

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ

Г. Н. Чернышев

**УПРУГОСТЬ  
•  
ГРАВИТАЦИЯ  
•  
ЭЛЕКТРО-  
ДИНАМИКА**



МОСКВА «НАУКА» 2003

УДК 539./6; 537  
ББК 22.251; 22.313  
Ч49

Ответственный редактор  
доктор физико-математических наук *А.Л. Попов*

Рецензенты:  
академик *А.Ю. Ишлинский*,  
член-корреспондент РАН *И.Г. Горячева*

**Чернышев Г.Н.**

Упругость, гравитация, электродинамика / Г.Н. Чернышев; Отв. ред. А.Л. Попов. – М.: Наука, 2003. – 143 с.

ISBN 5-02-002863-0 (в пер.)

В монографии получены уточненные динамические уравнения теории упругости методом обобщения четырехмерной модели гравитационного пространства на упругое пространство. Решение конкретных задач в рамках новой модели дали новые нестандартные результаты. Четырехмерная модель упругой среды позволила по-новому рассмотреть уравнения гравитации и электродинамики и получить неожиданный результат: уравнения гравитации и электродинамики едины.

Для специалистов в области упругости, гравитации и электродинамики.

**Chernyshev G.N.**

Elasticity, Gravitation, Electrodynamics / G.N. Chernyshev; Resp. Ed. A.L. Popov. – Moscow, Nauka, 2003. – 143 p.

ISBN 5-02-002863-0

The monograph presents more exact dynamic equations of the elasticity theory obtained by the method of generalization of the four-dimensional model of gravitational space as applied to elastic space. Specific problems, solved by a new model, produced new non-standard results. The four-dimensional model of elastic medium made it possible to consider the gravitation and electrodynamics equations in a new fashion and to obtain a sudden result, namely, the equations of gravitation and electrodynamics are common.

For experts in the field of elasticity, gravitation and electrodynamics.

ISBN 5-02-002863-0

© Российская академия наук, 2003

© Издательство “Наука”,

(художественное оформление), 2003

Намерение написать научную работу с таким названием выглядит сомнительным делом, и автор это почти понимает. Казалось бы, лучше не писать такую научную книгу, потому что она будет воспринята после первого взгляда на нее учеными, если конечно найдутся такие, как несерьезная и не научная. Зная это, автор все-таки решился опубликовать именно такую работу, потому что уж слишком интересными и неожиданными получились результаты исследования по теории упругости в четырехмерной постановке, по теории гравитации и электродинамике, когда среда пространства этих полей моделируется упругой средой. Именно об этом и будет идти речь в данной книге. А среди неожиданных имеются такие результаты:

в динамическом деформационном процессе в упругой среде появилась новая компонента тензора деформаций — динамическая деформация расширения-сжатия вещества среды, дополнительная к объемной деформации;

поверхностные волны в упругом полупространстве являются в действительности чисто поперечными волнами;

скорости распространения продольных возмущений в упругих стержнях, в пластинах-полосах, в упругом пространстве одинаковые и равны скорости продольных волн в пространстве, эти скорости являются различными согласно классической теории упругости, и т.д.;

линейные уравнения гравитации и электродинамики оказались одними, а не разными, как это считается в настоящее время, скорость гравитационных волн получилась очень маленькой, порядка сантиметра в секунду, гравитационные и электромагнитные поля могут взаимодействовать друг с другом в силовом смысле и другие.

Конечно же, на первый взгляд, такие результаты у читателя вызовут вопрос, а все ли в порядке у автора с головой. Если результаты правильные, то это предположение можно считать комплиментом.

Подход к среде гравитационного пространства как к упругому пространству учеными в области гравитации рассматривался [1—3], слишком уж особо крамольного в этом ничего нет, но принятый здесь подход несколько отличается от ранее рассмотренных. До настоящего

времени не было четырехмерных уравнений теории упругости в том виде, в котором они получены в данной работе, а классические трехмерные уравнения не подходят для обобщения их на гравитацию и электродинамику. Полученные здесь уравнения упругости обобщаются на гравитацию и электродинамику естественно и просто, что не сделать этого как-то даже трудно.

Автор книги является специалистом по линейной теории упругости, когда деформации считаются малыми, а более конкретно, он является специалистом по решению прикладных задач в данной области науки. Вопросы чистой теории его интересовали только с прикладной точки зрения. Именно с этой точки зрения он в течение всей своей научной деятельности, которая продолжается более тридцати лет, делал попытки обобщить на теорию упругости достижения из области четырехмерной теории гравитации, поскольку уравнения и в той, и в другой областях наук схожи.

Теорией гравитации занимались выдающиеся умы человечества и хотелось их достижения в этой области науки применить в прикладной науке — в теории упругости. Такая работа по обобщению указанных достижений дала неожиданные и, надо сказать, интересные результаты, но так получалось, что все попытки опубликовать некоторые из них в научных журналах всегда встречали очень жесткое отрицание в среде ведущих ученых. У автора в то время было много другой интересной работы в области классической теории упругости, и он серьезно не обижался на сопротивление этих ученых, сознавая, что они могут быть правы в чем-то.

Все это говорится с той целью, чтобы как-то показать, что полученные результаты являются следствием большой и длительной работы, серьезных обдумываний, а не случайно полученные. Они с точки зрения научной логики являются обоснованными и продолжать откладывать их публикацию на будущее из возрастных соображений автора уже не имеет смысла.

Чтобы иметь возможность обобщить на теорию упругости достижения из области физики гравитационного поля, нужно было иметь соответствующие уравнения упругости. При получении таких четырехмерных уравнений теории упругости, которые учитывают в упругом теле деформацию координаты времени наравне с деформацией пространственных координат, возник вопрос о том, какую скорость распространения возмущений взять за основу, поскольку скорости света в упругом теле нет. Исследование этого вопроса привело тоже к интересному результату: какую бы скорость распространения возмущений в среде ни взять, четырехмерные уравнения теории упругости

получаются одними и теми же. Конечно, речь идет о теории упругости в линейном приближении. Анализ новых уравнений теории упругости, которые, как ни странно, оказались простыми и не намного сложнее классических уравнений, дал простую интерпретацию деформации временной координаты как динамической деформации расширения-сжатия вещества, дополнительной к объемной деформации тела.

Получился и другой удивительный результат, состоящий в том, что полученные уравнения теории упругости в случае, когда скорость объемных или, что то же самое, продольных волн равна скорости поперечных волн и обе эти скорости равны скорости света, полностью совпадают с линейными уравнениями гравитационного поля. Удивление продолжало увеличиваться. Выяснилось, что такое же совпадение имеет место и с уравнениями электромагнитного поля, но только в этом случае скорость объемных волн должна быть равной нулю, а скорость поперечных волн должна быть равной скорости света. Получилось, что уравнения гравитации и электродинамики в линейном приближении представляют собой уравнения упругой среды и в этом нет ничего надуманного, а все получилось точно без всяких предположений и допущений.

Нужно здесь еще раз подчеркнуть, что в книге речь идет только о линейных уравнениях. Главная причина такого ограничения состоит в том, что автор данной книги — специалист по линейной теории упругости. Это, конечно, не значит, что его не интересовали нелинейные задачи. В начале своей работы он откладывал нелинейные задачи на будущее, намереваясь в первую очередь решить все нужные и интересные линейные задачи. Однако конца таким задачам он не увидел, и об этом свидетельствует данная работа. Оказалось, что жизнь ставит все новые и новые ничуть не менее нужные и не менее интересные линейные задачи.

Ну а если начать углубляться в нелинейную область, то количество задач возрастает в нелинейной и очень большой пропорции. В качестве примера можно привести задачу об изгибе стержня. Если взять тонкий очень упругий и очень длинный стержень, а лучше сказать провод, и начать сильно изгибать его, то эта задача и может представлять пример нелинейной упругости. Какое многообразие нелинейных задач здесь может возникнуть! Стержень можно сворачивать в бабину, можно связывать в узлы, можно из него вязать кружева и т.д. По сравнению с задачами из сопротивления материалов об изгибе стержней имеем "море" нелинейных задач. То же самое имеет место и с пластинами, и с оболочками, и с упругими телами.

Приведенный пример показывает, что нелинейная область теории очень и очень гигантская и при рассмотрении задач в нелинейной по-

становке нужно серьезно ограничить область нелинейности каким-либо способом, а иначе решать задачи в нелинейной постановке бессмысленно, решений одной задачи может быть много. Конечно, нелинейные теории нужны, но желательно знать, какую нелинейность предстоит исследовать при помощи нелинейной теории. Такой подход может быть опасен еще тем, что при его использовании можно, как говорится в пословице, за деревьями не увидеть леса, а более конкретно, не увидеть нужную цель исследования. Поэтому, может быть, желательно вначале более широко рассмотреть цели исследования при помощи линейного подхода.

Обнаруженное совпадение уравнений сразу же пробудило желание распространить на теорию гравитации и электродинамики некоторые разработанные в теории упругости положения, имеющиеся решения и определенные результаты исследований. Надо отметить, что в теории упругости накоплено большое количество решений уравнений, каких нет в двух других теориях и которые после соответствующей обработки серьезно могут обогатить багаж знаний в гравитации и в электродинамике и желательно такую работу сделать, воспользоваться интересной ситуацией.

Таким образом и произошло независимо от автора вовлечение его в решение некоторых вопросов в линейных теориях гравитации и электродинамики. Для среды пространства, в котором существуют гравитационные и электромагнитные поля, подходит модель упругого пространства со всеми вытекающими из этого следствиями. На эту среду можно обобщить, что и сделано в работе, используемые в упругости понятия деформации, перемещения, напряжения, а также уравнения равновесия, уравнения совместности деформаций, закон Гука, связывающий деформации и напряжения, упругую энергию деформации и др.

Все это позволило выявить указанное выше сходство трех теорий, совпадение уравнений. Анализ результатов обобщения привел к тому, что упругая среда, моделирующая среду гравитационного и электромагнитного пространства, не является ни твердым упругим телом, ни жидкостью, ни газом, а представляет некую особую среду, которая в определенном смысле является противоположностью жидкости. В жидкости очень маленькая скорость поперечных волн по сравнению со скоростью продольных волн, а в модельной среде, как получилось в итоге исследований автора, очень маленькая скорость продольных волн по сравнению со скоростью поперечных волн, которая равна скорости света. Такой реальной среды в земной природе пока не наблюдалось.

Следует здесь сказать, что известные, назовем их классическими, уравнения гравитации и электродинамики в данной работе не затрагиваются, они приняты как неприкосновенные, никакие новые уравнения не выводятся. Это заявление достаточно часто будет повторяться, потому что оно очень существенно для автора. Он занимался и хочет заниматься обобщением результатов из одной области науки в другую, особенно из теорий гравитации и электродинамики в теорию упругости, но получением новых уравнений никогда не занимался. При внимательном чтении книги видно, что новые уравнения здесь не изобретены, а получены методом обобщения известных, ранее полученных, признанных жизнью уравнений.

Выявленное сходство уравнений гравитации и электродинамики с уравнениями упругости позволило дать им дополнительно к существующему в настоящее время несколько измененный смысл с целью получения новых возможностей исследования задач гравитации, электродинамики по отдельности и общих задач, когда гравитационные и электромагнитные поля взаимодействуют друг с другом, находить новые, в отличие от известных, решения этих уравнений. В частности, появляется возможность ставить и решать в отличие от общетеоретических именно прикладные задачи в области гравитации, о чем в книге говорится, и это особенно интересует автора по роду его деятельности.

Совпадение четырехмерных уравнений упругости с хорошо математически исследованными уравнениями гравитации дает дополнительно к правильности полученных четырехмерных уравнений упругости, основанной на строгости вывода их, подтверждение о математической и физической правильности этих уравнений. Но существует вопрос, являются ли они нужными с практической точки зрения. В книге много места уделено ответу на этот вопрос при помощи сравнения результатов теоретических решений новых уравнений с результатами экспериментальных исследований. По мнению автора, таких сравнений приведено вполне достаточно для получения вывода, что четырехмерные уравнения правильные в практическом отношении и вполне действующие в реальной жизни.

Научная практика говорит о том, что сравнения теории с экспериментом обычно проводятся и должны проводиться все время, пока живет теория. Об этом, в частности, говорит и данная работа. Ну кто бы мог подумать, что классическая динамическая теория упругости неверна. Никто из многих коллег автора данной книги — выдающихся специалистов в области динамической упругости, крупнейших ученых — и слышать не хочет о таком утверждении. А в предлагаемой книге это утверждается и обосновывается, хотя обоснований правильности клас-

сических уравнений имеется в научной литературе очень много, об этом тоже не надо забывать. Следовательно, экспериментальное подтверждение классической теории упругости нужно продолжать проводить тем ученым, которые в нее верят и в ней работают.

Вопрос о моделировании среды гравитационного пространства упругой средой является в каком-то смысле историческим. Таким моделированием много занимались английские ученые в XIX в., свои знаменитые уравнения электродинамики Максвелл получил, рассматривая пространство как упругую среду. Уравнения Максвелла стали фундаментом физики, ее основой, но об упругой модели забыли. Модель упругого твердого тела, представленная классическими трехмерными уравнениями упругости, не подходила для описания среды пространства, в котором действуют электромагнитные поля.

В наше время также делаются попытки моделировать гравитационное пространство упругой средой. В своей известной работе [1] Андрей Дмитриевич Сахаров говорит о такой возможности: "Наличие действия приводит к "метрической" упругости пространства, т.е. к появлению обобщенной силы, препятствующей искривлению пространства". Слово *действие* здесь означает функцию, лежащую в основе при получении вариационным методом знаменитых уравнений гравитационного поля. Под упругим пространством в механике сплошной среды понимается среда, в которой компоненты тензора напряжений являются функциями тензора деформаций. Слова А.Д. Сахарова практически определяют среду пространства как упругую среду. В своей работе А.Д. Сахаров развивает свое положение, рассматривая пространство, наполненное элементарными частицами. Это физический подход.

По мнению автора настоящей книги, элементарные частицы, составляющие среду гравитационного пространства, еще надо исследовать. По-видимому, они много меньше всех известных частиц, но это пока просто фантазия автора. Не будучи физиком, автор применяет континуальный подход к среде пространства, который положен в основу при первоначальном построении классической теории упругости и хорошо себя зарекомендовал. Физический подход тоже нужен, но им должен заниматься специалист-физик.

Некоторое небольшое развитие упругого подхода к гравитационному пространству сделано в большой книге "Гравитация" американских ученых Charles W. Misner, Kip S. Thorne, J.A. Wheeler (русский перевод — изд-во "Мир", Москва, 1977), но основное описание гравитационного поля в данной книге сделано на основе геометрического подхода и предпочтение отдано больше абстрактному математическому моделированию гравитации.

Как видим, вопрос о моделировании гравитационной среды упругой средой вполне научный, давно применяющийся и известный. В предлагаемой книге сам процесс моделирования не разрабатывается, а основной упор сделан на анализ, сходство и аналогию известных, хорошо зарекомендовавших себя уравнений упругости, гравитации и электродинамики. Результаты получены на основе анализа выявленного совпадения этих известных уравнений, а не на основе "изобретения" новых уравнений. Это важно подчеркнуть, чтобы не возникала у читателя мысль, что опять какой-то ученый переделывает общую теорию относительности, улучшает ее, придумывает более правильные уравнения. Так получилось в настоящее время, что всякая новая деятельность в этом направлении вызывает серьезное возражение среди ученых.

Интересным результатом построенной аналогии уравнений получилась реализация возможностей приложения работ по общей теории относительности в области теории упругости в прикладных задачах. Оказалось, что здесь она действует, дает и будет давать практические, прикладные результаты. Чего стоит полученный на основе обобщения теории Эйнштейна вывод о равенстве скоростей поверхностных и поперечных волн. Это очень важный результат для сейсмологических задач, для акустического зондирования и т.д. Подобных результатов достаточно много и о них сказано в данной книге. Конечно, эти результаты специалистами будут еще оспариваться, это нормально, в этом и состоит процесс получения научных истин — в споре истина и рождается.

Теория Эйнштейна будет работать и в акустике, об этом тоже говорится в книге, она должна внести свой вклад в гидродинамику и вообще в динамическую механику деформируемых сплошных сред. Таким образом, процесс обобщения результатов общей теории относительности на теорию упругости вполне оправдан.

Очень любопытные результаты дало обобщение полученных уравнений теории упругости на уравнения гравитации и электродинамики. Одним из таких результатов получилось заключение о скорости гравитационных волн. Оказалось, что эта скорость равна не скорости света, а имеет порядок сантиметра в секунду. О таком результате и говорить-то страшновато, в лучшем случае физики просто не захотят слушать. Но в предлагаемой книге этот результат научно обоснован, а что имеет место быть в действительности, должен показать эксперимент. В личных беседах и с помощью переписки автор сообщил о таком результате физикам, в частности, американскому физикам Кип С. Торну, российским физикам В.Б. Брагинскому, В.М. Липунову, и реакция была очевидной.

Надо отметить, что имеются и другие, столь же неприемлемые при первом ознакомлении результаты, они приведены в книге. Автор должен повторить, что у него не было вначале намерения получать такие результаты, они получились практически независимо от него, и он долго молчал о них, понимая, какое сопротивление возникнет при попытке опубликовать такие результаты. Время шло, научных аргументов против не появилось, поэтому продолжать держать эти результаты в шкафу не имело смысла, нужно, чтобы ученые знали о них, предприняли шаги, чтобы их опровергнуть или поверить в их правильность. В последнем случае открываются новые, интересные, на взгляд автора, возможности решения многих фундаментальных и прикладных задач в разных областях науки: в упругости, в гравитации, в электродинамике, в акустике, в динамике сплошных сред и др.

Автор постоянно, более двадцати лет общался по поводу описываемых здесь результатов с академиком Александром Юльевичем Ишлинским, обсуждал их, воспринимал его взгляд на эти результаты, пожелания о направлении продолжения исследований, учитывал его замечания и очень ему благодарен за поддержку.

## 1.1. О деформации координаты времени в упругих телах

Изложение материала в данном разделе дается следующим образом. Вначале приведены линейные уравнения гравитационного поля. Эти уравнения четырехмерные и описывают среду гравитационного пространства, которая во время динамических процессов в нем претерпевает изменения, описываемые четырехмерным метрическим тензором, содержащим и компоненты с индексами, соответствующими координате времени. Далее проведено обобщение такого четырехмерного подхода к гравитационному пространству на упругое пространство, т.е. на среду твердого деформируемого тела, с целью получения динамических уравнений упругости в случае, когда принято, что временная координата, связанная с упругим телом, деформируется наряду с пространственными координатами, как это сделано при построении уравнений, описывающих поведение гравитационного пространства.

Конкретная процедура получения этих уравнений состоит в обобщении хорошо разработанного процесса получения классических трехмерных уравнений теории упругости, в которой время является недеформируемой координатой, на четырехмерный случай, когда временная координата считается деформируемой наравне с пространственными координатами и при этом используются методы теории гравитации. Предварительно выписаны классические трехмерные уравнения теории упругости. Это сделано с целью сравнения с ними четырехмерных уравнений в предельном случае, когда временная координата не деформируется, чтобы из выведенных уравнений получались эти трехмерные классические уравнения. Возможность такого предельного перехода положена в основу при получении четырехмерных уравнений.

Постоянно у читателей может возникать сомнение в правильности исследования упругого тела методами теории гравитации, в правильности положения о деформируемости координаты времени в этом теле. В предлагаемой книге не рассматривается это положение с философской точки зрения, и автор не вступает в дискуссионный анализ по этому вопросу. Такие дискуссии проводились очень много в гравита-

ции, и там можно получить сведения о правомерности принятия положения о деформируемости координаты времени. В гравитации это положение принято, действует и дает положительные результаты. Вводится так называемая неподвижная система координат, относительно которой измеряется изменение времени в средах при деформации. Время определяет скорость изменения событий. Скорость изменения динамических процессов в упругости, в гравитации и электродинамике, в гидродинамике различная и поэтому в этих средах время разное. Как и в жизни, время у слонов, у бабочек, у бактерий разное. Эти времена, как правило, не зависят друг от друга. Поэтому время в каждой упругой среде свое и как пространственные координаты меняется в процессе динамической деформации упругой среды, когда оно связано с точками этой среды. Деформированная среда в сущности является уже другой средой по сравнению с исходной и поэтому время у нее свое.

Получение положительных научных и прикладных результатов в теории упругости является основным, чем руководствуется автор при развитии данного направления исследований. Такие результаты получены, о них в книге говорится и правильность их обосновывается. Хочется отметить, что эти результаты интересные, получать их стоит и поэтому принятие положения о деформируемости координаты времени они оправдывают. Тем более что в работе дано вполне нормальное физическое содержание деформации этой координаты как динамической деформации расширения-сжатия вещества, аналогичной температурной деформации. Анализ этой деформации показывает, что если она и температурная, то отличается от классической температурной деформации. Природу этой деформации еще предстоит исследовать.

Затем проведено сравнение полученных четырехмерных уравнений упругости с уравнениями гравитации, которое показало, что эти уравнения полностью совпадают, если в уравнениях упругости положить равными скорости продольных и поперечных волн. Но раз такое совпадение обнаружилось, то естественно возникло желание провести обобщение на среду гравитационного пространства положений упругой среды, что не противоречит положениям теории гравитации и далее это сделано. После такого обобщения взгляд на среду гравитационного пространства стал намного более "земным".

С аналогичной точки зрения возможности сравнения с уравнениями упругости рассмотрены уравнения электромагнитного поля. Такое рассмотрение показало, что уравнения электродинамики представляют собой в линейном приближении также уравнения упругой среды, если в последней положить равной нулю скорость продольных волн. Это совпадение представляет интерес с точки зрения сравнения уравнений

электродинамики с уравнениями гравитационного поля с целью выяснения, не являются ли эти уравнения одними и теми же, поскольку как уравнения упругости они описывают одну упругую среду. Ответ на этот вопрос получился положительный, но в окончательном виде дан он в разд. 3 после необходимого дополнительного анализа.

Отметим, что рассмотрение всех уравнений проводится в прямоугольной декартовой системе координат. Это объясняется тем, что в этой системе многое видится значительно проще по сравнению с тем, если уравнения записывать в произвольной криволинейной системе координат. Чтобы воспринимать форму уравнений в произвольной криволинейной системе координат, необходимы очень хорошие, глубокие и быстро воспроизводимые знания в различных областях высшей математики, ну и, конечно, в разных областях физики и механики. Для получения таких знаний нужно много сил и времени, которых может не хватить, чтобы затем воспринимать предлагаемый здесь материал, а автору хочется, чтобы его восприняли и поняли. Поэтому изложение ведется в наиболее простой форме, освоить знания для чтения такой книги можно гораздо легче и быстрее. Если пробудится интерес к изучению конкретной части излагаемого материала более серьезно, то среди цитируемой литературы имеются книги, при помощи которых можно получить нужные математические сведения и записать уравнения в произвольной системе координат.

В этом разделе на примере акустики показано, что развиваемый здесь подход к исследованию динамических явлений в деформируемых средах можно применять в акустике, в гидродинамике. Получено, что к известному линейному акустическому уравнению в какой-либо среде следует добавить еще одно уравнение для "перемещения" времени, деформация которого является как и в упругом теле динамической деформацией расширения-сжатия вещества акустической среды, дополнительной к объемной деформации, описываемой известным акустическим уравнением.

Принятый в работе стиль написания больше напоминает стиль научной статьи, правда слишком большой, в основном излагаются новые, не известные ранее научные результаты. Этим преследуется цель доведения до сведения ученых данных результатов с тем, чтобы попытаться вызвать ответную реакцию для укрепления уверенности в обоснованности представленного материала или для получения каких-то не известных автору научных данных, указывающих на неправильность принятого подхода к проблеме. Когда правильность представленного научного материала подтвердится, можно будет написать развернутую монографию по данной проблеме.

## 1.2. Линейные уравнения гравитационного поля А. Эйнштейна

Знаменитые уравнения гравитационного поля, полученные А. Эйнштейном, имеют вид [2—4]

$$R_{jk} - \frac{1}{2}g_{jk}R = 8\pi T_{jk}. \quad (1.1)$$

Здесь  $R_{jk}$  — так называемый тензор Ричи;  $j, k, l, m = 1, 2, 3, 4$ ;  $T_{jk}$  — тензор энергии-импульса;  $R = g_{jk}R_{jk}$ ;  $g_{jk}$  — метрический тензор пространства. Более конкретный вид тензора  $R_{jk}$  прояснится чуть позже. Четырехмерный тензор энергии-импульса удовлетворяет уравнению

$$T_{jk,k} = 0. \quad (1.2)$$

Будем рассматривать слабые гравитационные поля в пространстве и примем, что в нем отсутствует тензор энергии-импульса, определяемый массами, зарядами, и сосредоточим внимание на однородных линейных уравнениях гравитационного поля. Метрический тензор  $g_{jk} = \eta_{jk}$  невозмущенного гравитационного пространства, где  $\eta_{\alpha\alpha} = 1$ ,  $\eta_{\alpha\beta} = 0$ ,  $\alpha \neq \beta$ ,  $\eta_{44} = -1$ ,  $\eta_{\alpha 4} = 0$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ . Слабо возмущенный тензор  $g_{jk}$  можно представить в виде [2]

$$g_{jk} = \eta_{jk} + h_{jk}.$$

Выражения для компонент тензора  $R_{jk}$  имеют вид:

$$\begin{aligned} R_{jk} &= R_{ljk}, \quad R = \eta_{jk} R_{jk}; \\ R_{jklm} &= h_{jm,kl} + h_{kl,jm} - h_{km,jl} - h_{jl,km}. \end{aligned}$$

Здесь цифры после запятой в нижних индексах означают производные по соответствующим координатам  $x_{\alpha}$ ,  $x_4 = ct$ , где  $c$  — скорость света;  $t$  — время. При проведении исследований гравитационных явлений на основе этих уравнений в рамках линейного приближения к ним добавляются так называемые калибровочные условия [2]:

$$\begin{aligned} \bar{h}'_{jk,k} &= 0, \\ \bar{h}'_{jk} &= h_{jk} - \frac{1}{2}h\eta_{jk}, \quad h = h_{jj}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Отметим, что данные калибровочные условия очень похожи на уравнения равновесия и закон Гука теории упругости и далее это сходство будет подробно анализироваться. В продолжение нахождения сходства теорий гравитации и упругости, которому в данной книге специально уделено много места и которое нельзя просто сразу указать, а приходится находить, анализируя все положения той и другой теорий, отметим следующее. В теории упругости вводится тензор деформаций  $\epsilon_{\alpha\beta}$  как полуразность метрических тензоров деформированного  $g_{\alpha\beta}^*$  и недеформированного  $g_{\alpha\beta}$  тел. При деформировании тела без

разрывов и сдвигов тензор деформаций в упругом теле выражается через перемещения  $u_\alpha$  (см. подразд. 1.3):

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} = u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}.$$

Аналогично определяется тензор деформаций и для четырехмерного пространства, что будет показано в подразд. 1.4. Но уже здесь можно сказать, что, в сущности, введенный выше тензор

$$h_{jk} = g_{jk} - \eta_{jk}$$

и является удвоенным тензором деформаций четырехмерного пространства. Сказанное подтверждается следующим. В теории гравитации тензор  $h_{jk}$  выражается [2] через четыре произвольные функции  $\xi_j$ , которые названы *генерирующими функциями*. Эти функции вводятся следующим образом:

$$x_j^* = x_j + \xi_j, \quad (1.4)$$

и такое введение данных функций называется *преобразованием* координат  $x_j$  в координаты  $x_j^*$ . Компоненты тензора  $h_{jk}$  выражаются через функции  $\xi_j$  следующим образом [2]:

$$h_{jk} = \xi_{j,k} + \xi_{k,j}. \quad (1.5)$$

Получается, что этот тензор выражается через функции  $\xi_j$ , так же, как тензор деформаций  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  выражается через функции перемещений  $u_\alpha$ , отличие лишь в коэффициенте 2. Следовательно, тензор  $h_{jk}$  является практически удвоенным тензором деформаций четырехмерного пространства, хотя об этом в книгах по теории гравитации не говорится. Если это и вызывает некоторые сомнения относительно компонент этого тензора, связанных с временной генерирующей функцией  $\xi_4$ , то чисто пространственные компоненты тензора  $h_{\alpha\beta}$  точно представляют удвоенные пространственные компоненты тензора деформаций. Это следует из того, что если положить  $\xi_\alpha = u_\alpha$ , тогда  $h_{\alpha\beta} = u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ , и затем сравнить эти компоненты тензора  $h_{\alpha\beta}$  с выше выписанным тензором деформаций  $\varepsilon_{\alpha\beta}$ , то и получится вышесказанное.

Уравнения (1.1) в линейном приближении и при отсутствии тензора энергии-импульса являются по терминологии теории упругости уравнениями совместности деформаций для четырехмерного пространства. Вернее, уравнениями совместности деформаций являются уравнения

$$R_{jklm} = 0,$$

которые обращают в нуль и однородные уравнения (1.1).

Таким образом, видны сходства положений теории гравитации и теории упругости. Более подробно о сходстве теорий упругости и гра-

витаии понятнее будет говорить после представления уравнений теории упругости.

Вышеотмеченное и другие сходства, о которых в данной книге будет достаточно много говориться, побуждают глубже выявить аналогию уравнений упругости и гравитации и попытаться извлечь из этого полезные научные следствия.

### 1.3. Уравнения классической трехмерной теории упругости

Содержание этого подраздела построено на сведениях из теории упругости, изложенных в классических книгах по теории упругости [5—8]. Упругое твердое тело рассматривается как материальная сплошная среда, положение каждой точки которой определено в прямолинейной трехмерной координатной системе  $x_1, x_2, x_3$ . В процессе деформации тела, которая считается малой, под действием каких-либо силовых воздействий происходит смещение каждой точки относительно первоначального положения. Координатная система  $x_\alpha$  считается неподвижной, но с точками упругой среды связана подвижная координатная система  $x_\alpha^*$ , которая в процессе деформации перемещается вместе с точками среды. Перемещения  $u_\alpha$  точек среды определяются как разность подвижной и неподвижной систем координат:

$$u_\alpha = x_\alpha^* - x_\alpha. \quad (1.6)$$

Квадраты элементов длины в недеформированном  $ds^2$  и деформированном  $ds^{*2}$  состояниях имеют вид:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta, \quad ds^{*2} = g_{\alpha\beta}^* dx_\alpha dx_\beta.$$

Деформации  $\epsilon_{\alpha\beta}$  в упругом теле в приближении их малости определяются следующим образом:

$$2\epsilon_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}^* - g_{\alpha\beta} = u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}. \quad (1.7)$$

Элемент  $du_\alpha$  определяется формулой

$$du_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} dx_\beta + \omega_{\alpha\beta} dx_\beta, \quad 2\omega_{\alpha\beta} = u_{\beta,\alpha} - u_{\alpha,\beta}.$$

Асимметричный тензор  $\omega_{\alpha\beta}$  называется *тензором поворота*:

$$2\omega_{\alpha\beta} = \text{rot } \mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \\ \nabla = \{\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3\}. \quad (1.8)$$

Деформирование среды в каждой точке осуществляется в результате действия тензора напряжений  $\sigma_{\alpha\beta}$ , сформировавшегося в упругом теле в целом и в рассматриваемой точке в частности в результате при-

ложения к телу некоторого силового воздействия. Компоненты тензора напряжений  $\sigma_{\alpha\beta}$  удовлетворяют уравнению равновесия

$$\sigma_{\alpha\beta, \beta} = \rho u_{\alpha, i} + f_{\alpha},$$

где  $\rho$  — плотность среды,  $\{f_{\alpha}\}$  — вектор массовых сил.

Как было сказано выше, здесь не приводятся выводы известных уравнений, так как они прекрасно изложены в указанных выше книгах. Повторение этих выкладок очень существенно сказалось бы на увеличении объема книги и, хотелось бы или не хотелось, серьезно "затуманило" бы восприятие основных результатов и целей данной работы. Классические книги по теории упругости, по гравитации и по электродинамике, на которые были ссылки, очень содержательные, но достаточно большие по объему, а книга, в которой были бы изложены подробно необходимые здесь сведения из всех этих трех теорий, просто не могла бы быть не очень большой. Извлечь из большой книги нужные сведения часто бывает трудно. Ставя задачу донести до сведения читателей интересные, по мнению автора, результаты, пришлось пойти по пути уменьшения вспомогательного научного материала. Если у читателя возникнет желание ознакомиться с отсутствующим здесь материалом, в указанных, очень интересных книгах его можно найти.

К уравнениям равновесия можно добавить уравнение неразрывности

$$(\rho u_{\alpha, i}) + \rho_{, i} = 0.$$

В линейной теории упругости это уравнение не учитывается, потому что оно автоматически выполняется. Но, как далее увидим, когда будет учитываться деформация временной координаты, это уравнение будет играть свою роль. Тензор напряжений и тензор деформаций связаны законом Гука

$$\sigma_{\alpha\beta} = \lambda\theta\delta_{\alpha\beta} + 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta}, \quad (1.9)$$

где  $\lambda$ ,  $\mu$  модули упругости — постоянные Ламэ;  $\theta = u_{\alpha, \alpha} = \nabla \cdot u$  — деформация объемного расширения сжатия среды. Кроме констант Ламэ, специалисты используют другие модули упругости: модуль Юнга  $E$ , модуль сдвига  $G$ , коэффициент Пуассона  $\nu$ , модуль объемного сжатия  $K$ . Эти модули иногда будут использоваться, поэтому приведем здесь формулы, связывающие их:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= 2G\nu(1-2\nu)^{-1} = K - 2G/3 = E\nu(1+\nu)(1-2\nu)^{-1}, \mu = G, \\ \mu &= \lambda(1-2\nu)(2\nu)^{-1} = \frac{1}{2}E(1+\nu)^{-1} = \frac{2}{3}K(1+\nu)^{-1}(1-2\nu), \\ E &= \lambda(1+\nu)(1-2\nu)\nu^{-1} = 3K(1-2\nu), 2\nu = \lambda(\lambda + \mu)^{-1}, \\ K &= \lambda + \frac{2}{3}G = \frac{1}{3}\lambda(1+\nu)\nu^{-1}, 1-2\nu = G(\lambda + G)^{-1}. \end{aligned} \right\} (1.10)$$

Подставляя перемещения в деформации, а последние — в закон Гука и получившиеся значения напряжений в уравнения равновесия, получим уравнения равновесия в перемещениях:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu\nabla^2 \mathbf{u} &= \rho \mathbf{u}_{,tt}, \\ \nabla \mathbf{u} = \text{grad} \mathbf{u} = \{u_{,1}, u_{,2}, u_{,3}\}, (\nabla \cdot \mathbf{u}) &= u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3}. \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

Считаем пока, что внешние распределенные нагрузки  $f_\alpha$  отсутствуют. Эти уравнения можно записать в другой форме [5]:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} = \rho \mathbf{u}_{,tt}. \quad (1.12)$$

Представим вектор перемещения  $\mathbf{u}$  в виде суммы двух слагаемых  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ , у одного из которых дивергенция равна нулю (оно представляет часть решения, у которого деформация объемного расширения  $\theta$  равна нулю), у другого — ротор равен нулю, т.е.:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}_1) &= 0, \quad \nabla \times \mathbf{u}_2 = 0. \end{aligned}$$

Подставляя эту форму решения в уравнение, получим:

$$\mu \Delta \mathbf{u}_1 = \rho \mathbf{u}_{1,tt}, \quad (\lambda + 2\mu) \Delta \mathbf{u}_2 = \rho \mathbf{u}_{2,tt}, \quad (1.13)$$

где  $\Delta = \nabla^2$  — оператор Лапласа. Получилось два волновых уравнения, согласно которым имеем: объемные или продольные волны, описываемые слагаемым  $\mathbf{u}_2$ , распространяются со скоростью  $c_1$ ,  $c_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$ , поперечные или сдвиговые волны, описываемые слагаемым  $\mathbf{u}_1$ , распространяются со скоростью  $c_2$ ,  $c_2^2 = \mu/\rho$ .

Если решение какой-либо задачи построено в напряжениях или в деформациях и требуется определить перемещения, то надо проинтегрировать уравнения, являющиеся соотношениями деформации перемещения (1.7). Этих уравнений шесть для определения трех перемещений  $u_\alpha$ . На деформации должны быть наложены определенные условия, которые называются *уравнениями совместности деформаций*. Этих уравнений шесть:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= 0, \\ R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \varepsilon_{\delta\alpha, \beta\gamma} + \varepsilon_{\gamma\beta, \alpha\delta} - \varepsilon_{\gamma\alpha, \beta\delta} - \varepsilon_{\delta\beta, \alpha\gamma}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Тензор четвертого ранга  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  называется *тензором кривизны пространства*, или тензором Римана—Кристоффеля. Уравнения совместности деформаций свидетельствуют о том, что упругое тело деформируется таким образом, что пространство, описываемое координатной системой, связанной с точками тела, остается "плоским", т.е. пространство при деформировании сохраняет кривизну равной нулю. Равенство ну-

лю тензора кривизны в теории упругости означает возможность определения перемещений при известном тензоре деформаций с точностью до перемещений тела как абсолютно жесткого.

Более точно перемещения определяются конкретными граничными условиями задачи для упругого тела. Если на границе заданы напряжения, то перемещения определяются именно с точностью до перемещений тела как абсолютно твердого. Такой произвол является наиболее общим для всех возможных краевых задач теории упругости. При других граничных условиях данный произвол уменьшается и совсем исчезает при заданных на границе перемещениях. Кривизна тела при деформировании может становиться и отличной от нуля, если начнут развиваться неупругие процессы — пластичность, релаксация, ползучесть и какие-либо другие явления.

В теории упругости важную роль играет функция, характеризующая упругую энергию деформации. Функция плотности энергии деформации среды  $W$  имеет вид [9]:

$$2W = \sigma_{\alpha\beta}\epsilon_{\alpha\beta} + \rho u_{\alpha,t} u_{\alpha,t} = \lambda\theta^2 + 2\mu\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\alpha\beta} + \rho u_{\alpha,t} u_{\alpha,t}. \quad (1.15)$$

Первая часть в этой формуле определяет потенциальную энергию деформации  $W_1$ , вторая — кинетическую энергию  $W_2$ :

$$W_1 = \lambda\theta^2 + 2\mu\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\alpha\beta}, \quad W_2 = \rho u_{\alpha,t} u_{\alpha,t}.$$

Функция энергии, если воспользоваться вариационными принципами, определяет уравнения теории упругости, граничные условия, она позволяет решать многие задачи, и о значимости этой функции речь еще будет идти в данной книге.

#### 1.4. Четырехмерные уравнения теории упругости

В этом подразделе будут получены четырехмерные уравнения упругости при помощи обобщения в линейном приближении модели гравитационного поля на упругое поле твердого деформируемого тела, когда принято, что связанное с упругой средой собственное время [10] является деформируемым наравне с пространственными координатами, как это имеет место в теории гравитационного поля. Сразу же отметим здесь, что при выводе уравнений не требуется вводить гипотезу о заданной скорости распространения возмущений, равной или скорости света, или скорости звука, или какой-либо другой скорости, и это будет видно в процессе получения уравнений. Выполнена только следующая операция.

С целью приведения размерности временного слагаемого в четырехмерной метрике, используемой для определения деформаций четырехмерного упругого пространства, к размерности длины, которую

имеют другие члены метрики, временная координата преобразуется путем умножения ее на коэффициент с размерностью скорости, который может быть произвольным аналогично тому, как, например, произвольным может быть масштабный коэффициент, когда преобразуются пространственные координаты умножением на такой масштабный коэффициент. Результатом этого является построение четырехмерных уравнений упругости.

Сразу же отметим, что эти уравнения полностью совпали с уравнениями гравитационного поля в случае, когда скорости продольных и поперечных волн равны. Данное совпадение свидетельствует о том, что построенные уравнения упругого поля соответствуют научным требованиям математики, физики и механики, поскольку этим требованиям удовлетворяют уравнения гравитационного поля.

В разд. 2 на многочисленных примерах будет дано экспериментальное подтверждение правильности четырехмерной модели упругого поля. Это здесь говорится несколько раньше времени с той целью, чтобы при чтении не преобладало чувство, что излагаемые сведения псевдонаучные, ничего не значат для науки, для приложений и не заслуживают внимания.

Итак, как и в подразд. 1.3, снова рассматриваем изотропное упругое тело, задавая положение его точек в декартовых прямоугольных координатах  $x_1, x_2, x_3$ . Опять выпишем систему уравнений равновесия этого тела в компонентах тензора напряжений  $\sigma_{\alpha\beta}$  при отсутствии внешних сил вместе с уравнением неразрывности:

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} - p_{\alpha,t} = 0, p_{\alpha,\alpha} + \rho_{,t} = 0, p_\alpha = \rho u_{\alpha,t}. \quad (1.16)$$

Здесь, как и ранее,  $u_\alpha$  — компоненты вектора перемещений;  $\rho, p_\alpha$  — плотности вещества и импульса, индексы  $\alpha, t$  после запятой означают соответственно производные по  $x_\alpha$  и времени  $t$ .

Перепишем уравнения, представив временную координату в виде  $x_4 = ivt$ , где  $v$  — произвольный коэффициент с размерностью скорости,  $i = (-1)^{1/2}$ . В теории гравитационного поля [2] иногда используется мнимая координата  $x_4$  при проведении выкладок с целью получения уравнений в линейной постановке, но в большинстве случаев от нее отказываются из-за невозможности обобщить ее на нелинейную теорию. Автору представляется все-таки более удобным использовать именно мнимую координату  $x_4$  для более наглядного построения соотношений и уравнений четырехмерного упругого поля в линейном приближении.

В теории поля вместо произвольной константы  $v$  стоит скорость света  $c$ , но, как было сказано и это далее будет видно, для получения уравнений нет необходимости использовать именно скорость света.

Обозначая  $\nu p_\alpha = i\sigma_{\alpha 4} = \sigma_{\alpha t}$ ,  $\nu^2 \rho = \sigma_{44} = \sigma_{tt}$ , можем записать классическую систему четырех уравнений равновесия (1.16) в виде

$$\sigma_{jk, k} = 0, \quad j, k = 1, 2, 3, 4.$$

Эти уравнения можно переписать в следующем виде:

$$\sigma_{\alpha\beta, \beta} - \nu^{-1} \sigma_{\alpha t, t} = 0, \quad \sigma_{\alpha t, \alpha} + \nu^{-1} \sigma_{tt, t} = 0. \quad (1.17)$$

Будем рассматривать  $\sigma_{jk}$  как компоненты тензора напряжений в четырехмерном пространстве  $x_j$ . Соответствующие им компоненты тензора деформаций  $\varepsilon_{jk}$  определим через разность метрик деформированного и недеформированного пространств:

$$2\varepsilon_{jk} = g_{jk} - g_{jk}^0. \quad (1.18)$$

Квадрат элемента длины  $ds_0^2$  недеформированного пространства задается в виде

$$ds_0^2 = g_{jk}^0 dx_j dx_k = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - \nu^2 dt^2.$$

Введем так же как в подразд. 1.3, но уже в четырехмерном упругом пространстве, компоненты вектора перемещений  $u_j = x_j^* - x_j$  как разности между координатами  $x_j^*$ ,  $x_j$  точек тела соответственно в деформированном и недеформированном состояниях. При этом особо следует отметить компоненту  $u_4 = ivt^* - ivt = iv\tau$ ,  $t^* - t = \tau$ , отражающую малое приращение временной координаты за счет разницы между временем какой-либо частицы в деформируемом теле и временем той же частицы в недеформируемом теле.

Отметим, что время в упругой среде не является абсолютным временем для всех явлений вселенной. Это время служит для описания динамических явлений в упругой среде, и только. От чего зависят эти динамические явления? От динамических слагаемых в уравнениях равновесия, т.е. от сил инерции. В эти слагаемые входит плотность вещества среды, которая деформируется при динамических процессах. Эта деформация влияет на динамические процессы, процессы зависят от времени, следовательно, время зависит от процессов, т.е. является изменяемым параметром, деформируемой координатой, подобно тому, как деформируемыми являются пространственные координаты. В механике деформируемых сред это как-то не принимается в расчет.

В гравитации деформируемость временной координаты признана, и это дает научные результаты. Предлагается такое признание распространить и на деформируемые среды. Связывать деформацию координаты времени со скоростью света, как показывает анализ уравнений

гравитации, нет необходимости. Дальнейший анализ покажет, что в действительности скорость распространения возмущений в гравитационной среде определяют не уравнения гравитации (1.16), а дополнительные уравнения, которые называют *калибровочными условиями* или другими названиями. Введение этих условий часто обосновывают словами "не нарушая общности", хотя эти условия очень существенные.

Элемент  $dx_1^*$  при деформировании элемента  $dx_1 = \{dx_1, 0, 0, 0\}$  формируется следующим образом:

$$dx_1^* = \{(1 + u_{1,1})dx_1, u_{2,1}dx_1, u_{3,1}dx_1, u_{4,1}dx_1\}.$$

Аналогичные превращения претерпевают элементы  $dx_i, i > 1$ . Произвольный элемент  $ds$  получается суммированием элементов  $dx_i^*$ . Для квадрата длины этого элемента  $ds^2$  получаем выражение:

$$ds^2 = g_{jk} dx_j dx_k = g_{jk}^0 dx_j dx_k + 2u_{\alpha, \beta} dx_\alpha dx_\beta + 2u_{\alpha, t} dx_\alpha dt - 2v^2 \tau_{, \alpha} dx_\alpha dt - v^2 \tau_{, t} dt^2. \quad (1.19)$$

Соотношения между деформациями и перемещениями в четырехмерном пространстве согласно формулам (1.18), (1.19) получаются следующими:

$$\left. \begin{aligned} 2\varepsilon_{\alpha\beta} &= u_{\alpha, \beta} + u_{\beta, \alpha}, \\ 2\varepsilon_{\alpha t} &= v^{-1} u_{\alpha, t} - v \tau_{, \alpha}, \quad \varepsilon_{tt} = -\tau_{, t}. \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

Соотношения между деформациями и напряжениями получим при помощи функции плотности энергии деформации  $W$  четырехмерного пространства. Для линейно-упругого тела в рамках классической теории полная энергия  $W$ , равная сумме энергий упругой деформации и кинетической, определяется по формуле (1.15):

$$2W = \lambda \theta^2 + 2\mu e_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} + \rho u_{\alpha, t}^2,$$

где  $\lambda, \mu$  — по-прежнему упругие постоянные Ламе;  $\theta = \varepsilon_{\alpha\alpha}$  — объемная деформация. Показанная энергия содержит компоненты, затраченные на деформацию тела и кинетическую энергию, но не содержит компонент, связанных, как далее будет видно, с динамической деформацией собственно вещества, дополнительной к деформации вещества, определяемой объемной деформацией. Данную часть энергии учтем, вводя в потенциал  $W$  компоненты  $\varepsilon_{jt}, \sigma_{jt}, (j = 1, 2, 3, 4)$ . Тогда энергия  $W$  запишется в виде:

$$2W = \sigma_{jk} \varepsilon_{jk} = \lambda \theta^2 + 2\mu e_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} + \kappa_1 \vartheta \varepsilon_{tt} + \kappa_2 \varepsilon_{tt}^2 + \kappa_3 \varepsilon_{\alpha t} \varepsilon_{\alpha t}. \quad (1.21)$$

Здесь в энергии  $W$  содержатся три произвольные постоянные  $\kappa_j$ . Эти постоянные определяются из условия, что в предельном случае — при  $\tau$  равном нулю — четырехмерная модель упругого тела должна переходить в классическую. Как будет видно далее, могут встречаться задачи, когда временно́е перемещение тождественно равно нулю, и тогда должна работать классическая теория.

В представленном виде функция  $W$  является самой общей квадратичной зависимостью от деформаций для пространственно изотропного тела, допускающей переход, как было сказано, разрабатываемой четырехмерной модели упругого тела к классической при  $\tau = 0$ . Добавление в энергию  $W$  других слагаемых с деформациями, связанными с координатой времени, приведет к невозможности такого перехода.

Постоянная  $\kappa_3$  находится из равенства выражений (1.15) и (1.21) с учетом соотношений (1.20) при  $\tau = 0$ :

$$\kappa_3 = 2\rho v^2.$$

Продифференцировав далее плотность энергии (1.21) по  $\epsilon_{\alpha\beta}$ , получим зависимость напряжений от деформаций  $\sigma_{\alpha\beta} = \partial W / \partial \epsilon_{\alpha\beta}$ . Выпишем получившиеся выражения напряжения—деформации:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= \lambda \vartheta \delta_{\alpha\beta} + 2\mu \epsilon_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \kappa_1 \epsilon_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta}, \\ \sigma_{\alpha t} &= \kappa_3 \epsilon_{\alpha t}, \quad \sigma_{tt} = \kappa_1 \vartheta / 2 + \kappa_2 \epsilon_{tt}, \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

где  $\delta_{\alpha\beta}$  — символ Кронекера. Подставляя (1.22) в уравнения (1.18), приходим при  $\tau = 0$  к следующим равенствам:

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} - \rho u_{\alpha,tt} = 0, \quad \kappa_1 \vartheta_{,t} - \kappa_3 u_{\alpha,\alpha t} = 0. \quad (1.23)$$

Так как, по определению,  $u_{\alpha,\alpha} = \vartheta$ , то из уравнения (1.23) следует, что должно быть  $\kappa_1 = \kappa_3$ , так как уравнение неразрывности при  $\tau = 0$  должно обращаться в тождество.

Распишем теперь систему (1.18) в перемещениях с учетом параметра  $\tau$  и определенных постоянных  $\kappa_1$  и  $\kappa_3$ :

$$\left. \begin{aligned} \mu \Delta u_{\alpha} + (\lambda + \mu) \vartheta_{,\alpha} - \rho u_{\alpha,tt} - 0, \\ \kappa_3 v^2 \Delta \tau - 2\kappa_2 \tau_{,tt} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа. Первые три уравнения (1.24) известны — это классические динамические уравнения теории упругости (1.11): в этих уравнениях временно́я компонента перемещений сократилась, вернее уничтожилась, и для пространственных перемещений уравнения классической теории упругости остались прежними и в четырехмерной модели. Для временно́й составляющей  $\tau$  получилось из четвер-

того уравнения равновесия отдельное уравнение. Из вида этого уравнения заключаем, что должны выполняться условия

$$\kappa_2 = \rho v^4 c_1^{-2}, \quad c_1^2 = (\lambda + 2\mu)\rho^{-1},$$

так как только тогда скорость распространения волн, определяемых функцией  $\tau$ , в которых, как далее будет показано, имеет место динамическая деформация расширения вещества, равна скорости  $c_1$  объемных или продольных волн, которые также связаны с изменением плотности вещества. Таким образом, постоянные  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$  определились:

$$\kappa_1 = \kappa_3 = 2\rho v^2, \quad \kappa_2 = \rho v^4 c_1^{-2}. \quad (1.25)$$

Следует, однако, отметить, что скорость распространения волн, определяемых функцией  $\tau$ , может быть формально и иной: все определяют реальность, эксперимент. Но другой скорости волн, связанных с изменением плотности вещества, пока не зафиксировано в экспериментальных исследованиях, поэтому будем считать, что она совпадает со скоростью продольных волн.

Если задать граничное и начальные условия такими, что для временного перемещения они нули, то получим в упругом теле  $\tau = 0$ , и тогда задача вырождается в классическую задачу теории упругости. Вполне возможно, что такие задачи существуют в реальном мире, и это обстоятельство послужило основой при выборе метода построения четырехмерной модели упругого тела: четырехмерные уравнения должны при  $\tau = 0$  переходить в классические трехмерные уравнения. Таким образом, для временной компоненты перемещения имеем уравнение

$$\Delta\tau - c_1^{-2}\tau_{,tt} = 0.$$

Постоянную  $v$ , участвующую в преобразовании временной координаты, как видим, можно задавать произвольной, и это не влияет на вид полученных уравнений. Скорости распространения волн в упругом пространстве должны определяться и определяются полученными уравнениями, законом Гука. Как видим, эти скорости волн в четырехмерной теории сохраняются такими же, как в классической теории упругости.

Зададим для конкретности постоянную  $v$  равной максимальной скорости распространения возмущений в упругом теле, т.е. равной скорости  $c_1$  продольных волн. Выпишем постоянные  $\kappa_i$ , соответствующие этому случаю:

$$\kappa_1 = \kappa_3 = 2(\lambda + 2\mu), \quad \kappa_2 = \lambda + 2\mu.$$

Теперь можно выписать обобщенную линейную систему уравнений четырехмерной теории упругости:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta,\beta} - c_1^{-1} \sigma_{\alpha t,t} &= 0, \\ \sigma_{\alpha t,\alpha} + c_1^{-1} \sigma_{tt,t} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

В перемещениях эта система уравнений имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \mu \Delta u_\alpha + (\lambda + \mu) \vartheta_{,\alpha} - \rho u_{\alpha,tt} &= 0, \\ \Delta \tau - c_1^{-2} \tau_{,tt} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.27)$$

Обобщенный закон Гука имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= \lambda \vartheta \delta_{\alpha\beta} + 2\mu \epsilon_{\alpha\beta} + (\lambda + 2\mu) \epsilon_{tt} \delta_{\alpha\beta}, \quad \sigma_{\alpha t} = 2(\lambda + 2\mu) \epsilon_{\alpha t}, \\ \sigma_{tt} &= (\lambda + 2\mu) (\vartheta + \epsilon_{tt}). \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

К этим уравнениям следует также добавить геометрические соотношения (1.20), связывающие деформации и перемещения:

$$2\epsilon_{\alpha\beta} = u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}, \quad 2\epsilon_{\alpha t} = c_1^{-1} u_{\alpha,t} - c_1 \tau_{,\alpha}, \quad \epsilon_{tt} = -\tau_{,t}.$$

Если во всех этих уравнениях положить  $\tau = 0$ , то получатся классические уравнения упругости, потому что именно исходя из этого положения четырехмерные уравнения и были получены. Интересным в этой процедуре получается следующее.

Деформация  $\epsilon_{\alpha t}$  при таком переходе не обратится в нуль, а будет равна  $2\epsilon_{\alpha t} = c_1^{-1} u_{\alpha,t}$ . Получается, что классические уравнения упругости можно записать в терминологии четырехмерной теории упругости, используя понятия компонент четырехмерных тензоров деформаций и напряжений, только компоненты деформаций, связанные с временной координатой, будут укороченными по сравнению с пространственными компонентами деформаций.

Сравнивая в этом случае пространственные сдвиговые деформации  $2\epsilon_{\alpha\beta} = u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}$  и временные сдвиговые деформации  $2\epsilon_{\alpha t} = c_1^{-1} u_{\alpha,t}$ , так их назовем по аналогии с пространственными деформациями, видим следующее. Деформации  $\epsilon_{\alpha t}$  формально имеют вид, аналогичный пространственным, но укороченный, неполный. Во временных сдвиговых деформациях отсутствует второе слагаемое, каковое имеется в пространственных сдвиговых деформациях. Это автору всегда представлялось неестественным. И вот теперь этот, пока еще формальный, недостаток классической теории упругости устраняется. Уравнения приняли достаточно симметричную форму с точки зрения вида четырехмерных компонент деформаций, временные сдвиговые деформации

приняли аналогичный вид, что и пространственные сдвиговые деформации.

Возвращаемся к четырехмерной теории. Если решать какую-либо задачу в напряжениях и деформациях, то как и в классической теории упругости надо удовлетворить уравнениям совместности деформаций, которые являются условиями интегрируемости уравнений перемещения—деформации (1.20) при определении перемещений. По аналогии с классической теорией упругости эти уравнения совпадают с равенствами нулю компонент тензора кривизны пространства, в данном случае четырехмерного. Таким образом, уравнения совместности деформаций имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} R_{jklm} &= 0, \\ R_{jkdm} &= \epsilon_{jm,kl} + \epsilon_{kl,jm} - \epsilon_{km,jl} - \epsilon_{jl,km}. \end{aligned} \right\} \quad (1.29)$$

Если решать уравнения теории упругости в перемещениях, то удовлетворять уравнениям совместности деформаций не нужно, они выполняются автоматически. Получившиеся четырехмерные уравнения отличаются от классических уравнений теории упругости дополнительным уравнением относительно  $\tau$ ; однако следует отметить, что существенно изменились закон Гука и выражение для энергии, которое имеет вид:

$$2W = \lambda\theta^2 + 2\mu\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\alpha\beta} + (\lambda + 2\mu)(2\theta\epsilon_{tt} + \epsilon_{tt}^2 + 2\epsilon_{\alpha t}\epsilon_{\alpha t}). \quad (1.30)$$

Если сравнить теперь полученные четырехмерные уравнения упругости (1.26) и закон Гука (1.28) в напряжениях с калибровочными условиями (1.3) уравнений гравитации, то обнаруживается следующая интересная ситуация. Положим в уравнениях упругости (1.25) константы Ламе удовлетворяющими равенству  $\lambda = -\mu$ , а все уравнения (1.3) умножим на  $\mu$ . Условие  $\lambda = -\mu$  означает в теории упругости равенство скоростей продольных и поперечных волн в упругой среде. Если теперь ввести в уравнениях (1.3) обозначения  $\sigma_{jk} = \mu\bar{h}_{jk}$ ,  $2\epsilon_{jk} = h_{jk}$ , то получится, что уравнения равновесия (1.26) и обобщенный закон Гука (1.28) совпадут с калибровочными условиями (1.3), т.е. с калибровочными уравнениями, и с соотношениями, связывающими  $\bar{h}_{jk}$  с  $h_{jk}$ . Если далее в уравнениях гравитации положить тензор энергии импульса равным нулю, то уравнения (1.1) превратятся в уравнения совместности деформаций четырехмерного пространства, и тогда уравнения гравитации полностью совпадут с полученными уравнениями упругости, если в последних, как было сказано, положить  $\lambda = -\mu$ .

Полученное совпадение уравнений говорит о большом сходстве теоретических моделей упругого и гравитационного полей. Кроме то-

го, данное совпадение свидетельствует о том, что построенные уравнения упругости находятся в согласии с формальными математическими требованиями, предъявляемыми к уравнениям сплошных сред, поскольку таким требованиям удовлетворяют уравнения гравитации, которые проверялись критически учеными почти столетие. Ставить под сомнение правильность четырехмерных уравнений упругости с точки зрения математики означает ставить под сомнение правильность уравнений гравитации с этой же точки зрения. А математическая правильность последних контролировалась выдающимися математиками столетия. Отметим также, что предложенный метод построения уравнений упругости приводит к единственным уравнениям, что проверяется, например, методом от противного.

Далее представит интерес вид уравнений в случае, если скорость  $v$ , входящую в элемент длины четырехмерного пространства, положить равной скорости поперечных волн  $c_2$ . Константы  $\kappa$ , в этом случае будут:

$$\kappa_1 = \kappa_3 = 2\mu, \quad \kappa_2 = \mu c_2^2 c_1^{-2}. \quad (1.31)$$

Уравнения равновесия не изменяются, их вторично приводить не имеет смысла, поэтому приведем закон Гука и выражение для энергии:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= \lambda\vartheta\delta_{\alpha\beta} + 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta} + \mu\varepsilon_{44}\delta_{\alpha\beta}, \\ \sigma_{\alpha t} &= 2\mu\varepsilon_{\alpha t}, \quad \sigma_{tt} = \mu\vartheta + \mu c_2^2 c_1^{-2}\varepsilon_{tt}, \\ 2W &= \lambda\theta^2 + 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} + \mu(2\theta\varepsilon_{tt} + c_2^2 c_1^{-2}\varepsilon_{tt}^2 + 2\varepsilon_{\alpha t}\varepsilon_{\alpha t}), \\ 2\varepsilon_{\alpha\beta} &= u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}, \quad 2\varepsilon_{\alpha t} = c_2^{-1}u_{\alpha,t} - c_2\tau_{,\alpha}, \quad \varepsilon_{tt} = -\tau_{,t}. \end{aligned} \right\} \quad (1.32)$$

Возникает вопрос о физическом, реальном содержании новой компоненты "перемещения" времени  $\tau$ . Если проследить, как входит эта величина в уравнения равновесия, в закон Гука, то выясняется, что деформация времени  $\tau_{,t}$  описывает часть динамической "деформации" плотности вещества тела, т.е. динамическую деформацию расширения (под этим словом будем понимать и сжатие) самого вещества. Эта часть деформации вещества является дополнительной к деформации вещества, определяемой объемной деформацией  $\theta$ , похожа в некотором отношении на температурную деформацию, аналогично входит в соотношения закона Гука [11]. Но в отличие от температурной деформации вхождение временной деформации в уравнения определяется не коэффициентом линейного температурного расширения, а параметрами закона Гука. Таким образом, выявляется вполне нормальный и реальный физический смысл компоненты  $\varepsilon_{tt}$ .

Если проследить, как входит временная компонента в инерционные члены уравнений равновесия, то увидим, что там появились слагаемые,

содержащие  $\tau_{,\alpha}$ . Учитывая вышеполученный физический смысл временной деформации  $\tau_{,t}$ , деформации расширения-сжатия вещества, приходим к заключению, что дополнительные слагаемые в силах инерции связаны с потоком плотности вещества по пространственным координатам в процессе динамической деформации. Эти слагаемые соответствуют в физическом понимании первым слагаемым  $\rho u_{\alpha,tt}$ , тоже связанным с потоком плотности вещества. Сказанное означает, что дополнительные слагаемые находятся в соответствии с классическими силами инерции, представляющими собой произведения плотности вещества недеформированного тела на ускорения. Силовое взаимодействие частиц тела при динамическом деформировании приводит к появлению в силах инерции слагаемых, определяемых потоком плотности вещества, каковых нет в классической теории.

Кстати, сказанное позволяет более осознанно подойти к странному, на первый взгляд, понятию деформации координаты времени. Эта деформация пока воспринимается с трудом. В уравнениях динамический характер деформационного процесса в упругом теле определяют инерционные члены в уравнениях равновесия. Что определяет вклад инерционных членов? Плотность вещества. Такая зависимость может привести к деформации координаты времени и, как показывают исследования, о которых говорится в данной работе, приводит к этой деформации. Эта зависимость и осуществляется через измененные инерционные члены уравнений равновесия, в которые и входит деформация плотности вещества в форме деформации времени.

Аналогичный процесс имеет место в уравнении неразрывности, которое переходит в четвертое уравнение равновесия: в этом уравнении появляются дополнительные члены, связанные с динамической деформацией вещества, каковых нет в классической теории. В результате уравнение неразрывности стало действующим в линейном приближении, чего не было в классической теории упругости, где оно тождественно обращалось в нуль.

### 1.5. Уравнение импульсов вместо уравнения неразрывности в теории упругих сред

Остановимся здесь несколько подробнее на произведенной замене уравнения неразрывности уравнением равновесия импульсов при получении четырехмерных уравнений упругости. В литературе по механике сплошных сред часто говорится, что в уравнении неразрывности не учитывается взаимодействие частиц. Но после высказывания этой мысли не предпринимались попытки как-то учесть это взаимодействие, если оно в действительности имеется. Надо сказать, что задача эта

серьезная и учесть в теории сплошных сред силовое взаимодействие частиц в уравнении неразрывности при динамических деформациях желательно. Однако не было ясности в том, как это сделать.

При построении уравнений упругого поля в деформируемом твердом теле, которое рассматривается как непрерывный упругий континуум, как непрерывная материальная среда, использование только классического уравнения неразрывности приведет к неполному описанию деформационного явления. Можно дать следующее объяснение того, почему это так. В упругом теле в процессе деформации создается упругая энергия деформации, в нем действуют обычные трехмерные напряжения  $\sigma_{\alpha\beta}$  и существуют импульсы  $\sigma_{\alpha i}$ . Компоненты плотности импульсов  $\sigma_{\alpha i}$  пропорциональны компонентам плотности потока энергии [4], т.е. определяют поток энергии деформации по упругому континууму.

В соответствии с теорией гравитационного поля в четырехмерном пространстве может существовать и действовать четырехмерный тензор энергии-импульса  $T_{jk}$ , компоненты которого удовлетворяют четырехмерным уравнениям равновесия  $T_{jk,k} = 0$ . Уравнение неразрывности упругой среды, в которой действует тензор энергии-импульса, входит в виде уравнения равновесия импульсов, так его назовем, в систему четырехмерных уравнений равновесия. Эта гравитационная среда может содержать в себе систему материальных точек или какую-либо составную среду. Эти среды изучаются в теории гравитации, и уравнение неразрывности обычно формируется какими-либо стандартными, классическими методами. Из аналогии с тензором энергии-импульса заимствуем пока только то, что уравнение для компонент тензора энергии-импульса состоит из уравнения неразрывности или включает в себя каким-либо образом это уравнение.

Рассмотрим вопрос о роли компонент плотности импульса в упругом континууме. В процессе деформации упругого континуума изменяется плотность вещества и меняется упругая энергия деформации. Если, например, рассмотреть границу континуума, свободную от напряжений, то через эту границу не должна теряться и не должна приобретаться упругая энергия деформации. Следовательно, на этой границе надо ставить условие, обеспечивающее отсутствие оттока и притока энергии.

Поток энергии через границу пропорционален [4] перпендикулярной к границе компоненте плотности импульса  $\sigma_{ni}$ , и, следовательно, на границе эта компонента должна обращаться в нуль. Если это условие отсутствия потока энергии деформации выписать в рамках классической теории упругости, оно будет иметь вид  $\rho u_{n,i} = 0$ , где  $u_{n,i}$  нормальная к границе компонента скорости перемещения точек границы

тела. Это условие является дополнительным к трем условиям равенства нулю компонент тензора напряжений: нормальной и двух касательных.

Произвол классических уравнений теории упругости не позволяет удовлетворить четырем граничным условиям, следовательно, четвертое условие не выполняется, и поэтому отток или приток энергии, а вернее вещества, через свободную от напряжений границу происходит согласно классической теории. Физически это вполне нормально, потому что тело со свободными границами может перемещаться в пространстве. Плотность потока вещества пропорциональна нормальной компоненте  $\rho u_{n,i}$  скорости точек границы тела. Отток или приток энергии деформации означает в данном случае отток или приток массы. Однако надо иметь в виду, что масса может протекать через свободную от напряжений границу, а поток упругой энергии деформации через такую границу должен отсутствовать. Вот здесь и возникает проблема, что такое упругая энергия деформации континуума.

В соответствии с теорией гравитационного поля масса является энергией. Это должно иметь место и в теории упругого континуума согласно сходству уравнений. Ну а раз так, то уравнение неразрывности должно как-то учитывать это обстоятельство, т.е. оно кроме массы должно учитывать и возникающую упругую энергию деформации. Проведение этого положения в уравнения и соотношения теории упругого континуума приводит к тому, что в упругую энергию деформации надо вводить кроме деформации объема, как это имеет место в классической теории упругости, еще и деформацию массы, которая уже учитывается в уравнениях упругости через компоненты объемной деформации. Должна ли еще деформация массы входить в уравнения отдельно через деформацию координаты времени?

Учет динамической деформации плотности вещества континуума в форме деформации времени выполнен в подразд. 1.4. При учете был использован теоретический аппарат теории поля. Он хорошо отработан, зарекомендовал себя как правильный и с физической, и с математической точек зрения, методически хорошо отработан. Не использовать его в теории упругости, исходя только из точек зрения некоторых, даже весьма авторитетных ученых, которые смотрят на такой подход к процессу деформации упругого тела, как на псевдонаучный, набивший оскомину из-за частого употребления его для не очень глубокого, иногда показного научного исследования, автор считает неправильным.

В результате применения этого аппарата деформация динамического расширения-сжатия вещества упругого континуума оказалось пропорциональной деформации временной компоненты  $\epsilon_{ii} = \tau_{,i}$ . Если обозначить эту часть деформации плотности через  $\epsilon_p$ , то получим  $\epsilon_p = \rho \epsilon_{ii}$ ,

и она удовлетворяет в соответствии с результатами, полученными в подразд. 1.4, уравнению

$$\Delta \epsilon_p = c_1^{-2} \epsilon_{p,tt}.$$

Оно следует из уравнения для плотностей импульса, т.е. из четвертого уравнения равновесия (1.26):

$$\sigma_{\alpha t, \alpha} + c_1^{-1} \sigma_{tt} = 0.$$

Согласно классической теории упругости, уравнение неразрывности в линейном приближении тождественно обращается в нуль, и поэтому оно в этой теории не учитывается. Результатом явилось то, что в рассмотренном примере тела со свободной от напряжений границей в рамках классической теории упругости не удастся удовлетворить условие равенства нулю нормальной к границе компоненты плотности импульса  $\sigma_{nt} = 0$ , означающее равенство нулю потока энергии деформации через границу.

В четырехмерной теории упругости эта трудность исчезает, рассмотренное граничное условие отсутствия потока энергии через свободную границу можно ставить и выполнять именно в результате учета уравнения равновесия импульсов. В разд. 2 будут рассмотрены конкретные задачи, когда учет этого условия приводит к очень интересным результатам.

Получается, что в упругом континууме вместо уравнения неразрывности должно участвовать уравнение равновесия импульсов, которое является более общим. Уравнение импульсов шире рассматривает понятие неразрывности, потому что включает в рассмотрение деформацию динамического расширения-сжатия вещества, не учитываемую классическим уравнением неразрывности и происходящую в результате определенного сопротивления процессу деформации из-за наличия силового взаимодействия частиц друг с другом. Таким образом, можно считать устаревшим употреблявшееся в классической теории упругости положение о том, что силовое взаимодействие частиц в уравнении неразрывности не учитывается.

В соответствии с четырехмерной теорией упругости на свободной от напряжений границе упругого тела, в котором, например, происходят волновые процессы, можно выполнить условие отсутствия потока упругой энергии деформации, энергия не будет утекать из тела или притекать в тело извне, а поток вещества может иметь место, и тело со свободной границей может перемещаться в пространстве.

Спрашивается, происходит что-либо противоестественное при данном подходе к деформации упругого континуума? В классической теории упругости принято, что динамическая деформация расширения-

сжатия вещества, аналогичная температурной деформации, не происходит в упругом теле. Вопрос о существовании такой деформации просто не возникал. В действительности такая деформация может иметь место, об этом в данной книге много говорится и не рассматривать ее нельзя. Является ли она динамической температурной деформацией, пока ответить на это не удастся, нужно проводить специальные экспериментальные исследования. Но то, что такая деформация происходит на самом деле, свидетельствуют эксперименты, о которых далее достаточно много сказано. Если это динамическая температурная деформация, то она не эквивалентна известной температурной деформации, потому что является обратимой, т.е. может быстро возрастать и также быстро убывать. При выполнении, например, условия отсутствия напряжений на свободной границе при падении на нее продольной волны в процессе отражения возникает деформация времени, даже если ее не было в падающей волне.

Возникающая функция перемещения времени  $t$  в зависимости от падающей волны может быть положительной или отрицательной. В жизни как-то понятно, что быстро нагреться вещество может, а быстро остыть — нет. А деформация времени, если она эквивалентна температуре, должна быстро и увеличиться и уменьшиться, чтобы выполнить граничные условия. Следовательно, если деформация динамического расширения-сжатия является температурной, то в этом случае температура особая, а не та, с которой все привыкли иметь дело.

Таким образом, пока можно сделать вывод, что в процессе динамических деформаций в упругих средах имеет место новый вид деформации, а именно: деформация динамического расширения-сжатия вещества наряду с объемной деформацией. Более глубокий физический смысл этой деформации предстоит еще изучать, однако вклад этого вида деформации в напряженно деформированное состояние упругих сред можно получать, не обладая полной информацией о ее физическом содержании. В следующих двух разделах это будет продемонстрировано на конкретных задачах.

### **1.6. Гравитация — это упругость, в которой скорости продольных и поперечных волн равны**

В подразд. 1.4 были получены четырехмерные уравнения теории упругости при помощи обобщения на упругую среду методов теории гравитационного поля и было обнаружено совпадение полученных четырехмерных уравнений упругости и классических уравнений гравитации, если в уравнениях упругости положить модули упругости Ламэ  $\lambda$ ,  $\mu$  равными друг другу с обратным знаком:  $\lambda = -\mu$ . В теории упруго-

сти такое равенство означает равенство скоростей продольных и поперечных волн. Выявленное совпадение уравнений упругости и гравитации побуждает обобщить на теорию гравитационного поля положения и методы теории упругости, которые могут оказаться полезными для расширения области исследований в гравитации.

Возникает желание ввести в теории гравитации тензор деформаций  $\epsilon_{jk}$  по аналогии с теорией упругости, тем более что он практически уже введен, см. (1.4), (1.5). В теории упругости одним из основных параметров является вектор перемещений  $u$ , определяющий перемещения точек упругой среды в процессе деформаций. В гравитационном пространстве введены метрические тензоры недеформированного и деформированного пространств. Совершенно ясно, что имеет смысл ввести и сами координаты недеформированного  $x_k$  и деформированного  $x_k^*$  пространств, если в этих пространствах отсутствует тензор энергии-импульса и они являются так называемыми плоскими пространствами с нулевым тензором кривизны.

Анализируя сложившуюся ситуацию, можно отметить, что нет объективных аргументов, не позволяющих провести обобщение положений теории упругости на гравитационную среду. Что это за среда, в настоящее время пока неизвестно, но по ней распространяется энергия в форме электромагнитных волн, через нее передаются силовые воздействия планет и солнца, звезд в галактиках, взаимодействие галактик. Если проанализировать более распространенное земное явление контактных силовых воздействий твердых тел друг на друга, то эти воздействия передаются также через эту среду, потому что атомы, электроны, нейтроны и другие частицы, из которых состоят твердые тела, не соприкасаются непосредственно друг с другом при контактном взаимодействии тел, а действуют друг на друга на расстоянии через гравитационное пространство. Все это свидетельствует в пользу существования какой-то материальной среды в пространстве, потому что через пустоту такие мощные силовые воздействия не передадутся.

Будем поэтому далее считать, что гравитационное пространство наполнено материальной средой и с точками этой среды связана подвижная система координат  $x_k^*$ . Разность подвижной и неподвижной систем координат и определяет в соответствии с методом построения теории упругости перемещения  $u_k$  точек среды пространства в процессе ее деформации:

$$u_k = x_k^* - x_k. \quad (1.33)$$

Метрический тензор  $g_{jk} = \eta_{jk}$  невозмущенного гравитационного пространства в соответствии с изложенным в подразд. 1.2 имеет вид:  $\eta_{44} = -1$ ,

$\eta_{\alpha\alpha} = 1$ ,  $\eta_{\alpha\beta} = 0$ ,  $\alpha \neq \beta$ ,  $\eta_{\alpha 4} = 0$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ . Здесь принимаются обозначения, введенные в подразд. 1.2. Слабо возмущенный в процессе гравитационных явлений тензор  $g_{jk}$  можно представить в виде

$$g_{jk} = \eta_{jk} + h_{jk} = \eta_{jk} + 2\epsilon_{jk}.$$

Тензор деформаций  $\epsilon_{jk}$  гравитационного пространства можно определить в линейном приближении так же, как это сделано в подразд. 1.5:

$$2\epsilon_{jk} = g_{jk}^* - g_{jk} = u_{j,k} + u_{k,j}. \quad (1.34)$$

Для определения перемещения при известных деформациях необходимо, чтобы они удовлетворяли уравнениям совместности деформаций:

$$\left. \begin{aligned} R_{jklm} &= 0, \\ 2R_{jklm} &= h_{jm,kl} + h_{kl,jm} - h_{km,jl} - h_{jl,km} = 2(\epsilon_{jm,kl} + \epsilon_{kl,jm} - \epsilon_{km,jl} - \epsilon_{jl,km}). \end{aligned} \right\} (1.35)$$

Уравнения гравитационного поля (1.1) обладают определенным произволом, который ученые устраняют, вводя так называемые калибровочные условия, которые в подразд. 1.2 выписаны и имеют вид (1.3):

$$\bar{h}_{jk,k} = 0,$$

$$\bar{h}_{jk} = h_{jk} - \frac{1}{2}h\eta_{jk}, \quad h = h_{jj}.$$

Умножим эти соотношения на модуль упругости  $\mu$ , которым, пока это предположение, обладает среда гравитационного пространства, и заменим компоненты тензора  $h_{jk}$  компонентами тензора деформаций  $\epsilon_{jk}$ ,  $h_{jk} = 2\epsilon_{jk}$  и введем обозначение  $\sigma_{jk} = \mu h_{jk}$ . Тогда калибровочные условия перепишутся в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{jk,k} &= 0, \\ \sigma_{jk} &= 2\mu\epsilon_{jk} - \mu\vartheta\eta_{jk}, \quad \vartheta = \epsilon_{kk}, \quad 2\epsilon_{jk} = u_{j,k} + u_{k,j}. \end{aligned} \right\} (1.36)$$

Как видим, переписанные калибровочные условия совпадают с уравнениями равновесия теории упругости и законом Гука (1.32), если в последнем положить  $\lambda = -\mu$  и параметр  $\nu$ , определяющий преобразование координаты времени, взять равным  $c_2 = c$ , где  $c$  — скорость света. Об этом совпадении в подразд. 1.4 уже говорилось. Получается, что калибровочные условия в теории гравитационного поля выбраны таким образом, что обращают уравнения гравитационного поля в приближении малых деформаций в уравнения этой среды как упругой. Случайно это так получилось или нет, об этом в литературе по гравитации не говорится, но действительность оказалась таковой.

Правда, следует отметить, что эта упругая среда пространства должна обладать специфическим свойством, что ее модули упругости подчиняются условию  $\lambda = -\mu$ , которое означает, как ранее было уже сказано, равенство скоростей продольных и поперечных волн. Такой среды в реальных земных условиях пока не обнаружено, но это не значит, что ее нет в природе: уравнения гравитационного поля реальны, поэтому реальной может быть и среда. Заметим, что уравнения гравитационного поля при нулевом тензоре энергии-импульса

$$R_{jk} - \frac{1}{2}g_{jk}R = 0, \\ R_{jk} = R_{ljlk}, \quad R = \eta_{jk}R_{jk}$$

и при условии существования перемещений удовлетворяются автоматически, потому что выполняются уравнения совместности деформаций  $R_{mnlk} = 0$ .

Имеет смысл привести здесь выражение для плотности упругой энергии деформации  $W$ , исходя из выражения этой энергии для упругого тела (1.32) и полагая в нем  $\lambda = -\mu$ :

$$W = \mu(-\theta^2 + 2\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\alpha\beta} + \epsilon_{ii}^2 + 2\theta\epsilon_{ii} + 2\epsilon_{\alpha t}\epsilon_{\alpha t}).$$

Здесь использованы результаты, полученные при выводе уравнений теории упругости, когда деформируется временная координата (см. подразд. 1.4). В разд. 3 будет показано, что введенные в теории гравитации калибровочные условия (1.3) должны быть несколько иные. Сразу приводить и утверждать новую форму калибровочных условий, не приводя необходимых для этого аргументов, не имеет смысла, потому что это будет смотреться как несерьезный произвол. Поэтому здесь пока рассмотрены классические уравнения гравитации, признанные в научном мире. В существующем виде они полностью совпадают с уравнениями упругого поля. Но далее будет показано, что в таком виде они не описывают некоторые реальные явления, нужны определенные уточнения калибровочных условий. Сразу отметим, что речь здесь не идет об уравнениях гравитации Эйнштейна — эти уравнения сохраняются неизменными, изменению подлежат только калибровочные условия (1.3).

В заключение данного подраздела желательнее высказать следующее. Спрашивается, были ли сделаны какие-либо противонаучные действия при записи уравнений гравитационного поля в форме уравнений упругого поля? Просматривая вышеизложенное, можно твердо сказать, что не было сделано ничего противозаконного в научном смысле. Все, что касается введения перемещений, деформаций, напряжений, можно пока считать чисто математическим упражнением, которое исследователь, в данном случае автор этой книги, имеет право проводить. Физический смысл этих введенных величин еще надо изучать.

Могут возникнуть возражения против обобщения на гравитационную среду положения об упругой энергии деформации. Формально против этого введения также трудно возразить, потому что в самой формуле ничего крамольного нет: она заимствована из теории упругости, где является вполне законной и обоснованной. Другой вопрос, является ли она действительно энергией деформации гравитационной среды? Пока можно говорить лишь о том, что предложенная форма записи уравнений гравитации допустима. Наполнение физическим содержанием этой формы далее еще будет проводиться. Сейчас можно сказать, что эта энергия может быть использована в качестве функции действия для вывода уравнений гравитации вариационным методом так, как это делается в теории упругости [5, 6].

### **1.7. Электродинамика — это упругость, в которой скорость продольных волн равна нулю**

Рассмотрим здесь уравнения электромагнитного поля также с точки зрения схожести с уравнениями упругого поля. Эти уравнения электродинамики [3, 4] рождались в научных баталиях и превратились в процессе своей жизни в замечательные создания науки. Результаты их применения дали человечеству высочайшие достижения в различных областях деятельности — электричество, радио, телевидение, связь, компьютерные технологии и так далее — и будут еще много давать в будущем. Прикасаясь к этим уравнениям, чувствуешь огромное уважение к ним. Однако удел ученого заниматься развитием науки, совершенствованием моделей, уравнений, хотя он набивает, как правило, научные шишки, идя по этому пути, которых и автору пришлось получить немало.

Здесь уравнения электромагнитного поля рассматриваются с точки зрения аналогии с уравнениями упругости. Аналогия электродинамики с теорией упругости историческая и здесь не придумана. Она была положена в основу при получении Максвеллом его знаменитых уравнений электромагнитного поля, хотя потом была учеными изъята из рассмотрения. Однако изложенное ниже будет свидетельствовать в пользу такого подхода, но уже несколько с иной точки зрения. Эту аналогию, конечно же, можно было бы не развивать, но получающиеся результаты ее уж очень неожиданные и интересные с научной, да и с практической точек зрения. Об этом говорилось во введении и здесь имеет смысл кое-что повторить. Например, один из результатов сходства уравнений упругости, электродинамики и гравитации состоит в том, что в линейном приближении электромагнитное и гравитационное поля описываются одними уравнениями. Уже это стоит того, чтобы аналогию электромагнитного и упругого полей проводить.

Поиском единой теории гравитационного и электромагнитного полей занимались многие ученые, об этом много говорится в научной литературе, но положительный результат получен не был. Аналогия с теорией упругого поля приводит к тому, что существующие или действующие в настоящее время уравнения гравитационного и электромагнитного полей являются в действительности одними, как далее будет показано. Внешне эти уравнения смотрятся разными и поэтому серьезного сравнения этих уравнений не проводилось.

Другой результат состоит в том, что скорость гравитационных волн оказалась очень и очень маленькой по сравнению со скоростью электромагнитных волн, т.е. со скоростью света, порядка сантиметра в секунду, и это следует из известных, а не придуманных уравнений и не изобретено автором. Ну кто-нибудь из ученых в настоящее время может всерьез воспринять этот результат? Но он обоснован, его можно и нужно обсуждать, критиковать, но, главное, его надо проверять экспериментально.

Все это говорится раньше времени по той причине, чтобы объяснить, зачем все это делается и зачем написана данная книга. Автор еще раз напоминает, что никакие новые уравнения гравитации и электродинамики не придумываются, не выводятся: известные, классические уравнения здесь считаются неприкосновенными.

Итак, выписываем уравнения электродинамики — уравнения Максвелла, следуя работам [3, 4]. Электромагнитное поле описывается тензором электромагнитного поля  $F_{jk}$ , компоненты которого удовлетворяют уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} F_{ik,k} &= 4\pi j_i, \\ F_{jk} &= A_{j,k} - A_{k,j}, \quad j_{k,t} = 0, \quad A_{k,k} = 0, \\ F_{0\alpha} &= -F_{\alpha 0} = E_k, \quad F_{12} = -F_{21} = -B_z, \quad F_{13} = -F_{31} = B_y, \\ F_{23} &= -F_{32} = -B_x, \quad F_{11} = F_{22} = F_{33} = F_{44} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.37)$$

где  $A = \{\phi, A_\alpha\}$  — потенциал электромагнитного поля;  $j_k$  — плотности электрического тока;  $E$  — вектор напряженности электрического поля;  $B$  — вектор напряженности магнитного поля. Уравнение электромагнитного поля при отсутствии электрического тока можно переписать в следующем виде [3]:

$$\text{rot}(\text{rot } A) = -c^{-2}(A_{,t} + \text{grad } \phi)_{,t}, \quad \text{rot}(\text{rot } A) = \nabla \times \nabla \times A.$$

Или в другом виде ( $\Delta$  — оператор Лапласа):

$$-\Delta A + \text{grad } \text{div } A = -c^{-2}(A_{,t} + \text{grad } \phi)_{,t}. \quad (1.38)$$

При исследовании распространения электромагнитных волн вводят дополнительное ограничение [3, 4] на вектор  $A$ :

$$\operatorname{div} A + c^{-2} \varphi_{,t} = 0 \quad (1.39)$$

или условие  $A_0 = \varphi = 0$ , где  $\varphi$  — скалярный потенциал электромагнитного поля. Вместе с этим ограничением уравнения электромагнитного поля принимают вид:

$$\nabla \times \nabla \times A = c^{-2} A_{,tt} \quad (1.40)$$

Ограничение  $A_0 = \varphi = 0$  в разд. 3 будет снято, когда уравнения электромагнитного поля будут записаны в единой форме с уравнениями гравитационного поля. А пока скажем, что это ограничение вводится и в работах по теории поля [4] при рассмотрении электромагнитных волн. Если его не ввести, то уравнения будут давать волновые решения, описываемые функцией  $\varphi$  и представляющие неэлектромагнитные волны, которые являются поперечными или сдвиговыми волнами: функция  $\varphi$  не описывает поперечные волны. Таким образом, в неявной форме данное условие уже ставилось как некое общее условие.

Система уравнений электромагнитного поля в форме (1.40) пока с точностью до коэффициентов совпадает с системой уравнений теории упругости (1.12):

$$(\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - 2\mu\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} = \rho \mathbf{u}_{,tt}$$

если в них положить  $\lambda + 2\mu = 0$ . Совпадение уравнений имеет место также при любых  $\lambda, \mu$ , если в уравнениях упругости поставить дополнительное условие  $\theta = \operatorname{div} \mathbf{u} = (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0$ , которое совпадает с условием  $\operatorname{div} A = 0$ , следующим из системы уравнений (1.40). Но при произвольных  $\lambda, \mu$  условие  $\theta = 0$  является искусственным, ниоткуда не следующим. Как можно обосновать принятие этого условия? Можно, конечно, придумать какие-то аргументы в пользу такого условия, но имеющийся гигантский опыт исследования уравнений упругого поля будет свидетельствовать о том, что в общем случае это условие всегда искусственное.

Если же параметры Ламэ удовлетворяют равенству  $\lambda + 2\mu = 0$ , то уравнение  $\theta = \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  является условием разрешимости уравнений упругости и является естественным условием. Аналогичное условие  $\operatorname{div} A = 0$  в электродинамике является, как уже было сказано, условием разрешимости уравнений электродинамики (1.40).

Таким образом, обнаруживается полное совпадение уравнений электродинамики и теории упругости, если в последней положить  $\lambda + 2\mu = 0$ . Это совпадение позволяет записать уравнения электромагнитного поля в форме уравнений теории упругого поля. Введем пока чисто формально обозначения:

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} = A_{\alpha,\beta} + A_{\beta,\alpha}, \quad \sigma_{\alpha\beta} = 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta}, \quad (1.41)$$

где  $\mu$  является формально некоторой константой, которую, предвидя конечный результат, сразу здесь обозначим как параметр упругости Ламе.

Уравнения электромагнитного поля в форме (1.41), если от них проделать обратный путь к параметрам  $\sigma_{\alpha\beta}$  в сравнении с путем, который проходится в теории упругости при получении уравнений равновесия в перемещениях  $u_\alpha$  из уравнений равновесия в напряжениях  $\sigma_{\alpha\beta}$ , можно переписать в следующем виде:

$$\mu^{-1}\sigma_{\alpha\beta,\beta} = c^{-2}A_{\alpha,u}. \quad (1.42)$$

Эта система уравнений, если ее записать в компонентах  $A_\alpha$ , используя выражения (1.41), совпадает с вышевыписанными уравнениями (1.40). Для скорости света можно предложить формулу  $c^2 = \mu\rho^{-1}$ , где  $\rho$ , скажем, забегая вперед, является плотностью материала среды электромагнитного поля, а  $\mu$  — модуль упругости Ламе этой среды. Учитывая сходство уравнений упругости и электродинамики, можно сделать вывод, что вектор  $A$  является в среде электромагнитного поля, где распространяются и действуют электромагнитные волны, вектором перемещений точек этой среды:

$$A_\alpha = u_\alpha. \quad (1.43)$$

Тогда тензор  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  будет по аналогии с упругой средой тензором деформаций, тензор  $\sigma_{\alpha\beta}$  будет тензором напряжений, уравнения (1.41) — динамическими уравнениями равновесия среды электромагнитного поля

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} = \rho u_{\alpha,tt},$$

аналогичными уравнениям равновесия упругости (1.16). Соотношения, связывающие напряжения и деформации, представляют закон Гука для среды электромагнитного пространства:

$$\sigma_{\alpha\beta} = 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta}, \quad 2\varepsilon_{\alpha\beta} = u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}. \quad (1.44)$$

Тензор напряжений при наличии вектора тока  $j_k$ , согласно вышеизложенному, удовлетворяет уравнениям равновесия:

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} = \rho u_{\alpha,tt} + 4\pi j_\alpha. \quad (1.45)$$

Получилась полная аналогия в линейном приближении уравнений упругости и электродинамики. Заметим, что тензор напряжений  $\sigma_{jk}$  не является тензором  $F_{jk}$ , хотя в уравнения они входят одинаково. Тензор  $\sigma_{kj}$  является симметричным тензором, а тензор  $F_{jk}$  — асимметричным и физическое содержание их разное: первый является, как следует из

аналогии, тензором напряжений, второй — тензором поворота элементарного объема среды (последнее также следует из аналогии с упругим полем). Получилось, что уравнения электродинамики записываются в форме, когда искомым может быть симметричный тензор  $\sigma_{jk}$ , вместо классической формы, когда искомым является асимметричный тензор  $F_{jk}$ . Математически это другая и, по мнению автора, интересная форма записи уравнений электромагнитного поля.

Таким образом, оказалось, что уравнение электродинамики (1.37) так же, как и уравнения гравитации, можно записать в форме уравнений теории упругости (1.44), используя параметры тензор напряжений, тензор деформаций, перемещения, а также применив обобщенный закон Гука (1.44). Но если среда подчиняется уравнениям теории упругости, то, по определению, ее можно считать упругой средой. В конце концов, можно сказать, что не в названии дело. К такой среде, описываемой уравнениями упругости, применимы все методы и приемы теории упругости, и вот это является главным.

Можно ли считать среду электромагнитного пространства упругой средой, является вопросом, на который прямой ответ вряд ли удастся найти. Да и что такое за упругая среда, модули упругости которой подчиняются условию  $\lambda = -2\mu$ ? Это условие означает, что в данной среде скорость продольных волн равна нулю, т.е. продольные волны отсутствуют. Еще это условие означает, что модуль объемного сжатия  $K$  согласно формулам (1.10) для этой среды отрицательный. Последнее говорит о том, что при всестороннем сжатии среда расширяется. С точки зрения теории упругости такой среды в земных условиях пока не наблюдается. Однако заявить, что такой среды не может быть, тоже не имеет смысла.

В некотором отношении рассматриваемая среда является противоположностью жидкости. В жидкой упругой среде нулю равна скорость поперечных волн и не равна нулю скорость продольных волн. С точки зрения построения решений уравнений упругости для жидкой среды возникают серьезные вопросы, но, однако, среда существует, описывается уравнениями идеальной жидкости, которые в приближении малых деформаций являются акустическими уравнениями, и каких-то научных сомнений в существовании такой среды нет.

Можно также по аналогии с упругостью записать для среды электромагнитного пространства функцию плотности упругой энергии деформации  $W$ :

$$2W = 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} + \rho A_{\alpha,t} A_{\alpha,t}.$$

Чему равны константы  $\mu$ ,  $\rho$  для среды, пусть остается пока под вопросом, ответ на который будет дан в подразд. 3.7. Это выражение для

энергии отличается от классического выражения для энергии электромагнитного поля [3], определяемого векторными потенциалами  $E$  и  $B$ :  $W = (E^2 + B^2)(8\pi)^{-1}$ . В теории упругости определение энергии обосновано экспериментально и теоретически и его можно использовать наряду с принятым в теории электродинамики определением энергии через потенциалы  $E$ ,  $B$ . Эти две энергии — энергия деформации и классическая энергия электромагнитного поля — не равны друг другу.

Здесь вдаваться в выяснение расхождения и в установление правильности каждой из них вдаваться не будем, потому что раньше предлагаемая здесь упругая модель электромагнитного поля не рассматривалась. Выражение для энергии через потенциалы  $E$ ,  $B$  получено больше из математических, а не из физических представлений в отличие от выражения для энергии упругой деформации, которое получено из физических или механических представлений.

Возвращаясь снова к вопросу о возможности моделирования среды электромагнитного пространства упругой средой, можно сказать следующее. Точного и строгого определения упругой среды не существует. Например, существует следующее определение [11]: упругой средой называется такая среда, для которой тензор напряжений является функцией тензора деформаций. Если принять такое определение за основу, то среда электромагнитного пространства является упругой.

Но можно слишком не отстаивать стремление определить среду электромагнитного поля как упругую. Главными здесь, как выше было сказано, являются уравнения, которые описывают поведение среды и при помощи которых можно решать прикладные задачи. Если уравнения электромагнитного поля совпадают с уравнениями упругого поля, то для исследования проблем электродинамики применимы методы, развитые в теории упругости, применимы положения ее, возможны обобщения на электродинамику достижений, сделанных в теории упругости, и т.д., а это для практики и является главным. Дискуссия о том, является ли среда электромагнитного поля упругой, может продолжаться.

Если возникает задача определения перемещений  $u_\alpha = A_\alpha$  при известных деформациях, то как и в теории упругости деформации должны удовлетворять уравнениям совместности, которые имеют в данном случае тот же вид, что и в классической теории упругости (1.14):

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0.$$

Уравнения электромагнитного поля записаны в форме уравнений упругого поля. Если их записать в компонентах  $A_\alpha$ , то они примут известный вид (1.40). Новая форма записи полностью эквивалентна классической форме. В разд. 3 уравнения электромагнитного поля будут

обобщены на случай четырехмерного пространства. Условие же равенства нулю скорости продольных волн следует понимать не как абсолютное, а как условие малости этой скорости по сравнению со скоростью света.

Отметим здесь следующее. Запись уравнений электродинамики в форме уравнений упругости здесь делается не с целью переделки сложившихся методов исследования в этой области науки, что было бы очень неправильно. Электродинамика — сложившаяся авторитетная наука со своими целями и задачами и трогать эту науку — практически безнравственно. Цель здесь другая и состоит в том, чтобы по возможности ставить и решать новые задачи, которые не возникают в рамках классических уравнений электродинамики. В разд. 3 о таких задачах еще будет говориться.

### 1.8. О единых уравнениях гравитации и электродинамики

Аналогия уравнений упругого, гравитационного и электромагнитного полей приводит к тому, что среды гравитационного и электромагнитного полей моделируются упругими средами, но с "экзотическими" модулями упругости. Получается, что данные среды, которых две — гравитационная и электромагнитная, помещены в одно пространство и находятся одна в другой. Эти среды обладают следующими свойствами. По ним могут распространяться поперечные волны со скоростью света. Одни, как считается в гравитации, поперечные волны — гравитационные, другие, поперечные волны, как считается в электродинамике, — электромагнитные.

В гравитационном пространстве, если не вводить дополнительные условия, существуют продольные волны, распространяющиеся также со скоростью света, эти волны описаны в подразд. 1.4, посвященном четырехмерной теории упругости. Как было отмечено в подразд. 1.5, уравнения гравитационного поля совпадают с уравнениями теории упругости, если в последних положить равенство, но с обратным знаком. модулей упругости Ламэ:  $\lambda = -\mu$ .

В литературе по гравитации при рассмотрении гравитационных волн, чтобы избежать существования продольных волн, вводят еще одно, так называемое *TT*-калибровочное, условие:

$$\theta = \epsilon_{\alpha\alpha} = 0.$$

Этим самым полагается равной нулю объемная деформация расширения-сжатия среды. Это условие с точки зрения специалиста по теории упругости выглядит непонятным, потому что в упругих телах продольные волны расширения-сжатия вещества являются широко распространенными и хорошо экспериментально наблюдаемыми волнами.

Но даже если положить  $\theta = 0$ , остаются еще волны, описываемые компонентой "перемещения" времени  $\tau$ , которые не укладываются в разряд поперечных волн. Да и спрашивается, почему, на каком основании надо уничтожать продольные волны? Почему эти волны не должны существовать?

В свете проводимой здесь аналогии обнаруживается следующий любопытный факт. Если положить  $\theta = 0$ , то уравнения гравитационного поля совпадают с уравнениями электромагнитного поля (1.40), (1.44). А раз совпадают уравнения, то совпадают и решения. Какой же вывод следует из этого? Эти уравнения описывают одно поле — электромагнитное. Гравитационное поле остается вне рассмотрения. Данный анализ позволяет подойти к следующему заключению. Гравитационное и электромагнитное поля должны описываться одними уравнениями. Поперечные волны, описываемые этими уравнениями, являются электромагнитными, продольные — гравитационными. Конечно, надо постоянно помнить, что речь идет только о линейном приближении.

Этот анализ позволяет также сделать вывод о том, что среда электромагнитного поля и среда гравитационного поля являются не разными, а одной и той же средой. Трудно представить, что могут существовать две упругие среды, встроенные одна в другую, и такие, что могут пропускать одинаковые поперечные волны, распространяющиеся со скоростью света, но в одной из них могут распространяться со скоростью света продольные волны, а в другой продольные волны отсутствуют. Более правдоподобно полагать, что упругая среда одна. Но какая?

Из двух полученных упругих сред надо выбрать одну. Одна из двух сред — это среда электромагнитного поля, другая — гравитационного. Электромагнитные поля вошли очень серьезно в человеческую жизнь. Они наблюдаются повсюду: в электростатике и электродинамике, в радио и телевидении, в компьютерном деле и в обычной жизни — без электрического света жизни нет. Гравитационные поля также основа нашей жизни. Но твердое наблюдение гравитационных волн остается до настоящего времени мечтой исследователей.

Сказанное свидетельствует в пользу упругой среды электромагнитного поля: если среда гравитационного и электромагнитного полей одна, то она является хорошо наблюдаемой средой электромагнитного поля. Конечно, это не доказательство и твердого доказательства вряд ли можно получить, но это жизнь и в то же время это определенное обоснование, в пользу которого далее постоянно будут приводиться и другие аргументы.

При анализе уравнений электромагнитного поля было получено, что упругая среда, моделирующая среду этого поля, должна обладать мо-

дулями упругости Ламэ, удовлетворяющими условию  $\lambda = -2\mu$ . Это, как было сказано, означает, что скорость продольных волн в этой среде равна нулю. Поперечные волны, описываемые уравнениями этой упругой среды, являются электромагнитными волнами. Встает вопрос, а есть ли гравитационные волны? Ответ должен быть, конечно, положительным. Тогда остается признать, что если гравитационные волны существуют, то они являются продольными волнами, описываемыми гравитационным потенциалом, которым в рассматриваемом варианте гравитационных уравнений является компонента временного перемещения  $\tau$ . Это подтверждается и тем, что именно эта компонента описывает и определяет гравитационные явления и взаимодействия масс в пространстве. Об этом в разд. 3 будет еще достаточно много говориться.

Существование гравитационных волн считается здесь несомненным. Поэтому будем считать, что модули упругости среды электромагнитного поля не абсолютно точно подчиняются выше указанному условию  $\lambda + 2\mu = 0$ , что означает отсутствие гравитационных волн, а что это условие должно быть следующим:  $\lambda + 2\mu = \epsilon$ , где  $\epsilon$  — малая величина. Малость этой величины позволяет в первом приближении ее не учитывать, но при более детальном рассмотрении явлений гравитации и электродинамики нужно ее учитывать. В разд. 3 будет дана оценка этой величины.

Таким образом, получается, что гравитационные и электромагнитные поля должны описываться едиными уравнениями упругого поля, полученными в подразд. 1.4, при условии, что модули упругости Ламэ подчиняются вышеуказанному условию  $\lambda + 2\mu = \epsilon$ , где  $\epsilon$ , как было сказано, малая величина. Переписывать эти уравнения здесь не будем, они подробно расписаны в подразд. 3.7.

Малость величины  $\lambda + 2\mu$  означает, что скорость продольных волн мала по сравнению со скоростью поперечных, т.е. электромагнитных, волн. Согласно вышесказанному, гравитационные волны описываются временной компонентой перемещений  $\tau$  и квадрат скорости этих волн  $c_1^2 = (\lambda + 2\mu)\rho^{-1} = \epsilon\rho^{-1}$ . Квадрат скорости поперечных волн  $c_2^2$  равен квадрату скорости света  $c^2$ :  $c_2^2 = \mu\rho^{-1} = c^2$ .

Кроме гравитационных волн существуют хорошо известные в теории упругости продольные, или объемные, волны, которые описываются функцией  $\theta$ -объемной деформацией среды. Назвать эти волны в гравитационном пространстве гравитационными пока вряд ли стоит. Далее будет видно, что функция  $\theta$  прямо не описывает притяжение масс, как это делает функция  $\tau$ . Поэтому будем пока называть эти волны объемными, они распространяются также со скоростью  $c_1$ , как и гравитационные волны.

На этом временно остановимся анализировать проблему единства уравнений гравитационного и электромагнитного полей. Для более завершеного утверждения этого единства нужны дополнительные аргументы. В разд. 3 этот вопрос будет обсуждаться более серьезно в свете дополнительных аргументов, которые там будут представлены.

### 1.9. Четырехмерные уравнения акустического поля

В этом подразделе приведем пример еще одного применения теории Эйнштейна также в достаточно прикладной области науки — в акустике. Линейные уравнения акустического поля можно получить как частный случай уравнений теории упругости, если в последних положить коэффициент Пуассона равным половине:  $\nu = 1/2$ . Отметим здесь, что классический вывод акустического уравнения в линейном приближении из уравнения неразрывности является спорным. Действительно, как известно из теории упругости, в линейном приближении уравнение неразрывности превращается в тождественный нуль и этим уравнением там не пользуются. Поэтому из нуля акустическое уравнение не стоит получать.

Значение коэффициента  $\nu = 1/2$  занимает в теории упругости особое положение. При этом значении материал тела можно считать несжимаемым, модуль объемного сжатия  $K$  обращается в бесконечность (1.10). Модуль сдвига сохраняет конечное значение, и в таком материале существуют поперечные волны, а скорость продольных волн равна бесконечности. Имеется и другая интерпретация значения коэффициента  $\nu = 1/2$ . Модуль объемного сжатия остается конечным по величине, модули  $E, G$  обращаются в нуль. Все компоненты сдвиговых напряжений обращаются в нуль ( $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ ), нормальные компоненты тензора напряжений равны ( $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \lambda\theta$ ). При этом сдвиговые компоненты деформаций не обязаны быть нулями.

Такая связь между напряжениями и деформациями имеет место в идеальной жидкости при условии малых деформаций. Когда значение коэффициента Пуассона равно половине, скорость поперечных волн равна нулю, а скорость продольных или акустических волн  $c_1 = (\lambda/\rho)^{1/2}$ . Уравнение акустики для жидкости получается из динамических уравнений упругости, которые в этом случае принимают вид:

$$\lambda\theta_{,\alpha} = \rho u_{\alpha\alpha t}.$$

Или, используя потенциал  $\varphi$ , когда  $u_\alpha = \varphi_{,\alpha}$ , получим

$$\Delta\varphi = c_1^{-2}\varphi_{,tt}.$$

Такому же уравнению удовлетворяет давление  $p = \sigma_{\alpha\alpha}$ . Так получается акустическое уравнение из уравнений классической теории упругости. Применим этот метод для получения уравнений акустики из четырехмерных уравнений упругости. Нетрудно видеть, что уравнения равновесия (1.27) при  $\mu = 0$ ,  $\nu = 1/2$  эквивалентны следующим двум уравнениям:

$$\Delta\theta = c_1^{-2}\theta_{, \alpha\alpha}, \quad \Delta\tau = c_1^{-2}\tau_{, \alpha\alpha}, \quad c_1^2 = \lambda/\rho.$$

Если воспользоваться функцией давления  $p = \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \lambda(\theta + \varepsilon_{\alpha\alpha})$ , то уравнения акустики примут вид:

$$\Delta p = c_1^{-2}p_{, \alpha\alpha}, \quad \Delta\tau = c_1^{-2}\tau_{, \alpha\alpha}.$$

В отличие от классического случая здесь получается, что акустическое поле описывается двумя уравнениями вместо одного. Вопрос о правильности представленных здесь уравнений эквивалентен вопросу о правильности четырехмерных уравнений теории упругости, который в данной работе подробно рассматривается. Учитывая, что правильность четырехмерных уравнений упругости в теоретическом смысле обоснована, можно считать, что четырехмерные уравнения акустики являются правильными. Физический смысл компоненты  $\varepsilon_{\alpha\alpha}$  четырехмерного тензора деформаций, как и в теории упругости, заключается в том, что эта компонента описывает дополнительную к объемной динамическую деформацию расширения-сжатия вещества. Вопрос о граничных условиях, которые надо ставить при интегрировании полученных уравнений, лучше рассматривать при решении конкретных задач.

### 2.1. Право на жизнь четырехмерной упругости определяет эксперимент

Установление совпадения уравнений упругости, гравитации и электродинамики приводит к неожиданным и интересным следствиям. Одно из таких следствий состоит в том, что динамические задачи теории упругости являются обширной, прикладной реализацией теории А. Эйнштейна. В настоящее время эта замечательная теория работает в гравитации, электродинамике, астрономии, астрофизике и т.д. Здесь предлагается добавить еще значительно более прикладное применение общей теории относительности в науке о прочности материалов, в сейсмологии, в акустике, в гидродинамике и в других областях наук. Может быть, такое свойство теории гравитации несколько принижает ее величие, опускает ее с небес на землю. Но автор данной работы считает наоборот: в предлагаемом, немного измененном применительно к теории упругости виде теории Эйнштейна будет дополнительно служить людям.

Четырехмерная модель упругого тела, в свою очередь, неожиданно приводит к обобщению ее на гравитационное пространство, на пространство электромагнитного поля, что позволяет, как будет показано в разд. 3, получить новые результаты в этих областях наук. Но чтобы поверить в правильность этих результатов, надо знать, что предлагаемая интерпретация уравнений гравитации, электродинамики как уравнений упругого поля правильная. Правильность же эта основана в том числе на правильности четырехмерной теории упругости. Теоретическую правильность, как уже было сказано, вряд ли стоит серьезно подвергать сомнению. Метод получения уравнений чрезвычайно простой и легко проверяется. Совпадение четырехмерных уравнений теории упругости с уравнениями гравитации в частном случае значений модулей упругости Ламэ является подтверждением математической и физической правильности полученных уравнений, поскольку и математики, и физики почти столетие кропотливо проверяли и продолжают проверять уравнения общей теории относительности. И все эти теоретические проверки автоматически переносятся на проверку правильности предлагаемых четырехмерных уравнений теории упругости. Сомне-

ваться в теоретической правильности четырехмерной упругости автоматически означает сомневаться в правильности общей теории относительности. С другой стороны, сомнения — это нормальная ситуация, но отвергать уравнения только из-за сомнений не всегда правильно. Надо, в свою очередь, доказывать правильность сомнений.

Содержание этого раздела посвящено экспериментальной проверке четырехмерных уравнений упругости. Такую работу надо провести потому, что даже если математическая правильность уравнений обеспечена, может так случиться, что они не имеют реального смысла. Может оказаться так, что деформация временной координаты учтена и это сделано правильно, но реальной, физической деформации ее в действительности нет, и тогда уравнения не нужны.

Обоснование экспериментальной, реальной значимости уравнений проведено здесь методом сравнения теории с экспериментом на многих примерах. К сожалению, автор не смог сам провести экспериментальные исследования практической значимости теории по причине их дороговизны в сложившихся условиях его работы, хотя постоянно живет надежда на реализацию возможности проведения такой работы. Одна из целей написания данной книги и состоит в том, что, возможно, после ее опубликования удастся найти источник финансирования экспериментальных исследований или привлечь к этой работе заинтересовавшихся ученых. Поэтому для проверки были использованы экспериментальные исследования других авторов, результаты которых опубликованы в печати. Таких работ набралось достаточно много, недостатка в них не было.

Автор неоднократно докладывал некоторые из излагаемых здесь результатах в МГУ им. М. Ломоносова, в Институте проблем механики РАН, на Всероссийском съезде механиков. Кто-то верил в правильность уравнений, многие не верили. Всегда у автора вставал вопрос: сколько надо провести сравнений с экспериментальными исследованиями, чтобы убедить коллег в правильности полученных уравнений? Теория упругости является наукой более чем с двухсотлетним стажем. Возраст большой и вдруг сказать, что она неверна, хотя бы только в части динамических уравнений, это выглядит кощунственно. Ну а что делать, если оказывается, что это так и есть?

В данном разделе указанных сравнений, как уже сказано, представлено достаточно много. Их можно продолжать приводить, но только этим заниматься нельзя, надо проводить и исследования задач на основе полученных уравнений. Такие исследования проводятся и о них в данном разделе также говорится. Указаны конкретные динамические задачи теории упругости, которые можно хорошо решить в рамках новых уравнений, лучше, чем по классической теории. Но надо все-

таки иметь в виду, что абсолютно верных теоретических моделей не бывает и не будет: все модели имеют ограничения и предлагаемая здесь не является абсолютно верной и также не всегда будет точно совпадать с экспериментом. Спрашивается, нужна ли эта линейная модель упругого тела взамен классической? Что она может дать? Приведенные в этом разделе примеры как раз и свидетельствуют о том, что данная новая модель нужна и может дать достаточно много и в теории, и в практике.

## 2.2. Поверхностные волны в полупространстве — это поперечные волны

Для проверки четырехмерной теории упругости методом сравнения теоретических результатов с экспериментальными нужны теоретические в рамках четырехмерных уравнений решения конкретных задач, которые исследовались или могут исследоваться экспериментально. Интересной и практически важной задачей динамической упругости является задача о поверхностных волнах в полупространстве. Поэтому в качестве первого примера рассмотрим задачу о плоских ( $u_3 = \epsilon_{33} = 0$ ) поверхностных волнах в полупространстве  $x_2 > 0$ . В этой задаче нужно найти в полупространстве две функции перемещений  $u_1$ ,  $u_2$  и временную компоненту  $\tau$ .

В данном случае начальные условия не ставятся, а в качестве граничных условий принимается отсутствие на свободной от внешних воздействий плоской границе  $x_2 = 0$  напряжений и отсутствие потока энергии [4] через эту границу. Компоненты тензора напряжений  $\sigma_{\alpha i}$  в соответствии с определением тензора энергии-импульса [4] являются компонентами плотности импульса и определяют плотность потока энергии. Учитывая сказанное, граничные условия на границе  $x_2 = 0$  можно записать в виде

$$\sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{2\tau} = 0. \quad (2.1)$$

Как и в случае аналогичной задачи классической теории упругости, решение четырехмерных динамических уравнений в перемещениях (1.27) удобнее искать в форме скалярного  $\varphi$  и векторного  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$  потенциалов, связанных с вектором перемещений  $u = (u_1, u_2, u_3)$  формулой [8]

$$u = \text{grad } \varphi + \text{rot } \psi. \quad (2.2)$$

В результате система четырехмерных уравнений (1.27) преобразовывается в систему волновых уравнений

$$\Delta \varphi - c_1^{-2} \varphi_{, \alpha\alpha} = 0, \quad \Delta \psi - c_2^{-2} \psi_{, \alpha\alpha} = 0, \quad \Delta \tau - c_1^{-2} \tau_{, \alpha\alpha} = 0. \quad (2.3)$$

Решение этих уравнений ищем в виде:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= A \exp[-\alpha x_2 + iq(x_1 - c_3 t)], \quad a > 0, \\ \psi_3 &= B \exp[-\beta x_2 + iq(x_1 - c_3 t)], \quad \psi_1 = \psi_2 = 0, \quad b > 0, \\ \tau &= D \exp[-\gamma x_2 + iq(x_1 - c_3 t)], \quad \gamma > 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Постоянные  $A, B, D, \alpha, \beta, \gamma, q, c_3$  должны быть подобраны так, чтобы выражения (2.4) удовлетворяли как уравнениям (2.3), так и граничным условиям (2.1). В рассматриваемой задаче, как было сказано, искомые функции зависят только от двух координат  $x_1, x_2$ , а компонента перемещений  $u_3 = 0$ . Подстановка функций (2.4) в уравнения (2.3) приводит к соотношениям:

$$\alpha = \gamma = q(1 - \chi k)^{1/2}, \quad \beta = q(1 - k)^{1/2}, \quad k = c_3^2 / c_2^2, \quad \chi = c_2^2 / c_1^2. \quad (2.5)$$

Пользуясь формулами (2.2) связи перемещений с потенциалами, соотношениями деформации-перемещения (1.20) и законом Гука (1.28), удовлетворяем граничные условия (2.1). В результате приходим к однородной системе трех алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (2 - k)X_1 + 2i(1 - k)^{1/2}X_2 + iX_3 &= 0, \\ 2i(1 - \chi k)^{1/2}X_1 - (2 - k)X_2 &= 0, \\ ik(1 - \chi k)^{1/2}X_1 - kX_2 + (1 - \chi k)^{1/2}X_3 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

где  $X_1 = q\chi A, X_2 = q\chi B, X_3 = c_3 D$ .

Приравнивая нулю определитель этой системы, получим уравнение относительно параметра  $k$ , определяющего скорость  $c_3$  поверхностной волны:

$$(2 - k)^2 - 4(1 - \chi k)^{1/2}(1 - k)^{1/2} = k^2. \quad (2.7)$$

Получившееся уравнение отличается не нулевой правой частью от классического уравнения для скорости поверхностных волн. А классическое уравнение для скорости  $c_3$  волны Рэлея получается таким же образом, что и полученное уравнение (2.7), но только из первых двух уравнений системы (2.6), в которых надо положить  $X_3 = 0$ . Оно имеет вид [8]:

$$(2 - k)^2 - 4(1 - \chi k)^{1/2}(1 - k)^{1/2} = 0. \quad (2.8)$$

Построенное же здесь уравнение (2.7) преобразуется к виду

$$4(1 - k)^{1/2}[(1 - k)^{1/2} - (1 - \chi k)^{1/2}] = 0. \quad (2.9)$$

В результате уравнение для скорости рассматриваемых волн принимает вид

$$(1 - k)^{1/2} = 0. \quad (2.10)$$

Корнями уравнения (2.9) являются значения  $k = 1$  и  $k = 0$ . Первый корень, который получается из уравнения (2.10), приводит к значению  $c_3 = c_2$ , и это означает, что скорость поверхностных волн равна скорости поперечных волн и по величине несколько больше классической скорости поверхностных волн. Скорость поверхностной волны в соответствии с уравнением (2.8) расположена в пределах 0,874...0,955 от скорости поперечной волны  $c_2$  в зависимости от характеристик материала среды.

Для компонент вектора перемещений  $u_1$ ,  $u_2$  и  $\tau$  получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} u_1 &= iqA \exp[-\alpha_2 x_2 + iq(x_1 c_2 t)], \quad \alpha_2 = q(1 - \chi)^{1/2}, \\ u_2 &= q(1 - \chi)^{1/2} A [2 - \exp(-\alpha_2 x_2)] \exp[iq(x_1 - c_2 t)], \\ \tau &= -iq\chi c_2^{-1} A \exp[-\alpha_2 x_2 + iq(x_1 - c_2 t)]. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что в рамках предложенной модели не существует чисто поверхностной волны. В полупространстве вдоль его границы со скоростью сдвиговой волны бежит составная волна, включающая в себя как затухающую, так и незатухающую по глубине компоненты. Начиная с некоторой глубины она переходит в плоскую поперечную волну с единственной отличной от нуля компонентой перемещения  $u_2$ . Для специалистов по волновым процессам в твердых телах такое утверждение представляется крамольным и нужны очень убедительные экспериментальные факты, чтобы поколебать их представления.

Отметим, что значение скорости построенной поперечной волны в полупространстве с фронтом, перпендикулярным к границе полупространства, удовлетворяет исходному уравнению (2.9) как корень в степени  $1/2$ , т.е. уравнению  $(1 - k)^{1/2} = 0$ . Это достаточно серьезный результат. Классическое значение скорости поверхностной волны удовлетворяет уравнению (2.8) как корень в первой степени.

Это очень существенно отражается на результатах решения задач о динамических сосредоточенных воздействиях на полупространство, которые обычно решаются методом преобразования или отображения координат по Фурье и Лапласу [5, 9]. При построении обратных отображений в этом случае приходится иметь дело с интегралами, имеющими в подынтегральных функциях сомножитель в знаменателе, совпадающий с уравнением для рассматриваемой волны, т.е. приходится иметь дело с интегралами, содержащими особенности в знаменателе в подынтегральных функциях. В случае классической теории эта особенность порядка единицы, интегралы получаются расходящимися и для получения конечных результатов необходимо пользоваться методами теории обобщенных функций. Такие методы содержат скрытые трудности, преодоление которых часто приводит к ошибкам в конечных результатах.

При решении подобных задач в четырехмерной постановке методами интегральных отображений под интегралами получают особенности порядка  $1/2$ , и интегралы являются берущимися. В этом случае нет необходимости применять теорию обобщенных функций и задачу можно решать обычным способом, используя компьютеры для численного интегрирования при построении оригиналов — искомым решений, чего нельзя делать при решении по классической теории. Данное свойство предлагаемой теории является привлекательным для решения конкретных задач.

### 2.3. Плоское напряженное состояние в полосах-пластинах

Одним из интересных и эффективных методов экспериментального исследования напряженных состояний в упругих телах является метод фотоупругости. Этим методом исследовано много серьезных задач теории упругости, и некоторые из них неплохо подходят для проведения сравнения теоретических решений с результатами таких экспериментальных исследований. В работах с использованием метода фотоупругости экспериментальные исследования во многих случаях ведутся на моделях, представляющих собой прозрачные полосы из фоточувствительного материала, в которых создается обобщенное плоское напряженное состояние, которое и измеряется методами фотоупругости.

Этот метод описан во многих книгах и ознакомиться с ним можно, прочитав, например, монографии [12, 13]. Для достижения же поставленной здесь цели проводить описание метода не имеет смысла, а достаточно привести только результаты экспериментальных исследований с соответствующими комментариями и провести с ними сравнения результатов теоретических исследований, что и будет сделано.

Автору нравится метод фотоупругости по следующим причинам. Результаты исследования этим методом часто приводятся в виде фотографий интерференционных картин с интерференционными линиями, представляющими собой линии постоянных разностей главных напряжений в модели, т.е. с линиями, характеризующими общее напряженное состояние во всей модели. Такие фотографии практически являются фотодокументами проведенных исследовательских работ. Надежность измерения практически стопроцентная, потому что измерения проводятся фактически в бесконечном числе точек, т.е. во всех точках модели. Другими методами таких многоточечных измерений достичь не удастся. Представленные в работах фотографии позволяют читателю самому участвовать в расшифровке результатов измерения и контролировать представленные экспериментальные результаты, само-

стоятельно проводить необходимое дополнительное к изложенному в такой работе исследование напряженного состояния изучаемой задачи.

При ознакомлении с результатами экспериментальных исследований, полученных, например, при помощи или тензометрии, или акустических методов, или рентгеновского, или какого либо другого метода, при работе с которым результаты получаются лично исследователем, такого состояния не бывает. Представление таких документов измерительной работы, которые бы снимали сомнение читателя в возможной ошибке при получении и обработке экспериментальных сигналов, снимали бы всегда возможное недоверие к результатам исследований, полученным названными методами, практически невозможно.

Это совсем не означает, что такие работы проводить не стоит. Конечно, стоит и нужно. Но автор столкнулся со следующим положением во время докладов о результатах, излагаемых в данной книге. Сообщая о конкретных данных по измерению скорости поверхностных волн [15] в плавленом кварце, когда эта скорость совпала с измеренной в работе [16] скоростью поперечных волн, автор выслушивал мнение коллег, что случайные ошибки при экспериментальных измерениях возможны и доверять экспериментальным исследованиям не всегда можно. После многократных обсуждений подобного рода необходимость заставила представлять результаты экспериментов в таком виде, чтобы они не вызывали сомнения.

В свете сказанного здесь использованы и приведены, как правило, такие экспериментальные исследования, которые с очень высокой степенью надежности подтверждают получаемый вывод из сравнения с ними результатов теоретических исследований. Кроме того, ставится и выполняется цель, чтобы читатель мог сам проверить правильность сделанного вывода.

Для получения теоретических результатов, которые можно было бы сравнивать с экспериментальными исследованиями в полосах-пластинах, проведенными методами фотоупругости, нужны соответствующие решения для полос, а для этого нужны уравнения обобщенного плоского напряженного состояния. Получим данные уравнения в четырехмерной постановке.

Пусть срединная поверхность плоской полосы толщиной  $2h$  совпадает с плоскостью  $x_3 = 0$ , а ее грани  $x_3 = \pm h$  свободны от напряжений, на них  $\sigma_{33} = \sigma_{32} = \sigma_{31} = 0$ . На этих гранях отсутствуют отток и приток энергии, т.е.  $\sigma_{3i} = 0$ . Толщина полосы считается малой, и поэтому все указанные напряжения можно считать малыми внутри области по сравнению с другими напряжениями и ими можно пренебречь, как это делается в классической теории упругости при построении аналогичных уравнений [5]. Уравнения равновесия (1.26) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} - c_1^{-1} \sigma_{1t,t} = 0, \quad \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} - c_1^{-1} \sigma_{2t,t} = 0, \\ \sigma_{1t,1} + \sigma_{2t,2} - c_1^{-1} \sigma_{tt} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Закон Гука (1.28) после соответствующих преобразований примет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = 2\mu\lambda(\lambda + 2\mu)^{-1}\theta' + 2\mu(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{tt}), \quad \sigma_{22} = 2\mu\lambda(\lambda + 2\mu)^{-1}\theta' + 2\mu(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{tt}), \\ \sigma_{tt} = 2\mu\theta', \quad \theta' = u_{1,1} + u_{2,2}, \quad \varepsilon_{33} = -\lambda(\lambda + 2\mu)^{-1}\theta' - \varepsilon_{tt}. \end{aligned}$$

Остальные компоненты напряжений  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{1t}$ ,  $\sigma_{2t}$  определяются прежними формулами (1.28). В перемещениях уравнения равновесия имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \Delta u_1 + (1 + \nu)(1 - \nu)^{-1}\theta'_{,1} - (\lambda + 2\mu)c_1^{-2}u_{1,tt} + \lambda_{t,1t} = 0, \\ \Delta u_2 + (1 + \nu)(1 - \nu)^{-1}\theta'_{,2} - (\lambda + 2\mu)c_1^{-2}u_{2,tt} + \lambda_{t,2t} = 0, \\ \Delta t = \lambda(\lambda + 2\mu)^{-1}c_1^{-2}\theta'_{,t}, \quad 2\nu = \lambda(\lambda + \mu)^{-1}, \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

где  $\Delta$  — двумерный оператор Лапласа;  $\nu$  — коэффициент Пуассона. При  $\tau = 0$  выписанные уравнения переходят в классические [5]. В перемещениях полученные четырехмерные уравнения для пространственных компонент перемещений не выделились в отдельные от временной компоненты уравнения, как это имеет место в четырехмерных уравнениях для пространства. Полученные уравнения можно преобразовать в следующие:

$$\Delta\theta' - c_1^{-2}\theta'_{,tt} = 0, \quad \Delta\omega - c_2^{-2}\omega_{,tt}, \quad \Delta\tau = \lambda(\lambda + 2\mu)^{-1}c_1^{-2}\theta'_{,t}, \quad \omega = u_{1,2} - u_{2,1}.$$

Из этих уравнений видно, что скорость продольных волн в полосе сохранилась равной пространственной скорости продольных волн, а не меньше ее, как это имеет место в классической теории упругости. Согласно последней, скорость продольных волн  $c_1$  в полосе  $c_1^2 = 4\mu(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)^{-1}\rho^{-1}$ . Скорость поперечных волн сохранилась той же, что и в пространстве:  $c_2^2 = \mu\rho^{-1}$ . Получим интересный результат, если провести сравнение с накопленным экспериментальным материалом, касающимся распространения продольных волн в пластинах. Но об этом несколько позже.

#### 2.4. О волнах в полубесконечной полосе

Рассмотрим классическую задачу о поверхностных волнах в полубесконечной пластине-полосе  $x_2 \geq 0$  с прямолинейной границей  $x_2 = 0$ . Граница  $x_2 = 0$  свободна от напряжений и на ней должны выполняться условия

$$\sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{2t} = 0. \quad (2.13)$$

Третье условие ( $\sigma_{2t} = 0$ ) в данном случае так же, как и в подразд. 2.2, означает равенство нулю на свободной границе нормальной компоненты плотности импульса, что означает отсутствие оттока или притока энергии на свободной границе. Решение уравнений в перемещениях (2.12) строим в виде

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \varphi_{,1} + \psi_{,2} + \chi_{,1}, \quad u_2 = \varphi_{,2} - \psi_{,1} + \chi_{,2}, \\ \tau &= \lambda(\lambda + 2\mu)^{-1} c_1^{-2} \varphi_{,t} + \lambda^{-1} (\lambda + 2\mu) c_1^{-2} \chi_{,t}. \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Функции  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  должны удовлетворять следующим уравнениям, получающимся из уравнений равновесия (2.12):

$$\Delta\varphi = c_1^{-2} \varphi_{,tt}, \quad \Delta\psi = c_2^{-2} \psi_{,tt}, \quad \Delta\chi = 0.$$

Для нахождения поверхностных волн функции  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  следует строить в виде

$$\begin{aligned} \varphi &= A \exp[-\alpha x_2 + iq(x_1 - c_3 t)], \quad \psi = B \exp[-\beta x_2 + iq(x_1 - c_3 t)], \\ \chi &= D \exp[-q x_2 + iq(x_1 - c_3 t)], \quad \alpha^2 = q^2(1 - c_3^2 c_1^{-2}), \quad \beta^2 = q^2(1 - c_3^2 c_2^{-2}). \end{aligned}$$

Выполняя однородные граничные условия (2.13), приходим к следующим трем алгебраическим уравнениям для определения констант  $A$ ,  $B$ ,  $D$ :

$$\begin{aligned} (1 - c_3^2 c_1^{-2}) A + i(1 - c_3^2 c_2^{-2})^{1/2} B + [1 + c_3^2 c_1^{-2} (\lambda + 2\mu) \lambda^{-1}] D &= 0, \\ -2i(1 - c_3^2 c_1^{-2})^{1/2} A + (2 - c_3^2 c_2^{-2}) B - 2iD &= 0, \\ 2c_2^2 c_1^{-2} (1 - c_3^2 c_1^{-2})^{1/2} A + iB - 2\lambda^{-1} \mu D &= 0. \end{aligned}$$

Условием разрешимости этой системы является равенство нулю ее определителя:

$$(1 - c_3^2 c_1^{-2})^{1/2} \begin{vmatrix} (1 - c_3^2 c_1^{-2})^{1/2} & i(1 - c_3^2 c_2^{-2})^{1/2} & 1 + c_3^2 c_1^{-2} (\lambda + 2\mu) \lambda^{-1} \\ -2i & (2 - c_3^2 c_2^{-2}) & -2i \\ 2c_2^2 c_1^{-2} & i & 2\lambda^{-1} \mu \end{vmatrix} = 0. \quad (2.15)$$

Решение системы, как следует из анализа этого уравнения, может существовать только при  $c_3 = c_1$ , при других значениях  $c_3$  решение отсутствует, так как уравнение (2.15) других корней, кроме  $c_3 = 0$ , не имеет, а этот корень соответствует статике. При  $c_3 = c_1$  решение имеет вид

$$\varphi = A \exp iq(x_1 - c_1 t), \quad \psi = \chi = 0,$$

или в напряжениях

$$\sigma_{11} = 2\mu\varphi_{,11}, \quad \sigma_{1t} = 2\mu c_1^{-1} \varphi_{,1t}. \quad (2.16)$$

Остальные напряжения равны нулю. Это решение означает, что в полуполосе существуют плоские продольные волны с плоским фронтом, перпендикулярным к границе, каковых нет по классической теории. Чисто поверхностных волн в полуполосе, согласно полученному решению, нет. Результат, на первый взгляд, сомнительный, но после серьезного его изучения ситуация становится иной. Главным критерием правильности этого и других теоретических результатов, как было сказано, должен быть эксперимент, и о нем в дальнейшем речь будет идти.

Из уравнения (2.15) следует, что корень  $c_3 = c_1$  удовлетворяет этому уравнению как  $x^{1/2}$ . Это является привлекательным с точки зрения построения решений при сосредоточенных воздействиях на границе полуполосы. При решении этой задачи методом интегральных преобразований, когда нужно строить оригиналы, т.е. конечные значения решений в виде интегралов, когда под интегралами будут стоять функции с интегрируемыми особенностями. При решении же таких задач по классической теории под интегралами стоят функции с особенностями типа  $x^{-1}$  и интегралы получаются расходящимися.

Построение оригиналов связано в этом случае с преодолением трудностей, т.е. с взятием таких интегралов, что является достаточно трудоемким делом.

Итак, в рассматриваемой задаче для полуполосы получилось так же, как для полупространства, что поверхностных волн не существует. Это расходится с классической теорией упругости, согласно которой в полуполосе имеются поверхностные волны. Расхождение серьезное и при рассмотрении результатов экспериментальных исследований об этом расхождении будет более подробно идти речь. Сейчас еще раз отметим, что в соответствии с приближенной теорией в полуполосе имеют место продольные волны с фронтом, перпендикулярным к границе, которых нет согласно классической теории.

Решение (2.16), описывающее продольные волны, имеет такой вид, что удовлетворяет граничным условиям (2.13) по всему полю полуполосы, а не только на границе. Это значит, что такое решение справедливо и для полуполосы, и для полосы шириной единица, когда  $l > x_2 > 0$ . Учитывая, что ширина полосы может быть произвольной, в том числе и малой, получаем, что решение справедливо и для стержня прямоугольного сечения. А так как решение зависит только от одной продольной координаты  $x_1$ , то получается, что оно справедливо для стержня произвольного сечения. Таким образом, получаем, что и в стержне, и полосе продольные волны распространяются с такой же скоростью, что и в трехмерном пространстве. Согласно классической теории упругости, скорость продольных волн в полосе  $c_1^2 = 4\mu(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)^{-1} \rho^{-1}$ . Эта ско-

рость меньше, чем пространственная. Скорость продольных волн в стержне, согласно классической теории упругости,  $c_1^2 = E\rho^{-1} = \mu(3\lambda + 2\mu) \times (\lambda + \mu)^{-1} \rho^{-1}$ . Эта скорость в стержне меньше, чем в полосе. По классической теории упругости имеем разные скорости продольных волн в пространстве, в полосе, в стержне. Согласно четырехмерной теории, все эти скорости одинаковые. Что более правильно, должен решать эксперимент. Привлекательным здесь является то обстоятельство, что нет необходимости думать о различных значениях скоростей продольных волн в пространстве, в полосе-пластине, в стержне, давать объяснения этим расхождениям скоростей и т. д. Имеется только одно значение скорости продольных волн, что вполне естественно.

## 2.5. Экспериментальные результаты исследования распространения волн в полуполосе от сосредоточенного взрыва на границе и их соотношение с теориями

В этом подразделе проведем анализ результатов экспериментального исследования распространения продольных, поперечных и так называемых поверхностных волн в полуполосе, возбужденных сосредоточенным взрывом на прямолинейной границе полуполосы. Цель данного анализа состоит в выяснении соответствия этих экспериментальных исследований классической и четырехмерной теориям упругости. Исследование выполнено американскими учеными J.W. Dally, S.A. Thau и опубликовано в 1967 г. [14].

Как выше было сказано, здесь предпочтение отдано работам, выполненным методом фотоупругости. Именно этим методом наблюдались волны в полуполосе из фоточувствительного материала — колумбийской смолы. В 1960-х—70-х гг. этот метод широко применялся для исследования напряженных состояний, и были получены прекрасные результаты. К таким результатам относятся и рассматриваемые здесь. К сожалению, метод фотоупругости относится к числу достаточно дорогих и трудоемких и поэтому в настоящее время он применяется все реже. Этим и объясняется, что рассматриваются достаточно давно полученные результаты. Но можно сказать, что время является серьезным ценителем работ, и если работа не забывается, то она сохраняет свою ценность.

В рассматриваемой работе, как было сказано, приведены результаты исследований методом фотоупругости задачи о распространении волн в полубесконечной пластине. Конечно, в эксперименте испытывалась не бесконечная полуполоса, а пластина конечных размеров. Она была сделана из оптически чувствительного материала, а именно из колумбийской смолы CR-39, и имела размеры  $0,25 \times 20 \times 36$  дюйм (1 дюйм = 0,0254 м).

Нагружение осуществлялось сосредоточенным взрывом 250 мг азида свинца, помещенного в полуцилиндрическое отверстие  $3/8$  дюйма в диаметре, расположенного по толщине в середине наиболее длинной (36 дюйм) границы пластины.

В статье приведены 16 фотографий картин интерференционных линий — изоклин — в этой пластине, т.е. линий, на которых в пластине имеет место постоянная разность главных напряжений в процессе динамической деформации при прохождении волн. Эти фотографии характеризуют волновые явления в пластине в различные моменты времени после взрыва (от 60 до 290 мкс). Три из этих фотографий, соответствующие временам 107, 190 и 290 мкс, взяты из цитируемой работы и воспроизведены без каких-либо изменений (рис. 2.1). На них хорошо видны все типы волн: продольная ( $P$ ), поперечная отраженная ( $PS$ ), чисто поперечная ( $S$ ) и поверхностная ( $R$ ).

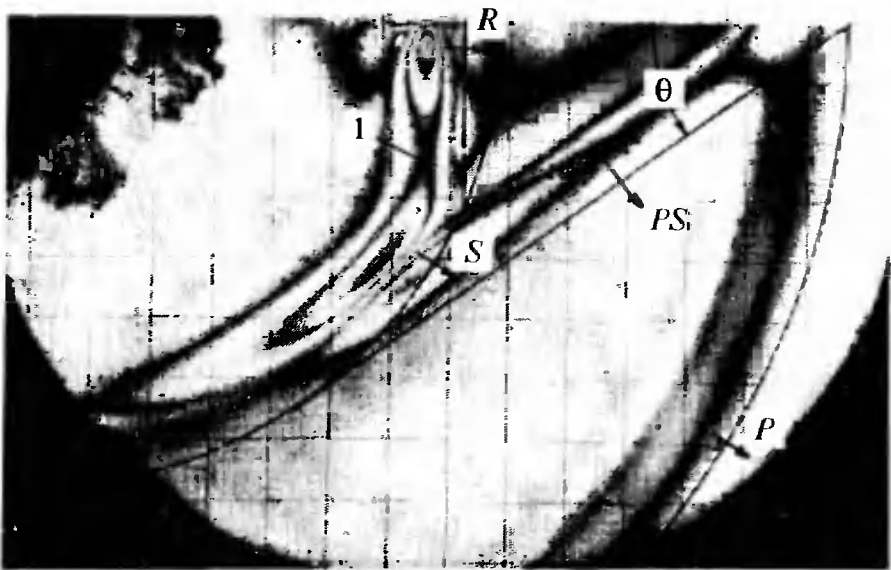
В цитируемой работе отмечено несколько достаточно существенных расхождений экспериментальных результатов и результатов теоретического решения этой же задачи, полученного там же по классической теории упругости. Рассмотрим отмеченные в рассматриваемой статье и другие, не отмеченные в цитируемой работе, а выявленные уже автором данной книги, расхождения классической теории и эксперимента.

На фотографиях (рис. 2.1) видно, что поверхностная волна состоит из пограничной "шапки" и компоненты, не затухающей в глубь области по нормали к границе. Это прослеживается на всех фотографиях. Чисто поверхностной волны не наблюдается в эксперименте и этот факт твердо зафиксирован в цитируемой работе, но объяснения ему не дано. Отметим, что процесс динамического деформирования достаточно быстро по времени от момента взрыва становится упругим, об этом в рассматриваемой работе говорится, и объяснять расхождение эксперимента с теорией возможными неупругими явлениями, как обычно делают, не имеет смысла. На фотографиях видно, что не осталось никаких следов, показывающих какое-либо неупругое поведение материала, какое-либо оставшееся после прохода волны напряженное состояние. Если бы такие явления были, то на фотографиях в областях полуполосы, где прошли волны, были бы интерференционные полосы. Этого не наблюдается на приведенных фотографиях.

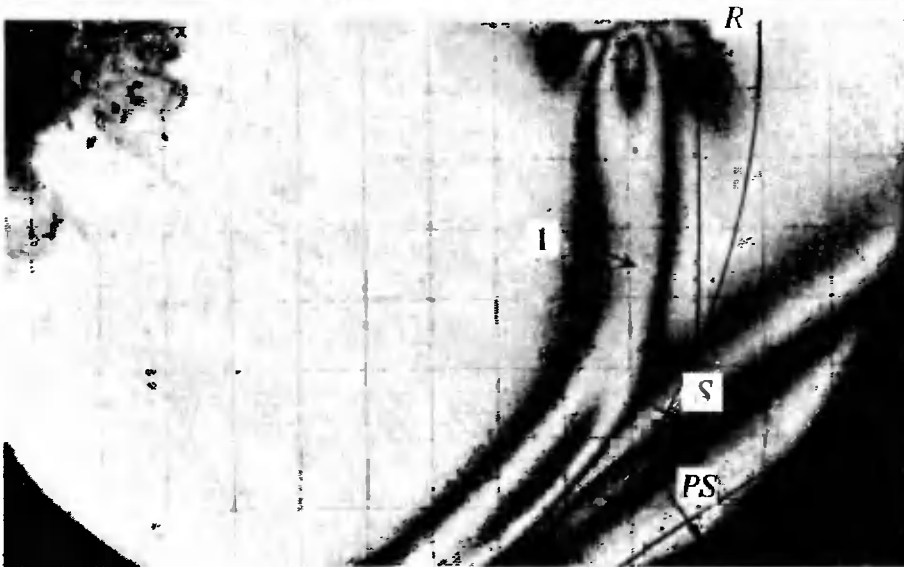
Все фотографии, как было сказано, и особенно соответствующие достаточно большим временам динамического процесса, четко демонстрируют факт отсутствия затухания напряженного состояния при удалении от границы по оси  $x_2$  в так называемой поверхностной волне. Это очень серьезное противоречие с определением поверхностной волны. Эта волна должна затухать при удалении от границы в глубь области по экспоненциальному закону согласно классической теории



*a*



*б*



*в*

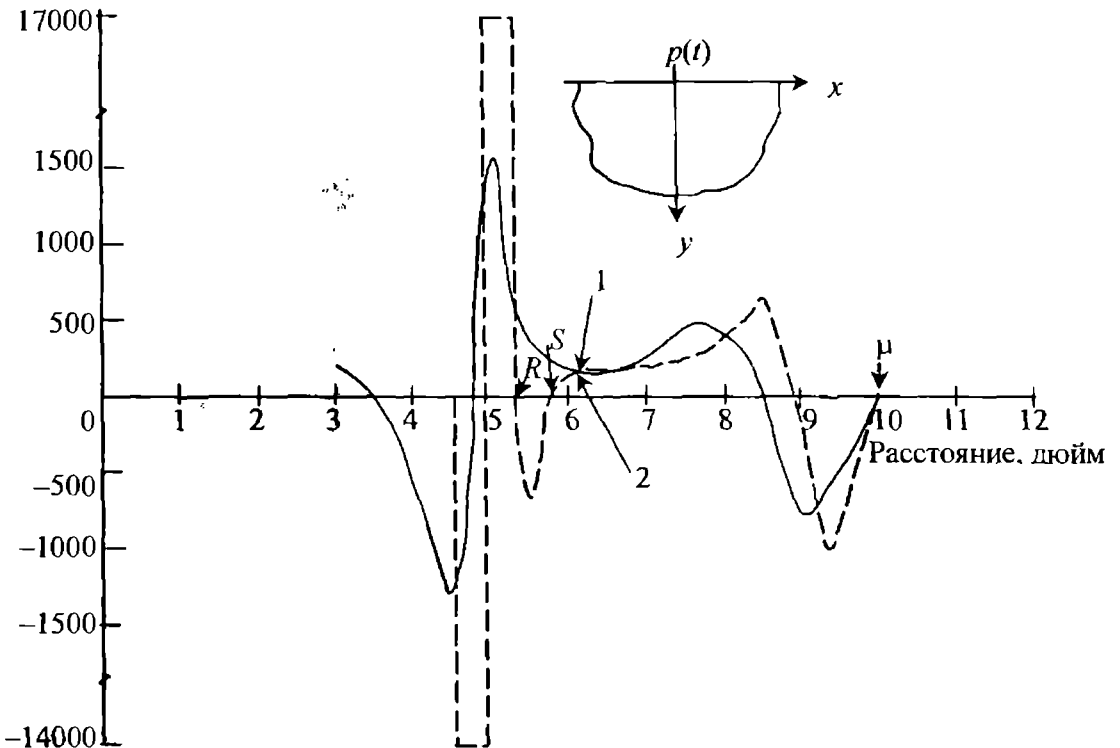
Р и с. 2.1. Волновые поля в полуполосе, образованные сосредоточенным взрывом на границе:

*a* — момент времени 107 мкс; *б* — 190 мкс; *в* — 290 мкс

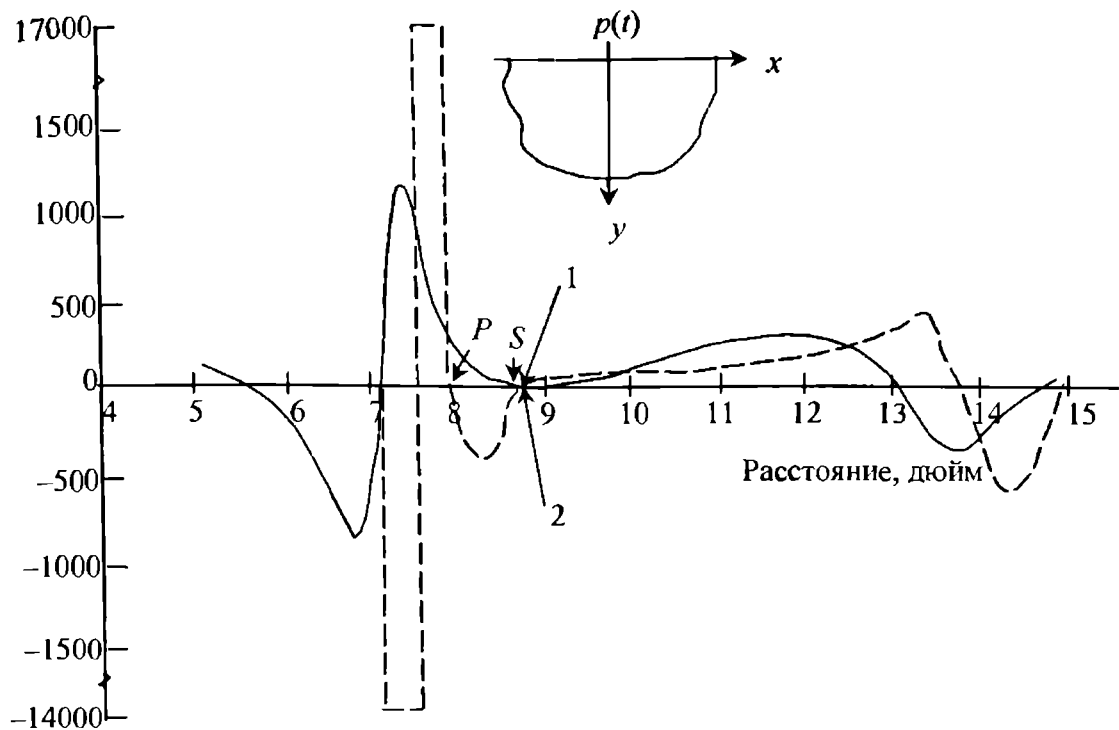
упругости [5, 8, 9, 17]. Более подробно вывод из этого наблюдения будет проанализирован несколько позже.

Другим расхождением классической теории и эксперимента, отмеченным авторами работы [14], является следующее. Перед поверхностной волной, согласно теоретическому решению классической теории упругости, которое здесь представлено в виде графиков (рис. 2.2, 2.3), также заимствованных из работы [14], должна наблюдаться опережающая ее поперечная волна. В эксперименте такая волна не обнаружена, и это особо подчеркнуто, хотя точность эксперимента позволяла с запасом ее обнаружить, что отмечено в цитируемой работе.

Разберем эту ситуацию более подробно. На рис. 2.2, 2.3 приведены графики главного напряжения  $\sigma_{11} = \sigma_{xx}$  вдоль границы в моменты времени 139 и 208 мкс (теоретические — штриховые линии, экспериментальные — сплошные линии). По оси  $x$  отложены расстояния от точки взрыва в дюймах, по оси  $y$  — напряжения в фунтах на квадратный дюйм. Представленные графики демонстрируют отмеченный выше факт отсутствия поперечной волны перед поверхностной волной в экспериментальном решении и наличие ее в теоретическом решении. График теоретического решения, полученного по классической теории, имеет перед поверхностной волной поперечную волну сжатия. Напряжения в ней такого же порядка, что и в продольной волне, поэтому она бы наблюдалась на фотографиях, если бы была в эксперименте. Но она не наблюдается на фотографиях цитируемой работы.



Р и с. 2.2. Графики напряжения  $\sigma$  на границе в момент  $t = 139$  мкс  
Пунктирная линия — теория, сплошная — эксперимент



Р и с. 2.3. Графики напряжения  $\sigma$  на границе в момент  $t = 208$  мкс  
 Пунктирная линия — теория, сплошная — эксперимент

При обсуждении этого факта со специалистами в области теории упругости автор выслушивал объяснение, что возбуждение волн дело тонкое и поперечная волна просто не возбудилась: в данном эксперименте возбудилась только поверхностная волна. Но этот и дальнейший анализ показывают, что эта поверхностная волна распространяется со скоростью поперечных волн, а не с меньшей скоростью.

Надо отметить следующий факт, не описанный в рассматриваемой работе. Теоретические и экспериментальные графики распределения напряжения  $\sigma_{11}$  по оси  $x$  (рис. 2.2, 2.3) показывают, что фронт поверхностной волны, т.е. начало ее проявления, получающийся из экспериментального графика, отмеченный на графике цифрой "1", и фронт опережающей поперечной волны, получающийся из теоретического графика, — "2", находятся строго на одном месте по оси  $x$  для каждого момента времени наблюдения. Это свидетельствует о том, что фронтом так называемой поверхностной волны, наблюдаемой в эксперименте, является  $S$ -фронт, а не  $R$ -фронт, как сказано в работе [14]. Этот экспериментальный факт говорит о том, что наблюдаемая так называемая поверхностная волна распространяется со скоростью поперечных волн, а не с известной из классической теории упругости скоростью поверхностных волн. Таким образом, сказанное выше свидетельствует о том, что нет опережающей поперечной волны, как не должно быть ее согласно результатам, полученным в подразд. 2.4.

Следующее расхождение классической теории и эксперимента. Форма поверхностной волны, согласно анализируемому эксперименту, такова, что в ней присутствует компонента, не убывающая по нормали к границе, а такая ситуация в соответствии с математическим определением этой волны может иметь место только тогда, когда скорость ее совпадает со скоростью поперечных волн. Это подтверждается и следующим рассуждением. Неубывающая компонента при удалении от границы состоит из сдвигового напряженного состояния  $\theta = 0$ . Она, согласно приведенным фотографиям, имеет участок, на котором касательная к изоклине параллельна оси  $x_2 = y$ . Этот участок на всех трех фотографиях отмечен цифрой "1". Согласно расшифровке изоклин-полос с постоянной разностью главных напряжений [12], на этом участке имеем:

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \sigma_{11} = \sigma_{22} = u_1 = 0. \quad (2.17)$$

Отличными от нуля являются только компонента касательного напряжения  $\sigma_{12}$  и перемещение  $u_2$ . Заметим здесь, что сдвиговое напряженно деформированное состояние, а в нем компонента  $\tau$  равна нулю, строится, как видно из уравнений четырехмерной теории упругости, по формулам классической теории упругости и в четырехмерном случае. В соответствии с этими уравнениями и равенствами (2.17) получаем, что в точке участка 1, где касательная к полосе параллельна оси  $x_2$ , имеет место равенство  $\sigma_{12,2} = 0$ , которое приводит к уравнению в этой точке:

$$u_{2,11} = c_2^{-2} u_{2,11}, \quad c_2^2 = \mu / \rho.$$

Из этого уравнения получаем, что участок 1 распространяется вдоль оси  $x_1$  со скоростью  $c_2$  сдвиговой волны. Учитывая, что этот участок никак не обгоняет в течение 290 мкс всю поверхностную волну, можем подтвердить вышесделанное заключение, что эта волна вся распространяется со скоростью сдвиговой волны. Таким образом, снова выходит, что рассматриваемая волна является в действительности поперечной, а не поверхностной. Выдвигаемое оппонентами предположение, что не возбудилась поперечная волна, теряет смысл.

Если предположить, что не возбудилась поверхностная волна, то это предположение существенно подвергает сомнению правильность классической теории упругости потому, что ее решение определяет вклад в напряженное состояние поверхностной волны как основной. Действительно, согласно решению этой задачи по классической теории, приведенному в рассматриваемой работе, поверхностная составляющая решения определяет намного, в десять раз, преобладающую долю в напряженном состоянии рассматриваемого динамического про-

цесса в полуполосе. Все это четко демонстрируется приведенными графиками (см. рис. 2.2, 2.3). И если правильным являлся бы предлагаемый некоторыми учеными вывод о том, что не возбудилась поверхностная волна, то это означало бы очень серьезное противоречие с классической теорией упругости, которая предсказывает указанный огромный вклад поверхностной волны в напряженное состояние. По этой теории поверхностная волна должна в данной динамической задаче всегда возбуждаться и в главном определять напряженное состояние.

В неубывающей компоненте поверхностной волны с удалением от границы и с приближением к поперечной волне с некоторого места напряженное состояние начинает возрастать, о чем свидетельствует увеличение числа изоклин. Это четко прослеживается как на всех приведенных в данной работе фотографиях, так и на не приведенных фотографиях других источников. Этот факт серьезный, так как можно показать, что зоны с минимумом или максимумом напряженного состояния в перемещающемся сдвиговом напряженном динамическом состоянии распространяются со скоростью поперечной волны.

А так это по следующей причине. Если на участке с минимумом напряженного состояния кривизна центральной изоклины равна нулю и она приближенно описывается прямой линией на этом участке, то утверждение о распространении этого участка со скоростью поперечной волны получается так же, как и выше полученное утверждение о распространении прямолинейного участка изоклины в направлении оси  $x_1$ . Для проведения рассуждений надо записать уравнения в прямоугольной системе координат, одна ось которой направлена по касательной к изоклине. Уравнение равновесия в этих координатах будет волновым со скоростью распространения волн, равной скорости поперечных волн. Это означает, что рассматриваемый участок неубывающей компоненты поверхностной волны распространяется со скоростью поперечной волны по нормали к касательной к центральной изоклине.

Если кривизна изоклины отлична от нуля, то можно записать уравнения равновесия в цилиндрической системе координат с центром, совпадающим с центром кривизны изоклины. Тогда локальное сдвиговое напряженное состояние будет описываться уравнением

$$\tau_{r\varphi, r} + r^{-1}\tau_{r\varphi} - \rho u_{\varphi, tt} = 0.$$

Все остальные компоненты тензора напряжений равны нулю, как и в случае равенств (2.17), т.е. на рассматриваемом участке отличными от нуля будут только касательное напряжение  $\tau_{r\varphi}$  и перемещение  $u_{\varphi}$ , остальные компоненты напряженно деформированного состояния рав-

ны нулю. Это уравнение имеет следующий вид, если его записать в перемещении  $u_{\phi}$ :

$$u_{\phi, rr} + r^{-1} u_{\phi, r} - \mu^{-1} \rho u_{\phi, tt} = 0.$$

Из этого волнового уравнения следует, что рассматриваемый участок неубывающей компоненты поверхностной волны также распространяется со скоростью поперечной волны по нормали к касательной к центральной изоклине, т.е. неубывающая компонента является поперечной волной, а вместе с ней и вся поверхностная волна является поперечной волной.

Отметим здесь, что анализ фотографий картин волновых фронтов с целью получения конкретных значений скоростей различных волн и сравнения этих числовых значений друг с другом является достаточно сложным делом и точность эксперимента при этом не совсем достаточная. Однако проведение сравнения на фотографиях взаимного расположения разных волн относительно друг друга в различные моменты времени — задача более простая, и поведение волн относительно друг друга отчетливо проявляется, а результаты сравнения легко контролируются. Анализом такого сравнения здесь и будем заниматься.

Проведенные авторами работы [14] прямые  $R$ , представляющие фронт поверхностной волны, так пока еще будем называть эту волну, рассчитаны по теоретическому решению классической теории упругости. Как видно из фотографий, эти прямые явно расположены позади наблюдаемого начала поверхностного деформационного вала, т.е. нарисованные  $R$ -фронты расположены позади реального фронта поверхностной волны. Приведенные там же круговые огибающие  $S$ -фронты поперечной волны хорошо представляют на границе фронт этой поверхностной волны на всех трех приведенных фотографиях (см. рис. 2.1). Этот фронт располагается вплотную к началу поверхностной волны точно так же, как на фотографиях располагаются фронты продольной и поперечной волн. С течением времени  $S$ -фронт не удаляется от начала поверхностной волны, как должно было бы быть, если бы скорости волн различались. За 290 мкс наблюдения отставание поверхностной волны от поперечной проявилось бы весьма наглядно, чего в действительности не наблюдается на фотографиях. Отставание и уход отдельных участков волн, вызванные какими-либо причинами, в дальнейшем демонстрируются на ряде картин, полученных методами фотоупругости. Получается, что предполагаемая комплексная волна, состоящая из поверхностной и сдвиговой волн, с течением достаточно длинного отрезка времени не продемонстрировала ни малейшего признака на разделение на отдельные волны: поперечную и поверхностную. Скорость фронта этой составной волны, согласно вышеизложенному, совпадает со скоростью сдвиговой волны.

И этот анализ приводит к выводу о том, что поверхностной волны в рассматриваемом эксперименте нет, а есть только поперечная волна. Этот анализ также показывает, что результаты экспериментальных исследований находятся в соответствии с предлагаемой четырехмерной моделью упругого тела. В подразд. 2.4 было получено, что в полуполосе поверхностных волн согласно этой модели нет.

Утверждение о том, что поверхностная волна является на самом деле частью поперечной волны, является для специалистов в области теории упругости очень сомнительным. Поэтому здесь оно обосновывается столь кропотливо на достаточно многочисленных фактах. Казалось бы, можно было привести один серьезный аргумент и прекратить дальнейшее обоснование. Но чтобы избежать случайной ошибки в получении такого утверждающего заключения, проводится весь этот тщательный анализ. На правильности четырехмерной теории упругости основаны все результаты данной работы, а результаты эти серьезные.

Следующий, уже отмеченный выше факт, указывающий на противоречие эксперимента и классической теории упругости, заключается в том, что максимальные теоретические значения напряжений в поверхностной волне на порядок превышают максимальные экспериментальные значения, и это видно из рис. 2.2, 2.3. Такое расхождение в работе [14] отмечено, о нем достаточно много сказано, но опять-таки серьезного объяснения не дано. Гигантское значение теоретических напряжений в поверхностной волне по сравнению с напряжениями в других волнах математически объясняется тем, что значение скорости этой волны в рамках классической теории обращает в нуль уравнение для этой скорости как нуль в первой степени. Это соответствующим образом сказывается на теоретическом решении [9, 14] и обуславливает большой пик напряжений в поверхностной волне. Чуть далее это положение будет продемонстрировано при анализе рассматриваемого решения.

Этого не будет, если решение строить в рамках полученных уравнений, потому что значение скорости поверхностных волн совсем не обращает в нуль соответствующее уравнение. Если строить решение данной задачи в рамках четырехмерных уравнений упругости, то это и приведет к тому, что напряжения будут вести себя нормальным образом и в поперечной, и в продольной волне, существенно не превышая друг друга. Проведенный анализ подтверждает правильность предлагаемой четырехмерной модели упругого тела. Он проведен с использованием экспериментально полученных фотоматериалов, которые представлены здесь, и каждый читатель может проверить правильность сделанных выводов.

С целью подтверждения последнего утверждения проведем следующий анализ. Разберем подробнее часть теоретического решения рассматриваемой задачи, построенного в работе [14] по классической теории, для чего приведем напряжение  $\sigma_{11}$  на границе полуполосы  $x_2 = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= 2(3\pi c_2)^{-1} \int_{3^{-1/2}} f(y) p_{,t}(t - yc_2^{-1}x) dy + (3c_R)^{-1} p_{,t}(t - c_R^{-1}x), \quad x_1 > 0, \\ f(y) &= 12y^2(0,5 - y^2)(1 - y^2)(y^2 - 3^{-1})^{1/2}(y^2 - 4^{-1})(4y^2 - 3 + 3^{1/2})^{-1} \times \\ &\times (4y^2 - 3 - 3^{1/2})^{-1}. \end{aligned} \right\} (2.18)$$

При построении решения было принято, что коэффициент Пуассона  $\nu = 1/3$ , что близко к измеренному значению этого коэффициента для колумбийской смолы, из которой изготовлена исследованная пластина. При  $\nu = 1/3$  скорость поверхностной волны, согласно уравнению (2.8),  $c_R = 2c_2(3 + 3^{1/2})^{-1}$ .

Функция  $p(t)$ , входящая в решение, описывает приложенную к границе взрывную нагрузку:

$$\begin{aligned} p(t) &= p_0 t / t_0, \quad p_{,t} = p_0 / t_0, \quad 0 < t < t_0, \\ p(t) &= p_0(t_1 - t)(t_1 - t_0)^{-1}, \quad p_{,t} = -p_0 / (t_1 - t_0), \quad t_0 < t < t_1, \\ p(t) &= 0, \quad p_{,t} = 0, \quad t_1 < t, \end{aligned}$$

где  $p_0$  — пик нагрузки при  $t = t_0$ ;  $t_0, t_1$  — соответственно времена линейного по времени возрастания и убывания до нуля нагрузки. В эксперименте эти значения были:  $t_0 = 9$  мкс,  $t_1 - t_0 = 11$  мкс. Решение (2.18) представляется более конкретно в отдельные интервалы координат  $t$  и  $x$ :

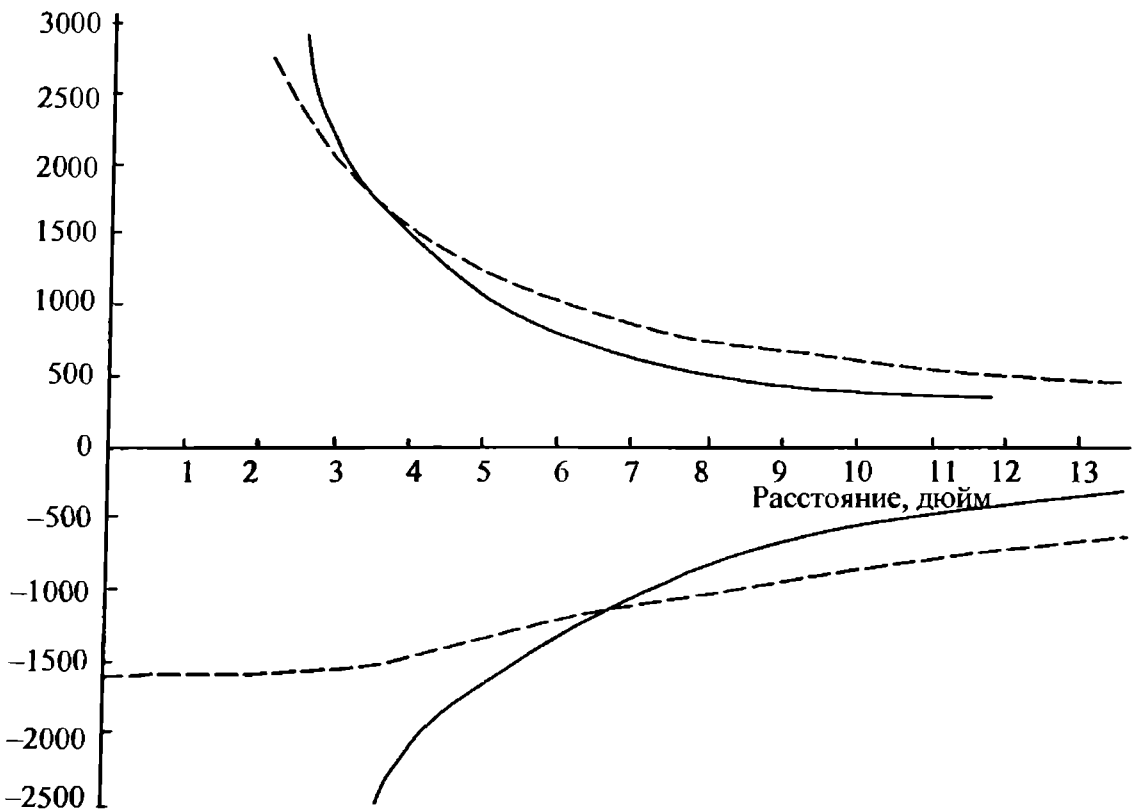
$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= 0, \quad x > c_1 t, \\ \sigma_{11} &= 2(3\pi c_2)^{-1} \int_{3^{-1/2}}^{c_2 t / x} f(y) p_{,t}(t - yc_2^{-1}x) dy, \quad c_1 t \geq x \geq c_2 t, \\ \sigma_{11} &= 2(3\pi c_2)^{-1} \int_{3^{-1/2}}^1 f(y) p_{,t}(t - yc_2^{-1}x) dy, \quad c_2 t \geq x \geq c_R t, \\ \sigma_{11} &= 2(3\pi c_2)^{-1} \int_{3^{-1/2}}^1 f(y) p_{,t}(t - yc_2^{-1}x) dy + \\ &+ (3c_R)^{-1} p_{,t}(t - c_R^{-1}x), \quad c_R t \geq x \geq 0. \end{aligned} \right\} (2.19)$$

Как видно из решения, в нем присутствует слагаемое  $(3c_R)^{-1} p_{,t}(t - c_R^{-1}x)$ , которое определяет напряженное состояние только в поверхностной волне (на рис. 2.2, 2.3 представлено штриховыми линиями) и которое на много, на порядок превышает все остальное напряженное состояние в пластине. Эта часть решения распространяется,

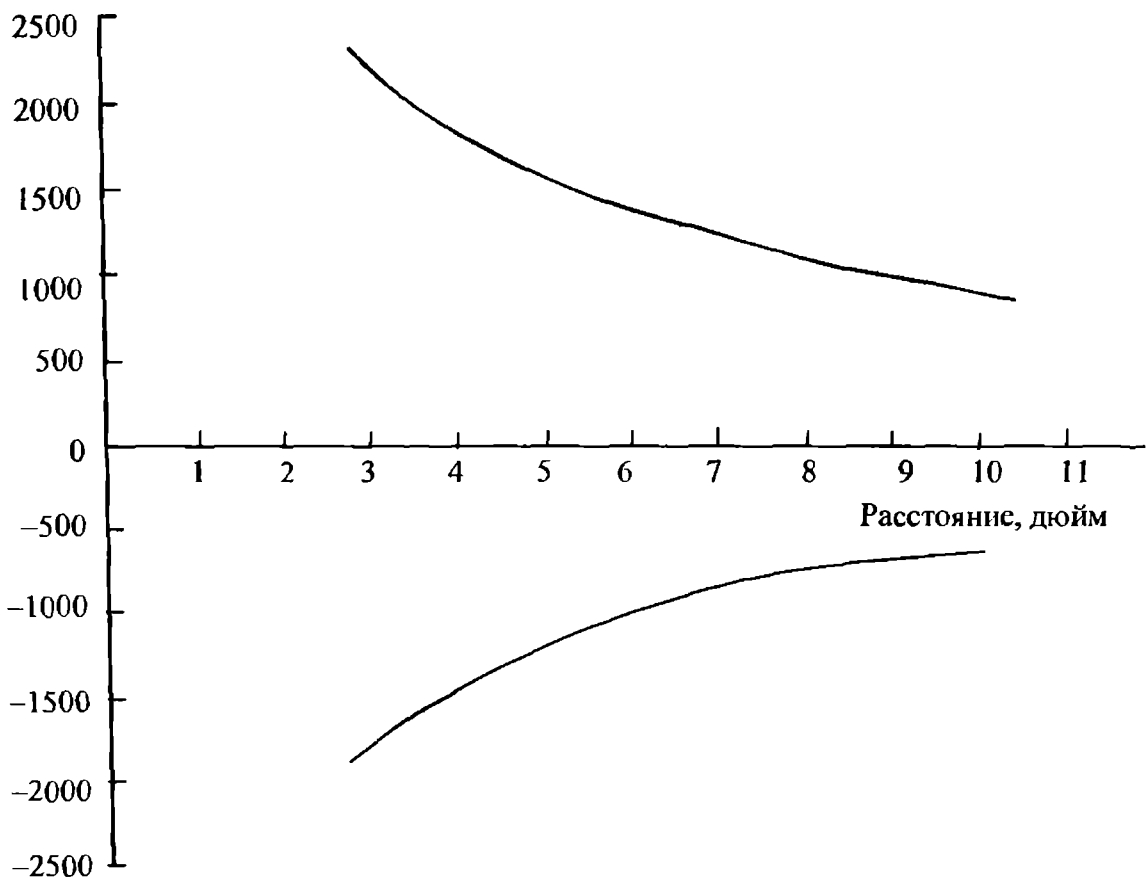
согласно классической теории, без изменения, т.е. без затухания вдоль границы пластины.

Результаты эксперимента говорят о другом: напряженное состояние в поверхностной волне затухает при удалении от точки взрыва примерно с той же скоростью, с какой оно затухает в продольной волне. Это видно из графиков (рис. 2.4, 2.5). На рис. 2.4 представлено убывание параметра  $\sigma_{11}$  в продольной волне (штриховая линия — теоретический график, сплошная — экспериментальный, графики примерно одинаковые). На рис. 2.5 представлено убывание напряженного состояния в поверхностной волне (результаты только экспериментальные, в теории убывания нет).

Рассматриваемое слагаемое решения, построенное в явной форме, определено тем, что в подынтегральной функции в знаменателе стоит множитель  $(4y^2 - 3 - 3^{1/2})$ , обращающийся в нуль при значении  $y$ , определяемом уравнением  $4y^2 = 3 + 3^{1/2}$ , соответствующем классической скорости поверхностной волны. При взятии такого расходящегося интеграла с помощью методов, применяемых при работе с интегралами типа Коши [18], и появляется указанное слагаемое, представленное в явной форме. Оно, согласно приведенному решению (2.19), отлично от нуля только в поверхностной волне.



Р и с. 2.4. Графики убывания максимальных напряжений в продольной волне со временем



Р и с. 2.5. Графики убывания напряжений в поверхностной волне

Если строить решение данной задачи в рамках четырехмерной модели, то такого расходящегося интеграла не будет, потому что в знаменателе подынтегрального выражения не будет множителя, обращающегося в нуль в интервале интегрирования. Поэтому в решении не будет слагаемого, намного превышающего остальную часть решения, как это имеет место в рассмотренном случае. Напряженное состояние в поперечной волне с увеличением времени будет убывать примерно с такой же скоростью, как это имеет место в продольной волне, так как теоретическая ситуация при получении значений напряжений в этой волне одинакова с ситуацией в продольной волне. Согласно эксперименту, напряженное состояние в так называемой поверхностной волне убывает, как было уже сказано, с течением времени примерно так же, как оно убывает в продольной волне, что существенно не согласуется с классической теорией. Четырехмерная модель упругого тела неожиданно снимает и это противоречие.

Рассмотрим еще раз собранные вместе фотографии волновых фронтов (рис. 2.6). На этих фотографиях видно, что неубывающая компонента решения в так называемой поверхностной волне в глубине области переходит вполне естественно в сдвиговую волну  $S$ , четко выраженную и хорошо наблюдаемую на всех фотографиях и существующую

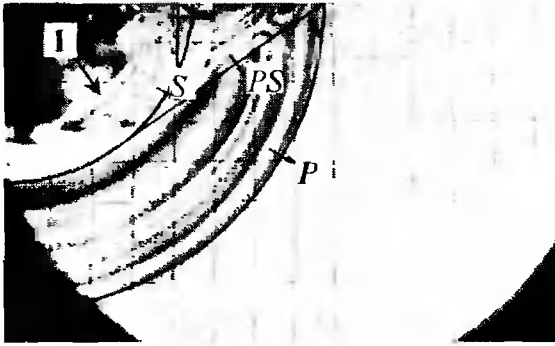
щую отдельно, хотя и совсем вблизи от так называемой конической, отраженной от границы поперечной волны *PS*. Скорость их распространения одна и та же. Во всех наблюдаемых моментах времени неубывающая компонента так называемой поверхностной волны и отмеченная сдвиговая волна распространяются как единая волна и нет ни малейшего намека на какое-либо разделение их друг от друга.

Неубывающая вдоль оси  $x_2$  компонента поверхностной волны с удалением от границы с некоторого расстояния начинает возрастать и органически переходит в поперечную волну. Это говорит о том, что рассматриваемая комбинация неубывающей компоненты и сдвиговой волны представляет собой нормальную самостоятельную сдвиговую волну. Если бы это было не так, то неубывающая компонента поверхностной волны распространялась бы независимо от сдвиговой волны. Последняя проявила бы себя на фотографиях уходом вперед от неубывающей компоненты. Такой уход в данном эксперименте был бы хорошо наблюдаем на фотографиях, учитывая достаточное для этого количество изоклин в поперечной волне *S* в районе соединения ее с неубывающей компонентой поверхностной волны.

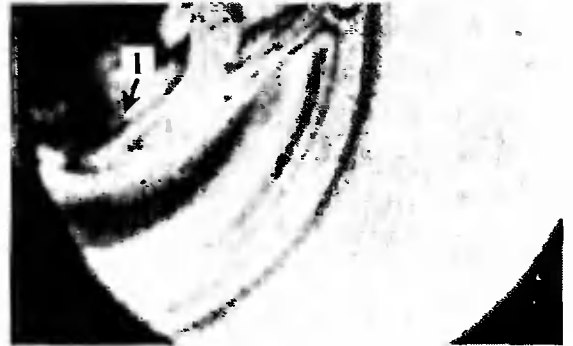
Действительно, в процессе распространения волн изоклины *S*-волны в зоне соединения ее с неубывающей компонентой поверхностной волны удалились бы вперед от этой компоненты, и картина изолиний была бы другая. В зоне соединения изоклины неубывающей компоненты или изогнулись бы вперед, или впереди ее проявились изоклины *S*-волны. Этого в действительности не произошло, потому что неубывающая компонента поверхностной волны является частью *S*-волны. Носовая часть *S*-волны, так назовем этот участок, естественным образом изогнулась и перешла в неубывающую компоненту поперечной волны. Таким образом, поверхностная волна представляет собой пограничный участок сдвиговой волны *S*, следующей за отраженной поперечной волной *PS*. Этот участок поперечной волны, расположенный в окрестности прямолинейной границы, является похожим на поверхностную волну и поэтому принимается исследователями за таковую.

В этом подразделе подробно рассмотрены результаты экспериментальных исследований одной работы. Еще раз подчеркнем, что здесь серьезное внимание уделено документальному подтверждению получаемых утверждений. Представленные фотографии напряженных состояний в форме интерференционных картин — это документы. Можно указать на другую работу [12], в которой приведено достаточно много фотографий аналогичных интерференционных картин, иллюстрирующих напряженное состояние в поверхностных волнах.

*a*



*b*



*c*



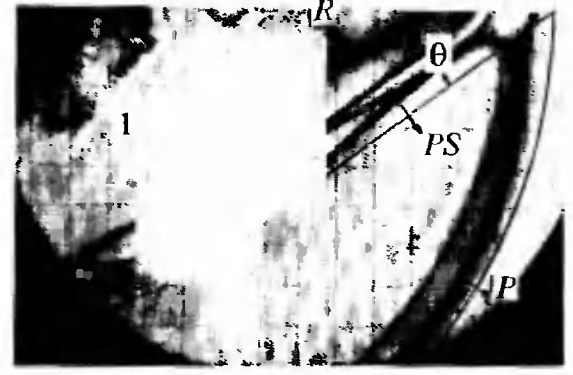
*d*



*e*



*e*



жс

з



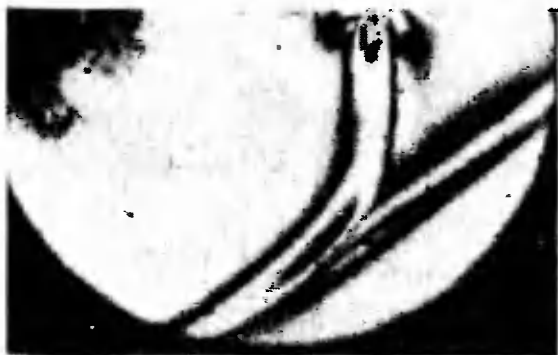
и

к

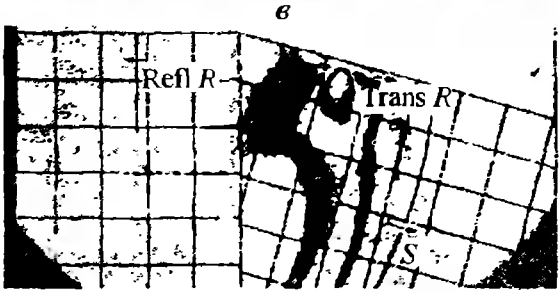
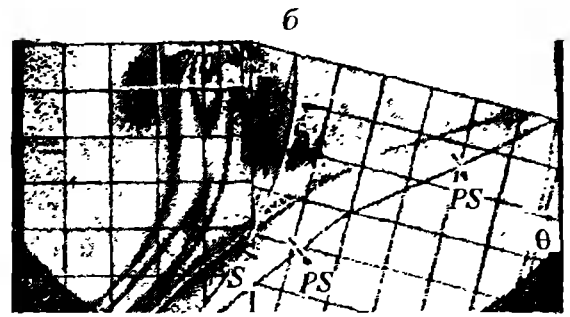
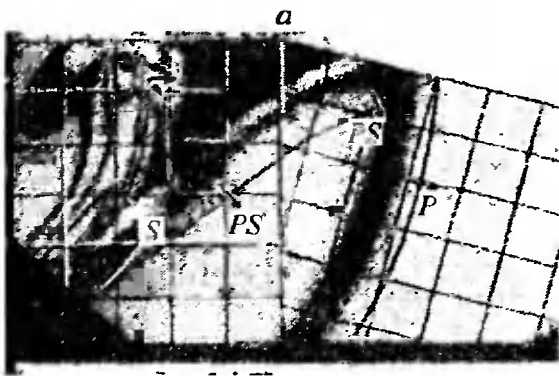


л

м



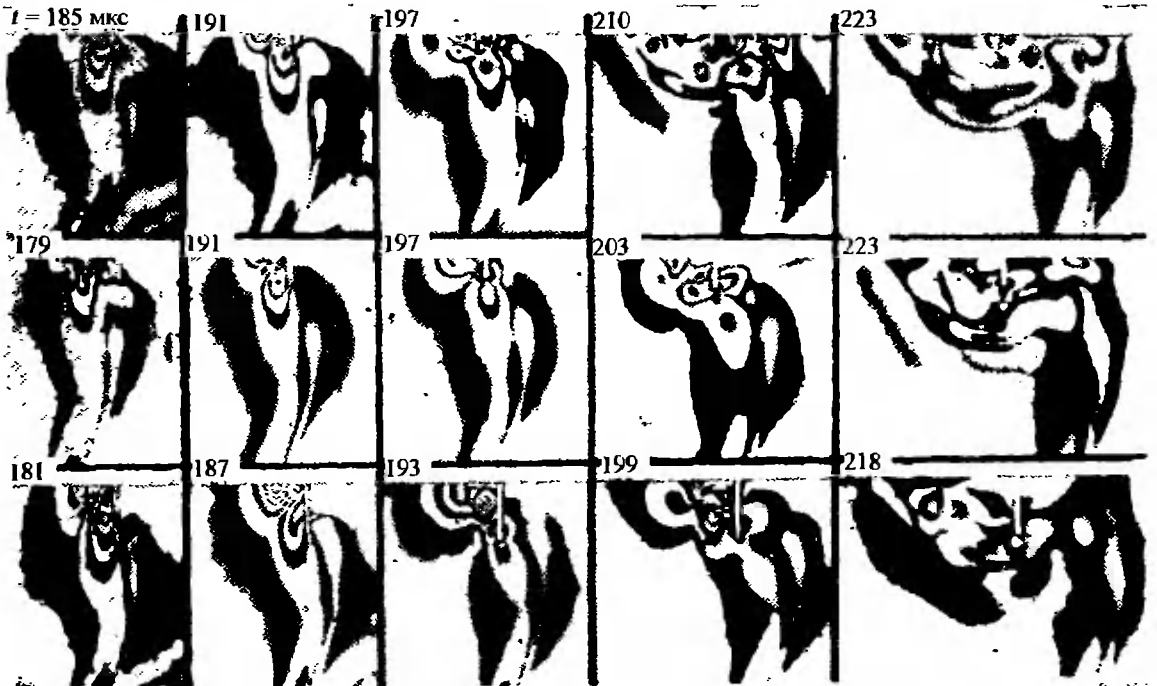
Р и с. 2.6. Картины волновых полей в полуполосе в различные времена:  
 $a - t = 107$  мкс;  $b - t = 123$  мкс;  $в - t = 139$  мкс;  $г - t = 156$  мкс;  $д - t = 172$  мкс;  $e - t = 190$  мкс;  $жс - t = 208$  мкс;  $з - t = 222$  мкс;  $и - t = 237$  мкс;  $к - t = 256$  мкс;  $м - t = 290$  мкс



Р и с. 2.7. Картины волн в полуполосе с угловой границей:

$a - t = 131$  мкс;  $b - t = 175$  мкс;  $c - t = 249$  мкс

На рис. 2.7 и 2.8 приведены заимствованные из работ [19, 20] и представленные в книге [12] фотографии картин интерференционных полос, представляющих напряженное состояние в этих волнах. На рис. 2.7 эти картины характеризуют прохождение волны в полуполосе, когда на границе имеется тупой угол  $165^\circ$  и волна проходит этот тупой угол. На рис. 2.8 картины характеризуют напряженное состояние в рассматриваемой волне, когда в полуполосе имеются три разной глубины выреза, причем глубина не превышает длины волны, а волна проходит через эти вырезы.



Р и с. 2.8. Картины поверхностных волн в полуполосе при наличии на границе разрезов трех глубин

Эти картины приведены с той целью, чтобы дополнительно показать, что сделанные выше выводы подтверждаются выводами, которые можно сделать на основании анализа этих картин. Из них, например, следует, что так называемая поверхностная волна не разделяется на чисто поверхностную и поперечную волны, она не затухает при удалении от границы внутрь области, скорость незатухающей части волны, согласно вышеизложенной оценке, равна скорости поперечных волн. Кроме отмеченных выводов из рассматриваемых здесь картин вытекают и другие. Например, после прохождения выреза в полуполосе рассматриваемая волна меняет форму таким образом, что вперед уходит не затухающая в глубь компонента волны. А согласно определению этой волны, незатухающая ее поперечная составляющая не может существовать отдельно от "шапки". А раз она распространяется самостоятельно, то это волна и волна поперечная и, следовательно, рассматриваемая поверхностная волна в целом является поперечной волной. Таким образом, анализ этих картин приводит к тем же выводам, что и вышеописанные. Получается все тот же, уже сделанный вывод, что чисто поверхностной волны в рассмотренных экспериментах нет. Не должно быть поверхностной волны и согласно четырехмерной теории упругости. Следовательно, этот результат подтверждает правильность предложенной теории.

В науке нет строгого определения доказательства правильности теории методом сравнения с экспериментом. Опыт показывает, что одному экспериментальному подтверждению правильности теории ученые вряд ли поверят. Вряд ли вера сильно утвердится и при наличии двойного или тройного подтверждения. Для убеждения в правоте теории нужно представить некоторое количество подтверждающих экспериментальных фактов, которое можно назвать критическим, после чего вера начнет созреть. В данной работе предпринята попытка набрать критическое число сравнений теории и эксперимента, чтобы читатель мог начать верить в четырехмерную теорию упругости.

Надо сказать, что во всех этих и других рассматриваемых здесь работах правильность положений классической теории упругости ни в малейшей мере не подвергается сомнению. Более того, они, эти положения, как бы постоянно подтверждаются экспериментом, даже если об этом и не говорится. Это нормально и критиковать эти работы абсолютно не имеет смысла, да и не стоит, потому что представленная в них работа, как правило, высокого научного уровня. Поэтому, анализируя результаты экспериментальных исследований, автору данной книги постоянно приходится как бы входить в противоречие с авторами рассматриваемых работ. Хочется сказать, что уважение к авторам остается очень большим, ну а научные дискуссии являются работой

исследователей и без них никакого развития науки не будет. Дискуссии надо проводить.

Подводя итоги выполненному анализу, можно сказать, что четырехмерная теория упругости находит подтверждение своей жизнеспособности в реальных экспериментальных задачах, а не остается теорией на бумаге. Можно конечно говорить, что отмеченные несоответствия классической теории и эксперимента можно объяснить другим способом, против этого особых возражений нет. Действительно, любое расхождение теории и эксперимента можно объяснить многими методами. Однако надо отметить, что объяснения должны быть обоснованными, а не просто упомянутыми. Например, расхождение в рассматриваемой здесь задаче теоретических значений напряжений в поверхностной волне и экспериментальных значений этих напряжений более чем в десять раз объясняется возможным возникновением микротрещин в полуполосе после сосредоточенного взрыва. Какого-либо обоснования такому объяснению в работе не делается. Но сказать это просто, а доказать правильность сказанного означает, как правило, гигантскую экспериментальную работу.

Теоретическая модель возникновения микротрещин требует привлечения науки о разрушении материала, проведения экспериментальных исследований по определению параметров научной модели разрушения, необходимо будет ввести в уравнения классической теории упругости дополнительные слагаемые, позволяющие учитывать микроразрушения, а затем надо решать каким-то образом усовершенствованные уравнения и т.д.

Как видно из сказанного, потребуется куда более обширная наука по сравнению с классической теорией упругости, чтобы объяснить различие в напряжениях эксперимента и классической теории в поверхностной волне. Поэтому подобного рода объяснения по существу не являются объяснениями, а являются предположениями.

Предлагаемая четырехмерная модель упругого тела не требует введения каких-либо новых параметров в уравнения: все параметры остаются теми же самыми, что и в классической теории упругости. Теоретическая правильность новых уравнений обоснована, экспериментальные подтверждения ее правильности здесь представлены. И при всем этом она неожиданно снимает многие противоречия классической теории и эксперимента. Следовательно, основания для веры в правильность этой теории упругости имеются. Описываемая работа с экспериментальными результатами [14] была выполнена достаточно много лет назад и не претендовала на утверждение о неправильности классической динамической теории упругости. Но одним из выводов, сделанных в этой работе, был вывод о необходимости совершенствования

математической модели рассматриваемой задачи из-за отмеченных больших расхождений теории и эксперимента. Удивительно, но такая модель здесь предлагается.

Автору данной книги, конечно же, очень хотелось бы самому получить решение рассматриваемой задачи в рамках четырехмерной модели и провести сравнение этого решения с экспериментом, но такая работа требует научных сил более молодого исследователя. В планах такая работа значится и будет сделана, когда позволят обстоятельства.

Здесь следует отметить, что возможности четырехмерной теории упругости для исследования рассматриваемой задачи гораздо значительнее возможностей классической теории: имеется дополнительный произвол в виде четвертой функции перемещения времени  $t$  помимо трех классических перемещений  $u_\alpha$  точек тела, имеется дополнительное четвертое граничное условие. Этот произвол позволяет лучше описывать реальные граничные условия, рассматривать большее число вариантов краевых задач также по причине наличия четвертого граничного условия. В силу сказанного становится почти очевидным, что можно, используя этот произвол, достичь достаточно хорошего совпадения теоретических результатов с экспериментальными. Именно на этом основано дополнительное к вышеизложенному убеждение в предполагаемом совпадении эксперимента и четырехмерной теории упругости.

## **2.6. Дополнительный анализ экспериментальных результатов о распространении волн**

В этом подразделе проведем дополнительное исследование картин волновых фронтов, представленных на фотографиях работы [14]. Проведенный в подразд. 2.5 достаточно обширный анализ экспериментальных результатов указанной работы показал, что трехмерная теория упругости не может правильно описать динамический процесс распространения в полуполосе волн, возбуждаемых сосредоточенным на границе взрывом.

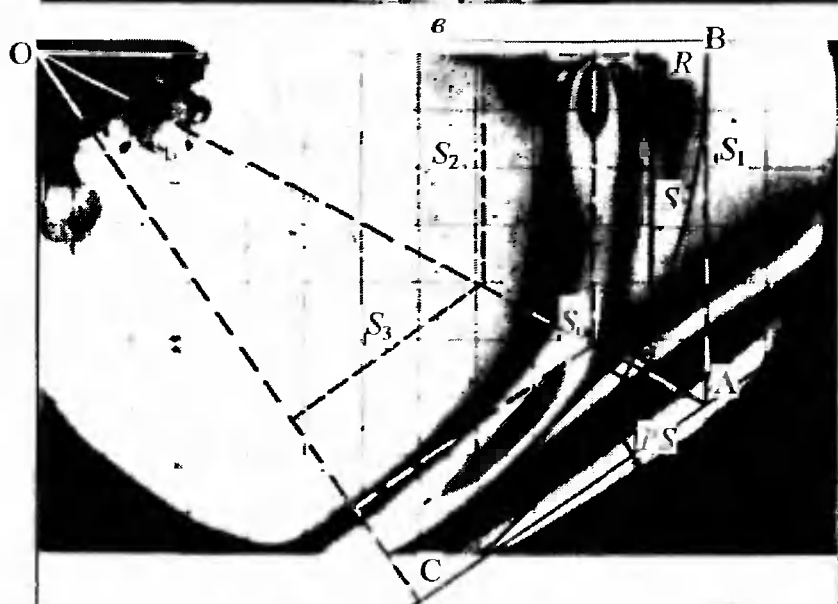
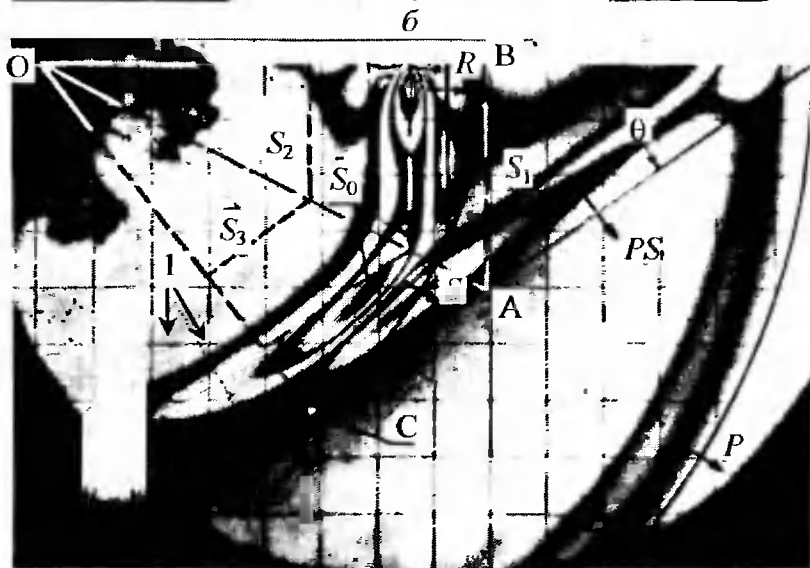
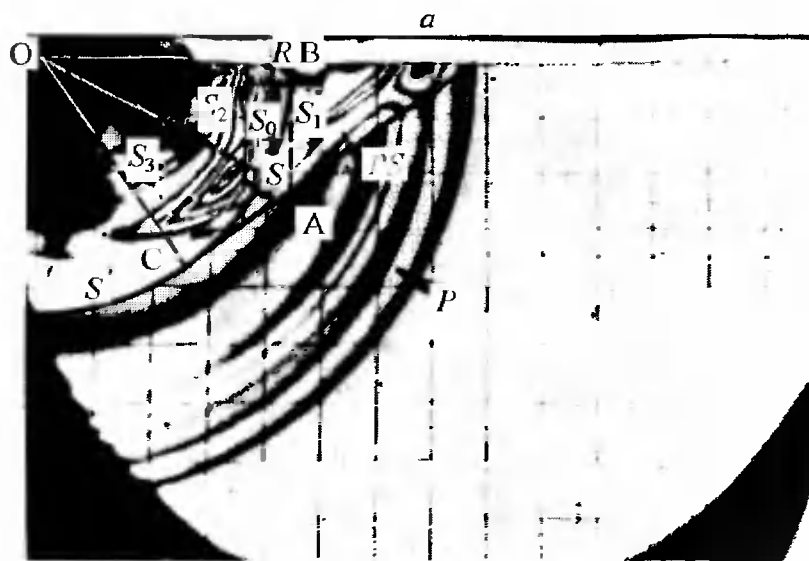
Одним из главных выводов этого анализа является то, что поверхностной волны в данном динамическом процессе нет, а так называемая поверхностная волна на самом деле является приграничной частью отчетливо наблюдаемой внутри полуполосы поперечной волны. С точки зрения специалиста по волновым процессам, для упругих тел такое утверждение является неверным. Автор данной книги тоже является таким специалистом и ему понятно указанное восприятие. Поэтому с целью преодоления возникающего отторжения полученного научного вывода об отсутствии поверхностных волн здесь предлагается дополнительное к данному в подразд. 2.5 обоснование его правильности.

В соответствии с указанным утверждением, что поверхностной волны нет, пользоваться названием *поверхностная волна* довольно трудно, но для проведения намеченного обоснования придется часто как-то называть эту волну. Уже становится ясно, что, по крайней мере в этой книге, ее следует называть *поперечной волной*, но, однако, в процессе обоснования утверждения о ее принадлежности к классу поперечных волн еще все-таки рано давать данной волне такое название. Поэтому будем временно продолжать называть эту волну *поверхностной*.

В работе [14] показано, что поверхностная волна является плоской или, вернее, прямолинейной, если иметь в виду полуполосу, волной. Она имеет неубывающую в глубину области компоненту, которая согласно уравнениям описывается потенциалом  $\psi$ , удовлетворяющим волновому уравнению  $\psi_{,xx} + \psi_{,yy} = c_2^{-2} \psi_{,tt}$ . Эту компоненту поверхностной волны будем называть *S*-компонентой. Она, как отмечалось в подразд. 2.5, не только не убывает в глубину области, но начиная с некоторой глубины даже возрастает, и это четко просматривается на всех приведенных в данной книге фотографиях. Согласно решению волнового уравнения, такая компонента должна распространяться со скоростью  $c_2$ , потому что при меньшей скорости распространения она должна по законам математики быть строго убывающей.

Поверхностная волна, как было уже сказано, является прямолинейной волной в приграничной области. Пока условно проведем на всех трех фотографиях (рис. 2.9) штриховой линией прямолинейный  $S_1$ -фронт этой волны в виде касательной к круговому *S*-фронту в точке пересечения В последнего с осью  $x$ . Новый  $S_1$ -фронт доходит до пересечения в точке А с *PS*-фронтом и распространяется вдоль оси  $x$  со скоростью поперечных волн. Точку А соединим штриховой линией с точкой О взрыва. Проводимые автором данной книги дополнительные к имеющимся на фотографиях линии выполнены в штриховом варианте, чтобы было ясно их отличие. Из точки О проведем перпендикуляр ОС к *PS*-фронту. *PS*-фронт распространяется со скоростью поперечных волн в направлении нормали ОС к нему. Треугольники ОАВ и ОАС равны между собой и поэтому линия ОА является биссектрисой угла ВАС. Нарисуем штриховой линией среднюю линию *S*-компоненты поверхностной волны ( $S_0$ -линию) и из точки пересечения ее с линией ОА проведем линию, параллельную *PS*-фронту, и сохраним за ней обозначение  $S_0$ -линия.

Из рис. 2.9 видно, что  $S_0$ -линия проходит примерно через точку с максимальными напряжениями в поперечной *S*-волне. Проведем задний  $S_2$ -фронт поверхностной волны, а из точки пересечения его с линией ОА проведем  $S_3$ -линию, параллельную *PS*-фронту, и пока условно



Р и с. 2.9. Картина волновых полей с дополнительными линиями фронтов:  
 $a - t = 107 \text{ мкс}$ ;  $b - t = 190 \text{ мкс}$ ;  $c - t = 290 \text{ мкс}$

будем называть ее задним фронтом  $S$ -волны в области ОАС. Зоны ( $S_1, S_2$ ), ( $PS, S_3$ ) на рис. 2.9,а,б,в остаются равными между собой по ширине и их передние фронты  $S_1, PS$  распространяются со скоростью поперечных волн. Из фотографий (рис. 2.9,а,б,в) видно, что  $S$ -волна в зоне ( $PS, S_3$ ) является соседствующей с  $PS$ -волной. Видно, что это две различные поперечные волны, но в данной зоне они вплотную и по форме неизменно одинаково расположены относительно друг друга в течение всего времени распространения, и поэтому  $PS$ -фронт в этой зоне является одновременно фронтом  $S$ -волны.

Поперечная  $S$ -волна не является круговой, а имеет достаточно сложную форму, что отмечено в работе [14]. Линия ОА определяет участок, в котором  $S$ -волна претерпевает изменение. На участке ( $PS, S_3$ ) она распространяется в направлении ОС, на участке ( $S_1, S_2$ ) — в направлении оси  $x$ , что будет видно из дальнейшего, в окрестности вершины угла ВАС эта волна распространяется соответственно в промежуточных направлениях. В окрестности линии ОА зоны ( $S_1, S_2$ )  $S$ -волна вряд ли должна быстро затухать в направлении к границе, так как в зоне ( $PS, S_3$ ) максимум этой волны расположен близко к линии ОА. Из фотографий видно, что медленное затухание этой волны происходит в направлении к оси  $x_1$  по центральной линии поверхностной волны, а не в сторону какого-то опережения этой волны, что должно быть, если бы скорость  $S$ -волны была больше скорости поверхностной волны.

Проследим теперь за расположением поверхностной волны в зоне ( $S_1, S_2$ ) в различные времена наблюдения (107, 190, 290 мкс). Центральная  $S_0$ -линия этой волны на всех фотографиях отстоит от  $S_1$ -фронта на том же расстоянии, что и точка с максимальными напряжениями в  $S$ -волне, расположенная в центральной части  $S$ -волны, находящейся в зоне ( $PS, S_3$ ), отстоит от  $PS$ -фронта.

Это свидетельствует о том, что центральная линия поверхностной волны распространяется с той же скоростью в направлении оси  $x$ , с какой центр  $S$ -волны распространяется в направлении ОС, т.е. со скоростью поперечных волн. Если бы центральная линия поверхностной волны распространялась с меньшей скоростью, как предсказывает трехмерная теория упругости, то за указанное достаточно большое время наблюдения (183 мкс) было бы заметно смещение этой центральной линии поверхностной волны в сторону отставания. Что отставание части поверхностной волны хорошо просматривается в эксперименте, демонстрируют фотографии (рис. 2.8), на которых засняты картины изоклин поверхностной волны, распространяющейся вдоль границы полуполосы, когда у этой границы имеются небольшие поперечные разрезы. На этих фотографиях четко виден уход незатухающей

$S$ -компоненты вперед от пограничной шапки сразу же после начала прохода этой волной мелкого разреза уже в течение 5 мкс и еще более заметен этот уход в процессе прохода ею более глубоких разрезов.

В рассматриваемом случае наблюдения относительного взаимного расположения поверхностной волны и  $S$ -волны за время 187 мкс, значительно большего 5 мкс, конечно же было бы заметно отставание поверхностной волны от  $S$ -волны, если бы их скорости были разные. Действительно, зоны  $(S_1, S_2)$ ,  $(PS, S_3)$  распространяются, как было отмечено, с одной скоростью поперечных волн. За указанное время наблюдения заметного смещения поверхностной волны в зоне  $(S_1, S_2)$  в сторону заднего  $S_2$ -фронта нет. Расположение поверхностной волны в зоне  $(S_1, S_2)$  относительно переднего и заднего фронтов с течением времени не изменяется, как не изменяется расположение  $S$ -волны в зоне  $(PS, S_3)$ . Следовательно, поверхностная волна распространяется в направлении оси  $x$  с той же скоростью, с какой  $S$ -волна распространяется вдоль линии ОС. Последнее означает, что поверхностная волна является в действительности поперечной волной. Такая же ситуация имеет место при прохождении поверхностной волной тупого угла  $165^\circ$ , образованного границей полуполосы (см. рис. 2.7). На последней из трех фотографий картин распространения волн видно, что сдвиговая компонента пограничной волны ушла вперед от приграничной шапки.

Таким образом, получается, что  $S$ -волна представляет собой составную волну достаточно сложной формы: в зоне  $(PS, S_3)$  это известная  $S$ -волна и ее фронт совпадает с фронтом  $PS$ -волны, в зоне  $(S_1, S_2)$  эта составная волна является так называемой поверхностной волной, и здесь она имеет фронт, совпадающий с  $S_1$ -фронтом. В окрестности вершины угла ВАС  $S$ -волна имеет некоторый промежуточный фронт типа элемента окружности, касающегося фронтов  $PS$  и  $S_1$ . Если проследить за картиной расположения рассматриваемых волн по дополнительным к только что проанализированным, т.е. по исходным, фотографиям (см. рис. 2.6), то полученный вывод подтверждается всеми этими фотографиями.

Здесь рассмотрены очень подробно результаты экспериментального исследования одной задачи о распространении в полуполосе волн, возбужденных сосредоточенным взрывом на ее границе. Проведенный анализ показал, что чисто поверхностных волн в этой задаче нет, а те волны, которые ранее считались поверхностными, в действительности оказались поперечными волнами. Такой вывод подтверждает правильность четырехмерных уравнений теории упругости.

Можно предложить еще один анализ экспериментальных результатов рассматриваемой работы [14]. Если эти результаты показывают, что следующая за продольной волной в окрестности границы полупо-

лосы так называемая поверхностная волна является единственной в этой окрестности, то в сущности этого достаточно для утверждения того, что она поперечная. Если судить по фотографиям волновых фронтов, соответствующим временам в диапазоне от 107 до 290 мкс, то из вида поверхностной волны в окрестности границы следует, что нет видимых признаков существования второй волны, как, например, это имеет место при взгляде на  $S$ -волну и  $PS$ -волну в том месте, где они распространяются вместе. Если кто возьмется утверждать, что такие признаки есть, то он их должен придумать, особенно для времен наблюдения с 172 до 290 мкс.

В статье [14] ее авторами отмечено также, что перед поверхностной волной вдоль границы  $x_2 = 0$  в эксперименте не наблюдается опережающая поперечная волна, хотя классическая теория упругости ее предсказывает. По логике явления распространения волн, если бы на границе существовала опережающая поперечная волна, то в глубине области она должна была бы также существовать и быть третьей поперечной волной или должна бы была соединиться с внутренней  $S$ -волной. В последнем случае эта волна должна была увеличивать свою интенсивность до максимального значения в  $S$ -волне.

Все это говорится для того, чтобы показать, что если бы опережающая поперечная волна существовала, то она должна была бы четко наблюдаться на фотографиях. Но как выше было сказано, на фотографиях другой волны, кроме поверхностной, не наблюдается.

Таким образом, вдоль границы вблизи нее за продольной волной распространяется одна волна. С какой скоростью распространяется эта волна? Нарисованный на фотографиях круговой  $S$ -фронт в окрестности границы для времен наблюдения 190 и 290 мкс, как видно, хорошо представляет фронт этой волны. Следовательно, поверхностная волна распространяется со скоростью поперечных волн, т.е. эта волна поперечная. Что неправильного в данной логике? Судить читателям. Ну а в глубине области поверхностная волна очень органично, как было показано в подразд. 2.5, переходит в  $S$ -волну, т.е. является частью этой волны. Передняя изоклина  $S$ -компоненты без всяких отклонений совпадает с передней изоклиной  $S$ -волны, и то же самое происходит с задними изоклинами, центры волн также без отклонений переходят один в другой. Получается нормальная без особых изгибов поперечная волна, доходящая до границы полуполосы.

Следующим любопытным фактом, наблюдаемым на фотографиях, является существование у задней части поверхностной шапки пограничной части  $S$ -волны не затухающей в глубь области  $S$ -компоненты в виде изоклин. Эти изоклины, отмеченные на фотографиях цифрой "1", ясно просматриваются на картинах, соответствующих временам наблюдения 107, 123, 139, 156, 172, 190 мкс (см. рис. 2.6,а—д; 2.9,б).

Незатухающая компонента имеется и у передней кромки шапки, но с удалением от границы она соединяется с задней кромкой  $PS$ -волны, которая достаточно близко расположена к передней кромке шапки, и выводы о незатухании  $S$ -компоненты передней части шапки являются достаточно неубедительными.  $S$ -компонента задней кромки шапки удаляется без всякого убывания почти до оси  $x_2$  и никак не опережает заднюю кромку шапки. Наличие такой незатухающей  $S$ -компоненты пограничной волны говорит о том, что эта компонента и пограничная волна в целом распространяются со скоростью поперечной волны. Можно еще достаточно много приводить аргументов, доказывающих то, что пограничная волна является поперечной волной, но сказанного, вероятно, уже достаточно и можно прекратить дальнейший анализ фотографий.

Спрашивается, достаточно ли одного эксперимента, чтобы окончательно убедиться в правильности здесь сказанного и в неправильности классической теории. Ответ на этот вопрос очевидный: недостаточно. В книге приведены результаты других экспериментов, подтверждающих правильность предлагаемой теории, однако жизнь показывает, что постоянно нужны будут все новые эксперименты. Но правомерность предлагаемой теории на существование и на применение для решения динамических задач теории упругости рассмотренные эксперименты, по мнению автора, обеспечивают. Абсолютно правильных теорий не бывает и быть не может, все теории работают в определенных пределах применимости, и это нормально. Только на такую правильность претендует предложенная четырехмерная теория упругости. Окончательное решение по этому вопросу должна вынести научная жизнь.

В научной литературе имеется очень много работ, посвященных обоснованию правильности классической динамической теории упругости, и вряд ли имеется хотя бы одна работа, в которой подвергается сомнению эта правильность. Автору такая работа неизвестна. Отметим еще раз, что и здесь правильность статической трехмерной теории упругости не подвергается сомнению. Но вот о динамической теории в данной книге говорится другое.

Зная такое положение дел, автор пошел по пути документального подтверждения полученных результатов, по пути такого представления аргументов доказательства, чтобы читатель мог сам проверить эти доказательства. Представленные фотодокументы получены исследователями, которые ни в малейшей степени не сомневались в правильности классической динамической теории упругости и, наоборот, подтверждали экспериментами ее правильность. Поэтому фотодокументы их экспериментальных исследований в данном случае являются объективными.

Опыт общения со специалистами во время докладов автора по данной проблеме, а также во время личных бесед показал, что восприятие результатов экспериментальных исследований такое, что выводам из них, сделанным докладчиком, специалисты практически не верят. Но все знают, что главным критерием правильности теории является эксперимент. Спрашивается, как представить результаты эксперимента, чтобы читатель поверил в выводы из них. Оказалось, что это достаточно сложное дело. Поэтому-то здесь и принят метод представления этих результатов вместе с подтверждающими их документами экспериментальных исследований — фотографиями волновых фронтов: проверить обоснованность утверждений можно сразу. Предлагаемый анализ экспериментальных результатов, возможно, излишне кропотливый и длинный, постоянно хочется его сократить. Но проблема очень серьезная и требуется серьезно обосновывать новые утверждения.

Может возникнуть предположение, что неправильным является проводимый в данной книге анализ этих исследований. Автор постоянно имел и имеет в виду такое положение дел и постоянно на протяжении более трех десятков лет со времени получения четырехмерных уравнений ищет возможные неправильности в ее обосновании. Пока такие неправильности им не найдены, а, наоборот, находятся все новые подтверждения правильности этих уравнений, и он предлагает читателям найти ошибки, если они имеются, в предлагаемом подходе к динамике упругих тел (конечно, какие-то ошибки, к сожалению, могут быть). Автор готов проанализировать и другие работы с результатами экспериментальных исследований, в которых доказывается существование поверхностных волн, если в них имеются документы типа фотографий, которые подтверждают эти доказательства. Он просмотрел не один десяток подобных работ, после изучения которых не получил доказательств правильности существования поверхностных волн, а зачастую это изучение приводило к подтверждению результатов, излагаемых в данной книге. О некоторых из этих работ здесь говорится.

Конечно же, существует предположение, что автор подогнал результаты экспериментальных исследований под желаемый вывод и из нормальных выводов получил то, что хотел. Хочется объяснить, что это не так. Авторы работы [14], не сомневаясь в правильности классической теории упругости, твердо зафиксировали следующие, уже обсужденные в подразд. 2.5, ярко выраженные разногласия эксперимента и этой теории. Приведем их.

1. Напряжения в поверхностной волне, распространяющейся вдоль границы полуполосы, не убывают до нуля, вопреки теории, с удалением от границы в глубь области, а, наоборот, начинают возрастать с некоторого расстояния от границы в глубине области.

2. Перед поверхностной волной не наблюдается предсказываемая теорией поперечная волна.

3. Уровень максимальных напряжений в поверхностной волне, предсказанных теорией, на порядок превышает уровень этих напряжений, измеренных экспериментально.

4. Напряжения в поверхностной волне с удалением от точки взрыва, согласно теории, не затухают, а, согласно эксперименту, затухают примерно с такой же скоростью, что и в продольной волне.

Перечисленные расхождения очень серьезные, и наука должна давать обоснованные объяснения им. Классическая теория упругости дать такие объяснения не может, поэтому хочется или не хочется, а приходится сомневаться в правильности этой теории. Предложенная же четырехмерная теория упругости удивительным образом снимает эти расхождения с экспериментом. Новая теория достаточно простая, не содержит новых параметров типа модулей упругости, все параметры те же, что и в классической трехмерной теории. Она естественным образом получается путем обобщения трехмерной теории, в теоретическом отношении является научно обоснованной, что здесь и показано. Поэтому объяснение ею указанных расхождений является хорошей поддержкой этой четырехмерной теории упругости.

## **2.7. О некоторых других экспериментах, расходящихся с классической теорией и согласующихся с четырехмерной теорией упругости**

Рассмотрим некоторые другие расхождения классической теории упругости и эксперимента. Например, одно из расхождений следующее. В справочнике [21] приведены данные по модулям упругости  $E$  и сказано, что модули можно определять статическими и динамическими методами и динамический модуль упругости  $E$ , так будем называть модуль упругости, связав название с методом измерения, как правило, больше статического модуля  $E$ . В справочнике приведены модули, в подавляющем большинстве измеренные динамическим методом. Сказано, что это отличие динамических и статических модулей объясняется последствием в поведении материала, т.е. зависимостью поведения измеряемых модулей от времени. Такое объяснение часто встречается и в других литературных источниках. Без проведения серьезных исследований, доказывающих правильность такого объяснения, оно, это объяснение, является только предположением, и не больше, и об этом выше уже говорилось.

Вопрос о различии значений статических и динамических модулей упругости является очень серьезным и ответить на него простой фразой, приведенной выше, значит не ответить вовсе. В этом подразделе

чуть позже приведены значения модулей для некоторых материалов, измеренных тем и другим методами, и видно, что отличие может быть достаточно большим. Каким же модулем пользоваться при решении практических задач? Ответ обычно дают такой — динамическим. Правильен ли такой ответ? Выяснением этого и займемся.

Скорость продольных волн в стержнях имеет прямое отношение к методике измерения модуля Юнга  $E$  динамическим методом. Модуль  $E$  выражается через классическую скорость  $c_c$  продольных волн в стержнях следующим образом:  $E = c_c^2 \rho$ . Один из динамических методов определения состоит обычно из измерения резонансной частоты продольных колебаний стержня с последующим расчетом модуля  $E$ . Если измерить в стержне скорость распространения продольной волны, то модуль  $E$  можно определить по вышеприведенной формуле. Статический метод измерения модуля  $E$  включает процедуру растяжения стержня, измерения деформации и определения по значениям рассчитываемого напряжения и измеренной деформации модуля  $E$ . Конечно, вариантов измерения модулей может быть много, методы измерения выбирают и разрабатывают исследователи.

Как выше было сказано, в справочнике [21] динамический модуль всегда больше статического модуля. В другом справочнике [22] приведены конкретные результаты измерения статическим и динамическим методами модуля Юнга  $E$  для урана, полученного способом литья: динамический модуль  $E = 2,03 \cdot 10^6$  кгс/мм<sup>2</sup>, а статический модуль  $E = 1,65 \cdot 10^6$  кгс/мм<sup>2</sup>. В этом справочнике приведены данные модуля  $E$  для стали 1Х15Н15М2К3ВТ, полученной методом литья: статический модуль  $E = 1,65 \cdot 10^6$  кгс/мм<sup>2</sup> и динамический модуль  $E = 2,1 \cdot 10^6$  кгс/мм<sup>2</sup>,  $\nu = 0,3$ . Как видим, отличие модулей существенное, порядка 30%. К сожалению, для других материалов таких данных больше не приведено.

С этим различием модулей ученые смирились, хотя по научной логике теории упругости для упругого тела модуль Юнга должен быть одним и тем же как в статике, так и в динамике, иначе встает серия вопросов. Зависимость модуля упругости от времени, которой объясняют различие статических и динамических модулей, не должна существенно проявляться в упругих телах при малых напряженных состояниях, которые создают при измерениях. Не должно быть различия модулей для достаточно высокопрочных сталей, которые ведут себя совершенно упруго, и т.д. Почему в научной литературе нет сведений о серьезных экспериментальных исследованиях этой важной и с научной, и с прикладной точек зрения зависимости модуля Юнга от времени в постановке, объясняющей указанное расхождение? Ответа на этот вопрос пока нет.

В соответствии с классической стержневой моделью динамический модуль Юнга  $E$  определяется, как выше было сказано, по формуле  $E_c = c_c^2 \rho$ . Индексы обозначают, что модуль Юнга и скорость продольных волн в стержне определяются по классической теории. Согласно классической теории, квадрат скорости продольных волн в стержне  $c_c^2 = E_c \rho^{-1} = \mu(3\lambda + 2\mu)(\lambda + \mu)^{-1} \rho^{-1}$ .

Согласно четырехмерной теории упругости, скорость продольных волн в стержне равна скорости  $c_1$  продольных волн в трехмерном теле,  $c_1^2 = (\lambda + 2\mu)\rho^{-1}$ . Если бы измерения проводились в соответствии с четырехмерным представлением о стержне, то измеряемая скорость продольных волн в стержне определяла бы трехмерную скорость продольных волн. Эта скорость так определяет параметр  $\lambda + 2\mu$ :

$$\lambda + 2\mu = \rho c_1^2.$$

Модуль Юнга  $E$  после подстановки вместо  $\lambda$ ,  $\mu$  их значений (1.10) через модуль Юнга и коэффициент Пуассона определяется по формуле

$$E = \zeta c_1^2 \rho, \quad \zeta = (1 + \nu)(1 - 2\nu)(1 - \nu)^{-1}.$$

Предположим, что при динамическом способе измерения модуля упругости измеряется скорость продольных волн в стержне. Согласно классической теории, модуль Юнга определяется, как выше было показано, по формуле

$$E_c = c_c^2 \rho.$$

Согласно четырехмерной теории упругости,  $c_c^2 = c_1^2$ . Следовательно, значения модулей Юнга, определенных по выписанным формулам, отличаются в  $\zeta$  раз.

Коэффициент  $\zeta$  для материалов с реальными коэффициентами Пуассона  $\nu$  всегда меньше единицы, поэтому модуль  $E_c$  всегда больше модуля  $E$ . Значение модуля Юнга, соответствующего четырехмерной модели упругого тела, можно определять по измеренным значениям этого модуля в соответствии с классической теорией по формуле

$$E = \zeta E_c.$$

Для урана коэффициент Пуассона  $\nu = 0,22$  и соответственно коэффициент  $\zeta = 0,87$ . Тогда модуль Юнга, определенный в соответствии с четырехмерной моделью,  $E = 1,77 \cdot 10^6$  кгс/мм<sup>2</sup>. Как видим, этот модуль значительно меньше отличается от статического модуля  $E = 1,65 \cdot 10^6$  кгс/мм<sup>2</sup>, чем вышеприведенный измеренный динамическим методом модуль  $E_c = 2,03 \cdot 10^6$  кгс/мм<sup>2</sup>.

Если пересчитать по вышеприведенной методике динамический модуль для стали и получить его в соответствии с предлагаемой моделью теории упругости, то получим, что динамический модуль  $E = 1,55 \cdot 10^6$  кгс/мм<sup>2</sup>. Значение этого динамического модуля неплохо совпадает со значением статического модуля  $E = 1,65 \cdot 10^6$  кгс/мм<sup>2</sup>.

Представленный анализ показывает, что если модули упругости измерять динамическим методом и результаты измерений обрабатывать по методике, основанной на четырехмерной теории упругости, то динамический и статический методы дадут близкие значения модулей. Классическая теория упругости дает неточную методику обработки результатов измерений, и это приводит к указанному различию динамических и статических модулей Юнга. Таким образом, предлагаемая динамическая теория упругости устраняет данное противоречие классической теории упругости с экспериментом.

Другое расхождение классической теории и эксперимента наблюдается в проблеме скоростей продольных волн в пластинах и стержнях. Классическая теория дает соответственно следующие формулы для продольных волн в пластинах  $c_n$  и стержнях  $c_c$ :

$$c_n^2 = 4\mu(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)^{-1}\rho^{-1}, \quad c_c^2 = \mu(3\lambda + 2\mu)(\lambda + \mu)^{-1}\rho^{-1}.$$

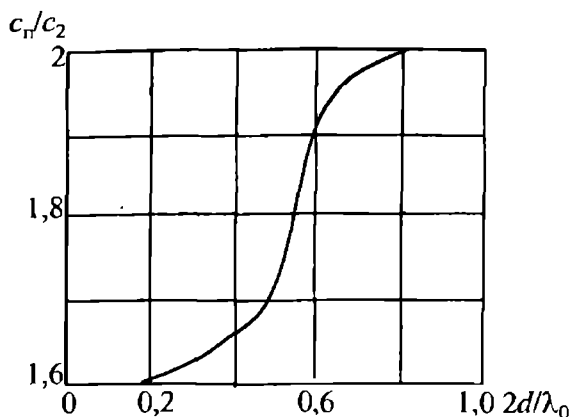
Скорость в стержне меньше, чем в пластине, а скорость в пластине меньше, чем в трехмерном теле. Согласно же четырехмерной упругости, скорости продольных волн и в пластине, и в стержне, и в трехмерном теле одинаковые.

Что же говорит эксперимент? По поводу скоростей продольных волн в пластинах эксперимент говорит следующее. В работе [12] приведены результаты экспериментального исследования этих скоростей в пластинах и о результатах этих исследований можно сообщить в форме цитаты из этой работы. "Обработка данных эксперимента показала, что скорость распространения поперечных волн в пластине не зависит от ее толщины и длительности прикладываемого (к торцу) импульса, в то время как скорость распространения волн сжатия зависит от отношения толщины пластинки к длительности импульса. Зависимость отношения  $c_n/c_2$  от отношения  $2d/\lambda_0$  ( $2d$  — толщина пластинки,  $\lambda_0$  — длина волны) показана на рис. 2.10, из которого следует, что до значений  $2d/\lambda_0 \leq 0,2$  скорость волн сжатия в пластинке близка к скорости  $c_n$ , определяемой по формуле (она выше приведена), начиная со значений  $2d/\lambda_0 \geq 0,7$ , эта скорость близка к скорости распространения продольных волн в упругом теле". Из приведенной цитаты следует, что скорость продольных волн в пластинах, длина которых меньше или порядка толщины пластины, т.е. скорость коротких волн, равна скорости продольных волн в трехмерном теле.

Основной вывод из приведенного экспериментального исследования, существенный для проводимого здесь анализа, состоит в том, что фронт продольной волны в пластине распространяется со скоростью этих волн в трехмерном теле. Это так потому, что на небольшом участке фронта часть волны всегда можно считать коротковолновой, на которую и распространяется сформулированный выше результат.

Исследованием распространения волн в пластинах много занимались, применяя метод фотоупругости. Приведенные в подразд. 2.5 результаты исследования распространения волн в полуполосе от сосредоточенного взрыва свидетельствуют об этом. Много результатов по этому вопросу приведено в монографиях [12, 13]. Анализ этих результатов и выводы, сделанные в этих работах, говорят о том, что распространяющаяся волна в пластинах в результате имеющего место постоянного отражения от границ — плоскостей полосы — постоянно увеличивает свою длину. Об этом же свидетельствуют графики волновых картин в различные моменты времени, полученные в работе [14] и приведенные в подразд. 2.5, из которых следует, что с течением времени волны в пластине удлиняются. При условии, что передний фронт продольной волны распространяется с постоянной трехмерной скоростью, скорость гребня волны и волны в целом по причине увеличения ее длины постоянно уменьшается.

Это явление еще больше наблюдалось при исследовании продольных волн в стержнях. В работе [13] представлены экспериментальные данные, показывающие, что первую треть длины стержня продольная волна распространяется с трехмерной скоростью, а затем скорость волны начинает убывать. В этой работе подробно рассмотрен вопрос о постоянном увеличении длины волны, приведены соответствующие графики. Анализируя эти результаты, можно о распространении продольной волны в стержне сказать то же самое, что было выше сказано по этому вопросу о волнах в пластине: скорость фронта продольной волны в стержне равна трехмерной скорости продольных волн, а скорость самой волны по причине увеличения ее длины постоянно уменьшается. В работе [13] даже отмечен факт, что задний фронт продольной волны в стержне через некоторое время может начать дви-

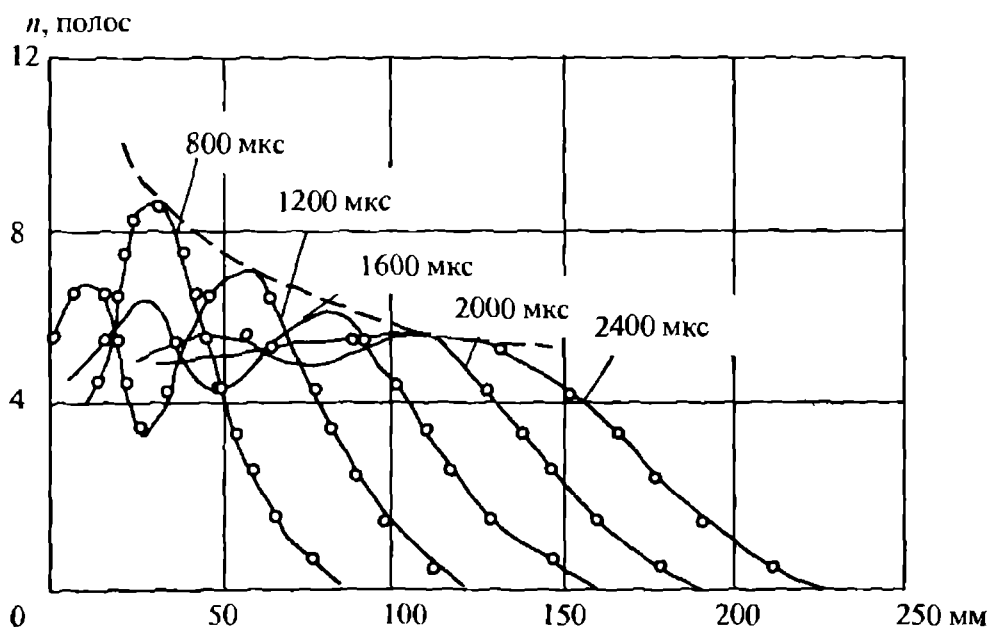


Р и с. 2.10. График зависимости скорости продольной волны в пластине от относительной к толщине пластины длины волны

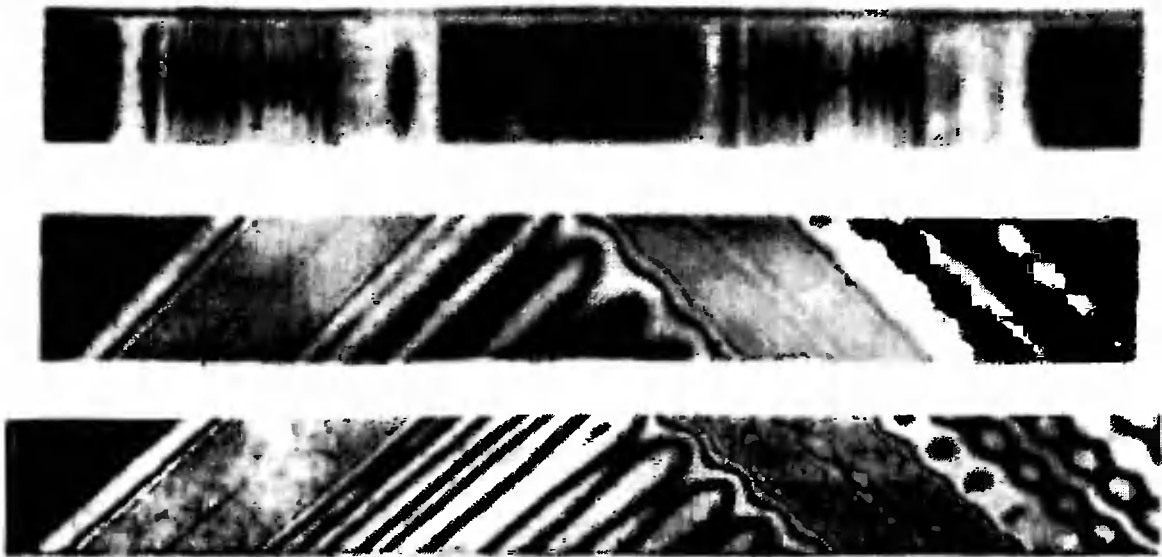
гаться в обратную сторону все по той же причине постоянного переотражения от боковых поверхностей стержня. На рис. 2.11, заимствованного из рассматриваемой работы, приведены графики напряжений, иллюстрирующие продольную волну в стержне в различные времена и из которых четко видно указанное явление увеличения длины волны.

Говорить о постоянстве скорости продольных волн в пластинах и стержнях можно с определенными ограничениями в силу отмеченной изменчивости длины волны, но говорить о скорости фронта волны, опираясь на приведенные данные экспериментальных исследований, можно твердо — эта скорость и в пластине, и в стержне, и в трехмерном теле одна и та же. Этот вывод согласуется с вышеприведенным теоретическим результатом четырехмерной теорией упругости.

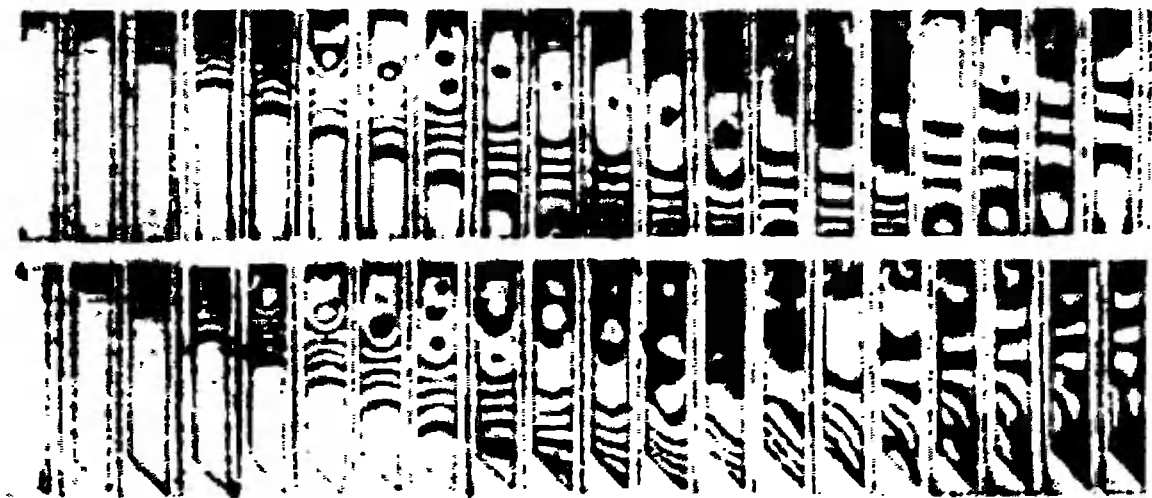
Рассмотрим другие результаты экспериментальных исследований продольных волн в стержнях и пластинах. В соответствии с классической теорией в полубесконечных полосах-пластинах с прямолинейной границей нет продольных волн с фронтом, перпендикулярным к границам полос. Приведенные в работах [12, 13] фотографии волновых фронтов, две из которых приведены здесь (рис. 2.12, 2.13), говорят об обратном. С момента импульсного воздействия на торец балки по ней распространяется продольная волна без заметных изменений формы вблизи фронта. По классической теории эта прифронтная часть волны должна исчезать и должна формироваться балочная волна с фронтом на определенном удалении от трехмерного фронта. Такой процесс на фотографиях не наблюдается и нет намека на его проявление.



Р и с. 2.11. Формы распространяющейся продольной волны в балке в различные моменты времени



Р и с. 2.12. Картины падающих и отраженных продольных волн в балках



Р и с. 2.13. Распространение продольной волны в балках с разными формами края

Экспериментальные наблюдения показывают также, что сформировавшийся в начале динамического процесса фронт продольной волны сохраняется и в пластинах на протяжении всего времени наблюдения. Об этом свидетельствуют фотографии распространения этих волн от сосредоточенного взрыва на границе полуполосы из работы [14], рассмотренной в подразд. 2.5 (рис. 2.1, 2.6). Прифронтная часть продольной волны не исчезает, согласно приведенным на этих рисунках фотографиям, не изменяет своего вида, а нормально существует на протяжении всего времени наблюдения волны без заметных изменений. Такого не должно быть согласно классической теории упругости; фронт продольной волны в пластине, как и в балке, должен был измениться и превратиться в пластиночный, который распространяется с меньшей скоростью.

Таким образом, согласно большому количеству экспериментов и вопреки классической теории, фронты продольных волн в пластинах и балках распространяются со скоростью продольных волн в трехмерных телах. Этот вывод из экспериментальных исследований хорошо согласуется с результатом четырехмерной теории упругости, изложенным в подразд. 2.4, что еще раз подтверждает практическую работоспособность и значимость этой теории.

Можно привести и другие факты, подтверждающие правильность предложенной модели упругого тела. В классической динамической теории упругости имеются еще обстоятельства, требующие объяснения. Например, при равномерном движении ненагруженного тела со свободной границей полная энергия деформации, равная сумме кинетической и потенциальной энергий, отлична от нуля, а напряженно деформированное состояние отсутствует, так же как и энергия упругой деформации. Объяснение этому обстоятельству в классической теории имеется, но, если смотреть на это с позиции теории упругости, такое явление смотрится неестественным, каковым, по мнению автора, оно и является на самом деле. Энергия имеется, а деформации отсутствуют. Энергия движения тела как абсолютно твердого не имеет отношения к энергии упругой деформации.

Все тела всегда находятся в движении или относительно Земли, или относительно Солнца, или еще относительно какого-либо места, и энергия всегда у тела имеется, но она не имеет отношения к энергии упругой деформации и не должна рассматриваться в теории упругости, как это происходит с кинетической энергией в классической теории. Получается, что понятие энергии деформации в классической динамической теории упругости не определено полностью, потому что, меняя скорость равномерного движения тела, будем иметь разную энергию тела, хотя напряженное состояние тела будет всегда одним и тем же.

В рамках предлагаемой модели для равномерно движущегося недеформированного тела полная энергия динамической деформации равна нулю и указанное противоречие отсутствует. В нуль она обращается потому, что в этом случае деформации  $\epsilon_{\alpha t} = 0,5(v^{-1}u_{\alpha,t} - v\tau_{,\alpha})$  обращаются в нуль при  $\tau = v^{-2}u_{\alpha,t}x_{\alpha}$ . При равномерном движении скорости  $u_{\alpha,t}$  частиц тела постоянные и функция  $\tau$  является линейной функцией координат. В теле со свободной границей пространственные перемещения также могут быть линейными функциями пространственных координат. Таким образом, данное противоречие классической теории и практики снимается четырехмерной теорией упругости.

Неестественным в классической теории упругости смотрится и то обстоятельство, что в силах инерции динамических уравнений равновесия присутствуют компоненты, определяемые в рамках механики

твердых недеформируемых и не взаимодействующих друг с другом частиц тела, и отсутствуют компоненты, связанные с силовым взаимодействием частиц друг с другом, появляющимся в процессе динамической деформации тела. Полученные новые уравнения указанные компоненты содержат.

Обоснование можно продолжать долго, и автор будет продолжать обосновывать эту новую теорию, но желательно, чтобы кто-нибудь другой тоже заинтересовался ею и что-то сделал для утверждения или опровержения ее. Четырехмерная теория упругости открывает новые динамические явления в упругих телах, не описываемые классической теорией, более правильно освещает известные явления и в этом есть ее положительное свойство и ее нужно разрабатывать более детально, как разработана классическая теория упругости.

## 2.8. Результаты экспериментальной проверки четырехмерной упругости

Можно подвести итоги сравнения результатов экспериментальных исследований динамических задач деформируемых упругих тел с результатами исследования этих задач в рамках четырехмерной теории упругости. Конечно, имеются еще другие, кроме рассмотренных здесь, экспериментальные исследования, подтверждающие правильность предложенной четырехмерной модели упругого тела, однако когда-то нужно и остановиться. Обоснование четырехмерной модели, как уже говорилось, можно продолжать, и такое обоснование должно иметь место во все время ее существования, что вполне естественно. Пример классической теории упругости это показывает: сомнений в правильности классической динамической теории упругости, вероятно, не было ни у кого. Эта мысль никому, кроме автора данной работы, до сих пор даже не могла прийти в голову, и это всегда четко чувствовалось среди участников во время докладов автора на данную тему. И вот приводятся аргументы, утверждающие, что указанная теория неверна. Про ученого, который приводит такие аргументы, практически все слушатели и читатели вначале просто говорят, что он в лучшем случае чужак и несерьезный ученый. И тем не менее этот ученый продолжает утверждать, то классическая динамическая упругость неверна и приводит серьезные аргументы в пользу такого утверждения. Статическая же теория упругости остается верной. Таким образом, ученые, уверенные в правильности классической теории, должны доказывать правильность ее сравнением с экспериментами.

Уравнения четырехмерной теории упругости с теоретической точки зрения правильные, это было показано в разд. 1. Вопрос ставился только в том смысле, что существуют ли в земных условиях задачи для

упругих тел, в которых компонента перемещения времени отлична от нуля. Может случиться так, что в земных условиях эта компонента всегда равна нулю, и тогда четырехмерная теория упругости может быть только чисто формальной наукой, не имеющей реального значения. С целью получить ответ на это предположение и проводилась вся эта экспериментальная проверка новой теории.

В этом разделе приведено достаточно много экспериментальных явлений, подтверждающих реальную значимость четырехмерной теории. Классическая теория не объясняет описанные выше экспериментальные явления, а четырехмерная объясняет. Правда, встает вопрос, а нельзя ли объяснить несоответствие классической теории и эксперимента какой-либо другой моделью явления — типа динамической реологии, вязкоупругости, динамического микроразрушения и т.д. Что можно на это сказать? Конечно, можно. Для каждого явления несоответствия эксперимента и теории можно построить теоретическую модель, объясняющую это несоответствие. Но что такое теоретическая модель? Как правило, это серьезнейшая наука, требующая, кроме теоретического построения ее, проведения большой экспериментальной исследовательской работы по построению необходимых в каждой модели параметров, характеристик для уравнений состояния и т.д. Получение этих характеристик экспериментально — работа на многие годы многих исследователей. На каждое из рассмотренных выше несоответствий теории и эксперимента нужна своя отдельная модель. Сказать же, что какое-то несоответствие объясняется, например, микроразрушениями в окрестности точки взрыва, как это сказано в работе [14], для объяснения большого — в десять раз — превышения теоретических значений напряжений в поверхностной волне над экспериментальными и никак не обосновывать это объяснение — с научной точки зрения значит ничего не объяснить. А обосновать научно такое утверждение, как уже говорилось в подразд. 2.5, чрезвычайно трудно и автору даже не представляется в настоящее время, как это можно сделать и можно ли на самом деле.

Выходит, что сколько отмечено выше расхождений теории и эксперимента, столько и нужно строить моделей. Реально такой подход к объяснению несоответствий вряд ли выполним, поэтому он и не реализован до настоящего времени. Предложенная четырехмерная модель упругого тела не требует введения новых констант в обобщенный закон Гука, которые нужно определять экспериментально. В четырехмерных уравнениях содержатся известные из классической теории упругости параметры. И при всем этом удастся снять многие противоречия классической теории и эксперимента. Теперь спрашивается, имеется ли что-нибудь противозаконное в самом построении новой

модели. Новое в этом построении — это введение деформации временной координаты. Но автор не выдумал это действие, оно давно используется в физике, астрономии, астрофизике и т.д. Поэтому учет этой деформации в теории упругости не является противозаконным или противонаучным.

Вначале при построении четырехмерных уравнений автором данной книги была принята гипотеза о формировании четырехмерной метрики упругого пространства при помощи скорости света, как это сделано при выводе уравнений теории гравитационного поля. Но как это не удивительно, получились в результате обычные уравнения упругости, не содержащие скорости света. Потом была принята гипотеза о формировании метрики упругого тела на основе скорости продольных волн. Но принятие такой гипотезы оказалось ненужным делом, результат следовал один, уравнения получались одними и теми же. И вопрос о введении гипотезы о предельной скорости распространения возмущений в четырехмерном упругом пространстве, которая определяла бы метрический тензор этого пространства, отпал. Скорость распространения возмущений, волн в упругой среде определяется уравнениями и параметрами закона Гука, а эти параметры определяются экспериментально.

Подводя теперь итоги проведенных в этом разделе сравнений четырехмерной теории упругости и эксперимента, можно сказать, что рассмотренные эксперименты подтвердили правильность этой теории. Тщательная проверка результатов экспериментальных исследований существования поверхностных волн в полуполосе показала, что таких волн нет. Волны, которые принимали за поверхностные, оказались поперечными. Четырехмерная упругость также утверждает, что поверхностных волн в полуполосе нет. Эта задача в данной работе рассмотрена, может быть, излишне подробно. Объяснением этому является то, что эта задача хорошо исследована экспериментально, в научной литературе представлены фотографии с зафиксированным динамическим напряженным состоянием в различные моменты времени явления распространения разных волн. Эти фотографии представляют реальный динамический процесс, который изучили авторы и который можно при желании продолжать изучать, а результаты изучения можно серьезно контролировать. Не воспользоваться такой ситуацией просто грешно, а представлять результаты такого изучения, приспособленные к желанию исследователя, а не логически полученные, опасно с точки зрения их несложной проверки. И вот такое детальное изучение экспериментальных исследований распространения поверхностных волн привело к тому, что подтвердило правильность четырехмерной модели упругого поля.

В существующей практике измерения модуля упругости — модуля Юнга — статическим и динамическим методами постоянно существует противоречие: измерения модуля динамическим методом давали значения модуля Юнга больше, чем измерения этого модуля статическим методом. С этим смирились и приняли, что более правильными являются измерения динамическим методом. В действительности оказалось, что методика обработки данных динамических измерений, основанная на классической динамической теории упругости, является неверной. Если методику обработки данных динамических измерений строить, исходя из четырехмерной теории, то расхождения измерений модуля Юнга статическим и динамическим методами существенно уменьшатся.

Скорости распространения продольных возмущений в трехмерных упругих телах, в пластинах, в стержнях, согласно классической теории, разные, согласно четырехмерной теории — одинаковые. Внимательный анализ существующих в научной литературе экспериментальных данных подтверждает этот результат четырехмерной теории.

Согласно четырехмерной теории упругости, в упругой среде существует новая компонента тензора деформаций — деформация динамического расширения-сжатия вещества, описываемая деформацией координаты времени. Эта деформация похожа по внешним параметрам на температурную, но анализ ее участия в динамическом деформационном процессе говорит и о расхождении ее с классической температурной деформацией. Для более четкого ответа на вопрос о физической природе деформации времени нужны дополнительные экспериментальные исследования. Пока можно на основании экспериментального подтверждения правильности новой теории упругости уверенно утверждать, что указанная деформация динамического расширения-сжатия вещества существует. Это интересный результат сам по себе.

Таким образом, получается, что четырехмерные уравнения упругого поля в результате проведенных сравнений решений этих уравнений с результатами экспериментальных исследований получили дополнительно к теоретическому экспериментальное подтверждение своей правильности и поэтому должны иметь право на свое научное существование: экспериментальных проверок уже оказалось достаточно много.

Следует отметить, что автор не отрицает полностью классическую динамическую теорию упругости, которая достойно служила и будет служить теории и практике. Например, если в начальных и граничных условиях положить  $\tau = 0$ , то такие задачи должны рассматриваться в рамках классической теории. Что это за задачи, является предметом отдельного исследования. Однако наука должна развиваться, модели должны совершенствоваться, и в этом отношении предлагаемая модель

послужит, как автор надеется, именно развитию науки — механики деформируемых упругих сред. Результаты полученных решений новых уравнений уже на данном этапе имеют, кроме теоретического, и практическое значение.

Представленное тщательное сравнение эксперимента и четырехмерной теории упругости является нужным еще с той точки зрения, что на правильности этой теории основаны серьезные выводы, полученные в разд. 3, в области гравитации и электродинамики.

## 2.9. Свободные колебания упругого шара

В данном подразделе специально рассматривается теоретическая — в рамках четырехмерной теории упругости — задача о свободных колебаниях упругого шара, решение которой можно рассматривать как заявку на эксперимент, который следует провести с целью запланированного будущего сравнения частот свободных колебаний шара, определенных экспериментально и найденных по четырехмерной теории. Данная задача простая и допускает несложное точное решение. Упругие шары являются достаточно распространенными элементами конструкций, одним из них является шаровой элемент шарикоподшипника. Поэтому найти шар для проведения эксперимента по определению его свободных резонансных колебаний тоже несложно.

Автору самому хотелось бы провести такой эксперимент по исследованию свободных колебаний упругого шара. Но действительность пока не позволяет этого сделать. Эксперимент не очень дешевый, потому что нужно работу выполнять достаточно точно и чисто с точки зрения устранения возможных помех. Эта работа не прикладная и на ее выполнение в настоящее время нет заказчика. Поэтому пока предлагается теоретическое исследование этой задачи в рамках четырехмерных уравнений упругости с надеждой на проведение данного эксперимента в ближайшем будущем или автором, или другим исследователем с целью сравнения результатов теории и эксперимента.

Для теоретического решения задачи нужны четырехмерные уравнения упругости в сферических координатах. Пока эти уравнения (подразд. 1.4) записаны в прямоугольных декартовых координатах. Уравнения в перемещениях (1.27) разделились на уравнения для пространственных компонент перемещений и на уравнение для временной компоненты; для пространственных компонент перемещений уравнения сохранили свой вид, который они имеют в классической теории упругости, и к этим уравнениям добавилось уравнение для временной компоненты. Эта ситуация оказалась удобной для случаев перехода от одной координатной системы к другой.

В классической теории упругости уравнения записаны в различных системах координат: в сферической, цилиндрической, эллипсоидальной и в других системах, поэтому воспользуемся здесь данными, приведенными, например, в работе [6], и запишем уравнения четырехмерной теории упругости в сферических координатах. Связь координат  $x_1, x_2, x_3$  со сферическими координатами ( $r$  — радиус,  $\vartheta$  — угол, отсчитываемый по меридиану от Северного полюса,  $\varphi$  — долгота, т.е. угол в плоскости  $x_1, x_2$ , отсчитываемый от оси  $x_1$ ) имеет вид:  $x_1 = r \sin \vartheta \cos \varphi$ ,  $x_2 = r \sin \vartheta \sin \varphi$ ,  $x_3 = r \cos \vartheta$ . Соотношения деформации-перемещения имеют вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= u_{r,r}, \varepsilon_\vartheta = r^{-1} u_{\vartheta,\vartheta} + r^{-1} u_r, \varepsilon_\varphi = r^{-1} \sin^{-1} \vartheta u_{\varphi,\varphi} + r^{-1} \operatorname{ctg} \vartheta u_\vartheta + r^{-1} u_r, \\ 2\varepsilon_{r\vartheta} &= r^{-1} u_{r,\vartheta} + u_{\vartheta,r} - r^{-1} u_\vartheta, 2\varepsilon_{r\varphi} = r^{-1} \sin^{-1} \vartheta u_{r,\varphi} + u_{\varphi,r} - r^{-1} u_\varphi, \\ 2\varepsilon_{r\varphi} &= r^{-1} (u_{\varphi,\vartheta} + \sin^{-1} \vartheta u_{\vartheta,\varphi} - u_\varphi \operatorname{ctg} \vartheta), 2\varepsilon_{r,t} = c_1^{-1} u_{r,t} - c_1 \tau_{r,t}, 2\varepsilon_{\vartheta,t} = u_{\vartheta,t} + r^{-1} \tau_\vartheta, \\ 2\varepsilon_{\varphi,t} &= u_{\varphi,t} + r^{-1} \sin^{-1} \vartheta \tau_{\varphi,t} - r^{-1} \tau_\varphi, \theta = r^{-2} \sin^{-1} \vartheta [(r^2 u_r \sin \vartheta)_{,r} + (r u_\vartheta \sin \vartheta)_{,\vartheta} + r u_{\varphi,\varphi}]. \end{aligned}$$

Уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sigma_{r,r} + r^{-1} \tau_{r\vartheta,\vartheta} + r^{-1} \sin \vartheta \tau_{r\varphi,\varphi} + r^{-1} (2\sigma_r - \sigma_\vartheta - \sigma_\varphi + \tau_{r\vartheta} \operatorname{ctg} \vartheta) - c_1^{-1} \tau_{r,t} &= 0, \\ \tau_{r\vartheta} + r^{-1} \sigma_{\vartheta,\vartheta} + r^{-1} \sin^{-1} \vartheta \tau_{\vartheta\varphi,\varphi} + r^{-1} [(\sigma_\vartheta - \sigma_\varphi) + 3\tau_{r\vartheta} \operatorname{ctg} \vartheta] - c_1^{-1} \tau_{\vartheta,t} &= 0, \\ \tau_{r\varphi} + r^{-1} \tau_{\vartheta\varphi,\vartheta} + r^{-1} \sin \vartheta \sigma_{\varphi,\varphi} + r^{-1} (3\tau_{r\varphi} + 2\tau_{\vartheta\varphi} \operatorname{ctg} \vartheta) - c_1^{-1} \tau_{\varphi,t} &= 0, \\ \Delta \tau - c_1^{-2} \tau_{,tt} &= 0, \Delta = r^{-2} [(r^{-2} \tau)_{,r}]_{,r} + ((1 - \mu^2) \tau)_{,\mu} + (1 - \mu^2)^{-1} \tau_{,\varphi\varphi}], \mu = \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Интерес здесь будут представлять центрально-симметричные или, по-другому, радиальные колебания упругого шара, потому что именно в таких колебаниях должна сильнее всего проявиться динамическая деформация плотности вещества, т.е. деформация временной координаты, и существенно повлиять на значения таких резонансных частот колебаний. Если верна четырехмерная теория упругости, то экспериментально должно наблюдаться совпадение с такими частотами, определенными по этой теории, и должно иметь место расхождение с частотами, определенными по классической теории. В нерадиальных колебаниях для большого числа частот может оказаться, что решение определяется в основном сдвиговыми компонентами решения, на которые деформация временной координаты влияет слабо, и тогда значения измеряемых резонансных частот изменятся несущественно по сравнению с значениями частот, определяемыми по классической теории.

Радиальные колебания описываются в четырехмерной теории упругости двумя функциями: радиальной компонентой перемещения  $u_r$  и временной компонентой  $\tau$ , которые зависят только от радиальной координаты  $r$ . Для временной компоненты уравнение выше выписано,

для радиального перемещения из системы для  $u_r(r)$  получается следующее уравнение (решение ищем в виде  $u_r = u_r(r)\sin\omega t$ ):

$$u_{r,rr} + 2r^{-1}u_{r,r} - 2r^{-2}u_r + k^2u_r = 0, \quad k^2 = \omega^2c_1^{-2}.$$

Для временной компоненты, которая ищется в виде  $\tau = \tau(r)\cos\omega t$ , получается точно такое же уравнение. Решение уравнений, ограниченное при  $r = 0$ , имеет вид:

$$u_r = Ak^{-2}r^{-2}(kr\cos kr - \sin kr)\cos\omega t, \quad \tau = Bk^{-1}r^{-1}\sin kr\sin\omega t,$$

где  $A, B$  — произвольные константы. Краевые условия на свободной от напряжений границе шара  $r = r_1$  имеют вид:  $\sigma_r = \sigma_{rr} = 0$ . Подставляя эти функции в граничные условия и выполняя условие существования ненулевого решения получившейся однородной системы уравнений для искомых значений  $A, B$ , т.е. полагая равным нулю определитель этой системы уравнений, получим уравнение для собственных частот радиальных колебаний упругого шара:

$$kr_1\cos kr_1 - \sin kr_1 = 0. \quad (2.20)$$

Уравнение для собственных колебаний шара, полученное по классической теории, имеет вид [7]:

$$(1 - 0,25c_1^2c_2^{-2}k^2r_1^2)\operatorname{tg} kr_1 = kr_1. \quad (2.21)$$

Уравнение (2.20) выглядит значительно проще. Немного отвлекаясь от хода решения задачи, скажем следующее. Если посмотреть на уравнение поперечных волн в полупространстве, полученное по четырехмерной теории упругости (2.10), которое получилось вместо классического уравнения для поверхностных волн (2.8), то четырехмерное уравнение также существенно проще. Можно воспользоваться не доказанным научно, но существующим в жизни положением: простота и красота являются аргументами в пользу правильности предмета обсуждения. В данном случае это положение на стороне четырехмерной модели упругого тела, которая приводит к более простым и симпатичным результатам. Это относится и к скоростям продольных волн в пластинах, в стержнях, в которых эта скорость, определенная по четырехмерным уравнениям, равна скорости продольных волн в пространстве. По классической теории упругости скорости продольных волн в пластинах и в стержнях меньше продольной скорости в пространстве и выражения для них сложноватые.

Возвращаясь к рассматриваемой задаче, отметим следующее. Любопытное следствие получается из четырехмерного уравнения (2.20): собственные радиальные колебания упругого шара не зависят от скорости поперечных волн, в то время как классические частоты зависят

от этой скорости. Если взять уравнение для собственных колебаний гипотетического шара из жидкости, для которой скорость поперечных волн равна нулю, то классическое уравнение примет вид  $\operatorname{tg}kr_1 = 0$ , а четырехмерное уравнение останется прежним и его можно переписать в виде  $\operatorname{tg}kr_1 = kr_1$ .

Таким образом, имеется различие в частотах собственных колебаний шара, определенных по классической и четырехмерной теориям упругости. Расчет первых корней четырехмерного уравнения (2.20) дал следующие их значения. Если обозначить  $x = kr_1$ , то для первых двух корней получилось:  $x_1 = 4,5$ ,  $x_2 = 7,8$ . Первые корни классического уравнения (2.21) для материала шара с коэффициентом Пуассона  $\nu = 0,24$ ,  $c_1^2 c_2^{-2} = 2(1 - \nu)(1 - 2\nu)^{-1} = 3$ ,  $x_1 = 2,6$ ,  $x_2 = 6,0$ ,  $x_3 = 9,2$ .

Как видно из этих расчетов, расхождение частот свободных колебаний шара, определенных по четырехмерной и классической теориям достаточно существенное: первые частоты отличаются примерно в полтора раза, причем частота, определенная по четырехмерной теории, больше. Выбранный пример для проверки теорий упругости оказался интересным и выполнимым. Можно проводить экспериментальное определение радиальных свободных колебаний упругого шара, сравнивать их с полученными значениями и подтверждать или опровергать какую-то из теорий.

### 3. ЕДИНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГРАВИТАЦИИ И ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

---

#### 3.1. Единство гравитации и электродинамики — следствие упругости пространства

Проведенное в разд. 1 выявление сходства уравнений четырехмерного упругого, гравитационного и электромагнитного полей привело одновременно и к возможности, и к необходимости формирования единой теории гравитации и электродинамики, конечно, пока только в линейном приближении. В данном разделе более развернуто и обоснованно, чем в разд. 1, будет показано, что уравнения гравитации и электродинамики после записи их в параметрах упругого поля являются в линейном приближении одними и теми же уравнениями. Выполненная в разд. 2 экспериментальная проверка практической правильности и значимости четырехмерной теории упругости делает ее жизнеспособной, проведенную аналогию полей научно законной, не фантастической, а положение о единой теории гравитационного и электромагнитного полей достаточно обоснованным.

Следствием всей этой деятельности явилось то, что в этом разделе уже более обоснованно представлены единые линейные уравнения гравитационного и электромагнитного полей и при этом уравнения Эйнштейна и Максвелла сохранены неизменными.

Автор данной книги не имеет права и не хочет говорить, что им получены единые уравнения, потому что уравнения получены до него. Автор только увидел интерпретацию этим уравнениям как четырехмерным уравнениям упругого поля, которая и позволила сделать заключение о единстве уравнений гравитации и электродинамики. Конечно, результаты этой интерпретации оказались удивительными.

Появилась возможность по-новому решать некоторые классические задачи гравитации и электродинамики, ставить и решать новые задачи на основе хорошо разработанных методов теории упругости. В этом разделе эта возможность реализована и продемонстрирована на конкретных задачах.

Упругая модель среды пространства гравитационного и электромагнитного полей позволила дальше развить единую теорию в отношении конкретизации параметров этой среды. В результате такого

подхода, например, получилось, что скорость гравитационных волн не равна скорости света, как до сих пор считалось, а очень намного меньше ее. Такое утверждение выглядит фантастическим и с первого взгляда несерьезным, но к нему автора привела научная логика, а не желание оригинальничать, как это, может быть, выглядит со стороны. С таким результатом многие не согласятся, но он получился и, наверное, никуда от этого не уйдешь, как только или опровергнуть этот взгляд, или принять его. Конечно, его можно не заметить, но это только на некоторое время. Взгляд этот научный и просто не соглашаться с этим нельзя.

Интересным оказался вопрос о тензорах напряжений и энергии-импульса. Ранее вопрос о тензоре механических напряжений в гравитационном и электромагнитном пространствах не ставился и не рассматривался. Эти напряжения не существовали. Был тензор энергии-импульса в том и другом пространствах, который определял кривизну пространства. Упругая модель пространства привела к существованию в нем тензора напряжений наряду с тензором деформаций, который, как оказалось, не является тензором энергии-импульса. Об этом в данном разделе достаточно развернуто говорится.

Единая теория гравитации и электродинамики даже в линейном приближении открывает хорошие возможности решения новых задач в данных областях наук, и это показано на примерах. Именно последнее побудило автора проводить такие исследования и желание ознакомить с ними других ученых: может, кто-нибудь случайно заинтересуется и тоже что-то сделает в этом направлении.

Одним из следствий единой теории гравитации и электродинамики как упругой среды явилась возможность исследования взаимодействия гравитационных и электромагнитных полей друг с другом. Ранее этот вопрос практически не ставился из-за отсутствия возможности увидеть реальное взаимодействие, так как уравнения были разные и найти свойства влияющих друг на друга полей, через которые просматривалось бы заметное силовое взаимодействие, было достаточно сложным делом. Когда определились единые уравнения, эта проблема стала обозримой, и в этом разделе подобные задачи ставятся, указан один из методов их решения.

Очень приятным, по мнению автора, оказалось то следствие упругого подхода к проблеме гравитации, что появилась возможность экспериментально подтверждать теорию гравитации на упругих моделях в лабораторных условиях. Это, конечно, не астрофизические эксперименты, но они достаточно легко исполнимы по сравнению с астрофизическими и не требуют ожиданий каких-либо звездных или галактических явлений.

### 3.2. О взаимодействии гравитационных и электромагнитных полей

Аналогия упругих, гравитационных и электромагнитных полей позволяет по-иному подойти к проблеме взаимодействия гравитационных и электромагнитных полей по сравнению с тем, как эта проблема рассматривается в настоящее время в физике. Решение ее имеет большое значение. Людей постоянно интересуют вопросы преодоления сил тяготения Земли при разработке средств передвижения по надземному пространству, вопросы преодоления сил тяготения Солнца и других планет при перемещении в межпланетном пространстве, при исследовании других планет и космоса в целом. Проблема необъятная, и интерес к ней будет только возрастать. Поэтому исследования, содержащие практические результаты по таким вопросам, желательно проводить.

Согласно результату проведенного сравнения уравнений гравитационного пространства с уравнениями упругого пространства, получается, что среду гравитационного пространства можно считать также упругой, так как она описывается уравнениями упругой среды. Конечно, вопрос о классификации гравитационной среды можно отнести и к числу философских вопросов и по нему можно дискутировать бесконечно, но это не входило в планы автора при написании данной книги. А планы состоят в поиске возможностей постановки нужных практических задач по рассматриваемой проблеме и по смежным проблемам, а также в решении этих задач.

Таким образом, для среды, в которой имеют место гравитационные и электромагнитные явления, процессы описываются уравнениями четырехмерной теории упругости, полученными в подразд. 1.4. Остается пока открытым вопрос о конкретных значениях параметра Ламе  $\lambda$  и плотности вещества среды, которые далее в этом разделе будет рассматриваться. Оставляя на некоторое время этот вопрос, рассмотрим более подробно явление упругой энергии деформации среды пространства. Такого понятия в теории поля у физиков нет, а проведенная здесь аналогия уравнений приводит к тому, что упругая энергия деформации имеется и в теории поля. Выпишем здесь функцию  $W$  для плотности этой энергии (1.21):

$$2W = \sigma_{jk}\varepsilon_{jk} = \lambda\theta^2 + 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} + \kappa_1\vartheta\varepsilon_{ii} + \kappa_2\varepsilon_{ii}^2 + \kappa_3\varepsilon_{\alpha i}\varepsilon_{\alpha i},$$

$$\kappa_1 = \kappa_3 = 2\rho\nu^2, \quad \kappa_2 = \rho\nu^4 c_1^{-2}, \quad c_1^2 = (\lambda + 2\mu)\rho^{-1}.$$

Когда параметр  $\nu$  в подразд. 1.4 был взят равным  $c_1$ , функция  $W$  имела вид (1.30):

$$2W = \lambda\theta^2 + 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} + (\lambda + 2\mu)(2\theta\varepsilon_{ii} + \varepsilon_{ii}^2 + 2\varepsilon_{\alpha i}\varepsilon_{\alpha i}).$$

В подразд. 1.4 выписаны все уравнения упругости для случая, когда параметр  $\nu$ , участвующий в преобразовании временной координаты, равен скорости  $c_1$  продольных волн. Аналогия уравнений электромагнитного и упругого полей, проведенная в подразд. 1.7, показала, что эта скорость может оказаться очень намного меньше скорости поперечных волн, поэтому при исследованиях гравитационных и электромагнитных полей лучше константу  $\nu$  положить равной скорости поперечных волн, т.е. скорости света:  $\nu = c_2 = c$ , которая не является малой. Вначале еще раз выпишем уравнения, когда константе  $\nu$  не придано конкретное значение, чтобы иметь под рукой эти уравнения в общем виде. В перемещениях уравнения равновесия имеют вид (1.27):

$$\begin{aligned} \mu \Delta u_{\alpha} + (\lambda + \mu) \vartheta_{,\alpha} - \rho u_{\alpha,tt} &= 0, \\ \Delta \tau - c_1^{-2} \tau_{,tt} &= 0. \end{aligned}$$

Константа  $\nu$  в эти уравнения не входит. В напряжениях эти уравнения имеют вид (1.26):

$$\sigma_{\alpha\beta, \beta} - \nu^{-1} \sigma_{\alpha\tau, t} = 0, \quad \sigma_{\alpha\tau, \alpha} + \nu^{-1} \sigma_{tt, t} = 0, \quad \sigma_{tt} = \sigma_{44}.$$

Обобщенный закон Гука (1.22):

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= \lambda \vartheta \delta_{\alpha\beta} + 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \kappa_1 \varepsilon_{tt} \delta_{\alpha\beta}, \\ \sigma_{\alpha\tau} &= \kappa_3 \varepsilon_{\alpha t}, \quad \sigma_{tt} = \kappa_1 \vartheta / 2 + \kappa_2 \varepsilon_{tt}, \\ \kappa_1 = \kappa_3 &= 2\rho \nu^2, \quad \kappa_2 = \rho \nu^4 c_1^{-2}. \end{aligned}$$

Функция энергии выше выписана (1.21). Теперь положим  $\nu = c_2$ . Имеем (1.31):

$$\kappa_1 = \kappa_3 = 2\rho c_2^2 = 2\mu, \quad \kappa_2 = \rho c_2^4 c_1^{-2} = \mu c^2 c_1^{-2} = \mu^2 (\lambda + 2\mu)^{-1}.$$

Закон Гука и соотношения деформации-перемещения имеют вид (1.32):

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= \lambda \vartheta \delta_{\alpha\beta} + 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta} + \mu \varepsilon_{tt} \delta_{\alpha\beta}, \\ \sigma_{\alpha\tau} &= 2\mu \varepsilon_{\alpha t}, \quad \sigma_{tt} = \mu \vartheta + \mu c^2 c_1^{-2} \varepsilon_{tt}, \\ 2\varepsilon_{\alpha\beta} &= u_{\alpha, \beta} + u_{\beta, \alpha}, \quad 2\varepsilon_{\alpha t} = c_2^{-1} u_{\alpha, t} - c_2 \tau_{, \alpha}, \quad \varepsilon_{tt} = -\tau_{, t}. \end{aligned}$$

Функция энергии примет вид (1.32):

$$2W = \sigma_{jk} \varepsilon_{jk} = \lambda \vartheta^2 + 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} + 2\mu \vartheta \varepsilon_{44} + \mu^2 (1 + 2\mu)^{-1} \varepsilon_{44}^2 + 2\mu \varepsilon_{\alpha 4} \varepsilon_{\alpha 4}. \quad (3.1)$$

Здесь еще раз подробно выписаны четырехмерные уравнения упругого поля, так как эти уравнения описывают, как было показано в разд. 1, гравитационное и электромагнитное поля и для дальнейшего обоснования этого положения в данном разделе эти уравнения будут нужны.

К рассматриваемой здесь задаче взаимодействия гравитационных и электромагнитных полей можно подойти так, как это делается в теории

упругости. Там такие задачи изучаются на основе энергетического подхода [6]. Например, два упругих поля, создаваемые, скажем, дислокациями или включениями, или какими-либо другими создателями этих полей, образуют упругую энергию деформации в твердом теле. При перемещении источников этих полей относительно друг друга значение упругой энергии может меняться. Производная от функции общей энергии деформации всего упругого тела по параметрам, характеризующим взаимное расположение отдельных полей относительно друг друга, и определяет силовое взаимодействие этих полей. Это общее положение, принятое в механике и в физике, будет продемонстрировано в следующих подразделах на конкретных примерах взаимодействия полей: притяжение сосредоточенных масс, притяжение и отталкивание электрических зарядов и др.

В связи со сказанным становится более понятно, почему при рассмотрении упругих полей серьезное внимание уделяется здесь упругой энергии деформации. Этого понятия нет ни в теории гравитации, ни в теории электродинамики. В теории упругости данная энергия играет важную роль. Она лежит в основе построения уравнений упругости вариационными методами, т.е. является функцией действия. Уравнения гравитационного поля также получают вариационным методом, используя функцию действия [2, 4], отличающуюся от энергии деформации. Теперь в свете полученного совпадения уравнений упругого, гравитационного, электромагнитного полей нетрудно эти уравнения получить вариационными методами, применяемыми в теории упругости и изложенными, например, в работах [5, 6], используя в качестве функции действия функцию плотности упругой энергии деформации  $W$ . Эта функция имеет более ясный физический смысл, как, впрочем, и все уравнения и соотношения теории поля. Конечно, надо постоянно отмечать, что речь идет о линейном приближении.

Введение функции плотности энергии деформации в гравитационном пространстве открывает возможности для исследования взаимодействия различного рода гравитационных полей друг с другом. Методы исследования в данном случае, как выше было сказано, такие же, какими они являются в теории упругости. Более конкретно один из методов будет продемонстрирован в подразд. 3.3 на примере взаимного притяжения сосредоточенных масс. Изложенное выше представляет собой некоторое объяснение того, зачем делается обобщение методов теории упругости на гравитационное пространство.

### 3.3. Теоретическая модель притяжения масс

Применим изложенный в подразд. 3.2 метод исследования взаимодействия упругих полей к рассмотрению конкретного явления, а именно: к построению теоретической модели явления притяжения сосредото-

точных масс. В соответствии с теорией гравитации [4] в линейном приближении гравитационное поле описывается потенциалом, который обозначен в работе [4] буквой  $\varphi$ . Этот потенциал следующим образом связан с компонентой  $g_{00}$  метрического тензора:  $g_{00} = 1 + 2c^{-2}\varphi$ . Уравнение для потенциала  $\varphi$  имеет вид

$$\Delta\varphi = 4\pi km,$$

где  $m$  — распределенная по объему масса;  $k$  — гравитационная постоянная. В случае сосредоточенной массы  $m$  уравнение имеет вид

$$\Delta\varphi = 4\pi km\delta,$$

где  $\delta$  — функция Дирака. Решение этого уравнения  $\varphi = -kmr^{-1}$ . Определяемая этим потенциалом сила  $F$  в поле, действующая на другую частицу  $m_1$ , такая:

$$F = -m_1\varphi_{,r} = -kmm_1r^{-2}.$$

Это известный закон Ньютона, полученный из экспериментальных наблюдений движения тел. Получим этот закон, исходя из представления среды пространства как упругой. Если посмотреть на систему уравнений равновесия (1.17), то первые три уравнения ответственны в основном за силовое равновесие в среде, четвертое уравнение отвечает в основном за равновесие импульсов. Это разделение в динамическом процессе деформации несколько условное. В статическом случае ответственность за силовое равновесие первых трех уравнений полностью отделяется. Четвертое уравнение выделяется в статическое уравнение для временной компоненты  $\tau$  перемещений. Если проследить за тем, как формируется (см. разд. 1) компонента  $g_{00}$  метрического тензора, то получим:  $g_{00}^* = g_{00} + \epsilon_{ii} = g_{00} - \tau_{,i}$ . С точностью до коэффициента получаем, что функция  $\tau_{,i}$  в уравнениях упругой среды пространства является известным потенциалом  $\varphi$  гравитационного поля.

Так как четвертое уравнение равновесия является обобщением уравнения неразрывности вещества  $\text{div}(\rho u_{,i}) + \rho_{,i} = 0$ , то уравнение для сосредоточенной массы можно получить следующим образом. Уравнение неразрывности при наличии сосредоточенной массы можно записать в виде

$$\text{div}(\rho u_{,i}) + \rho_{,i} = m_{,i}\delta.$$

Это уравнение неразрывности, как было показано в разд. 1, заменяется на четвертое уравнение равновесия импульсов и записывается в компонентах тензора напряжений. Из требования равенства размерности справа стоит производная  $m_{,i}$ . Записав уравнение импульсов в перемещениях, получим для компоненты перемещения времени  $\tau$  следующее уравнение:

$$\Delta\tau = \rho_0^{-1} c_2^2 m_r \delta.$$

Или учитывая, что  $c_2^2 = \mu/\rho$ ,

$$\Delta\tau = \mu^{-1} m_r \delta. \quad (3.2)$$

Решение данного уравнения имеет тот же вид, что и для потенциала  $\varphi$ :

$$\tau = (4\pi)^{-1} \mu^{-1} m_r r^{-1}.$$

В соответствии с уравнением неразрывности, а также с четырехмерными уравнениями упругости, а затем после сравнения с классическим уравнением для сосредоточенной массы видим, что классическая масса, с которой приходится постоянно иметь дело и к которой все привыкли, является, согласно этим уравнениям, сосредоточенным источником энергии, скоростью изменения некоторой другой массы. В соответствии с уравнениями упругой среды гравитационного пространства получается, что сосредоточенная масса меняется во времени. Это заключение выглядит странным, но, как далее будет видно, является вполне реальным. Чтобы оно не представлялось пугающим, далее будет показано, что скорость ее изменения очень мала и это изменение практически не наблюдается.

Более подробно об этом, на первый взгляд, фантастическом выводе, будет еще идти дальше речь, а сейчас сделаем следующее. Будем считать, что массой является скорость ее изменения и для дальнейших рассуждений забудем о производной по времени от  $m$ . Однако при проведении выкладок иногда надо помнить, что размерность такой массы равна стандартной размерности массы, поделенной на размерность времени.

Подсчитаем энергию упругой деформации двух сосредоточенных масс, расположенных в разных точках пространства, а для этого найдем компоненты тензоров деформаций и напряжений. Отличными от нуля являются в данном случае только компонента деформации  $\epsilon_{rr}$  и компонента тензора напряжений  $\sigma_{rr}$ :

$$\epsilon_{rr} = \frac{1}{2} c_2 \tau_{,r} = -(8\pi)^{-1} c_2 \mu^{-1} m r^{-2}, \quad \sigma_{rr} = 2\mu \epsilon_{rr} = -2\mu (8\pi)^{-1} c_2 \mu^{-1} m r^{-2}.$$

Плотность энергии  $W$  упругой деформации

$$2W = \sigma_{rr} \epsilon_{rr} = 2\mu \epsilon_{rr}^2.$$

Пусть массы  $m_1$ ,  $m_2$  удалены друг от друга на расстояние  $r_{12}$ . Энергию упругой деформации, создаваемую этими двумя массами, можно записать в виде  $W = W_1 + W_2 + W_{12}$ , где  $W_1$ ,  $W_2$  являются энергиями масс  $m_1$ ,  $m_2$ , рассматриваемых как отдельные и не взаимодействующие друг с другом; эти части общей энергии не зависят от расстояния  $r_{12}$  между массами;  $W_{12}$  — часть энергии  $W$ , зависящая от расстояния  $r_{12}$  между

массами. Сила взаимодействия  $F$  между массами определяется согласно [6] производной от общей энергии упругой деформации двух масс по расстоянию  $r_{12}$  между ними. Общая энергия деформации определяется интегрированием по всему пространству плотности энергии  $W$ . Обозначая общую энергию той же буквой, что и плотность энергии, имеем:

$$W = \iiint W dv,$$

где  $dv$  — элемент объема пространства. Тогда имеем  $F = \partial W / \partial r_{12}$ . Учитывая, что слагаемые в энергии  $W_1, W_2$  не зависят от расстояния  $r_{12}$ , получаем, что сила  $F$  взаимодействия масс определяется только слагаемым  $W_{12}$ , т.е.

$$F = \partial W_{12} / \partial r_{12}.$$

Интеграл по пространству, определяющий полную энергию деформации, можно преобразовать следующим образом [6]:

$$2W = \iiint \sigma_{rr} \varepsilon_{rr} dv = c \iint \sigma_{rr} \tau ds_1 + c \iint \sigma_{rr} \tau ds_2.$$

Справа стоят интегралы по двум сферам с центрами в точках расположения масс  $m_1, m_2$ , элементы поверхностей которых отмечены индексами "1", "2". Эти сферы должны быть очень малого радиуса  $\varepsilon$  с центрами в точках расположения масс  $m_1, m_2$ . Объемные интегралы преобразованы в поверхностные в соответствии с методами теории упругости [6]. Напряжение  $\sigma_{rr}$  и временная компонента  $\tau$  перемещения определяются так:

$$\begin{aligned} \tau &= \tau(1) + \tau(2) = (4\pi)^{-1} \mu^{-1} m_1 r^{-1}(1) + (4\pi)^{-1} \mu^{-1} m_2 r^{-1}(2), \\ \sigma_{rr} &= \sigma_{rr}(1) + \sigma_{rr}(2) = 2\mu \varepsilon_{rr}(1) + 2\mu \varepsilon_{rr}(2). \end{aligned}$$

Здесь цифры "1", "2" в скобках означают, что радиус  $r$ , от которого зависит данная функция, отсчитывается соответственно от точек расположения масс  $m_1, m_2$ . Сохраняя в интегралах только те слагаемые, которые не обращаются в нуль при радиусе  $\varepsilon$  сфер, стремящемся к нулю, получим:

$$2W_{12} = c_2 \iint \sigma_{rr}(1) \tau(2) ds_1 + c_2 \iint \sigma_{rr}(2) \tau(1) ds_2. \quad (3.3)$$

Подставляя сюда значения  $\sigma_{rr}(1), \tau(2), \sigma_{rr}(2), \tau(1)$ , получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(1, 2) &= -\mu (4\pi)^{-1} c_2 \mu^{-1} m_{1,2} r^{-2}(1, 2), \\ \tau(1, 2) &= -(4\pi)^{-1} c_2 \mu^{-1} m_{1,2} r^{-1}(1, 2). \end{aligned}$$

После подстановки этих выражений в (3.3) получим следующее выражение для полной энергии деформации:

$$2W_{12} = \mu (4\pi)^{-2} c_2^2 \mu^{-2} m_1 m_2 \cdot 2r_{12}^{-1} \iint \varepsilon^{-2} ds_1 = 2\mu (4\pi)^{-1} c_2^2 \mu^{-2} m_1 m_2 r_{12}^{-1}. \quad (3.4)$$

Два интеграла в выражении (3.3) по сферам малого радиуса  $\epsilon$  с центром в точках расположения масс преобразовались в выписанный здесь, т.е. в преобразованном виде оказались равными между собой и равными  $4\pi$ . В результате сила взаимодействия масс получилась:

$$F = \partial W_{12} / \partial r_{12} = -(4\pi)^{-1} c_2^2 \mu^{-1} m_1 m_2 r_{12}^{-2}.$$

Или

$$F = f m_1 m_2 r_{12}^{-2}. \quad (3.5)$$

Получился закон притяжения масс Ньютона. Гравитационная постоянная или постоянная тяготения  $f$  в соответствии с получившимся выражением имеет вид:

$$f = \mu^{-1} (4\pi)^{-1} c_2^2.$$

Эта постоянная измерена, хорошо известна и приведена во многих справочниках [23] и книгах. Скорость  $c_2$  равна скорости света. Получившуюся формулу можно использовать для расчета модуля Ламэ  $\mu$  упругой среды гравитационного пространства:

$$\mu = f^{-1} (4\pi)^{-1} c_2^2$$

и для определения плотности  $\rho$  среды гравитационного пространства:

$$\rho = \mu c_2^{-2} = (4\pi)^{-1} f^{-1}.$$

Согласно данной формуле, получается, что плотность вещества пространства просто обратно пропорциональна гравитационной постоянной  $f$ . Эти параметры без особого труда можно привести в численном выражении, и далее это будет сделано. А пока надо теорию упругой среды гравитационного пространства серьезно прорабатывать, чтобы обосновать правильность результатов.

Обратимся теперь снова к получившемуся выше взгляду на массу. Проведем следующую операцию над энергией упругой деформации сосредоточенной массы  $m$ . Выпишем выражения для компоненты тензора напряжений  $\sigma_{rr}$  и для компоненты перемещения времени  $\tau$ :

$$\sigma_{rr} = -2\mu(8\pi)^{-1} c_2^2 \mu^{-1} m r^{-2}, \quad \tau = -(4\pi)^{-1} c_2^2 \mu^{-1} m r^{-1}.$$

Окружим массу двумя сферами радиусов  $r_1, r_2$ , причем  $r_1 < r_2$ , и подсчитаем энергию упругой деформации в пространстве между сферами:

$$2W = \iiint \sigma_{rr} \epsilon_{rr} dv = \iint \sigma_{rr}(r_1) \tau(r_1) ds_1 + \iint \sigma_{rr}(r_2) \tau(r_2) ds_2.$$

В результате получаем:

$$2W = -2\mu(8\pi)^{-1} c_2^2 \mu^{-2} m^2 r_1^{-1} + 2\mu(8\pi)^{-1} c_2^2 \mu^{-2} m^2 r_2^{-1}.$$

Из этого следует, что энергия через внутреннюю сферу поступает в пространство между сферами, а через внешнюю сферу убывает из этого пространства. Это говорит о том, что сосредоточенная масса является постоянным источником энергии деформации, которая распространяется от точки расположения массы даже в статическом состоянии. Этим и объясняется выявленное выше обстоятельство, что по модели упругой среды наблюдаемой массой является производная по времени от действительной массы, если можно так описать рассматриваемое явление. О скорости выделения сосредоточенной массой энергии и о скоростях распространения ее по пространству более конкретно будет говориться далее после того, как будет получена оценка в подразд. 3.5 скорости гравитационных волн.

### 3.4. Теоретическая модель полей электрических зарядов и сил их взаимодействия

Рассмотрим теперь аналогичную предыдущей задаче о сосредоточенных электрических зарядах. В результате проведенного сравнения уравнений (см. подразд. 1.7) имеем ситуацию, что в статике электромагнитное поле описывается классическими уравнениями упругости, если в последних положить  $\lambda + 2\mu = 0$ . В динамике, как следует из подразд. 1.8, электромагнитное поле тоже описывается уравнениями теории упругости, но уже не классическими, а четырехмерными.

Анализ известных в классической теории упругости элементарных решений с особенностями в начале координат [6] типа решения для сосредоточенной массы приводит к тому, что в теории упругости нет больше таких центрально-симметричных решений, которые бы в конечном итоге давали классический закон силового взаимодействия зарядов, если его определять по тому же правилу, по какому определялся закон притяжения масс на основе использования энергии упругой деформации. Решения с особенностями имеются, но порядок этих особенностей в начале координат не соответствует, согласно указанному правилу, сосредоточенным электрическим зарядам. Однако в теории упругости имеется решение с нужной особенностью, но оно не центрально-симметричное. Приведем это решение [6]:

$$\left. \begin{aligned} u_r &= Ar^{-1}, & u_\vartheta &= A \sin \vartheta (1 + \cos \vartheta) r^{-1}, & u_\varphi &= 0, \\ \sigma_r &= -2A\mu r^{-2}, & \sigma_\vartheta &= 2A\mu \cos \vartheta (1 + \cos \vartheta)^{-1} r^{-2}, \\ \sigma_\varphi &= 2A\mu (1 + \cos \vartheta)^{-1} r^{-2}, & \sigma_{r\vartheta} &= 2A\mu \sin \vartheta (1 + \cos \vartheta)^{-1} r^{-2}, \\ \sigma_{r\varphi} &= \sigma_{\vartheta\varphi} = 0, & q &= \varepsilon_r + \varepsilon_\vartheta + \varepsilon_\varphi = 0, & \varepsilon_{\alpha\beta} &= (2\mu)^{-1} \sigma_{\alpha\beta}. \end{aligned} \right\} (3.6)$$

Под символами  $\alpha, \beta$  у деформаций здесь понимаются символы  $r, \vartheta, \varphi$ . Это решение обладает свойством, что объемная деформация  $\theta$  равна нулю, и это является условием удовлетворения им уравнениям электромагнитного поля согласно изложенному в подразд. 1.7.

Следовательно, выписанное решение является в точности решением именно уравнений электромагнитного поля. Центральнo-симметричная особенность данного решения соответствует особенности электрического заряда. Это решение удовлетворяет следующим уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r,r} + r^{-1}\sigma_{r\vartheta,\vartheta} + r^{-1}(2\sigma_r - \sigma_\vartheta - \sigma_\varphi + \sigma_{r\vartheta}\text{ctg}\vartheta) &= q\delta, \\ \sigma_{r,\vartheta} + r^{-1}\sigma_{\vartheta,\vartheta} + r^{-1}[(\sigma_\vartheta - \sigma_\varphi)\text{ctg}\vartheta + 3\sigma_{r\vartheta}] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

По виду выписанное решение значительно более сложное по сравнению с известным классическим решением для потенциала сосредоточенного электрического заряда, совпадающим с потенциалом гравитационного поля сосредоточенной массы. В соответствии с рассматриваемой здесь моделью электромагнитного поля так называемый скалярный потенциал электромагнитного поля в действительности является потенциалом гравитационного поля, о чем в подразд. 3.7 будет сказано более подробно. Это утверждение противоречит классическому установившемуся знанию о потенциале электромагнитного поля. А рассматриваемое решение, как следует из дальнейшего, является потенциалом сосредоточенного электрического заряда.

Выносить на обсуждение научной общественности внешне крамольные утверждения трудно. Оправданием этому служит только то, что используемая здесь научная процедура исследования, научная логика, приводящая к таким следствиям, вполне законная и строгая. Если возникают сомнения в правильности полученных здесь заключений, то это однозначно приводит к сомнениям в правильности признанных ученым миром и ставших классическими уравнениями теорий гравитационного и электромагнитного полей. В предлагаемой книге все основано на правильности этих уравнений, и автор исходил именно из этих уравнений при построении всей логики исследования.

По аналогии с тем, как в подразд. 3.3 была сформирована правая часть четвертого уравнения равновесия, описывающая сосредоточенную массу, сформирована правая часть первого из выписанных выше уравнений равновесия (3.7), наиболее ответственная за центрально-симметричную часть решения (3.6). Константа  $q$  перед функцией Дирака в правой части этого уравнения означает величину электрического заряда также по аналогии со сосредоточенной массой. Если в правой части четвертого уравнения равновесия при рассмотрении сосредоточенной массы (3.2) в силу выявленных обстоятельств стоит производ-

ная по времени от массы, то в данном случае величина  $q$  означает не скорость изменения заряда, а величину заряда. Это следует из того, что в упругом поле сосредоточенного электрического заряда компонента тензора напряжений  $\sigma_r = 0$ , а это означает отсутствие потока энергии в радиальном направлении и, следовательно, отсутствие источника энергии в точке расположения заряда.

Константа  $A$  в решении (3.6) связана с величиной заряда  $q$  и будет определена чуть позже, а пока ее запишем в виде  $A = (4\pi)^{-1}kq$ . Для определения силы взаимодействия зарядов  $q_1, q_2$ , расположенных на расстоянии  $r_{12}$  друг от друга, применим ту же самую процедуру, которая применялась для определения силы взаимодействия масс в подразд. 3.3. Для этого надо определить полную энергию упругой деформации, создаваемую двумя зарядами, взять производную по расстоянию между ними, и это будет искомой силой взаимодействия.

При выполнении этой процедуры та простота, с которой она была сделана в подразд. 3.3, в данном случае исчезает. Как видно из решения (3.6), энергия будет зависеть от расстояния между зарядами, от расположения осей симметрии каждого из решений относительно друг друга, от углов  $\vartheta_1, \vartheta_2$  расположения зарядов соответственно в координатных системах, связанных с каждым зарядом. Запишем выражение для энергии  $W$ :

$$\begin{aligned} 2W &= \iiint [\sigma_r(1)\epsilon_r(2) + \sigma_\vartheta(1)\epsilon_\vartheta(2) + \sigma_\varphi(1)\epsilon_\varphi(2) + \sigma_{r\vartheta}(1)\epsilon_{r\vartheta}(2)] dv + \\ &+ \iiint [\sigma_r(2)\epsilon_r(1) + \sigma_\vartheta(2)\epsilon_\vartheta(1) + \sigma_\varphi(2)\epsilon_\varphi(1) + \sigma_{r\vartheta}(2)\epsilon_{r\vartheta}(1)] dv = \\ &= \iint [\sigma_r(1)u_r(2) + \sigma_{r\vartheta}(1)u_\vartheta(2)] ds_1 + \iint [\sigma_r(2)u_r(1) + \sigma_{r\vartheta}(2)u_\vartheta(1)] ds_2. \end{aligned}$$

Здесь показана процедура перевода объемных интегралов в поверхностные по элементарным сферам малого радиуса с центрами в точках расположения зарядов, как это сделано в подразд. 3.3, цифры "1", "2" обозначают здесь решение для соответствующего заряда  $q_1, q_2$ . Так же, как и в подразд. 3.3, здесь выписана только часть энергии, зависящая от расстояния  $r_{12}$  между зарядами, которая и определяет силу их взаимодействия.

Рассмотрим, например, интеграл по сфере с центром в точке расположения заряда  $q_1$  от первого слагаемого. Так как сфера малого радиуса, стремящегося к нулю, то можно записать

$$\iint \sigma_r(1)u_r(2) ds_1 = u_r(2) \iint \sigma_r(1) ds_1.$$

Радиальное перемещение, обусловленное вторым зарядом, является ограниченным в точке расположения первого заряда и его можно вынести за знак интеграла. Имеем:

$$\iint \sigma_r(1)u_r(2) ds_1 = Ar_{12}^{-1} \cdot 2A\mu 4\pi = 8\pi\mu A^2 r_{12}^{-1}.$$

Рассмотрим интеграл от второго слагаемого

$$\begin{aligned} \iint \sigma_{r\vartheta}(1)u_{\vartheta}(2)ds_1 &= u_{\vartheta}(2) \int \sigma_{r\vartheta}(1)ds_1 = \\ &= 4\pi\mu A^2 \sin \vartheta_2 (1 + \cos \vartheta_2)^{-1} r_{12}^{-1} \int_0^{\pi} \sin^2 \vartheta (1 + \cos \vartheta)^{-1} d\vartheta. \end{aligned}$$

Интеграл от первого слагаемого зависит только от расстояния  $r_{12}$ , интеграл от второго слагаемого зависит еще от угла  $\vartheta_2$ , определяющего эту угловую координату точки расположения первого заряда в координатной системе, связанной со вторым зарядом. При  $\vartheta_2 = 0$  интеграл от второго слагаемого обращается в нуль. Такая же ситуация возникает и с интегралами по сфере с центром в точке расположения второго заряда.

Слагаемые, зависящие от угловой координаты, вносят вклад в радиальную составляющую силы взаимодействия зарядов, но главное, они определяют силу взаимодействия зарядов, направленную по угловой координате, т.е. перпендикулярную радиальной компоненте. Получается, что сила взаимодействия зарядов имеет радиальную и угловую компоненты. Это интересный результат, если вспомнить, что элементарные заряды электрона и протона обладают так называемым спиновым моментом.

Оставляя пока вне рассмотрения угловую или, по-другому, моментную составляющую силы взаимодействия, это тонкий вопрос и требует очень тщательного исследования с физической точки зрения, отметим, что данная составляющая силы взаимодействия принуждает заряды повернуться так, чтобы энергия конечного состояния была наименьшей, а взаимное угловое положение их было наиболее устойчивым. При любом  $\vartheta_{1,2} \neq 0$  в выражении для энергии имеются положительно определенные слагаемые, которые добавляются к слагаемым, определяемым только радиусом, т.е. к центрально-симметричным компонентам решения и которые увеличивают энергию упругой деформации. При  $\vartheta_{1,2} = \pi$  эта энергия имеет наибольшее значение, при  $\vartheta_{1,2} = 0$  энергия является наименьшей. По законам механики, положение  $\vartheta_{1,2} = 0$ , когда слагаемые в выражении для энергии, зависящие от угловой координаты, обращаются в нуль и энергия становится наименьшей, является наиболее устойчивым. В этом случае выражение для энергии упругой деформации становится точно таким же, как для масс (приведено в подразд. 3.3). Действительно, запишем по аналогии с подразд. 3.3 слагаемое энергии  $W_{12}$ , которое определяет в итоге силу взаимодействия зарядов  $q_1, q_2$ :

$$2W_{12} = \iint \sigma_{rr}(1)u_r(2)ds_1 + \iint \sigma_{rr}(2)u_r(1)ds_2.$$

Подставляя сюда значения  $\sigma_{rr}(1)$ ,  $u_r(2)$ ,  $\sigma_{rr}(2)$ ,  $u_r(1)$ , в соответствии с (3.2) получаем:

$$\sigma_{rr}(1, 2) = -2\mu(4\pi)^{-1} k q_{1,2} r^{-2}(1, 2), \quad u_r(1, 2) = -(4\pi)^{-1} k q_{1,2} r^{-1}(1, 2),$$

а это означает, что

$$2W_{12} = 2\mu(4\pi)^{-2} k^2 q_1 q_2 \cdot 2r_{12}^{-1} \int \varepsilon^{-2} ds_1 = 4\mu(4\pi)^{-1} k^2 q_1 q_2 r_{12}^{-1}.$$

Два интеграла по сферам малого радиуса  $\varepsilon$  с центрами в точках расположения зарядов, как и в случае, когда рассматривались массы, равны между собой и равны  $4\pi$ . В результате сила взаимодействия зарядов

$$F = \partial W_{12} / \partial r_{12} = -\mu(2\pi)^{-1} k^2 q_1 q_2 r_{12}^{-2}.$$

Или

$$F = -k_1 q_1 q_2 r_{12}^{-2}, \quad k_1 = \mu(2\pi)^{-1} k^2.$$

Имеет место классический закон Кулона. Для получения более конкретного значения константы  $k_1$  выполним следующее. Из первого уравнения (3.2) можно сделать следующее заключение: оно определяет главную особенность решения  $\sigma_r = r^{-2}$ . Центральное-симметричное решение определяется уравнением

$$\sigma_{r,r} + r^{-1}(2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_\varphi) = q\delta.$$

Если вместо  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_\varphi$  подставить их выражения (3.6) через перемещение  $u_r$ , то эта часть уравнения примет вид

$$(\lambda + 2\mu)(u_{r,rr} + 2r^{-1}u_{r,r} - 2r^{-2}u_k) = q\delta.$$

Главная особенность решения дифференциального уравнения с  $\delta$ -функцией в правой части [18] определяется старшими производными и должна иметь вид

$$u_r = (4\pi)^{-1}(\lambda + 2\mu)^{-1} q r^{-1}.$$

Данная функция  $u_r$  вместе с другими компонентами удовлетворяет рассматриваемой системе уравнений (3.6), если постоянная  $A$  имеет вид

$$A = (4\pi)^{-1}(\lambda + 2\mu)^{-1} q.$$

Временно введенная в выражение  $A = (4\pi)^{-1} k q$  константа

$$k = (\lambda + 2\mu)^{-1}.$$

Входящая в закон Кулона

$$F = -k_1 q_1 q_2 r_{12}^{-2} \tag{3.8}$$

константа

$$k_1 = \mu(2\pi)^{-1} (\lambda + 2\mu)^{-2}.$$

При известном параметре Ламе  $\mu$ , который определен в подразд. 3.3, и известном коэффициенте  $k_1$  эта формула может служить для определения параметра  $(\lambda + 2\mu)$ . Однако для этого желательно иметь еще некоторые сведения.

### 3.5. Скорость гравитационных волн

Одним из следствий проведенной аналогии упругого и электромагнитного полей явилось то, что скорость объемных, или продольных, волн равна нулю, а так как скорость гравитационных волн равна скорости объемных волн, то нулю равна скорость гравитационных волн. Учитывая то, что гравитационные поля — реальность, то более правильно принять, что скорость гравитационных волн не равна нулю, а мала по сравнению со скоростью электромагнитных и световых волн. В этом подразделе оценим скорость гравитационных волн.

Если скорость света хорошо измерена, изучена, то скорость гравитационных волн остается пока тайной, хотя многие специалисты по теории гравитации считают, что эта скорость измерена и равна скорости света. В теории гравитации принято, что все волны, описываемые уравнениями гравитации, являются гравитационными. Проводимая здесь аналогия упругих гравитационных и электромагнитных полей в линейном приближении показывает, что уравнения гравитационного и электромагнитного полей должны быть одними, а не разными. Из этой аналогии следует, что электромагнитные волны — это поперечные, или сдвиговые, волны, а гравитационные волны — это волны, описываемые временной компонентой перемещений. Имеются еще объемные волны, которые описываются объемной деформацией, и скорость их равна скорости гравитационных волн. Данная классификация волн следует из классификации упругих волн и по аналогии распространена здесь на гравитационные и электромагнитные волны.

Конечно, постоянно имеет место сомнение о правомерности распространения на гравитацию и электродинамику положений теории упругости. Это обсуждалось в разд. 1, но, учитывая необычность ситуации, обсуждение продолжается при каждом конкретном обобщении методов и положений упругости. В разд. 1 было получено, что уравнения гравитационного поля в линейном приближении совпадают с уравнениями упругого поля, если скорости продольных и поперечных волн равны между собой и равны скорости света. Уравнения электромагнитного и упругого полей также совпадают между собой, если ско-

рость поперечных волн равна скорости света, а скорость продольных волн равна нулю.

Совпадение уравнений приводит к тому, что на гравитацию и электродинамику распространяются положения упругости: понятия перемещений, деформаций, напряжений, закон Гука, уравнения равновесия, положение об энергии упругой деформации и другие положения. Спрашивается, верны ли эти положения в гравитации и электродинамике? Эти положения теоретически правомерны, действуют и их не отменишь сомнениями. На основе данных положений получаются результаты — решения уравнений гравитации и электродинамики. Для того уравнения и выводятся, чтобы их решать. Полученные решения, конечно, нужно трактовать, определять их реальный смысл. Это задача исследователей.

А раз положения и уравнения теории упругости в какой-либо среде действуют, то естественно называть такую среду упругой. Строгого определения упругой среды не существует и более строгого, чем только что высказанное, вряд ли стоит формулировать. В таком случае среды гравитационных и электромагнитных полей следует считать упругими. В природе пока не обнаружено двух упругих сред с одной скоростью сдвиговых волн, с разными скоростями продольных волн и расположенных одна в другой. Раз скорости поперечных волн большие, равны скорости света, то это означает, что жесткость сред на сдвиг большая. И чтобы были такие среды с одной очень большой сдвиговой жесткостью и с разной жесткостью на расширение одна в другой, специалисту по теории упругости представить нельзя. Будем считать, что среда гравитационного и электромагнитного пространств одна, и будем искать аргументы в пользу такого утверждения, которое, следует сказать, является вполне естественным.

Рассмотрим теперь вопрос об определении скорости гравитационных волн. В подразд. 3.3 и 3.4 были получены теоретические формулы для сил взаимодействия масс и электрических зарядов. Эти формулы здесь понадобятся, поэтому приведем их.

Закон притяжения масс:

$$F = -fm_1m_2r_{12}^{-2}, \quad f = \mu^{-1}(8\pi)^{-1}c_2^2.$$

Закон силового взаимодействия зарядов:

$$F = -k_1q_1q_2r_{12}^{-2}, \quad k_1 = \mu(8\pi)^{-1}(\lambda + 2\mu)^{-2}.$$

Входящие в формулы константы  $f = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$  — гравитационная постоянная,  $k_1 = (4\pi\epsilon_0)^{-1}$ ,  $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \text{ Ф/м}$  — электрическая постоянная [23], для которых имеются хорошо изученные экспериментальные данные.

При получении закона притяжения масс в подразд. 3.4 правая часть уравнения была получена путем сравнения четвертого уравнения равновесия с уравнением неразрывности, и в результате правая часть этого уравнения равновесия приняла вид  $c_2 m_i \delta$ , т.е. перед функцией  $m_i$  появился множитель  $c_2$ . Для сравнения сил взаимодействия масс и зарядов надо привести эти силы к одной размерности. Для этого надо умножить на коэффициент  $c_2$  правую часть уравнения равновесия, рассмотренного в подразд. 3.4. Итогом этой операции будет то, что правая часть уравнения примет вид  $c_2 q \delta$ , а в законе Кулона изменится константа  $k_1$ , которая будет такой:

$$k_1 = \mu(8\pi)^{-1} (\lambda + 2\mu)^{-2} c_2^2.$$

Из теории поля известно [24], что сила электрического отталкивания электронов больше гравитационной силы притяжения масс электронов в  $4,17 \cdot 10^{42}$  раз. Примем пока чисто гипотетически, что электрическое и гравитационное поля электрона определяются в вышеполученных формулах только одной массой электрона. Эта гипотеза основана на следующем. Анализ элементарных частиц с точки зрения специалиста по упругим полям свидетельствует о следующем. Самые малые частицы, обладающие массой, это электрон и позитрон. Массы у них одинаковые, электрические заряды тоже одинаковые, но противоположные по знаку. Будем называть массу этих частиц и заряды единичными. Другие из известных элементарных частиц обладают большей массой, но имеют единичный заряд или совсем не имеют заряда, как, например, нейтрон. Видим, что самые малые частицы всегда обладают единичным электрическим зарядом и нет таких частиц без заряда. Эти частицы — электроны и позитроны — являются одними из основных строительных компонент для других частиц.

Гравитационное и электромагнитное поля данных частиц в рамках упругой модели среды пространства являются аналогичными упругим полям в твердых телах, соответствующим дислокациям, сосредоточенным включениям, нагревам и т.д. Опыт работы с такими полями и говорит о том, что электрон и позитрон в теоретическом плане представляют собой подобное явление в среде гравитационного пространства. Механизм образования таких явлений пока, конечно, неизвестен, его надо изучать, но в данном случае из этой аналогии без знания этого механизма можно извлечь интересный вывод. Этот механизм одновременно создает и гравитационное, и электромагнитное поля электрона и позитрона. А это, в свою очередь, приводит к тому, что для данной элементарной частицы параметр, определяющий массу этой частицы и ее заряд, является одним.

Следовательно, в уравнениях коэффициенты при дельта-функциях в правых частях, когда гравитационное и электромагнитное поля строятся для электрона или позитрона, должны быть одними и теми же, у заряда может меняться только знак.

Возьмем теперь отношение силы электрического взаимодействия двух электронов к силе гравитационного взаимодействия их. В силу вышесказанного, масса и заряд электрона в этом отношении сократятся, и получится следующее уравнение:

$$\mu(\pi)^{-1}(\lambda + 2\mu)^{-2}c_2^2/(\mu^{-1}(4\pi)^{-1}c_2^2) = 4,17 \cdot 10^{42}.$$

Или

$$4\mu^2(\lambda + 2\mu)^{-2} = 4,17 \cdot 10^{42}.$$

Учитывая, что  $c_1^2 = (\lambda + 2\mu)\rho^{-1}$ ,  $c_2^2 = \mu\rho^{-1}$ , где  $\rho$  — плотность вещества среды пространства, получим:

$$c_2^4 c_1^{-4} = 4^{-1} \cdot 4,17 \cdot 10^{42}.$$

Таким образом, скорость гравитационных волн:

$$c_1 = 4^{1/4} \cdot 4,17^{-1/4} \cdot 10^{-10} c_2 = 4^{1/4} \cdot 4,17^{-1/4} \cdot 10^{-10} c,$$

так как  $c_2$  равна скорости света:  $c_2 = c = 3 \cdot 10^{10}$  см/с. Подставляя значение скорости света, получим скорость гравитационных волн:

$$c_1 = 3 \cdot 4^{1/4} \cdot 4,17^{-1/4} \text{ см/с} = 0,94 \text{ см/с}.$$

Правильнее, конечно, формулу для скорости гравитационных волн записать в следующем виде:

$$c_1 = 3 \cdot 4^{1/4} \cdot 4,17^{-1/4} \cdot (q/m)^{1/2} \text{ см/с}.$$

Но выше было принято, что  $q/m = 1$ . Однако в дальнейшем этот вопрос следует рассмотреть более серьезно, потому что в научном плане говорить о точном равенстве заряда и массы электрона и позитрона пока еще сложно. Полученный результат можно считать только оценочным.

Итак, получился, на первый взгляд, абсурдный результат: скорость гравитационных волн равна примерно сантиметр в секунду — это невероятно маленькая скорость. Такой результат принять за правильный очень и очень трудно, даже если он действительно правильный. Автор получил его достаточно давно и не опубликовывал, понимая, что воспринимать такой результат всерьез вряд ли кто захочет. Однако время не дало опровержения данного результата, а, наоборот, появились другие факты, подтверждающие его правильность, и о них разговор пойдет в подразд. 3.6.

### 3.6. К обоснованию результата о малой скорости гравитационных волн

Рассмотрим вопрос о скорости гравитационных волн с других точек зрения. В подразд. 3.5 получился очень необычный результат: скорость гравитационных волн очень мала по сравнению со скоростью света, т.е. со скоростью поперечных волн. Это оказалось так потому, что малой получилась величина  $(\lambda + 2\mu)\mu^{-1} = 4^{1/2} \cdot 4,17^{-1/2} \cdot 10^{-21}$ , равная отношению квадратов скоростей продольных и поперечных волн. Данный результат относительно скорости гравитационных волн оказался в соответствии с упругой моделью электромагнитного поля, рассмотренной в подразд. 1.7, когда упругая среда, моделирующая среду электромагнитного поля, должна иметь модули Ламе, подчиняющиеся условию  $(\lambda + 2\mu) = 0$ . Полученный в подразд. 3.6 результат о малости величины  $(\lambda + 2\mu)$  по сравнению с величиной  $\mu$  как раз и оказался хорошо согласующимся с указанным результатом малой величины скорости гравитационных волн. Конечно, и в подразд. 1.7 уже предполагалось, что это получившееся согласно аналогии упругого и электромагнитного полей условие  $(\lambda + 2\mu) = 0$ , накладываемое на модули упругости Ламе среды электромагнитного поля, не должно выполняться абсолютно точно, а должно выполняться условие, что величина  $(\lambda + 2\mu)$  много меньше  $\mu$ . Получившийся результат  $(\lambda + 2\mu)\mu^{-1} = 4^{1/2} \cdot 4,17^{-1/2} \cdot 10^{-21}$  дает точное значение, во сколько раз  $(\lambda + 2\mu)$  меньше  $\mu$ :

$$(\lambda + 2\mu) = 4^{1/2} \cdot 4,17^{-1/2} \cdot 10^{-21} \mu.$$

Изучаемое положение о единичных уравнениях гравитационного и электромагнитного полей оказывается в соответствии с экспериментальным фактом о гигантском превышении электрической силы взаимодействия электронов над гравитационной силой их взаимодействия. Именно следствием единства этих уравнений и явился результат о малой скорости гравитационных волн.

Выпишем плотность энергии деформации среды гравитационного пространства  $W$  (3.1):

$$W = \lambda \vartheta^2 + 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} + 2\mu \vartheta \varepsilon_{ii} + \mu^2 (\lambda + 2\mu)^{-1} \varepsilon_{ii}^2 + 2\mu \varepsilon_{\alpha i} \varepsilon_{\alpha i}.$$

Сравнивая коэффициенты в слагаемых этого выражения, видим, что у предпоследнего слагаемого, содержащего только компоненту временной деформации  $\varepsilon_{ii}$ , коэффициент содержит множитель  $\mu(\lambda + 2\mu)^{-1} = = c_2^2 c_1^{-2} = 4^{-1/2} \cdot 4,17^{1/2} \cdot 10^{21}$ , обратный рассмотренному только что малому параметру  $\mu^{-1}(\lambda + 2\mu)$ , т.е. это слагаемое, и только оно, содержит большой параметр. Какую роль играет это слагаемое в энергии?

Полученная ранее на основе данного выражения энергии сила притяжения сосредоточенных масс оказалась очень малой по сравнению с силой взаимодействия электрических зарядов, полученной также на основе данного выражения для энергии. Если сила взаимодействия двух электрических зарядов экспериментально хорошо наблюдается, то для наблюдения силы притяжения двух масс нужны очень тонкие и тщательные эксперименты, не считая, конечно, всегда наблюдаемого земного притяжения, когда масса Земли гигантская. Но зато экспериментально хорошо наблюдается сила инерции масс. Чем объясняется такое различие в свойствах масс: очень слабо взаимодействовать друг с другом, но сильно реагировать на попытку стронуть их с места?

При получении силы притяжения массы считались неподвижными, поэтому временная деформация  $\epsilon_{II}$  равнялась нулю. При движении массы с ускорением в создаваемом ею деформационном поле временная деформация уже не равна нулю и при определении энергии движущей массы, что необходимо при определении силы инерции, в ней появляется рассмотренное только что слагаемое, содержащее очень большой параметр, равный отношению квадратов скоростей поперечных и продольных волн.

Указанное слагаемое практически и определяет энергию движущейся массы, а энергия определяет силу инерции, которая получается дифференцированием полной энергии деформации по координате времени, умноженной на скорость света. Указанный большой параметр и делает хорошо наблюдаемой силу инерции массы. Такого параметра нет в последнем слагаемом энергии (3.1) покоящейся массы, а это слагаемое и определяет энергию, которая оказывается много меньше в общем случае энергии движущейся массы, а она определяет силу притяжения покоящихся масс. Поэтому эта сила во много раз меньше инерционной силы, примерно во столько раз, чему равен большой параметр.

Таким образом, реальное очень большое различие в силах притяжения масс и инерционных силах масс на уровне изложенного качественного объяснения дает определенное подтверждение правильности результата о скорости гравитационных волн. Точное математическое объяснение требует привлечения математического аппарата обобщенных функций при проведении операций с расходящимися интегралами, когда необходимо проводить интегрирование по всему пространству функции плотности энергии для получения полной энергии, а это не входит в задачи автора.

Рассмотрим снова вопрос о том, что представляет собой масса с энергетической точки зрения, о чем кое-что говорилось в подразд. 3.3. Уравнение для поля, создаваемого сосредоточенной массой, имеет вид (3.2):

$$\Delta\tau - c_1^{-2}\tau_{II} = \mu^{-1}m, \delta.$$

Если бы скорость гравитационных волн равнялась скорости света, то это уравнение имело бы вид

$$\Delta\tau - c_2^{-2}\tau_{,tt} = \mu^{-1}m_{,r}\delta.$$

Поток энергии через сферу  $S$  малого радиуса с центром в точке расположения массы

$$\int \tau_{,r} ds = \int \Delta t dv.$$

Здесь интеграл справа берется по объему внутри малой сферы. Подставляя вместо  $\Delta t$  его выражение согласно уравнению и пренебрегая малым слагаемым, содержащим  $\tau_{,tt}$ , получим следующее выражение для интеграла  $\int \tau_{,r} ds$ :

$$\int \tau_{,r} ds = \mu^{-1}m_{,r}.$$

Такая же формула получается, если данную процедуру проделать со вторым уравнением для  $\tau$ , которое соответствует случаю распространения гравитационных волн со скоростью света. Проведем в обоих уравнениях преобразование временных координат к одной координате:  $t_1 = c_1 t$ ,  $t_1 = c_2 t$ . Выражения для потоков энергии через сферу  $S$  примут вид

$$\int \tau_{,r} ds = c_1 \mu^{-1} m_{,r}, \quad \int \tau_{,r} ds = c_2 \mu^{-1} m_{,r}.$$

Здесь индекс "1" после запятой означает производную по  $t_1$ . Из этих формул видно, что поток энергии через сферу  $S$  во втором случае в  $c_2 c_1^{-1} = 4^{-1/4} \cdot 4,17^{1/4} \cdot 10^{21/2}$  раз больше, т.е. примерно  $10^{10}$  раз.

Учитывая, что сосредоточенная масса уменьшается пропорционально излученной энергии, можем сделать следующий вывод. Если бы скорость распространения гравитационных волн была равна скорости света, то массы бы уменьшались в  $10^{10}$  раз быстрее, чем в случае, когда скорость гравитационных волн равна полученной скорости  $c_1$ . Конечно, сейчас неизвестно, что такое медленное и быстрое изменение массы, но разница уменьшения в  $10^{10}$  раз производит сильное впечатление.

В настоящее время неизвестно, изменяется ли масса вообще, а это означает, что если она изменяется, то очень и очень медленно, т.е. незаметно для современных методов измерения. Если бы скорость гравитационных волн равнялась скорости света, то скорость уменьшения масс очень и очень сильно увеличилась бы — в  $10^{10}$  раз — и можно предположить, что такое уменьшение масс оказалось бы экспериментально заметным. Поэтому более реальным, а следовательно, и правильным представляется положение, когда скорость гравитационных волн мала.

Учитывая фантастичность результата о скорости гравитационных волн, можно этот результат рассматривать как одно из направлений исследования проблемы скорости данных волн, когда речь идет об экспериментальном измерении ее. В теоретическом отношении исследование данного вопроса проведено здесь достаточно строго в рамках признанных в научном мире методов. Никаких новых гипотез, никаких допущений не делалось, никакие запрещенные приемы не применялись. Автор не имел намерений удивлять коллег приводимыми здесь результатами. Они и для него получились неожиданными и много лет не выносились на обсуждение научной общественности. За это время им не были найдены неправильности в научной логике получения этих результатов, не были найдены серьезные ошибки в выкладках, поэтому не имеет смысла и дальше скрывать их от ученых. Надежда автора состоит в том, что все излагаемое в данной работе послужит для некоторых молодых ученых стимулом для проведения подобных исследований дальше или пробудит новые подходы к исследованию этой проблемы.

### **3.7. Единые линейные уравнения гравитационного и электромагнитного полей**

Рассмотрим теперь более подробно и конкретно вопрос о единых линейных уравнениях теории поля, которые описывают одновременно и гравитационное, и электромагнитное поля. Речь об этом единстве постоянно шла и раньше, но выписывать единые уравнения было нецелесообразно, так как не был подготовлен для этого необходимый материал. Теперь такой материал имеется и можно данную работу по представлению единых уравнений гравитационного и электромагнитного полей выполнить. В этом смысле данный подраздел является как бы завершающим, но его можно считать и начальным этапом в проблеме исследования гравитационных и электромагнитных полей на основе единых уравнений, полученных путем моделирования среды гравитационного пространства упругой средой.

Для получения в конечном виде единых уравнений гравитационного и электромагнитного полей принято, что эти поля создаются в результате деформационных процессов в упругой среде, заполнившей все гравитационное пространство. Эти процессы являются следствием определенных явлений, происходящих с имеющимися в пространстве массами, зарядами, частицами, динамическими волнами и т.д. Будем различать здесь два процесса образования деформаций, хотя возможны и смешанные методы. В одном процессе деформирование среды происходит при отсутствии тензора энергии-импульса, в другом деформирование среды определяется именно тензором энергии-импульса.

Такое разделение, конечно, условное. Исследование деформаций, создаваемых в среде, при отсутствии тензора энергии-импульса можно проводить в линейном приближении независимо от деформаций, создаваемых отличным от нуля тензором энергии-импульса, и наоборот. Это означает, что разные деформационные процессы не влияют друг на друга в линейном приближении. Так это делается в теории упругости, например, при исследовании в упругом теле одновременно температурных напряжений, когда тензор кривизны упругого пространства, связанного с рассматриваемым телом, отличен от нуля, и напряжений от так называемых внешних активных нагрузок, приложенных к данному телу и дополнительных к температурным напряжениям. Те и другие напряжения определяются независимо друг от друга и затем складываются.

Точки среды гравитационного пространства при деформационном процессе, когда тензор энергии-импульса в этом пространстве равен нулю, т.е. отсутствует, получают некоторые малые смещения относительно первоначального положения. С первоначальным положением среды связаны неподвижная система координат  $x_\alpha$  и время  $t$ , а с перемещающимися точками среды связаны подвижная система координат  $x_\alpha^*$  и переменное время  $t^*$ . Четырехмерные перемещения среды определяются следующим образом:

$$u_\alpha = x_\alpha^* - x_\alpha, \quad \tau = t^* - t.$$

Здесь приводятся очень кратко некоторые положения четырехмерной теории упругой среды, изложенные в подразд. 1.4, для того чтобы видеть, как получается полная и единая система уравнений теории гравитационного и электромагнитного полей. Перемещения определяют тензор деформаций (1.32):

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} = u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}, \quad 2\varepsilon_{\alpha t} = c_2^{-1}u_{\alpha,t} - c_2\tau_{,\alpha}, \quad \varepsilon_{tt} = -\tau_{,t}.$$

С тензором деформаций при помощи обобщенного закона Гука связан тензор напряжений среды (1.32):

$$\sigma_{\alpha\beta} = \lambda\vartheta\delta_{\alpha\beta} + 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta} + \mu\varepsilon_{tt}\delta_{\alpha\beta}, \quad \sigma_{\alpha t} = 2\mu\varepsilon_{\alpha t}, \quad \sigma_{tt} = \mu\vartheta + \mu c^2 c_1^{-2}\varepsilon_{tt}.$$

Тензор напряжений удовлетворяет четырехмерным уравнениям равновесия:

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} - c_2^{-1}\sigma_{\alpha t,t} = 0, \quad \sigma_{\alpha t,\alpha} + c_2^{-1}\sigma_{tt,t} = 0. \quad (3.9)$$

В перемещениях эти уравнения имеют вид (1.27):

$$\begin{aligned} \mu\Delta u_\alpha + (\lambda + \mu)\vartheta_{,\alpha} - \rho u_{\alpha,tt} &= 0, \\ \Delta\tau - c_1^{-2}\tau_{,tt} &= 0. \end{aligned}$$

Функция плотности упругой энергии деформации (1.32):

$$2W = \sigma_{jk}\epsilon_{jk} = \lambda\vartheta^2 + 2\mu\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\alpha\beta} + 2\mu\vartheta\epsilon_{ii} + \mu^2(\lambda + 2\mu)^{-1}\epsilon_{ii}^2 + 2\mu\epsilon_{\alpha i}\epsilon_{\alpha i}.$$

Уравнения содержат три константы: модули упругости Ламэ  $\lambda$ ,  $\mu$  среды и плотность  $\rho$  вещества среды. Через эти константы выражаются другие параметры упругой среды пространства (1.10), некоторые из них выше приводились.

Указанные три константы можно привести в виде конкретных чисел, используя известные параметры гравитационного и электромагнитного полей, о чем выше уже говорилось. В закон Ньютона  $F = -fm_1m_2r_{12}^{-2}$  входит известная гравитационная постоянная  $f = 6,67 \cdot 10^{-11}$  Н·м<sup>2</sup>/кг<sup>2</sup>. Для этой постоянной в подразд. 3.3 была получена теоретическая формула  $f = \mu^{-1}(8\pi)^{-1}c^2$ , где  $c$  — скорость света. Таким образом, получилось, что эта формула определяет параметр Ламэ:

$$\mu = f^{-1}(4\pi)^{-1}c^2.$$

Конкретное значение модуля сдвига среды гравитационного пространства

$$\mu = 1,84 \cdot 10^{20} \text{ кгс/см}^2.$$

Плотность среды

$$\rho = \mu c^{-2} = (4\pi)^{-1}f^{-1}.$$

Численное значение плотности

$$\rho = 1194 \text{ кг/см}^3.$$

Цифры получились фантастическими. Что они означают в обычном понимании плотности вещества среды гравитационного пространства и модуля сдвига ее, нужно еще осознавать. Этим здесь заниматься не будем, для этого нужны серьезные экспериментальные исследования среды гравитационного пространства и многое другое. А методы исследования нужно разрабатывать.

Выше была определена скорость гравитационных волн  $c_1 = 0,94$  см/с. Эта скорость связана с параметрами Ламэ зависимостью  $c_1^2 = (\lambda + 2\mu)\rho^{-1}$ , которая позволяет определить параметр Ламэ  $\lambda$ . Приближенно, практически с очень высокой степенью точности, для модулей Ламэ среды верно соотношение  $(\lambda + 2\mu) = 0$ , из которого и получается параметр  $\lambda = -2\mu$ . Более точное значение имеет вид

$$\lambda = \mu(-2 + 2 \cdot 4,17^{-1/2} \cdot 10^{-21}).$$

Поправка к ранее выписанному значению, как видно из данного выражения, очень и очень маленькая. Согласно (1.10), при данных значениях параметров упругости коэффициент Пуассона  $\nu = 1$ .

Это значение находится вне пределов значений  $1/2 \geq \nu \geq 0$  для твердых тел и для жидкости. Поэтому упругая среда гравитационного пространства не является упругим твердым телом. Она не является и жидкостью, для которой коэффициент Пуассона  $\nu = 1/2$ . Что представляет собой упругая среда гравитационного пространства, предстоит изучать.

В уравнениях классической теории гравитации, записанных в терминах упругого поля, параметры Ламэ были другие, они удовлетворяли соотношению  $\lambda = -\mu$ , которое обеспечивало равенство скорости гравитационных волн скорости света. Здесь это не так. Обоснований большей правильности определенного здесь, в данной книге, соотношения между параметрами Ламэ  $\lambda$  и  $\mu$  приведено несколько, а не одно.

Таким образом, упругие параметры среды гравитационного и электромагнитного полей определились полностью. Действительно ли они такие? Ответ на этот вопрос требует осмысливания его не только автором данной работы, но и другими учеными, потому что выглядят эти параметры фантастическими. Метод их получения, как видно из изложенного, достаточно простой, нетрудно его понять и проверить, а результаты критически обсудить с какой-то иной точки зрения, отличной от изложенной здесь.

Представленные выше уравнения описывают гравитационное и электромагнитные поля в случае, когда тензор  $T_{jk}$  энергии-импульса, определяющий гравитационное поле, согласно уравнениям (1.1), приведенным в подразд. 1.2, равен нулю. Если этот тензор отличен от нуля, то к выписанным уравнениям следует добавить уравнения (1.1):

$$\begin{aligned} R_{jk} - \frac{1}{2}\eta_{jk}R &= 8\pi T_{jk}, \\ R_{jk} &= R_{ijkl}, \quad R = \eta_{jk}R_{jk}, \\ R_{jklm} &= \varepsilon_{jm,kl} + \varepsilon_{kl,jm} - \varepsilon_{km,jl} - \varepsilon_{jl,km}, \\ T_{jk,k} &= 0. \end{aligned}$$

Метрический тензор  $\eta_{jk}$  невозмущенного пространства имеет вид  $\eta_{44} = -1$ ,  $\eta_{\alpha\alpha} = 1$ , остальные компоненты тензора равны нулю:  $\eta_{jk} = 0$ ,  $j \neq k$ . При наличии тензора энергии-импульса тензор  $R_{jklm}$  кривизны отличен от нуля и в соответствии с теорией упругости уравнения совместности деформаций  $R_{jklm} = 0$  не выполняются, а это означает, что тензор деформаций не определяет перемещения и понятие перемещений отсутствует. Соотношения деформации-перемещения в этом случае принимать во внимание не нужно. Однако проблема решения задач в этом случае является серьезной в том смысле, что задачи ставить надо более конкретно. В теории упругости примером такой задачи

является построение температурных напряжений в твердом теле. Как было сказано, трехмерное пространство в этом случае не является плоским, уравнения совместности не удовлетворяются. Методы решения таких задач построены [25], и что-то можно обобщить на задачи в гравитационном пространстве, когда тензор энергии-импульса отличен от нуля.

В результате решения выписанной системы уравнений гравитационного и электромагнитного полей определяется тензор деформаций, который определяет метрический тензор деформированного пространства, чем и достигается первоначальная цель решения какой-либо гравитационной задачи. А о том, что представляют собой гравитационные задачи, можно узнать, ознакомившись со специальной литературой [1—4].

Рассмотрим теперь несколько подробнее, каким образом данные уравнения описывают электромагнитное поле. В соответствии с изложенным в подразд. 1.7 получается, что если положить  $\lambda + 2\mu = 0$ , то уравнения упругости превратятся в уравнения электромагнитного поля. Но сейчас получено, что параметр  $\lambda + 2\mu$  не равен нулю, а является существенно более малой величиной по сравнению с параметрами  $\lambda$  и  $\mu$ , взятыми по отдельности. С математической точки зрения данный параметр является очень малой величиной. Выписанные в этом подразделе уравнения описывают и электромагнитное поле, определяемое, если говорить в терминологии теории электромагнитного поля, вектором  $A$ , который, согласно рассматриваемой аналогии, является с точностью до коэффициента пропорциональности вектором перемещений  $u$ :

$$A = u, \quad A_\alpha = u_\alpha.$$

В данной задаче на первом этапе можно считать тензор энергии-импульса равным нулю, т.е. отсутствующим. При наличии вектора тока  $j$  уравнение равновесия имеет вид (1.45):

$$\sigma_{kj,1} = \rho u_{k,11} + 4\pi j_k.$$

Закон Гука в случае, когда параметр  $\lambda + 2\mu$  очень мал по сравнению с параметрами  $\lambda$  и  $\mu$ , взятыми по отдельности, имеет вид (1.32):

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= -2\mu\vartheta\delta_{\alpha\beta} + 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta} + \mu\varepsilon_{44}\delta_{\alpha\beta}, \\ \sigma_{\alpha 4} &= 2\mu\varepsilon_{\alpha 4}, \quad \sigma_{44} = \mu\vartheta + \mu c_2^2 c_1^{-2} \varepsilon_{44}. \end{aligned}$$

Таким образом, если исследование или решение какой-либо проблемы электромагнитного поля выполнено исходя из уравнений упругости, то классические параметры электромагнитного поля затем определяются по следующим формулам (1.37):

$$\begin{aligned}
A_\alpha &= u_\alpha, & F_{jk} &= u_{j,k} - u_{k,j}, \\
F_{0\alpha} &= -F_{\alpha 0} = E_\alpha, & F_{12} &= -F_{21} = -B_3, & F_{13} &= -F_{31} = B_2, \\
F_{23} &= -F_{32} = -B_1, & F_{kk} &= 0, \\
F_{ik,k} &= 4\pi j_i.
\end{aligned}$$

Здесь  $A = \{A_\alpha\}$  — потенциал электромагнитного поля;  $\varphi = \tau$  — потенциал гравитационного поля;  $j_k$  — плотности электрического тока;  $E$  — вектор напряженности электрического поля;  $B$  — вектор напряженности магнитного поля. Ранее уже было сказано, что тензор  $\sigma_{jk}$  напряжений не равен тензору  $F_{jk}$ , хотя в уравнения они входят одинаково: тензор  $\sigma_{kj}$  является симметричным, а тензор  $F_{jk}$  — асимметричным и физическое содержание их разное: первый является тензором напряжений, второй — тензором поворота элементарного объема среды.

В выписанных уравнениях есть потенциал гравитационного поля и нет потенциала электромагнитного поля и из всего изложенного получается, что его не должно быть, хотя это утверждение выглядит крамольным. Все специалисты в области электромагнитного поля приучены к существованию потенциала электромагнитного поля. Полученные уравнения, являющиеся следствием моделирования гравитационного и электромагнитного полей упругим полем, приводят к утверждению, что потенциала электромагнитного поля в известном классическом виде нет. Где истина? Или неверна аналогия полей, или неверны классические уравнения. Ответ состоит в том, что верны уравнения и верна аналогия. Только потенциал  $\varphi$  в классических уравнениях электродинамики играет другую роль, гравитационную. А где потенциал электромагнитного поля?

В подразд. 3.4 электромагнитное поле, созданное сосредоточенным зарядом, определилось уравнениями поля при  $\varphi = 0$ , т.е. при отсутствии потенциала электромагнитного поля. Следовательно, уравнение неразрывности распределенных зарядов определяется тремя первыми уравнениями равновесия без участия потенциала  $\varphi$ . О том, что этот потенциал не очень нужен и в классических уравнениях электродинамики, говорит следующий пример. При исследовании электромагнитных волн [4] в процессе получения решений было предварительно наложено условие  $\varphi = 0$ , и это условие объяснено тем, что произвол уравнений позволяет это сделать. Надо здесь сказать, что введение этого и других условий, типа калибровочных в гравитации, ничем не обосновывается. Такой прием нецелесообразно применять в строгих науках типа рассматриваемых здесь, можно прийти к непонятным результатам.

Приводимые в данной книге аргументы в пользу тех или иных уравнений следуют из теории в целом, а не придумываются автором. В

каждой теории и в построенной здесь четырехмерной теории упругости в основу заложена начальная аксиоматика, которая основана на многовековом опыте человечества, признана учеными, проверена опытом. Ее можно оспаривать, но для этого нужны очень и очень серьезные аргументы. Но когда она принята, то другого произвола у исследователей не должно быть, иначе наука не будет строгой. Конечно, и аксиоматику можно изменять, она изобретена людьми. Это делается в науке, однако в данном случае пока в изменении основополагающей аксиоматики теории деформирования упругих сред нет необходимости.

Вопрос о единых уравнениях, описывающих гравитационное и электромагнитное поля, является непростым, над ним много работали, но твердого ответа не дано. Поэтому нужны постоянные аргументы в пользу этих уравнений, хотя строгость их получения в линейной постановке здесь обеспечена.

Можно привести еще один аргумент в пользу единой теории. При исследовании гравитационных волн в линейном приближении [2] на решения гравитационных уравнений накладывалось так называемое *TT*-калибровочное условие:

$$h_{\alpha\alpha} = 2\varepsilon_{\alpha\alpha} = 2\theta = 0.$$

В свете изложенного выше данное условие означает равенство нулю объемной деформации среды, об этом сказано и в работе [2]. Физически это условие серьезное и без обоснований его вводить не стоит. А как его обосновать, об этом в работах по гравитации не говорится. В подразд. 1.7 было показано, что если это условие ввести, то уравнения упругого поля полностью совпадают с уравнениями электромагнитного поля при любом параметре  $\lambda$ , в том числе и при  $\lambda = -\mu$ , когда уравнения упругости совпадают с уравнениями гравитации согласно изложенному в подразд. 1.6. А раз уравнения совпадают, то совпадают и решения. Следовательно, получается, что линейные уравнения гравитации при условии равенства нулю объемной деформации ( $\theta = 0$ ) являются и уравнениями электромагнитного поля. А раз так, то классические гравитационные уравнения определяют электромагнитные волны. Следовательно, для исследования волновых процессов в электродинамике справедливы единые уравнения. Таким образом, вывод, что должна существовать единая теория гравитации и электродинамики, следует дополнительно и из этого факта. Так что представленные здесь единые уравнения гравитационного и электромагнитного полей имеют подтверждение их правильности.

### 3.8. Что такое деформация времени в упругой среде?

Хочет автор того или нет, постоянно существует вопрос, что такое деформация координаты времени? В разд. 1 уже дано физическое наполнение этого понятия: деформация координаты времени является динамической деформацией расширения-сжатия вещества аналогично тому, как сумма трех главных деформаций является деформацией расширения-сжатия объема тела, т.е. объемной деформацией. Скорость изменения плотности вещества  $\rho_{,i}$ , обусловленная временной деформацией  $\epsilon_{ii}$ , имеет вид ( $\rho$  — плотность вещества среды до деформации):

$$\rho_{,i} = \rho \epsilon_{ii} = -\rho \tau_{,i}.$$

Такое объяснение деформации координаты времени уже давалось в подразд. 1.4 и 1.5. Здесь не будем касаться философского содержания деформации времени, потому что в этом случае можно обсуждение вести бесконечно долго и уйти в сторону от прикладных задач. Интерес здесь представляет то, какое практическое наполнение имеется в данном толковании понятия временной деформации. То, что ей дается толкование как динамической деформации расширения-сжатия вещества упругого тела, уже указывает на реальное, прикладное значение деформации времени. Действительно, в соответствии с уравнениями равновесия (1.16) получается, что члены уравнения, ответственные за динамический процесс в упругом теле, инерционные члены содержат плотность  $\rho$  вещества. Это означает, что плотность вещества определяет скоростные явления в упругом теле. Если изменяется плотность, то изменяются скорости динамических процессов. А раз так, то это изменение в терминах упругости как-то должно быть связано с деформацией координаты времени. Предлагаемые уравнения и учитывают указанную зависимость общего деформационного процесса от динамической деформации расширения-сжатия вещества, дополнительной к объемной деформации, в форме введенных компонент тензора  $\epsilon_{ki}$  деформаций, связанных с параметром  $\tau$ , характеризующим изменение времени в упругой среде в процессе динамической деформации тела.

Встает вопрос о том, как измерять изменения времени в упругом теле. Четких ответов, как это делать, автор пока дать не может, но по косвенным признакам судить об этой деформации можно. При проведении проверки четырехмерных уравнений упругости методом сравнения с экспериментом получено объяснение ряда существующих расхождений классической теории с экспериментом и совпадение этих экспериментов с четырехмерной теорией.

Одним из достоинств четырехмерной теории упругости является и то, что в ней не вводятся новые, не известные ранее параметры среды.

В этой теории имеются только хорошо известные в классической теории упругости параметры: плотность вещества, модули упругости Ламе, через которые выражаются все другие параметры упругости (1.10), используемые на практике, а также скорости продольных и поперечных волн. Любая новая теория, как правило, подразумевает появление каких-либо новых параметров. Здесь этого нет. Но зато в этой теории появились новые понятия — компоненты деформаций, связанные с новым понятием "перемещения" времени. Как было сказано, в этих новых понятиях нет слишком чего-то особенного, их прикладное наполнение вполне нормальное.

Конечно, в практическом смысле к этим понятиям надо привыкать, надо научиться использовать их в граничных условиях. Пока легко это делается в граничных условиях свободного края. Нетрудно это сделать в граничных условиях сочленения решений на границе раздела при идеальном контакте двух упругих сред. Но в граничных условиях при силовых воздействиях на поверхностях тел, в частности взрывных, когда имеется значительная температура, надо думать, как это сделать. Просто поставить условия теоретически нетрудно, придать им физический смысл труднее.

Как отмечалось в подразд. 1.4, деформация  $\epsilon_{ii}$  входит в уравнения похожим образом, как температура входит в уравнения термоупругости. Но можно ли назвать эту деформацию температурной, остается под вопросом. Кроме этой деформации, в уравнения входят и сдвиговые деформации  $\epsilon_{\alpha i}$ , которые не отождествляются с температурными деформациями. Поэтому вопрос о сходстве деформации временной координаты с температурной следует изучать более тщательно. Общеизвестное понятие температуры не очень подходит для объяснения деформации времени. Известно, что тело может быстро нагреваться при взрывных процессах, но пока неизвестно, что оно может также быстро охлаждаться.

Если бы временная деформация была температурной, то при распространении волны в пластинах и стержнях она должна была быстро затухнуть, так как при постоянном отражении от свободных границ происходит постоянное образование волны, определяемой функцией перемещения времени  $t$ . Это привело бы к нагреванию стержня, потому что столь же быстрого охлаждения при отражении волн не происходило бы, и, следовательно, к потере энергии упругой деформации в волне, израсходованной на нагревание пластин, стержней, и поэтому эта волна очень быстро должна была бы убывать. В действительности волны в стержнях, пластинах распространяются без заметного быстрого затухания, а стержни и пластины не нагреваются. Следовательно, деформация времени не является обычной температурной деформаци-

ей. Конечно, такое объяснение примитивное, вопрос этот нужно изучать серьезно с привлечением экспериментальных исследований.

Объяснением изменения времени в пространстве в рамках специальной и общей теории относительности занимались выдающиеся ученые, и дискуссии по этой проблеме были и будут продолжаться. Но с точки зрения прикладных проблем данное выше физическое, или, лучше сказать, прикладное, содержание деформации времени в упругом пространстве можно распространить и на гравитационное пространство. Что собой представляет упругая среда этого пространства, предстоит еще изучать и изучать, а без знания свойств ее трудно делать какие-либо заключения. Но нет смысла сразу отказываться от предлагаемого здесь подхода к исследованию некоторых явлений в гравитационном пространстве, если этот подход позволит решить прикладные задачи типа силового взаимодействия гравитационных и электромагнитных полей. Человечество неплохо существует и будет существовать без знания многих свойств этой среды, поэтому чего-то плохого в таком незнании нет. Однако предлагаемый подход, возможно, позволит ставить и решать еще какие-либо другие прикладные задачи в области гравитации и электродинамики, полезные для людей, и его следует развивать. Кроме задач, данный подход позволит проводить исследование новых свойств среды гравитационного пространства, что также очень важно.

### **3.9. Еще раз о взаимодействии гравитационных и электромагнитных полей**

Единые уравнения гравитационного и электромагнитного полей обладают интересным свойством, которого нет у разных уравнений для данных полей, а именно: появляется возможность решать задачи, в которых нужно рассматривать совместное участие и гравитационных, и электромагнитных полей. Одной из таких задач является задача силового взаимодействия этих, казалось бы, формально очень разных по природе полей, поиск возможностей создавать такие задуманные исследователями взаимодействия и управлять ими. Рассмотренные в предыдущих подразделах задачи о взаимодействии масс и зарядов являются примером рассмотрения подобного рода задач. В основе подхода к исследованию данной проблемы стоит вначале задача теоретического изучения содержания энергии деформации, чтобы на основе этого изучения выявить возможные источники взаимодействия полей, определить параметры этого взаимодействия, разработать возможные методы увеличения силового влияния друг на друга гравитационных и электромагнитных полей.

Приведем здесь снова с целью более конкретного понимания излагаемого выражение для плотности энергии деформации:

$$2W = \sigma_{jk}\epsilon_{jk} = \lambda\vartheta^2 + 2\mu\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\alpha\beta} + 2\mu\vartheta\epsilon_{ii} + \mu^2(\lambda + 2\mu)^{-1}\epsilon_{ii}^2 + 2\mu\epsilon_{\alpha i}\epsilon_{\alpha i}.$$

На основе анализа этой энергии можно, например, выяснить, взаимодействуют ли между собой покоящиеся сосредоточенные масса и электрический заряд. Покоящаяся масса создает описываемые компонентой перемещения времени деформации  $\epsilon_{\alpha i}$  и не создает пространственных деформаций  $\epsilon_{\alpha\beta}$ . Покоящийся электрический заряд создает описываемые пространственными перемещениями  $u_\alpha$  пространственные деформации  $\epsilon_{\alpha\beta}$  и не создает деформаций  $\epsilon_{\alpha i}$ , связанных с временным перемещением. При определении энергии  $W$  в пространстве, содержащем массу и заряд, оказывается, что в данном случае она образуется из суммы энергий заряда и массы, определенных по отдельности. В энергии нет слагаемых, зависящих от перекрестных произведений деформаций, создаваемых массой и зарядом, как это имело место при рассмотрении взаимодействия двух масс или двух зарядов. А раз нет таких слагаемых, то при построении силы взаимодействия путем дифференцирования равной нулю такой части энергии, определяемой этими слагаемыми, получается, что сила взаимодействия заряда и массы равняется нулю, т.е. взаимодействие отсутствует.

Такой подход к определению взаимодействия полей и берется здесь за основу. Анализируя деформации рассматриваемых полей, следует выяснить, имеются ли в выражении для энергии деформации слагаемые, содержащие перекрестные произведения деформаций от разных из рассматриваемых двух или более полей. Если таковые имеются, то данные поля с большой вероятностью взаимодействуют друг с другом. Тогда надо найти полную энергию деформации и при помощи соответствующего дифференцирования определить силу взаимодействия рассматриваемых полей. Если указанных слагаемых нет в выражении для энергии, то рассматриваемые поля не взаимодействуют. Следует здесь отметить, что утверждения верны в рамках линейного приближения теории поля.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу. Исследуем взаимодействие сосредоточенной стационарной массы  $m$  и переменного по времени сосредоточенного электрического заряда  $q(t)$ . Вопрос о том, как организовать такой заряд, рассматривать не будем, так как речь идет пока только о примерах возможных взаимодействий. Переменный во времени заряд создает переменное во времени поле деформаций. В таком поле появляется дополнительная к пространственным деформация  $\epsilon_{ii} = \frac{1}{2}(c^{-1}u_{r,i} - ct_{,r})$ . Электрический заряд не создает отличного от нуля слагаемого, связанного с временной компонентой  $t$ ,

поэтому рассматриваемая деформация определяется только перемещением  $u_r$ :  $\epsilon_{r1} = \frac{1}{2}c^{-1}u_{r,1}$ .

Если вспомнить поле деформаций, создаваемых массой (подразд. 3.3), то это поле определяется одной деформацией  $\epsilon_{r1} = -\frac{1}{2}ct_{,r}$ . Выпишем здесь ту часть энергии деформаций  $W_{12}$ , которая зависит от произведения деформаций, определяемых зарядом  $\epsilon_{r1}(q)$  и массой  $\epsilon_{r1}(m)$ :

$$2W_{12} = (\mu/2)fq_{,1}mr^{-2}(1)r^2(2).$$

Здесь, как и ранее, цифрами "1", "2" обозначены радиусы от точек расположения заряда и массы,  $f$  — константа, определяемая параметрами потенциалов заряда (подразд. 3.4) и массы (подразд. 3.3). Определяем полную энергию  $W_{12}$  интегрированием по пространству точно так же, как это делалось в подразд. 3.3, 3.4, и, дифференцируя эту энергию по расстоянию между точками расположения заряда и массы, получаем силу их взаимодействия

$$F = fq_{,1}mr_{12}^{-2}.$$

Эта сила пропорциональна произведению производной от функции  $q(t)$  и массы  $m$  и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Данный пример показывает, что можно, хотя бы теоретически, создавать специальные электромагнитные поля, которые в силовом смысле взаимодействуют с массами.

Примеров подобных полей можно привести достаточно много. В теории упругости накоплено большое количество решений с особенностями разного вида. В частности, имеется несколько видов дислокаций, описываемых подобного вида решениями, но имеющими особенности более высокого порядка по сравнению с рассмотренными решениями, которые имели особенности типа  $r^{-1}$ . В соответствии со сходством уравнений гравитации и электродинамики подобного рода решения уравнений упругости легко преобразовываются в решения уравнений гравитации и электродинамики, которые описывают соответствующие поля. Таким образом, можно рассмотреть силовые взаимодействия такого рода электромагнитных и гравитационных полей. Подобное исследование представляет серьезную, интересную и самостоятельную область данной науки, которой автор намерен заниматься в дальнейшем. Желательно, чтобы нашлись и другие ученые, которые также занялись бы подобного рода исследованиями.

Задача поиска таких электромагнитных полей интересна в том смысле, что, может быть, удастся найти принцип электромагнитного движителя, при помощи которого можно подниматься и двигаться над землей, отталкиваясь от гравитационного поля Земли при помощи специально создаваемого электромагнитного поля, не выбрасывая массу,

как это происходит при использовании реактивного двигателя. Эта задача в свете изложенного выше является в настоящее время уже научной, а не фантастической мечтой. Но пока надо проводить необходимые для этого подготовительные научные исследования, надо проводить наряду с теоретическими исследованиями и эксперименты в данном научном направлении, а они требуют серьезных материальных затрат.

### 3.10. Экспериментальное подтверждение теории Эйнштейна на упругих моделях

Проведенный анализ совпадения уравнений упругого, гравитационного и электромагнитного полей решает еще одну очень существенную задачу: он приводит и даже уже привел к тому, что позволил получить экспериментальное подтверждение положений общей теории относительности, т.е. теории гравитации, на примере динамических явлений в упругих телах, а не на астрономических или на особых физических явлениях. Возможно, это звучит так, что несколько принижает высокую теорию. Однако надо признать, что пока экспериментальных подтверждений теории гравитации в гравитационных наблюдениях немного и практически все опубликованные в печати подтверждения не очень строгие.

Очень красивым подтверждением теории поля является разбегание галактик, расположенных очень далеко друг от друга. Но таких явлений очень и очень мало. Но, кроме экспериментальных явлений астрономического или астророфизического характера, желательно иметь лабораторные эксперименты, которые можно было бы в любое время повторить, или поставить новые с целью более расширенного и методического подтверждения теории поля. Хотелось бы с гравитационными процессами работать в научном экспериментальном смысле так же, как это делается с упругими и электромагнитными процессами.

Полученное в данной работе полное сходство теорий гравитации и четырехмерной упругости сделало возможным, как уже не раз говорилось, обобщать результаты одной теории на другую. А раз так, то изложенная в разд. 2 экспериментальная проверка четырехмерной теории упругости может быть рассмотрена как экспериментальная проверка общей теории относительности. Действительно, уравнения теории гравитации в математическом смысле являются в рассматриваемом линейном приближении частным случаем уравнений теории упругости. А если верными получились в результате сравнения теории и эксперимента уравнения теории упругости, то на основании этого сравнения верными можно считать и уравнения гравитации, когда параметры общих уравнений имеют другие значения. В теории упругости принято

проверять теорию экспериментом на каком-либо одном материале, металле и считать, что сделанная проверка имеет силу для всех других упругих тел. Такая процедура считается вполне законной.

Уравнения упругости содержат две константы в законе Гука — два модуля упругости Ламэ  $\lambda$ ,  $\mu$ , которые в общем случае могут быть произвольными, хотя для реальных упругих тел область их изменения несколько ограничена и ограничение, выраженное через коэффициент Пуассона  $\nu$ , имеет вид  $1/2 > \nu > 0$ . Математически [6] эта область применимости уравнений упругости шире:  $1/2 > \nu > -1$ . Нет доказательств, что уравнения в математическом смысле не работают при других значениях коэффициента Пуассона. Выписанные выше (подразд. 3.7) единые уравнения гравитационного и электромагнитного полей соответствуют значению коэффициента Пуассона  $\nu = 1$ .

Приведенные в разд. 2 сравнения четырехмерной теории упругости и эксперимента подтвердили практическую правильность теории упругости. Сравнение было проведено на нескольких задачах и показало, что учет в новой теории деформации координаты времени в упругой среде снимает многие имеющиеся расхождения эксперимента и классической теории, в которой деформация координаты времени не рассматривается.

Одним из интересных моментов выполненной процедуры сравнения теории и эксперимента был следующий. Четырехмерная теория упругости показала, что в полупространстве нет поверхностных волн, которые предсказаны классической теорией, а вместо них имеются поперечные волны, распространяющиеся вдоль плоской границы, которых нет по классической теории. Четырехмерная теория показала, что поверхностных волн нет и в полуполосе с прямолинейной границей. Анализ экспериментальных данных, представленных в форме фотодокументов, показал, что поверхностных волн в полуполосе действительно нет.

Анализ экспериментальных исследований подтвердил и многие другие результаты четырехмерной теории упругости, которые не предсказываются классической теорией, но здесь не имеет смысла их повторять, они приведены в разд. 2. Вопрос состоит в том, чтобы выяснить, как же эти экспериментальные результаты подтверждают теорию гравитации.

Утверждение, что эксперименты из области теории упругости могут играть роль проверочных в теории поля следует из того, что уравнения гравитационного и электромагнитного полей представляют собой уравнения упругого поля. С точки зрения математики, уравнения гравитационного поля являются, как было сказано выше, частным случаем четырехмерных уравнений упругого поля, когда модули упругости

Ламэ удовлетворяют, согласно исследованиям, изложенным в предыдущих подразделах, условию малости скорости гравитационных волн по сравнению со скоростью света или, что то же самое, условию малости параметра  $\lambda + 2\mu$  по сравнению с параметрами Ламэ  $\lambda$ ,  $\mu$ , взятыми по отдельности.

Если экспериментальные исследования, выполненные с упругими телами, подтверждают правильность четырехмерной теории упругости в целом, то тем самым они подтверждают, как выше было сказано, правильность частного случая этой теории, т.е. подтверждают правильность теории гравитации. Снова отметим здесь то обстоятельство, что речь идет о линейных теориях и только к ним относится полученное утверждение. Таким образом, можно считать, что описанные в разд. 2 экспериментальные исследования подтверждают правильность гениальной теории А. Эйнштейна.

В результате всего сказанного обнаруживается, что дополнительную проверку правильности общей теории относительности можно осуществлять экспериментально на упругих телах в лабораторных условиях. Здесь специально подчеркнуто — дополнительную проверку, потому что в правильности этой теории сомнений в настоящее время нет, вопрос состоит лишь в том, чтобы по мере возможности осуществлять ее развитие как науки, потому что, если наука не развивается, то она умирает.

С целью такой дополнительной проверки и замыслен (см. разд. 2) эксперимент по измерению собственных частот колебаний упругого шара. Этот эксперимент желателен для запланированного подтверждения правильности четырехмерной теории упругости, но как только что было сказано, он сослужит службу и для еще одного экспериментального подтверждения правильности общей теории относительности. Видится и много других интересных экспериментальных задач, решение которых сослужит хорошую службу и теории упругости, и теории гравитации и электродинамики.

### **3.11. Вопросы интегрирования уравнений поля при отсутствии и при наличии тензора энергии-импульса**

Вопросы интегрирования уравнений теории упругости в случае, когда неоднородными являются уравнения совместности деформаций, являются непростыми. Одним из примеров подобных задач является задача из классической теории упругости о температурных напряжениях в упругих телах. При неравномерном нагревании упругого тела в нем возникают температурные напряжения. Полученная на основе экспериментальных наблюдений деформация температурного расши-

рения  $\epsilon_{\beta\beta}^T = \alpha T$ ,  $\epsilon_{\beta\gamma}^T = 0$  при  $\gamma \neq \beta$ , где  $\alpha$  в данном случае — коэффициент температурного расширения вещества упругого тела;  $T$  — функция температуры.

Эти деформации не удовлетворяют в общем случае уравнениям совместности деформаций теории упругости. Таким образом, получается упругое пространство, кривизна которого не равна нулю, потому что правые части уравнений совместности деформаций формируют кривизну пространства. Это неудовлетворение и является причиной возникновения в теле температурных напряжений. Для решения задач по определению в теле температурных напряжений возникла целая наука — термоупругость.

Образовавшиеся в упругом теле температурные напряжения приводят к появлению в этом теле дополнительных к температурным [5] так называемых силовых деформаций  $\epsilon_{\beta\gamma}$  и таких, что в месте с температурными деформациями они создают деформации  $e_{\beta\gamma} = \epsilon_{\beta\gamma} + \epsilon_{\beta\gamma}^T$ , которые удовлетворяют уравнениям совместности деформаций. Деформации  $\epsilon_{\beta\gamma}$  удовлетворяют закону Гука. Созданная таким образом модель температурного деформирования позволяет приступить к интегрированию уравнений теории упругости и решать задачи термоупругости.

Этот пример приведен здесь с той целью, чтобы показать, как приходится поступать при интегрировании уравнений поля при наличии кривизны пространства или, что то же самое, тензора энергии-импульса. Кривизна пространства и тензор энергии-импульса в данном случае определяются полностью функцией температуры и не зависят от напряжений в среде. В этом примере получается, что тензор энергии-импульса задается, а не определяется в процессе решения задачи.

Аналогичная задача интегрирования уравнений упругого поля при наличии тензора энергии-импульса возникает при определении остаточных напряжений в телах, "замороженных" в них после проведения технологических операций изготовления этих тел, например, при помощи литья, спекания, различного рода сварок и т.д. Тензор энергии-импульса создается в результате прохождения в теле процессов релаксации напряжений, ползучести, пластичности, вязкоупругости и многих других. В теле формируются остаточные напряжения, которые не удовлетворяют уравнениям совместности деформаций и, следовательно, создают тензор энергии-импульса. Данная задача является многофакторной и хорошо разработанных методов решения ее нет. В ней тензор энергии-импульса в определенной мере зависит от искомого напряженного состояния.

В теории упругого поля имеется и много других задач, когда существует отличный от нуля тензор энергии-импульса, и в этом смысле

теория упругости представляет собой область науки, которая может играть роль моделирующей для теории гравитации и на которой можно моделировать некоторые явления из общей теории относительности в земных условиях, в лаборатории.

Рассмотренные примеры показывают, что всеобъемлющих методов интегрирования уравнений теории поля при наличии тензора энергии-импульса нет, как нет и методов определения самих тензоров энергии-импульса. В данной книге рассмотрены задачи о полях напряжений в гравитационном пространстве, создаваемых сосредоточенными массами и электрическими зарядами. Поля напряжений и деформаций формируют некоторые правые части уравнений поля (3.9) в форме обобщенных функций типа производных от  $\delta$ -функции. При помощи операций свертки этих построенных полей с определенными заданными функциями можно построить гравитационные и электромагнитные поля для распределенных покоящихся или движущихся масс и зарядов, можно решить и ряд других задач, которые представляют интерес. В этих задачах тензор энергии-импульса определится после их решения, если он представляет интерес.

Не зная общих методов интегрирования уравнений теории поля, можно и нужно решать конкретные задачи, поставленные самой жизнью или исследователями. Проще дело обстоит при интегрировании уравнений поля, когда тензор энергии-импульса равен нулю. В этом случае проблем особых нет, так как действуют хорошо разработанные методы теории упругости и при нулевом тензоре энергии-импульса существуют перемещения точек пространства, уравнения совместности деформаций выполняются, т.е. имеют место в чистом виде задачи теории упругости.

Подведем некоторые итоги выполненной работы. Исследование аналогии уравнений упругости, гравитации, электродинамики привело к серьезному выводу о том, что динамические уравнения теории упругости должны быть четырехмерными, а не трехмерными, как это имеет место в классической теории, они приведены здесь. Уравнения гравитации и электродинамики должны быть и являются едиными, и эти уравнения в данной книге приведены, но только лишь в линейном приближении. Получились также интересные следствия этого единства: скорость гравитационных волн оказалась намного меньше скорости света, а не равна ей, как это считается в настоящее время, массы в пространстве с течением времени уменьшаются по величине, электромагнитные и гравитационные поля могут взаимодействовать в силовом отношении, теория Эйнштейна может находить и находит экспериментальное подтверждение в лабораторных условиях на модельных динамических явлениях в упругих телах и т.д. Получилась иная по сравнению с существующей классификация гравитационных, электромагнитных и объемных волн.

Единство уравнений гравитации и электродинамики оказалось следствием моделирования среды пространства как упругой. Автор данной работы подошел к этому вопросу не как физик, а как механик, специалист по теории упругости. Он, как уже говорилось, хотел обобщить на теорию упругости замечательные научные достижения в гравитации и электродинамике, проделал эту работу, и определенная цель была достигнута. Полученные на основе указанного обобщения четырехмерные уравнения упругости привели к новым результатам: в динамическом деформационном процессе имеет место новая составляющая тензора деформаций — динамической деформации расширения-сжатия вещества в упругих телах наряду с объемной деформацией, скорости продольных волн в упругих телах, пластинах, стержнях одни и те же, поверхностные волны в действительности являются поперечными, по-новому должны рассматриваться динамические задачи теории упругости, существенно облегчена возможность решения многих динамических задач теории упругости и т.д. Об этом достаточно под-

робно сказано в разд. 2. Намечены новые экспериментальные задачи, решение которых может дать интересные результаты, о них в книге сказано.

Подход к пространству электромагнитного поля как к упругому твердому телу рассматривался в английской научной среде, великий Максвелл получил уравнения электродинамики, исходя из такого представления. Но это представление не прижилось в научном мире, хотя ученые время от времени вспоминают об этом [1—3, 25], но и только. Развития это положение не получало. Предпринятый в данной работе вариант исследования явился развитием предыдущих подходов, но уже с новым взглядом на упругое твердое тело как на четырехмерное упругое пространство. Этот взгляд сформировался, как неоднократно уже говорилось, в результате обобщения на упругое тело положений гравитации.

Для среды гравитационного пространства также хорошо подошло моделирование ее упругой средой. Однако обнаруженные упругие свойства этой среды оказались такими, что к ней не подошло определение ее как твердого тела, как жидкости или как газа. В реальной земной среде пока не выявилась среда с такими упругими свойствами. Модули упругости среды пространства получились также фантастическими. Но интересным здесь оказалось то, что появилась возможность методами механики сплошной среды изучать свойства среды пространства более конкретно, попытаться "потрогать" ее руками. Оказалось, что следует рассматривать пространство не как пустоту, а как заполненное средой, хотя пока и неизвестной природы. Имеются экспериментальные исследования, свидетельствующие о том, что среда пространства практически неподвижна или движется со скоростью не более 1,6 м/с [26]. Эта оценка следует из того, что большую точность измерения, как отмечено в работе, пока достичь не удалось. Данное свойство среды пространства дополнительно подтверждает правомерность исследования ее методами теории упругих сред.

Единство гравитационной и электромагнитной теорий открывает в этих областях науки новые направления исследований, постановки и решения новых задач. В качестве примера таких направлений можно привести проблему силового взаимодействия гравитационных и электромагнитных полей, когда можно искать и создавать такие электромагнитные или гравитационные поля, которые позволят когда-нибудь научиться отталкиваться от гравитационного поля Земли, Солнца и других планет, а это уже интересное практическое приложение единой модели. Конечно, сейчас это звучит как мечта, но мечта уже не фантастическая, а научная.

Изложенное в данной работе приоткрывает немного занавесь в новую область научных исследований механики деформируемой упругой среды гравитационного и электромагнитного пространств. Практически здесь поставлено больше вопросов, чем дано ответов. Главный из них заключается в том, что надо как-то выяснить, что это за упругая среда, наполнившая все пространство, а затем исследовать и все остальное. Однако и в сложившейся ситуации можно решать многие интересные практические задачи.

## Литература

1. Сахаров А.Д. Вакуумные квантовые флуктуации в искривленном пространстве и теория гравитации // Докл. АН СССР. 1967. Т. 177. С. 70—71.
2. Misner Ch.W., Thorne K.S., Wheeler J.A. Gravitation. San Francisco: Freeman, 1973. Рус. пер.: Мизнер Ч., Торн К., Уиллер Дж. Гравитация: В 3 т. М., 1977. Т. 1: Т. 2; Т. 3.
3. Feynman R.P., Leighton R.B., Sands M. The Feynman lectures on physics. Vol. 2. Reading (Mass.) ect.: Addison—Wesley, 1964. Рус. пер.: Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. М., 1966. Т. 5: Электричество и магнетизм. Т. 6: Электродинамика.
4. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теория поля. М., 1988. Т. 2.
5. Fung Y.C. Foundations of solid mechanics. Englewood Cliffs (N. J.): Prentice-Hall, 1965.
6. Лурье А.И. Теория упругости. М., 1970.
7. Love A.E.H. A treatise on the mathematical theory of elasticity. Cambridge: Univ. press, 1927. Рус. пер.: Ляв А. Математическая теория упругости. М., 1935.
8. Амензаде Ю.А. Теория упругости. М., 1976.
9. Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. М., 1986.
10. Чернышев Г.Н. Взаимное обобщение уравнений упругого и гравитационного полей на основе механики деформируемых тел // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 2. С. 86—100.
11. Седов Л.И. Механика сплошной среды. М., 1994. Т. 1.
12. Метод фотоупругости. Т. 2. Метод поляризационно-оптических измерений. Динамическая фотоупругость / Под ред. Н.А. Стрельчука, Г.Л. Хесина. М., 1975.
13. Александров А.Я., Ахметзянов М.Х. Поляризационно-оптические методы механики деформируемого тела. М., 1973.
14. Dally I.W., Thau S.A. Observations of stress wave propagation in a half-plane with boundary loading // Intern. J. Solids and Struct. 1967. Vol. 3, № 3. P. 293—308.
15. Вольтмер Ф.В., Инпен Е.Р., Вайт Р.М., Лим Т.К., Фарнелл Г.В. Измерения и расчет скорости поверхностных волн // ТИИЭР. 1968. Вып. 56, № 9. С. 247—248.
16. Андерсан О., Либерман В. Скорость звука в горных породах и минералах // Физ. акустика. 1969. Вып. 4. С. 382—433.
17. Kolsky H. Stress waves in solids. Oxford, 1953. Рус. пер.: Кольский Г. Волны напряжения в твердых телах. М., 1953.
18. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., 1958.
19. Dally I.W., Lewis D. Photoelastic analysis of Rayleigh wave propagation in wedges // J. Geophys. Res. 1970. Vol. 75, № 17. P. 3387—3398.
20. Dally I.W., Reinhardt H.W. Some characteristics of Rayleigh wave interaction with surface flaws // Materials Evaluation. 1970. P. 128—145.
21. Справочник по сталям и методам их испытаний. М., 1958.

22. Справочник: Физические свойства сталей и сплавов, применяемых в энергетике / Под ред. Б.Е. Неймарк. М.; Л., 1967.

23. Яворский Б.М., Детлаф А.А. Справочник по физике. М., 1965.

24. Feynman R.P., Leighton R.B., Sands M. The Feynman lectures on physics. Vol. 1. Reading (Mass.) ect.: Addison-Wesley, 1964. Рус. пер.: Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. М., 1966. Т. 1.

25. Wheeler J.A. I quanti e l'Universo // Astrofisica e cosmologia, gravitazione, quanti e relativita: Sentenario di Einstein. Giunti Barbera; Firenze, 1979. P. 1137—1164. Рус. пер.: Сборник к 100-летию Эйнштейна: Астрофизика, кванты и теория относительности. М., 1982.

26. Moller C. Trionfi e limiti della teoria di Einstein della relativita e gravitazione // Ibid. 1979. P. 25—56.

# Оглавление

Введение .....	3
1. Четырехмерные уравнения упругого поля .....	11
1.1. О деформации координаты времени в упругих телах .....	11
1.2. Линейные уравнения гравитационного поля А. Эйнштейна .....	14
1.3. Уравнения классической трехмерной теории упругости ....	16
1.4. Четырехмерные уравнения теории упругости .....	19
1.5. Уравнение импульсов вместо уравнения неразрывности в теории упругих сред .....	28
✓ 1.6. Гравитация — это упругость, в которой скорости продольных и поперечных волн равны .....	32
✓ 1.7. Электродинамика — это упругость, в которой скорость продольных волн равна нулю .....	36
✓ 1.8. О единых уравнениях гравитации и электродинамики .....	42
✓ 1.9. Четырехмерные уравнения акустического поля .....	54
2. Четырехмерная теория упругости и эксперимент .....	47
✓ 2.1. Право на жизнь четырехмерной упругости определяет эксперимент .....	47
✓ 2.2. Поверхностные волны в полупространстве — это поперечные волны .....	49
2.3. Плоское напряженное состояние в полосах-пластинах .....	52
2.4. О волнах в полубесконечной полосе .....	54
✓ 2.5. Экспериментальные результаты исследования распространения волн в полуполосе от сосредоточенного взрыва на границе и их соотношение с теориями .....	57
✓ 2.6. Дополнительный анализ экспериментальных результатов о распространении волн .....	75
✓ 2.7. О некоторых других экспериментах, расходящихся с классической теорией и согласующихся с четырехмерной теорией упругости .....	83
✓ 2.8. Результаты экспериментальной проверки четырехмерной упругости .....	91
✓ 2.9. Свободные колебания упругого шара .....	95

3. Единые линейные уравнения гравитации и электродинамики .....	99
✓3.1. Единство гравитации и электродинамики — следствие упру- гости пространства .....	99
✓3.2. О взаимодействии гравитационных и электромагнитных полей .....	101
✓3.3. Теоретическая модель притяжения масс .....	103
✓3.4. Теоретическая модель полей электрических зарядов и сил их взаимодействия .....	108
✓3.5. Скорость гравитационных волн .....	113
✓3.6. К обоснованию результата о малой скорости гравитаци- онных волн .....	117
✓3.7. Единые линейные уравнения гравитационного и электро- магнитного полей .....	120
✓3.8. Что такое деформация времени в упругой среде? .....	127
✓3.9. Еще раз о взаимодействии гравитационных и электромаг- нитных полей .....	129
3.10. Экспериментальное подтверждение теории Эйнштейна на упругих моделях .....	132
✓3.11. Вопросы интегрирования уравнений поля при отсутствии и при наличии тензора энергии-импульса .....	134
Заключение .....	137
Литература .....	140

Научное издание

**Чернышев Герман Николаевич**  
**УПРУГОСТЬ, ГРАВИТАЦИЯ,**  
**ЭЛЕКТРОДИНАМИКА**

*Утверждено к печати*  
*Ученым советом*  
*Института проблем механики*  
*Российской академии наук*

Зав. редакцией *Н.А. Степанова*  
Редактор *И.С. Лицов*  
Художник *Т.В. Болотина*  
Художественный редактор *В.Ю. Яковлев*

ЛР № 020297 от 23.06.1997

Подписано к печати 16.12.2002. Формат 60 × 90 1/16  
Гарнитура Таймс. Печать офсетная  
Усл.печ.л. 9,00. Усл.кр.-отт. 9,0. Уч.-изд.л. 8,9  
Тираж 450 экз. Тип. зак. 3895

Издательство “Наука”  
117997 ГСП-7, Москва В-485, Профсоюзная ул., 90

E-mail: [secret@naukaran.ru](mailto:secret@naukaran.ru)  
Internet: [www.naukaran.ru](http://www.naukaran.ru)

Санкт-Петербургская типография “Наука”  
199034, Санкт-Петербург В-34, 9-я линия, 12

ISBN 5-02-002863-0



9 795020 028639