ММ

Σ

В. А. Чернятин

ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА ФУРЬЕ В СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

МГУ

В. А. Чернятин

Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
1991

УДК 517.95

Чернятин В. А. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. М.: Изд-во МГУ, 1991. — 112 с.

ISBN 5—211—01579—7.

Монография посвящена проблеме существования классических решений смешанных задач для линейных уравнений в частных производных, допускающих разделение переменных по методу Фурье, строгое математическое обоснование которого впервые было дано В. А. Стекловым в 1922 г. Изложен принципиально новый подход к обоснованию метода Фурье, основанный на отказе от почленного дифференцирования формальных рядов и замене его непосредственным суммированием их с функциями с нужными дифференциальными свойствами. Предложенная модификация метода Фурье позволяет получать необходимые и достаточные условия классической разрешимости смешанных задач.

Для научных работников, преподавателей вузов и аспирантов, специализирующихся в области решения краевых задач математической физики.

Рецензенты: доктор физ.-мат. наук *Ф. П. Васильев*,
доктор физ.-мат. наук *В. П. Михайлов*

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Московского университета

Научное издание

ЧЕРНЯТИН Валентин Алексеевич

ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА ФУРЬЕ
В СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ
ДЛЯ УРАВНЕНИЙ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Зав. редакцией *Н. М. Глазкова*
Редактор *Е. Д. Егорушкина*
Художественный редактор *Ю. М. Добрянская*
Технический редактор *Г. Д. Колоскова*
Корректоры *В. П. Кададинская, Л. А. Айдарбекова*

ИБ 4118

Сдано в набор 02.01.91. Подписано к печати 10.10.91. Формат $60\times90^1/16$. Бумага офс. № 2 Офсетная печать. Усл. печ. л. 7,0. Уч.-изд. л. 6,51. Тираж 1260 экз. Заказ № 65. Изд. № 1439. Цена 1 р. 90 к.

Ордена «Знак Почета» издательство Московского университета. 103009, Москва, ул. Герцена, 5/7.
Типография ордена «Знак Почета» изд-ва МГУ. 119899, Москва, Ленинские горы

$Ч \dfrac{1602070100-065}{077(02)-91} 73-91$

ISBN 5—211—01579—7

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Монография посвящена проблеме существования классических решений смешанных задач для линейных уравнений с частными производными, допускающих разделение переменных по методу Фурье. Ни в коей мере она не претендует на полноту изложения этого традиционного раздела теории дифференциальных уравнений и содержит лишь оригинальные результаты автора по новому подходу к обоснованию метода Фурье для уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными. Вместе с тем изложенный материал представляет собой вполне законченное исследование с точки зрения как методологии нового подхода, так и его применения к проблеме классической разрешимости смешанных задач для основных уравнений математической физики. Существенно, что предложенная модификация метода Фурье, как правило, приводит к необходимым и достаточным условиям существования классических решений.

Безусловно, рассматриваемая в монографии проблема относится к хорошо изученному разделу теории дифференциальных уравнений, который с определенной точки зрения считают давно закрытым. После первого издания в 1922 г. основополагающей в данной области монографии В. А. Стеклова [32] этот раздел стал исключительно предметом изучения большинства учебных пособий по уравнениям в частных производных или математической физики.

Чтобы понять, чем вызван интерес к столь хорошо изученной проблеме, кратко проанализируем существо двух этапов, составляющих основное содержание метода Фурье как строгого математического метода. Первый этап включает формальную процедуру построения классического решения смешанной задачи в виде ряда Фурье по собственным функциям обыкновенного диффереционального оператора. По существу, это не более чем проблема отыскания собственных значений и функций такого оператора и решения соответствующей задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. С принципиальной точки зрения здесь все ясно, и речь может идти только о вычислительных трудностях.

Совсем иначе обстоит дело со вторым этапом, назначение которого — дать строгое математическое обоснование метода Фурье, а точнее — доказать, что построенный на предыдущем этапе формальный ряд Фурье является классической функцией, удовлетворяющей в обычном смысле дифференциальному уравнению, а также граничным и начальным условиям. Оказывается, именно в этой части метод Фурье допускает определенную модификацию, которая и составляет основное содержание предлагаемой монографии.

Дело в том, что стандартная процедура обоснования метода Фурье [30; 32] при доказательстве требуемой гладкости формальных рядов базируется на обобщенном принципе суперпозиции решений [33, с. 91; 60, с. 126], восходящем еще к Эйлеру и Бернулли [32, с. 73], согласно которому формальное решение смешанной задачи в виде ряда Фурье по собственным функциям будет ее классическим решением, если все его частные производные, входящие в дифференциальное уравнение, могут быть найдены путем почленного дифференцирования данного ряда нужное число раз.

Законность таких операций над функциональными рядами, как правило, накладывает весьма жесткие требования к исходным данным смешанной задачи, не вызванные самой ее постановкой. Более того, эти требования, формулируемые в терминах гладкости коэффициентов дифференциального уравнения и начальных функций, должны еще обеспечить равномерную сходимость формально продифференцированных рядов. Очевидно, все это приводит к грубым достаточным условиям существования искомых классических решений. Именно так проводилось обоснование метода Фурье в смешанных задачах для большинства известных случаев, которые фактически исчерпываются различными типами уравнений в частных производных второго порядка с двумя [18; 30; 32] и большим числом переменных [9; 16].

Основная идея нового подхода естественна и состоит в отказе, когда это необходимо, от почленного дифференцирования формального решения смешанной задачи как математического средства традиционного обоснования метода Фурье. В качестве альтернативы этому предлагается выделение структурных особенностей из формальных рядов Фурье, представляющих искомое решение и не допускающих почленного дифференцирования, и их непосредственное суммирование к функциям требуемого порядка гладкости.

Несмотря на внешнюю простоту предложенной идеи, ее реализация сталкивается с большими математическими трудностями. Представленный для этого в монографии математический аппарат включает уточненные асимптотические формулы для собственных функций оператора Штурма—Лиувилля и коэффициентов Фурье гладких функций, а также методы суммирования некоторых специальных рядов Фурье к функциям с нужными дифференциальными свойствами.

Любая модификация известного метода может быть признана эффективной, если она позволяет не просто установить новые результаты в решении тех или иных задач, а усилить уже полученные ранее, но не окончательные результаты. Предложенная модификация процедуры обоснования метода Фурье этому критерию удовлетворяет. С ее помощью удалось получить новые условия разрешимости смешанных задач для таких классических уравнений в частных производных, как однородное и неоднородное волновое, Шредингера и теплопроводности. В гиперболическом случае найденные условия разрешимости являются точными и существенно усиливают известные результаты В. А. Стеклова [32], И. Г. Петровского [30] и Б. М. Левитана [18].

Очевидно, предложенный новый подход к обоснованию метода

Фурье может быть применен и к другим типам линейных уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными, в частности к указанным выше уравнениям второго порядка с весовой функцией при производной по времени или к уравнению четвертого порядка о поперечных колебаниях упругой балки. В принципе основные идеи нового подхода переносятся и на многомерные смешанные задачи. Сложности, которые возникают при этом, трудно переоценить, так как в лучшем случае придется иметь дело с исследованием гладкости формальных решений в виде кратных рядов Фурье. Однако перечисленные вопросы остаются пока открытыми.

Монография состоит из шести глав и приложения, а ее научное содержание отражено в публикациях [38—48; 51; 52; 57]. В первой главе представлена методология нового подхода к обоснованию метода Фурье для линейной смешанной задачи довольно общего вида. Постановка такой общей задачи является не самоцелью, а стремлением охватить наиболее характерные одномерные смешанные задачи математической физики для уравнений гиперболического и параболического типов, Шредингера в частных производных, поперечных колебаний упругой балки и др. Доказана теорема о представлении и единственности классического решения. В терминах гладкости суммы функционального ряда сформулирована теорема о необходимых и достаточных условиях существования искомого решения, которая, несмотря на неконструктивный характер, эффективно используется при получении конкретных результатов в последующих главах.

Во второй главе изложен необходимый математический аппарат, включающий уточненные асимптотические оценки собственных функций оператора Штурма—Лиувилля и асимптотические формулы, связывающие коэффициенты Фурье гладких функций по двум различным базисам. В последующих четырех главах развитая методология обоснования метода Фурье применяется к решению смешанных задач для основных уравнений математической физики второго порядка.

В третьей и четвертой главах в явном виде получены неулучшаемые условия разрешимости смешанных задач для уравнений гиперболического типа: однородного и неоднородного. В пятой главе показано, что смешанная задача для уравнения Шредингера в частных производных при естественных предположениях относительно ее исходных данных классического решения не имеет. Найдены необходимые и достаточные условия классической разрешимости задачи в терминах сходимости в среднем конструктивно построенного функционального ряда.

Наконец, в шестой главе получены новые достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для неоднородного уравнения теплопроводности. Здесь взамен традиционных требований гладкости по пространственной переменной к правой части уравнения предлагается наложить на нее условие Гельдера по времени. В приложение к монографии вынесены некоторые вспомогательные результаты, используемые при доказательстве основных теорем.

История вопроса и основное содержание метода Фурье решения смешанных задач для основных уравнений в частных производных математической физики подробно изложены в [5; 15; 32]. Метод разделения переменных в задаче о колебаниях упругой струны был предложен Эйлером и Бернулли [5, с. 105], а впоследствии обобщен на другие классы уравнений и обоснован Фурье [15, с. 111; 32, с. 71]. Стержнем метода Фурье в современном его толковании является обобщенный принцип суперпозиции частных решений [33, с. 91; 60, с. 126], основанный на почленном дифференцировании функциональных рядов, представляющих искомые решения смешанных задач. Большинство известных результатов по существованию классических решений смешанных задач для различных типов дифференциальных уравнений, рассматриваемых в монографии, получено с использованием операций почленного дифференцирования рядов [4; 9; 16—18; 22; 30; 32; 60]. Без почленного дифференцирования метод Фурье можно обосновать только в отдельных частных случаях, например при нулевом потенциале в уравнении собственных колебаний упругой струны, когда решение смешанной задачи представляется формулой Даламбера [32, с. 225]. Исключением является лишь один тип полученных с помощью функций Грина достаточных условий классической разрешимости смешанной задачи в параболическом случае из [59], когда искомое решение, по-видимому, не допускает почленного дифференцирования нужное число раз.

Проводимое в монографии исследование гладкости сумм формальных рядов Фурье основано на выделении в них не допускающих почленного дифференцирования сингулярных составляющих. В свою очередь, это достигается с помощью построения уточненных асимптотических формул для собственных значений и функций оператора Штурма—Лиувилля. Надо сказать, что сама по себе идея выделения особенностей в функциональных рядах и их суммирования к явным функциям с определенными свойствами высказывалась еще А. Н. Крыловым [15, с. 224], однако она применялась только к специальным рядам с недифференцируемой суммой, что не соответствует изучаемым ниже задачам. Что касается известных асимптотик собственных значений и функций, то здесь прежде всего следует указать классическую работу Г. Борга [56] и монографии Ф. Трикоми [34] и Б. М. Левитана [19]. Систематическое изложение этого вопроса содержится в монографии В. А. Марченко [21]. Более точные асимптотические оценки собственных значений оператора Штурма—Лиувилля найдены автором в [47].

Следует отметить, что начиная с 20-х годов методы решения смешанных задач для уравнений в частных производных развивались как на многомерные случаи, так и в направлении расширения классов допустимых решений на функции, имеющие обобщенные производные. Подробное изложение этих вопросов можно найти в обзорах [9; 10] и во введении из [17].

Приведем краткий обзор известных результатов по проблеме классической разрешимости смешанных задач для конкретных типов уравнений, рассмотренных в монографии. Для однородного волнового уравнения наилучшие условия разрешимости были получены В. А. Стекловым [32, с. 223], И. Г. Петровским [30, с. 210] и Б. М. Левитаном [18, с. 108]. Достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для неоднородного гиперболического уравнения предложены И. Г. Петровским [30, с. 203] и В. П. Михайловым [22, с. 280].

По классической разрешимости смешанной задачи для уравнения Шредингера автору не известны какие-либо результаты. Что касается разрешимости этой задачи в классе обобщенных решений, то здесь прежде всего надо указать учебные пособия В. С. Владимирова [4, с. 482] и О. А. Ладыженской [17, с. 259]. Наконец, для неоднородного уравнения теплопроводности достаточные условия разрешимости смешанной задачи можно найти в обзоре [10] и учебных пособиях В. П. Михайлова [22, с. 381] и Н. С. Кошлякова, Э. Б. Глинера, М. М. Смирнова [14, с. 472]. Так или иначе все они связаны с введением некоторых требований гладкости по пространственной переменной к исходным данным задачи. В частности, М. И. Матийчуком и С. Д. Эйдельманом [55] предложены оригинальные условия разрешимости данной задачи в классах Дини.

Для других типов уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными в [2; 29] рассматривалась смешанная задача для дифференциального уравнения четвертого порядка о поперечных колебаниях упругой балки, в частности под действием периодической по времени возмущающей силы. Для этого случая автором [49; 50] разработан конструктивный точный алгоритм решения задачи, основанный на ее сведении к стандартной двухточечной краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, решаемой методом ортогональной прогонки [6].

В заключение автор выражает глубокую признательность В. А. Кондратьеву, Е. М. Ландису и В. П. Михайлову за полезные обсуждения основных результатов, представленных в монографии.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\bar{G} = \{x \in R^1: \quad 0 \le x \le \pi\}$;
$\bar{H} = \{t \in R^1: \quad 0 \le t \le T\}$;
$\bar{Q} = \bar{G} \times \bar{H}$;
$\bar{\Omega} = \{\tau \in R^1: \quad 0 \le \tau \le T\}$;

$C^{\varkappa, m}(\bar{Q}) = \left\{f(x, t): \quad f, \dfrac{\partial^i f}{\partial x^i}, \quad \dfrac{\partial^j f}{\partial t^j} \in C(\bar{Q}) \qquad \forall i \le \varkappa, \quad j \le m\right\}$;

$C^n(\bar{Q}) = \left\{f(x,t): \quad f, \dfrac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial t^j} \in C(\bar{Q}) \qquad \forall i + j \le n\right\}$;

$C_0^n(\bar{G}) = \{f(x, t) \in C^n(\bar{G}): \quad f(0) = f(\pi) = 0\}$;

$\langle f, \varphi \rangle = \int_0^\pi f(x)\, \overline{\varphi}(x)\, dx$;

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \doteq f(x)$ — ряд, сходящийся в $L^2(G)$ к функции $f(x)$;

Z — множество всех целых чисел;

$Z^{+(-)}$ — множество целых положительных (отрицательных) чисел;

A, B, C, D — положительные константы;

$O(a_\omega)$ — непрерывная в замкнутой ограниченной области по совокупности переменных x, t, τ, ... величина такая, что $|O(a_\omega)| < A\, |a_\omega|$ при $\omega \to +\infty$;

$T(x) = \frac{1}{2} \int_0^x q(s)\, ds$;

$\psi_1(\omega, x) = \frac{1}{2} \int_0^x q(s) \cos 2\omega s\, ds$;

$\psi_2(\omega, x) = \frac{1}{2} \int_0^x q(s) \sin 2\omega s\, ds$;

A_n, B_n, C_n, D_n — элементы ограниченных числовых последовательностей;

α_n — элементы вещественной числовой последовательности, лишь только $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < +\infty$;

γ_n — элементы комплексной числовой последовательности, лишь только $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\gamma_n|^2 < +\infty$;

$V(\bar{G})$ — класс функций с ограниченной вариацией в $\bar{G}$;

$\tilde{f}(x, t)$ и $\hat{f}(x, t)$ — соответственно нечетное и четное 2π-периодические продолжения функции $f(x, t)$ по переменной x с отрезка $[0, \pi]$ на всю числовую ось;

$G' = \left\{ x \in R^1:\quad 0 \le x < \pi \right\};$

$H' = \left\{ t \in R^1:\quad 0 < t \le T \right\};$

$\left\| f(x, t) \right\|_Q = \left\| f(x, t) \right\|_{L^2(Q)};$

$H^1(G)$ — множество функций, принадлежащих $L^2(G)$ вместе с обобщенной производной первого порядка;

$H^{2,1}(Q)$ — множество функций, принадлежащих $L^2(Q)$ вместе с обобщенными частными производными первого по x и t и второго по x порядков;

$\lceil A \rceil$ — целая часть числа $A > 0$;

п. в. — почти всюду;

$a/b/$ — a или b;

$\forall$ — для всех.

ГЛАВА 1

НОВЫЙ ПОДХОД К ОБОСНОВАНИЮ МЕТОДА ФУРЬЕ В СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В этой главе в общих чертах изложена модифицированная процедура обоснования метода Фурье разделения переменных при решении линейных смешанных задач для уравнений в частных производных произвольного порядка с двумя независимыми переменными в случае самосопряженного обыкновенного дифференциального оператора. Суть нового подхода к обоснованию метода Фурье представлена теоремой 1.1 о структуре классического решения и его единственности, а также теоремой 1.2 о необходимых и достаточных условиях разрешимости поставленной задачи.

1.1. Постановка смешанной задачи

При постановке общей задачи будем следовать известным формулировкам смешанных задач для основных уравнений математической физики [4, с. 83; 16, с. 71; 9, с. 104] с однородными граничными условиями [12, с. 312; 25, с. 14]. Рассмотрим неоднородное уравнение в частных производных с двумя независимыми переменными x и t

$$L_x u(x,t) + H_t u(x,t) = f(x,t), \tag{1}$$

где обыкновенные дифференциальные операторы L_x и H_t определяются формальными выражениями

$$L_x = q_0(x)\frac{\partial^{\kappa}}{\partial x^{\kappa}} + q_1(x)\frac{\partial^{\kappa-1}}{\partial x^{\kappa-1}} + \ldots + q_{\kappa}(x),$$

$$H_t = p_0(t)\frac{\partial^{m}}{\partial t^{m}} + p_1(t)\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} + \ldots + p_m(t)$$

с переменными коэффициентами, лишь

$$q_0(x), \quad p_0(t) \neq 0 \qquad \forall\ (x,t) \in \bar{Q}.$$

Однородные граничные условия на искомую функцию $u(x, t)$ при $x = 0$ и $x = \pi$ зададим в виде

$$U_i u(0,t) + V_i u(\pi,t) = 0 \qquad \forall\ t \in [0,T] \quad (i = 1, 2, \ldots, \kappa), \tag{2}$$

где обыкновенные дифференциальные операторы U_i и V_{κ} определяются формальными выражениями

$$U_i = a_{i0}\frac{\partial^{\kappa-1}}{\partial x^{\kappa-1}} + a_{i1}\frac{\partial^{\kappa-2}}{\partial x^{\kappa-2}} + \ldots + a_{i(\kappa-1)},$$

$$V_i = b_{i0}\frac{\partial^{\kappa-1}}{\partial x^{\kappa-1}} + b_{i1}\frac{\partial^{\kappa-2}}{\partial x^{\kappa-2}} + \ldots + b_{i(\kappa-1)}$$

с постоянными коэффициентами. Начальные данные Коши при $t=0$ задаются естественным образом:

$$\frac{\partial^j u(x,0)}{\partial t^j}=\varphi_j(x) \quad (j=0,1,2,\dots,m-1). \tag{3}$$

Сформулируем следующую смешанную задачу в замкнутом прямоугольнике $\bar{Q}$.

З а д а ч а. Найти функцию

$$u(x,t)\in C^{\text{к},m}(\bar{Q}), \tag{4}$$

удовлетворяющую в обычном смысле уравнению (1) в открытом прямоугольнике Q, а также граничным (2) и начальным (3) условиям.

В дальнейшем будем называть решение $u(x,\ t)$ смешанной задачи (1) — (4) ее *классическим решением*, а непрерывность на замыкании $\bar{Q}$ всех его частных производных, фигурирующих в (4), понимать в естественном смысле согласно определению из [16, с. 32]. Отметим также, что в силу (4) от искомого решения $u(x,t)$ не требуется существование непрерывных в $\bar{Q}$ смешанных производных. Вместе с тем это не помешает использовать результаты данной главы и для более узких, чем (4), классов решений с непрерывными смешанными производными соответствующего порядка, в частности для класса $C^2(\bar{Q})$ в гиперболическом случае.

Относительно коэффициентов дифференциальных операторов L_x и H_t будем предполагать пока, что

$$q_s(x)\in C[0,\pi] \quad (s=0,1,2,\dots,\text{к}), \tag{5}$$

$$p_r(t)\in C[0,T] \quad (r=0,1,2,\dots,m). \tag{6}$$

Кроме того, будем рассматривать случай самосопряженного оператора L_x, что по определению [12, с. 205] равносильно выполнению условия

$$\langle L_x g,h\rangle=\langle g,L_x h\rangle \qquad \forall\, g(x),h(x)\in M_L, \tag{7}$$

где M_L—область определения данного оператора, т. е. множество всех функций $f(x)\in C^{\text{к}}[0,\pi]$, удовлетворяющих граничным условиям вида (2). В [12, с. 205, 317] указаны конкретные требования гладкости к функциям $q_s(x)$ и алгебраические соотношения между коэффициентами a_{il} и b_{il}, гарантирующие выполнение условия самосопряженности (7).

Наконец, минимальные требования к правой части $f(x,\ t)$ уравнения (1) и к начальным функциям $\varphi_j(x)$ вытекают из постановки самой задачи, а точнее, из естественных условий согласованности уравнения (1), начальных данных (3) и включения (4):

$$f(x,t)\in C(\bar{Q}), \tag{8}$$

$$\varphi_j(x)\in C[0,\pi]. \tag{9}$$

Большую гладкость начальных функций $\varphi_j(x)$ можно было бы вывести из постановки задачи, если вместе с выполнением (4) потребовать еще и существование непрерывных смешанных производных искомого решения. Впрочем, для одной функции $\varphi_0(x)$ из указанных условий согласованности следует

$$\varphi_0(x) \in C^{\kappa}[0,\pi], \tag{10}$$

$$U_i\varphi_0(0) + V_i\varphi_0(\pi) = 0. \tag{11}$$

По-видимому, (1) — (4) является достаточно общей смешанной задачей для линейного неоднородного уравнения в частных производных произвольного порядка с двумя независимыми переменными и линейными однородными граничными условиями, при решении которой действительно можно использовать метод Фурье разделения переменных x и t.

Постановка такой общей смешанной задачи является не самоцелью, а стремлением охватить наиболее характерные одномерные смешанные задачи математической физики для уравнений параболического и гиперболического типов, Шредингера, поперечных колебаний упругой балки и др. Это позволит использовать формулируемые ниже общие теоремы существования и единственности классических решений при исследовании конкретных смешанных задач в последующих главах.

З а м е ч а н и е. Поставленная задача легко обобщается на случай, когда множества $\overline{G}$ и $\overline{H}$ представляют собой произвольные конечные отрезки числовой оси $[a, b]$ и $[t_0, t_\text{к}]$ соответственно. Для этого достаточно ввести простую замену переменных

$$x = \frac{b-a}{\pi}x' + a, \quad t = \frac{b-a}{\pi}t' + t_0,$$

которая по первой переменной трансформирует отрезок $[a, b]$ в $[0, \pi]$, а по второй — $[t_0, t_\text{к}]$ в $[0, T]$, где $T = \dfrac{\pi(t_\text{к} - t_0)}{b-a}$. Очевидно, такая замена переменных сохраняет вид дифференциального уравнения, тип граничных условий и класс искомого решения.

1.2. Представление решения и его единственность

Обозначим λ_n и $y_n(x)$ собственное значение и соответствующую ему нормированную собственную функцию самосопряженного дифференциального оператора L_x. По определению пара λ_n, $y_n(x)$ является решением следующей краевой задачи о собственных значениях:

$$L_x y_n(x) = \lambda_n y_n(x) \qquad (n \in Z^+), \tag{12}$$

$$U_i y_n(0) + V_i y_n(\pi) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, \kappa). \tag{13}$$

Как известно [12, с. 206, 212], решение такой сопряженной краевой задачи существует и все ее собственные значения λ_n действительны и представляют собой счетное множество на числовой оси, не имеющее конечной предельной точки, а последовательность

$\{y_n(x)\}_1^\infty$ всех собственных функций, соответствующих различным λ_n (с учетом их кратности), образует полную ортонормальную в пространстве $L^2(0,\pi)$ систему функций.

В силу (8) при каждом $t \in [0,T]$ функции $f(x,t)$ из правой части уравнения (1) можно поставить в соответствие сходящийся в $L^2(G)$ ряд Фурье

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)\, y_n(x) \doteq f(x,t)$$

по ортонормальной на $[0,\pi]$ системе функций $\{y_n(x)\}$ с коэффициентами Фурье

$$F_n(t) = \langle f(x,t),\ y_n(x) \rangle = \int_0^\pi f(x,t)\,\bar{y}_n(x)\,dx. \tag{14}$$

Исследуем структуру искомого решения. Для этого предположим, что решение $u(x,\ t)$ смешанной задачи (1) — (4) существует. Тогда в силу соотношений (2), (4) при любом фиксированном $t \in [0,T]$ функция $u(x,\ t) \in M_L$. По известной теореме разложимости [12, с. 215] это означает, что справедливо представление искомого решения равномерно сходящимся по $x \in [0,\pi]$ рядом Фурье

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\, y_n(x) \tag{15}$$

по ортонормальной системе функций $\{y_n(x)\}$, в котором при любом $t \in [0,T]$ величины $T_n(t)$ являются коэффициентами Фурье функции $u(x,\ t)$ по этой системе, т. е.

$$T_n(t) = \langle u(x,t),\ y_n(x) \rangle. \tag{16}$$

Так как решение $u(x,\ t)$ обращает уравнение (1) в тождество по x и t, то его можно скалярно умножить на $y_n(x)$:

$$\langle L_x u,\ y_n \rangle + \langle H_t u,\ y_n \rangle = \langle f,\ y_n \rangle. \tag{17}$$

Допустимость такой операции следует из интегрируемости по $x \in [0,\pi]$ собственной функции $y_n(x)$ и обеих частей уравнения (1) при любом фиксированном $t \in [0,T]$.

Преобразуем левую часть равенства (17). Так как при любом $t \in [0,T]$ функции $u(x,t)$ и $y_n(x)$ принадлежат M_L, то в силу условия самосопряженности (7) и уравнения (12)

$$\langle L_x u,\ y_n \rangle = \langle u, L_x y_n \rangle = \langle u,\ \lambda_n y_n \rangle = \lambda_n \langle u,\ y_n \rangle. \tag{18}$$

Далее, используя правило Лейбница [36, с. 665] дифференцирования по параметру t под знаком интеграла и учитывая, что согласно (4) функция $H_t u(x,t) \in C(\bar{Q})$, имеем

$$\langle H_t u,\ y_n \rangle = H_t \langle u,\ y_n \rangle. \tag{19}$$

Подставляя соотношения (18) и (19) в (17) и учитывая при этом формулы (14) и (16), получим выражение

$$H_t T_n(t) + \lambda_n T_n(t) = F_n(t) \quad (n \in Z^+), \tag{20}$$

справедливое при любом значении независимой переменной $t \in [0, T]$.

Найденное выражение (20) представляет собой обыкновенное линейное неоднородное дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $T_n(t)$. Чтобы определить для нее начальные условия при $t = 0$, продифференцируем по t равенство (16) j раз, снова используя правило Лейбница и имея в виду достаточную гладкость по t функции $u(x, t)$:

$$T_n^{(j)}(t) = \frac{d^j}{dt^j} \langle u(x,t), y_n(x) \rangle = \langle \frac{\partial^j u(x,t)}{\partial t^j}, \ y_n(x) \rangle.$$

Полагая здесь $t = 0$ и учитывая соотношение (3), найдем в итоге

$$T_n^{(j)}(0) = \langle \varphi_j, y_n \rangle \quad (j = 0, 1, 2, \ldots, m-1). \tag{21}$$

Таким образом, искомые коэффициенты Фурье $T_n(t)$ определяются решением задачи Коши при начальных данных (21) для линейного дифференциального уравнения (20) с переменными коэффициентами (6) и с правой частью

$$F_n(t) \in C[0, T], \tag{22}$$

причем последнее включение следует из (8) и теоремы [36, с. 664] о непрерывности интеграла в (14) по параметру t. Но тогда согласно [12, с. 96] задача Коши (20), (21) имеет единственное решение на отрезке [0, T].

Тем самым для отыскания искомого решения $u(x, t)$, если оно существует, нужно решить раздельно две последовательности задач — краевых (12), (13) и Коши (20), (21), а затем составить из найденных решений ряд (15).

Переходим к доказательству единственности искомого решения. Предположим противное, что смешанная задача (1) — (4) имеет два различных решения $u(x, t)$ и $\mathring{u}(x, t)$. Как показано выше, оба представляются рядами Фурье: первое — в виде (15), а второе — в виде

$$\mathring{u}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathring{T}_n(t) y_n(x). \tag{23}$$

Каждая пара $T_n(t)$, $\mathring{T}_n(t)$ является решением одной и той же задачи Коши (20), (21). Из его единственности следует, что $T_n(t) \equiv \mathring{T}_n(t)$.

Отсюда, сопоставляя функциональные ряды (15) и (23), заключаем, что при любом фиксированном $t \in [0, T]$ обе функции $u(x, T)$ и $\mathring{u}(x, t)$ представляются одним и тем же рядом Фурье по полной ортонормальной на $[0, \pi]$ системе функции $\{y_n(x)\}$. Тогда из сходимости этого ряда в $\bar{Q}$ и единственности его суммы вытекает, что $u(x,t) \equiv \mathring{u}(x,t)$ в $\bar{Q}$. Полученное противоречие доказывает, что смешанная задача (1)—(4) может иметь только одно решение.

Резюмируем установленные в данном разделе результаты в следующем виде.

Т е о р е м а 1.1. Решение $u(x, t)$ смешанной задачи (1)—(4), если оно существует, единственно и представляется равномерно сходящимся по x в $\bar{Q}$ рядом Фурье (15) по ортонормальной на $[0, \pi]$ системе функций $\{y_n(x)\}_1^{\infty}$ с коэффициентами $T_n(t)$, определяемыми решениями задачи Коши (20), (21).

Очевидно, утверждение теоремы останется справедливым и в случае смешанной задачи (1)—(3) в любом более узком, чем (4), классе функций $u(x,t) \in B(\bar{Q}) \subset C^{\kappa, m}(\bar{Q})$.

1.3. Модификация процедуры обоснования метода Фурье

Рассмотрим формальный функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\, y_n(x), \tag{24}$$

в котором $y_n(x)$ и $T_n(t)$ однозначно определяются решениями краевой задачи о собственных значениях (12), (13) и задачи Коши (20), (21) соответственно. Следуя [4, с. 479; 25, с. 89], назовем ряд (24) *формальным решением* смешанной задачи (1)—(3). Отметим, что при такой постановке вопроса нет никаких оснований считать ряд (24) искомым решением $u(x, t)$. Более того, в общем случае нельзя даже ничего сказать о свойствах сходимости этого ряда. Одно ясно, в силу теоремы 1.1 решение смешанной задачи (1)—(4) следует искать в виде ряда (24).

Фактически описанная выше процедура отыскания формального решения смешанной задачи (1)—(3) представляет собой не что иное, как известное [4, с. 479; 25, с. 88] обобщение метода Фурье разделения переменных. Действительно, построение функционального ряда (24) сводится к решению последовательных пар задач с разделенными переменными: краевой задачи (12), (13) с независимой переменной x и задачи Коши (20), (21) с независимой переменной t. Однако этим завершается лишь первый этап отыскания классического решения смешанной задачи (1)—(4) по методу Фурье.

За ним должно следовать строгое математическое обоснование того факта, что ряд (24) представляет собой классическую функцию, удовлетворяющую в обычном смысле уравнению (1), граничным (2) и начальным (3) условиям. Стандартная процедура обоснования метода Фурье основана на обобщенном принципе суперпозиции [33, с. 91; 60, с. 126], согласно которому формальное решение смешанной задачи (1)—(3) будет ее классическим решением, если все его частные производные, входящие в уравнение (1), могут быть получены при помощи почленного дифференцирования нужное число раз функционального ряда (24). Законность этой операции, как правило, накладывает весьма сильные ограничения на исходные данные задачи, а точнее, на гладкость коэффициентов дифференциальных операторов L_x и H_t и на начальные функции $\varphi_j(x)$. Обычно такие требования гарантируют даже равномерную в $\bar{Q}$ сходимость всех продифференцированных рядов.

Именно на таком пути введения дополнительных по сравнению с (5), (6), (8) и (9) условий на коэффициенты и правую часть уравнения (1) и начальные функции (3) было проведено обоснование метода Фурье разделения переменных в смешанных задачах для всех известных случаев, которые фактически исчерпываются различными типами уравнений в частных производных второго порядка [18; 30; 32]. Аналогичная ситуация имеет место и для большего числа переменных [9; 10].

Совершенно очевидно, что такого типа дополнительные требования к исходным данным являются весьма жесткими достаточными условиями разрешимости смешанной задачи (1)—(4) и не вызваны существом рассматриваемой задачи, а нужны лишь для строгого математического обоснования метода Фурье по стандартной схеме. В связи с этим возникает вопрос о минимальных требованиях к функциям $q_s(x)$, $p_r(t)$, $f(x,t)$ и $\varphi_j(x)$, при выполнении которых задача (1)—(4) разрешима. Естественно искать ответ на этот вопрос в рамках новой процедуры обоснования метода Фурье, которая приводила бы к необходимым и достаточным условиям существования классического решения.

Основная идея предлагаемой ниже новой процедуры состоит в отказе от почленного дифференцирования функциональных рядов как средства математического обоснования метода Фурье при решении смешанной задачи (1)—(4). Взамен этого предлагается использовать методы суммирования ряда (24) к явной функции с нужными дифференциальными свойствами или непосредственно исследовать гладкость нужного порядка его суммы.

Надо сказать, что без почленного дифференцирования ряда (24) доказательства теоремы 1.1 о структуре и единственности решения и последующей теоремы существования 1.2 можно провести только в предположении (7) о самосопряженности дифференциального оператора L_x, т. е. условие (7) является существенным при новом подходе к обоснованию метода Фурье. С удовлетворением можно констатировать, что во многих смешанных задачах для основных уравнений математической физики оно заведомо выполняется.

Естественно ожидать, что отказ от почленного дифференцирования функционального ряда (24), когда эта формальная операция над ним действительно недопустима, позволит существенно ослабить известные достаточные условия разрешимости смешанных задач вида (1)—(4). Особенно ценно, что формулируемая в следующем разделе теорема существования классического решения дает неулучшаемые условия разрешимости задачи (1)—(4), правда, в терминах гладкости суммы формального ряда (24).

1.4. Существование решения

На основании теоремы 1.1 можно высказать некоторые суждения о свойствах сходимости ряда (24). Прежде всего ясно, что либо функциональный ряд (24) есть решение смешанной задачи (1)—(4) и в таком случае он сходится по крайней мере равномерно по x в $\bar{Q}$, либо он не является искомым решением, но тогда решение данной задачи вообще не существует. Далее, если ряд (24) не сходится равномерно по x в $\bar{Q}$, то искомого решения также нет. Эти рассуждения можно продолжить и дальше.

Однако целью настоящего раздела является установление конкретной связи между свойствами формального ряда (24) и существованием решения смешанной задачи (1)—(4). Так как эти свойства полностью определяются ее исходными данными, то окончательный результат сформулируем в виде следующего утверждения.

Т е о р е м а 1.2. Решение смешанной задачи (1)—(4) существует тогда и только тогда, когда функции $q_s(x)$, $p_r(t)$, $f(x,t)$ и $\varphi_j(x)$ таковы, что сумма $S(x,t)$ функционального ряда (24) принадлежит классу

$$S(x,t) \in C^{к,m}(\bar{Q}) \tag{25}$$

и удовлетворяет граничным условиям

$$U_i S(0,t) + V_i S(\pi,t) \quad (i = 1, 2, \ldots, к). \tag{26}$$

Доказательство необходимости условий теоремы тривиально. Действительно, если решение $u(x,t)$ смешанной задачи (1)—(4) существует, то согласно теореме 1.1 его можно представить рядом (24), равномерно сходящимся по x в $\bar{Q}$ к функции $S(x,t)$. Но тогда искомое решение $u(x,t) \equiv S(x,t)$ и необходимость условий (25) и (26) вытекает из постановки самой задачи.

Достаточность условий теоремы будет установлена, если показать, что при выполнении (25) и (26) формальное решение в виде ряда (24) будет одновременно и классическим решением смешанной задачи (1)—(4). В самом деле, данная теорема подразумевает, что ряд (24) сходится в $\bar{Q}$ к функции $S(x,t)$ в обычном смысле. Тогда в силу [3, с. 476] при любом фиксированном $t \in [0,T]$ функциональный ряд (24) есть ряд Фурье функции $S(x,t)$ по ортонормальной на $[0, \pi]$ системе $\{y_n(x)\}$, т. е.

$$T_n(t) = \langle S(x,t),\ y_n(x) \rangle. \tag{27}$$

Покажем, что формальное решение $S(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1). В силу условия (25) функция

$$L_x S(x,t) + H_t S(x,t) \in C(\bar{Q}), \tag{28}$$

поэтому при каждом $t \in [0,T]$ ей можно поставить в соответствие сходящийся в $L^2(G)$ ряд Фурье по собственным функциям y_n (x):

$$L_x S(x, t) + H_t S(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) y_n(x),$$

где коэффициенты Фурье

$$c_n(t) = \langle L_x S + H_t S,\ y_n \rangle. \tag{29}$$

Так как по определению $y_n(x) \in M_L$, а в силу (25) и (26) при любом фиксированном $t \in [0, T]$ функция $S(x,t) \in M_L$, то, преобразуя формулу (29) с помощью соотношений (7), (12) и (27), найдем

$$c_n(t) = \langle L_x S,\ y_n \rangle + \langle H_t S,\ y_n \rangle = \langle S,\ L_x y_n \rangle + H_t \langle S,\ y_n \rangle =$$
$$= \langle S,\ \lambda_n y_n \rangle + H_t T_n(t) = \lambda_n T_n(t) + H_t T_n(t).$$

Сопоставляя полученное выражение с дифференциальным уравнением (20), имеем $c_n(t) \equiv F_n(t)$. Это означает, что двум непрерывным в $\bar{Q}$ функциям (8) и (28) соответствует один и тот же ряд Фурье по полной ортонормальной в $L^2(G)$ системе $\{y_n(x)\}$. Тогда по теореме [3, с. 498] о единственности функции, имеющей данный ряд Фурье, заключаем, что

$$L_x S(x,t) + H_t S(x,t) = f(x,t) \qquad \forall\ (x,t) \in \bar{Q}. \tag{30}$$

Покажем теперь, что формальное решение $S(x,t)$ удовлетворяет начальным данным Коши (3). Из условия (25) и формулы (27) следует, что функция $T_n(t)$ дифференцируема $m-1$ раз, т. е. по правилу Лейбница [36, с. 665] для любого $j = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, m-1$

$$T_n^{(j)}(t) = \frac{d^j}{dt^j} \langle S(x,\ t),\ y_n(x) \rangle = \left\langle \frac{\partial^j S(x,t)}{\partial t^j},\quad y_n(x) \right\rangle.$$

Полагая здесь $t = 0$, *имеем*

$$T_n^{(j)}(0) = \left\langle \frac{\partial^j S(x,0)}{\partial t^j},\quad y_n(x) \right\rangle.$$

Комбинируя последнее выражение и соотношение (21), находим

$$\left\langle \frac{\partial^j S(x,0)}{\partial t^j},\quad y_n(x) \right\rangle = \langle \varphi_j(x),\ y_n(x) \rangle. \tag{31}$$

Отметим, что в силу условий (9) и (25)

$$\varphi_j(x),\ \ \frac{\partial^j S(x,0)}{\partial t^j} \in C[0, \pi]. \tag{32}$$

Зафиксируем индекс j. Соотношение (31) означает тогда, что коэффициенты Фурье двух непрерывных функций из (32) по полной ортонормальной в $L^2(G)$ системе $\{y_n\ (x)\}$ равны попарно. Такая ситуация, как отмечалось выше, возможна только для совпадающих между собой функций, т. е.

$$\frac{\partial^j S(x,0)}{\partial t^j} = \varphi_j(x) \qquad \forall\ x \in [0, \pi]. \tag{33}$$

Итак, соотношения (30) и (33) означают, что формальное решение $S(x, t)$ в виде ряда (24) удовлетворяет уравнению (1) и начальным условиям (3). Добавляя к этому непосредственно граничные условия (26), заключаем, что функция $S(x, t)$ является решением смешанной задачи (1)—(4). Это и завершает доказательство теоремы 1.2.

Приведем очевидное следствие данной теоремы.

С л е д с т в и е 1.1. Для существования решения смешанной задачи (1)—(4) в классе функций $u(x,t) \in B(\bar{Q}) \subset C^{к,m}(\bar{Q})$ необходимо и достаточно выполнение условий (26) и

$$S(x,t) \in B(\bar{Q}). \tag{34}$$

Таким образом, в сравнении со стандартным новый подход к обоснованию метода Фурье имеет два очевидных преимущества:

1) отказ от многократного почленного дифференцирования формального решения $S(x, t)$ в виде ряда (24), что существенно ослабляет условия разрешимости смешанной задачи (1)—(4);

2) предельная форма условий существования классического решения задачи в виде необходимых и достаточных условий разрешимости.

Конечно, исследование гладкости вида (25) суммы функционального ряда (24) без его почленного дифференцирования весьма проблематично, так как регулярных методов для такого анализа нет. Следует заметить также, что с некоторой точки зрения условия разрешимости смешанной задачи в теореме 1.2 не являются достаточно конструктивными, так как они даны не в виде явных условий на коэффициенты $q_s(x)$ и $p_r(t)$ и правую часть $f(x, t)$ дифференциального уравнения и на начальные функции $\varphi_j(x)$, а в виде свойств гладкости суммы $S(x, t)$ ряда (24), однозначно определяемого этими функциями.

Нет никаких оснований считать, что этот недостаток можно устранить в рамках такой общей задачи, как (1)—(4). Переход к более конструктивным, чем (25) и (26), условиям разрешимости следует искать при решении конкретных смешанных задач для уравнений в частных производных второго порядка, составляющих основное содержание последующих глав.

ГЛАВА 2

ОСНОВНЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ

В этой главе представлены уточненные асимптотические формулы собственных функций системы Штурма—Лиувилля

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \omega^2 y(x), \tag{1}$$

$$y(0) = y(\pi) = 0 \tag{2}$$

с вещественным потенциалом

$$q(x) \in C[0,\pi], \tag{3}$$

а также асимптотические формулы, связывающие коэффициенты Фурье гладких функций по различным ортогональным системам функций.

2.1. Представление решения системы Штурма—Лиувилля отрезком ряда Неймана

Известно [12, с. 205], что краевая задача Штурма—Лиувилля (1)—(3) является самосопряженной, а потому все ее собственные значения действительны и могут быть упорядочены [34, с. 154] так, чтобы они представляли собой бесконечную возрастающую числовую последовательность $\left\{\omega_n^2\right\}_1^\infty$. Поэтому достаточно рассматривать систему (1)—(3) только при действительных значениях ω^2. В свою очередь, это означает, что параметр ω может принимать только действительные неотрицательные или чисто мнимые значения с положительными коэффициентами, что и предполагается дальше.

Пусть $y(x, \omega)$—некоторое вещественное решение дифференциального уравнения (1) с одним начальным условием

$$y(0,\omega) = 0 \tag{4}$$

при произвольном значении параметра ω. Согласно [34, с. 121] функция $y(x, \omega)$ с точностью до произвольного множителя представляет собой общее решение задачи (1), (4). Это свойство гарантирует, что, во-первых, собственные значения ω_n^2 системы Штурма—Лиувилля (1), (2) суть квадраты решений трансцендентного уравнения $y(\pi,\omega) = 0$ относительно ω, во-вторых, $y(x,\omega_n)$ является ее собственной функцией, соответствующей собственному значению ω_n^2. Таким образом, всюду ниже рассматривается случай вещественных собственных функций оператора Штурма—Лиувилля.

При $\omega \neq 0$ решение задачи (1), (3), (4) можно представить в интегральной форме Коши [28, с. 173]:

$$y(x,\omega) = \sin\omega x + \frac{1}{\omega}\int_0^x K_1(x, \tau, \omega)\, y(\tau, \omega)\, d\tau, \tag{5}$$

где

$$K_1(x, \tau, \omega) = q(\tau) \sin\omega\,(x-\tau). \tag{6}$$

Непосредственным дифференцированием из (5) находим выражение для частной производной

$$\frac{\partial y(x, \omega)}{\partial x} = \omega \cos\omega x + \int_0^x q(\tau)\, y(\tau, \omega) \cos\omega(x-\tau)\, d\tau. \tag{7}$$

Соотношение (5) представляет собой не что иное, как интегральное уравнение Вольтерра II рода [23, с. 41] с основным ядром (6) относительно искомой функции $y(x, \omega)$. Построим решение уравнения (5) по методу последовательных приближений в виде ряда Неймана [23, с. 44] по степеням параметра ω:

$$y(x, \omega) = \sin\omega x + \sum_{n=1}^{\infty} \omega^{-n} \int_0^x K_n(x, \tau, \omega) \sin\omega\tau\, d\tau, \tag{8}$$

где n-итерированные ядра $K_n(x, \tau, \omega)$ определяются рекуррентными соотношениями

$$K_i(x, \tau, \omega) = \int_\tau^x K_{i-1}(x, s, \omega) K_1(s, \tau, \omega)\, ds \quad (i = 2, 3, \ldots). \tag{9}$$

Несмотря на то что в сравнении со стандартным случаем [23, с. 41] основное ядро $K_1(x, \tau, \omega)$ из (6) зависит еще и от параметра ω, корректность метода последовательных приближений для интегральных уравнений [23, с. 42, 44] сохраняется и здесь. Это непосредственно вытекает из свойства

$$|K_1(x, \tau, \omega)| \leq A \tag{10}$$

равномерной по $\omega \in (-\infty, +\infty)$ ограниченности ядра (6) в треугольнике $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq \tau \leq x$. В частности, на основании [23, с. 44] ряд Неймана (8) при любом значении параметра $\omega \neq 0$ сходится регулярно по $x \in [0, \pi]$.

Представим ряд (8) в виде

$$y(x, \omega) = \sin\omega x + \sum_{i=1}^{m-1} \omega^{-i} \int_0^x K_i(x, \tau, \omega) \sin\omega\tau\, d\tau + R_m(x, \omega) \tag{11}$$

и найдем асимптотическую оценку остатка

$$R_m(x,\omega) = \sum_{i=m}^{\infty} \omega^{-i} \int_0^x K_i(x, \tau, \omega) \sin\omega\tau\, d\tau \tag{12}$$

при $\omega \to +\infty$. В принятых обозначениях справедливо следующее утверждение:

$$R_m(x, \omega) = O(\omega^{-m}). \tag{13}$$

В самом деле, непрерывность остатка ряда Неймана, а именно

$$R_m(x, \omega) \in C[0, \pi] \qquad \forall\ \omega \in (-\infty, +\infty), \tag{14}$$

очевидна в силу непрерывности всех остальных членов равенства (11). Далее, при $\omega \geq 1$ имеем по определению (12)

$$|R_m(x, \omega)| = \omega^{-m} \left| \sum_{i=m}^{\infty} \omega^{m-i} \int_0^x K_i(x, \tau, \omega) \sin \omega\tau\, d\tau \right| \leq$$

$$\leq \omega^{-m} \sum_{i=m}^{\infty} \omega^{m-i} \left| \int_0^x K_i(x, \tau, \omega) \sin \omega\tau\, d\tau \right| \leq$$

$$\leq \omega^{-m} \sum_{i=m}^{\infty} \left| \int_0^x K_i(x, \tau, \omega) \sin \omega\tau\, d\tau \right| \leq$$

$$\leq \omega^{-m} \sum_{i=1}^{\infty} \left| \int_0^x K_i(x, \tau, \omega) \sin \omega\tau\, d\tau \right|. \tag{15}$$

Но в силу (3), (6) и (10) легко установить по индукции [23, с. 43], что

$$|K_i(x, \tau, \omega)| \leq \frac{A^i (x-\tau)^{i-1}}{(i-1)!},$$

откуда в силу неравенства $x - \tau \leq \pi$ имеем

$$\left| \int_0^x K_i(x, \tau, \omega) \sin \omega\tau\, d\tau \right| \leq \int_0^x |K_i(x, \tau, \omega)|\, d\tau \leq \frac{A^i \pi^i}{(i-1)!}.$$

Учитывая последнее неравенство в соотношении (15), получим окончательно

$$|R_m(x, m)| \leq \omega^{-m} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A^i \pi^i}{(i-1)!} = A\pi e^{A\pi} \omega^{-m},$$

что и доказывает искомое утверждение (13).

2.2. Первая форма асимптотического выражения для собственных функций

При выводе основных асимптотических формул будет необходима оценка решения $y(x, \omega)$ системы (1), (3), (4) с точностью до величин порядка ω^{-4}. С этой целью положим в формуле (11) $m = 4$, так что с учетом (13)

$$y(x, \omega) = \sin \omega x + \sum_{n=1}^{3} \omega^{-n} \int_0^x K_n(x, \tau, \omega) \sin \omega\tau\, d\tau + O(\omega^{-4}). \tag{16}$$

Найдем конкретные выражения для каждого из трех интегралов в правой части равенства (16). Первый из них в силу (6) преобразуется с помощью элементарных тригонометрических соотношений к виду

$$\int_0^x K_i(x, \tau, \omega) \sin \omega\tau\, d\tau = \int_0^x q(\tau) \sin \omega(x-\tau) \sin \omega\tau\, d\tau = g(\omega, x), \tag{17}$$

где

$$g(\omega, x) = -T(x)\cos\omega x + \psi_1(\omega, x)\cos\omega x + \psi_2(\omega, x)\sin\omega x. \tag{18}$$

Далее, с помощью обозначений

$$T(x, \tau) = T(x) - T(\tau), \quad \psi_1(\omega, x, \tau) = \psi_1(\omega, x) - \psi_1(\omega, \tau),$$

$$\psi_2(\omega, x, \tau) = \psi_2(\omega, x) - \psi_2(\omega, \tau)$$

второе итерированное ядро $K_2(x, \tau, \omega)$, исходя из определений (6) и (9), можно представить в виде

$$K_2(x, \tau, \omega) = \int_\tau^x q(s)\, q(\tau) \sin\omega(x-s) \sin\omega(s-\tau)\, ds =$$

$$= q(\tau)\,[-T(x, \tau)\cos\omega(x-\tau) + \psi_1(\omega, x, \tau)\cos\omega(x+\tau) +$$

$$+ \psi_2(\omega, x, \tau)\sin\omega(x+\tau)].$$

Отсюда, используя тождественные преобразования, второй интеграл из (16) запишем следующим образом:

$$\int_0^x K_2(x, \tau, \omega)\sin\omega\tau\, d\tau = F_1(\omega, x)\sin\omega x + F_2(\omega, x)\cos\omega x, \tag{19}$$

где

$$F_1(\omega, x) = -T^2(x) + \psi_1^2(\omega, x) + \psi_2^2(\omega, x) +$$

$$+ \int_0^x q(\tau)\, g^*(\omega, \tau)\sin\omega\tau\, d\tau, \tag{20}$$

$$g^*(\omega, x) = T(x)\sin\omega x + \psi_1(\omega, x)\sin\omega x - \psi_2(\omega, x)\cos\omega x, \tag{21}$$

$$F_2(\omega, x) = -\int_0^x q(\tau)\, g(\omega, \tau)\sin\omega\tau\, d\tau. \tag{22}$$

В силу данных определений легко видеть, что введенные функции $F_1(\omega, x)$ и $F_2(\omega, x)$ равномерно по $\omega \in (-\infty, +\infty)$ ограничены на отрезке $[0, \pi]$, т. е.

$$|F_1(\omega, x)| < A, \quad |F_2(\omega, x)| < B. \tag{23}$$

Более сложно преобразуется последний, третий, интеграл из правой части равенства (16). Для этого найдем вначале явное выражение третьего итерированного ядра $K_3(x, \tau, \omega)$, используя формулы (6) и (9):

$$K_3(x, \tau, \omega) = \int_\tau^x K_2(x, s, \omega) K_1(s, \tau, \omega)\, ds =$$

$$= -q(\tau)\sin\omega x \int_\tau^x q(s) g_*(\omega, x, s)\sin\omega(s-\tau)\, ds +$$

$$+ q(\tau)\cos\omega x \int_\tau^x q(s)\, g(\omega, x, s)\sin\omega(s-\tau)\, ds,$$

где

$$g(\omega, x, s) = -T(x, s)\cos\omega s + \psi_1(\omega, x, s)\cos\omega s + \psi_2(\omega, x, s)\sin\omega s,$$

$$g_*(\omega, x, s) = T(x, s)\sin\omega s + \psi_1(\omega, x, s)\sin\omega s - \psi_2(\omega, x, s)\cos\omega s.$$

Отсюда с помощью элементарных тригонометрических соотношений и обозначений повторных интегралов

$$P_1(\omega, x) = \int_0^x q(\tau) \sin \omega\tau \, d\tau \int_\tau^x q(s) g_*(\omega, x, s) \sin \omega(\tau - s) \, ds, \tag{24}$$

$$P_2(\omega, x) = \int_0^x q(\tau) \sin \omega\tau \, d\tau \int_\tau^x q(s) g(\omega, x, s) \sin \omega(s - \tau) \, ds \tag{25}$$

получим искомое выражение

$$\int_0^x K_3(x, \tau, \omega) \sin \omega\tau \, d\tau = P_1(\omega, x) \sin \omega x + P_2(\omega, x) \cos \omega x. \tag{26}$$

Заметим, что функции $P_1(\omega, x)$ и $P_2(\omega, x)$ в силу определений (24) и (25) ограничены на отрезке $[0, \pi]$ равномерно по $\omega \in (-\infty, +\infty)$, т. е.

$$|P_1(\omega, x)| < C, \qquad |P_2(\omega, x)| < D. \tag{27}$$

По определению $y(x, \omega_n)$ является собственной функцией, соответствующей собственному значению ω_n^2 системы Штурма—Лиувилля (1), (2). Тогда, подставляя выражения интегралов (17), (19) и (26) в формулу (16) и полагая в ней $\omega = \omega_n$, имеем

$$\begin{aligned} y(x, \omega_n) &= \sin \omega_n x + \frac{1}{\omega_n} g(\omega_n, x) + \\ &+ \frac{1}{\omega_n^2} [F_1(\omega_n, x) \sin \omega_n x + F_2(\omega_n, x) \cos \omega_n x] + \\ &+ \frac{1}{\omega_n^3} [P_1(\omega_n, x) \sin \omega_n x + P_2(\omega_n, x) \cos \omega_n x] + O(\omega_n^{-4}). \end{aligned} \tag{28}$$

Это и есть первая форма асимптотического выражения собственной функции, характеризуемая тем, что собственное значение ω_n^2 входит сюда как самостоятельный параметр, а не в виде асимптотической (при $n \to +\infty$) оценки по степеням n. Такая терминология была введена Ф. Трикоми в [34, с. 216].

2.3. Нормирование собственных функций

Нормируем собственную функцию $y(x, \omega_n)$ из (28) в метрике пространства $L^2(0, \pi)$ с помощью нормирующего множителя

$$\rho_n = \left(\int_0^\pi y^2(x, \omega_n) \, dx \right)^{-1/2}, \tag{29}$$

так что нормированная собственная функция

$$y_n(x) = \rho_n y(x, \omega_n). \tag{30}$$

Найдем для ρ_n асимптотическую формулу при $\omega_n \to +\infty$ с точностью до величин порядка ω_n^{-2}. Для этого используем более грубую оценку собственной функции

$$y(x, \omega_n) = \sin \omega_n x + \frac{1}{\omega_n} g(\omega_n, x) + O(\omega_n^{-2}), \tag{31}$$

вытекающую из (28) при учете ограничений (23) и (27).

Так как $y(\pi, \omega_n) = 0$, то из выражения (18) и равенства (31) следует

$$\sin \omega_n \pi = A_n / \omega_n. \tag{32}$$

Но по определению функции $T(x)$, $\psi_1(\omega_n, x)$ и $\psi_2(\omega_n, x)$ дифференцируемы по x. Тогда, подставляя в (31) функцию $g(\omega_n, x)$ из (18) и интегрируя по частям с учетом (32), имеем

$$\int_0^\pi y^2(x, \omega_n)\,dx = \int_0^\pi \sin^2 \omega_n x\,dx - \frac{1}{\omega_n}\left(\int_0^\pi T(x) \sin 2\omega_n x\,dx - \right.$$

$$- \int_0^\pi \psi_1(\omega_n, x) \sin 2\omega_n x\,dx - \int_0^\pi \psi_2'(\omega_n, x)\,dx +$$

$$\left. + \int_0^\pi \psi_2(\omega_n, x) \cos 2\omega_n x\,dx\right) + \frac{A_n}{\omega_n^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\omega_n}\int_0^\pi \psi_2(\omega_n, x)\,dx + \frac{A_n}{\omega_n^2}.$$

Учитывая данное значение интеграла в формуле (29) и оценивая радикал по формуле Тейлора, получим

$$\rho_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(1 - \frac{\nu(\omega_n)}{\omega_n}\right) + \frac{A_n}{\omega_n^2}, \tag{33}$$

где

$$\nu(\omega_n) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \psi_2(\omega_n, x)\,dx. \tag{34}$$

Для оценки порядка входящего сюда интеграла при $n \to +\infty$ необходима асимптотическая формула собственных значений системы Штурма—Лиувилля (1)—(3). С этой целью воспользуемся принадлежащей В. А. Марченко [21, с. 71] асимптотической формулой

$$\omega_n = n + \frac{T(\pi)}{\pi n} - \frac{\psi_1(n, \pi)}{\pi n} + \frac{\alpha_n}{n^2}, \tag{35}$$

в которой $T(\pi)$ — известная константа, а величина

$$\psi_{1/2/}(n, \pi) = \alpha_n, \tag{36}$$

так как по определению она является четным косинус (синус)-коэффициентом Фурье непрерывной функции $\frac{4}{\pi} q(x)$.

Используя соотношения (35) и (36), можно с помощью формул Тейлора получить асимптотические оценки произвольных действительных степеней собственных значений

$$\omega_n^\beta = n^\beta + A_n n^{\beta - 2} \tag{37}$$

и тригонометрических функций

$$\sin \omega_n x = \sin nx + \frac{T(\pi) - \psi_1(n, \pi)}{\pi n} x \cos nx +$$

$$+ \frac{1}{n^2}(A_n x \cos nx + B_n x^2 \sin nx) + \frac{C_n}{n^3} x^3 \cos nx + O(n^{-4}), \tag{38}$$

$$\cos\omega_n x = \cos nx - \frac{T(\pi)-\psi_1(n,\pi)}{\pi n} x \sin nx +$$
$$+ \frac{B_n}{n^2} x^2 \cos nx + O(n^{-3}). \tag{39}$$

На основании полученных оценок

$$\psi_{1/2/}(\omega_n, x) = \psi_{1/2/}(n, x) + O(n^{-1}), \tag{40}$$
$$\nu(\omega_n) = \nu(n) + O(n^{-1}), \tag{41}$$
$$g(\omega_n, x) = g(n, x) + O(n^{-1}). \tag{42}$$

Преобразуя интеграл из (34) путем интегрирования по частям, дадим другое выражение величины (41):

$$\nu(\omega_n) = \psi_2(\omega_n, \pi) - \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi xq(x) \sin 2\omega_n x\, dx =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (\pi - x)\, q(x) \sin 2\omega_n x\, dx. \tag{43}$$

Отсюда видно, что величина $\nu_n = \nu(n)$ представляет собой четный синус-коэффициент Фурье непрерывной функции $4(\pi - x)\, q(x)$ и потому согласно оценкам (38) и (41)

$$\nu(\omega_n) = \alpha_n. \tag{44}$$

Подставляя оценки (37) и (44) в асимптотическую формулу (33), получим ее более грубый аналог

$$\rho_n = \sqrt{2/\pi} + \alpha_n/n, \tag{45}$$

который также будет использован ниже.

Представляет самостоятельный интерес асимптотическая формула нормированной собственной функции $y_n(x)$ с точностью до величин порядка ω_n^{-2}. Для этого подставим $y(x, \omega_n)$ из (31) и ρ_n из (33) в формулу (30):

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\sin\omega_n x + \frac{1}{\omega_n}\left[g(\omega_n, x) - \nu(\omega_n)\sin\omega_n x\right]\right\} + O(\omega_n^{-2}). \tag{46}$$

Следуя принятой выше терминологии, это — первая форма асимптотического выражения для нормированной собственной функции. Отсюда уже легко вывести ее стандартную асимптотическую форму, если заменить величину ω_n ее асимптотическим представлением (35) или, короче, прямо воспользоваться оценками (37)—(42) для преобразования правой части равенства (46):

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\sin nx + \frac{1}{n}\left[\frac{1}{\pi}(T(\pi) - \psi_1(n, \pi))\, x\cos nx +\right.\right.$$
$$\left.\left. + g(n, x) - \nu_n \sin nx\right]\right\} + O(n^{-2}). \tag{47}$$

Для полноты асимптотического описания нормированных собственных функций остается дать оценки их первых и вторых производных $y_n'(x)$ и $y_n''(x)$ при $n \to +\infty$. К сожалению, это невозможно сделать путем непосредственного дифференцирования по x правых частей равенства (46) или (47), так как последние включают некоторые функции $O(\omega_n^{-2})$ переменной x, не имеющие явного выражения. Поэтому для получения асимптотической оценки производной $y_n'(x)$ воспользуемся интегральной формулой (7) при $\omega = \omega_n$ и оценкой (33), подстановка которых в формулу (30) с учетом оценки (31) дает

$$y_n'(x) = \rho_n \frac{\partial y(x, \omega_n)}{\partial x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ [\omega_n \cos \omega_n x - \nu(\omega_n) \cos \omega_n x +$$
$$+ \int_0^x q(\tau) \cos \omega_n (x - \tau) \sin \omega_n \tau\, d\tau] + O(\omega_n^{-1}). \tag{48}$$

Входящий сюда интеграл с помощью элементарных преобразований можно представить в виде

$$\int_0^x q(\tau) \cos \omega_n (x - \tau) \sin \omega_n \tau\, d\tau = g^0(\omega_n, x),$$

где

$$g^0(\omega, x) = T(x) \sin \omega x - \psi_1(\omega, x) \sin \omega x + \psi_2(\omega, x) \cos \omega x. \tag{49}$$

Переписывая с учетом этого правую часть равенства (48), получим первую форму асимптотического выражения для производной собственной функции

$$y_n'(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ [\omega_n \cos \omega_n x + g^0(\omega_n, x) - \nu(\omega_n) \cos \omega_n x] + O(\omega_n^{-1}). \tag{50}$$

Наконец, стандартная форма этого выражения получается, если учесть оценки (37)—(41):

$$y_n'(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} [n \cos nx - \frac{1}{\pi} (T(\pi) - \psi_1(n, \pi)) +$$
$$+ g^0(n, x) - \nu_n \cos nx] + O(n^{-1}). \tag{51}$$

Так как $y_n(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) при $\omega = \omega_n$, то обе асимптотические оценки второй производной $y_n''(x)$ можно найти прямо из этого уравнения,

$$y_n''(x) = [q(x) - \omega_n^2] y_n(x), \tag{52}$$

используя оценки (37) и поочередно (46) и (47):

$$y_n''(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \omega_n [\omega_n \sin \omega_n x + g(\omega_n, x) - \nu(\omega_n) \sin \omega_n x] + O(1), \tag{53}$$

$$y_n''(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ n [n \sin nx + \frac{1}{\pi} (T(\pi) - \psi_1(n, \pi)) +$$
$$+ g(n, x) - \nu_n \sin nx] + O(1). \tag{54}$$

2.4. Связь между коэффициентами Фурье по различным базисам

Выведем асимптотические формулы, связывающие коэффициенты Фурье гладкой функции $f(x)$ по двум различным ортогональным на $[0,\pi]$ системам функций $\left\{y_n(x)\right\}_1^\infty$ и $\left\{\sin nx\right\}_1^\infty$. Будут рассмотрены три класса функций $f(x)$: $C_0^2[0, \pi]$, $C_0^1[0, \pi]$ и $C[0, \pi]$. Искомые коэффициенты Фурье выражаются в следующем виде:

$$F_n = \int_0^\pi f(x)\, y_n(x)\, dx, \tag{55}$$

$$f_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x) \sin nx\, dx. \tag{56}$$

Подставляя в интеграл из (55) нормированную собственную функцию $y_n(x)$ из (30), имеем

$$F_n = \rho_n \int_0^\pi f(x)\, y(x, \omega_n)\, dx. \tag{57}$$

Искомые асимптотические формулы, связывающие коэффициенты Фурье F_n и f_n, будут выведены из последнего соотношения путем постановки в его правую часть нормирующего множителя ρ_n из (45) и собственной функции $y(x, \omega_n)$ из (28) в результате весьма тонких преобразований.

Случай $\mathbf{f(x) \in C_0^2[0, \pi]}$. Представим интеграл из (57) в виде суммы интегралов от слагаемых правой части равенства (28) и преобразуем каждый из этих интегралов отдельно. Первый из них

$$I_1 = \int_0^\pi f(x) \sin \omega_n x\, dx. \tag{58}$$

Для сокращения последующих записей полезно отметить очевидные оценки при $n \to +\infty$ интегралов

$$\int_0^\pi \zeta(x) \sin nx/\cos nx/dx = \begin{cases} \gamma_n & \forall\ \zeta(x) \in C[0, \pi], & (59) \\ \dfrac{A_n}{n} & \forall\ \zeta(x) \in C^1[0, \pi], & (60) \\ \dfrac{\gamma_n}{n} & \forall\ \zeta(x) \in C_0^2[0, \pi], & (61) \end{cases}$$

$$\int_0^\pi \zeta(x) \sin nx\, dx = \frac{\gamma_n}{n^2} \qquad \forall\ \zeta(x) \in C_0^2[0, \pi], \tag{62}$$

непосредственно вытекающие из свойств коэффициентов Фурье непрерывных функций по основной тригонометрической системе и операций интегрирования по частям.

Подставляя в (58) выражение $\sin \omega_n x$ из (38) и используя обозначение (56) и оценку (61), имеем

$$I_1 = \frac{\pi}{2} f_n + \frac{T(\pi) - \psi_1(n, \pi)}{\pi n} \int_0^\pi f(x)\, x \cos nx\, dx + \frac{\gamma_n}{n^3}. \tag{63}$$

Входящий сюда интеграл путем интегрирования по частям два раза преобразуется с учетом граничных значений функции $f(x)$ и оценок (59) и (62) к виду

$$\int_0^\pi f(x) \cos nx\, dx = -\frac{1}{n}\int_0^\pi f'(x)\, x \sin nx\, dx - \frac{\pi}{2n} f_n =$$

$$= \frac{\pi}{n^2} f'(\pi) \cos n\pi - \frac{1}{n^2} \int_0^\pi [f'(x) + xf''(x)] \cos nx\, dx - \frac{\pi}{2n} f_n =$$

$$= \frac{\pi}{n^2} f'(\pi) \cos n\pi + \frac{\gamma_n}{n^2}.$$

Учитывая данное выражение и оценку (36) в правой части равенства (63), получим итоговую оценку

$$I_1 = \frac{\pi}{2} f_n + \frac{(-1)^n}{n^3} T(\pi) f'(\pi) + \frac{\gamma_n}{n^3}. \tag{64}$$

Сложнее преобразуется второй интеграл

$$I_2 = \int_0^\pi f(x)\, g(\omega_n, x)\, dx \tag{65}$$

из правой части равенства (57). Для этого используем выражения неопределенных интегралов

$$\int_0^x g(\omega, s) ds = -\frac{1}{\omega} g^0(\omega, x) + \frac{1}{\omega} \int_0^x q(s) \sin \omega s\, ds, \tag{66}$$

$$\int_0^x g^0(\omega, s)\, ds = \frac{1}{\omega} g(\omega, x), \tag{67}$$

справедливость которых легко устанавливается в силу определений (18) и (49) путем интегрирования по частям и тождественных тригонометрических преобразований. С помощью формулы (66) проинтегрируем правую часть равенства (65) по частям, так что с учетом нулевых граничных значений функции $f(x)$ имеем

$$I_2 = \frac{1}{\omega_n} \int_0^\pi f'(x)\, g^0(\omega_n, x)\, dx - \frac{1}{\omega_n} \int_0^\pi f'(x)\, dx \int_0^x q(s) \sin \omega_n s\, ds. \tag{68}$$

Используя здесь соотношение (67) для повторного интегрирования по частям, находим в силу начального значения $g(\omega, 0) = 0$ и асимптотических оценок (37) и (42) интеграл

$$\frac{1}{\omega_n} \int_0^\pi f'(x)\, g^0(\omega_n, x)\, dx = \frac{1}{\omega_n^2} \left[f'(\pi)\, g(\omega_n, \pi) - \int_0^\pi f''(x)\, g(\omega_n, x)\, dx \right] =$$

$$= \frac{1}{n^2} \left[f'(\pi)\, g(n, \pi) - \int_0^\pi f''(x)\, g(n, x)\, dx \right] + \frac{A_n}{n^3}.$$

Повторный интеграл из правой части равенства (68) с помощью формулы интегрирования по частям и с учетом граничных значений функции $f(x)$ и оценок (37), (38) и (59) преобразуется к виду

$$\frac{1}{\omega_n} \int_0^\pi f'(x)\, dx \int_0^x q(s) \sin \omega_n s\, ds = -\frac{1}{\omega_n} \int_0^\pi f(x)\, q(x) \sin \omega_n x\, dx =$$

$$= -\frac{1}{n} \int_0^\pi f(x)\, q(x) \sin nx\, dx + \frac{\gamma_n}{n^2}.$$

Подставляя выражения найденных интегралов и $g(n, x)$ из (18) в формулу (68) и учитывая оценки (36) и (59), получим

$$I_2 = \frac{1}{n}\int_0^\pi f(x)\,q(x)\sin nx\,dx - \frac{1}{n^2}\Big[f'(\pi)\,T(\pi)\cos n\pi +$$

$$+\int_0^\pi f''(x)\,\psi_1(n, x)\cos nx\,dx + \int_0^\pi f''(x)\,\psi_2(n, x)\sin nx\,dx + \gamma_n\Big]. \quad (69)$$

Сложность оценки I_2 при $n \to +\infty$ состоит в том, что в правой части равенства (69) два последних интеграла в отличие от предыдущих не являются коэффициентами Фурье непрерывных функций. Для преодоления этих трудностей используем результаты П.1. Прежде всего отметим, что величины $\psi_1(n, x)$ и $\psi_2(n, x)$ представляют собой соответственно четные косинус- и синус-коэффициенты Фурье x-срезки функции $\frac{4}{\pi}q(s) \in C\,[0, \pi]$. Тогда согласно лемме П.1 ряды из их квадратов

$$\sum_{n=1}^{\infty}\psi_1^2(n, x), \quad (70)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\psi_2^2(n, x) \quad (71)$$

сходятся равномерно по $x \in [0, \pi]$. Кроме того, $f''(x) \in C\,[0, \pi]$, и по лемме П.3 оба искомых интеграла оцениваются в виде

$$\int_0^\pi f''(x)\psi_1(n, x)\cos nx\,dx = \gamma_n,$$

$$\int_0^\pi f''(x)\psi_2(n, x)\sin nx\,dx = \gamma_n.$$

Это позволяет переписать формулу (69) в окончательном виде

$$I_2 = \frac{1}{n}\int_0^\pi f(x)\,q(x)\sin nx\,dx - \frac{(-1)^n}{n^2}T(\pi)\,f'(\pi) + \frac{\gamma_n}{n^2}. \quad (72)$$

Третий интеграл из правой части равенства (57)

$$I_3 = \int_0^\pi f(x)\,[F_1(\omega_n, x)\sin\omega_n x + F_2(\omega_n, x)\cos\omega_n x\,]\,dx \quad (73)$$

в силу очевидной дифференцируемости по x функций $F_1(\omega, x)$ и $F_2(\omega, x)$ из (20) и (22) можно интегрировать по частям, так что с учетом нулевых значений функции $f(x)$ при $x = 0$ и $x=\pi$ имеем

$$I_3 = \frac{1}{\omega_n}\int_0^\pi f(x)\left[\frac{\partial F_1(\omega_n, x)}{\partial x}\cos\omega_n x - \frac{\partial F_2(\omega_n, x)}{\partial x}\sin\omega_n x\right]dx +$$

$$+\frac{1}{\omega_n}\int_0^\pi f'(x)\,[\,F_1(\omega_n, x)\cos\omega_n x - F_2(\omega_n, x)\sin\omega_n x\,]\,dx. \quad (74)$$

Но согласно определениям (18), (20)—(22) находим с помощью непосредственного дифференцирования и тождественных преобразований

$$\frac{\partial F_1(\omega, x)}{\partial x} = q(x)\,g(\omega, x)\cos\omega x, \quad (75)$$

$$\frac{\partial F_2(\omega, x)}{\partial x} = -q(x)\,g(\omega, x)\sin\omega x, \tag{76}$$

откуда видно, что эти производные равномерно по $\omega \in \in (-\infty, +\infty)$ ограничены на $[0, \pi]$, т. е.

$$\left|\frac{\partial F_1(\omega, x)}{\partial x}\right| < A, \qquad \left|\frac{\partial F_2(\omega, x)}{\partial x}\right| < B. \tag{77}$$

Интегрирование последнего интеграла из правой части равенства (74) еще раз по частям с учетом свойств (23) и (77) показывает, что он является величиной A_n/ω_n. Это позволяет переписать формулу (74) после подстановки в нее выражений (75) и (76) в следующем виде:

$$I_3 = \frac{1}{\omega_n}\int_0^\pi f(x)\,q(x)\,g(\omega_n, x)\,dx + \frac{A_n}{\omega_n^2}.$$

Учитывая в этом выражении оценки (37) и (42), получим окончательно

$$I_3 = \frac{1}{n}\int_0^\pi f(x)\,q(x)\,g(n, x)\,dx + \frac{B_n}{n^2} = \frac{\gamma_n}{n}, \tag{78}$$

так как входящий сюда интеграл в результате подстановки $g(n, x)$ из (18) и использования соотношения (59) и леммы П.3 оценивается величиной γ_n.

Наконец, последний, четвертый, интеграл из правой части равенства (57)

$$I_4 = \int_0^\pi f(x)\,[P_1(\omega_n, x)\sin\omega_n x + P_2(\omega_n, x)\cos\omega_n x]\,dx \tag{79}$$

аналогично предыдущему путем интегрирования по частям приводится к виду

$$I_4 = \frac{1}{\omega_n}\int_0^\pi f(x)\left[\frac{\partial P_1(\omega_n, x)}{\partial x}\cos\omega_n x - \frac{\partial P_2(\omega_n, x)}{\partial x}\sin\omega_n x\right]dx +$$
$$+ \frac{1}{\omega_n}\int_0^\pi f'(x)\,[P_1(\omega_n, x)\cos\omega_n x - P_2(\omega_n, x)\sin\omega_n x]\,dx. \tag{80}$$

Согласно определениям (24) и (25) устанавливаем с помощью формальных операций дифференцирования и элементарных преобразований равномерную по ω ограниченность на $[0, \pi]$ производных:

$$\frac{\partial P_1(\omega, x)}{\partial x} =$$
$$= q(x)\cos\omega x \int_0^x q(\tau)\sin\omega\tau\,d\tau \int_\tau^x q(s)\sin\omega(\tau - s)\sin\omega(s - x)\,ds,$$
$$\frac{\partial P_2(\omega, x)}{\partial x} =$$
$$= -q(x)\sin\omega x \int_0^x q(\tau)\sin\omega\tau\,d\tau \int_\tau^x q(s)\sin\omega(\tau - s)\sin\omega(s - x)\,ds.$$

Добавляя к этому свойства (27) ограниченности самих функций, находим из (80) с учетом оценки (37), что, по крайней мере,

$$I_4 = A_n/n. \tag{81}$$

Найдем теперь асимптотическую оценку для коэффициента Фурье F_n из (57), подставляя под интеграл собственную функцию $y(x, \omega_n)$ из (28) при обозначениях (58), (65), (73) и (79):

$$F_n = \rho_n\left(I_1 + \frac{I_2}{\omega_n} + \frac{I_3}{\omega_n^2} + \frac{I_4}{\omega_n^3} + \frac{A_n}{\omega_n^4}\right). \tag{82}$$

Используя здесь оценки (37), (45), (62), (64), (72), (78) и (81), получим в результате элементарных преобразований искомую формулу

$$F_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(f_n + \frac{w_n}{n^2}\right) + \frac{\gamma_n}{n^3} \qquad \forall\, f(x) \in C_0^2[0, \pi], \tag{83}$$

связывающую коэффициенты Фурье F_n и f_n одной и той же функции $f(x)$ по различным базисам, где w_n – синус-коэффициент Фурье функции

$$w(x) = f(x)\, q(x) \in C_0\,[0, \pi]. \tag{84}$$

Случай $\mathbf{f(x) \in C_0^1[0, \pi]}$. Так как в рассматриваемом случае гладкость функции $f(x)$ на единицу меньше, чем в предыдущем, то и асимптотическая формула для F_n будет более грубая, чем (83). Это означает, что все выкладки при выводе искомой формулы можно укоротить. Так, в качестве исходной возьмем формулу

$$F_n = \rho_n\left(I_1 + \frac{I_2}{\omega_n} + \frac{I_3}{\omega_n^2} + \frac{A_n}{\omega_n^3}\right), \tag{85}$$

вытекающую из (82) при учете (27) и (79). Далее, из (63) в силу оценки (61) имеем

$$I_1 = \frac{\pi}{2} f_n + \frac{\gamma_n}{n^2}.$$

Согласно (59) оценку интеграла I_2 можно получить прямо из (69), не продолжая дальнейших выкладок:

$$I_2 = \gamma_n/n.$$

Наконец, в силу (23) и (77) для интеграла I_3 имеет место упрощенная оценка

$$I_3 = A_n/n,$$

вытекающая из формулы (74).

Подставляя правую часть равенства (85) нормирующий множитель ρ_n из (45) и найденные оценки для I_1, I_2 и I_3, получим после элементарных преобразований с учетом оценок (37) и (61) искомую асимптотическую формулу

$$F_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, f_n + \frac{\gamma_n}{n^2} \qquad \forall\ f(x) \in C_0^1[\,0,\ \pi\,]. \tag{86}$$

Случай $\mathbf{f(x) \in C[\,0,\ \pi\,]}$. Здесь получается наиболее грубая асимптотическая формула для F_n. В силу (23), (73) и (82) в качестве исходной возьмем формулу

$$F_n = \rho_n \left(I_1 + \frac{I_2}{\omega_n} + \frac{A_n}{\omega_n^2}\right). \tag{87}$$

Первый интеграл I_1 легко оценивается после подстановки в (58) асимптотической оценки (38) с учетом (59):

$$I_1 = \frac{\pi}{2} f_n + \frac{T(\pi) - \psi_1(n, \pi)}{\pi n} \int_0^\pi f(x) x \cos nx\, dx + \frac{D_n}{n^2} = \frac{\pi}{2} f_n + \frac{\gamma_n}{n}. \tag{88}$$

Второй интеграл I_2 после подстановки выражения $g(\omega_n, x)$ из (18) в правую часть формулы (65) преобразуется при учете оценок (39) и (59) к виду

$$I_2 = \gamma_n + \int_0^\pi f(x)\, \psi_1(\omega_n, x) \cos \omega_n x + \int_0^\pi f(x)\, \psi_2(\omega_n, x) \sin \omega_n x\, dx.$$

Два последних интеграла в результате подстановки в них выражений (38)—(40) согласно лемме П.3 являются величинами γ_n, так что

$$I_2 = \gamma_n. \tag{89}$$

Комбинируя теперь соотношения (87)—(89) и учитывая оценки (37) и (45), получим искомую асимптотическую формулу

$$F_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, f_n + \frac{\gamma_n}{n} \qquad \forall\ f(x) \in C[\,0,\ \pi\,]. \tag{90}$$

ГЛАВА 3

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

В настоящей главе новый подход к обоснованию метода Фурье, изложенный в гл. 1, реализуется в смешанной задаче для однородного гиперболического уравнения с двумя независимыми переменными, известного в литературе [19, с. 349; 24, с. 363] также и под названием одномерного волнового уравнения. С помощью уточненных асимптотических формул для собственных значений и функций оператора Штурма — Лиувилля, найденных в гл. 2, и непосредственного суммирования функциональных рядов к гладким функциям получены неулучшаемые условия разрешимости данной смешанной задачи.

3.1. Постановка задачи

Рассмотрим однородное гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + q(x)\, u\,(x, t) = 0 \tag{1}$$

с вещественным потенциалом

$$q\,(x) \in C\,[\,0, \pi\,] \tag{2}$$

относительно искомой функции $u\,(x, t)$ удовлетворяющей граничным условиям

$$u\,(\,0, t\,) = u\,(\pi, t\,) = 0 \qquad \forall\, t \in [\,0, T\,] \tag{3}$$

и начальным данным Коши

$$u\,(x, 0) = \varphi\,(x), \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi\,(x). \tag{4}$$

Следуя [30, с. 210; 32, с. 204], поставим следующую смешанную задачу.

З а д а ч а. Найти функцию

$$u\,(x, t) \in C^2\,(\bar{Q}), \tag{5}$$

удовлетворяющую в обычном смысле уравнению (1) в открытом прямоугольнике Q, а также граничным (3) и начальным (4) условиям.

Приведем некоторые соображения в пользу выбора класса допустимых решений в виде (5), являющемся традиционным [16, с. 71; 30, с. 148; 32, с. 203] в смешанных задачах для гиперболических уравнений. По-видимому, впервые вопрос о расширении данного класса допустимых решений за счет снятия требования непрерывности на замыкании $\overline{Q}$ всех частных производных функции $u(x, t)$ до второго порядка включительно был поставлен в [9, с. 111]. Для рассматриваемой здесь смешанной задачи такое расширение класса (5) является неэффективным. По крайней мере, оно пусто в одном существенном случае, когда $q(x) \equiv \psi(x) \equiv 0$. Покажем, что при этом из существования решения $u(x, t) \in C^2(Q) \cap C(\overline{Q})$ смешанной задачи (1), (3), (4) следует его принадлежность классу (5).

В самом деле, в данном случае искомое решение, если оно существует, представляется формулой Даламбера [33, с. 54]

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)].$$

Тогда, считая без ограничения общности $T \geq \pi$, имеем

$$u(x, x) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(2x) + \varphi(0)] \in C^2(G) \cap C(\overline{G}),$$

откуда с учетом замены $z = 2x$ следует, что $\tilde{\varphi}(z) \in C^2(0, 2\pi)$, т. е.

$$\varphi(x) \in C^2(0, \pi], \qquad \varphi''(\pi) = 0.$$

Остается показать непрерывность $\varphi''(x)$ в окрестности точки $x = 0$. Для этого выберем достаточно малое число $\delta > 0$. Тогда при $0 < x < \delta$ по формуле Даламбера имеем

$$u(x, \delta - x) = \frac{1}{2}[\varphi(\delta) + \tilde{\varphi}(2x - \delta)] \in C^2(0, \delta),$$

откуда, вводя переменную $z = 2x - \delta$, находим, что $\tilde{\varphi}(z) \in$ $\in C^2(-\delta, \delta)$, а значит, $\varphi(x) \in C^2[0, \delta)$ и $\varphi''(0) = 0$. С учетом установленных выше включений имеем

$$\varphi(x) \in C_0^2(\overline{G}), \qquad \varphi''(0) = \varphi''(\pi) = 0.$$

Тогда из формулы Даламбера следует включение (5), что и требовалось доказать.

Сформулированная задача (1)—(5) укладывается в постановку общей смешанной задачи (1.1.)—(1.4), однако рассматривается в более узком, чем (1.4.), классе функций, так как здесь подразумевается существование смешанной производной $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} \in C(\overline{Q})$. Из сопоставления дифференциальных уравнений (1) и (1.1) видна самосопряженность оператора

$$L_x = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + q(x), \tag{6}$$

что легко устанавливается непосредственной проверкой соотношения (1.7) путем интегрирования по частям с учетом граничных условий (3). Это позволяет использовать общие теоремы 1.1 и 1.2 при исследовании существования и единственности смешанной задачи (1)—(5).

Хотя данная смешанная задача давно и хорошо изучена [9; 30; 32], вопрос о минимальных требованиях к потенциалу $q(x)$ и начальным функциям $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, при выполнении которых существует ее классическое решение $u(x, t)$, открыт и до настоящего времени. Решению этого вопроса и посвящена в дальнейшем настоящая глава.

3.2. Необходимые условия разрешимости и основной результат

Из постановки смешанной задачи (1)—(5) следует необходимость ряда условий на начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Прежде всего согласно (1.10) и (1.11)

$$\varphi(x) \in C_0^2[0, \pi]. \tag{7}$$

Далее, из непрерывности производной $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t}$ и граничных условий (3) следует

$$\psi(x) \in C_0^1[0, \pi]. \tag{8}$$

Наконец, условия (2) и (5) позволяют перейти в равенстве (1) к пределу при $t \to 0$ и $x \to 0$ (или $x \to \pi$), откуда вытекает

$$\varphi''(0) = \varphi''(\pi). \tag{9}$$

Таким образом, условия (2), (7)—(9) являются минимальными требованиями к исходным данным смешанной задачи (1)—(5). Чрезвычайно интересен вопрос об их достаточности для существования искомого решения $u(x, t)$. Все известные достаточные условия разрешимости смешанной задачи (1)—(5) состоят в дополнительных по сравнению с (2), (7)—(9) требованиях к функциям $q(x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Среди них три группы наиболее мягких, но не перекрывающих друг друга достаточных условий принадлежат соответственно В. А. Стеклову [32, с. 223]:

$$q(x),\ \varphi''(x) \in \mathrm{Lip}[0, \pi],\ \psi''(x)\ R\text{-интегрируема на } [0, \pi], \tag{10}$$

И. Г. Петровскому [30, с. 210]:

$$\varphi(x) \in C^3[0, \pi], \qquad \psi(x) \in C^2[0, \pi], \tag{11}$$

и Б. М. Левитану [18, с. 108 и 116]:

$$q(x) \in C^1[0, \pi]. \tag{12}$$

Условия разрешимости (10) и (11) получены путем решения смешанной задачи (1)—(5) методом Фурье со стандартной схемой его обоснования, а (12) — методом Римана. В обоих случаях при доказательстве существования классического решения $u(x, t)$ существенно используется операция почленного дифференцирования формальных рядов, представляющих это решение.

Очевидно, отказ от почленного дифференцирования функциональных рядов, лежащий в основе предложенного в гл. 1 подхода к обоснованию метода Фурье, должен привести к ослаблению условий разрешимости (10)—(12). Ранее в этом направлении автором уже были получены дополнительные к (2), (7)—(9) достаточные условия разрешимости $q(x) \in V[0, \pi]$ в [38] и $q(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha[0, \pi]$, $0 < \alpha \le 1$, в [39]. Каждое из них не перекрывает другое и является более мягким, чем (12). Сформулируем теперь предельную теорему о разрешимости смешанной задачи (1)—(5), содержащую уже необходимые и достаточные условия существования ее классического решения.

Т е о р е м а 3.1. Решение $u(x, t)$ смешанной задачи (1)—(5) существует и единственно тогда и только тогда, когда начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям (7)—(9). При этом оно дается функциональным рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\Phi_n \cos\omega_n t + \frac{\Psi_n}{\omega_n} \sin\omega_n t)\, y_n(x). \tag{13}$$

Здесь ω_n^2 и $y_n(x)$ – собственные значения и соответствующие им нормированные собственные функции системы Штурма — Лиувилля (2.1)—(2.3), а Φ_n и Ψ_n — коэффициенты Фурье начальных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ по полной ортонормальной в $L^2(0, \pi)$ системе $\{y_n(x)\}_1^\infty$, определяемые в соответствии с формулой (2.55).

З а м е ч а н и е. Если спектр краевой задачи (2.1)—(2.3) содержит нулевое собственное значение $\omega_{n_0} = 0$, то член $u_{n_0}(x, t)$ ряда (13) при $n = n_0$ доопределяется в виде

$$u_{n_0}(x, t) = (\Phi_{n_0} + \Psi_{n_0} t)\, y_{n_0}(x). \tag{14}$$

Согласно [34, с. 211] таких значений n_0 может быть только конечное число. А так как $\omega_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$, то формальное игнорирование членов (14) в ряде (13) не имеет значения, поскольку все существенные в последующем выкладки основаны исключительно на асимптотических свойствах этого ряда.

Утверждение сформулированной теоремы о единственности $u(x, t)$ тривиально, так как последняя согласно теореме 1.1 прямо следует из существования искомого решения. Что касается необходимости условий (7)—(9), то она уже отмечена выше. Поэтому ниже в этой главе, по существу, устанавливается достаточность указанных условий для разрешимости задачи (1)—(5).

3.3. Структурные свойства формального ряда

Переходим к исследованию свойств гладкости функционального ряда (13), предполагая выполненными условия (2) и (7)—(9). Пока его можно считать лишь формальным рядом, так как для каждого $n \in Z^+$ имеются конкретные процедуры для отыскания n-го члена этого ряда. Первый факт, который устанавливается достаточно просто, состоит в равномерной сходимости формального ряда (13) на замыкании $\bar{Q}$.

Действительно, в силу (7), (2.83) и (2.84)

$$\Phi_n = \sqrt{\pi/2}(\varphi_n + z_n/n^2) + \gamma_n/n^3, \tag{15}$$

а в силу (8) и (2.86)

$$\Psi_n = \sqrt{\pi/2}\,\psi_n + \gamma_n/n^2, \tag{16}$$

где φ_n, ψ_n и z_n — определяемые в соответствии с формулой (2.56) синус-коэффициенты Фурье начальных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ и функции

$$z(x) = \varphi(x)\,q(x) \in C_0[0, \pi], \tag{17}$$

причем последнее включение следует из свойств (2) и (7). Кроме того, согласно оценкам (2.59), (2.61) и (2.62)

$$\varphi_n = \gamma_n/n^2, \quad \psi_n = \gamma_n/n, \quad z_n = \gamma_n. \tag{18}$$

Это означает с учетом оценок (15), (16) и (2.37), что члены ряда (13) являются величинами $O(n^{-2})$, откуда следует его равномерная в $\bar{Q}$ сходимость. Тогда корректно обозначить сумму ряда (13) функцией $S(x, t)$. В силу непрерывности в $\bar{Q}$ его членов и согласно [20, с. 232]

$$S(x, t) \in C(\bar{Q}). \tag{19}$$

Но оказывается, что сумма $S(x, t)$ ряда (13) обладает гораздо более сильными, чем (19), свойствами гладкости. Ниже будет показано, что при выполнении условий (2), (7)—(9)

$$S(x, t) \in C^2(\bar{Q}). \tag{20}$$

При стандартном обосновании метода Фурье решения смешанной задачи (1)—(5) в качестве достаточных условий для выполнения включения (20) используется равномерная в $\bar{Q}$ сходимость функциональных рядов, составленных из соответствующих производных от членов ряда (13). Однако в общем случае условия (2), (7)—(9) не обеспечивают даже поточечную сходимость дважды продифференцированных рядов как рядов Фурье непрерывных в $\bar{Q}$ функций [1, с. 133]. Для преодоления этой принципиальной трудности ниже выделяются структурные особенности в функциональном ряде (13).

Представим ряд (13) в виде двух составляющих: регулярной и сингулярной. Первая допускает двукратное почленное дифференцирование по x и t. Напротив, функциональный ряд, представляющий собой сингулярную составляющую, почленно дифференцировать два раза нельзя, зато его можно суммировать к явной функции из $C^2(\bar{Q})$.

Для реализации этой цели подставим в функциональный ряд (13) упрощенные оценки нормированной собственной функции

$$y_n(x) = \sqrt{2/\pi}\,\sin nx + h_n(x) = O(1), \tag{21}$$

$$h_n(x) = O(n^{-1}), \tag{22}$$

вытекающие из (2.18), (2.44) и (2.47), и асимптотические оценки коэффициентов Фурье Φ_n из (15) и Ψ_n из (16). В результате тождественных преобразований с учетом оценки (2.37) представим сумму $S(x, t)$ ряда (13) в следующем виде:

$$S(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + \sum_{i=1}^{3} S_i(x, t), \tag{23}$$

где

$$u_0(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Theta_n}{n^2} \cos nt \sin nx, \tag{24}$$

$$u_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n}{n} \sin nt \sin nx, \tag{25}$$

$$S_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [\frac{\Theta_n}{n^2} (\cos \omega_n t - \cos nt) +$$

$$+ \frac{\psi_n}{n} (\sin \omega_n t - \sin nt)] \sin nx, \tag{26}$$

$$S_2(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\Theta_n}{n^2} \cos \omega_n t + \frac{\psi_n}{n} \sin \omega_n t) h_n(x), \tag{27}$$

$$S_3(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n^3} (\cos \omega_n t + A_n \sin \omega_n t) y_n(x), \tag{28}$$

а оцениваемая согласно (18) величина

$$\Theta_n = n^2 \varphi_n + z_n = \gamma_n \tag{29}$$

является, как легко видеть из [1, с. 88], синус-коэффициентом Фурье функции

$$\Theta(x) = z(x) - \varphi''(x) \in C_0[0, \pi], \tag{30}$$

причем последнее включение следует из (7), (9) и (17). Оказывается, от свойств функции $\Theta(x)$, введенной еще В. А. Стекловым [32, с. 160], полностью зависит вопрос разрешимости задачи (1)—(5).

Корректность представления (23), а значит, и обозначения сумм рядов (24)—(28) соответствующими функциями основана на равномерной в $\overline{Q}$ сходимости этих рядов, так как в силу оценок (18) и (29) все их члены являются величинами $O(n^{-2})$. Из непрерывности членов функциональных рядов (24)—(28) следует также [20, с. 232] непрерывность в $\overline{Q}$ функций $u_0(x, t)$, $u_1(x, t)$ и $S_i(x, t)$ ($i = 1, 2, 3$). Если удастся показать, что каждая из указанных функций дважды непрерывно дифференцируема в $\overline{Q}$, то будет установлена искомая гладкость второго порядка функции $S(x, t)$, т. е. включение (20).

Два первых слагаемых в правой части равенства (23) представляют собой сингулярную составляющую суммы $S(x, t)$. Действительно, каждый из функциональных рядов (24) и (25), как легко видеть из примера Лебега [1, с. 133] непрерывной функции с расходящимся тригонометрическим рядом Фурье, не допускает двукратного почленного дифференцирования по x и t. Поэтому нужно найти способ для непосредственного суммирования рядов (24) и (25) к явным функциям из $C^2(\bar{Q})$.

Регулярная составляющая суммы $S(x, t)$ включает три последних слагаемых из правой части равенства (23). Ниже с помощью только почленного дифференцирования функциональных рядов (26)—(28) будет доказана принадлежность функций $S_1(x, t)$, $S_2(x, t)$ и $S_3(x, t)$ классу $C^2(\bar{Q})$.

3.4. Гладкость регулярной составляющей

Проводимое здесь исследование гладкости второго порядка функций $S_i(x, t)$ основывается на двух фундаментальных теоремах анализа [36, с. 433, 441], согласно которым почленно продифференцированные ряды (26)—(28) с непрерывными членами представляют собой соответствующие непрерывные в $\bar{Q}$ частные производные, если они сходятся равномерно в $\bar{Q}$. Исходя из этого, в дальнейшем достаточно ограничиться написанием формальных выражений для соответствующих частных производных, полученных почленным дифференцированием рядов (26)—(28), и исследованием их равномерной сходимости в $\bar{Q}$.

Начнем с исследования гладкости функции $S_1(x, t)$, представленной рядом (26). С помощью его почленного дифференцирования по x и t запишем формальные выражения для частных производных

$$\frac{\partial S_1(x, t)}{\partial x} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\Theta_n}{n}(\cos\omega_n t - \cos n t) + \psi_n(\sin\omega_n t - \sin nt)\right] \cos nx,$$

$$\frac{\partial S_1(x, t)}{\partial t} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\Theta_n}{n}\left(\sin nt - \frac{\omega_n}{n}\sin\omega_n t\right) + \psi_n\left(\frac{\omega_n}{n}\cos\omega_n t - \cos nt\right)\right] \sin nx.$$

Члены функциональных рядов в правых частях этих равенств являются в силу оценок (2.37)—(2.39), (18) и (29) величинами $O(n^{-2})$. Поэтому оба последних ряда мажорируются сходящимся числовым рядом $A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, а значит, по признаку Вейерштрасса [36, с. 430] сходятся равномерно в $\bar{Q}$, т. е.

$$\frac{\partial S_1(x, t)}{\partial x}, \ \frac{\partial S_1(x, t)}{\partial t} \in C(\bar{Q}). \tag{31}$$

Аналогично записываются формальные выражения для частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial^2 S_1(x, t)}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} [\Theta_n(\cos nt - \cos\omega_n t) + n\psi_n(\sin nt - \sin\omega_n t)]\sin nx,$$

$$\frac{\partial^2 S_1(x, t)}{\partial t^2} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\Theta_n\left(\cos nt - \frac{\omega_n^2}{n^2}\cos\omega_n t\right) + n\psi_n\left(\sin nt - \frac{\omega_n^2}{n^2}\sin\omega_n t\right)\right]\sin nx,$$

$$\frac{\partial^2 S_1(x, t)}{\partial t\,\partial x} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\Theta_n\left(\sin nt - \frac{\omega_n}{n}\sin\omega_n t\right) + n\psi_n\left(\frac{\omega_n}{n}\cos\omega_n t - \cos nt\right)\right]\cos nx.$$

Все три функциональных ряда в правых частях этих равенств идентичны, а их члены в силу асимптотических соотношений (2.37)—(2.39), (18) и (29) оцениваются величинами $\gamma_n O(n^{-1})$. Тогда согласно сходимости числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n|/n < +\infty, \tag{32}$$

вытекающей из определения величины γ_n и леммы П.4, три указанных ряда мажорируются сходящимся числовым рядом $A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\gamma_n|}{n}$, а значит, сходятся равномерно в $\bar{Q}$, т. е.

$$\frac{\partial^2 S_1(x, t)}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 S_1(x, t)}{\partial t^2},\quad \frac{\partial^2 S_1(x, t)}{\partial t\,\partial x} \in C(\bar{Q}). \tag{33}$$

По теореме [27, с. 176] о равенстве смешанных производных заключаем в силу (31), что $\frac{\partial^2 S_1(x, t)}{\partial x\,\partial t} \in C(\bar{Q})$. Отсюда с учетом включений (31) и (33) получаем окончательно

$$S_1(x, t) \in C^2(\bar{Q}). \tag{34}$$

При исследовании свойств гладкости функции $S_2(x, t)$, представленной рядом (27), будут нужны упрощенные оценки первых и вторых производных нормированных собственных функций $y_n(x)$. С этой целью из сопоставления формул (21) и (2.51) находим с учетом оценки (2.44) и определения (2.49)

$$y_n'(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, n\cos nx + O(1) = O(n), \tag{35}$$

$$h_n'(x) = O(1). \tag{36}$$

Аналогично из оценки (2.54) получим в силу определения (2.18)

$$y_n''(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, n^2\sin nx + O(n) = O(n^2), \tag{37}$$

$$h_n''(x) = O(n). \tag{38}$$

Дифференцируя почленно ряд (27), найдем формальные выражения для частных производных искомой функции:

$$\frac{\partial S_2(x,\ t)}{\partial x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\Theta_n}{n^2} \cos \omega_n t + \frac{\psi_n}{n} \sin \omega_n t\right) h'_n(x),$$

$$\frac{\partial S_2(x,\ t)}{\partial t} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \left(\frac{\psi_n}{n} \cos \omega_n t - \frac{\Theta_n}{n^2} \sin \omega_n t\right) h_n(x).$$

Члены функциональных рядов в правых частях этих равенств являются в силу оценок (2.37)—(2.39), (18), (22), (29) и (36) величинами $O(n^{-2})$, а потому сами ряды по аналогии с предыдущим сходятся равномерно в $\bar{Q}$, т. е.

$$\frac{\partial S_2(x,\ t)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial S_2(x,\ t)}{\partial t} \in C(\bar{Q}). \tag{39}$$

Запишем теперь формальные выражения для частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial^2 S_2(x,\ t)}{\partial x^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\Theta_n}{n^2} \cos \omega_n t + \frac{\psi_n}{n} \sin \omega_n t\right) h''_n(x),$$

$$\frac{\partial^2 S_2(x,\ t)}{\partial t^2} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 \left(\frac{\Theta_n}{n^2} \cos \omega_n t + \frac{\psi_n}{n} \sin \omega_n t\right) h_n(x),$$

$$\frac{\partial^2 S_2(x,\ t)}{\partial t\, \partial x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \left(\frac{\omega_n}{n} \cos \omega_n t - \frac{\Theta_n}{n^2} \sin \omega_n t\right) h'_n(x).$$

Легко видеть, что члены функциональных рядов в правых частях трех последних равенств оцениваются в силу асимптотических соотношений (2.37)—(2.39), (18), (22), (29), (36) и (38) величинами $\gamma_n O(n^{-1})$, а значит, с учетом свойства (32) сами ряды сходятся равномерно в $\bar{Q}$, т. е.

$$\frac{\partial^2 S_2(x,\ t)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 S_2(x,\ t)}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 S_2(x,\ t)}{\partial t\, \partial x} \in C(\bar{Q}). \tag{40}$$

В силу (39) это означает, что обе смешанные производные, взятые в разном порядке, равны между собой, так что $\dfrac{\partial^2 S_2(x,\ t)}{\partial x\, \partial t} \in C(\bar{Q})$. Отсюда с учетом включений (39) и (40) имеем окончательно

$$S_2(x,\ t) \in C^2(\bar{Q}). \tag{41}$$

Совершенно аналогично исследуется гладкость последней составляющей $S_3(x,\ t)$, определенной рядом (28). Формальные выражения для ее частных производных по x и t есть

$$\frac{\partial S_3(x,\ t)}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n^3} (\cos \omega_n t + A_n \sin \omega_n t) y'_n(x),$$

$$\frac{\partial S_3(x,\ t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n \gamma_n}{n^3} (A_n \cos \omega_n t - \sin \omega_n t)\, y_n(x).$$

В силу оценок (2.37)—(2.39), (21) и (35) члены обоих рядов из правых частей этих равенств являются величинами $O(n^{-2})$, т. е. сами ряды сходятся равномерно в $\overline{Q}$, а значит,

$$\frac{\partial S_3(x, t)}{\partial x}, \quad \frac{\partial S_3(x, t)}{\partial t} \in C(\overline{Q}). \tag{42}$$

Выпишем формальные выражения для частных производных второго порядка от искомой функции:

$$\frac{\partial^2 S_3(x, t)}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n^3} (\cos \omega_n t + A_n \sin \omega_n t) y_n''(x),$$

$$\frac{\partial^2 S_3(x, t)}{\partial t^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n^2 \gamma_n}{n^3} (\cos \omega_n t + A_n \sin \omega_n t) y_n(x),$$

$$\frac{\partial^2 S_3(x, t)}{\partial t\, \partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n \gamma_n}{n^3} (A_n \cos \omega_n t - \sin \omega_n t) y_n'(x).$$

Из оценок (2.37)—(2.39), (21), (35) и (37) видно, что члены трех последних рядов являются величинами $\gamma_n O(n^{-1})$, а значит, эти ряды согласно (32) сходятся равномерно в $\overline{Q}$, т. е.

$$\frac{\partial^2 S_3(x, t)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 S_3(x, t)}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 S_3(x, t)}{\partial t\, \partial x} \in C(\overline{Q}). \tag{43}$$

Тогда из (42) следует, что другая смешанная производная $\dfrac{\partial^2 S_3(x, t)}{\partial x\, \partial t} \in C(\overline{Q})$. Таким образом, учитывая включения (42) и (43), имеем в итоге

$$S_3(x, t) \in C^2(\overline{Q}). \tag{44}$$

3.5. Суммирование сингулярной составляющей

Проводимое здесь суммирование функциональных рядов (24) и (25), представляющих собой сингулярную составляющую суммы из (23), основано на почленном интегрировании сходящихся в среднем рядов Фурье и использовании свойств операторов обобщенного сдвига [18, с. 67].

Просуммируем вначале функциональный ряд из правой части равенства (25) и найдем явный вид функции $u_1(x, t)$. С этой целью, используя теорему разложимости В. А. Стеклова [32, с. 173], запишем разложение начальной функции $\psi(x)$ со свойством (8) в синус-ряд Фурье

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin nx. \tag{45}$$

Так как функциональный ряд из правой части этого равенства сходится равномерно в R^1, то на всей числовой оси он определяет нечетную 2π-периодическую непрерывную функцию, т. е. согласно (8)

$$\tilde{\psi}(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin n\tau \qquad \forall \tau \in R^1. \tag{46}$$

Свойство равномерной сходимости позволяет проинтегрировать ряд (46) почленно по τ в пределах от 0 до любого $z \in \in (-\infty, +\infty)$, так что

$$\int_0^z \tilde{\psi}(\tau)\, d\tau = a - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n}{n} \cos nz, \tag{47}$$

где функциональный ряд в силу оценок (18) и (32) сходится равномерно по $z \in R^1$, а константа

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n}{n}.$$

Впрочем, для нее можно дать и другое явное выражение, основываясь на равенстве Парсеваля [1, с. 217] для произведения функций $\frac{\pi - x}{2}$ и $\psi(x)$, а именно

$$a = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x)\, \psi(x)\, dx. \tag{48}$$

Теперь функциональный ряд из (25) легко суммируется к явной функции, если использовать формулу (47) и элементарное тригонометрическое тождество

$$\sin \omega x \sin \omega t = \frac{1}{2} [\cos \omega(x - t) - \cos \omega(x + t)]. \tag{49}$$

В итоге получим

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{\psi}(\tau)\, d\tau \in C^2(\bar{Q}), \tag{50}$$

причем последнее включение вытекает из правил дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом [36, с. 116] и свойства продолженной функции $\tilde{\psi}(z) \in C^1(R^1)$.

Сложнее суммируется функциональный ряд из правой части равенства (24). Для отыскания явного вида функции $u_0(x, t)$ придется использовать операцию почленного интегрирования ряда соответствующего (24) два раза.

Построим для функции $\Theta(x)$, определенной согласно (30), синус-ряд Фурье

$$\Theta(s) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n \sin ns.$$

Так как этот ряд сходится в $L^2(0, \pi)$, то его можно проинтегрировать почленно по s в пределах от 0 до τ [3, с. 346], так что

$$\int_0^{\tau} \Theta(s)\, ds = b - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Theta_n}{n} \cos n\tau, \tag{51}$$

где константа b по аналогии с формулой (48) определяется в виде

$$b = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Theta_n}{n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x)\, \Theta(x)\, dx. \tag{52}$$

Функциональный ряд из (51) согласно оценкам (29) и (32) сходится равномерно по $\tau \in [0, \pi]$, а потому допустимо его почленное интегрирование. Тогда, интегрируя левую и правую части равенства (51) по τ в пределах от 0 до x, найдем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Theta_n}{n^2} \sin nx = p(x), \tag{53}$$

где функция

$$p(x) = bx - \int_0^x d\tau \int_0^{\tau} \Theta(s)\, ds. \tag{54}$$

Введенная таким образом функция $p(x)$ обладает следующими свойствами гладкости:

$$p(x) \in C_0^2[0, \pi], \tag{55}$$

$$p''(0) = p''(\pi) = 0. \tag{56}$$

Все они очевидны по определениям (30) и (54), за исключением, быть может, свойства $p(\pi) = 0$. Проверим последнее, используя операцию интегрирования по частям и выражение (52) для константы b:

$$p(\pi) = b\pi - \int_0^{\pi} d\tau \int_0^{\tau} \Theta(s)\, ds = b\pi + \int_0^{\tau} (\tau - s)\, \Theta(s)\, ds \Big|_0^{\pi} =$$

$$= b\pi + \int_0^{\pi} (\pi - \tau)\, \Theta(\tau)\, d\tau = 0.$$

Далее, сходящийся равномерно в R^1 функциональный ряд из левой части равенства (53) определяет на всей числовой оси нечетную 2π-периодическую непрерывную функцию, и потому формула (53) допускает естественное продолжение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Theta_n}{n^2} \sin nz = \tilde{p}(z) \qquad \forall z \in R^1. \tag{57}$$

Эта формула с учетом элементарного тригонометрического тождества

$$\sin \omega x \cos \omega t = \frac{1}{2} [\sin \omega(x + t) + \sin \omega(x - t)] \tag{58}$$

позволяет просуммировать функциональный ряд из (24) к явной функции, точнее

$$u_0(x, t) = \frac{1}{2} [\tilde{p}(x + t) + \tilde{p}(x - t)] \in C^2(\bar{Q}), \tag{59}$$

причем включение здесь является следствием свойства $\tilde{p}(z) \in C^2(R^1)$, вытекающего из соотношений (55) и (56).

3.6. Доказательство существования решения

Итак, согласно представлению (23) и доказанным включениям (34), (41), (44), (50) и (59) сумма $S(x, t)$ функционального ряда (13) при выполнении необходимых условий (7)—(9) разрешимости смешанной задачи (1)—(5) удовлетворяет условию гладкости (20). Теперь можно переходить к непосредственному доказательству достаточности условий теоремы 3.1. Так как задача (1)—(5) является частным случаем общей смешанной задачи (1.1)—(1.4), то естественно при доказательстве воспользоваться достаточными условиями разрешимости из теоремы 1.2, а точнее, из следствия 1.1 к ней.

Однако для применения теоремы 1.2 нужно прежде всего установить, что функциональный ряд (13) представляет собой не что иное, как формальное решение задачи (1.1)—(1.4) в виде ряда (1.24). Для этого в свою очередь необходимо показать, что коэффициенты ряда (1.24), соответствующего рассматриваемой здесь задаче, и ряда (13) с учетом поправки (14) перед одними и теми же нормированными собственными функциями $y_n(x)$ совпадают, т. е.

$$T_n(t) = \Phi_n \cos \omega_n t + \frac{\Psi_n}{\omega_n} \sin \omega_n t,$$

$$T_{n_0}(t) = \Phi_{n_0} + \Psi_{n_0} t,$$

где номер n_0 определяется условием $\omega_{n_0} = 0$. Справедливость этих равенств легко проверяется непосредственно путем решения задачи Коши (1.20), (1.21), которая в рассматриваемом случае имеет вид

$$T_n''(t) + \omega_n^2 T_n(t) = 0,$$

$$T_n(0) = \Phi_n, \qquad T_n'(0) = \Psi_n.$$

Тем самым доказано, что сумма $S(x, t)$ ряда (13) является формальным решением смешанной задачи (1)—(5). Покажем, что при выполнении условий (7)—(9) формальное решение $S(x, t)$ удовлетворяет условиям (1.26) и (1.34) существования искомого классического решения $u(x, t)$. Действительно, в соответствии с (3) граничные условия (1.26) имеют вид

$$S(0, t) = S(\pi, t) = 0.$$

Их выполнение следует из выражения формального решения $S(x, t)$ в виде ряда (13) и свойства (2.2) собственных функций $y_n(x)$. Что касается условия (1.34), его выполнение фактически уже установлено включением (20), так как $B(\bar{Q}) \equiv C^2(\bar{Q})$.

Таким образом, искомое решение $u(x, t) \equiv S(x, t)$ и заключительное утверждение о его представлении рядом (13) очевидно. Это завершает доказательство теоремы 3.1.

ГЛАВА 4

РАЗРЕШИМОСТЬ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В настоящей главе рассматривается обобщение смешанной задачи предыдущей главы на случай неоднородного гиперболического уравнения с правой частью. Основной результат здесь дается теоремой 4.1 о необходимых и достаточных условиях существования классического решения. Математический аппарат для обоснования метода Фурье в целом остается таким же, как и выше, однако используется только первая форма асимптотического выражения для нормированных собственных функций $y_n(x)$ оператора Штурма — Лиувилля, а уточненная асимптотическая формула его собственных значений ω_n^2 фактически не используется вообще. По-видимому, эти особенности делают многие из последующих выкладок более компактными.

4.1. Введение

Обобщим задачу (3.1)—(3.5) на случай, когда гиперболическое уравнение (3.1) имеет в правой части нетривиальную функцию $f(x, t)$. Общепринято [30, с. 202; 31, с. 406] сводить отыскание решения $u^{\text{н}}(x, t)$ такой неоднородной смешанной задачи к нахождению решения $u^o(x, t)$ однородной задачи (3.1)—(3.5) и решения $u(x, t)$ неоднородной смешанной задачи, но с нулевыми начальными данными $\varphi(x) \equiv \psi(x) \equiv 0$ и представлять искомое решение в виде суммы

$$u^{\text{н}}(x, t) = u^o(x, t) + u(x, t). \tag{1}$$

Однако в связи с тем, что основная цель настоящего исследования — найти необходимые и достаточные условия разрешимости неоднородной смешанной задачи, здесь нужно дать некоторые уточнения.

Дело в том, что представление (1) справедливо, если соответствующая однородная смешанная задача разрешима. По теореме 3.1 выполнение условий (3.7)—(3.9) достаточно для существования решения $u^0(x, t)$. Что можно сказать о необходимости этих условий в неоднородной смешанной задаче? Необходимость условий (3.7) и (3.8) очевидна в силу включения (3.5). К сожалению, при естественном предположении

$$f(x, t) \in C(\bar{Q}) \tag{2}$$

из условий согласованности неоднородной смешанной задачи следуют только соотношения

$$\varphi''(0) = f(0, 0), \qquad \varphi''(\pi) = f(\pi, 0).$$

Так как для нетривиальной функции $f(x, t)$ в общем случае

$$|f(0, 0)| + |f(\pi, 0)| > 0,$$

то условие (3.9) из постановки неоднородной задачи не следует и потому не является необходимым.

Таким образом, для сведения общей неоднородной смешанной задачи к отысканию решения $u^o(x, t)$ соответствующей однородной задачи и решения $u(x, t)$ редуцированной неоднородной задачи будем предполагать выполнение условия (3.9), но уже только как достаточного. Поскольку подробное исследование существования решения $u^o(x, t)$ дано в гл. 3, то согласно формуле (1) теперь остается изучить вопрос существования решения $u(x, t)$ редуцированной задачи, к постановке которой и переходим ниже.

4.2. Постановка задачи и основной результат

Рассмотрим неоднородное гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + q(x)\,u(x, t) = f(x, t) \tag{3}$$

с вещественным потенциалом

$$q(x) \in C[0, \pi] \tag{4}$$

относительно искомой функции $u(x, t)$, удовлетворяющей нулевым граничным и начальным условиям

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \qquad \forall \tau \in [0, T], \tag{5}$$

$$u(x, 0) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0 \qquad \forall x \in [0, \pi]. \tag{6}$$

Следуя [30, с. 202], поставим следующую смешанную задачу.

З а д а ч а. Найти функцию

$$u(x, t) \in C^2(\bar{Q}), \tag{7}$$

удовлетворяющую в обычном смысле уравнению (3) в открытом прямоугольнике Q, а также граничным (5) и начальным (6) условиям.

Как показано в П.4, к виду (3)—(7) может быть приведена и более общая смешанная задача.

Из постановки данной задачи непосредственно следует, что правая часть $f(x, t)$ уравнения (3) должна удовлетворять условию непрерывности (2) и

$$f(0, 0) = f(\pi, 0) = 0. \tag{8}$$

При этом необходимость условия (2) вытекает из равенства (3), а условия (8) – из предельного перехода в нем при $t \to 0$ и $x \to 0$ (или $x \to \pi$). Впоследствии будет доказана необходимость более сильного, чем (8), граничного условия на функцию $f(x, t)$, выполняющегося при любом $t \in [0, T]$.

Однако для существования решения смешанной задачи (3)—(7)

на функцию $f(x, t)$ нужно наложить дополнительные функциональные требования. Ниже будет доказана следующая основная теорема существования классического решения.

Т е о р е м а 4.1. Для разрешимости смешанной задачи (3)—(7) необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x, t)$ удовлетворяла условиям непрерывности (2) и гладкости интегралов

$$\varphi(x, t) = \int_0^t \tilde{f}(x + t - \tau, \tau)\, d\tau \in C^1(\bar{Q}), \tag{9}$$

$$p(x, t) = \int_0^t \tilde{f}(x - t + \tau, \tau)\, d\tau \in C^1(\bar{Q}). \tag{10}$$

При этом искомое решение $u(x, t)$ единственно и дается функциональным рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n(x)}{\omega_n} \int_0^t F_n(\tau) \sin \omega_n (t - \tau)\, d\tau. \tag{11}$$

Здесь $F_n(t)$ — определяемый в соответствии с формулой (1.14) коэффициент Фурье функции $f(x, t)$:

$$F_n(t) = \int_0^{\pi} f(x, t)\, y_n(x)\, dx. \tag{12}$$

З а м е ч а н и е. Если спектр краевой задачи Штурма — Лиувилля (2.1)—(2.3) содержит нулевое собственное значение $\omega_{n_0} = 0$, то член $u_{n_0}(x, t)$ ряда (11) при $n = n_0$ доопределяется в виде

$$u_{n_0}(x, t) = y_{n_0}(x) \int_0^t d\tau \int_0^{\tau} F_{n_0}(s)\, ds. \tag{13}$$

Как отмечено в замечании к п. 3.2, формальное игнорирование в последующем не более чем конечного числа членов (13) в ряде (11) не имеет значения, так как при доказательстве основных утверждений будут использоваться только асимптотические (при $n \to +\infty$) свойства этого ряда.

Предлагаемые теоремой 4.1 условия разрешимости (2), (9) и (10) существенно ослабляют известные [30, с. 203] достаточные условия

$$q(x) \in C^2[0, \pi], \qquad f(x, t) \in C^{2,0}(\bar{Q}),$$
$$f(0, t) = f(\pi, t) = 0 \qquad \forall t \in [0, T] \tag{14}$$

существования решения смешанной задачи (3)—(7). Определенный прогресс они дают даже в каноническом случае рассматриваемой задачи с тривиальным потенциалом $q(x) \equiv 0$. При этом из [22, с. 280] вытекают достаточные условия разрешимости (14) и

$$f(x, t) \in C^{1,0}(\bar{Q}). \tag{15}$$

4.3. О возможностях метода Дюамеля

Как известно [14, с. 105; 33, с. 57], для решения смешанной задачи (3)—(7) можно использовать метод Дюамеля, суть которого состоит в сведении неоднородной задачи к соответствующей однородной, но с дополнительным начальным условием на производную искомой функции по времени. Естествен вопрос, нельзя ли получить теорему 4.1 на основе метода Дюамеля. Однако, как будет показано ниже, его возможности ограничены. Метод Дюамеля в силу своих принципиальных особенностей может дать лишь достаточные условия разрешимости задачи (3)—(7), а не предельные (2), (9) и (10).

Итак, рассмотрим вспомогательную смешанную задачу с параметром $0 \le \tau \le T$ в замкнутом прямоугольнике $\overline{Q}$ для однородного гиперболического уравнения

$$\frac{\partial^2 w(x,t,\tau)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w(x,t,\tau)}{\partial x^2} + q(x)\, w(x,t,\tau) = 0 \tag{16}$$

с потенциалом (4), нулевыми граничными условиями

$$w(0,t,\tau) = w(\pi,t,\tau) = 0 \qquad \forall t \in [0,T] \tag{17}$$

и начальными данными

$$w(x,0,\tau) = 0, \qquad \frac{\partial w(x,0,\tau)}{\partial t} = f(x,\tau) \tag{18}$$

в классе функций $w(x,t,\tau) \in C^2(\overline{Q})$ (при фиксированном τ).

Данная задача при каждом $0 \le \tau \le T$ укладывается в постановку смешанной задачи (3.1)—(3.5), и потому для ее разрешимости в соответствии с теоремой 3.1 и включением (2) необходимо и достаточно выполнение условий (14) и (15). Покажем, что при этом решение неоднородной смешанной задачи (3)—(7) дается формулой

$$u(x,t) = \int_0^t w(x, t-s, s)\, ds. \tag{19}$$

Действительно, граничные условия (5) выполняются в силу (17):

$$u(0,t) = \int_0^t w(0, t-s, s)\, ds = 0,$$

$$u(\pi,t) = \int_0^t w(\pi, t-s, s)\, ds = 0.$$

Выполнение первого из начальных условий (6) также очевидно по определению (19).

Для корректности дальнейших выкладок нужно сделать дополнительное предположение относительно искомой функции $w(x,t,\tau)$, позволяющее дифференцировать по x и t интеграл (19). Предположим, что $w(x,t,\tau)$ и все ее частные производные до второго порядка включительно являются непрерывными функциями в $Q \times \Omega$. Вопрос о проверке этих требований непрерывности оставляем открытым, так как целью здесь является не строгое решение смешанной задачи (3)—(7) методом Дюамеля, а оценка его возможности с точки зрения получаемых условий ее разрешимости. По-видимому, выполнение сделанного предположения должно следовать из непрерывной зависимости решения вспомогательной смешанной задачи от начальных данных Коши.

Данное предположение позволяет использовать правило Лейбница [36, с. 665] для нахождения частных производных функции $u(x, t)$ из (19). В частности, оно гарантирует в соответствии с формулой (19) выполнение включения (7). Покажем теперь, что функция $u(x, t)$, определенная в виде (19), удовлетворяет также и уравнению (3). Для этого вначале найдем по правилу Лейбница с учетом (18) частные производные

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = w(x, 0, t) + \int_0^t \frac{\partial w(x, t-s, s)}{\partial t} ds = \int_0^t \frac{\partial w(x, t-s, s)}{\partial t} ds, \tag{20}$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = f(x, t) + \int_0^t \frac{\partial^2 w(x, t-s, s)}{\partial t^2} ds,$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \int_0^t \frac{\partial w(x, t-s, s)}{\partial x} ds,$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \int_0^t \frac{\partial^2 w(x, t-s, s)}{\partial x^2} ds.$$

Отсюда имеем

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + q(x) u(x, t) = f(x, t) +$$
$$+ \int_0^t \left[\frac{\partial^2 w(x, t-s, s)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w(x, t-s, s)}{\partial x^2} + q(x) w(x, t-s, s)\right] ds.$$

Так как $t - s \geq 0$, то в соответствии с уравнением (16) подынтегральная функция в правой части последнего равенства обращается в нуль тождественно по $s \in [0, t]$, откуда следует, что функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (3). Наконец, выполнение второго из начальных условий (6) прямо следует из (20).

Таким образом, полностью доказано, что искомое решение $u(x, t)$ представляется интегралом (19). Из процедуры доказательства ясно также, что с помощью метода Дюамеля нельзя получить условий разрешимости смешанной задачи (3)—(7) более мягких, чем (14) и (15). Последние, в свою очередь, являются более жесткими, чем условия разрешимости из теоремы 4.1. Такова цена за сведение исходной неоднородной задачи (3)—(7) к вспомогательной однородной смешанной задаче (4), (16)—(18).

4.4. Суммирование одного функционального ряда

В последующих структурных преобразованиях формального ряда (11) исключительную роль будут играть формула суммирования и оценка гладкости суммы функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n(t)}{\omega_n} \cos \omega_n x. \tag{21}$$

Прежде всего установим, что ряд (21) сходится равномерно в $\overline{Q}$. В самом деле, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |F_n(t)|^2 = \int_0^{\pi} |f(x, t)|^2 \, dx \tag{22}$$

сходится равномерно по $t \in [0, T]$ в силу теоремы Дини [20, с. 248], так как согласно полноте в $L^2(0, \pi)$ системы собственных функций $\{y_n(x)\}_1^{\infty}$ и равенству Парсеваля [1, с. 73] его сумма непрерывна по $t \in [0, T]$ в силу (2). Тогда из сходимости числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^{-2}$ [34, с. 168] и леммы П. 4 вытекает, что искомый ряд (21) сходится равномерно в $\overline{Q}$ и в силу непрерывности его членов имеет сумму

$$\sigma(x, t) \in C(\overline{Q}). \tag{23}$$

К сожалению, указанная лемма не дает конструктивного способа построения функции $\sigma(x, t)$, и потому ничего более о ней пока сказать нельзя. Не помогает здесь и почленное дифференцирование ряда (21), так как из примера Лебега [1, с. 133] видно, что формальный ряд из производных по x от членов искомого ряда расходится на достаточно богатом множестве точек из $\overline{Q}$. И тем не менее при любом $t \in [0, T]$ сумма $\sigma(x, t)$ является гладкой по $x \in [0, \pi]$ функцией.

Для доказательства этого и других функциональных свойств суммы $\sigma(x, t)$ ряд (21) будет явно просуммирован к некоторой функции, удовлетворяющей граничным условиям и обладающей свойствами гладкости. Другими словами, для функции $\sigma(x, t)$ будет найдено другое интегральное представление. С этой целью построим ряд Фурье функции

$$f(s, t) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) y_n(s) \tag{24}$$

по ортонормальной на $[0, \pi]$ системе функций $\{y_n(s)\}$. Сходимость последнего ряда в $L^2(G)$ при любом фиксированном $t \in [0, T]$ гарантируется в силу свойства (2). Это позволяет [3, с. 346] проинтегрировать его почленно по s в пределах от 0 до x, так что

$$\int_0^x f(s, t) \, ds = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \int_0^x y_n(s) \, ds, \tag{25}$$

причем ряд здесь уже сходится равномерно по $x \in [0, \pi]$ при каждом $t \in [0, T]$.

Для преобразования правой части равенства (25) используем асимптотическую оценку нормированной собственной функции

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \omega_n x + h(x, w_n), \tag{26}$$

$$h(x,\omega_n)=\frac{1}{\omega_n}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,[g(\omega_n,x)-v(\omega_n)\sin\omega_n x]+O(\omega_n^{-2})=O(\omega_n^{-1}), \quad (27)$$

вытекающую из (2.18), (2.44) и (2.46). Подставляя теперь $y_n(x)$ из (26) в выражение (25) и интегрируя непосредственно, находим

$$\int_0^x f(s,t)\,ds=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,[a(t)-\sigma(x,t)]+\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)\int_0^x h(s,\omega_n)\,ds, \quad (28)$$

где функция $a(t)$ определяется равномерно сходящимся по $t\in[0, T]$ рядом

$$a(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n(t)}{\omega_n}\in C[0, T]. \quad (29)$$

Далее, в силу оценки (27) последний ряд в правой части равенства (28) сходится равномерно в $\overline{Q}$ согласно равномерной в $\overline{H}$ сходимости ряда из (22) и лемме П.4. Более того, операция интегрирования в этом ряде может быть вынесена за знак суммы [36, с. 439], так как функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)\,h(x,\omega_n)=v(x,t)\in C(\bar{Q}) \quad (30)$$

с непрерывными членами сходится равномерно в $\overline{Q}$ согласно той же лемме. В результате выражение (28) перепишем в окончательном виде

$$\sigma(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n(t)}{\omega_n}\cos\omega_n x=a(t)-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^x\Phi(s,t)\,ds, \quad (31)$$

где в силу включений (2) и (30)

$$\Phi(x,t)=f(x,t)-v(x,t)\in C(\bar{Q}). \quad (32)$$

Кроме того, в соответствии с определением (26) и условиями $y_n(0)=0$ и (8) для введенных функций $\Phi(x,t)$ и $v(x,t)$ выполняются следующие граничные условия:

$$v(0,t)=0, \quad (33)$$

$$\Phi(0,0)=0. \quad (34)$$

Теперь гладкость по x функции $\sigma(x,t)$ очевидна, так как из представления (31) и в силу (32) имеем в результате дифференцирования интеграла по переменному верхнему пределу:

$$\frac{\partial\sigma(x,t)}{\partial x}=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\Phi(x,t)\in C(\bar{Q}). \quad (35)$$

Исследуем далее дифференциальные свойства функции $v(x,t)$. Покажем, что существует ее частная производная

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\in C(\bar{Q}). \quad (36)$$

Существование этой производной нельзя доказать с помощью почленного дифференцирования по x ряда из левой части равенства (30), так как продифференцированный ряд в общем случае расходится на некотором множестве точек из $\overline{Q}$ [1, с. 133]. Последнее легко видеть из соотношений (2.44) и (2.49) и асимптотической оценки первой производной нормированной собственной функции $y_n(x)$:

$$h'(x, \omega_n) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\,[g^\circ(\omega_n, x) - \nu(\omega_n)\cos\omega_n x] + O(\omega_n^{-1}) = O(1), \quad (37)$$

вытекающей из формул (26) и (2.50).

Для доказательства включения (36) представим функцию $\nu(x, t)$ из (30) с помощью тождественных преобразований и с учетом (31) в виде следующих двух составляющих:

$$\nu(x, t) = -\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\,T(x)\,\sigma(x, t) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)\left[h(x, \omega_n) + \frac{1}{\omega_n}\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\,T(x)\cos\omega_n x\right]. \quad (38)$$

Согласно принятой терминологии первая составляющая, как видно из (31), является сингулярной, однако она уже просуммирована к функции, имеющей в силу (35) непрерывную в $\overline{Q}$ частную производную по x. Вторая составляющая в виде последнего ряда из правой части равенства (38) является, как сейчас будет видно, регулярной, а значит, её можно дифференцировать почленно по x. Учитывая сказанное, а также формулы (31), (35) и оценку (37), запишем после элементарных преобразований формальное выражение искомой производной:

$$\frac{\partial \nu(x, t)}{\partial x} = T(x)\,\Phi(x, t) - \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)\,[\psi_1(\omega_n, x)\sin\omega_n x - \\ - \psi_2(\omega_n, x)\cos\omega_n x + \nu(\omega_n)\cos\omega_n x + O(\omega_n^{-1})]. \quad (39)$$

Справедливость этой формулы согласно [27, с. 40] будет установлена, если все ряды в ее правой части сходятся равномерно в $\overline{Q}$. Последнее гарантировано в силу равномерной сходимости рядов (2.70) и (2.71) в $\overline{G}$ и (22) в $\overline{H}$, оценки (2.44) и леммы П.4. Наконец, искомое утверждение (36) следует из теоремы [36, с. 433] о функциональных свойствах суммы и непрерывности в $\overline{Q}$ всех членов ряда (39).

В заключение формулу (31) суммирования функционального ряда (21) продолжим по x с отрезка $[0, \pi]$ на всю числовую ось. Так как ряд (21) при каждом $t \in [0, T]$ определяет в R^1 четную 2π-периодическую кусочно-непрерывную функцию переменной x, то для любого $z \in (-\infty, +\infty)$ искомое продолжение можно представить в виде

$$\hat{\sigma}(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n(t)}{\omega_n}\cos\omega_n z = a(t) - \sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\int_0^z \tilde{\Phi}(s, t)\,ds. \quad (40)$$

В самом деле, интеграл от нечетной 2π-периодической функции с переменным верхним пределом из правой части равенства (40) является четной 2π-периодической функцией.

Остается естественным образом распространить на всю числовую ось определения (30) и (32):

$$\widetilde{\Phi}(z,\,t)=\widetilde{f}(z,\,t)-\widetilde{v}(z,\,t), \tag{41}$$

$$\widetilde{v}(z,\,t)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)\,\widetilde{h}(z,\,\omega_n). \tag{42}$$

Исходя из граничных условий (8), (33) и (34), можно констатировать, что для всех $\kappa\in Z$

$$\widetilde{f}(\pi\kappa,\,0)=0, \tag{43}$$

$$\widetilde{v}(2\pi\kappa,\,t)=0, \tag{44}$$

$$\widetilde{\Phi}(2\pi\kappa,\,0)=0. \tag{45}$$

Отметим также, что функция $\widetilde{v}(z,\,t)$ в силу (30) и (44) может иметь разрывы только на прямых $z=(2\kappa+1)\pi$, а функции $\widetilde{f}(z,\,t)$ и $\Phi(z,\,t)$ в силу (2), (43) и (32), (45) – на прямых $z=\kappa\pi$. Причем все разрывы этих трех функций могут быть только первого рода.

4.5. Структурные преобразования формального ряда

Переходим к непосредственному преобразованию формального ряда (11), снова используя основную идею гл. 1.3 о выделении в нем структурных особенностей и представления соответствующих функциональных рядов в виде регулярной и сингулярной составляющих. Первая будет допускать двукратное почленное дифференцирование, а вторая – суммирование к функции с нужными дифференциальными свойствами.

К сожалению, по исходной структуре формального ряда (11) нельзя судить даже о его сходимости. В этой связи начнем с установления того факта, что операцию интегрирования в ряде (11) можно вынести за знак суммы. Для этого рассмотрим вспомогательный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n(x)}{\omega_n}F_n(\tau)\sin\omega_n(t-\tau), \tag{46}$$

сходящийся равномерно в $\overline{Q}\times\overline{\Omega}$ в силу оценок (2.37) и (26), равномерной в $\overline{H}$ сходимости ряда (22) и леммы П.4. Это означает, согласно теореме [3, с. 312] о почленном интегрировании функциональных рядов, что искомый ряд (11), во-первых, может быть получен из ряда (46) путем его почленного интегрирования по τ в пределах от 0 до t, во-вторых, он сходится равномерно в $\overline{Q}$.

Поэтому корректно обозначить сумму формального ряда (11) функцией

$$S(x,\,t)\in C(\overline{Q}), \tag{47}$$

а операцию интегрирования в нем вынести за знак суммы, так что

$$S(x, t)=\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n(x)}{\omega_n} F_n(\tau) \sin \omega_n (t-\tau)\, d\tau. \tag{48}$$

Покажем теперь, что сумма $S(x, t)$ формального ряда (11) представляет собой не что иное, как формальное решение смешанной задачи (3)—(7). Так как последняя полностью укладывается в постановку общей смешанной задачи (1.1)—(1.4), то для этого, в свою очередь, достаточно установить, что коэффициенты ряда (1.24), соответствующего рассматриваемой задаче, и ряда (11) с учетом поправки (13) перед одними и теми же собственными функциями $y_n(x)$ совпадают, т. е.

$$T_n(t) = \frac{1}{\omega_n}\int_0^t F_n(\tau) \sin \omega_n (t-\tau)\, d\tau,$$

$$T_{n_0}(t) = \int_0^t d\tau \int_0^\tau F_{n_0}(s)\, ds,$$

где номер n_0 определяется условием $\omega_{n_0} = 0$. Справедливость этих соотношений легко проверяется непосредственно путем решения задачи Коши (1.20), (1.21), которая в рассматриваемом случае записывается в виде

$$T_n''(t) + \omega_n^2 T_n(t) = F_n(t),$$

$$T_n(0) = T_n'(0) = 0.$$

Но оказывается, что формальное решение $S(x, t)$ в виде ряда (11) или (48) обладает более сильными, чем (47), дифференциальными свойствами. Во всяком случае, при выполнении только условия (2)

$$S(x, t) \in C^1(\bar{Q}). \tag{49}$$

Чтобы доказать это и другие свойства гладкости функции $S(x, t)$ или ее составляющих, выполним над рядом (48) тождественные преобразования, подставляя в него $y_n(x)$ из (26) и используя тригонометрическое соотношение (3.49), формулу суммы ряда (40) и определение (41):

$$S(x, t) = \sum_{i=1}^{3} S_i(x, t), \tag{50}$$

$$S_1(x, t) = \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}(s, \tau)\, ds, \tag{51}$$

$$S_2(x, t) = -\frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{v}(s, \tau)\, ds, \tag{52}$$

$$S_3(x, t) = \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n(\tau)}{\omega_n} h(x, \omega_n) \sin \omega_n (t-\tau)\, d\tau. \tag{53}$$

Корректность представления (50) и обозначения данных интегралов соответствующими функциями очевидна, так как функции $\tilde{f}(s, \tau)$ и $\tilde{v}(s, \tau)$ интегрируемы в указанных пределах, а подынтегральный ряд из (53) в силу оценки (27) и леммы П.4 сходится равномерно в $\bar{Q} \times \bar{\Omega}$. Представленная структура формального ряда (48) в виде (50)—(53) позволяет максимально продвинуть решение вопроса о гладкости его составляющих $S_i(x, t)$.

4.6. Гладкость формального решения

При доказательстве дифференцируемости функций $S_1(x, t)$ и $S_2(x, t)$ будут использованы леммы П.5 — П.7, а гладкость второго порядка $S_3(x, t)$ будет получена с помощью двукратного почленного дифференцирования регулярной составляющей, выделенной из ряда (53).

Гладкость $S_3(x, t)$. Прежде всего отметим, что функциональный ряд под интегралом в (53) в силу оценок (2.37) и (27) и леммы П.4 сходится равномерно в $\bar{Q} \times \bar{\Omega}$ к некоторой непрерывной функции. Тогда согласно теореме [27, с. 293] о непрерывности интеграла по параметру функция

$$S_3(x, t) \in C(\bar{Q}). \tag{54}$$

Более того, обе ее частные производные по x и t могут быть найдены по правилу Лейбница [36, с. 671] дифференцирования интеграла по параметру. Действительно, их формальные выражения, полученные с использованием операций почленного дифференцирования, имеют вид

$$\frac{\partial S_3(x, t)}{\partial t} = \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} F_n(\tau)\, h(x, \omega_n) \cos \omega_n (t-\tau)\, d\tau, \tag{55}$$

$$\frac{\partial S_3(x, t)}{\partial x} = \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n(\tau)}{\omega_n} h'(x, \omega_n) \sin \omega_n (t-\tau)\, d\tau. \tag{56}$$

Для справедливости этих формул достаточно показать, что функциональные ряды под интегралами в (55) и (56) сходятся равномерно в $\bar{Q} \times \bar{\Omega}$. Последнее вытекает из оценок (2.37), (27) и (37), равномерной сходимости ряда (22) и леммы П.4. Из непрерывности интегралов (55) и (56) по параметрам x и t следуют также включения

$$\frac{\partial S_3(x, t)}{\partial x}, \quad \frac{\partial S_3(x, t)}{\partial t} \in C(\bar{Q}). \tag{57}$$

Существование вторых частных производных функции $S_3(x, t)$ нельзя доказать прямо с помощью почленного дифференцирования по t и x рядов из (55) и (56), поскольку формально продифференцированные ряды, как видно из примера Лебега [1, с. 133], в общем случае расходятся на достаточно "богатом" множестве точек в $\bar{Q} \times \bar{\Omega}$. Поэтому предварительно преобразуем функциональные ряды из (55) и (56), опять выделяя в них регулярную составляющую.

Начнем с существования частной производной $\frac{\partial^2 S_3(x, t)}{\partial t^2}$. Для этого преобразуем тождественно ряд из (55) к виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n(\tau) h(x, \omega_n) \cos \omega_n (t-\tau) =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} T(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{\omega_n} \cos \omega_n x \cos \omega_n (t-\tau) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} F_n(\tau) \cos \omega_n (t-\tau) \left[h(x, \omega_n) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} T(x) \frac{\cos \omega_n x}{\omega_n} \right]. \qquad (58)$$

Первый ряд в правой части данного равенства с учетом тригонометрического соотношения

$$\cos \omega x \cos \omega t = \frac{1}{2} [\cos \omega(x+t) + \cos \omega(x-t)] \qquad (59)$$

и формулы (40) суммируется в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n(\tau)}{\omega_n} \cos \omega_n x \cos \omega_n (t-\tau) =$$

$$= a(\tau) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{x+t-\tau} \tilde{\Phi}(s, \tau)\, ds + \int_0^{x-t+\tau} \tilde{\Phi}(s, \tau)\, ds \right], \qquad (60)$$

а второй представляет собой согласно оценке (27) и лемме П.4 непрерывную в $\bar{Q} \times \bar{\Omega}$ функцию.

Тогда, комбинируя соотношения (55), (58) и (60) и имея в виду, что функция $\Phi(z, \tau)$ кусочно по z непрерывна на $(a, b) \times \bar{\Omega}$ в смысле определения из П.2, находим с помощью правила Лейбница, утверждения 3 леммы П.5, почленного дифференцирования рядов и оценок (27) и (37) формальное выражение искомой производной

$$\frac{\partial^2 S_3(x, t)}{\partial t^2} = T(x) \Big\{ -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, a(t) + \int_0^x \Phi(s, t)\, ds +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^t [\tilde{\Phi}(x+t-\tau, \tau) - \tilde{\Phi}(x-t+\tau, \tau)]\, dt \Big\} + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)\, O(\omega_n^{-1}) -$$

$$- \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} F_n(\tau) \sin \omega_n (t-\tau) [\psi_1(\omega_n, x) \cos \omega_n x +$$

$$+ \psi_2(\omega_n, x) \sin \omega_n x - \nu(\omega_n) \sin \omega_n x + O(\omega_n^{-1})]\, d\tau. \qquad (61)$$

Так как функция в фигурных скобках правой части этого равенства в силу включения (29), интегрируемости $\Phi(s, t)$ и утверждения 1 леммы П.5 непрерывна в $\bar{Q}$, то справедливость формулы (61) будет установлена, если показать равномерную сходимость обоих рядов в ней в $\bar{Q}$ и $\bar{Q} \times \bar{\Omega}$ соответственно. Но первый из указанных рядов обладает этим свойством согласно равномерной сходимости ряда (22) и леммы П.4, а равномерная в $\bar{Q} \times \bar{\Omega}$ сходимость второго вытекает из той же леммы при дополнительном учете равномерной сходимости рядов (2.70) и (2.71) и оценки (2.44). Имея в виду также непрерывность последнего интеграла по параметрам x и t [27, с. 293], делаем вывод о непрерывности в $\overline{Q}$ всей правой части равенства (61), так что

$$\frac{\partial^2 S_3(x, t)}{\partial t^2} \in C(\overline{Q}). \tag{62}$$

Далее, покажем существование непрерывной в $\overline{Q}$ смешанной производной $\dfrac{\partial^2 S_3(x, t)}{\partial t\, \partial x}$. Ее формальное выражение может быть получено из комбинации соотношений (55), (58) и (60) с помощью правила Лейбница, утверждения 2 леммы П.5 и операций почленного дифференцирования функционального ряда с учетом формулы (37):

$$\frac{\partial^2 S_3(x, t)}{\partial t\, \partial x} = \frac{T(x)}{2} \int_0^t [\,\widetilde{\Phi}(x + t - \tau, \tau) + \widetilde{\Phi}(x - t + \tau, \tau)\,]\, d\tau -$$

$$- \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} F_n(\tau) \cos \omega_n (t - \tau)\, [\,\psi_1(\omega_n, x) \sin \omega_n x -$$

$$- \psi_2(\omega_n, x) \cos \omega_n x + \nu(\omega_n) \cos \omega_n x + O(\omega_n^{-1})\,]\, d\tau. \tag{63}$$

Первый интеграл в правой части этого равенства непрерывен в $\overline{Q}$ по утверждению 1 леммы П.5, значит, для справедливости формулы (63) достаточно убедиться в равномерной в $\overline{Q} \times \overline{\Omega}$ сходимости функционального ряда под знаком второго интеграла. Но последняя вытекает из леммы П.4, если иметь в виду равномерную сходимость рядов (22), (2.70) и (2.71) и оценку (2.44). Тогда второй интеграл из правой части равенства (63) также непрерывен в $\overline{Q}$. Отсюда в силу включений (57) и теоремы [27, с. 176] о равенстве смешанных производных, взятых в различном порядке, имеем

$$\frac{\partial^2 S_3(x, t)}{\partial t\, \partial x} = \frac{\partial^2 S_3(x, t)}{\partial x\, \partial t} \in C(\overline{Q}). \tag{64}$$

Исследуем теперь вопрос о существовании второй частной производной $\dfrac{\partial^2 S_3(x, t)}{\partial x^2}$. Для этого тождественно преобразуем ряд под интегралом в (56) к виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n(\tau)}{\omega_n} h'(x, \omega_n) \sin \omega_n (t - \tau) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, T(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n(\tau)}{\omega_n} \sin \omega_n x \sin \omega_n (t - \tau) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n(\tau)}{\omega_n} \sin \omega_n (t - \tau)\, [h'(x, \omega_n) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, T(x) \sin \omega_n x\,]. \tag{65}$$

Первый ряд в правой части этого равенства с помощью формул (40) и (3.49) суммируется в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n(\tau)}{\omega_n}\sin\omega_n x\sin\omega_n(t-\tau)=$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{x+t-\tau}\widetilde{\Phi}(s,\tau)\,ds-\int_0^{x-t+\tau}\widetilde{\Phi}(s,\tau)\,ds\right],\qquad(66)$$

а второй представляет собой согласно оценке (37) и лемме П.4 непрерывную в $\bar{Q}\times\bar{\Omega}$ функцию.

Так как функция $\Phi(z,\tau)$ кусочно по z непрерывна на $(a,b)\times\bar{\Omega}$, то, комбинируя соотношения (56), (65) и (66) и учитывая вытекающую из (26) и (2.53) оценку второй производной собственной функции

$$h''(x,\omega_n)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega_n\,[g(\omega_n,x)-\nu(\omega_n)\sin\omega_n x]+O(1),$$

запишем с помощью утверждения 2 леммы П.5 и почленного дифференцирования функционального ряда формальное выражение искомой частной производной

$$\frac{\partial^2 S_3(x,t)}{\partial x^2}=\frac{T(x)}{2}\int_0^t[\widetilde{\Phi}(x+t-\tau,\tau)-\widetilde{\Phi}(x-t+\tau,\tau)]\,d\tau-$$
$$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}F_n(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)\,[\psi_1(\omega_n,x)\cos\omega_n x+$$
$$+\psi_2(\omega_n,x)\sin\omega_n x-\nu(\omega_n)\sin\omega_n x+O(\omega_n^{-1})]\,d\tau.\qquad(67)$$

Справедливость данной формулы прямо следует из сравнения правых частей равенств (61) и (67), так что по аналогии с включением (62) получаем

$$\frac{\partial^2 S_3(x,t)}{\partial x^2}\in C(\bar{Q}).\qquad(68)$$

Наконец, объединение включений (54), (57), (62), (64) и (68) приводит к окончательному утверждению

$$S_3(x,t)\in C^2(\bar{Q}).\qquad(69)$$

Гладкость $S_2(x,t)$. Прежде всего подчеркнем еще раз, что в силу интегрируемости функции $\widetilde{\nu}(z,\tau)$ по обоим аргументам [36, с. 115] и в соответствии с представлением (52)

$$S_2(x,t)\in C(\bar{Q}).\qquad(70)$$

Кроме того, в силу включения (30) функция $\widetilde{\nu}(z,\tau)$ удовлетворяет условиям леммы П.5, согласно утверждениям 2 и 3 которой получаются искомые частные производные:

$$\frac{\partial S_2(x,t)}{\partial x}=\frac{1}{2}\int_0^t[\widetilde{\nu}(x-t+\tau,\tau)-\widetilde{\nu}(x+t-\tau,\tau)]\,d\tau\in C(\bar{Q}),\qquad(71)$$

$$\frac{\partial S_2(x,t)}{\partial t}=-\frac{1}{2}\int_0^t[\widetilde{\nu}(x-t+\tau,\tau)+\widetilde{\nu}(x+t-\tau,\tau)]\,d\tau\in C(\bar{Q}).\qquad(72)$$

Оба включения здесь вытекают из утверждения 1 той же леммы.

Оказывается, что функция $\nu(z, \tau)$ удовлетворяет и условиям леммы П.7, так как в силу включения (36) ее производная $\frac{\partial\widetilde{\nu}(z, \tau)}{\partial z}$ кусочно по z непрерывна на $(a, b)\times\bar{\Omega}$ в смысле определения из П.2. Тогда, применяя к правой части равенства (71) утверждения 1 и 2 указанной леммы, находим

$$\frac{\partial^2 S_2(x, t)}{\partial x^2}\in C(\bar{Q}). \tag{73}$$

Аналогично, дифференцируя по x правую часть формулы (72) и используя цитированную уже теорему о равенстве смешанных производных, с учетом включений (71) и (72) получаем

$$\frac{\partial^2 S_2(x, t)}{\partial t\,\partial x}=\frac{\partial^2 S_2(x, t)}{\partial x\,\partial t}\in C(\bar{Q}). \tag{74}$$

Сложнее доказывается существование непрерывной в $\bar{Q}$ второй частной производной $\frac{\partial^2 S_2(x, t)}{\partial t^2}$. Для этого заметим, что все интегралы из правых частей равенств (71) и (72) по утверждению 1 леммы П.5 и утверждениям 1 и 2 леммы П.7 являются функциями класса $C^{1,0}(\bar{Q})$. Тогда по лемме П.6 указанные интегралы имеют правосторонние

$$\frac{\partial^+}{\partial t}\int_0^t\widetilde{\nu}(x-t+\tau, \tau)\,d\tau=\widetilde{\nu}(x-0, t)-\frac{\partial}{\partial x}\int_0^t\widetilde{\nu}(x-t+\tau, \tau)\,d\tau,$$

$$\frac{\partial^+}{\partial t}\int_0^t\widetilde{\nu}(x+t-\tau, \tau)\,d\tau=\widetilde{\nu}(x+0, t)+\frac{\partial}{\partial x}\int_0^t\widetilde{\nu}(x+t-\tau, \tau)\,d\tau$$

и левосторонние

$$\frac{\partial^-}{\partial t}\int_0^t\widetilde{\nu}(x-t+\tau, \tau)\,d\tau=\widetilde{\nu}(x+0, t)-\frac{\partial}{\partial x}\int_0^t\widetilde{\nu}(x-t+\tau, \tau)\,d\tau,$$

$$\frac{\partial^-}{\partial t}\int_0^t\widetilde{\nu}(x+t-\tau, \tau)\,d\tau=\widetilde{\nu}(x-0, t)+\frac{\partial}{\partial x}\int_0^t\widetilde{\nu}(x+t-\tau, \tau)\,d\tau$$

частные производные.

Комбинируя эти соотношения и формулы (71) и (72) и имея в виду факт существования частной производной (73), находим

$$\frac{\partial^2 S_2(x, t+0)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 S_2(x, t-0)}{\partial t^2}=$$

$$=-\frac{1}{2}[\widetilde{\nu}(x+0, t)+\widetilde{\nu}(x-0, t)]+\frac{\partial^2 S_2(x, t)}{\partial x^2}. \tag{75}$$

Но из равенства данных односторонних производных при любом $x\in[0, \pi]$ уже следует существование искомой частной производной $\frac{\partial^2 S_2(x, t)}{\partial t^2}$, и остается лишь показать ее непрерывность в $\bar{Q}$.

Очевидно, сумма односторонних пределов в квадратных скобках правой части равенства (75) непрерывна по совокупности переменных x и t в тех точках из $\bar{Q}$, где непрерывна сама функция $\tilde{v}(z, t)$. В соответствии с (30) и (44) указанная сумма может терпеть разрыв в $\bar{Q}$ только на прямой $x=\pi$, т. е. в силу (75) имеем

$$\frac{\partial^2 S_2(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 S_2(x, t)}{\partial x^2} - v(x, t) \qquad \forall (x, t) \in G' \times \bar{H}. \tag{76}$$

Так как согласно (30) и (73) оба слагаемых из правой части этого равенства непрерывны в $\bar{Q}$, то, следуя определению [16, с. 32] непрерывных частных производных на замыкании, корректно распространить определение (76) искомой производной и на весь прямоугольник $\bar{Q}$, так что

$$\frac{\partial^2 S_2(x, t)}{\partial t^2} \in C(\bar{Q}). \tag{77}$$

Резюмируя включение (70)—(74) и (77), приходим к окончательному утверждению

$$S_2(x, t) \in C^2(\bar{Q}). \tag{78}$$

Гладкость $S_1(x, t)$. В отличие от исследованных выше составляющих суммы (50) гладкость второго порядка искомой функции установить при выполнении только условий (2) и (8) уже не удается. Поэтому здесь ограничимся доказательством непрерывной в $\bar{Q}$ дифференцируемости функции $S_1(x, t)$.

Напомним, что из определения (51) и интегрируемости функции $\tilde{f}(z, \tau)$ по обоим аргументам вытекает

$$S_1(x, t) \in C(\bar{Q}). \tag{79}$$

Но в силу (2) $\tilde{f}(z, \tau)$ удовлетворяет также и условиям леммы П.5, согласно утверждениям которой частные производные искомой функции непрерывны в $\bar{Q}$ и с учетом обозначений (9) и (10) определяются в виде

$$\frac{\partial S_1(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{2}[\varphi(x, t) - p(x, t)] \in C(\bar{Q}), \tag{80}$$

$$\frac{\partial S_1(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2}[\varphi(x, t) + p(x, t)] \in C(\bar{Q}). \tag{81}$$

Таким образом, включения (79)--(81) позволяют утверждать, что выполнение только условия (2) влечет

$$S_1(x, t) \in C^1(\bar{Q}). \tag{82}$$

Очевидно, дальнейшее усиление дифференциальных свойств функции $S_1(x, t)$ возможно лишь при введении более жестких, чем (2) и (8), требований к функции $f(x, t)$.

З а м е ч а н и е. Легко видеть, что при выводе основных соотношений (69), (78) и (82) существенную роль играло только условие (2), а граничное условие (8), несмотря на его необходимость, вообще могло быть отпущено. В частности, это сохраняет используемое свойство кусочной непрерывности по z на $(a, b) \times \tilde{\Omega}$ функций $\tilde{f}(z, \tau)$, $\tilde{v}(z, \tau)$ и $\Phi(z, \tau)$. Что же касается формулы (76), то для перехода к (77) достаточно ее справедливости только при $(x, t) \in G \times \bar{H}$.

4.7. Доказательство теоремы существования решения

Поскольку задача (3)—(7) является частным случаем общей смешанной задачи (1.1)—(1.4), то при доказательстве основной теоремы 4.1 будем использовать теорему существования 1.2. Точнее, согласно следствию 1.1 к ней для существования решения смешанной задачи (3)—(7) необходимо и достаточно, чтобы ее формальное решение $S(x, t)$ в виде функционального ряда (11) удовлетворяло условиям (1.26) и (1.34) или в данном случае

$$S(0, t) = S(\pi, t) = 0, \tag{83}$$

$$S(x, t) \in C^2(\bar{Q}). \tag{84}$$

Необходимость. Пусть решение $u(x, t)$ смешанной задачи (3)—(7) существует. Необходимость условия (2) уже отмечалась в п. 4.2. Покажем необходимость условий (9) и (10). Из условия (84) гладкости формального решения $S(x, t)$, представленного суммой (50), и установленных выше включений (69) и (78) вытекает необходимость условия

$$S_1(x, t) \in C^2(\bar{Q}). \tag{85}$$

По определению функций данного класса все частные производные второго порядка функции $S(x, t)$ должны быть непрерывны в $\bar{Q}$, т. е.

$$\frac{\partial^2 S_1(x, t)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 S_1(x, t)}{\partial t\, \partial x} = \frac{\partial^2 S_1(x, t)}{\partial x\, \partial t}, \quad \frac{\partial^2 S_1(x, t)}{\partial t^2} \in C(\bar{Q}). \tag{86}$$

Далее, в силу кусочной по z непрерывности на $(a, b) \times \bar{\Omega}$ функции $\tilde{f}(z, \tau)$ и утверждения 1 леммы П. 5 имеют место включения

$$\varphi(x, t), \quad p(x, t) \in C(\bar{Q}). \tag{87}$$

Но из включений (86) следует, что полусумма и полуразность правых частей равенств (80) и (81) должны быть непрерывно в $\bar{Q}$ дифференцируемы по x и t, а это приводит к необходимости следующих включений:

$$\frac{\partial\varphi(x, t)}{\partial x}, \quad \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \in C(\bar{Q}), \tag{88}$$

$$\frac{\partial\varphi(x, t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} \in C(\bar{Q}). \tag{89}$$

Наконец, объединяя включения (87)—(89), приходим к необходимости условий (9) и (10), что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть условия (2), (9) и (10) выполняются. Покажем, что отсюда будут вытекать условия (83) и (84), достаточные для разрешимости смешанной задачи (3)—(7). В самом деле, из выражений (80) и (81) следуют все включения (86), что вместе с (79) и (82) приводит к включению (85). Объединяя последнее с (69) и (78), приходим к одному из искомых утверждений (84). Выполнение граничного условия (83) непосредственно вытекает из представления формального решения $S(x, t)$ рядом (11) и свойства (2.2) собственных функций $y_n(x)$.

Тем самым доказано существование классического решения смешанной задачи (3)—(7). Заключительное утверждение о единственности искомого решения $u(x, t)$ и его представлении функциональным рядом (11) прямо следует из теоремы 1.1. Этим завершается доказательство теоремы 4.1.

4.8. Необходимые граничные условия на правую часть уравнения

Возникает естественный вопрос, почему необходимое для разрешимости смешанной задачи (3)—(7) граничное условие (8) формально не фигурирует в доказательстве основной теоремы существования 4.1. Ответ на этот вопрос следует искать в том, что требование (8) неявно содержится в условиях теоремы 4.1. Такой ход рассуждений позволяет вывести из указанной теоремы и более сильные, чем (8), граничные условия на функцию $f(x, t)$. Докажем следующее утверждение.

Лемма 4.1. Если функция $f(x, t)$ удовлетворяет условию (2) и хотя бы одному из включений (9) или (10), то для нее тождественно по t выполняются граничные условия (14).

В самом деле, пусть без ограничения общности выполняется пара условий (2) и (9). Отсюда следует, что функция $\tilde{f}(z, \tau)$ удовлетворяет условиям леммы П.6, по утверждению 1 которой

$$\frac{\partial\varphi(x, t+0)}{\partial t} = \tilde{f}(x+0, t) + \frac{\partial\varphi(x, t)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\varphi(x, t-0)}{\partial t} = \tilde{f}(x-0, t) + \frac{\partial\varphi(x, t)}{\partial x}.$$

Кроме того, в силу (9) частная производная $\frac{\partial\varphi(x, t)}{\partial x}$ существует всюду в $\overline{Q}$, а значит, при любом $t \in (0, T)$ односторонние производные в левых частях двух последних равенств равны между собой, откуда

$$\tilde{f}(x-0, t) = \tilde{f}(x+0, t) \qquad t \in (0, T). \tag{90}$$

Само по себе данное условие при $x \in (0, \pi)$ не несет никакой новой информации, так как непрерывность функции $f(x, t)$ по x уже известна из (2). Однако при $x = 0$ и $x = \pi$ отсюда можно получить искомый результат. Действительно, в силу (2) и (90) имеем в концевых точках отрезка $x \in [0, \pi]$:

$$\left.\begin{cases} \tilde{f}(-0, t) = f(0, t) \\ f(\pi, t) = \tilde{f}(\pi + 0, t) \end{cases}\right\} \quad \forall t \in (0, T).$$

Первое из этих соотношений с учетом нечетности и 2π-периодичности по z функции $\tilde{f}(z, \tau)$ дает

$$f(0, t) = \tilde{f}(-0, t) = -\tilde{f}(+0, t) = -f(0, t) = 0,$$

а второе —

$$f(\pi, t) = \tilde{f}(\pi + 0, t) = -\tilde{f}(-\pi - 0, t) = -f(\pi - 0, t) = -f(\pi, t) = 0.$$

Тем самым установлено, что

$$f(0, t) = f(\pi, t) = 0 \qquad \forall t \in (0, T).$$

Так как в силу (2) обе функции $f(0, t)$ и $f(\pi, t)$ переменной t непрерывны на отрезке $[0, T]$, из последнего соотношения вытекает искомое утверждение (14) леммы 4.1.

Установленное граничное условие (14) функции $f(x, t)$ вместе со свойством ее непрерывности (2) позволяет сделать полезные выводы относительно продолженной функции $\tilde{f}(z, \tau)$. Во-первых,

$$\tilde{f}(z, \tau) \in C(R^1 \times \bar{\Omega}). \tag{91}$$

Во-вторых, теперь условиям (9) и (10) можно придать другую эквивалентную форму, которая может оказаться полезной при решении вопроса о применимости теоремы 4.1.

4.9. Эквивалентная форма основной теоремы существования

Т е о р е м а 4.2. Для разрешимости смешанной задачи (3)—(7) необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x, t)$ удовлетворяла условиям (2) и (14), а каждый из ее интегралов $\varphi(x, t)$ и $p(x, t)$, определяемых согласно (9) и (10), принадлежал хотя бы одному из классов $C^{1,0}(\bar{Q})$ или $C^{0,1}(\bar{Q})$.

Необходимость условий данной теоремы очевидна в силу теоремы 4.1 и вытекающих из последней граничных условий (14). Доказательство достаточности из-за идентичности выкладок проведем лишь для функции $\varphi(x, t)$. Пусть выполняются условия (2), (14) и

$$\varphi(x, t) \in C^{1,0}(\bar{Q}). \tag{92}$$

Тогда из леммы П. 6 с учетом (91) получаем

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = f(x, t) + \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} \in C(\bar{Q}),$$

что вместе с (92) дает искомое утверждение (9).

Пусть теперь

$$\varphi(x, t) \in C^{0,1}(\bar{Q}). \tag{93}$$

Для доказательства существования непрерывной в $\bar{Q}$ частной производной $\frac{\partial\varphi(x, t)}{\partial x}$ воспользуемся ее непосредственным определением. С этой целью преобразуем выражение функции $\varphi(x, t)$ из (9) с помощью замены переменной $\tau = x + t - y$:

$$\varphi(x, t) = \int_0^t \tilde{f}(x + t - \tau, \tau)\, d\tau = \int_x^{x+t} \tilde{f}(y, x + t - y)\, dy \tag{94}$$

и найдем отношение приращений

$$\frac{\varphi(x + h, t) - \varphi(x, t)}{h} = \frac{1}{h}\int_{x+h}^{x+t+h} \tilde{f}(y, x + t + h - y)\, dy -$$

$$- \frac{1}{h}\int_x^{x+t} \tilde{f}(y, x + t - y)\, dy = \frac{1}{h}\int_x^{x+t+h} \tilde{f}(y, x + t + h - y)\, dy -$$

$$- \frac{1}{h}\int_x^{x+t} \tilde{f}(y, x + t - y)\, dy - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \tilde{f}(y, x + t + h - y)\, dy =$$

$$= \frac{\varphi(x, t + h) - \varphi(x, t)}{h} - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \tilde{f}(y, x + t + h - y)\, dy. \tag{95}$$

Предел первого слагаемого из правой части последнего равенства при $h \to 0$ есть согласно предположению (93) частная производная $\frac{\partial\varphi(x, t)}{\partial x}$, а предел второго существует в силу (91) и теоремы о среднем значении [36, с. 113]. В результате предельного перехода при $h \to 0$ в соотношении (95) получим

$$\frac{\partial\varphi(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial\varphi(x, t)}{\partial t} - f(x, t) \in C(\bar{Q}),$$

откуда при учете (93) следует искомое включение (9).

Тем самым теорема 4.2 доказана. В сравнении с основной теоремой существования 4.1 она позволяет упростить процедуру проверки условий разрешимости смешанной задачи (3)—(7). Действительно, вместо проверки всех четырех включений (88) и (89), обусловленных теоремой 4.1, достаточно согласно теореме 4.2 убедиться в справедливости только двух из них — по одному на каждую из функций $\varphi(x, t)$ и $p(x, t)$, добавив легко проверяемые граничные условия (14).

4.10. Некоторые достаточные условия разрешимости задачи

В заключение для смешанной задачи (3)—(7) предложим два типа достаточных условий разрешимости, более жестких, чем (2), (9) и (10), зато выраженных в более привычных терминах по сравнению с (9) и (10).

С л е д с т в и е 4.1. Решение $u(x, t)$ смешанной задачи (3)—(7) существует, если функция $f(x, t)$ удовлетворяет условиям (14) и (15).

Доказательство основывается на выводе условий теоремы 4.1 из данного следствия. В самом деле, свойство гладкости (15) подразумевает включение (2), которое с учетом (14) приводит к (91). Кроме того, из (15) следует, что частная производная $\frac{\partial\tilde{f}(z, \tau)}{\partial z}$ кусочно по z непрерывна на $(a, b) \times \bar{\Omega}$, т. е. в рассматриваемом случае функция $\tilde{f}(z, \tau)$ удовлетворяет условиям лемм П.5 и П.7, согласно которым имеют место все три пары включений (87)—(89), что равносильно выполнению условий (9) и (10).

Следствие 4.2. Решение $u(x, t)$ смешанной задачи (3)—(7) существует, если функция $f(x, t)$ удовлетворяет условиям (14) и

$$f(x, t) \in C^{0,1}(\bar{Q}). \tag{96}$$

Для доказательства, как и выше, покажем эквивалентность условий данного следствия и теоремы 4.2. Включение (96) содержит (2), что в силу (14) и утверждения 1 леммы П.5 приводит к включениям (87) и (91). Что касается пары условий (89), их вывод будет основан на свойстве нечетности функции $\tilde{f}(z, t)$. Действительно, частная производная по t продолженной функции $\tilde{f}(z, t)$ обладает очевидным свойством

$$\frac{\partial \tilde{f}(-x, t)}{\partial t} = \lim_{h \to 0} \frac{\tilde{f}(-x, t+h) - \tilde{f}(-x, t)}{h} = -\frac{\partial \tilde{f}(x, t)}{\partial t}, \tag{97}$$

т. е. $\frac{\partial \tilde{f}(z, t)}{\partial t}$ является нечетной 2π-периодической функцией по переменной z. Кроме того, в силу (14)

$$\frac{\partial f(0, t)}{\partial t} = \frac{\partial f(\pi, t)}{\partial t} = 0 \qquad \forall t \in [0, T].$$

Объединяя эти граничные условия и соотношения (96) и (97), приходим к утверждению

$$\frac{\partial \tilde{f}(z, \tau)}{\partial \tau} \in C^1(R^1 \times \bar{\Omega}). \tag{98}$$

Теперь легко показать, что существует непрерывная в $\bar{Q}$ частная производная $\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t}$. Для этого продифференцируем по параметру t интеграл из правой части последнего равенства в (94), используя правило Лейбница [36, с. 671] с учетом (98):

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = \tilde{f}(x+t, 0) + \int_x^{x+t} \frac{\partial \tilde{f}(y, x+t-y)}{\partial \tau} dy \in C(\bar{Q}). \tag{99}$$

При этом включение здесь следует из свойств (91) и (98).

Совершенно аналогично можно показать, что существует частная производная $\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} \in C(\bar{Q})$. Это означает вместе с (99), что выполняются оба включения (89). Объединение их с (87) эквивалентно выполнению условий теоремы 4.2, что и завершает доказательство.

ГЛАВА 5

РАЗРЕШИМОСТЬ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

В этой главе новый подход к обоснованию метода Фурье разделения переменных применяется для исследования вопроса существования классического решения смешанной задачи для простейшего уравнения Шредингера в частных производных с двумя независимыми переменными. Сформулированы необходимые и достаточные условия разрешимости данной задачи в терминах сходимости конструктивно определяемого функционального ряда. Показано, что при естественных предположениях об исходных данных задачи ее классическое решение отсутствует.

5.1. Постановка задачи

Рассмотрим линейное однородное уравнение Шредингера

$$i\,\frac{\partial u(x,\,t)}{\partial t} = -\,\frac{\partial^2 u(x,\,t)}{\partial x^2} + q(x)\,u(x,\,t) \tag{1}$$

с вещественным потенциалом

$$q(x) \in C\,[0,\,\pi] \tag{2}$$

относительно искомой функции $u(x,\,t)$, удовлетворяющей нулевым граничным условиям

$$u(0,\,t) = u(\pi,\,t) = 0 \qquad \forall\ t \in [0,\ T] \tag{3}$$

и начальным данным Коши

$$u(x,\,0) = \varphi(x). \tag{4}$$

З а д а ч а. Найти функцию

$$u(x,\,t) \in C^{2,1}(\bar{Q}), \tag{5}$$

удовлетворяющую в обычном смысле уравнению (1) в открытом прямоугольнике Q, а также граничным (3) и начальному (4) условиям.

В силу линейности смешанной задачи (1)—(5) условия ее разрешимости не зависят от длины рассматриваемого интервала времени $[0,\,T]$. Поэтому для удобства дальнейших выкладок, не ограничивая общности, в определении прямоугольника $\bar{Q}$ можно считать $T=2\pi$. Отметим также, что по определению класса функций (5) от искомого решения $u(x,\,t)$ не требуется существования смешанных производных второго порядка.

Кроме того, из сопоставления уравнений (1) и (1.1) легко видеть, что здесь дифференциальный оператор L_x имеет вид (3.6) и потому с учетом граничных условий (3) является самосопряженным в смысле определения (1.7). Таким образом, задача (1)—(5) полностью укладывается в постановку общей смешанной задачи (1.1)—(1.4). Это позволяет использовать ниже основные результаты гл. 1. В частности, из условий согласованности (1.10) и (1.11) вытекает необходимость включения

$$\varphi(x) \in C_0^2[0, \pi]. \tag{6}$$

В силу включений (2) и (5) в равенстве (1) допустим предельный переход при $t \to 0$ и $x \to 0$ (или $x \to \pi$), откуда

$$\varphi''(0) = \varphi''(\pi) = 0. \tag{7}$$

Наконец, по теореме 1.1 искомое решение $u(x, t)$, если оно существует, единственно. Так что ниже будем заниматься исключительно проблемой существования решения смешанной задачи (1)—(5). Очевидно, указанные необходимые условия (6) и (7) являются минимальными требованиями к ее исходным данным и потому в дальнейшем предполагаются выполненными. Достаточны ли эти условия для разрешимости поставленной задачи? Отрицательный ответ на этот вопрос будет дан в п. 5.6.

5.2. Структура формального решения

Найдем формальное решение смешанной задачи (1)—(5). Для этого нужно определить конкретные выражения величин $y_n(x)$ и $T_n(t)$ в формальном решении общего вида (1.24). В соответствии с видом (3.6) оператора L_x нормированные собственные функции $y_n(x)$, соответствующие собственным значениям ω_n^2, определяются решениями краевой задачи Штурма—Лиувилля (2.1)—(2.3), а коэффициенты Фурье $T_n(t)$ согласно (1.20) и (1.21) являются решениями задачи Коши

$$-iT_n'(t) + \omega_n^2 T_n(t) = 0,$$
$$T_n(0) = \Phi_n,$$

где коэффициент Фурье Φ_n начальной функции $\varphi(x)$ по полной ортонормальной в $Z_2(0, \pi)$ системе $\{y_n(x)\}_1^\infty$ определяется по формуле вида (2.55). Отсюда находим

$$T_n(t) = \Phi_n e^{-i\omega_n^2 t}.$$

Таким образом, искомое формальное решение смешанной задачи (1)—(5) дается функциональным рядом [4, с. 482]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n e^{-i\omega_n^2 t} y_n(x). \tag{8}$$

В силу (2.35), (3.15), (3.29) и (6) для входящих сюда величин Φ_n и ω_n^2 справедливы асимптотические формулы

$$\omega_n^2 = n^2 + q_0 + \alpha_n, \tag{9}$$

$$\Phi_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\Theta_n}{n^2} + \frac{\gamma_n}{n^3}, \tag{10}$$

где константа $q_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} q(x)\,dx$, а Θ_n – синус-коэффициент Фурье функции

$$\Theta(x) = \varphi(x)\,q(x) - \varphi''(x) \in C_0[0, \pi]. \tag{11}$$

Функциональный ряд (8) согласно оценкам (3.21), (3.29) и (10) мажорируется сходящимся числовым рядом $B\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, а потому по признаку Вейерштрасса [36, с. 430] сходится равномерно в $\overline{Q}$. Тогда в силу непрерывности в $\overline{Q}$ членов ряда (8) корректно [36, с. 433] обозначить его сумму функцией

$$S(x,t) \in C(\overline{Q}). \tag{12}$$

Но по теореме 1.2 для существования решения смешанной задачи (1)—(5) необходимо и достаточно, чтобы ее формальное решение $S(x, t)$ удовлетворяло условию

$$S(x,t) \in C^{2,1}(\overline{Q}). \tag{13}$$

Возникает вопрос, можно ли при выполнении только условий (6) и (7) использовать почленное дифференцирование ряда (8) для установления хотя бы некоторых свойств из включения (13). Оказывается, что однократное почленное дифференцирование по x этого ряда допустимо, так что с учетом оценок (3.32) и (3.35) можно установить включение

$$S(x,t) \in C^{1,0}(\overline{Q}).$$

К сожалению, большего на этом пути достичь нельзя, так как однократное по t или двукратное по x почленное дифференцирование ряда (8) недопустимо из-за расходимости продифференцированных рядов.

Поэтому для преодоления такой принципиальной трудности, прежде чем исследовать гладкость формального решения $S(x, t)$, снова прибегнем к структурному преобразованию функционального ряда (8), представляя его по принятой выше терминологии в виде двух составляющих – регулярной и сингулярной. Первую можно дифференцировать почленно нужное число раз. Гладкость же другой возможно исследовать лишь на основе методов суммирования соответствующего функционального ряда к функции с требуемыми дифференциальными свойствами.

С этой целью введем функции переменной $t \in [0,2\pi]$

$$A(t) = e^{-iq_0 t}, \qquad |A(t)| = 1, \tag{14}$$

$$\delta_n(t) = e^{t\alpha_n t} - 1 = O(\alpha_n), \tag{15}$$

причем последняя оценка легко получается из формулы конечных приращений Лагранжа

$$\delta_n(t) = \alpha_n t (\cos \alpha_n \tau_1 - i \sin \alpha_n \tau_2), \qquad 0 \le \tau_{1/2} \le t.$$

С учетом этих обозначений и оценки (9) можем записать

$$e^{-i\omega_n^2 t} = A(t)\, e^{-in^2 t} (1 + \delta_n(t)). \tag{16}$$

Подставляя теперь в ряд (8) величины $y_n(x)$, Φ_n и $e^{-i\omega_n^2 t}$ из выражений (3.21), (10) и (16), представим формальное решение задачи в виде следующей суммы:

$$S(x, t) = v_0(x, t) + \sum_{j=1}^{3} S_j(x, t), \tag{17}$$

$$v_0(x, t) = A(t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Theta_n}{n^2} e^{-in^2 t} \sin nx \in C(\bar{Q}), \tag{18}$$

$$S_1(x, t) = A(t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Theta_n}{n^2} e^{-in^2 t} \delta_n(t) \sin nx \in C(\bar{Q}), \tag{19}$$

$$S_2(x, t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Theta_n}{n^2} e^{-i\omega_n^2 t} h_n(x) \in C(\bar{Q}), \tag{20}$$

$$S_3(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n^3} e^{-i\omega_n^2 t} y_n(x) \in C(\bar{Q}). \tag{21}$$

Корректность представления (17), а значит, и обозначения сумм рядов (18)—(21) соответствующими функциями класса $C(\bar{Q})$ основана на вытекающей из оценок (3.21), (3.22), (3.29) и (15) равномерной в $\bar{Q}$ сходимости этих рядов. Первое слагаемое $v_0(x, t)$ из правой части равенства (17) является сингулярной составляющей формального решения $S(x, t)$. В самом деле, из примера Лебега [1, с. 133] видно, что функциональный ряд из (18) нельзя почленно дифференцировать один раз по t или два раза по x, так как продифференцированные ряды в общем случае расходятся на достаточно «богатом» множестве точек в $\bar{Q}$. Три последних слагаемых в (17) представляют собой регулярную составляющую ряда (8). Доказательство этого факта составляет основное содержание следующего раздела.

5.3. Сведение проблемы разрешимости к каноническому случаю

Прежде всего покажем с помощью почленного дифференцирования рядов (19)—(21), что каждая из функций $S_j(x, t)$ принадлежит классу $C^{2,1}(\bar{Q})$. Согласно известным теоремам [36, с. 433, 441] для того чтобы при каждом $j = 1, 2, 3$ продифференцированный ряд с непрерывными членами представлял собой соответствующую непрерывную в $\bar{Q}$ частную производную, достаточна его равномерная в $\bar{Q}$ сходимость. Поэтому в дальнейшем будем ограничиваться только исследованием равномерной сходимости продифференцированных рядов.

Начнем с установления требуемой гладкости функции $S_1(x,t)$, представленной рядом (19). Ее частная производная

$$\frac{\partial S_1(x,t)}{\partial x} = A(t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Theta_n}{n}e^{-in^2t}\delta_n(t)\cos nx \in C(\bar{Q}), \tag{22}$$

так как ряд здесь сходится равномерно в $\bar{Q}$, что вытекает из оценивания его членов в силу (3.29) и (15) величинами $\gamma_n O(n^{-1})$ и сходимости числового ряда (3.32).

Почленное дифференцирование функционального ряда из (22) вновь допустимо, так что справедлива формула

$$\frac{\partial^2 S_1(x,t)}{\partial x^2} = -A(t)\sum_{n=1}^{\infty}\Theta_n e^{-in^2t}\delta_n(t)\sin nx \in C(\bar{Q}). \tag{23}$$

В самом деле, члены этого ряда в силу указанных выше оценок являются величинами $O(\gamma_n\alpha_n)$, а потому сам ряд мажорируется сходящимся числовым рядом $B\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\gamma_n\alpha_n|$, т. е. сходится равномерно в $\bar{Q}$.

Запишем теперь формальное выражение частной производной

$$\frac{\partial S_1(x,t)}{\partial t} = -iq_{0s_1}(x,t) + i\frac{\partial^2 S_1(x,t)}{\partial x^2} +$$

$$+ iA(t)\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\Theta_n e^{i(\alpha_n - n^2)t}\sin nx \in C(\bar{Q}), \tag{24}$$

используя операции почленного дифференцирования по t ряда (19) и формулы (14), (15) и (23). Справедливость равенства (24) вытекает из равномерной в $\bar{Q}$ сходимости ряда в его правой части. Действительно, с учетом оценки (3.29) этот ряд мажорируется сходящимся в силу леммы П.4 числовым рядом $B\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n\gamma_n|$.

Объединяя включения (19), (22)—(24), получаем искомое свойство

$$S_1(x,t) \in C^{2,1}(\bar{Q}). \tag{25}$$

Далее, исследуем гладкость функции $S_2(x, t)$. Дифференцируя определяющий ее ряд (20) почленно по x один и два раза, найдем две частные производные

$$\frac{\partial S_2(x,t)}{\partial x} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Theta_n}{n^2}e^{-i\omega_n^2 t}h_n'(x) \in C(\bar{Q}), \tag{26}$$

$$\frac{\partial^2 S_2(x,t)}{\partial x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Theta_n}{n^2}e^{-i\omega_n^2 t}h_n''(x) \in C(\bar{Q}). \tag{27}$$

Справедливость этих соотношений очевидна, так как члены рядов из (26) и (27) являются в силу оценок (3.29), (3.36) и (3.38) величинами $\gamma_n O(n^{-2})$ и $\gamma_n O(n^{-1})$ соответственно.

С помощью почленного дифференцирования по t ряда (20) определяется и частная производная

$$\frac{\partial S_2(x,t)}{\partial t} = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega_n^2}{n^2}\Theta_n e^{-i\omega_n^2 t}h_n(x) \in C(\bar{Q}), \tag{28}$$

поскольку ряд здесь, в силу оценок (9), (3.29), (3.36) и (3.38), мажорируется сходящимся числовым рядом $B\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\gamma_n|}{n}$.

Резюмируя включения (20), (26)—(28), устанавливаем

$$S_2(x,t) \in C^{2,1}(\bar{Q}). \tag{29}$$

Наконец, почленное дифференцирование функционального ряда (21) позволяет найти три искомые частные производные функции $S_3(x,t)$:

$$\frac{\partial S_3(x,t)}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma_n}{n^3}e^{-i\omega_n^2 t}y_n'(x) \in C(\bar{Q}), \tag{30}$$

$$\frac{\partial^2 S_3(x,t)}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma_n}{n^3}e^{-i\omega_n^2 t}y_n''(x) \in C(\bar{Q}), \tag{31}$$

$$\frac{\partial S_3(x,t)}{\partial t} = -i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega_n^2\gamma_n}{n^3}e^{-i\omega_n^2 t}y_n(x) \in C(\bar{Q}). \tag{32}$$

Равномерная в $\bar{Q}$ сходимость трех последних рядов очевидна в силу оценок (3.21), (3.35), (3.37) и (9).

Установленные включения (21), (30)—(32) эквивалентны включению

$$S_3(x,t) \in C^{2,1}(\bar{Q}). \tag{33}$$

Таким образом, сопоставляя требуемую гладкость (13) формального решения $S(x,t)$ и его представление (17) с доказанными включениями (25), (29) и (33), заключаем, что для разрешимости смешанной задачи (1)—(5) необходимо и достаточно, чтобы функция $v_0(x,t)$ из (18) принадлежала классу $C^{2,1}(\bar{Q})$. Это условие в силу определения (14) функции $A(t)$ эквивалентно следующему требованию:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Theta_n}{n^2}e^{-in^2 t}\sin nx \in C^{2,1}(\bar{Q}). \tag{34}$$

Покажем, что введенная функция $v(x,t)$ является решением, если оно существует, смешанной задачи (1), (3), (5) с тривиальным потенциалом

$$q(x) \equiv 0 \tag{35}$$

и начальными данными Коши

$$u(x, 0) = p(x), \tag{36}$$

где функции $p(x)$ определяется согласно (3.54).

В самом деле, если задача (1), (3), (5), (35) и (36) разрешима, то ее решение $u(x, t)$ по теореме 1.1 дается рядом (8), который в рассматриваемом случае есть

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n e^{-in^2 t} \sin nx. \tag{37}$$

Но в силу определения (3.54) $p''(x) = -\Theta(x)$, откуда согласно связи между синус-коэффициентами Фурье функции и ее производных [1, с. 88]

$$p_n = -p_n''/n^2 = \Theta_n/n^2.$$

Это означает, что ряды (34) и (37) совпадают, что и требовалось доказать.

Таким образом, вопрос существования решения смешанной задачи (1)—(5) сведен к ее каноническому случаю (1), (3), (5), (35), но с измененными начальными данными (36). В заключение отметим, что начальная функция $p(x)$ редуцированной смешанной задачи удовлетворяет необходимым условиям ее разрешимости вида (6) и (7), так как выполняются соотношения (3.55) и (3.56). Кроме того, из условий согласованности редуцированной задачи вытекают используемые в дальнейшем граничные условия

$$\frac{\partial^2 v(0, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v(\pi, t)}{\partial x^2} = 0 \qquad \forall t \in \bar{H}. \tag{38}$$

5.4. О функциональных свойствах ряда Фурье

Рассмотрим формальный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n e^{-in^2 t} \sin nx, \tag{39}$$

свойства сходимости которого в среднем, как будет видно в дальнейшем, полностью решают вопрос о необходимых и достаточных условиях разрешимости смешанной задачи (1)—(5).

Начнем с исследования сходимости ряда (39) по совокупности переменных x и t на замыкании $\overline{Q}$. Покажем, что он сходится в $L^2(Q)$. Действительно, вводя обозначения

$$\psi_n(t) = \Theta_n e^{-in^2 t}$$

и учитывая оценку (3.29) и $|e^{-in^2 t}| = 1$, имеем по признаку Вейерштрасса [36, с. 430]

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n(t)|^2 < +\infty \tag{40}$$

равномерно по $t \in \bar{H}$. Согласно признаку сходимости Коши [1, с. 46] это означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется не зависящий от t номер M такой, что

$$\sum_{\kappa = n+1}^{n+p} |\psi_\kappa(t)|^2 < \varepsilon \qquad \forall\, n > M, \quad p \in Z^+, \quad t \in \bar{H}. \tag{41}$$

Далее, частичные суммы $S_n(x, t)$ ряда (39) непрерывны в $\bar{Q}$. Тогда в результате сведения двойного интеграла к повторному по теореме Фубини [22, с. 55] и тождественных преобразований [1, с. 71] частичных сумм $S_n(x, t)$ получим с учетом свойства (41):

$$\left\|S_{n+p}(x,t) - S_n(x,t)\right\|_Q^2 = \int_0^{2\pi} dt \int_0^{\pi} \left|S_{n+p}(x,t) - S_n(x,t)\right|^2 dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\|S_{n+p}(x,t) - S_n(x,t)\right\|_G^2 dt = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \sum_{\kappa=n+1}^{n+p} \left|\psi_\kappa(t)\right|^2 dt < \pi^2 \varepsilon.$$

Так как последнее неравенство имеет место для всех $n > M$ и $p \in Z^+$, то по признаку сходимости Коши отсюда следует искомая сходимость ряда (39) к некоторой функции

$$V_1(x, t) \in L^2(Q). \tag{42}$$

Тогда по определению предела [1, с. 46] для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что

$$\left\|S_n(x,t) - V_1(x,t)\right\|_Q^2 < \varepsilon \qquad \forall\; n > N. \tag{43}$$

Исследуем теперь сходимость ряда (39) по переменной $x \in \bar{G}$, представив его для удобства в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(t) \sin nx. \tag{44}$$

Уже из теоремы Рисса—Фишера [1, с. 74] и сходимости ряда (40) следует, что при каждом $t \in \bar{H}$ ряд (44) сходится в $L^2(G)$ к некоторой функции $V(x, t) \in L^2(G)$, для которой он является ее синус-рядом Фурье.

Более того, в силу равномерной в $\bar{H}$ сходимости ряда (40) легко установить равномерную по $t \in \bar{H}$ сходимость в $L^2(G)$ ряда (44) к функции $V(x, t)$. Действительно, с учетом предельного перехода при $p \to +\infty$ в неравенстве (41) находим из равенства Парсеваля [1, с. 73]

$$\left\|S_n(x,t) - V(x,t)\right\|_G^2 = \left\|V(x,t)\right\|_G^2 - \frac{\pi}{2}\sum_{\kappa=1}^{n} |\psi_\kappa(t)|^2 =$$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_{\kappa=n+1}^{\infty} \left|\psi_\kappa(t)\right|^2 < \frac{\pi}{2}\varepsilon \qquad \forall\; n > M, \quad t \in \bar{H}, \tag{45}$$

что и требовалось доказать. Тогда из непрерывности в $\bar{Q}$ частичных сумм $S_n(x, t)$ следует согласно известным свойствам сходимости в среднем функциональной последовательности [4, с. 499], что предельная функция $V(x, t)$ непрерывна в $L^2(G)$ по $t \in \bar{H}$. Отсюда вытекает [4, с. 498], что

$$V(x, t) \in L^2(Q). \tag{46}$$

Покажем, что обе предельные функции $V(x, t)$ и $V_1(x, t)$ эквивалентны как элементы пространства $L^2(Q)$. Предположим противное,

$$\left\|V(x, t) - V_1(x, t)\right\|_Q > B. \tag{47}$$

С другой стороны, в силу включений (42) и (46), неравенства треугольника для нормы и теоремы Фубини имеем с учетом соотношений (43) и (45)

$$\begin{aligned}&\left\|V(x, t) - V_1(x, t)\right\|_Q \le \left\|S_n(x, t) - V_1(x, t)\right\|_Q + \\ &+ \left\|S_n(x, t) - V(x, t)\right\|_Q < \sqrt{\varepsilon} + \\ &+ \left(\int_0^{2\pi} \left\|S_n(x, t) - V(x, t)\right\|_G^2 dt\right)^{1/2} \le \\ &\le (1 + \pi)\sqrt{\varepsilon} \qquad \forall\ n > \max\{N, \ M\}.\end{aligned}$$

Так как ε может быть выбрано сколь угодно малым, то последнее неравенство противоречит (47), т. е. функции $V(x, t)$ и $V_1(x, t)$ могут отличаться в $\bar{Q}$ только на множестве меры нуль.

Это означает, что функция $V(x, t)$ будет удовлетворять соотношению вида (43):

$$\left\|S_n(x, t) - V(x, t)\right\|_Q^2 < \varepsilon \qquad \forall \quad n > N. \tag{48}$$

Другими словами, ряд (39) сходится к $V(x, t)$ и в $L^2(Q)$.

Наконец, исследуем сходимость ряда (39) по переменной $t \in \bar{H}$. С этой целью, вводя обозначения

$$\rho_n(x) = \Theta_n \sin nx,$$

представим его в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n(x)\, e^{-in^2 t} = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} C_\kappa(x)\, t^{i\kappa t}, \tag{49}$$

где в правой части равенства стоит комплексная форма искомого ряда с коэффициентами

$$c_\kappa(x) = \begin{cases} \rho_m(x) & \forall\, \kappa = -m^2 \qquad (m \in Z^+), \\ 0 & \forall\, \kappa \ne -m^2. \end{cases}$$

Так как $|\rho_n(x)| \le |\Theta_n|$, то из оценки (3.29) и признака Вейерштрасса следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\rho_n(x)|^2 < +\infty \tag{50}$$

равномерно по $x \in \bar{G}$. Тогда согласно признаку сходимости Коши для любого $\varepsilon > 0$ найдется не зависящий от x номер P такой, что

$$\sum_{\kappa = n}^{\infty} |\rho_\kappa(x)|^2 < \varepsilon \qquad \forall\ n > \sqrt{P}, \qquad x \in \bar{G}. \tag{51}$$

Из теоремы Рисса—Фишера [37, с. 39] и сходимости ряда (50) следует, что ряд в правой части равенства (49) при каждом $x \in \bar{G}$ является комплексным рядом Фурье по полной ортогональной на $[0, 2\pi]$ комплексной тригонометрической системе $\left\{e^{i\kappa t}\right\}_{-\infty}^{\infty}$ и сходится в $L^2(H)$ к некоторой функции $V_2(x, t) \in L^2(H)$.

Более того, из равномерной в $\bar{G}$ сходимости ряда (50) можно вывести равномерную по $x \in \bar{G}$ сходимость в $L^2(H)$ ряда (49) к функции $V_2(x, t)$. В самом деле, из равенства Парсеваля [7, с. 30] и соотношения (51) вытекает

$$\left\|S_n(x, t) - V_2(x, t)\right\|_H^2 = \left\|V_2(x, t)\right\|_H^2 - 2\pi \sum_{|\kappa| = 0}^{n} \left|c_\kappa(x)\right|^2 =$$

$$= 2\pi \sum_{\kappa < -n} \left|c_\kappa(x)\right|^2 = 2\pi \sum_{-m^2 < -n} \left|\rho_m(x)\right|^2 =$$

$$= 2\pi \sum_{m > \sqrt{n}} \left|\rho_m(x)\right|^2 < 2\pi\varepsilon \qquad \forall\ n > P, \qquad x \in \bar{G}, \tag{52}$$

что и требовалось доказать. Отсюда по аналогии с предыдущим легко видеть [4, с. 498, 499], что предельная функция $V_2(x, t)$ непрерывна в $L^2(H)$ по $x \in \bar{G}$, а значит,

$$V_2(x, t) \in L^2(Q). \tag{53}$$

Покажем, что функции $V_2(x, t)$ и $V(x, t)$ эквивалентны в $L^2(Q)$. Предположим противное,

$$\left\|V(x, t) - V_2(x, t)\right\|_Q > B. \tag{54}$$

В силу включений (46) и (53), неравенства треугольника для нормы, теоремы Фубини и соотношений (48) и (52) имеем

$$\left\|V(x, t) - V_2(x, t)\right\|_Q \le \left\|S_n(x, t) - V(x, t)\right\|_Q +$$

$$+ \left\|S_n(x, t) - V_2(x, t)\right\|_Q < \sqrt{\varepsilon} +$$

$$+ \left(\int_0^x \left\|S_n(x, t) - V_2(x, t)\right\|_H^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} < (1 + \pi\sqrt{2})\sqrt{\varepsilon}$$

$$\forall n > \max\{N, P\}.$$

Последнее неравенство в силу произвольной малости числа $\varepsilon > 0$ противоречит (54), т. е. функции $V(x, t)$ и $V_2(x, t)$ отличаются в $\bar{Q}$ не более, чем на множестве меры нуль, а значит, по теореме Фубини

$$\left\|V(x,t)-V_2(x,t)\right\|_Q^2=\int_0^\pi \left\|V(x,t)-V_2(x,t)\right\|_H^2 dx=0. \tag{55}$$

В заключение исследуем вопрос о том, что можно сказать об эквивалентности в пространстве $L^2(H)$ функций $V(x, t)$ и $V_2(x, t)$ при фиксированных значениях переменной x. Прежде всего согласно теореме об обращении в нуль интеграла от неотрицательной функции [22, с. 48] для выполнения последнего равенства в (55) необходимо, чтобы

$$\left\|V(x,t)-V_2(x,t)\right\|_H=0 \qquad \forall \text{ п. в.} \qquad x\in\overline{G}, \tag{56}$$

откуда следует существование, вообще говоря, непустого множества $G^*\subset\overline{G}$ нулевой меры, в каждой точке которого норма из (56) отлична от нуля. Другими словами, при любом фиксированном $x\in\overline{G}\setminus G^*$ функции $V(x, t)$ и $V_2(x, t)$ эквивалентны как элементы пространства $L^2(H)$.

Такого типа эквивалентность двух функций можно распространить на множество всех точек $x\in\overline{G}$, если изменить функцию $V(x, t)$ только на множестве $G^*\times\overline{H}$ меры нуль в $\overline{Q}$ следующим образом:

$$V(x,t)=V_2(x,t) \qquad \forall\ (x,t)\in G^*\times\overline{H}. \tag{57}$$

Очевидно, измененная функция, для которой удобнее сохранить прежнее обозначение $V(x, t)$, уже при каждом $x\in\overline{G}$ эквивалентна $V_2(x, t)$ в $L^2(H)$, т. е. последовательность частичных сумм $S_n(x, t)$ при каждом $x\in\overline{G}$ сходится в L^2 (H) к измененной функции $V(x, t)$, а значит, для нее выполняется аналог соотношения (52):

$$\left\|S_n(x,t)-V(x,t)\right\|_H^2<2\pi\varepsilon \qquad \forall n>P,\quad x\in\overline{G}. \tag{58}$$

Кроме того, измененная функция $V(x, t)$ сохраняет свойства сходимости (45) и (48), так как в соответствии с (57) она изменена в $\overline{Q}$ только на множестве $G^*\times\overline{H}$ меры нуль, а при каждом $t\in\overline{H}$ – только на множестве G^* нулевой меры в $\overline{G}$. Резюмируя соотношения (45), (48) и (58), сформулируем полученные результаты в виде следующего утверждения:

Л е м м а 5.1. Функциональный ряд (39) сходится одновременно в $L^2(Q)$, в $L^2(G)$ равномерно по $t\in\overline{H}$ и в $L^2(H)$ равномерно по $x\in\overline{G}$ к функции $V(x,t)\in L^2(Q)$, которая непрерывна в $L^2(G)$ по $t\in\overline{H}$ и в $L^2(H)$ по $x\in\overline{G}$.

5.5. О предельной гладкости формального решения

В п. 5.3 было показано, что гладкость формального решения $S(x, t)$ смешанной задачи (1)—(5) лимитируется в рамках (13) только гладкостью функции $v(x, t)$, определяемой рядом (34). В связи с этим установим максимальные свойства ее гладкости, которые гарантируются условиями (2), (6) и (7). Прежде всего из оценки (3.29) вытекает равномерная в $\overline{Q}$ сходимость ряда (34), а значит, его сумма

$$v(x,t) \in C(\overline{Q}). \tag{59}$$

Оказывается далее, что ряд (34) допускает однократное почленное дифференцирование по x, так что

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Theta_n}{n} e^{-in^2 t} \cos nx \in C(\overline{Q}). \tag{60}$$

В самом деле, последний ряд в силу оценки (3.29) мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\Theta_n|}{n}$ и потому сходится равномерно в $\overline{Q}$.

К сожалению, функциональные ряды (34) и (60) не допускают почленного дифференцирования соответственно по t и x из-за расходимости формально продифференцированных рядов. Это не означает, конечно, что функция $v(x, t)$ не обладает более сильными, чем (59) и (60), свойствами гладкости. Просто их установление должно проводиться другими средствами, в частности, ниже будет использовано непосредственное суммирование соответствующих рядов.

С этой целью вновь рассмотрим формальный ряд (39). В силу леммы 5.1 при каждом $t \in \overline{H}$ он сходится в $L^2(G)$ к функции $V(x, t)$, а значит, допускает почленное интегрирование [3, с. 346] по x в пределах от 0 до x, так что

$$\int_0^x V(s,t)\,ds = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Theta_n}{n} e^{-in^2 t} \cos nx + a(t), \tag{61}$$

$$a(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Theta_n}{n} e^{-in^2 t} \in C(\overline{H}), \tag{62}$$

причем оба ряда здесь сходятся равномерно соответственно в $\overline{Q}$ и $\overline{H}$ согласно оценке (3.29).

Комбинируя соотношения (60) и (61), получим

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = a(t) - \int_0^x V(s,t)\,ds. \tag{63}$$

Отсюда видно, что при каждом $t \in \overline{H}$ частная производная $\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}$ абсолютно непрерывна по $x \in \overline{G}$, так как по лемме 5.1 $V(x, t) \in L^2(G)$, а потому согласно [53, с. 283] дифференцируема по x п. в. в $\overline{G}$. Точнее,

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = -V(x,t) \qquad \forall \ t \in \overline{H}, \text{ п. в. } x \in \overline{G}. \tag{64}$$

Далее, в силу леммы 5.1 при каждом $x \in \overline{G}$ ряд (39) сходится в $L^2(H)$ к функции $V(x, t)$, так что в результате его почленного интегрирования по t имеем

$$\int_0^t V(x,\tau)\,d\tau = i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Theta_n}{n^2}e^{-in^2t}\sin nx - i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Theta_n}{n^2}\sin nx.$$

Подставляя сюда представления функций $p(x)$ из (3.53) и $v(x, t)$ из (34), получим после элементарных преобразований

$$v(x, t) = p(x) - i\int_0^t V(x, \tau)\,d\tau. \tag{65}$$

А так как при каждом $x \in \overline{G}$ функция $V(x, t) \in L^2(H)$, то $v(x, t)$ абсолютно непрерывна по $t \in \overline{H}$, т. е. имеет п. в. в $\overline{H}$ частную производную

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = -iV(x, t) \qquad \forall x \in \overline{G},\ \text{п. в. } t \in \overline{H}. \tag{66}$$

Таким образом, из соотношений (59), (60), (64) и (66) и включения (46) следует, что функция $v(x, t)$, определяемая рядом (34), непрерывна в $\overline{Q}$ вместе с частной производной $\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}$ и имеет обобщенные частные производные первого по t и второго по x порядков из $L^2(Q)$, или символически [22, с. 157]

$$v(x, t) \in H^{2,1}(Q). \tag{67}$$

В следующем разделе будет показано, что в некотором смысле одни только условия (2), (6) и (7) не позволяют улучшить по сравнению с (67) гладкость функции $v(x, t)$. Очевидно из определения (14), представлений (17) и (18) и включений (25), (29), (33) и (67), что формальное решение смешанной задачи (1)—(5) принадлежит тому же классу

$$S(x, t) \in H^{2,1}(Q). \tag{68}$$

5.6. Об отсутствии классического решения

Прежде чем усиливать требования к потенциалу $q(x)$ и начальной функции $\varphi(x)$ для обеспечения более сильного, чем (67), включения (34), которое достаточно для разрешимости смешанной задачи (1)—(5), целесообразно убедиться в отсутствии ее классического решения в наиболее естественном случае (2), (6) и (7) исходных данных. Этот факт устанавливается ниже на основе известных результатов по преобразованию рядов Фурье [1; 7; 54].

С этой целью рассмотрим синус-ряд Фурье функции $\Theta(x) \in C_0(\overline{G})$ из (11) и представим его в комплексной форме

$$\Theta(x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty}\Theta_n \sin nx = -\frac{i}{2}\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty}\Theta_{|\kappa|}\, e^{i\kappa x}\,\mathrm{sign}\,\kappa, \tag{69}$$

где $\Theta_0 = 0$. Согласно лемме 5.1 функциональный ряд (39) при фиксированном значении $t = t^* \in \overline{H}$ также является синус-рядом Фурье функции $V(x, t^*) \in L^2(G)$ с аналогичной (69) комплексной формой:

$$V(x,t^*) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n e^{-in^2 t^*} \sin nx = -\frac{i}{2} \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \Theta_{|\kappa|} e^{-i\kappa^2 t^*} e^{i\kappa x} \operatorname{sign} \kappa. \tag{70}$$

Очевидно, числовая последовательность $\left\{e^{-i\kappa^2 t^*}\right\}_{-\infty}^{\infty}$ преобразует один ряд Фурье (69) в другой (70), причем первый в силу (11) порожден непрерывной в R^1 периодической функцией. Может ли преобразованный таким образом ряд (70) остаться рядом Фурье непрерывной в R^1 функции, которая, конечно, эквивалентна $V(x,t^*)$ в $L^2(G)$? Поскольку преобразующая последовательность $\left\{e^{-i\kappa^2 t^*}\right\}$ не зависит от самой функции $\Theta(x)$, то речь может идти только о преобразовании целого класса рядов Фурье непрерывных функций. Поэтому доказываемый ниже результат формулируется в следующем виде.

Л е м м а 5.2. Для каждого $t^* = r\pi \in H$, где $r > 0$ – иррациональное число, существует хотя бы одна функция $\Theta(x) \in C_0(\bar{G})$ такая, что комплексный ряд (70) не является рядом Фурье непрерывной в R^1 функции.

Действительно, согласно [7, с. 282] для того, чтобы последовательность $\left\{e^{-i\kappa^2 t^*}\right\}$ преобразовывала тригонометрический ряд Фурье любой непрерывной в R^1 периодической функции в ряд Фурье функции того же класса, необходимо и достаточно, чтобы ряд

$$\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} e^{-i\kappa^2 t^*} e^{i\kappa x} \tag{71}$$

был рядом Фурье—Стилтьеса. Известные критерии фурье-стилтьесовости тригонометрических рядов общего вида [1, с. 170; 54, с. 98] в определенном смысле неконструктивны, так как даются в терминах равномерной по $n \in Z^+$ ограниченности нормы в $L^1(G)$ сумм Фейера для этих рядов. Однако в частном случае ряда Фурье, каким является (71), Р. Эдвардсом в [58] получен конкретный результат: тригонометрический ряд (71) является рядом Фурье—Стилтьеса некоторой функции с ограниченной вариацией в $\bar{G}$ при $t^* = \mu\pi$, если μ — рациональное число, и не является таковым, если μ иррационально.

Это означает, что для каждого $t^* = r\pi \in H$ найдется функция $\Theta(z) \in C(R^1)$, вообще говоря, зависящая от t^*, такая, что комплексный ряд Фурье (70) порождается функцией, которая не эквивалентна непрерывной функции в R^1. Но для непрерывности функции $\Theta(z)$ необходимо включение $\Theta(x) \in C_0(\bar{G})$, что и доказывает искомую лемму.

Полученный результат имеет непосредственное отношение к разрешимости задачи (1)—(5).

Т е о р е м а 5.1. Существует хотя бы одна пара удовлетворяющих условиям (2), (6) и (7) функций $q(x)$ и $\varphi(x)$, для которых смешанная задача (1)—(5) не имеет решения.

В самом деле, по лемме 5.2 найдется функция $\Theta(x) \in C_0(\bar{G})$, для которой при некотором $t = t^* \in (0, 2\pi)$ ряд (39) не является синус-рядом Фурье функции того же класса. В силу леммы 5.1 это означает, что функция $V(x, t^*)$ либо разрывна в $\overline{G}$ и неэквивалентна какой-либо функции из $C(\overline{G})$, либо принадлежит $C(\overline{G})$, но при этом

$$|V(0, t^*)| + |V(\pi, t^*)| > 0. \tag{72}$$

В первом случае из утверждения (64) следует, что частная производная $\dfrac{\partial^2 v(x, t^*)}{\partial x^2}$ разрывна в $\overline{G}$, а потому необходимое для разрешимости смешанной задачи (1)—(5) включение (34) не выполняется.

Покажем, что и во втором случае не существует искомого решения. В самом деле, в силу включения (34) необходимо, чтобы $\dfrac{\partial^2 v(x, t^*)}{\partial x^2} \in C(\bar{G})$. Тогда из утверждения (64) и эквивалентности в $\overline{G}$ двух непрерывных функций имеем [13, с. 283]

$$\frac{\partial^2 v(x, t^*)}{\partial x^2} = V(x, t^*) \in C(\bar{G}) \qquad \forall \quad x \in \overline{G},$$

что вместе с (72) противоречит условию (38), необходимому для разрешимости задачи (1)—(5).

Для завершения доказательства остается показать, что из равенства (11) по найденной функции $\Theta(x)$ можно восстановить потенциал $q(x)$ и начальную функцию $\varphi(x)$. Действительно, одну из них $q(x)$ зададим произвольно, лишь бы выполнялось (2) и $q(x) \geq 0$, а другую $\varphi(x)$ найдем в соответствии с соотношением (11) как решение следующей двухточечной неоднородной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$-\varphi''(x) + q(x)\varphi(x) = \Theta(x), \tag{73}$$
$$\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0.$$

Соответствующая этой однородная краевая задача при $\Theta(x) \equiv 0$ имеет только тривиальное решение, так как в случае $q(x) \geq 0$ система Штурма—Лиувилля (2.1)—(2.3) не имеет нулевого собственного значения [34, с. 166]. Отсюда согласно [11, с. 185] вытекает, что неоднородная краевая задача (73) имеет единственное решение $\varphi(x)$. Тем самым пара искомых функций $q(x)$ и $\varphi(x)$, для которой решение смешанной задачи (1)—(5) не существует, найдена.

5.7. Условия разрешимости задачи

Из теоремы 5.1 можно сделать два простых, но важных вывода. Во-первых, для разрешимости задачи (1)—(5) требования (2), (6) и (7) к ее исходным данным недостаточны. Во-вторых, из структуры (11) функции $\Theta(x)$ видно, что дальнейшее усиление этих требований должно проводиться одновременно по отношению к обеим функциям $q(x)$ и $\varphi(x)$. Ужесточение требований только к одной из них не спасает положения, так как подбором другой всегда можно сохранить плохие свойства определяемой леммой 5.2 функции $\Theta(x)$.

Выше уже было указано, что включение (34) является необходимым и достаточным условием разрешимости смешанной задачи (1)—(5). Хотя его выполнение неявно полностью определяется дифференциальными свойствами функций $q(x)$ и $\varphi(x)$, оно нуждается в придании ему большей конструктивности. Первым шагом в этом направлении является установление необходимости и достаточности для разрешимости смешанной задачи (1)—(5) условия

$$V(x, t) \in C(\bar{Q}) \tag{74}$$

на функцию из леммы 5.1.

Действительно, пусть искомое решение $u(x, t)$ существует. Тогда функция $v(x, t)$ удовлетворяет включению (34), а значит,

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = -U(x, t) \in C(\bar{Q}). \tag{75}$$

Кроме того, $v(x, t)$ удовлетворяет уравнению Шредингера (1) при $q(x) \equiv 0$, т. е.

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = -iU(x, t). \tag{76}$$

Из сопоставления двух пар соотношений (64), (75) и (66), (76) заключаем, что функции $U(x, t)$ и $V(x, t)$ эквивалентны в пространствах $L^2(Q)$, $L^2(G)$ при каждом $t \in \bar{H}$, а также $L^2(H)$ при каждом $x \in \bar{G}$, т. е. включения (45), (48) и (58), а значит, и лемма 5.1 останутся справедливыми, если в них заменить функцию $V(x, t)$ на $U(x, t)$. Тогда из включения (75) следует необходимость условия (74). Его достаточность для разрешимости задачи (1)—(5) очевидна в силу формул (63) и (65), из которых с помощью непосредственного дифференцирования по правилу Лейбница вытекает включение (34).

Однако окончательно необходимые и достаточные условия существования искомого решения $u(x, t)$ целесообразно сформулировать в виде, более удобном для использования.

Т е о р е м а 5.2. *Для разрешимости смешанной задачи (1)—(5) необходимо и достаточно, чтобы начальная функция $\varphi(x)$ и потенциал $g(x)$ удовлетворяли условиям (6), (7) и сходимости ряда (39) к функции класса $C(\bar{Q})$ в метрике одного из трех пространств: $L^2(Q)$, $L^2(G)$ $\forall t \in \bar{H}$ или $L^2(H)$ $\forall x \in \bar{G}$. При этом сходимость ряда (38) к непрерывной в $\bar{Q}$ функции достигается одновременно в метриках трех указанных пространств.*

Доказательство в существенной части уже дано выше, а именно в той версии, когда фигурирующая в теореме предельная функция является суммой ряда (39) одновременно в трех упомянутых пространствах, так как в этом случае она совпадает с функцией (74) из леммы 5.1. Однако введенная в теорему достаточность сходимости ряда (39) хотя бы в одном из пространств вместо трех сразу может оказаться весьма удобной при анализе разрешимости смешанной задачи (1)—(5). Поэтому остается показать, что из сходимости ряда (39) к непрерывной в $\overline{Q}$ функции в одном из указанных пространств следует таковая и в двух других.

Итак, предположим, что функциональный ряд (39) сходится в метрике одного из указанных в теореме 5.2 пространств к функции $W(x, t) \in C(\overline{Q})$. Сопоставим ее с функцией $V(x, t)$ из леммы 5.1. По теореме Фубини [22, с. 55] имеем

$$\left\|W(x,t)-V(x,t)\right\|_Q^2=\int_Q\left|W(x,t)-V(x,t)\right|^2dx\,dt=$$
$$=\int_0^{2\pi}\left\|W(x,t)-V(x,t)\right\|_G^2dt=$$
$$=\int_0^{\pi}\left\|W(x,t)-V(x,t)\right\|_H^2dx=0, \tag{77}$$

причем равенство нулю здесь появляется в силу сделанного предположения, эквивалентного обращению в нуль одной из трех приведенных норм. Из соотношения (77) в силу теоремы об обращении в нуль интеграла от неотрицательной функции [22, с. 48] вытекают сразу три равенства:

$$\left\|W(x,t)-V(x,t)\right\|_Q=0,$$
$$\left\|W(x,t)-V(x,t)\right\|_G=0 \qquad \forall \text{ п. в. } t\in\overline{H},$$
$$\left\|W(x,t)-V(x,t)\right\|_H=0 \qquad \forall \text{ п. в. } x\in\overline{G}.$$

Первое означает, что функции $W(x, t)$ и $V(x, t)$ эквивалентны в $\overline{Q}$, т. е. ряд (39) сходится к $W(x, t)$ в $L^2(Q)$. Норма из второго равенства в силу установленной в п. 5.4 непрерывности функции $V(x, t)$ в $L^2(G)$ по $t\in\overline{H}$ является функцией класса $C(\overline{H})$ и по теореме об эквивалентности двух функций [13, с. 283] тождественно в $\overline{H}$ равна нулю. Другими словами, при каждом $t\in\overline{H}$ функции $W(x, t)$ и $V(x, t)$ эквивалентны в $\overline{G}$, т. е. ряд (39) сходится к $W(x, t)$ в $L^2(G)$ $\quad t\in\overline{H}$

Наконец, норма в третьем из приведенных выше равенств согласно непрерывности функции $V(x, t)$ в $L^2(H)$ по $x\in\overline{G}$ принадлежит $C(\overline{G})$, а значит, обращается в нуль тождественно в $\overline{G}$, т. е. при каждом $x\in\overline{G}$ функции $W(x, t)$ и $V(x, t)$ эквивалентны в $\overline{H}$, а ряд (39) сходится в $L^2(H)$ к $W(x, t)$. Таким образом, резюмируя установленные свойства функции $W(x, t)\in C(\overline{Q})$, заключаем, что она удовлетворяет утверждению леммы 5.1, что и требовалось доказать.

Из теоремы 5.2 видно, что, по существу, проблема существования решения смешанной задачи (1)—(5) сводится к отысканию критериев непрерывности суммы функционального ряда (39), являющегося согласно оценке (3.29) одновременно двукратным рядом Фурье в силу теоремы Рисса—Фишера [8, с. 451], а при каждом $t \in \overline{H}$ или $x \in \bar{G}$ однократным рядом Фурье по системам функций $\{\sin \kappa x\}_1^\infty$ или $\{e^{i\kappa t}\}_{-\infty}^{\infty}$ соответственно.

Так как необходимые и достаточные условия теоремы 5.2 сформулированы в терминах функциональных свойств суммы ряда (39), дадим в заключение конструктивные достаточные условия (6), (7) и

$$\sum_{n=1}^{\infty} | \Theta_n | < +\infty \tag{78}$$

разрешимости смешанной задачи (1)—(5). Данное утверждение является простым следствием теоремы 5.2. В самом деле, числовой ряд (78) является мажорантным для функционального ряда (39), а это равносильно равномерной в $\overline{Q}$ сходимости последнего, что и приводит к достаточному условию разрешимости (74).

Оставляя открытым вопрос о грубости условия (78), приведем некоторые конкретные требования к функции $\Theta(x)$ из (11), которые гарантируют его выполнение [1, с. 608, 615]:

$\Theta(x) \in H^1(G)$;
$\Theta(x) \in V(\bar{G}) \cap \mathrm{Lip}\,\alpha(\bar{G})$, $\quad 0 < \alpha \le 1$;
$\Theta(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha(\bar{G})$, $\quad 1/2 < \alpha \le 1$.

ГЛАВА 6

РАЗРЕШИМОСТЬ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В данной главе исследуются возможности нового подхода к обоснованию метода Фурье разделения переменных в смешанной задаче для простейшего уравнения параболического типа – одномерного уравнения теплопроводности. Обычно эта задача рассматривается в более широком, чем (1.4), классе функций [10, с. 7]. К сожалению, для однородного уравнения такого типа новый подход не дает смягчения известных [30, с. 341; 32, с. 210] достаточных условий разрешимости смешанной задачи, так как они, по существу, состоят лишь в абсолютной и равномерной сходимости ряда Фурье начальной функции $\varphi(x)$ по собственным функциям оператора Штурма—Лиувилля, что заведомо слабее естественного условия (3.7). Поэтому здесь изучается только смешанная задача для неоднородного уравнения теплопроводности, для которой с помощью основных асимптотических соотношений гл. 2 и П. 3 найдены новые конструктивные достаточные условия существования классического решения. Эти условия содержатся в теореме 6.1 и следствии к ней.

6.1. Постановка задачи

Рассмотрим неоднородное одномерное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+q(x)\,u(x,t)=f(x,t) \tag{1}$$

с вещественным потенциалом

$$q(x)\in C[0,\pi] \tag{2}$$

относительно искомой функции $u(x, t)$, удовлетворяющей нулевым граничным и начальному условиям

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0 \qquad t\in[0,T], \tag{3}$$

$$u(x,0)=0 \qquad x\in[0,\pi]. \tag{4}$$

Следуя [14, с. 471; 33, с. 181], сформулируем следующую смешанную задачу.

З а д а ч а. Найти функцию

$$u(x,t)\in C^{2,1}(Q)\cap C(\bar{Q}), \tag{5}$$

удовлетворяющую в обычном смысле уравнению (1) в открытом прямоугольнике Q, а также граничным (3) и начальному (4) условиям.

Хотя из постановки задачи следует включение $f(x, t) \in C(Q)$, будем предполагать выполнение для правой части уравнения (1) несколько более сильного условия

$$f(x, t) \in C(\bar{Q}). \tag{6}$$

Поскольку смешанная задача (1)—(6) рассматривается в более широком, чем (1.4), классе функций, то, вообще говоря, пользоваться общими теоремами 1.1 и 1.2 при доказательстве существования и единственности искомого решения уже нельзя. Впрочем, единственность классического решения задачи (1)—(6) вытекает из общей теоремы единственности в [4, с. 513].

Однако из существования решения $u(x, t)$ рассматриваемой задачи в общем случае не следует даже его представимость в виде ряда Фурье (1.15)

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) y_n(x), \tag{7}$$

в котором нормированные собственные функции $y_n(x)$, соответствующие собственным значениям ω_n^2, определяются системой Штурма—Лиувилля (2.1)—(2.3), а коэффициенты Фурье $T_n(t)$ являются решениями задачи Коши (1.20), (1.21), т. е.

$$T'_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) = F_n(t), \tag{8}$$

$$T_n(0) = 0, \tag{9}$$

где в соответствии с (1.14)

$$F_n(t) = \int_0^{\pi} f(x, t) y_n(x)\, dx. \tag{10}$$

Тем не менее будем предполагать, что решение смешанной задачи (1)—(6) может быть получено по методу Фурье разделения переменных x и t в виде функционального ряда (7). Как будет видно ниже, этот ряд по аналогии с рассматриваемыми в гл. 3—5 формальными рядами также не допускает почленного дифференцирования по t и два раза по x, причем даже в открытой области Q. Поэтому, несмотря на расширение класса допустимых решений (5), при обосновании метода Фурье в смешанной задаче (1)—(6) используются основные концепции, развитые в гл. 1.

Покажем, что формальный ряд (7) определяет некоторую классическую функцию $S(x, t)$, которую, следуя п. 1.3, будем называть формальным решением смешанной задачи (1)—(6). В самом деле, решение задачи Коши (8), (9) есть

$$T_n(t) = \int_0^{t} F_n(\tau) e^{-\omega_n^2 (t-\tau)}\, d\tau. \tag{11}$$

Входящие сюда коэффициенты Фурье $F_n(\tau)$ в силу равномерной сходимости ряда (4.22) ограничены на отрезке $[0, T]$ равномерно по $n \in Z^+$. Отсюда на основе обобщенной теоремы о среднем значении [36, с. 113] находим с учетом оценки (2.37)

$$T_n(t) = [\operatorname{Re} F_n(\xi_n) + \operatorname{Im} F_n(\eta_n)] \int_0^t e^{-\omega_n^2 (t-\tau)} d\tau =$$

$$= \frac{A_n}{\omega_n^2}(1 - e^{-\omega_n^2 t}) = O(n^{-2}), \qquad (12)$$

где $0 \le \xi_n, \eta_n \le t$. Наконец, из асимптотических оценок (3.21) и (12) и непрерывности в $\bar{Q}$ членов ряда (7) следует его равномерная в $\bar{Q}$ сходимость, а значит,

$$S(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) y_n(x) \in C(\bar{Q}). \qquad (13)$$

Относительно известных условий, при выполнении которых решение смешанной задачи (1)—(6) существует, надо сказать следующее. В [14, с. 472] показано, что если для всех $t \in [0, T]$ выполняются граничные условия $f(0, t) = f(\pi, t) = 0$, а частная производная $\frac{\partial f(x, t)}{\partial x}$ кусочно-непрерывна по $x \in [0, \pi]$, то искомое решение может быть представлено в виде повторного интеграла от произведения правой части уравнения (1) на функцию температурного влияния мгновенного точечного источника тепла. Однако, как отмечено в [33, с. 213], вопрос о достаточности этих условий для разрешимости задачи (1)—(6) открыт и требует дополнительного исследования. Кроме того, в качестве следствия из многомерного случая смешанной задачи для уравнения параболического типа [10, с. 86; 59] вытекает, что для разрешимости поставленной задачи достаточно, чтобы функции $q(x)$ и $f(x, t)$ удовлетворяли условию Гельдера по x с показателем $0 < \alpha \le 1$ равномерно по $t \in [0, T]$.

К сожалению, не представляется возможным без введения дополнительных по сравнению с (6) требований к функции $f(x, t)$ доказать существование решения смешанной задачи (1)—(5). Сложность состоит в том, что из простейших асимптотических оценок (3.35) и (12) не очевидна даже возможность получения частной производной $\frac{\partial S(x, t)}{\partial x}$ с помощью почленного дифференцирования ряда (7). В связи с этим усилим требование (6), предположив, что функция $f(x, t)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $0 < \alpha \le 1$ по переменной $t \in [0, T]$ равномерно по $x \in [0, \pi]$:

$$|f(x, t') - f(x, t)| \le B\,|t' - t|^{\alpha} \qquad t, t' \in [0, T], \qquad (14)$$

причем константа B не зависит от x.

Как будет видно ниже из теоремы 6.1, требование (14) с определенным ограничением на величину α и является достаточным условием разрешимости смешанной задачи (1)—(6). Принципиальное отличие его от известных условий существования искомого решения состоит в отказе от каких-либо функциональных требований по переменной x к функции $f(x, t)$ сверх (6).

6.2. Асимптотическая формула коэффициентов Фурье

Исследуем асимптотические (при $n \to +\infty$) свойства интеграла из (11) в предположении (14), используя результаты П. 3. По определению (10) и в силу оценки (3.21)

$$|F_n(t') - F_n(t)| \leq$$
$$\leq \int_0^{\pi} |f(x, t') - f(x, t)|\, |y_n(x)|\, dx \leq L|t' - t|^{\alpha}, \tag{15}$$

причем это свойство выполняется равномерно по $n \in Z^+$, т. е. константа L не зависит от n. Символически это можно записать в виде

$$F_n(t) \in \mathrm{Lip}\, \alpha\, [0, T].$$

Построим для каждого $n \in Z^+$ на отрезке $[0, t]$ описанную в П. 3 кусочно-линейную аппроксимацию $\varphi_n(\tau)$ функции $F_n(\tau) \in \in \mathrm{Lip}\, \alpha\, [0, t]$ с не зависящей от n константой Липшица L из (15). Чтобы воспользоваться основными соотношениями из П. 3, нужно произвести в них замены переменных и функций

$$x = \tau, \qquad [a, b] = [0, t],$$
$$f(x) = F_n(\tau), \quad \varphi(x) = \varphi_n(\tau), \quad g(x) = e^{-\omega_n^2 (t-\tau)},$$
$$G(x) = \frac{1}{\omega_n^2} e^{-\omega_n^2 (t-\tau)}, \qquad \Gamma(x) = \frac{1}{\omega_n^4} e^{-\omega_n^2 (t-\tau)},$$

а всем константам присвоить индекс n. В частности, соответствующие (П. 28) константы

$$M_n = \frac{1}{\omega_n^2}\left(1 - e^{-\omega_n^2 t}\right) \leq \frac{1}{\omega_n^2}\cdot \tag{16}$$

Из сопоставления (П. 33) и (15) видно, что все константы L_n одинаковы и равны L, что существенно упрощает дальнейшие выкладки.

В соответствии с (П. 26) близость функций $\varphi_n(\tau)$ и $F_n(\tau)$ оценивается неравенством

$$|\varphi_n(\tau) - F_n(\tau)| < \varepsilon_n \qquad \forall \tau \in [0, t].$$

Зададим ε_n в виде

$$\varepsilon_n = 1/\omega_n^{\gamma}, \qquad \gamma > 0. \tag{17}$$

Остается только оценить константы D_n, которые в соответствии с (П. 39) и (П. 40) определяются неравенством

$$L\left\{(2L)^{1/\alpha} + \frac{\varepsilon_n^{1/\alpha}}{t}\right\}^{1-\alpha} \leq D_n. \tag{18}$$

Но из асимптотической оценки (2.37) и выражения (17) следует, что $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to +\infty$. Если к тому же величины α и t отделить от нуля сколь угодно малыми числами

$$\mu > 0, \qquad \delta > 0 \tag{19}$$

соответственно, то зависящая от n левая часть неравенства (18) будет ограниченной. Это означает, что все константы D_n можно принять равными некоторой абсолютной константе D.

Теперь $T_n(t)$ из (11) можно оценить для всех $\mu \le \alpha \le 1$ и $t \ge \delta$ с помощью соотношения (П.43) в виде

$$\left| T_n(t) - \frac{F_n(\tau)}{\omega_n^2} e^{-\omega_n^2(t-\tau)} \Big|_0^t \right| \le M_n \varepsilon_n + \frac{D}{\omega_n^4} \varepsilon_n^{1-\frac{1}{\alpha}} e^{-\omega_n^2(t-\tau)} \Big|_0^t.$$

Подставляя сюда выражение M_n из (16) и ε_n из (17) и выполняя элементарные преобразования, получим окончательно

$$T_n(t) = \frac{F_n(t)}{\omega_n^2} - \frac{F_n(0)}{\omega_n^2} e^{-\omega_n^2 t} + O(\omega_n^{-2-\gamma}) + O\left(\omega_n^{-4+\gamma\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)}\right)$$

$$\forall \ \mu \le \alpha \le 1, \quad t \ge \delta. \tag{20}$$

Придадим асимптотической формуле (20) более компактный вид, объединив две последние величины в ее правой части в одну. Вообще говоря, по сравнению с ω_n порядки этих величин

$$n_1 = -2-\gamma, \qquad n_2 = -4+\gamma(1/\alpha - 1)$$

различны, а потому величину меньшего порядка можно присоединить к величине большего порядка. К сожалению, заранее нельзя сказать, какой из указанных порядков n_1 или n_2 меньше. Поэтому ниже придется ввести некоторые дополнительные условия на γ и α, кроме естественных

$$\alpha \ge \mu > 0, \qquad \gamma > 0, \tag{21}$$

содержащихся в определениях (17), (18) и (20).

Прежде всего потребуем, чтобы порядки n_1 и n_2 искомых величин из (20) были меньше -3, т. е.

$$\gamma > 1, \qquad \gamma(1/\alpha - 1) < 1. \tag{22}$$

Смысл этих требований будет очевиден при доказательстве гладкости формального решения $S(x, t)$ в следующем разделе. Оставшимся произволом в выборе чисел γ и α распорядимся так, чтобы найти

$$\underline{\alpha} = \inf \alpha \tag{23}$$

при ограничениях (21) и (22). Из второго неравенства в (22) следует, что $\alpha > \frac{\gamma}{\gamma+1}$, откуда уже имеем решение $\underline{\alpha} = 1/2$ задачи (21)—(23). При этом величина $\alpha = 1/2$ в множестве допустимых значений γ и α не достигается.

Таким образом, для функции $f(x, t)$ показатель Гельдера может быть выбран любым из условия

$$1/2 < \alpha \le 1. \tag{24}$$

Порядки n_1 и n_2 двух последних величин из (20) будут одинаковыми, если задать $\gamma = 2\alpha$. Это позволяет с учетом ограничения (24) редуцировать асимптотическую формулу (20) к виду

$$T_n(t) = \frac{F_n(t)}{\omega_n^2} - \frac{F_n(0)}{\omega_n^2} e^{-\omega_n^2 t} + O\left(\omega_n^{-2(1+\alpha)}\right) \quad \frac{1}{2} < \alpha \le 1, \ t \ge \delta. \tag{25}$$

6.3. Гладкость формального решения

Исследуем дифференциальные свойства формального решения $S(x, t)$ из (13) в предположениях (14) и (24). Уточнение в сравнении с (12) асимптотической оценки коэффициента Фурье $T_n(t)$ в виде (25) позволяет полностью решить вопрос о требуемой гладкости функции $S(x, t)$. С этой целью зафиксируем произвольное число δ из (19) и в соответствии с ним введем два множества:

$$\bar{H}^* = \{t \in [\delta, T]\}, \qquad \bar{Q}^* = \bar{G} \times \bar{H}^*.$$

Теперь уже частную производную $\frac{\partial S(x, t)}{\partial x}$ можно получить путем почленного дифференцирования по x ряда (13), так что с учетом оценок (2.37), (3.35) и (25) имеем всюду в $\bar{Q}^*$

$$\frac{\partial S(x, t)}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) y_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n(t)}{n^2} y_n'(x) -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n(0)}{n^2} e^{-\omega_n^2 t} y_n'(x) + \sum_{n=1}^{\infty} O\left(n^{-1-2\alpha}\right) \in C(\bar{Q}^*). \tag{26}$$

Справедливость первого равенства и включения здесь следует из равномерной в $\bar{Q}^*$ сходимости каждого из трех последних рядов с непрерывными в $\bar{Q}^*$ членами. В самом деле, первый из указанных рядов этим свойством обладает в силу равномерной в $\bar{H}$ сходимости ряда (4.22), оценки (3.35) и леммы П.4. По аналогичным соображениям сходится равномерно в $\bar{Q}^*$ и второй ряд из правой части последнего равенства в (26), так как согласно оценке (2.37) величина $e^{-\omega_n^2 t}$ ограничена в $\bar{H}$ равномерно по $n \in Z^+$. Наконец, в силу условия (24) последний из указанных рядов даже мажорируется в $\bar{Q}^*$ сходящимся числовым рядом

$$A \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-2\alpha}.$$

Однако почленное дифференцирование функционального ряда (13) два раза по x уже недопустимо. Действительно, формальный ряд из вторых производных его членов по x, преобразованный с учетом выражения (2.52) и оценок (2.37), (3.21), (12) и (25) к виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) y_n''(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) y_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(0)\, e^{-\omega_n^2 t} y_n(x) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} O\left(n^{-2\alpha}\right), \qquad (27)$$

может расходиться на достаточно «богатом» множестве точек в $\bar{Q}^*$ хотя бы потому, что первое слагаемое в правой части последнего равенства является рядом Фурье непрерывной функции $-f(x, t)$ по собственным функциям $y_n(x)$ оператора Штурма—Лиувилля. Тем не менее из свойств сходимости ряда (27) в среднем в G можно вывести существование искомой частной производной $\frac{\partial^2 S(x, t)}{\partial x^2}$, основываясь на следующем очевидном обобщении известной [3, с. 347] теоремы о достаточных условиях гладкости суммы функционального ряда на случай двух переменных.

Л е м м а 6.1. Если функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) y_n''(x)$ при каждом $t \in \bar{H}^*$ сходится в $L^2(G)$ к функции $V(x, t) \in C(\bar{Q})^*$, то определяемое рядом (13) формальное решение $S(x, t)$ имеет частную производную

$$\frac{\partial^2 S(x, t)}{\partial x^2} = V(x, t) \in C(\bar{Q}^*). \qquad (28)$$

Для проверки выполнения условий данной леммы применительно к ряду из левой части равенства (27) исследуем сходимость в среднем в G каждого их трех рядов в его правой части. Первый из них для всех $t \in \bar{H}^*$ сходится в $L^2(G)$ к непрерывной в $\bar{Q}^*$ функции $f(x, t)$, так как он является ее рядом Фурье по ортонормальной на $[0, \pi]$ системе $\{y_n(x)\}_1^{\infty}$. Третий ряд сходится даже равномерно в $\bar{Q}^*$ к функции класса $C(\bar{Q}^*)$, поскольку он мажорируется сходящимся числовым рядом $A\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2\alpha}$ и имеет непрерывные в $\bar{Q}^*$ члены.

Для анализа сходимости в среднем в G второго ряда из правой части равенства (27) воспользуемся грубой асимптотической оценкой

$$e^{-\omega_n^2 t} = O(n^{-2}) \qquad t \in [\delta, T], \qquad (29)$$

вытекающей из (2.37). Согласно этой оценке искомый ряд, будучи мажорируемым, сходится равномерно в $\bar{Q}^*$. Резюмируя установленные свойства сходимости рядов (26) и (27), заключаем по лемме 6.1, что формальное решение $S(x, t)$ имеет частную производную вида (28).

Существенно проще доказывается существование в $\bar{Q}^*$ частной производной $\frac{\partial S(x, t)}{\partial t}$, поскольку она получается в результате почленного дифференцирования по t функционального ряда (13). Используя при этом выражение $T'_n(t)$ из уравнения (8) и асимптотические оценки (2.37), (3.21) и (25), найдем

$$\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} T'_n(t) y_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(0) e^{-\omega_n^2 t} y_n(x) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} O(n^{-2\alpha}) \in C(\bar{Q}^*). \tag{30}$$

Корректность такого представления и включения вытекает в силу неравенства (24) и оценки (29) из равномерной в $\bar{Q}^*$ сходимости обоих рядов в правой части последнего равенства и непрерывности их членов в $\bar{Q}^*$.

6.4. Достаточные условия разрешимости задачи

Теорема 6.1. Если функция $f(x, t)$ удовлетворяет условию Гельдера (14) по переменной t с показателем $1/2 < \alpha \le 1$, то смешанная задача (1)—(6) имеет единственное решение в виде ряда Фурье

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x) \int_0^t F_n(\tau) e^{-\omega_n^2 (t-\tau)} d\tau. \tag{31}$$

Для непосредственного доказательства данной теоремы достаточно показать, что функция $S(x, t)$ из (13):

1) принадлежит классу (5);
2) удовлетворяет граничным (3) и начальному (4) условиям;
3) удовлетворяет уравнению (1) в области Q.

Прежде всего из установленных включений (13), (26), (28) и (30) с учетом произвольной малости числа $\delta > 0$ следует включение

$$S(x, t) \in C^{2,1}(\bar{G} \times H') \cap C(\bar{Q}),$$

которое заведомо жестче требования 1. Выполнение требования 2 очевидно в силу представления (13) начального условия (9) и свойства (2.2) собственных функций $y_n(x)$.

Покажем теперь, что формальное решение $S(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1) в $\bar{Q}^*$. Для этого нужно найти точные соотношения между функцией $S(x, t)$ и ее частными производными первого по t и второго по x порядков. Введем вспомогательную функцию

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [F_n(t) - \omega_n^2 T_n(t)] y_n(x) \qquad (x, t) \in \bar{Q}^*. \tag{32}$$

Корректность такого определения основана на вытекающей из оценок (3.21) и (25) и неравенства (24) равномерной в $\bar{Q}^*$ сходимости ряда из правой части равенства (32). Тогда функцию $V(x, t) \in C(\bar{Q}^*)$, к которой при каждом $t \in \bar{H}^*$ сходится в $L^2(G)$

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) y_n''(x)$, можно с учетом выражения (2.52) и равномерной в $\bar{Q}$ сходимости ряда (13) представить в виде

$$V(x, t) = \varphi(x, t) + q(x) S(x, t) - f(x, t) \qquad (x, t) \in \bar{Q}^*. \qquad (33)$$

Аналогично с учетом выражения (8) можно преобразовать и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t) y_n(x) = \varphi(x, t) \qquad (x, t) \in \bar{Q}^*. \qquad (34)$$

Наконец, используя выражения частных производных из (28) и (30) с учетом представлений (33) и (34), получим

$$\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 S(x, t)}{\partial x^2} + q(x) S(x, t) = f(x, t) \qquad (x, t) \in \bar{Q}^*. \qquad (35)$$

Отсюда в силу произвольной малости числа $\delta > 0$ заключаем, что $S(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1) не только в $\bar{Q}^*$, но и на прямом произведении $G \times H'$, а значит, и в Q, т. е. требование 3 также выполняется. Тем самым доказано существование классического решения задачи (1)—(6) в виде ряда (31), единственность которого общеизвестна [4, с. 513]. Это завершает доказательство теоремы 6.1.

В заключение приведем одно тривиальное, но важное в прикладном отношении следствие доказанной теоремы.

Следствие 6.1. Если функция $f(x, t)$ имеет кусочно-непрерывную по t в $\bar{Q}$ частную производную $\frac{\partial f(x, t)}{\partial t}$, то смешанная задача (1)—(6) разрешима.

Действительно, из кусочной непрерывности $\frac{\partial f(x, t)}{\partial t}$ вытекает, что по переменной t функция $f(x, t) \in \mathrm{Lip}[0, T]$ равномерно по $x \in [0, \pi]$, т. е. для нее выполняется условие (24) с показателем $\alpha = 1$.

П. 1. Свойства сходимости функциональных рядов специального вида

Пусть $f(s)$ – функция, принадлежащая пространству $L^2(0, \pi)$, а $\{\xi_n(s)\}_1^\infty$ – полная ортонормальная в $L^2(0, \pi)$ система функций.

Определение. Функцию $f_x(s)$ переменной s назовем x-срезкой заданной на $[0, \pi]$ функции $f(s)$, если

$$f_x(s) = \begin{cases} f(s) & \forall s \in [0, x], \\ 0 & \forall s \in (x, \pi]. \end{cases}$$

Очевидно x-срезка $f_x(s) \in L^2(0, \pi)$. Обозначим $c_n(x)$ ее коэффициент Фурье по системе функций $\{\xi_n(s)\}$, так что

$$c_n(x) = \int_0^\pi f_x(s)\,\bar{\xi}_n(s)\,ds = \int_0^x f(s)\,\bar{\xi}_n(s)\,ds.$$

Отсюда в силу [53, с. 288] имеем $c_n(x) \in C[0, \pi]$ при каждом $n \in Z^+$.

Лемма П. 1. Функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(x)|^2 \tag{1}$$

сходится равномерно по $x \in [0, \pi]$.

В самом деле, поточечная сходимость ряда (1) очевидна в силу [1, с. 70], так как при любом фиксированном $x \in [0, \pi]$ он представляет собой обычный ряд из квадратов модулей коэффициентов Фурье функции класса $L^2(0, \pi)$. Сумма ряда (1) по равенству Парсеваля [1, с. 73]

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(x)|^2 = \|f_x(s)\|^2_{(0,\pi)} = \int_0^x |f(s)|^2\,ds$$

является функцией из $C[0, \pi]$. Тогда по теореме Дини [20, с. 248] сам ряд сходится равномерно по $x \in [0, \pi]$, что и требовалось доказать.

Лемма П. 2. Числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\pi |c_n(x)|^2\,dx < +\infty. \tag{2}$$

Данное утверждение непосредственно следует из леммы П. 1 и теоремы [36, с. 439] о почленном интегрировании функциональных рядов.

Лемма П. 3. Если функция $r(x) \in L^2(0, \pi)$ ограничена на отрезке $[0, \pi]$, то числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_0^{\pi} r(x)\, c_n(x)\, \xi_n(x)\, dx\right|^2 < +\infty. \tag{3}$$

В самом деле, по интегральному неравенству из [13, с. 292] устанавливаем равномерную по $n \in Z^+$ ограниченность интеграла

$$\int_0^{\pi} |r(x)\xi_n(x)|^2 dx \le A \int_0^{\pi} |\xi_n(x)|^2 dx = A.$$

Тогда, применяя к искомому интегралу неравенство Коши—Буняковского [1, с. 33], получим

$$\left|\int_0^{\pi} r(x)\, c_n(x)\, \xi_n(x)\, dx\right|^2 \le \int_0^{\pi} |r(x)\xi_n(x)|^2 dx \int_0^{\pi} |c_n(x)|^2 dx \le$$

$$\le A \int_0^{\pi} |c_n(x)|^2 dx. \tag{4}$$

Используя теперь неравенство (4) для сравнения числовых рядов (2) и (3) с неотрицательными членами, приходим к сходимости искомого ряда.

Л е м м а П. 4. Пусть заданы последовательность равномерно по $n \in Z^+$ ограниченных на $\bar{Q} \times \bar{\Omega}$ функций $p_n(x, t, \tau) \in C(\bar{Q} \in \bar{\Omega})$ и последовательности функций $v_n(\tau) \in C(\bar{\Omega})$ и $\rho_n(x) \in C(\bar{G})$ таких, что ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} |v_n(\tau)|^2 \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\rho_n(x)|^2$$

сходятся равномерно в $\bar{\Omega}$ и $\bar{G}$ соответственно. Тогда функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(\tau)\rho_n(x)p_n(x, t, \tau) \tag{5}$$

сходится равномерно в $\bar{Q} \times \bar{\Omega}$ и имеет там непрерывную сумму.

Доказательство основано на равномерной в $\bar{G} \times \bar{\Omega}$ сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |v_n(\tau)\rho_n(x)|,$$

вытекающей из очевидного неравенства

$$|v_n(\tau)\rho_n(x)| \le \frac{1}{2}\left(|v_n(\tau)|^2 + |\rho_n(x)|^2\right)$$

и самого определения равномерной сходимости функциональных рядов [20, с. 233]. Отсюда в силу неравенства

$$|v_n(\tau)\rho_n(x)p_n(x, t, \tau)| \le B\,|v_n(\tau)\rho_n(x)|$$

следует равномерная в $\bar{Q} \times \bar{\Omega}$ сходимость ряда (5). Заключительное утверждение о непрерывности его суммы вытекает из непрерывности членов этого ряда в $\bar{Q} \times \bar{\Omega}$.

П. 2. О дифференцировании по параметру интегралов с кусочно-непрерывной подынтегральной функцией

Пусть (a, b) — интервал изменения переменной z.

О п р е д е л е н и е. Функцию $\eta(z, \tau)$ назовем кусочно по z непрерывной на прямом произведении $(a, b) \times \bar{\Omega}$, если существует не более конечного числа к точек $z = z_i \in (a, b)$ $(i = 1, 2, \ldots, к)$ таких, что:

1) $\eta(z, \tau)$ определена на $\bigcup\limits_{j=0}^{к} (z_j, z_{j+1}) \times \bar{\Omega}$ $\quad (z_0 = a, z_{к+1} = b)$ и, быть может, на прямых $z = z_i$;

2) $\eta(z, \tau) \in C\left(\bigcup\limits_{j=0}^{к} (z_j, z_{j+1}) \times \bar{\Omega}\right)$;

3) $\eta(z, \tau)$ непрерывна по $\tau \in \bar{\Omega}$ при любом фиксированном z из области ее определения;

4) при любом $\tau \in \bar{\Omega}$ существуют конечные односторонние пределы $\eta(z_i + 0, \tau)$, $\eta(z_i - 0, \tau)$, $\eta(a + 0, \tau)$ и $\eta(b - 0, \tau)$.

В частности, данное определение означает, что искомая функция $\eta(z, \tau)$ в области ее определения ограничена и может иметь лишь конечное число κ разрывов первого рода на прямых $z = z_i$. В предположении, что фигурирующие в данном определении числа a и b удовлетворяют условию

$$a < -T, \qquad b > \pi + T, \tag{6}$$

установим три леммы о гладкости интегралов.

Л е м м а П. 5. Пусть функция $\eta(z, \tau)$ определена и кусочно-непрерывна по z на $(a, b) \times \Omega$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $\int_0^t \eta(x + t - \tau, \tau)\, d\tau \in C(\bar{Q})$,

$\int_0^t \eta(x - t + \tau, \tau)\, d\tau \in C(\bar{Q})$;

2) $\frac{\partial}{\partial x} \int_0^t d\tau \int_0^{x+t-\tau} \eta(z, \tau)\, dz = \int_0^t \eta(x + t - \tau, \tau)\, d\tau$,

$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^t d\tau \int_0^{x-t+\tau} \eta(z, \tau)\, dz = \int_0^t \eta(x - t + \tau, \tau)\, d\tau$;

3) $\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t d\tau \int_0^{x+t-\tau} \eta(z, \tau)\, dz = \int_0^x \eta(z, t)\, dz + \int_0^t \eta(x + t - \tau, \tau)\, d\tau$,

$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t d\tau \int_0^{x-t+\tau} \eta(z, \tau)\, dz = \int_0^x \eta(z, t)\, dz - \int_0^t \eta(x, - t + \tau, \tau)\, d\tau$.

Эти на первый взгляд тривиальные утверждения нуждаются в доказательстве, так как из-за разрывности по z функции $\eta(z, \tau)$ они не следуют прямо из известных теорем [36, с. 752] о непрерывности и дифференцировании по параметру под знаком интеграла.

Первое из утверждений 1 докажем непосредственно с помощью теоремы о среднем значении [36, с. 113], давая бесконечно малые приращения h и v переменных x и t соответственно и заменяя переменную интегрирования $\tau = s + h + v$, а также используя ограниченность функции $\eta(z, \tau)$ и ее непрерывность по второму аргументу:

$$\int_0^{t+v} \eta(x + h + t + v - \tau, \tau)\, d\tau - \int_0^t \eta(x + t - \tau, \tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{-h-v}^{t-h} \eta(x + t - s, s + h + v)\, ds - \int_0^t \eta(x + t - s, s)\, ds =$$

$$= \int_0^t [\eta(x + t - s, s - h - v) - \eta(x + t - s, s)]\, ds + \varepsilon(h, v) = \varepsilon(h, v).$$

Отсюда, имея в виду, что введенная здесь бесконечно малая величина $\varepsilon(h, v) \to 0$ при $h, v \to 0$, следует непрерывность искомого интеграла. Второе из утверждений 1 доказывается аналогично.

Сложнее установить утверждение 2 леммы. С этой целью введем обозначение

$$N(x, t) = \int_0^t d\tau \int_0^{x+t-\tau} \eta(z, \tau)\, dz$$

и воспользуемся непосредственным определением производной этого интеграла по параметру x:

$$\frac{N(x+h, t) - N(x, t)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^t d\tau \int_{x+t-\tau}^{x+t-\tau+h} \eta(z, \tau)\, dz. \tag{7}$$

Зафиксируем здесь x и t и исследуем подробно интеграл

$$I(x + t, \tau, h) = \int_{x+t-\tau}^{x+t-\tau+h} \eta(z, \tau)\, dz.$$

Если τ таково, что $z = x + t - \tau$ есть точка непрерывности функции $\eta(z, \tau)$, то по теореме о среднем значении

$$I(x + t, \tau, h) = h[\eta(x + t - \tau, \tau) + \varepsilon(h)], \tag{8}$$

где бесконечно малая величина $\varepsilon(h)$ равномерна по τ [26, с. 97].

Пусть теперь $z = z_i = x + t - \tau_i$ является точкой разрыва функции $\eta(z, \tau)$. Так как τ меняется в пределах от 0 до $t \le T$, то

$$0 \le x \le z \le x + t \le \pi + T,$$

а значит, в силу (6) $z \in (a, b)$, т. е. согласно введенному выше определению число таких точек разрыва τ_i не более k. Тогда по теореме о среднем значении с учетом ограниченности функции $\eta(z, \tau)$ на $(a, b) \times \Omega$ найдем

$$I(x + t, \tau_i, h) = O(h), \tag{9}$$

где величина $O(h)$, имеющая порядок h, при $h \to 0$ равномерна по τ_i.

Ясно, что интеграл $I(x + t, \tau, h)$, определяемый соотношениями (8) и (9), является интегрируемой по $\tau \in [0, t]$ функцией. Тогда, подставляя его в выражение (7) и используя классические теоремы интегрального исчисления, имеем

$$\frac{N(x,+h,\,t)-N(x,\,t)}{h}=\frac{1}{h}\sum_{i=0}^{\kappa}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} I(x+t,\,\tau,\,h)\,d\tau=$$

$$=\sum_{i=0}^{\kappa}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}[\eta(x+t-\tau,\,\tau)+\varepsilon(h)]\,d\tau=\int_0^t \eta(x+t-\tau,\,\tau)\,d\tau+\varepsilon(h),$$

где $\tau_0=0$, а $\tau_{\kappa+1}=t$. Переходя здесь к пределу при $h\to 0$ и учитывая произвольность x и t, получим первое из утверждений 2. Другое устанавливается аналогично.

Наконец, докажем утверждение 3 леммы П.5. Искомую производную по t функции $N(x,\,t)$ найдем с помощью ее непосредственного определения, используя теорему о среднем значении и выражение (7):

$$\frac{N(x,\,t+h-N(x,\,t)}{h}=\frac{1}{h}\left[\int_0^{t+h}d\tau\int_0^{x+t+h-\tau}\eta(z,\,\tau)\,dz-\right.$$

$$\left.-\int_0^t d\tau\int_0^{x+t-\tau}\eta(z,\,\tau)\,dz\right]=\frac{1}{h}\int_t^{t+h}d\tau\int_0^{x+t+h-\tau}\eta(z,\,\tau)\,dz+$$

$$+\frac{1}{h}\int_0^t d\tau\int_{x+t-\tau}^{x+t+h-\tau}\eta(z,\,\tau)\,dz=\int_0^x\eta(z,\,t)\,dz+$$

$$+\frac{N(x+h,\,t)-N(x,\,t)}{h}+\varepsilon(h).$$

Переходя здесь к пределу при $h\to 0$ и учитывая, что в силу утверждения 2 производная $\frac{\partial N(x,\,t)}{\partial x}$ существует, приходим к первому из утверждений 3. Второе доказывается аналогично. Этим завершается доказательство леммы П.5.

Прежде чем сформулировать следующую лемму, введем обозначения:

$$M(x,\,t)=\int_0^t\eta(x+t-\tau,\,\tau)\,d\tau, \tag{10}$$

$$P(x,\,t)=\int_0^t\eta(x-t+\tau,\,\tau)\,d\tau. \tag{11}$$

Л е м м а П. 6. Пусть $\eta(z,\,\tau)$ определена и кусочно по z непрерывна на $(a,\,b)\times\Omega$. Тогда из существования производной $\frac{\partial M(x,\,t)}{\partial x}\in C(\bar{Q})$ следует существование односторонних частных производных по t функции $M(x,\,t)$, определяемых соотношением

1) $\frac{\partial M(x,\,t\pm 0)}{\partial t}=\eta(x\pm 0,\,t)+\frac{\partial M(x,\,t)}{\partial x}$,

а из существования $\frac{\partial P(x,\,t)}{\partial x}\in C(\bar{Q})$ вытекают аналогичные соотношения

2) $\frac{\partial P(x,\,t\pm 0)}{\partial t}=\eta(x\pm 0,\,t)-\frac{\partial P(x,\,t)}{\partial x}$.

Для доказательства первого утверждения вновь воспользуемся формальным определением частной производной по t функции $M(x,\,t)$ из (10):

$$\frac{M(x, t+h)-M(x, t)}{h} = \frac{1}{h}\int_0^{t+h} \eta(x+t-\tau+h, \tau)\,d\tau -$$

$$-\frac{1}{h}\int_0^t \eta(x+t-\tau, \tau)\,d\tau = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \eta(x+t-\tau+h, \tau)\,d\tau +$$

$$+\frac{1}{h}\int_0^t [\eta(x+t-\tau+h, \tau)-\eta(x+t-\tau, \tau)]\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \eta(x+t-\tau+h, \tau)\,d\tau + \frac{M(x+h, t)-M(x, t)}{h}. \qquad (12)$$

Зафиксируем x и t и исследуем подробно интеграл

$$I_1(x, t, h) + \int_t^{t+h} \eta(x+t-\tau+h, \tau)\,d\tau.$$

Здесь удобнее заменить переменную интегрирования $\tau = s + h$:

$$I_1(x, t, h) = \int_{t-h}^t \eta(x+t-s, s+h)\,ds,$$

так как по второй переменной функция $\eta(z, \tau)$ вообще не имеет разрывов. По условию леммы в каждой точке $x \in [0, \pi]$ существуют односторонние пределы $\eta(x+0, \tau)$ и $\eta(x-0, \tau)$. Поэтому, используя теорему о среднем значении и свойства односторонней непрерывности функции $\eta(z, \tau)$, находим

$$I_1(x, t, h) = \begin{cases} h[\eta(x+0, t)+\varepsilon(h)] & \text{при} \quad h > 0, \\ h[\eta(x-0, t)+\varepsilon(h)] & \text{при} \quad h < 0. \end{cases}$$

Подставляя выражение этого интеграла в правую часть последнего из равенств (12), имеем

$$\frac{M(x, t+h)-M(x, t)}{h} = \frac{M(x+h, t)-M(x, t)}{h} +$$

$$+\begin{cases} \eta(x+0, t)+\varepsilon(h) & \text{при} \quad h > 0, \\ \eta(x-0, t)+\varepsilon(h) & \text{при} \quad h < 0. \end{cases}$$

Наконец, в силу существования производной $\frac{\partial M(x, t)}{\partial x}$ здесь можно выполнить предельный переход при $h \to 0$, в результате которого и получается первое утверждение леммы, поскольку x и t произвольны.

Второе утверждение доказывается аналогично, и достаточно указать лишь различия в соответствующих выкладках. Именно

$$\frac{P(x, t+h)-P(x, t)}{h} = I_2(x, t, h) - \frac{P(x-h, t)-P(x, t)}{-h}, \qquad (13)$$

где интеграл

$$I_2(x, t, h) = \int_{t-h}^t \eta(x-t+s, s+h)\,dx =$$

$$= \begin{cases} h[\eta(x-0, t)+\varepsilon(h)] & \text{при} \quad h > 0, \\ h[\eta(x+0, t)+\varepsilon(h)] & \text{при} \quad h < 0. \end{cases}$$

Переходя в равенстве (13) к пределу при $h \to 0$, получим заключительное утверждение леммы П. 6.

При формулировке последней леммы будем использовать обозначение

$$\frac{\partial\dot{\eta}(z,\tau)}{\partial z}=\frac{\partial\eta(z-0,\tau)}{\partial z}. \qquad (14)$$

По существу, из этого определения следует, что функция $\frac{\partial\dot{\eta}(z,\tau)}{\partial z}$ есть не что иное, как производная $\frac{\partial\eta(z,\tau)}{\partial z}$, доопределенная естественным образом в точках ее разрыва.

Л е м м а П.7. *Пусть функция $\eta(z,\tau)$, определенная на прямом произведении $(a, b)\times\Omega$, кусочно-непрерывна в нем по z вместе со своей производной $\frac{\partial\eta(z,\tau)}{\partial z}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\frac{\partial}{\partial x}\int_0^t\eta(x+t-\tau,\tau)\,d\tau=\int_0^t\frac{\partial\dot{\eta}(x+t-\tau,\tau)}{\partial z}\,d\tau\in C(\bar{Q})$,

2) $\frac{\partial}{\partial x}\int_0^t\eta(x-t+\tau,\tau)\,d\tau=\int_0^t\frac{\partial\dot{\eta}(x-t+\tau,\tau)}{\partial z}\,d\tau\in C(\bar{Q})$.

Докажем первое утверждение. Для этого воспользуемся формальным определением частной производной по x искомой функции:

$$\frac{M(x+h,t)-M(x,t)}{h}=\frac{1}{h}\int_0^t[\eta(x+t-\tau+h,\tau)-$$
$$-\eta(x+t-\tau,\tau)]\,d\tau. \qquad (15)$$

Зафиксируем x и t и исследуем подробно разность $\Delta(x+t,\tau,h)$ подынтегральных функций в (15). Если τ таково, что $z=x+t-\tau$ есть точка непрерывности производной $\frac{\partial\eta(z,\tau)}{\partial z}$, то из формулы Лагранжа [35, с. 226] следует, что

$$\Delta(x+t,\tau,h)=h\left[\frac{\partial\eta(x+t-\tau,\tau)}{\partial z}+\varepsilon(h)\right], \qquad (16)$$

где бесконечно малая величина $\varepsilon(h)\to 0$ при $h\to 0$ равномерно по τ.

Пусть теперь $z=z_i=x+t-\tau_i$ является точкой разрыва производной $\frac{\partial\eta(z,\tau)}{\partial z}$. Как и при доказательстве леммы П.5, в рассматриваемом случае $z\in(a, b)$, т. е. число таких точек разрыва не более κ. Очевидно, что точки разрыва самой функции $\eta(z,\tau)$ содержатся среди точек z_i. Но в силу ограниченности $\eta(z,\tau)$ на $(a, b)\times\bar{\Omega}$

$$\Delta(x+t,\tau_i,h)=O(1) \qquad (17)$$

равномерно по τ_i. Тогда, имея в виду соотношения (16) и (17) и определение (14), преобразуем интеграл в правой части равенства (15) на основе известных теорем интегрального исчисления, так что

$$\frac{M(x+h,\, t)-M(x,\, t)}{h}=\frac{1}{h}\sum_{i=0}^{\kappa}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\Delta(x+t,\, \tau,\, h)\, d\tau=$$

$$=\sum_{i=0}^{\kappa}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\left[\frac{\partial\dot{\eta}(x+t-\tau,\, \tau)}{\partial z}+\varepsilon(h)\right]d\tau=\int_0^t\frac{\partial\dot{\eta}(x+t-\tau,\, \tau)}{\partial z}\, d\tau+\varepsilon(h).$$

Отсюда, переходя к пределу при $h\to 0$ и учитывая лемму П. 5 и произвольность x и t, получим первое утверждение леммы. Второе доказывается аналогично.

П. 3. Одна формула приближенного интегрирования по частям

Рассмотрим интеграл

$$I(f)=\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \tag{18}$$

с подынтегральными функциями

$$f(x),\ g(x)\in C\,[a,\, b]. \tag{19}$$

Очевидно, без ограничения общности можно считать, что для функции $g(x)$ существует первообразная

$$G(x)\geq 0 \qquad \forall x\in[a,\, b]. \tag{20}$$

Если бы $f(x)\in C^1\,[a,\, b]$, то для интеграла (18) имела бы место формула интегрирования по частям

$$I(f)=f(x)\, G(x)\,\Big|_a^b-\int_a^b f'(x)\, G(x)\, dx.$$

Найдем приближенный аналог этой формулы, когда подынтегральная функция $f(x)$ недифференцируема и удовлетворяет только условию (19). С этой целью разобьем отрезок $[a,\, b]$ на N равных частей точками

$$x_i=x_{i-1}+\Delta \qquad \forall\ i=\overline{1,\, N},$$

$$\Delta=\frac{b-a}{N}, \qquad x_0=a, \qquad x_N=b,$$

и построим для функции $f(x)$ кусочно-линейную аппроксимацию $\varphi(x)$, представляющую собой непрерывную ломаную линию из отрезков прямых, так что

$$\varphi(x_0)=f(x_0), \qquad \varphi(x_i)=f(x_i), \tag{21}$$

$$\varphi'(x)=a_i \qquad \forall x\in(x_{i-1},\, x_i), \tag{22}$$

где константы

$$a_i=\frac{\varphi(x_i)-\varphi(x_{i-1})}{\Delta}. \tag{23}$$

Доопределяя естественным образом производную $\varphi'(x)$ в угловых точках ломаной

$$\varphi'(x_i)=\varphi'(x_{i-1}+0),$$

$$\varphi'(x_N) = \varphi'(x_N - 0),$$

можем считать, что аппроксимирующая функция

$$\varphi(x) \in C[a, b] \tag{24}$$

имеет согласно (22) ступенчатую производную

$$\varphi'(x) = \begin{cases} a_i & \forall x \in [x_{i-1}, x_i) \\ a_N & \text{при} \quad x = x_N. \end{cases} \tag{25}$$

Из соотношений (19) и (21) и теоремы Кантора [35, с. 179] о равномерной на $[a, b]$ непрерывности функции $f(x)$ следует, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что

$$|\varphi(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall x \in [a, b]. \tag{26}$$

Величину $I(\varphi)$ можно считать приближенным значением интеграла (18), так как согласно (26)

$$I(f) = I(\varphi) + O(\varepsilon), \tag{27}$$

$$|O(\varepsilon)| < M\varepsilon,$$

где не зависящая от функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ константа

$$M = \int_a^b |g(x)|\, dx. \tag{28}$$

В силу включений (19) и (24) интеграл $I(\varphi)$ можно представить в виде следующей суммы:

$$I(\varphi) = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi(x) g(x)\, dx.$$

В соответствии с (25) каждый из входящих сюда интегралов интегрируется по частям, так что в результате элементарных преобразований имеем

$$I(\varphi) = \sum_{i=1}^{N} \varphi(x) G(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi'(x) G(x)\, dx =$$

$$= \varphi(x) G(x) \Big|_a^b - \int_a^b \varphi'(x) G(x)\, dx.$$

Подставляя это выражение в формулу (27) и имея в виду равенства (21), получим искомую формулу приближенного интегрирования по частям

$$I(f) = f(x) G(x) \Big|_a^b - \int_a^b \varphi'(x) G(x)\, dx + O(\varepsilon). \tag{29}$$

Интеграл в правой части последнего равенства согласно (25) можно представить в эквивалентной форме:

$$\int_a^b \varphi'(x) G(x)\, dx = \sum_{i=1}^{N} a_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} G(x)\, dx. \tag{30}$$

Тогда из (27) и (29) следует используемая в дальнейшем оценка

$$|I(f)-f(x)\,G(x)\,|_a^b\,| \le M\varepsilon + \left|\sum_{i=1}^{N} a_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} G(x)\,dx\right|. \tag{31}$$

Уточним эту оценку в случае, когда исходная функция

$$f(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha\,[a, b], \qquad 0 < \alpha \le 1. \tag{32}$$

Для этого свяжем шаг Δ разбиения отрезка $[a, b]$ на N равных частей с точностью ε приближения функций из (26). По определению существует константа Липшица L такая, что

$$|f(x') - f(x)| \le L\,|x' - x|^{\alpha} \qquad \forall x, x' \in [a, b]. \tag{33}$$

Отсюда с учетом (21) для любых $x \in [x_{i-1}, x_i]$ и $i = \overline{1,N}$ вытекают следующие неравенства:

$$|f(x) - \varphi(x_{i-1})| \le L\,|x - x_{i-1}|^{\alpha} \le L\,\Delta^{\alpha},$$

$$|\varphi(x) - \varphi(x_{i-1})| \le |\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})| \le L\,\Delta^{\alpha}. \tag{34}$$

Тогда на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$

$$|\varphi(x) - f(x)| \le |\varphi(x_{i-1}) - f(x)| + |\varphi(x) - \varphi(x_{i-1})| \le 2L\,\Delta^{\alpha}.$$

Очевидно, что неравенство останется справедливым и на всем отрезке $[a, b]$. Точнее,

$$|\varphi(x) - f(x)| \le 2L\,\Delta^{\alpha} \qquad \forall x \in [a, b]. \tag{35}$$

Отсюда легко видеть, что если величина Δ удовлетворяет условию

$$\Delta < \frac{1}{(2L)^{1/\alpha}}\,\varepsilon^{1/\alpha}, \tag{36}$$

то соотношение (26) выполняется.

Однако для последующего анализа величину Δ надо задать конкретно, а потому в соответствии с (36) выберем число N разбиений отрезка $[a, b]$ в виде

$$N = \left[\frac{(b-a)(2L)^{1/\alpha}}{\varepsilon^{1/\alpha}}\right] + 1.$$

Тогда по определению

$$\Delta = \frac{b-a}{N} = \frac{b-a}{\left[\dfrac{(b-a)(2L)^{1/\alpha}}{\varepsilon^{1/\alpha}}\right] + 1}. \tag{37}$$

Ясно, что определенная таким образом величина Δ удовлетворяет условию (36).

Оценим теперь абсолютные величины угловых коэффициентов a_i, определяемых соотношениями (23). В силу (34) и (37) имеем

$$|a_i| \le L\,\Delta^{\alpha-1} = L\left(\frac{\left[\frac{(b-a)(2L)^{1/\alpha}}{\varepsilon^{1/\alpha}}\right]+1}{b-a}\right)^{1-\alpha} \le$$

$$\le L\left(\frac{\frac{(b-a)(2L)^{1/\alpha}}{\varepsilon^{1/\alpha}}+1}{b-a}\right)^{1-\alpha} = L\left(\frac{(b-a)(2L)^{1/\alpha}+\varepsilon^{1/\alpha}}{\varepsilon^{1/\alpha}(b-a)}\right)^{1-\alpha} =$$

$$= R(\varepsilon,\alpha,b-a)\,\varepsilon^{1-1/\alpha}, \tag{38}$$

где величина

$$R(\varepsilon,\alpha,b-a) = L\left\{(2L)^{1/\alpha}+\frac{\varepsilon^{1/\alpha}}{b-a}\right\}^{1-\alpha}. \tag{39}$$

Очевидно, что если числа $0<\alpha\le 1$ и $b-a>0$ заданы, то при достаточно малых $\varepsilon>0$ величина (39) ограничена некоторой константой. Представляет интерес случай, когда такая константа при любом ограниченном ε не зависит от величин α и $b-a$. Для этого достаточно отделить их от нуля сколь угодно малыми положительными числами μ и δ соответственно. Тогда величина

$$R(\varepsilon,\alpha,b-a)\le D \qquad \forall\mu\le\alpha\le 1,\quad b-a\ge\delta, \tag{40}$$

а оценка (38) запишется в виде

$$|a_i| \le D\,\varepsilon^{1-1/\alpha} \qquad \forall\mu\le\alpha\le 1,\quad b-a\ge\delta. \tag{41}$$

Учитывая найденную оценку и условие (20), имеем

$$\left|\sum_{i=1}^{N}\int_{x_{i-1}}^{x_i} G(x)\,dx\right| \le D\,\varepsilon^{1-1/\alpha}\left|\sum_{i=1}^{N}\int_{x_{i-1}}^{x_i} G(x)\,dx\right| =$$

$$= D\,\varepsilon^{1-1/\alpha}\left|\int_a^b G(x)\,dx\right| = D\,\varepsilon^{1-1/\alpha}\left|\,\Gamma(x)\Big|_a^b\right|, \tag{42}$$

где $\Gamma(x)$ — первообразная для функции $G(x)$. Подставляя выражение (42) в правую часть неравенства (31), получим окончательно

$$\left| I(f) - f(x)\,G(x)\Big|_a^b \right| \le M\varepsilon + D\,\varepsilon^{1-1/\alpha}\left|\Gamma(x)\Big|_a^b\right|$$

$$\forall\mu\le\alpha\le 1,\quad b-a\ge\delta. \tag{43}$$

П. 4. Редукция общей смешанной задачи

Покажем на примере достаточно общей смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения, как свести ее к канонической форме, представленной в гл. 3 и 4. Рассмотрим задачу:

$$u(x,t)\in C^2(\bar{Q}), \tag{44}$$

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\kappa(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] + c(x)\,u(x,t) = f(x,t), \tag{45}$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \tag{46}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x). \tag{47}$$

В случае модельной задачи о колебаниях струны или стержня входящие в уравнение (45) коэффициенты имеют конкретный механический смысл: $\rho(x)$ – линейная плотность, $k(x)$ – модуль Юнга, $c(x)$ – потенциал. Поэтому естественно считать

$$\rho(x), \quad k(x) > 0,$$

$$\rho(x), \quad c(x) \in C[0, \pi],$$

$$k(x) \in C^1[0, \pi].$$

Следуя [32, с. 66], преобразуем вначале дифференциальное уравнение (45) к виду, где отсутствует член с первой производной по x. Для этого введем замену переменных

$$z = \int_0^x \frac{1}{k(s)} ds, \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{k(x)}. \tag{48}$$

Так как под интегралом здесь стоит строго положительная функция, то существует обратная функция $x(z)$ с производной $\frac{dx}{dz} = k(x)$. Ниже будет видно, что для исследования вопроса существования решения смешанной задачи явное выражение самой $x(z)$, а в последующем и $z(\xi)$ необязательно. Достаточно лишь знать дифференциальные свойства обеих функций.

Тогда с учетом обозначений

$$u(x(z), t) = U(z, t), \qquad k(x(z)) = K(z),$$

$$\rho(x(z)) = R(z), \quad c(x(z)) = C(z), \quad f(x(z), t)K(z) = F(z, t)$$

можем записать

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial U(z, t)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{K(z)}\frac{\partial U(z, t)}{\partial z},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right] = \frac{dz}{dx}\frac{\partial}{\partial z}\left[K(z)\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right] = \frac{1}{K(z)}\frac{\partial^2 U(z, t)}{\partial z^2}.$$

Подставляя эти соотношения в уравнение (45), получим

$$p(z)\frac{\partial^2 U(z, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U(z, t)}{\partial z^2} + h(z)U(z, t) = F(z, t), \tag{49}$$

где $p(z) = R(z)K(z), \qquad h(z) = C(z)K(z).$

Теперь, используя известную идею [30, с. 182; 34, с. 210] преобразования для обыкновенных дифференциальных уравнений, приведем уравнение (49) к каноническому виду (4.3). С этой целью, имея в виду, что $p(z) > 0$, введем еще одну замену переменных

$$\xi = \int_0^z g(s) ds, \qquad \frac{d\xi}{dz} = g(z), \qquad v(z, t) = \sqrt{g(z)}\, U(z, t), \tag{50}$$

где $g(z)=\sqrt{p(z)}$. Так как здесь $g(z)>0$, то существует обратная функция $z(\xi)$ с производной $\frac{dz}{d\xi}=\frac{1}{g(z)}$. Обозначая

$$g(z(\xi))=G(\xi), \quad g'(z(\xi))=G_1(\xi), \quad g''(z(\xi))=G_2(\xi),$$

$$v(z(\xi),t)=V(\xi,t), \quad \frac{F(z(\xi),t)}{G(\xi)\sqrt{G(\xi)}}=P(\xi,t), \quad h(z(\xi))=H(\xi),$$

можем записать

$$\frac{\partial U(z,t)}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\frac{v(z,t)}{\sqrt{g(z)}}=\frac{d\xi}{dz}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{V(\xi,t)}{\sqrt{G(\xi)}}\right)=$$

$$=-\frac{G_1(\xi)}{2G(\xi)\sqrt{G(\xi)}}V(\xi,t)+\sqrt{G(\xi)}\frac{\partial V(\xi,t)}{\partial\xi},$$

$$\frac{\partial^2 U(z,t)}{\partial z^2}=\frac{d\xi}{dz}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sqrt{G(\xi)}\frac{\partial V(\xi,t)}{\partial\xi}-\frac{G_1(\xi)}{2G(\xi)\sqrt{G(\xi)}}V(\xi,t)\right)=$$

$$=\frac{G_1(\xi)}{2\sqrt{G(\xi)}}\frac{\partial V(\xi,t)}{\partial\xi}+G(\xi)\sqrt{G(\xi)}\frac{\partial^2 V(\xi,t)}{\partial\xi^2}-$$

$$-\frac{G_2(\xi)\sqrt{G(\xi)}-\frac{3}{2}\frac{G_1^2(\xi)}{\sqrt{G(\xi)}}}{2G^2(\xi)}V(\xi,t)-\frac{G_1(\xi)}{2\sqrt{G(\xi)}}\frac{\partial V(\xi,t)}{\partial\xi}=$$

$$=G(\xi)\sqrt{G(\xi)}\frac{\partial^2 V(\xi,t)}{\partial\xi^2}+\left(\frac{3}{4}\frac{G_1^2(\xi)}{G^2(\xi)\sqrt{G(\xi)}}-\frac{G_2(\xi)}{2G(\xi)\sqrt{G(\xi)}}\right)V(\xi,t).$$

Подставляя найденные соотношения в уравнение (49) с учетом принятых обозначений и деля его почленно на $G(\xi)\sqrt{G(\xi)}$, получим окончательно

$$\frac{\partial^2 V(\xi,t)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 V(\xi,t)}{\partial\xi^2}+q(\xi)V(\xi,t)=P(\xi,t), \tag{51}$$

где $q(\xi)=\frac{1}{G^2(\xi)}\left[H(\xi)+\frac{G_2(\xi)}{2G(\xi)}-\frac{3}{4}\frac{G_1^2(\xi)}{G^2(\xi)}\right]$.

Прежде всего отметим, что для сведения уравнения (45) к виду (51) на основе замены переменных (48) и (50) нужно потребовать дополнительно существования непрерывных вторых производных $\rho''(x)$ и $k''(x)$ от коэффициентов исходного уравнения. Далее, указанные замены переменных трансформируют включение (44) в

$$V(\xi,t)\in C^2(\bar{Q}_T), \tag{52}$$

где $\bar{Q}_T=\bar{G}_T\times\bar{H}$, $\quad \bar{G}_T=\{x\in R^1: 0\le x\le a\}$, $\quad a_1=\int_0^\pi\frac{1}{k(x)}dx$,

$$a=\int_0^{a_1}g(z)\,dz=\int_0^{a_1}\sqrt{R(z)K(z)}\,dz=\int_0^{a_1}\sqrt{\rho(x(z))\,k(x(z))}\,dz=$$

$$=\int_0^\pi\sqrt{\frac{\rho(x)}{k(x)}}\,dx.$$

Остается привести в соответствие с (46) и (47) граничные и начальные условия в новых переменных:

$$\begin{cases} V(0,\, t) = v(0,\, t) = \sqrt{g(0)}\, U(0,\, t) = \sqrt{g(0)}\, u(0,\, t) = 0, \\ V(a,\, t) = v(a_1, t) = \sqrt{g(a_1)}\, U(a_1, t) = \sqrt{g(a_1)}\, u(\pi,\, t) = 0, \end{cases} \tag{53}$$

$$\begin{gathered} V(\xi,\, 0) = v(z(\xi),\, 0) = \sqrt{G(\xi)}\, U(z(\xi), 0) = \\ = \sqrt{G(\xi)}\, \varphi(x(z(\xi))) = \Phi(\xi), \\ \frac{\partial V(\xi,\, 0)}{\partial t} = \frac{\partial v(z(\xi),\, 0)}{\partial t} = \sqrt{G(\xi)}\, \frac{\partial U(z(\xi),\, 0)}{\partial t} = \\ = \sqrt{G(\xi)}\, \psi(x(z(\xi))) = \Psi(\xi). \end{gathered} \tag{54}$$

Таким образом, смешанная задача (44)—(47) приводится к виду (51)—(54), где дифференциальное уравнение содержит только один переменный коэффициент $q(\xi)$, который, вообще говоря, имеет те же свойства гладкости, что и потенциал $c(x)$ исходного уравнения. Аналогичную редукцию можно провести и для других типов уравнений в частных производных, например в параболическом случае.

Литература

1. Б а р и Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
2. Б о л о т и н В. В. Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979.
3. Б у д а к Б. М., Ф о м и н С. В. Краткие интегралы и ряды. М.: Наука, 1967.
4. В л а д и м и р о в В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.
5. Г о д у н о в С. К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.
6. Г о д у н о в С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений//МН. 1961. Т.16, вып. 3. С. 171—174.
7. З и г м у н д А. Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965.
8. З и г м у н д А. Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965.
9. И л ь и н В. А. О разрешимости смешанных задач для гиперболических и параболических уравнений//МН. 1960. Т. 15, вып. 2. С. 97—154.
10. И л ь и н А. М., К а л а ш н и к о в А. С., О л е й н и к О. А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа//МН. 1962. Т. 17, вып. 3. С. 3—146.
11. К а м к е Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971.
12. К о д д и н г т о н Э. А., Л е в и н с о н Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958.
13. К о л м о г о р о в А. Н., Ф о м и н С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968.
14. К о ш л я к о в Н. С., Г л и н е р Э. Б., С м и р н о в М. М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970.
15. К р ы л о в А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950.

16. Л а д ы ж е н с к а я О. А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. М.: Гостехиздат, 1953.

17. Л а д ы ж е н с к а я О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

18. Л е в и т а н Б. М. Теория операторов обобщенного сдвига. М.: Наука, 1973.

19. Л е в и т а н Б. М., С а р г с я н И. С. Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970.

20. Л у з и н Н. Н. Теория функций действительного переменного. М.: Учпедгиз, 1948.

21. М а р ч е н к о В. А. Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова Думка, 1977.

22. М и х а й л о в В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.

23. М и х л и н С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматгиз, 1959.

24. М и х л и н С. Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977.

25. Н а й м а р к М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.

26. Н е м ы ц к и й В. В., С л у д с к а я М. И., Ч е р к а с о в А. Н. Курс математического анализа. Т. 1. М.: ГИТТЛ, 1957.

27. Н е м ы ц к и й В. В., С л у д с к а я М. И., Ч е р к а с о в А. Н. Курс математического анализа. Т. 2. М.: ГИТТЛ, 1957.

28. Н е м ы ц к и й В. В., С т е п а н о в В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л.: ГИТТЛ, 1949.

29. П а н о в к о Я. Г. Основы прикладной теории упругих колебаний. М.: Машгиз, 1957.

30. П е т р о в с к и й И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961.

31. П о л о ж и й Г. Н. Уравнения математической физики. М.: Высшая школа, 1964.

32. С т е к л о в В. А. Основные задачи математической физики. М.: Наука, 1983.

33. Т и х о н о в А. Н., С а м а р с к и й А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.

34. Т р и к о м и Ф. Дифференциальные уравнения. М.: ИЛ, 1962.

35. Ф и х т е н г о л ь ц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Физматгиз, 1962.

36. Ф и х т е н г о л ь ц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Физматгиз, 1962.

37. Х а р д и Г. Х., Р о г о з и н с к и й В. В. Ряды Фурье. М.: Физматгиз, 1962.

38. Ч е р н я т и н В. А. К уточнению теоремы существования классического решения смешанной задачи для одномерного волнового уравнения//Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21. № 9. С. 1569—1576.

39. Ч е р н я т и н В. А. К обоснованию метода Фурье в смешанной задаче для одномерного волнового уравнения//Современные проблемы математического моделирования. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. С. 29—40.

40. Ч е р н я т и н В. А. О необходимых и достаточных условиях существования классического решения смешанной задачи для одномерного волнового уравнения//ДАН СССР. 1986. Т. 287. №5. С. 1080—1083.

41. Ч е р н я т и н В. А. Математические вопросы обоснования метода Фурье. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.

42. Ч е р н я т и н В. А. К проблеме существования решений смешанной задачи для одномерного волнового уравнения//Вестн. Моск. ун-та, Сер. 1, Математика и механика. 1987. № 6. С. 9—21.

43. Ч е р н я т и н В. А. К обоснованию метода Фурье в смешанной задаче для линейных уравнений с частными производными произвольного порядка//Современные проблемы математического моделирования. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. С. 65—79.

44. Чернятин В. А. О разрешимости смешанной задачи для гиперболических уравнений в предельном случае//Математические вопросы нелинейного анализа и управления динамическими системами. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985. С. 45—61.

45. Чернятин В. А. Классическое решение смешанной задачи для неоднородного гиперболического уравнения//Численные методы решения краевых и начальных задач для дифференциальных уравнений. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. С. 17—36.

46. Чернятин В. А. О разрешимости смешанной задачи для одномерного волнового уравнения в предельном случае (тезисы доклада на совместном заседании ММО и семинара им. И. Г. Петровского)//МН. 1985. Т. 40, вып. 5. С. 206.

47. Чернятин В. А. Асимптотическая формула собственных значений оператора Штурма—Лиувилля//Прикладные методы нелинейнего анализа и управления. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. С. 109—117.

48. Чернятин В. А. О классическом решении смешанной задачи для уравнения Шредингера//Прикладные методы нелинейного анализа и управления. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. С. 118—136.

49. Чернятин В. А. К решению одной смешанной задачи для неоднородного уравнения с частными производными четвертого порядка//Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21. №2. С. 343—345.

50. Чернятин В. А. Отыскание периодических решений неоднородной краевой задачи для уравнения с частными производными четвертого порядка//Современные проблемы математического моделирования. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. С. 12—19.

51. Чернятин В. А. К уточнению теоремы существования решения смешанной задачи для неоднородного уравнения теплопроводности//Численный анализ: методы, алгоритмы, программы. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. С. 126-132.

52. Чернятин В. А. О разрешимости смешанной задачи для неоднородного гиперболического уравнения//Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24. №4. С. 717—720.

53. Шилов Г. Е. Математический анализ: специальный курс. М.: Физматгиз, 1961.

54. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 2. М.: Мир, 1985.

55. Эйдельман С. Д., Матийчук М. И. О корректности задач Дирихле и Неймана для параболических уравнений второго порядка с коэффициентами из классов Дини//Укр. математический журнал. 1974. Т. 26. №3. С. 328—337.

56. Borg G. Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilschen Eigenwertaufgabe//Acta Math. 1946. Bd. 78. №1. S. 1—96.

57. Chernyatin V. A. On Necessary and Sufficient Conditions for the Existence of a Classical Solution of a Mixed Problem for the One-Dimensional Wave Equation//Soviet Math. Dokl. 1986. V. 33. №2. P. 511—514.

58. Edwards R. E. A Class of Multipliers//J. Austr. Math. Soc. 1968. V. VIII. P. 584—590.

59. Pogorzelski W. Étude d'une fonction de Green et du probléme aux limites pour l'equation parabolique normale//Polon. Math. 1958. V. 4. № 3. P. 288—307.

60. Tyn Myint — U. Partial Differential Equations of Mathematical Physics. New York, London, Amsterdam: American Elsevier Publishing Co., Inc., 1973.