Точный метод, использующий соотношения на скачке и в простой волне	150
§ 3. Взаимодействие возмущений со скачком уплотнения	155
§ 4. Обтекание тел, близких к клину, и тонких профилей под большим углом атаки	164
§ 5. Приближенный метод, использующий соотношения на скачке и в простой волне (shock-expansion method)	173
§ 6. Обобщение на случаи обтекания тел вращения	176
Глава V. Влияние малого затупления переднего конца тела на его обтекание потоком с большой сверхзвуковой скоростью	180
§ 1. Вводные замечания и формулировка задачи	180
§ 2. Обтекание пластины с тупой передней кромкой и круглого цилиндра, поставленного торцом к набегающему потоку	185
§ 3. Обтекание тонкого клина с затупленной передней кромкой	195
§ 4. Обтекание тонкого затупленного конуса	201
§ 5. Закон подобия при обтекании тонких тел с малым затуплением переднего конца	205
Литература	210
Предметный указатель	218

ПРЕДИСЛОВИЕ

Решение ряда важных научных и технических задач, возникших в последние годы, связано с изучением движения тел в газе с очень большой сверхзвуковой скоростью.

Полет тел в атмосфере со скоростью порядка нескольких километров в секунду сопровождается явлениями, влиянием которых на интересные для практических приложений характеристики взаимодействия тела с окружающей средой можно пренебрегать при умеренных сверхзвуковых скоростях полета. В местных зонах вблизи движущегося с большой сверхзвуковой скоростью тела может происходить значительное повышение температуры воздуха. Повышение температуры вызывает физико-химические процессы, не позволяющие считать воздух совершенным газом с постоянной теплоемкостью: возбуждение вибрационных степеней свободы молекул, диссоциацию молекул компонент воздуха и химические реакции между ними, ионизацию атомов. Эти процессы из-за большой скорости их протекания могут не быть термодинамически равновесными.

При больших сверхзвуковых скоростях полета становится необходимым наряду с нахождением сил, действующих на тело, определять тепловые потоки, идущие от нагретого воздуха к поверхности тела. При этом нужно учитывать физико-химические превращения, происходящие в потоке. Кроме того, вследствие не всегда возможного отвода внутрь тела больших количеств тепла, выделяющегося в воздухе вблизи обтекаемой им поверхности, могут происходить оплавление и сублимация поверхностного слоя тела.

В настоящее время проводятся обширные физические исследования (в условиях полета и, главным образом, в аэродинамических и ударных трубах и в других специальных установках) и теоретические изыскания для оценки возможного влияния на обтекание тел перечисленных выше факторов, а также разрабатываются приближенные методы учета этого влияния.

Наряду с этим в течение последних десяти лет интенсивно разрабатывается теория обтекания тел идеальным газом с постоянными теплоемкостями. Эта теория является необходимым шагом в изучении обтекания тел с очень большой скоростью и позволяет

простыми средствами получить многие важные результаты. Отдельные ее разделы носят законченный характер, и их изучение должно уже теперь стать необходимым звеном при подготовке специалистов — аэродинамиков, работающих над осуществлением полетов с очень большими скоростями.

Теории обтекания тел идеальным газом при очень больших скоростях посвящено много работ, но специальных книг по этому вопросу пока нет ни в СССР, ни за рубежом, хотя почти все выходящие в последние годы руководства по аэродинамике отводят некоторое место теории течений газа при очень больших скоростях, в особенности закону подобия при больших значениях числа Маха.

В связи со все более расширяющимся кругом научных работников и инженеров, привлекаемых к решению задач осуществления полета с очень большими скоростями, а также в связи с необходимостью ознакомления студентов и аспирантов, специализирующихся в области аэродинамики, с теорией обтекания тел с очень большой скоростью, представляется целесообразным изложить в систематизированном виде основы теории и наиболее важные методы расчета движений идеального газа при очень больших скоростях.

Предлагаемая книга основана на материале специальных курсов, читавшихся автором в 1954—1956 гг. на механико-математическом факультете Московского государственного университета, дополненном данными новых работ по рассматриваемым в ней вопросам.

Книга не претендует на исчерпывающее освещение всех важных вопросов, касающихся течений идеального газа с большой сверхзвуковой скоростью. В двух первых главах книги содержатся общие сведения об обтекании тел сверхзвуковым потоком и, в частности, изложена получившая уже широкое распространение теория обтекания тонких тел потоком с большой сверхзвуковой скоростью. В специальную часть книги (главы III—V) включены лишь те разделы теории течений идеального газа с большой сверхзвуковой скоростью, в разработке которых в той или иной степени принимал участие автор. По этой причине в книге остался неосвещенным интересный и важный вопрос о течении газа вблизи затупленного переднего конца тела при наличии местной дозвуковой зоны. Обзор работ по этому вопросу можно найти в статье Van Dyke, *The supersonic blunt-body problem. Review and extension IAS Preprint № 801, Jan. 1958* (см. также *Journ. Aeron. Sci.* **25**, 8, 1958).

Автор не включил в книгу вопрос о влиянии на течения с большой сверхзвуковой скоростью отступлений свойств воздуха от свойств совершенного газа с постоянными теплоемкостями. Это объясняется главным образом тем, что учет этого влияния не представляет принципиальных трудностей; методы расчета течений с большой сверхзвуковой скоростью, изложенные в гл. III и в гл. IV, могут быть

легко обобщены на случай газа, свойства которого отличаются от свойств совершенного газа с постоянными теплоемкостями. Однако при этом расчеты становятся значительно более громоздкими, а их результаты — трудно обозримыми.

Как уже говорилось, в книге совсем не рассмотрено влияние вязкости на течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. Вопрос о влиянии вязкости наряду с вопросом о теплопередаче является фундаментальным для газовой динамики очень больших скоростей и находится сейчас в стадии весьма интенсивных исследований; здесь еще много нерешенных проблем. С состоянием вопроса можно ознакомиться по обзорной статье L. Lees, *Recent developments in hypersonic flow, Jet propulsion* **27**, 11, 1957 *).

Автор выражает признательность Л. И. Седову за плодотворное обсуждение многих рассматриваемых в книге вопросов, Г. М. Бам-Зеликовичу — за ценные замечания, высказанные им при чтении рукописи книги, Г. И. Баренблатту — за полезные дискуссии по содержанию § 2 гл. I, А. Л. Гонору и В. И. Шульгину — за предоставленный экспериментальный материал.

Г. Г. Черный

*) Обстоятельное изложение теории течений газа с большой сверхзвуковой скоростью содержится в только что опубликованной книге W. D. Hayes and R. F. Probstein «*Hypersonic flow theory*», Academic Press, 1959.

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Замечания исторического характера и отличительные особенности аэродинамики больших сверхзвуковых скоростей

Начало теоретическому исследованию обтекания тел сверхзвуковым потоком газа было положено в работах [1—6] *), относящихся к десятилетию 1925—1935 гг. В этих работах, а также во многих других, последовавших вслед за ними, рассматривалось установившееся обтекание идеальным газом тонких, заостренных у обоих концов профилей и тел вращения, расположенных под малым углом атаки. Такие тела вызывают лишь малые возмущения набегающего потока, благодаря чему для изучения их обтекания мог быть использован приближенный метод, основанный на линеаризации уравнений, описывающих движение газа. Этот метод позволил найти распределения скорости частиц газа, плотности и давления в потоке и, в частности, получить простые выражения для сил и моментов сил, действующих на движущиеся со сверхзвуковой скоростью тонкие профили и тела вращения.

При увеличении толщины обтекаемых тел или угла атаки, под которым они установлены, допущения, принятые при линеаризации уравнений, нарушаются. Нарушаются эти допущения и при обтекании тонких тел потоком с большой сверхзвуковой скоростью, когда возмущения скорости частиц, малые в сравнении со скоростью потока, становятся не малыми по сравнению со скоростью звука. Для оценки границ применимости линейной теории необходимо произвести сравнение полученных с ее помощью результатов с выводами более точных теорий и с результатами экспериментального исследования обтекания тел сверхзвуковым потоком.

Такое сравнение стало возможным вскоре после появления линейной теории, когда были получены решения точных нелинейных уравнений движения газа в некоторых важных частных задачах о сверхзвуковом обтекании профилей и тел вращения.

*) Здесь и в дальнейшем цифры в квадратных скобках дают указание на номер в списке литературы, помещенном в конце книги.

В работе [7] было показано, что для профилей с прямолинейным участком контура вблизи передней кромки можно рассчитать распределение давлений точно, используя известные соотношения на скачке уплотнения [8, 9] и в так называемой простой волне [10, 11]. Точное решение нелинейных уравнений было получено также в задаче о симметричном обтекании сверхзвуковым потоком простейшего тела вращения — круглого конуса [12]. Для расчета сверхзвукового обтекания заостренных впереди профилей и тел вращения с относительной толщиной, при которой линейная теория оказалась непригодной, были разработаны численные или графоаналитические методы характеристик [13—17], весьма эффективные в приложениях, хотя и требующие довольно больших затрат труда. В случае обтекания тонких, заостренных впереди профилей потоком с умеренной сверхзвуковой скоростью были получены простые и удобные выражения для вычисления давления на обтекаемой поверхности, а также для определения действующих на профиль суммарных аэродинамических сил и их моментов. В этих выражениях, уточняющих результаты линейной теории, были приняты во внимание члены второго, третьего [18] и четвертого [19] порядков по величине угла отклонения потока, обтекающего профиль.

В тридцатых годах появляются работы, посвященные учету влияния вязкости на сверхзвуковое обтекание тел газом. В этих работах классическая идея о пограничном слое в жидкости с малой вязкостью применяется для расчета сопротивления трения, температуры поверхности и теплопередачи при обтекании тел сжимаемым газом, в том числе и при сверхзвуковой скорости. Большинство исследований относилось к случаям ламинарного течения газа в пограничном слое [20—25], но имелись попытки получения расчетных формул и при турбулентном пограничном слое [25, 26].

Таким образом, к началу сороковых годов в теории обтекания тел сверхзвуковым потоком уже были получены многие важные результаты. Разработанные теоретические методы позволяли определять основные аэродинамические характеристики крыловых профилей и осесимметричных корпусов летательных аппаратов. Однако выводы теории лишь в незначительной степени были подтверждены данными экспериментальных исследований.

Из отдельных результатов можно отметить хорошее подтверждение в опытах [18, 27] теории обтекания тонких профилей сверхзвуковым потоком и хорошее совпадение точного решения задачи об обтекании круглого конуса [12] с опытными данными.

Основной экспериментальный материал был накоплен к этому времени артиллеристами, которые первыми осуществили движение тел — орудийных снарядов и неуправляемых ракет — со сверхзвуковой скоростью. Этот экспериментальный материал состоял, главным образом, из сведений о картине обтекания и о суммарном сопротивлении снарядов различной формы, а также из некоторых данных об их

устойчивости при движении в воздухе. Экспериментальные данные о сверхзвуковом полете тел с использованием аэродинамической подъемной силы были весьма малочисленны, хотя уже к середине тридцатых годов были построены аэродинамические трубы, специально предназначенные для исследования обтекания тел сверхзвуковым потоком воздуха [28, 29].

Бурное развитие теоретической и экспериментальной аэродинамики сверхзвуковых летательных аппаратов началось в сороковые годы, когда стало ясно, что ракетные и воздушно-реактивные двигатели дают возможность создать управляемые снаряды и самолеты, движущиеся с сверхзвуковой скоростью. В связи с этим получили широкое развитие эффективные теоретические методы, позволявшие в рамках линейной теории определять аэродинамические характеристики крыльев конечного размаха [30—42] и их комбинаций с фюзеляжем [43, 45 и др.]. Быстро стали развиваться методы расчета течений сжимаемого газа в ламинарном [45—50] и турбулентном [48, 51] пограничных слоях. В широких масштабах начало осуществляться строительство аэродинамических труб; экспериментальные исследования аэродинамики летательных аппаратов приобрели систематический характер.

Как теоретические, так и экспериментальные работы до середины сороковых годов относились к скоростям полета, превышающим скорость звука не более чем в три — пять раз. Имелись лишь отдельные попытки изучения специфических свойств обтекания тел газом при скоростях, во много раз превосходящих скорость звука. Так, в упоминавшейся уже работе [7] впервые была произведена оценка сопротивления тел при очень большой сверхзвуковой скорости с помощью методов сверхзвуковой аэродинамики. В этой же работе было обращено внимание на то, что картина движения тела в газе с очень большой сверхзвуковой скоростью близко напоминает рассматривавшуюся еще Ньютоном [52] картину движения тел в сопротивляющейся среде, состоящей из отдельных, не взаимодействующих между собой частиц. Из рассуждений Ньютона вытекает, что давление, действующее на обращенный вперед элемент движущегося тела, пропорционально квадрату синуса угла встречи элемента с частицами среды. В работе [53] была получена приближенная формула для расчета давлений на поверхности головной части профилей и тел вращения при очень большой сверхзвуковой скорости, уточняющая формулу Ньютона.

Эти попытки рассмотрения течений с очень большой сверхзвуковой скоростью были в то время далеки от практических приложений. Единственными макроскопическими телами, движущимися со скоростями, существенно превышающими скорость артиллерийских снарядов, были тогда метеорные тела. Искусственное осуществление движения летательных аппаратов со скоростями того же порядка, что и скорости метеоров, казалось далекой и мало реальной перспективой. Поэтому изучение явлений, сопровождающих полет метеорных тел в атмосфере, интересовало главным образом астрономов и

геофизиков и притом в значительной степени как одно из средств исследования верхних слоев атмосферы.

К середине сороковых годов положение начинает изменяться. Обширные теоретические исследования, эксперименты в аэродинамических трубах и на летающих моделях привели к тому, что одна за другой стали находить решение основные проблемы, связанные с осуществлением полетов управляемых летательных аппаратов со сверхзвуковой скоростью. К концу сороковых годов были произведены полеты самолетов и управляемых крылатых снарядов со скоростью, превосходящей скорость звука. Еще раньше, на исходе второй мировой войны, были созданы баллистические ракеты с дальностью полета в несколько сотен километров и скоростью, в пять-шесть раз большей скорости звука.

В последние годы круг научных и технических проблем, требующих изучения явлений, происходящих при движении тел в земной атмосфере со скоростями в 3—10 км/сек и более, значительно расширился. Увеличение мощности ракетных двигателей и успехи автоматики и телемеханики сделали возможным искусственное ускорение тел до столь высоких скоростей. При использовании ракетных двигателей созданы дальние баллистические ракеты и спутники Земли, обладающие скоростями в 6—8 км/сек; близится время, когда появятся и имеющие такие скорости летательные аппараты, использующие аэродинамическую подъемную силу.

По этой причине наряду с дальнейшим развитием в многообразных направлениях теоретической и экспериментальной аэродинамики полетов с умеренными сверхзвуковыми скоростями, т. е. со скоростями, превышающими скорость звука не более чем в четыре-пять раз, возникла и начала интенсивно развиваться аэродинамика течений с большими сверхзвуковыми скоростями. Начало систематических исследований в области аэродинамики больших сверхзвуковых скоростей можно связать с работой [54], а также с последующими работами [55—57].

Остановимся вкратце на некоторых специфических особенностях этой новой ветви аэродинамики.

Как уже указывалось, при обтекании тонкого тела потоком с большой сверхзвуковой скоростью возмущения скорости частиц, малые по сравнению со скоростью набегающего потока, могут не быть малыми по сравнению со скоростью звука. В этих условиях многие выводы линейной теории, столь эффективной при изучении обтекания тонких тел с умеренной сверхзвуковой скоростью, становятся неприменимыми, так что при теоретических исследованиях необходимо сохранять нелинейные члены в уравнениях, описывающих движение газа.

Это обстоятельство существенно осложняет методы расчета обтекания тел потоком с большой сверхзвуковой скоростью по сравнению со случаем умеренных сверхзвуковых скоростей.

Однако не одно только это обстоятельство осложняет теоретическое исследование обтекания тел с большой сверхзвуковой скоростью. Полет тел с такой скоростью связан с ростом до очень больших значений температуры газа вблизи поверхности тела. Этот рост температуры вызывается мощным сжатием газа перед головной частью движущегося тела и выделением тепла вследствие внутреннего трения в газе, увлекаемом телом при полете. Теоретические оценки и наблюдения над свечением метеорных тел показывают, что при полете тел сквозь атмосферу со скоростью, соответствующей, например, скорости входа в плотные слои атмосферы дальней баллистической ракеты, развиваются температуры, которые могут достигать температуры поверхности Солнца.

В связи с этим в теории обтекания тел идеальным газом с большой сверхзвуковой скоростью необходимо учитывать изменение свойств воздуха при высоких температурах: возбуждение внутренних степеней свободы молекул, диссоциацию газов, составляющих воздух, химические реакции, например образование окиси азота, возбуждение электронов и ионизацию. При равновесном адиабатическом течении газа эти факторы влияют на зависимость теплосодержания газа и его энтропии от температуры и давления. В задачах, в которых существенны явления переноса, например при расчете поверхностного трения или температуры обтекаемой поверхности, необходимо учитывать изменение в широких пределах вязкости и теплопроводности воздуха, а в некоторых случаях — диффузию и термодиффузию компонент воздуха и т. п. явления.

Может оказаться также, что в некоторых условиях процессы, происходящие в движущемся газе, нельзя считать термодинамически равновесными, вследствие чего при теоретических исследованиях понадобится учитывать их неравновесность. Необходимость учета явлений, происходящих в газе при высоких температурах, является существенной отличительной чертой аэродинамики больших скоростей, сближающих ее с физикой.

При экспериментальном исследовании течений с большими сверхзвуковыми скоростями возникают трудности, связанные прежде всего с необходимостью подогревания до высоких температур воздуха, поступающего в аэродинамическую трубу, для того чтобы предотвратить его конденсацию при расширении, которое требуется для создания больших скоростей. Более того, так как при исследованиях в ряде случаев необходимо учитывать изменения свойств воздуха при высоких температурах, сопровождающих полет тел с большой сверхзвуковой скоростью, то недостаточно для воспроизведения натуральных условий в аэродинамических трубах стремиться к предотвращению конденсации воздуха и сохранению только числа Маха и числа Рейнольдса, но нужно сохранять и соответствующие натурным условиям значения температуры. Это приводит к тому, что техника экспериментальных исследований при больших сверхзвуковых

скоростях существенно отличается от той, которая используется при умеренных сверхзвуковых скоростях; в частности, для таких исследований потребовалось создать совершенно новые типы испытательных установок: ударные трубы, адиабатические трубы и др.

§ 2. Основные аэродинамические задачи, связанные с движением летательных аппаратов при большой сверхзвуковой скорости

Охарактеризуем кратко некоторые основные аэродинамические задачи, связанные с движением летательных аппаратов в атмосфере при очень большой скорости.

На рисунке В.1 изображены [58] возможные типы траекторий дальнего летательного аппарата, движущегося с очень большой

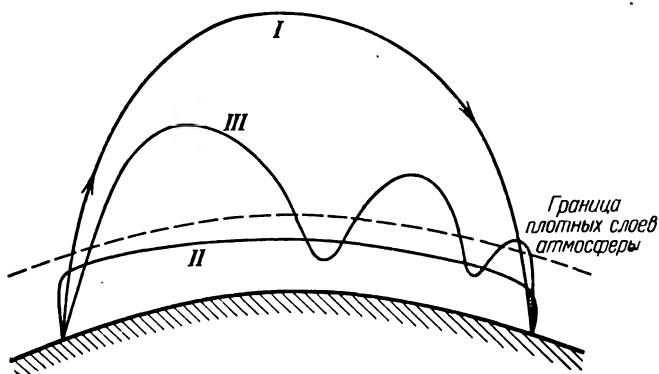


Рис. В.1. Типы траекторий дальних летательных аппаратов: I — баллистической ракеты, II — планирующего аппарата, III — рикошетирующего аппарата.

скоростью (вертикальный масштаб на рис. В.1 для наглядности сильно увеличен).

При полете баллистической ракеты (кривая I) подъем ее в плотных слоях атмосферы происходит вертикально или под большим углом к горизонту со сравнительно малой скоростью. В менее плотных слоях атмосферы ракета постепенно увеличивает скорость и выходит на заданное направление полета.

После прекращения работы двигателей ракета продолжает двигаться вне атмосферы по инерции в поле сил земного тяготения, описывая баллистическую траекторию. На участке падения ракета входит в плотные слои атмосферы подобно метеорному телу с большой скоростью и под большим углом.

На рисунке В.2 приведены сплошной линией достижимые значения дальности полета (в радиусах Земли) баллистической ракеты

в зависимости от скорости ее в начале участка движения по инерции (скорость дана в долях скорости, необходимой для превращения ракеты в спутник Земли). Лишь небольшая часть активного участка траектории дальней баллистической ракеты проходит в плотных слоях атмосферы. К тому же скорость ракеты при подъеме ее в этих слоях сравнительно невелика. Поэтому форма ракеты, определяющая ее аэродинамическое сопротивление, лишь незначительно влияет на дальность полета.

Напротив, факторы, определяющие возможность достижения земной поверхности ракетой без опасности ее разрушения от действия высоких температур при спуске в плотных слоях атмосферы, т. е.

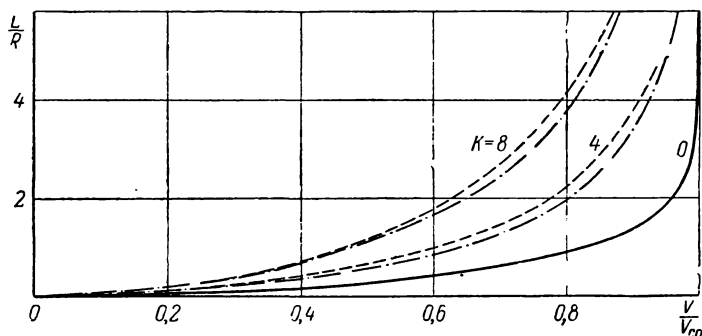


Рис. В.2. Дальность полета летательных аппаратов, движущихся с очень большой скоростью.

общее количество тепла, поглощенного ракетой при спуске, и интенсивности местных тепловых потоков, идущих от раскаленного воздуха к ракете, в сильной степени зависят от формы головной части ракеты.

Поэтому для дальней баллистической ракеты основная аэродинамическая задача состоит в выборе такой ее формы, которая в наибольшей мере облегчала бы охлаждение поверхности ракеты при торможении ее в плотных слоях атмосферы, а также обеспечивала бы устойчивость движения ракеты в атмосфере.

Другим возможным типом траектории дальнего летательного аппарата, движущегося с большой сверхзвуковой скоростью, является траектория планирующего полета (кривая II на рис. В.1).

Как и в случае баллистической ракеты, при таком полете подъем летательного аппарата в плотных слоях атмосферы происходит под большим углом к горизонту с постепенным увеличением скорости. Отличие от взлета баллистической ракеты состоит в том, что в конце активного участка траектории планирующий аппарат направлен горизонтально или под малым углом к горизонту. В дальнейшем летательный аппарат совершает планирующее движение в земной

атмосфере, постепенно снижаясь таким образом, что вес его почти уравновешивается аэродинамической подъемной силой и центробежной силой.

Возможна, наконец, комбинация обоих типов траекторий — так называемый рикошетирующий полет (кривая III на рис. В.1), в котором участки движения по баллистической траектории сменяются участками движения в атмосфере с использованием аэродинамической подъемной силы [59].

Благодаря использованию аэродинамической подъемной силы дальность полета планирующего или рикошетирующего летательного

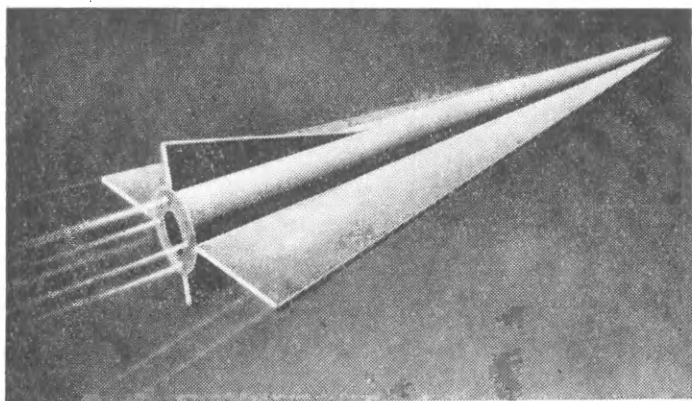


Рис. В.3. Воображаемый вид сверхскоростного планирующего летательного аппарата.

аппарата может быть при той же начальной скорости больше, чем у баллистической ракеты. Очевидно, что это преимущество будет тем заметнее, чем большим аэродинамическим качеством (т. е. отношением подъемной силы к сопротивлению) обладает летательный аппарат. На рис. В.2 приведены достижимые дальности полета планирующего (штрих-пунктир) и рикошетирующего (пунктир) летательных аппаратов при двух значениях аэродинамического качества K (при $K > 4$ дальности этих двух типов аппаратов мало отличаются друг от друга).

При планирующем или рикошетирующем полете летательного аппарата вся его траектория или значительная ее часть проходит в сравнительно плотных слоях земной атмосферы, вследствие чего аппарат будет продолжительное время находиться в контакте с раскаленным воздухом. Из сказанного следует, что основной аэродинамической задачей для дальних планирующих и рикошетирующих летательных аппаратов является отыскание таких их форм, которые обладают высоким аэродинамическим качеством при полете с очень

большой скоростью на больших высотах и в то же время обеспечивают возможность эффективного рассеяния тепла, выделяющегося в прилегающих к аппарату слоях воздуха.

Для получения достаточно высокого аэродинамического качества летательный аппарат не должен обладать значительным сопротивлением, т. е. фюзеляж его должен быть тонким, вытянутым в направлении полета; несущие и стабилизирующие органы также должны быть тонкими. Однако для того, чтобы иметь возможность отвести большие количества тепла от переднего конца корпуса летательного аппарата и от передних кромок крыльев, острые концы и кромки должны быть затуплены. При правильном выборе формы затупления переднего конца корпуса сопротивление его может не возрасти по сравнению с сопротивлением заостренного впереди корпуса. Напротив, затупление кромок крыльев резко увеличивает их сопротивление и, следовательно, ухудшает аэродинамическое качество аппарата. Этот рост сопротивления может быть уменьшен применением скошенных передних кромок крыльев (при наличии угла скоса тепловые потоки также уменьшаются).

На рисунке В.3 показан теоретически целесообразный вид сверхзвукового планирующего летательного аппарата.

§ 3 Некоторые сведения о свойствах воздуха при высокой температуре

При решении аэродинамических задач, связанных с движением тел в атмосфере с большой сверхзвуковой скоростью, нужно учитывать то обстоятельство, что воздух вблизи движущегося тела нагревается до очень высокой температуры. Так, при входе в плотные слои атмосферы дальней баллистической ракеты или при полете дальнего крылатого аппарата, температура газа за наиболее интенсивной частью головной ударной волны, образующейся перед телом, может достигать 6—8 тысяч °К. При столь высокой температуре свойства воздуха существенно отличаются от свойств совершенного газа с постоянными теплоемкостями. Уже при температуре порядка 1500°К начинает играть заметную роль возбуждение колебательных степеней свободы молекул кислорода и азота; при температуре порядка 3000°К молекулы кислорода диссоциируют, распадаясь на отдельные атомы; кроме этого, в воздухе происходят химические реакции, в результате которых возникает некоторое количество окиси азота, также диссоциирующей при дальнейшем повышении температуры с образованием атомарного кислорода и азота. При 5—6000°К молекулы кислорода почти полностью диссоциированы, диссоциирована также часть молекул азота. При такой температуре начинается ионизация компонент воздуха — атомарного кислорода и азота, молекул азота и окиси азота; в результате ионизации достигают заметной концентрации свободные электроны.

При возбуждении внутренних колебательных степеней свободы молекул, при диссоциации молекул компонент воздуха и при ионизации подводимое к воздуху тепло идет не только на увеличение энергии поступательного и вращательного движения молекул, но и на увеличение энергии колебательного движения атомов в молекуле, на преодоление сил взаимодействия между атомами в молекуле при диссоциации, на отрыв электронов от атома — при ионизации.

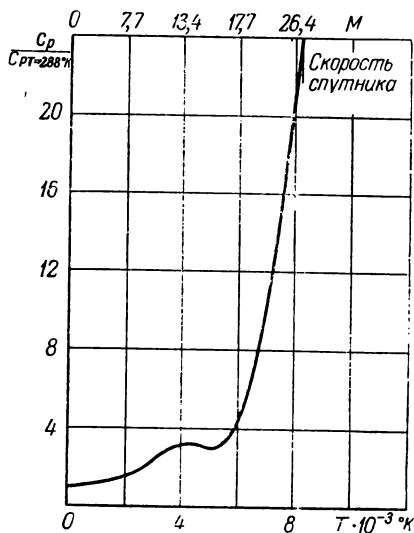


Рис. В.4. Зависимость теплоемкости воздуха от температуры.

Вследствие этого теплоемкость единицы массы воздуха значительно увеличивается при высокой температуре. На рис. В.4 приведена для примера зависимость теплоемкости воздуха от температуры при плотности, равной $1/10$ плотности атмосферы в нормальных условиях (т. е. при давлении, равном одной атмосфере, и температуре, равной 288° K [60]. На этом же рисунке дана шкала чисел Маха; температура соответствует условиям за прямым скачком уплотнения при данном числе Маха. При высокой температуре теплоемкость резко возрастает; так, при 7000° K она в 12 раз больше теплоемкости в нормальных условиях.

Описанные выше процессы, происходящие в газе при высокой температуре, меняют состав газа и общее число частиц в единице массы a , следовательно, и молекулярный вес газа. На рисунке В.5 в наглядной форме представлено изменение состава воздуха в зависимости от температуры при плотности, равной плотности атмосферы в нормальных условиях [61]. Общее число частиц в единице массы иллюстрировано на этой фигуре величиной площади круговых диаграмм.

Изменение свойств воздуха при высокой температуре может изменять равновесное течение вне пограничного слоя по сравнению с течением в тех же условиях совершенного газа с постоянной теплоемкостью, каким можно считать воздух при умеренной температуре. Учет этого изменения свойств воздуха не вносит, однако, принципиальных трудностей в теорию и методы расчета равновесных течений идеального газа. Теоретические методы, развитые для совершенного газа с постоянным молекулярным весом и постоянными теплоемкостями, как правило, легко обобщаются на случаи течений

воздуха при высокой температуре. Возможность таких обобщений оправдывает большое внимание, которое уделялось и продолжает уделяться разработке методов расчета течений совершенного газа с постоянными теплоемкостями при большой сверхзвуковой скорости. Конечно, так как выражения для энтропии и теплосодержания газа, входящие в уравнения движения и в соотношения на скачках уплотнения, не представляются для воздуха при высокой температуре в простом виде через давление и плотность, то вычисления в этом случае становятся более громоздкими, чем в случае совершенного

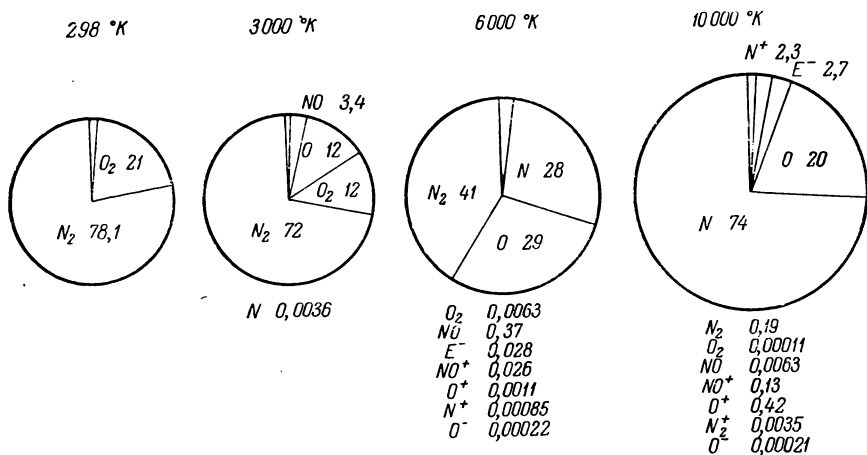


Рис. В.5. Состав воздуха в зависимости от температуры.

газа с постоянным молекулярным весом и постоянными теплоемкостями. Кроме того, если при небольших сверхзвуковых скоростях единственным параметром, от которого зависит установившееся обтекание идеальным газом тела заданной формы, является число Маха, то при большой сверхзвуковой скорости нужно вводить еще один параметр, характеризующий температуру торможения набегающего потока, например, отношение этой температуры к характерной температуре диссоциаций кислорода. Это обстоятельство увеличивает объем требующихся расчетов обтекания тел потоком воздуха с большой сверхзвуковой скоростью и осложняет представление их результатов.

В отличие от теории течений идеального газа при теоретическом изучении явлений, связанных с процессами молекулярного переноса, т. е. в первую очередь при определении поверхностного трения и тепловых потоков, а также температуры поверхности обтекаемых тел, изменение состава воздуха с температурой, т. е. изменение концентрации отдельных его компонент, может играть существенную

роль. Наличие градиентов концентрации и температуры в движущемся газе обуславливает возникновение диффузионных потоков вещества и тепла. Эти диффузионные потоки могут приводить к отклонению концентраций отдельных компонент воздуха от их равновесных значений, а также могут оказывать существенное влияние на теплопередачу. Пусть, к примеру, охлажденная поверхность обтекается потоком воздуха высокой температуры, содержащим диссоциированный кислород. Вблизи стенки благодаря уменьшению температуры воздуха концентрация диссоциированных частиц кислорода в нем уменьшается. Такая разность концентраций вызывает диффузионный поток диссоциированного кислорода к стенке; выделение тепла, связанное с рекомбинацией атомов кислорода в области пониженных температур вблизи стенки, увеличивает тепловой поток по направлению к ней сравнительно со случаем, когда диффузия не учитывается. Необходимость учета диффузионных явлений при определении поверхностного трения и тепловых потоков отличает аэродинамику течений с большой сверхзвуковой скоростью от аэродинамики умеренных сверхзвуковых скоростей.

Важную роль в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей может играть и то обстоятельство, что установление термодинамического равновесия в движущейся частице газа происходит не мгновенно, а требует определенного времени; следовательно, давление, температура, концентрация отдельных компонент воздуха (даже в том случае, если диффузионные явления не учитываются) и его теплоемкость зависят не только от мгновенных значений внутренней энергии и плотности частицы, но и от ее предшествующей истории (более приближенно — от скорости изменения внутренней энергии и плотности в частице). Отступления от термодинамического равновесия могут заметно влиять на структуру скачков уплотнения, на распространение слабых возмущений и другие явления, происходящие в потоке воздуха [62—64]. Характерное время, необходимое для наступления термодинамического равновесия, — так называемое время релаксации, — различно для различных процессов. Так, для установления равновесного значения энергии поступательного движения молекулы достаточно в среднем одного столкновения молекул, для энергии вращательного движения — от 10 до 100 столкновений, для энергии колебательных движений атомов внутри молекулы в случае кислорода — 500 000 столкновений. В некоторых случаях времена релаксации могут быть оценены теоретическим путем, однако главное значение при определении влияния релаксации на течения газа при большой сверхзвуковой скорости имеют экспериментальные методы. На рисунке В.6 приведена для иллюстрации [65] область значений высот и скоростей полета, в которой могут проявляться заметным образом релаксационные явления, связанные с диссоциацией. В расчетах, на основе которых построен рис. В.6, принято, что обтекаемое тело имеет затупленную головную часть и воздух

вблизи критической точки после прохождения им ударной волны находится в термодинамическом равновесии. В заштрихованной области течение можно считать равновесным, так как время релаксации здесь в 10 раз меньше времени прохождения частицей вдоль поверхности тела расстояния в 0,3 м (естественно, что влияние времени релаксации тем меньше, чем больше обтекаемое тело; при длине вдоль

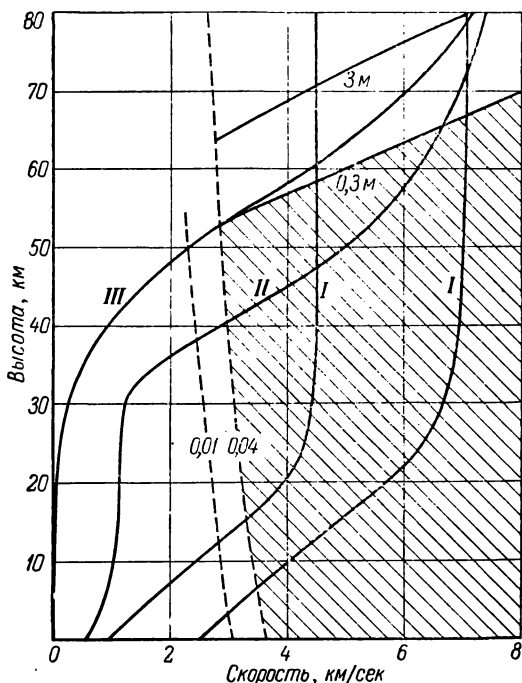


Рис. В.6. Условия полета, в которых могут быть заметными релаксационные явления, связанные с диссоциацией.

поверхности тела, равной 3 м, граница заштрихованной области сместится вверх, как указано на рисунке). Слева от пунктирных линий степень диссоциации воздуха в критической точке соответственно меньше 0,01 и 0,04, так что в этой области релаксационные явления, связанные с диссоциацией, если и происходят, не могут оказывать существенного влияния на течение.

На этом же рисунке В.6 нанесены типичные траектории входящих в плотные слои атмосферы с различной скоростью дальних баллистических ракет (кривые I), планирующего летательного аппарата

(кривая II) и спутника Земли (кривая III). Как видно, при возвращении спутника Земли обтекание его может не быть термодинамически равновесным.

Помимо расчетов обтекания тел потоком с большой сверхзвуковой скоростью, возможность отклонения от термодинамического равновесия нужно учитывать также при проектировании сопел аэродинамических труб, предназначенных для получения больших сверхзвуковых скоростей. Для целей аэродинамических исследований воздух в невозмущенном испытываемой моделью потоке в рабочей части

трубы должен находиться в равновесном состоянии.

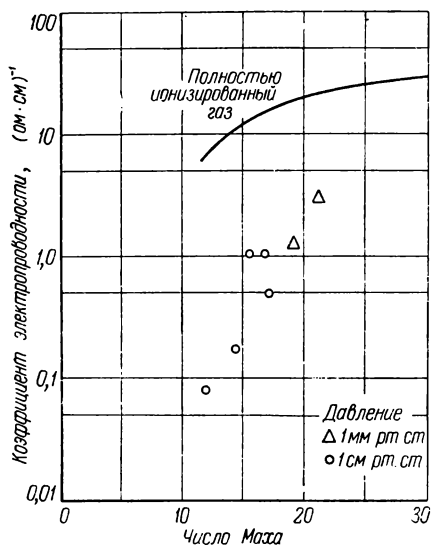


Рис. В.7. Электропроводность воздуха при высокой температуре.

Как уже указывалось, при очень высокой температуре в воздухе присутствуют свободные электроны и воздух становится хорошим проводником электричества. На рисунке В.7 приведены определенные экспериментальным путем [60] значения коэффициента электропроводности воздуха при высоких температурах и давлениях в диапазоне от 1 до 10 мм ртутного столба (по горизонтальной оси отложены числа Маха перед прямым скачком, за которым достигается соответствующая температура). Хорошая электропроводность воздуха вблизи тела, движущегося с большой сверхзвуковой скоростью, открывает возможность

использования электрических и магнитных полей для воздействия на поток [66]; она же может вызвать затруднения в решении проблемы радиосвязи с летательным аппаратом.

Отметим в заключение, что нагревание воздуха при сжатии его перед головной частью движущегося с большой сверхзвуковой скоростью тела может вызывать мощные потоки лучистой энергии, частично передающейся поверхности тела, и в значительной степени рассеивающейся в окружающих слоях воздуха. Эти эффекты также должны учитываться при изучении течений с большой сверхзвуковой скоростью.

Таким образом, при большой сверхзвуковой скорости движение тел происходит в совершенно иной среде, чем тот воздух, с которым имеют дело исследователи и инженеры при решении задач о полете с умеренной сверхзвуковой скоростью.

§ 4. Методы экспериментального изучения течений газа при очень больших скоростях

В настоящем параграфе дается краткое описание способов моделирования в лабораторных условиях явлений, возникающих при движении тел в воздухе с большой сверхзвуковой скоростью; методы проведения аэродинамических исследований при полете самолетов и ракет не рассматриваются. Не затрагиваются также вопросы измерения различных физических величин при больших сверхзвуковых скоростях потока и при сопутствующих им высоких температурах.

В аэродинамике и баллистике всегда имели большое значение экспериментальные исследования моделей создаваемых самолетов, ракет, снарядов и их элементов, и, наряду с этим, исследования общего характера, проводившиеся с целью установления основных свойств течений газа и проверки выводов теории. Для таких исследований применялись аэродинамические трубы, в которых неподвижная модель помещается в искусственно создаваемый поток воздуха, и баллистические тир, в которых модель тем или иным способом ускоряется, а затем свободно движется в покоящейся газовой среде. До тех пор, пока исследования относились к проблемам полета с небольшой сверхзвуковой скоростью и температура воздуха вблизи обтекаемого тела была невысокой, правила моделирования при решении основных задач аэродинамики установившихся течений требовали сохранения только чисел Маха и Рейнольдса, соответствующих натурным условиям (необходимое равенство значений отношения теплоемкостей обеспечивалось автоматически при испытании моделей в воздухе).

Переход к большим сверхзвуковым скоростям значительно усложняет проблему моделирования, главным образом в связи с тем, что учет изменения свойств воздуха при высокой температуре вводит в рассмотрение вместо отношения теплоемкостей ряд новых критериев подобия, а также потому, что при большой сверхзвуковой скорости важное значение приобретают явления теплопередачи и становится необходимым обеспечение подобия и этих явлений. Большое число критериев подобия при большой сверхзвуковой скорости делает невозможным осуществление полного подобия явлений в натуре и в лабораторных условиях. Однако, как и в обычной аэродинамике, при изучении определенного класса явлений не все определяющие течение величины в равной степени влияют на эти явления. По этой причине приобретает значение частичное моделирование натуральных условий, т. е. сохранение равенства в натуре и в лабораторных условиях лишь некоторых критериев подобия, наиболее существенных для изучения рассматриваемых явлений. Для частичного воспроизведения натуральных условий при обтекании тел с большой сверхзвуковой скоростью могут быть использованы аэродинамические трубы, работающие по обычной схеме, баллистические тир, а также

некоторые специальные экспериментальные установки, не применяющиеся в обычной аэродинамике.

Увеличение числа Маха в рабочей части аэродинамической трубы связано с ростом необходимого отношения давлений воздуха при входе в сопло и в рабочей части. Этот рост обуславливает две отличительные особенности аэродинамических труб больших сверхзвуковых скоростей. Во-первых, так как размер аэродинамической трубы, как правило, позволяет испытывать лишь модели, во много раз меньшие натурального объекта, то для того, чтобы числа Рейнольдса в рабочей части не были слишком низкими, воздух при входе в сопло должен быть сильно сжат, обычно до давления 50—150 атмосфер. Во-вторых, так как расширение воздуха в сопле близко к адиабатическому, то при больших отношениях давлений температура воздуха при движении его в сопле резко падает; поэтому для предотвращения конденсации воздуха он должен быть нагрет перед входом в сопло до высокой температуры. Эта температура быстро возрастает с ростом числа M в рабочей части: при $M=10$ она составляет 800—1100° К (в зависимости от давления), а при $M=12$ —1100—1400° К. Для уменьшения трудностей, связанных с еще большим повышением температуры при дальнейшем росте числа M , можно вместо воздуха использовать гелий, обладающий более низкой температурой конденсации. Таким путем удастся достичь в аэродинамических трубах значений числа M до 20. Естественно, что в аэродинамических трубах, имеющих в рабочей части температуру, близкую к температуре конденсации воздуха (и тем более гелия), могут изучаться только такие явления, связанные с полетом тел в атмосфере при большой скорости, для которых основным определяющим параметром является число Маха (иногда и число Рейнольдса) и на которые термодинамические свойства воздуха влияют лишь в слабой степени.

При скоростях полета, превышающих скорость звука не более, чем в 7—8 раз, влияние отклонений свойств воздуха от свойств совершенного газа с постоянными удельными теплоемкостями невелико, и для сохранения приближенного подобия условий в аэродинамической трубе и при натурном полете в ряде случаев достаточно обеспечивать равенство чисел Маха и Рейнольдса и отсутствие конденсации воздуха в потоке. При больших скоростях полета сохранения этих критериев подобия уже недостаточно для моделирования натуральных условий. Приведем пример, характеризующий необходимые значения давления и температуры воздуха перед соплом аэродинамической трубы, предназначенной для получения большой сверхзвуковой скорости (схематически один из возможных вариантов такой трубы изображен на рис. В.8). Пусть требуется изучить на модели характеристики летательного аппарата, имеющего длину 6 м и движущегося на высоте 40 км со скоростью 3 км/сек. Для того чтобы при испытании модели длиной 0,4 м (т. е. в довольно боль-

шой аэродинамической трубе) сохранить натурные значения чисел Маха и Рейнольдса и избежать конденсации воздуха, при входе в сопло воздух должен быть сжат до давления в 150 атмосфер и иметь температуру 820° . Полное подобие явлений в трубе и в натуральных условиях при этом, конечно, не будет обеспечено. Действительно, в натуральных условиях при полете тела со скоростью 3 км/сек температура воздуха вблизи головной части тела будет превосходить 3000°К . При столь высокой температуре внутренние степени свободы молекул полностью возбуждены и существенную роль играет диссоциация. В трубе же при названных выше условиях температура

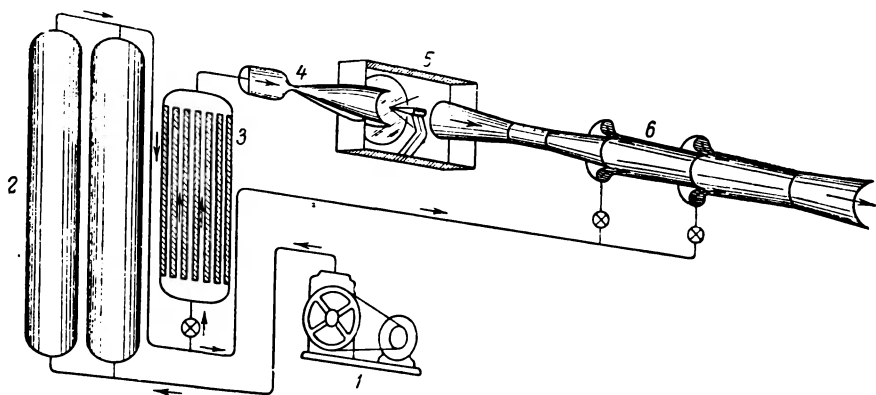


Рис. В.8. Схематическое изображение аэродинамической трубы для получения потока с большой сверхзвуковой скоростью.

1 — компрессор, 2 — баллоны высокого давления, 3 — подогреватель воздуха, 4 — сопло, 5 — рабочая часть, 6 — эжектор и выхлопной диффузор.

вблизи поверхности обтекаемого тела будет вызывать лишь в небольшой степени возбуждение внутренних степеней свободы. Поэтому многие явления, в частности теплопередача, при исследованиях в описанной аэродинамической трубе будет происходить в условиях, не соответствующих натурным.

Для обеспечения подобия тепловых явлений температура воздуха перед соплом должна быть поднята до 3000°К .

Подогрев воздуха перед входом в сопло до требуемой температуры обычными средствами (путем соприкосновения воздуха с нагретыми поверхностями или даже путем сжигания топлива в потоке воздуха) становится затруднительным; очень сложной становится проблема охлаждения трубы при более или менее продолжительном времени ее работы. Одним из возможных способов подогрева воздуха до температур порядка 3000°К и выше является использование электрического дугового разряда (в некоторых схемах можно получить при этом газовые струи с температурой 10000°К и даже

более). Другим возможным путем является получение потоков воздуха (или других газов) с весьма высокой скоростью, но в течение очень коротких промежутков времени, порядка десятитысячных долей секунды. Такие потоки воздуха создаются в так называемых ударных и адиабатических трубах, схемы действия которых весьма разнообразны. Простейшая ударная труба представляет собой закры-

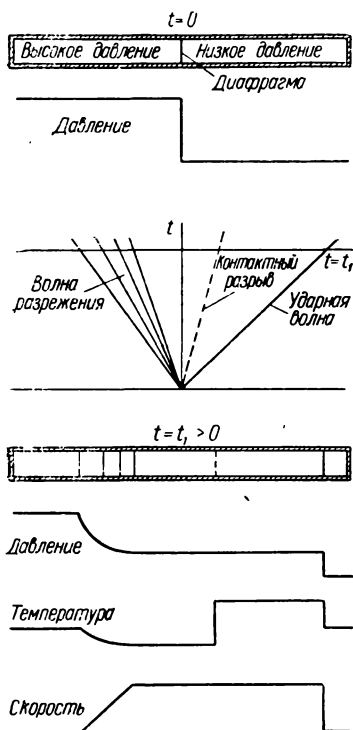


Рис. В.9. Схематическое изображение простейшей ударной трубы и течения в ней после разрыва диафрагмы.

давление; из этой области газ вытекает через сопло в камеру с пониженным давлением. Такая ударная труба близка к так называемой адиабатической трубе, в которой газ перед соплом сжимается путем быстрого движения поршня. Для увеличения скорости и температуры воздушного столба в ударных трубах высокое давление и высокая температура толкающего газа могут быть получены при пропускании через него мощного электрического разряда или, если толкающий газ представляет собой взрывчатую смесь, — при его взрыве.

тый с обеих сторон канал, разделенный перегородкой (диафрагмой) на две части (рис. В.9). С одной стороны диафрагмы газ имеет высокое давление («толкающий» газ), с другой стороны создается разрежение. После разрушения диафрагмы в сторону камеры низкого давления распространяется ударная волна, за которой следует с постоянной скоростью столб нагретого при сжатии в волне газа. Чем выше отношение давлений по обе стороны диафрагмы, тем больше скорость газа и тем выше его температура торможения. Таким путем без особых сложностей могут быть получены скорости в 5 км/сек и более при требуемых значениях температур торможения.

Однако числа Маха остаются при этом небольшими: порядка двух; для их увеличения движущийся за ударной волной газ может быть расширен в сопле, соединенном с концом трубы (рис. В.10, а). В других схемах ударных труб вход в сопло имеет значительно меньший диаметр, чем диаметр трубы (рис. В.10, б). После отражения ударной волны от конца трубы между входом в сопло и отраженной волной образуется область газа, имеющего высокую температуру и высокое

Основным недостатком ударных и адиабатических труб является чрезвычайно малая продолжительность их действия, вследствие чего возникают большие трудности при измерении параметров газового потока; кроме того, теплообмен между нагретым газом и помещенными в поток телами в этих трубах быстро меняется во времени. Тем не менее разработаны методы, позволяющие и в этих условиях наблюдать поток и определять давление на поверхности тел и тепловые потоки между газом и поверхностью тела.

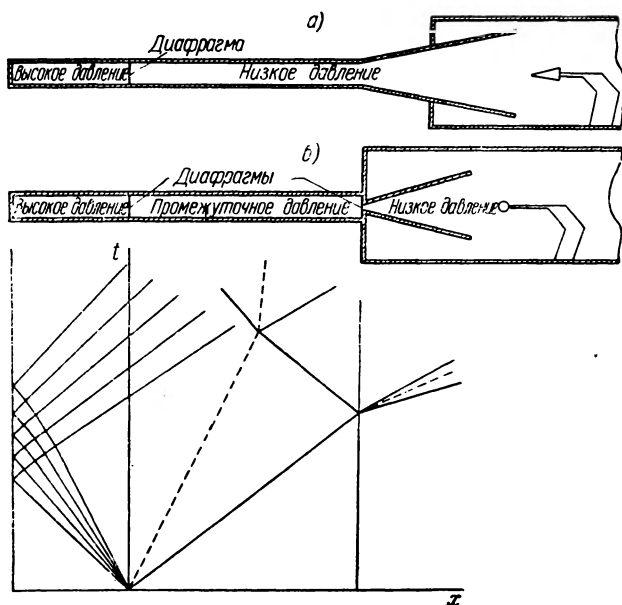


Рис. В.10. Некоторые схемы ударных труб:
 — скачок уплотнения, — — — контактный разрыв,
 — волна разрежения.

Ударные трубы применяются главным образом не для определения аэродинамических характеристик моделей, а для исследования основных физических и химических процессов, происходящих в потоке воздуха, а также других газов, при больших скоростях движения и при высоких температурах. Так, с помощью ударных труб исследовалась теплопроводность [67] и электропроводность [60] воздуха при высоких температурах, диссоциация и образование окиси азота [68], релаксационные явления при диссоциации [65] и т. д.

Другую возможность получения условий, соответствующих полету тел с очень большой скоростью, дают баллистические тиры. Используя ранее артиллеристами главным образом для определения сопротивления снарядов и их устойчивости в полете, баллистические

тиры в последнее время получили распространение и как средство изучения явлений, происходящих при больших сверхзвуковых скоростях. В баллистическом тире могут быть получены натурные значения числа Маха и температуры при условии, что скорость полета модели равна натурной; нужные значения числа Рейнольдса можно получить, выстреливая модель в барокамеру с контролируемым давлением. В настоящее время скорости моделей в баллистических тирах доходят до 3—4 км/сек, для чего пришлось создать специальные пушки, использующие для метания моделей вместо продуктов сгорания пороха сжатые легкие газы. Для увеличения относительной

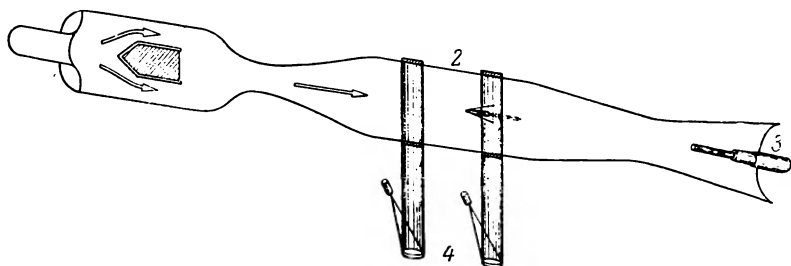


Рис. В.11. Схематическое изображение баллистической установки с противотоком воздуха:

1 — сопло, 2 — труба, 3 — пушка, 4 — оптическая система.

скорости модели и воздуха применяются комбинации аэродинамической трубы и баллистического тира, в которых модель выстреливается навстречу потоку (рис. В.11). Для изучения физических процессов, происходящих в потоке при высокой температуре торможения, в баллистическом тире, как и в ударных трубах, могут быть использованы, кроме воздуха, и другие газы.

Таким путем изучалось, например, влияние диссоциации и релаксационных процессов на обтекание тел [67].

ГЛАВА I

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ОБТЕКАНИИ ТЕЛ ИДЕАЛЬНЫМ ГАЗОМ С БОЛЬШОЙ СВЕРХЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ

§ 1. Постановка задачи о сверхзвуковом обтекании тела идеальным газом

При сверхзвуковой скорости движения тела в идеальном газе область влияния вызываемых телом возмущений отделена от покоящегося газа движущейся вместе с телом поверхностью, которая называется головной волной. Если головная волна имеет общую точку или общую линию с поверхностью тела, то ее называют присоединенной (рис. 1.1, *а*); в противном случае волна называется отсоединенной или отошедшей (рис. 1.1, *б*). Отсоединенная головная волна всегда представляет собой поверхность сильного разрыва — ударную волну. При прохождении ударной волны по газу его частицы внезапно начинают двигаться и скачком приобретают давление и плотность, отличные от первоначальных. Обычно присоединенная головная волна также является поверхностью сильного разрыва. Но в некоторых случаях (например, при бесконечно тонком заостренном переднем конце тела или при достаточно большом угле атаки крыла) часть присоединенной головной волны может быть поверхностью слабого разрыва — характеристической поверхностью, скорость распространения которой по частицам (по нормали к самой себе) есть скорость звука. При прохождении такой поверхности по газу значения его параметров остаются непрерывными; а терпят разрыв лишь некоторые их производные. За присоединенной головной волной скорости частиц газа относительно тела могут быть либо всюду сверхзвуковыми, либо в некоторой части возмущенной области дозвуковыми.

За отсоединенной волной вблизи передней части тела всегда имеется область, в которой скорость частиц газа относительно тела меньше скорости звука.

Кроме головной волны, при сверхзвуковом движении тела могут возникать расположенные внутри возмущенной области другие

поверхности сильного разрыва — ударные волны, тангенциальные (или контактные) разрывы, и поверхности слабого разрыва (рис. 1.1, *a*).

Сложный характер течения (наличие поверхностей разрыва, положение и даже конфигурация которых заранее не известны, а в ряде

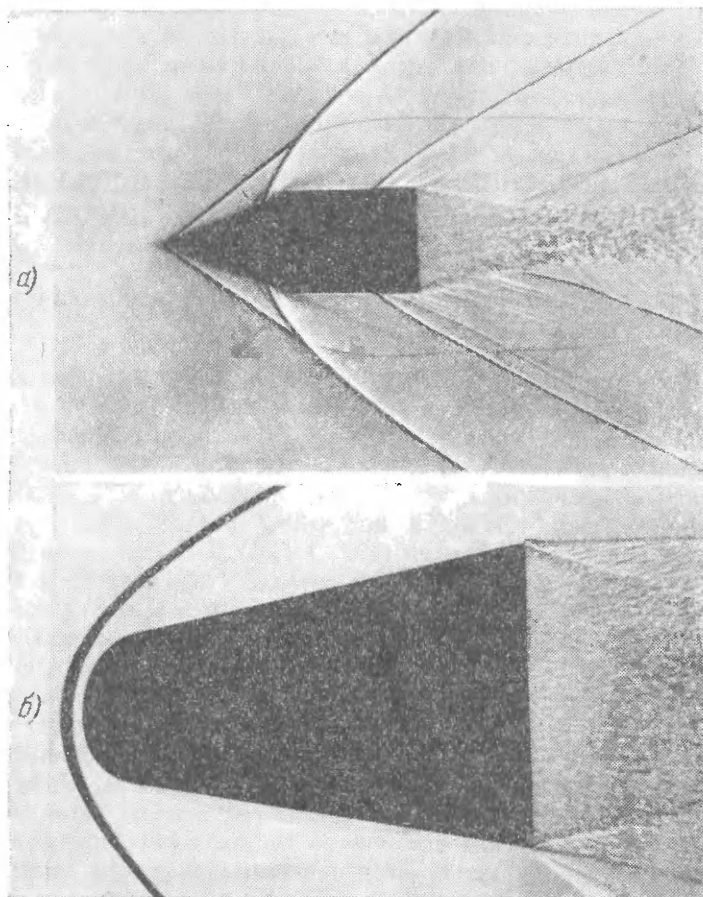


Рис. 1.1 Движение тела в газе со сверхзвуковой скоростью:

a) присоединенная головная волна, *б*) отошедшая головная волна.

случаев и наличие областей с дозвуковой скоростью движения частиц относительно тела) чрезвычайно затрудняет теоретическое исследование обтекания тел сверхзвуковым потоком. До настоящего времени отсутствуют эффективные методы расчета многих случаев такого обтекания.

Перейдем к математической формулировке задачи об обтекании тела, движущегося со сверхзвуковой скоростью в идеальном газе.

Движение газа будем рассматривать в системе координат, связанной с телом. Направим ось x в сторону, обратную скорости тела, а оси y и z возьмем в плоскости, перпендикулярной к этому направлению под прямым углом друг к другу. Обозначим через u, v, w составляющие скорости абсолютного движения газа вдоль выбранных осей и через p и ρ — давление и плотность газа. Если скорость тела постоянна и равна V , то движение газа в выбранной системе координат будет установившимся и основные уравнения, описывающие это движение, можно взять в следующем виде (в уравнениях не учтены массовые силы, так как в задачах обтекания тел сверхзвуковым потоком их влиянием обычно можно пренебречь) [1]:

уравнения движения

$$\left. \begin{aligned} (V+u) \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ (V+u) \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ (V+u) \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho (V+u)}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0, \quad (1.2)$$

условие сохранения энтропии в частицах газа при их непрерывном движении (S — энтропия единицы массы)

$$(V+u) \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} + w \frac{\partial S}{\partial z} = 0. \quad (1.3)$$

В случае совершенного газа с постоянными удельными теплоемкостями энтропия связана с давлением и плотностью соотношением

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{const } e^{S/c_v}, \quad (1.4)$$

где c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме, γ — отношение теплоемкостей при постоянном давлении и при постоянном объеме.

Уравнения (1.1) — (1.4) служат для определения непрерывного течения газа в каждой из областей, отделенных поверхностями сильного разрыва. При этом производные гидродинамических величин внутри этих областей могут испытывать разрывы на характеристических поверхностях, обладающих в установившемся потоке тем свойством, что составляющая скорости частиц газа по нормали к ним либо равна нулю (поверхности тока), либо равна скорости звука (волны Маха).

На поверхностях сильного разрыва значения параметров газа должны быть связаны следующими условиями, вытекающими из законов сохранения массы, импульса и энергии:

$$\left. \begin{aligned} \rho_1(D - v_{1n}) &= \rho_2(D - v_{2n}), \\ \rho_1(D - v_{1n})\bar{v}_1 - p_1\bar{n} &= \rho_2(D - v_{2n})\bar{v}_2 - p_2\bar{n}, \\ \rho_1(D - v_{1n})\left(\frac{v_1^2}{2} + e_1\right) - p_1v_{1n} &= \rho_2(D - v_{2n})\left(\frac{v_2^2}{2} + e_2\right) - p_2v_{2n}. \end{aligned} \right\} (1.5)$$

Здесь D — скорость распространения поверхности разрыва в пространстве: $D = -V \cos(n, x)$, где (n, x) — угол между нормалью n к элементу поверхности разрыва и осью x , \bar{v} — скорость частиц газа, v_n — проекция скорости на нормаль \bar{n} , e — внутренняя энергия единицы массы газа, индексы 1 и 2 относятся соответственно к состояниям перед поверхностью разрыва и за ней.

Если поток массы сквозь поверхность разрыва равен нулю, то условия (1.5) принимают более простой вид,

$$\left. \begin{aligned} v_{1n} - D &= 0, & v_{2n} - D &= 0, \\ p_2 &= p_1. \end{aligned} \right\} (1.6)$$

и поверхность разрыва называется тангенциальной или контактной.

При отличном от нуля потоке массы сквозь поверхность разрыва давление газа испытывает скачок на этой поверхности. Плотность газа также изменяется, причем изменение давления и плотности сопровождается изменением энтропии газа. На основании второго начала термодинамики при адиабатическом переходе газа через поверхность разрыва энтропия газа может только увеличиться. Отсюда, как известно, следует *), что давление и плотность газа при прохождении через поверхность сильного разрыва возрастают, в связи с чем такие поверхности называются скачками уплотнения.

На поверхности тела нужно удовлетворить условию равенства нормальных составляющих скорости движения частиц газа и скорости точек поверхности тела, т. е. условию

$$v_{1n} = -V \cos(n_T, x), \quad (1.7)$$

где (n_T, x) — угол между нормалью к элементу поверхности тела и направлением оси x .

Наконец, в бесконечности впереди тела параметры газа должны принимать заданные значения:

$$u = v = w = 0, \quad p = p_1, \quad \rho = \rho_1. \quad (1.8)$$

Таким образом, задача об обтекании тела при движении его с постоянной сверхзвуковой скоростью в идеальном газе сводится

*) О средах, для которых возможны исключения, см., например, [2].

к определению решения уравнений (1.1) — (1.4), непрерывных в каждой из областей, отделенных поверхностями сильного разрыва и удовлетворяющих на скачках уплотнения соотношениям (1.5), на поверхностях тангенциального разрыва — соотношениям (1.6), на поверхности тела — условию (1.7) и в бесконечности перед телом — условиям (1.8).

Отметим, что так как газ не испытывает возмущений вплоть до прохождения по нему головной волны, то условия (1.8) в бесконечности перед телом можно заменить условиями на головной волне, которые согласно (1.5) в этом случае принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 D &= \rho_2 (D - v_{2n}), \\ -p_1 &= \rho_1 D v_{2n} - p_2, \quad \bar{v}_{2\tau} = 0, \\ \rho_1 D e_1 &= \rho_1 D \left(\frac{v_{2n}^2}{2} + e_2 \right) - p_2 v_{2n}. \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

Здесь $\bar{v}_{2\tau}$ — составляющая вектора скорости в плоскости, касательной к головной волне. Для совершенного газа с постоянными теплоемкостями внутренняя энергия газа выражается через давление и плотность формулой $e = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}$ и, разрешая систему соотношений (1.9) относительно v_{2n} , p_2 , ρ_2 ($v_{2n} = |\bar{v}_2|$, так как $\bar{v}_{2\tau} = 0$), получаем:

$$\left. \begin{aligned} |v_2| &= \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) D = \frac{2}{\gamma + 1} D \left(1 - \frac{a_1^2}{D^2} \right), \\ p_2 - p_1 &= \rho_1 D |v_2| = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_1 D^2 \left(1 - \frac{a_1^2}{D^2} \right), \\ \rho_2 &= \frac{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_1}{1 + \frac{2}{\gamma - 1} \frac{a_1^2}{D^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

Здесь $a_1 = (\gamma p_1 / \rho_1)^{1/2}$ — скорость звука в невозмущенном газе.

Вопрос о существовании решения сформулированной математической задачи о движении тела в идеальном газе и о единственности этого решения в общем случае мало изучен. Некоторые относящиеся к нему соображения изложены в следующем параграфе.

§ 2. Дополнительные замечания к постановке задачи о сверхзвуковом обтекании тел

Рассмотрение простейших примеров плоских течений показывает, что попытка описать установившееся сверхзвуковое обтекание тела неограниченным равномерным потоком идеального газа при помощи непрерывного решения дифференциальных уравнений (1.1) — (1.4)

приводит к физически бессмысленному результату: решение становится, по крайней мере на некотором расстоянии от обтекаемого тела, неоднозначным [3]. Решение можно сделать однозначным, если ввести соответствующим образом выбранные поверхности разрыва. Однако при этом не обеспечивается единственность решения, так как поверхности разрыва можно выбирать по-разному; решение же правильно сформулированной математической задачи о физическом явлении должно быть единственным и соответствовать как раз тому явлению, которое осуществляется при данных условиях в действительности. Нельзя при этом в общем случае и удовлетворить на введенных поверхностях условиям непрерывности потоков массы, импульса и энергии.

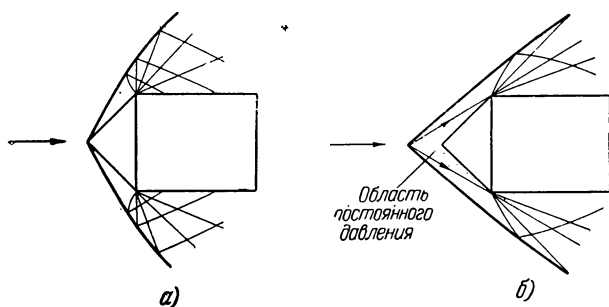


Рис. 1.2. Обтекание сверхзвуковым потоком цилиндра с конической головной частью:

а) нормальное обтекание, б) обтекание с образованием застойной зоны перед телом.

Поэтому, имея в виду то, что при сверхзвуковом обтекании тел идеальным газом непрерывные решения уравнений в общем случае оказываются лишенными физического смысла, естественно при постановке задачи заранее учитывать возможность появления разрывов. При этом, используя основные физические законы сохранения массы, импульса и энергии для составления уравнений движения газа, нужно применять их к конечным объемам, т. е. записывать уравнения в форме интегралов, взятых по произвольной конечной части области, занятой движущимся газом (см., например, [1]). В тех точках области движения, в которых функции, удовлетворяющие этим уравнениям, непрерывны вместе со своими первыми производными, они удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (1.1) — (1.4); на поверхностях разрыва предельные значения этих функций связаны соотношениями (1.5). Разрывные решения уравнений в форме интегралов можно рассматривать как обобщенные в определенном смысле решения дифференциальных уравнений (1.1) — (1.4), и именно этими решениями следует пользоваться в задаче об обтекании тела сверхзвуковым потоком. (Фактически построение обобщенных реше-

ний производится в соответствии с постановкой задачи, данной в предыдущем параграфе; однако возможны методы их непосредственного нахождения, позволяющие избежать пользования соотношениями (1.5) на неизвестных заранее поверхностях разрыва; см. ниже.) Но и при сделанном обобщении решение задачи об установившемся обтекании тела сверхзвуковым потоком не является единственным даже в том случае, если дополнительно потребовать в соответствии со вторым началом термодинамики, чтобы энтропия частиц газа не уменьшалась при прохождении ими поверхностей разрыва. Действительно,

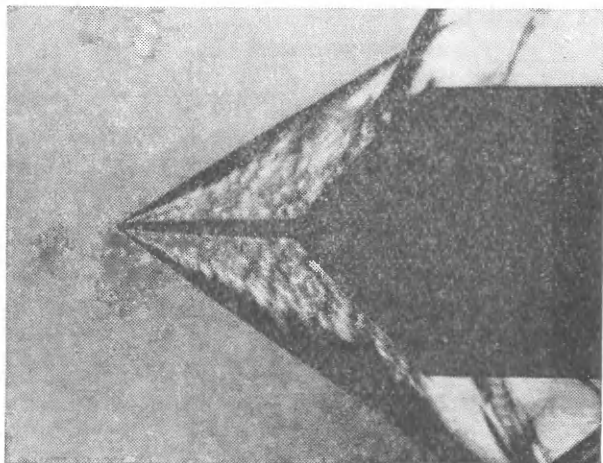


Рис. 1.3. Обтекание сверхзвуковым потоком цилиндра с конической головной частью и выдвинутой вперед иглой.

рассмотрим, например, изображенное на рис. 1.2, *а* симметричное обтекание сверхзвуковым потоком тела вращения в виде цилиндра с конической головной частью; характерной особенностью такого течения является постоянство давления на поверхности конуса.

Но это течение не является единственным. Ясно, что можно представить себе множество других течений вокруг того же тела, которым соответствуют и другие обобщенные решения, когда перед телом образуется коническая область, заполненная неподвижным газом с постоянным давлением, как на рис. 1.2, *б*. То, что такие течения при определенных обстоятельствах могут осуществляться, показывает фотография на рис. 1.3.

Вопрос об условиях, определяющих единственным образом решение задачи об установившемся обтекании тела сверхзвуковым потоком, до настоящего времени не разрешен. Строго говоря, установившееся обтекание тела неограниченным потоком следует рассматривать

как предельное состояние, которое достигается асимптотически из заданного начального состояния при движении тела в покоящемся в бесконечности перед ним газе после того, как скорость тела продолжительное время сохраняется неизменной (см. по этому вопросу [3,4]). Существование таких предельных установившихся состояний не является очевидным*). В тех же случаях, когда такое предельное установившееся течение существует, оно может зависеть,

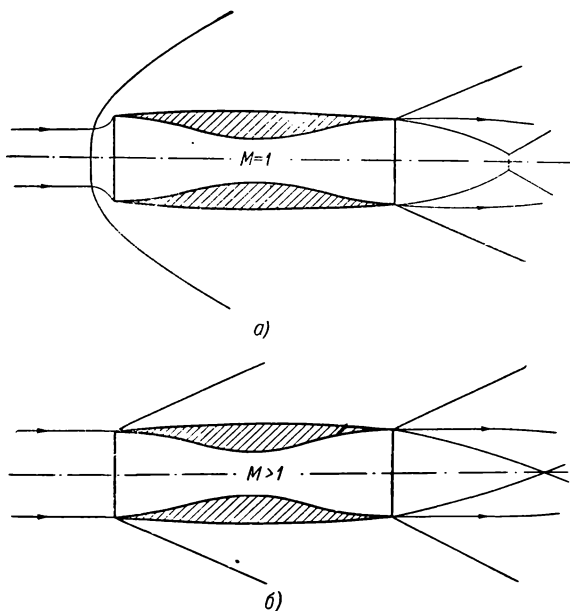


Рис. 1.4. Два возможных типа сверхзвукового обтекания тела с внутренним каналом при одной и той же скорости движения тела:

а) с отошедшей головной волной, б) с присоединенной головной волной.

при одних и тех же условиях в бесконечности перед телом, от способа приближения к предельному состоянию.

Известным примером подобного рода может служить обтекание тела с внутренним каналом, сечение которого от входа к выходу сначала уменьшается, а затем увеличивается (рис. 1.4). В определенном диапазоне сверхзвуковых скоростей возможны два вида установившегося обтекания такого тела: один — с отошедшей ударной вол-

*) По крайней мере опытные данные говорят о том, что при обтекании некоторых тел потоком с постоянной скоростью течение вблизи тела может иметь неустановившийся (иногда регулярный периодический) характер.

ной и областью дозвуковых скоростей между центральной частью волны и наиболее узким местом канала (рис. 1.4, а), и второй — с присоединенной головной волной и всюду сверхзвуковым течением (рис. 1.4, б). Первый вид обтекания осуществляется при приближении к установившемуся режиму со стороны малых значений скорости тела. Второй случай можно осуществить, если предварительно разогнать тело до больших значений скорости, а затем постепенно понижать ее. Это явление можно охарактеризовать как своего рода гистерезис при обтекании тел сверхзвуковым потоком.

Приведенный пример показывает, что в некоторых случаях для выбора решения задачи об установившемся обтекании необходимо рассматривать его как предел неустановившегося течения. Имеются утверждения (см., например, [5]), что такое рассмотрение является и достаточным для обеспечения единственности обобщенного решения задачи об установившемся сверхзвуковом обтекании тела. Справедливость этого утверждения остается не доказанной.

Из физических соображений очевидно, что необходимым условием, которому должно удовлетворять решение задачи об обтекании тела, является устойчивость его по отношению к малым возмущениям. Высказывалась мысль, что это условие может обеспечить и единственность решения.

Однако в тех случаях, когда возможны несколько дискретных режимов установившегося обтекания тела при одной и той же скорости его движения в газе, как в рассмотренном выше примере тела с протоком, этот критерий не является достаточным; устойчивым по отношению к малым возмущениям может быть более чем один режим обтекания. В случае, если возможна непрерывная последовательность течений вокруг одного и того же тела, как в примере тела с конической застойной областью перед ним, критерий устойчивости может выделить одно или несколько решений, обладающих устойчивостью по отношению к малым возмущениям. Очевидно, что в тех случаях, когда обобщенное решение задачи об установившемся обтекании является пределом нестационарных течений при всевозможных способах приближения их к установившемуся состоянию, критерий устойчивости течения автоматически удовлетворяется.

Существует, наконец, мнение, что условием, обеспечивающим единственность обобщенного решения задачи об обтекании тела, является требование того, чтобы обобщенное решение уравнений движения идеального газа было пределом непрерывных решений уравнений движения вязкого газа при стремлении коэффициента вязкости к нулю (теория исчезающей вязкости). Весьма вероятно, что это требование действительно обеспечивает существование и единственность обобщенного решения задачи с начальными данными и предписанным законом движения тела в газе. Единственность решения задачи о стационарном обтекании в общем случае обеспечивается

и при таком подходе, по-видимому, только при рассмотрении ее как предела задачи с начальными данными.

Можно предполагать, что в некоторых случаях никакие другие условия не могут заменить сформулированное условие при выборе решения, соответствующего действительному обтеканию. Картина обтекания некоторых тел и, в частности, конфигурация возникающих при этом в потоке сильных разрывов, существенно связана с наличием начинающихся у поверхности тела тангенциальных разрывов (например, при обтекании тела с выдвинутой иглой; см. рис. 1.3). Разрывы такого типа могут появиться в решении только после предельного перехода в решениях уравнений с учетом вязкости.

То, что обладающее физическим смыслом обобщенное решение уравнений движения идеального газа представляет собой предел непрерывных решений дифференциальных уравнений движения вязкого газа, имеет не только принципиальное значение для отбора нужного решения из всех возможных обобщенных решений. В действительности этот факт может служить основой для создания методов расчета течений идеального газа, не осложненных необходимостью удовлетворять соотношениям (1.5) на неизвестных заранее поверхностях разрыва, что дает определенные преимущества при выполнении расчетов с помощью быстродействующих вычислительных машин.

Дифференциальные уравнения движения идеального газа следует при этом дополнить диссипативными членами с малым параметром при них; наличие диссипативных членов позволяет получить непрерывные решения уравнений при обтекании тела произвольной формы. При этом нет нужды в том, чтобы введенные диссипативные члены описывали действительный механизм вязкости и теплопроводности. Важно, чтобы в пределе при стремлении малого параметра к нулю решения стремились к тому же обобщенному решению, что и при правильном учете вязкости и теплопроводности.

Дополненные таким образом дифференциальные уравнения могут решаться методом конечных разностей. Поверхности сильного разрыва проявятся при таком решении в виде слоев конечной толщины с большими градиентами гидродинамических величин. Изложенный прием искусственного введения диссипативных членов при решении уравнений движения идеального газа методом конечных разностей был предложен Нейманном и Рихтмейером [6]. Лакс [7] и Годунов [8] предложили конечно-разностную схему решения дифференциальных уравнений одномерных неустановившихся движений идеального газа, которая обеспечивает получение обобщенных решений.

Сказанное выше в отношении системы уравнений газовой динамики носит характер физически более или менее оправданных гипотез; строгая теория обобщенных решений*) развита в настоящее

*) Обобщенные решения уравнений гиперболического типа ввел и систематически применял С. Л. Соболев [9].

время лишь для одного — «модельного» — уравнения, имеющего вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(t, x, u)}{\partial x} + \psi(t, x, u) = 0.$$

Изучению обобщенных решений этого уравнения посвящено большое количество работ [7, 10, 11 и др.]. Наиболее полное изложение состояния вопроса и перечень относящихся к нему исследований содержатся в работе О. А. Олейник [12], к которой может обратиться интересующийся читатель.

§ 3. Характерные свойства течений с большой сверхзвуковой скоростью

При большой сверхзвуковой скорости потока кинетическая энергия движущихся частиц газа велика сравнительно с их тепловой энергией. При фиксированных параметрах состояния набегающего на тело потока отношение кинетической и внутренней тепловой энергии газа растет пропорционально квадрату числа M . Для совершенного газа с постоянными теплоемкостями это отношение равно $\frac{\gamma(\gamma-1)}{2} M^2$. При $\gamma = 1,40$ и скорости, в пять раз большей скорости звука, кинетическая энергия частицы в семь раз больше ее внутренней энергии, а при $M = 10$ кинетическая энергия уже почти в 30 раз превосходит тепловую. Это обстоятельство приводит к появлению некоторых свойств установившихся течений с большой сверхзвуковой скоростью, отличающих их от течений с умеренными и малыми скоростями, при которых кинетическая энергия частиц газа имеет одинаковый порядок величины с тепловой энергией или меньше ее. Так, при адиабатическом торможении частицы, движущейся с большой сверхзвуковой скоростью в установившемся потоке, превращение ее кинетической энергии в тепловую вызывает весьма значительное увеличение температуры газа. Ясно также, что небольшие относительные изменения скорости частицы (т. е. ее кинетической энергии) должны приводить в таком движении к большим относительным изменениям теплосодержания, а следовательно, и других термодинамических величин. Действительно, при установившемся адиабатическом движении вдоль линии тока термодинамические параметры газа и его скорость V связаны двумя соотношениями:

$$V dV + \frac{dp}{\rho} = 0,$$

$$dS = 0.$$

Для совершенного газа с постоянными теплоемкостями, используя уравнение состояния $p = R\rho T$ (R — газовая постоянная) и выражения

для энтропии $S = c_v \ln \frac{p}{\rho^\gamma}$ и скорости звука $a = (\gamma p / \rho)^{1/2}$, отсюда легко найти следующие зависимости:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{p} &= \gamma \frac{d\rho}{\rho} = -\gamma M^2 \frac{dV}{V}, \\ \frac{dT}{T} &= 2 \frac{da}{a} = -(\gamma - 1) M^2 \frac{dV}{V}, \\ \frac{dM}{M} &= -\left(1 + \frac{2}{(\gamma - 1) M^2}\right) \frac{da}{a} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right) \frac{dV}{V}, \end{aligned} \right\} (1.11)$$

из которых и вытекает, что при $M \gg 1$ малые относительные возмущения скорости связаны с значительными относительными возмущениями давления, плотности, температуры, а также скорости звука. Число M при большой сверхзвуковой скорости изменяется в основном вследствие изменения скорости звука. Эти выводы противоположны тем, которые могут быть сделаны в случае малых дозвуковых скоростей (т. е. при $M \ll 1$), когда нужно рассматривать лишь изменения скорости, относительные же изменения термодинамических величин весьма малы и изменение числа M происходит главным образом вследствие изменения скорости.

Пренебрегая в сумме $1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$ единицей по сравнению со вторым членом, из выражений (1.11) после их интегрирования найдем соотношения, справедливые при $M \gg 1$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{p}{p_1} &= \left(\frac{M_1}{M}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}, \quad \frac{\rho}{\rho_1} = \left(\frac{M_1}{M}\right)^{\frac{2}{\gamma-1}}, \quad \frac{T}{T_1} = \left(\frac{M_1}{M}\right)^2, \\ \frac{a}{a_1} &= \frac{M_1}{M}, \quad \frac{V}{V_1} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{1}{M_1^2} - \frac{1}{M^2}\right). \end{aligned} \right\} (1.12)$$

Здесь индексом 1 обозначены величины, относящиеся к некоторому характерному состоянию газа.

Все сказанное выше о связях между относительными изменениями параметров газа при установившемся обтекании тел потоком с большой сверхзвуковой скоростью относится только к той части течения, где *местные* значения числа M велики. Вблизи тела могут быть области с умеренной сверхзвуковой скоростью, а за отсоединенной головной волной, например, всегда есть область, где местные значения числа M даже меньше единицы. В таких областях течения сделанные выводы, естественно, не применимы.

Для обнаружения дальнейших характерных свойств течений с большой сверхзвуковой скоростью рассмотрим обтекание плоским потоком пластины, расположенной под углом атаки α к набегающему потоку (рис. 1.5). Если угол атаки не превосходит некоторой предельной величины, то при достаточно больших значениях числа M

набегающего потока с одной стороны пластины от ее передней кромки будет отходить волна разрежения, а с другой стороны — скачок уплотнения [1]. Головная волна, отделяющая область возмущенного движения от набегающего поступательного потока, является в этом случае присоединенной и состоит из поверхности слабого разрыва в одной полуплоскости и скачка уплотнения — в другой. Подобное же течение будет осуществляться и при обтекании головной части профиля треугольного сечения, если угол атаки профиля достаточно велик.

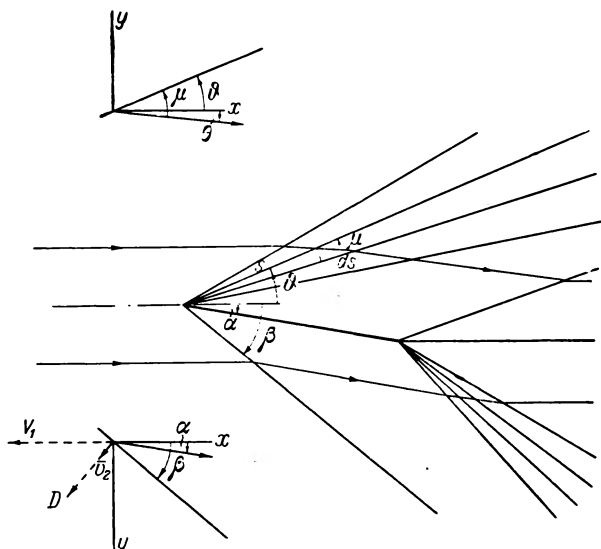


Рис. 1.5. Обтекание сверхзвуковым потоком пластины под углом атаки.

Обратимся сначала к течению разрежения. Это течение представляет собой систему плоских звуковых волн, вдоль которых значения параметров потока сохраняются постоянными.

В системе координат, связанной с пластиной, каждая такая звуковая волна остается неподвижной, так как скорость ее распространения по частицам точно уравнивается движением частиц газа (нормальная к волне составляющая скорости частиц равна по величине и обратна по направлению скорости распространения волны). Угол μ между направлением скорости относительного движения частиц газа и фронтом волны выражается, следовательно, формулой

$$\sin \mu = \frac{a}{V}.$$

Если через θ обозначить угол между направлением скорости в данной точке и направлением невозмущенного потока, а через ϑ — угол

фронта волны с последним направлением, то очевидно, что *)

$$\vartheta = \mu + \theta. \quad (1.13)$$

Условие изэнтропичности течения и интеграл Бернулли позволяют выразить давление, плотность, скорость потока, местную скорость звука, число M и угол μ через любую одну из этих величин (см. формулы (1.11)). Для нахождения их зависимости от координат можно воспользоваться, например, условием сохранения массы.

Условие сохранения массы в элементарном объеме между двумя поверхностями тока и соседними звуковыми волнами (рис. 1.5) можно записать в виде

$$\frac{d}{d\vartheta} \rho a s = 0.$$

Так как $\frac{ds}{sd\vartheta} = -\operatorname{ctg} \mu$, то отсюда находим

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{da}{a} - \operatorname{ctg} \mu d\vartheta = 0.$$

В случае совершенного газа с постоянными теплоемкостями это уравнение после замены в нем согласно формулам (1.11) величин

$\frac{d\rho}{\rho}$ и $\frac{da}{a}$ через $-\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-1} M dM$ и $-\frac{\gamma-1}{2} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-1} M dM$

и величины $\operatorname{ctg} \mu$ через $(M^2 - 1)^{1/2}$ устанавливает в дифференциальной форме следующую связь между числом M и угловой координатой ϑ в плоскости течения:

$$d\vartheta = -\frac{\gamma+1}{2} \frac{M dM}{\sqrt{M^2-1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)}.$$

Отсюда, выполняя квадратуру и используя формулу (1.13), найдем

$$\theta = -\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \operatorname{ctg} \mu \right) - \mu + \operatorname{const}. \quad (1.14)$$

При большой сверхзвуковой скорости $\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{2}{\gamma-1} \frac{dM}{M}$, $\frac{da}{a} = -\frac{dM}{M}$, $\operatorname{ctg} \mu = M$, так что дифференциальная связь между M и ϑ приобретает простой вид:

$$-\frac{dM}{M^2} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} d\vartheta.$$

Формула (1.13) при большой сверхзвуковой скорости также упрощается:

$$\vartheta = \theta + \frac{1}{M}.$$

*) Углы θ и ϑ считаются положительными, если они откладываются против часовой стрелки.

После интегрирования предыдущего дифференциального соотношения и использования условия: $M = M_1$ при $\theta = 0$, т. е. при $\vartheta = \frac{1}{M_1}$ (M_1 — число Маха набегающего потока), находим:

$$\frac{M_1}{M} = \frac{2}{\gamma+1} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} M_1 \vartheta = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1 \vartheta. \quad (1.15)$$

Значения других параметров движущегося газа определяются при этом формулами (1.12). В частности, для связи между величиной давления и углом θ , характеризующим направление скорости, получаем

$$\frac{p}{p_1} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1 \theta\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}.$$

При угле поворота, равном $-\frac{2}{(\gamma-1)M_1}$, давление в волне разрежения падает до нуля. Поэтому в случае, если угол атаки пластины превышает $\frac{2}{(\gamma-1)M_1}$, поток отрывается от передней кромки и между ним и поверхностью пластины возникает область вакуума.

Для величины коэффициента давления $c_p = \frac{p-p_1}{\frac{1}{2} \rho_1 V_1^2} = \frac{2}{\gamma M_1^2} \left(\frac{p}{p_1} - 1\right)$

получаем выражение

$$c_p = \frac{2}{\gamma M_1^2} \left[\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1 \theta\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right]. \quad (1.16)$$

Отметим важную особенность рассматриваемого течения. Соотношения $\vartheta = \theta + \frac{1}{M}$ и (1.15) могут быть преобразованы к следующему виду:

$$\bar{\vartheta} = \frac{1}{K} + \frac{\gamma+1}{2} \bar{\theta}, \quad \frac{M_1}{M} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} K \bar{\theta},$$

где $K = M_1 \alpha$, $\bar{\vartheta} = \frac{\vartheta}{\alpha}$, $\bar{\theta} = \frac{\theta}{\alpha}$. Из этих соотношений и из формул (1.12) следует, что если изменять число M_1 и угол атаки α таким образом, чтобы параметр K оставался постоянным, то значения безразмерных величин $\frac{p}{p_1}$, $\frac{\rho}{\rho_1}$, $\frac{M}{M_1}$ в соответственных точках сохраняются, а значение коэффициента давления $c_p = \frac{p-p_1}{\frac{1}{2} \rho_1 V_1^2}$ меняется пропорционально α^2 .

Этот вывод является частным случаем общего закона подобия для течений с большой сверхзвуковой скоростью при малых возмущениях скорости, который будет подробно рассмотрен в гл. II. Установление подобия течений опирается на то, что в области, занятой

газом, углы θ и μ , а следовательно, и угол ϑ , малы, хотя угол атаки может и не быть малым. В последнем случае, как уже говорилось, между пластиной и областью, занятой газом, образуется вакуум и течение разрежения перестает зависеть от угла атаки; при этом в выражениях для K , $\bar{\vartheta}$ и $\bar{\theta}$ под углом α нужно понимать максимальный угол отклонения потока, равный $\frac{2}{(\gamma-1)M_1}$.

Перейдем теперь к рассмотрению течения за присоединенным скачком уплотнения. За скачком газ движется поступательно и параметры его в абсолютном движении определяются формулами (1.10). При использовании этих формул, учитывая плоский характер течения, следует положить

$$D = V_1 \sin \beta, \quad u = -|\bar{v}_2| \sin \beta, \quad v = |\bar{v}_2| \cos \beta, \quad w = 0,$$

где β — угол наклона скачка к направлению набегающего потока (эти соотношения иллюстрированы на рис. 1.5 внизу пунктиром). В результате получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{V_1} &= -\frac{2}{\gamma+1} \left(\sin^2 \beta - \frac{1}{M_1^2} \right), \\ \frac{v}{V_1} &= \frac{2}{\gamma+1} \operatorname{ctg} \beta \left(\sin^2 \beta - \frac{1}{M_1^2} \right), \\ w &= 0, \\ \frac{p-p_1}{\rho_1 V_1^2} &= \frac{2}{\gamma+1} \left(\sin^2 \beta - \frac{1}{M_1^2} \right), \\ \frac{\rho}{\rho_1} &= \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}{1 + \frac{2}{\gamma-1} \frac{1}{M_1^2 \sin^2 \beta}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

Зависимость между углом атаки α и углом скачка β легко определить из условия $\frac{v}{V_1+u} = \operatorname{tg} \alpha$, выражающего то, что за скачком относительная скорость параллельна поверхности пластины:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{2}{\gamma+1} \operatorname{ctg} \beta \left(\sin^2 \beta - \frac{1}{M_1^2} \right)}{1 - \frac{2}{\gamma+1} \left(\sin^2 \beta - \frac{1}{M_1^2} \right)}. \quad (1.18)$$

Как известно [1], из этого соотношения следует, что при углах α , меньших предельного значения (зависящего от числа M_1 и от γ), каждому углу α соответствуют два значения угла β , причем, если пластина конечных размеров помещена в неограниченный поток

газа, то реализуется скачок уплотнения с меньшим углом β . При $M_1 \gg 1$ этот меньший угол β мало отличается от угла α : между пластиной и скачком образуется тонкий слой уплотненного газа. На рис. 1.6, а для примера приведена картина обтекания пластины при $M_1 = 10$ и $\gamma = 1.4$.

При очень больших сверхзвуковых скоростях и при фиксированном угле атаки α , сколь бы мал он ни был, можно пренебречь членами порядка $\frac{1}{M_1^2}$ по сравнению с $\sin^2 \beta$, так как всегда $\beta > \alpha$.

После этого соотношения (1.17) и (1.18), определяющие значения параметров потока за скачком и положение скачка, примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{V_1} &= -\frac{2}{\gamma+1} \sin^2 \beta, \\ \frac{v}{V_1} &= \frac{2}{\gamma+1} \sin \beta \cos \beta, \\ \frac{p-p_1}{\rho_1 V_1^2} &= \frac{2}{\gamma+1} \sin^2 \beta, \\ \frac{p}{\rho_1} &= \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\frac{2}{\gamma+1} \sin \beta \cos \beta}{1 - \frac{2}{\gamma+1} \sin^2 \beta}. \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

Отсюда следует, что при обтекании вогнутого угла с очень большой сверхзвуковой скоростью безразмерные составляющие скорости газа за скачком $\frac{u}{V_1}$ и $\frac{v}{V_1}$, безразмерная плотность $\frac{p}{\rho_1}$, коэффициент давления $c_p = \frac{p-p_1}{\frac{1}{2} \rho_1 V_1^2}$ и угол наклона скачка β не зависят от числа M_1 ,

а. безразмерные давление и температура $\frac{p}{\rho_1}$ и $\frac{T}{T_1}$ меняются пропорционально M_1^2 . Это свойство является частным случаем общего свойства течений газа за интенсивной головной ударной волной при очень больших сверхзвуковых скоростях, рассматриваемого в следующем параграфе настоящей главы.

Рассмотренная картина обтекания пластины с большой сверхзвуковой скоростью близко напоминает картину обтекания, рассматривавшуюся Ньютоном (см. ниже, гл. III), согласно которой только те частицы газа подвергаются воздействию со стороны тела, которые сталкиваются с обращенной в сторону набегающего потока стороной тела. Теряя нормальную к поверхности тела составляющую количества движения, частицы скользят затем вдоль его поверхности,

сохраняя касательную составляющую количества движения. Действие частиц на часть поверхности тела, обращенную от потока (лежащую в «аэродинамической тени» тела), отсутствует; давление на нее равно нулю (рис. 1. 6, б).

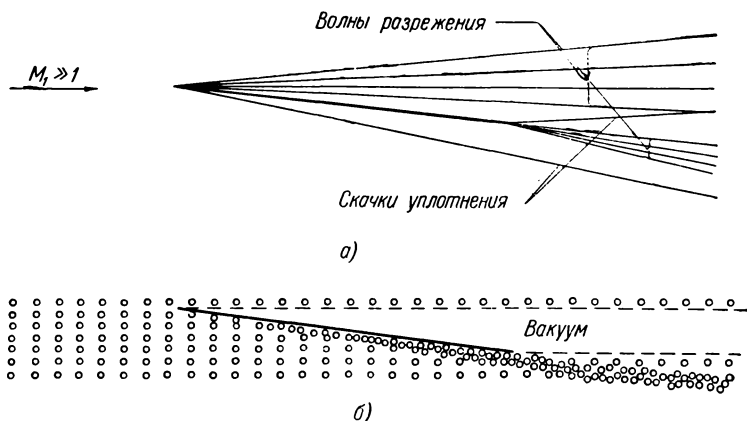


Рис. 1.6. Обтекание пластины под углом атаки при большой сверхзвуковой скорости:

а) обтекание газом, б) обтекание потоком не взаимодействующих между собой частиц (модель Ньютона).

Предположим теперь, что угол атаки пластины α мал. Тогда при больших числах M_1 угол β будет также малым. Заменяя в формулах (1.17) и (1.18) синус его аргументом, а косинус единицей, преобразуем эти формулы к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{V_1 a^2} &= -\frac{2}{\gamma+1} \frac{K_c^2 - 1}{K^2}, \\ \frac{v}{V_1 a} &= 1, \\ \frac{p}{p_1} &= 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (K_c^2 - 1), \\ \frac{\rho}{\rho_1} &= \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}{1 + \frac{2}{\gamma-1} \frac{1}{K_c^2}}, \\ K_c &= \frac{\gamma+1}{4} K + \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4} K\right)^2 + 1}, \end{aligned} \right\} (1.20)$$

где по-прежнему $K = M_1 \alpha$, а $K_c = M_1 \beta$. Полученные формулы показывают, что при обтекании вогнутого угла течения остаются подобными при сохранении параметра $K = M_1 \alpha$ и при изменении числа M_1 , т. е. так же, как и в случае течения разрежения, при

сохранении параметра K величины $\frac{P}{\rho_1}$, $\frac{\rho}{\rho_1}$ остаются неизменными, все угловые величины (угол наклона скачка, угол наклона линий тока) меняются пропорционально углу α , а коэффициент давления меняется пропорционально α^2 :

$$c_p = \frac{4}{\gamma + 1} \frac{1}{M_1^2} (K_c^2 - 1) = \frac{4}{\gamma + 1} \frac{K_c^2 - 1}{K^2} \alpha^2. \quad (1.21)$$

Следовательно, и здесь мы получили частный пример общего закона подобия, о котором упоминалось выше.

Имея формулы для расчета течения с обеих сторон плоской пластины, обтекаемой под малым углом атаки потоком с большой сверхзвуковой скоростью, используем их для определения аэродинамических характеристик пластины [13].

В принятом приближении коэффициент сопротивления c_x и коэффициент подъемной силы c_y пластины равны, соответственно,

$$c_x = \frac{P_n - P_v}{\frac{1}{2} \rho V^2} \alpha = (c_{p_n} - c_{p_v}) \alpha,$$

$$c_y = \frac{P_n - P_v}{\frac{1}{2} \rho V^2} = c_{p_n} - c_{p_v} = \frac{c_x}{\alpha},$$

где индексами n и v обозначены величины на нижней и на верхней сторонах пластины. Подставив вместо c_{p_n} и c_{p_v} их значения согласно формулам (1.16) и (1.21), находим

$$c_y = \frac{c_x}{\alpha} = \left\{ \frac{\gamma + 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^2 + \frac{4}{K^2}} + \frac{2}{\gamma K^2} \left[1 - \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} K\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}} \right] \right\} \alpha^2. \quad (1.22)$$

Если $\frac{\gamma - 1}{2} K \geq 1$, то величину в квадратных скобках следует полагать равной единице. Давление на верхней поверхности пластины равно при этом нулю.

Значения c_y в зависимости от угла атаки пластины α , вычисленные согласно выражению (1.22) при $\gamma = 1,4$ для нескольких значений числа M_1 , приведены сплошными линиями на рис. 1.7. При

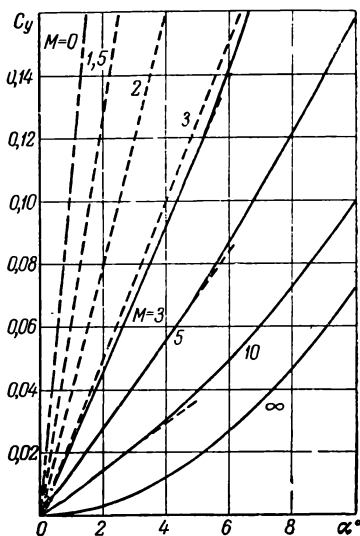


Рис. 1.7. Коэффициент подъемной силы пластины.

конечных значениях числа M зависимость c_y от α при малых значениях α близка к линейной. С увеличением α эта зависимость переходит в квадратичную, причем при возрастании числа M линейный участок зависимости c_y от α уменьшается и при $M = \infty$ исчезает совсем. Формула (1.22) при $M = \infty$ приобретает вид

$$c_y = (\gamma + 1) \alpha^2.$$

Пунктиром на рис. 1.7 нанесены значения c_y пластины при сверхзвуковых скоростях, полученные согласно линейной теории [1]

$$c_y = \frac{4\alpha}{\sqrt{M^2 - 1}};$$

там же штрих-пунктирной линией обозначены c_y пластины, обтекаемой потоком несжимаемой жидкости (т. е. при $M = 0$),

$$c_y = 2\pi\alpha.$$

Рисунок 1.7 показывает, что при больших значениях числа M и больших углах атаки линейная теория преуменьшает значения коэффициента подъемной силы и становится непригодной для использования.

Важно подчеркнуть, что коэффициент подъемной силы пластины резко уменьшается с ростом числа M , приобретая при больших сверхзвуковых скоростях весьма низкие значения.

Отметим еще одно замечательное свойство обтекания пластины потоком с большой сверхзвуковой скоростью при малых значениях угла атаки α . Первые два выражения (1.20) показывают, что в этом случае составляющая абсолютной скорости частиц в направлении движения пластины остается в области возмущенного движения за скачком уплотнения под пластиной малой величиной высшего порядка по сравнению с поперечной составляющей скорости. Это же справедливо и для течения разрежения над пластиной. Действительно, подставив в соотношения

$$V_1 + u = V \cos \theta, \quad v = V \sin \theta$$

значение V в соответствии с выражением (1.12), используя связь (1.15) между M и θ в течении разрежения и считая $\sin \theta = \theta$, $\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$, после несложных выкладок получаем

$$\frac{u}{V_1^2} = -\frac{\bar{\theta}}{K} - \frac{\gamma + 1}{4} \bar{\theta}^2, \quad \frac{v}{V_1^2} = \bar{\theta} \quad (|\bar{\theta}| \leq 1).$$

Таким образом, пролетая в неподвижном воздухе, тонкое тело (в нашем случае — пластина под малым углом атаки) «расталкивает» частицы воздуха в направлении, перпендикулярном к направлению полета, не вызывая их смещения в направлении полета. Обнаруженное свойство является частным примером так называемого закона плоских

сечений, рассматриваемого ниже в гл. II. Величину относительной скорости во всей возмущенной области с точностью до малых величин второго порядка относительно α можно считать, следовательно, постоянной и равной скорости набегающего потока.

Найдем в заключение нужное для дальнейшего (см. гл. IV, § 2) значение числа M в потоке за скачком уплотнения. Пользуясь формулами (1.20), получаем

$$M^2 = M_1^2 \frac{V^2}{V_1^2} \frac{p_1}{p} \frac{\rho}{\rho_1} = \frac{M_1^2}{\left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} K_c^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right) \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{K_c^2}\right)}. \quad (1.23)$$

При росте интенсивности скачка уплотнения величина K_c изменяется от единицы до бесконечности. Поэтому при умеренной интенсивности скачка число M за скачком имеет тот же порядок величины, что и число M в набегающем потоке; при очень большой интенсивности скачка, когда $K_c \rightarrow \infty$, находим, что

$$M \rightarrow \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{2}{\gamma(\gamma-1)}}, \quad M \rightarrow \frac{1}{\alpha}$$

т. е. и в этом случае при малых углах α число M за скачком будет большим.

§ 4. Закон подобия при обтекании тел фиксированной формы с очень большой сверхзвуковой скоростью

В настоящем параграфе показано, что при обтекании газом тела фиксированной формы течение вблизи тела стремится к некоторому предельному состоянию, когда $M \rightarrow \infty$. Это предельное состояние мы будем называть течением с очень большой сверхзвуковой скоростью*). Подобно тому как совокупность течений вокруг данного тела замыкается со стороны малых значений чисел M_1 предельным течением несжимаемой жидкости, так предельное течение с большой сверхзвуковой скоростью замыкает эту совокупность со стороны больших чисел M_1 . Практическое значение теоретического изучения течений с очень большой сверхзвуковой скоростью состоит не только в определении аэродинамических характеристик тел при весьма больших скоростях полета, которые могут достигаться лишь в сравнительно редких случаях, но и в том, что их изучение позволяет установить асимптотическое поведение течений при неограниченном увеличении скорости потока и тем самым облегчает в некоторых

*) В работе [14] предельное состояние течения при $M_1 \rightarrow \infty$ названо гиперзвуковым течением. Однако обычно в зарубежной литературе гиперзвуковыми называются течения, возникающие при движении тонких, заостренных впереди тел с большой сверхзвуковой скоростью, когда становится необходимым учет нелинейных эффектов (см. гл. II).

случаях предсказание свойств течений при умеренных сверхзвуковых скоростях.

В действительности предельное состояние достигается в случае обтекания некоторых тел при сравнительно умеренных значениях числа M_1 . Точные решения задач об обтекании сверхзвуковым потоком клина и конуса, а также экспериментальные данные об обтекании этих и других тел показывают, что их коэффициенты сопротивления практически перестают изменяться уже при числах M_1 порядка 3—4.

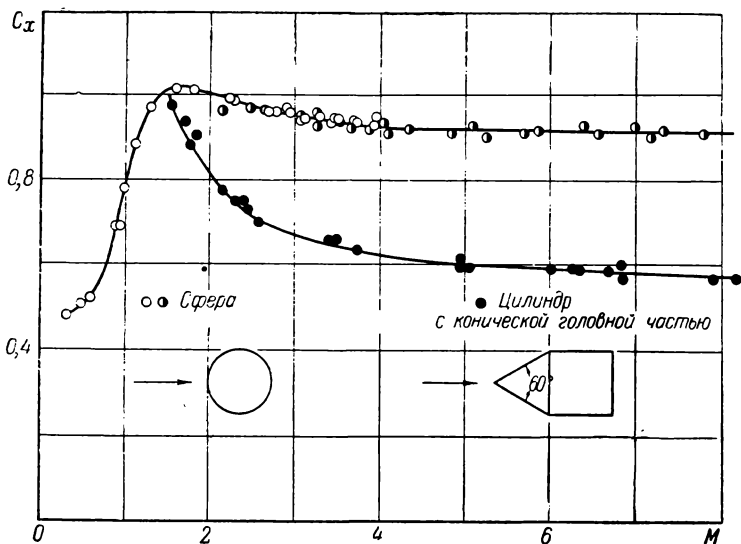


Рис. 1.8. Коэффициенты сопротивления сферы и цилиндра с конической головной частью:

○ — по работе [15], ● — по работе [16], ● — по работе [17].

Остается неизменной и картина течения вблизи тела. На рис. 1.8 приведены для примера экспериментальные значения коэффициентов сопротивления сферы и цилиндра с конической головной частью, полученные при баллистических испытаниях [15—17].

Доказательство наличия предельного состояния движения вблизи тела при $M \rightarrow \infty$ было дано С. В. Валландером в 1949 г. и позже в работе [14]. Следуя в основном первой из этих работ, перепишем все соотношения § 1 настоящей главы, определяющие движение, в безразмерной форме, полагая

$$\begin{aligned} x &= Lx', & y &= Ly', & z &= Lz', \\ u &= V_1 u', & v &= V_1 v', & w &= V_1 w', \\ p &= \rho_1 V_1^2 p', & \rho &= \rho_1 \rho', & a &= V_1 a', & D &= V_1 D', \\ \frac{S}{c_v} &= S' + \ln \gamma M_1^2, \end{aligned}$$

где L — характерный размер тела, а штрихами обозначены безразмерные величины.

Уравнения (1.1)—(1.4) после перехода к новым переменным принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} (1+u') \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} + w' \frac{\partial u'}{\partial z'} &= -\frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial x'}, \\ (1+u') \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} + w' \frac{\partial v'}{\partial z'} &= -\frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial y'}, \\ (1+u') \frac{\partial w'}{\partial x'} + v' \frac{\partial w'}{\partial y'} + w' \frac{\partial w'}{\partial z'} &= -\frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial z'}, \\ \frac{\partial \rho' (1+u')}{\partial x'} + \frac{\partial \rho' v'}{\partial y'} + \frac{\partial \rho' w'}{\partial z'} &= 0, \\ (1+u') \frac{\partial S'}{\partial x'} + v' \frac{\partial S'}{\partial y'} + w' \frac{\partial S'}{\partial z'} &= 0, \\ \frac{p'}{\rho' \gamma} &= e^{S'}. \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

Граничные условия (1.5) на поверхностях разрывов и (1.7) на поверхности обтекаемого тела для случая совершенного газа с постоянными теплоемкостями преобразуются в новых переменных следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \rho'_1 (D' - v'_{1n}) &= \rho'_2 (D' - v'_{2n}), \\ \rho'_1 (D' - v'_{1n}) \bar{v}'_1 - p'_1 \bar{n} &= \rho'_2 (D' - v'_{2n}) \bar{v}'_2 - p'_2 \bar{n}, \\ \rho'_1 (D' - v'_{1n}) \left(\frac{\bar{v}'_1{}^2}{2} + \frac{1}{\gamma-1} \frac{p'_1}{\rho'_1} \right) - p'_1 v'_{1n} &= \\ &= \rho'_2 (D' - v'_{2n}) \left(\frac{\bar{v}'_2{}^2}{2} + \frac{1}{\gamma-1} \frac{p'_2}{\rho'_2} \right) - p'_2 v'_{2n} \end{aligned} \right\} \quad (1.25)$$

и

$$v'_{1n} = -\cos(n_T, x'). \quad (1.26)$$

Соотношения (1.10) на головной ударной волне, которые служат крайними условиями для системы уравнений (1.24), примут вид

$$\left. \begin{aligned} |\bar{v}'_2| &= \frac{2}{\gamma+1} D' \left(1 - \frac{1}{M_1^2 D'^2} \right), \\ p'_2 &= \frac{2}{\gamma+1} D'^2 \left(1 - \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{1}{M_1^2 D'^2} \right), \\ \rho'_2 &= \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}{1 + \frac{2}{\gamma-1} \frac{1}{M_1^2 D'^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.27)$$

В новых переменных задача об обтекании тела сверхзвуковым потоком приведена к задаче интегрирования систем уравнений (1.24) при условиях (1.26), (1.27) и (1.25), заданных на поверхности тела, на головной ударной волне и на поверхностях сильного разрыва, расположенных внутри возмущенной области.

При фиксированной форме тела формулировка задачи содержит два безразмерных параметра γ и M_1 . В общем случае оба эти параметра являются существенными.

Для дальнейшего важно отметить, что в силу сверхзвукового характера потока форма ударной волны на некотором удалении от тела не влияет на течение вблизи головной части тела.

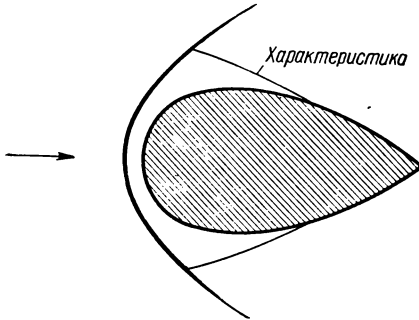


Рис. 1.9. Влияние головной волны на течение вблизи тела.

Поток вблизи тела находится под влиянием лишь ограниченной, наиболее интенсивной части головной ударной волны (рис. 1.9). На этой части головной волны углы между ее поверхностью и направлением набегающего потока не обращаются в нуль ни при каких значениях числа M_1 , так как даже при $M_1 = \infty$ ударная волна вырождается в поверхность слабого разрыва — звуковую волну — лишь в бесконечности. Поэтому при $M_1 \rightarrow \infty$ всегда будет достигаться такое состояние течения, при котором на выделенном участке головной ударной волны $M_1^2 D'^2 = M_1^2 \cos^2(n_c, x') \gg 1$.

Уточняя данное в начале настоящего параграфа определение, именно это предельное состояние будем называть течением с очень большой сверхзвуковой скоростью.

Пренебрегая для таких течений величинами порядка $\frac{1}{M_1^2 D'^2}$ по сравнению с единицей в соотношениях (1.27) на головной ударной волне, преобразуем их к виду

$$\left. \begin{aligned} |\bar{v}'_2| &= \frac{2}{\gamma+1} D', \\ p'_2 &= \frac{2}{\gamma+1} D'^2, \\ \rho'_2 &= \frac{\gamma+1}{\gamma-1}. \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

На рисунке 1.10 приведены отношения точных и приближенных значений $|\bar{v}'_2|$ (функция f_1), p'_2 (функция f_2) и ρ'_2 (функция f_3) в зависимости от отношения давлений на скачке (при $\gamma = 1.4$).

При использовании вместо краевых условий (1.27) упрощенных условий (1.28) система соотношений, определяющих обтекание тела, не содержит числа M_1 . Следовательно, при обтекании тела фиксированной формы потоком с очень большой сверхзвуковой скоростью распределения величин $\frac{u}{V_1}$, $\frac{v}{V_1}$, $\frac{w}{V_1}$, $\frac{p}{\rho_1 V_1^2}$, $\frac{p}{\rho_1}$, $S - c_v \ln \gamma M_1^2$ не зависят от числа M_1 ; форма образующихся в потоке скачков уплотнения, тангенциальных разрывов, поверхностей тока, характеристических

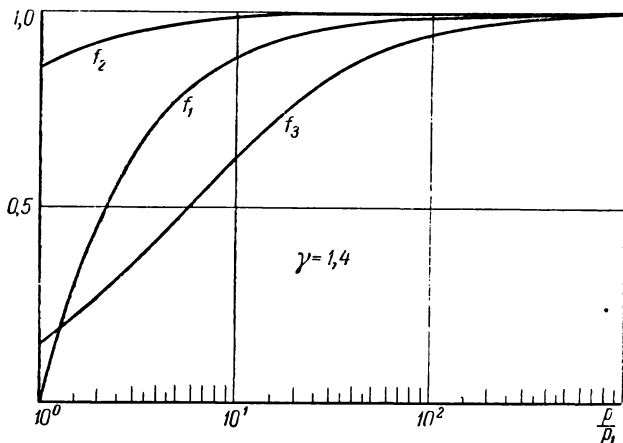


Рис. 1.10. Отношение точных и приближенных значений параметров газа за скачком в зависимости от отношения давлений в скачке.

поверхностей (в области, где скорость больше скорости звука), очевидно, также сохраняется при изменении числа M_1 .

Изложенный выше результат можно сформулировать в виде следующего закона подобия: *при обтекании геометрически подобных тел потоком газа с одним и тем же значением γ при очень большой сверхзвуковой скорости течения с разными значениями ρ_1 , ρ_1 и V_1 подобны между собой*, т. е. в таких течениях отношения составляющих скорости u , v , w к величине скорости набегающего потока V_1 и отношение плотности к плотности набегающего потока имеют в соответственных точках одинаковые значения, отношения давления и температуры к их значениям в набегающем потоке меняются в соответственных точках пропорционально величине M_1^2 , а приращение энтропии в соответственных точках отличаются между собой на разность значений $c_v \ln \gamma M_1^2$.

Напомним еще раз, что полученный вывод относится не ко всей области, занятой движущимся газом, а лишь к той ее части, на которую оказывает влияние наиболее интенсивная часть ударной

волны. На больших расстояниях от головной части тела, а также вблизи нее в том случае, когда часть головной волны представляет собой поверхность слабого разрыва, течение продолжает зависеть от числа M_1 при сколь угодно больших его значениях.

Отметим, однако, что при очень больших сверхзвуковых скоростях давление на передней части обтекаемых тел за ударной волной во много раз превосходит давление в невозмущенном потоке, давление же на остальной части тела равно по порядку величины давлению набегающего потока или ниже его.

Поэтому при определении суммарных аэродинамических сил и их моментов при очень большой сверхзвуковой скорости можно без значительных погрешностей использовать сформулированный выше закон подобия.

Так как согласно этому закону местные значения коэффициента давления на поверхности тела не изменяются при изменении числа M , то коэффициенты суммарных аэродинамических сил и моментов, действующих на тело, при очень больших сверхзвуковых скоростях не зависят от числа M (подобно случаю обтекания тел с малой дозвуковой скоростью, когда сжимаемостью газа можно пренебрегать). Иллюстрацией этого вывода могут служить данные о коэффициентах сопротивления сферы и конуса, приведенные на рис. 1.8.

ГЛАВА II

ОБТЕКАНИЕ ТОНКИХ, ЗАОСТРЕННЫХ ВПЕРЕДИ ТЕЛ С БОЛЬШОЙ СВЕРХЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ

§ 1. Оценка величины возмущений, возникающих при сверхзвуковом движении тел в газе

При установившемся движении тела в идеальном газе с сверхзвуковой скоростью парадокс Эйлера—Даламбера в общем случае не имеет места: тело при движении испытывает сопротивление. Возникновение сопротивления обусловлено необратимым ростом энтропии в ударных волнах, образующихся при обтекании тела. Чем бóльшие возмущения вызывает тело в газе, тем интенсивнее ударные волны и тем больше сопротивление движению тела. Таким образом, при сверхзвуковой скорости сопротивление, испытываемое телом, существенным образом зависит от его формы. Наглядной иллюстрацией этой зависимости может служить рис. 2.1, где изображены два тела — конус и сфера, обладающие равным сопротивлением при большой сверхзвуковой скорости. Аэродинамически совершенной формой (т. е. формой с относительно малым сопротивлением давления при сверхзвуковой скорости) является тело, нормаль к поверхности которого мало отклоняется от плоскости, перпендикулярной к направлению движения, т. е. тонкое, заостренное с концов тело (об исключениях из сформулированного правила см.

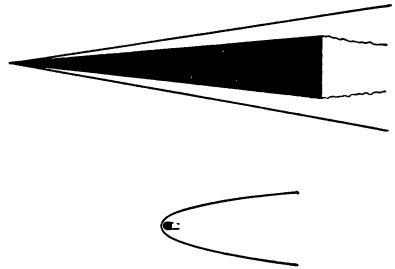


Рис. 2.1. Тела, обладающие равным сопротивлением при большой сверхзвуковой скорости.

гл. V). Отметим, что при сверхзвуковом обтекании таких тел течение в некоторой плоскости, перпендикулярной к направлению движения, зависит только от формы части тела, расположенной перед этой плоскостью. Поэтому многие результаты теории обтекания тонких, заостренных тел непосредственно применимы и к телам, у которых хвостовая часть заканчивается, например, донным срезом, как у снарядов.

Вследствие относительно малого сопротивления тонких, заостренных тел изучение их обтекания имеет большое практическое значение.

При обтекании газом тел, имеющих аэродинамически совершенную форму, возмущения скорости частиц малы сравнительно со скоростью набегающего потока. При умеренных сверхзвуковых скоростях, когда скорость набегающего потока превосходит скорость звука в небольшое число раз, малые возмущения скорости при адиабатическом непрерывном движении связаны с малыми же относительными возмущениями давления, плотности и скорости звука, а следовательно, и числа M (см. гл. I, § 3). Уравнения возмущенного движения могут быть при этом линеаризованы. Для решения линеаризованных уравнений развиты эффективные методы, позволяющие расчетным путем определять аэродинамические характеристики различных тел [1, 2, 3].

Если скорость набегающего потока во много раз превосходит скорость звука, то при малых возмущениях скорости изменения давления, плотности, скорости звука, а следовательно, и числа M при адиабатическом непрерывном движении не будут уже малыми. Ниже будет показано, что этот вывод справедлив и в случае течений со скачками уплотнения. Если возмущения параметров газа не малы, то для изучения течений необходимо пользоваться нелинейными уравнениями. В дальнейшем, если речь будет идти об обтекании тонких тел с большой сверхзвуковой скоростью, то будет подразумеваться, что диапазон чисел M набегающего потока и относительных толщин тел таков, что становятся существенными нелинейные эффекты.

Теории движения газа с малыми возмущениями скорости приводят к установлению законов подобия, связывающих обтекание аффинно-преобразованных тел при разных скоростях потока. Для течений с большой сверхзвуковой скоростью закон подобия был впервые установлен для плоских и осесимметричных течений Цзянем в работе [4]; иным методом вывод этого закона для плоских течений был дан в работе [5]. Авторы работ [4] и [5] предполагали течение потенциальным, что суживало область применимости закона подобия, поскольку при больших сверхзвуковых скоростях завихренность потока во многих случаях является существенной. В краткой заметке [6] Хейз снял предположения о безвихренности течения и о его двумерности и дал простое физическое истолкование закона подобия при больших сверхзвуковых скоростях (см. § 4 настоящей главы). Подробный вывод уравнений обтекания тонких тел при большой сверхзвуковой скорости и закона подобия с оценками погрешностей и примерами расчета был произведен в работе [7], а также в работах [8, 9, 10, 11] и других.

Рассмотрим установившееся обтекание тонкого, заостренного впереди тела, движущегося со скоростью V в идеальном газе. Поместим начало подвижной системы координат O в переднюю точку

тела, ось Ox возьмем в направлении набегающего на тело потока, а оси Oy и Oz под прямым углом друг к другу в плоскости, перпендикулярной к этому направлению (рис. 2.2).

Согласно сделанному предположению о форме тела угол между нормалью n в точках обращенной вперед части поверхности тела и направлением набегающего потока близок к прямому, так что

$$\cos(n, x) \sim \tau,$$

где τ — малый параметр, например, относительная толщина тела, наибольшее значение угла, образованного поверхностью головной части тела и направлением набегающего потока, или наибольшее значение $\cos(n, x)$.

Размеры тела вдоль осей Oy и Oz будем пока считать одинаковыми по порядку величины (как у снаряда или у корпуса летательного аппарата), т. е. примем, что

$$\cos(n, y) \sim 1, \quad \cos(n, z) \sim 1.$$

Если, как и прежде, обозначить через u , v , w составляющие абсолютной скорости частиц газа, то из граничного условия (1.7) на поверхности обтекаемого тела, переписанного в форме

$$v \cos(n, y) + w \cos(n, z) = -(V + u) \cos(n, x),$$

получаем следующие оценки порядка величин составляющих скорости в поперечных к потоку направлениях вблизи тела

$$v \sim w \sim \tau(V + u).$$

Сделаем естественное предположение о том, что составляющие скорости v и w сохраняют во всей области течения между головной волной и поверхностью обтекаемого тела найденный или более высокий порядок величины.

Для оценки величины составляющей скорости u , а также давления и плотности газа в этой области воспользуемся соотношениями (1.10) на головной волне. Разрешая первое из них относительно скорости распространения волны $D = -V \cos(n_c, x)$, получаем

$$D = \frac{\gamma + 1}{4} |v_2| + \sqrt{\left(\frac{\gamma + 1}{4}\right)^2 v_2^2 + a_1^2}.$$

Отсюда следует, что

$$D = -V \cos(n_c, x) \sim |\bar{v}_2| + a_1.$$

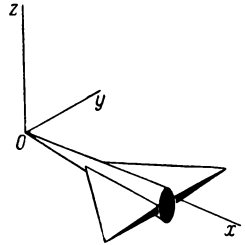


Рис. 2.2. Система координат.

Так как на головной волне

$$u = |\bar{v}_2| \cos(n_c, x), \quad v = |\bar{v}_2| \cos(n_c, y), \quad w = |\bar{v}_2| \cos(n_c, z)$$

и

$$\cos(n_c, y) \sim 1, \quad \cos(n_c, z) \sim 1,$$

то очевидно, что

$$|\bar{v}_2| \sim v \sim w.$$

Поэтому

$$\cos(n_c, x) \sim \frac{|\bar{v}_2| + a_1}{V} \sim \tau + \frac{1}{M}$$

и

$$u \sim V \left(\tau^2 + \frac{\tau}{M} \right).$$

Из двух последних соотношений (1.10) получаем следующие оценки для изменения давления и плотности газа при прохождении им головной ударной волны:

$$\begin{aligned} \Delta p &= \rho_1 D |\bar{v}_2| \sim \rho_1 V^2 \tau^2 \left(1 + \frac{1}{M\tau} \right), \\ \Delta \rho &= \rho_1 \frac{D^2 - a_1^2}{a_1^2 + \frac{\gamma-1}{2} D^2} \sim \rho_1 \frac{V\tau(V\tau + a_1)}{(V\tau + a_1)^2} \sim \rho_1 \frac{M\tau}{1 + M\tau}. \end{aligned}$$

Найденные оценки показывают, что при обтекании тонких тел ($\tau \ll 1$) потоком с умеренной сверхзвуковой скоростью (т. е. при $M = \frac{V}{a_1}$ порядка единицы) возмущения всех газодинамических параметров малы и имеют один и тот же порядок:

$$u \sim a_1 \tau, \quad v \sim w \sim V\tau, \quad \frac{\Delta p}{\rho_1} \sim M\tau, \quad \frac{\Delta \rho}{\rho_1} \sim M\tau.$$

Углы, образуемые обращенной вперед частью поверхности обтекаемого тела с направлением набегающего потока, малы при этом сравнительно с углами, которые составляет с этим направлением головная волна:

$$\cos(n, x) \sim \tau \ll \frac{1}{M} \sim \cos(n_c, x),$$

а сама головная волна мало отличается от характеристической поверхности — звуковой волны, для которой $\cos(n, x) = \frac{1}{M}$.

В соответствии со сделанными оценками, для расчета обтекания тонких тел с умеренной сверхзвуковой скоростью, т. е. при $M\tau \ll 1$, можно использовать метод линеаризации уравнений.

В случае обтекания тонких тел потоком с большой сверхзвуковой скоростью (т. е. при $\tau \ll 1$ и $M\tau \sim 1$ или $M\tau \gg 1$) возмущения скорости остаются по-прежнему малыми, однако продольная составляющая скорости возмущения является при этом малой величиной более высокого порядка, чем поперечные составляющие:

$$u \sim V\tau^2, \quad v \sim w \sim V\tau.$$

Возмущения давления и плотности не будут уже малыми и для них справедливы оценки:

$$\frac{\Delta p}{p_1} \sim M^2\tau^2, \quad \frac{\Delta \rho}{\rho_1} \sim 1.$$

Отсюда следует, что повышение давления за скачком уплотнения при обтекании тонкого тела может иметь не только тот же порядок, что и давление в набегающем потоке, но при очень больших сверхзвуковых скоростях может превосходить это давление в сколь угодно большое число раз. Отметим, что коэффициенты давления будут и в этом случае малыми: $c_p = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho_1 V^2} \sim \tau^2$.

Углы наклона головной волны к направлению набегающего потока имеют при $M\tau \sim 1$ или $M\tau \gg 1$ тот же порядок, что и углы наклона обращенной вперед части поверхности обтекаемого тела

$$\cos(n_c, x) \sim \tau,$$

так что область возмущенного движения между поверхностью обтекаемого тонкого тела и головной ударной волной представляет собой при большой сверхзвуковой скорости тонкий слой уплотненного газа.

Углы между обращенной вперед частью поверхности тела и направлением набегающего потока имеют при $M\tau \sim 1$ тот же порядок, а при $M\tau \gg 1$ значительно превосходят углы характеристической поверхности в набегающем потоке.

Из изложенного ясно, что метод линеаризации уравнений движения газа при обтекании тонких тел становится неприменимым, если $M\tau \sim 1$ или $M\tau \gg 1$.

§ 2. Закон подобия при обтекании тонких тел с большой сверхзвуковой скоростью

Пусть поток, направленный вдоль оси Ox и имеющий большую сверхзвуковую скорость, обтекает тонкое тело, принадлежащее к семейству аффинно-подобных тел, которые получают друг из друга изменением в одинаковом отношении длин вдоль осей Oy

и *Oz*. Примем длину тела в направлении набегающего потока за единицу и пусть τ — по-прежнему безразмерная малая величина, характеризующая наибольший угол отклонения потока. Уравнение заданной поверхности обтекаемого тела можно тогда представить в виде

$$F\left(x, \frac{y}{\tau}, \frac{z}{\tau}\right) = 0,$$

а определяемые при решении задачи уравнения возникающих в потоке поверхностей тангенциального разрыва и скачков уплотнения, — соответственно в виде

$$F_T(x, y, z, \tau, M) = 0$$

и

$$F_C(x, y, z, \tau, M) = 0,$$

причем функции F_T и F_C зависят, кроме координат x, y, z , от формы обтекаемого тела, т. е. от параметра τ , и от числа M набегающего потока.

В соответствии с оценками, произведенными в § 1 настоящей главы и справедливыми при больших сверхзвуковых скоростях, перейдем в системе уравнений (1.1) — (1.4), описывающих движение газа, к новым безразмерным переменным, полагая

$$\left. \begin{aligned} u &= V\tau^2 u', & v &= V\tau v', & w &= V\tau w', \\ p &= \rho_1 V^2 \tau^2 p' = \gamma M^2 \tau^2 p_1 p', & \rho &= \rho_1 \rho', \\ x &= x', & y &= \tau y', & z &= \tau z'. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Совершив такой переход и отбрасывая члены порядка τ^2 по сравнению с единицей, приведем уравнения (1.1) — (1.4) к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} + w' \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial x'} &= 0, \\ \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} + w' \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial y'} &= 0, \\ \frac{\partial w'}{\partial x'} + v' \frac{\partial w'}{\partial y'} + w' \frac{\partial w'}{\partial z'} + \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial z'} &= 0, \\ \frac{\partial \rho'}{\partial x'} + \frac{\partial \rho' v'}{\partial y'} + \frac{\partial \rho' w'}{\partial z'} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x'} \frac{p'}{\rho' \gamma} + v' \frac{\partial}{\partial y'} \frac{p'}{\rho' \gamma} + w' \frac{\partial}{\partial z'} \frac{p'}{\rho' \gamma} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Перейдем теперь к новым переменным в дополнительных соотношениях (1.5) — (1.8) на образующихся в потоке поверхностях разрыва, на поверхности обтекаемого тела и в бесконечности перед телом, и упростим их, пренебрегая членами порядка τ^2 по сравнению

с единицей. Соотношения (1.5) на поверхности скачков уплотнения запишутся после этого в форме

$$\begin{aligned}
 \rho'_1 \left(\frac{\partial F_c}{\partial x'} + v'_1 \frac{\partial F_c}{\partial y'} + w'_1 \frac{\partial F_c}{\partial z'} \right) &= \\
 &= \rho'_2 \left(\frac{\partial F_c}{\partial x'} + v'_2 \frac{\partial F_c}{\partial y'} + w'_2 \frac{\partial F_c}{\partial z'} \right), \\
 \rho'_1 \left(\frac{\partial F_c}{\partial x'} + v'_1 \frac{\partial F_c}{\partial y'} + w'_1 \frac{\partial F_c}{\partial z'} \right) u'_1 + p'_1 \frac{\partial F_c}{\partial x'} &= \\
 &= \rho'_2 \left(\frac{\partial F_c}{\partial x'} + v'_2 \frac{\partial F_c}{\partial y'} + w'_2 \frac{\partial F_c}{\partial z'} \right) u'_2 + p'_2 \frac{\partial F_c}{\partial x'}, \\
 \rho'_1 \left(\frac{\partial F_c}{\partial x'} + v'_1 \frac{\partial F_c}{\partial y'} + w'_1 \frac{\partial F_c}{\partial z'} \right) v'_1 + p'_1 \frac{\partial F_c}{\partial y'} &= \\
 &= \rho'_2 \left(\frac{\partial F_c}{\partial x'} + v'_2 \frac{\partial F_c}{\partial y'} + w'_2 \frac{\partial F_c}{\partial z'} \right) v'_2 + p'_2 \frac{\partial F_c}{\partial y'}, \\
 \rho'_1 \left(\frac{\partial F_c}{\partial x'} + v'_1 \frac{\partial F_c}{\partial y'} + w'_1 \frac{\partial F_c}{\partial z'} \right) w'_1 + p'_1 \frac{\partial F_c}{\partial z'} &= \\
 &= \rho'_2 \left(\frac{\partial F_c}{\partial x'} + v'_2 \frac{\partial F_c}{\partial y'} + w'_2 \frac{\partial F_c}{\partial z'} \right) w'_2 + p'_2 \frac{\partial F_c}{\partial z'}, \\
 \rho'_1 \left(\frac{\partial F_c}{\partial x'} + v'_1 \frac{\partial F_c}{\partial y'} + w'_1 \frac{\partial F_c}{\partial z'} \right) \left(\frac{v_1'^2 + w_1'^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p'_1}{\rho'_1} \right) + \\
 &+ p'_1 \left(v'_1 \frac{\partial F_c}{\partial y'} + w'_1 \frac{\partial F_c}{\partial z'} \right) = \\
 &= \rho'_2 \left(\frac{\partial F_c}{\partial x'} + v'_2 \frac{\partial F_c}{\partial y'} + w'_2 \frac{\partial F_c}{\partial z'} \right) \left(\frac{v_2'^2 + w_2'^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p'_2}{\rho'_2} \right) + \\
 &+ p'_2 \left(v'_2 \frac{\partial F_c}{\partial y'} + w'_2 \frac{\partial F_c}{\partial z'} \right). \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

На тангенциальных разрывах должны будут выполняться условия (1.6)

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial F_\tau}{\partial x'} + v'_1 \frac{\partial F_\tau}{\partial y'} + w'_1 \frac{\partial F_\tau}{\partial z'} &= 0, \\
 \frac{\partial F_\tau}{\partial x'} + v'_2 \frac{\partial F_\tau}{\partial y'} + w'_2 \frac{\partial F_\tau}{\partial z'} &= 0, \quad p'_1 = p'_2.
 \end{aligned} \right\} (2.4)$$

Условие (1.7) на поверхности обтекаемого тела примет вид

$$\frac{\partial F}{\partial x'} + v' \frac{\partial F}{\partial y'} + w' \frac{\partial F}{\partial z'} = 0 \quad \text{при} \quad F(x', y', z') = 0. \quad (2.5)$$

Наконец, в бесконечности перед телом, т. е. при $x' \rightarrow -\infty$, из условий (1.8), получим

$$u' = v' = w' = 0, \quad p' = \frac{1}{\gamma M^2 \tau^2}, \quad \rho' = i. \quad (2.6)$$

Выписанная система соотношений (2.2) — (2.6), описывающая обтекание аффинно-подобных тел, принадлежащих к одному семейству и отличающихся друг от друга значением параметра τ , потоком при больших значениях числа M , содержит эти два параметра τ и M только в виде произведения $M\tau$. Это значит, что при обтекании аффинно-преобразованных тел, соответствующих различным значениям параметра τ , потоком с различными значениями числа M движения будут подобными, если параметр $M\tau$ сохраняется постоянным, т. е. при сохранении параметра $M\tau$ безразмерные величины u' , v' , w' , p' , ρ' , введенные формулами (2.1), в соответственных точках сохраняются. Поверхности разрыва, поверхности тока, характеристические поверхности меняются при этом аффинно-подобно поверхности тела, так как согласно соотношениям (2.2) — (2.6) их уравнения должны иметь вид $F_i(x, \frac{y}{\tau}, \frac{z}{\tau}, M\tau) = 0$. Давление и плотность газа в сходственных точках не меняются. При сохранении величины τ и при неограниченном возрастании скорости потока картина течения стремится к предельному состоянию; в этом предельном состоянии плотность и коэффициент давления перестают зависеть от числа M .

Величина $M\tau$ называется параметром подобия при обтекании тонких тел с большой сверхзвуковой скоростью и обозначается через K .

Используя установленный закон подобия, вычислим суммарные силы, приложенные со стороны потока к обтекаемому телу. Сила сопротивления, действующая на тело в направлении набегающего потока, равна (если тело имеет донный срез, то приложенные к нему силы давления не учитываются, так как к области течения у донного среза закон подобия не применим)

$$X = \int p \, dy \, dz = \rho_1 V^2 \tau^4 \int p' \, dy' \, dz' = \rho_1 V^2 \tau^4 \bar{X}(K).$$

Это выражение показывает, что при большой сверхзвуковой скорости сопротивление тела очень сильно зависит от максимального угла отклонения потока — пропорционально четвертой степени этого угла.

Сила, приложенная к телу в направлении, перпендикулярном к направлению набегающего потока, равна

$$Y = \int p \, dx \, dy = \rho_1 V^2 \tau^3 \int p' \, dx' \, dy' = \rho_1 V^2 \tau^3 \bar{Y}(K).$$

Коэффициент сопротивления c_x и коэффициент c_y силы Y , отнесенные к площади поперечного сечения тела, могут быть представлены поэтому в форме

$$c_x = \tau^2 F(K) = \frac{F_1(K)}{M^2}, \quad c_y = \tau \tilde{F}(K) = \frac{\tilde{F}_1(K)}{M}.$$

При $K \rightarrow \infty$ отношения $\frac{c_x}{\tau^2}$ и $\frac{c_y}{\tau}$ стремятся к постоянным значениям.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

При обтекании тела типа снаряда под углом атаки α примем за параметр τ наибольшую относительную толщину тела. Если придавать разные значения числу M , углу атаки α и толщине тела τ , то условия подобия двух течений будут соблюдены, если кроме параметра $M\tau$ в этих двух течениях будут одинаковы отношения $\frac{\alpha}{\tau}$ (легко убедиться, что при сохранении отношения $\frac{\alpha}{\tau}$ и при изменении наибольшей относительной толщины тела τ с принятой степенью

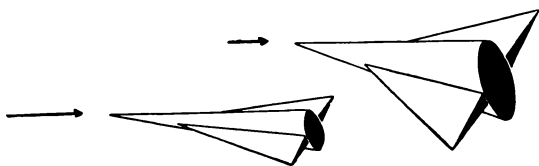


Рис. 2.3. К закону подобия.

точности тела будут аффинно-подобными). При этом для коэффициента сопротивления c_x и коэффициента подъемной силы c_y можно написать выражения

$$\frac{c_x}{\tau^2} = F\left(K, \frac{\alpha}{\tau}\right), \quad \frac{c_y}{\tau} = \tilde{F}\left(K, \frac{\alpha}{\tau}\right).$$

Аналогичным образом при обтекании крыла бесконечного размаха (профиля) без скольжения под углом атаки α примем за параметр τ наибольшую относительную толщину профиля. Тогда для коэффициентов c_x и c_y , при вычислении которых силы, действующие на единицу длины размаха крыла, отнесены к соответствующей площади плана крыла, получим формулы

$$\frac{c_x}{\tau^3} = F_1\left(K, \frac{\alpha}{\tau}\right), \quad \frac{c_y}{\tau^2} = \tilde{F}_1\left(K, \frac{\alpha}{\tau}\right).$$

При $K \rightarrow \infty$, т. е. для течений с очень большой сверхзвуковой скоростью, выражения F , \tilde{F} , F_1 и \tilde{F}_1 становятся функциями только от отношения $\frac{\alpha}{\tau}$.

Сформулированный выше закон подобия имеет важное значение для техники экспериментирования при больших скоростях. В частности, основываясь на этом законе, можно получить данные об аэродинамических характеристиках тел при большой сверхзвуковой скорости путем испытания моделей аффинно-преобразованных тел в аэродина-

мических трубах при меньших скоростях. Пусть, например, требуется получить аэродинамические характеристики тела, изображенного на рис. 2.3 слева, при числе M , равном шести. Для этого можно произвести испытания тела с удвоенными поперечными размерами (рис. 2.3 справа) при числе M , равном трем. Давления в соответственных точках при обтекании этих двух тел будут одинаковыми (если угол атаки отличен от нуля, то у второго тела он должен быть в два раза больше, чем у первого).

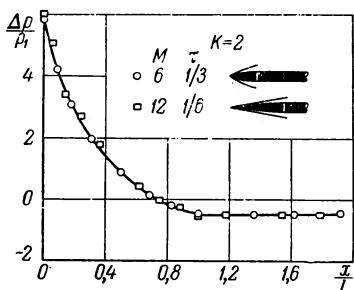
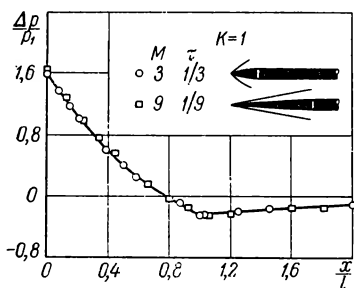
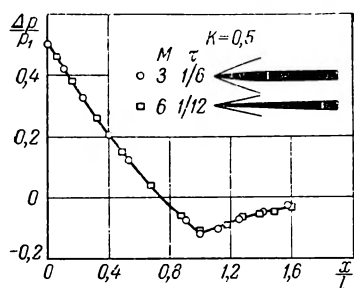


Рис. 2.4. Распределение давлений при обтекании потоком с большой сверхзвуковой скоростью аффинно-преобразованных тел.

*) Строго говоря, тела оживальной формы с различной относительной толщиной не являются аффинно-подобными, но при малых значениях относительной толщины изменения распределения относительной толщины по длине при переходе от одного тела к другому пренебрежимо малы.

*) Строго говоря, тела оживальной формы с различной относительной толщиной не являются аффинно-подобными, но при малых значениях относительной толщины изменения распределения относительной толщины по длине при переходе от одного тела к другому пренебрежимо малы.

Закон подобия позволяет перенести результаты расчетного или экспериментального определения аэродинамических характеристик одного тонкого тела при большой сверхзвуковой скорости на бесконечную совокупность аффинно-преобразованных тел при соответствующих скоростях.

Так, на рисунке 2.4 приведены рассчитанные по методу характеристик распределения давления по телам вращения в виде цилиндров с оживальной головной частью [12]. На каждом из трех графиков даны распределения давления по двум телам, имеющим разную относительную толщину τ и обтекаемых потоком с различными значениями числа M , но так, что параметр подобия $K = M\tau$ сохраняет для каждой пары тел одинаковое значение (на графике вверху $K = 0,5$, в центре $K = 1$, внизу $K = 2$). Из рассмотрения рис. 2.4 следует, что с точностью до погрешностей расчета распределения давления при сохранении параметра подобия совпадают между собой *).

Важно отметить, что даже при сравнительно небольшом значении числа M , равном трем, и при относительной толщине, равной $\frac{1}{3}$, результаты расчета все еще хорошо согласуются с законом подобия, выведенным в пред-

положении $M \gg 1$, $\tau \ll 1$. Это дает основание считать, что закон подобия сохраняет силу в значительно более широком диапазоне

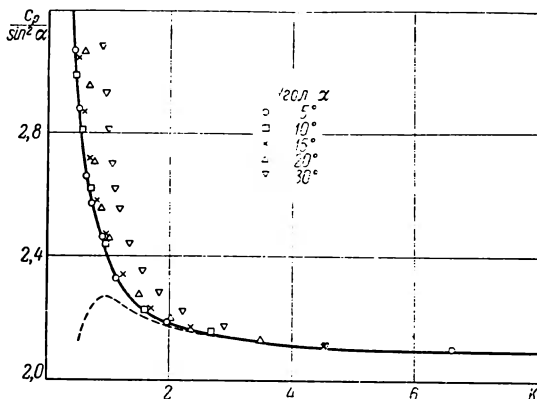


Рис. 2.5. Давление на поверхности круглых конусов при сверхзвуковой скорости.

значений M и τ , чем это можно было ожидать, учитывая допущения, сделанные при его выводе. Оценим пределы применимости закона

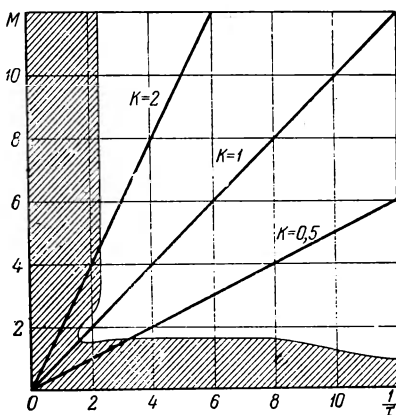


Рис. 2.6. Область применения закона подобия для конусов.

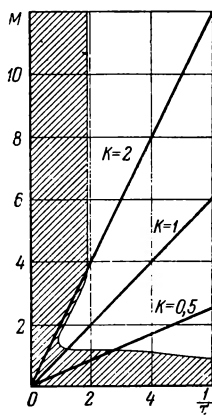


Рис. 2.7. Область применения закона подобия для тел оживальной формы.

подобия для тел с оживальной формой головной части [12]. Для этого обратимся сначала к рис. 2.5, на котором приведены согласно таблицам [13] значения коэффициента давления на круглых конусах с различными углами раскрытия α при различных значениях числа M ,

построенные в зависимости от параметра подобия $K = M \operatorname{tg} \alpha$. (О приведенных на этом рисунке кривых см. ниже, в § 5 настоящей главы

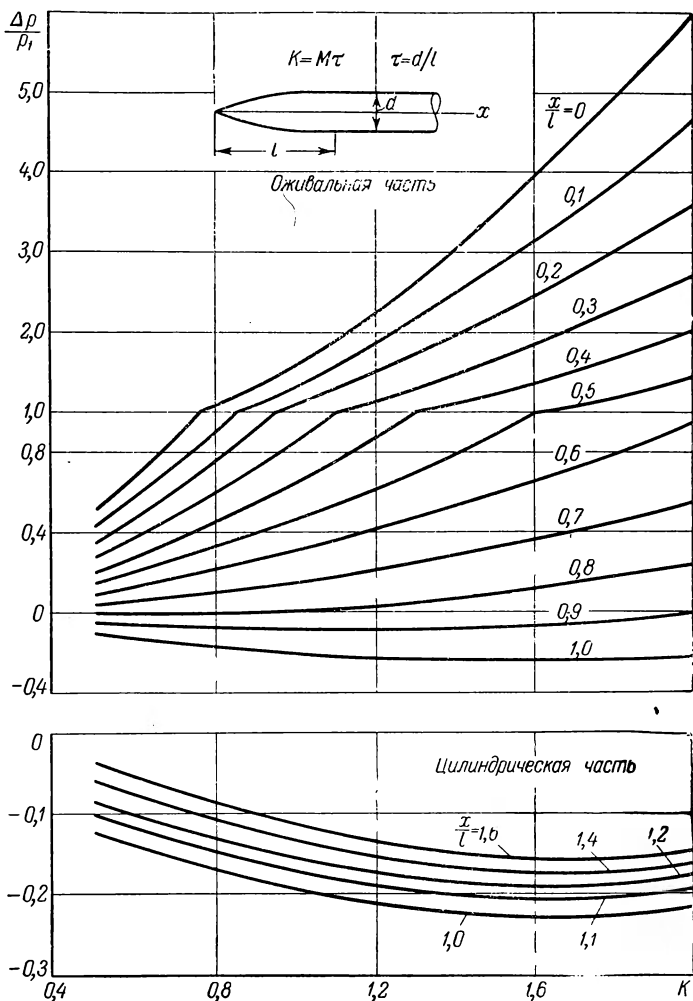


Рис. 2.8. Обобщенные графики для определения давления на поверхности тел с оживальной головной частью.

и в § 3 гл. III.) Примем, что для практических целей законом подобия можно пользоваться для определения давления на конусе, если точные значения давления отличаются от значений, соответствующих конусу с самым малым углом раскрытия при том же значении K не более, чем на 5%. Тогда закон подобия можно использовать для

пересчета давления на конусах при большой сверхзвуковой скорости в области значений M и τ , оставленной незаштрихованной на рис. 2.6. Если предположить, что применимость закона подобия при пересчете давления на телах оживальной формы определяется применимостью закона подобия для пересчета давления у переднего конца этих тел, то путем простой обработки данных, представленных на рис. 2.6, можно получить область действия закона подобия для тел оживальной формы (рис. 2.7). Справедливость сделанного предположения подтверждена дополнительно расчетами по методу характеристик, подобными тем, результаты которых приведены на рис. 2.4.

Отметим, что область применимости закона подобия значительно расширяется в сторону меньших значений числа M , если за параметр подобия вместо величины $M\tau$ принять величину $\sqrt{M^2 - 1}\tau$ ([14], см. также [9]).

В заключение настоящего параграфа приведем обобщенные графики (рис. 2.8), позволяющие определять давление на поверхности тел вращения оживальной формы с цилиндрической хвостовой частью в том диапазоне чисел M и относительных толщин τ , в котором справедлив закон подобия. Эти графики получены на основе расчета многих случаев обтекания методом характеристик [15].

§ 3. Упрощение уравнений обтекания тонких тел при большой сверхзвуковой скорости

Полученная в предыдущем параграфе система соотношений (2.2) — (2.6) проще исходной системы уравнений (1.1) — (1.8).

Важно отметить, что система (2.2) — (2.6) распадается на две независимые группы соотношений. Действительно, четыре последних уравнения (2.2) не содержат составляющей скорости u . Не содержат этой величины и условие (2.5) на поверхности обтекаемого тела, условия (2.4) — на поверхности тангенциальных разрывов, а также по четыре из пяти условий (2.3) на поверхностях скачков уплотнения и (2.6) — в бесконечности перед телом.

Это уменьшенное число дополнительных условий как раз достаточно для определения функций v , w , p , ρ из четырех, содержащих только эти функции уравнений (2.2).

После независимого определения искомых величин v , w , p , ρ составляющая скорости u может быть найдена из первого уравнения (2.2) с использованием содержащих эту составляющую дополнительных условий на поверхности скачков уплотнения и в бесконечности перед телом.

Определение составляющей скорости u может быть произведено и более простым путем. В самом деле, уравнение движения в проекции на направление x , т. е. первое уравнение системы (2.2), можно

заменить интегралом Бернулли. Для адиабатических движений интеграл Бернулли записывается в виде

$$\frac{(V+u)^2 + v^2 + w^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = \frac{V^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1},$$

причем при такой записи уже использованы условия в бесконечности перед телом и условия на скачках уплотнения. Переходя в интеграле Бернулли к новым безразмерным переменным согласно формулам (2.1) и отбрасывая члены порядка τ^2 по сравнению с единицей, найдем

$$u' + \frac{v'^2 + w'^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p'}{\rho'} = \frac{1}{(\gamma-1) M^2 \tau^2}.$$

Этим соотношением и следует пользоваться для определения составляющей скорости u по известным значениям остальных параметров движущегося газа. Заметим при этом, что в ряде задач знание составляющей скорости u не является необходимым.

Таким образом то обстоятельство, что при обтекании тонких тел потоком с большой сверхзвуковой скоростью возмущения скорости остаются малыми, хотя возмущения давления и плотности могут становиться большими, дает возможность довольно существенно упростить математическую сторону задачи.

Подчеркнем еще, что при замене точных уравнений обтекания тонких тел потоком с большой сверхзвуковой скоростью приближенными соотношениями отбрасываемые члены имеют по сравнению с остающимися порядок τ^2 , тогда как в линейной теории малых возмущений при умеренных сверхзвуковых скоростях отбрасываемые члены имеют порядок τ . Это обстоятельство увеличивает значение рассматриваемой приближенной теории обтекания тонких тел при больших скоростях.

Пусть теперь в отличие от случая, рассмотренного в § 1 настоящей главы, поперечные размеры тела в направлении одной из осей, например оси Oy , много больше, чем в направлении другой оси (тело типа крыла). Тогда всюду на обращенной вперед части поверхности тела, исключая, быть может, небольшую окрестность его боковых концов, $\cos(n, y)$ будет малой величиной. Производя оценки порядков величин параметров газа вполне аналогично тому, как это было сделано в § 1 для случая тел типа снаряда, найдем, что подобно величине u составляющая скорости v вдоль оси y имеет более высокий порядок, чем w . Пренебрегая в уравнениях движения (1.1) — (1.4) малыми величинами, приведем эти уравнения к виду (запишем их в размерных переменных):

$$V \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

$$V \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

$$V \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0,$$

$$V \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0,$$

$$V \frac{\partial}{\partial x} \frac{p}{\rho^{\gamma}} + w \frac{\partial}{\partial z} \frac{p}{\rho^{\gamma}} = 0.$$

Дополнительные соотношения на поверхности обтекаемого тела и на поверхностях разрыва сохраняют по-прежнему свой вид, но входящие в них величины v_n и \bar{v}^2 должны вычисляться с учетом одной только составляющей скорости w ; нормаль к поверхности разрыва или к поверхности тела в этих соотношениях может быть заменена единичным вектором, направленным вдоль оси Oz , и под величиной D следует понимать скорость распространения поверхности разрыва в этом направлении.

Три последних уравнения из написанных выше не содержат составляющих скорости u и v . Эти составляющие скорости не входят также и в дополнительные условия на поверхности обтекаемого тела, на поверхности тангенциальных разрывов и в три из пяти условий на поверхности скачков уплотнения (уравнение сохранения массы, уравнение импульсов в проекции на направление z и уравнение энергии) и в бесконечности перед телом. Поэтому сначала могут быть найдены три величины — w , p и ρ , а затем с помощью остальных двух уравнений — две оставшиеся величины u и v (величину u можно определять и из интеграла Бернулли).

§ 4. Закон плоских сечений при обтекании тонких тел с большой сверхзвуковой скоростью

Если в четырех последних уравнениях (2.2) вернуться к размерным переменным и интерпретировать в них величину $\frac{x}{V} = t$ как время, то эти уравнения точно совпадут с системой уравнений неустановившегося движения газа в неподвижной плоскости, перпендикулярной к направлению движения тела. Приближенные соотношения (2.3) и (2.4) на поверхностях разрыва также совпадают при такой интерпретации с соотношениями, которые должны удовлетворяться в плоском движении *); приближенное условие (2.5) на поверхности обтекаемого тела

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

*) Заметим, что с точностью до членов порядка τ^3 по сравнению с единицей $|\text{grad } F| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}$.

представляет собой при такой интерпретации условие вытеснения газа в выбранной плоскости непроницаемой подвижной границей (поршнем), закон движения которой определяется формой движущегося тела в соответствии с формулой $F\left(Vt, \frac{y}{\tau}, \frac{z}{\tau}\right) = 0$. Таким образом, задача об установившемся обтекании тонкого тела потоком с большой сверхзвуковой скоростью с точностью до величины порядка τ^2 сравнительно с единицей эквивалентна задаче о неустановившемся движении газа на плоскости.

В этом состоит закон плоских сечений [6]. По существу, этот закон был уже установлен в § 1, когда было показано, что с упомянутой выше точностью тонкое тело, движущееся в газе с большой сверхзвуковой скоростью, вызывает лишь поперечные смещения частиц. Если перед телом выделить слой частиц, перпендикулярный к направлению движения тела (рис. 2.9), то при движении тела частицы

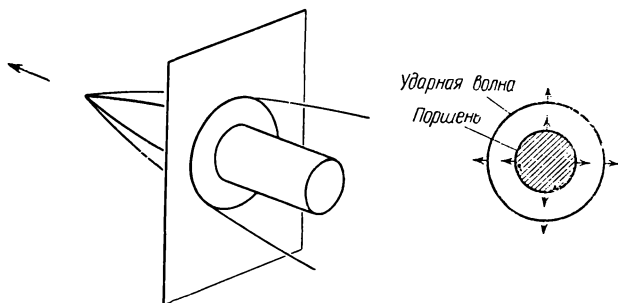


Рис. 2.9. К закону плоских сечений.

будут двигаться в этом слое, не испытывая продольного смещения. Сформулированный в § 2 настоящей главы закон подобия, имеющий фундаментальное значение в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей, непосредственно следует из закона плоских сечений. Действительно, скорость точек подвижной границы в эквивалентной задаче о плоском неустановившемся движении для аффинно-преобразованных тел будет одной и той же при сохранении произведения $V\tau$. Таким образом при сохранении произведения $V\tau$ неустановившиеся движения для разных V и τ будут отличаться между собой лишь линейным масштабом и, следовательно, величины v' , w' , p' , ρ' в соответственных точках будут одинаковыми.

Рассмотрим, как вычисляется сопротивление тела при использовании закона плоских сечений. Сопротивление, испытываемое телом при движении, равно работе, совершаемой телом на пути единичной длины. Эта работа согласно закону плоских сечений равна работе расширения эквивалентного поршня, совершаемой над газом в слое единичной ширины за время прохождения тела сквозь этот слой.

Таким образом, сопротивление тела X может быть выражено формулой

$$X = \int_0^T \int_l p v_n dl dt, \tag{2.7}$$

где внутренний интеграл распространен по контуру поршня. Вид этого контура в каждый момент времени и нормальная скорость его точек v_n определяются формой обтекаемого тела; давление p на поверхности поршня должно находиться из решения соответствующей задачи о неустановившемся движении газа. Для случая обтекания профиля или симметричного обтекания тела вращения величина $p v_n$ одинакова во всех точках контура и формула (2.7) принимает вид

$$X = \int_0^T p v_n (2\pi R)^{\nu-1} dt = \int_0^R p (2\pi R)^{\nu-1} dR \tag{2.8}$$

(R — расстояние точек поверхности поршня от начальной плоскости или от оси симметрии; $\nu=1$ для профиля и $\nu=2$ для тела вращения; для профиля X есть сопротивление только одной стороны профиля).

Аналогичным образом может быть вычислена поперечная сила (в частности, подъемная сила), действующая на тело при его движении. Поперечная сила равна по величине импульсу, который приобретает газ в направлении, перпендикулярном к направлению движения тела, за единицу времени или, что то же, умноженному на скорость полета импульсу, который сообщается телом газу на пути единичной длины. В соответствии с законом плоских сечений поперечная сила выражается, следовательно, формулой

$$\bar{Y} = V \int_0^T \int_l p \bar{n} dl dt.$$

При обтекании профиля поперечная сила, действующая на одну его сторону, согласно этой формуле равна

$$Y = \int_0^T pV dt.$$

При симметричном обтекании тела вращения суммарная поперечная сила равна, очевидно, нулю. На участок поверхности такого тела между двумя бесконечно близкими плоскостями, проходящими через ось тела, действует поперечная сила, равная

$$d\theta \int_0^T pRV dt$$

($d\theta$ — угол между плоскостями). Если обозначить силу, рассчитанную на угол 2π , через Y , то для профиля и для тела вращения можно записать одну формулу:

$$Y = \int_0^T pV (2\pi R)^{\nu-1} dt. \quad (2.9)$$

Закон плоских сечений устанавливает, что задача об обтекании тонких тел потоком с большой сверхзвуковой скоростью с определенной степенью точности эквивалентна задаче о плоском неустановившемся движении газа, вытесняемого подвижной границей (поршнем) соответствующей формы.

Рассмотрим примеры применения закона плоских сечений для расчета некоторых случаев обтекания тонких профилей и симметричного обтекания тонких тел вращения при $M \gg 1$.

При расширении поршня в неподвижном однородном газе область возмущенного движения заключена между распространяющейся по газу ударной волной и поверхностью поршня. Имея в виду изложить в следующей главе приближенный метод расчета таких движений в переменных Лагранжа, будем и в настоящем параграфе рассматривать движение газа с лагранжевой точки зрения. При использовании лагранжевой точки зрения основными искомыми функциями, характеризующими движение газа в этой области, являются расстояние R частиц от начальной плоскости или от оси симметрии, давление p и плотность ρ (скорость v выражается формулой $v = \frac{\partial R}{\partial t}$), а определяющими параметрами — время t и лагранжева координата $m = \frac{\rho_1 r^\nu}{\nu}$ (r — значение R в начальный момент времени, ρ_1 — начальная плотность; как и ранее, $\nu = 1, 2$ соответственно для течений с плоскими и цилиндрическими волнами).

Уравнения неразрывности, движения и энергии в выбранных переменных можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial R}{\partial m} = \frac{1}{\rho R^{\nu-1}}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -R^{\nu-1} \frac{\partial p}{\partial m}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{p}{\rho \gamma} = 0, \quad \left(v = \frac{\partial R}{\partial t} \right). \quad (2.10)$$

Решение этой системы уравнений должно удовлетворять условиям на ударной волне и на поверхности поршня. Если закон распространения ударной волны по газу обозначить через $R^*(t)$, то условия на ударной волне будут иметь вид (см. выражения (1.10)):

$$m = \frac{\rho_1 R^{*\nu}}{\nu}, \quad p^* = \frac{2}{\gamma+1} \rho_1 D^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} p_1, \quad \rho^* = \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho_1}{1 + \frac{\gamma-1}{\gamma-1} \frac{D^2}{a_1^2}}, \quad (2.11)$$

где $D = \frac{dR^*}{dt}$ — скорость распространения ударной волны.

На поверхности поршня, т. е. при $m = 0$, должно быть выполнено условие *)

$$R = \bar{R}(t). \quad (2.12)$$

Решение уравнений в частных производных (2.10), удовлетворяющее условиям (2.11), в общем случае задания закона движения поршня, т. е. функции $\bar{R}(t)$, или закона распространения ударной волны, т. е. функции $R^*(t)$, может быть найдено лишь сложными численными методами. Однако при некоторых движениях газа удастся свести эти уравнения к обыкновенным дифференциальным уравнениям и получить их решение в замкнутом виде точно или приближенно сравнительно простыми методами численного интегрирования. Такие движения, называемые автомодельными, мы и рассмотрим в дальнейшем.

В случае автомодельных движений величины, характеризующие состояние и движение газа, меняются таким образом, что распределение каждой из них в пространстве остается при изменении времени подобным самому себе, причем масштаб, характеризующий численные значения этих величин, может также по определенному закону зависеть от времени.

Воспользуемся для нахождения автомодельных движений соображениями теории подобия и размерностей [16].

Уравнения (2.10) не содержат размерных констант, а размерности определяющих переменных t и m , входящих в эти уравнения, независимы. Поэтому, если среди размерных констант в соотношениях (2.11) на ударной волне и в формуле $R = \bar{R}(t)$, при задании закона движения поршня, или в формуле $R = R^*(t)$ — при задании закона распространения ударной волны, — только две имеют независимые размерности, не выражающиеся через размерности t и m , то из всех определяющих параметров можно составить лишь одну переменную безразмерную комбинацию. В таких случаях уравнения (2.10) в частных производных могут быть сведены к уравнениям относительно одной независимой переменной, т. е. к обыкновенным дифференциальным уравнениям, и движение будет автомодельным.

Отметим, что при задании закона распространения ударной волны движение второй границы области возмущенного движения может определяться дополнительными размерными постоянными и закон движения этой границы может не быть автомодельным.

Размерности постоянных ρ_1 и p_1 , входящих в условия (2.11) на ударной волне, независимы и выражаются формулами

$$[\rho_1] = ML^{-3}, \quad [p_1] = ML^{-1}T^{-2},$$

Если обе эти постоянные существенны, то для того, чтобы движение было автомодельным, необходимо, чтобы постоянная m_0 , входящая

*) Для случая обтекания тел вращения, имеющих внутренний канал на поверхности поршня должно быть $m = m_0 = \text{const} \neq 0$.

в условие (2.12) в случае обтекания тела вращения с внутренним каналом, и кинематические постоянные, входящие в это условие, или — в случае задания закона распространения ударной волны — кинематические постоянные, входящие в этот закон, имели размерности, выражающиеся через размерности ρ_1 и p_1 . Отсюда, исключая из формул размерности ρ_1 и p_1 символ массы, найдем, что кинематические постоянные должны иметь размерность LT^{-1} . Следовательно, закон (2.12) расширения поршня или закон распространения ударной волны должны иметь вид

$$\bar{R} = Ut$$

и

$$\bar{R}^* = Dt,$$

где U и D — постоянные величины. Таким образом, если константа ρ_1 существенна, т. е. если начальное давление газа оказывает заметное влияние на движение, то движение может быть автомодельным лишь при расширении поршня, имевшего первоначально радиус, равный нулю, с постоянной скоростью (которому соответствует и распространение ударной волны с постоянной скоростью). При использовании закона плоских сечений такому движению соответствует в случае $\nu=1$ обтекание тонкого клина, а в случае $\nu=2$ — обтекание тонкого конуса.

Если давление газа за ударной волной во много раз больше начального давления (т. е. если $D^2 \gg a_1^2$), то влиянием параметра ρ_1 на движение газа можно пренебречь. В этом случае движение будет автомодельным, если в закон расширения поршня или в закон распространения ударной волны входит одна постоянная с произвольной кинематической размерностью $LT^{-(n+1)}$, т. е. если

$$\bar{R} = \frac{C}{n+1} t^{n+1} \quad \text{или} \quad R^* = \frac{C_1}{n+1} t^{n+1}, \quad (2.13)$$

где n — любое число ($n \neq -1$). Таким неустановившимся движениям газа соответствует при $\nu=1$ обтекание потоком с очень большой сверхзвуковой скоростью тонких профилей специальной формы, в частности, профилей, имеющих уравнение контура в виде степенного одночлена, и при $\nu=2$ — обтекание тел вращения с уравнением образующей в виде степенного одночлена, а также тел вращения специальной формы, имеющих внутренний канал.

Итак, рассмотрим неустановившиеся автомодельные движения газа, возникающие при расширении поршня или ударной волны по законам (2.13); напомним, что если $n=0$, то движение будет автомодельным и при учете начального давления газа.

Введем вместо искомым функций R , p и ρ (а также v) новые безразмерные величины \mathfrak{R} , \mathcal{P} , \mathcal{Q} и V по формулам

$$R = R^* \mathfrak{R}, \quad p = p^* \mathcal{P}, \quad \rho = \rho^* \mathcal{Q}, \quad v = \dot{R}^* V, \quad (2.14)$$

где R^* , p^* и ρ^* — значения R , p и ρ на ударной волне, которые зависят от t согласно выражениям (2.13) и (2.11), причем в последних вместо D следует подставить $C_1 t^n$ (при $n \neq 0$ нужно считать $p_1 = 0$, $a_1 = 0$). Безразмерные функции \mathcal{R} , \mathcal{P} , Ω и V в силу сделанных предположений зависят только от одной переменной

$$\mu = \frac{m}{m^*} \quad \left(m^* = \frac{\rho_1 R^{*v}}{\nu} \right).$$

Подставляя выражения (2.14) для R , p , ρ и v в уравнения (2.10), получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций \mathcal{R} , \mathcal{P} , Ω , V :

$$\left. \begin{aligned} \nu \frac{\rho^*}{\rho_1} \Omega \mathcal{R}^{\nu-1} \mathcal{R}' &= 1, \\ \frac{n}{n+1} V - \nu \mu \frac{dV}{d\mu} + \nu \frac{p^*}{\rho_1 \dot{R}^{*2}} \mathcal{R}^{\nu-1} \mathcal{P}' &= 0, \\ \left(\frac{\mathcal{P}}{\Omega \nu \mu^{\nu(n+1)}} \right)' &= 0, \quad V = \mathcal{R} - \nu \mu \mathcal{R}'. \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

Входящие в эти уравнения величины $\frac{\rho^*}{\rho_1}$ и $\frac{p^*}{\rho_1 \dot{R}^{*2}}$ постоянны. Первое, третье и четвертое уравнения (2.15) позволяют выразить Ω , P и V через μ , \mathcal{R} и \mathcal{R}' :

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= \left(\frac{\rho^*}{\rho_1} \nu \mathcal{R}^{\nu-1} \mathcal{R}' \right)^{-1}, \\ P &= A \Omega \nu \mu^{\nu(n+1)}, \\ V &= \mathcal{R} - \nu \mu \mathcal{R}'. \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Подставляя эти выражения во второе уравнение (2.15), получаем для определения функции \mathcal{R} в зависимости от μ следующее дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{n}{n+1} (\mathcal{R} - \nu \mu \mathcal{R}') - \nu \mu \frac{d}{d\mu} (\mathcal{R} - \nu \mu \mathcal{R}') + \\ + \frac{\nu p^* A}{\rho_1 \dot{R}^{*2}} \left(\frac{\rho^*}{\rho_1} \right)^{\nu} \mathcal{R}^{\nu-1} \frac{d}{d\mu} \left[\mu^{\nu(n+1)} (\nu \mathcal{R}^{\nu-1} \mathcal{R}')^{-\nu} \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Для нахождения двух постоянных интегрирования этого уравнения, а также константы A в интеграле уравнения адиабатичности служат три условия на ударной волне

$$\mathcal{R}(1) = \mathcal{P}(1) = \Omega(1) = 1,$$

пользуясь которыми находим

$$A = 1, \quad \mathcal{R}'(1) = \frac{\rho_1}{\nu \rho^*}.$$

Если задан закон движения поршня $\bar{R}(t)$, а не закон $R^*(t)$ распространения ударной волны, то связь между ними, которую необходимо знать для использования решения (2.14), получим из условия (2.12) на поршне, т. е. при $\mu = 0$

$$\begin{aligned}\bar{R}(t) &= R^*(t) \mathfrak{R}(0), \\ C &= C_1 \mathfrak{R}(0).\end{aligned}$$

§ 5. Примеры использования закона плоских сечений

Обтекание клина и конуса. В этих случаях $n = 0$ и уравнение (2.17) приобретает вид

$$\nu \mu^2 \mathfrak{R}'' + (\nu - 1) \mu \mathfrak{R}' + \frac{B}{\nu} \mathfrak{R}^{\nu-1} \frac{d}{d\mu} (\nu \mathfrak{R}^{\nu-1} \mathfrak{R}')^{-\gamma} = 0.$$

Отсюда при $\nu = 1$, т. е. при обтекании клина, получаем

$$(\mu^2 - \gamma B \mathfrak{R}'^{-(\gamma+1)}) \mathfrak{R}'' = 0,$$

и единственным решением, удовлетворяющим условиям на ударной волне, является функция

$$\mathfrak{R} = 1 - \frac{\rho_1}{\rho^*} (1 - \mu).$$

Пользуясь найденным выражением для \mathfrak{R} , по формулам (2.16) находим

$$\Omega = 1, \quad \mathcal{P} = 1, \quad V = 1.$$

В случае задания закона движения поршня, $\bar{R} = Ut$, для определения постоянной $C_1 \equiv D$ используем условие $U = D \mathfrak{R}(0)$. Из него получаем

$$U = D \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho^*} \right) = \frac{2}{\gamma + 1} \left(D - \frac{a_1^2}{D} \right)$$

или

$$D = \frac{\gamma + 1}{4} U + \sqrt{\left(\frac{\gamma + 1}{4} U \right)^2 + a_1^2}.$$

Полагая согласно закону плоских сечений $U = V_1 \operatorname{tg} \alpha$, $D = V_1 \operatorname{tg} \beta$ и обозначив $\frac{V_1}{a_1} \operatorname{tg} \alpha = K$, $\frac{V_1}{a_1} \operatorname{tg} \beta = K_c$, приходим к следующим зависимостям:

$$\begin{aligned}K_c &= \frac{\gamma + 1}{4} K + \sqrt{\left(\frac{\gamma + 1}{4} K \right)^2 + 1}, \\ c_p M^2 &= \frac{4}{\gamma + 1} (K_c^2 - 1),\end{aligned}$$

уже полученным нами ранее при рассмотрении обтекания плоской пластины (гл. I, § 3). На рисунках 2.10 и 2.11 произведено сравнение этих зависимостей с точными расчетами [7].

Не останавливаясь подробнее на этом простом примере, рассмотрим более интересный случай обтекания конуса ($\nu=2$). Уравнения (2.15) приобретают в этом случае вид

$$2 \frac{P^*}{\rho_1} \mathcal{R} \mathcal{R}' \Omega = 1, \quad \left(\frac{\mathcal{F}}{\Omega T} \right)' = 0, \quad 2\mu^2 \mathcal{R}'' + \mu \mathcal{R}' + \mathcal{F}' \mathcal{R} \frac{P^*}{\rho_1 D^2} = 0.$$

Для определения трех произвольных постоянных, входящих в решение, и константы D по-прежнему служат крайевые условия (2.16) на ударной волне и условие (2.17) на поршне

$$\mathcal{R}(0) = \frac{U}{D}.$$

Задача о расширении поршня с постоянной скоростью была решена для случая сферической симметрии течения в работах [17, 18] путем численного интегрирования уравнений, эквивалентных уравнениям (2.15), но в других (эйлеровых) переменных. Для случая

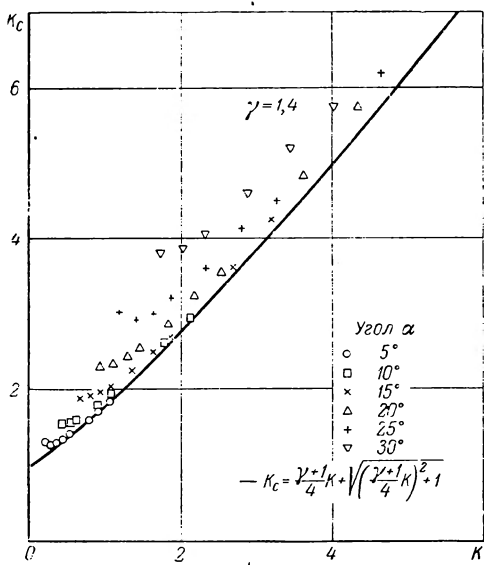


Рис. 2.10. Угол между головным скачком уплотнения и направлением набегающего потока при сверхзвуковом обтекании клина.

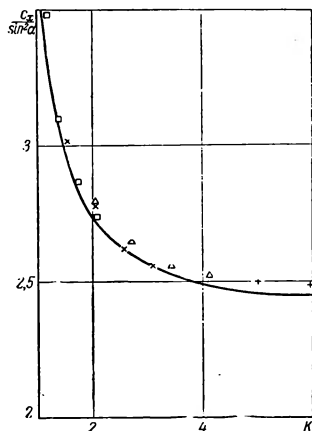


Рис. 2.11. Давление на поверхности клина при сверхзвуковой скорости.

цилиндрического поршня результаты расчетов были приведены в работе [7]. На рисунках 2.12 и 2.5 дано сравнение построенных согласно этой работе зависимостей величин $K_c = \frac{V}{a_1} \operatorname{tg} \beta$ и $c_p / \sin^2 \alpha$ от параметра $K = \frac{V}{a_1} \operatorname{tg} \alpha$ с результатами точных расчетов обтекания конуса [13]. Результаты численного решения, полученного при использовании закона плоских сечений, изображены на рис. 2.12 и 2.5

сплошными кривыми и хорошо совпадают с результатами решения точных уравнений при малых значениях угла у вершины конуса (о способах получения приведенных на рисунках пунктирных кривых будет сказано ниже, в § 3 гл. III).

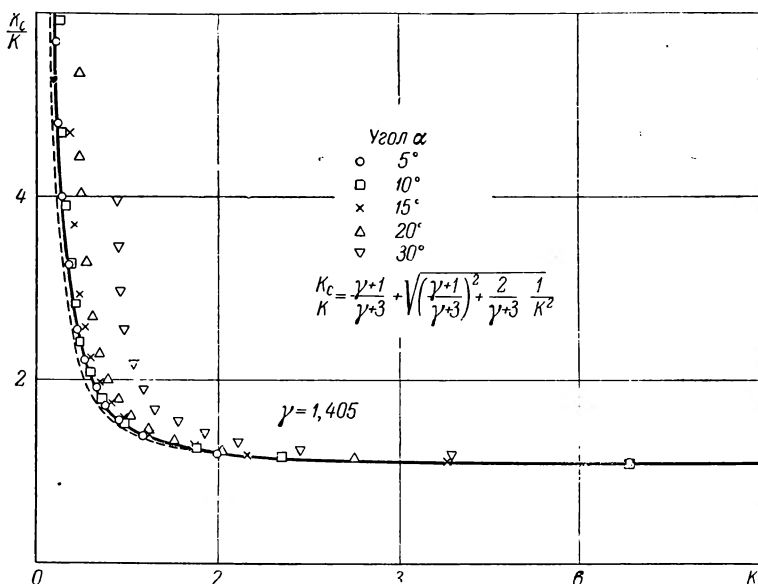


Рис. 2.12. Угол между головным скачком уплотнения и направлением набегающего потока при сверхзвуковом обтекании конуса.

Обтекание тел, имеющих уравнение образующей в виде степенного одночлена. В случае $n \neq 0$ система уравнений (2.15) была изучена впервые (в эйлеровых переменных) в работе [19]. Путем качественного исследования в этой работе было показано, что при задании закона движения поршня решение задачи существует не при всех значениях показателя n в законе (2.13) расширения поршня, но не было дано физическое объяснение этого факта. Расчеты, выполненные в работе [19] путем численного интегрирования, относились к случаю сферической симметрии ($\nu = 3$) и потому не представляют интереса для аэродинамических приложений. Результаты расчетов для случая $\nu = 2$ имеются в работах [20] и [21]; в работах [21, 22] дано следующее объяснение требованию $\frac{2n}{\nu(n+1)} > -1$, выполнение которого необходимо для существования решения. Согласно формуле (2.8) сопротивление, действующее на головную часть тела, равно

$$X = \int_0^{\bar{R}} p (2\pi R)^{\nu-1} dR.$$

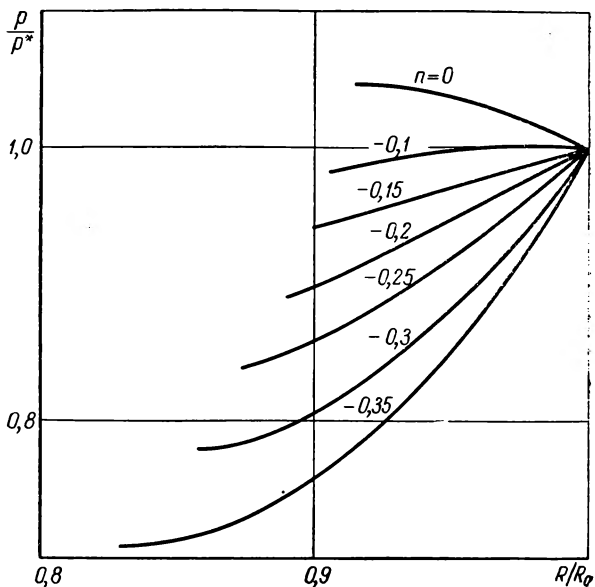


Рис. 2.13. Распределение давлений в потоке при обтекании тел вращения с образующей степенной формы.

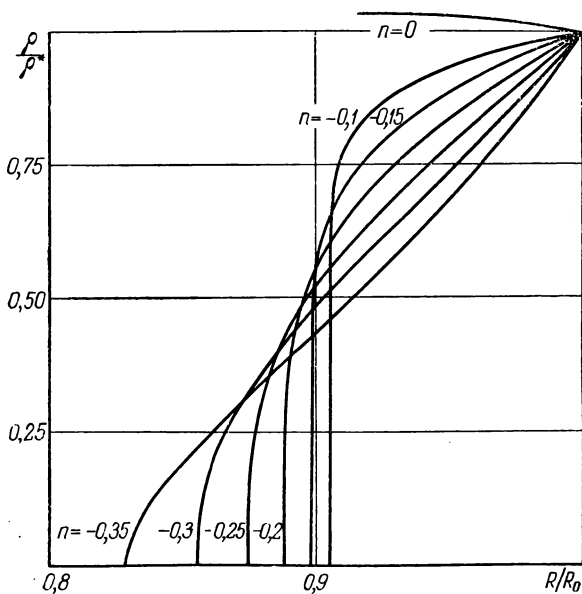


Рис. 2.14. Распределение плотностей в потоке при обтекании тел вращения с образующей степенной формы.

В рассматриваемом случае

$$p = \frac{2}{\gamma+1} \frac{\mathcal{P}(0)}{\mathcal{K}^2(0)} \rho_1 C^2 \left(\frac{n+1}{C} R \right)^{\frac{2n}{n+1}},$$

так что

$$X = \frac{2^\nu \pi^{\nu-1}}{\gamma+1} \frac{\mathcal{P}(0)}{\mathcal{K}^2(0)} \rho_1 C^2 \left(\frac{n+1}{C} \right)^{\frac{2n}{n+1}} \int_0^{\bar{R}} R^{\frac{2n}{n+1} + \nu - 1} dR. \quad (2.18)$$

Интеграл в правой части этого выражения расходится при $\frac{2n}{\nu(n+1)} \leq -1$. Иными словами, сопротивление головной части тела

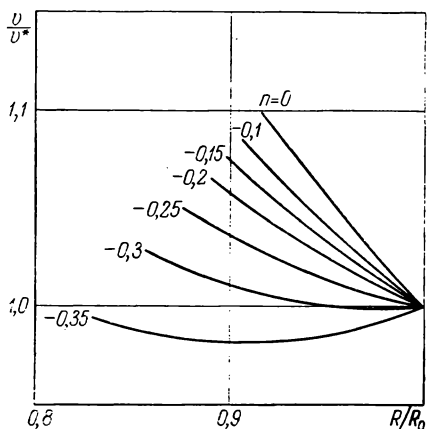


Рис. 2.15. Распределение поперечной скорости в потоке при обтекании тел вращения с образующей степенной формы.

с образующей в виде степенного одночлена имеет конечное значение лишь при $n > -\frac{\nu}{\nu+2}$, т. е. для плоских контуров при $n > -\frac{1}{3}$, а для тел вращения — при $n > -\frac{1}{2}$.

На рисунках 2.13—2.15 приведены для случая цилиндрической симметрии ($\nu=2$) и $\gamma=1,4$ распределения по радиусу давления, плотности и скорости газа для нескольких значений n , построенные на основании таблиц [20]. Некоторые численные значения из этих таблиц приведены ниже.

$n = 0$

$\frac{R}{R_0}$	$\frac{p}{p^*}$	$\frac{\rho}{\rho^*}$	$\frac{v}{v^*}$
1,000	1,0000	1,0000	1,0000
0,995	1,0052	1,0040	1,0059
0,990	1,0105	1,0077	1,0116
0,985	1,0154	1,0112	1,0174
0,980	1,0202	1,0145	1,0233
0,975	1,0244	1,0175	1,0289
0,970	1,0284	1,0203	1,0346
0,965	1,0320	1,0228	1,0403
0,960	1,0352	1,0251	1,0460
0,955	1,0383	1,0273	1,0516
0,950	1,0407	1,0291	1,0573
0,945	1,0430	1,0307	1,0630
0,940	1,0451	1,0321	1,0688
0,935	1,0468	1,0332	1,0746
0,930	1,0481	1,0341	1,0803
0,925	1,0490	1,0347	1,0862
0,920	1,0496	1,0351	1,0921
0,915	1,0497	1,0352	1,0982
0,9149	1,0497	1,0352	1,0983

 $n = -0,10$

$\frac{R}{R_0}$	$\frac{p}{p^*}$	$\frac{\rho}{\rho^*}$	$\frac{v}{v^*}$
1,000	1,000	1,0000	1,0000
0,995	1,001	0,9960	1,0041
0,990	1,001	0,9910	1,0083
0,985	1,002	0,9860	1,0126
0,980	1,002	0,9800	1,0168
0,975	1,002	0,9740	1,0210
0,970	1,001	0,9670	1,0254
0,965	1,001	0,9600	1,0297
0,960	1,000	0,9520	1,0340
0,955	0,999	0,9435	1,0384
0,950	0,998	0,9346	1,0428
0,945	0,997	0,9238	1,0473
0,940	0,996	0,9127	1,0518
0,935	0,994	0,8995	1,0563
0,930	0,992	0,8838	1,0610
0,925	0,990	0,8657	1,0658
0,920	0,988	0,8436	1,0707
0,915	0,987	0,8140	1,0754
0,910	0,986	0,769	1,0803
0,9050	0,982	0	1,0855

 $n = -0,15$

$\frac{R}{R_0}$	$\frac{p}{p^*}$	$\frac{\rho}{\rho^*}$	$\frac{v}{v^*}$
1,000	1,0000	1,0000	1,0000
0,995	0,9960	0,9912	1,0024
0,990	0,9940	0,9810	1,0056
0,985	0,9905	0,9710	1,0089
0,980	0,9890	0,9607	1,0122
0,975	0,9861	0,9502	1,0156
0,970	0,9840	0,9388	1,0190
0,965	0,9813	0,9267	1,0226
0,960	0,9780	0,9138	1,0262
0,955	0,9752	0,9004	1,0297
0,950	0,9725	0,8870	1,0334
0,945	0,9695	0,8720	1,0371
0,940	0,9660	0,8555	1,0408
0,935	0,9630	0,8382	1,0447
0,930	0,9600	0,8190	1,0486
0,925	0,9567	0,7966	1,0528
0,920	0,9534	0,7727	1,0567
0,915	0,9500	0,7435	1,0609
0,910	0,9470	0,7030	1,0650
0,905	0,9450	0,6590	1,0694
0,900	0,9430	0,5730	1,0739
0,8971	0,9420	0	1,0760

 $n = -0,20$

$\frac{R}{R_0}$	$\frac{p}{p^*}$	$\frac{\rho}{\rho^*}$	$\frac{v}{v^*}$
1,000	1,0000	1,0000	1,0000
0,995	0,9945	0,9855	1,0022
0,990	0,9900	0,9700	1,0044
0,985	0,9840	0,9550	1,0066
0,980	0,9790	0,9400	1,0090
0,975	0,9735	0,9230	1,0114
0,970	0,9680	0,9076	1,0138
0,965	0,9630	0,8910	1,0165
0,960	0,9580	0,8740	1,0191
0,955	0,9530	0,8560	1,0219
0,950	0,9480	0,8380	1,0246
0,945	0,9440	0,8190	1,0274
0,940	0,9380	0,7988	1,0303
0,935	0,9330	0,7776	1,0333
0,930	0,9290	0,7550	1,0365
0,925	0,9240	0,7330	1,0396
0,920	0,9190	0,7050	1,0430
0,915	0,9150	0,6770	1,0462
0,910	0,9110	0,6440	1,0497
0,905	0,8980	0,6009	1,0532
0,900	0,8950	0,5550	1,0568
0,895	0,8940	0,4930	1,0601
0,890	0,8920	0,3700	1,0643
0,888	0,8910	0	1,0654

$n = -0,25$

$\frac{R}{R_0}$	$\frac{p}{p^*}$	$\frac{\rho}{\rho^*}$	$\frac{v}{v^*}$
1,000	1,0000	1,0000	1,0000
0,995	0,9910	0,9792	1,0009
0,990	0,9821	0,9585	1,0018
0,985	0,9736	0,9377	1,0029
0,980	0,9652	0,9171	1,0041
0,975	0,9570	0,8960	1,0053
0,970	0,9490	0,8750	1,0066
0,965	0,9413	0,8541	1,0082
0,960	0,9333	0,8328	1,0097
0,955	0,9265	0,8112	1,0113
0,950	0,9192	0,7891	1,0130
0,945	0,9121	0,7668	1,0149
0,940	0,9054	0,7442	1,0168
0,935	0,8986	0,7206	1,0188
0,930	0,8921	0,6963	1,0209
0,925	0,8857	0,6712	1,0231
0,920	0,8797	0,6456	1,0254
0,915	0,8737	0,6183	1,0277
0,910	0,8679	0,5893	1,0302
0,905	0,8625	0,5583	1,0328
0,900	0,8572	0,5245	1,0354
0,895	0,8521	0,4860	1,0382
0,890	0,8475	0,4424	1,0410
0,885	0,8431	0,3874	1,0440
0,880	0,8390	0,3101	1,0470
0,875	0,8358	0	1,0500

 $n = -0,30$

$\frac{R}{R_0}$	$\frac{p}{p^*}$	$\frac{\rho}{\rho^*}$	$\frac{v}{v^*}$
1,000	1,0000	1,0000	1,0000
0,995	0,9804	0,9719	0,9984
0,990	0,9680	0,9440	0,9979
0,985	0,9547	0,9175	0,9976
0,980	0,9425	0,8901	0,9975
0,975	0,9320	0,8642	0,9974
0,970	0,9205	0,8390	0,9975
0,965	0,9098	0,8135	0,9976
0,960	0,8990	0,7870	0,9979
0,955	0,8906	0,7635	0,9983
0,950	0,8809	0,7380	0,9987
0,945	0,8721	0,7135	0,9994
0,940	0,8632	0,6887	1,0001
0,935	0,8551	0,6642	1,0009
0,930	0,8472	0,6397	1,0017
0,925	0,8392	0,6145	1,0028
0,920	0,8334	0,5895	1,0040
0,915	0,8257	0,5640	1,0052
0,910	0,8178	0,5379	1,0065
0,905	0,8130	0,5116	1,0080
0,900	0,8057	0,4844	1,0095
0,895	0,8000	0,4560	1,0111
0,890	0,7952	0,3952	1,0128
0,885	0,7908	0,3952	1,0146
0,880	0,7870	0,3618	1,0167
0,875	0,7840	0,3260	1,0185
0,870	0,7830	0,2844	1,0206
0,865	0,7820	0,2352	1,0228
0,860	0,7810	0,1690	1,0251
0,858	0,7800	0	1,0266

 $n = -0,35$

$\frac{R}{R_0}$	$\frac{p}{p^*}$	$\frac{\rho}{\rho^*}$	$\frac{v}{v^*}$	$\frac{R}{R_0}$	$\frac{p}{p^*}$	$\frac{\rho}{\rho^*}$	$\frac{v}{v^*}$	$\frac{R}{R_0}$	$\frac{p}{p^*}$	$\frac{\rho}{\rho^*}$	$\frac{v}{v^*}$
1,000	1,0000	1,0000	1,0000	0,940	0,8277	0,6302	0,9831	0,880	0,7348	0,3326	0,9832
0,995	0,9815	0,9630	0,9979	0,935	0,8179	0,6047	0,9826	0,875	0,7299	0,3195	0,9839
0,990	0,9635	0,9287	0,9959	0,930	0,8078	0,5795	0,9822	0,870	0,7259	0,2955	0,9847
0,985	0,9463	0,8940	0,9940	0,925	0,7993	0,5549	0,9817	0,865	0,7219	0,2715	0,9854
0,980	0,9309	0,8611	0,9923	0,920	0,7903	0,5309	0,9815	0,860	0,7188	0,2439	0,9864
0,975	0,9158	0,8296	0,9907	0,915	0,7819	0,5065	0,9813	0,855	0,716	0,2197	0,9873
0,970	0,9011	0,7987	0,9892	0,910	0,7735	0,4828	0,9813	0,850	0,714	0,1925	0,9885
0,965	0,8870	0,7681	0,9880	0,905	0,7662	0,4592	0,9814	0,845	0,713	0,1635	0,9896
0,960	0,8744	0,7389	0,9868	0,900	0,7586	0,4355	0,9816	0,840	0,712	0,1316	0,9908
0,955	0,8616	0,7109	0,9858	0,895	0,7526	0,4127	0,9818	0,835	0,712	0,0926	0,9921
0,950	0,8496	0,6838	0,9847	0,890	0,7464	0,3893	0,9822	0,830	0,712	0,0392	0,9935
0,945	0,8392	0,6575	0,9839	0,885	0,7405	0,3662	0,9827	0,828	0,712	0	0,9937

Давление между ударной волной и поршнем возрастает несколько по направлению к поршню в случае $n=0$, т. е. при обтекании конуса; при отрицательных значениях n , т. е. при обтекании тел с выпуклой образующей, давление на поршне продолжает быть больше давления за ударной волной до значений n , равных примерно — 0,075; при меньших значениях n давление уменьшается по направлению к поршню и тем в большей степени, чем меньше n .

На рисунке 2.16 светлыми кружками нанесены значения отношения давления на поршне и за ударной волной, найденные из численного решения задачи [20]. Проходящая через эти кружки кривая

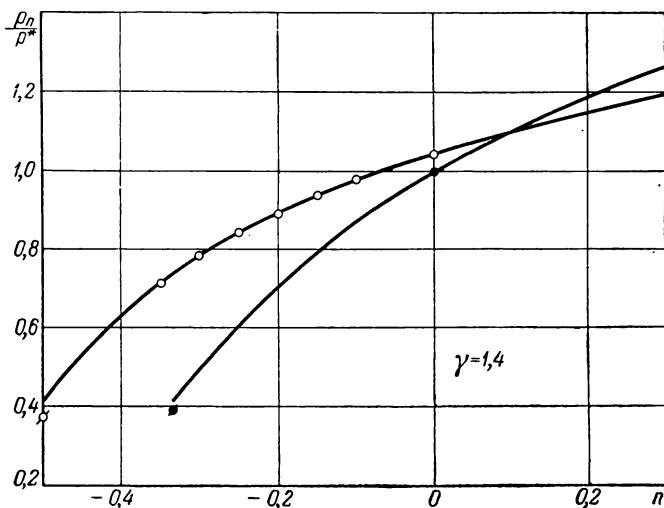


Рис. 2.16. Отношение давления на поверхности тела к давлению за ударной волной для тел степенной формы.

соответствует приближенному решению задачи, излагаемому в § 8 следующей главы (забегая вперед, отметим, что другая кривая на этом рисунке относится к случаю плоского поршня). Рис. 2.17 иллюстрирует влияние отношения теплоемкостей γ на величину давления на поршне [23]. При $n=0$, а также при близких к нулю отрицательных значениях n влияние γ на величину давления незначительно; влияние усиливается лишь при приближении n к $-\frac{1}{2}$. Это замечание будет использовано в § 6 гл. III при изложении приближенного метода расчета течений газа с сильными ударными волнами.

Для распределения плотности между ударной волной и поршнем (см. рис. 2.14) характерно, что при $n=0$ плотность всюду остается конечной, при $n < 0$ плотность на поршне обращается в нуль, при

$n > 0$ плотность на поршне обращается в бесконечность (это следует из второго уравнения (2.15) и из того, что давление на поршне остается конечным при всех n). Благодаря тому, что при $n < 0$ вблизи поршня образуется область с малыми значениями плотности, отношение расстояния от центра симметрии ударной волны и радиуса поршня увеличивается при уменьшении n — сначала медленно, а при $n \rightarrow -\frac{1}{2}$ — очень быстро. На рис. 2.18 светлыми кружками нане-

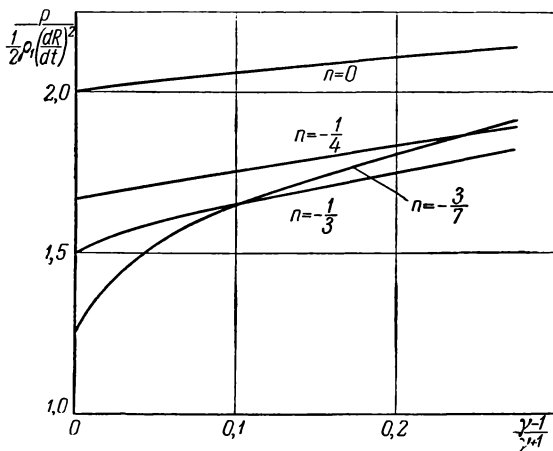


Рис. 2.17. Зависимость давления на поверхности тела степенной формы от величины параметра $\varepsilon = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$, характеризующего отношение теплоемкостей.

сены значения отношения $\frac{\bar{R}}{R_0}$ для нескольких значений n (кривые и остальные кружки имеют тот же смысл, что и на рис. 2.16). Для целей дальнейшего (§ 6 гл. III) отметим, что, несмотря на увеличение расстояния между ударной волной и поршнем при уменьшении n , основная масса газа продолжает быть сосредоточенной в сравнительно тонком слое вблизи ударной волны. Отметим также, что наличие области с малой плотностью вблизи поверхности обтекаемого тела может представлять интерес для облегчения охлаждения этой поверхности при большой сверхзвуковой скорости.

Пользуясь выражением (2.18), легко получить формулу для коэффициента сопротивления:

$$c_x = \frac{2^{\nu-1} (n+1)^3}{+12n + \nu(n+1)} \frac{\mathcal{P}(0)}{\mathcal{R}^2(0)} \tau^2, \quad (2.19)$$

где τ — относительная толщина тела. Зависимость $\mathcal{P}(0)$ и $\mathcal{R}(0)$ от n и γ определяется при численном решении задачи о поршне.

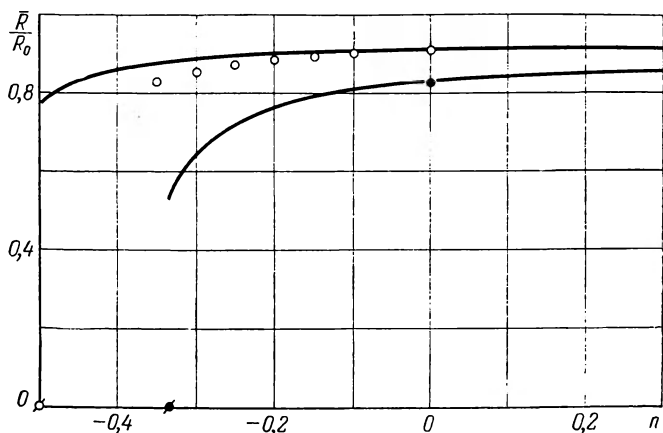


Рис. 2.18. Отношение расстояния от оси (плоскости) симметрии образующей обтекаемого тела к расстоянию от той же оси (плоскости) ударной волны при обтекании тел степенной формы.

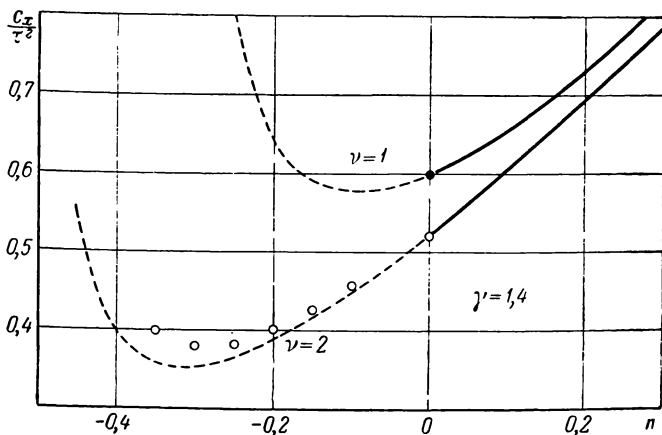


Рис. 2.19. Коэффициент сопротивления тел степенной формы с заданной относительной толщиной.

На рис. 2.19 приведены значения $\frac{C_x}{\tau^2}$ в зависимости от n для тел вращения (светлые кружки). Из рисунка следует, что при заданном

удлинении тела существует значение n , при котором сопротивление тела минимально. Это значение равно примерно — 0,29. Аналогичным образом на рис. 2.20 представлены значения c_x в зависимости

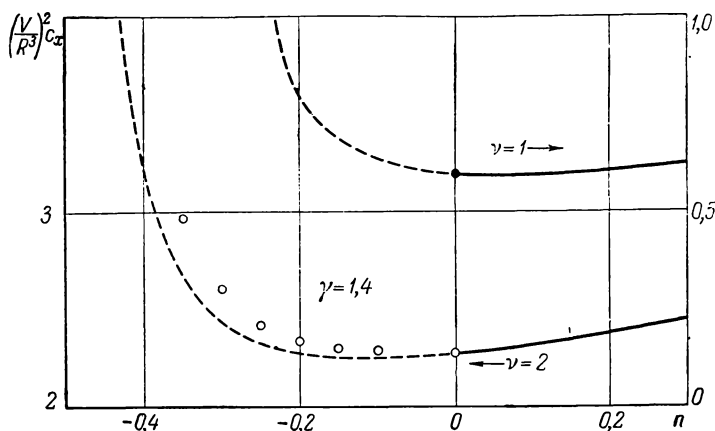


Рис. 2.20. Коэффициент сопротивления тел степенной формы с заданным объемом и наибольшим сечением.

от n при фиксированных значениях объема V и радиуса наибольшего сечения тела, вычисленные по формуле .

$$c_x = \frac{2^{\nu+1} \pi^2 (\nu-1)}{\gamma+1} \frac{(n+1)^3}{[2n+\nu(n+1)][1+\nu(n+1)]^2} \left(\frac{R^{\nu+1}}{V}\right) \frac{\mathcal{P}(0)}{\mathcal{X}^2(0)}. \quad (2.20)$$

В этом случае минимум сопротивления тела достигается (несколько можно судить по результатам численных расчетов) при $n=0$. При этом $c_x = \left(\frac{V}{R^3}\right)^2 = 2,28$.

Для тела, имеющего минимальное сопротивление при заданном удлинении, $c_x = 0,38\tau^2$; для конуса ($n=0$) с тем же удлинением $c_x = 0,52\tau^2$.

Таким образом, если у тела, обтекаемого потоком с большой сверхзвуковой скоростью, заменить коническую головную часть закругленной, то сопротивление тела может не только не возрасти, но даже уменьшиться (об этом говорилось в § 2 введения; напомним, что закругленная головная часть выгоднее заостренной в отношении условий ее охлаждения при большой сверхзвуковой скорости).

Кроме рассмотренных автомодельных одномерных неустановившихся движений, соответствующих обтеканию сверхзвуковым потоком тел с образующей, уравнение которой есть степенной одночлен, точные решения задач об одномерных неустановившихся движениях могут быть получены и в других случаях. Отметим случай автомодельного

движения, возникающего в газе при сильном взрыве [16] (это решение и его использование в задачах аэродинамики на основе закона плоских сечений будет рассмотрено в гл. V настоящей книги), а также случаи автомоделных движений, возникающих тогда, когда единственная безразмерная определяющая величина μ имеет вид

$$\frac{m}{\rho_1 R_* e^{t/\tau}},$$

в частности, при расширении поршня по показательному закону

$$\bar{R} = R_* e^{\frac{t}{\tau}}, \quad (2.21)$$

а для движений с плоскими волнами — и тогда, когда

$$\mu = \frac{m}{\rho_1 R_* \ln \frac{t}{\tau}}.$$

Эти движения изучены в книгах [16] и [24]. В работе [25] показано, что их можно получить посредством предельных переходов из рассмотренных выше автомоделных движений, для которых

$$\mu = \frac{m}{\frac{\rho_1}{\nu} \left(\frac{Ct^{n+1}}{n+1} \right)^\nu}.$$

Ниже приведена таблица для расчета течения [26] при расширении цилиндрического поршня по закону (2.21). Отметим, что расширению

$\frac{R}{R_0}$	$\frac{p}{p^*}$	$\frac{\rho}{\rho^*}$	$\frac{v}{v^*}$	$\frac{m}{m^*}$
1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,9962	1,0492	1,0786	1,0197	0,9507
0,9924	1,0841	1,1433	1,0325	0,9010
0,9888	1,1166	1,2121	1,0442	0,8509
0,9853	1,1518	1,2917	1,0558	0,8002
0,9820	1,1852	1,3775	1,0665	0,7504
0,9791	1,2177	1,4701	1,0762	0,7004
0,9763	1,2489	1,5698	1,0849	0,6514
0,9735	1,2815	1,6898	1,0934	0,6001
0,9710	1,3129	1,8220	1,1011	0,5482
0,9687	1,3425	1,9674	1,1078	0,4980
0,9667	1,3700	2,1258	1,1136	0,4507
0,9647	1,3944	2,3280	1,1194	0,3992
0,9629	1,4283	2,5557	1,1243	0,3507
0,9612	1,4593	2,8675	1,1292	0,2970
0,9586	1,5232	3,6848	1,1365	0,2033
0,9563	1,5645	5,9430	1,1430	0,0956
0,9552	1,5856	∞	1,1462	0,0000

поршня по этому закону соответствует обтекание тела, контур которого уходит в обе стороны в бесконечность и ударная волна имеет общую точку с телом лишь в бесконечности (рис. 2.21; толщина слоя между телом и ударной волной для наглядности сильно увеличена). Однако в случае плоских волн решение задачи о таком обтекании, как и другие решения задач об автомодельных движениях

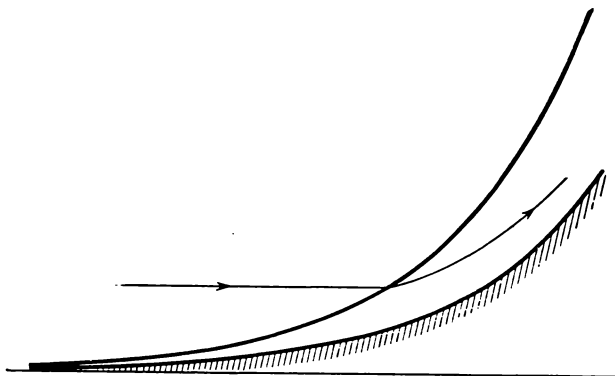


Рис. 2.21. Обтекание тела с уравнением образующей в виде показательной функции.

с ударной волной, распространяющейся по покоящемуся газу, может быть использовано для построения обтекания профилей с присоединенной головной волной у передней кромки. Действительно, придавая величине m в функции $R = R_0 \mathfrak{R} \left(\frac{m}{m^*} \right)$ различные постоянные значения, получаем семейство линий, которым в эквивалентном установившемся движении соответствуют линии тока (одна из этих линий показана на рис. 2.21). Каждую такую линию можно принять за контур одной стороны обтекаемого профиля и таким образом можно строить обтекание различных симметричных и несимметричных профилей. В случае течений с цилиндрическими волнами аналогичным образом можно строить обтекание осесимметричных тел, внешняя поверхность которых образована вращением вокруг оси симметрии выбранной линии тока; при этом цилиндрическую часть тела перед ударной волной можно удалить, считая, что обтекаемое тело имеет в этом случае впереди круговое отверстие, в которое проходит воздух (так называемое тело с протоком; тела такой формы используются в воздушно-реактивных двигателях в качестве устройств, сквозь которые воздух поступает в двигатель).

Для построения обтекания профилей или тел вращения с внутренним каналом можно использовать решения для автомодельных течений, соответствующие распространению ударной волны по сте-

пенному закону (2.13) при любом значении n ($n \neq -1$), включая и значения n , не удовлетворяющие условию $n > -\frac{v}{v+2}$. При значениях n , не удовлетворяющих этому условию, решение может быть продолжено от значения $\mu = 1$, соответствующего ударной волне, в сторону меньших значений не до значения $\mu = 0$, соответствующего поршню, а лишь до некоторого значения $\mu = \mu_{\min} > 0$, при котором в потоке возникает предельная линия *).

Фиксируя значение $m > 0$, получим в эквивалентном установившемся течении конечный отрезок линии тока, соответствующий изменению t^* (т. е. времени) от t до t/μ_{\min} . Этот отрезок линии тока может быть принят за контур профиля или тела вращения.

*) Этот факт был указан также Г. Л. Гродзовским (устное сообщение) и С. С. Григоряном [22].

ГЛАВА III

ЗАКОН СОПРОТИВЛЕНИЯ НЬЮТОНА; МЕТОД КАСАТЕЛЬНЫХ КОНУСОВ (ИЛИ КЛИНЬЕВ); ФОРМУЛА БУЗЕМАНА И МЕТОД ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

§ 1. Закон сопротивления Ньютона

Практическая важность задачи об определении сил, действующих на тела при большой сверхзвуковой скорости, пробудила интерес к разработке методов расчета давления на поверхности движущихся с такой скоростью тел.

Хорошо разработанный метод линеаризации уравнений пригоден для расчета обтекания тонких тел только при малых значениях параметра подобия K . Этот метод подробно описан в ряде руководств по аэродинамике и не будет рассматриваться ниже.

В общем случае обтекания тел потоком с большой сверхзвуковой скоростью система соотношений, описывающих движение газа, допускает некоторые упрощения (гл. I, § 4 и гл. II, § 3), но тем не менее она продолжает оставаться сложной и трудно поддается решению.

При обтекании тел (толщину которых не обязательно считать малой) потоком с очень большой сверхзвуковой скоростью упрощаются лишь краевые условия на головной ударной волне (гл. I, § 4), что фактически не облегчает решения задачи по сравнению с общим случаем.

Для расчета чисто сверхзвуковых плоских и осесимметричных течений при этом можно применять различные варианты метода характеристик; эффективные методы для расчета сверхзвуковых пространственных течений или плоских и осесимметричных течений с отошедшей ударной волной только еще начинают разрабатываться (см., например, [1—3]).

Уравнения обтекания тонких, заостренных впереди тел потоком с большой сверхзвуковой скоростью удается свести к уравнениям нестационарных плоских движений газа (гл. II, § 3). При $K \sim 1$ или $K \gg 1$ эффективным методом расчета таких движений с плоскими и цилиндрическими волнами является численный метод харак-

теристик; в последнее время разрабатываются также сулящие большие перспективы другие методы конечных разностей (см. гл. I, § 2). Однако эти методы, как и метод характеристик, весьма трудоемки, требуют применения быстродействующих вычислительных машин и не всегда удобны для качественного анализа различных свойств течений или быстрой оценки аэродинамических характеристик тела.

Как уже упоминалось в предыдущей главе, большой интерес для выяснения особенностей обтекания тел при большой сверхзвуковой скорости представляет изучение автомодельных неустановившихся течений газа.

Однако количество задач об автомодельных неустановившихся движениях газа с плоскими и цилиндрическими волнами, имеющих приложение к обтеканию тел сверхзвуковым потоком, невелико и фактически исчерпывается задачами, рассмотренными в настоящей книге (см. гл. II, § 5 и гл. V, § 2).

В связи со сказанным приобретает интерес обнаружение таких физических особенностей течений газа с большой сверхзвуковой скоростью, которые позволили бы внести дальнейшие упрощения в уравнения и тем самым обеспечили бы их эффективное решение для более или менее широкого класса обтекаемых тел.

На учете физических особенностей обтекания тел потоком с большой сверхзвуковой скоростью базируются излагаемый в настоящей главе метод пограничного слоя и метод, которому посвящена гл. IV, связанный с пренебрежением отражением возмущений от поверхности головного скачка уплотнения. Оба эти метода интересны не только потому, что с их помощью можно рассчитывать конкретные случаи обтекания тел, но еще и потому, что процесс их вывода связан с получением важных качественных сведений об общих свойствах течений газа с большой сверхзвуковой скоростью.

Для быстрых расчетов аэродинамических характеристик тел желательно иметь также простые формулы, пусть даже не обоснованные строго физическими или математическими соображениями, но хорошо аппроксимирующие более точные решения для распределения давления по поверхности тел того или иного класса. Такие простые формулы для давления дает закон сопротивления Ньютона; у заостренных впереди профилей или тел вращения давление на головной части может быть найдено, например, и по методу касательных клиньев или касательных конусов. Эти приближенные способы определения давления на поверхности тел при обтекании их потоком с большой сверхзвуковой скоростью также излагаются в настоящей главе.

Первая попытка определить, исходя из общих законов механики, сопротивление движению тел в газах и жидкостях принадлежит Ньютону [4].

Ньютон принимал, что среда, обтекающая тело, состоит из одинаковых частиц, расположенных на равных расстояниях друг от

друга и не взаимодействующих между собой. При столкновении с элементом поверхности тела частицы изменяют нормальную к элементу составляющую своего количества движения, вследствие чего и возникает сила давления потока на тело.

Согласно теории Ньютона давление на элемент поверхности тела зависит только от ориентации этого элемента по отношению к набегающему потоку частиц и не зависит от формы остальной части тела. Очевидно при этом, что сопротивление тела определяется только формой его головной части, поскольку только эта часть тела испытывает столкновения с частицами; теория Ньютона не дает возможности найти давление на участки поверхности тела, лежащие

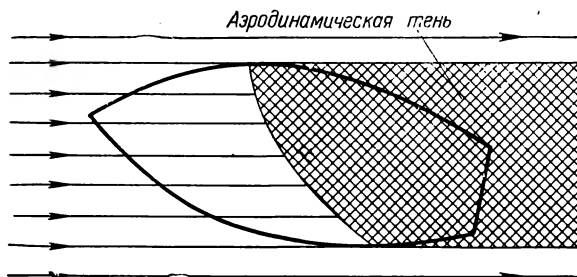


Рис. 3.1. Обтекание тела согласно модели Ньютона.

в его «аэродинамической тени» (рис. 3.1). Согласно этой теории давление на этих участках поверхности равно нулю.

Для определения величины давления потока частиц на тело согласно теории Ньютона рассмотрим элемент поверхности F , наклоненный под углом α к направлению набегающего потока. Масса частиц, сталкивающихся с этим элементом поверхности в единицу времени, равна $\rho V F \sin \alpha$, где ρ — плотность среды и V — скорость движения частиц. Сила, действующая в результате столкновений на элемент F , зависит от характера взаимодействия между частицами и поверхностью тела. При неупругом столкновении нормальная составляющая этой силы равна

$$\rho V^2 F \sin^2 \alpha,$$

так как количество движения единицы массы изменяется в нормальном к элементу поверхности направлении на величину $V \sin \alpha$. В этом случае давление, определяемое как отношение нормальной силы к площади, на которую эта сила действует, равно, следовательно,

$$p = \rho V^2 \sin^2 \alpha.$$

При неупругом столкновении с гладкой поверхностью частицы продолжают двигаться по инерции вдоль нее, сохранив при столкно-

вении касательную к поверхности составляющую количества движения (поскольку движение частиц является инерциальным, то оно происходит с постоянной по величине скоростью вдоль геодезических линий поверхности).

Полученная Ньютоном формула в течение более двух столетий служила основой для расчета сопротивления движению тел в воздухе и для определения ветровых нагрузок на элементы строений, несмотря на то, что сам Ньютон высказывал сомнение относительно возможности применять к течениям реальных жидкостей выводы, полученные им для идеализированной среды. К тому же и опыты, проведенные при небольших скоростях течения жидкости вскоре после опубликования «Математических начал», не подтвердили формулу Ньютона [5].

Однако, как уже было отмечено в гл. I на частном примере пластины под углом атаки, при обтекании тел газом с очень большой сверхзвуковой скоростью картина течения близка к той, которая была принята Ньютоном в его теории при неупругом столкновении частиц с телом [5, 6, 7]. В этом случае ударная волна в головной части тела близка к его поверхности, так что возмущение, вносимое в поток телом, не распространяется вверх по потоку и частицы газа доходят почти до поверхности тела, не изменяя своей скорости, а затем после прохождения через ударную волну движутся в тонком слое между ударной волной и поверхностью тела.

Из формул (1.17) и (1.18) следует, что при обтекании пластины с увеличением числа M скачок приближается к поверхности пластины и давление на ней (при сохранении давления в набегающем потоке) возрастает. В пределе, когда $M \rightarrow \infty$, давление на поверхности пластины определяется выражением

$$p = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_1 V^2 \sin^2 \beta,$$

а связь между углом отклонения потока α и углом скачка β принимает вид

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg} \beta \left(\frac{\gamma + 1}{2 \sin^2 \beta} - 1 \right).$$

Таким образом, при $M \rightarrow \infty$ и $\gamma \rightarrow 1$ скачок уплотнения вплотную подходит к поверхности пластины и давление на ней совпадает с давлением, вычисленным по формуле Ньютона.

Отметим, что согласно теории Ньютона давление на поверхности пластины, обтекаемой под углом атаки α , и давление на поверхности симметрично обтекаемого конуса с полууглом при вершине α одинаковы. Согласно точной теории при $M = \infty$ и $\gamma > 1$ эти величины отличны друг от друга. На рис. 3.2, а показаны точные зависимости коэффициентов давления на клине и на конусе от угла α при $M = \infty$ и $\gamma = 1,4$ (значения для конуса, полученные численным интегрированием обыкновенных дифференциальных уравнений конических

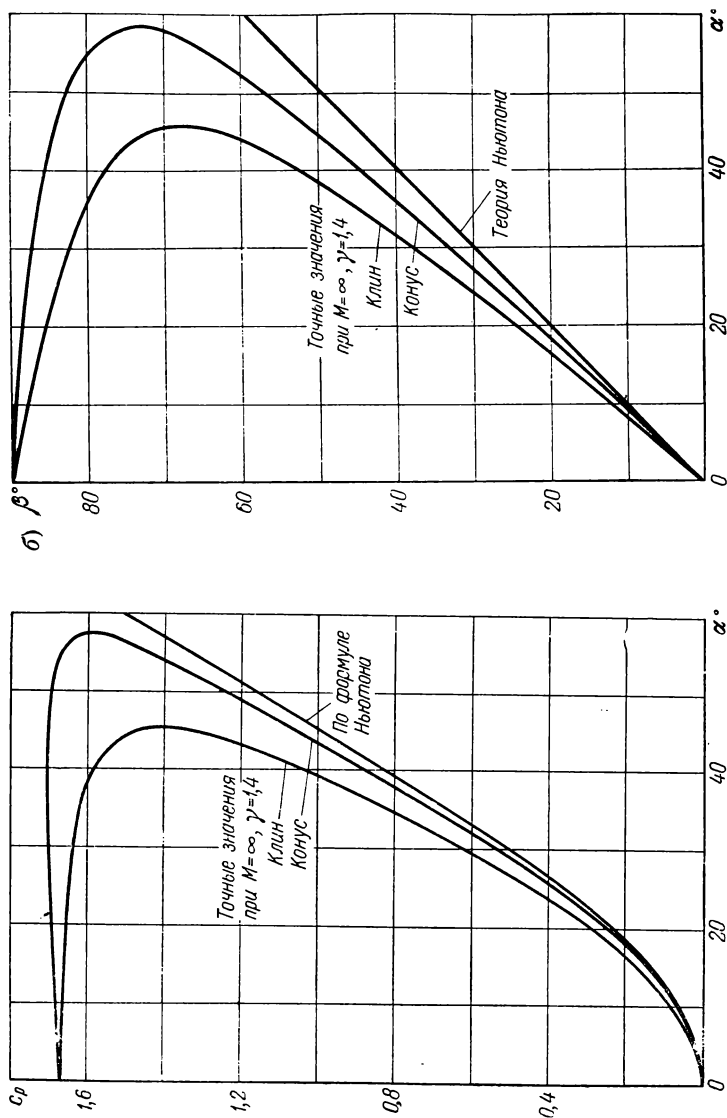


Рис. 3.2. Давление на обтекаемой поверхности и угол между ударной волной и направлением набегающего потока при обтекании клина и конуса согласно точной теории при $M = \infty$ и $\gamma = 1,4$ и согласно модели Ньютона.

течений газа, заимствованы из таблиц [8]); там же приведена приближенная зависимость, соответствующая формуле Ньютона.

На рисунке 3.2, б произведено аналогичное сравнение зависимостей угла наклона скачка β от угла α . Как следует из рис. 3.2, формула Ньютона довольно хорошо согласуется с точными значениями давления на конусе при $M = \infty$, даже если $\gamma = 1,4$; совпадение с точным решением при том же значении γ для случая обтекания клина менее удовлетворительное.

Приведем еще некоторые примеры сравнения формулы Ньютона с более точными расчетами и с экспериментальными данными по обтеканию тел потоком воздуха с большой сверхзвуковой скоростью.

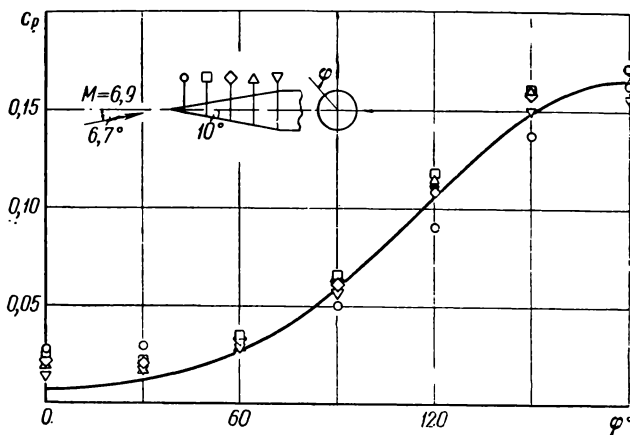


Рис. 3.3. Распределение давления по поверхности конуса, обтекаемого под углом атаки. Сравнение формулы Ньютона и экспериментальных данных.

На рис. 3.3 приведены заимствованные из работы [9] опытные данные о распределении давлений на поверхности круглого конуса, установленного под углом атаки, при $M = 6,9$. Там же сплошной кривой представлены значения давления, полученные по формуле Ньютона.

При сравнении результатов опытов по симметричному обтеканию тел вращения и плоских контуров с расчетом по формуле Ньютона было замечено [10], что можно получить существенное улучшение совпадения расчетных и экспериментальных данных, если видоизменить формулу Ньютона

$$c_p = 2 \sin^2 \alpha, \quad (3.1)$$

представив ее следующим образом:

$$c_p = c_p^* \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha_0}, \quad (3.2)$$

где c_p^* — значение коэффициента давления в передней точке тела, которое находится в соответствии с теорией сверхзвуковых течений идеального газа, и α_0 — угол между касательной к контуру тела в этой точке и направлением набегающего потока. Для тел с затупленной передней частью $\sin \alpha_0 = 1$ и c_p^* легко определяются в зависимости от числа M и от величины γ с помощью формул прямого скачка уплотнения и интеграла Бернулли (формула Рэлея):

$$c_p^* = \frac{2}{\gamma M^2} \left[\left(\frac{\gamma+1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{\gamma+1}{2\gamma M^2 - \gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} - 1 \right].$$

На рисунке 3.4 приведены вычисленные по этой формуле значения c_p^*

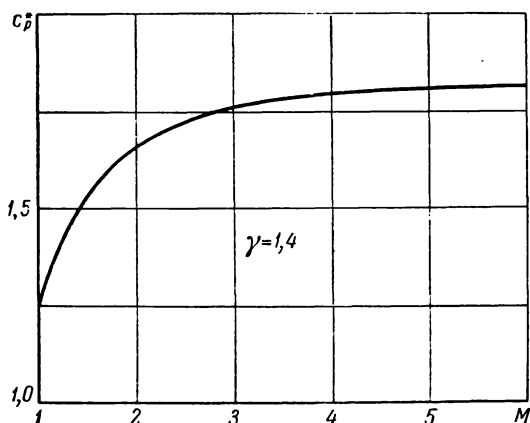


Рис. 3.4. Коэффициент давления в критической точке при обтекании сверхзвуковым потоком затупленных впереди тел.

при $\gamma = 1,4$ в зависимости от числа M . При $M = \infty$

$$c_p^* = \frac{2}{\gamma} \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{\gamma+1}{2\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Для значений γ , равных 1, $9/7$, $7/5$, $5/3$, значения c_p^* при $M = \infty$ равны, соответственно, 2,00, 1,88, 1,84, 1,76.

При обтекании заостренных впереди тел вращения и плоских контуров с присоединенной ударной волной значения c_p^* следует находить из решений задач об обтекании конуса или клина. К сожалению, точные значения c_p^* для клина выражаются через M и α_0 лишь в неявной форме, а для конуса находятся только численными методами.

Однако в случае тонких клиньев и конусов при больших сверхзвуковых скоростях могут быть получены приближенные аналити-

ческие выражения для c_p^* . Для клина такое выражение для c_p^* следует из формул (1.20) и (1.21):

$$c_p^* = \frac{4}{\gamma+1} \frac{K_c^2 - 1}{K^2} \alpha_0^2, \quad K_c = \frac{\gamma+1}{4} K + \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4} K\right)^2 + 1}.$$

Для конуса о приближенных выражениях для c_p^* будет сказано ниже, в § 3 настоящей главы.

Формулу (3.2), где c_p^* определяется в соответствии с высказанными выше соображениями, будем называть уточненной формулой Ньютона.

На помещенных ниже рисунках приведены экспериментальные данные о распределении давлений по поверхности различных затупленных впереди тел: на рис. 3.5 — по поверхности симметрично обтекаемых

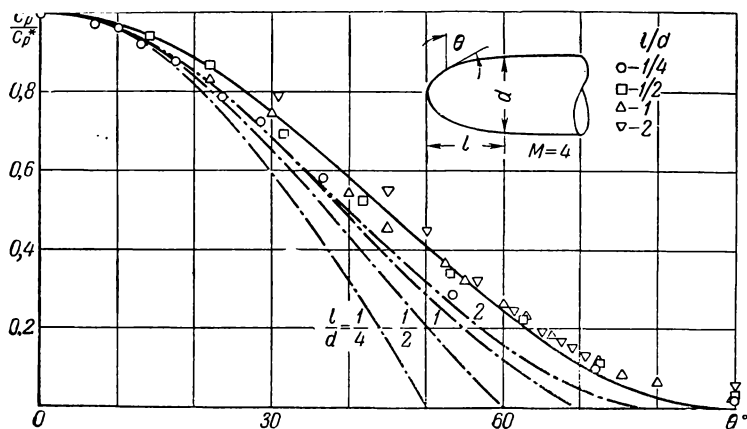


Рис. 3.5. Распределение давления по поверхности обтекаемых в продольном направлении цилиндров с головной частью в виде эллипсоидов вращения. Сравнение теоретических и экспериментальных данных.

при $M = 4,0$ круглых цилиндров *) с эллипсоидальной головной частью, имеющей удлинение, равное $1/4$, $1/2$, 1, 2 (фото обтекания этих тел приведены на рис. 3.6), на рис. 3.7 — по поверхности конуса со сферической головной частью при $M = 5,6 - 5,8$ [10], на рис. 3.8 — по поверхности круглого цилиндра, обтекаемого в поперечном направлении при $M = 3,0$ **, 4,0 [11] и 5,8 [10].

Сплошными кривыми на этих фигурах представлены значения коэффициентов давления, рассчитанные по уточненной формуле

*) Опыты проведены по просьбе автора В. И. Шульгиным.

**) Опытные данные принадлежат Г. М. Рябинкову.

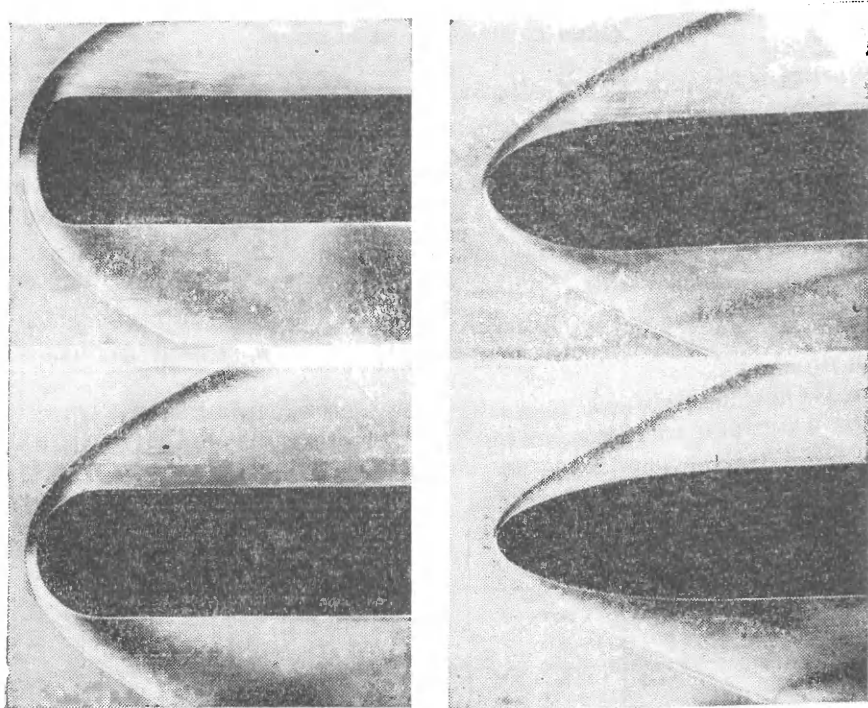


Рис. 3.6. Фотографии обтекания цилиндров с головной частью в виде эллипсоидов вращения при $M = 4$.

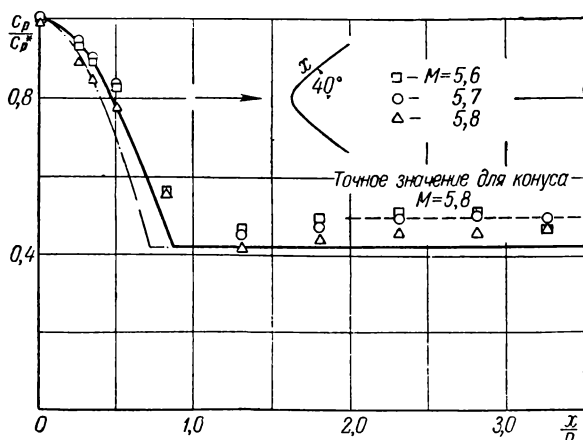


Рис. 3.7. Распределение давления по поверхности конуса со сферической головной частью. Сравнение теоретических и экспериментальных данных.

Ньютона. На рис. 3.8 пунктирными линиями нанесены также давления, найденные путем численного решения задачи об обтекании цилиндра с использованием быстродействующей вычислительной

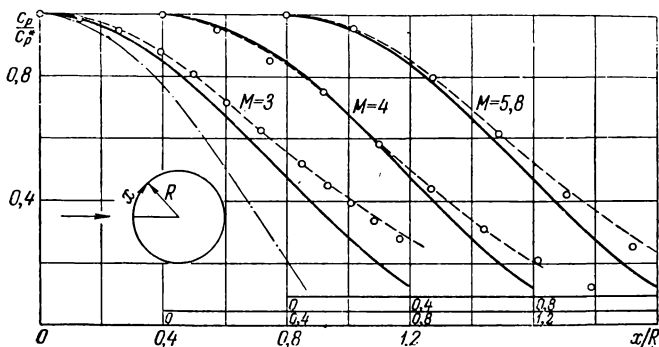


Рис. 3.8. Распределение давления по передней стороне поверхности круглого цилиндра, обтекаемого в поперечном направлении. Сравнение теоретических и экспериментальных данных.

машины [2]. Приведенные на рисунках данные показывают, что уточненная формула Ньютона хорошо согласуется с опытом при обтекании тел вращения и несколько хуже при обтекании плоских контуров.

§ 2. Использование формулы Ньютона для определения аэродинамических характеристик тел и для нахождения тел с минимальным сопротивлением

Изложенные в предыдущем параграфе результаты дают основание заключить, что формула Ньютона может быть использована для определения аэродинамических характеристик клиновидных и конусовидных тел, а также тел, подобных изображенным на рисунках 3.5—3.8, при больших сверхзвуковых скоростях в тех случаях, когда не требуется высокая точность*).

Применим эту формулу для сравнительного анализа аэродинамических характеристик некоторых тел простой формы при больших сверхзвуковых скоростях, а также для нахождения формы тел, обладающих при таких скоростях наименьшим сопротивлением.

Рассмотрим плосковыпуклый профиль с сечением в виде равнобедренного треугольника и двояковыпуклый профиль ромбовидного сечения, имеющие одинаковую наибольшую относительную толщину τ

*) Дополнительные соображения о точности формулы Ньютона будут приведены в § 4 настоящей главы.

(рис. 3.9). Ограничиваясь случаем малой относительной толщины и малых углов атаки α , получим по формуле Ньютона выражения для коэффициентов сопротивления и подъемной силы этих профилей.

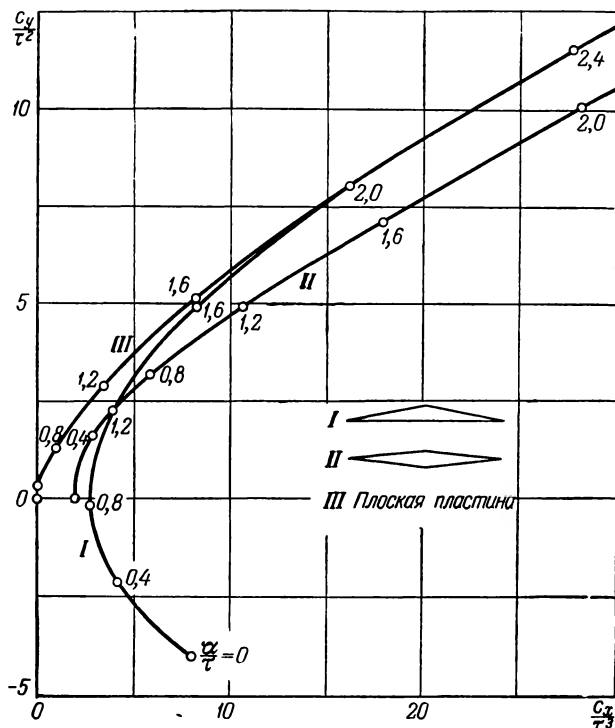


Рис. 3.9. Поляры профилей при большой сверхзвуковой скорости, найденные с использованием формулы Ньютона.

Для профиля треугольного сечения

$$\frac{c_x}{\tau^3} = 2 \left(\frac{\alpha}{\tau} \right)^3 + \left(2 - \frac{\alpha}{\tau} \right)^3,$$

$$\frac{c_y}{\tau^2} = 2 \left(\frac{\alpha}{\tau} \right)^2 - \left(2 - \frac{\alpha}{\tau} \right)^2.$$

Вторые члены в этих выражениях следует учитывать только при $\frac{\alpha}{\tau} < 2$; при больших углах атаки давление на всей верхней поверхности профиля обращается в нуль и профиль ведет себя, как плоская пластина.

Для ромбовидного профиля

$$\frac{c_x}{\tau^3} = \left(1 + \frac{\alpha}{\tau}\right)^3 + \left|1 - \frac{\alpha}{\tau}\right|^3,$$

$$\frac{c_y}{\tau^2} = \left(1 + \frac{\alpha}{\tau}\right)^2 - \left|1 - \frac{\alpha}{\tau}\right| \left(1 - \frac{\alpha}{\tau}\right).$$

В соответствии с результатами, вытекающими из установленного в § 2 гл. II закона подобия при обтекании тонких тел потоком с очень большой сверхзвуковой скоростью, величины c_x/τ^3 и c_y/τ^2 для обоих профилей зависят только от отношения α/τ . На рис. 3.9 представлены поляры этих двух профилей и поляра плоской пластины — профиля, обладающего при сверхзвуковой скорости наиболее высоким аэродинамическим качеством (т. е. отношением c_y/c_x), — рассчитанные без учета поверхностного трения*). Из рассмотрения рис. 3.9 следует определенное преимущество профиля треугольного сечения с плоской нижней поверхностью по сравнению с профилем ромбовидного сечения: аэродинамическое качество первого профиля при достаточно больших углах атаки выше, чем у второго. Отметим, что при умеренных сверхзвуковых скоростях, когда избыточное аэродинамическое давление на обращенные вперед элементы поверхности пропорционально первой степени угла встречи потока с поверхностью, а уменьшение давления на части поверхности, находящейся в аэродинамической тени, имеет тот же порядок величины, что и увеличение давления на части поверхности, обращенной вперед (теория Аккерета), ромбовидный профиль обладает более высоким качеством, чем треугольный.

Вывод относительно преимущества треугольного профиля перед ромбовидным при большой сверхзвуковой скорости является в действительности более общим. При большой сверхзвуковой скорости, когда давление на обращенные вперед элементы поверхности пропорционально квадрату угла встречи потока с поверхностью, а давление в аэродинамической тени равно нулю, решающую роль в создании аэродинамических сил, действующих на профиль, играет нижняя поверхность профиля, наклоненная под большим углом к набегающему потоку. Поэтому при таких скоростях аэродинамическое качество профилей с плоской нижней поверхностью выше, чем у двояковыпуклых профилей с той же относительной толщиной.

Аналогичный вывод может быть сделан и в отношении тел, обтекаемых пространственным потоком. На рис. 3.10 представлены (без учета поверхностного трения) поляры двух тонких тел, обладающих одинаковой площадью наибольшего поперечного сечения и одинаковой длиной: круглого конуса с полууглом раскрытия $\theta/\sqrt{2}$ и конуса полукруглого сечения с полууглом раскрытия θ . Вновь

*) Рассчитанные по более точным формулам поляры треугольного и ромбовидного профилей будут приведены на рис. 4.5.

аэродинамическое качество полуконуса выше, чем у конуса. Это обстоятельство, на которое впервые было указано в работе [12], может иметь существенное значение при выборе формы головной части летательных аппаратов, использующих подъемную силу воздуха и предназначенных для полетов с очень большой сверхзвуковой скоростью.

Применим теперь формулу Ньютона для нахождения тел, обладающих наименьшим сопротивлением движению при больших сверхзвуковых скоростях. Как уже указывалось ранее (гл. II, § 1), при таких скоростях сопротивление, связанное с возникновением ударных волн, существенно зависит от формы тела и может быть весьма значительным. При обтекании не очень тонких тел оно намного превосходит сопротивление, вызываемое наличием вязкого трения. Поэтому естественны попытки отыскания теоретическим путем формы тел, имеющих наименьшее сопротивление при данной скорости движения в идеальном газе и при выполнении тех или иных дополнительных условий (напри-

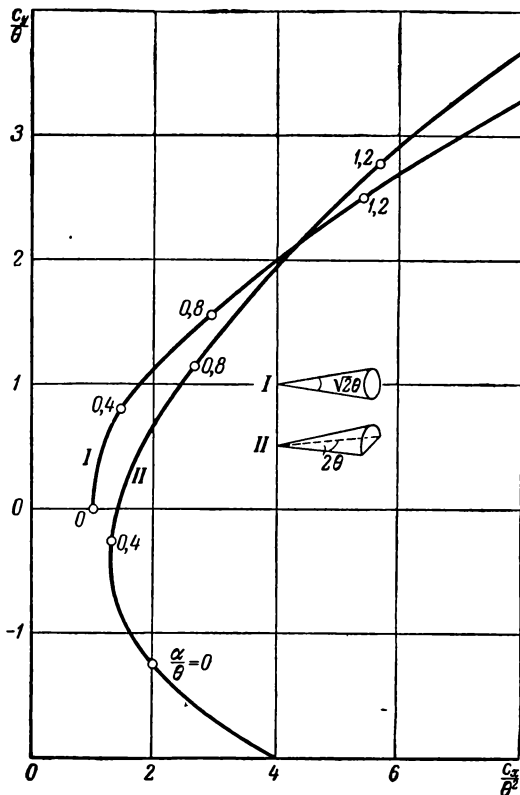


Рис. 3.10. Поляры конуса и полуконуса при большой сверхзвуковой скорости, найденные с использованием формулы Ньютона.

мер, при заданных объеме и длине или при заданных продольном и поперечном размерах тела и т. п.).

Большое число разнообразных задач об определении формы тел, обладающих наименьшим сопротивлением в сверхзвуковом потоке, решено в рамках линейной теории. Согласно этой теории в плоском потоке профилем минимального сопротивления при заданной наибольшей относительной толщине является профиль ромбовидного сечения с положением наибольшей толщины в середине хорды [13]. При других дополнительных условиях образующие профилей, обладающих

в рамках линейной теории наименьшим сопротивлением, также состоят из отрезков прямых линий. Для примера укажем, что при $M = 2$ и наибольшей относительной толщине профиля, равной 0,1, коэффициент сопротивления наивыгоднейшего профиля равен 0,0226, а коэффициент сопротивления профиля, образованного дугами окружности, равен 0,0308.

Первая задача о теле вращения с минимальным сопротивлением при сверхзвуковой скорости была решена Карманом [14], определившим форму головной части тела вращения с минимальным сопротивлением при заданном удлинении. Уравнение ее имеет вид (длина тела принята за единицу, ось x направлена по потоку тела, ось y — перпендикулярно к нему):

$$\frac{y}{y_1} = \sqrt{\frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x} - \frac{2}{\pi} \sqrt{x(1-x)(1-2x)}}.$$

Коэффициент сопротивления такой головной части равен $4y_1^2$, коэффициент сопротивления головной части оживальной формы примерно на 15% больше этого значения.

Кроме решения Кармана, известны также решения некоторых других задач о телах вращения с минимальным сопротивлением, например задачи об определении формы тела, имеющего наименьшее сопротивление при заданном объеме и заданной длине [15], о форме тела с протоком (внутренним каналом), обладающего минимальным сопротивлением при заданных длине, площади входного отверстия и площади наибольшего сечения [16].

Ряд вариационных задач решен в рамках линейной теории также и для трехмерных сверхзвуковых течений. Отметим недавно опубликованную работу [17], посвященную этому вопросу.

Однако, несмотря на наличие значительного числа решений линеаризованных задач о телах наименьшего сопротивления в сверхзвуковом потоке, эти решения не могут быть использованы по причинам, уже излагавшимся ранее, при больших сверхзвуковых скоростях. При таких скоростях для решения вариационной задачи о нахождении тела минимального сопротивления может быть использована формула Ньютона.

Первое решение такой задачи было дано самим Ньютоном [4]. Воспроизведем полученный им результат. Согласно формуле

$$p = \rho_1 V^2 \sin^2 \alpha,$$

сила сопротивления, приложенная к участку длиной l поверхности профиля или тела вращения, равна

$$X = \rho_1 V^2 \int_0^l (2\pi y)^{y-1} \frac{y'^3}{1+y'^2} dx, \quad (3.3)$$

где $\nu = 1$ для плоского и $\nu = 2$ для осесимметричного течения. Это выражение позволяет решать различные задачи об определении формы тел с наименьшим сопротивлением. Рассмотрим, например, простейший случай, когда заданы координаты концов обтекаемого контура, т. е. $y(0) = y_0$, $y(l) = y_1$ (в плоском потоке всегда можно считать $y_0 = 0$). Отыскание минимума выражения (3.3) для силы сопротивления приводится, как известно, к решению дифференциального уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \quad (3.4)$$

где $F = y^{\nu-1} \frac{y'^3}{1+y'^2}$. Так как функция F в рассматриваемом случае не содержит x явно, то

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y''$$

и в силу уравнения (3.4) получаем

$$0 = \frac{dF}{dx} - \left(y' \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + y'' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = \frac{dF}{dx} - \frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right).$$

Отсюда после интегрирования находим интеграл этого уравнения

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const},$$

который, после подстановки в него значений F и $\frac{\partial F}{\partial y'}$, приобретает вид

$$\frac{y^{\nu-1} y'^3}{(1+y'^2)^2} = \text{const}. \quad (3.5)$$

Таким образом, в плоском потоке ($\nu = 1$) экстремали представляют собой прямые линии, так что телом наименьшего сопротивления в теории Ньютона, как и в линейной теории, является клин (в точной теории сверхзвуковых течений идеального газа этот результат несправедлив; см. гл. IV, § 4). В осесимметричном потоке ($\nu = 2$) уравнение экстремалей легко представить в параметрической форме, принимая за параметр величину $p = y'$ — тангенс угла наклона элемента контура тела к направлению набегающего потока. Согласно равенству (3.5)

$$y = C \frac{(1+p^2)^2}{p^3}.$$

Путем интегрирования соотношения $dx = \frac{dy(p)}{p}$ получаем

$$x = C \left(\frac{3}{4p^4} + \frac{1}{p^2} + \ln p \right) + C_1.$$

На рисунке 3.11 представлена в виде кривой зависимость y от x , определяемая этими формулами*). Кривая имеет точку возврата при $p = \sqrt{3}$; масштабные постоянные C и C_1 в выражениях для y и x выбраны при построении кривой так, чтобы точка возврата совпала с точкой $x=0$, $y=1$ (ветвь кривой с большими значениями p должна использоваться при нахождении формы тел с малым удлинением). Обозначим через $Y_n(p)$ и $X_n(p)$ зависимости y и x от p , соответствующие сделанному выбору постоянных. Тогда, если считать длину тела равной единице, то форма образующей тела с минимальным сопротивлением при заданных y_0 и y_1 определится выражениями

$$y = \frac{Y_n(p)}{X_n(p_1) - X_n(p_0)},$$

$$x = \frac{X_n(p) - X_n(p_0)}{X_n(p_1) - X_n(p_0)},$$

где p_0 и p_1 связаны с y_0 и y_1 очевидными соотношениями

$$y_0 = \frac{Y_n(p_0)}{X_n(p_1) - X_n(p_0)},$$

$$y_1 = \frac{Y_n(p_1)}{X_n(p_1) - X_n(p_0)}.$$

Решение Ньютона использовано для изучения свойств тела с минимальным сопротивлением при большой сверхзвуковой скорости в работе [19].

§ 3. Метод касательных конусов (или клиньев)

Удовлетворительное совпадение при больших сверхзвуковых скоростях результатов расчета давления по формуле Ньютона (3.1) с опытными данными и результатами расчетов по более точным теориям свидетельствует о том, что давление на обращенный вперед элемент поверхности тела при таких скоростях определяется в основном углом встречи элемента с направлением набегающего потока.

Такая особенность течения наталкивает на мысль при рассмотрении обтекания потоком с большой сверхзвуковой скоростью заостренных впереди профилей или тел вращения считать давление на элемент поверхности равным давлению на помещенных в тот же

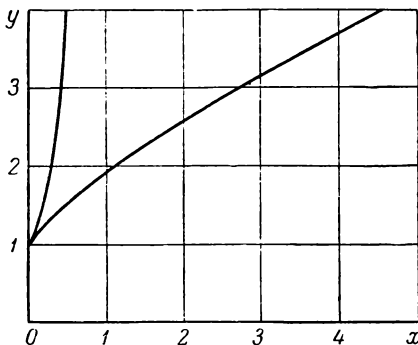


Рис. 3.11. Образующая тела вращения, обладающего минимальным сопротивлением при вычислении давления по формуле Ньютона.

*) В недавно опубликованной работе [18] эта зависимость получена численным интегрированием уравнения для экстремалей выражения (3.3) и при $p > \sqrt{3}$ не соответствует правильному решению.

поток клине (при обтекании профилей) или конусе (при обтекании тел вращения), касающихся тела в рассматриваемом сечении. Этот метод, предложенный С. В. Валландером в 1949 г. получил название метода касательных конусов (для расчета давления на симметрично обтекаемых телах вращения) или метода касательных клиньев (для расчета давления на профилях).

Неудобство метода касательных конусов (или клиньев) при всей его простоте заключается в том, что, как уже указывалось ранее, в общем случае зависимость давления на клине от угла клина представляется лишь в неявной форме, а решение задачи об обтекании конуса может быть получено лишь численными методами. Вследствие этого распределение давления по обтекаемым телам нельзя представить точно в простой аналитической форме. Для того чтобы устранить это неудобство, можно пользоваться различными приближенными аналитическими решениями задачи об обтекании клина и конуса. Простейшее решение такого рода дает формула Ньютона (3.1); поэтому метод расчета сверхзвукового обтекания заостренных профилей и тел вращения с использованием этой формулы можно рассматривать как один из вариантов метода касательных конусов или клиньев.

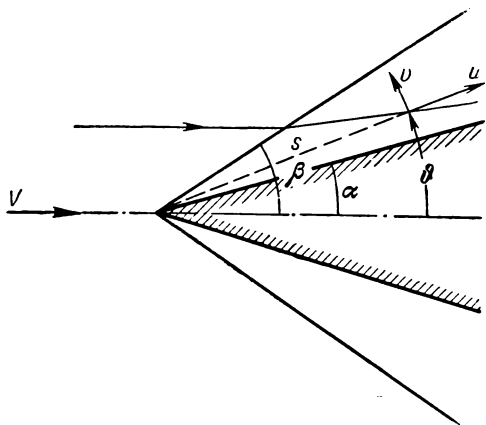


Рис. 3.12. Обтекание конуса сверхзвуковым потоком.

можно составить следующим образом. Обозначим через u составляющую скорости газа вдоль луча, выходящего из вершины конуса под углом ϑ к его оси, и через v — составляющую скорости по нормали к лучу в меридианной плоскости (рис. 3.12). Если $s(\vartheta)$ — расстояние вдоль луча от вершины конуса до некоторой линии тока, то

$$sd\vartheta = ds \frac{v}{u}.$$

Могут быть найдены и более точные аналитические выражения для определения давления на клине или на конусе, пригодные при больших сверхзвуковых скоростях. Для клина давление можно определять по формулам (1.20) и (1.21). Изложим один из методов получения выражений для давления на конусе [20] (эти же выражения будут иным путем получены ниже в настоящей главе).

Систему уравнений, описывающих симметричное обтекание круглого конуса,

Учитывая, что параметры газа сохраняют вдоль каждого луча постоянные значения (см., например [21, 22]), легко написать условие сохранения массы и условие безвихренности течения (условие отсутствия циркуляции по замкнутому контуру):

$$\frac{d}{d\vartheta} \rho v s^2 \sin \vartheta = 0$$

и

$$\frac{du}{d\vartheta} - v = 0. \quad (3.6)$$

Пользуясь интегралом Бернулли

$$a^2 = C - \frac{\gamma-1}{2} (u^2 + v^2)$$

и условием изэнтропичности течения, из которого следует

$$a^2 = \gamma \frac{P}{\rho} = \gamma C_1 \rho^{\gamma-1}$$

(C и C_1 —константы), уравнение сохранения массы после исключения s легко преобразовать к следующему виду:

$$\frac{dv}{d\vartheta} + u = \frac{a^2 (u + v \operatorname{ctg} \vartheta)}{v^2 - a^2}. \quad (3.7)$$

Для решения уравнений (3.6) — (3.7) необходимо сформулировать краевые условия на поверхности обтекаемого конуса — при $\vartheta = \alpha$ и на головном скачке уплотнения — при $\vartheta = \beta$. Так как величина β заранее неизвестна и находится при решении, то общее число необходимых для решения краевых условий равняется трем.

При $\vartheta = \alpha$ должно выполняться условие обтекания

$$v = 0.$$

В качестве условий, выполняющихся при $\vartheta = \beta$, возьмем два соотношения на скачке: уравнение сохранения импульса в проекции на касательную к скачку и уравнение сохранения массы

$$u_2 = V \cos \beta, \quad -v_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} V \sin \beta \quad (3.8)$$

(два других соотношения на скачке необходимы для нахождения констант C и C_1). Предположим, что поверхность головного скачка расположена близко от поверхности конуса, так что величина $\vartheta - \alpha$ в интересующей нас области течения между скачком и поверхностью конуса мала. Тогда можно приближенно представить искомые функции u и v в виде главных членов их разложений по степеням разности $\vartheta - \alpha$. Так как $v = 0$ при $\vartheta = \alpha$, то из уравнений (3.6) и (3.7) следует, что на поверхности конуса

$$u' = 0, \quad v' = u'' = -2u_k.$$

Поэтому вблизи поверхности конуса

$$\frac{u}{u_k} = 1 - (\vartheta - \alpha)^2, \quad \frac{v}{u_k} = -2(\vartheta - \alpha).$$

Для определения связи между β и α подставим эти выражения в соотношения на головной волне (3.8). Пренебрегая малыми величинами, после подстановки получим

$$\beta - \alpha = \frac{1}{2} \frac{\rho_1}{\rho_2} \beta. \quad (3.9)$$

Отношение плотностей $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ определяется для совершенного газа с постоянными теплоемкостями формулой (см. (1.10))

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1}{M^2 \sin^2 \beta}.$$

Отметим, что если $\frac{\rho_1}{\rho_2} \rightarrow 0$, т. е. если для совершенного газа $\gamma \rightarrow 1$ и $M \rightarrow \infty$, то $\beta \rightarrow \alpha$ и слой возмущенного газа между поверхностью конуса и головной ударной волной становится бесконечно тонким: ударная волна совпадает с поверхностью конуса. Таким образом, сделанное выше предположение о том, что разность $\beta - \alpha$ мала, оправдывается при больших значениях числа M и при γ , не намного превосходящих единицу.

В том случае, когда, кроме разности $\beta - \alpha$, мала и величина β (обтекание тонкого конуса при большой сверхзвуковой скорости), из формулы (3.9) в соответствии с законом подобия для тонких тел при больших сверхзвуковых скоростях получаем

$$K_c - K = \frac{1}{2} \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left(K_c + \frac{2}{\gamma - 1} \frac{1}{K_c} \right), \quad (3.10)$$

где $K = M\alpha$, $K_c = M\beta$. Из этого соотношения находим

$$\frac{K_c}{K} = \frac{\gamma + 1}{\gamma + 3} + \sqrt{\left(\frac{\gamma + 1}{\gamma + 3} \right)^2 + \frac{2}{\gamma + 3} \frac{1}{K^2}}.$$

На рисунке 2.12 найденная зависимость сравнивается со значениями K_c/K , полученными путем численного интегрирования точных уравнений конических течений [8]. Формуле (3.10) соответствует пунктирная кривая на рис. 2.12. Сплошная кривая на том же рисунке соответствует зависимости, найденной при использовании закона плоских сечений; эта зависимость хорошо аппроксимируется формулой

$$\frac{K_c}{K} = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2} + \frac{1}{K^2}}, \quad (3.11)$$

которая будет получена в гл. V при другом методе приближенного решения задачи об обтекании тонкого конуса потоком с большой сверхзвуковой скоростью.

При использовании таблиц [8] для получения точных значений K_c/K полагалось $K = M \operatorname{tg} \alpha$, $K_c = M \operatorname{tg} \beta$. Рассмотрение рис. 2.12 показывает, что приближенные формулы (3.10) и (3.11) хорошо аппроксимируют точные значения K_c/K в том диапазоне углов α и чисел M набегающего потока, в котором справедлив закон подобия при большой сверхзвуковой скорости, т. е. в котором вообще существует единая связь между K_c и K .

Для того чтобы определить величину давления на конусе p_k , представим, пользуясь условием адиабатичности, отношение p_k/p_1 в следующем виде:

$$\frac{p_k}{p_1} = \frac{p_k}{p_2} \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{a_k^2}{a_2^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \frac{p_2}{p_1}. \quad (3.12)$$

Второй множитель в этом выражении находим из соотношения на головном скачке уплотнения:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} K_c^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}.$$

Для нахождения первого множителя из интеграла Бернулли получаем связь между параметрами газа за скачком и у поверхности конуса:

$$\frac{a_k^2}{a_2^2} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{u_2^2}{a_2^2} \left[1 - \left(\frac{u_k}{u_2} \right)^2 + \left(\frac{v_2}{u_2} \right)^2 \right].$$

Отсюда после использования приближенных выражений для u_2 и v_2 следует

$$\frac{a_k^2}{a_2^2} \approx 1 + (\gamma-1) \frac{a_1^2}{a_2^2} (K_c - K)^2,$$

так что

$$\frac{p_k}{p_2} \approx 1 + \gamma \frac{a_1^2}{a_2^2} (K_c - K)^2.$$

Подставив в формулу (3.12) выражения для $\frac{p_k}{p_2}$ и $\frac{p_2}{p_1}$, после простых преобразований находим

$$c_p M^2 = \frac{2}{\gamma} \left(\frac{p_k}{p_1} - 1 \right) = \frac{4}{\gamma+1} (K_c^2 - 1) + 2(K_c - K)^2 \frac{\gamma+1}{\gamma-1 + \frac{2}{K_c^2}}. \quad (3.13)$$

Здесь K_c и K связаны зависимостью (3.10). На рис. 2.5 дано сравнение значений c_p/α^2 , вычисленных по формуле (3.13) (пунктирная кривая) с точными значениями [8].

При $M = \infty$ из формулы (3.13) следует

$$\frac{c_p}{a^2} = 2 \frac{(\gamma + 1)(\gamma + 7)}{(\gamma + 3)^2}.$$

Для значений γ , равных 1, $9/7$, $7/5$ и $5/3$, правая часть этого выражения равна соответственно 2,00, 2,06, 2,08 и 2,12. Формулы (3.13) и (3.10) или (3.11) могут служить в качестве основных аналитических зависимостей в методе касательных конусов.

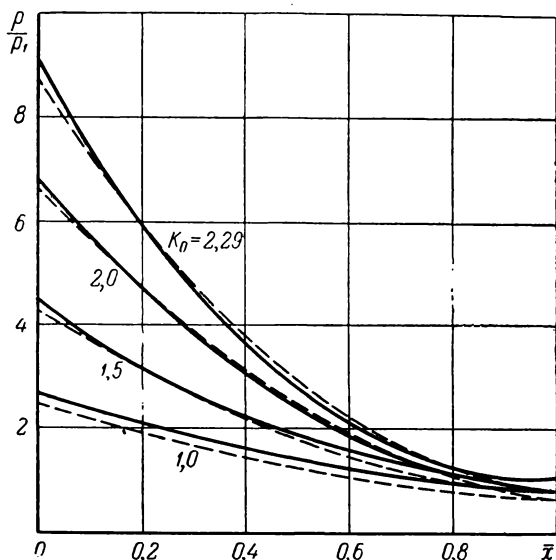


Рис. 3.13. Распределение давления по поверхности тел обливальной формы.

При использовании этого метода для расчета распределения давления на тонких телах вращения величина α должна отождествляться с местным значением тангенса угла наклона образующей тела к направлению набегающего потока, так что

$$K = M \frac{dy}{dx} = M \tau \frac{d\bar{y}}{dx} = K_0 \frac{d\bar{y}}{dx}.$$

В качестве примера использования метода касательных конусов рассмотрим обтекание семейства тел с образующей параболической формы [23]. Для таких тел

$$K = K_0(1 - \bar{x}).$$

Так как $K \rightarrow 0$ при $\bar{x} \rightarrow 1$, то естественно, что для таких тел условие $K > 1$, необходимое для использования формул (3.13) и (3.10), не выполняется вблизи заднего конца тела.

Распределение давлений будет определяться формулой (при $\gamma = 1,4$)

$$\frac{2}{\gamma} \left(\frac{P}{P_1} - 1 \right) = 1,041 K_0^2 (1 - \bar{x})^2 - 0,454 + \sqrt{1,084 K_0^4 (1 - \bar{x})^4 + 1,656 K_0^2 (1 - \bar{x})^2}.$$

На рисунке 3.13 произведено сравнение распределений давления, вычисленных по этой формуле (пунктирные кривые), с распределениями, полученными методом характеристик для значений K_0 , равных 1,0, 1,5, 2,0 и 2,29 (сплошные кривые). Точные и приближенные значения удовлетворительно совпадают между собой всюду, за исключением окрестности хвостовой части тела.

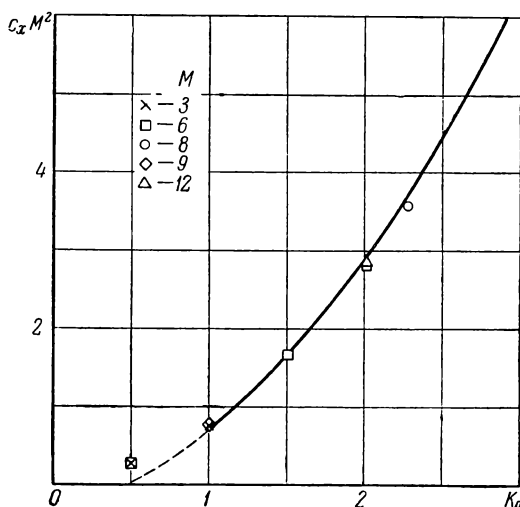


Рис. 3.14. Сопротивление тел оживальной формы.

На рисунке 3.14 приведен график функции $F(K_0)$, входящей в закон сопротивления:

$$F(K) = c_x M^2 = 0,347 K^2 - 0,454 - \frac{1}{K^4} [4,278 N^3 - (1,382 K^2 + 1,055)^2 N + (0,608 K^2 + 0,464) \ln(2,400 N + 1,309 K^2 + 1)],$$

где

$$N = \sqrt{0,297 K^4 + 0,454 K^2}.$$

Там же точками нанесены значения, полученные посредством расчета методом характеристик. Как видно из этого рисунка, метод касательных конусов с использованием формул (3.13) и (3.10) или (3.11)

для расчета давления дает весьма удовлетворительную точность при определении коэффициента сопротивления при $K_0 > 1$, по крайней мере в диапазоне $\tau < \frac{1}{3}$ и $M > 3$.

§ 4. Формула Буземана

Выше было установлено, что в случае обтекания клина или симметричного обтекания круглого конуса совершенным газом при $\gamma = 1$ и при $M = \infty$ частицы газа движутся прямолинейно в прилегающем к обтекаемой поверхности бесконечно тонком слое, причем плотность газа в этом слое бесконечно велика. Давление на поверхности клина и конуса совпадает с давлением за скачком уплотнения и определяется формулой Ньютона

$$p = \rho_1 V^2 \sin^2 \alpha.$$

В общем случае сверхзвукового движения тел нормальная составляющая скорости газа за головной ударной волной выражается формулой (см. (1.9))

$$v_n = \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) D,$$

где D — нормальная скорость распространения головной волны. Если отношение плотностей в скачке неограниченно возрастает, т. е. если для совершенного газа в формуле (1.18) положить $\gamma \rightarrow 1$ и $M \rightarrow \infty$, то головная волна будет совпадать с поверхностью тела, так как краевое условие на поверхности тела $v_n = V_n$ (V_n — нормальная составляющая скорости точек поверхности тела) будет при этом удовлетворено. Однако в общем случае давление на поверхности тела не будет равняться давлению за головной ударной волной, так как при движении частиц газа по криволинейным траекториям следует принимать во внимание центробежную силу, которая должна уравновешиваться разностью давлений между точками за ударной волной и точками на поверхности тела [24].

Несмотря на бесконечно малую толщину слоя, эта разность имеет конечное значение из-за бесконечно большой плотности газа в слое. Величина разности давлений зависит от распределения скорости и плотности газа по толщине слоя. Примем в соответствии с концепцией о неупругом столкновении и об отсутствии сил трения, что после столкновения с поверхностью скорость частиц остается в дальнейшем неизменной и частицы движутся по геодезическим линиям поверхности. При этом предположении определим разность давлений в слое для случаев плоского и осесимметричного потоков*).

*) При различных предположениях относительно распределения параметров газа в слое влияние центробежных сил при обтекании тел вращения проанализировано в работе [25]. Для случая обтекания тел произвольной формы учет центробежных сил при сформулированном в настоящем параграфе предположении произведен в работах [26] и [27].

Рассмотрим движение частиц вдоль поверхности тела после соударения с ним (рис. 3.15; изображенный на рисунке слой между пунктирной линией и контуром тела, в котором движутся частицы, испытавшие влияние тела, нужно мыслить бесконечно тонким). В точке с координатой x разность dp давлений в элементарном

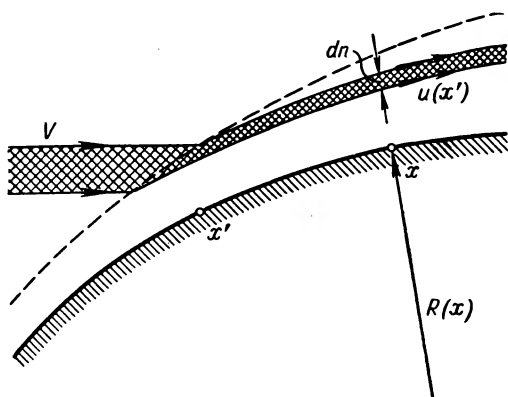


Рис. 3.15. К выводу формулы Буземана.

слое, состоящем из частиц, столкнувшихся с поверхностью вблизи точки с координатой x' и имеющих скорость $u(x')$, равна следующей величине:

$$dp = \frac{\rho(x, x') u^2(x')}{R(x)} dn. \quad (3.14)$$

Здесь $R(x)$ — радиус кривизны обтекаемого контура, dn — толщина упомянутого элементарного слоя по внешней нормали к поверхности. Из условия сохранения массы в слое получаем

$$\rho(x, x') u(x') l(x) dn = \rho_1 V dF(x'),$$

где $l(x) = 1$ и $l(x) = 2\pi r(x)$ соответственно в случае плоских и осесимметричных течений, F — площадь сечения обтекаемого тела плоскостью, нормальной направлению набегающего потока, и через r обозначен радиус образующей тела вращения.

Используя это выражение, а также то, что $R = -\frac{dx}{d\alpha} = -\frac{1}{\sin \alpha} \frac{dr}{d\alpha}$, преобразуем соотношение (3.14) к виду

$$dp = -\rho_1 V \sin \alpha \frac{d\alpha}{dF} u(x') dF(x').$$

Так как касательная к телу составляющая скорости частиц остается при столкновении неизменной, то $u(x') = V \cos \alpha(x')$. Интегрируя полученное выражение и принимая во внимание, что на внешней

границе слоя $p = \rho_1 V^2 \sin^2 \alpha$, найдем давление на поверхности тела:

$$p = \rho_1 V^2 \left(\sin^2 \alpha + \sin \alpha \frac{d\alpha}{dF} \int_{F_0}^F \cos \alpha dF \right). \quad (3.15)$$

В отличие от формулы Ньютона, согласно этому выражению давление в данной точке обтекаемой поверхности определяется не только ориентацией элемента поверхности по отношению к набегающему потоку, но и формой всей поверхности, расположенной выше по течению.

Формула (3.15) была впервые приведена в работе [24], вследствие чего мы будем называть ее формулой Буземана. Для дальнейшего перепишем формулу Буземана в следующем уточненном виде:

$$c_p = \frac{c_p^*}{\sin^2 \alpha_0} \left(\sin^2 \alpha + \sin \alpha \frac{d\alpha}{dF} \int_{F_0}^F \cos \alpha dF \right).$$

Здесь c_p^* и α_0 имеют те же значения, что и в уточненной формуле Ньютона (3.2).

Формулой (3.15) следует пользоваться, как и формулой Ньютона, только при $p > 0$. В точке, где давление обращается в нуль, слой уплотненного газа отрывается от тела. Между движущимся газом и поверхностью тела образуется область вакуума, так что давление на поверхности всюду в этой области равно нулю. Форму оторвавшегося слоя уплотненного газа легко найти, приравнявая нулю правую часть выражения (3.15) для давления [28]. При вычислении сопротивления тела с использованием формулы (3.15) интеграл следует брать лишь по той части поверхности, где давление больше нуля.

Для тонких заостренных впереди тел, заменяя в формуле (3.15) синус угла α значением самого угла, а косинус угла единицей, найдем

$$p = \rho_1 V^2 \left(r'^2 + \frac{1}{v} r r'' \right) \quad (3.16)$$

или, в уточненном виде:

$$c_p = \frac{c_p^*}{\sin^2 \alpha} \left(r'^2 + \frac{1}{v} r r'' \right).$$

Здесь $r = r(x)$ — уравнение обтекаемого контура. В отличие от формулы (3.15), согласно выражению (3.16) давление на элемент поверхности тела зависит только от локальных геометрических характеристик этого элемента.

Приведем результаты использования формулы (3.15), учитывающей наряду с давлением, возникающим из-за соударения частиц с телом, влияние центробежных сил в слое для нахождения распределения давления по поверхности тел при обтекании их потоком

воздуха ($\gamma = 1,4$). На рисунках 3.5, 3.7 и 3.8 приводилось сравнение найденных с помощью формулы Ньютона коэффициентов давления на поверхности обтекаемых газом тел различной формы с более точными теоретическими значениями и с результатами экспериментов. На этих же рисунках штрих-пунктирными линиями показаны значения c_p/c_p^* , вычисленные по уточненной формуле Буземана. Еще один пример сравнения с более точным расчетом приведен на рис. 3.16,

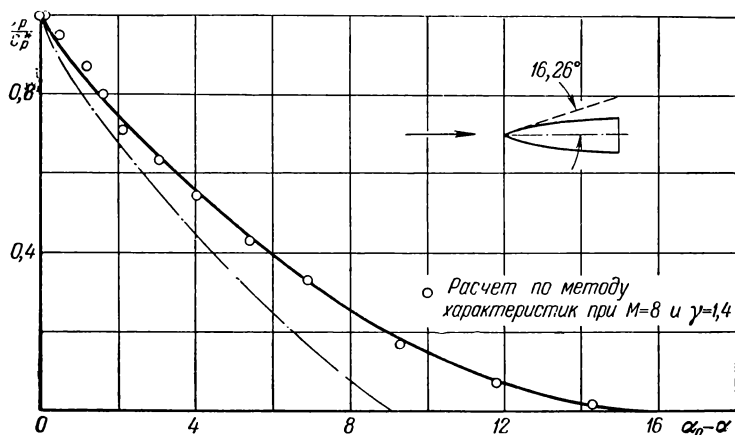


Рис. 3.16. Распределение давлений по поверхности тела оживальной формы. Сравнение теоретических и экспериментальных данных.

где представлено распределение давлений на теле вращения с образующей в виде дуги окружности с полууглом при вершине, равным $16,26^\circ$, найденное [25] методом характеристик при $M = 8$ и $\gamma = 1,4$ и рассчитанное согласно уточненным формулам Ньютона (сплошная кривая) и Буземана (штрих-пунктирная кривая).

Рассмотрение рисунков 3.5, 3.7, 3.8 и 3.16 показывает, что использование формулы Буземана для нахождения распределения давления по телам, обтекаемым газом с $\gamma = 1,4$, дает худшие результаты, чем использование формулы Ньютона, которая в рассмотренных случаях дает вполне удовлетворительные результаты.

Высокая точность формулы Ньютона при расчете обтекания некоторых тел потоком с большой сверхзвуковой скоростью при $\gamma = 1,4$ объясняется компенсирующим влиянием двух факторов. В действительности при обтекании тела давление за ударной волной выше, чем давление согласно формуле Ньютона, так как угол встречи ударной волны β с направлением набегающего потока при $\gamma = 1,4$ больше, чем фигурирующий в формуле Ньютона угол α , образуемый с этим направлением поверхностью тела.

Повышенное давление вблизи ударной волны при обтекании *выпуклого* тела *уменьшается* по направлению к поверхности тела при учете центробежной силы и этот эффект в значительной степени компенсирует повышенное значение давления за ударной волной.

При обтекании *вогнутых* контуров оба фактора действуют в одну сторону (давление по направлению от ударной волны к телу *возрастает* благодаря центробежной силе) и формула Ньютона должна давать плохие результаты.

Для подтверждения сделанного вывода обратимся к рассмотренным в § 5 гл. II случаям обтекания тел с образующей, описываемой степенной и показательной функциями. Если перейти к эквивалентным одномерным неустановившимся течениям газа, то согласно формуле Ньютона

$$\frac{P}{\frac{1}{2} \rho_1 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2} = 2.$$

Из рисунка 2.17, построенного на основании точных расчетов (с использованием закона плоских сечений), следует, что для конуса и для выпуклых тел вращения при $\gamma = 1,4$ (т. е. при $\frac{\gamma-1}{\gamma+1} = \frac{1}{6}$)

величина $\frac{P}{\frac{1}{2} \rho_1 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2}$ лежит в пределах 1,7—2,1, т. е. действитель

тельно не очень сильно отличается от значения, даваемого формулой Ньютона. Напротив, для тела вращения, имеющего вогнутый контур с уравнением в виде показательной функции, в соответствии с приведенной в § 5 гл. II таблицей точного расчета $\frac{P}{\frac{1}{2} \rho_1 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2} = 2,90$, что

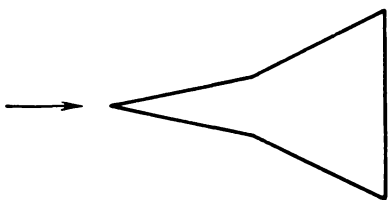


Рис. 3.17. Тело с изломом образующей.

определении давления на теле, изображенном на рис. 3.17, за местом излома образующей.

При увеличении уплотнения газа в ударной волне, т. е. для совершенного газа при $M \rightarrow \infty$ и $\gamma \rightarrow 1$, различие между углом ударной волны и углом наклона поверхности тела уменьшается; фактор, который компенсирует уменьшение давления поперек слоя вследствие наличия центробежных сил при обтекании выпуклых тел, исчезает. Поэтому при больших сверхзвуковых скоростях и γ , близких к единице, формула Ньютона должна давать повышенные

почти в полтора раза превышает значение по формуле Ньютона.

Непосредственное использование формулы Ньютона не дает удовлетворительных результатов и при

значения давления при обтекании выпуклых поверхностей и пониженные — при обтекании вогнутых поверхностей. Точность же формулы Буземана становится при увеличении уплотнения газа в слое и при соответствующем уменьшении толщины слоя все большей и при обращении толщины слоя в нуль формула Буземана дает точные значения давления.

Подтвердим этот вывод двумя примерами. В качестве первого примера рассмотрим тела с уравнением образующей в виде степенного одночлена. Для таких тел согласно формуле Буземана

$$\frac{p}{\frac{1}{2} \rho_1 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2} = 2 \left[1 + \frac{n}{\sqrt{(n+1)}} \right].$$

Эти значения давления совпадают с приведенными на рис. 2.17 точными значениями при $M = \infty$ и $\gamma = 1$. При n , не близких к $-\frac{\gamma}{\gamma+2}$, зависимость величины давления от γ не очень сильная и формулой Буземана можно пользоваться и при γ , заметно превышающих единицу.

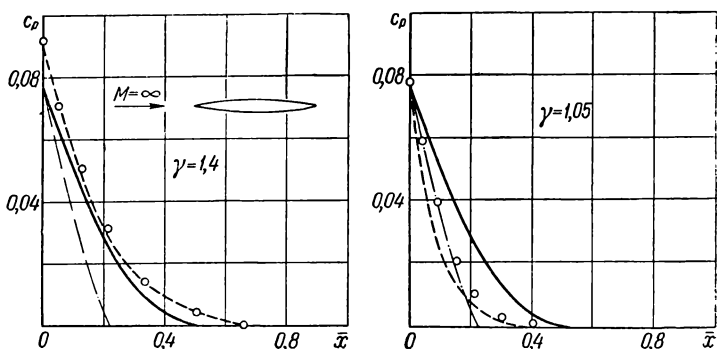


Рис. 3.18. Распределение давлений по профилю согласно формулам Ньютона и Буземана при $\gamma = 1,4$ и $\gamma = 1,05$.

При $n > 0$ эта зависимость еще более слабая. Так, в рассмотренном ранее случае обтекания тела вращения с образующей в виде показательной функции согласно формуле Буземана $\frac{p}{\frac{1}{2} \rho_1 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2} = 3$

(для плоского контура $\frac{p}{\frac{1}{2} \rho_1 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2} = 4$), тогда как точное значение при $\gamma = 1,4$ равно 2,90.

Второй пример относится к обтеканию профиля с острыми кромками. На рис. 3.18 приведены вычисленные по формулам (3.1)

(сплошная кривая) и (3.15) (штрих-пунктирная кривая) значения коэффициента давления на профиле с относительной толщиной $1/10$, образованном дугами окружности, при $M = \infty$ и при значениях γ , равных 1,40 и 1,05. Там же нанесены кружками значения, полученные [29] при расчете по методу характеристик (о значениях пунктирных линий на рис. 3.18 будет сказано в гл. IV). При $\gamma = 1,40$ учет центробежных сил [формула (3.15)] приводит к существенному уменьшению давления по сравнению с точными значениями; формула Ньютона дает удовлетворительные результаты [особенно в уточненной форме (3.2)]. Напротив, при $\gamma = 1,05$ по формуле Ньютона получаются давления, намного превосходящие точные значения; формула (3.15) дает результаты, близкие к истинным.

§ 5. Определение формы тел с наименьшим сопротивлением при использовании формулы Буземана

В предыдущем параграфе было показано, что при сильном уплотнении газа в головной ударной волне давление на поверхности тела зависит только от формы тела и определяется в случае плоского или осесимметричного потоков формулой Буземана

$$p = \rho_1 V^2 \left(\sin^2 \alpha + \sin \alpha \frac{d\alpha}{dF} \int_{F_0}^F \cos \alpha dF \right), \quad (3.17)$$

которую иначе можно переписать в следующем виде:

$$p = \rho_1 V^2 \frac{d}{dF} \left(F - \cos \alpha \int_{F_0}^F \cos \alpha dF \right).$$

Интегрируя полученное отсюда выражение для коэффициента давления по поверхности обтекаемого тела, находим коэффициент сопротивления профиля или тела вращения:

$$c_x = 2 \left(1 - \frac{\cos \alpha_1}{F_1 - F_0} \int_{F_0}^{F_1} \cos \alpha dF \right). \quad (3.18)$$

При выводе этой формулы сила сопротивления отнесена в случае обтекания тела вращения с протоком к кольцевой площади $F_1 - F_0$.

Согласно выражению (3.18) сопротивление тела определяется не только интегралом, зависящим от формы тела, т. е. функцией $\alpha(F)$, но и отдельно значением α при $F = F_1$. Последнее связано с тем, что уплотненный слой газа может поворачиваться вблизи заднего сечения тела так, что $\alpha_1 \neq \lim_{F \rightarrow F_1} \alpha^*$.

Выражение (3.18) для коэффициента сопротивления дает возможность разрешать различные вариационные задачи о телах с наименьшим внешним сопротивлением **).

Рассмотрим опять, как и при использовании формулы Ньютона, простейшую задачу об определении формы тела, обладающего наименьшим сопротивлением при заданных значениях y_0 и y_1 (длину тела считаем равной единице). Учитывая, что α_1 может не быть равным $\lim_{F \rightarrow F_1} \alpha$, будем варьировать в формуле (3.18) интеграл и мно-

житель перед ним независимо друг от друга [26]. Множитель перед интегралом принимает нужное экстремальное значение при $\alpha_1 = 0$. Для нахождения максимума интеграла перейдем в формуле (3.18) от переменной интегрирования F к переменной x — расстоянию от передней точки тела, отсчитываемому в направлении набегающего потока [31]. После преобразований получаем:

$$c_x = 2 \left[1 - \frac{\nu \cos \alpha_1}{y_1^\nu - y_0^\nu} \int_0^1 \frac{y^{\nu-1} y' dx}{(1 + y'^2)^{1/2}} \right]. \quad (3.19)$$

Подынтегральное выражение в этой формуле не содержит в явном виде переменной x ; поэтому, как и в случае применения для нахождения давления формулы Ньютона, соответствующее уравнение для экстремалей $y(x)$ должно интегрироваться в квадратурах. Простыми выкладками находим первый интеграл уравнения для экстремалей в следующем виде:

$$\frac{y^{\nu-1} y'^3}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \text{const.}$$

В случае плоского потока ($\nu = 1$) экстремали являются прямыми линиями. Для осесимметричных тел ($\nu = 2$) зависимость y от x легко представить в параметрической форме, принимая вновь за параметр p тангенс угла наклона элемента образующей тела к оси

*) Увеличение угла α_1 сравнительно со значением $\lim_{F \rightarrow F_1} \alpha$ может быть достигнуто путем постановки у заднего сечения тела отклоняющих щитков. Уменьшить отклонение согласно Хейзу [26] можно, устанавливая вблизи заднего сечения тела на небольшом расстоянии от его поверхности цилиндрическое кольцо (в плоском потоке — пластинку), не создающее дополнительного сопротивления.

**) Задача о телах вращения с наименьшим сопротивлением при большой сверхзвуковой скорости рассмотрена также в работе [30], с которой автору не удалось ознакомиться.

симметрии, т. е. полагая $p = y'$. При этом получаем

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{Y(p)}{X(p_1) - X(p_0)}, \\ x &= \frac{X(p) - X(p_0)}{X(p_1) - X(p_0)}, \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

где

$$Y(p) = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^3},$$

$$X(p) = \frac{3\sqrt{1+p^2}}{4p^2} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{2} \right) + \frac{3}{16} \ln \frac{\sqrt{1+p^2} - 1}{\sqrt{1+p^2} + 1}.$$

Связь между заданными величинами y_0 и y_1 и входящими в формулы (3.20) постоянными p_0 и p_1 находится из очевидных соотношений

$$y_0 = \frac{Y(p_0)}{X(p_1) - X(p_0)}, \quad y_1 = \frac{Y(p_1)}{X(p_1) - X(p_0)}. \quad (3.21)$$

Значения функций $Y(p)$ и $X(p)$ при нескольких p приведены в помещенной ниже таблице.

p	X	Y	p	X	Y
0	∞	∞	0,50	14,6	11,2
0,10	7570	1010	1,0	1,26	2,82
0,15	1650	343	2,0	0,135	1,40
0,20	486	133	5,0	0,009	1,06
0,30	99,3	42,0	∞	0	1,00

На рисунке 3.19 изображен график зависимости Y от X при больших значениях p , представляющий в соответствующем масштабе образующую тела вращения, имеющего минимальное сопротивление при большой сверхзвуковой скорости. Согласно формуле (3.17) распределение давлений по поверхности тел, обладающих наименьшим сопротивлением, выражается следующей зависимостью:

$$c_p = 2 \sin^2 \alpha \left[1 - \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{4} \sin^2 \alpha - \frac{3}{8} \sin^4 \alpha + \frac{3}{8} \frac{\sin^6 \alpha}{\cos \alpha} \ln \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \right],$$

представленной в виде графика на рис. 3.20.

Для всех тел с минимальным сопротивлением зависимость давления от угла наклона элемента поверхности к направлению набегаю-

щего потока одна и та же, причем давление нигде на поверхности тела не обращается в нуль. Важно отметить, что согласно

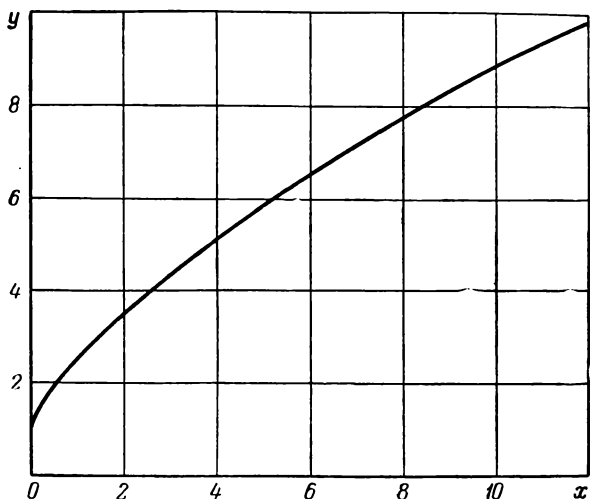


Рис. 3.19. Образующая тела вращения, обладающего минимальным сопротивлением при вычислении давления по формуле Буземана.

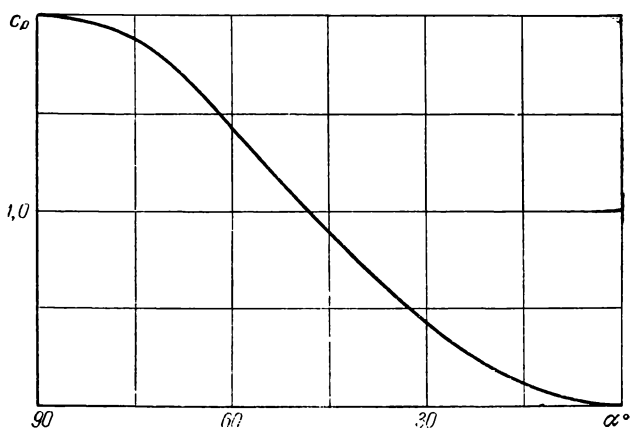


Рис. 3.20. Зависимость коэффициента давления от угла наклона к направлению набегающего потока элемента образующей тела минимального сопротивления.

формулам (3.20) и (3.21) $\lim_{F \rightarrow F_1} \alpha \neq 0$; поэтому тело найденной формы будет действительно телом наименьшего сопротивления только при постановке у его заднего сечения поворотного кольца (см. сноску

стр. 119). Коэффициент сопротивления тел оптимальной формы в общем случае согласно формулам (3.19) и (3.20) имеет вид

$$c_x = 2 \left\{ 1 - \frac{6p_1^6}{(1+p_1^2)^3 \left(1 - \frac{y_0^2}{y_1^2}\right)} \left[(1+p^2)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{16p^2} + \frac{7}{24p^4} + \frac{1}{6p^6} \right) + \frac{1}{32} \ln \frac{\sqrt{1+p^2}-1}{\sqrt{1+p^2}+1} \right]_{p_0}^{p_1} \right\}. \quad (3.22)$$

Это выражение вместе с соотношениями (3.21) определяет неявным образом зависимость c_x тела с наименьшим сопротивлением от заданных величин y_0 и y_1^* .

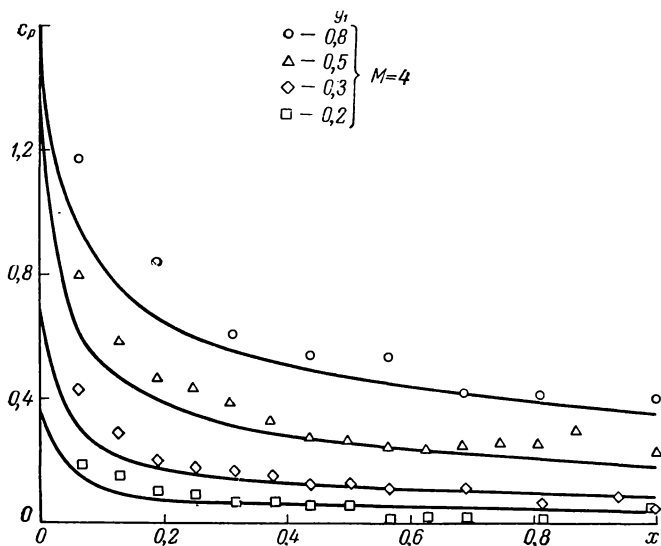


Рис. 3.21. Распределение давления по поверхности тел, имеющих наименьшее сопротивление.

Согласно первому из соотношений (3.21) радиус начального сечения y_0 тел, имеющих минимальное сопротивление при заданном удлинении, отличен от нуля. При заданной относительной толщине тела $2y_1$ величина y_0 может меняться от y_1 до некоторого минималь-

*) Формула (3.27) справедлива и без учета поворота потока у заднего сечения тела, если в ней заменить $(1+p_1^2)^3$ на $(1+p_1^2)^{\frac{7}{2}}$.

ного значения, которому соответствует $p_0 = \infty$. При таком значении p_0 справедливы равенства $Y(p_0) = 1$, $X(p_0) = 0$, так что

$$y_1 = \frac{Y(p_1)}{Z(p_1)}, \quad \frac{y_0}{y_1} = \frac{p_1^3}{(1+p_1^2)^{3/2}} = \sin^3 \alpha_1. \quad (3.23)$$

На рисунке 3.21 сплошными кривыми показано вычисленное по приведенным выше формулам распределение давлений по оптимальным телам при $p_0 = \infty$ и при нескольких значениях относительной толщины. Характерно резкое падение давления от критической точки вдоль поверхности тела. Это обстоятельство имеет значение для улучшения условий охлаждения головной части тела при очень большой сверхзвуковой скорости. На том же рис. 3.21 нанесены экспериментальные значения коэффициента давления при $M = 4^*$, удовлетворительно согласующиеся с теоретическими кривыми. Контуры тел оптимальной формы и фотографии их обтекания (без кольца, поворачивающего поток) приведены на рис. 3.22.

При $p_0 = \infty$ выражение (3.22) для коэффициента сопротивления приобретает вид

$$c_x = 2 \left\{ 1 - \sqrt{1+p_1^2} \left[1 - \frac{\frac{5}{4} p_1^2 + \frac{21}{8} p_1^4 - \frac{3}{16} \frac{p_1^6}{\sqrt{1+p_1^2}} \ln \frac{\sqrt{1+p_1^2}-1}{\sqrt{1+p_1^2}+1}}{1+3p_1^2+3p_1^4} \right] \right\}. \quad (3.24)$$

В нижеследующей таблице содержатся вычисленные по формулам (3.23) и (3.24) значения коэффициента сопротивления тел оптимальной формы при разных значениях относительной толщины тела и соответствующие значения $\frac{y_0}{y_1}$.

p_1	y_1	c_x	$\frac{y_0}{y_1}$	p_1	y_1	c_x	$\frac{y_0}{y_1}$
0	0	0	0,000	0,30	0,423	0,136	0,024
0,05	0,067	0,004	0,000	0,50	0,767	0,317	0,089
0,10	0,135	0,015	0,000	1,0	2,24	0,738	0,355
0,15	0,208	0,034	0,003	2,0	10,4	1,35	0,714
0,20	0,274	0,059	0,008	5,0	118	1,64	0,944

При небольших значениях относительной толщины тела величина $\frac{y_0}{y_1}$ весьма мала (даже для тел с относительной толщиной, равной 0,5, эта величина менее 0,01), так что практически ее можно

*) Экспериментальные данные получены А. Л. Гонором.

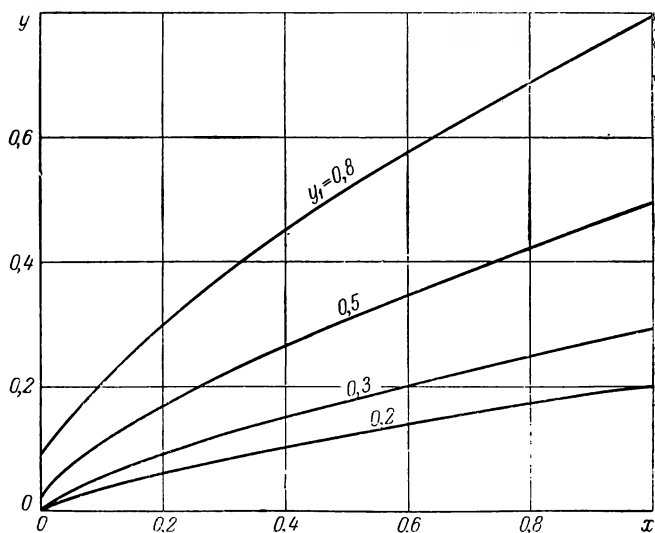
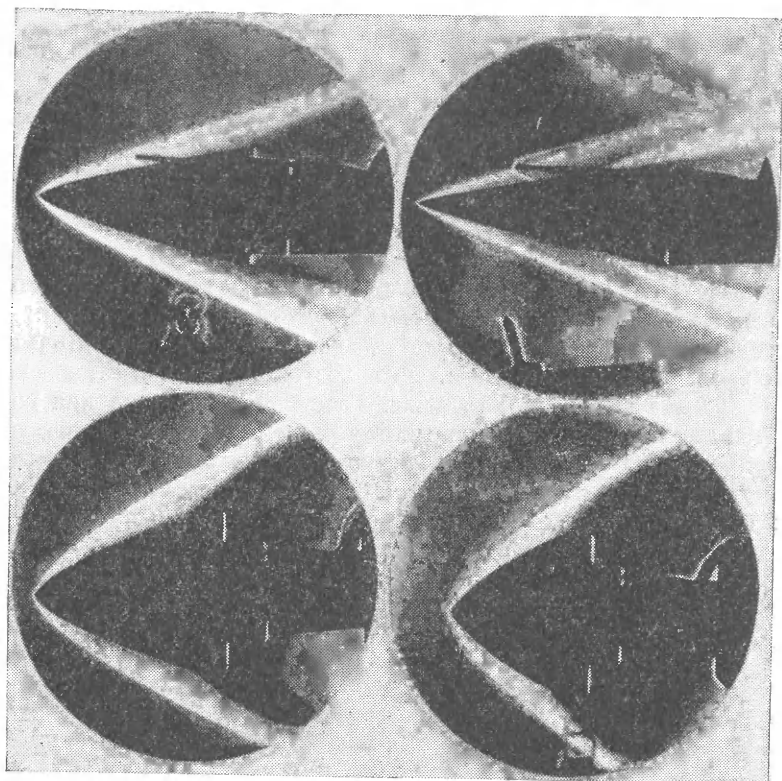


Рис. 3.22. Форма образующей тел, имеющих наименьшее сопротивление, и фотографии их обтекания (без поворотного кольца).

считать равной нулю. Тела оптимальной формы дают значительное уменьшение сопротивления в сравнении с конусами того же удлинения. Коэффициенты сопротивления конусов определяются согласно выражению (3.18) формулой

$$c_x = \frac{2y_1^2}{1 + y_1^2}.$$

Переход от конуса к телу оптимальной формы с той же относительной толщиной уменьшает сопротивление более, чем в два раза.

На рис. 3.23 верхняя кривая рассчитана по написанному выше приближенному выражению для c_x конусов, кружками нанесены точные значения при $M = \infty$ и $\gamma = 1,4$ [8]. Треугольниками на этом рисунке обозначены значения c_x , полученные путем обработки опытных данных по обтеканию тел оптимальной формы (без поворотного кольца). Нижняя кривая дает теоретические значения c_x тел оптимальной формы без учета поворота уплотненного слоя у заднего сечения тела.

Если исключить возможность использования поворотного кольца, то интеграл в выражении (3.18) и множитель перед ним должны варьироваться совместно, причем естественно потребовать в качестве дополнительного условия, чтобы давление на теле нигде не становилось отрицательным. В такой постановке задачи Хейз нашел (хотя и не вполне строгим образом) тела минимального сопротивления [26].

§ 6. Метод пограничного слоя

Рассмотрим более подробно свойства течения в случае, когда отношение плотностей при сжатии газа в головной ударной волне весьма велико. Уравнение сохранения массы на головной ударной волне и уравнение импульсов в проекции на нормаль \bar{n} к поверхности волны и на касательную к ней в плоскости, проходящей через вектор скорости набегающего потока \bar{V} и нормаль \bar{n} , могут быть

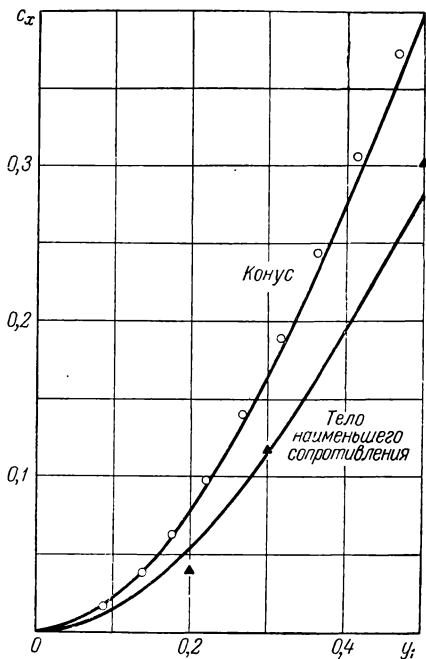


Рис. 3.23. Коэффициент сопротивления тел наименьшего сопротивления с различной относительной толщиной (без учета поворота уплотненного слоя).

в общем случае преобразованы к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} p_2 - p_1 &= \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \rho_1 V^2 \sin^2 \beta, \\ \operatorname{ctg} \beta &= \left[\frac{1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}}{2}\right)^2 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \operatorname{tg}^2 \alpha} \right] \operatorname{ctg} \alpha, \\ V_2 \cos(\beta - \alpha) &= V_1 \cos \beta. \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

Здесь α — угол отклонения потока, β — угол между головной волной и направлением набегающего потока в названной плоскости. В предельном случае очень сильного сжатия газа в ударной волне, т. е. когда $\rho_1/\rho_2 \ll 1$, условия (3.25) приобретают вид

$$p_2 - p_1 = \rho_1 V^2 \sin^2 \alpha, \quad \beta = \alpha, \quad V_2 = V_1 \cos \alpha.$$

Эти соотношения не связаны с термодинамическими свойствами газа и с энергетическими процессами, происходящими при прохождении газа сквозь головную волну. Из них следует, что при больших сжатиях движение газа за головной ударной волной происходит в тонком, сильно уплотненном слое вдоль поверхности тела и изменение давления газа в головной волне совпадает с изменением давления, найденным по формуле Ньютона. Параметром, определяющим близость течения к этому предельному состоянию, является характерное значение отношения плотностей газа в набегающем потоке и в слое за головной волной. Отметим, что наибольшее значение угла отклонения потока в ударной волне (соответствующее наибольшему значению $\operatorname{tg} \alpha$, при котором квадратный корень в выражении (3.25) остается действительным) определяется формулой

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}.$$

Отсюда следует, что при неограниченном возрастании отношения плотностей в скачке предельный угол стремится к прямому.

В потоке совершенного газа с постоянными теплоемкостями отношение плотностей на головной волне выражается формулой (1.17):

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1}{M^2 \sin^2 \beta}.$$

Наименьшее значение величины ρ_1/ρ_2 достигается в таком газе при $M = \infty$ и равно $\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$, т. е. $\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)_{\min} = \frac{1}{6}$ при $\gamma = 1,4$. Таким образом, для совершенного газа с постоянными теплоемкостями наибольшее значение предельного угла поворота потока в скачке достигается при $M = \infty$, причем согласно предыдущим формулам $\operatorname{tg} \alpha_{\max} = 1/\sqrt{\gamma^2 - 1}$. т. е. $\alpha_{\max} = 45^\circ 35'$ при $\gamma = 1,4$. При $\gamma \rightarrow 1$ угол $\alpha_{\max} \rightarrow \pi/2$. Как указывалось во введении, при движении тел в газе с очень большой скоростью, когда становятся существенными возбуждение

вибрационных степеней свободы молекул и диссоциация и ионизация компонент воздуха, температура за головной ударной волной будет в действительности много ниже, чем температура, вычисленная в предположении постоянства теплоемкостей. Так как давление за сильной ударной волной слабо зависит от термодинамических свойств газа, то сжатие газа в действительности будет много большим, чем согласно формуле $\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{\max} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$ при $\gamma = 1,4$. Точно так же и предельные углы поворота потока в скачке будут больше определенных формулой $\operatorname{tg} \alpha_{\max} = 1/\sqrt{\gamma^2 - 1}$ при $\gamma = 1,4$.

Сказанное выше наталкивает на мысль рассматривать течение за интенсивной ударной волной как своего рода пограничный слой вблизи поверхности волны и использовать для расчета таких течений и, в частности, для расчета обтекания тел потоком газа с большой сверхзвуковой скоростью метод разложения решения в ряды по степеням параметра ϵ , равного отношению плотности газа перед ударной волной к характерному значению плотности газа за ней. Этот метод был предложен автором в работах [32—34] и применялся для решения разнообразных задач об одномерных неустановившихся течениях газа [35—37] и о течениях газа с большой сверхзвуковой скоростью [38—41]. Несколько позднее аналогичный метод был независимо предложен и применен для расчета течения вблизи переднего конца затупленных тел при большой сверхзвуковой скорости в работах [28, 42, 43].

Ограничимся рассмотрением плоских и осесимметричных течений (приложение метода к расчету конических течений, не обладающих осевой симметрией, произведено в работах [40] и [41]).

Движение будем рассматривать в обычной для теории пограничного слоя криволинейной системе координат, в которой положение точки M определяется ее расстоянием $y = NM$ по нормали от поверхности тела и длиной дуги $x = ON$ обтекаемого контура, отсчитываемой от некоторой его точки O (рис. 3.24).

При установившемся течении уравнения, описывающие движение в области между ударной волной и поверхностью обтекаемого тела, принимают в выбранной системе координат следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \rho \left(\frac{u}{1 + \frac{y}{R}} \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{uv}{R + y} \right) &= - \frac{1}{1 + \frac{y}{R}} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \rho \left(\frac{u}{1 + \frac{y}{R}} \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{u^2}{R + y} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial x} (\rho u r^{y-1}) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho v r^{y-1} \left(1 + \frac{y}{R} \right) \right] &= 0, \\ \frac{u}{1 + \frac{y}{R}} \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

В этих уравнениях u , v — составляющие скорости в направлениях x и y ; p , ρ , S , как и раньше, — давление, плотность и энтропия единицы массы; R — радиус кривизны обтекаемого контура; $\nu = 1, 2$ соответственно для плоских и для осесимметричных течений. Для осесимметричных течений r — расстояние точки от оси симметрии; при этом $r = \bar{r} + y \cos \alpha$, где \bar{r} — расстояние от оси симметрии точек

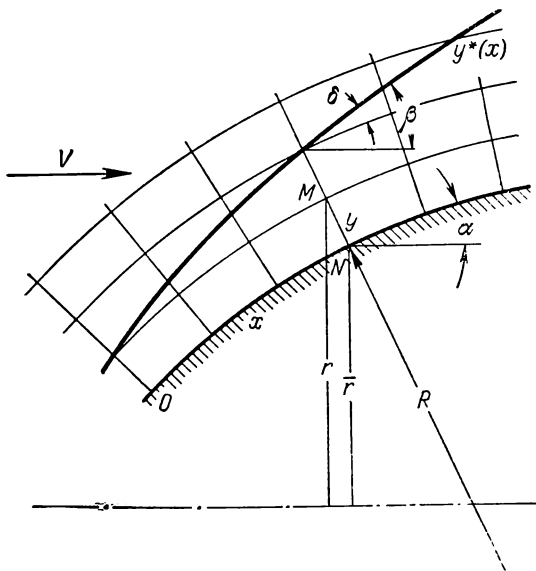


Рис. 3.24. Система координат и обозначений в методе пограничного слоя.

обтекаемого контура, α — угол между касательной к контуру и осью симметрии.

Систему уравнений (3.26) удобно преобразовать к новым независимым переменным — функции тока ψ и координате x^*). Введя функцию тока ψ с помощью равенства

$$d\psi = \rho u r^{\nu-1} dy - \rho v r^{\nu-1} \left(1 + \frac{y}{R}\right) dx,$$

заменяем уравнение неразрывности уравнениями

$$\frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{1}{\rho u r^{\nu-1}}, \quad \frac{\partial y}{\partial x^*} = \left(1 + \frac{y}{R}\right) \frac{v}{u}. \quad (3.27)$$

*) В случае плоских течений идеального газа такое преобразование при $R = \infty$ использовалось И. А. Кибелем [22]; в теории пограничного слоя вязкой жидкости аналогичное преобразование принадлежит Р. Мизесу [44].

Так как *)

$$\frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\psi} = \frac{\partial}{\partial x} \Big|_y + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x},$$

то

$$\frac{u}{1 + \frac{y}{R}} \frac{\partial}{\partial x} \Big|_y + v \frac{\partial}{\partial y} = \frac{u}{1 + \frac{y}{R}} \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\psi}.$$

Используя эти формулы преобразований, приведем остальные уравнения (3.26) соответственно к виду

$$\left. \begin{aligned} \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{1}{1 + \frac{y}{R}} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{u}{R + y} &= -r^{\nu-1} \frac{\partial p}{\partial \psi}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{p}{\rho^{\gamma}} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

(Первое уравнение этой системы получается из первых двух уравнений (3.26), второе — из второго, третье — из четвертого.)

В выбранной системе координат нормальная и касательная к головному скачку уплотнения составляющие скорости газа перед скачком и за ним запишутся в виде

$$\begin{aligned} v_{1n} &= -V \sin \beta, & v_{2n} &= -u \sin(\beta - \alpha) + v \cos(\beta - \alpha), \\ v_{1\tau} &= V \cos \beta, & v_{2\tau} &= u \cos(\beta - \alpha) + v \sin(\beta - \alpha). \end{aligned}$$

Так как

$$\operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{y^{*'}}{1 + \frac{y^*}{R}},$$

где $y = y^*(x)$ — уравнение скачка уплотнения, то условия на головном скачке уплотнения можно представить в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} p_2 &= \frac{2}{\gamma + 1} \rho_1 V^2 \sin^2 \beta - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} p_1, \\ \frac{\rho_1}{\rho_2} &= \frac{\frac{u y^{*'}}{1 + \frac{y^*}{R}} - v}{V \left(\sin \alpha + \cos \alpha \frac{y^{*'}}{1 + \frac{y^*}{R}} \right)} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1}{M^2 \sin^2 \beta}, \\ u + \frac{v y^{*'}}{1 + \frac{y^*}{R}} &= V \left(\cos \alpha - \sin \alpha \frac{y^{*'}}{1 + \frac{y^*}{R}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

*) Символ $\frac{\partial}{\partial x} \Big|_y$ указывает, что дифференцирование производится при постоянном y .

Первое из этих соотношений показывает, что давление p_2 за скачком имеет для тел конечной толщины (для которых $\sin^2 \beta$ не есть малая величина) тот же порядок величины, что и скоростной напор набегающего потока. Из следующих двух соотношений вытекает, во-первых, что отношение плотности набегающего потока ρ_1 к плотности за скачком ρ_2 должно совпадать с отношением масштабов для измерения y и x и, во-вторых, как уже говорилось ранее, что для совершенного газа с постоянными теплоемкостями это отношение масштабов будет малой величиной, если мала сумма

$$\frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{M^2 \sin^2 \beta},$$

т. е. если $M^2 \sin^2 \beta \gg 1$ (течение с очень большой сверхзвуковой скоростью) и значение отношения теплоемкостей γ не намного превышает единицу.

Учитывая полученные оценки для величин, входящих в уравнения (3.27), (3.28), и принимая, что порядок этих величин сохраняется во всей области течения, можно искать решение уравнений в виде рядов по степеням малого параметра ϵ , характеризующего отношение плотностей газа перед скачком и за ним, в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} y &= \epsilon y_0 + \dots, \\ u &= u_0 + \epsilon u_1 + \dots, \\ v &= \epsilon v_0 + \dots, \\ p &= p_0 + \epsilon p_1 + \dots, \\ \rho &= \frac{\rho_0}{\epsilon} + \rho_1 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

причем за малый параметр ϵ в случае совершенного газа с постоянными теплоемкостями можно принять величину $\frac{\gamma-1}{\gamma+1}$.

Подставляя эти ряды в уравнения (3.27) и (3.28), для определения первых членов рядов получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y_0}{\partial \psi} &= \frac{1}{\rho_0 u_0 r^{\nu-1}}, & v_0 &= u_0 \frac{\partial y_0}{\partial x}, \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} &= 0, & \frac{u_0}{R} &= r^{\nu-1} \frac{\partial p_0}{\partial \psi}, \\ & & \frac{\partial}{\partial x} \frac{p_0^\gamma}{\rho_0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

Функции u_1 , p_1 , ρ_1 удовлетворяют уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial p_0}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{u_1}{R} &= -\frac{u_0}{R} \left[\frac{y_0}{R} + (\nu - 1) \frac{y_0}{r} \cos \alpha \right] - \bar{r}^{\nu-1} \frac{\partial p_1}{\partial \psi}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p_1}{\rho_0} - \gamma \frac{p_1}{\rho_0} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

Обе эти системы уравнений интегрируются в квадратурах. (Легко убедиться, что и системы уравнений, определяющие члены рядов (3.30) при более высоких степенях ε , также могут быть проинтегрированы в квадратурах.)

Из системы (3.31) получаем:

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= u_0(\psi), \quad p_0^{\frac{1}{\gamma}} = \vartheta_0(\psi) \rho_0, \\ p_0 &= \frac{1}{R \bar{r}^{\nu-1}} \int_{\psi_0^*}^{\psi} u_0 d\psi + p^*(x), \\ y_0 &= \frac{1}{\bar{r}^{\nu-1}} \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\rho_0 u_0} + \bar{y}(x), \\ v_0 &= u_0 \frac{\partial y_0}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

Здесь $u_0(\psi)$, $\vartheta_0(\psi)$, $p^*(x)$, $\bar{y}(x)$ — произвольные функции; нижний предел интегрирования ψ_0^* в формуле для p_0 будет определен ниже.

Из второй системы

$$\left. \begin{aligned} u_0 u_1 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \vartheta_0(\psi) p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} &= i_1(\psi), \\ \frac{p_1}{\rho_0} - \gamma \frac{p_1}{\rho_0} &= \vartheta_1(\psi), \\ p_1 &= \frac{1}{\bar{r}^{\nu-1}} \int_{\psi_0^*}^{\psi} \left\{ \frac{u_1}{R} - \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{u_0}{R} \left[\frac{y_0}{R} + (\nu - 1) \frac{y_0}{r} \cos \alpha \right] \right\} d\psi + p_1^*(x), \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

где $i_1(\psi)$, $\vartheta_1(\psi)$, $p_1^*(x)$ — произвольные функции.

Полученные выражения (3.33) и (3.34) определяют приближенное решение уравнений движения идеального газа. Входящие в них произвольные функции в задачах о сверхзвуковом обтекании тел должны быть найдены из условий (3.29) на ударной волне и из

условия обтекания заданного контура. Принимая, что на обтекаемом контуре $\psi = 0$, получим последнее условие в виде

$$y = 0 \quad \text{при} \quad \psi = 0,$$

откуда следует, что $\bar{y}(x) = 0$.

Условия (3.29) на ударной волне должны удовлетворяться при $\psi = \psi^*(x)$, где

$$\begin{aligned} \psi^*(x) &= \frac{\rho^0 V}{\gamma} (r^{*\gamma} - r_0^\gamma) = \frac{\rho^0 V}{\gamma} (\bar{r}^\gamma - r_0^\gamma) + \varepsilon \rho^0 V \bar{r}^{\gamma-1} y_0^* \cos \alpha + O(\varepsilon^2) = \\ &= \psi_0^* + \varepsilon y_1^* + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Во избежание смешения с соответствующими членами рядов (3.30) здесь и ниже параметры газа в набегающем потоке отмечены индексом 0 наверху. Используя эту формулу, путем преобразований соотношений (3.29) получим условия, которым должны удовлетворять функции, входящие в разложения (3.30):

при $\psi = \psi_0^*$

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= V \cos \alpha, & u_1 &= -u_{0\psi} \psi_1^* - V y_0^{*\prime} \sin \alpha, \\ p_0 &= \rho^0 V^2 \sin^2 \alpha, \\ p_1 &= -\rho_{0\psi} \psi_1^* + \rho^0 V^2 (2y_0^{*\prime} \sin \alpha \cos \alpha - \sin^2 \alpha) - p^0, \\ \rho_0 &= \frac{\rho^0}{1 + \frac{2}{\gamma - 1} M^2 \sin^2 \alpha}, & \rho_1 &= -\rho_{0\psi} \psi_1^* + \frac{\rho_0^2}{\rho^0} \frac{4 \cos \alpha}{(\gamma - 1) M^2 \sin^3 \alpha} y_0^{*\prime}. \end{aligned} \right\} (3.35)$$

Здесь y_0^* — значение $y_0(x, \psi)$ при $\psi = \psi_0^*$, через $u_{0\psi}$, $\rho_{0\psi}$, $\rho_{0\psi}$ обозначены производные функций u_0 , p_0 , ρ_0 по ψ . Условие

$$v_0 = u_0 y_0^{*\prime} - V \sin \alpha \frac{\rho^0}{\rho_0},$$

вытекающее из закона сохранения массы на скачке, удовлетворяется при сделанном выборе ψ_0^* тождественно. Действительно, на ударной волне

$$\begin{aligned} v_0 &= u_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r^{\gamma-1}} \int_0^{\psi_0^*} \frac{d\psi}{\rho_0 u_0} + \frac{1}{r^{\gamma-1}} \int_{\psi_0^*}^{\psi} \frac{d\psi}{\rho_0 u_0} \right) = \\ &= u_0 y_0^{*\prime} - \frac{1}{r^{\gamma-1}} \frac{1}{\rho_0} \frac{d\psi_0^*}{dx} = u_0 y_0^{*\prime} - V \sin \alpha \frac{\rho^0}{\rho_0}. \end{aligned}$$

Шесть условий (3.35) позволяют найти оставшиеся еще неопределенными шесть произвольных функций в выражениях (3.33) и (3.34).

Таким образом, величины y_0 , u_0 , v_0 , p_0 , ρ_0 получаем окончательно в виде

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= \frac{1}{r^{\nu-1}} \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\rho_0 u_0}, & u_0 &= V \cos \alpha(x^*), & v_0 &= u_0 \frac{\partial y_0}{\partial x}, \\ p_0 &= \rho^0 V^2 \sin^2 \alpha(x) - \frac{1}{R r^{\nu-1}} \int_{\psi}^{\psi_0} u_0 d\psi = \\ &= \rho^0 V^2 \left[\sin^2 \alpha(x) + \sin \alpha(x) \frac{d\alpha}{dF} \int_{x^*}^x \cos \alpha(x^*) dF \right], \\ \rho_0 &= \frac{\rho^0}{1 + \frac{2}{\gamma - 1} \frac{1}{M^2 \sin^2(x^*)}} \left[\frac{p_0}{\rho^0 V^2 \sin^2 \alpha(x^*)} \right]^{\frac{1}{\gamma}}. \end{aligned} \right\} (3.36)$$

Следовательно, первые члены разложений (3.30) для скорости u и давления p совпадают с соответствующими значениями, получаемыми при выводе формулы Буземана. Однако первые члены рядов (3.30) дают возможность рассчитать всю картину течения, т. е. найти форму скачка уплотнения, поле скоростей и плотности (а следовательно, и температуры) в слое между ударной волной и телом.

Следующие члены рядов, определяемые формулами (3.34) и соотношениями (3.35), позволяют внести уточнения в распределения давления, плотности и скорости.

Формулы (3.36) показывают, что в первом приближении распределение давлений по телу не зависит от числа M набегающего потока; течение же в целом и, в частности, положение головной ударной волны меняется при изменении числа M , приближаясь к определенному пределу при $M \rightarrow \infty$.

Отметим следующее важное для применения теории обстоятельство. Давление в некоторой точке возмущенной области равно в первом приближении, как показывает соответствующая формула (3.36), сумме давления за головной волной при том же значении x и давления, уравнивающего центрбежную силу, которая действует на частицы газа между данной точкой и точкой головной волны с тем же значением x при движении частиц по криволинейной траектории. В случае обтекания тел с выпуклым контуром оба слагаемых имеют разные знаки, причем при перемещении вдоль некоторой линии тока первое слагаемое уменьшается, а интеграл во втором слагаемом увеличивается (так как растет ψ_0^* ; к тому же и $u_0(\psi)$ растет по направлению к внешней границе слоя). Поэтому, если кривизна тела убывает при удалении от его переднего конца недостаточно быстро, то падение давления между головной ударной

волной и рассматриваемой линией тока, вызванное центробежными силами, начиная с некоторого места превысит увеличение давления при прохождении газа через ударную волну, вследствие чего вычисленное в первом приближении давление обратится в нуль и станет затем отрицательным. Очевидно, что такое положение будет достигнуто прежде всего на поверхности обтекаемого тела. Вместе с p_0 обращается в нуль плотность ρ_0 ; точка, где это впервые происходит, является особой точкой в излагаемой теории. При приближении к этой точке нарушается основное предположение теории о том, что плотность газа в слое за ударной волной много больше плотности газа в набегающем потоке и что, следовательно, толщина слоя между поверхностью тела и головной волной мала. Поэтому расчет течения по излагаемому методу может осуществляться только до некоторой окрестности этой особой точки.

§ 7. Использование закона плоских сечений в методе пограничного слоя

В главе II была установлена аналогия между обтеканием тонких тел потоком с большой сверхзвуковой скоростью и неустановившимся плоским течением газа, вызываемым расширением в газе поршня. При этом симметричному обтеканию тел вращения соответствуют течения с цилиндрическими волнами, а обтеканию профилей — течения с плоскими волнами. Основным средством расчета таких течений при наличии ударных волн является численный метод характеристик в различных модификациях. Точные решения задач о неустановившихся одномерных движениях с ударными волнами получены лишь в немногих случаях, главным образом для автомоделных движений.

Основываясь на описанной выше идее рассмотрения течения за интенсивной ударной волной как своего рода пограничного слоя вблизи поверхности волны, изложим метод приближенного расчета автомоделных и неавтомуделных неустановившихся одномерных течений газа с ударными волнами большой и умеренной интенсивности и его приложение к расчету обтекания тонких тел потоком с большой сверхзвуковой скоростью (см. [34] и [36]; позднее этот же метод был предложен в работе [39]).

Примем, как и в § 4 гл. II, за основные искомые функции расстояние R частиц от оси (плоскости) симметрии, плотность ρ и давление p . Независимыми переменными пусть будут время t и лагранжева координата m , определенная формулой $dm = \rho^0 r^{\nu-1} dr$ (r — значение R в начальный момент времени, ρ^0 — начальная плотность, $\nu = 1, 2$ соответственно для течений с плоскими и цилиндрическими волнами; для приложений к задачам со сферическими волнами следует считать $\nu = 3$). При сделанных предположениях уравнения неразрывности, движения и энергии (для адиабатических

движений совершенного газа) можно записать следующим образом (см. уравнения (2.10) в § 4 гл. II):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial t} &= \frac{1}{\rho R^{\nu-1}}, \\ \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} &= -R^{\nu-1} \frac{\partial \rho}{\partial t}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{p}{\rho^\gamma} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

Предположим вновь, что плотность газа за ударной волной (в слое между ударной волной и поверхностью поршня) значительно выше, чем перед ударной волной. В связи с этим будем искать решение системы (3.37) в виде следующих рядов по степеням малого параметра ε , характеризующего отношение плотностей газа перед ударной волной и за ней:

$$\left. \begin{aligned} R &= R_0 + \varepsilon R_1 + \dots, \\ p &= p_0 + \varepsilon p_1 + \dots, \\ \rho &= \frac{\rho_0}{\varepsilon} + \rho_1 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

Для определения функций R_0 , p_0 , ρ_0 получаем систему уравнений

$$\frac{\partial R_0}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 R_0}{\partial t^2} = -R_0^{\nu-1} \frac{\partial \rho_0}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} = 0,$$

интегрируя которую, находим

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= R_0(t), \\ p_0 &= P(t) - \frac{\ddot{R}_0}{R_0^{\nu-1}} m, \\ \rho_0 &= \frac{1}{\vartheta_0(m)}, \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

где $R_0(t)$, $P(t)$, $\vartheta_0(m)$ — произвольные функции. Функции R_1 , p_1 , ρ_1 удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_1}{\partial t} &= \frac{1}{\rho_0 R_0^{\nu-1}}, \\ R_0^{\nu-1} \frac{\partial p_1}{\partial t} &= (\nu - 1) \frac{\ddot{R}_0}{R_0} R_1 - \frac{\partial^2 R_1}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p_1}{\rho_0} - \gamma \frac{\rho_1}{\rho_0} \right) &= 0 \end{aligned}$$

и определяются, следовательно, формулами:

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{R_0^{\nu-1}} \int_{m^*}^m \frac{\vartheta_0(m)}{p_0^\gamma} dm + R_1^*(t), \\ p_1 &= (\nu - 1) \frac{\ddot{R}_0}{R_0^\nu} \int_{m^*}^m R_1 dm - \frac{1}{R_0^{\nu-1}} \int_{m^*}^m \frac{\partial^2 R_1}{\partial t^2} dm + p_1^*(t), \\ \frac{p_1}{p_0} - \gamma \frac{p_1}{p_0} &= \vartheta_1(m). \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

Здесь $R^*(t)$, $p_1^*(t)$, $\vartheta_1(m)$ — произвольные функции, m^* — нижний предел при вычислении интегралов — может выбираться различным образом из соображений удобства написания формул.

Формулы (3.39) и (3.40) дают в явном виде выражения для первых двух членов в разложениях (3.38) искомых величин по степеням ϵ . Входящие в эти выражения произвольные функции должны определяться из условий на ударной волне и на поверхности поршня.

Условие сохранения массы, теорема количеств движения и закон сохранения энергии на ударной волне имеют в рассматриваемом случае следующий вид (см. выражения (2.11) в § 4 гл. II):

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{\rho^0 R^{*\nu}}{\nu}, \\ p^* &= \frac{2}{\gamma+1} \rho^0 D^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} p^0, \\ \rho^* &= \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho^0}{1 + \frac{2}{\gamma-1} \frac{a^0{}^2}{D^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.41)$$

Будем считать, что функция $R_0(t)$ в формулах (3.39) есть закон распространения ударной волны. Тогда из соотношений (3.41) можно получить условия на ударной волне для первых членов разложений

искомых функций: при $m = m^* = \frac{\rho^0 R_0^\nu}{\nu}$

$$\begin{aligned} R_0 &= R_0(t), & R_1 &= 0, \\ p_0 &= \rho^0 \dot{R}_0^2, & p_1 &= -p^0 - \rho^0 \dot{R}_0^2, \\ \rho_0 &= \frac{\rho^0}{1 + \frac{2}{\gamma-1} \frac{a^0{}^2}{\dot{R}_0^2}}, & \rho_1 &= 0. \end{aligned}$$

(Все последующие члены рядов (3.38) должны обращаться на ударной волне в нуль.) Написанные условия позволяют определить про-

извольные функции в выражениях (3.39) и (3.40). В окончательных выражениях для искоемых величин удобно перейти от лагранжевой переменной m к переменной τ , связанной с m соотношением

$m = \frac{\rho^0 R_0^\nu(\tau)}{\nu}$. Очевидно, что $\tau(m)$ есть момент времени, в который ударная волна проходит через частицу с лагранжевой координатой m , так что $m^* = \frac{\rho^0 R_0^\nu(t)}{\nu}$. Выражения для величин p_0 и ρ_0 после подстановки в них значений произвольных функций принимают вид

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= \rho^0 \dot{R}_0^2 + \rho^0 \frac{R_0 \ddot{R}_0}{\nu} - \frac{\ddot{R}_0}{R_0^{\nu-1}} m, \\ \rho_0 &= \frac{\rho^0}{1 + \frac{2}{\gamma-1} \frac{a^0{}^2}{\dot{R}_0^2(\tau)} [\rho^0 \dot{R}_0^2(\tau)]^{1/\gamma}} \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

Функции R_1 , p_1 , ρ_1 определяются формулами:

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= -\frac{1}{R_0^{\nu-1}} \int_{\tau}^t \frac{\left[1 + \frac{2}{\gamma-1} \frac{a^0{}^2}{\dot{R}_0^2(\tau)} \right] R_0^{\nu-1}(\tau) \dot{R}_0^{\frac{2}{\gamma}+1}(\tau) d\tau}{\left[\dot{R}_0^2 + \frac{R_0 \ddot{R}_0}{\nu} \left(1 - \frac{R_0^\nu(\tau)}{R_0^\nu} \right) \right]^{1/\gamma}}, \\ p_1 &= (\nu-1) \frac{\ddot{R}_0}{R_0^\nu} \int_{m^*}^m R_1 dm - \frac{1}{R_0^{\nu-1}} \int_{m^*}^m \frac{\partial^2 R_1}{\partial t^2} dm - p^0 - \rho^0 \dot{R}_0^2, \\ \rho_1 &= \frac{\rho_0}{\gamma} \left[\frac{p_1}{p_0} + 1 + \frac{a^0{}^2}{\gamma \dot{R}_0^2(\tau)} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.43)$$

Для окончательного решения задачи необходимо, используя условие на поверхности поршня, выразить функцию $R_0(t)$ через заданный закон движения поршня $\bar{R}(t)$. Должно быть выполнено следующее равенство: при $\tau=0$

$$R = R_0 + \varepsilon R_1 + O(\varepsilon^2) = \bar{R}(t).$$

Отсюда

$$R_0 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{1}{R_0^{\nu-1}} \int_0^t \frac{\left[1 + \frac{2}{\gamma-1} \frac{a^0{}^2}{\dot{R}_0^2(\tau)} \right] R_0^{\nu-1}(\tau) \dot{R}_0^{\frac{2}{\gamma}+1}(\tau) d\tau}{\left[\dot{R}_0^2 + \frac{R_0 \ddot{R}_0}{\nu} \left(1 - \frac{R_0^\nu(\tau)}{R_0^\nu} \right) \right]^{1/\gamma}} = \bar{R}(t) + O(\varepsilon^2). \quad (3.44)$$

Если в этом интегральном уравнении в слагаемом, содержащем интеграл, заменить функцию R_0 через \bar{R} , что приведет к изменению члена $O(\epsilon^2)$ в правой части, то получим формулу, выражающую функцию R_0 через заданную функцию \bar{R} в явном виде:

$$R_0 = \bar{R} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{1}{\bar{R}^{\gamma-1}} \int_0^t \frac{\left[1 + \frac{2}{\gamma-1} \frac{a^2}{\bar{R}^2(\tau)}\right] \bar{R}^{\gamma-1}(\tau) \dot{\bar{R}}^{\frac{2}{\gamma}+1}(\tau) d\tau}{\left[\dot{\bar{R}}^2 + \frac{\ddot{\bar{R}}}{\nu} \left(1 - \frac{\bar{R}^\nu(\tau)}{\bar{R}^\nu}\right)\right]^{1/\gamma}}. \quad (3.45)$$

При известном законе движения поршня, т. е. при известной форме тела, обтекаемого потоком с большой сверхзвуковой скоростью, формулы (3.42) и (3.43) вместе с соотношением (3.44) или (3.45) определяют приближенные выражения для всех параметров потока.

§ 8. Метод пограничного слоя: примеры

Рассмотрим некоторые примеры приложения метода пограничного слоя для расчета обтекания тел при движении их в газе с большой сверхзвуковой скоростью.

1. Обтекание тонкого клина и тонкого конуса. Воспользуемся гипотезой плоских сечений; тогда в эквивалентной задаче о неустановившемся течении для этих тел следует полагать

$$\bar{R} = Ut,$$

$$R_0 = Dt$$

(согласно закону плоских сечений $x = Vt$, так что $U = V \operatorname{tg} \alpha$, $D = V \operatorname{tg} \beta$, причем в принятом приближении $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$, $\operatorname{tg} \beta \approx \beta$). После подстановки в формулы (3.42) и (3.43) выражения $R_0 = Dt$ простыми выкладками получаем:

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= \rho^0 D^2, & \rho_0 &= \frac{\rho^0}{1 + \frac{2}{\gamma-1} \frac{a^2}{D^2}}, \\ R_1 &= -\left(1 + \frac{2}{\gamma-1} \frac{a^2}{D^2}\right) \left[1 - \left(\frac{\tau}{t}\right)^\nu\right] \frac{Dt}{\nu}, \\ p_1 &= \frac{\nu-1}{2\nu} \rho^0 D^2 \left(1 + \frac{2}{\gamma-1} \frac{a^2}{D^2}\right) \left[1 - \left(\frac{\tau}{t}\right)^{2\nu}\right] - p^0 - \rho^0 D^2, \\ p_1 &= \frac{\nu-1}{2\nu} \left[1 - \left(\frac{\tau}{t}\right)^{2\nu}\right] \frac{\rho^0}{\gamma}. \end{aligned} \right\} (3.46)$$

Здесь величина τ связана с лагранжевой координатой r соотношением $r = D\tau$. Зависимость D от U согласно формуле (3.44) имеет

следующий вид:

$$D \left[1 - \frac{1}{\nu} \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{2}{\gamma - 1} \frac{a_0^2}{D^2} \right) \right] = U. \quad (3.47)$$

Выражения (3.46) и (3.47) дают в рассматриваемом приближении полное решение эквивалентной задачи о неустановившемся движении газа при расширении в нем поршня с постоянной скоростью.

Можно убедиться, что в случае течений с плоскими волнами ($\nu = 1$) это приближенное решение совпадает с точным решением. Для течений со сферическими волнами ($\nu = 3$) сравнение результатов использования приближенных формул (3.46) и (3.47) с результатами точных расчетов [45], произведенное в работе [36], также свидетельствует об их высокой точности при значениях $\frac{U}{a_0}$, больших единицы.

При переходе от эквивалентной задачи о неустановившемся движении газа при вытеснении его поршнем к задаче об обтекании потоком с большой сверхзвуковой скоростью клина и конуса обозначим, как это уже делалось в гл. II, $\frac{U}{a_0} = \frac{V}{a_0} \operatorname{tg} \alpha = K$, $\frac{D}{a_0} = \frac{V}{a_0} \operatorname{tg} \beta = K_c$. Тогда связь между K_c и K согласно формуле (3.47) будет иметь вид

$$K_c - K = \frac{1}{\nu} \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left(K_c + \frac{2}{\gamma - 1} \frac{1}{K_c} \right), \quad (3.48)$$

а для величины коэффициента давления на поверхности клина или конуса в соответствии с выражениями (3.46) получаем

$$c_p \mathbf{M}^2 = 2 \left[\frac{2}{\gamma + 1} (K_c^2 - 1) + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{\nu - 1}{2\nu} \left(K_c^2 + \frac{2}{\gamma - 1} \right) \right]. \quad (3.49)$$

Формулы (3.48) и (3.49) при $\nu = 2$ совпадают с формулами (3.10) и (3.13), полученными ранее в качестве основных соотношений в методе касательных конусов. Результаты их сравнения с точными расчетами обтекания конуса были приведены на рисунках 2.12 и 2.5.

2. Обтекание потоком с очень большой сверхзвуковой скоростью тел, имеющих уравнение образующей в виде степенного одночлена. В эквивалентной задаче об одномерном неустановившемся движении в этом случае будем иметь

$$\bar{R} = C \frac{t^{n+1}}{n+1},$$

$$R_0 = C_1 \frac{t^{n+1}}{n+1},$$

причем отношение $\frac{a_0}{D}$ нужно считать пренебрежимо малым, вследствие чего движение является автомодельным. Точное решение этой задачи рассматривалось в § 5 гл. II. Приближенное ее решение дают

формулы (3.42) и (3.43), которые после подстановки в них выражения для R_0 принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= p_0^* \left[1 + \frac{n}{\nu(n+1)} \left(1 - \frac{m}{m^*} \right) \right], & \dot{p}_0 &= \rho^0 \left(\frac{p_0}{\rho^0 C_1^2 \tau^{2n}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \\ R_1 &= -\frac{1}{\nu} R_0 I \left(\gamma, \frac{2n}{\nu(n+1)}, \frac{m}{m^*} \right), \\ p_1 &= p_0^* \left\{ I' \left(\frac{m}{m^*} \right) \left(\frac{m}{m^*} \right)^2 - \frac{1}{\nu} \left(\frac{n}{n+1} + \frac{\nu+1}{\nu} \right) I \left(\frac{m}{m^*} \right) \frac{m}{m^*} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\nu} \left(\frac{2n}{\nu(n+1)} + 1 + \nu \right) \int_{\frac{m}{m^*}}^1 Id \frac{m}{m^*} \right\}, \\ p_1 &= \frac{p_0}{\gamma} \left(\frac{p_1}{p_0} + 1 \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.50)$$

Здесь $\frac{2}{\gamma+1} p_0^* = \frac{2}{\gamma+1} \rho^0 C_1^2 \tau^{2n} = p^*$ — давление за фронтом ударной волны, $m^* = \frac{\rho^0 R_0^\nu}{\nu}$, $m = \frac{\rho^0 R_0^\nu(\tau)}{\nu}$,

$$I \left(\gamma, \frac{2n}{\nu(n+1)}, \frac{m}{m^*} \right) = \int_{\frac{m}{m^*}}^1 \left[\frac{x^{\frac{2n}{\nu(n+1)}}}{1 + \frac{n}{\nu(n+1)} (1-x)} \right]^{\frac{1}{\gamma}} dx.$$

Необходимая для полного решения задачи связь между постоянными C_1 и C определяется соотношением (3.44) и имеет вид

$$\frac{\bar{R}}{R_0} = \frac{C}{C_1} = 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{1}{\nu} I \left(\gamma, \frac{2n}{\nu(n+1)}, 0 \right). \quad (3.51)$$

Это выражение дает отношение радиуса поршня к радиусу ударной волны; толщина слоя газа между поршнем и ударной волной равна

$$\begin{aligned} \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{1}{\nu} I \left(\gamma, \frac{2n}{\nu(n+1)}, 0 \right) R_0 &= \\ &= \frac{1}{\nu} \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{\gamma-1}{\gamma+z} F \left(\frac{1}{\gamma}, 1; 2 + \frac{z}{\gamma}, -\frac{z}{2} \right) R_0, \end{aligned}$$

где F — гипергеометрическая функция и для сокращения обозначено $z = \frac{2n}{\nu(n+1)}$. Из этого выражения следует, что при $z \rightarrow -1$, т. е. при $n \rightarrow -\nu/(\nu+2)$, толщина слоя газа даже при $\gamma \rightarrow 1$ не является малой и имеет порядок R_0 . Таким образом, при $n \rightarrow -\nu/(\nu+2)$ нарушается основное предположение теории о малой протяженности слоя; точность полученного выражения для R (а также для скорости

газа $\frac{\partial R}{\partial t}$) будет уменьшаться при малых значениях m , если n приближается к $-\nu/(\nu+2)$.

Давление на поверхности поршня в соответствии с формулами (3.50) равняется следующей величине:

$$p_{\Pi} = p_0^* \left\{ 1 + \frac{n}{\nu(n+1)} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{1}{\nu} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{2n}{\nu(n+1)} + 1 + \nu \right] \int_0^1 Id \frac{m}{m^*} \right\} = p^* \mathcal{P}(0). \quad (3.52)$$

В отношении этого выражения отметим, что и при $n \rightarrow -\nu/(\nu+2)$ оно будет сохранять высокую точность, так как быстрое увеличение толщины слоя газа между ударной волной и поршнем при $n \rightarrow -\nu/(\nu+2)$ обусловлено появлением вблизи поршня области, где газ имеет весьма малую плотность и где, следовательно, давление газа не может заметно изменяться.

На рисунках 2.16 и 2.18 представлены в виде кривых значения

$\frac{p_{\Pi}}{p^*}$ и $\frac{\bar{R}}{R_0}$, вычисленные по найденным приближенным формулам с учетом членов порядка $\frac{\gamma-1}{\gamma+1}$ для случаев $\nu=1$ и $\nu=2$. На этих рисунках, как уже говорилось в гл. II, светлые кружки соответствуют значениям, полученным при решении точных уравнений посредством численного интегрирования [46]. Темные кружки соответствуют точному решению задачи о движении плоского поршня с постоянной скоростью; перечеркнутые светлые и темные кружки соответствуют точному решению задачи о сильном взрыве цилиндрического и плоского заряда, которая будет описана в гл. V.

Применим еще найденное приближенное решение для определения коэффициента сопротивления тел рассматриваемой формы. Для этого в полученные ранее выражения (2.19) и (2.20) подставим приближенные значения $\mathcal{R}(0) = \frac{\bar{R}}{R_0}$ и $\mathcal{P}(0) = \frac{p_{\Pi}}{p^*}$ согласно формулам (3.51)

и (3.52). Результаты вычислений для случая $\nu=2$ и $\gamma=1,4$ показаны на рисунках 2.19 и 2.20. Совпадение приближенного решения с точными значениями весьма удовлетворительное даже при $n < 0$ (соответствующие части кривых даны пунктиром), за исключением значений n , близких к $-\frac{1}{2}$. Если в приближенном решении учесть только главные члены, т. е. отбросить члены порядка $\frac{\gamma-1}{\gamma+1}$ и выше, то выражения для c_x становятся совсем простыми [39].

В этом случае в соответствии с формулами (3.51) и (3.52) следует положить

$$\frac{\bar{R}}{R_0} = 1, \quad \frac{p_n}{p^*} = \frac{\gamma + 1}{2} \left[1 + \frac{n}{\nu(n+1)} \right],$$

после чего выражения (2.19) и (2.20) примут следующий вид:

$$c_x = \frac{(n+1)^2 n (\nu+1) + \nu}{2} \frac{\nu+1}{n(\nu+2) + \nu} \tau^2$$

и

$$c_x = \frac{2^{\nu} \pi^2 (\nu-1)}{\nu} \frac{(n+1)^2}{n(\nu+2) + \nu} \frac{n(\nu+1) + \nu}{(\nu n + 1 + \nu)^2} \left(\frac{R^{\nu+1}}{V} \right)^2.$$

Отсюда простыми выкладками можно найти, что при фиксированной относительной толщине тела τ коэффициент сопротивления c_x

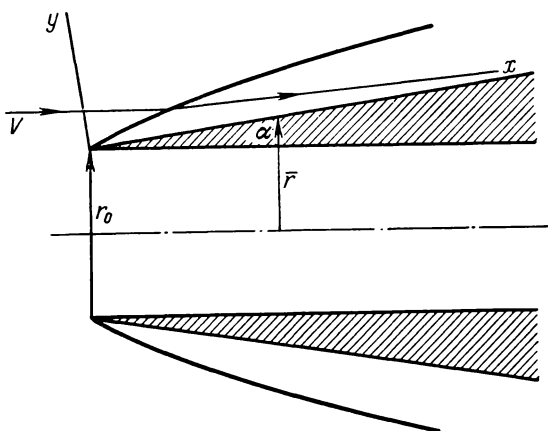


Рис. 3.25. Обтекание тела вращения в виде усеченного конуса с протоком.

имеет минимум при $n = -0,136$ для $\nu = 1$ и при $n = -\frac{1}{3}$ для $\nu = 2$. Соответствующие значения c_x равны $0,460\tau^2$ и $\frac{1}{3}\tau^2$ (для клина и для конуса в рассматриваемом приближении $c_x = \frac{1}{2}\tau^2$).

При фиксированных объеме и радиусе наибольшего сечения телом минимального сопротивления при $\nu = 1$ является клин ($n = 0$), в случае $\nu = 2$ c_x имеет минимум при $n = -0,130$. Соответствующие значения c_x равны $\frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{V} \right)^2$ и $2,16 \left(\frac{R^3}{V} \right)^2$ (для конуса $c_x = 2,19 \left(\frac{R^3}{V} \right)^2$).

3. Обтекание конического тела с протоком [38]. В качестве простейшего примера получения методом пограничного слоя решения

задачи о неавтономном движении рассмотрим обтекание сверхзвуковым потоком тела вращения в виде усеченного конуса с протоком (рис. 3.25). Не считая, что угол наклона образующей у передней кромки тела обязательно мал, применим для исследования течения формулы, полученные в § 6. Для рассматриваемого тела

$$R(x) = \infty, \quad \bar{r} = r_0 + x \sin \alpha,$$

где r_0 — радиус переднего сечения конуса.

Из условий (3.35) на ударной волне и условия на обтекаемой стенке находим значения произвольных функций в выражениях (3.33):

$$u_0(\psi) = V \cos \alpha, \quad p^*(x) = \rho^0 V^2 \sin^2 \alpha, \\ \vartheta_0(\psi) = \frac{1}{\rho^0} \left(1 + \frac{2}{\gamma - 1} \frac{1}{M^2 \sin^2 \alpha} \right) (\rho^0 V^2 \sin^2 \alpha)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad \bar{y}(x) = 0.$$

Все эти функции сводятся, таким образом, к постоянным. Подставляя их в формулы (3.33) и учитывая, что $\nu = 2$, получаем:

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= \frac{\psi}{\rho_0 u_0 r}, & u_0 &= V \cos \alpha, & v_0 &= -\frac{\psi \sin \alpha}{\rho_0 r^2}, \\ p_0 &= \rho^0 V^2 \sin^2 \alpha, & \rho_0 &= \frac{\rho^0}{1 + \frac{2}{\gamma - 1} \frac{1}{M^2 \sin^2 \alpha}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.53)$$

Функцию y_0^* , определяющую форму ударной волны, найдем, заменив в выражении для y_0 функцию тока ψ ее значением на ударной волне ψ_0^* :

$$y_0^* = \frac{\psi_0^*}{\rho_0 u_0 r} = \frac{\rho^0 V}{\rho_0 u_0} \frac{\bar{r}^2 - r_0^2}{2\bar{r}}. \quad (3.54)$$

Используя формулы (3.53) и граничные условия (3.35), после несложных выкладок найдем из выражений (3.34) функции u_1 , p_1 , ρ_1 :

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -\frac{\rho^0 V \sin^2 \alpha}{\rho_0 \cos \alpha} \frac{\psi + \rho^0 V r_0^2}{2\psi + \rho^0 V r_0^2}, \\ p_1 &= \rho^0 V^2 \sin^2 \alpha \frac{\rho^0}{\rho_0} \left[1 + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right)^2 - \left(\frac{\psi}{\rho^0 V r^2} \right)^2 \right] - (\rho^0 V^2 \sin^2 \alpha + p^0), \\ \rho_1 &= \rho_0 \left\{ \frac{\rho^0}{\gamma \rho_0} \left[\frac{1}{4} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right)^2 - \left(\frac{\psi}{\rho^0 V r^2} \right)^2 \right] + \left(\frac{4}{(\gamma - 1) M^2 \sin^2 \alpha} - \frac{\rho^0}{\gamma \rho_0} \right) \frac{\rho^0 V r_0^2}{2\psi + \rho^0 V r_0^2} + \frac{4}{(\gamma - 1) M^2 \sin^2 \alpha} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (3.55)$$

Формулы (3.53) и (3.55) дают выражения для всех искомых величин в области течения за скачком уплотнения. В частности, распределение давления по обтекаемой стенке определится выражением

$$p - p^0 = \rho^0 V^2 \sin^2 \alpha \left\{ 1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{1}{4} \times \right. \\ \left. \times \left(1 + \frac{2}{(\gamma - 1) M^2 \sin^2 \alpha} \right) \left(1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{r_0} \sin \alpha \right)^2} \right)^2 \right\}.$$

Интегрируя избыточное давление по поверхности обтекаемого тела,

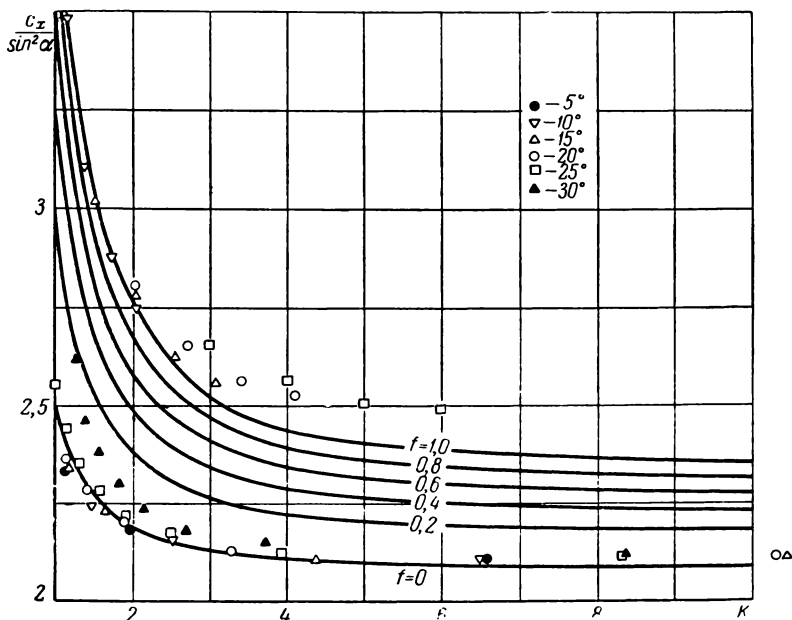


Рис. 3.26. Коэффициент сопротивления тел вращения в виде усеченного конуса с потоком.

получаем коэффициент сопротивления конического тела с потоком

$$c_x = \frac{X}{\pi (r^2 - r_0^2) \rho^0 \frac{V^2}{2}} = 2 \left[1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{1}{4} \frac{\rho^0}{\rho_0} \left(1 + f - \frac{2f \ln f}{1 - f} \right) \right] \sin^2 \alpha. \quad (3.56)$$

Здесь $f = \frac{r_0^2}{r^2}$ — отношение площадей переднего и заднего сечений конуса. При $f \rightarrow 1$ правая часть этого выражения переходит в коэффициент сопротивления клина

$$c_x^{\text{кл}} = 2 \left[1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{\rho^0}{\rho_0} \right] \sin^2 \alpha,$$

а при $f \rightarrow 0$ — в коэффициент сопротивления конуса

$$c_x^{\text{кон}} = 2 \left[1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{1}{4} \frac{\rho^0}{\rho_0} \right] \sin^2 \alpha.$$

На рисунке 3.26 представлены в виде графиков вычисленные по формуле (3.56) значения $c_x/\sin^2 \alpha$ в зависимости от параметра $K = M \sin \alpha$ для нескольких значений f при $\gamma = 1,4$.

Там же приведены некоторые точные значения $c_x/\sin^2 \alpha$ при $f=0$ и $f=1$.

Согласно выражению (3.54) кривизна ударной волны, образующейся при обтекании рассматриваемого конического тела с протоком, быстро уменьшается при увеличении координаты x . В соответствии с этим завихренность потока быстро уменьшается в направлении от обтекаемой поверхности к ударной волне; на достаточном расстоянии вниз по течению от передней кромки вихри сосредоточиваются во все более тонком слое у поверхности тела.

Найдем производную $\frac{dS}{d\bar{\psi}}$ (S — энтропия единицы массы), величина которой характеризует завихренность:

$$\frac{dS}{d\bar{\psi}} = -\frac{\gamma-1}{\gamma+1} c_v \frac{1 - \frac{2}{M^2 \sin^2 \alpha}}{(1 + \bar{\psi})^2}, \quad \bar{\psi} = \frac{\psi}{\rho^0 \frac{Vr^2}{2}}.$$

График этой зависимости изображен на рис. 3.27, где обозначено

$$S = \bar{S} \frac{\gamma-1}{\gamma+1} c_v \left(1 - \frac{2}{M^2 \sin^2 \alpha} \right).$$

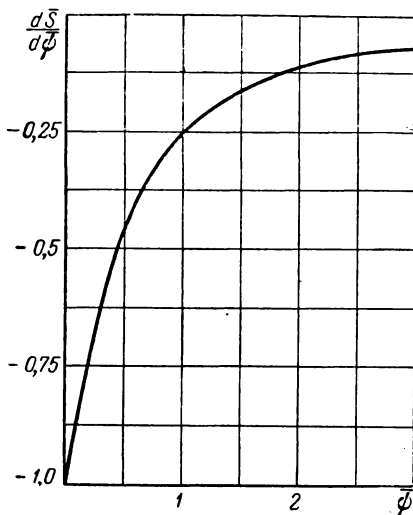


Рис. 3.27. Распределение завихренности в потоке между поверхностью тела и ударной волной при обтекании усеченного конуса с протоком.

ГЛАВА IV

МЕТОД ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СООТНОШЕНИЙ НА СКАЧКЕ УПЛОТНЕНИЯ И В ПРОСТОЙ ВОЛНЕ

§ 1. Общие замечания о методах расчета сверхзвукового обтекания профилей

В настоящей главе мы будем рассматривать обтекание сверхзвуковым потоком профилей с острой передней кромкой. Углы наклона элементов поверхности профиля к направлению набегающего потока и число M в набегающем потоке будем считать такими, чтобы головная волна была присоединенной и чтобы скорость потока всюду в возмущенной области (в той ее части, которая оказывает влияние на течение вблизи профиля) была сверхзвуковой.

При сделанных предположениях расчет течения может быть произведен методом характеристик. Однако, как уже указывалось в гл. III, метод характеристик довольно трудоемок и в общем случае не позволяет получить формулы для зависимостей аэродинамических характеристик профиля от его геометрических параметров, от угла атаки и от параметров набегающего потока (числа M и отношения теплоемкостей γ). Поэтому естественно искать приближенные методы расчета обтекания профилей, свободные от этого недостатка. Наиболее простым таким методом является метод малых возмущений, основанный на линеаризации уравнений. В этом методе местное значение коэффициента давления на профиле определяется формулой [1]

$$c_p = \frac{2}{\sqrt{M^2 - 1}} \theta, \quad (4.1)$$

где θ — угол между элементом поверхности и направлением набегающего потока. Формула (4.1) позволяет без труда найти аэродинамические характеристики любого профиля. В частности, для плоской пластины, установленной под углом атаки α , находим

$$c_y = \frac{c_x}{\alpha} = \frac{4\alpha}{\sqrt{M^2 - 1}}.$$

Это выражение было использовано в гл. I при построении пунктирных линий на рис. 1.7.

Не останавливаясь подробнее на методе малых возмущений, основанном на линеаризации уравнений, рассмотрим вкратце некоторые другие часто используемые методы расчета давления на поверхности профиля при сверхзвуковой скорости *).

При сформулированных в начале настоящего параграфа предположениях потоки с двух сторон профиля не оказывают влияния друг на друга; поэтому мы можем ограничиться рассмотрением течения, например, только над верхней поверхностью профиля. В случае, если область, занятая этим течением, за передней кромкой профиля расширяется (рис. 4.1, а), у поверхности профиля образуется течение

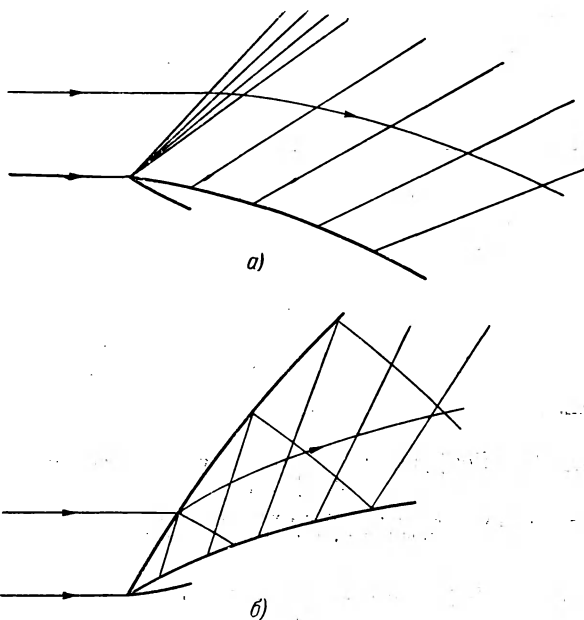


Рис. 4.1. Обтекание профиля сверхзвуковым потоком.

разрежения — простая волна, представляющая собой систему плоских звуковых волн, вдоль каждой из которых параметры потока сохраняют неизменные значения.

Рассуждения, которые были использованы ранее (см. гл. I, § 3) в случае простой волны, возникающей при обтекании плоской пластины, применимы без изменений и в рассматриваемом более общем случае обтекания искривленной поверхности. Поэтому параметры течения в простой волне определяются по-прежнему формулами (1.13),

*) Более обстоятельно эти методы изложены, например, в работах [1] и [2].

(1.14) и соотношениями (1.11), вытекающими из условия адиабатичности, интеграла Бернулли и уравнения состояния. В частности, по этим формулам можно рассчитать давление на поверхности профиля.

Если за передней кромкой профиля область, занятая набегающим потоком, сужается (рис. 4.1, б), то в потоке образуется скачок уплотнения. Течение за скачком в случае криволинейного профиля перестает быть изэнтропическим и не является простой волной. Однако, если интенсивность скачка мала, то изменением энтропии в нем можно пренебречь (см., например, [1]) и по-прежнему пользоваться для расчета давления на профиле формулами простой волны.

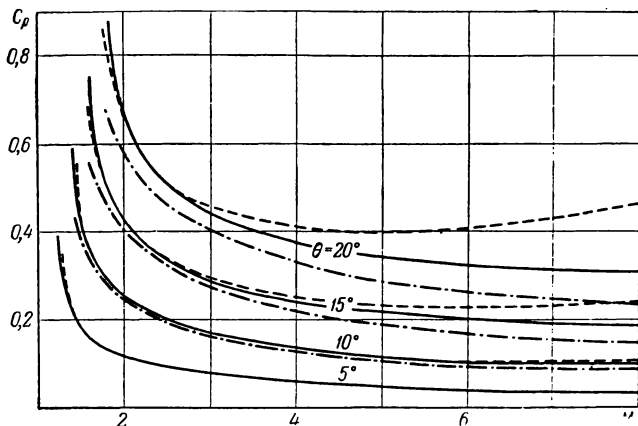


Рис. 4.2. Коэффициент давления у передней кромки профиля:

— по формулам косо́го скачка уплотнения; - - - по формулам простой волны; - · - по формуле (4.2).

Легко оценить ошибку, связанную с использованием формул простой волны для расчета распределения давления по профилю. Для этого можно сравнить значения коэффициента давления у передней кромки профиля, вычисленные по точным соотношениям в косом скачке уплотнения и по формулам простой волны. Такое сопоставление произведено на рис. 4.2. Сплошными линиями нанесены точные значения давления, пунктирными — вычисленные по формулам простой волны. (Кривые, полученные по формулам косо́го скачка, обрываются слева при наименьшем значении числа Маха, при котором возможен поворот потока в скачке на данный угол θ . Кривые, полученные по формулам простой волны, обрываются при падении скорости потока за волной до скорости звука — дальнейший поворот потока в простой волне невозможен.)

Близкое совпадение кривых при малых θ и не очень больших значениях числа M наталкивает на мысль использовать разложения C_p

по θ для скачка и для простой волны и сравнить эти разложения между собой.

По формулам простой волны и по формулам косого скачка уплотнения получаем соответственно [1]:

$$c_p = a_1\theta + a_2\theta^2 + a_3\theta^3 + \dots$$

и

$$c_p = a_1\theta + a_2\theta^2 + (a_3 + a_{1d})\theta^3 + \dots,$$

где

$$a_1 = \frac{2}{\sqrt{M^2 - 1}}, \quad a_2 = \frac{2 - 2M^2 + \frac{\gamma + 1}{2} M^4}{(M^2 - 1)^2},$$

$$a_3 = \frac{\frac{4}{3} - 2M^2 + \frac{5(\gamma + 1)}{3} M^4 - \frac{5 + 7\gamma - 2\gamma^2}{6} M^6 + \frac{\gamma + 1}{6} M^8}{(M^2 - 1)^{7/2}},$$

$$a_{1d} = \frac{\frac{\gamma + 1}{6} M^4 \left(\frac{3\gamma - 5}{8} M^4 + \frac{3 - \gamma}{2} M^2 - 1 \right)}{(M^2 - 1)^{7/2}}.$$

Коэффициенты a_1 , a_2 , a_3 положительны при всех $M > 1$ и для всех $\gamma > 1$, коэффициент же a_{1d} изменяет знак при изменении числа M . При $\gamma = 1,4$ величина a_{1d} отрицательна вне интервала $1,245 < M < 2,540$ и положительна внутри его. По величине a_{1d} много меньше, чем a_3 .

При больших значениях числа M коэффициенты a_1 , a_2 , a_3 , a_{1d} имеют следующий асимптотический вид:

$$a_1 = \frac{2}{M}, \quad a_2 = \frac{\gamma + 1}{2}, \quad a_3 = \frac{\gamma + 1}{6} M, \quad a_{1d} = \frac{(\gamma + 1)(3\gamma - 5)}{48} M.$$

Эти выражения находятся в соответствии с законом подобия при большой сверхзвуковой скорости и могут быть получены непосредственно из приближенных формул (1.16) и (1.21) для c_p в простой волне и в скачке уплотнения, справедливых при больших числах M и малых углах поворота потока.

Ошибку, возникающую при использовании формул простой волны для расчета давления у передней кромки профиля, можно принять за меру погрешности расчета во всех точках обтекаемой поверхности, так как скачок имеет наибольшую интенсивность вблизи передней кромки.

Таким образом, теория простой волны дает ошибки в величине давления (а следовательно, и других параметров потока) порядка θ^3 . Поэтому разумно при расчете давления за скачком уплотнения на профиле с помощью формул простой волны пренебречь членами порядка θ^3 и сохранить таким образом выражение для c_p в виде

$$c_p = a_1\theta + a_2\theta^2. \quad (4.2)$$

Этот метод определения давления на профиле принадлежит Буземану.

На рисунке 4.2 штрих-пунктирными линиями нанесены значения c_p , вычисленные по формуле (4.2). На рис. 4.3 дано сравнение значений c_p , вычисленных по этой формуле, с точными значениями в простой волне при течении разрежения.

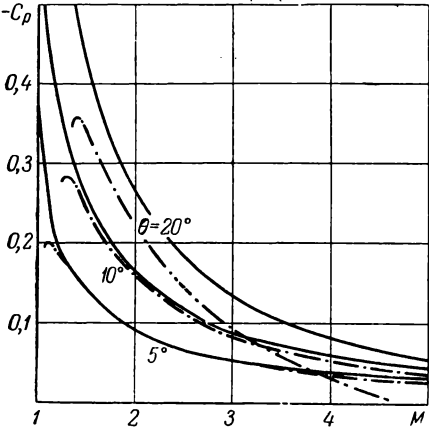


Рис. 4.3. Коэффициент давления в волне разрежения:

— по точным формулам простой волны;
 - - - по формуле (4.2).

При больших значениях числа M даже при малых углах θ совпадение приближенных значений c_p с точными ухудшается.

Это объясняется тем, что радиус сходимости рядов для c_p при больших M пропорционален $\frac{1}{M}$: выражения (1.16) и (1.21) показывают, что соответствующие ряды при обтекании плоской пластины сходятся лишь при $M\theta < \frac{2}{\gamma - 1}$

$$\text{и } M\theta < \frac{4}{\gamma + 1}.$$

Таким образом, линейная теория, теория Буземана, а также другие известные более точные теории, учитывающие члены порядка θ^3 и θ^4 (теория Донована, см. [1]), могут быть использованы для расчета распределения давления по профилю лишь в тех случаях, когда величина $M\theta$ мала.

§ 2. Точный метод, использующий соотношения на скачке и в простой волне

При сверхзвуковом обтекании некоторых профилей идеальным газом распределение давлений по их поверхности можно рассчитать точно, используя соотношения на скачке уплотнения и решение для простой волны (впервые на эту возможность было указано в работе [3]).

Пусть участок OA контура профиля вблизи передней кромки прямолинеен (рис. 4.4). При сверхзвуковом обтекании такого профиля с присоединенным скачком уплотнения поток в области между поверхностью профиля, скачком уплотнения и отрезком характеристики AB будет поступательным и значения всех параметров течения в этой области можно найти в зависимости от числа M_1 набегающего потока и угла $\bar{\theta}$ поворота потока у передней кромки профиля с по-

мощью соотношений на скачке уплотнения. Вдоль прямолинейной характеристики AB к поступательному потоку примыкает простая волна, так что в точках поверхности профиля, расположенных вниз по течению от точки A и не попадающих в область влияния точки B , давление определяется решением для простой волны. Если профиль лежит целиком вне области влияния точки B , то давление всюду на

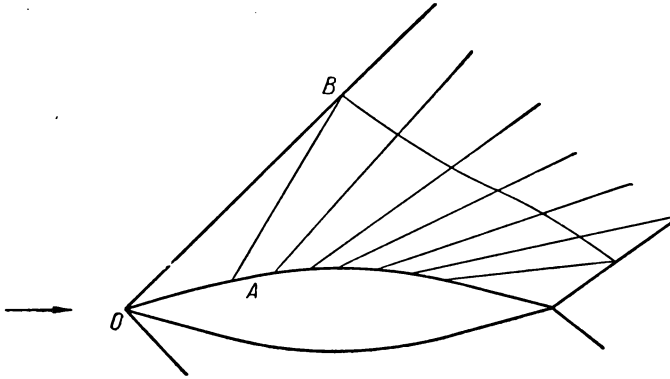


Рис. 4.4. Обтекание профиля с прямолинейным участком у передней кромки.

его поверхности может быть найдено по формулам скачка уплотнения и простой волны.

Коэффициент давления в точках поверхности такого профиля можно представить в следующем виде:

$$c_p = c_{p2} + \frac{\rho_2 V_2^2}{\rho_1 V_1^2} \tilde{c}_p(M_2, \theta - \bar{\theta}).$$

Коэффициент давления на прямолинейной части профиля c_{p2} , а также величины $\rho_2 V_2^2 / \rho_1 V_1^2$ и M_2 определяются через число M_1 набегающего потока и угол $\bar{\theta}$ из условий (1.17) и (1.18) на скачке уплотнения; величина \tilde{c}_p — коэффициент давления в простой волне — находится в зависимости от числа M_2 перед простой волной и угла $\theta - \bar{\theta}$ поворота потока в ней путем использования формулы (1.14) и соотношения

$$\frac{p}{p_2} = \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

При большой сверхзвуковой скорости потока и малых значениях

угла $\bar{\theta}$ согласно формулам § 3 гл. I справедливы приближенные равенства:

$$\left. \begin{aligned} c_{p2} &= \frac{4}{\gamma+1} \frac{K_c^2 - 1}{M_1^2}, \\ \frac{p_2}{p_1} &= \frac{1}{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{K_c^2}}, \quad \frac{V_2}{V_1} = 1, \\ M_2 &= \frac{M_1}{\sqrt{\left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} K_c^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right) \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{K_c^2}\right)}}, \\ \tilde{c}_p &= \frac{2}{\gamma M_2^2} \left\{ \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} M_2 (\bar{\theta} - \theta) \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right\}, \end{aligned} \right\} (4.3)$$

причем величина $K_c = M_1 \beta$ (β — угол наклона скачка уплотнения к направлению набегающего потока) связана с величиной $K = M_1 \bar{\theta}$ зависимостью

$$K_c = \frac{\gamma+1}{4} K + \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4} K\right)^2 + 1}.$$

Путем замены этими приближенными выражениями соответствующих величин в формуле для c_p можно преобразовать эту формулу к виду [4]:

$$c_p = \frac{2}{\gamma M_1^2} \left\{ g(K) \left[1 - f(K) \left(1 - \frac{\theta}{\bar{\theta}} \right) \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right\}. \quad (4.4)$$

Здесь

$$g = \frac{2\gamma}{\gamma+1} K_c^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1},$$

$$f = \frac{\frac{\gamma-1}{2} K}{\sqrt{\left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} K_c^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right) \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{K_c^2}\right)}}.$$

Формула (4.4) позволяет легко определять аэродинамические характеристики тонких профилей, удовлетворяющих при больших сверхзвуковых скоростях сформулированному в начале настоящего параграфа условию применимости рассматриваемого метода. В нижеприведенной таблице приведены облегчающие расчет значения функций g и f при $\gamma = 1,4$ в зависимости от параметра $K = M_1 \bar{\theta}$.

K	$g(K)$	$f(K)$	K	$g(K)$	$f(K)$
0	1,000	0	5,0	44,14	0,3466
0,05	1,072	0,009901	5,2	47,56	0,3487
0,10	1,148	0,01961	5,4	51,13	0,3506
0,15	1,230	0,02912	5,6	54,82	0,3523
0,20	1,316	0,03845	5,8	58,66	0,3539
0,25	1,406	0,04760	6,0	62,62	0,3553
0,30	1,502	0,05656	6,2	66,73	0,3566
0,35	1,604	0,06537	6,4	70,96	0,3578
0,40	1,710	0,07393	6,6	75,33	0,3589
0,45	1,823	0,08235	6,8	79,83	0,3600
0,50	1,941	0,09058	7,0	84,47	0,3610
0,55	2,065	0,09863	7,2	89,24	0,3618
0,60	2,195	0,1071	7,4	94,14	0,3626
0,65	2,332	0,1142	7,6	99,19	0,3633
0,70	2,474	0,1217	7,8	104,4	0,3640
0,75	2,624	0,1290	8,0	109,7	0,3647
0,80	2,780	0,1362	8,5	123,5	0,3661
0,85	2,943	0,1431	9,0	138,2	0,3673
0,90	3,112	0,1499	9,5	153,8	0,3684
0,95	3,289	0,1565	10,0	170,2	0,3693
1,00	3,473	0,1630	10,5	187,4	0,3701
1,1	3,862	0,1753	11,0	205,4	0,3707
1,2	4,280	0,1869	11,5	224,3	0,3714
1,3	4,728	0,1978	12,0	244,1	0,3719
1,4	5,206	0,2064	12,5	264,7	0,3723
1,5	5,715	0,2178	13,0	286,1	0,3727
1,6	6,256	0,2269	13,5	308,3	0,3731
1,7	6,827	0,2354	14,0	331,4	0,3735
1,8	7,431	0,2433	14,5	355,4	0,3738
1,9	8,066	0,2507	15,0	380,2	0,3740
2,0	8,734	0,2577	16,0	432,3	0,3745
2,1	9,411	0,2646	17,0	487,7	0,3749
2,2	10,17	0,2702	18,0	546,5	0,3752
2,3	10,93	0,2759	19,0	608,6	0,3755
2,4	11,73	0,2812	20,0	674,2	0,3757
2,5	12,56	0,2862	22,0	815,3	0,3761
2,6	13,42	0,2908	24,0	969,8	0,3764
2,7	14,32	0,2951	26,0	1 138	0,3766
2,8	15,25	0,2992	28,0	1 319	0,3768
2,9	16,21	0,3030	30,0	1 514	0,3770
3,0	17,21	0,3066	35,0	2 060	0,3772
3,2	19,30	0,3130	40,0	2 690	0,3774
3,4	21,52	0,3187	45,0	3 404	0,3775
3,6	23,88	0,3237	50,0	4 202	0,3776
3,8	26,37	0,3280	60,0	6 050	0,3777
4,0	29,00	0,3322	70,0	8 233	0,3778
4,2	31,76	0,3358	80,0	10 750	0,3778
4,4	34,65	0,3389	90,0	13 610	0,3779
4,6	37,68	0,3418	100,0	16 800	0,3779
4,8	40,84	0,3443	∞	∞	0,3780

Если угол атаки профиля достаточно велик, то скачок у верхней поверхности профиля не образуется и распределение давления на ней находится по формуле простой волны (1.16) (формула (1.16) получается из выражения (4.4) при $K_c = 1$ и $\bar{\theta} = 0$). Давление на верхней поверхности профиля будет при этом ниже, чем давление в невозмущенном потоке, что является благоприятным для создания

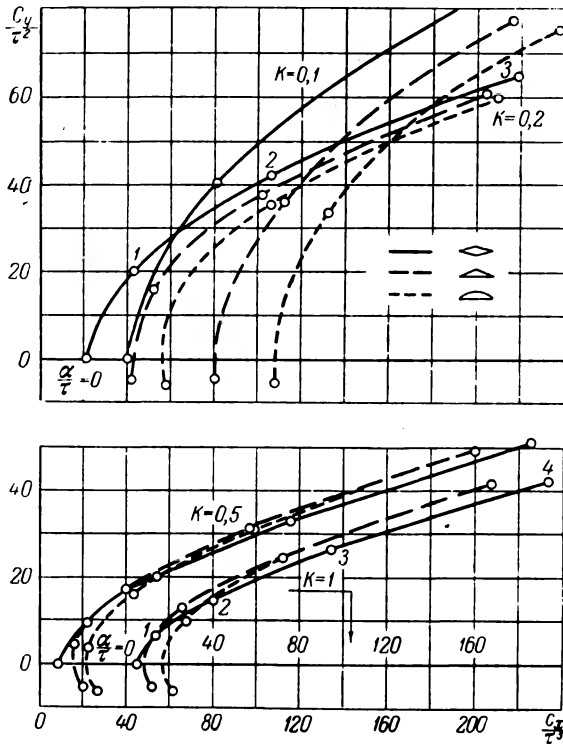


Рис. 4.5. Поляры тонких профилей при большой сверхзвуковой скорости.

подъемной силы. При возрастании скорости полета давление на верхней поверхности профиля уменьшается и при $M_1 \theta < \frac{2}{\gamma - 1}$ становится равным нулю. Таким образом, подтверждается сделанный в § 2 гл. III при использовании формулы Ньютона вывод о том, что при таких углах атаки, при которых у верхней поверхности профиля образуется течение разрежения, величина подъемной силы профиля при больших сверхзвуковых скоростях определяется в основном распределением давления вдоль его нижней поверхности. Поэтому при таких скоростях наибольшей подъемной силой будет обладать профиль с плоской

нижней поверхностью; выпуклость нижней поверхности профиля ведет к уменьшению подъемной силы. Если угол атаки или число M_1 полета настолько велики, что всюду на верхней поверхности такого профиля давление обращается в нуль, то профиль ведет себя аэродинамически как бесконечно тонкая плоская пластина.

На рисунке 4.5 приведены для примера рассчитанные [5] с использованием формулы (4.4) поляры, т. е. зависимости c_y от c_x , профилей с треугольным и с ромбовидным сечением *) при значениях $K = M_1 \tau$ (τ — относительная толщина профиля) от 0,1 до 1,0 (кривые при больших значениях K практически не отличаются от кривых при $K = 1$). При $K \geq 0,5$ аэродинамическое качество, т. е. отношение c_y/c_x , у профиля треугольного сечения становится выше, чем у профиля ромбовидного сечения, исключая небольшую область малых значений подъемной силы. С ростом параметра K такое преимущество треугольного профиля усиливается. Напомним, что в случае обтекания профилей с очень большой сверхзвуковой скоростью этот факт был уже обнаружен нами ранее (§ 2 гл. III) при использовании для расчета давления формулы Ньютона.

§ 3. Взаимодействие возмущений со скачком уплотнения

Если поверхность обтекаемого профиля искривлена, начиная от передней кромки, то в потоке возникают вихри и расчет по методу предыдущего параграфа не может быть выполнен, так как весь профиль попадает в область действия отраженных от головного скачка возмущений. При малой интенсивности головного скачка возникающей завихренностью и отражением возмущений от скачка можно пренебречь и течение вблизи поверхности профиля можно по-прежнему считать простой волной, соответствующей энтропии невозмущенного потока. В этом случае волна вызывает искривление скачка, но скачок не оказывает обратного воздействия на течение в волне.

Если интенсивность головного скачка достаточно велика, то завихренностью потока нельзя более пренебрегать и нужно учитывать взаимодействие течения около профиля с головным скачком.

Вопрос о взаимодействии со скачком уплотнения возмущений, подходящих к скачку сзади при сверхзвуковой скорости течения за ним, рассматривался впервые в работе [6]; это взаимодействие, а также взаимодействие скачка уплотнения с возмущениями, подходящими к нему из набегающего потока, было исследовано независимо автором в 1950 г. Впоследствии часть этого исследования повторялась в других работах [4, 7, 8].

В настоящем и в следующем параграфах воспроизведена часть результатов, полученных автором.

*) О получении изображенных на этом рисунке поляр профиля с сечением в виде кругового сегмента сказано ниже — в § 5 настоящей главы.

Рассмотрим плоское или осесимметричное течение газа со скачком уплотнения. Поместим начало координат в некоторую точку O скачка уплотнения и выберем ось Ox так, чтобы ее направление мало отличалось от направления линии тока за скачком; направление набегающего невозмущенного потока пусть будет Ox' . Оси Ox и Ox' вместе с перпендикулярными к ним осями Oy и Oy' образуют две системы координат в плоскости течения (рис. 4.6).

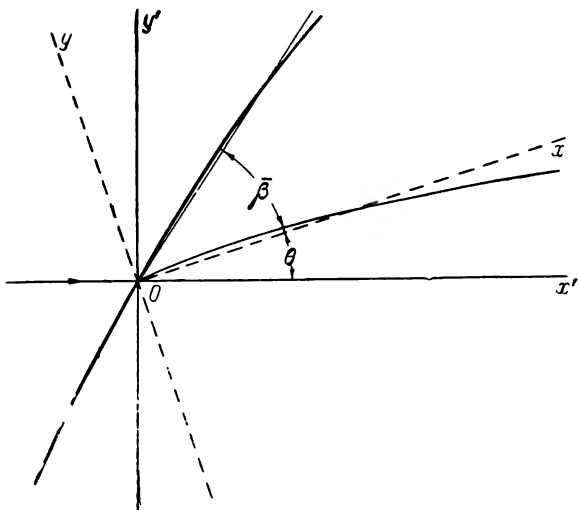


Рис. 4.6. Системы координат при изучении течения вблизи скачка уплотнения.

Обозначим через u и v — проекции скорости на оси Ox и Oy и через U и V — проекции скорости на оси Ox' и Oy' . Индексами 1 и 2 обозначим соответственно величины, относящиеся к областям течения перед скачком и за ним.

Для определения течения за скачком воспользуемся приводившейся уже ранее системой уравнений (3.26). В рассматриваемом случае, полагая $R = \infty$, $r = r_0 + x \sin \theta + y \cos \theta$, приведем эту систему к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + (v-1) \frac{\rho u \sin \theta + \rho v \cos \theta}{r_0 + x \sin \theta + y \cos \theta} &= 0, \\ u \frac{\partial}{\partial x} \frac{p}{\rho r} + v \frac{\partial}{\partial y} \frac{p}{\rho r} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

В силу сделанного выбора оси Ox уравнение линии тока за скачком можно записать в виде

$$y = \epsilon' Y(x),$$

где ϵ' — малая величина, характеризующая отклонение линии тока от выбранного направления Ox , а функция $Y(x)$ вместе со своей производной имеет в рассматриваемой области течения (характерный размер которой примем за единицу) порядок единицы.

При наличии малых возмущений набегающего потока параметры его могут быть представлены в форме

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= \bar{\rho}_1 + \epsilon'' \rho_1', & U &= \bar{U} + \epsilon'' U', \\ \rho_1 &= \bar{\rho}_1 + \epsilon'' \rho_1', & V &= \epsilon'' V', \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

где $\bar{\rho}_1$, $\bar{\rho}_1$, \bar{U} — постоянные, соответствующие невозмущенному набегающему потоку, а ϵ'' — малая величина, характеризующая отклонения набегающего потока от поступательного и однородного. Функции ρ_1 , ρ_1 , U , V , описывающие течение перед скачком, будем считать заданными.

Очевидно, далее, что в случае осевой симметрии течение вблизи точки O тем в меньшей степени отличается от плоского, чем меньше размер рассматриваемой области течения по сравнению с расстоянием ее r_0 от оси симметрии. Поэтому можно ввести еще один малый параметр $\epsilon''' = \frac{\nu - 1}{r_0}$, характеризующий отличие потока от плоского в силу осевой симметрии.

При определении возмущенного течения за скачком уплотнения параметры газа с обеих сторон скачка должны быть связаны следующими условиями (см. формулы (1.5)):

$$\left. \begin{aligned} \rho_2 (u_2 \sin \beta - v_2 \cos \beta) &= \rho_1 (u_1 \sin \beta - v_1 \cos \beta), \\ \rho_2 (u_2 \sin \beta - v_2 \cos \beta)^2 + p_2 &= \rho_1 (u_1 \sin \beta - v_1 \cos \beta)^2 + p_1, \\ u_2 \cos \beta + v_2 \sin \beta &= u_1 \cos \beta + v_1 \sin \beta, \\ \frac{u_2^2 + v_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\rho_2} &= \frac{u_1^2 + v_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1}. \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

Представим характеристики движения за скачком уплотнения в виде суммы главных членов, линейных относительно малых параметров ϵ' , ϵ'' , ϵ''' и членов более высокого порядка:

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= \bar{u}_2 (1 + \epsilon' u' + \epsilon'' u'' + \epsilon''' u''' + \dots), \\ v_2 &= \bar{v}_2 (\epsilon' v' + \epsilon'' v'' + \epsilon''' v''' + \dots), \\ \rho_2 &= \bar{\rho}_2 (1 + \epsilon' \rho' + \epsilon'' \rho'' + \epsilon''' \rho''' + \dots), \\ \rho_2 &= \bar{\rho}_2 (1 + \epsilon' \rho' + \epsilon'' \rho'' + \epsilon''' \rho''' + \dots); \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

Здесь $\bar{u}_2, \bar{p}_2, \bar{\rho}_2$ постоянны и соответствуют состоянию газа за косым скачком с углом отклонения потока θ .

В дальнейшем ограничимся нахождением только членов с первыми степенями малых параметров. Обозначив для сокращения

$$\varepsilon\varphi(x, y) \equiv \varepsilon'\varphi'(x, y) + \varepsilon''\varphi''(x, y) + \varepsilon'''\varphi'''(x, y),$$

подставим выражения (4.8) в уравнения (4.5). Отбросив затем члены выше первого порядка по ε , получим для определения $\varepsilon u, \varepsilon v, \varepsilon p$ следующую систему линейных уравнений (уравнений в вариациях):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon u}{\partial x} + \frac{1}{\gamma M_2^2} \frac{\partial \varepsilon p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \varepsilon v}{\partial x} + \frac{1}{\gamma M_2^2} \frac{\partial \varepsilon p}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \varepsilon p}{\partial x} - \gamma \frac{\partial \varepsilon p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \varepsilon u}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon p}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon v}{\partial y} + \varepsilon''' \sin \theta &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

где обозначено $M_2^2 = \bar{u}_2^2 / (\gamma \bar{p}_2 / \bar{\rho}_2)$.

Приступим к линеаризации граничных условий (4.7) на скачке уплотнения. Представим угол наклона скачка в виде

$$\beta = \bar{\beta} + \varepsilon\beta',$$

где $\bar{\beta}$ — угол наклона к оси Ox скачка уплотнения в невозмущенном потоке при повороте его на угол θ , и вставим это выражение наряду с выражениями (4.8) в условия (4.7).

Учитывая соотношения, связывающие характеристики течения в основном потоке, получаем после линеаризации следующие условия на ударной волне:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon u - \varepsilon v \operatorname{ctg} \bar{\beta} + \varepsilon p + \left(1 - \frac{\bar{\rho}_1}{\bar{\rho}_2}\right) \varepsilon\beta' \operatorname{ctg} \bar{\beta} &= \varepsilon'' L_1, \\ 2\varepsilon u - 2\varepsilon v \operatorname{ctg} \bar{\beta} + \varepsilon p + \frac{1}{\gamma M_2^2 \sin^2 \bar{\beta}} \varepsilon p &= \varepsilon'' L_2, \\ \varepsilon u + \varepsilon v \operatorname{tg} \bar{\beta} + \left(\frac{\bar{\rho}_2}{\bar{\rho}_1} - 1\right) \varepsilon\beta' \operatorname{tg} \bar{\beta} &= \varepsilon'' L_3, \\ \varepsilon u + \frac{1}{(\gamma - 1) M_2^2} (\varepsilon p - \varepsilon p) &= \varepsilon''' L_4. \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

Здесь для сокращения введены обозначения:

$$L_1 = U' - V' \operatorname{ctg}(\bar{\beta} + \theta) + \rho'_1,$$

$$L_2 = \frac{1}{\bar{\rho}_2 \bar{u}_2^2 \sin^2 \bar{\beta}} \{ \bar{\rho}_1 \bar{U}^2 \sin^2(\bar{\beta} + \theta) [2U' - 2 \operatorname{ctg}(\bar{\beta} + \theta) V' + \rho'_1] + \bar{p}_1 \rho'_1 \},$$

$$L_3 = U' + V' \operatorname{tg}(\bar{\beta} + \theta),$$

$$L_4 = \frac{\bar{U}^2}{\bar{u}_2^2} \left[U' + \frac{1}{(\gamma - 1) M_1^2} (\rho'_1 - \rho'_1) \right].$$

Очевидно, что в принятом приближении достаточно, чтобы условия (4.10) выполнялись не в точках самого скачка уплотнения

$$y = x \operatorname{tg} \bar{\beta} + \frac{1}{\cos^2 \bar{\beta}} \int_0^x \varepsilon \beta' dx, \quad (4.11)$$

а в точках прямой $y = x \operatorname{tg} \bar{\beta}$ с соответствующими абсциссами ($\cos^2 \bar{\beta}$ можно считать достаточно большим).

Система уравнений (4.9) при сверхзвуковой скорости газа за скачком легко интегрируется в общем виде. Из первого и третьего уравнений непосредственно следует наличие интегралов (эквивалентных в линейном приближении интегралам Бернулли и адиабатичности)

$$\varepsilon u + \frac{1}{\gamma M_2^2} \varepsilon p = \varepsilon F_1(y),$$

$$\varepsilon p - \gamma \varepsilon \rho = -\gamma \varepsilon F_2(y).$$

Через функции $F_1(y)$ и $F_2(y)$ могут быть выражены возмущения полного теплосодержания и энтропии газа, распространяющиеся вдоль линий тока вместе с частицами газа. Пользуясь этими интегралами и остальными двумя уравнениями системы (4.9), получаем

$$(M_2^2 - 1) \frac{\partial^2 \varepsilon p}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon p}{\partial y^2} = 0.$$

При $M_2 > 1$ общее решение этого уравнения для εp и выражения для других искомым функций можно записать в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon p &= \gamma M_2^2 [\varepsilon F_3(x - \sqrt{M_2^2 - 1}y) - \varepsilon F_4(x + \sqrt{M_2^2 - 1}y)], \\ \varepsilon u &= \varepsilon F_1(y) - \varepsilon F_3(x - \sqrt{M_2^2 - 1}y) + \varepsilon F_4(x + \sqrt{M_2^2 - 1}y), \\ \varepsilon v &= \sqrt{M_2^2 - 1} [\varepsilon F_3(x - \sqrt{M_2^2 - 1}y) + \\ &\quad + \varepsilon F_4(x + \sqrt{M_2^2 - 1}y)] - \varepsilon''' y \sin \theta, \\ \varepsilon \rho &= \varepsilon F_2(y) + M_2^2 [\varepsilon F_3(x - \sqrt{M_2^2 - 1}y) - \varepsilon F_4(x + \sqrt{M_2^2 - 1}y)]. \end{aligned} \right\} (4.12)$$

Функции $F_3(x - \sqrt{M_2^2 - 1}y)$ и $F_4(x + \sqrt{M_2^2 - 1}y)$ описывают возмущения, распространяющиеся вдоль характеристик двух семейств, идущих соответственно по направлению к скачке уплотнения и от него.

Полученное общее решение системы уравнений (4.9) содержит четыре произвольные функции F_1, F_2, F_3, F_4 . Граничные условия (4.10) связывают значения этих функций на скачке уплотнения с величиной β' , характеризующей форму скачка. Подставляя выражение (4.12) в условия на скачке (4.10) и обозначив $\sqrt{M_2^2 - 1} = \text{ctg } \alpha$, получаем, что при $y = x \text{tg } \bar{\beta}$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon F_1 + \varepsilon F_2 + \text{ctg } \alpha (\text{ctg } \alpha - \text{ctg } \bar{\beta}) \varepsilon F_3 - \text{ctg } \alpha (\text{ctg } \alpha + \text{ctg } \bar{\beta}) \varepsilon F_4 + \\ + \left(1 - \frac{\bar{\rho}_1}{\rho_2}\right) \varepsilon \beta' \text{ctg } \bar{\beta} = \varepsilon'' L_1 - \varepsilon''' x \sin \theta, \\ 2\varepsilon F_1 + \varepsilon F_2 + (\text{ctg } \alpha - \text{ctg } \bar{\beta})^2 \varepsilon F_3 - \\ - (\text{ctg } \alpha + \text{ctg } \bar{\beta})^2 \varepsilon F_4 = \varepsilon'' L_2 - 2\varepsilon''' x \sin \theta, \\ \varepsilon F_1 + \text{tg } \bar{\beta} (\text{ctg } \alpha - \text{ctg } \bar{\beta}) \varepsilon F_3 + \text{tg } \bar{\beta} (\text{ctg } \alpha + \text{ctg } \bar{\beta}) \varepsilon F_4 + \\ + \left(\frac{\bar{\rho}_2}{\rho_1} - 1\right) \varepsilon \beta' \text{tg } \bar{\beta} = \varepsilon'' L_3 + \varepsilon''' x \text{tg}^2 \beta \sin \theta, \\ \varepsilon F_1 - \frac{1}{(\gamma - 1) M_2^2} \varepsilon F_2 = \varepsilon''' L_4. \end{aligned} \right\} (4.13)$$

Из этих соотношений путем простых выкладок можно выразить значения функций F_1, F_2, F_4, β' на скачке через значения функции F_3 . В частности, нетрудно получить следующую связь между функциями F_4 и F_3 :

$$\varepsilon F_4 \left[\left(1 + \frac{\text{tg } \bar{\beta}}{\text{tg } \alpha}\right) x \right] + \lambda \varepsilon F_3 \left[\left(1 - \frac{\text{tg } \bar{\beta}}{\text{tg } \alpha}\right) x \right] = \varepsilon'' \bar{L}(x) + \varepsilon''' \bar{C}x. \quad (4.14)$$

Здесь

$$\lambda = \frac{a-b}{a+b}, \quad \bar{C} = \frac{a}{a+b} \text{tg } \alpha \text{tg } \bar{\beta} \sin \theta,$$

$$\begin{aligned} \bar{L}(x) = & -\frac{2 \text{tg}^2 \bar{\beta}}{a+b} \left\{ \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right) \frac{\bar{\rho}_2}{\rho_1} \sin^2 \bar{\beta} L_1 + \right. \\ & + \frac{1}{2} \left[\text{ctg}^2 \bar{\beta} - (1 - (\gamma-1) M_2^2) \frac{\bar{\rho}_2}{\rho_1} \right] \sin^2 \bar{\beta} L_2 - \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right) \cos^2 \bar{\beta} L_3 + \\ & \left. + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2 \left(\frac{\bar{\rho}_2}{\rho} \sin^2 \bar{\beta} + \cos^2 \bar{\beta} \right) L_4 \right\}, \end{aligned}$$

причем a и b выражаются формулами:

$$\left. \begin{aligned} a &= 2 \frac{\operatorname{tg} \bar{\beta}}{\operatorname{tg} \alpha} \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} M_2^2 \sin^2 \bar{\beta} \left(\frac{\bar{\rho}_2}{\rho_1} - 1 \right) \right], \\ b &= 1 + \frac{\bar{\rho}_2}{\rho_1} \frac{\operatorname{tg}^2 \bar{\beta}}{\operatorname{tg}^2 \alpha} - \gamma M_2^2 \sin^2 \bar{\beta} \left(\frac{\bar{\rho}_2}{\rho_1} - 1 \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

Рассмотрим сначала случай, когда набегающий поток не возмущен и течение плоскопараллельно, т. е. $\varepsilon'' = \varepsilon''' = 0$. Тогда из соотношения (4.14) и выражения (4.12) для εp следует, что если за меру возмущения течения принять соответствующее изменение давления, то величина λ представит собой коэффициент отражения возмущения от ударной волны, т. е. отношение амплитуды возмущения, отраженного от ударной волны (вдоль характеристики $x + \sqrt{M_2^2 - 1} y = \text{const}$), к амплитуде возмущения падающего (вдоль характеристики $x - \sqrt{M_2^2 - 1} y = \text{const}$).

Из использовавшегося уже ранее выражения для отношения плотностей с двух сторон скачка

$$\frac{\bar{\rho}_1}{\rho_2} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{(\gamma+1) M_1^2 \sin^2(\bar{\beta} + \theta)}$$

и из симметрии соотношений на скачке относительно индексов 1 и 2 следует, что

$$\frac{\bar{\rho}_2}{\rho_1} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{(\gamma+1) M_2^2 \sin^2 \bar{\beta}}.$$

Написанные выражения позволяют получить неравенства:

$$\begin{aligned} 1 &< \frac{\bar{\rho}_2}{\rho_1} < \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \\ \frac{\gamma-1}{2\gamma} &< M_2^2 \sin^2 \bar{\beta} < 1, \quad \frac{\gamma+1}{2\gamma} < M_2^2 \sin^2 \bar{\beta} \frac{\bar{\rho}_2}{\rho_1} < 1. \end{aligned}$$

Заменяя в правых частях выражений (4.15) каждое слагаемое его минимальным значением, получаем

$$\begin{aligned} \frac{a \operatorname{tg} \alpha}{2 \operatorname{tg} \bar{\beta}} &> 1 - \frac{\gamma-1}{2} + \frac{\gamma-1}{2} \frac{\gamma-1}{2\gamma} > 0, \\ b &= 1 + \frac{\bar{\rho}_2}{\rho_1} \frac{\operatorname{tg}^2 \bar{\beta}}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + \gamma M_2^2 \sin^2 \bar{\beta} - \gamma \left(\frac{2}{\gamma+1} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} M_2^2 \sin^2 \bar{\beta} \right) = \\ &= \frac{\bar{\rho}_2}{\rho_1} \frac{\operatorname{tg}^2 \bar{\beta}}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_2^2 \sin^2 \bar{\beta} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} > \frac{\bar{\rho}_2}{\rho_1} \frac{\operatorname{tg}^2 \bar{\beta}}{\operatorname{tg}^2 \alpha} > 0. \end{aligned}$$

Так как величину λ можно представить в одном из видов

$$\lambda = \frac{a-b}{a+b} = 1 - \frac{2b}{a+b} = -1 + \frac{2a}{a+b},$$

то ясно, что $|\lambda| < 1$.

На рисунке 4.7 показаны величины λ в функции от угла θ отклонения потока, вычисленные при $\gamma = 1,4$ для различных значений числа M_1 .

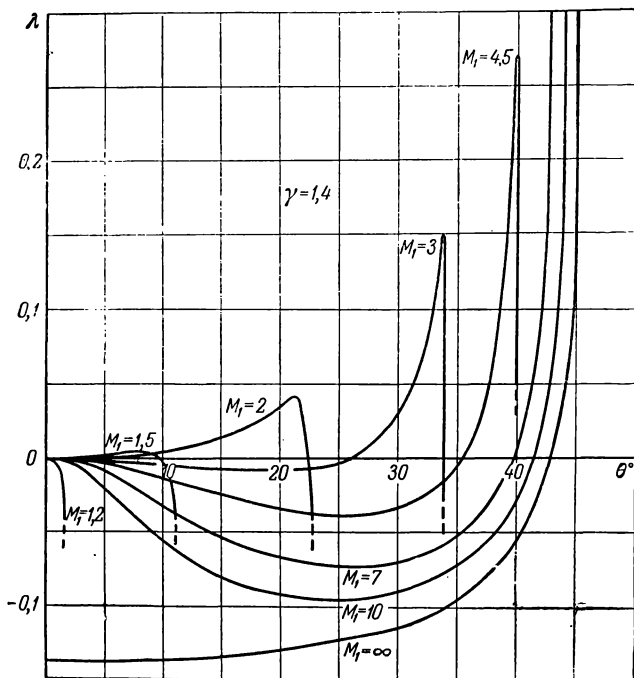


Рис. 7.4. Коэффициент отражения возмущений от поверхности скачка уплотнения.

Пользуясь выражениями (4.15) при малых значениях угла θ и не очень больших M_1 , т. е. когда $M_1\theta \ll 1$, путем несложных, но громоздких вычислений можно получить формулу

$$\lambda = h(M_1)\theta^2 + O(\theta^3),$$

где

$$h(M_1) = \frac{\frac{\gamma+1}{8} M_1^4 \left(\frac{3\gamma-5}{8} M_1^4 + \frac{3-\gamma}{2} M_1^2 - 1 \right)}{(M_1^2 - 1)^3}.$$

При малых значениях θ величина λ имеет порядок θ^2 . Это, как известно, дает возможность пренебрегать взаимодействием ударной волны и течения за ней при учете малых членов только первого и второго порядка по углу отклонения потока. Отметим, что при $\gamma < 5/3$ функция $h(M_1)$ обращается в нуль при двух сверхзвуковых значениях числа M_1 , а при $\gamma \geq 5/3$ — при одном. Для $\gamma = 1,4$ значения M_1 , при которых $h(M_1)$ обращается в нуль, равны 1,245 и 2,540.

Отражение возмущений от поверхности скачка уплотнения объясняет появление величины a_{1d} (см. § 1 настоящей главы), отличающей

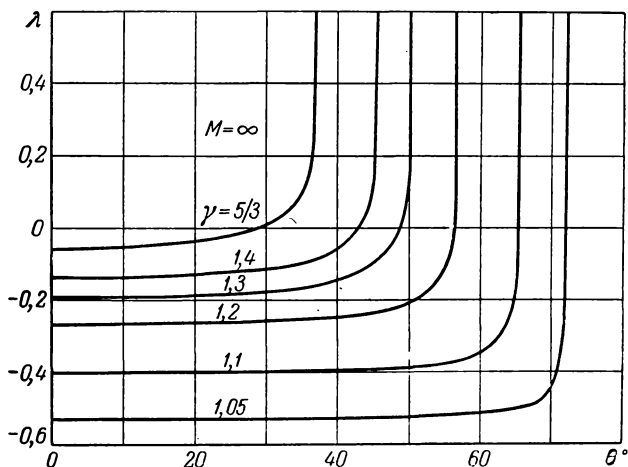


Рис. 4.8. Зависимость коэффициента отражения от величины отношения теплоемкостей при $M = \infty$.

коэффициент давления за скачком от коэффициента давления в простой волне. В самом деле, при малых значениях θ главный член в выражении для коэффициента давления, соответствующий отраженному от скачка возмущению, равен $\lambda a_1 \theta$ или $h a_1 \theta^3$, причем из соответствующих формул следует, что произведение $h a_1$ как раз пропорционально коэффициенту a_{1d} .

Кривые на рис. 4.7 имеют ряд интересных особенностей. Из их рассмотрения прежде всего следует, что величина $|\lambda|$ мала, особенно при небольших значениях числа M_1 . Лишь при больших значениях числа M_1 , а также при таких значениях угла отклонения потока θ , при которых число M_2 близко к единице, λ становится сравнительно большой, причем $\lambda = \lambda(\theta)$ при фиксированном M_1 имеет резко выраженный максимум. Далее, из рассмотрения кривых следует, что величина λ может быть как положительной, так и отрицательной, т. е. в одних случаях отражение происходит без изменения знака

возмущения, в других же знак возмущения меняется при отражении на противоположный*). При $\gamma = 1,4$ и при значениях $M_1 < 1,245$ $\lambda = 0$ только при $\theta = 0$, в диапазоне чисел M_1 от 1,245 до 2,540 λ обращается в нуль еще при одном значении θ (кроме $\theta = 0$), а при $M_1 > 2,540$ — еще при двух.

Важно отметить, что коэффициент отражения λ довольно чувствителен к изменению величины γ . Так как при данном γ коэффициент отражения принимает наибольшие по абсолютной величине значения при $M_1 = \infty$, то для оценки влияния на коэффициент λ величины γ ограничимся вычислением λ лишь при $M_1 = \infty$. На рис. 4.8 приведены значения λ в зависимости от θ при $M_1 = \infty$ для нескольких значений γ . Исключая малую область вблизи значений θ , соответствующих дозвуковой скорости за скачком, коэффициент отражения λ возрастает по абсолютной величине при уменьшении γ . Этот рост при уменьшении γ от 1,4 до, например, 1,3 невелик. Однако при дальнейшем уменьшении γ абсолютная величина коэффициента λ начинает резко возрастать и при $\gamma = 1$ коэффициент λ обращается в -1 , т. е. возмущения отражаются, изменяя знак, но сохраняя свою величину.

§ 4. Обтекание тел, близких к клину, и тонких профилей под большим углом атаки

Рассмотрим обтекание сверхзвуковым потоком тела, близкого по форме к клину, при условии, что скорость газа за присоединенным скачком уплотнения продолжает оставаться сверхзвуковой. Для описания течения между поверхностью тела и головным скачком воспользуемся решением, полученным в предыдущем параграфе, считая, что линия тока

$$y = \varepsilon' Y(x),$$

проходящая через точку O (рис. 4.9), представляет собой контур одной стороны обтекаемого тела**). На этой линии должно быть выполнено условие обтекания

$$\frac{v_n}{u_2} = \varepsilon' Y'(x).$$

*) В силу вкравшейся неточности автор работы [6] пришел к неправильному заключению о том, что при $M_1 \rightarrow \infty$ коэффициент отражения λ стремится к -1 . В работе [8] неправильно утверждается, что $0 < \lambda < 1$, вследствие чего некоторые выводы этой работы, в частности вывод о сохранении знака возмущения при отражении, неверны (см. Р. ж. «Механика», 3, 2457 (1954)).

**) Таким телом может быть тонкий профиль под большим углом атаки. С другой стороны профиля течение будет при этом простой волной разрежения.

Подставим в это условие согласно выражениям (4.8) $v_2 = \bar{u}_2 \varepsilon v + \dots$ и $u_2 = \bar{u}_2 (1 + \varepsilon u + \dots)$, заменим εu и εv по формулам (4.12) и отбросим члены порядка ε^2 . В результате получим

$$\varepsilon F_3(x) + \varepsilon F_4(x) = \varepsilon' \frac{Y'(x)}{\sqrt{M_2^2 - 1}}. \quad (4.16)$$

Используя эту связь, можно исключить в соотношении (4.14)

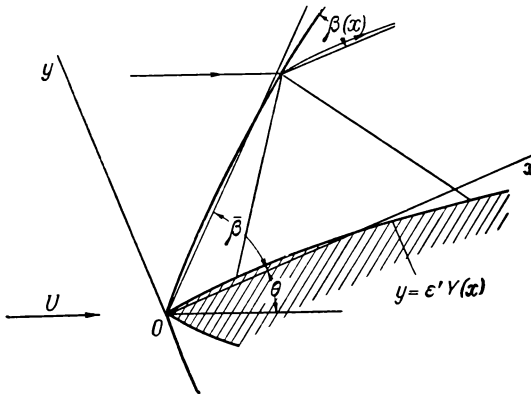


Рис. 4.9. Обтекание профиля, близкого по форме к клину.

функцию F_4 и получить таким образом одно уравнение для определения функции F_3 :

$$\begin{aligned} \varepsilon F_3 \left[\left(1 + \frac{\operatorname{tg} \bar{\beta}}{\operatorname{tg} \alpha} \right) x \right] - \lambda \varepsilon F_3 \left[\left(1 - \frac{\operatorname{tg} \bar{\beta}}{\operatorname{tg} \alpha} \right) x \right] = \\ = \varepsilon' \operatorname{tg} \alpha Y' \left[\left(1 + \frac{\operatorname{tg} \bar{\beta}}{\operatorname{tg} \alpha} \right) x \right] - \varepsilon'' \bar{L}(x) - \varepsilon''' \bar{C}x. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Введем новую переменную $\xi = \left(1 + \frac{\operatorname{tg} \bar{\beta}}{\operatorname{tg} \alpha} \right) x$ и обозначим

$$k = \frac{1 - \frac{\operatorname{tg} \bar{\beta}}{\operatorname{tg} \alpha}}{1 + \frac{\operatorname{tg} \bar{\beta}}{\operatorname{tg} \alpha}}. \quad (4.18)$$

Уравнение (4.17) примет после этого вид

$$\varepsilon F_3(\xi) - \lambda \varepsilon F_3(k\xi) = \varepsilon' \operatorname{tg} \alpha Y'(\xi) - \varepsilon'' L(\xi) - \varepsilon''' C\xi, \quad (4.19)$$

где

$$L(\xi) = \bar{L} \left(\frac{\xi}{1 + \frac{\operatorname{tg} \bar{\beta}}{\operatorname{tg} \alpha}} \right),$$

$$C = \frac{a}{a+b} \frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \bar{\beta} \sin \theta}{1 + \frac{\operatorname{tg} \bar{\beta}}{\operatorname{tg} \alpha}}.$$

Таким образом, задача об обтекании сверхзвуковым потоком тела, близкого к клину, сводится к решению функционального уравнения (4.19), которое распадается на три уравнения вида

$$F_3(\xi) - \lambda F_3(k\xi) = f(\xi). \quad (4.20)$$

Приступим к решению этого уравнения. Так как α — угол наклона к оси Ox характеристики течения за ударной волной, то $\alpha > \bar{\beta}$ и согласно формуле (4.18) $k > 0$. Очевидно также, что $k < 1$. Функцию $f(\xi)$ будем считать определенной и кусочно-непрерывной на отрезке $[0, X]$, причем X может быть и бесконечно большим. Покажем, что при перечисленных условиях уравнение (4.20) имеет единственное решение, ограниченное на отрезке $[0, X]$, и построим это решение.

Нетрудно проверить, что ряд

$$F_3(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n f(k^n \xi) \quad (4.21)$$

формально удовлетворяет уравнению (4.20) при любом ξ . Если функция $f(\xi)$ кусочно-непрерывна на отрезке $[0, X]$ и $\xi = 0$ не есть точка разрыва, то разрывными будет только конечное число первых членов этого ряда. Остальные члены ряда будут непрерывны и, так как $|\lambda^n f(k^n \xi)| \leq |\lambda|^n N$, где $N = \max_{0 \leq \xi \leq X} |f(\xi)|$, сумма их существует

и будет также непрерывной функцией на отрезке $[0, X]$. Следовательно, ряд (4.21) действительно является решением уравнения (4.20). Так как, помимо этого, функция $F_3(\xi)$ должна быть и дважды кусочно-дифференцируемой, то нужно доказать еще и сходимости ряда, полученного двукратным дифференцированием ряда (4.21) по ξ . Такой ряд сходится. Доказательство аналогично предыдущему.

Для того чтобы доказать, что решение (4.21) является единственным ограниченным на отрезке $[0, X]$ решением уравнения (4.20), достаточно показать, что соответствующее однородное уравнение

$$F(\xi) - \lambda F(k\xi) = 0$$

не имеет других ограниченных решений, кроме решения $F(\xi) \equiv 0$. Очевидно

$$F(\xi) = \lambda F(k\xi) = \dots = \lambda^n F(k^n \xi).$$

Пусть функция F остается ограниченной при стремлении аргумента к нулю. Так как $|\lambda| < 1$, то выбирая n достаточно большим, можно правую часть равенства

$$F(\xi) = \lambda^n F(k^n \xi)$$

при любом ξ сделать как угодно малой по абсолютной величине. Отсюда следует, что левая его часть, не зависящая от n , тождественно равна нулю:

$$F(\xi) \equiv 0.$$

Уравнение (4.20) имеет поэтому единственное решение. В самом деле, если предположить, что решений два, то их разность должна удовлетворять однородному уравнению и, в силу предыдущего, равна нулю.

Таким образом, доказано, что функция F_3 , определенная рядом (4.21), является единственным ограниченным решением уравнения (4.20).

Если $f(\xi)$ представлена в виде степенного ряда (или многочлена), т. е.

$$f(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n,$$

то решение (4.21) примет вид

$$F_3(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1 - \lambda k^n} \xi^n.$$

Возвращаясь к уравнению (4.19), получаем

$$\varepsilon F_3(\xi) = \varepsilon' \operatorname{tg} \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n Y'(k^n \xi) - \varepsilon'' \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n L(k^n \xi) - \varepsilon''' \frac{a \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg} \bar{\beta} \sin \theta}{2(b \operatorname{tg} \alpha + a \operatorname{tg} \bar{\beta})} \xi. \quad (4.22)$$

После определения функции F_3 нахождение функций F_1 , F_2 , F_4 , β' , а следовательно, описание всего течения за ударной волной и определение формы ударной волны, не представляет труда.

Найдем формулу для распределения давлений по поверхности за ударной волной. Для этого преобразуем выражение (4.12) для давления, используя связь (4.16) между функциями F_3 и F_4 , и вставим в него решение (4.22). В результате получим

$$\begin{aligned} \varepsilon p(x, 0) = & \varepsilon' \frac{\gamma M_2^2}{V M_2^2 - 1} \left[Y'(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n Y'(k^n x) \right] - \\ & - \varepsilon'' 2 \gamma M_2^2 \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n L(k^n x) - \varepsilon''' \frac{\gamma M_2^2 a \operatorname{tg} \bar{\beta} \sin \theta}{V M_2^2 - 1 (b + a \sqrt{M_2^2 - 1} \operatorname{tg} \bar{\beta})} x. \quad (4.23) \end{aligned}$$

Пусть, как и прежде, набегающий поток не возмущен и течение плоскопараллельно. Тогда $\epsilon'' = \epsilon''' = 0$ и формула (4.23) для распределения давлений запишется следующим образом:

$$p'(x, 0) = \frac{\gamma M_2^2}{\sqrt{M_2^2 - 1}} \left[Y'(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n Y'(k^n x) \right]. \quad (4.24)$$

(Несколько иным способом эта формула была получена А. А. Дороницыным в 1949 г.)

В частности, если функция $Y'(x)$ задана в виде степенного ряда (или многочлена), т. е. $Y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, то

$$p'(x, 0) = \frac{\gamma M_2^2}{\sqrt{M_2^2 - 1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + \lambda k^n}{1 - \lambda k^n} a_n x^n.$$

Полученные формулы являются обобщением известной формулы линейной теории для определения давления сверхзвукового потока на обтекаемую им слабо искривленную стенку и переходят

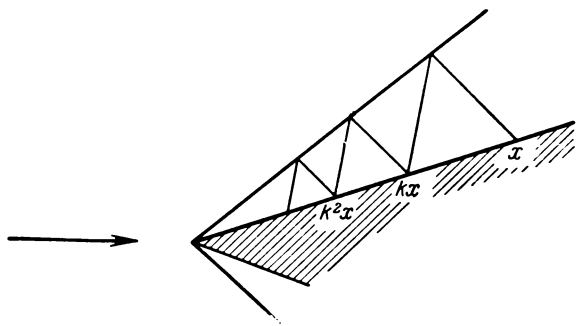


Рис. 4.10. Отражение возмущений от скачка уплотнения и от поверхности тела.

в нее при $\theta = 0$ (так как при этом $M_2 = M_1$, и $\lambda = 0$). Из рассмотрения формулы (4.24) видно, что давление, действующее на элемент поверхности в точке с абсциссой x , при наличии ударной волны зависит не только от угла наклона самого элемента, но и от угла наклона поверхности в точках с абсциссами kx , k^2x и т. д. Можно показать, что n -й член ряда в выражении (4.24) соответствует возмущению, попавшему в точку с абсциссой x после n -кратного отражения от поверхности ударной волны (рис. 4.10).

Коэффициент волнового сопротивления одной стороны тела, близкого по форме к клину, можно написать в виде

$$\begin{aligned} c_x &= \frac{1}{qh} \int_0^l p_2 \sin(\theta + \theta') dx = \frac{\bar{p}_2 l}{qh} \int_0^1 (1 + \varepsilon' p') [\sin \theta + \cos \theta \varepsilon' Y'(x)] dx = \\ &= \frac{\bar{p}_2}{q} + \varepsilon' \frac{\bar{p}_2 l}{qh} \int_0^1 [p' \sin \theta + \cos \theta Y'(x)] dx = c_x + \delta c_x. \end{aligned}$$

Здесь $q = \frac{\bar{p}_1 \bar{U}^2}{2}$, $h = l \sin \theta$, c_x — коэффициент волнового сопротивления при прямолинейной стенке, δc_x — приращение коэффициента волнового сопротивления при замене прямолинейной стенки близкой ей

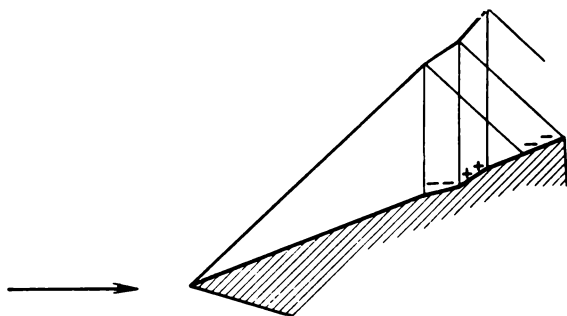


Рис. 4.11. К объяснению влияния отраженных возмущений на коэффициент сопротивления клиновидного тела.

криволинейной (первая вариация от c_x). Считая, что $Y(0) = Y(1) = 0$ и используя формулу (4.24) для $p'(x, 0)$, находим

$$\delta c_x = \frac{\bar{p}_2}{q} \frac{2\gamma M_2^2}{\sqrt{M_2^2 - 1}} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \varepsilon' Y(k^n).$$

Из того, что первая вариация коэффициента сопротивления при $\lambda \neq 0$ отлична от нуля и может быть сделана отрицательной, следует, что в противоположность результату, вытекающему из линейной теории [9], при заданном отношении толщины тела к его длине клин не является формой тела, при которой волновое сопротивление минимально. Легко дать физическое объяснение этому факту. Ограничимся для простоты случаем, когда в выражении для δc_x отличен от нуля только первый член ряда; для определенности будем считать, что при заданных M_1 и θ коэффициент λ положителен. Тогда для того чтобы δc_x было отрицательным, необходимо должно быть

$Y(k) < 0$. Уменьшение волнового сопротивления объясняется здесь тем, что разрежение, вызванное местными отрицательными значениями $Y'(x)$ влево от точки $x = k$ (рис. 4.11), отражаясь от ударной волны без изменения знака (так как $\lambda > 0$), вызывает понижение давления на части поверхности у правого конца тела, тогда как сжатие, вызванное тем, что местные значения $Y'(x)$ справа от точки $x = k$ положительны, отразившись от ударной волны, не попадает уже на поверхность тела. Само по себе изменение контура стенки (без учета отражения от ударной волны) влияет на величину волнового сопротивления лишь в пределах следующего приближения.

Используем формулу (4.24) для расчета давления на поверхности тонких профилей, близких по форме к клину, при обтекании их потоком с большой сверхзвуковой скоростью. Представим угол между касательной к контуру тела и направлением набегающего потока в форме

$$\theta = \bar{\theta} [1 - \vartheta(x)], \quad \vartheta(0) = 0, \quad |\vartheta(x)| \ll 1.$$

Применяя выражения (4.3), справедливые при малых $\bar{\theta}$ и $M_1 \gg 1$, после несложных преобразований приведем формулу (4.24) к следующему виду:

$$c_p M_1^2 = \frac{4}{\gamma + 1} (K_c^2 - 1) - 2K \sqrt{\frac{\frac{2\gamma}{\gamma + 1} K_c^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}}{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1}{K_c^2}}} \times \\ \times \left[\vartheta(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \vartheta(k^n x) \right], \quad (4.25)$$

где $K = M_1 \bar{\theta}$. Коэффициент отражения λ и величина k определяются в зависимости от параметра подобия K формулами:

$$\lambda = \frac{a - b}{a + b},$$

$$a = 2 \frac{M_2}{M_1} (K_c - K) \left[1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{M_2^2}{M_1^2} (K_c - K)^2 \frac{1 - \frac{1}{K_c^2}}{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1}{K_c^2}} \right],$$

$$b = 1 + \frac{M_2}{M_1} (K_c - K)^2 \frac{\frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{1}{K_c^2} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}}{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1}{K_c^2}},$$

$$k = \frac{1 - \frac{M_2}{M_1} (K_c - K)}{1 + \frac{M_2}{M_1} (K_c - K)}.$$

Зависимости λ и k от K при $\gamma = 1,4$ приведены на рис. 4.12. При обтекании тонких тел с очень большой сверхзвуковой скоростью λ и k стремятся к постоянным:

$$\lambda \rightarrow \frac{1 - \sqrt{\frac{\gamma}{2(\gamma-1)}}}{1 + \sqrt{\frac{\gamma}{2(\gamma-1)}}}, \quad k \rightarrow \frac{1 - \sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}}{1 + \sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}}.$$

Если пренебречь отражением возмущений от скачка уплотнения, т. е. считать $\lambda = 0$, то легко убедиться, что формула (4.25), как и

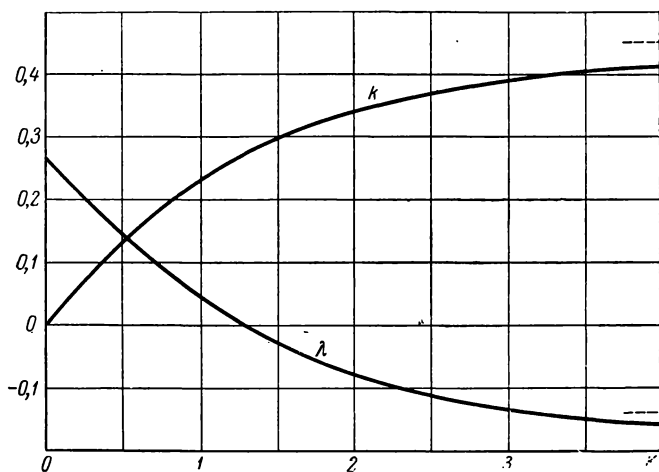


Рис. 4.12. Зависимости величин λ и k от параметра подобия K .

следовало ожидать, совпадает с выведенной в § 2 настоящей главы формулой (4.4), если в последней ограничиться лишь членом, линейным относительно $1 - \frac{\theta}{\theta}$.

Для случая, когда функция $\vartheta(x)$ представляет собой степенной ряд от x , формула (4.25) была получена без применения общего выражения (4.23) в работе [10] из рассмотрения неустановившихся движений с плоскими волнами и закона плоских сечений; для общего вида функции $\vartheta(x)$ эта формула таким же путем выведена в работе [11].

* *

*

Рассмотрим теперь обтекание передней кромки тела вращения, изображенного на рис. 3.25. Предположим, что набегающий поток не возмущен и образующая тела вращения прямолинейна, т. е.

$\epsilon' = \epsilon'' = 0$. Формулы (4.12) и выражение (4.22) показывают, что величины p''' , ρ''' , u''' , v''' будут в этом случае линейными функциями

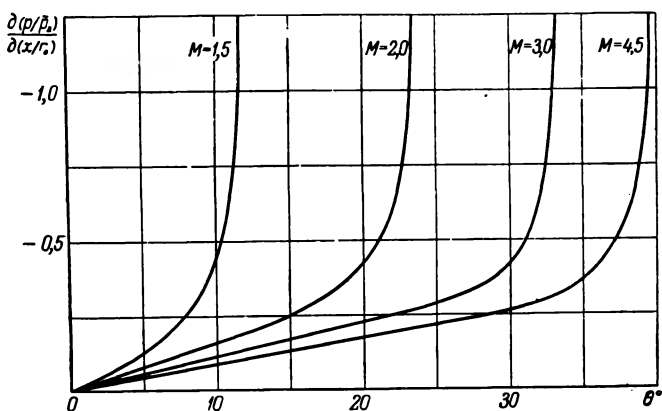


Рис. 4.13. Градиент давления у передней кромки тела вращения с протоком.

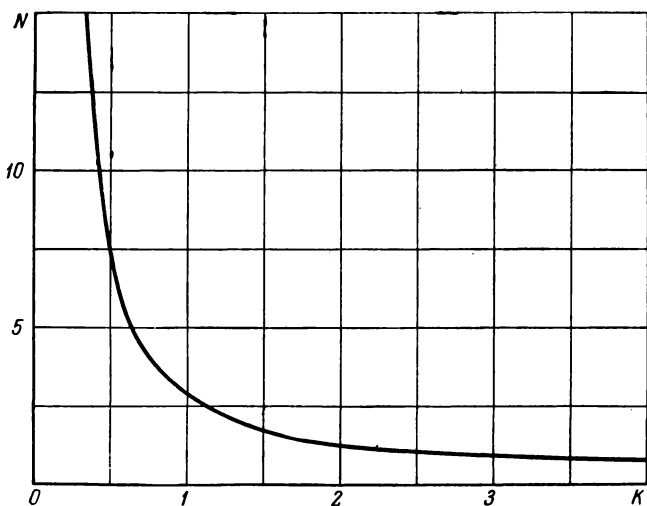


Рис. 4.14. Зависимость величины N , характеризующей распределение давления вблизи передней кромки тела вращения с протоком, от параметра подобия K .

от x и y , т. е. мы получаем линейные члены в разложении функций p_2 , ρ_2 , u_2 , v_2 в ряды по степеням x и y . В частности, по

формуле (4.23)

$$p'''(x, 0) = - \frac{\gamma M_2^2 a \operatorname{tg} \bar{\beta} \sin \theta}{\sqrt{M_2^2 - 1} (b + a \operatorname{tg} \bar{\beta} \sqrt{M_2^2 - 1})} x. \quad (4.26)$$

Это выражение определяет градиент давления у передней кромки. Вычисленные значения $\frac{\partial (p_2/\bar{p}_2)}{\partial (x/r_0)}$ для нескольких значений числа M_1 показаны на рис. 4.13.

Легко получить также уравнение ударной волны вблизи передней кромки рассматриваемого тела вращения. Это уравнение имеет вид

$$y = x \operatorname{tg} \bar{\beta} + \varepsilon''' B x^2,$$

где B находится из условий (4.13) и выражения (4.11).

В излагаемом приближении вопрос об определении течения вблизи передней кромки рассматриваемого осесимметричного тела был изучен в работе [12].

При большой сверхзвуковой скорости и при малых углах отклонения потока формулу (4.26) можно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{c_p}{\beta^2} &= \frac{c_{p2}}{\theta^2} - \frac{2a \frac{M_1}{M_2} (K_c - K)}{\left[b + a \frac{M_2}{M_1} (K_c - K) \right] \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1}{K_c^2} \right)} \frac{\theta x}{r_0} = \\ &= \frac{c_{p2}}{\theta^2} - N(K) \frac{\theta x}{r_0}. \end{aligned}$$

Значения функции N при $\gamma = 1,4$ приведены на рис. 4.14.

§ 5. Приближенный метод, использующий соотношения на скачке и в простой волне (shock-expansion method)

Метод, изложенный в § 2 настоящей главы, позволяет точно рассчитывать давление на обтекаемом профиле лишь в том случае, когда обтекаемая поверхность лежит целиком вне области влияния искривленной части головного скачка уплотнения. Если поверхность попадает в область влияния этой части головного скачка, то на ней нужно учитывать изменения давления, возникающие вследствие отражения от поверхности головного скачка (и от слоев с сильной завихренностью, если таковые имеются) возмущений, идущих от расположенных выше по течению участков профиля.

Отметим, однако, что интенсивность отраженных от скачка возмущений, как было показано в § 3, в общем случае даже при больших сверхзвуковых скоростях мала. Поэтому при приближенном

определении распределения давлений по профилю можно не учитывать влияние отраженных возмущений, т. е. считать давление (а следовательно, и угол наклона вектора скорости) вдоль характеристик, идущих от профиля, постоянным.

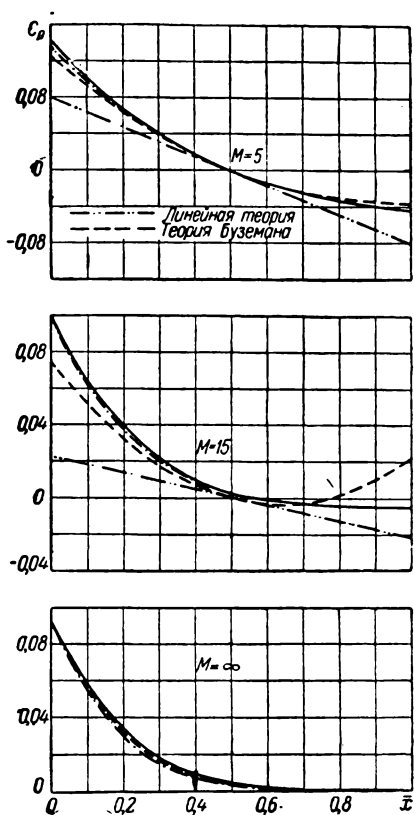


Рис. 4.15. Давление на поверхности симметричного профиля с относительной толщиной, равной 0,1:

— расчет по методу характеристик;
 --- по формулам косого скачка уплотнения и простой волны; - · - по формуле (4.4);
 ····· линейная теория; - - - теория второго приближения.

обтекаемого потоком при $M_1 = 5, 15$ и ∞ . Сплошными кривыми нанесены значения, рассчитанные по методу характеристик; штрих-пунктирные кривые получены по формуле (4.4), выведенной с использованием соотношений на скачке уплотнения и в простой волне при дополнительном предположении о том, что обтекаемый профиль тонкий и что $M_1 \gg 1$. Без такого дополнительного предположения использование соотношений на скачке уплотнения и в простой волне даст

на скорости и плотность (а следовательно, температура, скорость звука и число M) в общем случае переменны вдоль характеристик этого семейства (благодаря наличию возмущений, распространяющихся вдоль линии тока), так что характеристики не будут уже при учете нелинейных эффектов прямыми, как в простой волне. Давление же и угол поворота скорости на каждой линии тока продолжают оставаться связанными теми же соотношениями, что и в простой волне, но при различных значениях энтропии на разных линиях тока.

Таким образом, для приближенного расчета давления на поверхности профилей с криволинейным контуром можно пользоваться, как и в § 2, соотношениями на скачке и в простой волне. Область возможного использования этого метода расчета подробно исследована в работах [4, 13], первой из которых мы и будем следовать в настоящем параграфе.

На рисунке 4.15 приведены для примера распределения коэффициента давления по поверхности симметричного профиля с параболической формой контура и относительной толщиной равной 0,1.

значения коэффициента давления, приведенные для случая $M_1 = \infty$ на рис. 4.15 пунктиром. Приближенные значения c_p очень немного отличаются от точных в сторону меньших значений, причем с убыванием числа M_1 это отличие становится все менее заметным и при $M_1 \leq 5$ практически исчезает совсем.

Этот результат легко объясняется поведением коэффициента отражения λ (рис. 4.7). В рассматриваемом диапазоне чисел M_1 и углов поворота потока в скачке коэффициент λ отрицателен и с ростом числа M_1 абсолютная величина его растет. Следовательно, волны разрежения, идущие от выпуклой поверхности профиля, отражаются от скачка в виде волн сжатия, тем более интенсивных, чем больше число M_1 . Эти отраженные волны не учитываются в методе использования соотношений на скачке уплотнения и в простой волне и служат источником расхождения между приближенными и точными значениями коэффициента давления на профиле.

Отметим, что расхождение между приближенными и точными значениями c_p невелико даже при использовании формулы (4.4)*. Для сравнения с результатами других приближенных теорий на том же рис. 4.15 нанесены значения c_p согласно упоминавшимся в § 1 настоящей главы линейной теории (формула (4.1)) и теории второго приближения (формула (4.2)). Даже при $M_1 = 5$ формула (4.4) оказывается более точной, чем формула (4.2) теории второго приближения.

Подробные вычисления показывают [4], что при определении давления на криволинейном контуре метод использования точных соотношений на скачке уплотнения и в простой волне можно применять с достаточной степенью точности при любой сверхзвуковой скорости и при углах поворота потока в скачке вплоть до углов примерно на 1° меньших тех, при которых скорость за скачком становится равной скорости звука (т. е. в том диапазоне чисел M_1 и значений угла θ , в котором коэффициент отражения λ остается малым сравнительно с единицей).

Формулой (4.4) можно пользоваться с погрешностью менее 10% при $M_1 > 3$ и $\theta < 25^\circ$.

На рисунке 4.5 приведены для примера полученные с использованием формулы (4.4) поляры профиля с сечением в виде кругового сегмента в диапазоне значений параметра K от 0,1 до 1,0.

В соответствии со сказанным в § 3 настоящей главы о росте абсолютной величины коэффициента отражения λ при уменьшении γ ,

*) Формула (4.4) может быть еще уточнена, если учесть наличие отраженных возмущений, заменив в ней согласно § 4 настоящей главы величину $1 - \frac{\theta}{\theta_0} = \vartheta(x)$ суммой $\vartheta(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \vartheta(k^n x)$, причем в силу малости λ достаточно сохранить лишь член с $n = 1$.

метод настоящего параграфа уменьшает свою точность при γ , близких к единице. Для иллюстрации на рис. 3.18 пунктиром нанесены значения коэффициента давления на профиле, образованном дугой окружности, при $M_1 = \infty$ и двух значениях отношений теплоемкостей: $\gamma = 1,4$ и $\gamma = 1,05$. При $\gamma = 1,4$ значения c_p , вычисленные с использованием соотношений в скачке уплотнения и в простой волне, очень близки к значениям, полученным методом характеристик; при $\gamma = 1,05$ приближенные и точные значения c_p существенно отличаются друг от друга.

Таким образом, изложенный в предыдущей главе метод малого параметра и метод настоящего параграфа взаимно дополняют друг друга. Первый дает удовлетворительные результаты при γ , близких к единице; второй, наоборот, можно применять при γ , не очень близких к единице.

В методе использования соотношений на скачке и в простой волне существенно упрощается и расчет всей картины течения. В частности, значительно менее трудоемким становится метод характеристик [4]. Имеются также попытки получить в приближениях этого метода аналитическим путем выражения для параметров потока в области между ударной волной и поверхностью профиля [14, 15].

§ 6. Обобщение на случаи обтекания тел вращения

Для расчета обтекания с большой сверхзвуковой скоростью тел вращения, в том числе и при наличии угла атаки, в работе [16] предложен простой метод, согласно которому течение в каждой меридиональной плоскости рассчитывается по способу, изложенному в § 5, но начальные параметры потока в передней точке тела в каждой такой плоскости берутся из теоретического решения задачи об обтекании конуса или согласно соответствующим экспериментальным данным. Давление на теле вращения определяется в этом методе, следовательно, соотношениями на скачке в коническом течении и формулами течения Прандтля — Майера.

На рисунке 4.16 представлены рассчитанные по этому методу графики распределения давлений по телу оживальной формы с относительным удлинением, равным трем, при нескольких значениях числа M_1 (сплошные кривые). Там же пунктиром приведены значения давления, рассчитанные по методу характеристик, и кружками — полученные экспериментальным путем (при $M_1 = 6,30$ сплошная и пунктирная кривые совпадают, а экспериментальные точки не приведены, так как испытания проводились при малых значениях числа Рейнольдса, когда на течение существенное влияние оказывала вязкость). Значение параметра подобия K в приведенных примерах менялось от 0,91 до 2,10. Приближенные значения давления хорошо согласуются с точными при K , больших единицы, причем с увеличением K совпадение улучшается.

Обратимся к примеру приложения метода расчета обтекания тел вращения под углом атаки. На рис. 4.17 представлены результаты

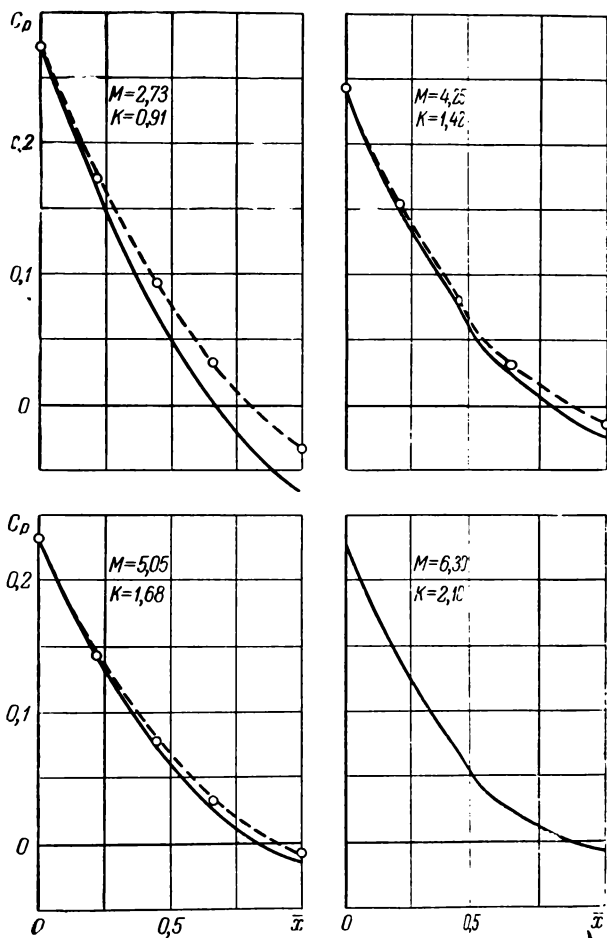


Рис. 4.16. Распределение давления по телу оживальной формы:

— по методу использования соотношений в коническом скачке и в волне разрежения; — — — по методу характеристик; ○ — экспериментальные данные.

измерения давления по оживальным телам с удлинением 3 и 5 при числе $M_1 = 5,05$ и при двух значениях угла атаки (5 и 15°). Давление измерялось в трех сечениях: верхнем, нижнем и боковом. Для использования метода расчета параметры течения вблизи острия тела

определялись экспериментальным путем при обтекании конуса с тем же значением угла при вершине и с тем же углом атаки. Полученное

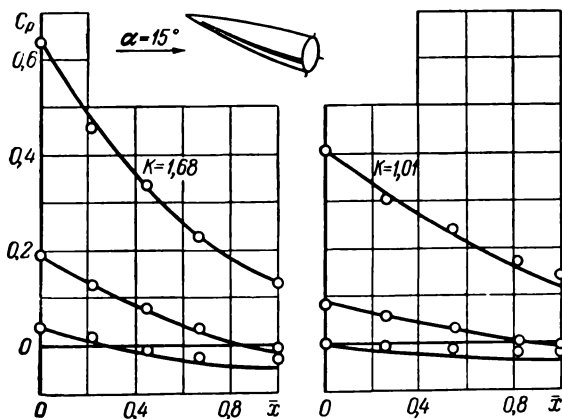
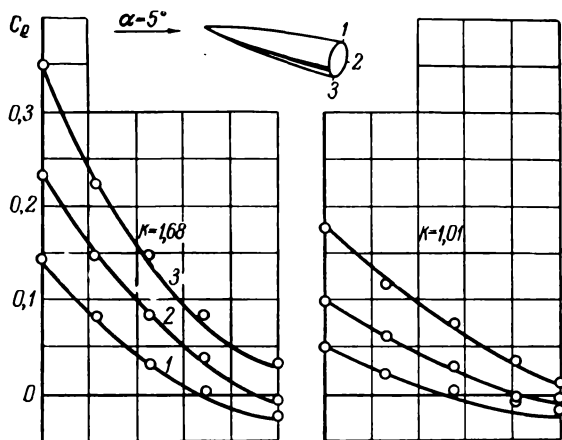


Рис. 4.17. Давление на оживальных телах при наличии угла атаки:

— расчет; ○ — эксперимент.

совпадение экспериментальных данных с результатами расчета вполне удовлетворительное. На рис. 4.18 дано сравнение формы головной волны в плоскости симметрии течения, рассчитанной по обобщенному методу и полученной экспериментальным путем для тех же двух тел при $M_1 = 5,05$ и угле атаки 10° . Там же для сравнения пунктиром указана форма головной волны при обтекании конуса

с соответствующим углом при вершине. Рассчитанная по обобщенному методу форма волны хорошо согласуется с экспериментальной. Приведенные результаты позволяют сделать заключение, что метод

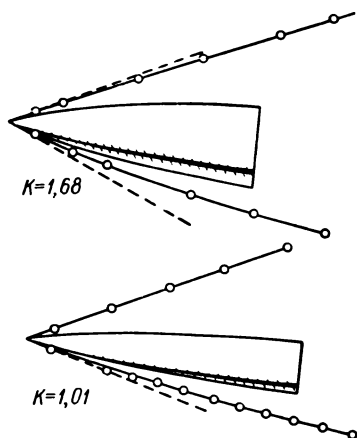


Рис. 4.18. Форма головной волны при обтекании оживальных тел под углом атаки:

— расчет; ○ — эксперимент;
 - - - форма головной волны при обтекании конуса.

использования соотношений на коническом скачке уплотнения и в простой волне может быть применен для расчета обтекания тел вращения при $M_1 > 5$ и $K > 1$.

Укажем, что этот же метод может быть использован для расчета давления на телах вращения и при умеренных сверхзвуковых скоростях, но полученные при этом значения коэффициента давления следует умножать на коэффициент μ , зависящий от числа M_1 и от относительного удлинения тела [17].

ГЛАВА V

ВЛИЯНИЕ МАЛОГО ЗАТУПЛЕНИЯ ПЕРЕДНЕГО КОНЦА ТЕЛА НА ЕГО ОБТЕКАНИЕ ПОТОКОМ С БОЛЬШОЙ СВЕРХЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ

§ 1. Вводные замечания и формулировка задачи

В настоящей главе теория обтекания потоком с большой сверхзвуковой скоростью тонких, заостренных впереди тел, изложенная в гл. II, обобщена на случаи, когда передний конец тела слегка затуплен. Такое обобщение теории имеет большое значение, так как в действительности невозможно осуществить идеально острые передние кромки крыльев или идеально острые передние концы корпусов летательных аппаратов. Даже при весьма тщательном изготовлении небольших моделей толщина их передних концов составляет несколько микрон, причем уже после кратковременного нахождения моделей в сверхзвуковом потоке тонкие передние концы их разрушаются и приобретают толщину порядка 20 микрон. В случае крупных объектов едва ли можно говорить о толщине передних концов, меньшей одной или нескольких десятых миллиметра.

Но не только трудности изготовления и недостаточная прочность делают неосуществимыми идеально острые передние концы корпусов летательных аппаратов и передние кромки крыльев. При большой сверхзвуковой скорости полета тонкие передние концы тел неминуемо были бы оплавлены из-за невозможности отвода через них больших количеств тепла, выделяющегося в потоке газа вблизи переднего конца тела.

Таким образом, вместо тел с идеально острыми передними концами в действительности всегда приходится иметь дело с телами, слегка затупленными впереди. Именно такие затупленные тела, у которых размер затупления мал сравнительно с их продольным размером, и будут рассматриваться в настоящей главе.

При обтекании затупленного впереди тела сверхзвуковым потоком перед ним образуется отошедшая ударная волна с примыкающей к ней дозвуковой зоной. Это обстоятельство чрезвычайно затрудняет теоретическое исследование таких течений, особенно если учесть, что

малый характерный размер затупления может сделать необходимым учет вязкости газа вблизи переднего конца тела *).

Имеется попытка разработать полуэмпирический метод учета влияния затупления передней кромки тонких профилей на обтекание их потоком с умеренной сверхзвуковой скоростью [3]. Основную идею этого метода поясним с помощью рис. 5.1. Течение в области между отрезком AC ударной волны и крайней характеристикой BC , идущей от поверхности тела и имеющей общую точку с звуковой линией, будет одним и тем же для различных профилей с одинаковой формой затупления передней кромки. Если пренебречь взаимодействием возмущений, идущих вдоль характеристик по направлению к телу, с возмущениями, идущими от тела, то давление на поверхности тела правее точки B может быть получено наложением давления, вычисленного для данного профиля по формуле Буземана (гл. IV), и давления, связанного с подходящими к телу возмущениями, которое, по крайней мере на участке BD , где эти возмущения наиболее интенсивны, не зависит от формы профиля. Таким образом, для расчета распределения давлений по различным профилям, имеющим одну и ту же форму затупления, достаточно иметь данные об обтекании одного такого профиля, например пластины. Экспериментальные данные по обтеканию пластины с передней кромкой эллиптической формы с удлинением от 0 (прямоугольная передняя кромка) до 8 и для диапазона чисел M от 1,4 до 1,8 имеются в работе [4]. Анализ этих результатов показывает, что учет влияния малого затупления передней кромки профиля на его обтекание при умеренной сверхзвуковой скорости вносит лишь небольшие поправки в результаты теории обтекания профилей с острой передней кромкой. Сопротивление затупленного профиля можно получать просто сложением сопротивления затупления (определенного, например, экспериментально) и сопротивления остальной части профиля, вычисленного согласно теории обтекания заостренных тел, не учитывая влияния на это сопротивление возмущений, идущих из дозвуковой области, так как интенсивность их мала.

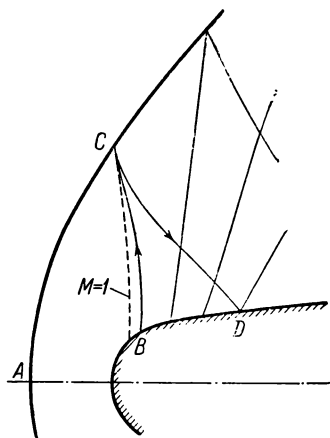


Рис. 5.1. Течение вблизи затупленной передней кромки профиля при сверхзвуковой скорости.

*) Имеющиеся опытные данные [1, 2] указывают на существенную зависимость картины течения вблизи затупленной передней кромки пластины от числа Рейнольдса при его значениях, вычисленных с использованием характерного размера затупления, порядка немногих тысяч.

Однако небольшая протяженность области сложного течения вблизи затупленного переднего конца тела по сравнению с характерным размером тела не всегда может служить основанием для того, чтобы пренебречь ее влиянием на течение в масштабах всего тела.

Действительно, как было установлено ранее (см. гл. III), при большой сверхзвуковой скорости сопротивление элемента поверхности тела пропорционально квадрату синуса угла наклона этого элемента к направлению движения. Поэтому, если обозначить характерный размер затупления через d , то по порядку величины сопротивление затупления для профиля ($\nu = 1$) или тела вращения ($\nu = 2$) будет равно

$$\frac{1}{2} \rho_1 V^2 d^\nu,$$

а сопротивление остальной части тонкого тела, имеющего длину L и характерный угол наклона элемента поверхности α , составит

$$\alpha^2 \cdot \frac{1}{2} \rho_1 V^2 (L\alpha)^\nu.$$

Отсюда следует, что действие на газ всего тела, исключая его затупленную часть, сравнивается с действием затупления лишь при условии, что

$$\frac{L}{d} \sim \frac{1}{\alpha^\nu}.$$

Таким образом, теоретические соображения свидетельствуют о том, что при большой сверхзвуковой скорости малое затупление передней кромки пластины может значительно изменять картину течения и распределение давления в потоке в области, размеры которой в сотни и тысячи раз превосходят размер самого затупления. Об этом же свидетельствуют и экспериментальные данные [2].

В случае, если размер затупленной части тела весьма мал по сравнению с продольным размером тела, можно рассчитывать получить хорошее приближение к описанию происходящих явлений, если пренебречь искажением формы тела вследствие затупления, но учесть действие последнего на поток, заменив его действием сосредоточенных сил, приложенных к потоку со стороны затупления. В такой постановке задача об обтекании тонких, затупленных впереди тел потоком с большой сверхзвуковой скоростью была сформулирована в работах [5, 6] и развивалась в других работах [7, 8].

Следуя постановке задачи, данной в работе [5], рассмотрим движение в газе со скоростью V тела, у которого все обращенные вперед элементы поверхности образуют малые углы с направлением

движения. Исключение пусть составляет лишь небольшая передняя часть тела — затупление. Размер затупления будем считать настолько малым, чтобы им можно было пренебречь при рассмотрении течения в области с размерами порядка продольного размера тела. Действие же затупления на поток, которое, несмотря на малую величину затупления, может проявляться в области больших размеров, заменим действием сосредоточенных сил, приложенных к газу со стороны затупления. Величину сосредоточенных сил нужно считать известной из опыта или из теоретического рассмотрения течения в окрестности переднего конца тела. При большой сверхзвуковой скорости эти силы приближенно могут быть определены, например, по формуле Ньютона.

Ограничимся случаями симметричного обтекания профилей или тел вращения. В первом случае будем рассматривать течение в верхней полуплоскости (в слое между двумя близкими параллельными плоскостями), а во втором — течение в меридиональной плоскости над осью симметрии (в угловой области между близкими плоскостями, проходящими через ось тела).

Действие затупления на газ в выделенном таким образом слое заменим действием равнодействующей сил, приложенных к газу со стороны затупления в направлении полета, и равнодействующей сил, приложенных к газу в направлении, перпендикулярном к направлению полета. Обозначим соответственно через X и Y эти равнодействующие силы, отнесенные в плоском потоке к слою единичной ширины, а в осесимметричном потоке — к слою с углом 2π у оси симметрии. При вычислении суммарных сил, заменяющих действие затупления на поток, нужно учитывать силы избыточного давления и в некоторых случаях — силы вязкого трения, поскольку вязкость газа может оказывать значительное влияние на течение вблизи передней кромки (при очень малом размере затупления действие вязкости может быть одного порядка с действием сил давления или даже значительно превосходить его).

При обтекании затупленного профиля с отошедшей ударной волной в величину сил X и Y следует включать силы избыточного давления (и вязкого трения), действующие на газ со стороны участка плоскости симметрии между отошедшей волной и передней кромкой тела.

Сила X , действующая в направлении движения тела, производит над газом работу, увеличивая его энергию. Энергия газа в слое единичной ширины, перпендикулярном к направлению полета, возрастает вследствие действия затупления на величину $E = X \cdot l$. Равнодействующая сила Y не производит работы, но так же, как и сила X , сообщает газу импульс. Импульс, сообщаемый затуплением газу в направлении, перпендикулярном к направлению полета, в том же слое единичной ширины равен $I = Y \frac{l}{V}$.

Воспользуемся теперь установленной в гл. II эквивалентностью задачи об обтекании тонких тел потоком газа с большой сверхзвуковой скоростью и задачи о плоском неустановившемся движении газа (закон плоских сечений). В соответствии со сказанным выше, для затупленного впереди тонкого тела эквивалентная задача о неустановившемся движении состоит в следующем.

В покоившемся первоначально газе в некоторый момент времени выделяется на плоскости (на прямой) энергия E (происходит взрыв) и газу сообщается импульс I по нормали к этой плоскости (прямой; энергия E и импульс I отнесены соответственно к единице площади и единице длины заряда). В этот же момент времени в газе из места взрыва начинает расширяться со скоростью U плоский (круглый цилиндрический) поршень. Требуется определить возникающее движение. Для перехода к сформулированной задаче о неустановившемся движении от задачи об установившемся обтекании тела в направлении оси x со скоростью V следует полагать $E = X$, $I = Y/V$, $U = V \operatorname{tg} \alpha$ (α — угол наклона элемента контура профиля или тела вращения к направлению x), а время t вводить посредством соотношения $x = Vt$.

Для случая, когда влиянием начального давления газа на движение можно пренебречь и $I = 0$, $U = 0$ (сильный взрыв), Л. И. Седовым было найдено ([9, 10]; см. также [11]) аналитическое решение задачи для течений со сферическими, плоскими и цилиндрическими волнами; для сферического взрыва численное решение было дано также Тэйлором [12]. Впоследствии эти результаты повторялись в ряде работ других авторов [13—15]. Возникающее при сильном взрыве движение является автомодельным и соответствует обтеканию потоком с очень большой сверхзвуковой скоростью затупленной пластины (в случае плоского потока) или круглого цилиндра, обтекаемого перпендикулярно к торцевой поверхности (в случае осесимметричного потока).

При более общих условиях в каждом конкретном случае точное решение задач о взрыве с последующим расширением поршня можно получить лишь сложными численными методами, подобными тем, которыми решена задача о точечном сферическом взрыве [16, 17, 18]. Приблизительно такие задачи могут быть решены, например, с помощью описанного в § 7 гл. III метода разложения решения

в ряды по степеням $\frac{\gamma-1}{\gamma+1}$. В этом методе формулы (3.42) и (3.43) дают выражения для значений параметров газа в возмущенной области за ударной волной через закон движения ударной волны $R_0(t)$. В задаче о движении газа, возникающем после взрыва с последующим расширением поршня, для определения функции $R_0(t)$ следует использовать закон сохранения энергии [19]. Согласно этому закону полная (кинетическая и внутренняя) энергия движущегося газа в каждый момент времени должна равняться сумме энергии E , выделив-

шейся при взрыве, начальной энергии газа и работы, совершенной расширяющимся поршнем, т. е.

$$\int_{v-v_0} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} \right] \rho \, dv = E + \int_v \frac{1}{\gamma-1} p^0 \, dv + \int_0^t p_{\text{п}} \, dv_0(t). \quad (5.1)$$

Здесь $v - v_0$ — объем, занятый движущимся газом, v_0 — объем, вытесненный поршнем, $p_{\text{п}}$ — давление газа на поршне. Используя первые два члена разложений (3.38), из уравнения энергии (5.1) получаем

$$\begin{aligned} \left[\frac{\dot{R}_0^2}{2} - \frac{a^2}{\gamma(\gamma-1)} \right] m^* + \int_0^{m^*} \left\{ \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \dot{R}_0 \frac{\partial R_1}{\partial t} + \frac{1}{\gamma+1} \frac{p_0}{\rho_0} \times \right. \\ \left. \times \left[1 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left(\frac{p_1}{p_0} - \frac{\rho_1}{\rho_0} \right) \right] \right\} dm = \\ = \bar{E} + \int_0^{\bar{R}} \left(p_{0\text{п}} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} p_{1\text{п}} \right) \bar{R}^{\gamma-1} d\bar{R} + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Здесь $\bar{E} = E/[2(\gamma-1)\pi + \delta_v]$, $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = \delta_3 = 0$. Перейдем в этом уравнении от интегрирования по m к интегрированию по τ и воспользуемся еще тем, что (см. § 7 гл. III)

$$\frac{p_1}{p_0} - \frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{p_1}{p_0} - \gamma \frac{\rho_1}{\rho_0} + O(\varepsilon) = - \left[1 + \frac{a^2}{\gamma \dot{R}_0^2(\tau)} \right] + O(\varepsilon).$$

Тогда для определения функции $R_0(t)$ получаем интегро-дифференциальное уравнение, которое мы здесь не выписываем из-за его довольно громоздкого вида. При заданной функции $\bar{R}(t)$ это уравнение может решаться, например, методом последовательных приближений, проще всего путем представления функции $R_0(t)$ в виде ряда по степеням $\varepsilon = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$.

§ 2. Обтекание пластины с тупой передней кромкой и круглого цилиндра, поставленного торцом к набегающему потоку

Рассмотрим (рис. 5.2) обтекание потоком газа с большой сверхзвуковой скоростью плоской пластины толщиной d с затупленной передней кромкой (можно рассматривать и бесконечно тонкую пластину, но с конечной силой вязкого трения на малом участке вблизи передней кромки). В этом случае в эквивалентной задаче об одномерном неустановившемся движении с плоскими волнами нужно

полагать $E \neq 0$, $U = 0$, т. е. нужно рассматривать задачу о движении, возникающем в покоящемся газе при взрыве заряда, распределенного на плоскости. Параметрами, определяющими такое движение, служат начальное давление газа p_1 , начальная плотность ρ_1 , энергия взрыва E (отнесенная к единице площади заряда), отношение теплоемкостей газа γ , расстояние r от плоскости взрыва и время t . Так как из этих параметров можно составить лишь три независимые безразмерные комбинации, например γ , $\frac{p_1 r}{E}$, $\frac{p_1^{3/2} t}{\rho_1^{1/2} E}$, то по основной теореме теории подобия и размерности [11] все определяемые величины

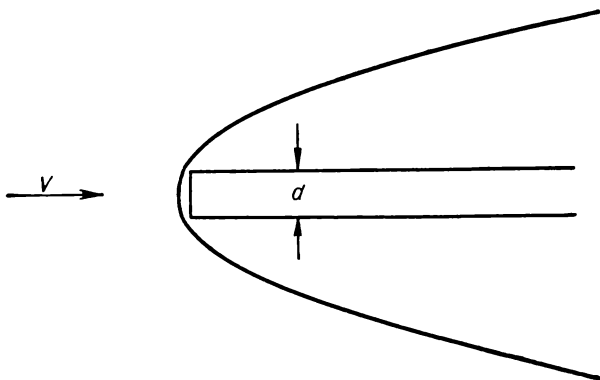


Рис. 5.2. Обтекание пластины конечной толщины.

после приведения их к безразмерному виду будут функциями только этих трех параметров. Заменяя t и E по формулам $t = \frac{x}{V}$, $2E = 2X = c_x \frac{\rho_1 V^2}{2} d$ (c_x — коэффициент сопротивления затупления), получим, что при обтекании плоской затупленной пластины потоком с большой сверхзвуковой скоростью безразмерные определяемые величины зависят только от переменных γ , $\frac{1}{c_x M^3} \frac{x}{d}$, $\frac{1}{c_x M^2} \frac{r}{d}$. Так, например, для распределения давления по поверхности пластины, т. е. при $r = 0$, справедлива формула

$$\frac{\Delta p}{p_1} = P\left(\gamma, \frac{1}{c_x M^3} \frac{x}{d}\right). \quad (5.2)$$

Из этой формулы следует, в частности, что протяженность области повышенного давления вблизи передней кромки пластины очень сильно возрастает с увеличением числа M (пропорционально M^3).

Форма головного скачка уплотнения, возникающего при обтекании затупленной пластины, определяется зависящей

$$\frac{1}{c_x M^2} \frac{r^*}{d} = R\left(\gamma, \frac{1}{c_x M^3} \frac{x}{d}\right). \quad (5.3)$$

Функции P и R могут быть определены путем численного решения задачи о взрыве, требующего применения быстродействующих счетных машин; однако, как упоминалось выше, до настоящего времени такие вычисления проделаны лишь для случая течений со сферическими волнами (точечный взрыв) при $\gamma = 1,4$. При большой интенсивности скачка уплотнения, когда начальное давление газа p_1 пренебрежимо мало по сравнению с давлением за скачком, оно не может оказывать влияния на движение. Таким образом, в этом случае параметр p_1 и вместе с ним число M несущественны, так что зависимости (5.2) и (5.3) должны иметь вид

$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho_1 V^2} = x(\gamma) c_x^{2/3} \left(\frac{x}{d}\right)^{-2/3} \quad (5.4)$$

и

$$\frac{r^*}{d} = x_1(\gamma) c_x^{1/3} \left(\frac{x}{d}\right)^{2/3}. \quad (5.5)$$

Функции $x(\gamma)$ и $x_1(\gamma)$ не могут быть определены из одних только соображений теории подобия и размерности; их значения можно взять из точного решения задачи о взрыве плоского заряда без учета начального давления [11]. Эти значения представлены на рис. 5.3 сплошными линиями.

В помещенной на стр. 188 таблице приведены полученные согласно этому же решению функции $\frac{p}{p^*}$, $\frac{\rho}{\rho^*}$, $\frac{v}{v^*}$ в зависимости от $\frac{r}{r^*}$ и от $\frac{m}{m^*}$, дающие распределения давления, плотности и поперечной скорости между ударной волной и поверхностью пластины.

Правые части выражений (5.4) и (5.5) являются главными членами в представлении величин $\frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho_1 V^2}$ и $\frac{r^*}{d}$ при малых значениях

переменной $\frac{x}{c_x M^3 d}$. Следующие члены в этих представлениях найдены в работах [20, 21] *). Приближенное решение задачи о взрыве плоского (а также линейного и точечного) заряда методом раз-

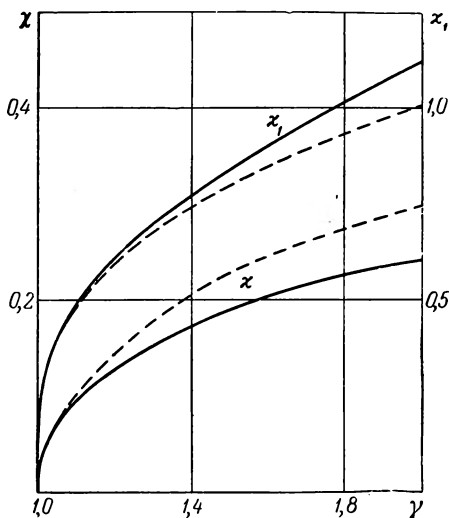


Рис. 5.3. Функции $x(\gamma)$ и $x_1(\gamma)$.

*) Метод определения этих членов был разработан Н. С. Мельниковой (см. [11]), исследовавшей течение со сферическими волнами.

ложения решения в ряды по степеням $\frac{\gamma-1}{\gamma+1}$ с использованием для определения функции $R_0(t)$ уравнения (5.1) получено в работе [19].
 $\nu = 1 \quad \gamma = 1,4$

$\frac{r}{r^*}$	$\frac{p}{p^*}$	$\frac{\rho}{\rho^*}$	$\frac{v}{v^*}$	$\frac{m}{m^*}$
1	1	1	1	1
0,9797	0,9162	0,8625	0,9699	0,8873
0,9420	0,7915	0,6659	0,9156	0,7151
0,9013	0,6923	0,5160	0,8599	0,5722
0,8565	0,6120	0,3982	0,8017	0,4501
0,8050	0,5457	0,3019	0,7390	0,3427
0,7419	0,4904	0,2200	0,6678	0,2448
0,7029	0,4661	0,1823	0,6263	0,1980
0,6553	0,4437	0,1453	0,5780	0,1514
0,5925	0,4229	0,1074	0,5172	0,1040
0,5396	0,4116	0,0826	0,4682	0,0741
0,4912	0,4038	0,0641	0,4244	0,0529
0,4589	0,4001	0,0536	0,3957	0,0415
0,4161	0,3964	0,0415	0,3580	0,0293
0,3480	0,3929	0,0263	0,2988	0,0156
0,2810	0,3911	0,0153	0,2410	0,0074
0,2320	0,3905	0,0095	0,1989	0,0038
0,1680	0,3901	0,0042	0,1441	0,0012
0,1040	0,3900	0,0013	0,0891	0,0002
0,0000	0,3900	0,0000	0,0000	0,0000

Сравним результаты излагаемой теории, выраженные формулами (5.2) и (5.3), с более точными расчетами обтекания плоской пластины с тупой передней кромкой [22] и с имеющимися экспериментальными данными. На рис. 5.4а приведены вычисленные по методу характеристик при значениях числа M , равных 5,00; 6,86 и 9,50, давления на плоской пластине, у которой передняя кромка представляет собой клин с таким углом при вершине, чтобы скорость потока за возникающим присоединенным скачком уплотнения равнялась точно скорости звука. Там же приведены давления на пластине с полукруглой кромкой при $M = 14,0$, рассчитанные приближенным способом с использованием метода характеристик [23]. По горизонтальной и вертикальной осям отложены в соответствии с формулой (5.2) значения $\frac{1}{c_x M^3} \frac{x}{d}$ и $\frac{\Delta p}{p_1}$ (для клиновидной кромки c_x легко определяется по формулам косого скачка уплотнения, для полукруглой кромки c_x бралось по уточненной формуле Ньютона равным $\frac{2}{3} c_p^*$). Исключая небольшую окрестность вблизи точки излома обтекаемого контура, все построенные в таких координатах распределения давления совпадают между собой. На рисунке 5.4б показана форма скачков уплотнения, соответствующих приведенным случаям обтекания пластины

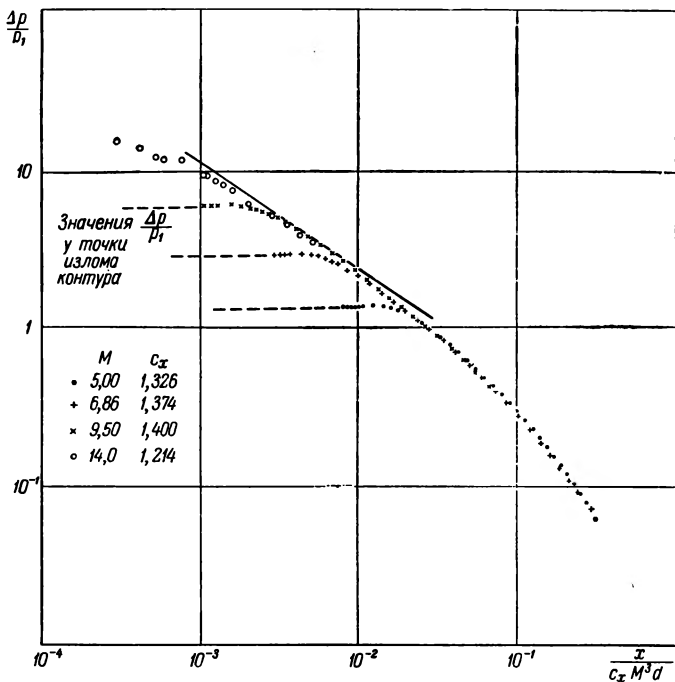


Рис. 5.4а. Распределение давления на пластине с клиновидной и с закругленной передней кромкой.

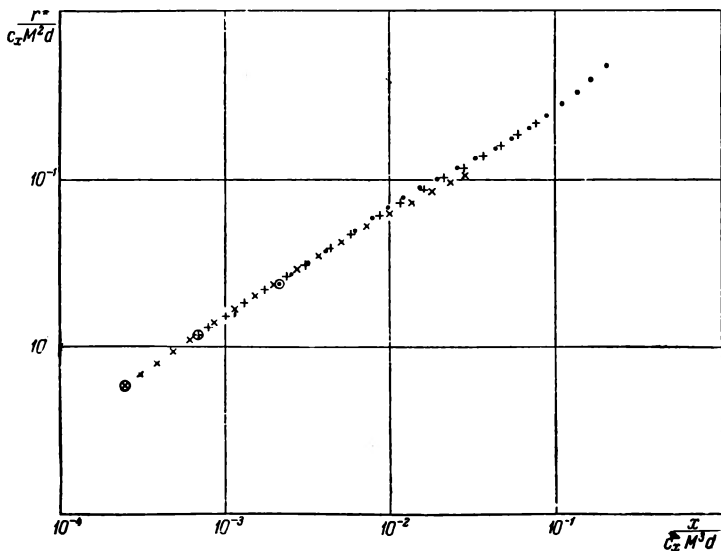


Рис. 5.4б. Форма скачка уплотнения при обтекании пластины с клиновидной передней кромкой.

с клиновидной передней кромкой. И здесь все кривые, начиная с небольшого удаления от передней кромки, хорошо совпадают между собой.

Приведенные результаты указывают на возможность использования закона плоских сечений для изучения обтекания потоком с большой сверхзвуковой скоростью тонких, затупленных впереди тел. Прямая линия на рис. 5.4 соответствует значениям $\frac{\Delta p}{P_1}$, рассчитанным по формуле (5.4). Значения давления удовлетворительно совпадают с общей частью кривых, рассчитанных по методу характеристик, до значений $\frac{1}{c_x M^3} \frac{x}{d}$, равных примерно $1/100$.

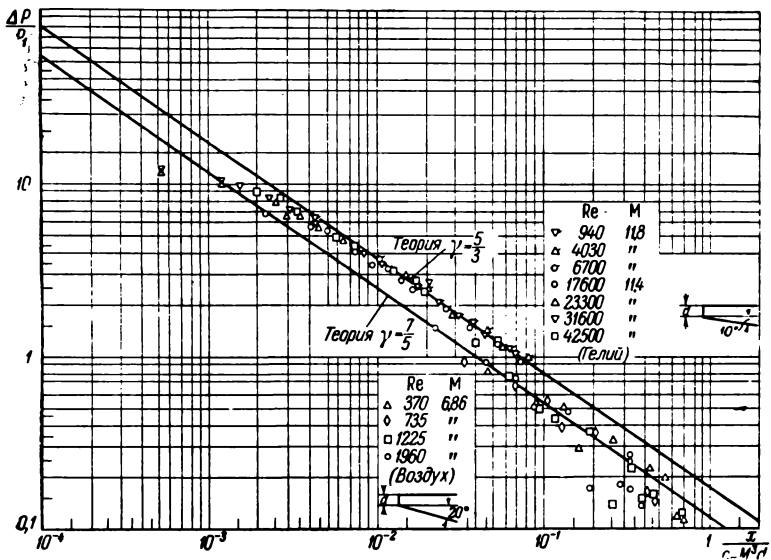


Рис. 5.5. Опытные данные о давлении на затупленной пластине при большой сверхзвуковой скорости.

Рисунок 5.5 иллюстрирует результаты двух серий опытов по обтеканию затупленных пластин потоком с большой сверхзвуковой скоростью. Первая серия опытов проводилась в аэродинамической трубе в потоке гелия при числах M порядка 12 [2]. Модель представляла собой клин с углом 10° , одна сторона которого устанавливалась параллельно потоку; затупление передней кромки выполнялось в виде плоского среза, нормального этой стороне клина. Вторая серия опытов проводилась в аэродинамической трубе, работающей на воздухе при числе M около семи, с аналогичной моделью, но с углом 20° при вершине [24].

В первой серии экспериментов опытные значения $\frac{\Delta p}{\rho_1}$ в зависимости от $\frac{1}{c_x M^3} \frac{x}{d}$ при разной толщине пластины и при разных значениях числа M набегающего потока хорошо согласуются между собой при $c_x = c_p^*$ и близко подтверждают теоретическую зависимость (5.4) при $\gamma = 5/3$, если число Рейнольдса, вычисленное по толщине пластины, превосходит 5—6 тысяч. При уменьшении числа Рейнольдса ниже этих значений становится существенным

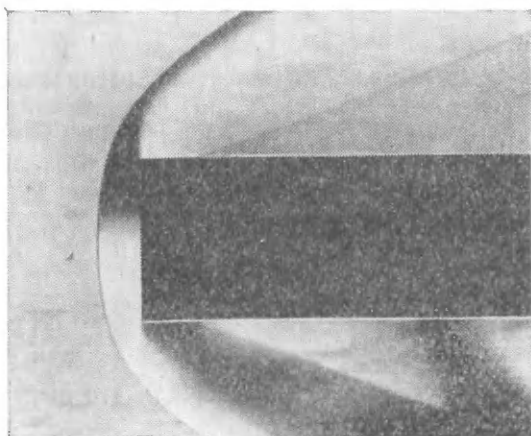


Рис. 5.6. Фотография обтекания цилиндра сверхзвуковым потоком.

влияние вязкости на течение вблизи передней кромки, и значение c_x , которое необходимо принять при обработке экспериментов для их совпадения между собой, должно резко увеличиваться.

Во второй серии экспериментов число Рейнольдса не превосходило 2000 и его влияние обнаруживалось во всем исследованном диапазоне. При наибольшем значении числа Рейнольдса опытные значения давления хорошо согласуются с формулой (5.4) при $\gamma = 7/5$, если принять $c_x = c_p^*$. При меньших значениях числа Рейнольдса, как и в первой серии опытов, c_x резко возрастает.

Таким образом, опытные данные также подтверждают выводы излагаемой теории; при этом оказывается, что влиянием вязкости при определении c_x затупления можно пренебречь, если число Рейнольдса превосходит 2000—6000 (более точно установить это число по имеющимся опытам не удастся).

Отметим еще, что согласно теории (рис. 5.3) с уменьшением отношения теплоемкостей γ действие затупления ослабевает;

ослабление при изменении γ от $5/3$ до $7/5$ не очень велико. Результаты опытов (см. рис. 5.5) подтверждают этот вывод теории.

Перейдем теперь к рассмотрению продольного обтекания потоком с большой сверхзвуковой скоростью круглого цилиндра с диаметром d , имеющего затупленную переднюю часть (см. рис. 5.6). Повторяя

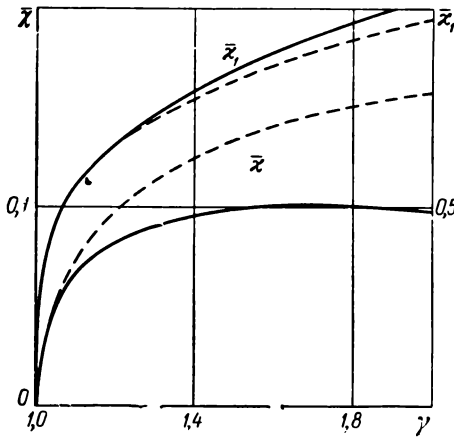


Рис. 5.7. Функции $\bar{x}(\gamma)$ и $\bar{x}_1(\gamma)$.

те же рассуждения, что и при обтекании плоской пластины, найдем, что в этом случае движение определяется безразмерными параметрами γ , $\frac{1}{\sqrt{c_x M^2}} \frac{x}{d}$, $\frac{1}{\sqrt{c_x M^2}} \frac{r}{d}$. В частности, распределение давления по поверхности цилиндра и форма скачка уплотнения определяются выражениями

$$\frac{\Delta p}{p_1} = P\left(\gamma, \frac{1}{\sqrt{c_x M^2}} \frac{x}{d}\right)$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{c_x M^2}} \frac{r^*}{d} = R\left(\gamma, \frac{1}{\sqrt{c_x M^2}} \frac{x}{d}\right).$$

При очень большой сверхзвуковой скорости эти выражения принимают вид

$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho_1 V^2} = \bar{x}(\gamma) \sqrt{c_x} \frac{d}{x} \tag{5.6}$$

и

$$\frac{r^*}{d} = \bar{x}_1(\gamma) c_x^{1/4} \left(\frac{x}{d}\right)^{1/4}. \tag{5.7}$$

Графики функций $\bar{x}(\gamma)$ и $\bar{x}_1(\gamma)$, построенные при использовании точного решения задачи о сильном взрыве линейного заряда [11], приведены сплошными линиями на рис. 5.7.

В нижеследующей таблице приведены вычисленные в соответствии с точным решением функции $\frac{p}{p^*}$, $\frac{\rho}{\rho^*}$, $\frac{v}{v^*}$ в зависимости от $\frac{r}{r^*}$ и от $\frac{m}{m^*}$, дающие распределения давления, плотности и поперечной скорости между ударной волной и поверхностью пластины.

Формула (5.6) указывает на наличие области высокого давления вблизи затупленного переднего конца цилиндров. При очень большой сверхзвуковой скорости протяженность области повышенного давления растет (при отсутствии влияния числа Рейнольдса на величину c_x) пропорционально M^2 ; с уменьшением γ размеры этой области уменьшаются.

К сожалению, опытные данные о распределении давлений и о форме ударной волны при обтекании потоком с большой сверхзвуковой скоростью цилиндра с малым отношением диаметра поперечного сечения к длине отсутствуют. На рис. 5.8 а и б приведены экспериментальные данные [6] о форме головной волны и о давлении

$$\nu = 2 \quad \gamma = 1,4$$

$\frac{r}{r^*}$	$\frac{p}{p^*}$	$\frac{\rho}{\rho^*}$	$\frac{v}{v^*}$	$\frac{m}{m^*}$
1	1	1	1	1
0,9998	0,9985	0,9973	0,9996	0,9908
0,9802	0,8659	0,7653	0,9645	0,7941
0,9644	0,7832	0,6285	0,9374	0,6665
0,9476	0,7124	0,5164	0,9097	0,5565
0,9295	0,6514	0,4234	0,8812	0,4819
0,9096	0,5983	0,3451	0,8514	0,3770
0,8725	0,5266	0,2427	0,7998	0,2616
0,8442	0,4884	0,1892	0,7638	0,1989
0,8094	0,4545	0,1414	0,7226	0,1366
0,7629	0,4242	0,0975	0,6720	0,0903
0,7242	0,4074	0,0718	0,6327	0,0614
0,6894	0,3969	0,0545	0,5989	0,0428
0,6390	0,3867	0,0362	0,5521	0,0248
0,5745	0,3794	0,0208	0,4943	0,0117
0,5180	0,3760	0,0123	0,4448	0,0056
0,4748	0,3746	0,0079	0,4073	0,0030
0,4222	0,3737	0,0044	0,3621	0,0014
0,3654	0,3733	0,0021	0,3133	0,0005
0,3000	0,3730	0,0008	0,2571	0,0001
0,2500	0,3729	0,0003	0,2143	0,0000
0,2000	0,3729	0,0001	0,1714	0,0000
0,1500	0,3729	0,0000	0,1286	0,0000
0,1000	0,3729	0,0000	0,0857	0,0000
0,0000	0,3729	0,0000	0,0000	0,0000

на коротком цилиндре при $M = 7,7$. Сплошные линии на этом же рисунке соответствуют формулам (5.6) и (5.7), а пунктирная — формуле, учитывающей начальное давление газа согласно работе [21].

В заключение настоящего параграфа отметим, что решение задачи о взрыве плоского или линейного заряда описывает также обтекание произвольного профиля или тела вращения в области, размеры которой велики сравнительно с поперечным размером тела. При этом для описания течения в области, где ударная волна не является уже сильной, необходимо, конечно, использовать решение, учитывающее начальное давление газа.

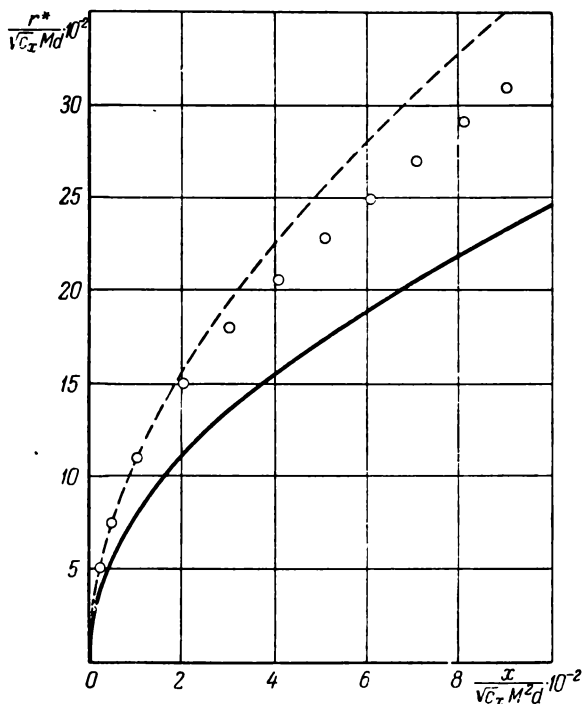


Рис. 5.8а. Форма головной волны при обтекании цилиндра
 ○ — эксперимент; — по формуле (5.7); - - - по формуле работы [21].

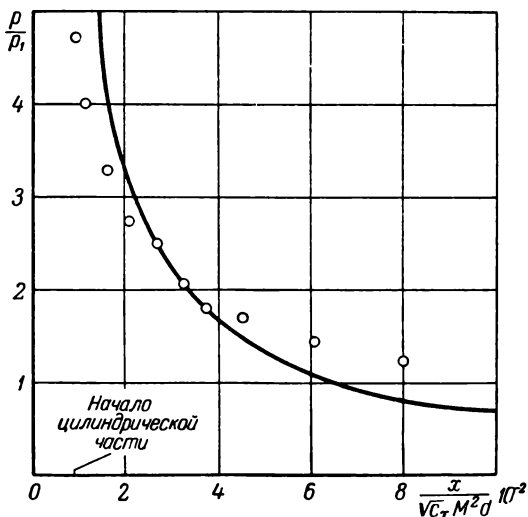


Рис. 5.8б. Давление на поверхности цилиндра:
 ○ — эксперимент; — по формуле (5.6).

§ 3. Обтекание тонкого клина с затупленной передней кромкой

В качестве простейшего примера обтекания потоком с большой сверхзвуковой скоростью профиля с тупой передней кромкой рассмотрим обтекания тонкого затупленного клина. Для этого случая в эквивалентной задаче о неустановившемся движении газа с плоскими волнами $E \neq 0$, $U = V \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{const}$ (α — полуугол раствора клина). Это движение не является автомодельным даже тогда, когда начальным давлением газа можно пренебречь по сравнению с давлением за ударной волной. Приближенное решение задачи можно получить с помощью метода разложения решения в ряды по степеням $\frac{\gamma-1}{\gamma+1}$, кратко из-

ложенного в применении к задачам рассматриваемого типа в конце § 1 настоящей главы. Однако, учитывая, что в общем случае и этот метод является довольно трудоемким, мы произведем дальнейшее его упрощение, позволяющее получать решение элементарным путем с сохранением удовлетворительной точности.

Напомним, что центральная идея метода разложения решения в ряды по степеням $\frac{\gamma-1}{\gamma+1}$ состоит в том, что при сильном уплотнении газа в ударной волне основная масса газа в возмущенной области сосредоточена в тонком слое, прилегающем к ударной волне. В этом слое происходит и основное изменение давления газа, в остальной же части области (она может и отсутствовать) изменение давления в силу малой плотности газа весьма мало. Для того чтобы получить решение в элементарном виде, примем, что толщина слоя вблизи ударной волны, заключающего всю массу газа, пренебрежимо мала и что изменением давления в возмущенной области вне этого слоя также можно пренебречь.

Тогда, применяя к газу внутри возмущенной области уравнение энергии (5.1), получаем

$$\frac{1}{2} \rho_1 v \left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)^2 + \frac{p}{\gamma-1} (v - v_0) = E + \frac{p_1 v}{\gamma-1} + \int_0^t p dv_0(t). \quad (5.8)$$

Здесь $v - v_0$ — объем газа в возмущенной области, v_0 — объем, вытесненный поршнем. В случае плоских волн v есть расстояние от плоскости взрыва до ударной волны, v_0 — расстояние до поршня. Для того чтобы найти из этого уравнения закон распространения ударной волны $R_0(t)$, а вместе с ним и все характеристики движения (согласно формулам (3.42) — (3.43) гл. III), можно воспользоваться главными членами в разложениях функций R и p по степеням $\frac{\gamma-1}{\gamma+1}$, т. е. полагать

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \dot{R}_0, \quad p = \rho_0 \dot{R}_0^2 + \rho_0 \frac{R_0 \ddot{R}_0}{v}.$$

Однако для того, чтобы придать всей теории элементарный характер, воспользуемся в качестве второго соотношения для определения функций $R_0(t)$ и $p(t)$ уравнением импульсов. Это уравнение имеет следующий вид:

$$\rho_1 v \frac{\partial R}{\partial t} = I + \int_0^t (p - p_1) S dt, \quad (5.9)$$

где S — площадь поверхности ударной волны; в случае плоских волн $S = 1$.

В уравнениях (5.8) и (5.9) величина $\frac{\partial R}{\partial t}$ представляет собой скорость газа, одинаковую для всех частиц. Примем, что во всем слое скорость частиц газа та же, что и в точках, прилегающих к ударной волне, т. е. будем считать, что *)

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{2}{\gamma + 1} \left(\dot{R}_0 - \frac{a_1^2}{\dot{R}_0} \right). \quad (5.10)$$

Соотношения (5.8) — (5.10) позволяют при заданном законе движения поршня $v_0(t)$ определить функции $R_0(t)$ и $p(t)$.

В случае обтекания клина $v_0 = Ut$, $v = R_0$, $S = 1$. Ограничимся для простоты случаем, когда влиянием начального давления на движение можно пренебречь (учет начального давления не вызывает трудностей). Исключая из уравнений (5.8) и (5.9) давление p , получим одно уравнение для определения закона распространения ударной волны:

$$\begin{aligned} \rho_1 R \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \dot{R} \right)^2 + \frac{1}{\gamma - 1} (R - Ut) \frac{d}{dt} \left(\rho_1 R \frac{2}{\gamma + 1} \dot{R} \right) = \\ = E - IU + \rho_1 UR \frac{2}{\gamma + 1} \dot{R}. \end{aligned}$$

Оставим пока в стороне случай $U = 0$, рассмотренный в более точной подстановке в § 2, и введем для измерения длины масштаб $L = (E - IU)/\rho_1 U^2$, для измерения времени — масштаб L/U и для измерения давлений — масштаб $\rho_0 U^2$. Написанное выше уравнение примет тогда вид

$$\frac{1}{\gamma - 1} (R - t) \frac{d}{dt} (R\dot{R}) = \frac{\gamma + 1}{2} + R\dot{R} - \frac{1}{\gamma + 1} R\dot{R}^2. \quad (5.11)$$

Это уравнение имеет единственное решение $R^*(t)$, удовлетворяющее условию $R(0) = 0$ и существующее при всех $t \geq 0$. При малых значениях t

$$R^* = \left[\frac{9}{4} \frac{(\gamma + 1)^2 (\gamma - 1)}{3\gamma - 1} \right]^{1/2} t^{2/3}.$$

*) Несколько ухудшая точность, можно считать $\frac{\partial R}{\partial t} = \dot{R}_0$; отметим, что приведенные выше предположения совпадают друг с другом при бесконечном уплотнении газа в волне, т. е. при $\gamma \rightarrow 1$, $p_1 \rightarrow 0$.

При больших t решение R^* стремится к асимптоте

$$R = \frac{\gamma+1}{2} t + \gamma - 1, \quad (5.12)$$

являющейся точным решением уравнения (5.11).

Так как при $t \rightarrow 0$ $R^* \dot{R}^* = O(t^{1/2})$, то решение $R^*(t)$ соответствует случаю $I=0$. При малых значениях полуугла α при вершине клина величина $IU = Y \operatorname{tg} \alpha$ мала по сравнению с величиной $E = X$ (Y имеет порядок X или менее). Это позволяет использовать решение R^* для оценки влияния затупления передней кромки тонкого клина на его обтекание потоком с очень большой сверхзвуковой скоростью.

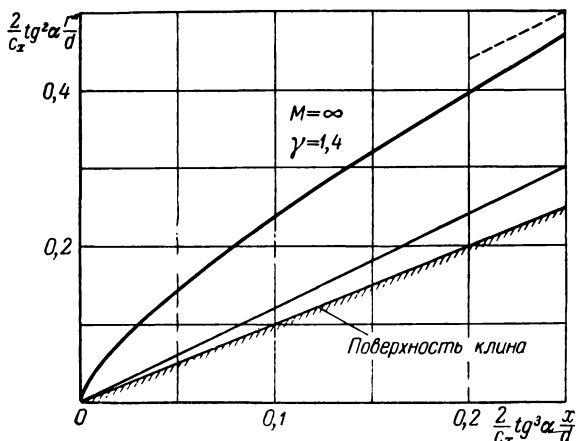


Рис. 5.9. Форма головной волны при обтекании затупленного клина.

Переходя к переменным, характеризующим стационарное обтекание, находим, что форма скачка определяется формулой

$$\frac{r^*}{d} = \frac{c_x}{4 \operatorname{tg}^2 \alpha} R^* \left(\frac{4 \operatorname{tg}^2 \alpha}{c_x} \frac{x}{d} \right). \quad (5.13)$$

Для распределения давлений по клину получаем следующее выражение:

$$\frac{p}{\rho_1 V^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} = \dot{W} \left(\frac{4 \operatorname{tg}^2 \alpha}{c_x} \frac{x}{d} \right), \quad (5.14)$$

где через $W(t)$ обозначена функция $\frac{2}{\gamma+1} R^* \dot{R}^*$. Графики зависимостей (5.13) и (5.14) приведены на рис. 5.9 и рис. 5.10. На рис. 5.9 изображено также положение скачка при обтекании клина с острой кромкой.

Как следует из выражений (5.13) и (5.12), при удалении вниз по потоку направление скачка уплотнения, возникающего при обтекании затупленного клина, стремится к тому же направлению, что и при обтекании острого клина, но скачок смещается дальше от поверхности клина.

Дополнительное смещение обусловлено появлением вблизи поверхности клина области, занятой газом, прошедшим сквозь интенсивную ударную волну у переднего конца пластины, а потому имеющим

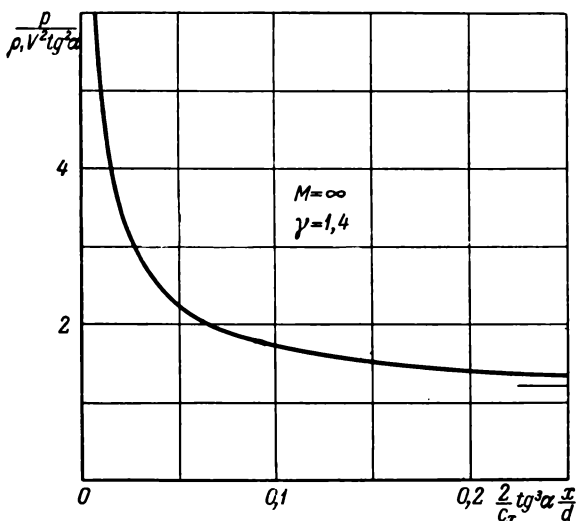


Рис. 5.10. Распределение давления по поверхности затупленного клина.

высокую температуру и малую плотность. Согласно формулам (5.13) и (5.12) это смещение равно

$$\frac{\gamma - 1}{4} \frac{c_x}{\tan^2 \alpha} d,$$

т. е. может быть значительным для тонких клиньев.

Отсутствие опытных данных не позволяет произвести подробное сравнение результатов расчета с результатами экспериментов. Рис. 5.11а представляет собой интерферограмму обтекания потоком гелия затупленного клина с углом 10° при $M = 12,7$ [2]. На рис. 5.11б приведена для качественного сравнения картина течения, полученная расчетным путем по формуле (5.13) при $\gamma = 7/5$. В верхней полуплоскости набегающий поток направлен вдоль поверхности клина, что соответствует значению $\alpha = 0$ в этой формуле. Используя асим-

поточеское выражение функции R^* при малых t , найдем, что при $\alpha = 0$

$$\frac{p}{\frac{1}{2} \rho_1 V^2} = \left[\frac{\sqrt{2}}{3} \frac{(\gamma + 1)^{1/2} (\gamma - 1)}{3\gamma - 1} \right]^{2/3} c_x^{2/3} \left(\frac{d}{x} \right)^{2/3},$$

$$\frac{r^*}{d} = \left[\frac{9}{16} \frac{(\gamma + 1)^2 (\gamma - 1)}{3\gamma - 1} \right]^{1/3} c_x^{1/3} \left(\frac{x}{d} \right)^{2/3}.$$

Для того чтобы судить о точности этих выражений, на рис. 5.3

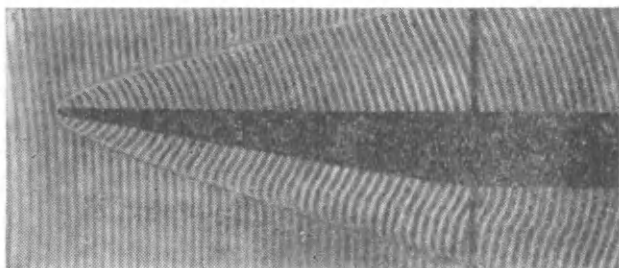


Рис. 5.11а. Интерферограмма обтекания затупленного клина потоком гелия при $M = 12,7$.

пунктиром приведены значения первых множителей в их правых частях, соответствующих функциям $\kappa(\gamma)$ и $\kappa_1(\gamma)$ в выражениях (5.4)

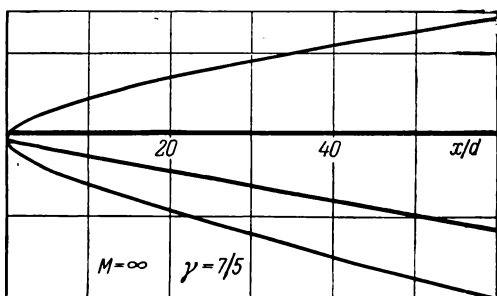


Рис. 5.11б. Картина обтекания затупленного клина при $M = \infty$ и $\gamma = \frac{7}{5}$.

и (5.5), полученных при точном решении задачи об обтекании затупленной пластины потоком газа при $M = \infty$ в рассматриваемой постановке.

Вычислим полное сопротивление X_1 клина длиной l с затупленной передней кромкой (напомним, что X есть половина сопротивления затупления):

$$X_1 = 2X + 2 \int_0^l p \operatorname{tg} \alpha \, dx = 2X \left[1 + W \left(\frac{4 \operatorname{tg}^3 \alpha}{c_x} \frac{l}{d} \right) \right].$$

Коэффициент сопротивления такого клина выразится формулой

$$c_x^{\text{кл}} = \frac{2}{t} [1 + W(t)] \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

где $t = \frac{4}{c_x} \operatorname{tg}^3 \alpha \frac{l}{d}$.

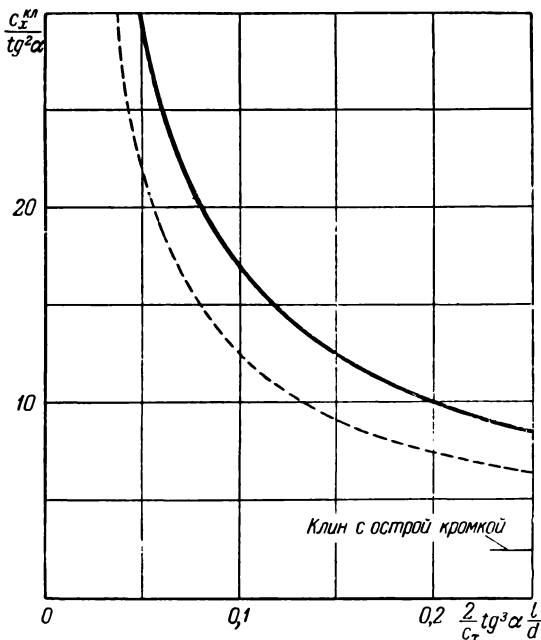


Рис. 5.12. Коэффициент сопротивления затупленного клина:

— с учетом влияния затупления на распределение давления по клину; --- сумма сопротивлений затупления и острого клина.

График этой зависимости при небольших значениях t приведен сплошной линией на рис. 5.12. При больших значениях t верна приближенная зависимость

$$c_x^{\text{кл}} = \left(\gamma + 1 + \frac{2\gamma}{t} \right) \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

На том же рисунке пунктиром нанесены значения $c_x^{к.л.}$, соответствующие сумме сопротивления затупления и сопротивления острого клина:

$$c_x^{к.л.} = \left(\gamma + 1 + \frac{2}{t} \right) \text{tg}^2 \alpha.$$

Как показывают полученные результаты, для тонких клиньев малое затупление передней кромки приводит к существенному росту коэффициента сопротивления $c_x^{к.л.}$. Так, сопротивление затупленного клина с полууглом раскрытия 6° даже при $\frac{l}{d} = 500$ превышает сопротивление острого клина в два раза. При вычислении сопротивления важно учитывать влияние затупления на распределение давления по остальной части поверхности клина. Для предотвращения значительного увеличения сопротивления крыльев и стабилизирующих органов при больших сверхзвуковых скоростях необходимо, таким образом, весьма тщательно заострять их передние кромки. Однако, как указывалось в § 1 настоящей главы, это требование практически едва ли осуществимо.

Нужно также отметить, что центр давления профиля с затупленной передней кромкой смещается вперед по сравнению с центром давления такого же профиля с острой кромкой. Это смещение может быть значительным. Так, для профиля в виде пластины с затупленной передней кромкой при очень большой сверхзвуковой скорости центр давления, как следует из формулы (5.4), расположен на $1/4$ длины пластины от передней кромки, а не в середине хорды, как у бесконечно тонкой пластины.

В заключение настоящего параграфа укажем, что изложенное в нем приближенное решение в случае обтекания тонкого острого клина дает (β — угол наклона скачка уплотнения к направлению набегающего потока)

$$\beta = \frac{\gamma + 1}{2} \alpha, \quad \frac{p}{\rho_1 V^2} = \frac{\gamma + 1}{2} \alpha^2,$$

что совпадает с формулами, следующими из точной теории при $M = \infty$.

§ 4. Обтекание тонкого затупленного конуса

Рассмотрим в той же приближенной постановке, что и в предыдущем параграфе, задачу об обтекании затупленного конуса. В этом случае в уравнениях энергии и импульса (5.8) и (5.9) нужно полагать $v = \pi R^2$, $v_0 = \pi U^2 t^2$, $S = 2\pi R$.

Для скорости $\frac{\partial R}{\partial t}$ частиц в возмущенной области примем формулу (5.10), т. е. будем учитывать начальное давление газа.

Считая $U \neq 0$, введем для измерения длины масштаб $L = (E/\pi\rho_1 U^2)^{1/2}$, для измерения времени — масштаб L/U и обозначим $p - p_1 = \rho_1 U^2 \Delta p$.

Тогда уравнения (5.8) и (5.9) примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} R^2 \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^2 \left(\dot{R} - \frac{1}{K^2 \dot{R}} \right)^2 + \frac{R^2 - t^2}{\gamma-1} \left(\Delta p + \frac{1}{\gamma K^2} \right) &= \\ &= 1 + \frac{R^2}{\gamma-1} \frac{1}{\gamma K^2} + 2 \int_0^t \left(\Delta p + \frac{1}{\gamma K^2} \right) t dt, \\ R^2 \frac{2}{\gamma+1} \left(\dot{R} - \frac{1}{K^2 \dot{R}} \right) &= \frac{IU}{E} + 2 \int_0^t \Delta p R dt. \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

Здесь $K = U/(\gamma p_1/\rho_1)^{1/2} = M \operatorname{tg} \alpha$ — параметр подобия для течений с большой сверхзвуковой скоростью.

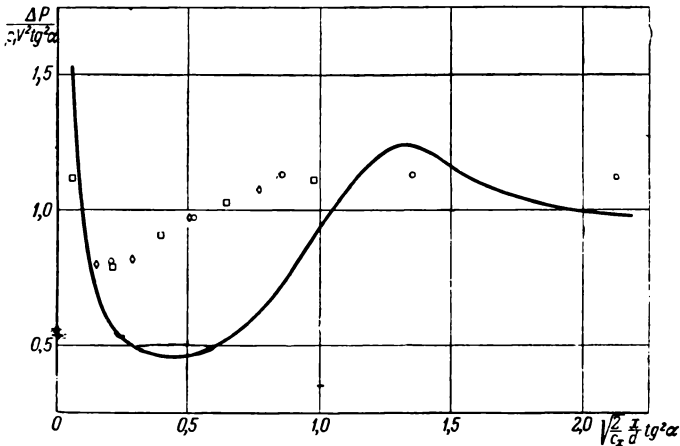


Рис. 5.13. Давление на поверхности затупленного конуса.

При малых значениях t начальная энергия газа в возмущенной области и работа, произведенная поршнем, малы по сравнению с энергией, выделившейся при взрыве, и решение системы (5.15) переходит в приближенное решение задачи о сильном взрыве с цилиндрическими волнами (величину $\frac{IU}{E}$ следует при этом считать, как и в § 3, пренебрежимо малой):

$$\left. \begin{aligned} \Delta p &= \sqrt{\frac{\gamma-1}{4(3\gamma-1)}} t^{-1}, \\ R &= \left[\frac{4(\gamma+1)^2(\gamma-1)}{3\gamma-1} \right]^{1/4} t^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

Из этих формул легко получить выражения (5.6) и (5.7) с приближенными значениями $\bar{x}(\gamma)$ и $\bar{x}_1(\gamma)$. Эти значения представлены пунктирными линиями на рис. 5.7.

Решение уравнений (5.15), имеющее при малых t асимптотический вид (5.16), может быть получено численным интегрированием.

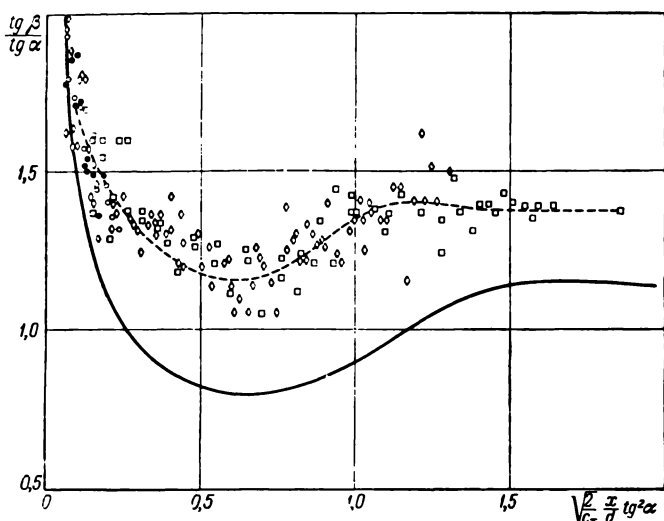


Рис. 5.14. Наклон головной ударной волны к направлению набегающего потока при обтекании затупленного конуса.

Как следует из этих уравнений, при больших значениях t функции \dot{R} и Δp стремятся к постоянным (соответствующим обтеканию заостренного конуса):

$$\dot{R} \rightarrow \sqrt{\frac{\gamma+1}{2} + \frac{1}{K^2}},$$

$$\Delta p \rightarrow 1.$$

На рисунке 2.12 приведен (сплошной линией) график полученной с помощью первой из этих формул зависимости:

$$\frac{K_c}{K} = \frac{\text{tg } \beta}{\text{tg } \alpha} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2} + \frac{1}{K^2}}$$

(β — угол скачка уплотнения с направлением набегающего потока).

Расчеты, выполненные для случая $K = \infty$ (т. е. при пренебрежении начальным давлением газа), обнаружили следующие интересные особенности поведения решения. Коэффициент давления на конусе, равный бесконечности в передней точке, быстро уменьшается при

движении вдоль образующей конуса, принимая на некотором участке значения, существенно меньшие значений на заостренном конусе с тем же углом раскрытия (кривая на рис. 5.13). Соответственно и угол β между ударной волной и направлением потока имеет минимум (кривая на рис. 5.14). Эта качественная особенность течения

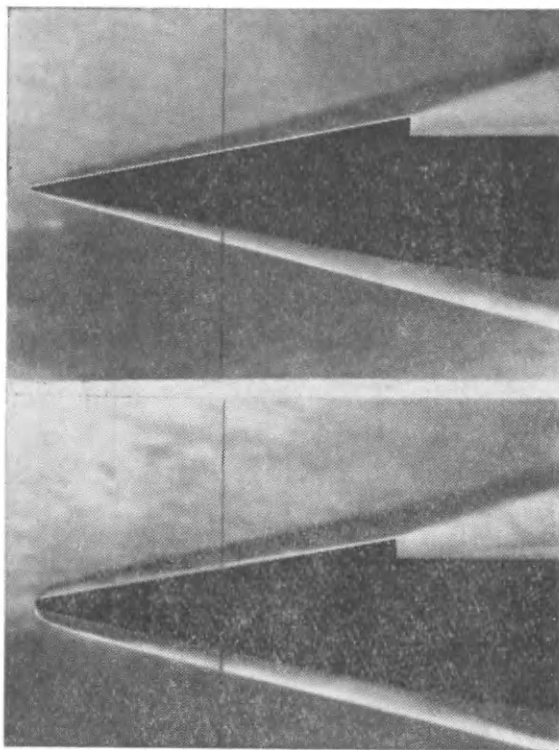


Рис. 5.15. Фотографии обтекания острого и затупленного конусов.

сохраняется и при значениях параметра подобия K порядка единицы, о чем свидетельствуют экспериментальные данные, полученные [25] при обтекании затупленного конуса с полууглом раскрытия 10° при $M = 6,85$ (т. е. при $K = 1, 2$). На рисунках 5.13 и 5.14 нанесены результаты этих экспериментов, а на рис. 5.15 приведены фотографии обтекания острого и затупленного конусов.

Так как давление на значительной части поверхности затупленного конуса ниже, чем на поверхности острого конуса, то суммарное сопротивление затупленного конуса может оказаться меньше сопротивления острого конуса.

Коэффициент сопротивления затупленного конуса выражается (при $K = \infty$) формулой

$$c_x^{\text{кон}} = \frac{2}{t^2} \left(1 + 2 \int_0^t \Delta p t dt \right) \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

где $t = 2 \sqrt{\frac{2}{c_x} \frac{l}{d}} \operatorname{tg}^2 \alpha$. На рис. 5.16 приведен график этой зависимости. При $\frac{l}{d} \approx \frac{0,96}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \sqrt{\frac{c_x}{2}}$ коэффициент сопротивления затупленного конуса имеет минимум, причем относительное уменьшение сопротивления по сравнению с острым конусом достигает 10%.

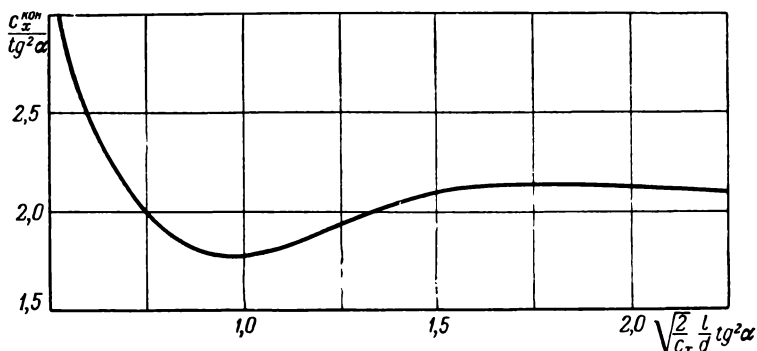


Рис. 5.16. Коэффициент сопротивления затупленного конуса.

Таким образом, в отличие от обтекания профилей, при обтекании тел вращения потоком с очень большой сверхзвуковой скоростью небольшое затупление переднего конца тела, весьма желательное в связи с необходимостью его охлаждения, не увеличивает сопротивления тела.

§ 5. Закон подобия при обтекании тонких тел с малым затуплением переднего конца

Постановка задачи об обтекании затупленных тел, сформулированная в § 1 настоящей главы, позволяет распространить на такие тела закон подобия, установленный в § 2 гл. II для случаев обтекания потоком с большой сверхзвуковой скоростью тонких, заостренных впереди тел.

Ограничимся случаями симметричного обтекания тел вращения и профилей; форму малого затупления также будем считать симметричной.

Как уже говорилось раньше, обтеканию затупленных тел потоком с большой сверхзвуковой скоростью соответствует неустановившееся

плоское движение, которое возникает, если в покоившемся первоначально газе с плотностью ρ_1 и давлением p_1 происходит взрыв линейного (в случае осесимметричного течения) или плоского (при обтекании профиля) заряда с плотностью выделения энергии E , сопровождаемый расширением поршня (круглого или плоского). В этом движении скорость газа v , его давление p и плотность ρ определяются следующей системой параметров:

$$\rho_1, p_1, \gamma; E; \alpha_1, \dots, \alpha_k; r, t.$$

Здесь $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ — кинематические постоянные, входящие в закон расширения поршня.

В общем случае среди параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ имеются два с независимыми размерностями. Не ограничивая общности, примем, что эти два параметра имеют размерности длины и времени, и обозначим их соответственно через r_0 и t_0 . Если оба параметра E и p_1 являются существенными (т. е. если при обтекании тела затупление переднего конца тела и начальное давление газа оказывают заметное влияние на поток), то их можно заменить параметрами

$$r_* = \left(\frac{E}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad \text{и} \quad t_* = E^{\frac{1}{\gamma}} \rho_1^{\frac{1}{2}} p_1^{-\frac{\gamma+2}{2\gamma}} \quad \left(\text{или} \quad a_1 = \left(\frac{\gamma p_1}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{2}}\right),$$

имеющими размерности длины и времени (или скорости). Таким образом, систему определяющих параметров можно представить в виде

$$\rho_1, r_*, t_*, \text{ (или } a_1), \gamma, r_0, t_0, \alpha_3, \dots, \alpha_k, r, t.$$

В соотношениях

$$v = \frac{r_0}{t_0} v', \quad p = \rho_1 \frac{r_0^2}{t_0^3} p', \quad \rho = \rho_1 \rho' \quad (5.17)$$

безразмерные функции v', p', ρ' могут зависеть только от безразмерных комбинаций

$$\frac{r}{r_0}, \quad \frac{t}{t_0}, \quad \gamma, \quad \frac{r_0}{a_1 t_0}, \quad \frac{r_*}{r_0}, \quad (5.18)$$

а также от безразмерных постоянных α'_i , входящих в закон движения поршня.

Как указывалось в § 1 настоящей главы, при переходе от рассматриваемой задачи о неустановившемся движении к эквивалентной задаче об обтекании тел в выражениях (5.17) и (5.18) нужно произвести следующую замену величин:

$$r_0 \rightarrow \tau L, \quad t_0 \rightarrow \frac{L}{V}, \quad t \rightarrow \frac{x}{V}, \quad E \rightarrow X = c_x \frac{\rho_1 V^2}{2} d^{\gamma}.$$

Здесь L — длина тела, τ — параметр, характеризующий относительную толщину тела; остальные обозначения те же, что и в предыдущих параграфах. Преобразовав после такой замены соотношения (5.17)

к виду

$$v = \tau V v', \quad p = \rho_1 V^2 \tau^2 p', \quad \rho = \rho_1 \rho', \quad (5.19)$$

найдем, что безразмерные функции v' , p' , ρ' зависят только от величин

$$\frac{r}{\tau}, \quad x, \quad \gamma, \quad M\tau, \quad c_x^{\frac{1}{v}} M^{1+\frac{2}{v}} d \quad (\text{и от } \alpha'_i) \quad (5.20)$$

(все длины измерены в долях длины тела L). Уравнение обтекаемого контура примет вид:

$$\Phi\left(\frac{r}{\tau}, x, \alpha'_i\right) = 0. \quad (5.21)$$

Таким образом приходим к обобщению закона подобия § 2 гл. II на случай затупленных тел: при обтекании потоком с большой сверхзвуковой скоростью аффинно подобных тел с малым затуплением переднего конца, которые отличаются друг от друга разными значениями параметра τ в уравнении их контура (5.21), безразмерные величины v' , p' , ρ' в формулах (5.19) будут иметь в соответственных точках (т. е. при равных $\frac{r}{\tau}$ и x) одинаковые значения, если

сохраняются значения параметров $K = M\tau$ и $K^* = c_x^{\frac{1}{v}} M^{1+\frac{2}{v}} d$. Параметр K — известный критерий подобия при обтекании потоком с большой сверхзвуковой скоростью тонких, заостренных впереди тел, параметр K^* является дополнительным критерием подобия при наличии малого притупления переднего конца тела.

Вместо критерия K^* можно пользоваться критерием

$$K^{**} = \frac{K^*}{K^{1+\frac{2}{v}}} = \frac{c_x^{\frac{1}{v}} d}{\tau^{1+\frac{2}{v}}},$$

не содержащим числа Маха.

При движении с очень большой сверхзвуковой скоростью, когда начальное давление газа становится несущественным, число M вообще не должно входить в систему определяющих параметров (5.20), и поэтому в ней вместо критериев подобия K и K^* остается один критерий K^{**} .

Легко убедиться, что величина K^{**} при очень большой сверхзвуковой скорости характеризует отношение силы, действующей на газ со стороны затупления, к силе, действующей на газ со стороны остальной части тела.

Поступая аналогично тому, как это было сделано в § 2 гл. II, найдем, что коэффициент сопротивления c_x тела с затупленным

передним концом можно представить в следующем виде (относя силу сопротивления к величине поперечного сечения тела):

$$c_x = \tau^2 F(\gamma, K, K^*),$$

а при очень большой сверхзвуковой скорости в виде

$$c_x = \tau^2 F_\infty(\gamma, K^{**}).$$

Функция F_∞ определена приближенно для случаев затупленного клина и затупленного конуса в §§ 3 и 4 настоящей главы, и графики ее приведены на рис. 5.12 и 5.16. В этих случаях существенное влияние затупления переднего конца тела на его сопротивление обнаруживается при $K^{**} > 1$.

При обтекании клина или круглого конуса закон расширения поршня определяется одной постоянной $U = V\tau$ с размерностью скорости. Система безразмерных определяющих параметров будет в этом случае представляться следующим образом:

$$\frac{r}{(c_x M^2)^{\frac{1}{\gamma}} d}, \quad \frac{x}{(c_x M^2)^{\frac{1}{\gamma}} M d}, \quad \gamma, \quad M\tau,$$

или

$$K^{*-1} x, \quad \frac{r}{x}, \quad \gamma, \quad K.$$

Для распределения давлений по поверхности клина или конуса и для координаты r^* головной ударной волны находим выражения

$$\frac{\Delta p}{\rho_1 V^2 \tau^3} = P_v(K^{*-1} x, \gamma, K),$$

$$K^{*-1} \frac{r}{\tau} = R_v(K^{*-1}, \gamma, K),$$

которые при очень большой сверхзвуковой скорости приобретают вид

$$\frac{\Delta p}{\rho_1 V^2 \tau^3} = P_{v\infty}(K^{** -1} x, \gamma),$$

$$K^{** -1} \frac{r}{\tau} = R_{v\infty}(K^{** -1} x, \gamma).$$

Функции $P_{v\infty}$ и $R_{v\infty}$ определены приближенно в §§ 3 и 4 настоящей главы, и графики их даны на рисунках 5.9, 5.10, 5.13 и 5.14*).

Если $U = 0$, т. е. если рассматривается обтекание затупленной пластины или продольное обтекание круглого цилиндра, то безраз-

*) На рис. 5.14 приведен график не самой функции $R_{2\infty}$, а ее производной.

мерные функции

$$\frac{v}{a_1}, \quad \frac{p}{p_1}, \quad \frac{\rho}{\rho_1}$$

зависят только от величин

$$\frac{x}{(c_x M^2)^{\frac{1}{\gamma}} M d}, \quad \frac{r}{(c_x M^2)^{\frac{1}{\gamma}} d}, \quad \gamma.$$

Этот случай подробно рассмотрен в § 2 настоящей главы.

ЛИТЕРАТУРА

К введению

1. J. Ackeret, Luftkräfte auf Flügel, die mit größerer als Schallgeschwindigkeit bewegt werden, Zeitschr. Flugtechn. Motorluftschiff., 16, 3 (1925).
2. J. Ackeret, Gasdynamik, Handbuch der Physik, Bd. 7,4, Berlin, 1927.
3. J. Ackeret, Über Luftkräfte bei sehr großen Geschwindigkeiten, insbesondere bei ebenen Strömungen, Helv. Phys. Acta, 1, 301—22 (1928).
4. T. Kármán, N. B. Moore, The resistance of slender bodies moving with supersonic velocities with special reference to projectiles, Trans. ASME, 54, 303—10 (1932).
5. T. Kármán, The problem of resistance in compressible fluids, Atti Acad. d'Italia (5 Volta Conv.), Roma, 1936.
6. A. Busemann, Aerodynamischer Auftrieb bei Überschallgeschwindigkeit, Atti Acad. d'Italia (5 Volta Conv.), Roma, 1936.
7. P. S. Epstein, On the air resistance of projectiles, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 17, 9 (1931).
8. W. Rankine, On the thermodynamic theory of waves of finite longitudinal disturbance, Phil. Trans., 160, 277—88 (1870).
9. H. Hugoniot, Sur la propagation du mouvement dans les corps et spécialement dans les gaz parfaits, Journ. l'ecole polytechn., 58, 80 (1889).
10. L. Prandtl, Neuere Untersuchungen über die strömende Bewegung der Gase und Dämpfe, Phys. Zeitschr., 8, (1907).
11. T. Meyer, Über zweidimensionale Bewegungsvorgänge in einem Gas, das mit Überschallgeschwindigkeit strömt, Mitt. über Forschungsarb., 62 (1908).
12. G. J. Taylor, J. W. Maccoll, The air pressure on a cone moving at high speeds, Proc. Roy. Soc., A 139, 838 (1933).
13. L. Prandtl, A. Busemann, Näherungsverfahren zur zeichnerischen Ermittlung von ebenen Strömungen mit Überschallgeschwindigkeit, Stodola — Festschrift, Zürich, 1929.
14. A. Busemann, Gasdynamik, Handb. d. Experimentalphysik, Bd. 4, 1, Leipzig, 1931.
15. Ф. И. Франкль, Вихревое движение и обтекание тел в плоско-параллельном течении сверхзвуковой скорости, Сб. «Реактивное движение», М., 1935.
16. Ф. И. Франкль, Сверхзвуковое течение осевой симметрии, Изв. Артилл. Акад., 1, № 6, Ленинград (1934).
17. G. Guderley, Die Charakteristikenmethode für ebene und achsensymmetrische Überschallströmung, Jahrb. deutsch. Luftfahrtforschung, 1, 522—35 (1940).
18. A. Busemann, O. Walchner, Profileigenschaften bei Überschallgeschwindigkeit, Forsch. Geb. Ing. Wes., 4, 2 (1933).
19. А. Е. Донов, Плоское крыло с острыми кромками в сверхзвуковом потоке, Изв. АН СССР, сер. матем., 3, 5/6 (1939).

20. L. Crocco, Sulla trasmissione del calore da una lamina piana a un fluido scorrente ad alta velocità, *L'Aerotecnica*, 12, 2 (1932).
21. Ф. И. Франкль, Ламинарный пограничный слой в сжимаемой жидкости, Труды ЦАГИ, № 176, М., 1934.
22. A. Busemann, Gasströmung mit laminarer Grenzschicht entlang einer Platte, *Zeitschr. angew. Math. u. Mech.*, 15 1/2 (1935).
23. T. Kármán, H. S. Tsien, Boundary layer in compressible fluids, *Journ. Aeron. Sci.*, 5, 6 (1938).
24. И. А. Кибель, Стационарная температура пластинки в сверхзвуковом потоке, ДАН СССР, 25 (1938).
25. И. А. Кибель, Пограничный слой в сжимаемой жидкости с учетом излучения, ДАН СССР, 25, 4 (1939).
26. Ф. И. Франкль, В. В. Войшель, Трение в турбулентном пограничном слое около пластинки в плоскопараллельном потоке сжимаемого газа при больших скоростях, Труды ЦАГИ, № 321, М., 1937.
27. A. Ferri Alcuni risultati sperimentali riguardanti profili alari provati alla Galleria Ultrasonora di Guidonia, *Atti di Guidonia*, N. 17 (1939).
28. J. Ackeret, Аэродинамические трубы для потока большой скорости, *Atti Acad. d'Italia (5 Volta Conv.)*, Roma, 1936.
29. О. М. Земский, Аэродинамические трубы сверхзвуковых скоростей, Труды ВВА, № 60, М., 1940.
30. H. Schlichting, Tragflügeltheorie bei Überschallgeschwindigkeit, *Luftfahrtforsch* 13, 10 (1936).
31. A. Busemann, Infinitesimale kegelige Überschallströmung, *Schrift. Deutsch. Akad. Luftfahrtforschung*, 3 (1943).
32. М. И. Гуревич, О подъемной силе стреловидного крыла в сверхзвуковом потоке. *Прикл. матем. и мех.*, 10, 4 (1946).
33. Е. А. Карпович, Ф. И. Франкль, Сопротивление стреловидного крыла при сверхзвуковых скоростях, *Прикл. матем. и мех.*, 11, 4 (1947).
34. Е. А. Красильщикова, Возмущенное движение воздуха при вибрациях крыла, движущегося со сверхзвуковой скоростью, *Прикл. матем. и мех.*, 11, 1 (1947).
35. Л. А. Галин, О крыле конечного размаха в сверхзвуковом потоке, *Прикл. матем. и мех.*, 11, 3 (1947).
36. A. Puckett, Supersonic wave drag of thin airfoils, *Journ. Aeron. Sci.*, 13, 9 (1946).
37. T. Kármán, Supersonic aerodynamics — principles and applications, *Journ. Aeron. Sci.*, 14, 7 (1947).
38. С. В. Фалькович, К теории крыла конечного размаха в сверхзвуковом потоке, *Прикл. матем. и мех.*, 11, 3 (1947).
39. Е. А. Красильщикова, Влияние концевых кромок при движении крыла со сверхзвуковой скоростью, ДАН СССР, 58, 4—6 (1947).
40. G. Ward, Supersonic flow past thin wings, *Quart. Journ. Mech. Appl. Math.*, 2, 2—3 (1949).
41. H. J. Stewart, The lift of a delta wing at supersonic speeds, *Quart. Appl. Math.*, 4, 246—54 (1946).
42. C. E. Brown, Theoretical lift and drag of thin triangular wings at supersonic speeds, *NACA Report*, 839, 1946.
43. R. T. Jones, Properties of low-aspect-ratio pointed wings at speeds below and above the speed of sound, *NACA Report*, 835, 1946.
44. C. Ferrari, Interference between wing and body at supersonic speeds — theory and application, *Journ. Aeron. Sci.*, 15, 6 (1948).
45. W. Hantzschke, H. Wendt, Zum Kompressibilitätseinfluss bei der laminaren Grenzschicht der ebenen Platte, *Jahrb. deutsch. Luftfahrtforsch.*, 1, 517 (1940).
46. H. Emmons, G. Brainerd, Temperature effects in a laminar compressible fluid boundary layer along a flat plate, *Journ. Appl. Math.*, 8, 3 (1941).

47. А. А. Дородницын, Пограничный слой в сжимаемом газе, Прикл. матем. и мех., 6, 6 (1942).
48. Л. Г. Лойцянский, А. А. Дородницын, К теории перехода ламинарного слоя в турбулентный, Прикл. матем. и мех., 9, 4 (1945).
49. L. Howarth, Concerning to the effect of compressibility on laminar boundary layers and their separation, Proc. Roy. Soc., A 194, 16 (1948).
50. L. Crocco, Lo strato limite laminare nei gas, Monogr. scient. di aeron., 3, Roma, 1946.
51. Л. Е. Калихман, Газодинамическая теория теплопередачи, Прикл. матем. и мех., 10, 4 (1946).
52. И. Ньютон, Математические начала натуральной философии, Собр. трудов акад. А. Н. Крылова, т. 7, Изд. АН СССР, М. — Л., 1936.
53. A. Busemann, Flüssigkeits- und Gasbewegung, Handwörterbuch der Naturwissenschaften, Bd. 4, Jena, 1934.
54. H. S. Tsien, Similarity laws of hypersonic flows, Journ. Math. Phys., 25, 3 (1946).
55. С. В. Фалькович, Плоское движение газа при больших скоростях. Прикл. матем. и мех. 11, 4, 1947.
56. W. D. Hayes, On hypersonic similitude, Quart. Appl. Math. 5, 1 (1947).
57. Г. М. Бам-Зеликович, А. И. Бунимович, М. П. Михайлова, Движение тонких тел с большими сверхзвуковыми скоростями, Сборник статей № 4 «Теоретическая гидромеханика», Оборонгиз, М., 1949.
58. A. Eggers, Performance of long range hypervelocity vehicles, Jet propulsion, 11 (1957).
59. E. Sänger, I. Bredt, Fernbomber mit Raketenantrieb, Schr. d. deutsch. Luftfahrtforsch., 1943.
60. A. Kantrowitz, Experiments with argon filled shock tube, Phys. Rev., 1073, 12 (1954).
61. J. G. Logan, The calculation of the thermodynamic properties of air at high temperatures, Corn. Aeron. Lab., May, 1956.
62. Я. Б. Зельдович, Теория ударных волн и введение в газодинамику, Изд. АН СССР, М. — Л., 1946.
63. J. C. Gunn, Relaxation time effects in gas dynamics, ARC Rep. a. Memor., N. 2338, 1946.
64. H. Bethe, E. Teller, Deviations from thermal equilibrium in shock waves, Ball. Res. Lab., Rep., NX—117, 1945.
65. S. Feldmann, Some shock tube experiments on the chemical kinetics of air at high temperatures, Journ. Fluid Mech., 3, 3 (1957).
66. А. Г. Куликовский, Об обтекании намагниченных тел проводящей жидкостью, ДАН СССР, 117, 2 (1957).
67. H. Kurzweg, R. Wilson, Experimental hyperballistics, Aeron. Eng. Rev., 6 (1956).
68. J. Logan, Nitric oxide formation in hypersonic flow, Journ. Aeron. Sci., 23, 12 (1956).

К главе I

1. Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, ч. 2, Гостехиздат, М. — Л., 1948.
2. Я. Б. Зельдович, Теория ударных волн и введение в газодинамику, Изд. АН СССР, М. — Л., 1946.
3. Р. Курант, К. Фридрихс, Сверхзвуковое течение и ударные волны, ИЛ, М., 1950.
4. К. О. Friedrichs, Mathematical aspects of flow problems of hyperbolic type, в книге General theory of high speed aerodynamics, ed. W. R. Sears, Princeton, 1954.
5. Проблемы космической аэродинамики, Сборн. докладов междунар. совещ. в Париже, 1949 г., гл. 10, ИЛ, М., 1953.

6. J. Neumann, R. D. Richtmyer, A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks, *Journ. Appl. Phys.*, 21, 3 (1950).
7. P. D. Lax, Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation, *Comm. Pure Appl. Math.*, 7, 1 (1954).
8. С. К. Годунов, Разностный метод расчета ударных волн. *Успехи матем. наук*, 12, 1 (73), (1957).
9. С. Л. Соболев, Общая теория дифракции волн на римановых поверхностях, *Труды Матем. ин-та АН СССР IX*, 1935.
10. E. Hopf, The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$, *Comm. Pure Appl. Math.* 3, 3 (1950).
11. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, О разрывных решениях квазилинейного уравнения первого порядка, *АН СССР*, 99, 1 (1954).
12. О. А. Олейник, Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений, *Успехи матем. наук*, 12, 3 (75) (1957).
13. R. D. Linnell, Two-dimensional airfoils in hypersonic flows, *Journ. Aeron. Sci.*, 16, 1 (1949).
14. K. Oswatitsch, Ähnlichkeitsgesetze für Hyperschallströmung, *Zeitschr. angew. Math. Phys.*, 2, 4 (1951).
15. A. C. Charters, R. N. Thomas, The aerodynamic performance of small spheres from subsonic to high supersonic velocities, *Journ. Aeron. Sci.*, 12, 4 (1945).
16. A. J. Hodges, The drag coefficient of very high velocity spheres, *Journ. Aeron. Sci.*, 24, 10 (1957).
17. V. I. Stevens, Hypersonic research facilities at the Ames aeronautical laboratory, *Journ. Appl. Phys.*, 21, 11 (1950).

К главе II

1. Ф. И. Франкль, Е. А. Карпович, *Газодинамика тонких тел*, Гостехиздат, М.—Л., 1948.
2. Е. А. Красильщикова, *Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке*, Гостехиздат, М.—Л., 1952.
3. M. A. Heaslet, H. Lomax, *Supersonic and transonic small perturbation theory*, в книге *General theory of high speed aerodynamics*; ed. W. R. Sears, Princeton, 1954.
4. H. S. Tsien, Similarity laws of hypersonic flows, *Journ. Math. Phys.*, 25, 3 (1946).
5. С. В. Фалькович. Плоское движение газа при больших сверхзвуковых скоростях, *Прикл. матем. и мех.*, 11, 4 (1947).
6. W. D. Hayes, On hypersonic similitude, *Quart. Appl. Math.*, 5, 1 (1947).
7. Г. М. Бам-Зеликович, А. И. Бунимович, М. П. Михайлова, Движение тонких тел с большими сверхзвуковыми скоростями, *Сборн. статей № 4 «Теоретич. гидромеханика»*, Оборонгиз, М., 1949.
8. F. A. Goldsworthy, Two-dimensional rotational flow at high Mach number past thin aerofoils, *Quart. Journ. Mech. Appl. Math.*, 5, 1 (1952).
9. M. D. van Dyke, A study of hypersonic small-disturbance theory, *NACA Report*, 1194, 1954.
10. Г. Ф. Теленин, *Законы подобия при больших сверхзвуковых скоростях*, Оборонгиз, М., 1956.
11. А. А. Ильюшин, Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей, *Прикл. матем. и мех.*, 20, 6 (1956).
12. S. E. Neice, D. M. Ehret, Similarity laws for slender bodies of revolution in hypersonic flows, *Journ. Aeron. Sci.*, 18, 8 (1951).
13. Z. Korál, *Tables of supersonic flows around cones*, Mass. Inst. Tech., Center of Analysis, Rep. 1, 1947.
14. M. D. van Dyke, The combined supersonic—hypersonic similarity rule, *Journ. Aeron. Sci.*, 18, 7 (1951).

15. A. H. Shapiro, The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow, т. 2, N. — J., 1954.
16. Л. И. Седов, Методы подобия и размерности в механике, Гостехиздат, М., 1957.
17. Л. И. Седов, О некоторых неустановившихся движениях сжимаемой жидкости, Прикл. матем. и мех., 9, 4 (1945).
18. G. J. Taylor, The air wave surrounding an expanding sphere, Proc. Roy. Soc., A 186, 100 (1946).
19. Н. Л. Крашенинникова, О неустановившемся движении газа, вытесняемого поршнем, Изв. АН СССР, ОТН, 8 (1955).
20. Л. Г. Велеско, Г. Л. Гродзовский, Н. Л. Крашенинникова, Таблицы параметров обтекания тел вращения степенной формы при больших сверхзвуковых скоростях, М., ЦАГИ, 1956.
21. L. Lees, T. Kubota, Inviscid hypersonic flow over blunt-nosed slender bodies, Journ. Aeron. Sci., 24, 3 (1957).
22. С. С. Григорян, Задача Коши и задача о поршне для уравнений, одномерных неустановившихся движений газа (автомодельные движения). Прикл. матем. и мех., 22, 2 (1958).
23. L. Lees, Recent developments in hypersonic flow, Jet propulsion, 11 (1957).
24. К. П. Станюкович, Неустановившиеся движения сплошной среды, Гостехиздат, М., 1955.
25. Г. И. Баренблатт, О предельных автомодельных движениях в теории нестационарной фильтрации газа в пористой среде и теории пограничного слоя. Прикл. матем. и мех., 18, 4 (1954).
26. В. Н. Гусев, О неустановившемся автомодельном движении газа, вытесняемого поршнем по экспоненциальному закону, М., ЦАГИ, БНИ, 1957.

К главе III

1. В. В. Русанов, Метод характеристик для пространственных задач, Сборн. статей № 11 «Теоретич. гидромеханика» (вып. 3), Оборонгиз М., 1953.
2. О. М. Белоцерковский, Обтекание кругового цилиндра с отошедшей ударной волной, ДАН СССР, 113, 3 (1957).
3. M. Van Dyke, The supersonic blunt-body problem, Review and extension, Journ. Aeron. Sci., 25, 8 (1958).
4. И. Ньютон, Математические начала натуральной философии, Собр. трудов А. Н. Крылова, т. 7, Изд. АН СССР, М. — Л., 1936.
5. Th. Kármán, Isaac Newton and aerodynamics, Journ. Aeron. Sci., 9, 14 (1942).
6. P. S. Epstein, On the air resistance of projectiles, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 17, 9 (1931).
7. A. F. Zahm, Superaerodynamics, Journ. Franklin Inst., 217, 2 (1934).
8. Z. Kopal, Tables of supersonic flow around cones, Mass. Inst. Techn., Center of Analysis, Rep., 1, 1947.
9. Ch. H. McLeellan, Exploratory wind-tunnel investigation of wings and bodies at M-6,9, Journ. Aeron. Sci., 18, 10 (1951).
10. R. E. Oliver, An experimental investigation of flow about simple blunt bodies at a nominal Mach number of 5, 8, Journ. Aeron. Sci., 23, 2 (1956).
11. Chul Kim, Experimental studies of supersonic flow past a circular cylinder, Journ. Phys. Soc. Japan, 11, 4 (1956).
12. E. Sänger, Gleitkörper für sehr hohe Fluggeschwindigkeiten, D. P. 411/42, Berlin, 1939.
13. А. Ферри, Аэродинамика сверхзвуковых течений, Гостехиздат, М. — Л., 1952.

14. Th. Kármán, The problem of resistance in compressible fluids, Atti Acad. d'Italia (5 Volta Conv.), Roma, 1936.
15. M. A. Heaslet, H. Lomax, Supersonic and transonic small perturbation theory, в книге General theory of high speeds aerodynamics, ed. W. R. Sears, Princeton, 1954.
16. А. А. Никольский, О телах вращения с протоком, обладающих наименьшим внешним волновым сопротивлением в сверхзвуковом потоке, Труды ЦАГИ, М., 1950.
17. М. Н. Коган, О телах минимального сопротивления в сверхзвуковом потоке газа, Прикл. матем. и мех., 21, 2 (1957).
18. W. J. Carter, Optimum nose shapes for missiles in the superaerodynamic region, Journ. Aeron. Sci., 24, 7 (1957).
19. Г. Л. Гродзовский, Некоторые особенности обтекания тел при больших сверхзвуковых скоростях, Изв. АН СССР, ОТН, 6 (1957).
20. L. Lees, Note on the hypersonic — similarity law for an unyawed cone, Journ. Aeron. Sci., 18, 10 (1951).
21. А. Ферри, Аэродинамика сверхзвуковых течений, Перев. с англ., Гостехиздат, 1952.
22. Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, ч. 2, Гостехиздат, 1948.
23. R. F. Probststein, K. Bray, Hypersonic similarity and the tangent-cone approximation for unyawed bodies of revolution, Journ. Aeron. Sci., 22, 1 (1955).
24. A. Busemann, Flüssigkeits- und Gasbewegung, Handwörterbuch der Naturwissenschaften, Zw. Aufl., Bd. 4, Iena, 1934.
25. G. Grimminger, E. P. Williams, G. Joung, Lift on inclined bodies of revolution in hypersonic flow, Journ. Aeron. Sci., 17, 11 (1950).
26. W. D. Hayes, Newtonian flow theory in hypersonic aerodynamics, Preprint, I Intern. Congr. in the Aeron. Sci., Madrid, 8—13 Sept., 1958.
27. Г. И. Майкапар, Учет влияния центробежных сил на давление воздуха на поверхность тела произвольной формы, обтекаемого потоком с большой сверхзвуковой скоростью, М., ЦАГИ, БНИ, 1958.
28. M. J. Lighthill, Dynamics of the dissociating gas, Journ. Fluid Mech., 2, 1 (1957).
29. A. J. Eggers, C. A. Syvertson, S. Kraus, A study of inviscid flow about airfoils at high supersonic speeds, NACA Report, 1123, 1953.
30. A. J. Eggers, M. M. Resnikoff, D. H. Dennis, Bodies of revolution having minimum wave drag at high supersonic airspeeds, NACA Report, 1306, 1957.
31. А. Л. Гонор, Г. Г. Черный, О телах наименьшего сопротивления при больших сверхзвуковых скоростях, Изв. АН СССР, ОТН, 7 (1957).
32. Г. Г. Черный, Обтекание тел газом при большой сверхзвуковой скорости, ДАН СССР, 107, 2 (1956); Mitt. Forschungsinst. Phys. Strahlentriebe Stuttgart, Intern. Tagung, 6—8 Febr. 1956.
33. Г. Г. Черный, Адиабатические движения совершенного газа с ударными волнами большой интенсивности, Труды III Всесоюзного матем. съезда, т. 1, Изд. АН СССР, М., 1956.
34. Г. Г. Черный, Одномерные неустановившиеся движения совершенного газа с сильными ударными волнами, ДАН СССР, 107, 5 (1956).
35. Г. Г. Черный, Задача о точечном взрыве, ДАН СССР, 112, 2 (1957).
36. Г. Г. Черный, Адиабатические движения совершенного газа с ударными волнами большой интенсивности, Изв. АН СССР, ОТН, 3 (1957).
37. Э. И. Андрианкин, Задачи о сильном взрыве, близком к сферическому, ДАН СССР, 111, 3, 1956.
38. Г. Г. Черный, Обтекание тел идеальным газом при большой сверхзвуковой скорости, Изв. АН СССР, ОТН, 6 (1957).
39. J. D. Cole, Newtonian flow theory for slender bodies, Journ. Aeron. Sci., 24, 6 (1957).

40. А. Л. Гонор, Обтекание конуса под углом атаки с большой сверхзвуковой скоростью, Изв. АН СССР, ОТН, 7 (1958).
41. А. Л. Гонор, Обтекание конических тел при движении газа с большой сверхзвуковой скоростью, Изв. АН СССР, ОТН, 1 (1959).
42. W. Chester, Supersonic flow past a bluff body with a detached shock. I. Two-dimensional body, Journ. Fluid Mech., 1, 4 (1956). II. Axisymmetrical body, Journ. Fluid Mech. 1, 5 (1956).
43. N. C. Freeman, On the theory of hypersonic flow past plane and axially symmetric bluff bodies, Journ. Fluid Mech., 1, 4 (1956).
44. R. Mises, Bemerkungen zur Hydrodynamik, Zeitschr. angew. Math. Mech., 7, 6 (1927).
45. G. J. Taylor, The air wave surrounding an expanding sphere, Proc. Roy. Soc., A 186, 100 (1946).
46. Л. Г. Велеско, Г. Л. Гродзовский, Н. Л. Крашенинникова, Таблицы параметров обтекания тел вращения степенной формы при больших сверхзвуковых скоростях, М., ЦАГИ, 1956.

К главе IV

1. Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, ч. 2, Гостехиздат, М., 1948.
2. M. J. Lighthill, Higher approximations, в книге: General theory of high speed aerodynamics, ed. W. R. Sears, Princeton, 1954.
3. P. S. Epstein, On the air resistance of projectiles, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 17, 9 (1931).
4. A. J. Eggers; C. A. Syvertson, S. Kraus, A study of inviscid flow about airfoils at high supersonic speeds, NACA Report, 1123, 1953.
5. R. D. Linnell, Two-dimensional airfoils in hypersonic flows, Journ. Aeron. Sci., 16, 1 (1949).
6. M. J. Lighthill, The flow behind a stationary shock, Phil. Mag., 40, 301 (1949).
7. A. J. Eggers, C. A. Syvertson, Inviscid flow about airfoils at high supersonic speeds, NACA Techn. Note 2646 (1952).
8. Воа-Тех Чу, On weak interaction of strong shock and Mach waves generated downstream of the shock, Journ. Aeron. Sci., 19, 7 (1952).
- ✓ 9. А. Ферри, Аэродинамика сверхзвуковых течений, перев. с англ., Гостехиздат, 1952.
10. А. А. Ильюшин, Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей, Прикл. матем. и мех., 20, 6 (1956).
11. J. P. Guiraud, Écoulements hypersoniques infiniment voisins de l'écoulement sur un dièdre, Comptes Rendus, 244, 18 (1957).
- ✓ 12. А. А. Дородницын, Зависимость кривизны линии скачка уплотнения от кривизны внешней поверхности тела вращения с протоком, (1949). «Сборник теоретических по аэродинамике», Оборонгиз, 1958.
13. J. J. Mahony, A critique of shock-expansion theory, Journ. Aeron. Sci., 22, 10 (1955).
14. T. Y. Thomas, The determination of pressure on curved bodies behind shocks, Comm. Pure Appl. Math., 3, 2 (1950).
15. R. E. Meyer, On supersonic flow behind a curved shock, Quart. Appl. Math., 14, 4 (1957).
16. A. J. Eggers, R. C. Savin, C. A. Syvertson, The generalized shock-expansion method and its application to bodies travelling at high supersonic speeds, Journ. Aeron. Sci. 22, 4 (1955).
17. H. K. Zienkiewicz, A method for calculating pressure distributions on circular arc ogives at zero incidence at supersonic speeds using the Prandtl-Meyer flow relations, British ARC, Curr. Pap., 114, 1953.

К главе V

1. W. A. Mair, O. Bardsley, Separation of the boundary layer at a slightly blunt edge in supersonic flow, *Phil. Mag.*, 43, 344 (1952).
2. A. G. Hammit, S. M. Bogdonoff, Hypersonic studies of the leading edge effect on the flow over a flat plate, *Jet propulsion*, 4 (1956).
3. M. J. Lighthill, Higher approximation, в книге: *General theory of high speed aerodynamics*, ed. W. R. Sears, Princeton, 1954.
4. D. W. Holder, A. Chinneck, Observations of the flow past elliptic-nosed two-dimensional cylinders and bodies of revolution in supersonic airstreams, *Aeron. Quart.*, 4, 4 (1954).
5. Г. Г. Черный, Влияние малого затупления передней кромки профиля на его обтекание при большой сверхзвуковой скорости, *ДАН СССР*, 114, 4 (1957).
6. L. Lees, T. Kubota, Inviscid hypersonic flow over blunt-nosed slender bodies, *Journ. Aeron. Sci.*, 24, 3 (1957).
7. Г. Г. Черный, Обтекание тонкого затупленного конуса при большой сверхзвуковой скорости, *ДАН СССР*, 115, 4 (1957).
8. Г. Г. Черный, Влияние малого затупления переднего конца тела на его обтекание потоком с большой сверхзвуковой скоростью, *Изв. АН СССР, ОТН*, 4 (1958).
9. Л. И. Седов, Движение воздуха при сильном взрыве, *ДАН СССР*, 52, 1 (1946).
10. Л. И. Седов, Распространение сильных взрывных волн, *Прикл. матем. и мех.*, 9, 2 (1946).
- ✓ 11. Л. И. Седов, Методы подобия и размерности в механике, *Гостехиздат, М.*, 1957.
12. G. J. Taylor, The formation of a blast wave by a very intense explosion, *Proc. Roy. Soc., A* 201, 1065 (1950).
13. A. Sakurai, On the propagation and structure of the blast wave, *Journ. Phys. Soc. Japan*, 8, 5 (1953).
14. S. C. Lin, Cylindrical shock waves produced by instantaneous energy release, *Journ. Appl. Phys.*, 25, 1 (1954).
15. R. Latter, Similarity solution for spherical shock wave, *Journ. Appl. Phys.*, 26, 8 (1955).
16. H. Goldstine, J. Neumann, Blast wave calculation, *Comm. Pure Appl. Math.* 8, 2 (1955).
17. H. L. Brode, Numerical solutions of spherical blast waves, *Journ. Appl. Phys.*, 26, 6 (1955).
18. Д. Е. Охоцимский, И. Л. Кондрашева, З. П. Власова, Р. К. Казакова, Расчет точечного взрыва с учетом противодействия, *Труды Матем. ин-та АН СССР*, т. 50, 1957.
19. Г. Г. Черный, Задача о точечном взрыве, *ДАН СССР*, 112, 2 (1957).
20. A. Sakurai, On the propagation and structure of the blast wave, *Journ. Phys. Soc. Japan.*, 9, 5 (1954).
21. Д. Н. Брушлинский, Т. С. Соломахова, Исследование задачи о сильном взрыве с учетом противодействия, *Сборн. статей № 19 «Теоретическая гидромеханика»* (вып. 7), Оборонгиз, М., 1956.
22. M. H. Bertram, D. L. Baradell, A note on the sonic-wedge leading-edge approximation in hypersonic flow, *Journ. Aeron. Sci.*, 24, 8 (1957).
23. H. K. Cheng, A. J. Pallone, Inviscid leading-edge effect in hypersonic flow, *Journ. Aeron. Sci.*, 23, 7 (1956).
24. M. H. Bertram, Viscous and leading-edge thickness effects on the pressure on the surface of a flat plate in hypersonic flow, *Journ. Aeron. Sci.*, 21, 6 (1954).
25. M. H. Bertram, Tip-bluntness effects on cone pressure at M-6,85, *Journ. Aeron. Sci.*, 23, 9 (1956).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аккерета теория 101
Аэродинамика сверхзвуковых скоростей 20
— больших сверхзвуковых скоростей 20
- Бернулли интеграл 68, 107
Буземана теория 150
— формула 114, 117, 118
- Взрыв плоского заряда 187
— сильный 184
— сферический 184
Вес молекулярный газа 18
Вид сверхскоростного планирующего летательного аппарата 17
Волна головная 29, 41
— — отошедшая 29
— — отсоединенная 29
— — присоединенная 29
— звуковая 52
— Маха 31
— плоская 87
— простая 147
— разрежения 41
— ударная 29, 52
Время релаксации 20
- Гистерезис при обтекании тел 37
- Давление безразмерное 45
— воздуха 20
— избыточное 183
Дальность полета баллистической ракеты 14
— — планирующего аппарата 16
— — рикошетирующего аппарата 16
Движение автомобильное 73
— газа неустановившееся 91, 184
— — установившееся 31
— — — адиабатическое 39
Диссоциация 20, 25, 27, 28
Донова теория 150
- Единственность решения задачи обтекания тел 37
- Зависимость теплоемкости воздуха от температуры 18
Закон плоских сечений 70, 134
— подобия 43, 47, 49, 53, 56, 59
— распространения ударной волны 74, 136
— расширения поршня 74
— сопротивления Ньютона 90, 91
— сохранения импульса 32
— — массы 32, 136
— — энергии 32, 136, 184
- Интеграл Бернулли 68, 107
- Качество аэродинамическое 16, 155
Концентрация компонент воздуха 20
Координата Лагранжа 72, 134
Коэффициент давления 43, 45, 93, 146, 174
— моментов аэродинамических 54
— отражения возмущения 161, 170
— сил аэродинамических 54
— силы подъемной 47, 48, 62
— сопротивления 47, 62, 84, 100, 123, 125, 144, 145, 200
— — затупления 186
— электропроводности воздуха 22
Критерии подобия 23, 24
Крыло бесконечного размаха 63
- Лагранжа координата 72, 134
Линия предельная 89
— тока 88, 157
- Маха волна 31
— число 18, 19, 24, 28
Метод Буземана 150
— касательных клиньев 106

- Метод касательных конусов 106
 — конечных разностей 38, 91
 — линеаризации 90
 — малых возмущений 146
 — Нейманна и Рихтмейра 38
 — определения давлений точный 150
 — пограничного слоя 127
 — полуэмпирический учета затупления 181
 — характеристик 91, 146
 Моделирование 23
- Ньютона формула 97, 103, 116
- Обтекание вогнутого угла 45
 — клина 76, 104
 — — тонкого 74, 138, 195
 — контура вогнутого 116
 — — выпуклого 116
 — конуса 76
 — — тонкого 74, 138, 201, 204
 — пластины с клиновидной кромкой 188
 — — с полукруглой кромкой 188
 — — с тупой кромкой 188
 — тела, близкого к клину 164
 — — вращения 74, 171, 176
 — — с внутренним каналом 36
 — — с затупленным концом 180
 — — с острой кромкой 146
 — — тонкого 48, 55, 56, 67
 — — специальной формы 74, 78, 139
 — установившееся сверхзвуковое 33
 — цилиндра 185, 192
- Парадокс Эйлера — Даламбера 55
 Параметр подобия 62
 Поверхность разрыва контактная 32
 — разрыва сильного 29, 32
 — — слабого 29
 — — тангенциального 32
 — тока 31
 Поляры профилей 101, 155, 175
 Постоянная газовая 39
 Поток диффузионный 20
 — лучистой энергии 22
 — набегающий поступательный 41
 Прандтля, Майера формула 176
 Профиль клиновидный 119
 — ромбовидного сечения 99
 — с острыми кромками 117
 — с уравнением в виде степенного одночлена 117
 — треугольного сечения 99
- Рейнольдса число 24, 28, 191
 Релея формула 96
- Свойства воздуха при высокой температуре 17
 Сила подъемная 62, 71, 100
 Скачок уплотнения 32, 148, 186
 Скорость безразмерная 45
 — относительная 49
 — потока набегающего 49
 — распространения поверхности разрыва 32
 — сверхзвуковая большая 19, 22, 23, 29, 39
 Слой конечный толщины 38
 — уплотненного газа 45
 Сопротивление тела 55, 70, 86
 Состав воздуха 18
 Состояние предельное установившееся 36
 Существование решения задачи обтекания тела 33, 36
- Тела аффинно-подобные 59
 — наименьшего сопротивления 102, 118
 — оптимальной формы 123
 — параболической формы 110
 — типа снаряда 63
 — тонкие заостренные 55, 56
 Тень аэродинамическая 99
 Теория Аккерета 101
 — Буземана 150
 — Донована 150
 — вязкости исчезающей 37
 Теплоемкость воздуха 20, 83
 Теплопроводность 27
 Течение изэнтропическое 148
 — равновесное 21
 — разрежения 41
 — с очень большой [сверхзвуковой] скоростью 49, 52
 Тир баллистический 23, 27
 Траектория полета 14
 — — баллистической ракеты 14
 — — рикошетирующего 16
 — спутника Земли 22
 Труба адиабатическая 26
 Труба аэродинамическая 23, 24
 — ударная 26
- Угол атаки 43, 44, 46
 — наклона скачка 44, 95
 Условие адиабатичности 109
 — безвихренности течения 107
 — изэнтропичности течения 107

- Условие на поверхности тела 32, 51, 61
 — сохранения массы 42, 107
 — — энтропии 31
- Условия в бесконечности 32, 61
 — единственности решения задачи об обтекании 37
 — на головной волне 33, 51, 52
 — на поверхности сильного взрыва 32, 51, 61
 — на ударной волне 72, 158
- Устойчивость обтекания 37
- Уравнение импульсов 196
 — модельное 39
 — неразрывности 37, 72, 134
 — сохранения импульса 107, 125
 — — массы 125
 — энергии 72, 134
- Уравнения движений газа нестационарных и плоских 90
 — движения 31, 72, 134
 — — идеального газа приближенные 131
- Форма аэродинамически совершенная 55
- Формула Буземана 114, 117, 118
 — Ньютона 103, 116
- Формула Ньютона уточненная 97
 — Прандтля — Майера 176
 — Рэлея 96
- Характеристики аэродинамические 64, 99, 146, 152
- Цилиндр с оживальной головной частью 64
- Число Маха 18, 19, 24, 28
 — Рейнольдса 24, 28, 191
- Члены диссипативные 38
- Эйлера — Даламбера парадокс 55
- Электропроводность воздуха 22, 27
- Энергия внутренняя единицы массы газа 32
 — движений колебательных атомов 20
 — движения вращательного 20
 — — поступательного молекулы 20
 — кинетическая газа 39
 — тепловая газа 39
- Энтропия 31
- Эффекты нелинейные 56
- Явления релаксационные 27, 28

