

Б. Н. ЧЕТВЕРУШКИН

---

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ЗАДАЧ  
ДИНАМИКИ  
ИЗЛУЧАЮЩЕГО  
ГАЗА



МОСКВА «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
1988

ББК 22.19  
Ч. 52  
УДК 519.6

Четверушкин Б. Н. Математическое моделирование задач динамики излучающего газа. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. — 304 с.

Книга посвящена вопросам численного моделирования высокотемпературных газодинамических процессов, которым в настоящее время уделяется большое внимание как в нашей стране, так и за рубежом. В ней рассматриваются алгоритмы решения задач динамики излучающего газа, вопросы, связанные с их постановкой и интерпретацией вычислительного эксперимента.

Для научных сотрудников, аспирантов и инженеров, специализирующихся в области исследования высокотемпературных газодинамических процессов.

Ил. 97. Табл. 6. Библиогр. 229 назв.

Рецензент академик *О. М. Белоцерковский*

*Борис Николаевич Четверушкин*

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ  
ИЗЛУЧАЮЩЕГО ГАЗА

Редактор *Т. Н. Галишникова*

Художественный редактор *Г. М. Коровина*

Технический редактор *Л. В. Лихачева*

Корректоры *О. А. Бугусова, Л. С. Сомова*

ИБ № 12583

Сдано в набор 22.04.85. Подписано в печать 25.12.85. Т--25101.  
Формат 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная.  
Печать высокая. Усл. печ. л. 15,96. Усл. кр.-отг. 15,96. Уч.-изд. л. 18,05.  
Тираж 2100 экз. Заказ 3272. Цена 3 р. 20 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»  
Главная редакция физико-математической литературы  
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Производственно-издательский комбинат ВИНТИ, 140010,  
г. Люберцы, 10, Московской обл., Октябрьский проспект, 403

Ч  $\frac{1702070000-174}{053(02)-85}$  37-85

© Издательство «Наука»,  
Главная редакция  
Физико-математической  
литератур, 1985

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	5
<b>Глава I. Постановка задач динамики излучающего газа</b>	<b>7</b>
§ 1. Основные физические понятия . . . . .	7
§ 2. Уравнение переноса излучения . . . . .	14
§ 3. Уравнения динамики излучающего газа . . . . .	18
<b>Глава II. Приближенные модели, используемые при решении задач динамики излучающего газа</b>	<b>23</b>
§ 1. Трудности, возникающие при численном решении задач динамики излучающего газа . . . . .	23
§ 2. Диффузионное приближение . . . . .	28
§ 3. Приближения лучистой теплопроводности и оптически тонкого слоя . . . . .	34
§ 4. Приближение «серой» материи и случай разделяющихся переменных в коэффициенте поглощения	41
§ 5. Многогрупповое приближение . . . . .	46
<b>Глава III. Методы численного решения одномерных задач динамики излучающего газа</b>	<b>51</b>
§ 1. Уравнения переноса излучения для одномерных геометрий . . . . .	51
§ 2. Основные этапы решения задач динамики излучающего газа . . . . .	57
§ 3. Методы решения уравнения переноса . . . . .	59
§ 4. Методы эффективного понижения размерности уравнения переноса излучения . . . . .	74
§ 5. Совместное решение уравнений, описывающих перенос излучения, и уравнения энергии . . . . .	105
§ 6. Общая схема расчета одномерных задач радиационной газовой динамики . . . . .	124
<b>Глава IV. Методы численного решения многомерных задач динамики излучающего газа</b>	<b>129</b>
§ 1. Математические модели, используемые при решении двумерных задач радиационной газовой динамики	129

§ 2. Некоторые методы решения двумерных уравнений газовой динамики . . . . .	136
§ 3. Разностная аппроксимация уравнений диффузии	147
§ 4. Методы решения систем сеточных уравнений. « $\alpha$ - $\beta$ »-итерационный алгоритм . . . . .	161
§ 5. Некоторые методы численного решения уравнения переноса излучения . . . . .	188
§ 6. Алгоритмы понижения размерности уравнений, определяющих поле излучения в двумерных задачах РГД	202
§ 7. Неявные схемы для определения температуры в двумерных задачах РГД . . . . .	209
§ 8. Общая схема решения двумерных задач РГД . . . . .	212
<b>Глава V. Вычислительный эксперимент в задачах динамики излучающего газа . . . . .</b>	<b>219</b>
§ 1. Моделирование сильноточных излучающих разрядов	219
§ 2. Обтекание затупленных тел потоком излучающего газа . . . . .	248
§ 3. Моделирование процессов, связанных с образованием и развитием лазерной плазмы . . . . .	258
Список литературы . . . . .	290

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В последние два десятилетия в научных исследованиях и технических приложениях все чаще приходится сталкиваться с высокотемпературными газодинамическими явлениями. Перечислим некоторые из них: 1) процессы, происходящие в звездных атмосферах; 2) вхождение летательных аппаратов с большой скоростью в атмосферу планет; 3) сильноточные газовые разряды; 4) лазерная плазма. Естественно, что перечень таких явлений может быть значительно расширен.

Так как излучение, ориентировочно, начинает оказывать существенное влияние на весь ход процесса, когда температура газа достигает 10 000 К, то во многих задачах, описывающих перечисленные выше явления, уже невозможно определить газодинамические параметры, не зная радиационных полей, и, наоборот, нельзя определить поле излучения, не зная газодинамических полей. Процессы, в которых излучение существенно влияет на всю картину явления, получили название задач динамики излучающего газа или радиационной газовой динамики, сокращенно РГД.

Экспериментальное исследование задач радиационной газовой динамики сталкивается со значительными трудностями. Это связано в первую очередь с экспериментальными условиями, в которых приходится проводить данные исследования: высокие температуры, давления и скорости протекающих процессов. В подобной ситуации роль численного моделирования становится исключительно высокой. Расчет позволяет по-новому взглянуть на данные натуральных экспериментов, связать в единое целое разрозненные результаты измерений, а иногда и обнаружить качественно новые физические явления. В свою очередь успех математического моделирования задач РГД в значительной мере определяется наличием эффективных методов численного решения соответствующих уравнений.

В последние десятилетия методы решения задач динамики излучающего газа, несмотря на имеющиеся серьезные вычислительные трудности, бурно развивались. Естественно, что при решении задач динамики излучающего газа используются алгоритмы и подходы, разработанные в смежных областях, таких как нейтронная физика и газовая динамика. Однако тесная взаимосвязь газодинамического поля и поля излучения, необходимость решения многомерного кинетического уравнения на каждом шаге по времени, некоторые отличия между уравнениями переноса фотонов и переноса нейтронов не позволяют строить алгоритмы решения задач РГД путем механического объединения ранее предложенных методов. Этот факт, а также необходимость решения большого количества задач, имеющих важное практическое значение, позволяют выделить методы решения задач динамики излучающего газа в одно из направлений современной вычислительной математики.

Несмотря на значительные успехи, вопросы, связанные с численным моделированием задач динамики излучающего газа, не нашли еще достаточного отражения в монографической литературе. В данной книге делается попытка восполнить пробел, уделив основное внимание методам решения уравнений радиационной газовой динамики, а также исследованию с их помощью путем расчета на ЭВМ некоторых задач, имеющих важное научно-техническое значение.

Следует отметить, что успешное моделирование задач динамики излучающего газа возможно лишь при использовании общих принципов вычислительного эксперимента, который наряду с разработкой численных алгоритмов включает в себя физический анализ полученных результатов, тщательный выбор и корректировку используемой математической модели.

Автор считает своим долгом выразить искреннюю благодарность академику А. А. Самарскому за проявленное внимание к работе и ряд ценных замечаний, сделанных им в процессе написания книги, а также В. Я. Гольдину, Н. Н. Калиткину, В. И. Мажукину, Д. А. Гольдиной и М. И. Волчинской, с которыми автора связывает многолетнее творческое сотрудничество.

*Б. Н. Четверушкин*

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ИЗЛУЧАЮЩЕГО ГАЗА

В этой главе рассматривается система уравнений динамики излучающего газа, вводятся основные физические понятия, необходимые для дальнейшего изложения. Материал главы носит справочный характер, зачастую приводится без должного обоснования и имеет целью облегчение дальнейшего чтения книги. Более подробное изложение можно найти в монографиях Я. Б. Зельдовича и Ю. П. Райзера [100], Байши-и [27], Д. Сэмпсона [178], Г. А. Тирского и Н. Н. Пилюгина [179].

### § 1. Основные физические понятия

1. **Интенсивность, плотность и поток энергии излучения.** Тепловое излучение может быть определено как колебание электромагнитного поля. Эти колебания определяются частотой  $\nu$  и длиной волны  $\lambda$ , которые связаны между собой соотношением  $\nu = c/\lambda$ , где  $c$  — скорость света.

Длину волн для теплового излучения обычно измеряют в ангстремах ( $1 \text{ \AA} = 10^{-8}$  см) или микрометрах ( $1 \text{ мкм} = 10^{-6}$  м). Частоты измеряются в герцах (Гц). Частота в один герц соответствует одному колебанию в секунду. Для видимого света длины волн и частоты изменяются в пределах  $4 \cdot 10^3 \text{ \AA} \leq \lambda \leq 7 \cdot 10^3 \text{ \AA}$ ;  $7,5 \cdot 10^{14} \text{ Гц} \geq \nu \geq 4,3 \cdot 10^{14} \text{ Гц}$ .

С точки зрения квантовой механики излучение представляет собой совокупность фотонов — частиц, энергия которых может быть определена с помощью выражения  $\epsilon = h\nu$ ,  $h = 6,62 \cdot 10^{-27}$  эрг\*с — постоянная Планка. Импульс кванта по абсолютной величине равен  $h\nu/c$ . Масса покоя фотона равна нулю.

Взаимно однозначное соответствие между частотой и энергией кванта позволяет использовать энергетические единицы измерения. Как правило, такой единицей является электронвольт ( $1 \text{ эВ} = 1,6 \times 10^{-12} \text{ эрг}$ ). Излучение видимого света изменяется в диапазоне частот  $3,13 \text{ эВ} > h\nu > 1,7 \text{ эВ}$ . В радиационной газовой динамике в электронвольтах обычно определяют и температуру ( $1 \text{ эВ} = 11\,600 \text{ К}$ ).

Введем понятие функции распределения световых квантов  $f$ . Число световых квантов  $N_{\text{кв}}$ , находящихся в спектральном интервале от  $\nu$  до  $\nu + d\nu$ , движущихся в элементе телесного угла  $d\Omega$  около направления  $\Omega$  и расположенных в момент времени  $t$  в элементе объема  $d\mathbf{r}$  вблизи точки  $\mathbf{r}$ , будет равно

$$N_{\text{кв}} = f(\mathbf{r}, \Omega, \nu, t) d\nu d\mathbf{r} d\Omega. \quad (1.1)$$

Количество лучистой энергии  $I_\nu$ , протекающей в единицу времени через поверхность единичной площади, расположенной перпендикулярно направлению  $\Omega$ , в спектральном интервале  $d\nu$  и телесном угле  $d\Omega$ , равно

$$I_\nu(\mathbf{r}, \Omega, \nu, t) d\nu d\Omega = h\nu c f(\mathbf{r}, \Omega, \nu, t) d\nu d\Omega. \quad (1.2)$$

Поле излучения может быть полностью определено с помощью функции  $I_\nu$  — спектральной интенсивности излучения.

Количество лучистой энергии частоты  $\nu$ , находящейся в единице объема, равно

$$U_\nu(\mathbf{r}, \nu, t) = h\nu \int f d\Omega = \frac{1}{c} \int I_\nu d\Omega. \quad (1.3)$$

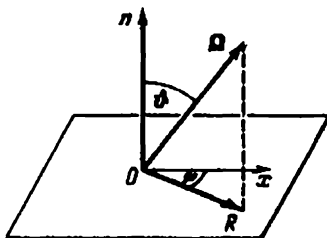
Интегрирование в (1.3) ведется по полному телесному углу. Величина  $U_\nu$  называется *спектральной плотностью излучения*.

Полное количество лучистой энергии частоты  $\nu$ , протекающей через поверхность единичной площади в единицу времени, расположенной перпендикулярно направлению  $\mathbf{n}$ , равно

$$\begin{aligned} W_{\nu n}(\mathbf{r}, \nu, t) &= h\nu c \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi f \cos \vartheta d\vartheta = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi I_\nu \cos \vartheta d\vartheta, \quad (1.4) \end{aligned}$$

где  $\theta$  — угол между направлением полета фотона и нормалью к поверхности (рис. 1). Величина  $W_{\nu, n}$  получила название *плотности спектрального потока энергии излучения в направлении  $n$* . (В дальнейшем вместо плотности потока энергии излучения будем употреблять термин «поток энергии».)

Рис. 1. К определению потока энергии излучения:  $\theta$  — угол между направлением полета фотона и нормалью,  $\varphi$  — угол между осью  $x$  и проекцией на площадку направления полета фотона



Поток энергии излучения есть величина векторная. Этот вектор определяется с помощью соотношения

$$W_{\nu} = \int I_{\nu} \Omega d\Omega, \quad (1.5)$$

где  $\Omega$  — единичный вектор телесного угла.

В динамике излучающего газа наряду со спектральными значениями интенсивности энергии излучения, плотности и потока часто используются проинтегрированные по всем частотам полные значения этих величин:

$$I = \int_0^{\infty} I_{\nu} d\nu, \quad U = \int_0^{\infty} U_{\nu} d\nu, \quad W = \int_0^{\infty} W_{\nu} d\nu. \quad (1.6)$$

**2. Равновесное излучение.** Простейшим случаем состояния среды является состояние термодинамического равновесия при постоянной температуре  $T$ . Равновесное излучение изотропно и зависит только от частоты и температуры среды.

Формула, описывающая поведение спектральной плотности равновесного излучения  $U_{\nu p}$ , была выведена Планком:

$$U_{\nu p} = 8\pi h\nu^3 / [c^3 (\exp\{h\nu/(kT)\} - 1)]. \quad (1.7)$$

Преобразуем выражение (1.7), введя новую переменную  $x = h\nu/(kT)$ . Получим

$$U_{\nu p} = 8\pi k^3 T^3 x^3 / [c^3 h^2 (e^x - 1)]. \quad (1.8)$$

Зависимость  $U_{\text{вр}}$  от частоты  $x$  определяется только членом  $\varphi(x) = x^3/(e^x - 1)$  (рис. 2).

При малых частотах  $x \ll 1$  для плотности энергии излучения получим формулу Рэлея—Джинса:

$$U_{\text{вр}} = \frac{8\pi kT}{c^3} \nu^2, \quad (1.9)$$

а для больших частот  $x \gg 1$  получим формулу Вина:

$$U_{\text{вр}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \exp\left\{-\frac{h\nu}{kT}\right\}. \quad (1.10)$$

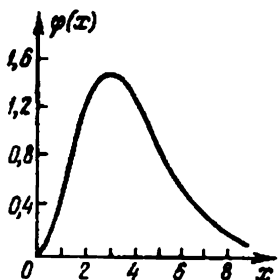


Рис. 2. Функция  $\varphi(x) = x^3/(e^x - 1)$

Функция  $\varphi(x)$  имеет максимум при  $x = 2,82$ . Это означает, что наиболее интенсивно нагретое тело будет излучать на частотах, которые связаны с его температурой соотношением  $h\nu \approx 3 kT$ . Так, газ, температура которого находится в диапазоне  $6500 \text{ К} \div 13000 \text{ К}$ , будет в основном излучать видимую часть спектра. Тела, нагретые до более

низких температур, будут в основном испускать невидимое глазом инфракрасное излучение, а нагретые до более высоких температур — ультрафиолетовое и рентгеновское излучения. На рис. 3 изображена схема, поясняющая виды теплового излучения, их диапазоны по частоте и длинам волн и характерные температуры [102].

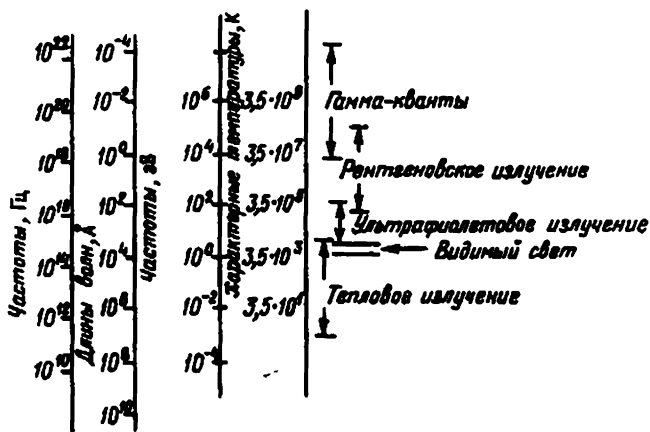


Рис. 3. Виды теплового излучения

Ввиду изотропии равновесного излучения интенсивность энергии излучения одна и та же по всем направлениям и равна

$$I_{\nu p} = \frac{cU_{\nu p}}{4\pi} = 2h\nu^3 / \left[ c^2 \left( \exp \left\{ \frac{h\nu}{kT} \right\} - 1 \right) \right]. \quad (1.11)$$

В силу той же изотропии поток энергии равновесного излучения равен нулю:

$$W_{\nu p} = \int \Omega I_{\nu p} d\Omega = 0. \quad (1.12)$$

Полная плотность равновесного излучения может быть получена интегрированием (1.7) по всем частотам:

$$U_p = \int_0^{\infty} U_{\nu p} d\nu = \frac{8\pi k^4 T^4}{c^3 h^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{4\sigma T^4}{c}, \quad (1.13)$$

где

$$\sigma = \frac{2\pi k^4}{c^2 h^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2} = 5,67 \cdot 10^{-5} \text{ эрг}/(\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{град}^4)$$

— постоянная *Стефана—Больцмана*. Из (1.13) видно, что полная плотность энергии равновесного излучения сильно зависит от температуры.

**3. Коэффициент поглощения и длина свободного пробега.** При прохождении света через слой вещества толщиной  $dx$  происходит его частичное поглощение и рассеяние. Ослабление пучка в этом случае пропорционально интенсивности излучения и геометрическим размерам слоя:

$$dI_{\nu} = -K_{\nu} I_{\nu} dx. \quad (1.14)$$

Коэффициент пропорциональности  $K_{\nu}$  называется *коэффициентом ослабления света частоты  $\nu$* .

Интегрируя уравнение (1.14) по толщине слоя от левой границы с координатой, равной 0, на которую падает излучение  $I_{\nu 0}$ , до точки с координатой  $x$ , получим

$$I_{\nu} = I_{\nu 0} \exp \left\{ - \int_0^x K_{\nu} dx' \right\}. \quad (1.15)$$

Равенство (1.15) известно как *закон Бугера*. Согласно этому закону интенсивность монохроматического излучения вдоль некоторого направления экспоненциально уменьшается.

Ослабление света определяется процессами поглощения фотонов частоты  $\nu$  и их рассеяния. Они характеризуются коэффициентами поглощения  $\kappa_\nu$  и рассеяния  $\kappa_{\nu s}$  ( $K_\nu = \kappa_\nu + \kappa_{\nu s}$ ).

При рассеянии происходит изменение направления полета фотона. Этот эффект, как правило, начинает играть сопоставимую с поглощением роль либо при очень высоких температурах  $T \geq 1$  кэВ ( $1 \text{ кэВ} = 1000 \text{ эВ} = 1,16 \cdot 10^7 \text{ К}$ ) и низких плотностях вещества, либо при прохождении света через замутненные среды. В дальнейшем для рассматриваемых в данной книге процессов будем пренебрегать рассеянием и учитывать только поглощение излучения.

При поглощении фотона происходит переход атомов, ионов и свободных электронов с одного энергетического уровня на другой, более высокий. Выделяются три типа процессов, определяющих поглощение: связанно-связанные, свободно-связанные и свободно-свободные переходы.

Связанно-связанные процессы определяются поглощением фотонов, которое приводит к переходу с одного дискретного энергетического уровня на другой.

Если энергия фотона достаточна для отрыва электрона, то происходит фотоионизация, которая определяет свободно-связанные переходы. Свободный электрон может обладать произвольной энергией, поэтому связанно-свободные переходы дают непрерывный спектр поглощения.

Свободный электрон может поглотить световой квант, увеличив при этом свою энергию. Свободно-свободные переходы также дают непрерывный спектр поглощения. Часто свободно-свободные процессы называются *тормозными*.

Величина, обратная коэффициенту поглощения  $\kappa_\nu$ , называется *длиной свободного пробега*  $l_\nu$ ,  $l_\nu = 1/\kappa_\nu$ . Она характеризует то среднее расстояние, которое проходит фотон частоты  $\nu$ , не поглощаясь веществом.

Перепишем (1.15), учитывая только процессы поглощения:

$$I_\nu = I_{\nu 0} \exp \left\{ - \int_0^x \kappa_\nu dx' \right\}.$$

Величина  $\tau_\nu = \int_0^x \kappa_\nu dx'$  называется *оптической тол-*

щиной слоя для излучения частоты  $\nu$ . Оптическая толщина характеризует ослабление излучения при прохождении через этот слой.

4. **Спонтанное и вынужденное испускание.** Наряду с поглощением нагретое вещество может самопроизвольно (спонтанно) излучать энергию. Излучение обусловлено переходом молекул, атомов, ионов и электронов из одного состояния в другое, характеризующее меньшей энергией. Перечислим процессы, приводящие к излучению фотонов.

Энергия излучается при торможении электронов в кулоновском поле иона (свободно-свободные переходы). Испускание фотонов происходит при процессах рекомбинации, когда понижается кратность иона, а электрон переходит из свободного состояния в связанное. Кванты также испускаются, когда происходит переход с одного возбужденного уровня на другой с меньшей энергией (связанно-связанные переходы). Процессы излучения энергии в известном смысле обратны процессам поглощения фотонов.

Молекулы, атомы, электроны движутся в пространстве хаотическим образом, поэтому энергия излучается ими одинаково во всех направлениях. Количество энергии излучения частоты  $\nu$  в единичном интервале частот, самопроизвольно (спонтанно) испускаемой в единицу времени единицей объема, называется *лучеиспускательной способностью вещества* или *коэффициентом излучения*  $j_\nu$ .

Помимо спонтанного существует еще и *вынужденное, индуцированное испускание*. Оно связано с тем, что вероятность испускания кванта  $h\nu$  возрастает, если на атомную систему действует поле излучения частоты  $\nu$ . Вероятность такого индуцированного испускания пропорциональна интенсивности излучения  $I_\nu$ . В квантовой теории показывается, что полное количество энергии  $\mathcal{U}_\nu$ , испускаемой в единицу времени единицей объема в интервале  $d\nu d\Omega$ , равно [100, 102]

$$\mathcal{U}_\nu = i_\nu \left( 1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I_\nu \right) d\nu d\Omega, \quad (1.16)$$

где  $i_\nu = j_\nu / (4\pi)$  — коэффициент излучения, рассчитанный на единицу телесного угла. Величина  $i_\nu d\nu d\Omega$  соответствует спонтанному испусканию энергии, а  $i_\nu \frac{c^2}{2h\nu^3} I_\nu d\nu d\Omega$  — индуцированному испусканию.

## § 2. Уравнение переноса излучения

1. Вывод уравнения переноса. Выведем уравнение переноса излучения для интенсивности энергии излучения  $I_\nu(r, \Omega, \nu, t)$ . Выделим ось, параллельную направлению  $\Omega$  и проходящую через точку  $r$ . Вдоль оси цилиндра введем характеристическую координату  $s$ . За время  $dt$  луч света частоты  $\nu$ , идущий вдоль направления  $\Omega$ , проходит расстояние  $ds = c dt$  (рис. 4).

Рассмотрим цилиндр с площадью основания  $d\sigma$ , высотой  $ds$  и образующей, параллельной направлению  $\Omega$ . Общее количество излучения  $\Delta I_\nu$ , оставшееся в цилиндре за время  $dt$ , равно

$$\Delta I_\nu = I_\nu(r, \Omega, \nu, t) d\nu d\Omega d\sigma dt - (I_\nu + dI_\nu) d\nu d\Omega d\sigma dt.$$

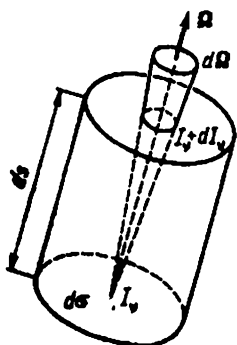


Рис. 4. Баланс излучения

Здесь  $I_\nu$  — интенсивность энергии излучения, вытекающей в цилиндр через нижнее основание, а  $I_\nu + dI_\nu$  — интенсивность энергии излучения, вытекающей через верхнее основание. Через боковую поверхность цилиндра энергия излучения не переносится, так как рассматриваются только лучи, лежащие в малом телесном угле  $d\Omega$  вблизи направления  $\Omega$ . Величина  $\Delta I_\nu$  определяется только процессами поглощения и испускания излучения в объеме цилиндра. Количество поглощенной энергии равно  $\kappa_\nu I_\nu d\nu d\Omega d\sigma dt ds$ , а излученной с учетом вынужденного испускания равно  $l_\nu \left(1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I_\nu\right) d\nu d\Omega d\sigma dt ds$ . Баланс энергии в цилиндре будет определяться выражением

$$\Delta I_\nu = \left[ \kappa_\nu I_\nu - l_\nu \left(1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I_\nu\right) \right] d\nu d\Omega d\sigma ds dt. \quad (2.1)$$

Представим  $\Delta I_\nu = -dI_\nu d\nu d\Omega d\sigma dt$  в виде

$$\Delta I_\nu = - \left[ \frac{\partial I_\nu}{\partial t} dt + \frac{\partial I_\nu}{\partial s} ds \right] d\nu d\Omega d\sigma dt.$$

Тогда, учитывая, что  $dt = ds/c$ ,  $\Omega \text{ grad } I_\nu = \partial I_\nu / \partial s$ , из (2.1) получим

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \Omega \text{ grad } I_\nu + \kappa_\nu I_\nu = l_\nu \left(1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I_\nu\right). \quad (2.2)$$

Уравнение (2.2) описывает перенос излучения при отсутствии рассеяния.

Дополним уравнение (2.2) граничными условиями. Они должны определять только излучение, приходящее извне в исследуемый объем. В случае выпуклых областей для направлений  $\Omega$ , входящих в рассматриваемую область  $D$ , имеет место неравенство  $(\Omega, n) < 0$ , где  $n$  — вектор

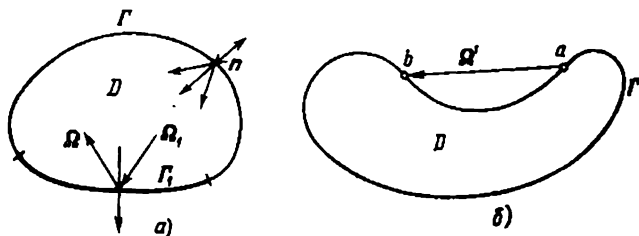


Рис. 5. а) Граничные условия для выпуклых областей. На участке границы  $\Gamma_1$  происходит зеркальное отражение фотонов. б) Граничные условия для невыпуклых областей

внешней нормали к границе  $\Gamma$  (рис. 5, а). Граничное условие на  $\Gamma$  примет вид

$$I_{\nu}(\Gamma, \Omega, \nu, t) = I_{\nu}^*(\Gamma, \Omega, \nu, t), \quad (\Omega, n) < 0. \quad (2.3)$$

Здесь  $I_{\nu}^*$  — известная функция, определяющая приходящее извне излучение. Очень часто используют граничное условие вида

$$I_{\nu}(\Gamma, \Omega, \nu, t) = 0, \quad (\Omega, n) < 0. \quad (2.4)$$

Условие (2.4) соответствует тому, что источники излучения находятся только внутри области  $D$ .

Если поверхность  $\Gamma$  не выпукла (рис. 5, б), то для лучей  $\Omega'$ , дважды пересекающих область  $D$ , следует использовать граничное условие вида

$$I_{\nu}(b, \Omega', \nu, t) = I_{\nu}(a, \Omega', \nu, t), \quad (2.5)$$

где  $b$  — текущая точка поверхности,  $a$  — точка поверхности, из которой в точку  $b$  приходит излучение, имеющее направление  $\Omega'$ . При этом предполагается, что вне области  $D$  излучение не поглощается.

Иногда часть границы области  $\Gamma_1$  отражает выходящее из объема излучение. Такая ситуация может, например, иметь место, когда высокотемпературная газовая среда граничит с гладкой металлической поверх-

ностью. Простейшим случаем отражения является зеркальное отражение. При этом отражение происходит по законам классической оптики:

$$I_{\nu}(\Gamma_1, \Omega, \nu, t) = \delta I_{\nu}(\Gamma_1, \Omega_1, \nu, t),$$

где  $\Omega_1$  — симметричное к  $\Omega$  относительно нормали направление,  $\delta$  — коэффициент отражения,  $0 \leq \delta \leq 1$ .

Уравнение (2.2) с граничными условиями (2.3) или (2.5) необходимо дополнить условием  $I_{\nu}(r, \Omega, \nu, 0) = I_{\nu}^0(r, \Omega, \nu)$ ,  $r \in D$ , характеризующим значение начальной интенсивности энергии излучения.

2. Квазистационарное уравнение переноса. Оценим порядки величин членов, входящих в дифференциальную часть уравнения переноса (2.2). Для локальной производной по времени  $\frac{1}{c} \frac{\partial I_{\nu}}{\partial t}$  получим  $\frac{1}{c} \frac{\partial I_{\nu}}{\partial t} \sim \frac{I}{ct_0}$ , где  $I$  — характерное значение интенсивности,  $t_0$  — характерное время задачи. Пространственные производные могут быть оценены следующим образом:  $\Omega \text{ grad } I_{\nu} \sim I/L$ ,  $L$  — характерный размер. Отношение локальной производной по времени к пространственной производной по порядку величины равно  $ct_0/L$ . В свою очередь величина  $L/c$  по порядку величины совпадает с  $t_n$  — временем, за которое свет проходит исследуемый объем. Таким образом, получим оценку

$$\left( \frac{1}{c} \frac{\partial I_{\nu}}{\partial t} \right) / (\Omega \text{ grad } I_{\nu}) \sim \frac{t_n}{t_0}. \quad (2.6)$$

Оценка (2.6) означает, что уравнение переноса принимает квазистационарную форму

$$\Omega \text{ grad } I_{\nu} + \kappa_{\nu} I_{\nu} = i_{\nu} \left( 1 + \frac{c^2}{2h\nu^2} I_{\nu} \right) \quad (2.7)$$

в случае, когда свет проходит рассматриваемую область за время, много меньшее, чем характерное время задачи  $t_0$ . Из квазистационарности уравнения (2.7) следует, что поле излучения мгновенно подстраивается под распределение параметров среды и не зависит от своей предыстории.

3. Уравнение переноса для случая локального термодинамического равновесия. Рассмотрим случай термодинамического равновесия в среде. В этих условиях количество лучистой энергии, поглощенной объемом элементарного цилиндра (рис. 4) в единицу времени в частотном интервале  $d\nu$  и телесном угле  $d\Omega$ , будет в

точности равно энергии, испущенной веществом:

$$i_{\nu} \left( 1 + \frac{c^2}{2h\nu^2} I_{\nu} \right) d\nu d\Omega d\sigma ds = \kappa_{\nu} I_{\nu} d\nu d\Omega d\sigma ds. \quad (2.8)$$

Для интенсивности равновесного излучения  $I_{\nu}$  воспользуемся выражением (1.11) и перепишем равенство (2.8) в виде

$$\begin{aligned} \frac{i_{\nu}}{\kappa_{\nu}} &= I_{\nu p} \left( 1 + \frac{c^2}{2h\nu^2} I_{\nu p} \right)^{-1}, \\ I_{\nu p} &= \frac{2h\nu^3}{c^2} \left( \exp \left\{ \mp \frac{h\nu}{kT} \right\} - 1 \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Выражение (2.9) является одной из форм закона Кирхгофа, который гласит, что в условиях термодинамического равновесия отношение коэффициента излучения к коэффициенту поглощения есть функция температуры и частоты и не зависит от природы тела.

Из (2.9) следует, что спонтанное испускание излучения в случае термодинамического равновесия может быть определено следующим образом:

$$i_{\nu} = \kappa_{\nu} \left( 1 - \exp \left\{ - \frac{h\nu}{kT} \right\} \right) I_{\nu p}. \quad (2.10)$$

Спонтанное излучение характеризуется только процессами, происходящими в самом веществе.

Обычно термодинамическое равновесие в веществе ввиду большой частоты столкновений между составляющими его частицами устанавливается очень быстро, поэтому можно говорить о *локальном термодинамическом равновесии* (ЛТР) в каждой точке пространства; занимаемого веществом. Перепишем уравнение переноса (2.2) для случая ЛТР, группируя члены с множителем  $I_{\nu}$  и используя выражение (2.10) для  $i_{\nu}$ . В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial I_{\nu}}{\partial t} + \Omega \operatorname{grad} I_{\nu} + \kappa_{\nu} \left( 1 - \exp \left\{ - \frac{h\nu}{kT} \right\} \right) I_{\nu} = \\ = \kappa_{\nu} \left( 1 - \exp \left\{ - \frac{h\nu}{kT} \right\} \right) I_{\nu p}. \end{aligned}$$

Величину  $\kappa'_{\nu} = \kappa_{\nu} \left( 1 - \exp \left\{ - \frac{h\nu}{kT} \right\} \right)$  назовем *коэффициентом поглощения, подправленным на вынужденное испускание*. С учетом этого обозначения уравнение переноса для случая локального термодинамического

равновесия примет окончательный вид

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_{\nu}}{\partial t} + \Omega \operatorname{grad} I_{\nu} + \kappa'_{\nu} I_{\nu} = \kappa'_{\nu} I_{\nu p}. \quad (2.11)$$

Вынужденное испускание фактически уменьшает истинный коэффициент поглощения. Коэффициент  $\kappa'_{\nu}$  для случая ЛТР является функцией только частоты, температуры и плотности.

В следующих главах при рассмотрении переноса используется только коэффициент поглощения, подправленный на вынужденное испускание, который в дальнейшем будем именовать просто *коэффициентом поглощения*  $\kappa_{\nu}$ .

Коэффициент излучения  $i_{\nu}$  в случае отсутствия ЛТР в веществе определяется через произведение заселенности соответствующих энергетических уровней на коэффициенты Эйнштейна для спонтанного излучения [100]. Определение этих величин представляет собой самостоятельную сложную задачу и выходит за рамки настоящей книги. Однако в ряде случаев коэффициент излучения может быть сведен к виду, близкому к (2.10), и в отсутствие локального термодинамического равновесия в веществе [21]. Это, в частности, относится к тем процессам, когда отклонение от ЛТР сводится лишь к отличию температуры электронов  $T_e$  от температуры ионов  $T_i$ . Если коэффициенты поглощения  $\kappa_{\nu}$  и излучения  $i_{\nu}$  зависят только от температуры электронов, то и в этом случае для описания процессов переноса излучения может также использоваться уравнение (2.11).

### § 3. Уравнения динамики излучающего газа

**1. Уравнения неразрывности, движения и сохранения энергии.** Вывод уравнений, описывающих движение вещества с учетом влияния теплового излучения, основан на законах сохранения массы, импульса и энергии. При этом удобно использовать дивергентную форму уравнений, которая связывает локальную производную по времени соответствующих величин с дивергенцией их потока.

Излучение массой покоя не обладает, поэтому уравнение неразрывности в задачах радиационной газовой динамики будет тем же самым, что и в обычной газовой

динамике:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (3.1)$$

здесь  $\rho$  — плотность вещества,  $\mathbf{u}$  — вектор газодинамической скорости.

Для вывода уравнения движения к плотности импульса вещества  $\rho \mathbf{u}$  необходимо прибавить вектор плотности импульса излучения  $G$ , а к тензору плотности потока импульса вещества  $\Pi_{ik}$  надо добавить тензор плотности потока импульса излучения  $T_{ik}$ . Уравнение движения примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i + G_i) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\Pi_{ik} + T_{ik}) = 0, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$k = 1, 2, 3; \quad (3.2)$$

$$\Pi_{ik} = \rho u_i u_k + \delta_{ik} p,$$

здесь  $p(T, \rho)$  — газодинамическое давление,  $\delta_{ik}$  — символ Кронекера.

Полная энергия складывается из кинетической энергии  $\rho u^2/2$ , внутренней энергии  $\epsilon(T, \rho)$  и энергии поля излучения  $U$ . Изменение полной энергии происходит за счет конвективного потока, работы сил газокINETического давления, потока энергии за счет механизма теплопроводности  $W_\tau$  и потока энергии излучения  $W$ . Уравнение энергии в задачах радиационной газовой динамики записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \epsilon + \frac{\rho u^2}{2} + U \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \rho u_k \left( \epsilon + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) + W_{\tau k} + W_k \right\} = 0,$$

$$W_\tau = -\lambda \operatorname{grad} T, \quad (3.3)$$

$$W_\tau = \{W_{\tau 1}, W_{\tau 2}, W_{\tau 3}\}, \quad W = \{W_1, W_2, W_3\}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Здесь  $\lambda = \lambda(T, \rho)$  — коэффициент теплопроводности.

В уравнениях (3.2) и (3.3) не выписаны члены, учитывающие влияние вязких сил, так как обычно в условиях, для которых рассматриваются задачи динамики излучающего газа, они не существенны. Однако в случае необходимости вязкость может быть естественным образом включена в рассматриваемую систему уравнений\*).

\*) В вычислительной практике для облегчения расчетов задач газовой динамики, магнитной газовой динамики и радиационной газовой динамики часто используют модель искусственной вязкости, которая аналогично естественной вязкости входит в уравнения движения и энергии.

Для определения плотности и потока энергии излучения воспользуемся выражениями (1.3), (1.5) и (1.6):

$$U = \frac{1}{c} \int_0^{\infty} d\nu \int I_{\nu} d\Omega, \quad W = \int_0^{\infty} d\nu \int I_{\nu} \Omega d\Omega. \quad (3.4)$$

Чтобы найти плотность  $G$  и тензор плотности потока импульса излучения  $T_{ik}$ , воспользуемся соотношением между энергией  $h\nu$  и импульсом  $G_{\nu}$  фотона  $G_{\nu} = \Omega h\nu/c$ . Тензор потока импульса кванта  $T_{ik\nu}$  будет равен  $T_{ik\nu} = \Omega_i \Omega_k \frac{h\nu}{c}$ . Используя функцию распределения фотонов  $f$  (1.1) и интегрируя ее по всем телесным углам и частотам квантов, получим выражения для плотности импульса излучения  $G$  и тензора плотности импульса излучения  $T_{ik}$ :

$$G = \int_0^{\infty} \frac{h\nu}{c} d\nu \int \Omega f d\Omega = \frac{1}{c^2} \int_0^{\infty} d\nu \int I_{\nu} \Omega d\Omega, \quad (3.5)$$

$$T_{ik} = \int_0^{\infty} h\nu d\nu \int \Omega_i \Omega_k f d\Omega = \frac{1}{c} \int_0^{\infty} d\nu \Omega_i \Omega_k I_{\nu} d\Omega. \quad (3.6)$$

Дополним систему уравнений динамики излучающего газа (3.1)—(3.6) соотношениями, характеризующими зависимость давления, внутренней энергии и коэффициента теплопроводности от температуры и плотности:

$$p = p(T, \rho), \quad \varepsilon = \varepsilon(T, \rho), \quad \lambda = \lambda(T, \rho). \quad (3.7)$$

Для того чтобы система уравнений (3.1)—(3.7) была замкнута, ее необходимо также дополнить уравнением переноса, описывающим изменение функции  $I_{\nu}$ . Однако прежде чем сделать это, оценим в уравнениях (3.2) и (3.3) порядки величины членов, связанных с переносом излучения.

**2. Уравнения низкотемпературной радиационной газовой динамики.** Плотность энергии излучения  $U$ , потока энергии излучения  $W$  и другие величины, связанные со световыми полями, начинают оказывать существенное влияние на весь ход газодинамического течения, если они по порядку величины сопоставимы или больше соответствующих величин в веществе. В качестве примера рассмотрим нагретый до высоких температур воздух.

Плотность энергии равновесного излучения  $U_p = 4\sigma T^4/c$  сравнивается с плотностью внутренней энергии воздуха при температуре  $3 \cdot 10^6$  К [100, 117]. На самом деле энергии сравниваются при более высоких температурах. Связано это с тем, что при очень высоких температурах из-за интенсивного газодинамического разлета оптическая толщина исследуемых объемов, как правило, невелика, поэтому плотность энергии излучения значительно меньше равновесной. Ориентировочно плотностью энергии излучения можно пренебречь по сравнению с плотностью энергии вещества, если температура в газовой среде меньше 0,5 кэВ.

Тензор плотности потока импульса излучения  $T_{ik}$  (3.6), входящий в уравнение (3.2), по порядку величины совпадает с плотностью энергии излучения  $U$ , а для плотности импульса излучения  $G$  по порядку величины имеет место оценка  $G \sim U/c$ . Для сравнительно низкотемпературной среды их влиянием, особенно вектора плотности импульса излучения  $G$ , можно пренебречь по сравнению с соответствующими величинами для вещества.

С другой стороны, как показывают данные экспериментов и теоретические оценки, поток энергии излучения оказывает существенное влияние на теплообмен в плазме, уже начиная с восьми-десяти тысяч кельвинов. Оценим по порядку величины поток энергии за счет газодинамического движения  $W_r$  и за счет излучения  $W$ . В первом случае  $W_r \sim \epsilon u$ , а во втором  $W \sim U c$ . Несмотря на то, что при температурах  $\sim 1$  эВ  $\epsilon \gg U$  в этих условиях для рассматриваемого нерелятивистского случая  $W$  порядка или больше  $W_r$ , так как скорость света значительно превышает скорость газодинамического движения вещества.

Таким образом, для задач низкотемпературной радиационной газовой динамики ( $T \leq 0,5$  кэВ), которые в настоящее время наиболее интенсивно рассматриваются в практических приложениях, излучение оказывает существенное влияние только на перераспределение энергии в веществе. Однако этого зачастую оказывается вполне достаточно, чтобы кардинально изменить всю картину явления.

В случае локального термодинамического равновесия для замыкания системы уравнений динамики излучающего газа можно взять уравнение переноса (2.11). Правда, при этом необходимо помнить, что используе-

мые в уравнении переноса значения лучеиспускательной способности и коэффициенты поглощения получены в системе координат, движущейся вместе с веществом, и для перехода в неподвижную систему координат к уравнению переноса необходимо добавить члены порядка  $u/c$ . Однако в случае нерелятивистской низкотемпературной плазмы эти члены оказываются несущественными, и для описания переноса излучения можно пользоваться уравнением

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_{\nu}}{\partial t} + \Omega \operatorname{grad} I_{\nu} + \kappa_{\nu} I_{\nu} = \kappa_{\nu} I_{\nu p}, \quad \kappa_{\nu} = \kappa_{\nu}(\nu, T, \rho).$$

Более подробно с выводом уравнений динамики излучающего газа в общем случае можно ознакомиться в монографиях Я. Б. Зельдовича и Ю. П. Райзера [100], Д. Сэмпсона [178], В. С. Имшенника и Ю. П. Морозова [106].

## ПРИБЛИЖЕННЫЕ МОДЕЛИ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ИЗЛУЧАЮЩЕГО ГАЗА

В этой главе будет рассмотрен ряд приближенных моделей, используемых при расчете задач РГД, и обсуждены области параметров, для которых они справедливы. Их применение в ряде случаев позволяет существенно упростить численное решение задач динамики излучающего газа.

### § 1. Трудности, возникающие при численном решении задач динамики излучающего газа

1. Многомерность уравнения переноса. Рассмотрим систему уравнений динамики излучающего газа

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (1.1)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\operatorname{grad} p, \quad (1.2)$$

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = -p \operatorname{div} \mathbf{u} + \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} T) - \operatorname{div} \mathbf{W}, \quad (1.3)$$

$$\Omega \operatorname{grad} I_{\nu} = \kappa_{\nu} (I_{\nu p} - I_{\nu}), \quad (1.4)$$

$$\mathbf{W} = \int_0^{\infty} d\nu \int \Omega I_{\nu} d\Omega, \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon(T, \rho), \quad p = p(T, \rho), \quad \lambda = \lambda(T, \rho), \\ \kappa_{\nu} &= \kappa_{\nu}(\nu, T, \rho). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь использовались следующие обозначения:  $t$  — время,  $\rho$  — плотность вещества,  $\mathbf{u}$  — вектор скорости,  $p$  — газокINETическое давление,  $T$  — температура,  $\varepsilon$  — внутренняя энергия вещества,  $I_{\nu}$  — интенсивность энергии излучения,  $I_{\nu p} = 2h\nu^3/[c^2(\exp\{h\nu/(kT)\} - 1)]$  — интенсивность равно-

весного излучения,  $\kappa_\nu$  — коэффициент поглощения фотона частоты  $\nu$ ,  $\Omega$  — единичный вектор, характеризующий направление полета фотона,  $W$  — вектор потока энергии излучения.

При выводе системы уравнений (1.1)—(1.6) предполагалось, что плотностью энергии и давлением излучения можно пренебречь по сравнению с энергией вещества и газокINETическим давлением, вещество находится в состоянии локального термодинамического равновесия, а перенос излучения может быть описан с помощью квазистационарного уравнения (1.4). Уравнения (1.2) и энергии (1.3) получены из дивергентных форм (3.2) и (3.3) (гл. I).

Наиболее простым частным случаем системы уравнений (1.1)—(1.6) является система одномерных нестационарных уравнений, описывающих течения, газодинамические параметры которых зависят от одной пространственной переменной и времени. Интенсивное решение одномерных нестационарных задач динамики излучающего газа на ЭВМ, несмотря на большую практическую потребность в проведении подобного рода расчетов, было начато лишь в конце 60-х годов — значительно позднее, чем решение задач классической газовой динамики.

Причина, приведшая к такому положению дел, связана с исключительной трудоемкостью решения задач РГД, которая в первую очередь вызвана многомерностью уравнения переноса (1.4). В самом деле, для того чтобы решить уравнения газовой динамики с учетом теплообмена излучением (1.1)—(1.3), необходимо знать поток  $W$ . В свою очередь поток  $W$  определяется как интеграл (1.5) от интенсивности энергии излучения  $I_\nu(r, \nu, \Omega, t)$ , которая находится из решения уравнения переноса (1.4) и зависит, помимо пространственных переменных  $r$  и времени  $t$ , от направления полета  $\Omega$  и частоты фотона  $\nu$ .

В качестве примера рассмотрим плоский одномерный слой, уравнение переноса для которого принимает наиболее простой вид:

$$\mu \frac{dI_\nu}{dx} = \kappa_\nu (I_{\nu 0} - I_\nu), \quad -1 \leq \mu \leq 1, \quad x_0 \leq x \leq x_N. \quad (1.7)$$

Здесь  $x$  — текущая координата в плоском слое (рис. 6),  $\mu$  — косинус угла  $\theta$  между направлением фотона частоты  $\nu$  и направлением оси  $x$ , перпендикулярным к по-

верхности слоя. Более подробно вывод уравнения переноса для плоского слоя будет рассмотрен в § 1 гл. III.

Возьмем сравнительно простую дискретизацию уравнения переноса (1.7): десять разбиений по углам и десять разбиений по частоте. Эти разбиения по частоте называются группами. Внутри каждого из таких разбиений  $\mu \in (\mu_m, \mu_{m+1})$  ( $m=1, \dots, N_m=11$ ),  $\nu \in (\nu_k, \nu_{k+1})$  ( $k=1, \dots, N_k=11$ ) предполагается,

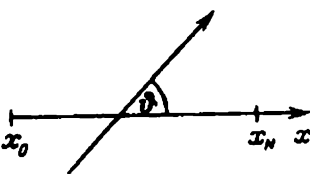


Рис. 6

что интенсивность энергии излучения  $I_\nu$  не зависит ни от углов, ни от частоты  $I_\nu = I_{km}(x, t)$ .

Для того чтобы найти поток энергии излучения, который для плоского слоя определяется с помощью выражения

$$W = \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 \mu I_\nu d\mu,$$

на каждом шаге по времени необходимо решить 100 (сто!) обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\mu_{m+1/2} \frac{dI_{km}}{dx} + \kappa_k I_{km} = 2\pi \kappa_k \int_{\nu_k}^{\nu_{k+1}} I_{\nu p} d\nu. \quad (1.8)$$

Здесь  $\kappa_k(T, \rho)$  — некоторый осредненный по частоте внутри каждой группы коэффициент поглощения,  $\mu_{m+1/2}$  — среднее значение косинуса.

Остальных уравнений газовой динамики, а именно неразрывности, движения, энергии, для этого одномерного случая всего три. Видно, что подавляющая часть машинного времени, затраченного на расчет всей задачи динамики излучающего газа, идет непосредственно на решение уравнения переноса.

Приведенный пример, использующий десять разбиений по углам и десять групп по частоте, не является предельным. Вполне возможны такие постановки задач, когда коэффициент поглощения является достаточно сложной функцией частоты. В качестве примера такого коэффициента поглощения на рис. 7 приведен коэффициент поглощения горячего воздуха, взятый из работы [1].

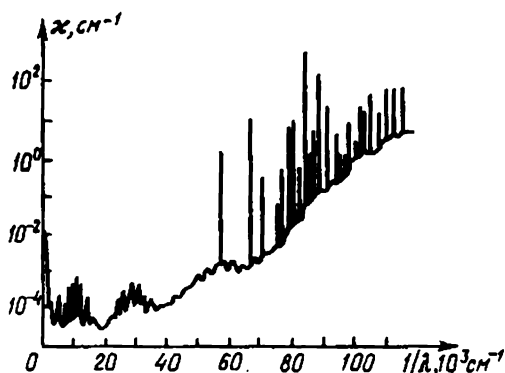


Рис. 7. Коэффициент поглощения воздуха  $p=1$  атм,  $T=8 \cdot 10^3$  К

В таких случаях для аккуратной дискретизации по частоте необходимо несколько десятков и даже сотен групп. При этом решение задачи динамики излучающего газа может потребовать машинного времени на два и более порядка больше, чем решение аналогичной задачи обычной газовой динамики.

**2. Взаимозависимость температуры и поля излучения.** В задачах радиационной газовой динамики температурные поля, как правило, сильно зависят от значения потока энергии излучения, и наоборот. Эта тесная взаимосвязь вынуждает строить для решения уравнения энергии (1.3) и переноса излучения (1.4) самосогласованные вычислительные алгоритмы.

Поток энергии излучения зависит в той или иной мере от температуры и плотности вещества во всех точках исследуемой области. Поэтому для совместного решения уравнений (1.3) и (1.4) естественно воспользоваться наиболее простым алгоритмом — явной схемой. При этом дивергенция потока  $W$  вычисляется из уравнения переноса, коэффициенты поглощения которого и правая часть  $\kappa_v I_{\nu p}$  определяются по температуре и плотности, взятым с предыдущего шага по времени. Однако применение этого относительно простого алгоритма часто приводит к жесткому ограничению на шаг по времени, вытекающему из требования устойчивости [198]\*).

\*) Это ограничение совпадает с ограничением на устойчивость, возникающим при решении уравнения теплопроводности по явной схеме, когда шаг пространственной сетки  $h$  больше характерной длины свободного пробега.

Таким образом, многомерное уравнение переноса, которое для своего численного решения требует больших затрат машинного времени, необходимо считать по излишне подробной с точки зрения точности временной сетке.

Приведенные сложности решения задач радиационной газовой динамики связаны с применением сравнительно простых алгоритмов для их численного расчета. Использование других методов (гл. III и IV) позволяет в значительной мере обойти указанные трудности, хотя они в свою очередь могут вызвать появление новых вычислительных проблем.

**3. Коэффициенты поглощения.** При расчете задач динамики излучающего газа приходится сталкиваться еще с одной трудностью, которая уже не является чисто математической и связана с недостаточностью информации о материальных функциях (1.6): уравнениях состояния, коэффициентах теплопроводности и в первую очередь коэффициентах поглощения.

В настоящее время в вычислительной практике широко используется ряд таблиц и методов расчета коэффициентов поглощения, например, представленных в работах [1, 48, 108, 142, 143, 154]. Однако имеющихся в наличии таблиц коэффициентов поглощения явно недостаточно, чтобы охватить большой набор веществ в широком диапазоне частот, температур и плотностей. То же самое можно сказать и об имеющихся в литературе экспериментальных данных по коэффициентам поглощения.

Ввиду больших трудностей теоретического и экспериментального определения этих коэффициентов вряд ли стоит ожидать коренного улучшения положения в ближайшие годы. Однако подобная ситуация не должна служить основанием для излишнего пессимизма. Численные расчеты системы уравнений динамики излучающего газа (1.1) — (1.6) даже при первоначально недостаточном знании коэффициентов поглощения позволяют уточнить математическую модель, описывающую изучаемое явление. Примеры подобного подхода продемонстрированы в гл. V.

Трудности, возникающие при численном решении задач радиационной газовой динамики, придают особую ценность различным приближениям. Эти приближения там, где их применение законно, приводят к существенному упрощению математической модели и, как

правило, позволяют получать результаты более дешевой ценой, чем при использовании первоначальной громоздкой системы уравнений.

## § 2. Диффузионное приближение

**1. Система уравнений.** Рассмотрим исходное уравнение переноса (1.4). Будем искать его решение в виде разложения в ряд по сферическим функциям  $Y_{kl}(\Omega)$ :

$$I_{\nu}(\mathbf{r}, \nu, \Omega) = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) \sum_{i=-k}^{i=k} \varphi_{ki}(\mathbf{r}, \nu) Y_{ki}(\Omega), \quad (2.1)$$

где  $\varphi_{kl}(\mathbf{r}, \nu)$  — пока неизвестные функции пространственной переменной и частоты.

Предположим, что в выражении (2.1) можно ограничиться двумя первыми членами разложения, т. е. интенсивность энергии излучения достаточно точно представляется в виде

$$I_{\nu}(\mathbf{r}, \nu, \Omega) = \varphi_1(\mathbf{r}, \nu) + 3\varphi_2(\mathbf{r}, \nu) \Omega. \quad (2.2)$$

Неизвестные  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  совпадают с плотностью энергии излучения, умноженной на скорость света  $c$ , и потоком энергии излучения. В самом деле,

$$U_{\nu}(\mathbf{r}, \nu) = \frac{11}{c} \int I_{\nu}(\mathbf{r}, \nu, \Omega) d\Omega = \frac{1}{c} \int [\varphi_1 + 3\varphi_2 \cdot \Omega] d\Omega,$$

интеграл  $\frac{1}{c} \int 3\varphi_2(\mathbf{r}, \nu) \Omega d\Omega = 0$ , поэтому  $U_{\nu} = \varphi_1/c$ . Аналогичным образом получим

$$\mathbf{W}_{\nu}(\mathbf{r}, \nu) = \int I_{\nu}(\mathbf{r}, \nu, \Omega) \Omega d\Omega = \int [\varphi_1 + 3\varphi_2 \Omega] \Omega d\Omega = \varphi_2(\mathbf{r}, \nu).$$

Поэтому перепишем выражение (2.2) следующим образом:

$$I_{\nu}(\mathbf{r}, \nu, \Omega) = cU_{\nu}(\mathbf{r}, \nu) + 3\mathbf{W}_{\nu}(\mathbf{r}, \nu) \Omega. \quad (2.3)$$

Проинтегрируем уравнение переноса (1.4) по всем телесным углам:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int \Omega_i I_{\nu}(\mathbf{r}, \nu, \Omega) d\Omega + \kappa_{\nu}(\mathbf{r}, \nu) \int I_{\nu} d\Omega = \kappa_{\nu} \int I_{\nu p} d\Omega, \quad (2.4)$$

$$i = 1, 2, 3,$$

при этом будем учитывать, что угловые  $\Omega$  и пространственные  $\mathbf{r}$  переменные независимы и порядок интегрирования и дифференцирования можно менять произвольно.

Воспользовавшись разложением (2.3), из (2.4) полу-

чим уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{W}_v + \kappa_v c U_v = \kappa_v c U_{vp}. \quad (2.5)$$

Здесь  $U_{vp}$  определяется из выражения (1.7) (гл. I).

Аналогичным образом, интегрируя уравнение переноса (1.4) с весом  $\Omega$  и вновь используя разложение (2.3), получим уравнение

$$\frac{1}{3} c \operatorname{grad} U_v + \kappa_v \mathbf{W}_v = 0. \quad (2.6)$$

Уравнения (2.5) и (2.6) получили название *системы уравнений диффузии*, так как между потоком и плотностью энергии излучения существует связь, аналогичная для процесса диффузии частиц:

$$\mathbf{W}_v = -\frac{1}{3} l_v c \operatorname{grad} U_v, \quad l_v = \frac{1}{\kappa_v}.$$

Для нестационарного уравнения переноса (2.11) (гл. I), используя разложение (2.3), также можно получить свою систему уравнений диффузии:

$$\frac{\partial U_v}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{W}_v + \kappa_v c U_v = \kappa_v c U_{vp}, \quad (2.7)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{W}_v}{\partial t} + \frac{c}{3} \operatorname{grad} U_v + \kappa_v \mathbf{W}_v = 0. \quad (2.8)$$

Отметим, что уравнения (2.5) и (2.7) являются точными. Они могут быть получены путем прямого интегрирования стационарного и нестационарного уравнений переноса и не связаны с использованием конкретного представления (2.3) для интенсивности энергии излучения  $I_v$ .

Диффузионное приближение, как правило, выполняется при сравнительно слабой анизотропии поля излучения. Оно является первым  $P_1$ -приближением метода сферических гармоник. Этот метод широко применялся в работах Р. Маршака [221], Б. Дэвисона [96], В. С. Владимирова [51], Г. И. Марчука и В. И. Лебедева [135] и других авторов при расчете задач нейтронной физики.

Дальнейшие  $P_n$ -приближения метода сферических гармоник можно получить, если решение исходного уравнения переноса приближенно представить в виде

$$I_v^{(n)}(r, v, \Omega) = \sum_{k=0}^n (2k+1) \sum_{l=-k}^{l=k} \varphi_{kl}(r, v) Y_{kl}(\Omega). \quad (2.9)$$

Это выражение подставляется в уравнение (1.4), последовательно умножается на сферические функции  $Y_{\mu_i}$  и интегрируется по всем телесным углам. При этом получается система, состоящая из  $(n+1)^2$  уравнений относительно неизвестных моментных функций  $\varphi_{\mu_i}(r, \nu)$ .

Однако в работах, посвященных решению задач, связанных с переносом теплового излучения, в основном применяется диффузионное приближение. Более высокие приближения метода сферических гармоник используются редко. Из работ, в которых обсуждаются вопросы применения метода сферических гармоник к решению задач РГД, следует указать работу [90]. Кроме того, достаточно подробно вопрос о применении метода сферических гармоник к задачам нейтронной физики изложен в работах [135, 175, 177].

Слабое применение в вычислительной практике более высоких приближений метода сферических гармоник вызвано двумя причинами. Во-первых, диффузионное приближение достаточно хорошо описывает поле излучения для большинства задач радиационной газовой динамики. Во-вторых, использование последующих приближений резко усложняет вычислительный алгоритм, делает его логически более громоздким. Поэтому для более точного определения поля излучения по сравнению с диффузионным приближением при расчете задач РГД в основном используют непосредственно уравнение переноса с последующим применением алгоритмов эффективного понижения его размерности. Эти алгоритмы будут рассмотрены в гл. III и IV.

Вновь вернемся в  $P_1$ -приближению. При численном решении задач динамики излучающего газа систему уравнений (2.5)—(2.6) заменяют на систему многогрупповых уравнений диффузии:

$$\operatorname{div} \mathbf{W}_k + \kappa_k c U_k = \kappa_k 4\sigma_k(T, \nu_k, \nu_{k+1}) T^4, \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{3} l_{\nu} c \operatorname{grad} U_k + \mathbf{W}_k = 0. \quad (2.11)$$

Правая часть уравнения (2.10) определяется из соотношения

$$4\sigma_k(T, \nu_k, \nu_{k+1}) T^4 = c \int_{\nu_k}^{\nu_{k+1}} U_{\nu p} d\nu. \quad (2.12)$$

Аналогично (2.10)—(2.11) может быть выписана многогрупповая система уравнений и для нестационарного случая (2.7)—(2.8).

Для получения системы уравнений (2.10) — (2.11) весь спектр разбивается на  $N_k$  интервалов  $\nu \in (\nu_k, \nu_{k+1})$  или групп. Внутри каждой группы предполагается, что поток  $W_k$ , плотность энергии излучения  $U_k$  и групповые коэффициенты  $\kappa_k(T, \rho)$  не зависят от частоты \*).

Как видно из системы уравнений (1.1) — (1.6), наибольший интерес в задачах радиационной газовой динамики представляет интегральный по спектру поток энергии излучения  $W$ . Этот поток может быть получен

суммированием групповых потоков  $W = \sum_{k=1}^{N_k} W_k$ , каждый из которых в свою очередь является решением многогрупповой системы уравнений (2.10) — (2.11).

**2. Граничные условия.** Систему уравнений диффузии (2.5) — (2.6) ((2.10) — (2.11)) или (2.7) — (2.8) необходимо дополнить граничными условиями. В отличие от уравнения переноса излучения, получение граничных условий для уравнений диффузии не столь наглядно. Рассмотрим простейшее и наиболее часто употребляемое граничное условие

$$I_\nu(r, \nu, \Omega)|_\Gamma = 0, \quad (\Omega, n) < 0,$$

которое соответствует отсутствию падающего извне излучения. Поток энергии излучения, проходящий внутрь исследуемого объема, также будет равен нулю:

$$\int_{(\Omega, n) < 0} I_\nu(r, \nu, \Omega) |(\Omega, n)| d\Omega = 0. \quad (2.13)$$

В (2.13) интегрирование происходит только по тем направлениям, для которых выполнено условие  $(\Omega, n) < 0$ . Подставляя в (2.13) выражение (2.3) и проводя интегрирование, получим условие на внешней границе

$$W_\nu = -cU_\nu/2, \quad (2.14)$$

где  $W_\nu$  — поток в направлении внутренней нормали к границе области.

При наличии падающего извне излучения  $I^*(\Gamma, \Omega)$ ,  $(\Omega, n) < 0$ , граничное условие для уравнений диффузии можно также построить на основе равенства (2.13), ко-

\*) Более подробно вопрос о получении групповых коэффициентов поглощения  $\kappa_k$  и правой части уравнения (2.10) будет рассмотрен в пятом параграфе этой главы.

торое в данном случае примет вид [176]:

$$\int_{(\Omega, \mathbf{n}) < 0} (I_{\nu} - I^*(\Gamma, \Omega)) |(\Omega, \mathbf{n})| d\Omega = 0.$$

Кроме того, могут быть привлечены и другие геометрические и физические факторы. Так, для задач, обладающих сферической или осевой симметрией, поток энергии излучения в центре (для шара) или на оси симметрии равен нулю.

Более полное обсуждение граничных условий для метода сферических гармоник содержится в работе [90].

**3. Некоторые замечания о применимости диффузионного приближения.** Диффузионное приближение справедливо в том случае, когда для решения исходного уравнения переноса с достаточной степенью точности выполняется представление (2.3). Однако вблизи границы это выражение, как правило, плохо описывает интенсивность энергии излучения. В самом деле, решением уравнения переноса на границе  $\Gamma$  для  $(\Omega, \mathbf{n}) \geq 0$  является некоторая положительная функция  $I^+(\Gamma, \nu, \Omega) > 0$ , конкретный вид которой зависит от температуры и плотности во всем исследуемом объеме. С другой стороны, из граничного условия следует, что  $I_{\nu}(\Gamma, \nu, \Omega) = 0$ ,  $(\Omega, \mathbf{n}) < 0$ . В целом же функция вида

$$I_{\nu}(\Gamma, \nu, \Omega) = \begin{cases} I^+(\Gamma, \nu, \Omega) > 0, & (\Omega, \mathbf{n}) \geq 0, \\ 0, & (\Omega, \mathbf{n}) < 0 \end{cases}$$

не может быть достаточно хорошо в общем случае описана с помощью выражения (2.3).

Для того чтобы более наглядно представить область применимости диффузионного приближения, рассмотрим еще один способ его вывода. Проинтегрируем исходное уравнение переноса (1.4) по телесному углу с весами  $I$  и  $\Omega$ , при этом получим систему уравнений

$$\frac{\partial \int \Omega_i I_{\nu} d\Omega}{\partial x_i} + \kappa_{\nu} \int I_{\nu} d\Omega = \kappa_{\nu} \int I_{\nu p} d\Omega, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \int \Omega_i \Omega_j I_{\nu} d\Omega}{\partial x_i} + \kappa_{\nu} \int \Omega_j I_{\nu} d\Omega = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (2.16)$$

Интегралы  $\frac{1}{c} \int I_{\nu} d\Omega$  и  $\int \Omega_j I_{\nu} d\Omega$  равны соответственно плотности и потоку энергии излучения. Дополнительный

интеграл  $\int \Omega_i \Omega_j I_{\nu} d\Omega$  представим в виде

$$\int \Omega_i \Omega_j I_{\nu} d\Omega = D_{\nu ij} \int I_{\nu} d\Omega, \quad (2.17)$$

$$D_{\nu ij} = \int \Omega_i \Omega_j I_{\nu} d\Omega / \int I_{\nu} d\Omega.$$

Если предположить, что для  $D_{\nu ij}$  выполнено соотношение

$$D_{\nu ij} = \delta_{ij} / 3, \quad (2.18)$$

то уравнения (2.15) и (2.16) перейдут в уравнения диффузии.

Равенство (2.18) выполняется, если  $I_{\nu}$  является изотропной функцией. Условие слабой анизотропии поля излучения будет выполнено, если длина свободного пробега фотона  $l_{\nu}$  много меньше характерного размера  $L$ . В самом деле, перепишем уравнение переноса (1.4) в виде

$$l_{\nu} \Omega \text{ grad } I_{\nu} + I_{\nu} = I_{\nu p}.$$

По порядку величины дифференциальный член будет равен  $l_{\nu} \Omega \text{ grad } I_{\nu} \sim l_{\nu} I_{\nu} / L$ . В случае выполнения условия

$$l_{\nu} / L \ll 1 \quad (2.19)$$

для поля излучения будет справедливо приближенное равенство

$$I_{\nu} \approx I_{\nu p}(T, \nu). \quad (2.20)$$

Однако, как показывает практика расчетов задач РГД, диффузионное приближение очень часто дает хорошие результаты (во всяком случае качественно правильные) и в тех случаях, когда нельзя с уверенностью говорить о выполнении неравенства (2.19). Связано это в первую очередь с тем, что коэффициент  $D_{\nu ij}$  (2.17) определяется через отношение двух интегралов от решения уравнения переноса и поэтому мало отличается от  $1/3$  ( $i=j$ ) даже при наличии анизотропии в функции распределения\*).

Диффузионное приближение позволяет находить поток и плотность энергии излучения из уравнений, не зависящих от угловых переменных  $\Omega$ , т. е. имеющих меньшую размерность, чем исходное уравнение переноса. Этот факт, а также достаточно широкая область приме-

\*) Отметим, что это свойство коэффициента  $D_{\nu ij}$  используется при построении эффективных алгоритмов решения задач динамики излучающего газа (§ 4 гл. III).

нимости, обусловили частое использование многогруппового диффузионного приближения для расчета задач динамики излучающего газа [5, 41, 59, 139].

### § 3. Приближения лучистой теплопроводности и оптически тонкого слоя

Для того чтобы определить поле излучения из системы многогрупповых уравнений диффузии, необходимо решить  $N_A$  пар уравнений вида (2.10)—(2.11). Если в силу тех или иных причин число групп  $N_A$  велико, то решение этой системы по-прежнему будет занимать большую часть машинного времени, необходимого для расчета всей системы уравнений радиационной газовой динамики. Использование диффузионного приближения также автоматически не снимает трудности, вытекающие из совместного решения уравнения энергии и уравнений, описывающих перенос излучения. Поэтому имеет смысл рассмотреть еще более простые модели, позволяющие существенно облегчить численное решение задач динамики излучающего газа.

1. Приближение лучистой теплопроводности. Предположим, что для энергий фотонов, существенно влияющих на теплообмен в исследуемой среде, выполнено неравенство (2.19), т. е. длина свободного пробега для этих частот много меньше характерных размеров задачи. В этом случае для интенсивности энергии излучения приближенно выполнено равенство (2.20). Тогда для спектральной плотности энергии излучения  $U_\nu = \frac{1}{c} \int I_\nu d\Omega$  справедливо приближенное равенство

$$U_\nu = U_{\nu p}. \quad (3.1)$$

Из (3.1) и уравнения диффузии (2.6) получим

$$W_\nu = -\frac{1}{3} l_\nu c \text{grad } U_{\nu p}. \quad (3.2)$$

Равновесное значение плотности энергии излучения  $U_{\nu p}$  зависит от пространственных координат только через температуру вещества. Поэтому правую часть выражения (3.2) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} l_\nu c \text{grad } U_{\nu p} &= \frac{1}{3} l_\nu c \frac{dU_{\nu p}}{dT} \text{grad } T, \\ \frac{dU_{\nu p}}{dT} &= \frac{15}{4\pi^4} \frac{x^4 e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}, \quad x = \frac{h\nu}{kT}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для того чтобы получить интегральное по спектру значение потока, проинтегрируем, учитывая равенство (3.3), выражение (3.2) по всем частотам:

$$W = \int_0^{\infty} W_{\nu} d\nu = -\frac{c}{3} \int_0^{\infty} l_{\nu}(\nu, T, \rho) \frac{dU_{\nu p}}{dT} d\nu \text{ grad } T. \quad (3.4)$$

Коэффициент  $-\frac{c}{3} \int_0^{\infty} l_{\nu}(\nu, T, \rho) \frac{dU_{\nu p}}{dT} d\nu$  может быть определен заранее перед расчетом задачи динамики излучающего газа и является функцией только температуры и плотности вещества.

Представим выражение (3.4) для потока энергии излучения в более удобной форме

$$W = -\frac{1}{3} cl(T, \rho) \int_0^{\infty} \frac{dU_{\nu p}}{dT} d\nu \text{ grad } T, \quad (3.5)$$

где

$$l(T, \rho) = \int_0^{\infty} l_{\nu}(\nu, T, \rho) \frac{dU_{\nu p}}{dT} d\nu \left/ \int_0^{\infty} \frac{dU_{\nu p}}{dT} d\nu \right. \quad (3.6)$$

Коэффициент  $l$  получил название *длины свободного пробега, осредненной по Росселанду*, или *росселандовым пробегом*.

Выражение (3.5) преобразуем к виду

$$W = -\frac{1}{3} lc \int_0^{\infty} \frac{dU_{\nu p}}{dT} \text{ grad } T d\nu = -\frac{1}{3} lc \text{ grad} \left( \int_0^{\infty} U_{\nu p} d\nu \right).$$

Дифференцируя  $\int_0^{\infty} U_{\nu p} d\nu = \frac{4\sigma T^4}{c}$  по пространственным переменным, получим окончательное выражение для потока энергии излучения:

$$W = -\frac{16\sigma l T^3}{3} \text{ grad } T. \quad (3.7)$$

Перенос энергии в этом случае осуществляется за счет механизма лучистой теплопроводности. Коэффициент лучистой теплопроводности  $16\sigma l(T, \rho) T^3/3$  является функцией температуры и плотности вещества.

Таким образом, при выполнении условия (2.19) система уравнений динамики излучающего газа (1.1)—(1.6) примет следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (3.8)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\operatorname{grad} p, \quad (3.9)$$

$$\rho \frac{de}{dt} = -p \operatorname{div} \mathbf{u} + \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + \operatorname{div}\left(\frac{16\sigma l T^3}{3} \operatorname{grad} T\right), \quad (3.10)$$

$$\varepsilon = \varepsilon(T, \rho), \quad p = p(T, \rho), \quad \lambda = \lambda(T, \rho), \quad l = l(T, \rho). \quad (3.11)$$

Как видно из уравнений (3.8)—(3.11), в случае, когда справедливо приближение лучистой теплопроводности, для определения вклада излучения в изменение газодинамических параметров вещества нет необходимости в решении специального резко усложняющего общий расчет уравнения переноса. Система уравнений (3.8)—(3.11) по своей математической структуре ничем не отличается от системы уравнений газовой динамики с нелинейной теплопроводностью. Естественно, что для ее численного решения вполне можно применять алгоритмы, используемые для расчета задач газовой динамики с теплопроводностью. Подробное описание этих методов можно найти в книге А. А. Самарского и Ю. П. Попова [169], работах других авторов, например [99, 116].

2. **Оптически тонкий слой.**  
Рассмотрим решение уравнения переноса (1.4) внутри объема  $D$  с границей  $\Gamma$  (рис. 8). Предположим, что для всех частот фотонов, оказывающих существенное влияние на теплообмен в среде, выполнено условие

$$l_{\nu} \gg L, \quad (3.12)$$

где  $L$  — характерный размер исследуемого объема. Кроме того, предположим, что интенсивность энергии приходящего извне излучения  $I_{\nu|\Gamma}$  много меньше интенсивности равновесного излучения, испускаемого нагретым веществом, занимающим объем  $D$  и имеющим температуру

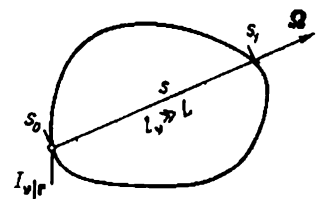


Рис. 8. К выводу соотношений для оптически тонкого слоя

где  $L$  — характерный размер исследуемого объема. Кроме того, предположим, что интенсивность энергии приходящего извне излучения  $I_{\nu|\Gamma}$  много меньше интенсивности равновесного излучения, испускаемого нагретым веществом, занимающим объем  $D$  и имеющим температуру

близкую к характерной температуре  $T_0$ :

$$I_{\nu}|_{\Gamma} \ll I_{\nu p}(T_0, \nu). \quad (3.13)$$

Вдоль каждого направления  $\Omega$  уравнение переноса (1.4) можно записать в характеристическом виде:

$$\frac{dI_{\nu}}{ds} + \kappa_{\nu} I_{\nu} = \kappa_{\nu} I_{\nu p}, \quad I_{\nu}|_{s=s_0} = I_{\nu}|_{\Gamma}, \quad s_0 \leq s \leq s_1. \quad (3.14)$$

Здесь  $s$  — характеристическая координата (рис. 8).

Выпишем решение уравнения (3.14):

$$I_{\nu}(s) = I_{\nu}|_{\Gamma} \exp \left\{ - \int_{s_0}^s \kappa_{\nu}(s', \nu) ds' \right\} + \\ + \int_{s_0}^s I_{\nu p}(s') \kappa_{\nu}(s', \nu) \exp \left\{ - \int_{s'}^s \kappa_{\nu}(s'', \nu) ds'' \right\} ds'. \quad (3.15)$$

Из условия (3.12) следует, что для оптической толщины объема вдоль каждого направления выполняется неравенство

$$\int_{s_0}^{s_1} \kappa_{\nu}(s', \nu) ds' \ll 1. \quad (3.16)$$

Применяя неравенства (3.13) и (3.16) к решению (3.15) уравнения переноса, получим новые неравенства

$$I_{\nu} \ll I_{\nu p}(T_0, \nu), \quad U_{\nu} \ll U_{\nu p}(T_0, \nu). \quad (3.17)$$

Учитывая второе неравенство (3.17), перепишем уравнение диффузии (2.5) в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{W}_{\nu} = c \kappa_{\nu} U_{\nu p}. \quad (3.18)$$

Проинтегрировав (3.18) по всем частотам, получим

$$\operatorname{div} \mathbf{W} = \int_0^{\infty} \operatorname{div} \mathbf{W}_{\nu} = c \int_0^{\infty} \kappa_{\nu}(T, \rho, \nu) U_{\nu p}(T, \nu) d\nu. \quad (3.19)$$

Выражение (3.19) для дивергенции потока энергии излучения перепишем в более удобном виде

$$\operatorname{div} \mathbf{W} = c \kappa \int_0^{\infty} U_{\nu p} d\nu = \kappa 4\sigma T^4, \quad (3.20)$$

где

$$\kappa(T, \rho) = \int_0^{\infty} \kappa_{\nu}(T, \rho, \nu) U_{\nu p}(T, \nu) d\nu \left/ \int_0^{\infty} U_{\nu p} d\nu \right. \quad (3.21)$$

Коэффициент  $\kappa$  (3.21) называется *осредненным по Планку коэффициентом поглощения*. Дивергенция потока энергии излучения (3.20) является в этом случае заранее известной функцией температуры и плотности вещества.

Из (3.20) следует, что для оптически тонкого слоя система уравнений динамики излучающего газа может быть записана в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (3.22)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\operatorname{grad} p, \quad (3.23)$$

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = -p \operatorname{div} \mathbf{u} + \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) - \kappa 4\sigma T^4, \quad (3.24)$$

$$\varepsilon = \varepsilon(T, \rho), \quad p = p(T, \rho), \quad \lambda = \lambda(T, \rho), \quad \kappa = \kappa(T, \rho). \quad (3.25)$$

**3. Область применимости приближений лучистой теплопроводности и оптически тонкого слоя.** Как видно из систем уравнений (3.8)—(3.11) и (3.22)—(3.25), использование приближений лучистой теплопроводности и оптически тонкого слоя приводит к существенному упрощению математической модели, описывающей процессы в излучающем газе. При этом в значительной мере исчезают вычислительные трудности, которые характерны для решения полной системы уравнений радиационной газовой динамики (1.1)—(1.6).

Однако к использованию этих приближений надо подходить с достаточной осторожностью. Нарушение условий (2.19), (3.12) и (3.13) часто приводит к искажению качественной картины явления. Рассмотрим в качестве примера данные расчетов задач, связанных с исследованием сильноточных излучающих разрядов [83].

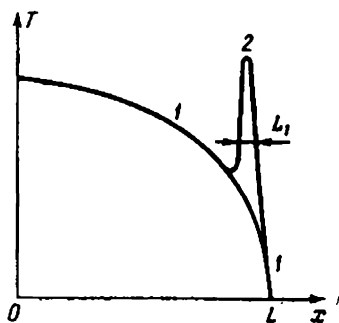


Рис. 9. Результаты расчетов, полученные с использованием приближения лучистой теплопроводности (кривая 1) и уравнения переноса (1.4) (кривая 2)

Профиль температуры, полученный с помощью использования приближения лучистой теплопроводности, изображен на рис. 9. Анализ результатов, проведенный после окончания этих расчетов, показал, что неравенство  $l_v \ll L$  хорошо выполняется.

Однако более точный расчет, основанный на использовании уравнения переноса (1.4), привел к качественно иной картине явления (рис. 9, кривая 2). В этих расчетах температурный пик возник в сравнительно небольшой с характерным размером  $L_1$  области. При этом для некоторого вносящего существенный вклад в теплообмен диапазона частот  $\nu_a \leq \nu \leq \nu_b$  неравенство  $l_v \ll L_1$  не выполняется, и следовательно, использование приближения лучистой теплопроводности уже необоснованно.

Неоправданное применение приближения лучистой теплопроводности в области температурного пика привело к резкому завышению высвечиваемого потока энергии излучения

$$W_\nu \ll -\frac{1}{3} l_\nu c \text{ grad } U_{\nu p}, \quad \nu_a \leq \nu \leq \nu_b.$$

В результате завышенных потерь энергии температурный профиль и оказывается сглаженным. Из этого примера можно также сделать вывод о том, что результаты, полученные с помощью приближения лучистой теплопроводности, не всегда дают возможность однозначно судить о справедливости его применения.

Осторожность требуется и в использовании приближения оптически тонкого слоя. Предположим, что неравенство  $l_v \gg \gg L$  выполняется почти для всех частот, за исключением небольшого отрезка  $\nu_c \leq \nu \leq \leq \nu_d$ . При этом имеют место соотношения

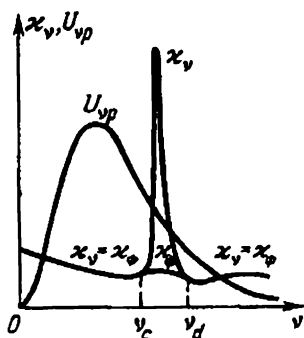


Рис. 10. К определению вклада линий в потерю энергии из тонкого слоя

$$\int_0^\infty U_{\nu p} d\nu \gg \int_{\nu_c}^{\nu_d} U_{\nu p} d\nu, \quad \int_0^\infty \chi_\nu U_{\nu p} d\nu \leq \int_{\nu_c}^{\nu_d} \chi_\nu U_{\nu p} d\nu. \quad (3.26)$$

Соотношения вида (3.26) характерны для случая, когда в коэффициенте поглощения существен учет влияния

дискретных (связанно-связанных) переходов. Коэффициент поглощения в линии может на несколько порядков превышать фоновый коэффициент поглощения  $\kappa_f$  (рис. 10).

Ввиду того, что неравенство (3.12) не выполнено для  $\nu \in [\nu_c, \nu_d]$ , потери энергии на излучение, определенные с помощью выражения  $\text{div } W_\nu = -\kappa_\nu c U_{\nu p}$ , будут сильно завышены в этом диапазоне частот. А так как коэффициент поглощения здесь велик, то вычисленное с большой погрешностью значение тепловых потерь на излучение

$\int_{\nu_c}^{\nu_d} \text{div } W_\nu d\nu$  будет оказывать определяющее влияние на теплообмен в слое.

При рассмотрении приближения оптически тонкого слоя предполагается выполнение не только неравенства (3.12), но и неравенства (3.13). Если внешнее излучение велико, например, оно приходит из областей с более высокой, чем у рассматриваемого слоя, температурой  $T_0 < T_{\text{вн}}$ , то в уравнении диффузии  $\text{div } W_\nu + \kappa_\nu c U_\nu = -\kappa_\nu c U_{\nu p}$  уже нельзя пренебречь членом  $\kappa_\nu c U_\nu$  по сравнению с  $\kappa c U_{\nu p}(T_0, \nu)$ .

Охлаждение или нагрев слоя будут определяться не только температурой данного объема, но и температурой других, более нагретых областей. В этих условиях и на прохождении излучения будет оказывать существенное влияние коэффициенты поглощения для более высоких частот, чем те, которые лежат в районе максимума плотности равновесного излучения  $U_{\nu p}$  при температуре  $T = T_0$ .

Приведенное рассмотрение показывает, что корректность применения приближений лучистой теплопроводности и оптически тонкого слоя весьма жестко зависит от выполнения условий (2.19), (3.12)—(3.13). В то же время диффузионное приближение, как следует из опыта его использования, дает качественно правильные результаты и при значительном отклонении поля излучения от изотропного и нарушении неравенства (2.19). Помимо устойчивости отношения (2.17) к изменению интенсивности энергии излучения  $I_\nu$ , этот факт связан еще и с тем, что диффузионное приближение дает количественно правильный вклад излучения в изменение внутренней энергии вещества, когда справедлива модель лучистой теплопроводности и когда справедливо приближение оптически тонкого слоя.

#### § 4. Приближение «серой» материи и случай разделяющихся переменных в коэффициенте поглощения

В этом параграфе будут рассмотрены две модели, описывающие перенос излучения, которые связаны со специальным видом коэффициента поглощения.

1. Приближение «серой» материи. Предположим, что коэффициент поглощения не зависит от частоты и является функцией только температуры и плотности вещества:

$$\kappa_\nu(T, \rho, \nu) = \kappa(T, \rho). \quad (4.1)$$

Среда, для коэффициента поглощения которой выполняется равенство (4.1), получила название «серой» материи.

Проинтегрируем исходное уравнение переноса (1.4) по частоте. Воспользовавшись независимостью коэффициента поглощения от энергии фотона, получим выражение

$$\Omega \operatorname{grad} \left( \int_0^\infty I_\nu d\nu \right) + \kappa \int_0^\infty I_\nu d\nu = \kappa \int_0^\infty I_{\nu p} d\nu. \quad (4.2)$$

Учитывая определение интегральной интенсивности энергии излучения  $I = \int_0^\infty I_\nu d\nu$  ((1.6) гл. I) и связь между интенсивностью и плотностью равновесного излучения  $I_{\nu p} = cU_{\nu p}/(4\pi)$ , перепишем уравнение (4.2) в виде

$$\Omega \operatorname{grad} I + \kappa I = \kappa \sigma T^4 / \pi. \quad (4.3)$$

Выразим интегральный поток и плотность энергии излучения через значения

$$W = \int_0^\infty d\nu \int \Omega I_\nu d\Omega = \int \Omega d\Omega \int_0^\infty I_\nu d\nu = \int \Omega I d\Omega, \quad (4.4)$$

$$U = \frac{1}{c} \int_0^\infty d\nu \int I_\nu d\Omega = \frac{1}{c} \int d\Omega \int_0^\infty I_\nu d\nu = \frac{1}{c} \int I d\Omega.$$

Тем самым для определения вклада излучения в изменение газодинамических параметров вещества достаточно знать лишь интегральную интенсивность  $I$ . В случае же «серой» материи для определения функции  $I$  доста-

точно решить не зависящее от частоты уравнение (4.3). Таким образом, автоматически понижается размерность исходного уравнения переноса (1.4).

Аналогично уравнению (4.3) можно получить и нестационарное уравнение переноса для «серой» материи:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \Omega \operatorname{grad} I + \kappa I = \frac{\kappa \sigma T^4}{\pi}. \quad (4.5)$$

К сожалению, физические процессы, когда с достаточным обоснованием можно говорить о выполнении равенства (4.1), сравнительно редки\*).

**2. Разделяющиеся переменные в коэффициенте поглощения.** Предположим, что коэффициент поглощения фотонов можно представить в виде произведения однозначных функций  $f_1$  и  $f_2$ :

$$\kappa_\nu(T, \rho, \nu) = f_1(\nu) f_2(T, \rho), \quad f_1 > 0, \quad f_2 > 0. \quad (4.6)$$

Рассмотрим плоский слой вещества. Поток энергии излучения в этом случае определяется с помощью выражения

$$W = \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 \mu I_\nu d\mu. \quad (4.7)$$

Введем новую переменную  $z = \mu / f_1(\nu)$ , которая меняется в следующих пределах:  $-\max f_1^{-1}(\nu) \leq z \leq \max f_1^{-1}(\nu)$  ( $0 \leq \nu < \infty$ ). Преобразуем интеграл, стоящий в правой части равенства (4.7), получим

$$\begin{aligned} W &= \int_0^\infty d\nu \int_{-f_1^{-1}(\nu)}^{f_1^{-1}(\nu)} f_1^2(\nu) z I_\nu dz = \\ &= \int_{-\max f_1^{-1}(\nu)}^{\max f_1^{-1}(\nu)} z dz \int_{\omega_{|z|}} f_1^2(\nu) I_\nu d\nu. \quad (4.8) \end{aligned}$$

Множество  $\omega_{|z|}$ , по которому происходит интегрирование в правой части выражения (4.8), определяется из условия  $f_1^{-1}(\nu) \geq |z|$ . На рис. 11 это множество заштриховано.

Обозначим через  $I$  внутренний интеграл,  $I =$

\* Уравнения (4.3) и (4.5) успешно используются в качестве сравнительно простых моделей для опробования различных вычислительных алгоритмов, предлагаемых для решения задач динамики излучающего газа,

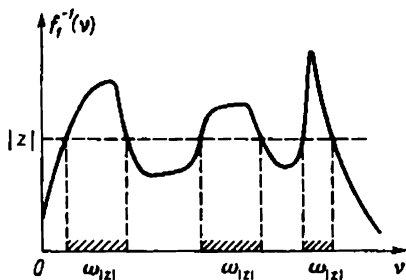


Рис. 11. К определению области интегрирования  $\omega_{|z|}$

$= \int_{\omega_{|z|}} f_1^2(v) I_v dv$ . С учетом этого обозначения перепишем равенство (4.8) для потока в виде

$$W = \int_{-\max f_1^{-1}(v)}^{\max f_1^{-1}(v)} z I dz. \quad (4.9)$$

Определим, какому уравнению удовлетворяет функция  $I$ . Для этого умножим исходное уравнение переноса

$$f_1^{-1}(v) \mu \frac{dI_v}{dx} + f_2(T, \rho) I_v = f_2(T, \rho) I_{vp}, \quad (4.10)$$

$$x_0 \leq x \leq x_N, \quad I_v(x_0, \mu)_{\mu > 0} = I^+(\mu, v), \quad I_v(x_N, \mu)_{\mu < 0} = I^-(\mu, v)$$

на  $f_1^2(v)$  и проинтегрируем его по множеству  $\omega_{|z|}$ . Учитывая независимость функции  $f_1(v)$  от пространственных переменных, получим уравнение

$$z \frac{dI}{dx} + f_2(T, \rho) I = f_2(T, \rho) F(T, |z|), \quad (4.11)$$

$$x_0 \leq x \leq x_N, \quad -\max f_1^{-1}(v) \leq z \leq \max f_1^{-1}(v)$$

с граничным условием

$$I(x_0, z)_{z > 0} = \int_{\omega_{|z|}} f_1^2(v) I^+(z f_1^{-1}(v), v) dv,$$

$$I_{z < 0}(x_N, z) = \int_{\omega_{|z|}} f_1^2(v) I^-(z f_1^{-1}(v), v) dv.$$

Входящая в правую часть (4.11) функция  $F(T, |z|)$  определяется из выражения

$$F(T, |z|) = \int_{\omega|z|} f_1^2(\nu) I_{\nu\rho} d\nu. \quad (4.12)$$

Несмотря на возможный немонотонный характер функции  $f_1(\nu)$ , для функции  $F(T, |z|)$  выполняется условие

$$F(T, |z_1|) \geq F(T, |z_2|) \text{ при } |z_1| < |z_2|.$$

Функция  $F(T, |z|)$  для каждого конкретного вещества может быть определена и затабулирована заранее перед расчетом уравнения (4.11).

Осредненное уравнение (4.11) было получено в работе [84]. По своей структуре оно напоминает уравнение переноса для «серой» материи. Учитывая специальный вид коэффициента поглощения (4.6), с помощью проведенного аналитического интегрирования удастся понизить размерность исходного уравнения переноса (4.10).

Отметим, что приближение «серой» материи является частным, соответствующим  $f_1(\nu) \equiv 1$  случаем представления коэффициента поглощения в виде (4.6). Для практического применения предложенного метода осреднения достаточно, чтобы коэффициент поглощения мог быть записан в виде произведения

$$\kappa_\nu(T, \rho, \nu) = f_1(T, \rho, \nu) f_2(T, \rho), \quad (4.13)$$

где  $f_1(T(x, t), \rho(x, t), \nu)$  — слабо меняющаяся на расстоянии длины свободного пробега функция.

Осредненное уравнение использовалось в работе [199] для расчета задачи о взаимодействии лазерного излучения с веществом при определении структуры ударной волны в излучающем газе [6]. Использование уравнения (4.11) может давать неплохие результаты и в случае достаточно сильного нарушения равенства (4.6) для коэффициента поглощения. Пример такого расчета приведен в работе [82].

**З а м е ч а н и е.** Осредненное уравнение при условии выполнения равенства (4.6) может быть получено и для двумерных плоских задач в  $(x, y)$ -геометрии. В этом случае оно примет вид [84]

$$\gamma \left( \cos \varphi \frac{\partial I}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial I}{\partial y} \right) + f_2 I = f_2 F(T, \gamma), \quad (4.14)$$

$$0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \gamma \leq \max f_1^{-1}(\nu),$$

$\varphi$  — угол между направлением полета фотона и осью  $x$ ,

$$F(T, \gamma) = 2 \int_{f_1^{-1} > \gamma} \frac{I_{\nu p} f_1^2(\nu) d\nu}{\sqrt{f_1^{-2}(\nu) - \gamma^2}}. \quad (4.15)$$

Для одномерных задач, обладающих сферической или цилиндрической симметрией, точного осредненного уравнения типа (4.11) даже при выполнении равенства (4.6) получить не удастся. Приближенное осредненное уравнение для случая сферической симметрии рассмотрено в работе [34].

Кроме рассмотренных в этой главе приближений широко используется целый ряд моделей, позволяющих упростить решение уравнения переноса для тех или иных классов задач. Так, для задач, в которых исследуется взаимодействие лазерного излучения с веществом часто пренебрегают собственным излучением плазмы. Система уравнений, описывающая этот процесс, при сделанном предложении примет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (4.16)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\operatorname{grad} p, \quad (4.17)$$

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = -p \operatorname{div} \mathbf{u} + \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) - \operatorname{div} \mathbf{W}_\lambda. \quad (4.18)$$

В свою очередь для нахождения потока энергии лазерного излучения  $\mathbf{W}_\lambda$  можно воспользоваться выражением

$$\mathbf{W}_\lambda = W_\lambda|_\Gamma \exp \left\{ - \int_{s_0(\Gamma)}^s \kappa_\lambda ds' \right\}. \quad (4.19)$$

Здесь  $W_\lambda|_\Gamma$  — граничное значение потока лазерного излучения,  $s_0(\Gamma)$  и  $s$  — граничное и текущее значения координаты вдоль лазерного луча,  $\kappa_\lambda$  — коэффициент поглощения лазерного излучения (рис. 12).

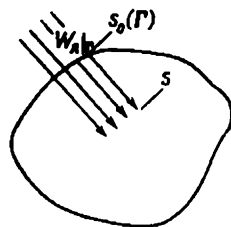


Рис. 12. К определению вклада лазерного излучения в нагрев вещества

Таким образом, когда собственным излучением плазмы (переизлучением) можно пренебречь по сравнению с излучением лазера, нет необходимости решать сложное уравнение переноса (1.4). Используемая для математического

моделирования процесса система уравнений (4.16) — (4.19) по своей структуре близка к системе уравнений радиационной газовой динамики, полученной в приближении оптически тонкого слоя (3.22) — (3.25).

## § 5. Многогрупповое приближение

Рассмотренные в этой главе приближенные модели, несмотря на ограничения, накладываемые на область их применимости, играют большую роль в численном моделировании задач динамики излучающего газа. С их помощью можно быстро и относительно дешевой ценой получить нужные исследователям предварительные результаты. Эти модели позволяют проводить проверку методов решения исходного уравнения переноса и часто используются в качестве составных частей эффективных алгоритмов расчета задач РГД.

Рассмотрим еще одно — многогрупповое приближение которое часто используется для решения задач динамики излучающего газа. Разобьем весь спектр на конечное число  $N_k$  интервалов по частоте — групп. Внутри каждой группы для частот  $\nu$ , лежащих в пределах  $\nu_k \leq \nu \leq \nu_{k+1}$ ,  $\nu_1 = 0$ ,  $\nu_{N_k} = \infty$ , будем предполагать, что коэффициент поглощения не зависит от энергии фотона:

$$\kappa_\nu(T, \rho, \nu) = \kappa_k(T, \rho), \quad \nu_k \leq \nu \leq \nu_{k+1}, \quad k = 1, \dots, N_k. \quad (5.1)$$

Интегральный поток и плотность энергии излучения представим в виде

$$W = \int_0^\infty d\nu \int \Omega I_\nu d\Omega = \sum_{k=1}^{N_k} \int \Omega I_k d\Omega, \quad I_k = \int_{\nu_k}^{\nu_{k+1}} I_\nu d\nu, \quad (5.2)$$

$$U = \frac{1}{c} \int_0^\infty d\nu \int I_\nu d\Omega = \sum_{k=1}^{N_k} \frac{1}{c} \int I_k d\Omega. \quad (5.3)$$

Для определения уравнения, которому удовлетворяет  $I_k$ , проинтегрируем уравнение переноса (1.4) по  $\nu$  от  $\nu_k$  до  $\nu_{k+1}$ . Учитывая, что коэффициент поглощения (5.1) в этом диапазоне не зависит от частоты, получим

$$\Omega \operatorname{grad} I_k + \kappa_k I_k = \kappa_k \int_{\nu_k}^{\nu_{k+1}} I_{\nu\rho} d\nu, \quad (5.4)$$

$$I_k(\Omega, \Gamma) = \int_{\nu_k}^{\nu_{k+1}} I^*(\Gamma, \nu, \Omega) d\nu.$$



образом:

$$\frac{1}{c} \frac{dI_k}{dt} + \Omega \operatorname{grad} I_k + \kappa_k I_k = \kappa_k \sigma_k \frac{T^4}{\pi}, \quad k=1, \dots, N_k,$$

$$I_k(\Omega, \Gamma) = \int_{\nu_k}^{\nu_{k+1}} I^*(\Gamma, \nu, \Omega, t) d\nu, \quad (\Omega, n) < 0. \quad (5.9)$$

Естественно, что эффективность многогруппового приближения зависит от числа  $N_k$  групп, с помощью которого с достаточной степенью точности можно получить значения потока  $W$  и плотности энергии излучения  $U$ :

$$W \approx \sum_{k=1}^{N_k} \int \Omega I_k d\Omega, \quad U \approx \frac{1}{c} \sum_{k=1}^{N_k} \int I_k d\Omega. \quad (5.10)$$

Чем меньше число групп, с помощью которого удалось добиться выполнения приближенных равенств (5.10), тем предпочтительней, с точки зрения вычислительной практики, полученное приближение. Групповой коэффициент поглощения (5.1) обычно определяют с помощью формул осреднения, аналогичных осреднению по Планку (3.21)

$$\kappa_k = \frac{\int_{\nu_k}^{\nu_{k+1}} \kappa_\nu I_{\nu p} d\nu}{\int_{\nu_k}^{\nu_{k+1}} I_{\nu p} d\nu} \quad (5.11)$$

или по Росселанду (3.6)

$$\kappa_k = \frac{\int_{\nu_k}^{\nu_{k+1}} \frac{dU_{\nu p}}{dT} d\nu}{\int_{\nu_k}^{\nu_{k+1}} l_\nu \frac{dU_{\nu p}}{dT} d\nu}. \quad (5.12)$$

В случае, когда в рассматриваемом диапазоне частот коэффициент поглощения  $\kappa_\nu$  меняется слабо, групповой коэффициент (5.1) практически не зависит от способа осреднения. К такой ситуации можно прийти, выбирая достаточно подробное (с учетом возможной разрывности коэффициента поглощения) разбиение спектра. В этом случае можно гарантировать выполнение приближенных равенств (5.10). Однако число групп в такой ситуации будет велико, что потребует для проведения расчета задачи динамики излучающего газа большого количества машинного времени.

Устоявшихся рецептов выбора границ групп, а следовательно и их числа, не существует. Этот выбор во многом определяется особенностями коэффициента поглощения  $\kappa_\nu$  и поведением решения задачи в целом.

На рис. 13 приведен пример разбиения на группы. Предполагается, что решение задачи обладает следующими особенностями: для интенсивностей энергии излучения и частот, лежащих в диапазоне  $\nu_3 \leq \nu \leq \nu_4$ , выполнены условия (3.12) и (3.13); для частот  $\nu_4 \leq \nu \leq \nu_5$

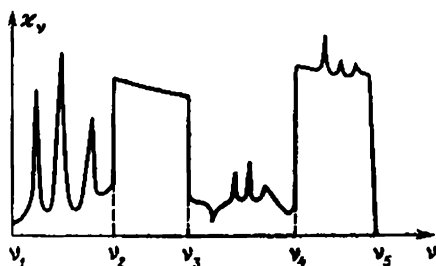


Рис. 13. Выбор границ групп и осредненных коэффициентов поглощения

выполнено условие (2.19); излучение, принадлежащее диапазону частот  $\nu_1 \leq \nu < \nu_2$ , практически не влияет на теплообмен в среде. Несмотря на сильное изменение коэффициента поглощения, частоты, лежащие в диапазоне  $\nu_1 \leq \nu < \nu_2$ , можно объединить в одну группу ввиду их малого вклада в общий теплообмен. Выбор способа осреднения коэффициента поглощения здесь не играет роли. Также не играет роли способ осреднения для  $\nu_2 \leq \nu \leq \nu_3$ , но уже по причине слабой зависимости коэффициента поглощения от частоты. В силу выполнения условий (3.12) и (3.13) частоты, лежащие в диапазоне  $\nu_3 \leq \nu \leq \nu_4$ , невзирая на сильное изменение коэффициента поглощения, можно объединить в одну группу с осреднением по Планку (5.11), а частоты  $\nu_4 \leq \nu < \nu_5$ , в силу выполнения неравенства (2.19), объединим в другую группу, осредняя коэффициент поглощения по Росселанду (5.12).

Из приведенного примера видно, что предварительная информация о решении задачи может играть решающую роль для ее аккуратного и экономичного описания. Для получения этой предварительной информации можно использовать решение, полученное в приближении «серой» материи или грубого многогруппового приближения. Именно возможность последующего саморазрешения и делает многогрупповое приближение вместе с многогрупповым приближением для уравнений диффу-

зи (2.10)—(2.11) наиболее часто используемыми для решения задач радиационной газовой динамики.

Остановимся еще на одном моменте, связанном с решением задач динамики излучающего газа. Многогрупповое приближение требует для своей реализации информацию о поведении групповых коэффициентов поглощения  $\kappa_h(T, \rho)$  в зависимости от изменения температуры и плотности. Однако сравнительно простые аналитические выражения (например  $\kappa_h = \kappa_{h0} T^\alpha \rho^\beta$ , где  $\kappa_{h0}$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  — постоянные) для описания этих коэффициентов в широком диапазоне изменения температур и плотностей можно построить довольно редко.

Использование теоретической и экспериментальной информации приводит к появлению таблиц коэффициентов поглощения. В этих таблицах при фиксированных базисных значениях плотности  $\rho_i$  ( $1 \leq i \leq N_i$ ) и температуры  $T_n$  ( $1 \leq n \leq N_n$ ) заданы значения коэффициентов  $\kappa_{ni}$  ( $1 \leq n \leq N_n$ ,  $1 \leq i \leq N_i$ ). Чтобы получить с помощью таблиц значения  $\kappa_h$  для получающихся в газодинамическом расчете величин температуры и плотности, воспользуемся предложенным Н. Н. Калиткиным способом логарифмической интерполяции. Этот метод можно применять для нахождения других материальных функций: давления  $p(T, \rho)$ , внутренней энергии  $\varepsilon(T, \rho)$  и т. д.

Пусть имеется какая-нибудь двумерная таблица  $F_{ni} = F(T_n, \rho_i)$ . Наряду с ней определим таблицы  $z_{ni} = \ln F_{ni}$ ,  $x_n = \ln T_n$ ,  $y_i = \ln \rho_i$ . Чтобы определить искомую величину  $F(T, \rho)$ , сначала найдем интервалы, где лежат полученные в газодинамическом расчете значения логарифмов температуры и плотности  $x_n \leq \ln T = x \leq x_{n+1}$ ,  $y_i \leq \ln \rho = y \leq y_{i+1}$ . Затем с помощью линейной интерполяции определим величину

$$z = (1-\xi)(1-\eta)z_{ni} + (1-\xi)\eta z_{n,i+1} + \xi(1-\eta)z_{n+1,i} + \xi\eta z_{n+1,i+1}, \quad (5.13)$$

где  $\xi = (x - x_n)/(x_{n+1} - x_n)$ ,  $\eta = (y - y_i)/(y_{i+1} - y_i)$ . Зная  $z$ , определим искомую материальную функцию

$$F = e^z. \quad (5.14)$$

Использование логарифмической интерполяции для определения материальных функций оказалось весьма удобным при расчете задач радиационной и магнитной радиационной газовой динамики (РГД и МРГД). Она непосредственно применялась при математическом моделировании сильноточных излучающих разрядов и задач динамики лазерной плазмы (§§ 1 и 3 гл. V).

## МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ИЗЛУЧАЮЩЕГО ГАЗА

В этой главе будут рассмотрены алгоритмы, применяемые для расчета одномерных, т. е. зависящих от одной пространственной координаты, задач динамики излучающего газа. Пока подавляющее большинство решенных на ЭВМ задач принадлежит именно к одномерной математической постановке. Данный факт обусловлен, с одной стороны, практической важностью процессов, описываемых одномерной системой уравнений, с другой стороны — тем, что эта система является наиболее простой с точки зрения численного моделирования.

### § 1. Уравнения переноса излучения для одномерных геометрий

Прежде чем систематически описать методы, применяемые для решения уравнений радиационной газовой динамики, рассмотрим уравнения переноса излучения для различных одномерных постановок.

1. Плоский слой. Дифференциальная часть уравнения переноса излучения

$$\Omega \operatorname{grad} I_{\nu} + \kappa_{\nu} I_{\nu} = \kappa_{\nu} I_{\nu p} \quad (1.1)$$

может быть записана в характеристическом виде

$$\Omega \operatorname{grad} I_{\nu} = dI_{\nu}/ds, \quad (1.2)$$

где  $s$  — характеристическая координата вдоль направления, совпадающего с вектором  $\Omega$ .

В декартовых координатах производную интенсивности энергии излучения вдоль направления полета фотона

МОЖНО ЗАПИСАТЬ В ВИДЕ

$$\frac{dI_{\nu}}{ds} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial I_{\nu}}{\partial x_i} \frac{dx_i}{ds}, \quad \frac{dx_1}{ds} = \Omega_1 = \sin \vartheta \cos \psi, \quad (1.3)$$

$$\frac{dx_2}{ds} = \Omega_2 = \sin \vartheta \sin \psi, \quad \frac{dx_3}{ds} = \Omega_3 = \cos \vartheta,$$

где  $\vartheta$  — угол между направлением полета фотона  $\Omega$  и осью  $x_3$ ,  $\psi$  — угол между проекцией вектора  $\Omega$  на плоскость  $(x_1, x_2)$  и осью  $x_1$  (рис. 14).

Учитывая (1.3), перепишем уравнение (1.1) в виде

$$\sin \vartheta \cos \psi \frac{\partial I_{\nu}}{\partial x_1} + \sin \vartheta \sin \psi \frac{\partial I_{\nu}}{\partial x_2} + \cos \vartheta \frac{\partial I_{\nu}}{\partial x_3} =$$

$$= \kappa_{\nu} (I_{\nu p} - I_{\nu}). \quad (1.4)$$

Уравнение (1.4) описывает перенос излучения для общего трехмерного случая.

Рассмотрим плоский слой, в котором изменение газодинамических параметров (температуры, плотности и т. д.) происходит только вдоль одной координаты  $x_3$ . В свою очередь интенсивность энергии излучения зависит от  $x_3$  и угла  $\vartheta$  между направлением полета фотона и осью  $x_3$ . Полная производная  $I_{\nu}$  вдоль характеристической координаты  $s$  будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{dI_{\nu}}{ds} = \frac{\partial I_{\nu}}{\partial x_3} \frac{dx_3}{ds} + \frac{\partial I_{\nu}}{\partial \vartheta} \frac{d\vartheta}{ds}. \quad (1.5)$$

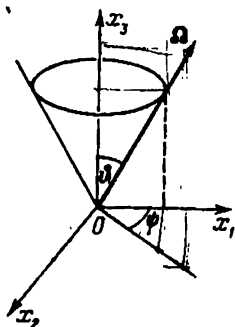


Рис. 14

Угол  $\vartheta$  при перемещении вдоль характеристики не меняется, поэтому  $d\vartheta/ds=0$ . Принимая во внимание, что  $dx_3/ds = \cos \vartheta$ , выпишем уравнение переноса излучения для плоского слоя:

$$\cos \vartheta \frac{\partial I_{\nu}}{\partial x_3} + \kappa_{\nu} I_{\nu} = \kappa_{\nu} I_{\nu p}. \quad (1.6)$$

Выражения для спектральной плотности энергии и потока энергии излучения, который для плоского слоя имеет одну ненулевую компоненту, выглядят следующим

образом:

$$U_{\nu} = \frac{1}{c} \int I_{\nu} d\Omega = \frac{1}{c} \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} I_{\nu} d\psi,$$

$$W_{\nu} = \int I_{\nu} \Omega_3 d\Omega = \int_0^{\pi} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} I_{\nu} d\psi.$$

Введем обозначение  $\cos \vartheta = \mu$ . Тогда, учитывая, что интенсивность энергии излучения не зависит от угла  $\psi$ , перепишем выражения для потока и плотности в виде

$$U_{\nu} = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^1 I_{\nu} d\mu = \frac{1}{c} \int_{-1}^1 I'_{\nu} d\mu, \quad (1.7)$$

$$W = 2\pi \int_{-1}^1 \mu I_{\nu} d\mu = \int_{-1}^1 \mu I'_{\nu} d\mu, \quad I'_{\nu} = 2\pi I_{\nu}.$$

В дальнейшем для плоского слоя будем обозначать  $x_3$  как  $x$ , а  $I'_{\nu}$  — как  $I_{\nu}$ . С учетом сделанных обозначений перепишем уравнение переноса (1.6) следующим образом:

$$\mu \frac{dI_{\nu}}{dx} + \kappa_{\nu} I_{\nu} = \kappa_{\nu} 2\pi I_{\nu 0}, \quad x_0 \leq x \leq x_N, \quad -1 \leq \mu \leq 1. \quad (1.8)$$

Граничные условия для уравнения переноса задаются только для тех направлений полета фотона, для которых имеет место  $(\Omega, \mathbf{n}) < 0$  (§ 2 гл. 1). Для конкретного случая плоского слоя граничное условие примет вид (рис. 15):

$$x = x_0, \quad \mu \geq 0, \quad I_{\nu}(x_0, \mu, \nu) = I_{\nu}^*(\mu, \nu);$$

$$x = x_N, \quad \mu < 0, \quad I_{\nu}(x_N, \mu, \nu) = I_{\nu}^{**}(\mu, \nu).$$

Здесь  $I^*$  и  $I^{**}$  — известные функции, характеризующие падающее слева и справа на слой излучение.

**2. Сферическая симметрия.** Для сферически-симметричных задач все газодинамические параметры зависят лишь от расстояния  $r$  между исследуемой точкой  $O_1$  и точкой  $O$ , именуемой центром симметрии (рис. 16). Интенсивность энергии излучения  $I_{\nu}$ , помимо  $r$ , зависит еще и от угла  $\vartheta$  между направлением полета фотона  $\Omega$  и лучом, проведенным через точки  $O$  и  $O_1$ . Зависимость от угла  $\psi$ , расположенного в плоскости, перпендикулярной направлению  $OO_1$ , ввиду сферической симметрии задачи отсутствует. Поэтому в дальнейшем, как и для

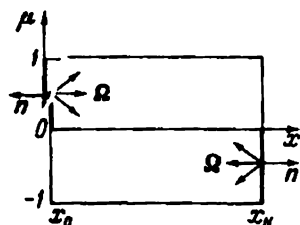


Рис. 15. Граничные условия для плоского слоя

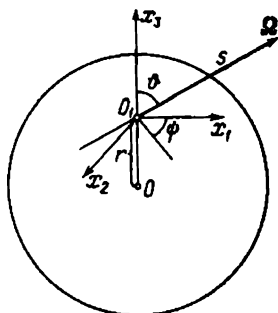


Рис. 16

плоского случая, будем рассматривать только величину  $I'_\nu = 2\pi I_\nu$ , которой дадим старое обозначение  $I_\nu$ .

Полная производная  $I_\nu$  вдоль характеристической координаты для случая сферической симметрии будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \frac{\partial I_\nu}{\partial r} \frac{dr}{ds} + \frac{\partial I_\nu}{\partial \vartheta} \frac{d\vartheta}{ds}. \quad (1.9)$$

Для того чтобы определить  $dr/ds$  и  $d\vartheta/ds$ , рассмотрим изменение радиуса  $r$  и угла  $\vartheta$  в зависимости от изменения характеристической координаты. При изменении характеристической координаты на  $\Delta s$  расстояние до центра симметрии меняется от  $r$  до  $r_1$ , а угол от  $\vartheta$  до  $\vartheta_1$  (рис. 17). Из простых геометрических соотношений следует, что  $\Delta r = \Delta s \cos \vartheta$ , а  $\Delta \vartheta = -\Delta s \sin \vartheta / r$ . Переходя к пределу, получим

$$dr/ds = \cos \vartheta, \quad d\vartheta/ds = -\sin \vartheta / r. \quad (1.10)$$

Воспользовавшись для описания полной производной  $I_\nu$  выражениями (1.9) и (1.10), а также применяя замену переменного  $\mu = \cos \vartheta$ , получим уравнение переноса для сферы

$$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial I_\nu}{\partial \mu} + \kappa_\nu I_\nu = \kappa_\nu 2\pi I_{\nu p}, \quad 0 \leq r \leq R, \\ -1 \leq \mu \leq 1. \quad (1.11)$$

Условие для уравнения (1.11) на внешней границе  $r=R$  ставится для лучей, входящих внутрь рассматриваемой сферы:

$$I_\nu(R, \mu, \nu) = I_\nu^*(\mu, \nu), \quad \mu < 0. \quad (1.12)$$

Здесь  $I_\nu^*(\mu, \nu)$  — заданная функция.

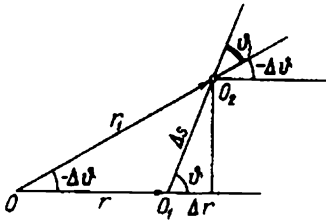


Рис. 17. К выводу уравнения переноса для сферически-симметричного случая

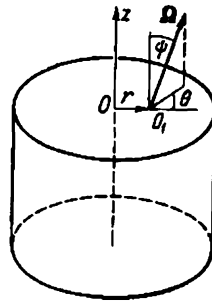


Рис. 18

Так как интенсивность энергии излучения  $I_\nu$  не зависит от угла  $\psi$ , то после ее нахождения из уравнения (1.11) спектральная плотность и поток энергии излучения для сферы будут определяться с помощью формул (1.7)

$$U_\nu = \frac{1}{c} \int_{-1}^1 I_\nu d\mu, \quad W_\nu = \int_{-1}^1 \mu I_\nu d\mu.$$

**3. Бесконечный круговой цилиндр.** Для одномерного бесконечного кругового цилиндра параметры вещества зависят только от расстояния  $r$  до оси симметрии  $Oz$  (рис. 18). Интенсивность  $I_\nu$ , помимо расстояния  $r$ , дополнительно зависит от угла  $\psi$  между направлением  $\Omega$  полета фотона и осью симметрии и угла  $\vartheta$  между радиусом-вектором, проведенным в исследуемую точку  $O_1$ , и проекцией вектора  $\Omega$  на плоскость, перпендикулярную оси симметрии.

Полная производная  $I_\nu$  для бесконечного цилиндра запишется в виде

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \frac{\partial I_\nu}{\partial r} \frac{dr}{ds} + \frac{\partial I_\nu}{\partial \psi} \frac{d\psi}{ds} + \frac{\partial I_\nu}{\partial \vartheta} \frac{d\vartheta}{ds}. \quad (1.13)$$

При движении вдоль характеристики угол  $\psi$  не меняется. Поэтому  $d\psi/ds = 0$ . Для нахождения  $d\vartheta/ds$  и  $dr/ds$  воспользуемся геометрическими рассмотрениями, которые применялись в случае сферической симметрии. Только вместо  $\Delta s$  будем использовать ее проекцию на плоскость, перпендикулярную оси симметрии  $\Delta s \sin \psi$ .

Таким образом, получим, что

$$\frac{dr}{ds} = \sin \psi \cos \vartheta, \quad \frac{d\vartheta}{ds} = -\frac{\sin \psi \sin \vartheta}{r}, \quad \frac{d\psi}{ds} = 0. \quad (1.14)$$

Воспользовавшись выражениями (1.13) — (1.14), а также применяя замену переменных

$$\mu = \cos \vartheta, \quad \gamma = \cos \psi, \quad (1.15)$$

получим уравнение переноса излучения для бесконечного цилиндра

$$\sqrt{1-\gamma^2} \left( \mu \frac{\partial I_{\nu}}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial I_{\nu}}{\partial \mu} \right) + \kappa_{\nu} I_{\nu} = \kappa_{\nu} I_{\nu p}, \quad (1.16)$$

$$0 \leq r \leq R, \quad -1 \leq \mu \leq 1, \quad -1 \leq \gamma \leq 1.$$

Граничное условие для уравнения (1.16) при  $r=R$  запишется в виде

$$I_{\nu}(R, \mu, \gamma, \nu) = I_{\nu}^*(\mu, \gamma, \nu), \quad \mu < 0, \quad -1 \leq \gamma \leq 1, \quad (1.17)$$

где  $I_{\nu}^*$  — функция, характеризующая падающее извне излучение.

Если  $I^*$  — симметричная функция  $\gamma$ , например, как это имеет место при отсутствии внешнего излучения ( $I_{\nu}^* = 0$ ), то решение уравнения (1.16) также будет симметричным относительно  $\gamma$ .

Спектральная плотность и поток энергии излучения, единственная компонента которого направлена вдоль радиуса-вектора, определяются с помощью выражений

$$U_{\nu} = \frac{1}{c} \int_0^{\pi} \sin \psi d\psi \int_0^{2\pi} I_{\nu} d\vartheta, \quad (1.18)$$

$$W_{\nu} = \int_0^{\pi} \sin^2 \psi d\psi \int_0^{2\pi} I_{\nu} \cos \vartheta d\vartheta.$$

Используя замену переменных (1.15), выпишем окончательные выражения для спектральных потока и плотности энергии излучения в случае бесконечного цилиндра:

$$U_{\nu} = \int_{-1}^1 d\gamma \int_{-1}^1 I_{\nu} \frac{d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}, \quad (1.19)$$

$$W_{\nu} = \int_{-1}^1 \sqrt{1-\gamma^2} d\gamma \int_{-1}^1 \frac{\mu I_{\nu}}{\sqrt{1-\mu^2}} d\mu,$$

В заключение параграфа выпишем нестационарное уравнение переноса в различных одномерных геометриях:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_{\nu}}{\partial t} + \mu \frac{\partial I_{\nu}}{\partial x} + \kappa_{\nu} I_{\nu} = 2\pi \kappa_{\nu} I_{\nu p}, \quad (1.20)$$

$$x_0 \leq x \leq x_N, \quad -1 \leq \mu \leq 1,$$

— плоский слой,

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_{\nu}}{\partial t} + \mu \frac{\partial I_{\nu}}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial I_{\nu}}{\partial \mu} + \kappa_{\nu} I_{\nu} = 2\pi \kappa_{\nu} I_{\nu p}, \quad (1.21)$$

$$0 \leq r \leq R, \quad -1 \leq \mu \leq 1,$$

— шар,

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_{\nu}}{\partial t} + \sqrt{1-\gamma^2} \left( \mu \frac{\partial I_{\nu}}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial I_{\nu}}{\partial \mu} \right) + \kappa_{\nu} I_{\nu} = \kappa_{\nu} I_{\nu p}, \quad (1.22)$$

$$0 \leq r \leq R, \quad -1 \leq \mu \leq 1, \quad -1 \leq \gamma \leq 1,$$

— бесконечный цилиндр.

Вывод уравнений (1.20)–(1.22) аналогичен выводу соответствующих стационарных уравнений (1.8), (1.11) и (1.16).

## § 2. Основные этапы решения задач динамики излучающего газа

Используя полученные квазистационарные уравнения переноса излучения (1.8), (1.11), (1.16), выпишем систему уравнений радиационной газовой динамики в общем виде для одномерных геометрий:

$$\frac{dp}{dt} + \frac{\rho}{r^n} \frac{\partial r^n u}{\partial r} = 0, \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial r}, \quad (2.2)$$

$$\rho \frac{de}{dt} = -\frac{p}{r^n} \frac{\partial r^n u}{\partial r} + \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} r^n \lambda \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} r^n W, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1-\delta_{in}\gamma^2} \left( \mu \frac{\partial I_{\nu}}{\partial r} + (\delta_{1n} + \delta_{2n}) \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial I_{\nu}}{\partial \mu} \right) + \kappa_{\nu} I_{\nu} = \\ = \kappa_{\nu} [2\pi(\delta_{0n} + \delta_{2n}) + \delta_{1n}] I_{\nu p}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$W = \int_0^{\infty} d\nu \int_{-1}^1 \mu I_{\nu} d\mu, \quad n=0, 2;$$

$$W = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} d\nu \int_{-1}^1 \sqrt{1-\gamma^2} d\gamma \int_{-1}^1 \frac{I_{\nu} \mu d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}, \quad n=1. \quad (2.5)$$

Значение индекса  $n=0$  соответствует случаю плоского слоя,  $n=1$  — бесконечному цилиндру,  $n=2$  — шару,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

Из уравнений (2.1) — (2.3), описывающих одномерное течение высокотемпературной газовой среды, видно, что излучение вносит свой вклад только в уравнение энергии (2.3). Поэтому алгоритм решения задач динамики излучающего газа естественным образом следует разбить на три основных этапа:

1) расчет уравнений неразрывности (2.1) и движения (2.2);

2) решение уравнения переноса (2.4) и определение потока энергии излучения;

3) определение температуры после решения уравнения переноса (2.4) из уравнения энергии (2.3).

Такое разбиение алгоритма применяется и для расчета двумерных задач радиационной газовой динамики.

Второй и третий этапы специфичны для задач динамики излучающего газа. Именно на них и будет сосредоточено основное внимание в данной книге.

Следует, однако, подчеркнуть, что применение точных методов, способных эффективно рассчитывать различные типы газодинамических течений, является необходимым элементом успешного решения задачи радиационной газовой динамики в целом. Что же касается одномерных уравнений, то здесь для решения задач высокотемпературной газовой динамики в основном используется лагранжева система координат. При этом вместо исходной эйлеровой координаты  $r$  применяется массовая или лагранжева координата  $m$  ( $dm = \rho r^n dr$ ).

В лагранжевой системе координат удобно решать задачи, в которых происходит резкое изменение плотностей, присутствуют вещества, отличающиеся друг от друга уравнениями состояния и коэффициентами поглощения. Отметим, что резкое изменение первоначальных плотностей характерно для многих задач высокотемпературной газовой динамики.

Система уравнений, описывающая газодинамическое движение вещества, в лагранжевой системе координат примет вид

$$\frac{\partial r}{\partial t} = u, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho} \right) = \frac{\partial}{\partial m} (r^n u), \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -r^n \frac{\partial p}{\partial m}, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -p \frac{\partial (r^n u)}{\partial m} + \frac{\partial}{\partial m} r^{2n} \lambda \frac{\partial T}{\partial m} - \frac{\partial r^n W}{\partial m}. \quad (2.9)$$

Методы решения одномерных уравнений газовой динамики (2.6)—(2.9) в настоящее время развиты достаточно хорошо. Не останавливаясь на них в монографии, можно рекомендовать читателям обратиться к книге А. А. Самарского и Ю. П. Попова [169], специально посвященной данному вопросу.

### § 3. Методы решения уравнения переноса

1. **Метод дискретных ординат.** Из многогрупповой системы уравнений (5.8) (§ 5 гл. II) видно, что уравнение переноса имеет одинаковую структуру для всех групп. Поэтому все методы решения одномерных уравнений переноса излучения рассмотрим на примере одnogруппового уравнения

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \delta_{1n} \gamma^2} \left( \mu \frac{\partial I}{\partial r} + (\delta_{1n} + \delta_{2n}) \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial I}{\partial \mu} \right) + \kappa I = \\ = \frac{\kappa \sigma T^4}{\pi} [2\pi (\delta_{0n} + \delta_{2n}) + \delta_{1n}]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Введем пространственную сетку  $\omega_r = \{r_0 = 0, r_i, r_i = r_{i-1} + \Delta r_i, i = 1, \dots, N_i\}$ , на которой будем рассматривать аппроксимацию уравнения (3.1). Если для расчета уравнений газовой динамики используется лагранжева система координат, то пространственная сетка для решения уравнения переноса перестраивается с течением времени в соответствии с уравнением (2.6), дающим связь между массовой и эйлеровой системами координат:

$$r_i^j = r_i^{j-1} + \tau^{j-1} u^j. \quad (3.2)$$

Сетка по временной переменной определяется аналогично разностной сетке в пространстве

$$\omega_\tau = \{t_0 = 0, t^j, \tau^j = t^{j+1} - t^j, j = 1, \dots, N_j\}.$$

При расчете уравнения (3.1) в задачах радиационной газовой динамики во многом используются методы, ранее разработанные для решения уравнений нейтронной физики. Поэтому рассмотрим сначала одnogрупповое уравнение переноса нейтронов для плоского слоя

$$\mu \frac{d\Phi}{dr} + \kappa \Phi = \frac{\beta}{2} \int_{-1}^1 \Phi(r, \mu) d\mu + f(r, \mu). \quad (3.3)$$

Здесь  $\varphi$  — плотность распределения нейтронов, умноженная на их скорость,  $\beta$  — коэффициент рассеяния,  $f(r, \mu)$  — заданный источник нейтронов.

Одним из первых методов решения уравнения (3.3) был предложенный Г. Виком [228] и С. Чандрасекаром [194] метод дискретных ординат. Уравнение (3.3) заменяется системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\mu_m \frac{d\varphi_m}{dr} + \kappa\varphi_m = \frac{\beta}{2} \sum_{m=1}^{N_m} A_m \varphi_m + f(r, \mu_m), \quad (3.4)$$

$$m = 1, \dots, N_m,$$

где  $\mu_m$  — узлы,  $A_m$  — веса квадратурной формулы  $\left( \sum_{m=1}^{N_m} A_m = 1 \right)$ .

Для решения уравнения (3.4) необходимо прибегнуть к тому или иному итерационному процессу вида

$$\mu_m \frac{d\varphi_m^{(s)}}{dr} + \kappa\varphi^{(s)} = Q^{(s-1)}, \quad (3.5)$$

в котором правая часть  $Q^{(s-1)}$  вычисляется по данным с предыдущей итерации  $Q^{(s-1)} = \frac{\beta}{2} \sum_{m=1}^{N_m} A_m \varphi_m^{(s-1)} + f(r, \mu_m)$ .

В свою очередь решение уравнения (3.5) можно осуществить с помощью различных численных методов, применяемых для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Аналогичное (3.4) одногрупповое уравнение для описания переноса излучения запишется в виде

$$\mu_m \frac{dI_m}{dr} + \kappa I_m = 2\kappa\sigma T^4, \quad m = 1, \dots, N_m. \quad (3.6)$$

Решение уравнения (3.6) оказывается проще, чем решение уравнения (3.4), ввиду отсутствия в правой части члена, характеризующего рассеяние.

Рассмотрим одну из схем, применяемых для расчета уравнения (3.6). Предположим, что температура  $T$  и коэффициент поглощения  $\kappa$  являются кусочно-постоянными функциями на интервале  $(r_{i-1}, r_i)$ ,  $T = T_{i-1/2}$ ,  $\kappa = \kappa_{i-1/2}$ . Получим

$$\mu_m \frac{I_{im} - I_{i-1,m}}{r_i - r_{i-1}} + \kappa_{i-1/2} \frac{I_{i-1,m} + I_{im}}{2} = \kappa_{i-1/2} 2\sigma T_{i-1/2}^4,$$

$$\mu_m \geq 0, \quad i=2, \dots, N_i, \quad I_{im} = I_m^*, \quad (3.7)$$

$$\mu_m \frac{I_{im} - I_{i+1,m}}{r_i - r_{i+1}} + \kappa_{i+1/2} \frac{I_{i+1,m} + I_{im}}{2} = \kappa_{i+1/2} 2\sigma T_{i+1/2}^4,$$

$$\mu_m < 0, \quad i = N_i - 1, \dots, 1, \quad I_{N_i m} = I_m^{**},$$

где  $I_m^*$  и  $I_m^{**}$  — значения интенсивности энергии излучения, вытекающие из граничных условий для уравнения (1.8).

Как показывает анализ, основанный на исследовании модельного уравнения

$$u' = -\alpha u, \quad u(0) = u_0, \quad 0 \leq r \leq r_N,$$

схема (3.7) оказывается устойчивой с локальной погрешностью аппроксимации, равной  $O((\Delta r)^2)$  на гладких решениях.

**2. Метод характеристик.** В методе характеристик численное интегрирование производится вдоль направление полета фотонов. По сути дела, разностная схема (3.7) является характеристической для уравнения, описывающего перенос излучения в плоском слое ( $n=0$ ). Однако для шара ( $n=2$ ) и бесконечного цилиндра ( $n=1$ ) эти схемы строятся несколько сложнее.

В 1949 г. А. А. Самарским была предложена разностная схема для уравнения переноса в случае сферической симметрии:

$$\mu_m \frac{I_{im} - I_{i+1,m}}{r_i - r_{i+1}} + \frac{1 - \mu_m^2}{r_i} \frac{I_{im} - I_{i,m-1}}{\mu_m - \mu_{m-1}} + \kappa_{i+1/2} I_{im} =$$

$$= \kappa_{i+1/2} 2\sigma T_{i+1/2}^4,$$

$$i = N_i - 1, \dots, 1, \quad m = 2, \dots, (N_m + 1)/2,$$

$$N_m = 2k + 1, \quad \mu_m \leq 0, \quad (3.8)$$

$$\mu_m \frac{I_{im} - I_{i-1,m}}{r_i - r_{i-1}} + \frac{1 - \mu_m^2}{r_i} \frac{I_{im} - I_{i,m-1}}{\mu_m - \mu_{m-1}} + \kappa_{i-1/2} I_{im} =$$

$$= \kappa_{i-1/2} 2\sigma T_{i-1/2}^4,$$

$$i = 2, \dots, N_i, \quad m = (N_m + 3)/2, \dots, N_m, \quad \mu_m > 0.$$

Схема (3.8) приближенно учитывает направление характеристики (рис. 19), которая для шара описывается с помощью выражения

$$r \sqrt{1 - \mu^2} = r' = \text{const.} \quad (3.9)$$

Графически разностная схема (3.8) изображена на рис. 20.

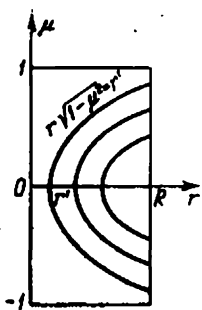


Рис. 19. Характеристики уравнения переноса для случая сферической симметрии

Для начала счета по разностной схеме (3.8) помимо граничных значений сеточной функции  $I_{N_i, m}$  ( $m = 2, \dots, (N_m + 1)/2$ ,  $\mu_m \leq 0$ ) необходимо знать ее величину в узлах  $m = 1$ ,  $i = N_i - 1, \dots, 1$ . В свою очередь для нахождения  $I_i$  можно использовать уравнение

$$-\frac{dl}{dr} + \kappa I = \kappa \sigma T^4, \quad (3.10)$$

в которое вырождается исходное уравнение переноса (3.1) при  $\mu = -1$  ( $n = 2$ ).

В декартовой системе координат характеристики уравнения (3.1) являются прямыми линиями. В. С. Владимировым [52] был предложен алгоритм, в котором уравнение переноса для шара интегрируется вдоль направления характеристики. Причем все характеристики проводятся параллельно некоторому направлению (рис. 21).

При решении уравнения предполагается, что значения температуры и коэффициента поглощения для отрезков характеристики, находящихся между радиусами  $r_i$  и  $r_{i+1}$ , соответственно равны  $T_{i+1/2}$  и  $\kappa_{i+1/2}$ . Длины отрезков, на которых производится интегрирование, легко определить из геометрических соображений. Например, длина отрезка  $AB$  равна  $\sqrt{r_{i+1}^2 - r_{i-1}^2} - \sqrt{r_i^2 - r_{i-1}^2}$ .

После решения уравнения переноса вдоль характеристики можно определить координаты узлов в переменных  $r, \mu$ . Например, точка  $A$  имеет следующие координаты

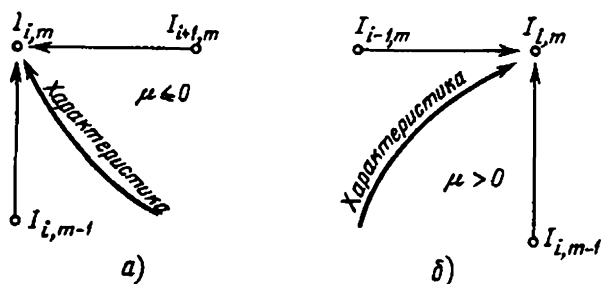


Рис. 20

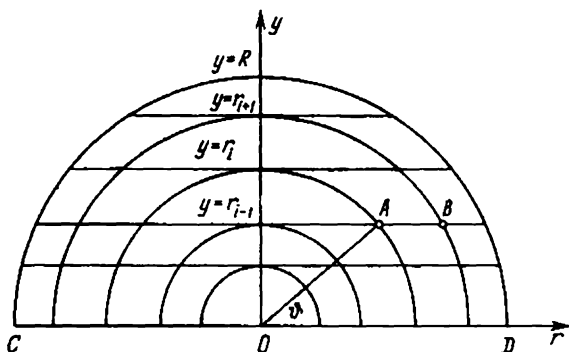


Рис. 21. Интегрирование уравнения переноса для шара вдоль направления характеристики

наты:  $r_A = r_i$ ,  $\mu_A = \cos \varphi = \sqrt{r_i^2 - r_{i-1}^2} / r_i$ . В целом число угловых точек на каждом радиусе определяется числом пересечений окружности этого радиуса с характеристиками. Как видно из рис. 21, в точке с радиусом  $r_i$  будет определено 7 узлов по углам, включая направления  $OD$  и  $OC$ , соответствующие значениям  $\mu = +1$  и  $\mu = -1$ .

Как показано в работе [52], решение, полученное методом характеристик, стремится к точному решению уравнения переноса при стремлении шага пространственной сетки к нулю. Каждая характеристика может рассчитываться независимо от других, что делает данный алгоритм удобным для расчета на многопроцессорных ЭВМ. Этим свойством не обладает схема (3.8). Однако наличие жесткой связи между пространственной и угловой сетками в методе Владимирова приводит к следующим недостаткам алгоритма.

1) Как правило, для численного решения задач радиационной газовой динамики требуется значительно менее подробная сетка по углу, чем по пространственной переменной. В рассматриваемом методе при числе пространственных точек  $N_r$  общий объем разностной сетки равен  $N_r^2$  точек, что сильно удорожает расчет.

2) Геометрия сетки такова, что на радиусах, удаленных от центра шара, располагается значительное число угловых точек сетки, а вблизи центра их число мало.

В работах [74, 151] были предложены методы характеристик с интерполяцией. Рассмотрим схему метода характеристик с интерполяцией на примере задач, обладающих сферической симметрией. Для этого вначале

вновь запишем уравнение переноса в характеристических координатах

$$\frac{dl}{ds} + \kappa l = \frac{\kappa \sigma T^4}{\pi}, \quad s \in [s_a, s_b]. \quad (3.11)$$

Предположим, что на отрезке характеристики  $[s_a, s_b]$  величины  $\kappa$  и  $T$  постоянны. Тогда, если значение  $I_{s_a}$  известно, то величину  $I_{s_b}$  можно определить с помощью квадратурной формулы

$$I_{s_b} = I_{s_a} \exp\{-\kappa(s_b - s_a)\} + \frac{\kappa \sigma T^4}{\pi} [1 - \exp\{-\kappa(s_b - s_a)\}], \quad (3.12)$$

которая получена точным интегрированием уравнения (3.11) на отрезке  $[s_a, s_b]$ .

Для случая сферической симметрии так же, как и для разностной схемы (3.8), введем прямоугольную сетку в переменных  $r, \mu$ :

$$\omega_r = \{r_i, i=1, \dots, N_i, \Delta r_i = r_{i+1} - r_i, i=1, \dots, N_i - 1\}, \\ \omega_\mu = \{\mu_m, m=1, \dots, N_m, \Delta \mu_m = \mu_{m+1} - \mu_m, \\ m=1, \dots, N_m - 1\}.$$

При этом значение  $\mu=0$  должно обязательно являться узлом разностной сетки. Обычно шаг разностной сетки по угловой переменной выбирается постоянным, а  $N_m + 1$  — четным ( $\mu_1 = -1, \mu_{(N_m+1)/2} = 0, \mu_{N_m} = 1$ ).

Определим значение интенсивности энергии излучения для  $\mu \leq 0$ . Вначале с помощью интегрирования уравнения (3.10) найдем значения сеточной функции  $I_{i1}$  при  $\mu = -1$ :

$$I_{i1} = I_{i+1,1} \exp\{-\kappa_{i+1/2}(r_{i+1} - r_i) + \\ + \kappa_{i+1/2} 2\sigma T^4_{i+1/2} (1 - \exp\{-\kappa_{i+1/2}(r_{i+1} - r_i)\})\}, \quad (3.13) \\ I_{N_i 1} = I_1^*, \quad i = N_i - 1, \dots, 1.$$

Величина  $I_1^*$  определяется из граничного условия для уравнения переноса. В дальнейшем при организации счета предполагаем, что значения сеточной функции  $I_{i, m-1}$  на предыдущем слое по  $\mu$  известны.

Для нахождения значения функции  $I_{im}$  из точки с координатами  $r=r_i, \mu=\mu_m$  ( $\mu_m < 0$ ) испустим характеристику. Эта характеристика пересечет разностную сетку в точке 1 или 2 (рис. 22, а). Обозначим значение функции  $I$  в точках 1 и 2 через  $\tilde{I}$ . Тогда  $\tilde{I}$  в точке 1 можно получить с помощью линейной интерполяции по

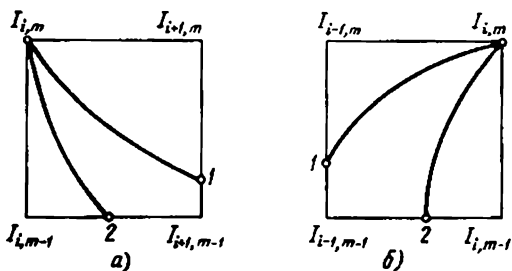


Рис. 22. а) Организация счета для метода характеристик с интерполяцией при  $\mu < 0$  ( $n=2$ ). б) Организация счета при  $\mu > 0$

значениям  $I_{i+1, m-1}$ ,  $I_{i+1, m}$ :

$$\tilde{I}_1 = I_{i+1, m-1} \frac{\mu_m - \mu}{\mu_m - \mu_{m-1}} + I_{i+1, m} \frac{\mu - \mu_{m-1}}{\mu_m - \mu_{m-1}}, \quad (3.14)$$

а значение  $\tilde{I}$  в точке 2 получим с помощью интерполяции по значениям сеточной функции  $I_{i, m-1}$  и  $I_{i+1, m-1}$ :

$$\tilde{I}_2 = I_{i, m-1} \frac{r_{i+1} - r}{r_{i+1} - r_i} + I_{i+1, m-1} \frac{r - r_i}{r_{i+1} - r_i}. \quad (3.15)$$

Зная значение функции  $\tilde{I}$ , которое в зависимости от поведения характеристической кривой определится с помощью выражения (3.14) или (3.15), значение сеточной функции  $I_{im}$  в точке с координатами  $r=r_i$ ,  $\mu=\mu_m$  можно получить с помощью квадратурной формулы, аналогичной (3.12):

$$I_{im} = \tilde{I} \exp\{-\kappa_{i+1/2}(x_{im} - \tilde{x}_{im})\} + 2\sigma T_{i+1/2}^4 [1 - \exp\{-\kappa_{i+1/2}(x_{im} - \tilde{x}_{im})\}], \quad (3.16)$$

$$i = N_i - 1, \dots, 1,$$

где

$$x_{im} = r_i \mu_m, \quad \tilde{\mu}_{im} = -\sqrt{r_{i+1}^2 - r_i^2 (1 - \mu_m^2)} / r_{i+1}, \quad (3.17)$$

$$\tilde{x}_{im} = \begin{cases} r_{i+1} \tilde{\mu}_{im}, & \tilde{\mu}_{im} \geq \mu_{m-1}, \\ r_i \sqrt{1 - \mu_m^2} \mu_{m-1} / \sqrt{1 - \mu_{m-1}^2}, & \tilde{\mu}_{im} < \mu_{m-1}. \end{cases}$$

Значения, определяющие длину дуги характеристической кривой (3.17) между точками 1 или 2 и узлом  $im$ , можно легко получить с помощью выражения (3.9).

Для начала расчета при положительных  $\mu$  необходимо знать значения сеточной функции  $I_{i, (N_m+1)/2}$  ( $\mu=0$ ). Они могут быть получены с помощью выражения (3.16) и

значения функции при  $r=0$ , которые из условия симметрии в центре не зависят от  $\mu$ . Дальнейшая организация счета аналогична применяемой при отрицательных значениях  $\mu$ . Для нахождения функции  $\tilde{I}$  применяется интерполяция в зависимости от прохождения характеристики либо по значениям  $I_{i-1, m}$  и  $I_{i-1, m-1}$ , либо по значениям  $I_{i-1, m-1}$  и  $I_{i, m-1}$  (рис. 22, б).

Вычисление функции  $I_{im}$  осуществляется по формулам, аналогичным (3.16)–(3.17):

$$I_{im} = \tilde{I} \exp\{-\kappa_{i-1/2}(x_{im} - \tilde{x}_{im})\} + \frac{1}{2} [1 - \exp\{-\kappa_{i-1/2}(x_{im} - \tilde{x}_{im})\}] 2\sigma T_{i-1/2}^4, \quad (3.18)$$

где

$$\begin{aligned} x_{im} &= r_i \mu_m, & \tilde{r}_{im} &= r_i \sqrt{1 - \mu_m^2} / \sqrt{1 - \mu_{m-1}^2}, \\ \tilde{x}_{im} &= \begin{cases} \tilde{r}_{im} \mu_{m-1}, & \tilde{r}_{im} \geq r_{i-1}, \\ \sqrt{r_{i-1}^2 - r_i(1 - \mu_m^2)}, & \tilde{r}_{im} < r_{i-1}. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Как показано в работе [65], метод характеристик с интерполяциями является устойчивым, и следовательно, его точность определяется локальной погрешностью аппроксимации разностной схемы [162]. В свою очередь порядок локальной аппроксимации определяется погрешностью интерполяции (3.14) и (3.15), которая на гладких решениях имеет второй порядок малости по  $\Delta\mu$  и  $\Delta r^*$ . Из недостатков данного варианта метода характеристик следует отметить его неконсервативность, которая, однако, при использовании методов понижения размерности уравнения переноса (§ 4 данной главы) не оказывает негативного влияния на определение пото-

\*) Производные решения уравнения (3.1) для шара имеют особенности на характеристиках (рис. 23), касательных к границе,

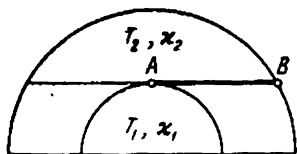


Рис. 23. Отрезок характеристики, на котором производная уравнения переноса обращается в бесконечность

на которой происходит скачкообразное изменение коэффициента поглощения  $\kappa$  и правой части  $T^4$  уравнения переноса [53, 200]. Естественно, что в таких условиях метод характеристик с интерполяцией теряет свою точность. Следует отметить, что метод Владимира, в котором эти особые характеристики выделяются естественным образом, таким недостатком не обладает.

ка и плотности энергии излучения. Из консервативных вариантов метода характеристик отметим схему, предложенную в работе [144].

Выпишем разностные схемы метода характеристик с интерполяцией, которые применяются для расчета одномерных задач, обладающих цилиндрической симметрией ( $n=1$ ):

$$I_{iml} = \bar{I} \exp \left\{ -\kappa_{i+1/2} (x_{im} - \tilde{x}_{im}) / \sqrt{1 - \gamma_i^2} \right\} + \\ + [1 - \exp \left\{ -\kappa_{i+1/2} (x_{im} - \tilde{x}_{im}) / \sqrt{1 - \gamma_i^2} \right\}] \sigma T_{i+1/2}^4 / \pi, \\ \mu_m \leq 0. \quad (3.20)$$

Величина  $\bar{I}$  определяется с помощью линейной интерполяции либо по значениям сеточной функции  $I_{i+1, ml}$  и  $I_{i+1, m-1, l}$ , либо по значениям  $I_{i, m-1, l}$  и  $I_{i+1, m-1, l}$  в зависимости от поведения характеристики;  $x_{im}$  и  $\tilde{x}_{im}$  определяются по формулам (3.17) точно так же, как и для случая сферической симметрии.

Для положительных значений  $\mu_m$  получим разностную схему

$$I_{iml} = \bar{I} \exp \left\{ -\kappa_{i-1/2} (x_{im} - \tilde{x}_{im}) / \sqrt{1 - \gamma_i^2} \right\} + \\ + [1 - \exp \left\{ -\kappa_{i-1/2} (x_{im} - \tilde{x}_{im}) / \sqrt{1 - \gamma_i^2} \right\}] \sigma T_{i-1/2}^4 / \pi, \\ \mu_m = 0. \quad (3.21)$$

Величина  $\bar{I}$  определяется с помощью интерполяции по значениям  $I_{i-1, ml}$  и  $I_{i-1, m-1, l}$ , либо по значениям  $I_{i-1, m-1, l}$  и  $I_{i, m-1, l}$ ;  $x_{im}$  и  $\tilde{x}_{im}$  в этом случае находятся из выражения (3.19).

Организация вычислений для случая бесконечного цилиндра имеет ту же самую структуру, что и для шара, с той лишь разницей, что все вычисления повторяются для каждого  $\gamma_i$ . Вначале решается уравнение переноса при  $\mu = -1$

$$\sqrt{1 - \gamma_i^2} \frac{\partial I}{\partial r} + \kappa I = \frac{\kappa \sigma T^4}{\pi},$$

затем послойно в направлении возрастания  $\mu$  определяются значения сеточной функции при  $\mu_m \leq 0$  с помощью выражения (3.20). После нахождения сеточной функции при  $\mu = 0$  ее значения для положительных  $\mu$  определяются из разностной схемы (3.21).

Для плоского слоя ( $n=0$ ) была выписана разностная схема (3.7). В этом случае, так же как для шара и цилиндра, можно рассмотреть схему, в которой прово-

дится точное интегрирование вдоль характеристики. В данной ситуации нет необходимости в интерполяции для вычисления  $I$ , ее значение будет совпадать со значением сеточной функции в предыдущем узле, находящемся на характеристике, и определяться с помощью выражений

$$I_{im} = I_{i+1,m} \exp\{-\kappa_{i+1/2}(r_i - r_{i+1})/\mu_m\} + [1 - \exp\{-\kappa_{i+1/2}(r_i - r_{i+1})/\mu_m\}] 2\sigma T_{i+1/2}^4, \quad (3.22)$$

$$i = N_i - 1, \dots, 1, \quad \mu_m < 0,$$

$$I_{im} = I_{i-1,m} \exp\{-\kappa_{i-1/2}(r_i - r_{i-1})/\mu_m\} + [1 - \exp\{-\kappa_{i-1/2}(r_i - r_{i-1})/\mu_m\}] 2\sigma T_{i-1/2}^4, \quad (3.23)$$

$$i = 2, \dots, N_i, \quad \mu_m > 0.$$

Разностная схема (3.22)–(3.23) является точной при условии постоянства коэффициента поглощения  $\kappa$  и температуры  $T$  на интервалах  $(r_{i-1}, r_i)$  и  $(r_i, r_{i+1})$ .

3.  $S_n$ -метод. При решении задач нейтронной физики достаточно широко применяется  $S_n$ -метод, впервые предложенный Б. Карлсоном [110]. Этот же алгоритм можно использовать при расчете уравнения переноса излучения в задачах радиационной газовой динамики. Следуя работам [135, 183], рассмотрим этот метод на примере уравнения переноса для шара, записанного в форме\*)

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \mu I) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{1 - \mu^2}{r} I \right) + \kappa I = \kappa 2\sigma T^4. \quad (3.24)$$

Проводя почленное дифференцирование по переменным  $r$  и  $\mu$  в уравнении (3.24), легко убедиться, что оно переходит в исходное уравнение (1.11).

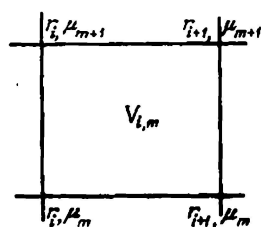


Рис. 24

Так же как и для метода характеристик, применяемого для решения уравнения (1.11), для аппроксимации уравнения (3.24) введем разностную сетку по переменным  $r$  и  $\mu$ ,  $\omega_r = \{r_i, i = 1, \dots, N_i, \Delta r_i = r_{i+1} - r_i, i = 1, \dots, N_i - 1\}$ ,  $\omega_\mu = \{\mu_m, m = 1, \dots, N_m, \Delta \mu_m = \mu_{m+1} - \mu_m, m = 1, \dots, N_m - 1\}$ . Обозначим через  $V_{im}$

\*) Как отмечалось авторами работ [31, 144] такая форма уравнения переноса была впервые предложена А. А. Самарским и В. Я. Гольдиным в 1959 г.

ячейку, ограниченную линиями  $r=r_i$ ,  $r=r_{i+1}$ ,  $\mu=\mu_m$ ,  $\mu=\mu_{m+1}$  (рис. 24). При построении разностной сетки по  $\mu$  для  $S_n$ -метода точка  $\mu=0$  должна являться узлом. Обычно  $\mu_{(N_{m+1})/2}=0$ .

Полагая коэффициент поглощения  $\kappa$  и температуру  $T$  постоянными на интервале  $r \in (r_i, r_{i+1})$ , умножим уравнение (3.24) на  $r^2$  и затем проинтегрируем его по ячейке  $V_{im}$ , получим

$$r_{i+1}^2 \int_{\mu_m}^{\mu_{m+1}} \mu I(r_{i+1}, \mu) d\mu - r_i^2 \int_{\mu_m}^{\mu_{m+1}} \mu I(r_i, \mu) d\mu + \\ + (1 - \mu_{m+1}^2) \int_{r_i}^{r_{i+1}} I(r, \mu_{m+1}) r dr - (1 - \mu_m^2) \int_{r_i}^{r_{i+1}} I(r, \mu_m) r dr + \\ + \kappa \int_{V_{im}} I r^2 dr d\mu = 2\sigma T_{i+1/2}^4 \kappa \Delta\mu_m (r_{i+1}^3 - r_i^3) / 3. \quad (3.25)$$

В работах, посвященных  $S_n$ -методу, обычно предполагают, что в ячейке  $V_{im}$  функция  $I(r, \mu)$  представима в виде

$$I(r, \mu) = [(\mu_{m+1} - \mu) F_m(r) + (\mu - \mu_m) F_{m+1}(r)] / \Delta\mu_m, \\ F_m = [(r - r_i) I_{i+1, m} + (r_{i+1} - r) I_{im}] / \Delta r_i, \quad (3.26)$$

где  $I_{im} = I(r_i, \mu_m)$ .

Подставляя (3.26) в уравнение (3.25), которое является уравнением баланса для теплового излучения в ячейке  $V_{im}$ , получим

$$a_{im} I_{i+1, m+1} + b_{im} I_{i, m+1} + c_{im} I_{i+1, m} + d_{im} I_{im} = \\ = \frac{2}{3} \sigma T_{i+1/2}^4 \kappa_{i+1/2} (r_{i+1}^3 - r_i^3) \Delta\mu, \quad (3.27)$$

где [135]

$$a_{im} = r_{i+1}^2 \Delta\mu_m (2\mu_{m+1} + \mu_m) / 6 + (1 - \mu_{m+1}^2) \Delta r_i (2r_{i+1} + r_i) / 6 + \\ + \kappa_{i+1/2} \Delta\mu_m \Delta r_i (2r_{i+1}^2 + (r_{i+1} + r_i)^2) / 24, \\ b_{im} = -r_i^2 \Delta\mu_m (2\mu_{m+1} + \mu_m) / 6 + (1 - \mu_{m+1}^2) \Delta r_i (2r_i + r_{i+1}) / 6 + \\ + \kappa_{i+1/2} \Delta\mu_m \Delta r_i (2r_i^2 + (r_{i+1} + r_i)^2) / 24, \\ c_{im} = r_{i+1}^2 \Delta\mu_m (2\mu_m + \mu_{m+1}) / 6 - (1 - \mu_m^2) \Delta r_i (2r_{i+1} + r_i) / 6 + \\ + \kappa_{i+1/2} \Delta\mu_m \Delta r_i (2r_{i+1}^2 + (r_{i+1} + r_i)^2) / 24, \\ d_{im} = -r_i^2 \Delta\mu_m (2\mu_m + \mu_{m+1}) / 6 - (1 - \mu_m^2) \Delta r_i (2r_i + r_{i+1}) / 6 + \\ + \kappa_{i+1/2} \Delta\mu_m \Delta r_i (2r_i^2 + (r_{i+1} + r_i)^2) / 24.$$

Организация вычислений для  $S_n$ -метода следующая. Сначала находятся значения сеточной функции при  $\mu = -1$ . Для этого уравнение (3.10) умножается на  $r^2$ , а затем интегрируется на отрезке  $[r_i, r_{i+1}]$ . При этом получается следующая связь между значениями сеточной функции  $I$ :

$$I_{i1} = \alpha_{i+1} I_{i+1,1} + \beta_{i+1} 2\sigma T_{i+1/2}^4 (r_{i+1}^3 - r_i^3) / 3, \quad (3.28)$$

$$i = N_i - 1, \dots, 1,$$

где

$$\begin{aligned} \beta_{i+1} &= 1 / [r_i^2 + \Delta r_i (2r_i + r_{i+1}) / 3 + \\ &\quad + \kappa_{i+1/2} \Delta r_i (2r_i^2 + (r_i + r_{i+1})^2) / 12] \\ \alpha_{i+1} &= \beta_{i+1} [r_{i+1}^2 - \Delta r_i (2r_{i+1} + r_i) / 3 - \\ &\quad - \kappa_{i+1/2} \Delta r_i (2r_{i+1}^2 + (r_{i+1} + r_i)^2) / 12]. \end{aligned}$$

В дальнейшем можно использовать ту же организацию вычислений, которая применялась в методе характеристик с интерполяцией: для  $\mu_m \leq 0$  величина  $I_{im}$  определяется по значениям сеточной функции  $I_{i+1,m}$ ,  $I_{i+1,m-1}$ ,  $I_{i,m-1}$ , а для положительных  $\mu_m$  величина  $I_{im}$  находится по значениям  $I_{i-1,m}$ ,  $I_{i-1,m-1}$ ,  $I_{i,m-1}$ .

Расчетные формулы для  $S_n$ -метода в случае бесконечного цилиндра ( $n=1$ ) строятся аналогичным образом. Уравнение переноса излучения (1.16), записанное в форме

$$\begin{aligned} \sqrt{1-\gamma^2} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cos \vartheta I) - \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{\sin \vartheta}{r} I \right) \right] + \kappa I = \frac{\kappa \sigma T^4}{\pi}, \quad (3.29) \\ \cos \vartheta = \mu, \end{aligned}$$

умножается на  $r$  и интегрируется по ячейке  $V_{im}$ , ограниченной линиями  $r=r_i$ ,  $r=r_{i+1}$ ,  $\vartheta=\vartheta_m$ ,  $\vartheta=\vartheta_{m+1}$ . При этом получается следующее разностное выражение для нахождения значений сеточной функции  $I_{im}$ :

$$\begin{aligned} a_{im} I_{i+1,m+1} + b_{im} I_{i,m+1} + c_{im} I_{i+1,m} + d_{im} I_{im} = \\ = \sigma T_{i+1/2}^4 \kappa_{i+1/2} (r_{i+1}^2 - r_i^2) \Delta \vartheta_m / (2\pi). \quad (3.30) \end{aligned}$$

Конкретный вид коэффициентов схемы (3.30) здесь описан не будет. Их значения приведены в книге Г. И. Марчука и В. И. Лебедева [135]. Отметим лишь, что организация расчета для каждого конкретного случая такая же, как и для схемы (3.27), полученной для сферически-симметричного случая.

Разностные схемы (3.27) и (3.30) аппроксимируют исходные уравнения переноса (3.24) и (3.29) с локальной погрешностью  $O((\Delta r)^2 + (\Delta \mu)^2)$ . Как показывает практика расчетов задач теории переноса нейтронов, вычисления по схемам  $S_n$ -метода иногда оказываются неустойчивыми\*).

В рассматриваемых в этом параграфе схемах решения уравнения переноса предполагалось, что коэффициент поглощения и температура кусочно-постоянны на интервале  $(r_i, r_{i+1})$ . Однако для оптически толстых разностных ячеек ( $\kappa \Delta r_i \gg 1$ ) полученные в таких условиях схемы могут оказаться недостаточно точными. Связано это с тем, что поток энергии излучения  $W$ , найденный в результате подобных вычислений, может отличаться от своего асимптотического значения, определяемого по формуле лучистой теплопроводности (гл. II, § 3):

$$W = -\frac{16}{3} \frac{\sigma T^3}{\kappa} \text{grad } T \quad [229].$$

Чтобы повысить точность разностной аппроксимации и получить в этом случае асимптотическое значение потока энергии излучения, необходимо использовать характеристические схемы с кусочно-линейной интерполяцией правой части уравнения переноса [195, 196]. Примеры использования схем с кусочно-линейной интерполяцией рассмотрены в пп. 5 и 6 следующего параграфа.

Отметим, что в большинстве задач динамики излучающего газа в той или иной мере приходится применять оптически толстые разностные ячейки. Поэтому непосредственное использование для нахождения потока энергии излучения  $W$  схем с кусочно-постоянной интерполяцией нежелательно. Их следует применять в совокупности с алгоритмами понижения размерности уравнения переноса, рассмотренными в § 4.

**4. Некоторые методы решения нестационарного уравнения переноса.** Основные усилия в области математического моделирования задач динамики излучающего газа в настоящее время сосредоточены на постановках, использующих стационарное уравнение переноса. Практика расчетов задач радиационной газовой динамики с нестационарным уравнением переноса гораздо менее обширна. Однако, как показывает длительный опыт решения задач нейтронной физики, для решения нестациона-

\*) Ю. А. Кузнецовым и А. В. Протасовым (см. [135]) получены устойчивые схемы первого порядка точности, близкие к  $S_n$ -методу.

нарного уравнения переноса вполне можно использовать многие из алгоритмов, применяемых для решения стационарных уравнений.

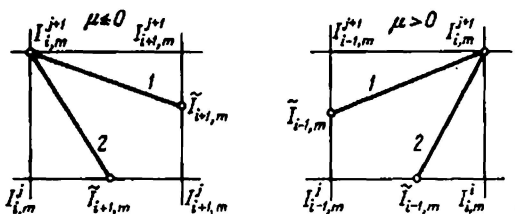


Рис. 25. Схема характеристик с интерполяцией для плоского слоя (нестационарный случай)

Так, например, схема характеристик с интерполяцией (3.22)—(3.23) для плоского слоя примет вид (рис. 25)

$$I_{i,m}^{j+1} = \tilde{I}_{i+1,m} \exp \left\{ -\kappa_{i+1/2}^{j+1/2} \Delta s_{i+1/2} / \mu_m \right\} + [1 - \exp \left\{ -\kappa_{i+1/2}^{j+1/2} \Delta s_{i+1/2} / \mu_m \right\}] 2\sigma T_{i+1/2}^{4(j+1/2)}, \quad (3.31)$$

$$\mu_m < 0, \quad i = N_1 - 1, \dots, 1,$$

$$I_{i,m}^{j+1} = \tilde{I}_{i-1,m} \exp \left\{ -\kappa_{i-1/2}^{j+1/2} \Delta s_{i-1/2} / \mu_m \right\} + [1 - \exp \left\{ -\kappa_{i-1/2}^{j+1/2} \Delta s_{i-1/2} / \mu_m \right\}] 2\sigma T_{i-1/2}^{4(j+1/2)}, \quad (3.32)$$

$$\mu_m > 0, \quad i = 2, \dots, N_1.$$

Если  $c\Delta t \geq (r_{i+1} - r_i) / \mu_m$ , где  $c$  — скорость света, то характеристика, испущенная «назад» из точки  $r = r_i$  и  $\mu = \mu_m$  на  $(j+1)$ -м слое по времени, пересечет линию, соединяющую точки с индексами  $(j+1, i+1, m)$  и  $(j, i+1, m)$ . Соответственно значение  $\tilde{I}_{i+1,m}$  будет интерполироваться по уже известным значениям сеточной функции  $I_{i+1,m}^{j+1}$  и  $I_{i+1,m}^j$ :

$$\tilde{I}_{i+1,m} = I_{i+1,m}^j \frac{r_{i+1} - r_i}{c\Delta t \mu_m} + I_{i+1,m}^{j+1} \left( 1 - \frac{r_{i+1} - r_i}{c\Delta t \mu_m} \right). \quad (3.33)$$

В этом случае  $\Delta s_{i+1/2} = r_{i+1} - r_i$ .

Если  $c\Delta t < (r_{i+1} - r_i) / \mu_m$ , то  $\Delta s_{i+1/2} = c\Delta t \mu_m$  и  $\tilde{I}_{i+1,m}$  будет интерполироваться по значениям сеточной функции  $I_{i,m}^j$  и  $I_{i+1,m}^j$ :

$$\tilde{I}_{i+1,m} = I_{i,m}^j \left( 1 - \frac{c\Delta t \mu_m}{r_{i+1} - r_i} \right) + I_{i+1,m}^j \frac{c\Delta t \mu_m}{r_{i+1} - r_i}. \quad (3.34)$$

Аналогичным образом строится разностная схема для положительных значений  $\mu$ . Что же касается входя-

щих в выражения (3.31)—(3.32) величин  $T^{j+1/2}$  и  $\kappa^{j+1/2}(T, \rho)$ , то они определяются с помощью полусуммы значений  $T$  и  $\rho$  на старом и новом шагах по времени  $T^{j+1/2} = 0,5(T^j + T^{j+1})$ ,  $\rho^{j+1/2} = 0,5(\rho^j + \rho^{j+1})$ . В свою очередь для нахождения величин  $T^{j+1}$  и  $\rho^{j+1}$  можно использовать итерационный процесс, включающий в себя расчет уравнений газовой динамики на новом слое по времени.

Для нестационарного уравнения переноса в случае сферической симметрии разностная схема метода характеристик с интерполяцией строится аналогично, хотя и более громоздким способом, чем схемы (3.16) и (3.18). В случае 1 (рис. 26, характеристика пересечет плоскость

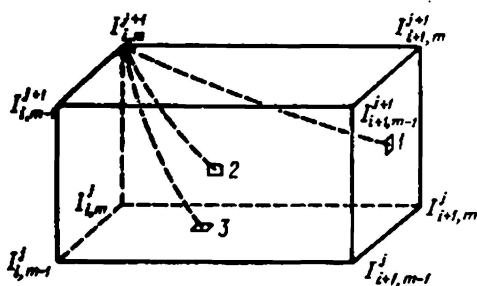


Рис. 26. Схема метода характеристик с интерполяцией для сферически-симметричного нестационарного уравнения переноса ( $\mu < 0$ )

$r = r_{i+1}$ ) значение  $\tilde{T}$  определяется интерполяцией по четырем ранее определенным значениям сеточных функций:  $I'_{i+1,m-1}$ ,  $I'_{i+1,m}$ ,  $I'^{j+1}_{i+1,m-1}$ ,  $I'^{j+1}_{i+1,m}$ . В случае 2 (характеристика пересекает плоскость  $\mu = \mu_{m-1}$ ) значение  $\tilde{T}$  определяется с помощью  $I'_{i,m-1}$ ,  $I'_{i+1,m-1}$ ,  $I'^{j+1}_{i,m-1}$ ,  $I'^{j+1}_{i+1,m-1}$ . В случае 3 (характеристика пересекает плоскость  $t = t^j$ ) значение  $\tilde{T}$  определяется с помощью интерполяции по следующим ранее найденным значениям:  $I'_{i,m-1}$ ,  $I'_{i,m}$ ,  $I'_{i+1,m-1}$  и  $I'_{i+1,m}$ . Аналогично строится разностная схема для  $\mu > 0$ .

Отметим, что помимо метода характеристик с интерполяцией для решения одномерных нестационарных уравнений можно применять и другие методы, используемые для расчета стационарных уравнений переноса. Например, в книге Р. Рихтмайера и К. Мортонa [151] подробно рассмотрено применение  $S_n$ -метода Карлсона

к решению нестационарного сферически-симметричного уравнения переноса.

В заключение параграфа еще раз отметим, что в целом методы непосредственного решения уравнения переноса теплового излучения (3.1) во многом используют ранее развитые алгоритмы решений кинетических уравнений. Автор в своих расчетах одномерных задач динамики излучающего газа в основном применял схемы метода характеристик с интерполяцией (3.16)—(3.19), (3.20)—(3.21) и (3.22)—(3.23). Однако ввиду того, что поток энергии излучения  $W$  приходится определять на каждом шаге по времени, и, более того, из-за наличия итераций между различными газодинамическими блоками [169] большей частью приходится вычислять поток несколько раз на каждом временном шаге, нахождение  $W$  и плотности энергии излучения непосредственно из уравнения переноса в задачах радиационной газовой динамики представляется нецелесообразным. Прямые методы расчета уравнения переноса необходимо сочетать с алгоритмами эффективного понижения размерности, которые будут рассмотрены в следующем параграфе.

#### § 4. Методы эффективного понижения размерности уравнения переноса излучения

Уравнение переноса (3.1) по сравнению с уравнениями газовой динамики (2.6)—(2.9) зависит дополнительно от частоты  $\nu$  и направления полета фотонов  $\Omega$ . Эта дополнительная размерность сильно усложняет, в смысле затрат машинного времени, расчет задачи динамики излучающего газа в целом. Для преодоления этой трудности применяют различные алгоритмы, рассмотрение которых начнем с квазидиффузионного метода, позволяющего эффективно понизить зависимость от угловых переменных.

1. **Квазидиффузионный метод.** Возьмем для примера одностороннее уравнение переноса для плоского слоя

$$\mu \frac{dI}{dr} + \kappa I = \kappa 2\sigma T^4, \quad I(\mu, r_0) = I^+(\mu), \quad \mu \geq 0, \quad (4.1)$$

$$r_0 \leq r \leq r_N, \quad -1 \leq \mu \leq 1, \quad I(\mu, r_N) = I^-(\mu), \quad \mu < 0.$$

Проинтегрируем это уравнение по  $\mu$  на отрезке  $[-1, 1]$ . Используя независимость переменных  $\mu$  и  $r$ , получим

$$\frac{d}{dr} \int_{-1}^1 \mu I d\mu + \kappa \int_{-1}^1 I d\mu = \kappa 4\sigma T^4. \quad (4.2)$$

Вновь проинтегрируем уравнение (4.1), но уже с весом  $\mu$ , получим

$$\frac{d}{dr} \int_{-1}^1 \mu^2 I d\mu + \kappa \int_{-1}^1 \mu I d\mu = 0. \quad (4.3)$$

Система уравнений (4.2) — (4.3) записана относительно трех неизвестных: плотности энергии излучения  $U = \frac{1}{c} \int_{-1}^1 I d\mu$ , потока энергии излучения  $W = \int_{-1}^1 \mu I d\mu$  и дополнительного момента  $\int_{-1}^1 \mu^2 I d\mu$ . Последнее неизвестное перепишем в виде

$$\int_{-1}^1 \mu^2 I d\mu = \frac{\int_{-1}^1 \mu^2 I d\mu}{\int_{-1}^1 I d\mu} \int_{-1}^1 I d\mu = D c U, \quad (4.4)$$

где

$$D = \int_{-1}^1 \mu^2 I d\mu \Big/ \int_{-1}^1 I d\mu. \quad (4.5)$$

Перепишем систему уравнений (4.2) — (4.3) с учетом сделанных обозначений в виде

$$\frac{dW}{dr} + \kappa c U = \kappa 4\sigma T^4, \quad (4.6)$$

$$lc \frac{dDU}{dr} + W = 0.$$

Система уравнений (4.6) получила название *системы уравнений квазидиффузии* (В. Я. Гольдин [75]).

Дополним эту систему уравнений граничными условиями

$$\frac{W}{U} \Big|_{r=r_0} = C_0, \quad \frac{W}{U} \Big|_{r=r_N} = C_N, \quad (4.7)$$

которые можно переписать в другом виде, используя второе уравнение системы (4.6):

$$-lc \frac{dDU}{dr} \Big|_{r=r_0} = C_0 U, \quad -lc \frac{dDU}{dr} \Big|_{r=r_N} = C_N U. \quad (4.8)$$

В свою очередь коэффициенты  $C_0$  и  $C_N$  определяются следующим образом:

$$C_0 = c \frac{\int_{-1}^1 \mu I(r_0, \mu) d\mu}{\int_{-1}^1 I(r_0, \mu) d\mu}, \quad C_N = c \frac{\int_{-1}^1 \mu I(r_N, \mu) d\mu}{\int_{-1}^1 I(r_N, \mu) d\mu}. \quad (4.9)$$

Система уравнений квазидиффузии (4.6)—(4.7) является незамкнутой. Однако, если предположить, что коэффициенты  $D$ ,  $C_0$  и  $C_N$  известны точно, то поток энергии излучения  $W$  и плотность энергии излучения  $U$ , найденные из решения системы (4.6)—(4.7), будут в точности совпадать с потоком и плотностью энергии излучения, полученными непосредственно из решения уравнения переноса (4.1).

Система уравнений квазидиффузии использовалась в работе [75] для итерационного решения уравнения переноса нейтронов (3.3). При этом вместо итерационного процесса (3.5) рассматривался следующий алгоритм:

$$\mu \frac{d\varphi^{(s)}}{dr} + \kappa \varphi^{(s)} = \frac{\beta}{2} U^{(s-1)} + f(r), \quad U = \int_{-1}^1 \varphi d\mu, \quad (4.10)$$

$$D^{(s)} = \int_{-1}^1 \mu^2 \varphi^{(s)} d\mu \Big/ \int_{-1}^1 \varphi^{(s)} d\mu,$$

$$C_0^{(s)} = \int_{-1}^1 \mu \varphi(r_0, \mu) d\mu \Big/ \int_{-1}^1 \varphi(r_0, \mu) d\mu,$$

(4.11)

$$C_N^{(s)} = \int_{-1}^1 \mu \varphi(r_N, \mu) d\mu \Big/ \int_{-1}^1 \varphi(r_N, \mu) d\mu,$$

$$\begin{aligned} \frac{dW^{(s)}}{dr} + (\kappa - \beta) U^{(s)} &= 2f, & \frac{W^{(s)}}{U^{(s)}} \Big|_{r=r_0} &= C_0^{(s)}, \\ \frac{dD^{(s)}U^{(s)}}{dr} + \kappa W^{(s)} &= 0, & \frac{W^{(s)}}{U^{(s)}} \Big|_{r=r_N} &= C_N^{(s)}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

В отличие от итерационного процесса (3.5), когда неизвестный момент  $U$ , стоящий в правой части уравнения переноса, определялся сразу после окончания решения уравнения (3.3)  $\left( U^{(s)} = \int_{-1}^1 \varphi^{(s)} d\mu \right)$ , в итерационном алгоритме (4.10)—(4.12) вначале определяются коэффициенты квазидиффузии (4.11). Затем неизвестные моменты  $U$ ,  $W$  находятся из решения системы уравнений (4.12).

Итерационный процесс (4.10)—(4.12) показал свою эффективность при решении целого ряда задач нейтронной физики. В общем случае доказательства сходимости для итерационного алгоритма (4.10)—(4.12) ввиду его сложного нелинейного характера получено не было. Однако причина его высокой скорости сходимости достаточно ясна. Она заключается в том, что коэффициенты квазидиффузии (4.11) являются дробно-линейными функционалами решения уравнения переноса  $\varphi$ . Поэтому эти коэффициенты сравнительно слабо меняются при изменении исходного решения. Первые же итерации дают значения коэффициентов квазидиффузии, очень мало отличающиеся от их точных значений.

Эта сравнительно слабая зависимость коэффициентов квазидиффузии от решения исходного уравнения переноса положена в основу алгоритмов эффективного понижения размерности в задачах динамики излучающего газа [34, 54, 76, 83, 85, 201].

Рассмотрим следующий прием. На каком-то шаге по времени решим уравнение переноса теплового излучения (4.1) и определим с помощью выражений (4.5) и (4.9) коэффициенты  $D^j$ ,  $C_0^j$ ,  $C_N^j$ . Далее в течение  $N_j$  шагов ( $j' = j, \dots, j + N_j$ ) будем определять поток  $W$  и плотность энергии излучения  $U$  из системы уравнений квазидиффузии (4.6) с граничными условиями (4.7). При этом значения коэффициентов  $D$ ,  $C_0$ ,  $C_N$  полагаются равными значениям коэффициентов на  $j$ -м шаге по времени. Другими словами, коэффициенты квазидиффузии (4.6) и (4.9) неизменны (заморожены) по времени в течение  $N_j$  шагов. На шаге  $j' = j + N_j$  вся процедура повторяется вновь. Таким образом, уравнение переноса (4.1), зависящее от углов, считается только один раз на  $N_j$  шагов по времени. На остальных шагах по времени решается не зависящая от угловых переменных система уравнений (4.6).

В связи с только что рассмотренным алгоритмом сделаем два замечания.

**Замечание 1.** Решение системы уравнений (4.6), несмотря на неизменность коэффициентов  $D$ ,  $C_0$ ,  $C_N$ , зависит от времени. Это связано с тем, что коэффициент поглощения  $\kappa(T, \rho)$  и правая часть  $\kappa_0 \sigma T^4$  зависят от температуры и плотности, которые в свою очередь определяются из нестационарных уравнений газовой динамики.

**Замечание 2.** Слабая зависимость коэффициентов  $D$  и  $C$  от решения исходного уравнения приводит к тому, что на грубых сетках, аппроксимирующих уравнение переноса, поток, найденный с помощью численного решения квазидиффузионной системы, более близок к своему точному значению, чем поток  $W = \int_{-1}^1 \mu I d\mu$ , найденный непосредственно из численного решения уравнения (4.1) [81].

В частности, система уравнений квазидиффузии обеспечивает выполнение приближения лучистой теплопроводности для потока там, где оно справедливо, и для схем, использующих кусочно-постоянную интерполяцию. В самом деле, при наличии равновесия излучения с веществом использование, например, схемы (3.22) — (3.33) для определения интенсивности  $I$  приведет к значению коэффициента  $D$  (4.5), близкому к  $1/3$ . Следовательно, значение потока  $W$ , найденное из системы (4.6), будет близко к асимптотическому значению  $W = -\frac{16\sigma T^3 l}{3} \frac{\partial T}{\partial r}$ .

Естественно, что для аппроксимации системы уравнений (4.6), из которой находятся плотность  $U$  и поток энергии излучения  $W$ , используются разностные схемы, отличные от тех, которые применялись для решения уравнения переноса. Некоторые из этих схем рассмотрены в п. 3 § 5.

Таким образом, использование описанного выше приема понижения размерности позволяет, помимо существенного сокращения объема вычислений, применять в задачах радиационной газовой динамики относительно простые схемы с кусочно-постоянной интерполяцией. Однако напомним, что полученные с помощью этих схем интенсивности  $I$  в дальнейшем следует использовать только для вычисления коэффициентов квазидиффузии  $D$  и  $C$ .

Выпишем уравнения квазидиффузии для многогрупповой системы уравнений переноса в различных одномерных геометриях.

Плоский слой ( $n=0$ )

$$\begin{aligned} \mu \frac{dI_k^j}{dr} + \kappa_k I_k^j &= \kappa_k 2\sigma_k T^{4(j)}, \quad k=1, \dots, N_k, \\ -1 \leq \mu \leq 1, \quad r_0 \leq r \leq r_N, \\ I_k^j(r_0, \mu) &= I_k^{+j}(\mu), \quad \mu > 0, \\ I_k^j(r_N, \mu) &= I_k^{-j}(\mu), \quad \mu < 0, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$D_k^j = \int_{-1}^1 \mu^2 I_k^j d\mu \left| \int_{-1}^1 I_k^j d\mu, \right.$$

$$C_{0k}^j = c \int_{-1}^1 \mu I_k^j(r_0, \mu) d\mu \left| \int_{-1}^1 I_k^j(r_0, \mu) d\mu, \right. \quad (4.14)$$

$$C_{Nk}^j = c \int_{-1}^1 \mu I_k^j(r_N, \mu) d\mu \left| \int_{-1}^1 I_k^j(r_N, \mu) d\mu, \right.$$

$$\frac{dW_k^{j'}}{dr} + c\kappa_k (T^{j'}, \rho^{j'}) U_k^{j'} = 4\sigma_k^{j'} \kappa_k^{j'} T^{4(j')}, \quad (4.15)$$

$$c \frac{dD^j U^{j'}}{dr} + \kappa_k^{j'} W_k^{j'} = 0, \quad j' = j, \dots, j + N_j.$$

Здесь  $c$  — скорость света, входящая в правую часть уравнения переноса, функция  $\sigma_k$  определяется из выражений (5.6) — (5.7) (гл. II § 5).

Ш а р ( $n=2$ )

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial I_k^j}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial I_k^j}{\partial \mu} + \kappa_k I_k^j &= \kappa_k 2\sigma_k T^{4(j)}, \quad k=1, \dots, N_k, \\ -1 \leq \mu \leq 1, \quad 0 \leq r \leq R, \quad I_k^j(R, \mu) &= I_k^{+j}(\mu), \quad \mu < 0, \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$D_k^j = \int_{-1}^1 \mu^2 I_k^j d\mu \left| \int_{-1}^1 I_k^j d\mu, \right.$$

$$C_k^j = c \int_{-1}^1 \mu I_k^j(R, \mu) d\mu \left| \int_{-1}^1 I_k^j(R, \mu) d\mu, \right. \quad (4.17)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{dr^2 W_k^{j'}}{dr} + c \kappa_k^{j'} U_k^{j'} = 4 \kappa_k^{j'} \sigma_k^{j'} T^4(j'),$$

$$c \frac{dD_k^j U_k^{j'}}{dr} + c \frac{3D_k^j - 1}{r} U_k^{j'} + \kappa_k^{j'} W_k^{j'} = 0, \quad (4.18)$$

$$W_k^{j'}|_{r=0} = 0, \quad \left. \frac{W_k^{j'}}{U_k^{j'}} \right|_{r=R} = C_k^j, \quad j' = j, \dots, j + N_j.$$

Бесконечный цилиндр ( $n=1$ )

$$\sqrt{1-\gamma^2} \left( \mu \frac{\partial I_k^j}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial I_k^j}{\partial \mu} \right) + \kappa_k^j I_k^j = \frac{\kappa_k^j \sigma_k^j T^4(j)}{\pi},$$

$$-1 \leq \mu \leq 1, \quad -1 \leq \gamma \leq 1, \quad 0 \leq r \leq R, \quad (4.19)$$

$$k = 1, \dots, N_k,$$

$$I_k^j(R, \mu, \gamma) = I_k^{j+1}(u, \gamma), \quad \mu \leq 0,$$

$$D_k^j = \int_{-1}^1 (1-\gamma^2) d\gamma \int_{-1}^1 I_k^j \frac{\mu^2}{\sqrt{1-\mu^2}} d\mu \bigg/ \int_{-1}^1 d\gamma \int_{-1}^1 I_k^j \frac{d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}},$$

$$D_{zk}^j = \int_{-1}^1 \gamma^2 d\gamma \int_{-1}^1 I_k^j \frac{d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \bigg/ \int_{-1}^1 d\gamma \int_{-1}^1 I_k^j \frac{d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}, \quad (4.20)$$

$$C_k^j = c \int_{-1}^1 \sqrt{1-\gamma^2} d\gamma \int_{-1}^1 I_k^j(R, \mu, \gamma) \times$$

$$\times \frac{\mu d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \bigg/ \int_{-1}^1 d\gamma \int_{-1}^1 I_k^j(R, \mu, \gamma) \frac{d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}},$$

$$\frac{1}{r} \frac{dr W_k^{j'}}{dr} + c \kappa_k^{j'} U_k^{j'} = \kappa_k^{j'} 4 \sigma_k^{j'} T^4(j'),$$

$$c \frac{d(D_k^j U_k^{j'})}{dr} + c \frac{2D_k^j + D_{zk}^j - 1}{r} U_k^{j'} + \kappa_k^{j'} W_k^{j'} = 0, \quad (4.21)$$

$$W_k^{j'}|_{r=r_0} = 0, \quad \left. \frac{W_k^{j'}}{U_k^{j'}} \right|_{r=R} = C_k^j, \quad j' = j, \dots, j + N_j.$$

Уравнения квазидиффузии для шара (4.18) получены так же, как и для плоского слоя, интегрированием исходного уравнения переноса (4.16) с весами 1 и  $\mu$  на отрезке  $\mu \in [-1, 1]$ . Для бесконечного цилиндра уравне-

ния (4.21) получены интегрированием уравнения (4.19) с весами  $1/\sqrt{1-\mu^2}$  и  $\mu\sqrt{1-\gamma^2}/\sqrt{1-\mu^2}$  на множестве  $\mu \in [-1, 1]$ ,  $\gamma \in [-1, 1]$ .

Уравнения (4.15), (4.18) и (4.21) являются частным случаем общей системы уравнений квазидиффузии, которая получается интегрированием уравнения переноса (1.1) по всем телесным углам с весами 1 и  $\Omega$ :

$$\frac{\partial W_{i\nu}}{\partial x_i} + \kappa_\nu c U_\nu = c \kappa_\nu U_{\nu p},$$

$$\frac{\partial \int \Omega_i \Omega_p I_\nu d\Omega}{\partial x_p} + \kappa_\nu W_{i\nu} = 0, \quad i=1, 2, 3, \quad p=1, 2, 3. \quad (4.22)$$

Система уравнений (4.22) совпадает с системой (2.15)—(2.16) (гл. II, § 2), используемой для получения уравнений диффузии. Различие между уравнениями диффузии и квазидиффузии заключается в том, что в первом случае система (4.22) замыкается с помощью заранее предполагаемого отношения

$$\int \Omega_i \Omega_p I_\nu d\Omega / \int I_\nu d\Omega = \delta_{ip}/3, \quad (4.23)$$

а во втором, вместо фиксированного отношения (4.23), используется более точное соотношение [75]

$$\int \Omega_i \Omega_p I_\nu d\Omega / \int I_\nu d\Omega = D_{ip}, \quad (4.24)$$

которое в вычислительной практике стараются выбрать как можно ближе к точному значению.

Диффузионное приближение дает достаточно хорошие результаты при решении задач радиационной газовой динамики. Даже при сравнительно редком пересчете коэффициентов величины потоков энергии излучения, полученные с помощью уравнений квазидиффузии, слабо отличаются от их значений, найденных непосредственно из решения уравнения переноса \*).

В качестве примера рассмотрим некоторые результаты расчетов сильноточных излучающих разрядов в литиевой плазме [202]. Эти процессы описываются системой одномерных осесимметричных уравнений ( $n=1$ ) магнитной радиационной газовой динамики (гл. V, § 1).

\*) При сравнении расчетов, полученных с помощью уравнений квазидиффузии и уравнения переноса, необходимо использовать достаточно подробные сетки для аппроксимации последнего уравнения. Это необходимо, чтобы уменьшить погрешность вычисления потока непосредственно при решении уравнения переноса (см. замечание 2).

В расчетах многогрупповое уравнение (4.19) пересчитывалось один раз на 200 шагов по времени ( $N_t=200$ ). На остальных шагах поток энергии излучения определялся из системы уравнений квазидиффузии (4.21). При этом максимальное различие между эталонным решением, когда кинетическое уравнение (4.19) считалось на каждом шаге по времени, и решением, полученным с пересчетом коэффициентов квазидиффузии, составляло 1—2 %.

В заключение этого пункта сделаем еще одно замечание.

**Замечание 3.** Граничные условия для уравнений квазидиффузии в том виде, как они приведены для систем уравнений (4.15), (4.18) и (4.21), следует использовать лишь в том случае, когда падающее извне излучение либо отсутствует ( $I^+=I^-=0$ ), либо мало по сравнению с излучением, выходящим из исследуемого объема. В противном случае для корректной постановки задачи необходимо эти потоки специальным образом выделять [83]. Например, на правой границе будем иметь следующее соотношение между полным потоком  $W_k$  и плотностью энергии излучения в  $k$ -й группе:

$$W_k = C_{Nk}(U_k - U_k^-) + W_k^-, \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad (4.25)$$

где  $W_k^-$  и  $U_k^-$  — поток и плотность энергии падающего извне излучения,  $C_{Nk}$  определяется только по выходящему из объема излучению.

**2. Поточковый вариант.** Рассмотрим еще один метод эффективного осреднения по угловым переменным, близкий по своей сути к квазидиффузионному подходу.

Проинтегрируем исходное уравнение переноса для плоского слоя (4.1) по  $\mu$  один раз на отрезке  $\mu \in [-1, 0]$ , а второй раз на отрезке  $\mu \in [0, 1]$ . При этом получим два уравнения

$$\frac{d}{dr} \int_{-1}^0 \mu I d\mu + \kappa \int_{-1}^0 I d\mu = \kappa 2\sigma T^4, \quad (4.26)$$

$$\frac{d}{dr} \int_0^1 \mu I d\mu + \kappa \int_0^1 I d\mu = \kappa 2\sigma T^4.$$

Для того чтобы система уравнений (4.26) была замкнутой, введем отношения

$$D^- = \int_{-1}^0 \mu I d\mu \bigg/ \int_{-1}^0 I d\mu, \quad D^+ = \int_0^1 \mu I d\mu \bigg/ \int_0^1 I d\mu. \quad (4.27)$$

Используя обозначения  $\int_{-1}^0 I d\mu = U^-$  и  $\int_0^1 I d\mu = U^+$  и учитывая отношения (4.27), перепишем систему уравнений (4.26) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{dD^- U^-}{dr} + \kappa U^- &= \kappa 2\sigma T^4, \\ \frac{dD^+ U^+}{dr} + \kappa U^+ &= \kappa 2\sigma T^4. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Граничные условия для  $U^-$  и  $U^+$  определяются с помощью интегрирования граничных условий для уравнения переноса (4.1) и имеют вид

$$U^-(r_N) = \int_{-1}^0 I^-(\mu) d\mu, \quad U^+(r_0) = \int_0^1 I^+(\mu) d\mu. \quad (4.29)$$

Потоковые уравнения (4.28) с коэффициентами, определяемыми из выражения (4.27), были получены в работах [66, 145] и использовались для решения задач теории переноса нейтронов \*).

Аналогично использованию уравнений квазидиффузии можно рассмотреть следующую схему применения потоковых уравнений (4.28) для решения задач динамики излучающего газа:

\*) Если предположить изотропию решения уравнения переноса на каждом из отрезков интегрирования  $I(\mu) = C_1$   $\mu < 0$   $= \text{const}$ ,  $I(\mu) = C_2$   $\mu > 0$   $= \text{const}$ , то коэффициенты  $D^-$  и  $D^+$  будут равны  $\pm 1/2$  и потоковые уравнения (4.28) перейдут в уравнения Шварцшильда—Шустера [100] (приближение «вперед-назад»):

$$-\frac{1}{2} \frac{dU^-}{dr} + \kappa U^- = \kappa 2\sigma T^4, \quad U = (U^- + U^+)/c, \quad (4.30)$$

$$\frac{1}{2} \frac{dU^+}{dr} + \kappa U^+ = \kappa 2\sigma T^4, \quad W = (U^+ - U^-)/2,$$

ранее широко применявшиеся для решения задач астрофизики в приближении плоского слоя ( $n=0$ ).

1) На  $j$ -м шаге по времени решается уравнение переноса (4.1) и определяются коэффициенты  $D^-$  и  $D^+$  по формулам (4.27).

2) На последующих  $N_j$  временных слоях ( $j' = j, \dots, j + N_j$ ) плотность  $U^{j'} = (U^{-j'} + U^{+j'})/c$  и поток энергии излучения  $W^{j'} = D^{-j'}U^{-j'} + D^{+j'}U^{+j'}$  определяются из решения потоковых уравнений (4.28) с замороженными (неизменными) по времени коэффициентами (4.27).

3) На шаге  $j + N_j$  вновь решается уравнение переноса, и вся процедура повторяется.

Такая процедура решения задач радиационной газовой динамики в сочетании с дальнейшим осреднением по энергии фотонов (п. 5 данного параграфа) применялась в работах И. В. Немчинова, В. В. Светцова [141, 171].

Отметим, что система уравнений (4.28) особенно удобна для решения задач динамики излучающего газа в плоскопараллельной геометрии ( $n=0$ ).

**3. Случай разделяющихся переменных в коэффициентах поглощения.** Квазидиффузионный подход можно применить и к многогрупповому варианту (5.10) осредненного уравнения (4.11) (гл. II), когда коэффициент поглощения представим в виде

$$\kappa_\nu(T, \rho, \nu) = \begin{cases} f_1^1(\nu) f_2^1(T, \rho), & \nu \in \omega^1, \\ f_1^{N_k}(\nu) f_2^{N_k}(T, \rho), & \nu \in \omega^{N_k}. \end{cases}$$

В этом случае система осредненных уравнений переноса и квазидиффузии примет вид [85]:

$$z \frac{dI_k^j}{dr} + f_2^k I_k^j = f_2^k F_k(T^j, |z|),$$

$$r_0 \leq r \leq r_N, \quad -\max(f_1^k(\nu))^{-1} \leq z \leq \max(f_1^k(\nu))^{-1}, \quad \nu \in \omega^k,$$

$$I_k^j(r_0, z) = \int_{\omega_{|z|}^k} f_1^2(\nu) I_k^+(r_0, f_1^k(\nu) z) d\nu, \quad z \geq 0, \quad (4.31)$$

$$I_k^j(r_N, z) = \int_{\omega_{|z|}^k} f_1^2(\nu) I_k^-(r_N, f_1^k(\nu) z) d\nu, \quad z < 0,$$

$$F_k(T^j, |z|) = \int_{\omega_{|z|}^k} (f_1^k(\nu))^2 I_{\nu\rho} d\nu, \quad k=1, \dots, N_k. \quad (4.32)$$

Множество  $\omega_{|z|}^k$  состоит из тех частот  $\nu \in \omega^k$ , для которых выполняется неравенство  $(f_1^k)^{-1} \geq |z|$ .

Коэффициенты и система уравнений, аналогичные коэффициентам (4.14) и уравнениям (4.15), запишутся в виде

$$D_k^j = \int_{-d_k}^{d_k} z^2 I_k^j dz \left/ \int_{-d_k}^{d_k} I_k^j dz, \right.$$

$$C_{0k}^j = c \int_{-d_k}^{d_k} z I_k^j(r_0, z) dz \left/ \int_{-d_k}^{d_k} I_k^j(r_0, z) dz, \quad (4.33)$$

$$C_{Nk}^j = c \int_{-d_k}^{d_k} z I_k^j(r_N, z) dz \left/ \int_{-d_k}^{d_k} I_k^j(r_N, z) dz,$$

$$d_k = \max(f_1^k(v))^{-1}, \quad z \in \omega^k,$$

$$\frac{dW_k^{j'}}{dr} + c f_2^k(T^{j'}, \rho^{j'}) U_k^{j'} = f_2^k \int_{-d_k}^{d_k} F_k(T^{j'}, |z|) dz,$$

$$c \frac{dD_k^j U^{j'}}{dr} + f_2^k W_k^{j'} = 0, \quad (4.34)$$

$$W_k^{j'} / U_k^{j'} \big|_{r=r_0} = C_{0k}^j, \quad W_k^{j'} / U_k^{j'} \big|_{r=r_N} = C_{Nk}^j,$$

$$j' = j, \dots, j + N_j; \quad k = 1, \dots, N_k.$$

Общая схема решения системы уравнений (4.32)—(4.34) такая же, как и для уравнений (4.13)—(4.15). Сначала, на  $j$ -м шаге по времени решаются осредненные уравнения (4.31) и определяются коэффициенты (4.33). Затем в течение  $N_j$  шагов по времени поток энергии излучения  $W$  определяется из системы уравнений (4.34).

Если  $N_k = 1$ , то многогрупповая система (4.32) переходит в одно уравнение (4.11) (гл. II) типа «серой» материи. В этом случае уравнения (4.34) позволяют эффективным образом определить поток энергии излучения из системы уравнений, не зависящей ни от углов, ни от частот. Таким образом, задача эффективного понижения размерности уравнения переноса в этой ситуации может быть удовлетворительно разрешена. Подобный алгоритм использовался при решении задачи о взаимодействии лазерного излучения с веществом [199].

В общем случае, когда рассматриваются многогрупповые системы уравнений переноса (4.13), (4.16), (4.19), использование квазидиффузионных систем (4.15), (4.18) и

(4.21) только частично решает проблему понижения размерности. Зависимость от энергии фотона при этом остается. Чтобы избавиться от этой зависимости, необходимо дальнейшее последовательное применение методов осреднения, которые будут рассмотрены в следующем пункте.

**4. Осреднение уравнений квазидиффузионного типа по энергиям фотонов.** Возьмем потоковые уравнения (4.26), записанные в многогрупповом приближении:

$$\frac{d \left( \int_{-1}^0 \mu I_k d\mu \right)}{dr} + \kappa_k \int_{-1}^0 I_k d\mu = 2\kappa_k \sigma_k T^4, \quad (4.35)$$

$$\frac{d \left( \int_0^1 \mu I_k d\mu \right)}{dr} + \kappa_k \int_0^1 I_k d\mu = 2\kappa_k \sigma_k T^4, \quad k=1, \dots, N_k.$$

Просуммировав уравнения (4.35) по всем группам, получим

$$\frac{d \left( \sum_{k=1}^{N_k} \int_{-1}^0 \mu I_k d\mu \right)}{dr} + \sum_{k=1}^{N_k} \kappa_k \int_{-1}^0 I_k d\mu = \sum_{k=1}^{N_k} \kappa_k 2\sigma_k T^4, \quad (4.36)$$

$$\frac{d \left( \sum_{k=1}^{N_k} \int_0^1 \mu I_k d\mu \right)}{dr} + \sum_{k=1}^{N_k} \kappa_k \int_0^1 I_k d\mu = \sum_{k=1}^{N_k} \kappa_k 2\sigma_k T^4.$$

Аналогично процедуре, совершаемой при переходе от уравнений (4.2) — (4.3) к уравнениям (4.6) и от уравнений (4.26) к уравнениям (4.28), систему (4.36) заменим на следующую:

$$\frac{dU^-}{dr} + D^- U^- = \psi(T, \rho), \quad U^-(r_N) = \sum_{k=1}^{N_k} \int_{-1}^0 \mu I_k^-(r_N, \mu) d\mu, \quad (4.37)$$

$$\frac{dU^+}{dr} + D^+ U^+ = \psi(T, \rho), \quad U^+(r_0) = \sum_{k=1}^{N_k} \int_0^1 \mu I_k^+(r_0, \mu) d\mu,$$

где  $I_k^-(r_N, \mu)$  и  $I_k^+(r_0, \mu)$  — граничные условия для уравнения переноса (4.13) и

$$U^- = \sum_{k=1}^{N_k} \int_{-1}^0 \mu I_k d\mu, \quad U^+ = \sum_{k=1}^{N_k} \int_0^1 \mu I_k d\mu,$$

$$\psi(T, \rho) = \sum_{k=1}^{N_k} \kappa_k 2\sigma_k T^4, \quad (4.38)$$

$$D^- = \sum_{k=1}^{N_k} \int_{-1}^0 \kappa_k I_k d\mu \bigg/ \sum_{k=1}^{N_k} \int_{-1}^0 \mu I_k d\mu,$$

$$D^+ = \sum_{k=1}^{N_k} \int_0^1 \kappa_k I_k d\mu \bigg/ \sum_{k=1}^{N_k} \int_0^1 \mu I_k d\mu. \quad (4.39)$$

Вновь используем рассмотренный ранее прием эффективного понижения размерности. Однако на этот раз осреднение будем проводить не только по угловым переменным, но и по энергиям фотонов:

1) На  $j$ -м временном шаге решим многогрупповое уравнение для плоского слоя (4.13) и определим коэффициенты  $D^-$  и  $D^+$  по формулам (4.39).

2) На последующих  $N_j$  шагах ( $j' = j, \dots, j + N_j$ ) полный поток энергии излучения  $W = \sum_{k=1}^{N_k} \int_{-1}^1 \mu I_k d\mu = U^- + U^+$

будем определять из решения системы осредненных уравнений (4.37) с замороженными (неизменными) по времени потоковыми коэффициентами (4.39).

3) На шаге  $j + N_j$  вновь происходит пересчет многогруппового уравнения (4.13), и вся процедура повторяется.

Подобный подход к осреднению уравнения переноса излучения по направлениям полета и энергиям фотонов был применен в работах [42, 141]. В дальнейшем метод успешно использовался для решения задач в плоскопараллельной геометрии ( $n=0$ ). Для других геометрий аккуратный расчет по этой схеме требует более сложных построений. Из работ, посвященных развитию этого метода, следует указать работу [171], в которой рассмотрена модификация потоковых уравнений, позволяющая успешно решать некоторые типы сферически-симметричных задач. Подробное изложение различных спосо-

бов осреднения потоковых уравнений проведено в обзорной работе И. В. Немчинова [140].

Осреднение по энергиям фотонов можно провести, используя в качестве основы и уравнения квазидиффузии. Просуммировав, например, уравнения (4.15) по всем группам, получим

$$\begin{aligned} \frac{d\left(\sum_{k=1}^{N_k} W_k\right)}{dr} + c \sum_{k=1}^{N_k} \kappa_k U_k &= \sum_{k=1}^{N_k} \kappa_k A \sigma_k T^4, \\ c \frac{d\left(\sum_{k=1}^{N_k} D_k U_k\right)}{dr} + \sum_{k=1}^{N_k} \kappa_k W_k &= 0, \\ \sum_{k=1}^{N_k} W_k|_{r=r_0} &= \sum_{k=1}^{N_k} C_{0k} U_k, \\ \sum_{k=1}^{N_k} W_k|_{r=r_N} &= \sum_{k=1}^{N_k} C_{Nk} U_k. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Используя осредненные коэффициенты.

$$\begin{aligned} D &= \frac{\sum_{k=1}^{N_k} \int_{-1}^1 \mu^2 I_k d\mu}{\sum_{k=1}^{N_k} \int_{-1}^1 I_k d\mu}, \quad C_0 = \frac{\sum_{k=1}^{N_k} \int_{-1}^1 \mu I_k(r_0, \mu) d\mu}{\sum_{k=1}^{N_k} \int_{-1}^1 I_k(r_0, \mu) d\mu}, \\ C_N &= \frac{\sum_{k=1}^{N_k} \int_{-1}^1 \mu I_k(r_N, \mu) d\mu}{\sum_{k=1}^{N_k} \int_{-1}^1 I_k(r_N, \mu) d\mu}, \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\kappa^* = \frac{\sum_{k=1}^{N_k} \kappa_k \int_{-1}^1 I_k d\mu}{\sum_{k=1}^{N_k} \int_{-1}^1 I_k d\mu}, \quad \kappa^{**} = \frac{\sum_{k=1}^{N_k} \kappa_k \int_{-1}^1 (1 + \mu) I_k d\mu}{\sum_{k=1}^{N_k} \int_{-1}^1 (1 + \mu) I_k d\mu},$$

перепишем систему уравнений (4.40) в виде [85]

$$\frac{dW}{dr} + c\kappa^*U = \sum_{k=1}^{N_k} \kappa_k 4\sigma_k T^4, \quad \frac{W}{U} \Big|_{r=r_0} = C_0, \quad (4.42)$$

$$\frac{dDU}{dr} + \kappa^{**}(cU + W) - \kappa^*cU = 0, \quad \frac{W}{U} \Big|_{r=r_N} = C_N,$$

где  $W = \sum_{k=1}^{N_k} W_k$ ,  $U = \sum_{k=1}^{N_k} U_k$  \*).

Далее при решении задач динамики излучающего газа используется стандартный прием: вначале решается уравнение переноса и определяются осредненные коэффициенты (4.41), затем в течение  $N_j$  шагов по времени поток энергии излучения  $W$  определяется из системы уравнений (4.42), не зависящей ни от направления полета, ни от частот фотонов.

**5. Осреднение разностных схем, аппроксимирующих уравнение переноса и уравнения диффузионного типа.** Система уравнений (4.42) правильно в дифференциальном смысле описывает поведение плотности  $U$  и потока энергии излучения  $W$ . Однако это вовсе не означает, что результат численного решения осредненного уравнения (4.42), даже на том шаге по времени, где проис-

\*) На первый взгляд более естественной представляется не осредненная система (4.42), а система уравнений

$$\frac{dW}{dr} + c\kappa^*U = \sum_{k=1}^{N_k} \kappa_k 4\sigma_k T^4, \quad \frac{W}{U} \Big|_{r=r_0} = C_0, \quad (4.43)$$

$$\frac{dDU}{dr} + \bar{\kappa}W = 0, \quad \frac{W}{U} \Big|_{r=r_N} = C_N,$$

где  $\bar{\kappa} = \left( \sum_{k=1}^{N_k} \kappa_k \int_{-1}^1 \mu I_k d\mu \right) / \left( \sum_{k=1}^{N_k} \int_{-1}^1 \mu I_k d\mu \right)$ . Однако знаменатель

осредненного коэффициента  $\bar{\kappa}$ , равный  $\sum_{k=1}^{N_k} \int_{-1}^1 \mu I_k d\mu$ , может менять

знак. В этом случае расчет с использованием системы уравнений (4.43) либо теряет свою устойчивость, либо приводит к физически неправдоподобным результатам. Введение коэффициента  $\kappa^{**}$ , знаменатель которого всегда положителен, позволяет устранить этот недостаток.

ходит пересчет коэффициентов (4.41), не будет существенно отличаться от интегральной плотности и потока энергии излучения, полученных из решения системы групповых уравнений (4.15).

Связано это с тем, что разностные схемы, аппроксимирующие исходные уравнения, дают решения лишь с той или иной степенью точности. Эта точность зависит как от пространственной сетки, так и от градиентов температуры и плотности, которые в свою очередь определяют изменение правых частей и групповых коэффициентов поглощения. Особенно неприятная ситуация при решении задач радиационной газовой динамики складывается, когда коэффициент поглощения претерпевает сильные изменения на небольших расстояниях. При численной реализации эти изменения могут происходить на одной или нескольких ячейках сетки. Такая картина часто встречается на фронтах температурных и ударных волн, границах различных веществ. В этих случаях получение разностных схем, аккуратной аппроксимирующих осредненные и исходные многогрупповые уравнения, сопряжено с определенными трудностями.

Некоторые способы построения разностных схем для многогрупповых уравнений квазидиффузии будут рассмотрены в п. 3 следующего параграфа. В этом пункте остановимся пока на получении осредненных уравнений, для которых поток и плотность энергии излучения, определенные с помощью их численного решения, будут совпадать с соответствующими величинами, найденными из решения системы многогрупповых уравнений.

Выпишем, не приводя конкретного вида коэффициентов, разностную аппроксимацию системы уравнений (4.15), основанную на использовании консервативных схем [162]:

$$\begin{aligned} W_{ik} - W_{l+1,k} + Q_{ik}U_{ik} &= F_{ik}, & W_{0k} &= C_{0k}U_{0k}, \\ P_{ik}U_{ik} - R_{ik}U_{l-1,k} + W_{ik} &= 0, & W_{Nk} &= C_{Nk}U_{Nk}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Используя значение потока  $W_{ik}$  из второго уравнения (4.44), перепишем всю систему в виде

$$\begin{aligned} A_{ik}U_{l-1,k} - C_{ik}U_{ik} + B_{ik}U_{i+1,k} &= F_{ik}, \\ P_{ik}U_{ik} - R_{ik}U_{l-1,k} + W_{ik} &= 0, & i &= 1, \dots, N_l - 1, \\ W_{0k} &= C_{0k}U_{0k}, & W_{Nk} &= C_{Nk}U_{Nk}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Просуммировав систему уравнений (4.45) по всем группам, получим

$$A_i U_{i-1} - C_i U_i + B_i U_{i+1} = \sum_{k=1}^{N_k} F_{ik},$$

$$P_i U_i - R_i U_{i-1} - W_i = 0, \quad i = 1, \dots, N_i - 1, \quad (4.46)$$

$$W_0 = C_0 U_0, \quad W_N = C_N U_N,$$

где

$$U_i = \sum_{k=1}^{N_k} U_{ik}, \quad W_i = \sum_{k=1}^{N_k} W_{ik}.$$

Коэффициенты системы уравнений (4.46) определяются следующим образом:

$$A_i = \frac{\sum_{k=1}^{N_k} A_{ik} U_{i-1,k}}{\sum_{k=1}^{N_k} U_{i-1,k}}, \quad C_i = \frac{\sum_{k=1}^{N_k} C_{ik} U_{ik}}{\sum_{k=1}^{N_k} U_{ik}}, \quad B_i = \frac{\sum_{k=1}^{N_k} B_{ik} U_{i+1,k}}{\sum_{k=1}^{N_k} U_{i+1,k}},$$

$$P_i = \frac{\sum_{k=1}^{N_k} P_{ik} U_{ik}}{\sum_{k=1}^{N_k} U_{ik}}, \quad R_i = \frac{\sum_{k=1}^{N_k} R_{ik} U_{i-1,k}}{\sum_{k=1}^{N_k} U_{i-1,k}},$$

$$i = 1, \dots, N_i - 1, \quad (4.47)$$

$$C_0 = \frac{\sum_{k=1}^{N_k} C_{0k} U_{0k}}{\sum_{k=1}^{N_k} U_{0k}}, \quad C_N = \frac{\sum_{k=1}^{N_k} C_{Nk} U_{Nk}}{\sum_{k=1}^{N_k} U_{Nk}}.$$

В этом случае, когда коэффициенты (4.47) известны точно, решение осредненной системы уравнений (4.46) будет совпадать с суммой решений многогрупповой системы (4.45). В работе [189] описан способ решения многогрупповых задач динамики излучающего газа, основанный на использовании осредненного уравнения (4.46). Следуя этой работе, вновь воспользуемся приемом, уже многократно применявшимся в этом параграфе.

1) На  $j$ -м шаге по времени решим многогрупповую систему уравнений (4.45) и определим коэффициенты по формулам (4.47).

2) В течение последующих  $N_j$  шагов ( $j' = j, \dots, j + N_j$ ) интегральный поток  $W$  и плотность энергии излучения  $U$  определим из решения осредненного уравнения (4.46) с замороженными (неизменными) по времени коэффициентами (4.47).

3) На шаге  $j + N_j$  вновь пересчитываются уравнения (4.45), определяются коэффициенты (4.47), и вся процедура повторяется.

Предложенная процедура осреднения позволяет определять интегральный поток и плотность энергии излучения из системы уравнений (4.46), которая не зависит ни от направления полета, ни от энергии фотонов.

Отметим, что решение осредненной системы уравнений (4.46) зависит от времени, так как правая часть

$$\sum_{k=1}^{N_k} F_{ik}(T(t^{j'}, r), \rho(t^{j'}, r))$$
 изменяется при переходе с од-

ного временного слоя на другой. Рассмотренный способ осреднения отличается единообразием его применения для любых одномерных и двумерных по пространству постановок задачи, использующих для описания переноса излучения уравнения квазидиффузии или диффузии \*).

Сделаем два замечания относительно рассматриваемого алгоритма.

З а м е ч а н и е 1. Разностная схема (4.46) не обязательно монотонна даже в том случае, если исходные разностные схемы (4.45), аппроксимирующие многогрупповые уравнения квазидиффузии, монотонны. В самом деле, из условия  $C_{ik} \geq |A_{ik}| + |B_{ik}|$  вовсе не следует, что полученные в результате процедуры осреднения (4.47) коэффициенты  $A_i, C_i, B_i$  будут удовлетворять неравенству  $C_i \geq |A_i| + |B_i|$ .

Как известно [162], решения, полученные с помощью немонотонных разностных схем, могут обладать рядом нежелательных свойств. Однако в нашем случае немонотонность разностной схемы (4.46) не вызывает опасений. Связано это с тем, что на тех шагах, где происходит пе-

---

\*) Применение этого способа осреднения для решения двумерных задач радиационной газовой динамики будет рассмотрено в гл. IV.

решет осредненных коэффициентов (4.47), решение системы (4.46) в точности совпадают с суммой по всем группам решений системы (4.45), которые, как правило, получены с помощью монотонных схем. На остальных  $N_j$  шагах по времени, где коэффициенты (4.47) заморожены, решения обеих систем также отличаются слабо. Дальнейшее естественное увеличение расхождения между решениями систем уравнений (4.46) и (4.45) вновь ликвидируется пересчетом осредненных коэффициентов (4.47).

Замечание 2. Если даже исходная система разностных уравнений (4.45) самосопряженная, то осредненное уравнение (4.46) вовсе не обязано обладать этим свойством. Данный факт накладывает определенные ограничения на выбор итерационных методов решения разностных уравнений в двумерных задачах динамики излучающего газа.

Чтобы повысить точность осреднения, можно рассмотреть следующую модификацию метода. В этом варианте коэффициенты (4.47) пересчитываются на каждом шаге по времени. Однако значения сеточной функции  $U_{ik}$ , участвующие в определении коэффициентов, остаются неизменными в течение  $N_j$  шагов по времени:

$$\begin{aligned} A_i^{j'} &= \left( \sum_{k=1}^{N_k} A_{ik}(T^{j'}, \rho^{j'}) U_{i-1,k}^j \right) / \left( \sum_{k=1}^{N_k} U_{i-1,k}^j \right), \\ C_i^{j'} &= \left( \sum_{k=1}^{N_k} C_{ik}(T^{j'}, \rho^{j'}) U_{ik}^j \right) / \left( \sum_{k=1}^{N_k} U_{ik}^j \right), \\ B_i^{j'} &= \left( \sum_{k=1}^{N_k} B_{ik}^{j'} U_{i+1,k}^j \right) / \left( \sum_{k=1}^{N_k} U_{i+1,k}^j \right). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Изменения со временем групповых коэффициентов, связанные с изменением температуры и плотности, учитываются при таком пересчете. В этом варианте нет необходимости решать многогрупповую систему уравнений на каждом шаге по времени, что особенно важно для двумерных задач.

Эффективность рассмотренного приема осреднения коэффициентов (4.47) в смысле уменьшения машинного времени, идущего на расчет задачи динамики излучающего газа, очевидна. Поэтому определяющим фактором в применении указанной схемы должна служить сте-

пень отклонения между решением осредненной системы (4.46) и суммой решений многогрупповых уравнений (4.45).

В качестве примера использования алгоритма рассмотрим модельную задачу о прогреве плоского слоя газа лазерным излучением

$$\mu \frac{dI_k}{dr} + \kappa_k I_k = \kappa_k 2\sigma_k T^4, \quad r_0 \leq r \leq r_N,$$

$$I_k(r_0, \mu, t) = 0, \quad \mu \geq 0,$$

$$I_k(r_N, \mu, t) = 0, \quad \mu < 0, \quad k=1, \dots, 4, \quad (4.49)$$

$$a \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \lambda \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{\partial I_\lambda}{\partial r}, \quad T(r, 0) = 0,03, \quad (4.50)$$

$$W = \sum_{k=1}^4 \int_{-1}^1 \mu I_k d\mu, \quad a = 0,5, \quad \lambda = 0,01.$$

Интенсивность лазерного излучения  $I_\lambda$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{dI_\lambda}{dr} + \kappa_\lambda I_\lambda = 0,$$

$$I_\lambda(r_0, t) = 10 \cdot \exp\{-5(t-0,5)^2\}, \quad \kappa_\lambda = 10 + 0,3T. \quad (4.51)$$

Групповые коэффициенты и границы групп выбирались следующие:  $\kappa_1 = 0,01 + 0,1 T + T^2$ ,  $\kappa_2 = 0,05 + 0,3 T + 0,1 T^2$ ,  $\kappa_3 = 1$ ,  $\kappa_4 = 10 - 2 T + 0,2 T^2$ ,  $\nu_1 = 0$ ,  $\nu_2 = 1,5$ ,  $\nu_3 = 4$ ,  $\nu_4 = 10$ ,  $\nu_5 = 50$ . Шаг пространственной сетки выбирался постоянным и равным  $h = 0,01$ , шаг по времени  $\tau = 2 \cdot 10^{-4}$ . Использовался переход от уравнения переноса к уравнению квазидиффузии по схеме (4.13)—(4.15).

Сравнивались значения температуры, полученные с помощью четырех вариантов расчета. В первом варианте многогрупповые уравнения квазидиффузии (4.45) решались на каждом шаге по времени. Значения температуры, полученные в этом варианте, примем за эталонные  $T_{\text{эт}}$ . Во втором варианте многогрупповые уравнения квазидиффузии считались один раз на пять шагов по времени. Коэффициенты осредненного уравнения (4.46) вычислялись с помощью выражений (4.47). В третьем варианте многогрупповые уравнения квазидиффузии также считались один раз на пять шагов по времени, но коэффициенты осредненного уравнения вычислялись на каждом временном слое с помощью выражений (4.48). В четвертом варианте многогрупповые уравнения квази-

диффузии считались на каждом шаге по времени, но этот шаг выбирался в пять раз более крупным:  $\tau_4 = 10^{-3}$ , чем в первых трех вариантах.

В табл. 1 приведены значения погрешностей  $\delta_2 = T_2 - T_{эТ}$ ,  $\delta_3 = T_3 - T_{эТ}$ ,  $\delta_4 = T_4 - T_{эТ}$  на момент времени  $t = 10^{-2}$  в области наиболее интенсивного изменения температуры.

Таблица 1

$r$	$\delta_2 \cdot 10^6$	$\delta_3 \cdot 10^6$	$\delta_4 \cdot 10^6$
0,01	-6,6	-2,7	-450
0,04	-11	-6,7	126
0,07	-7,1	-4,0	127
0,1	-4,5	-2,3	106
0,13	-2,9	-1,3	85,8
0,16	-1,8	-0,7	68
0,19	-1,03	-0,25	52,5
0,22	-0,49	-0,05	40,5
0,25	-0,1	0,27	31,2
0,28	0,09	0,13	24

Видно, что погрешность  $\delta_4$ , основанная на замораживании решения, значительно превышает по абсолютной величине погрешности  $\delta_2$  и  $\delta_3$ , возникающие при замораживании коэффициентов. Как и следовало ожидать, погрешность  $\delta_3$  оказалась меньше погрешности  $\delta_2$ . Отметим, что близкие результаты по сопоставлению погрешностей получены при расчетах сферически-симметричных задач [189]. Данный способ осреднения уравнений диффузионного типа по энергиям фотонов применялся для расчета целого ряда одномерных и двумерных задач динамики излучающего газа.

Другой способ осреднения по энергиям фотонов, основанный на использовании разностной аппроксимации уравнения переноса, был предложен в работе [61]. Рассмотрим многогрупповое уравнение переноса для плоского слоя (4.13) и выпишем для него характеристическую разностную схему с использованием кусочно-линейной интерполяции:

$$I_{ik}^+ = I_{i-1,k}^+ \exp\{-\tau_{ik}^+\} + 2\sigma_k T^4 [1 - \exp\{-\tau_{ik}^+\}] - \mu \left( \frac{1}{\kappa_k} \frac{\partial 2\sigma_k T^4}{\partial r} \right)_i [1 - (1 + \tau_{ik}^+) \exp\{-\tau_{ik}^+\}], \quad \mu > 0,$$

$$\tau_{ik}^+ = \frac{\kappa_{i-1/2,k}(r_i - r_{i-1})}{\mu}, \quad (4.52)$$

$$I_{ik}^- = I_{i+1,k}^- \exp\{-\tau_{ik}^-\} + 2\sigma_k T^4 [1 - \exp\{-\tau_{ik}^-\}] -$$

$$- \mu \left( \frac{1}{\kappa_k} \frac{\partial 2\sigma_k T^4}{\partial r} \right)_i [1 - (1 + \tau_{ik}^-) \exp\{-\tau_{ik}^-\}], \quad \mu < 0,$$

$$\tau_{ik}^- = \frac{\kappa_{i+1/2,k}(r_i - r_{i+1})}{\mu}.$$

Проинтегрируем первое из выражений (4.52) от 0 до 1 с весом  $\mu$ , а второе — с тем же весом от  $-1$  до 0. При этом получим пару уравнений

$$I_{ikw}^+ = I_{i-1,kw}^+ A_{ik}^+ + B_{ik}^+ 2\sigma_k T_i^4 + C_{ik}^+ \left( \frac{1}{\kappa_k} \frac{\partial 2\sigma_k T^4}{\partial r} \right), \quad (4.53)$$

$$I_{ikw}^- = I_{i+1,kw}^- A_{ik}^- + B_{ik}^- 2\sigma_k T_i^4 - C_{ik}^- \left( \frac{1}{\kappa_k} \frac{\partial 2\sigma_k T^4}{\partial r} \right).$$

Коэффициенты  $A^+$ ,  $A^-$ ,  $B^+$ ,  $B^-$ ,  $C^+$ ,  $C^-$  определяются следующим образом:

$$A_{ik}^+ = \left[ \int_0^1 I_{i-1,k} \exp\{-\tau_{ik}^+\} \mu d\mu \right] / \left[ \int_0^1 I_{i-1,k} d\mu \right],$$

$$A_{ik}^- = \left[ \int_{-1}^0 I_{i+1,k} \exp\{-\tau_{ik}^-\} \mu d\mu \right] / \left[ \int_{-1}^0 I_{i+1,k} d\mu \right],$$

$$B_{ik}^+ = \int_0^1 [1 - \exp\{-\tau_{ik}^+\}] \mu d\mu,$$

$$B_{ik}^- = \int_{-1}^0 [1 - \exp\{-\tau_{ik}^-\}] \mu d\mu,$$

$$C_{ik}^+ = \int_0^1 \mu^2 [1 - (1 + \tau_{ik}^+) \exp\{-\tau_{ik}^+\}] d\mu,$$

$$C_{ik}^- = \int_{-1}^0 \mu^2 [1 - (1 + \tau_{ik}^-) \exp\{-\tau_{ik}^-\}] d\mu.$$

Суммируя уравнения (4.53) по всем группам, получим выражение для определения интегрального потока энергии излучения:

$$I_{iw}^+ = I_{i-1,w}^+ A_i^+ + \left( \sum_{k=1}^{N_k} B_{ik}^+ \sigma_k \right) 2T_i^4 + l_{i-1/2} T_{i-1/2}^3 \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_i C_i^+,$$

$$I_{i\omega}^- = I_{i+1,\omega}^- A_i^- + 2T_i^4 \left( \sum_{k=1}^{N_k} B_{ik}^- \sigma_k \right) - \\ - l_{i+1/2} T_{i+1/2}^3 \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_i C_i^- \quad (4.54)$$

$$W_i = I_{i\omega}^+ + I_{i\omega}^-$$

$$A_i^+ = \left[ \sum_{k=1}^{N_k} \int_0^1 I_{i-1,k} \exp\{-\tau_{ik}^+\} \mu d\mu \right] / \left( \sum_{k=1}^{N_k} \int_0^1 I_{i-1,k} d\mu \right),$$

$$A_i^- = \left[ \sum_{k=1}^{N_k} \int_{-1}^0 I_{i+1,k} \exp\{-\tau_{ik}^-\} \mu d\mu \right] / \left( \sum_{k=1}^{N_k} \int_{-1}^0 I_{i+1,k} d\mu \right),$$

$$C_i^+ = \sum_{k=1}^{N_k} C_{ik}^+ \left( \frac{1}{\chi_k} \frac{\partial^2 \sigma_k T^4}{\partial T} \right) (l_{i-1/2} T_{i-1/2}^3)^{-1}, \quad (4.55)$$

$$C_i^- = \sum_{k=1}^{N_k} C_{ik}^- \left( \frac{1}{\chi_k} \frac{\partial^2 \sigma_k T^4}{\partial T} \right) (l_{i+1/2} T_{i+1/2}^3)^{-1},$$

где  $l$  — осредненная по Росселанду длина свободного пробега (см. (3.6) гл. II). Некоторые результаты расчетов по схеме (4.54) и их сравнение с данными, полученными непосредственно из решения уравнения переноса, приведены на рис. 27.

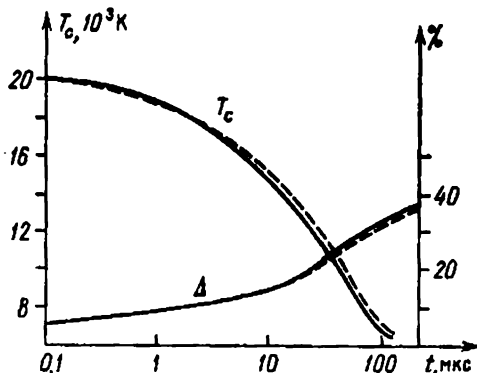


Рис. 27. Сопоставление двух расчетов: сплошные кривые — значения доли высвеченной энергии  $\Delta$  и температуры  $T_c$  в центре шара, полученные с помощью осредненных уравнений; пунктирные кривые — те же данные, полученные с помощью непосредственного решения уравнения переноса

Разностная схема (4.54) близка к потоковому варианту. Однако по сравнению с численным решением системы (4.37) решение, полученное с помощью схемы (4.54), обладает важным дополнительным свойством. На тех шагах по времени, где происходит пересчет коэффициентов (4.55), она дает те же значения потока, что и при использовании характеристической схемы (4.52). Кроме того, она при наличии равновесия излучения с веществом автоматически дает значение потока, соответствующее приближению лучистой теплопроводности.

Из других работ, посвященных использованию конечно-разностной аппроксимации для осреднения уравнения переноса излучения, отметим работы А. П. Голубя [71, 72].

**6. Моментный метод осреднения по энергиям фотонов.** Из других алгоритмов по энергиям фотонов рассмотрим моментный метод, предложенный Ю. Д. Шмыглевским [209, 210].

Введем функцию  $\bar{I}_\nu = I_\nu - I_{\nu p}$  и с ее помощью преобразуем исходное уравнение переноса

$$\frac{dI_\nu}{ds} + \kappa_\nu I_\nu = \kappa_\nu I_{\nu p}$$

к виду [195]

$$\frac{d\bar{I}_\nu}{ds} = -\kappa_\nu \bar{I}_\nu - bT^2 \frac{dT}{ds} \beta, \quad (4.56)$$

где

$$b = \frac{2k^3}{h^2 c^3}, \quad \beta = \left(\frac{T_*}{T} x\right)^4 \exp\left\{\frac{T_*}{T} x\right\} / \left(\exp\left\{\frac{T_*}{T} x\right\} - 1\right)^2, \quad x = \frac{h\nu}{kT_*},$$

и  $T_*$  — некоторая фиксированная температура.

Интегрируя уравнение (4.56) на отрезке характеристики от  $s$  до  $s + \Delta s$  и полагая при этом постоянными величины  $\kappa$ ,  $T^2 dT/ds$ , получим

$$\bar{I}_1 = \bar{I}(s) e^{-\Delta s \kappa} - bT^2 \frac{dT}{ds} \beta \frac{(1 - e^{-\Delta s \kappa})}{\kappa}, \quad \bar{I}_1 = \bar{I}(s + \Delta s). \quad (4.57)$$

Выражение (4.57) будет исходным для применения моментного метода осреднения, которое проведем, следуя работе [209].

Умножим уравнение (4.57) почленно на  $l_q(x) e^{-x/2}$  ( $q=0, 1, \dots, M$ ), где  $l_q$  — ортонормированные полиномы Лагерра [91], и проинтегрируем его по  $x$  от 0 до  $\infty$ .

В результате получим

$$\tilde{I}_{1q} = \sum_{m=0}^M I_m \tilde{\mu}_{qm} - bT^2 \frac{dT}{ds} \lambda_q, \quad (4.58)$$

где  $\tilde{I}_{1q}$  — искомые коэффициенты разложения функции  $\tilde{I}_1 e^{x/2}$ ,  $I_m$  — известные коэффициенты разложения функции  $\tilde{I} e^{x/2}$  в ряд по полиномам Лагерра. В свою очередь коэффициенты  $\tilde{\mu}_{qm}$  и  $\lambda_q$  вычисляются с помощью выражений

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{qm} &= \int_0^{\infty} \exp\{-x - \Delta s \kappa(x)\} l_q(x) l_m(x) dx, \\ \lambda_q &= \int_0^{\infty} e^{-x/2} \left(\frac{T^*}{T} x\right)^4 \exp\left\{\frac{T^*}{T} x\right\} [1 - \exp\{-\Delta s \kappa(x)\}] \times \\ &\quad \times \left[\exp\left\{\frac{T^*}{T} x\right\} - 1\right]^{-2} \kappa^{-1}(x) l_q(x) dx. \end{aligned} \quad (4.59)$$

На границе области коэффициенты  $\tilde{I}_m$  определяются с помощью разложения в ряд по полиномам Лагерра функции  $\tilde{I}_m^0$ , соответствующей падающему извне излучению.

Применение уравнений (4.58) — (4.59) для определения поля излучения эффективно лишь при сравнительно небольших числах  $M$ , что позволяет хорошо аппроксимировать достаточно плавные зависимости  $\kappa(x)$ . При существенном влиянии линий на поле излучения необходимо несколько видоизменить алгоритм.

Рассмотрим участок спектра, содержащий одну линию (рис. 28). Соединим точки  $A$  и  $B$  прямой линией  $\kappa_1 = \text{const}$ . Величина  $\kappa_{\text{ф}}$ , описываемая кривой  $FEAB$ , уже не является резко меняющейся функцией. Значение  $\kappa_{\text{ф}}$  будем использовать вместо  $\kappa$  в выражениях (4.58) — (4.59) для нахождения фонового значения интенсивности.

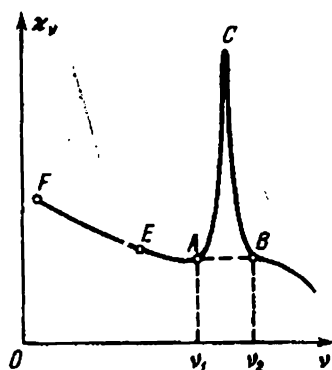


Рис. 28. Применение моментного метода для случая линейчатого спектра

В свою очередь для частот, принадлежащих отрезку  $\nu \in (\nu_1, \nu_2]$  (рис. 28), поступим следующим образом. Введем новую переменную  $z = (2x - x_1 - x_2)/(x_2 - x_1)$ , где  $x = h\nu/(kT_*)$ . Интенсивность излучения представим с помощью разложения в ряд по полиномам Лежандра  $P_m(z)$ :

$$\bar{I}_\lambda = \sum_{m=0}^L \bar{I}_{\lambda m} P_m(z), \quad \bar{I}_{\lambda m} = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^1 \bar{I}_\lambda P_m(z) dz.$$

Соответственно аналог уравнения (4.58) примет следующий вид:

$$\sum_{m=0}^l \Gamma_{lm} \bar{I}_{\lambda m} = \frac{1}{2m+1} \sum_{m=0}^L \mu_{lm} \bar{I}_{\lambda m} - \frac{1}{2m+1} b \left( T^2 \frac{dT}{ds} \beta \right) \sum_{m=0}^l \Gamma_{lm} \lambda_m, \quad (4.60)$$

$$\bar{I}_{\lambda l m} = \bar{I}_{\lambda m}(s + \Delta s), \quad l = 0, 1, \dots, L.$$

При выводе уравнения (4.60) предполагалось, что величина  $\beta$  внутри линии меняется незначительно и ее можно считать постоянной. Коэффициенты уравнения (4.60) вычисляются с помощью формул и рекуррентного соотношения:

$$\mu_{lm} = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^1 (z^l e^{-\Delta s x}) P_m(z) dz,$$

$$\lambda_m = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^1 \left( \frac{1 - e^{-\Delta s x}}{x} \right) P_m(z) dz,$$

$$\Gamma_{lm} = \frac{m}{2m-1} \Gamma_{l-1, m-1} + \frac{m+1}{2m+3} \Gamma_{l-1, m+1},$$

$$\Gamma_{l, -1} = 0, \quad \Gamma_{0m} = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 0, & m \neq 0, \end{cases} \quad l = 1, 2, \dots; \quad m = 0, 1, \dots$$

Внутри линии также вычисляется величина  $\bar{I}_1^*$ , образующаяся за счет фона коэффициента поглощения с постоянным значением коэффициента  $\kappa_1$ :

$$\bar{I}_1^* = \bar{I}^* e^{-\Delta s \kappa_1} - b \left( T^2 \frac{dT}{ds} \beta \right) \frac{[1 - e^{-\Delta s \kappa_1}]}{\kappa_1}. \quad (4.61)$$

Полное значение величины  $\tilde{I}$  определяется суммой  $\tilde{I}$ , найденной по фону поглощения, с величиной  $\tilde{I}_L$ , из которой вычитается  $\tilde{I}_1^*$ :

$$\tilde{I} = e^{-x/l^2} \sum_{m=0}^M \tilde{I}_m l_m(x) + \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^L \tilde{I}_{nm} P_m(z) - \sum_{i=1}^N \tilde{I}_i^*, \quad (4.62)$$

здесь  $N$  — полное число линий в коэффициенте поглощения.

Отметим, что моментная обработка применялась для решения ряда одномерных и двумерных задач динамики излучающего газа [103, 207, 210, 211].

**7. Нестационарное уравнение переноса.** Применение методов понижения размерности, основанных на использовании осредненных коэффициентов типа (4.14), к решению нестационарных уравнений переноса (1.20) — (1.22) сталкивается с серьезной трудностью. Эта трудность вызвана тем, что для решения нестационарного уравнения на  $j$ -м шаге по времени, где происходит пересчет осредненных коэффициентов, необходимо иметь значения интенсивности энергии излучения  $I_i^{j-1}$  с предыдущего шага по времени. А именно данная информация и отсутствует в алгоритмах понижения размерности, основанных на замораживании коэффициентов. В памяти ЭВМ могут находиться только данные о поле излучения на  $(j-N_j)$ -м временном шаге [25, 26].

Подобная ситуация приводит к тому, что в относительно немногочисленных расчетах задач радиационной газовой динамики, использующих нестационарное уравнение переноса, в основном решается непосредственно многогрупповая система уравнений (5.9) (гл. II)\*. Тем не менее в ряде случаев алгоритмические подходы, основанные на замораживании осредненных коэффициентов, можно, несколько трансформируя, перенести и на решение нестационарного кинетического уравнения.

Рассмотрим одногрупповое нестационарное уравнение переноса для случая сферической симметрии

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \mu \frac{\partial I}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial I}{\partial \mu} + \kappa I = \kappa_0 T^4 \quad (4.63)$$

\*) Естественно, что для решения системы уравнений (5.9) можно использовать методы, не связанные с получением осредненных коэффициентов. К таким методам, например, можно отнести рассмотренный в этом параграфе моментный метод и алгоритм осреднения, использующий разделение переменных в коэффициенте поглощения (§ 4, гл. II).

с граничным и начальным условиями

$$I(r, \mu, 0) = F(r, \mu), \quad I(R, \mu, t) = 0, \quad \mu \leq 0^*).$$

Введем обозначения

$$\int_{-1}^0 I d\mu = U^-, \quad \int_0^1 I d\mu = U^+. \quad (4.64)$$

Проинтегрируем уравнение (4.63) по  $\mu$  от  $-1$  до  $0$  и от  $0$  до  $1$ , при этом получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial U^-}{\partial t} + \mu^- \frac{\partial U^-}{\partial r} + \kappa^- U^- &= \kappa 2\sigma T^4, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial U^+}{\partial t} + \mu^+ \frac{\partial U^+}{\partial r} + \kappa^+ U^+ &= \kappa 2\sigma T^4 \end{aligned} \quad (4.65)$$

с граничными условиями  $U^-(R, t) = 0$ ,  $U^+(0, t) = U^-(0, t)$ . Коэффициенты системы уравнений (4.65) определяются с помощью выражений

$$\begin{aligned} \mu^- &= \left( \int_{-1}^0 \mu I d\mu \right) / \left( \int_{-1}^0 I d\mu \right), \quad \mu^+ = \left( \int_0^1 \mu I d\mu \right) / \left( \int_0^1 I d\mu \right), \\ \kappa^- &= \kappa + \frac{\partial \mu^-}{\partial r} + \frac{2\mu^-}{r} + \frac{I(r, 0, t)}{r \int_{-1}^0 I d\mu}, \\ \kappa^+ &= \kappa + \frac{\partial \mu^+}{\partial r} + \frac{2\mu^+}{r} - \frac{I(r, 0, t)}{r \int_0^1 I d\mu}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Будем говорить, что имеет место *квазирегулярный режим*, если решение уравнения переноса (4.63) можно представить в виде

$$\begin{aligned} I(r, \mu, t) &= \bar{I}_i^-(r, \mu, t) \exp \left\{ \int_t^{t'} \lambda_i^-(t') dt' \right\}, \\ \mu &\leq 0, \quad r_i \leq r \leq r_{i+1}, \quad t^{i-1} \leq t \leq t^i, \end{aligned} \quad (4.67)$$

\*) В работе [78], которой в основном следует изложение, алгоритм рассмотрен для более сложного случая уравнения переноса нейтронов

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + \alpha \varphi = \frac{\beta}{2} \int_{-1}^1 \varphi d\mu + \frac{q}{2v}.$$

$$I(r, \mu, t) = \bar{I}_i^+(r, \mu, t) \exp \left\{ \int_i^{t^j} \lambda_i^+(t') dt' \right\},$$

$$\mu > 0, \quad r_i \leq r \leq r_{i+1}, \quad t^{j-1} \leq t \leq t^j,$$

причем имеют место неравенства

$$\left| \frac{\partial \bar{I}_i^-}{\partial t} \right| \ll \left| \frac{\partial I}{\partial t} \right|, \quad \left| \frac{\partial \bar{I}_i^+}{\partial t} \right| \ll \left| \frac{\partial I}{\partial t} \right|. \quad (4.68)$$

Неравенства (4.68) означают, что внутри каждой ячейки  $r_i \leq r \leq r_{i+1}$ ,  $t^{j-1} \leq t \leq t^j$  функции  $\bar{I}_i^-$  и  $\bar{I}_i^+$  слабо зависят от времени по сравнению с  $I$ -решением уравнения переноса.

Если выбрать параметры  $\lambda_i^-$  и  $\lambda_i^+$  в виде

$$\lambda_i^- = \frac{d}{dt} \left[ \ln \int_{r_i}^{r_{i+1}} U^-(r, t) r^2 dr \right],$$

$$\lambda_i^+ = \frac{d}{dt} \left[ \ln \int_{r_i}^{r_{i+1}} U^+(r, t) r^2 dr \right],$$
(4.69)

то при достаточной гладкости решения по времени условия (4.68) будут выполнены.

Учитывая неравенства (4.68), производную по времени от интенсивности энергии излучения можно с большой степенью точности записать в виде

$$\frac{\partial I(r, \mu, t)}{\partial t} = -\lambda_i^- I(r, \mu, t),$$

$$\mu \leq 0, \quad r_i \leq r \leq r_{i+1}, \quad t^{j-1} \leq t \leq t^j, \quad (4.70)$$

$$\frac{\partial I(r, \mu, t)}{\partial t} = -\lambda_i^+ I(r, \mu, t),$$

$$\mu > 0, \quad r_i \leq r \leq r_{i+1}, \quad t^{j-1} \leq t \leq t^j,$$

и, следовательно, заменить исходное нестационарное уравнение переноса (4.63) на уравнение

$$\mu \frac{\partial I}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial I}{\partial \mu} + \left( \kappa - \frac{\lambda_i^-}{c} \right) I = \kappa 2\sigma T^4, \quad \mu \leq 0, \quad (4.71)$$

$$\mu \frac{\partial I}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial I}{\partial \mu} + \left( \kappa - \frac{\lambda_i^+}{c} \right) I = \kappa 2\sigma T^4, \quad \mu > 0.$$

В дальнейшем для эффективного понижения размерности нестационарного уравнения (4.63) можно использовать следующий прием.

1) На первом шаге по времени решается нестационарное уравнение (4.63) и определяются осредненные коэффициенты (4.66), которые остаются неизменными в течение  $N_j$  шагов по времени.

2) На последующих  $N_j$  шагах по времени ( $j' = j, \dots, j + N_j$ ) поток и плотность энергии излучения определяются из решения нестационарной системы уравнений (4.65).

3) На  $j + N_j$  шаге по времени с помощью решения системы уравнения (4.65) определяются коэффициенты  $\lambda_i^-$  и  $\lambda_i^+$  по формулам (4.69) и решается квазистационарное уравнение (4.71). Затем на основе решения уравнения (4.71) вновь определяются коэффициенты (4.66), и вся процедура повторяется.

Таким образом, использование уравнения (4.71) позволяет применить эффективные алгоритмы понижения размерности, основанные на замораживании осредненных коэффициентов, и для решения нестационарного уравнения переноса (4.63).

В заключение параграфа вновь вернемся к приему, который неоднократно использовался для понижения размерности исходного уравнения переноса. В основе этого приема лежит переход от сложного уравнения, записываемого в операторной форме

$$Mu = F, \quad (4.72)$$

решение которого занимает много машинного времени, к более простому

$$L(\xi)u = F. \quad (4.73)$$

Оператор  $L$  зависит от целого набора параметров  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ , которые в свою очередь являются функциями решения уравнения (4.72). Типичным примером такого перехода является замена уравнения переноса (4.13) системой уравнений квазидиффузии (4.15). При этом в качестве параметров  $\xi_n$  выступают коэффициенты квазидиффузии (4.14).

Как показано в работах [76, 2011\*], условием эффективного применения приема, основанного на замораживании коэффициентов, служит слабая зависимость опе-

---

\*) Основные результаты работы [76] были доложены на XI Международном математическом конгрессе (Москва, 1966 г.).

ратора  $L$  от решения исходного уравнения (4.72). Точнее, требуется, чтобы в некоторой норме, в которой оценивается решение и уравнения (4.72), выполнялось неравенство

$$\left\| \frac{\partial L^{-1}}{\partial u} \right\| \ll 1. \quad (4.74)$$

Однако при практическом построении алгоритмов понижения размерности использование неравенства (4.74) не приносит существенной пользы. Связано это с тем, что вспомогательный оператор  $L$ , как правило, зависит сложным нелинейным образом от решения уравнения (4.72), и поэтому получение точной оценки для нормы  $\left| \frac{\partial L^{-1}}{\partial u} \right|$  сопряжено с серьезными трудностями. Основная тяжесть в конструировании надежного и эффективного алгоритма ложится на вычислительный эксперимент.

Создание метода, пригодного для расчета достаточно широкого класса задач, может потребовать значительных усилий, просмотра и вычислительной проверки большого количества на первый взгляд родственных алгоритмов. Так как конкретных рекомендаций в построении оператора  $L$  дать невозможно, то успех в построении эффективных алгоритмов в значительной мере определяется опытом, энергией и интуицией вычислителя. Однако в случае успеха все эти затруднения окупаются созданием алгоритма, позволяющего существенно сократить время расчета на ЭВМ.

## § 5. Совместное решение уравнений, описывающих перенос излучения, и уравнения энергии

**1. Трудности, возникающие при использовании явных схем.** При решении задач радиационной газовой динамики температура определяется путем совместного решения уравнения энергии и уравнений, описывающих перенос излучения. В качестве таковых в различных задачах могут выступать либо непосредственно уравнение переноса, либо его упрощенные модели, например уравнения многогрупповой диффузии или квазидиффузии. При определении температуры естественным образом предполагается, что остальные газодинамические величины, а именно: плотность, координаты границ ячейки, работа сил сжатия и т. д., на данном этапе известны.

Поток энергии излучения  $W$  в общем случае не выражается через температуру и плотность с помощью

относительно простых соотношений. Более того, его величина зависит в той или иной мере от значений этих параметров во всех точках исследуемой области. Поэтому наиболее удобным способом решения уравнения энергии является явная схема, когда поток  $W$  определяется по данным с предыдущего шага по времени. Однако для устойчивости счета этот способ может потребовать жесткого ограничения на шаг по времени.

Причину подобного явления нетрудно понять, если вспомнить, что в тех случаях, когда излучение близко к состоянию равновесия с веществом, вклад излучения в уравнение энергии определяется членом лучистой теплопроводности (гл. II, § 3):

$$-\operatorname{div} W = \operatorname{div} \left( \frac{l}{3} 16\sigma T^3 \operatorname{grad} T \right), \quad (5.1)$$

здесь  $\sigma$  — постоянная Стефана—Больцмана,  $l$  — осредненная по Росселанду длина свободного пробега. Использование явной схемы для этого случая, если шаг пространственной сетки больше длины свободного пробега  $l$ , соответствует применению явной схемы для решения задачи о распространении тепла с помощью механизма теплопроводности.

Таким образом, при расчете задач динамики излучающего газа возникает следующая ситуация. Нахождение плотности и потока энергии излучения на каждом шаге по времени требует большого числа операций, и кроме того, ввиду требования устойчивости, приходится определять их излишне часто.

Для стационарных задач, в которых газодинамические параметры не зависят от времени, аналогом явной схемы являются итерационные методы, в которых поток энергии излучения вычисляется по значениям температуры, взятым с предыдущей итерации. В случае равновесия между веществом и излучением эти итерационные методы сходятся крайне медленно.

Как уже отмечалось ранее (гл. II, § 3), в целом приближение лучистой теплопроводности справедливо лишь в сравнительно небольшом числе случаев. Поэтому может возникнуть мнение, что с указанной вычислительной трудностью придется сталкиваться сравнительно редко. К сожалению, это не так.

Для обоснованного применения приближения лучистой теплопроводности к решению задачи радиационной газовой динамики необходимо, чтобы вещество находи-

лось в состоянии, близком к равновесию, с излучением во всех подобластях исследуемого объема. А для возникновения неустойчивости счета по явной схеме достаточно, чтобы состояние, близкое к равновесию, возникло в какой-то момент времени в какой-нибудь из зон. Такая ситуация реализуется часто. Все это приводит к необходимости разработки устойчивых методов совместного решения уравнения энергии и уравнений, описывающих перенос излучения. Некоторые из этих методов опубликованы в работах [86, 105, 118, 203, 213].

Однако прежде чем приступить к обсуждению неявных схем для решения задач РГД, рассмотрим некоторые вопросы, связанные с разностной аппроксимацией уравнений квазидиффузии и диффузии.

**2. Разностная аппроксимация одномерных уравнений диффузии и квазидиффузии.** Аппроксимация уравнений диффузии основывается на использовании консервативных разностных схем, построение которых будет рассмотрено на примере одногрупповой задачи

$$\frac{1}{r^n} \frac{dr^n W}{dr} + \kappa c U = \kappa 4\sigma T^4, \quad \begin{array}{l} n=0 - \text{плоский слой,} \\ n=1 - \text{бесконечный одно-} \\ \quad \quad \quad \text{мерный цилиндр,} \end{array} \quad (5.2)$$

$$\frac{1}{3} c \frac{dU}{dr} + \kappa W = 0, \quad n=2 - \text{шар.} \quad (5.3)$$

В качестве граничных условий для системы уравнений (5.2)—(5.3) воспользуемся, например, условием (2.14) (гл. II) отсутствия падающего извне излучения, и условием симметрии для шара и цилиндра

$$W|_{r=r_0} = \begin{cases} 0 & (r_0=0), \quad n=1, 2, \\ -cU/2, & n=0, \end{cases}$$

$$W|_{r=r_N} = \frac{c}{2} U, \quad n=0, 1, 2.$$

Здесь и в дальнейшем под  $W$  понимается поток в направлении оси  $r$ . Будем вычислять значения плотности энергии излучения  $U_i$  в серединах  $r_{i+1/2}$  разностных отрезков  $[r_i, r_{i+1}]$ , а значения потока  $W_i$  — в узлах  $r_i$  (рис. 29). На границе будем предполагать, что  $U_0$  и  $U_N$  определены в узлах  $r=r_0$  и  $r=r_N$ .

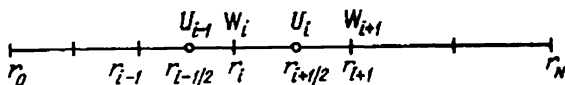


Рис. 29

Проинтегрируем уравнение (5.3) на отрезке  $[r_{i-1/2}, r_{i+1/2}]$ . При этом получим следующее выражение:

$$U_i - U_{i-1} = -\frac{1}{c} \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} 3\kappa W dr. \quad (5.4)$$

Учитывая непрерывность потока энергии излучения  $W$  \*), интеграл, входящий в правую часть разностного выражения (5.4), приближенно представим в виде

$$-\int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} 3\kappa W dr = -3W_i \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} \kappa dr. \quad (5.5)$$

Используя (5.5), перепишем выражение (5.4) следующим образом:

$$W_i = -c(U_i - U_{i-1}) \left/ \left[ 3 \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} \kappa dr \right] \right. \quad (5.6)$$

Умножив уравнение (5.2) на  $r^n$  и проинтегрировав его на отрезке  $[r_i, r_{i+1}]$ , получим

$$r_{i+1}^n W_{i+1} - r_i^n W_i + c \int_{r_i}^{r_{i+1}} \kappa U r^n dr = \int_{r_i}^{r_{i+1}} \kappa 4\sigma T^4 r^n dr. \quad (5.7)$$

Подставляя в (5.7) значение потока  $W$ , взятое из выражения (5.6), и заменяя  $\int_{r_i}^{r_{i+1}} \kappa U r^n dr$  на  $U_i \int_{r_i}^{r_{i+1}} r^n \kappa dr$ , получим трехточечную разностную схему

$$\begin{aligned} A_i U_{i-1} - C_i U_i + B U_{i+1} &= F_i, & U_0 &= a_1 U_1, \\ U_N &= \gamma_{N-1} U_{N-1}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

где

$$A_i = r_i^n c \left[ 3 \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} \kappa dr \right], \quad B_i = r_{i+1}^n c \left/ \left[ 3 \int_{r_{i+1/2}}^{r_{i+3/2}} \kappa dr \right] \right., \quad (5.9)$$

$$C_i = A_i + B_i + c \int_{r_i}^{r_{i+1}} r^n \kappa dr, \quad F_i = \int_{r_i}^{r_{i+1}} \kappa 4\sigma T^4 r^n dr.$$

\*) Отметим, что в отличие от потока  $W$  коэффициент поглощения  $\kappa$  может иметь разрыв на границе отрезка при  $r = r_i$ .

Схема (5.8)–(5.9) обладает свойством консервативности [162], заключающимся для нашего конкретного случая в том, что разность между поглощенной и излученной энергиями в объеме в каждый момент времени равна количеству лучистой энергии, втекающей (с учетом знака потока) через границу области. Следует также отметить, что схема (5.8)–(5.9) допускает вариации, основанные на различных предположениях относительно поведения коэффициента поглощения  $\kappa$  и температуры  $T$  на отрезке  $[r_i, r_{i+1}]$ . Наиболее часто используется схема, основанная на кусочно-постоянной аппроксимации  $\kappa$  и  $T$ .

Для аппроксимации уравнений квазидиффузии (4.6) при  $n=0$  перепишем их в виде

$$\frac{dW}{dr} + c \frac{\kappa}{D} \Phi = \kappa 4\sigma T^4, \quad (5.10)$$

$$lc \frac{d\Phi}{dr} + W = 0,$$

$$\Phi = DU. \quad (5.11)$$

Уравнения (5.10), так же как и уравнения диффузии, можно аппроксимировать с помощью консервативной разностной схемы (5.8)–(5.9).

Что же касается уравнений квазидиффузии для шара ( $n=2$ ) или цилиндра ( $n=1$ ), то для дальнейшей аппроксимации их удобно представить в следующей форме:

при  $n=2$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{dr^2 W}{dr} + c \frac{\kappa \Phi}{D} &= 4\kappa \sigma T^4, \\ c \frac{d\Phi}{dr} + c \frac{3D-1}{rD} \Phi + \kappa W &= 0, \quad (5.12) \\ \Phi &= DU, \end{aligned}$$

при  $n=1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{drW}{dr} + c \frac{\kappa}{D} \Phi &= 4\kappa \sigma T^4, \quad \Phi = DU, \\ c \frac{d\Phi}{dr} + c \frac{2D + D_z - 1}{rD} \Phi + \kappa W &= 0. \quad (5.13) \end{aligned}$$

Для аппроксимации системы (5.12) воспользуемся схемой, предложенной В. Я. Гольдиным. Проинтегрируем первое из уравнений этой системы с весом  $r^2$  на



Рис. 30. К построению разностных схем для уравнений квази-диффузии

отрезке  $[r_i, r_{i+1}]$  (рис. 30), получим

$$r_{i+1}^2 W_{i+1} - r_i^2 W_i + \frac{c\Phi_i}{D_i + D_{i+1}} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \kappa r^2 dr = \int_{r_i}^{r_{i+1}} r^2 4\kappa \sigma T^4. \quad (5.14)$$

Разностную схему для второго уравнения системы (5.12) рассмотрим на отрезке  $[r_{i-1/2}, r_i]$ :

$$W_i = -cl_{i-1/2} \frac{\Phi_{i-1/2} - \Phi_{i-1}}{r_{i-1/2} - r_i} - c \frac{3D_i - 1}{2r_i D_i} l_{i-1/2} (\Phi_{i-1/2} + \Phi_{i-1}),$$

$$l = \frac{1}{\kappa}. \quad (5.15)$$

Аналогичную разностную аппроксимацию можно рассматривать и на отрезке  $[r_i, r_{i+1/2}]$ :

$$W_i = -cl_{i+1/2} \frac{\Phi_i - \Phi_{i+1/2}}{r_{i+1/2} - r_i} - c \frac{3D_i - 1}{2r_i D_i} l_{i+1/2} (\Phi_{i-1/2} + \Phi_i). \quad (5.16)$$

Приравнивая значения потока, полученные с помощью выражений (5.15) и (5.16), и исключая  $\Phi_{i-1/2}$ , запишем  $W_i$  в виде

$$W_i = R_i \Phi_{i-1} - P_i \Phi_i, \quad (5.17)$$

где

$$R_i = c \left[ \frac{l_{i-1/2}}{r_i - r_{i-1/2}} - \frac{3D_i - 1}{2r_i D_i} l_{i-1/2} \right] \times$$

$$\times \left[ \frac{l_{i+1/2}}{r_{i+1/2} - r_i} - \frac{3D_i - 1}{2r_i D_i} l_{i+1/2} \right] \times$$

$$\times \left[ \frac{l_{i-1/2}}{r_i - r_{i-1/2}} + \frac{l_{i+1/2}}{r_{i+1/2} - r_i} + \frac{3D_i - 1}{2r_i D_i} (l_{i-1/2} - l_{i+1/2}) \right]^{-1}, \quad (5.18)$$

$$P_i = c \left[ \frac{l_{i-1/2}}{r_i - r_{i-1/2}} + \frac{3D_i - 1}{2r_i D_i} l_{i-1/2} \right] \times \\ \times \left[ \frac{l_{i+1/2}}{r_{i+1/2} - r_i} + \frac{3D_i - 1}{2r_i D_i} l_{i+1/2} \right] \times \\ \times \left[ \frac{l_{i-1/2}}{r_i - r_{i-1/2}} + \frac{l_{i+1/2}}{r_{i+1/2} - r_i} + \frac{3D_i - 1}{2r_i D_i} (l_{i-1/2} - l_{i+1/2}) \right]^{-1}.$$

Отметим, что для аккуратной аппроксимации (5.18) необходимо учитывать асимптотику разложения члена  $3D-1 = O(r^2)$  вблизи центра шара.

Подставляя (5.17) и (5.18) в уравнение (5.14), получим трехточечную разностную схему для определения сеточной функции  $\Phi$ :

$$A_i \Phi_{i-1} - C_i \Phi_i + B_i \Phi_{i+1} = F_i. \quad (5.19)$$

Конкретный вид коэффициентов разностного уравнения (5.19) зависит от способа интерполяции интегралов, входящих в (5.14).

Аналогичную трехточечную разностную схему с помощью рассмотренной выше процедуры можно построить и для уравнений (5.13), описывающих случай цилиндрической симметрии.

**3. Разностные схемы для оптически толстых ячеек.** Разностные схемы (5.6) и (5.7) правильно аппроксимируют значения потока энергии излучения для оптически тонких ячеек ( $\kappa \Delta r \ll 1$ ) и для оптически толстых ячеек в случае выполнения приближения лучистой теплопроводности. Однако возможны ситуации, когда использование этих схем приводит к качественно неверным результатам.

Рассмотрим случай, когда излучение выходит из оптически непрозрачной горячей ячейки в холодную ячейку (рис. 31). Предположим, что температура и коэффициент поглощения внутри ячеек постоянны и, кроме того, выполнены условия

$$\kappa_{i-1} (r_i - r_{i-1}) \gg 1, \quad T_{i-1} \gg T_i, \quad (5.20)$$

где  $\kappa_{i-1}$  и  $T_{i-1}$  — значения коэффициента поглощения и температуры внутри интервала  $(r_{i-1}, r_i)$ .

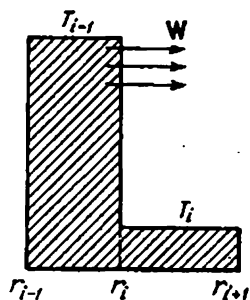


Рис. 31. К определению потока энергии излучения для оптически толстых ячеек

Воспользуемся для определения потока выражением (5.6), которое выпишем в виде

$$W_i = -c \frac{2(U_i - U_{i-1})}{\kappa_{i-1}(r_i - r_{i-1}) + \kappa_i(r_{i+1} - r_i)}. \quad (5.21)$$

В случае больших оптических толщин ячеек при  $\kappa_{i-1}(r_i - r_{i-1}) \rightarrow \infty$  из (5.21) следует, что  $W_i$  будет стремиться к нулю. Это не соответствует физической картине явления и существенно занижает поток, который в данном случае должен быть близок к значению  $\sigma T_{i-1}^4$ .

Рассмотрим схему, частично использующую аналитические решения уравнений диффузии и позволяющую обойти указанную трудность [118]. По сути дела, данная схема является одной из модификаций алгоритмов, используемых для решения уравнений с малым параметром при старшей производной.

Этот подход вначале рассмотрим на примере одномерной задачи для плоского слоя

$$\frac{dW}{dr} + \kappa c U = 4\kappa \sigma T^4, \quad (5.22)$$

$$\frac{c}{3} \frac{dU}{dr} + \kappa W = 0. \quad (5.23)$$

Проинтегрируем уравнения (5.22) — (5.23) в элементарной ячейке сеточной области  $r_i \leq r \leq r_{i+1}$ . Полагая в пределах ячейки постоянными коэффициенты уравнений и правые части, получим

$$W(\xi) = C_1 e^{\lambda \xi} + C_2 e^{-\lambda \xi}, \quad cU(\xi) = -(C_1 e^{\lambda \xi} - C_2 e^{-\lambda \xi} - 4\sigma T_{i+1/2}^4(r_{i+1} - r_i)), \quad \lambda = 3\kappa_{i+1/2}, \quad (5.24)$$

где  $\xi = r - r_i$  ( $0 \leq \xi \leq r_{i+1} - r_i$ ). Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  могут быть найдены из граничных условий для  $W$ :  $W(0) = W_i$ ,  $W|_{\xi=r_{i+1}-r_i} = W_{i+1}$ , а также и из граничных условий для  $U$ :  $U(0) = U_i$ ,  $U|_{\xi=r_{i+1}-r_i} = U_{i+1}$ . Приравнявая попарно получающиеся выражения для  $C_1$  и  $C_2$ , получим систему уравнений, связывающих функции  $U$  и  $W$  в двух соседних узлах разностной сетки:

$$W_{i+1} - W_i + \text{th}(\Delta s_{i+1/2}) c (U_i + U_{i+1}) = 8 \text{th}(\Delta s_{i+1/2}) \sigma T_{i+1/2}^4, \quad (5.25)$$

$$c(U_{i+1} - U_i) + 2 \text{th}(\Delta s_{i+1/2}) (W_i + W_{i+1}) = 0, \quad (5.26)$$

где  $\Delta s_{i+1/2} = [3\kappa_{i+1/2}(r_{i+1} - r_i)]/4$ .

Отметим, что в разностной схеме (5.25)–(5.26) поток  $W$  и плотность энергии излучения  $U$  вычисляются одновременно в узлах разностной сетки.

Выразим поток  $W$  через разность  $U$  в серединах интервалов из уравнения (5.26) с помощью следующего приема. Рассмотрим уравнение (5.26) на отрезках  $[r_{i-1/2}, r_i]$  и  $[r_i, r_{i+1/2}]$ :

$$c(U_i - U_{i-1/2}) + 2th[3\kappa_{i-1}(r_i - r_{i-1/2})/4](W_i + W_{i-1/2}) = 0, \quad (5.27)$$

$$c(U_{i+1/2} - U_i) + 2th[3\kappa_i(r_{i+1/2} - r_i)/4](W_i + W_{i+1/2}) = 0. \quad (5.28)$$

Приравнявая в (5.27) и (5.28)  $W_{i-1/2}$  и  $W_{i+1/2}$  к  $W_i$ , а затем, исключая  $U_i$ , получим

$$W_i = \frac{c}{4} \frac{U_{i-1/2} - U_{i+1/2}}{th(3\kappa_i(r_{i+1/2} - r_i)/4) + th(3\kappa_{i-1}(r_i - r_{i-1/2})/4)}. \quad (5.29)$$

Выражение (5.29) можно использовать для нахождения потока энергии излучения в задачах РГД. При этом, как и в ранее рассмотренных схемах, считая плотность энергии излучения определенной в серединах ячеек, переобозначая члены, входящие в числитель выражения (5.29), т. е. полагая  $U_{i-1/2} = U_{i-1}$ ,  $U_{i+1/2} = U_i$ , будем использовать следующее выражение для потока:

$$W_i = \frac{c}{4} \frac{U_{i-1} - U_i}{th[3\kappa_i(r_{i+1/2} - r_i)/4] + th[3\kappa_{i-1}(r_i - r_{i-1/2})/4]}. \quad (5.30)$$

Следует отметить, что при кусочно-постоянных  $\kappa$ ,  $\kappa_i(r_{i+1/2} - r_i) \rightarrow 0$  и  $\kappa_{i-1}(r_i - r_{i-1/2}) \rightarrow 0$ , знаменатель выражения (3.16) будет стремиться к  $3[\kappa_{i-1}(r_i - r_{i-1/2}) +$

$$+\kappa_i(r_{i+1/2} - r_i)] = 3 \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} \kappa dr, \text{ т. е. (5.30) перейдет в ра-}$$

нее полученное разностное выражение (5.6) для потока энергии излучения.

Таким образом, использование схемы типа (5.30) для аппроксимации уравнений диффузии и квазидиффузии позволяет правильно описать теплообмен излучением между оптически толстыми горячими слоями и оптически прозрачными холодными. Этот теплообмен оказывает решающее влияние на всю динамику процесса во многих задачах РГД. Примерами задач такого типа могут являться задачи о сильноточных излучающих

разрядах в инертных газах и задачи динамики лазерной плазмы, рассмотренные в гл. V.

С другой стороны, разностные схемы (5.6) — (5.7) оказываются предпочтительнее в случае, когда представляет интерес достаточно точная информация о профиле температуры внутри горячей непрозрачной области.

В общем случае можно использовать в вычислениях комбинированную схему, когда при слабом изменении плотности энергии излучения

$$|U_{i-1} - U_i| \leq \alpha (U_i + U_{i-1}), \quad \alpha = 0,05, \quad (5.31)$$

поток  $W$  определяется по схеме (5.6), а в случае невыполнения неравенства (5.31) — по схеме (5.30). Следует отметить, что одним из недостатков такого подхода является определенный произвол в выборе параметра  $\alpha$ . Это может сказаться на точности расчетов в случае, когда  $|U_{i-1} - U_i| \approx \alpha (U_i + U_{i-1})$ .

**4. Неявная схема.** Рассмотрим неявную схему для определения температуры в задачах динамики излучающего газа. При построении этой схемы будем следовать работе [118].

Рассмотрим уравнение энергии и одностороннюю систему уравнений диффузии

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \operatorname{div} W + Q, \\ -\operatorname{div} \left( \frac{lc}{3} \operatorname{grad} U \right) + ckU &= \kappa 4\sigma T^4, \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$W = -\frac{c}{3} l \operatorname{grad} U,$$

здесь  $Q$  — вклад в уравнение энергии всех членов, кроме излучения, например, работы сил сжатия.

Воспользовавшись трехточечной схемой для уравнений диффузии, выпишем неявную разностную аппроксимацию для системы уравнений (5.32):

$$\begin{aligned} \frac{e_i^j - e_i^{j-1}}{\tau^{j-1}} &= \frac{\lambda}{\rho} [A_i U_{i-1}^j - C_i U_i^j + B_i U_{i+1}^j] + \\ &+ \frac{(1-\lambda)}{\rho} [A_i U_{i-1}^{j-1} - C_i U_i^{j-1} + B_i U_{i+1}^{j-1}] + \\ &+ \lambda Q^j + (1-\lambda) Q^{j-1}, \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$A_i U_{i-1}^j - C_i U_i^j + B_i U_{i+1}^j - \kappa_i U_i^j + F_i^j = 0, \quad (5.34)$$

$$W_i^j = R_i U_{i-1}^j - P_i U_i^j, \quad (5.35)$$

где  $\lambda$  — весовой множитель,  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Предполагается, что на этом этапе  $Q^j$  известно заранее.

Для того чтобы решить уравнение (5.34) и определить значение плотности энергии излучения  $U$  на  $j$ -м слое по времени, проведем линеаризацию

$$F_i^j = F_i^{j-1} + \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)^{j-1} (T^j - T^{j-1}). \quad (5.36)$$

Тогда уравнение (5.34) примет вид

$$A_i U_{i-1}^j - C_i U_i^j + B_i U_{i+1}^j - \kappa_i U_i^j + F_i^{j-1} + \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)^{j-1} (T^j - T^{j-1}) = 0. \quad (5.37)$$

Коэффициенты  $A$ ,  $C$ ,  $B$  и  $\kappa$  будем определять по данным с предыдущего шага по времени.

В свою очередь для решения уравнения (5.37) необходимо знать  $T^j$  или значение разности  $T^j - T^{j-1}$ . Чтобы вычислить  $T^j - T^{j-1}$ , воспользуемся линеаризацией

$$\epsilon^j = \epsilon^{j-1} + \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right)^{j-1} (T^j - T^{j-1}). \quad (5.38)$$

Из уравнения (5.33) и выражения (5.38) следует, что

$$T^j - T^{j-1} = \frac{\tau^{j-1}}{(\partial \epsilon / \partial T)^{j-1}} \left[ \frac{1}{\rho} (A_i U_{i-1}^j - C_i U_i^j + B_i U_{i+1}^j) + \frac{(1-\lambda)}{\rho} (A_i U_{i-1}^{j-1} - C_i U_i^{j-1} + B_i U_{i+1}^{j-1}) + \lambda Q_i^j + (1-\lambda) Q_i^{j-1} \right]. \quad (5.39)$$

Подставляя значение разности  $T^j - T^{j-1}$ , найденное из (5.39), в уравнение (5.37), приходим к уравнению для определения плотности энергии излучения  $U$ :

$$(1 + g_i) (A_i U_{i-1}^j - C_i U_i^j + B_i U_{i+1}^j) - \kappa_i U_i^j + F_i^{j-1} + \tau^{j-1} \left[ \frac{(\partial F / \partial T)^{j-1}}{(\partial \epsilon / \partial T)^{j-1}} \right] \left[ \frac{(1-\lambda)}{\rho} (A_i U_{i-1}^{j-1} - C_i U_i^{j-1} + B_i U_{i+1}^{j-1}) + \lambda Q_i^j + (1-\lambda) Q_i^{j-1} \right] = 0, \quad (5.40)$$

$$g_i = \tau^{j-1} \lambda \frac{(\partial F / \partial T)_i^{j-1}}{(\partial \epsilon / \partial T)_i^{j-1} \rho_i}. \quad (5.41)$$

Полученная таким образом система уравнений (5.39) — (5.41) служит для определения температуры на новом шаге по времени.

Проведенные расчеты различных задач показали, что ограничений на шаг по времени, связанных с устойчивостью счета для схемы (5.39) — (5.41), нет. Эти ограничения связаны лишь с точностью расчетов.

В качестве примера рассмотрим расчет задачи о прогреве плоского слоя вещества лазерным излучением [118]. В начальной стадии прогрева можно пренебречь газодинамическим разлетом вещества и ограничиться для описания процесса системой уравнений энергии и диффузии (5.32).

Предполагалось, что справа падает лазерное излучение постоянной мощности  $I_n = 10^3$ . Уравнение состояния, коэффициент поглощения собственного и лазерного излучений задавались в виде  $\varepsilon = c_v T$ ,  $\kappa = \kappa_n = \kappa_0 e^{-T/T_0}$ , здесь  $c_v = 3,6 \cdot 10^{-2}$ ,  $\kappa_0 = 10$ ,  $T_0 = 10$ . Шаг пространственной сетки выбирался постоянным и равным  $h = 0,2$ . Начальная температура вещества также предполагалась постоянной  $T(r, 0) = 0,01$ . Оптическая толщина слоя  $\kappa L$  в начальный момент времени равнялась 60.

Расчеты проводились как по неявной схеме (5.39) — (5.41) с  $\lambda = 1$ , так и по явной схеме, когда поток энергии излучения определялся по данным с предыдущего шага по времени из соотношения

$$(\varepsilon^j - \varepsilon^{j-1}) / \tau^{j-1} = \text{div } W^{j-1} / \rho. \quad (5.42)$$

Максимальный шаг  $\tau$ , с помощью которого велись расчеты по неявной схеме, равнялся 0,2. Дальнейшее увеличение шага не проводилось, так как в этом случае он был бы сопоставим с характерным временем  $t_0 \approx 1,5$  прохождения тепловой волны сквозь слой вещества, и точность счета при этом была бы явно недостаточной. Отметим, что максимально допустимый по условиям устойчивости шаг явной схемы (5.42) был равен  $4 \cdot 10^{-3}$ . Таким образом, неявная схема позволила резко увеличить шаг по времени.

В следующем пункте параграфа на примере задачи с модельным уравнением состояния  $\varepsilon = aT^4$  устойчивость неявной схемы будет рассмотрена теоретически.

Для увеличения точности расчетов по неявной схеме (5.39) — (5.41) можно ввести итерации на новом шаге по времени:

$$T^{(s+1)} = T^{(s)} + (\varepsilon^{j-1} - \varepsilon^{(s)}) / \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)^{(s)} + \left[ \tau^{j-1} / \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)^{(s)} \right] \times \\ \times \left[ \frac{\lambda}{\rho} (A_i U_{i-1}^{(s+1)} - C_i U_i^{(s+1)} + B_i U_{i+1}^{(s+1)}) + \right]$$

$$+\frac{1-\lambda}{\rho}(A_i U_{i-1}^{j-1} - C_i U_i^{j-1} + B_i U_{i+1}^{j-1}) + \lambda Q_i^j + (1-\lambda) Q_i^{j-1}], \quad (5.43)$$

$$(1 + g^{(s)})(A_i U_{i-1}^{(s+1)} - C_i U_i^{(s+1)} + B_i U_{i+1}^{(s+1)}) - \kappa_i U_i^{(s+1)} + F_i^{(s)} + \left[ \tau^{j-1} \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)^{(s)} / \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)^{(s)} \right] \times \\ \times \left[ \frac{1-\lambda}{\rho}(A_i U_{i-1}^{j-1} - C_i U_i^{j-1} + B_i U_{i+1}^{j-1}) + \lambda Q_i^j + (1-\lambda) Q_i^{j-1} \right] = 0, \quad (5.44)$$

$$g^{(s)} = \lambda \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)^{(s)} \tau^{j-1} / \left[ \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)^{(s)} \rho \right]. \quad (5.45)$$

Здесь  $s$  — номер итерации. В качестве начального приближения в выражениях (5.43)—(5.45) используются данные, взятые с предыдущего шага по времени.

**Замечание 1.** При построении неявной схемы существенным оказывается то, что перенос энергии излучения описывается системой одногрупповых уравнений диффузии или квазидиффузии. В расчетах используется их одногрупповая разностная аппроксимация, которая для одномерных задач записывается в виде трехточечной схемы. Именно к такой одногрупповой разностной аппроксимации и сводится система многогрупповых уравнений с помощью алгоритма осреднения, описанного в п. 5 § 4.

**Замечание 2.** Наряду с разностной аппроксимацией (5.39)—(5.41) в расчетах можно использовать следующую схему:

$$T^j - T^{j-1} = \left[ \tau^{j-1} / \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)^{j-1} \right] \left[ \frac{\lambda}{\rho} \operatorname{div} W^j + \frac{(1-\lambda)}{\rho} \operatorname{div} W^{j-1} + \lambda Q^j + (1-\lambda) Q^{j-1} \right], \quad (5.46)$$

$$(1 + g_i)(A_i U_{i-1}^j - C_i U_i^j + B_i U_{i+1}^j) - \kappa_i U_i^j + F_i^{j-1} + \left[ \tau^{j-1} \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)^{j-1} / \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)^{j-1} \right] \times \\ \times \left[ \frac{1-\lambda}{\rho}(A_i U_{i-1}^{j-1} - C_i U_i^{j-1} + B_i U_{i+1}^{j-1}) + \lambda Q_i^j + (1-\lambda) Q_i^{j-1} \right], \quad (5.47)$$

$$g = \lambda \tau^{j-1} \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)^{j-1} / \left[ \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)^{j-1} \rho \right]. \quad (5.48)$$

Для определения потока энергии излучения можно после решения уравнения (5.47) использовать выражение (5.35). Применение дивергентного разностного уравнения (5.46) позволяет гарантировать сохранение баланса внутренней энергии.

**5. Неявная схема при наличии кондуктивного теплообмена.** Рассмотренный в п. 4 метод совместного решения уравнения энергии и уравнений, описывающих перенос излучения, применим, когда радиационный теплообмен значительно более интенсивен, чем кондуктивный теплообмен, связанный с механизмом теплопроводности. Такие задачи составляют обширный подкласс задач динамики излучающего газа.

При незначительном кондуктивном теплообмене можно использовать неявные схемы (5.39)—(5.41) или (5.43)—(5.45), считая поток тепла за счет теплопроводности по данным с предыдущего шага по времени или с предыдущей итерации. В случае, когда кондуктивный теплообмен значительно превышает радиационный теплообмен, для расчета уравнения энергии можно применять неявные схемы, используемые при решении уравнения теплопроводности. При этом поток энергии излучения вычисляется по данным с предыдущего шага по времени.

Особо остановимся на случае, когда перенос энергии за счет излучения сопоставим с переносом энергии за счет теплопроводности. В этой ситуации уравнение энергии

$$\frac{de}{dt} = -\frac{1}{\rho} \left[ \operatorname{div} W + \operatorname{div} (\chi \operatorname{grad} T) \right] + Q \quad (5.49)$$

для одномерных задач после линеаризации аппроксимируем с помощью разностной схемы [22, 23]

$$T^j = T^{j-1} + \frac{\tau^{j-1}}{(\partial e / \partial T)^{j-1}} \left[ \frac{\lambda}{\rho} (A_i U_{i-1}^j - C_i U_i^j + B_i U_{i+1}^j + a_i T_{i-1}^j - c_i T_i^j + b_i T_{i+1}^j) + \psi_i^j \right], \quad (5.50)$$

здесь  $\chi(T, \rho)$  — коэффициент теплопроводности,

$$\psi_i^j = \frac{(1-\lambda)}{\rho} (A_i U_{i-1}^{j-1} - C_i U_i^{j-1} + B_i U_{i+1}^{j-1} + a_i T_{i-1}^{j-1} - c_i T_i^{j-1} + b_i T_{i+1}^{j-1}) + \lambda Q_i^j + (1-\lambda) Q_i^{j-1}.$$

Плотность энергии излучения  $U$  будем определять из уравнения

$$1 + g)(A_i U'_{i-1} - C_i U'_i + B_i U'_{i+1}) - \kappa_i U'_i + F'_i{}^{-1} + \\ + \tau^{j-1} \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)^{j-1} \psi'_i / \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right)^{j-1}. \quad (5.51)$$

Для решения системы уравнений (5.50)—(5.51) в случае одномерных задач применяется алгоритм матричной прогонки [168].

Исследование устойчивости схемы проведем на примере задачи с модельным уравнением состояния  $\epsilon = aT^4$  ( $a = \text{const}$ ), постоянным коэффициентом поглощения  $\kappa$  и коэффициентом теплопроводности  $\chi = \chi_0 T^3$ :

$$-\frac{c}{3\kappa} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + c\kappa U = 4\kappa\sigma T^4, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (5.52)$$

$$a \frac{\partial T^4}{\partial t} = \frac{c}{3\kappa} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\chi_0}{4} \frac{\partial^2 T^4}{\partial x^2}, \quad (5.53)$$

$$U(0, t) = U(l, t) = 0, \quad (5.54)$$

$$T(0, t) = T(l, t) = 0, \quad T(x, 0) = T_0(x). \quad (5.55)$$

При сделанных предположениях задача становится линейной относительно  $z = T^4$ .

Используя обозначения, введенные в [162], выпишем разностную схему для задачи (5.52)—(5.55):

$$-\frac{c}{3\kappa} \hat{U}_{\bar{x}x} + c\kappa \hat{U} - \kappa 4\sigma \hat{z} = 0, \quad (5.56)$$

$$az_t = \frac{c}{3\kappa} U_{\bar{x}x}^{(\lambda)} + \frac{\chi_0}{4} z_{\bar{x}x}^{(\lambda)}, \quad (5.57)$$

$$U_0 = U_N = 0, \quad (5.58)$$

$$z_0 = z_N = 0, \quad z|_{t=0} = z_0(x), \quad (5.59)$$

здесь  $\lambda$  — весовой множитель. При построении разностной схемы (5.56)—(5.59) предполагалось, что шаги по времени  $\tau$  и пространству  $h$  постоянны.

Система уравнения (5.56)—(5.59) эквивалентна следующей системе, которую запишем в операторном виде:

$$By_t + Ay = 0, \quad (5.60)$$

где  $y$  — вектор

$$y = \{u, z\}, \quad (5.61)$$

а операторы  $A$  и  $B$  представляются операторными матрицами вида

$$A = \begin{bmatrix} \frac{c^2}{3\kappa} \Lambda + c^2 \kappa E & -4\sigma \kappa c E \\ -4\sigma \kappa c E & \frac{\chi_0}{4} \sigma \Lambda + 16\sigma^2 \kappa E \end{bmatrix}, \quad (5.62)$$

$$B = \frac{\tau}{2} \begin{bmatrix} \frac{c^2}{3\kappa} \Lambda + c^2 \kappa E & -4\sigma \kappa c E \\ -\lambda 4\sigma \kappa c E & \lambda \frac{\chi_0}{4} \sigma \Lambda + 16\sigma^2 \kappa \lambda E + \frac{4a\sigma E}{\tau} \end{bmatrix}, \quad (5.63)$$

где  $\Lambda y = -y_{xx}$ .

Нетрудно показать, что  $A = A^* > 0$  и  $B^{-1}$  существует. Поэтому необходимым и достаточным условием устойчивости схемы (5.56)–(5.59) является условие  $C \geq 0$  [162, 167], где

$$C = B - \frac{\tau}{2} A \geq 0. \quad (5.64)$$

Учитывая оценки для оператора  $\Lambda$  [162, 167]

$$8/l^2 \leq \Lambda \leq 4/h^2$$

и то, что знакоопределенность оператора  $C$  совпадает со знакоопределенностью оператора  $\bar{C} = (C + C^*)/2$ , можно показать [22, 23], что неравенство (5.64) будет выполнено, если

$$\frac{2a}{\tau} \geq \frac{4\sigma \kappa}{1 + 8/(3\kappa^2 l^2)} \lambda^2 - 4\sigma \kappa (2\lambda - 1) - \frac{\chi_0}{4} M (2\lambda - 1), \quad (5.65)$$

где

$$M = \begin{cases} 4/h^2, & \text{если } \lambda < 1/2, \\ 8/l^2, & \text{если } \lambda \geq 1/2. \end{cases} \quad (5.66)$$

Из неравенства (5.65) следует, что разностная схема (5.56)–(5.59) устойчива при любых  $\tau$  для  $\lambda_0 \leq \lambda \leq 1$ , где  $\lambda_0$  — наименьший корень квадратного трехчлена

$$4\sigma \lambda^2 \kappa / \left(1 + \frac{8}{3\kappa^2 l^2}\right) - (2\lambda - 1) \left(4\sigma \kappa + \frac{\chi_0}{4l^2}\right). \quad (5.67)$$

Отметим, что в случае отсутствия теплопроводности ( $\chi_0 = 0$ ) задача (5.52)–(5.55) может также служить моделью для исследования неявной схемы, рассмотренной в п. 4 этого параграфа.

В качестве примера численного расчета вновь рассмотрим многогрупповую задачу (4.49)–(4.51). С помощью алгоритма осреднения, изложенного в § 4, пере-

нос собственного излучения плазмы эффективным образом описывался системой одногрупповых разностных уравнений. Пересчет коэффициентов осредненного уравнения производился один раз на десять шагов по времени.

Рассматривалось три варианта схемы. В первом варианте использовалась явная схема ( $\lambda=0$ ), когда поток энергии излучения целиком определялся по данным с предыдущего шага по времени. Во втором варианте рассматривалась чисто неявная схема ( $\lambda=1$ ). В третьем варианте использовалась схема с весами ( $\lambda=0,5$ ).

В результате расчетов было показано, что неустойчивость явной схемы возникала при временных шагах  $\tau \geq 2,5 \cdot 10^{-3}$ . Для чисто неявной схемы ( $\lambda=1$ ) экспериментально обнаружить неустойчивость не удалось. Максимальный шаг по времени, с помощью которого производились эти расчеты, был равен  $\tau_{\max}=0,7$ . Дальнейшее увеличение шага по времени не производилось, так как уже при шаге  $\tau_{\max}$  значительно уменьшалась точность расчетов.

Для схемы с весами ( $\lambda=0,5$ ) расчет был устойчив, если шаг по времени удовлетворял ограничению  $\tau < 0,3$ . Это ограничение значительно менее жесткое, чем ограничение на шаг по времени для явной схемы. Полученные из расчетов ограничения на шаг качественно согласуются с результатами, полученными при исследовании устойчивости модельной задачи (5.52)—(5.55).

**6. Неявная схема для нестационарных уравнений диффузии.** Предположим, что расстояние, проходимое фотонами частоты  $\nu_0$  за характерное время задачи, во много раз больше длины свободного пробега  $l_\nu$ ,  $x_0 = ct_0 \gg l_\nu$ . Тогда в уравнении (2.8) (гл. II) членом  $\frac{1}{c} \frac{\partial W_\nu}{\partial t}$  можно пренебречь по сравнению с  $\kappa_\nu W_\nu$ . Соответственно система уравнений, описывающая изменение плотности энергии излучения и вещества, в одномерном случае плоского слоя примет вид

$$\frac{\partial U_\nu}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{c}{3} l_\nu \frac{\partial U_\nu}{\partial x} = c \kappa_\nu (U_{\nu p} - U_\nu), \quad (5.68)$$

$$\rho \frac{d\mathcal{E}}{dt} = c \int_0^\infty \kappa_\nu (U_\nu - U_{\nu p}) d\nu. \quad (5.69)$$

В работе [105] были получены неявные схемы, основанные на линеаризации уравнений (5.68), (5.69), и системы уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{c}{3} l \frac{\partial U}{\partial x} = \kappa (4\sigma T^4 - cU), \quad (5.70)$$

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = c\kappa U - 4\sigma T^4, \quad (5.71)$$

справедливых в случае независимости коэффициента поглощения от частоты фотона. Рассмотрим эти схемы.

Вначале выпишем разностную аппроксимацию для системы уравнений (5.70)–(5.71):

$$\frac{U_i^j - U_i^{j-1}}{\tau^{j-1}} - [A_i U_{i-1}^j - C_i U_i^j + B_i U_{i+1}^j - \kappa_i c U_i^j + F_i^{j-1} + \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)^{j-1} (T_i^j - T_i^{j-1})] = 0, \quad (5.72)$$

$$\frac{\varepsilon_i^j - \varepsilon_i^{j-1}}{\tau^{j-1}} = \frac{\lambda}{\rho} [\kappa c U_i^j - F_i^{j-1} - \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)^{j-1} (T_i^j - T_i^{j-1})] + \frac{(1-\lambda)}{\rho} (\kappa c U_i^{j-1} - F_i^{j-1}), \quad (5.73)$$

где  $A_i, B_i, C_i$  — коэффициенты разностной схемы для члена  $\frac{\partial}{\partial x} \frac{c}{3} l \frac{\partial U}{\partial x}$ ,  $F = \kappa 4\sigma T^4$ ,  $\lambda$  — весовой множитель,  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Используя линеаризацию (5.38) для внутренней энергии  $\varepsilon$  из (5.73), получим выражение для разности

$$T_i^j - T_i^{j-1} = \frac{\left[ \frac{\lambda}{\rho} (\kappa c U_i^j - F_i^{j-1}) \right] + \frac{(1-\lambda)}{\rho} (\kappa c U_i^{j-1} - F_i^{j-1})}{\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)^{j-1} \frac{1}{\tau^{j-1}} + \frac{\lambda}{\rho} \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)^{j-1}}. \quad (5.74)$$

Подставляя (5.74) в уравнение (5.72), получим выражение для нахождения плотности энергии излучения на новом шаге по времени

$$A_i U_{i-1}^j - C_i U_i^j + B_i U_{i+1}^j - \left[ \frac{1}{\tau^{j-1}} + \kappa_i c - \frac{\lambda \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right) \kappa c / \rho}{\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)^{j-1} \frac{1}{\tau^{j-1}} + \frac{\lambda}{\rho} \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)^{j-1}} \right] U_i^j - \Phi_i^{j-1} = 0. \quad (5.75)$$

где

$$\Phi_i^{j-1} = -\frac{U_i^{j-1}}{\tau^{j-1}} - F_i^{j-1} - \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)^{j-1} \left[ -\frac{\lambda}{\rho} F_i^{j-1} + \frac{(1-\lambda)}{\rho} (\kappa_{ic} U_i^{j-1} - F_i^{j-1}) \right]}{\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)^{j-1} \frac{1}{\tau^{j-1}} + \frac{\lambda}{\rho} \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)^{j-1}}. \quad (5.76)$$

Разностная система уравнений (5.75) легко решается методом прогонки.

Более сложной выглядит неявная схема для уравнений диффузии с учетом зависимости коэффициента поглощения от частоты фотона. После перехода к многогрупповой системе неявное уравнение, аналогичное (5.75) для определения групповой плотности энергии излучения, примет вид

$$A_{ik} U_{i+1,k}^j - C_{ik} U_{ik}^j + B_{ik} U_{i+1,k}^j - \left[ \frac{1}{\tau^{j-1}} + \kappa_{ik} c \right] U_{ik}^j - \frac{\left(\frac{\partial F_k}{\partial T}\right)^{j-1} \frac{\lambda c}{\rho} \sum_{k=1}^{N_k} \kappa_{ik} U_{ik}^j}{\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)^{j-1} \frac{1}{\tau^{j-1}} + \frac{\lambda}{\rho} \sum_{k=1}^{N_k} \left(\frac{\partial F_k}{\partial T}\right)^{j-1}} - \Phi_{ik}^{j-1} = 0, \quad (5.77)$$

где

$$\Phi_{ik}^{j-1} = -\frac{U_{ik}^{j-1}}{\tau^{j-1}} - F_{ik}^{j-1} - \frac{\left(\frac{\partial F_k}{\partial T}\right)^{j-1} \sum_{k=1}^{N_k} \left[ -\frac{\lambda}{\rho} F_{ik}^{j-1} + \frac{(1-\lambda)}{\rho} (\kappa_{ik} c U_{ik}^{j-1} - F_{ik}^{j-1}) \right]}{\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)^{j-1} \frac{1}{\tau^{j-1}} + \sum_{k=1}^{N_k} \frac{\lambda}{\rho} \left(\frac{\partial F_k}{\partial T}\right)^{j-1}}. \quad (5.78)$$

Для решения уравнения (5.77) необходимо привлекать те или иные итерационные алгоритмы. Один из возможных итерационных способов решения этой системы может заключаться в следующем. Заменим сумму  $c \sum_{k=1}^{N_k} \kappa_{ik} U_{ik}$

на выражение

$$c \left[ \sum_{k'=1}^{k-1} \kappa_{ik'} U_{ik'}^{j(s)} + U_{ik}^{j(s)} \kappa_{ik} + \sum_{k'=k+1}^{N_k} \kappa_{ik'} U_{ik'}^{j(s-1)} \right].$$

В свою очередь определим групповую плотность  $U_{ik}$  на  $s$ -й итерации из разностного уравнения

$$A_{ik} U_{i-1,k}^{j(s)} - C_{ik} U_{ik}^{j(s)} + B_{ik} U_{i+1,k}^{j(s)} - \left[ \frac{1}{\tau^{j-1}} + \kappa_{ik} c + \frac{\frac{\lambda}{\rho} c \left( \frac{\partial F_k}{\partial T} \right)^{j(s-1)} \kappa_{ik}}{\left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)^{j(s-1)} \frac{1}{\tau^{j-1}} + \sum_{k'=1}^{N_k} \left( \frac{\partial F_{k'}}{\partial T} \right)^{j(s-1)}} \right] U_{ik}^{j(s)} = \Phi_{ik}^{j(s-1)}, \quad (5.79)$$

где

$$\Phi_{ik}^{j(s-1)} = \Phi_{ik}^{j-1} + \frac{\left( \frac{\partial F_k}{\partial T} \right)^{j(s-1)} \frac{\lambda}{\rho} c \left[ \sum_{k'=1}^{k-1} U_{ik'}^{j(s)} \kappa_{ik'} + \sum_{k'=k+1}^{N_k} U_{ik'}^{j(s-1)} \kappa_{ik'} \right]}{\left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)^{j(s-1)} \frac{1}{\tau^{j-1}} + \sum_{k'=1}^{N_k} \left( \frac{\partial F_{k'}}{\partial T} \right)^{j(s-1)} \frac{\lambda}{\rho}}. \quad (5.80)$$

Естественно, что использование того или иного итерационного алгоритма сильно усложняет решение задачи в целом по сравнению со случаем «серой материи», когда неявная схема (5.74) решается с помощью прямых методов.

## § 6. Общая схема расчета одномерных задач радиационной газовой динамики

В предыдущих параграфах этой главы были подробно рассмотрены различные методы решения уравнения переноса (§ 3), эффективного понижения размерности (§ 4) и определения температуры в задачах динамики излучающего газа (§ 5). Рассмотрим теперь, как из этих методов, связанных с решением тех или иных частных проблем, может быть построен алгоритм решения одномерных задач радиационной газовой динамики, в которых для описания поля излучения используется стационарная модель уравнения переноса.

На первом шаге по времени из начальных данных известны скорость, плотность и температура вещества.

На этом шаге по времени с помощью методов, описанных в § 3, решается многогрупповая система уравнений переноса

$$\sqrt{1 - \delta_{1n} \gamma^2} \left( \mu \frac{\partial I_k}{\partial r} + (\delta_{1n} + \delta_{2n}) \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial I_k}{\partial \mu} \right) + \kappa_k I_k = \\ = \frac{\kappa_k \sigma_k T^4}{\pi} [\delta_{1n} + 2\pi (\delta_{0n} + \delta_{2n})]$$

и определяются коэффициенты квазидиффузии  $D_k$ ,  $D_{k\lambda}$ ,  $C_k$ . На этом же шаге уравнения квазидиффузии, записанные в разностной форме, осредняются по энергиям фотонов и находятся осредненные коэффициенты (4.47)  $A_i$ ,  $C_i$ ,  $B_i$ .

При переходе на следующий шаг по времени из решения уравнений неразрывности и движения находятся новые значения скорости, плотности, и если описание газодинамического течения лагранжево, то из кинематических соотношений находятся координаты узлов сетки. Работа сил сжатия  $-p \operatorname{div} \mathbf{u}$  при этом определяется по данным температуры с предыдущего шага по времени или с предыдущей итерации.

После нахождения газодинамических величин температура определяется с помощью неявных схем из совместного решения объединенных в один вычислительный тепловой блок уравнения энергии и осредненного по всем частотам разностного уравнения (4.46), описывающего перенос излучения. При таком определении температуры возможны итерации как между газодинамическим и тепловым блоком, так и внутри самого теплового блока. Итерации между газодинамическим и тепловым блоком связаны с уточнением величины работы сил сжатия. Итерации внутри теплового блока, например итерационный процесс (5.43)—(5.45), связаны с нелинейной зависимостью внутренней энергии  $e$  и правой части  $\sum_{k=1}^{N_k} F_k$  осредненного уравнения от температуры.

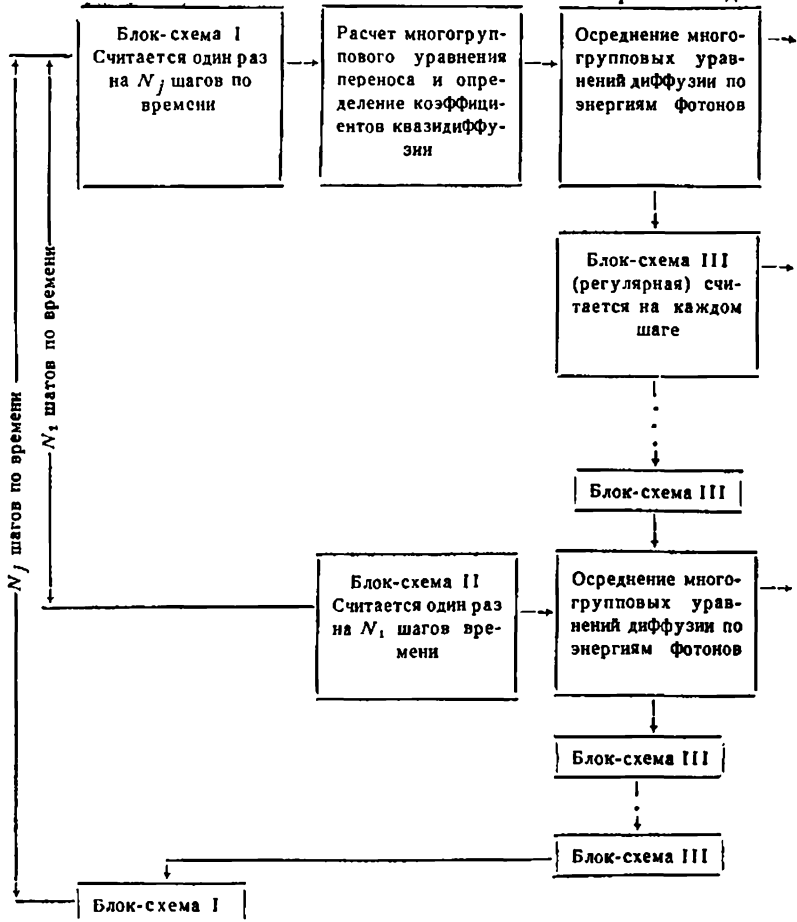
Используются стандартные условия окончания итераций между блоками

$$\max_i |v_i^{(s+1)} - v_i^{(s)}| < \varepsilon_{1v} |v_i^{(s)}| + \varepsilon_{2v}$$

и внутри теплового блока

$$\max_i |T_i^{(s+1)} - T_i^{(s)}| < \varepsilon_{1T} |T_i^{(s)}| + \varepsilon_{2T}$$

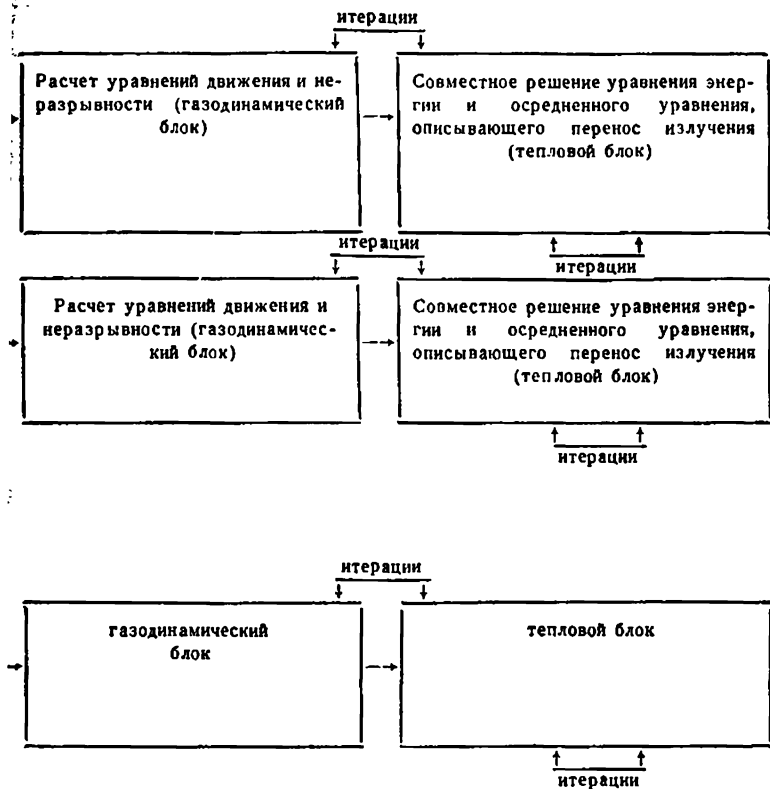
### Схема расчета одно



Здесь  $\varepsilon_{1v}$ ,  $\varepsilon_{2v}$ ,  $\varepsilon_{1T}$ ,  $\varepsilon_{2T}$  — специально подобранные константы, определяемые требованиями точности расчета.

Через  $N_j$  шагов во времени многогрупповое уравнение переноса вновь пересчитывается и определяются коэффициенты квазидиффузии  $D_k$ ,  $D_{zk}$ ,  $C_k$ . Переход от многогрупповых уравнений квазидиффузии к усредненному уравнению (4.46) и пересчет коэффициентов (4.47) происходит через  $N_1$  шагов по времени. Как правило, этот переход происходит чаще, чем переход от уравне-

мерных задач РГД



ний переноса к уравнениям квазидиффузии,  $N_j = pN_1$ . Обычно  $p=2$  или  $3$ . Точного алгоритма для определения оптимальных значений  $N_j$  и  $N_1$  не существует. Они задаются с достаточной степенью приближенности на основе предыдущего опыта расчета задач данного класса. Например, при наличии фронтов резкого изменения температуры необходимо, чтобы за  $N_1$  шагов по времени этот фронт проходил не более одной пространственной ячейки.

Таким образом, общий алгоритм расчета задачи РГД состоит из трех отдельных блок-схем: блок-схема I — для решения на тех шагах, где происходит решение многогруппового уравнения переноса; блок-схема II — для решения на тех шагах, где определяются коэффициенты осредненного уравнения (4.46); блок-схема III — регулярная, где считаются уравнения движения и неразрывности и определяется температура.

Естественно, что в различных программах расчета могут использоваться лишь отдельные элементы рассмотренной здесь схемы. Например, для задач, в которых используется небольшое число групп по частоте, можно отказаться от блок-схемы II, в которой осредняется многогрупповое уравнение квазидиффузии. Кроме того, каждая из рассмотренных блок-схем может быть наполнена своим индивидуальным содержанием. В их основу могут быть положены различные численные методы, в том числе и не рассмотренные в этой книге. Таким образом, предложенная схема является лишь одной из возможных типичных схем расчета задач динамики излучающего газа.

**МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ  
МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ  
ИЗЛУЧАЮЩЕГО ГАЗА**

**§ 1. Математические модели, используемые  
при решении двумерных задач  
радиационной газовой динамики**

1. За последние 15 лет методы решения одномерных задач динамики излучающего газа интенсивно развивались. Также росло и количество задач в одномерной постановке, решенных с помощью алгоритмов численного моделирования. В настоящее время в СССР имеется достаточное количество научных групп, способных успешно решать такого рода задачи.

С середины 70-х годов, основываясь на накопленном опыте решения одномерных задач и опираясь на общее развитие вычислительной техники и численных методов, наметился прогресс и в решении двумерных задач динамики излучающего газа. Однако несмотря на достигнутые успехи, решение двумерных задач все еще сталкивается с весьма серьезными трудностями. Эти трудности обусловлены как специфическими сложностями, возникающими при решении задач РГД (§ 1, гл. II), так и переходом от сравнительно простой одномерной к более сложной пространственно-двумерной геометрии.

В самом деле, и так уже обладающее дополнительной размерностью уравнение переноса или его упрощенные модели, такие как, например, система многогрупповых уравнений диффузии, приходится решать не на одномерной по пространству сетке, а на обладающей гораздо большим количеством узлов сетке двумерной. Если даже предположить, что основные принципы, заложенные в алгоритмы численного определения поля излучения, и останутся неизменными при переходе к

пространственно многомерным задачам, то резкое увеличение числа пространственных узлов, которое неизбежно при таком переходе, вызовет пропорциональное увеличение машинного времени, необходимого для расчета всей задачи в целом. Общий объем затрат машинного времени может стать принципиальным препятствием к решению двумерной задачи динамики излучающего газа на современных ЭВМ.

Однако чисто количественным увеличением объема вычислений дополнительные трудности, возникающие при решении двумерных задач РГД, не исчерпываются. Возникают новые вычислительные сложности, с которыми не приходилось сталкиваться при решении одномерных задач. Например, при аппроксимации уравнения диффузии, описывающего поведение групповой плотности энергии излучения

$$-\frac{\partial}{\partial x} l_k(T, \rho) \frac{\partial U_k}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} l_k(T, \rho) \frac{\partial U_k}{\partial y} + \kappa_k U_k = \kappa_k 4\sigma_k T^4 / c,$$

$$k = 1, \dots, N_k, \quad (1.1)$$

на ортогональной сетке  $x_i = x_{i-1} + h_{x_i}$ ,  $y_n = y_{n-1} + h_{y_n}$ , возникает система сеточных уравнений вида (рис. 32)

$$B_{ink} U_{i,n-1,k} + K_{ink} U_{i-1,nk} - C_{ink} U_{ink} + E_{ink} U_{i+1,nk} + V_{ink} U_{i,n+1,k} + F_{ink} = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad n = 1, \dots, N_n. \quad (1.2)$$

В отличие от трехточечной разностной схемы (§ 5, гл. III), появляющейся при аппроксимации одномерных уравнений диффузии, система уравнений (1.2) уже не может быть решена с помощью простого алгоритма прогонки. Ее решение, как правило, осуществляется с помощью итерационных методов. В свою очередь использование итерационной процедуры приводит к дальнейшему существенному увеличению общего объема вычислений. С еще большими трудностями приходится сталкиваться, когда система уравнений (1.1) аппроксимиро-

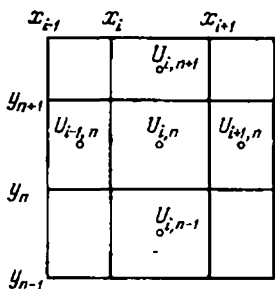


Рис. 32. Схематическое изображение разностной схемы (1.2) на ортогональной сетке

при аппроксимации одномерных уравнений диффузии, система уравнений (1.2) уже не может быть решена с помощью простого алгоритма прогонки. Ее решение, как правило, осуществляется с помощью итерационных методов. В свою очередь использование итерационной процедуры приводит к дальнейшему существенному увеличению общего объема вычислений. С еще большими трудностями приходится сталкиваться, когда система уравнений (1.1) аппроксимиро-

на на неортогональной сетке\*). В этом случае соответствующая система сеточных уравнений примет следующий вид (рис. 33):

$$\begin{aligned}
 & A_{ink}U_{l-1,n-1,k} + B_{ink}U_{l,n-1,k} + L_{ink}U_{l+1,n-1,k} + \\
 & \quad + K_{ink}U_{l-1,nk} - C_{ink}U_{ink} + E_{ink}U_{l+1,nk} + \\
 & + M_{ink}U_{l-1,n+1,k} + V_{ink}U_{l,n+1,k} + P_{ink}U_{l+1,n+1,k} + F_{ink} = 0, \\
 & \quad k=1, \dots, N_k, \quad i=1, \dots, N_l, \quad n=1, \dots, N_n. \quad (1.3)
 \end{aligned}$$

Для решения девяти-точечной системы уравнений (1.3), как правило, необходимо привлекать итерационные методы. Кроме того, построение самой разностной схемы (1.3), с достаточной степенью точности аппроксимирующей исходную систему уравнений (1.1) на неортогональной сетке, — задача далеко не тривиальная.

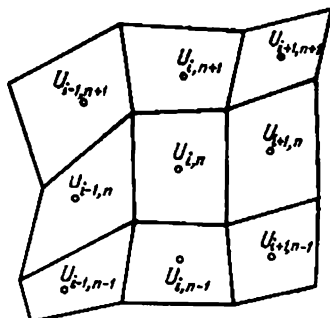


Рис. 33. Схематическое изображение разностной схемы (1.3) на неортогональной сетке

В связи с только что рассмотренными дополнительными трудностями численного решения уравнений диффузии, которые появляются при переходе к двумерным по пространству постановкам, возникает вопрос, не рациональнее ли определять поле излучения непосредственно из многогруппового уравнения переноса:

$$\Omega \text{grad } I_k + \kappa_R I_k = \kappa_R \sigma_R T^4 / \pi? \quad (1.4)$$

Чтобы ответить на этот вопрос, для нахождения интенсивности энергии излучения из каждой пространственной точки проведем определенное количество  $N_p$  лучей до пересечения с границей исследуемой области (рис. 34). Воспользуемся записью уравнения переноса (1.4) в характеристической форме

$$\frac{dI_k}{ds} + \kappa_R I_k = \frac{\kappa_R \sigma_R T^4}{\pi} \quad (1.5)$$

и определим поле излучения с помощью интегрирования уравнения (1.5).

\*) Неортогональные сетки, например, могут возникнуть при лагранжевом описании газодинамического течения.

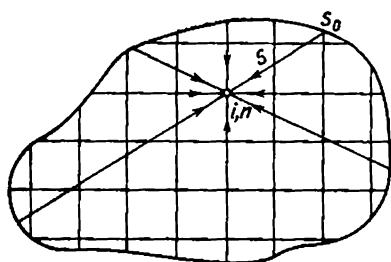


Рис. 34. К решению уравнения переноса методом характеристик

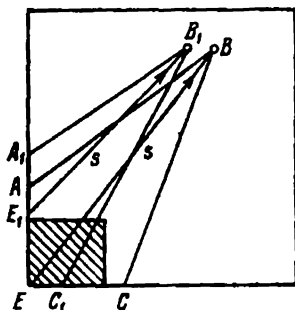


Рис. 35. «Эффект луча»

Предположим, что число лучей  $N_p$ , необходимых для аккуратного определения поля излучения, относительно невелико ( $N_p \sim 10-20$ ). Тогда такой способ нахождения потока  $W$  и плотности энергии излучения  $U$  окажется конкурентоспособным в смысле затрат машинного времени с определением этих величин из системы многогрупповых уравнений диффузии (1.1). Однако на пути реализации данного подхода встречаются очень серьезные трудности.

Одна из таких трудностей связана с негативным «эффектом луча» (ray effect) [31, 150, 219]. С ней часто приходится сталкиваться и при решении задач нейтронной физики. Чтобы проиллюстрировать этот эффект, рассмотрим задачу, в которой зона, генерирующая излучение (зона с повышенной температурой), мала по сравнению с исследуемой областью. На рис. 35 эта зона заштрихована.

Разобьем всю сферу направлений в каждой пространственной точке с помощью сравнительно редкой сетки по углу. Рассмотрим две точки  $B$  и  $B_1$ , достаточно далеко отстоящие от светящейся области. Обозначим схематически через  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  соответствующие элементы углового разбиения в этих пространственных узлах.

Из рис. 35 видно, что характеристика  $BE$ , вдоль которой решается уравнение переноса (1.5), проходит через светящуюся область, и интенсивность излучения в точке  $B$  будет не равна нулю. В результате же численного решения уравнения переноса вдоль характеристики  $B_1E_1$  получим, что интенсивность энергии излучения

в точке  $V_1$  равна нулю. Второй результат не соответствует физической картине явления и качественно неверен.

Полученные таким способом поток и плотность энергии излучения будут испытывать сильные нефизические осцилляции при переходе от одной пространственной точки к другой. Более того, подобного рода осцилляции возникнут и при вычислении  $W$  и  $U$  в каждой пространственной точке на последовательности сгущающихся по углу сеток. И только при дальнейшем существенном сгущении сеток по углу могут быть получены имеющие правильный физический смысл, достаточно точные значения потока и плотности энергии излучения. Для некоторых задач соответствующее число угловых интервалов  $N_p$ , при которых получаются эти аккуратные значения, в зависимости от геометрических размеров может достигать нескольких сотен и даже тысяч.

Следует отметить, что система многогрупповых уравнений диффузии при численном расчете не приводит к негативным явлениям, связанным с «эффектом луча». Таким образом, при решении задач динамики излучающего газа в какой-то мере приходится сталкиваться с парадоксальной ситуацией, когда численный расчет упрощенной модели (в данном случае системы уравнений диффузии) дает результаты более верные, чем расчет непосредственно исходной модели (уравнения переноса).

Серьезные трудности, возникающие при решении двумерных задач РГД и, как следствие, недостаточный опыт их численного моделирования привели к тому, что общий, сравнительно устоявшийся взгляд на алгоритмы их расчета в настоящее время только начинает вырабатываться.

2. Выпишем систему уравнений радиационной газовой динамики, использующую для описания поля излучения многогрупповые уравнения диффузии:

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{\rho}{r^n} \frac{\partial (r^n u)}{\partial r} + \rho \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad (1.6)$$

$$\rho \frac{du}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (1.7)$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (1.8)$$

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{p}{r^n} \frac{\partial(r^n u)}{\partial r} - p \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \lambda r^n \frac{\partial T}{\partial r} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \lambda \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} r^n W_r - \frac{\partial}{\partial z} W_z, \quad (1.9)$$

$$p = p(T, \rho), \quad \varepsilon = \varepsilon(T, \rho), \quad \lambda = \lambda(T, \rho), \quad \kappa_k = \kappa_k(T, \rho), \quad (1.10)$$

$$\frac{1}{r^n} \frac{\partial r^n W_{rk}}{\partial r} + \frac{\partial W_{zk}}{\partial z} + \kappa_k c U_k = 4\sigma_k \kappa_k T^4, \quad (1.11)$$

$$\frac{c}{3} \frac{\partial U_k}{\partial r} + \kappa_k W_{rk} = 0, \quad W_r = \sum_{k=1}^{N_k} W_{rk}, \quad (1.12)$$

$$\frac{c}{3} \frac{\partial U_k}{\partial z} + \kappa_k W_{zk} = 0, \quad W_z = \sum_{k=1}^{N_k} W_{zk}. \quad (1.13)$$

В многогрупповой системе уравнений диффузии (1.6)–(1.13) использованы следующие обозначения:  $n=0$  соответствует случаю двумерной плоской геометрии (рис. 36, а),  $n=1$  соответствует случаю двумерной осесимметричной геометрии (рис. 36, б);  $r$  и  $z$  — декартовы координаты при  $n=0$ ;  $r$  — расстояние от оси симметрии и  $z$  — расстояние вдоль оси симметрии при  $n=1$ ;  $u$  и  $W_{rk}$  — компоненты скорости и группового потока

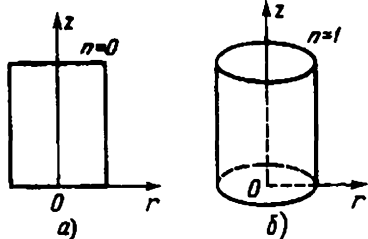


Рис. 36. а) Декартова система координат. б) Осевая симметрия

вдоль направления оси  $z$ ;  $t$  — время,  $\rho$  — плотность,  $T$  — температура,  $p$  — давление,  $\varepsilon$  — внутренняя энергия вещества;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности;  $\kappa_k$  — групповой коэффициент поглощения в диапазоне частот  $\nu \in [\nu_k, \nu_{k+1}]$  ( $k=1, \dots, N_k$ );  $U_k$  — групповая плотность энергии излучения; входящая в правую часть уравнения (1.11) величина  $\sigma_k$  определяется с помощью выражений (5.5)–(5.7) (§ 5, гл. II).

Если для описания поля излучения использовать уравнение переноса, то к уравнениям (1.6)–(1.10), описывающим изменение газодинамических параметров, необходимо добавить уравнения при  $n=0$ :

$$\sqrt{1-\gamma^2} \left( \mu \frac{\partial I_k}{\partial r} + \sqrt{1-\mu^2} \frac{\partial I_k}{\partial z} \right) + \kappa_k I_k = \frac{\kappa_k \sigma_k T^4}{\pi}, \quad (1.14)$$

$$W_{rk} = \int_{-1}^1 \frac{\mu d\mu}{V\sqrt{1-\mu^2}} \int_{-1}^1 V\sqrt{1-\gamma^2} I_k d\gamma, \quad (1.15)$$

$$W_{zk} = \int_{-1}^1 d\mu \int_{-1}^1 V\sqrt{1-\gamma^2} I_k d\gamma,$$

здесь  $\mu$  — косинус угла  $\varphi$  между проекцией направления полета фотона  $\Omega$  на плоскость  $(z, r)$  и осью  $r$  (рис. 37, а),  $\gamma$  — косинус угла  $\psi$  между направлением полета фотона и осью  $y$ .

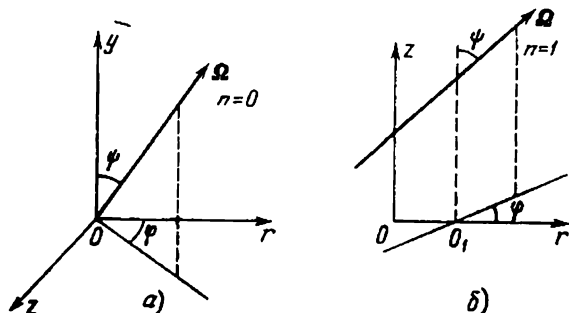


Рис. 37. К определению углов в уравнении переноса

При  $n=1$  двумерное уравнение переноса примет вид

$$V\sqrt{1-\gamma^2} \left( \mu \frac{\partial I_k}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial I_k}{\partial \mu} \right) + \gamma \frac{\partial I_k}{\partial z} + \kappa_k I_k = \frac{\kappa_k \sigma_R T^4}{\pi}, \quad (1.16)$$

$$W_{rk} = \int_{-1}^1 \frac{\mu d\mu}{V\sqrt{1-\mu^2}} \int_{-1}^1 V\sqrt{1-\gamma^2} I_k d\gamma,$$

$$W_{zk} = \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{V\sqrt{1-\mu^2}} \int \gamma I_k d\gamma. \quad (1.17)$$

В уравнении (1.16) использованы следующие обозначения угловых переменных:  $\mu$  — косинус угла  $\varphi$  между проекцией направления полета фотона  $\Omega$  на плоскость, перпендикулярную к оси симметрии, и радиусом-вектором, проведенным через рассматриваемую точку  $O_1$  и точку  $O$  на оси симметрии;  $\gamma$  — косинус угла  $\psi$  между направлением полета фотона и осью симметрии  $z$  (рис. 37, б).

Последующие параграфы этой главы будут посвящены методам численного решения систем двумерных уравнений РГД. В § 2 будут рассмотрены вопросы, связанные с решением двумерных уравнений газовой динамики. В § 3—4 рассматриваются методы аппроксимации уравнений диффузии и итерационные алгоритмы решения соответствующих систем сеточных уравнений. В § 5 рассматриваются некоторые методы решения уравнения переноса излучения. Параграфы 6—7 посвящены обобщению на случай двумерных задач алгоритмов осреднения и методов совместного решения уравнения энергии и уравнений, описывающих перенос излучения.

## **§ 2. Некоторые методы решения двумерных уравнений газовой динамики**

Математическое моделирование на ЭВМ двумерных задач газовой динамики было начато в середине 50-х годов. В настоящее время накоплен значительный опыт расчета различного рода газодинамических течений. Методы расчета этих задач продолжают успешно развиваться.

В задачах радиационной газовой динамики поле излучения тесно связано с газодинамическими полями. Поэтому построение алгоритмов решения задач динамики излучающего газа невозможно без использования надежных методов решения задач газовой динамики. Как правило, при математическом моделировании двумерных задач РГД для расчета уравнений движения и неразрывности (1.6)—(1.8) используются ранее разработанные методы решения задач газовой динамики.

Наиболее распространенными способами описания движения среды являются описания с помощью системы координат Эйлера и системы координат Лагранжа. Каждый из указанных подходов имеет свои преимущества и недостатки. Поэтому выбор конкретного метода, использующего описание Эйлера или Лагранжа, зависит от исследуемого газодинамического течения. Некоторые из этих методов будут рассмотрены в данном параграфе.

**1. Эйлера система координат. Метод «крупных частиц».** При решении задачи газовой динамики в эйлеровой системе координат, как правило, используют четырехугольные ортогональные сетки, на которых ап-

проксимируются соответствующие дифференциальные члены. Полученные таким образом разностные схемы имеют относительно простой вид.

Для решения многих задач газовой динамики используются схемы, предложенные Лаксом и Вендрофом и С. К. Годуновым [67, 68, 151, 154, 181]. В методе Годунова значения газодинамических параметров определяются с помощью решения задачи Римана о распаде разрыва в газе. В качестве значений газодинамических параметров слева и справа от разрыва берутся соответствующие значения этих величин в соседних узлах разностной схемы.

Схема Годунова несколько громоздка, однако любые разрывы трактуются в ней более физично, чем в схемах с искусственной вязкостью. Это определяет достаточно широкое применение алгоритма, в том числе и для решения задач динамики излучающего газа [103, 186].

Метод «крупных частиц», предложенный О. М. Белоцерковским и Ю. М. Давыдовым [37, 38], явился дальнейшим развитием метода «частиц в ячейках» [192]. При расчете по методу «крупных частиц» движение среды разбивается на два этапа — эйлеров и лагранжев. На первом этапе не учитываются конвективные потоки массы, импульса и энергии и решается следующая система уравнений:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho + \omega)}{\partial r} = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial (\rho + \omega)}{\partial z} = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial (\rho + \omega) u}{\partial r} + \frac{\partial (\rho + \omega) v}{\partial z} = 0. \quad (2.4)$$

Здесь  $E = (u^2 + v^2)/2 + \varepsilon$  — полная энергия,  $\omega$  — искусственная вязкость.

Аппроксимируем систему уравнений (2.1) — (2.4) на прямоугольной разностной сетке:

$$\rho_{in}^j \frac{u_{in}^{j+1/2} - u_{in}^j}{\tau^j} + \frac{(\rho + \omega)_{i+1/2,n}^j - (\rho + \omega)_{i-1/2,n}^j}{r_{i+1} - r_i} = 0, \quad (2.5)$$

$$\rho_{in}^j \frac{v_{in}^{j+1/2} - v_{in}^j}{\tau^j} + \frac{(\rho + \omega)_{i,n+1/2}^j - (\rho + \omega)_{i,n-1/2}^j}{z_{n+1} - z_n} = 0, \quad (2.6)$$

$$\rho_{in}^j \frac{E_{in}^{j+1/2} - E_{in}^j}{\tau^j} + \frac{((p + \omega) u)_{i+1/2,n}^j - ((p + \omega) u)_{i-1/2,n}^j}{r_{i+1} - r_i} + \frac{((p + \omega) v)_{i,n+1/2}^j - ((p + \omega) v)_{i,n-1/2}^j}{z_{n+1} - z_n} = 0. \quad (2.7)$$

При этом все искомые газодинамические величины будем относить не к узлам, а к центрам разностных ячеек. Величины с полуцелым пространственным индексом отнесем к серединам сторон ячеек и будем определять следующим образом:

$$\begin{aligned} f_{i+1/2,n} &= 0,5(f_{in} + f_{i+1,n}), \\ f_{i,n+1/2} &= 0,5(f_{in} + f_{i,n+1}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

На этом этапе в силу уравнения (2.1) плотность предполагается постоянной. Искусственная вязкость  $\omega$  определяется с помощью следующих разностных выражений:

$$\begin{aligned} \omega_{i+1/2,n}^j &= -\alpha C_{i+1/2,n}^j \rho_{i+1/2,n}^j (u_{i+1,n}^j - u_{in}^j), \\ \omega_{i,n+1/2}^j &= -\alpha C_{i,n+1/2}^j \rho_{i,n+1/2}^j (v_{i,n+1}^j - v_{in}^j). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь  $\alpha$  — коэффициент, характеризующий толщину размывания ударного фронта,

$$C_{i+1/2,n}^j = \sqrt{\gamma(\gamma - 1) (\varepsilon_{in}^j + \varepsilon_{i+1,n}^j) / 2},$$

$$C_{i,n+1/2}^j = \sqrt{\gamma(\gamma - 1) (\varepsilon_{in}^j + \varepsilon_{i,n+1}^j) / 2},$$

$\varepsilon$  — удельная внутренняя энергия,  $\gamma$  — показатель адиабаты.

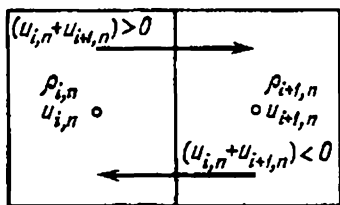


Рис. 38. Определение конвективных потоков в методе «крупных частиц»

В области адиабатичности эта вязкость отключается. На втором, лагранжевом, этапе метода «крупных частиц» определяются количество массы, импульса и энергии, протекающие через стороны ячейки, и находят их окончательные значения.

Так, например, количество массы, протекающее через сторону ячейки ( $r = r_{i+1}$ ,  $z_n \leq z \leq z_{n+1}$ ) (рис. 38), равно

$$\Delta M_{i+1/2,n} = \rho_{in} (u_{i+1,n} + u_{in}) / 2, \quad (2.10)$$

если жидкость течет слева направо, т. е.  $(u_{in} + u_{i+1,n}) \geq 0$ ,

$$\Delta M_{i+1/2,n} = \rho_{i+1,n} (u_{i+1,n} + u_{in}) / 2, \quad (u_{in} + u_{i+1,n}) < 0. \quad (2.11)$$

Аналогично определяются потоки массы через другие стороны ячейки.

После того как найдено  $\Delta M$ , легко найти изменение всех остальных величин, которые определяются аналогично (2.10) — (2.11).

В методе «частиц в ячейках» [192] на первом этапе вместо уравнений (2.1) — (2.4) используются уравнения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (2.12)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (p + \omega)}{\partial r} = 0, \quad (2.13)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial (p + \omega)}{\partial z} = 0, \quad (2.14)$$

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (p + \omega) \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0, \quad (2.15)$$

которые аппроксимируются с помощью разностной схемы

$$M_{in} \frac{u_{in}^{j+1/2} - u_{in}^j}{\tau^j} + (z_{n+1} - z_n) [(p + \omega)_{i+1/2,n}^j - (p + \omega)_{i-1/2,n}^j] = 0, \quad (2.16)$$

$$M_{in} \frac{v_{in}^{j+1/2} - v_{in}^j}{\tau^j} + (r_{i+1} - r_i) [(p + \omega)_{i,n+1/2}^j - (p + \omega)_{i,n-1/2}^j] = 0, \quad (2.17)$$

$$M_{in} \frac{\varepsilon_{in}^{j+1/2} - \varepsilon_{in}^j}{\tau^j} + (p + \omega)_{in}^j [(\tilde{u}_{i+1/2,n} - \tilde{u}_{i-1/2,n}) (z_{n+1} - z_n) + (\tilde{v}_{i,n+1/2} - \tilde{v}_{i,n-1/2}) (r_{i+1} - r_i)] = 0, \quad (2.18)$$

где  $M_{in}$  — масса ячейки,  $\tilde{u}_{i+1/2,n} = (u_{i+1/2,n}^{j+1/2} + u_{i+1/2,n}^j) / 2$ ,  $\tilde{v}_{i,n+1/2} = (v_{i,n+1/2}^{j+1/2} + v_{i,n+1/2}^j) / 2$ . Плотность на этом этапе считается неизменной. Уравнение (2.15) записано в не-дивергентном виде. Однако можно показать, что разностная система уравнений (2.16) — (2.18) обеспечивает сохранение энергии, т. е. является консервативной. На втором этапе для учета перетекания вещества через границы ячеек учитывается передвижение частиц.

Рассмотренные в этом пункте схемы были выписаны на примере декартовой системы координат ( $n=0$ ). Однако они могут быть обобщены и на случай осевой симметрии. Так, для метода «частиц в ячейках» последнее уравнение (2.18) при  $n=1$  примет вид

$$M_{in} \frac{\varepsilon_{in}^{j+1/2} - \varepsilon_{in}^j}{\tau^j} + (p + \omega)_{in}^j \{(\tilde{u}r)_{i+1/2,n} - (\tilde{u}r)_{i-1/2,n}\} (z_{n+1} - z_n) + [\tilde{v}_{i,n+1/2} - \tilde{v}_{i,n-1/2}] r_i (r_{i+1} - r_i) = 0. \quad (2.19)$$

Методы «крупных частиц» и модификация метода «частиц в ячейках» [64] использовались для расчета целого ряда двумерных задач динамики излучающего газа [35, 38, 39, 58].

**2. Лагранжева система координат. Полностью консервативные схемы.** Наряду со схемами в эйлеровой системе координат при расчете двумерных газодинамических течений широко используются схемы в системе координат Лагранжа [70, 169, 181, 193]. Эти схемы оказываются особенно удобными для расчета задач высокотемпературной газовой динамики, так как большие давления и скорости газодинамического разлета, присущие им, приводят к значительным изменениям характерных размеров исследуемой области. Схемы в лагранжевой системе координат автоматически подстраиваются под характер газодинамического течения. Кроме того, в системе координат Лагранжа удобно описывать задачи, в которых имеются две или несколько областей, состоящих из различных веществ.

Следует, однако, отметить, что при численном моделировании двумерных газодинамических течений использование лагранжевой системы координат наряду с преимуществами приводит к возникновению ряда серьезных вычислительных трудностей.

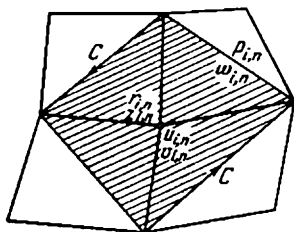


Рис. 39. К аппроксимации уравнения движения на неортогональной сетке

Так, например, использование для расчета четырехугольных сеток может привести к образованию вывернутых ячеек. Кроме того, получение аккуратных разностных схем на неортогональных сетках, кото-

рые возникают при использовании лангражева описания, значительно более сложно, чем на ортогональных сетках.

Существуют два основных подхода к получению разностных схем в лагранжевой системе координат: интегро-интерполяционный и вариационно-разностный. В этом пункте остановимся на одном способе получения разностных схем с помощью интегро-интерполяционного подхода [193].

Запишем уравнения движения в системе координат Лагранжа

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial (p + \omega)}{\partial r}, \quad (2.20)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial (p + \omega)}{\partial z}. \quad (2.21)$$

Здесь  $\omega$  — искусственная вязкость.

Аппроксимация производных по времени, стоящих в левых частях уравнений (2.20) — (2.21), не вызывает трудностей и может быть записана в виде  $(u'_{in} - u^{j-1}_{in})/\tau^{j-1}$ . Для определения пространственных производных на неортогональных сетках воспользуемся следующим приемом. Рассмотрим четырехугольную неортогональную сетку (рис. 39). Значения скоростей  $u$  и  $v$  будем вычислять в узлах сетки, а давление  $p$ , искусственную вязкость  $\omega$ , плотность  $\rho$  определим в некоторой внутренней точке (например, лежащей на пересечении диагоналей) четырехугольной ячейки. Проинтегрируем уравнение (2.20) по заштрихованной области  $S$ , получим

$$\iint_S \rho \frac{\partial u}{\partial t} dS = - \iint_S \frac{\partial (p + \omega)}{\partial r} dS. \quad (2.22)$$

По формуле Грина будем иметь

$$\iint_S \frac{\partial (p + \omega)}{\partial r} dS = \oint_C (p + \omega) dz, \quad (2.23)$$

где  $C$  — контур, ограничивающий заштрихованную область  $S$ . Из выражений (2.22) и (2.23) следует, что

$$\iint_S \rho \frac{\partial u}{\partial t} dS = - \oint_C (p + \omega) dS. \quad (2.24)$$

Аналогично для второй компоненты скорости  $v$  получим

$$\iint_S \rho \frac{\partial v}{\partial t} dS = \oint_C (p + \omega) dz. \quad (2.25)$$

Интегралы, стоящие в левых частях уравнений (2.24) и (2.25), заменим с помощью разностных выражений на  $M_{in}^*(u'_{in} - u'_{in-1})/\tau^{j-1}$ ,  $M_{in}^*(v'_{in} - v'_{in-1})/\tau^{j-1}$ , где  $M_{in}^* = \iint_S \rho dS$  — масса заштрихованной ячейки.

Используя разностную аппроксимацию контурных интегралов, окончательно заменим выражения (2.24) и (2.25) на систему сеточных уравнений для определения поля скоростей:

$$u'_{in} = u'_{in-1} - \frac{\tau^{j-1}}{M_{in}^*} [(p + \omega)_{i-1,n}^{j-1} (z_{i-1,n}^{j-1} - z_{i,n+1}^{j-1}) + (p + \omega)_{i-1,n-1}^{j-1} (z_{i,n-1}^{j-1} - z_{i,n}^{j-1}) + (p + \omega)_{i,n-1}^{j-1} \times (z_{i+1,n}^{j-1} - z_{i,n-1}^{j-1}) + (p + \omega)_{in}^{j-1} (z_{i,n+1}^{j-1} - z_{i+1,n}^{j-1})], \quad (2.26)$$

$$v'_{in} = v'_{in-1} - \frac{\tau^{j-1}}{M_{in}^*} [(p + \omega)_{i-1,n}^{j-1} (r_{i,n+1}^{j-1} - r_{i-1,n}^{j-1}) + (p + \omega)_{i-1,n-1}^{j-1} (r_{i-1,n}^{j-1} - r_{i,n-1}^{j-1}) + (p + \omega)_{i,n-1}^{j-1} \times (r_{i,n-1}^{j-1} - r_{i+1,n}^{j-1}) + (p + \omega)_{in}^{j-1} (r_{i+1,n}^{j-1} - r_{i,n+1}^{j-1})]. \quad (2.27)$$

После нахождения скоростей определим новые координаты узлов

$$r'_{in} = r'_{in-1} + \tau^{j-1} u'_{in}, \quad (2.28)$$

$$z'_{in} = z'_{in-1} + \tau^{j-1} v'_{in}$$

и плотность ячейки

$$\rho'_{in} = M_{in}/V'_{in}, \quad (2.29)$$

где  $M_{in}$  — фиксированная масса четырехугольной ячейки (рис. 40),  $V_{in}$  — ее площадь, которая определяется с помощью выражения  $V'_{in} = S'_{1in} + S'_{2in}$ ,  $S_1$  и  $S_2$  — площади треугольных ячеек.

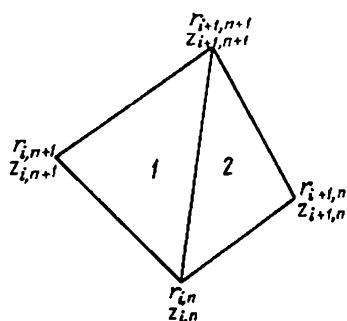


Рис. 40. К определению плотности и объема четырехугольной ячейки

Зная координаты узлов, площадь треугольных ячеек можно определить точно. Например, площадь ячейки 2 равна

$$S_{2in}^j = 0,5 | r_{in}^j z_{i+1,n}^j + r_{i+1,n}^j z_{i+1,n+1}^j + r_{i+1,n+1}^j z_{in}^j - r_{i+1,n+1}^j z_{i+1,n}^j - r_{i+1,n}^j z_{in}^j - r_{in}^j z_{i+1,n+1}^j |^* \quad (2.30)$$

Разностные выражения, аппроксимирующие уравнения газовой динамики, с помощью интегро-интерполяционного подхода могут быть получены и для случая осевой симметрии [181]

$$M_{in}^* \frac{u_{in}^j - u_{in}^{j-1}}{\tau^{j-1}} = (p + \omega)_{in}^{(\lambda_1)} \left[ \frac{r_{in}}{2} (z_{i+1,n} - z_{i,n+1}) \right]^{(\lambda_2)} + \\ + (p + \omega)_{i-1,n}^{(\lambda_1)} \left[ \frac{r_{in}}{2} (z_{i,n+1} - z_{i-1,n}) \right]^{(\lambda_2)} + \\ + (p + \omega)_{i-1,n-1}^{(\lambda_1)} \left[ \frac{r_{in}}{2} (z_{i-1,n} - z_{i,n-1}) \right]^{(\lambda_2)} + \\ + (p + \omega)_{i,n-1}^{(\lambda_1)} \left[ \frac{r_{in}}{2} (z_{i,n-1} - z_{i+1,n}) \right]^{(\lambda_2)}, \quad (2.31)$$

$$M_{in}^* \frac{v_{in}^j - v_{in}^{j-1}}{\tau^{j-1}} = - (p + \omega)_{in}^{(\lambda_1)} \left[ \frac{r_{in}}{2} (r_{i+1,n} - r_{i,n+1}) \right]^{(\lambda_2)} - \\ - (p + \omega)_{i-1,n}^{(\lambda_1)} \left[ \frac{r_{in}}{2} (r_{i,n+1} - r_{i-1,n}) \right]^{(\lambda_2)} - \\ - (p + \omega)_{i-1,n-1}^{(\lambda_1)} \left[ \frac{r_{in}}{2} (r_{i-1,n} - r_{i,n-1}) \right]^{(\lambda_2)} - \\ - (p + \omega)_{i,n-1}^{(\lambda_1)} \left[ \frac{r_{in}}{2} (r_{i,n-1} - r_{i+1,n}) \right]^{(\lambda_2)}, \quad (2.32)$$

$$M_{in} \frac{e_{in}^j - e_{in}^{j-1}}{\tau^{j-1}} = - \left\{ u_{in}^{(0,5)} \left[ \frac{r_{in}}{2} (z_{i+1,n} - z_{i,n+1}) \right]^{(\lambda_2)} + \right. \\ + u_{i+1,n}^{(0,5)} \left[ \frac{r_{i+1,n}}{2} (z_{i+1,n+1} - z_{in}) \right]^{(\lambda_2)} + \\ \left. + u_{i+1,n+1}^{(0,5)} \left[ \frac{r_{i+1,n+1}}{2} (z_{i,n+1} - z_{i+1,n}) \right]^{(\lambda_2)} + \right.$$

\* ) В случае осевой симметрии объем треугольных ячеек вращения можно определить с помощью выражений

$$V_{in}^j = \frac{2\pi}{3} (r_{in}^j + r_{i,n+1}^j + r_{i+1,n+1}^j) S_{1in}^j$$

$$V_{2in}^j = \frac{2\pi}{3} (r_{in}^j + r_{i+1,n}^j + r_{i+1,n+1}^j) S_{2in}^j$$

$$\begin{aligned}
& + u_{i,n+1}^{(0,5)} \left[ \frac{r_{i,n+1}}{2} (z_{in} - z_{i+1,n+1}) \right]^{(\lambda_2)} - \\
& - v_{in}^{(0,5)} \left[ \frac{r_{in}}{2} (r_{i+1,n} - r_{i,n+1}) \right]^{(\lambda_2)} - \\
& - v_{i+1,n}^{(0,5)} \left[ \frac{r_{i+1,n}}{2} (r_{i+1,n+1} - r_{in}) \right]^{(\lambda_2)} - \\
& - v_{i+1,n+1}^{(0,5)} \left[ \frac{r_{i+1,n+1}}{2} (r_{i,n+1} - r_{i+1,n}) \right]^{(\lambda_2)} - \\
& - v_{i,n+1}^{(0,5)} \left[ \frac{r_{i,n+1}}{2} (r_{in} - r_{i+1,n+1}) \right]^{(\lambda_2)} \}. \quad (2.33)
\end{aligned}$$

Через величину  $f^{(\lambda)}$ , как обычно, обозначается  $f^{(\lambda)} = (1 - \lambda) f^{j-1} + \lambda f^j$ . Неизменная лагранжева масса  $M_{in}^*$  определяется по следующему правилу. На каждой из сторон ячеек начальной сетки (рис. 41) зафиксируем точку, радиус которой равен среднему геометрическому радиусу концов данной стороны

$$r_{i+1/2,n} = \sqrt{r_{in} r_{i+1,n}}. \quad (2.34)$$

На рис. 41 эти точки обозначены крестиками. Соединим точки, лежащие на противоположных сторонах ячейки, прямыми линиями. Массу  $M_{in}^*$  определим как массу образовавшейся при таком построении восьмиугольной ячейки (на рис. 41 она заштрихована).

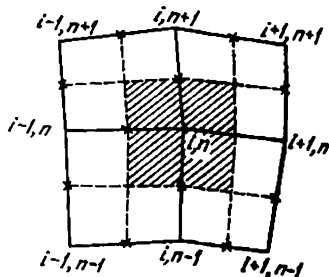


Рис. 41. Определение массы восьмиугольной ячейки  $M_{in}^*$

Разностная схема (2.31) — (2.33) сохраняет сферическую и цилиндрическую симметрии соответствующих одномерных течений. Другим достоинством схемы является то, что она обладает свойством полной консервативности, т. е. в ней соблюдается баланс по отдельным видам энергии. Обширная вычислительная практика применения этих схем показала, что они являются наиболее предпочтительными для расчета газодинамических течений [169].

**3. Вариационно-разностные схемы в лагранжевой системе координат.** Использование вариационного принципа для построения разностных схем, позволяющих рассчитывать двумерные газодинамические течения, бы-

до предложено в работе В. М. Головизнина, А. А. Самарского и А. П. Фаворского [70].

Введем функцию Лагранжа, представляющую собой разность кинетической и потенциальной энергий системы

$$L = K - \Pi, \quad (2.35)$$

и функционал действия

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L \, dt. \quad (2.36)$$

Сопоставим лагранжиану (2.35) его разностную аппроксимацию

$$L_h = \sum_{i,n} M_{in} [0,25 (u_{in}^2 + u_{i+1,n}^2 + u_{i,n+1}^2 + u_{i+1,n+1}^2 + v_{in}^2 + v_{i+1,n}^2 + v_{i,n+1}^2 + v_{i+1,n+1}^2) - \varepsilon_{in}], \quad (2.37)$$

при этом роль потенциальной энергии играет внутренняя энергия газа. Введя обозначение

$$\tilde{M}_{in} = 0,25 (M_{in} + M_{l-1,n} + M_{l,n-1} + M_{l-1,n-1}), \quad (2.38)$$

разностный лагранжиан (2.37) перепишем в виде

$$L_h = \sum_{i,n} \tilde{M}_{in} (u_{in}^2 + v_{in}^2) 0,5 - \sum_{i,n} M_{in} \varepsilon_{in}. \quad (2.39)$$

Функционал действия, подлежащий варьированию, выписывается в виде

$$S_h = \int_{t_1}^{t_2} L_h dt. \quad (2.40)$$

Выпишем уравнения Эйлера—Лагранжа для функционала (2.40)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_h}{\partial u_{in}} \right) - \frac{\partial L_h}{\partial r_{in}} = 0, \quad (2.41)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_h}{\partial v_{in}} \right) - \frac{\partial L_h}{\partial z_{in}} = 0. \quad (2.42)$$

Используем в качестве дополнительных связей уравнение неразрывности

$$\rho_{in} = M_{in} / V_{in} \quad (2.43)$$

и условие адиабатичности

$$\frac{\partial \varepsilon_{in}}{\partial \eta_{in}} = -p_{in}, \quad (2.44)$$

где  $\eta = 1/\rho$  — удельный объем.

Учитывая (2.43), (2.44) и кинетические соотношения

$$\frac{dr_{in}}{dt} = u_{in}, \quad \frac{dz_{in}}{dt} = v_{in}, \quad (2.45)$$

приведем уравнения (2.41) и (2.42) к виду

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{in} \frac{du_{in}}{dt} = & p_{i-1, n} \frac{\partial V_{i-1, n}}{\partial r_{in}} + p_{i-1, n-1} \frac{\partial V_{i-1, n-1}}{\partial r_{in}} + \\ & + p_{i, n-1} \frac{\partial V_{i, n-1}}{\partial r_{in}} + p_{in} \frac{\partial V_{in}}{\partial r_{in}}, \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{in} \frac{dv_{in}}{dt} = & p_{i-1, n} \frac{\partial V_{i-1, n}}{\partial z_{in}} + p_{i-1, n-1} \frac{\partial V_{i-1, n-1}}{\partial z_{in}} + \\ & + p_{i, n-1} \frac{\partial V_{i, n-1}}{\partial z_{in}} + p_{in} \frac{\partial V_{in}}{\partial z_{in}}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Здесь  $\partial V/\partial r$  и  $\partial V/\partial z$  — производные объемов ячеек по соответствующим координатам.

После замены в уравнениях (2.46) — (2.47) производных на соответствующие разностные выражения получим окончательную аппроксимацию уравнений движения:

$$\tilde{M}_{in} \frac{u_{in}^j - u_{in}^{j-1}}{\tau^{j-1}} = \sum_{k, l=0, 1} p_{i-k, n-l}^{(\lambda_1)} \left( \frac{\partial V_{i-k, n-l}}{\partial r_{in}} \right)^{(\lambda_2)}, \quad (2.48)$$

$$\tilde{M}_{in} \frac{v_{in}^j - v_{in}^{j-1}}{\tau^{j-1}} = \sum_{k, l=0, 1} p_{i-k, n-l}^{(\lambda_1)} \left( \frac{\partial V_{i-k, n-l}}{\partial z_{in}} \right)^{(\lambda_2)}. \quad (2.49)$$

Дополним уравнения (2.48) — (2.49) разностной аппроксимацией уравнения энергии, кинетических соотношений и уравнения неразрывности:

$$\begin{aligned} M_{in} \frac{\varepsilon_{in}^j - \varepsilon_{in}^{j-1}}{\tau^{j-1}} = & -p_{in}^{(\lambda_1)} \sum_{k, l=0, 1} \left\{ u_{i+k, n+l}^{(0, 5)} \left( \frac{\partial V_{in}}{\partial r_{i+k, n+l}} \right)^{(\lambda_2)} + \right. \\ & \left. + v_{i+k, n+l}^{(0, 5)} \left( \frac{\partial V_{in}}{\partial z_{i+k, n+l}} \right)^{(\lambda_2)} \right\}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$(r_{in}^j - r_{in}^{j-1})/\tau^{j-1} = u_{in}^{(\lambda_1)}, \quad (2.51)$$

$$(z_{in}^j - z_{in}^{j-1})/\tau^{j-1} = v_{in}^{(\lambda_1)}, \quad (2.52)$$

$$\rho_{in}^j = M_{in} [V_{in}(r_{in}^j, r_{i+1, n}^j, r_{i+1, n+1}^j, r_{i, n+1}^j, z_{in}^j, z_{i+1, n}^j, z_{i+1, n+1}^j, z_{i, n+1}^j)]^{-1}. \quad (2.53)$$

Весовые множители  $\lambda$  могут быть подобраны так ( $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0,5$ ), что разностная схема (2.48) — (2.53), в которой обеспечен правильный баланс отдельных видов энергии, станет полностью консервативной. Другим достоинством вариационного способа является то, что с его помощью на основе единого подхода можно получать разностные схемы в любых системах координат.

Рассмотренные в пп. 2 и 3 параграфа схемы в лагранжевой системе координат использовались для расчета двумерных задач РГД и других задач высокотемпературной газовой динамики [21, 59, 63, 128, 204].

В заключение параграфа отметим, что изложение здесь носило в основном справочный характер и имело целью познакомить читателей с некоторыми направлениями развития численных методов решения многомерных задач газовой динамики. Эти методы можно применять в качестве составной части комплексного алгоритма расчета двумерных задач динамики излучающего газа.

### § 3. Разностная аппроксимация уравнений диффузии

Как уже отмечалось, многогрупповое диффузионное приближение является одной из основных моделей, применяемых при численном решении двумерных задач динамики излучающего газа. В этом параграфе речь будет идти о разностной аппроксимации уравнений диффузии. Так как структура диффузионных уравнений не зависит от энергии фотонов, то все рассмотрение будет проведено на примере одногрупповой системы:

$$\frac{1}{r^p} \frac{\partial r^p W_r}{\partial r} + \frac{\partial W_z}{\partial z} + \kappa c U = 4\kappa \sigma T^4, \quad (3.1)$$

$$\frac{c}{3} \frac{\partial U}{\partial r} + \kappa W_r = 0, \quad \frac{c}{3} \frac{\partial U}{\partial z} + \kappa W_z = 0, \quad p = 0, 1. \quad (3.2)$$

Система уравнений (3.1) — (3.2) может быть сведена к одному уравнению второго порядка относительно плотности энергии излучения  $U$ :

$$-\frac{1}{r^p} \frac{\partial}{\partial r} r^p c l \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial z} c l \frac{\partial U}{\partial z} + \kappa c U = 4\kappa \sigma T^4, \quad l = \frac{1}{\kappa}. \quad (3.3)$$

В качестве граничного условия для уравнения (3.3) можно

$$\begin{aligned} \partial U / \partial r = 0 \text{ на оси симметрии,} \\ \frac{2}{3} c l \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = -U, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где  $n$  — вектор внешней нормали к границе  $\Gamma$ .

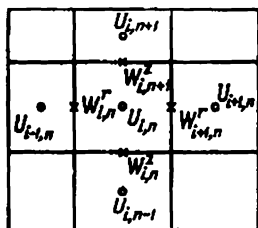


Рис. 42. Построение разностной аппроксимации уравнений диффузии на прямоугольных сетках

Второе условие (3.4) является следствием условия (2.14) (гл. II).

**1. Аппроксимация на прямоугольных сетках.** Будем вычислять значения плотности энергии излучения  $U_{in}(r_{i+1/2}, z_{n+1/2})$  во внутренних точках разностных ячеек, а значения потоков  $W_{rin}(r_i, z_{n+1/2})$  и  $W_{zin}(r_{i+1/2}, z_n)$ ,  $r_{i+1/2} = 0,5(r_i + r_{i+1})$ ,  $z_{n+1/2} = 0,5(z_n + z_{n+1})$ , — в серединах сторон (рис. 42).

Аналогично одномерному случаю проинтегрируем каждое из уравнений (3.2) и (3.3) на отрезках  $[r_{i-1/2}, r_{i+1/2}]$  и  $[z_{n-1/2}, z_{n+1/2}]$  соответственно. При этом получим

$$U_{in} - U_{i-1,n} = -\frac{1}{c} \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} 3\kappa W_r dr, \quad (3.5)$$

$$U_{in} - U_{i,n-1} = -\frac{1}{c} \int_{z_{n-1/2}}^{z_{n+1/2}} 3\kappa W_z dz. \quad (3.6)$$

Учитывая непрерывность потоков, перепишем выражения (3.5) и (3.6) в виде

$$W_{rin} = -(U_{in} - U_{i-1,n}) \left/ \left[ \frac{3}{c} \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} \kappa dr \right] \right., \quad (3.7)$$

$$W_{zin} = -(U_{in} - U_{i,n-1}) \left/ \left[ \frac{3}{c} \int_{z_{n-1/2}}^{z_{n+1/2}} \kappa dz \right] \right.. \quad (3.8)$$

Умножим уравнение (3.1) на  $r^p$  и проинтегрируем его по

ячейке  $r_l \leq r \leq r_{l+1}$ ,  $z_n \leq z \leq z_{n+1}$ , получим

$$\int_{z_n}^{z_{n+1}} (r_{l+1}^p W_{r,l+1} - r_l^p W_{r_l}) dz + \int_{r_l}^{r_{l+1}} r^p (W_{z,n+1} - W_{z_n}) dr + \\ + \int_{r_l}^{r_{l+1}} r^p dr \int_{z_n}^{z_{n+1}} (\kappa c U - 4\kappa\sigma T^4) dz = 0, \quad (3.9)$$

где  $W_{r_l}$  и  $W_{z_n}$  — текущие значения потока на стороне ячейки.

Заменяя входящие в подынтегральные уравнения потоки  $W$  и плотность энергии излучения  $U$  на их средние значения, получим

$$(r_{l+1}^p W_{r,l+1,n} - r_l^p W_{r_l n}) (z_{n+1} - z_n) + (W_{z_l,n+1} - W_{z_l n}) \times \\ \times (r_{l+1}^{p+1} - r_l^{p+1}) / (p+1) + \\ + c U_{ln} \int_{r_l}^{r_{l+1}} r^p dr \int_{z_n}^{z_{n+1}} \kappa dz = \int_{r_l}^{r_{l+1}} r^p dr \int_{z_n}^{z_{n+1}} 4\kappa\sigma T^4 dz. \quad (3.10)$$

Подставляя в выражение (3.10) значения потоков (3.7) и (3.8), получим окончательную пятиточечную разностную схему

$$B_{in} U_{l,n-1} + K_{in} U_{l-1,n} - C_{in} U_{ln} + E_{in} U_{l+1,n} + \\ + V_{in} U_{l,n+1} + F_{in} = 0, \quad (3.11)$$

коэффициенты которой равны

$$B_{in} = \frac{r_{l+1}^{p+1} - r_l^{p+1}}{(p+1) 3 \int_{z_{n-1/2}}^{z_{n+1/2}} \kappa dz}, \quad V_{in} = \frac{r_{l+1}^{p+1} - r_l^{p+1}}{(p+1) 3 \int_{z_{n+1/2}}^{z_{n+3/2}} \kappa dz}, \\ K_{in} = \frac{r_l^p (z_{n+1} - z_n)}{3 \int_{r_{l-1/2}}^{r_{l+1/2}} \kappa dr}, \quad E_{in} = \frac{r_{l+1}^p (z_{n+1} - z_n)}{3 \int_{r_{l+1/2}}^{r_{l+3/2}} \kappa dr}, \quad (3.12)$$

$$C_{in} = B_{in} + V_{in} + K_{in} + E_{in} + \int_{r_l}^{r_{l+1}} r^p dr \int_{z_n}^{z_{n+1}} \kappa dz,$$

$$F_{in} = \frac{1}{c} \int_{r_l}^{r_{l+1}} r^p dr \int_{z_n}^{z_{n+1}} 4\kappa\sigma T^4 dz.$$

Полученная таким образом разностная схема (3.11) имеет второй порядок точности в классе гладких коэффициентов  $\kappa$  и правых частей  $4\kappa\sigma T^4$ , самосопряжена и монотонна [162].

В двумерном случае аналогично выражению (5.30) (гл. III) можно выписать разностную схему для потока, хорошо описывающую теплообмен между оптически толстыми горячими областями и оптически прозрачными холодными.

Аналогично одномерному случаю перепишем разностные выражения для потоков (3.7) и (3.8) в виде

$$W_{rin} = \frac{c}{4} \frac{U_{i-1,n} - U_{in}}{\text{th}[3\kappa_{in}(r_{i+1/2} - r_i)/4] + \text{th}[3\kappa_{i-1,n}(r_i - r_{i-1/2})/4]}, \quad (3.13)$$

$$W_{zin} = \frac{c}{4} \frac{U_{i,n-1} - U_{in}}{\text{th}[3\kappa_{in}(z_{n+1/2} - z_n)/4] + \text{th}[3\kappa_{i,n-1}(z_n - z_{n-1/2})/4]}. \quad (3.14)$$

Интегрируя уравнение (3.1) по ячейке, так же, как это делалось при получении выражения (3.9), и заменяя потоки с помощью (3.13) и (3.14), вновь приходим к пятиточечной разностной схеме, аппроксимирующей уравнения диффузии:

$$B_{in}U_{i,n-1} + K_{in}U_{i-1,n} - C_{in}U_{in} + E_{in}U_{i+1,n} + V_{in}U_{i,n+1} + F_{in} = 0. \quad (3.15)$$

Коэффициенты этой разностной схемы равны

$$B_{in} = (r_{i+1}^{p+1} - r_i^{p+1}) \{4(p+1) [\text{th}(\kappa_{in}(z_{n+1/2} - z_n) 3/4) + \text{th}(\kappa_{i,n-1}(z_n - z_{n-1/2}) 3/4)]\}^{-1},$$

$$V_{in} = (r_{i+1}^{p+1} - r_i^{p+1}) \{4(p+1) \times \\ \times [\text{th}(\kappa_{in}(z_{n+1} - z_{n+1/2}) 3/4) + \text{th}(\kappa_{i,n+1}(z_{n+3/2} - z_{n+1}) 3/4)]\}^{-1},$$

$$K_{in} = r_i^p (z_{n+1} - z_n) \{4 [\text{th}(\kappa_{in}(r_{i+1/2} - r_i) 3/4) + \text{th}(\kappa_{i-1,n}(r_i - r_{i-1/2}) 3/4)]\}^{-1}, \quad (3.16)$$

$$E_{in} = r_{i+1}^p (z_{n+1} - z_n) \{4 [\text{th}(\kappa_{in}(r_{i+1} - r_{i+1/2}) 3/4) + \text{th}(\kappa_{i+1,n}(r_{i+3/2} - r_{i+1}) 3/4)]\}^{-1},$$

$$C_{in} = B_{in} + V_{in} + K_{in} + E_{in} + \int_{r_i}^{r_{i+1}} r^p dr \int_{z_n}^{z_{n+1}} \kappa dz,$$

$$F_{in} = \frac{1}{c} \int_{r_i}^{r_{i+1}} r^p dr \int_{z_n}^{z_{n+1}} 4\kappa \sigma T^4 dz.$$

Разностная схема (3.15) с коэффициентами (3.16) использовалась для расчета поля излучения при численном моделировании разлета осесимметричного плазменного факела [56].

2. **Аппроксимация уравнений диффузии на неортогональных сетках. Определение потока энергии излучения.** Использование для описания газодинамического движения координат Лагранжа приводит к появлению не ортогональных сеток. Аппроксимация члена  $\text{div} \left( \frac{1}{3} \text{grad } U \right)$  в уравнении (3.4) на таких сетках в достаточной мере сложна. Отметим, что вопросы, связанные с пространственной аппроксимацией членов вида  $\text{div} (\lambda \text{grad } \Phi)$  на неортогональных сетках, важны не только для задач динамики излучающего газа, но и для задач газовой динамики с теплопроводностью, в которых приходится рассматривать уравнение

$$\rho \frac{de}{dt} = \text{div} (\lambda(T, \rho) \text{grad } T) - p \text{div } u. \quad (3.17)$$

Важным требованием, накладываемым на такую аппроксимацию, является не только удовлетворительная точность схемы в той или иной интегральной норме, но и получение с ее помощью разумных результатов в «критических» точках. Одной из таких экстремальных ситуаций, встречающихся при расчете задач РГД, является случай, когда происходит сильное изменение коэффициента поглощения при одновременном значительном искривлении разностной сетки.

С такой ситуацией часто приходится сталкиваться на фронтах ударных волн, когда резко меняется температура газа. При этом коэффициент поглощения испытывает еще большие изменения. Например, для воздуха нормальной плотности коэффициент поглощения, осредненный по Планку, уменьшается в четыреста раз при изменении температуры всего лишь от 12 000 К до 7000 К.

В настоящее время сформировалось два основных подхода к аппроксимации эллиптических уравнений на неортогональных сетках: интегро-интерполяционный и вариационно-разностный. Примеры применения этих подходов рассмотрены в работах [116, 146, 166, 170].

Вариационный подход обладает целым рядом достоинств. Так, полученные с его помощью разностные схемы автоматически являются самосопряженными и положительно-определенными. Вместе с тем он обладает меньшей наглядностью, чем интегро-интерполяционный подход. Рассмотренный здесь способ построения разностной схемы использует интегро-интерполяционный подход, наглядность которого позволяет учесть некоторые из особенностей задач РГД.

Рассмотрим наряду с исходной неортогональной сеткой (рис. 43, а) сетку ортогональную (рис. 43, б). Предположим, что существует взаимно однозначное непрерывно-дифференцируемое отображение, переводящее

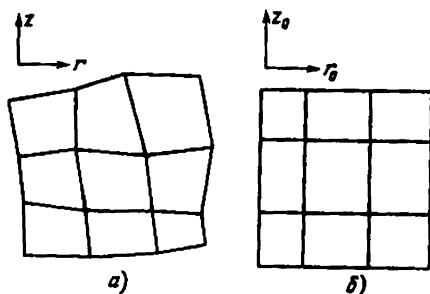


Рис. 43

ортогональную сетку в неортогональную так, что при этом середины ортогональной сетки переходят в середины ребер сетки неортогональной. Кроме того, предположим, что якобиан  $\mathcal{J}$  этого преобразования всюду больше нуля.

Воспользуемся формулами замены переменного

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \left[ \frac{\partial z}{\partial z_0} \frac{\partial U}{\partial r_0} - \frac{\partial z}{\partial r_0} \frac{\partial U}{\partial z_0} \right] \mathcal{J}^{-1}, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \left[ -\frac{\partial r}{\partial z_0} \frac{\partial U}{\partial r_0} + \frac{\partial r}{\partial r_0} \frac{\partial U}{\partial z_0} \right] \mathcal{J}^{-1}.$$

Здесь  $r, z$  — координаты неортогональной,  $r_0, z_0$  — координаты ортогональной сеток. Предположим непрерыв-

ность коэффициента поглощения  $\kappa$ . Умножая левые и правые части равенства (3.18) на  $1/\kappa$ , получим связь между потоком на ортогональной и неортогональной сетках [204]:

$$W_r = \left[ \frac{\partial z}{\partial z_0} W_{r_0} - \frac{\partial z}{\partial r_0} W_{z_0} \right] \mathcal{J}^{-1}, \quad (3.19)$$

$$W_y = \left[ -\frac{\partial r}{\partial z_0} W_{r_0} + \frac{\partial r}{\partial r_0} W_{z_0} \right] \mathcal{J}^{-1}.$$

Для определения потоков на неортогональной сетке воспользуемся формулой Грина. При этом, учитывая уравнение (3.2), получим

$$\iint_S \kappa W_{r_0} dS = -\frac{1}{3} \oint_C U dz. \quad (3.20)$$

Здесь  $C$  — контур, ограничивающий область  $S$ , заштрихованную двойной штриховкой (рис. 44).

Из уравнения (3.20) следует, что для определения потока  $W_{r_0}$  в точке  $a$  можно воспользоваться приближенным выражением

$$W_{r_0}(a) = -\frac{1}{3} \oint_C U dz / \iint_S \kappa dS. \quad (3.21)$$

Рис. 44. К определению потоков на ортогональной сетке

В свою очередь поток  $W_{z_0}$  в точке  $a$  определим из выражений

$$\iint_{S_1} \kappa W_{z_0} dS = \frac{c}{3} \oint_{C_1} U dr, \quad (3.22)$$

$$W_{z_0}(a) = \frac{c}{3} \oint_{C_1} U dr / \iint_{S_1} \kappa dS.$$

Здесь  $C_1$  — контур, ограничивающий область  $S_1$ , заштрихованную одинарной штриховкой (рис. 44).

В случае разрыва коэффициента  $\kappa$  вдоль ребра, проходящего через точку  $a$ , поток  $W_{z_0}$  в отличие от потока  $W_{r_0}$  уже не является непрерывным и понимается в смысле второго равенства (3.22).

Чем же вызвано появление разных контуров  $C$  и  $C_1$  для определения потоков  $W_{r_0}$  и  $W_{z_0}$  в точке  $a$ ? Предположим, что для определения  $W_{z_0}$  выбран тот же контур  $C$ , что и для определения  $W_{r_0}$ . Тогда в интеграл  $\oint U dr$ , участвующий в определении потока  $W_{z_0}$ , войдут

только участки контура, параллельные оси  $r$ . Для нахождения интегралов по этим участкам необходимо знать значения функции  $U$  в точках пересечения контура с ребрами ячеек. Эти значения  $U$  можно получить лишь с помощью интерполяции по значениям плотности энергии излучения в центрах ячеек, в которых они определены. В случае равномерного шага и непрерывного  $\kappa$  получим с точностью до  $O(\Delta z^2)$ :

$$U_{i, n+1/2} = 0,5(U_{i, n+1} + U_{in}). \quad (3.23)$$

Однако в случае разрывных коэффициентов исходного уравнения (3.4) производные  $U$  также претерпевают разрыв, и точность интерполяции (3.23) оказывается недостаточной. Особенно плохо такая интерполяция работает, когда разрыв коэффициента поглощения происходит на границе холодной оптически непрозрачной ячейки и горячей ячейки сравнительно небольшой оптической толщины. С подобного рода ситуациями приходится сталкиваться в задачах РГД, например в тех случаях, когда ультрафиолетовое излучение, выходящее из горячей зоны, прогревает окружающие ее холодные слои [15, 87, 128]. При этом типичный профиль  $U$  схематически может быть представлен на рис. 45. Быстрое изменение плотности энергии излучения происходит в узком слое вблизи границы ячеек. Если в данном случае определять  $U_{i, n+1/2}$  с помощью выражения (3.23), то погрешность такой аппроксимации будет  $O(U_{i, n+1})$ .

При использовании контура  $C_1$  нет необходимости в интерполяциях для определения плотности энергии излучения в угловых точках. Эти величины равны значениям сеточной функции  $U$ :  $U_{i, n+1}$ ,  $U_{i-1, n+1}$ ,  $U_{i, n-1}$ ,  $U_{i-1, n-1}$ . Подобный подход к вычислению интегралов позволяет в значительной мере преодолеть рассмотренные трудности.

С помощью выражений, аналогичных (3.21) — (3.22), можно вычислять потоки на ортогональных сетках и для ребер, параллельных оси  $r$ . При этом также используется система двух контуров для определения потоков  $W_{z_0}(b)$ ,  $W_{r_0}(b)$ .

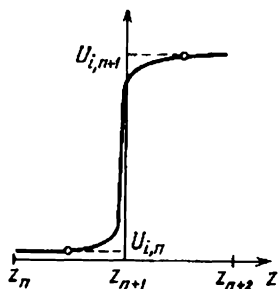


Рис. 45. Типичный профиль плотности энергии излучения при прогреве оптически толстых холодных слоев

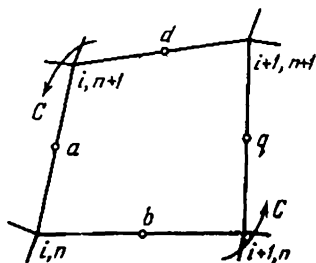


Рис. 46. Определение  $\text{div} \mathbf{W}$  на неортогональной сетке

3. Построение разностной схемы на неортогональной сетке. Чтобы окончательно выписать разностную схему для уравнения (3.4), рассмотрим ячейку неортогональной сетки (рис. 46). Определим  $\text{div} \mathbf{W}$ , а следовательно и  $\text{div} \left( \frac{l}{3} \text{grad} U \right)$ , с помощью выражения

$$\iint_S \text{div} \mathbf{W} dS = \oint_C (W_r dz - W_z dr), \quad (3.24)$$

здесь  $S$  — площадь ячейки, а  $C$  — контур, ограничивающий ее. Полагая, что

$$\iint_S \text{div} \mathbf{W} dS = \text{div} \mathbf{W}|_f \cdot S,$$

где  $f$  — некоторая точка внутри ячейки, получим

$$\text{div} \mathbf{W} = \left[ \oint_C (W_r dz - W_z dr) \right] S^{-1}. \quad (3.25)$$

Подставляя при аппроксимации контурных интегралов, входящих в (3.25), значения потоков  $W_r$ ,  $W_z$  в точках  $a$ ,  $b$ ,  $g$ ,  $d$ , рассчитанные с помощью выражений (3.19), (3.21) — (3.22), получим выражение для разностной аппроксимации члена  $\text{div} \left( \frac{l}{3} \text{grad} U \right)$ .

Окончательная разностная аппроксимация уравнения (3.4) примет следующий вид [59, 204]:

$$\begin{aligned} & A_{in} U_{i-1,n-1} + B_{in} U_{i,n-1} + L_{in} U_{i+1,n-1} + K_{in} U_{i-1,n} - \\ & - C_{in} U_{in} + E_{in} U_{i+1,n} + D_{in} U_{i-1,n+1} + V_{in} U_{i,n+1} + \\ & + Y_{in} U_{i+1,n+1} + F_{in} = 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Выпишем конкретные коэффициенты девятиточечной разностной схемы (3.37) для случая осевой симметрии. При построении схемы используем тот факт, что якобиан преобразования является пределом отношения площадей при стремлении диаметра соответствующей области к нулю. Это дает возможность применять в расчетах более простые формулы, содержащие лишь координаты неортогональной сетки. В приведенных ниже выражениях (3.27)—(3.35) используются следующие обозначения:  $V_{in}^*$  — объем ячейки с учетом осевой симметрии, на рис. 47, а и б эта ячейка обведена жирной чертой;

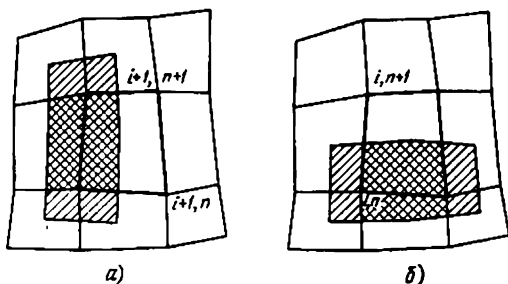


Рис. 47. К определению коэффициентов девятиточечной разностной схемы

$S_{1in}$  и  $S_{2in}$  — интегралы коэффициента поглощения  $\kappa$  по площадям, заштрихованным двойной штриховкой соответственно на рис. 47, а и б;  $S_{1in}^*$  и  $S_{2in}^*$  — интегралы коэффициента поглощения  $\kappa$  по площадям, заштрихованным одинарной штриховкой на рис. 47, а и б. Итак, коэффициенты имеют следующий вид:

$$A_{in} = -\frac{2\pi}{48V_{in}^*} \left\{ \frac{(r_{in} + r_{i,n+1})}{S_{1in}^*} [(z_{in} - z_{i,n+1})(z_{i-1,n} + z_{i-1,n+1} - z_{i+1,n} - z_{i+1,n+1}) + (r_{i,n+1} - r_{in})(r_{i+1,n} + r_{i+1,n+1} - r_{i-1,n} - r_{i-1,n+1})] + \frac{(r_{i+1,n} + r_{in})}{S_{2in}^*} [(z_{i+1,n} - z_{in})(z_{i+1,n+1} + z_{i,n+1} - z_{i+1,n-1} - z_{i,n-1}) + (r_{in} - r_{i+1,n})(r_{i,n-1} + r_{i+1,n-1} - r_{i+1,n+1} - r_{i,n+1})] \right\}, \quad (3.27)$$

$$L_{in} = -\frac{2\pi}{48V_{in}^*} \left\{ \frac{(r_{i+1,n} + r_{in})}{S_{2in}^*} [(z_{i+1,n} - z_{in})(z_{i,n-1} +$$

$$\begin{aligned}
& + z_{i+1,n-1} - z_{i+1,n+1} - z_{i,n+1} + \\
& + (r_{in} - r_{i+1,n})(r_{i+1,n+1} + r_{i,n+1} - r_{i,n-1} - r_{i+1,n-1}) + \\
& + \frac{(r_{i+1,n+1} + r_{i+1,n})}{S_{1,i+1,n}^*} [(z_{i+1,n+1} - z_{i+1,n})(z_{in} + z_{i,n+1} - \\
& - z_{i+2,n} - z_{i+2,n+1}) + (r_{i+1,n} - r_{i+1,n+1})(r_{i+2,n} + r_{i+2,n+1} - \\
& - r_{in} - r_{i,n+1})], \quad (3.28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{in} = A_{in} - L_{in} - \\
- \frac{2\pi}{6V_{in}^* S_{2in}} [(z_{in} - z_{i+1,n})^2 + (r_{i+1,n} - r_{in})^2], \quad (3.29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{in} = - \frac{2\pi}{48V_{in}^*} \left\{ \frac{(r_{in} + r_{i,n+1})}{S_{1in}^*} [(z_{in} - z_{i,n+1})(z_{i+1,n} + \right. \\
+ z_{i+1,n+1} - z_{i-1,n} - z_{i-1,n+1}) + \\
+ (r_{i,n+1} - r_{in})(r_{i-1,n} + r_{i-1,n+1} - r_{i+1,n} - r_{i+1,n+1})] + \\
+ \frac{(r_{i,n+1} + r_{i+1,n+1})}{S_{2i,n+1}^*} [(z_{i,n+1} - z_{i+1,n+1})(z_{i+1,n+2} + \\
+ z_{i,n+2} - z_{in} - z_{i+1,n}) + (r_{i+1,n+1} - r_{i,n+1})(r_{in} + r_{i+1,n} - \\
- r_{i+1,n+2} - r_{i,n+2})] \}, \quad (3.30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{in} = A_{in} + D_{in} - \frac{2\pi(r_{in} + r_{i,n+1})}{6V_{in}^* S_{1in}} [(r_{i,n+1} - r_{in})^2 + \\
+ (z_{i,n+1} - z_{in})^2], \quad (3.31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_{in} = - \frac{2\pi}{48V_{in}^*} \left\{ \frac{(r_{i+1,n+1} + r_{i+1,n})}{S_{1in}^*} [(z_{i+1,n+1} - z_{i+1,n}) \times \right. \\
\times (z_{i+2,n} + z_{i+2,n+1} - z_{in} - z_{i,n+1}) + (r_{i+1,n} - r_{i+1,n+1}) \times \\
\times (r_{in} + r_{i,n+1} - r_{i+2,n} - r_{i+2,n+1})] + \frac{(r_{i,n+1} + r_{i+1,n+1})}{S_{2i,n+1}^*} \times \\
\times [(z_{i,n+1} - z_{i+1,n+1})(z_{in} + z_{i+1,n} - z_{i+1,n+2} - z_{i,n+2}) + \\
+ (r_{i+1,n+1} - r_{i,n+1})(r_{i+1,n+2} + r_{i,n+2} - r_{in} - r_{i+1,n})] \}, \quad (3.32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{in} = L_{in} + Y_{in} - \frac{2\pi(r_{i+1,n+1} + r_{i+1,n})}{6V_{in}^* S_{1,i+1,n}} [(z_{i+1,n+1} - z_{i+1,n})^2 + \\
+ (r_{i+1,n} - r_{i+1,n+1})^2], \quad (3.33)
\end{aligned}$$

$$V_{in} = D_{in} + Y_{in} - \frac{2\pi(r_{i,n+1} + r_{i+1,n+1})}{6V_{in}^* S_{2i,n+1}} [(z_{i,n+1} - z_{i+1,n+1})^2 + (r_{i+1,n+1} - r_{i,n+1})^2], \quad (3.34)$$

$$C_{in} = \frac{2\pi}{6V_{in}^*} \left\{ \frac{(r_{in} + r_{i,n+1})}{S_{1in}} [(z_{in} - z_{i,n+1})^2 + (r_{i,n+1} - r_{in})^2] + \frac{(r_{i+1,n} + r_{in})}{S_{2in}} [(z_{i+1,n} - z_{in})^2 + (r_{in} - r_{i+1,n})^2] + \frac{(r_{i+1,n+1} + r_{i+1,n})}{S_{1,i+1,n}} [(z_{i+1,n+1} - z_{i+1,n})^2 + (r_{i+1,n} - r_{i+1,n+1})^2] + \frac{(r_{i,n+1} + r_{i+1,n+1})}{S_{2i,n+1}} \times [(z_{i,n+1} - z_{i+1,n+1})^2 + (r_{i+1,n+1} - r_{i,n+1})^2] \right\} + \kappa_{in}. \quad (3.35)$$

Последний член в выражении (3.35) связан с аппроксимацией члена  $\kappa U$  в уравнении (3.4).

Как следует из самого способа построения, разностная схема (3.26) является консервативной. Отметим, что на ортогональной сетке схема (3.26) перейдет в пятиточечную разностную схему (3.11).

**Замечание.** Из выражения (3.21) следует, что поток  $W_r$  на ортогональной сетке в точке  $a$  и поток  $W_z$  в точке  $b$  можно определить по формулам (3.7) и (3.8), если  $\kappa$  кусочно-постоянна внутри ячейки. Для кусочно-постоянных  $\kappa$  эти потоки можно определять также с помощью выражений (3.13) и (3.14), что поз-

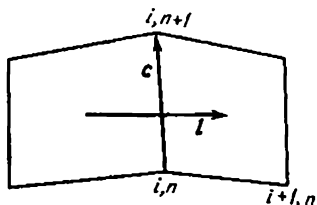


Рис. 48. К определению точности разностной схемы на неортогональной сетке

воляет повысить точность вычислений для случая оптически толстых ячеек.

**4. Точность аппроксимации разностной схемы.** Исследование точности разностной схемы (3.26) проведем на примере модельного уравнения, рассматриваемого в области  $\Pi$ :

$$-\operatorname{div} \left( \frac{\chi}{3} \operatorname{grad} U \right) = F. \quad (3.36)$$

Пусть  $\omega_h$  — неортогональная сетка в  $\Pi$ ,  $l$  — вектор, соединяющий центры тяжести двух ячеек,  $c$  — вектор,

образованный ребром ячейки (рис. 48). Предположим, что

$$|(l, c)| \ll (c, c), \quad (3.37)$$

$$|(l, c)| \ll (l, l). \quad (3.38)$$

Неравенства (3.37) и (3.38) выполняются, если угол между векторами  $l$  и  $c$  близок к  $\pi/2$ , т. е. сетка, на которой решается уравнение (3.36), слабо неортогональна \*).

Рассматривая только сеточные функции, удовлетворяющие граничному условию  $y|_{\Gamma} = 0$ , введем норму

$$\begin{aligned} \|y\|_{W_2(\omega_h)}^2 &= \\ &= 0,25 \sum_{l,n} [a_{l,n+1/2} (y_{l-1,n} - y_{ln})^2 + a_{l+1/2,n} (y_{l,n-1} - y_{ln})^2 + \\ &+ a_{l+1,n+1/2} (y_{ln} - y_{l+1,n})^2 + a_{l+1/2,n+1} (y_{ln} - y_{l,n+1})^2], \quad (3.39) \end{aligned}$$

$$a_{l,n+1/2} = [(r_{l,n+1} - r_{ln})^2 + (z_{l,n+1} - z_{ln})^2] / (3S_{1ln}), \quad (3.40)$$

$$a_{l+1/2,n} = [(r_{l+1,n} - r_{ln})^2 + (z_{l+1,n} - z_{ln})^2] / (3S_{2ln}). \quad (3.41)$$

Справедливо следующее утверждение относительно точности разностной схемы (3.26) для уравнения (3.36), которое приведем без доказательства.

*Пусть существует взаимно-однозначное непрерывно-дифференцируемое отображение с якобианом, большим нуля, переводящее последовательность неортогональных сеток  $\omega_h$  в области  $\Pi$  при  $h \rightarrow 0$ , где  $h$  — максимальная длина ребра ячейки, в последовательность ортогональных сеток  $\omega_{h_1}$  в  $\Pi_1$ . Пусть также на последовательности сеток  $\omega_h$  выполняются неравенства (3.37) и (3.38),  $\kappa$  — кусочно-непрерывная функция с конечным числом разрывов, расположенных вдоль ребер сетки.*

*Тогда в случае первой краевой задачи для погрешности  $u = U - y$ , где  $U$  — решение уравнения (3.36), имеет место следующая оценка:*

$$\|u\|_{W_2(\omega_h)} = O(h). \quad (3.42)$$

Таким образом, разностная схема (3.26) имеет первый порядок точности на неортогональных сетках [57].

Из других схем, с помощью которых возможна аппроксимация уравнений диффузии и теплопроводности

\*) Следует отметить, что слабая неортогональность сеток является вполне естественным, однако не всегда легко реализуемым требованием при расчете двумерных задач газовой динамики.

на неортогональных сетках, отметим схемы, рассмотренные в работах [59, 69, 182].

Схемы, применяемые в работе [59], получены на основе интегро-интерполяционного подхода. Они, так же как и схемы, полученные с использованием вариационных принципов, являются самосопряженными и положительно-определенными.

Схемы, используемые в работах [116, 182], написаны непосредственно для нахождения потоков энергии. Предполагается, что эти потоки  $W_\eta$  и  $W_\xi$  перпендикулярны сторонам ячейки и определены в их серединах. Соответствующие значения  $W_\eta$  и  $W_\xi$  находятся из решения системы двух уравнений вида

$$A_{\xi ln} W_{\xi, l-1, n} + C_{\xi ln} W_{\xi ln} + B_{\xi ln} W_{\xi, l+1, n} = P_{\xi ln} W_{\eta, l-1, n} + V_{\xi ln} W_{\eta ln} + R_{\xi ln} W_{\eta, l-1, n+1} + Q_{\xi ln} W_{\eta, l, n+1}. \quad (3.43)$$

$$A_{\eta ln} W_{\eta, l, n-1} + C_{\eta ln} W_{\eta ln} + B_{\eta ln} W_{\eta, l, n+1} = P_{\eta ln} W_{\xi, l, n-1} + V_{\eta ln} W_{\xi ln} + R_{\eta ln} W_{\xi, l+1, n-1} + Q_{\eta ln} W_{\xi, l+1, n}. \quad (3.44)$$

Шаблоны, на которых аппроксимируются системы уравнений (3.43) и (3.44), изображены на рис. 49, а и б.

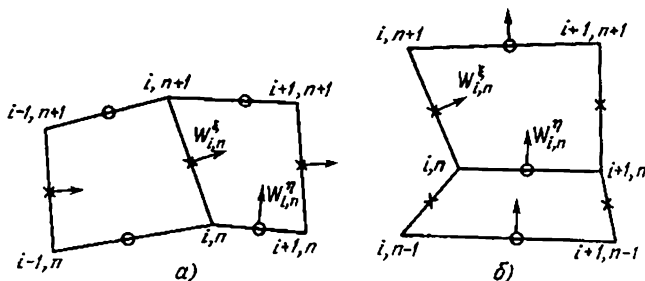


Рис. 49. а) Шаблон для разностного уравнения (3.43). б) Шаблон для разностного уравнения (3.44)

Систему уравнений (3.43) и (3.44) удобно использовать для расчета двумерных задач, в которых изменение параметров по одному направлению значительно более сильное, чем по другому. Для таких «слабо неодномерных» задач использование потоковых уравнений позволяет резко сократить объем вычислений, необходимых для решения уравнений диффузии и теплопроводности.

#### § 4. Методы решения систем сеточных уравнений. « $\alpha$ — $\beta$ »-итерационный алгоритм

Аппроксимация многогрупповых уравнений диффузии излучения

$$-\operatorname{div} \left( \frac{l_k(T, \rho)}{3} \operatorname{grad} U_k \right) + \kappa_k U_k = 4\kappa_k \sigma_k T^4 \quad (4.1)$$

приводит к появлению пятиточечных

$$B_{kin} U_{ki, n-1} + K_{kin} U_{k, l-1, n} - C_{kin} U_{kin} + E_{kin} U_{k, l+1, n} + \\ + V_{kin} U_{ki, n+1} + F_{kin} = 0 \quad (4.2)$$

или девятиточечных (при использовании лагранжевой системы координат)

$$A_{kin} U_{kl, n-1} + B_{kin} U_{k, l-1, n} + L_{kin} U_{k, l+1, n-1} + \\ + K_{kin} U_{k, l-1, n} - C_{kin} U_{kin} + E_{kin} U_{k, l+1, n} + \\ + D_{kin} U_{k, l-1, n+1} + V_{kin} U_{kl, n+1} + Y_{kin} U_{k, l+1, n+1} + \\ + F_{kin} = 0, \quad k=1, \dots, N_k \quad (4.3)$$

разностных схем.

Как правило, решение систем уравнений (4.2)—(4.3) значительно рациональнее проводить не с помощью прямых методов, а применяя те или иные итерационные алгоритмы. В последние годы был достигнут значительный прогресс в развитии итерационных методов решения сеточных уравнений. Здесь в первую очередь необходимо отметить предложенный А. А. Самарским попеременно-треугольный метод (ПТМ) [163] и его дальнейшие модификации [120, 168].

Однако итерационное решение систем разностных уравнений типа (4.2) или (4.3) все еще сталкивается со значительными трудностями. Эти трудности в значительной мере усугубляются тем, что коэффициенты разностных схем, аппроксимирующих уравнения диффузии излучения, могут сильно изменяться от одной пространственной ячейки к другой, при переходе на последующие временные шаги. Данный факт связан с сильной зависимостью групповых коэффициентов поглощения  $\kappa_k$  от температуры и плотности газа. Резкое, а зачастую и трудно предсказуемое изменение коэффициентов разностных схем (4.2) и (4.3) делает крайне затруднительным получение какой-либо априорной информации.

Заметим, что трудности, возникающие при решении системы многогрупповых уравнений диффузии (4.1) в задачах динамики излучающего газа, более значитель-

ны, чем появляющиеся при расчете двумерных задач газовой динамики с теплопроводностью. В самом деле, при аппроксимации уравнения теплопроводности (3.17) на неортогональной сетке с помощью неявных схем также возникает девятиточечная разностная схема:

$$A_{Tin}T'_{i-1,n-1} + B_{Tin}T'_{i,n-1} + L_{Tin}T'_{i+1,n-1} + \\ + K_{Tin}T'_{i-1,n} - C_{Tin}T'_{in} + E_{Tin}T'_{i+1,n} + D_{Tin}T'_{i-1,n+1} + \\ + V_{Tin}T'_{i,n+1} + Y_{Tin}T'_{i+1,n+1} + F_{Tin} = 0. \quad (4.4)$$

Здесь  $F$  зависит как от других членов, входящих в уравнение теплопроводности, например от членов, выражающих работу сил сжатия, так и от значения температуры  $T^{j-1}$  на предыдущем шаге по времени.

Однако решение одного уравнения (4.4) проще решения системы (4.3), состоящей из  $N_k$  уравнений. Кроме того, при недостаточно быстрой сходимости итерационных методов можно, уменьшая шаг по времени, увеличить коэффициент  $C_{Tin}$ , стоящий перед центральным элементом  $T_{in}$  разностной схемы. Это повышает скорость сходимости итераций при решении системы уравнений (4.4). Такой возможности нет для ускорения сходимости итерации при решении многогрупповой системы уравнений диффузии.

Для решения разностных уравнений, возникающих при расчете двумерных задач РГД, автором применялся « $\alpha$ — $\beta$ »-итерационный алгоритм. Метод был предложен в работе [205] и использовался для решения двумерных задач лучистого теплообмена и динамики излучающего газа [58—60, 114, 204], двумерных задач теплопроводности [127] и переноса нейтронов [2]. Опишем этот алгоритм.

1. Система « $\alpha$ — $\beta$ »-уравнений. Рассмотрим вначале данный метод на примере пятиточечной разностной схемы, заданной в прямоугольной области\*):

$$B_{in}U_{i,n-1} + K_{in}U_{i-1,n} - C_{in}U_{in} + E_{in}U_{i+1,n} + \\ + V_{in}U_{i,n+1} + F_{in} = 0, \quad 1 \leq i \leq N_i, \quad 1 \leq n \leq N_n. \quad (4.5)$$

Систему пятиточечных уравнений (4.5) дополним гра-

\*) Рассматриваемые в этом параграфе вопросы не связаны с зависимостью коэффициента поглощения  $\kappa$  от частоты фотона. Поэтому в дальнейшем индекс группы  $k$  во всех разностных выражениях будет опущен.

ичными условиями

$$\begin{aligned} U_{1n} &= \varphi_{2n} U_{2n} + \xi_{2n}, & U_{N_1 n} &= \varphi_{N_1-1, n} U_{N_1-1, n} + \xi_{N_1-1, n}, \\ U_{i1} &= \varphi_{i2} U_{i2} + \xi_{i2}, & U_{i, N_n} &= \varphi_{i, N_n-1} U_{i, N_n-1} + \xi_{i, N_n-1}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Предположим, что решение исходной системы уравнений (4.5) удовлетворяет соотношениям

$$U_{in} = \alpha_{i+1, n} U_{i+1, n} + \beta_{i+1, n}, \quad (4.7)$$

$$U_{in} = \gamma_{i-1, n} U_{i-1, n} + d_{i-1, n},$$

$$U_{in} = \tilde{\alpha}_{i, n+1} U_{i, n+1} + \tilde{\beta}_{i, n+1}, \quad (4.8)$$

$$U_{in} = \tilde{\gamma}_{i, n-1} U_{i, n-1} + \tilde{d}_{i, n-1},$$

где  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\gamma}$ ,  $\beta$ ,  $d$ ,  $\tilde{\beta}$ ,  $\tilde{d}$  — неизвестные пока коэффициенты прогонки.

Для нахождения системы уравнений, которой удовлетворяют прогоночные коэффициенты, сделаем следующее. С помощью двух условий (4.8) перепишем уравнение (4.5) в виде

$$\begin{aligned} K_{in} U_{i-1, n} - (C_{in} - \tilde{\alpha}_{in} B_{in} - \tilde{\gamma} V_{in}) U_{in} + \\ + E_{in} U_{i+1, n} + F_{in} + \tilde{\beta} B_{in} + \tilde{d}_{in} V_{in} = 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Аналогично с помощью условий (4.7) получим

$$\begin{aligned} B_{in} U_{i, n-1} - (C_{in} - \alpha_{in} K_{in} - \gamma_{in} E_{in}) U_{in} + V_{in} U_{i, n+1} + \\ + F_{in} + \beta_{in} K_{in} + d_{in} E_{in} = 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Схематически переход к уравнениям (4.9) — (4.10) изображен на рис. 50, а и б.

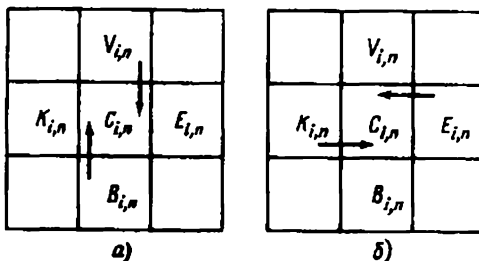


Рис. 50. Вывод уравнений для коэффициентов прогонки

Уравнения (4.9) и (4.10) являются трехточечными уравнениями относительно значений сеточной функции  $U_{i-1, n}$ ,  $U_{in}$ ,  $U_{i+1, n}$  и  $U_{i, n-1}$ ,  $U_{in}$ ,  $U_{i, n+1}$ . Для решения этих уравнений можно использовать формулы одномер-

ной прогонки, которую проведем в четырех направлениях: в сторону увеличения и уменьшения индекса  $i$  и в сторону увеличения и уменьшения индекса  $n$ . При этом получится система, состоящая из восьми уравнений для определения прогоночных коэффициентов  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\gamma}$ ,  $\beta$ ,  $d$ ,  $\tilde{\beta}$ ,  $\tilde{d}$ :

$$\begin{aligned} \alpha_{i+1, n} &= E_{in} / (C_{in} - \alpha_{in} K_{in} - \tilde{\alpha}_{in} B_{in} - \tilde{\gamma}_{in} V_{in}), \\ i &= 2, \dots, N_l - 1, \quad n = 2, \dots, N_n - 1, \quad \alpha_{2n} = \Phi_{2n}; \\ \gamma_{i-1, n} &= K_{in} / (C_{in} - \gamma_{in} E_{in} - \tilde{\alpha}_{in} B_{in} - \tilde{\gamma}_{in} V_{in}), \\ i &= N_l - 1, \dots, 2, \quad n = 2, \dots, N_n - 1, \quad \gamma_{N_l-1, n} = \Phi_{N_l-1, n}; \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{i, n+1} &= V_{in} / (C_{in} - \tilde{\alpha}_{in} B_{in} - \alpha_{in} K_{in} - \gamma_{in} E_{in}), \\ n &= 2, \dots, N_n - 1, \quad i = 2, \dots, N_l - 1, \quad \tilde{\alpha}_{i2} = \Phi_{i2}; \\ \tilde{\gamma}_{i, n-1} &= B_{in} / (C_{in} - \tilde{\gamma}_{in} V_{in} - \alpha_{in} K_{in} - \gamma_{in} E_{in}), \\ n &= N_n - 1, \dots, 2, \quad i = 2, \dots, N_l - 1, \quad \tilde{\gamma}_{i, N_n-1} = \Phi_{i, N_n-1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{i+1, n} &= \frac{\beta_{in} K_{in} + \tilde{\beta}_{in} B_{in} + \tilde{d}_{in} V_{in} + F_{in}}{C_{in} - \alpha_{in} K_{in} - \tilde{\alpha}_{in} B_{in} - \tilde{\gamma}_{in} V_{in}}, \\ i &= 2, \dots, N_l - 1, \quad n = 2, \dots, N_n - 1, \quad \beta_{2n} = \xi_{2n}; \\ d_{i-1, n} &= \frac{d_{in} E_{in} + \tilde{\beta}_{in} B_{in} + \tilde{d}_{in} V_{in} + F_{in}}{C_{in} - \gamma_{in} E_{in} - \tilde{\alpha}_{in} B_{in} - \tilde{\gamma}_{in} V_{in}}, \\ i &= N_l - 1, \dots, 2, \quad n = 2, \dots, N_n - 1, \quad d_{N_l-1, n} = \xi_{N_l-1, n}; \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_{i, n+1} &= \frac{\tilde{\beta}_{in} B_{in} + \beta_{in} K_{in} + d_{in} E_{in} + F_{in}}{C_{in} - \tilde{\alpha}_{in} B_{in} - \alpha_{in} K_{in} - \gamma_{in} E_{in}}, \\ n &= 2, \dots, N_n - 1, \quad i = 2, \dots, N_l - 1, \quad \tilde{\beta}_{i2} = \xi_{i2}; \\ \tilde{d}_{i, n-1} &= \frac{\tilde{d}_{in} V_{in} + \beta_{in} K_{in} + d_{in} E_{in} + F_{in}}{C_{in} - \tilde{\gamma}_{in} V_{in} - \alpha_{in} K_{in} - \gamma_{in} E_{in}}, \\ n &= N_n - 1, \dots, 2, \quad i = 2, \dots, N_l - 1, \quad \tilde{d}_{i, N_n-1} = \xi_{i, N_n-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, вместо исходного уравнения (4.5) относительно сеточной функции  $U$  получена новая система (4.11) — (4.12), состоящая из восьми уравнений. Определив пару значений прогоночных коэффициентов из решения системы (4.11) — (4.12), легко найти решение уравнения (4.5). Например, вычислив прогоночные коэф-

коэффициенты  $\tilde{\alpha}$  и  $\tilde{\beta}$  с помощью граничного условия (4.6) и (4.8), определим сеточную функцию  $U$ :

$$U_{in} = \tilde{\alpha}_{i, n+1} U_{i, n+1} + \tilde{\beta}_{i, n+1},$$

$$U_{iN_n} = (\varphi_{i, N_n-1} \tilde{\beta}_{iN_n} + \xi_{i, N_n-1}) / (1 - \varphi_{i, N_n-1} \tilde{\alpha}_{i, N_n}), \quad (4.13)$$

$$n = N_n - 1, \dots, 2, \quad i = 2, \dots, N_i - 1.$$

Значения функции  $U$  при  $i=1$  и  $i=N_i$  легко можно определить после выполнения процедуры (4.13) с помощью граничных условий (4.6) или (4.7).

**2. Решение системы « $\alpha$ — $\beta$ »-уравнений.** Рассмотрим один из возможных способов решения новой системы уравнений (4.11)—(4.12).

Нелинейная система « $\alpha$ »-уравнений (4.11) автономна. Ее решение не зависит от значений коэффициентов  $\beta$ ,  $\tilde{d}$ ,  $\tilde{\beta}$ ,  $\tilde{d}$ . Для нахождения значений коэффициентов  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\gamma}$  воспользуемся следующим итерационным процессом:

$$\alpha_{i+1, n}^{(s+1)} = E_{in} / (C_{in} - \alpha_{in}^{(s+1)} K_{in} - \tilde{\alpha}_{in}^{(s+1)} B_{in} - \tilde{\gamma}_{in}^{(s)} V_{in}),$$

$$i = 2, \dots, N_i - 1, \quad \alpha_{2n}^{(s+1)} = \varphi_{2n}; \quad (4.14)$$

$$\gamma_{i-1, n}^{(s+1)} = K_{in} / (C_{in} - \gamma_{in}^{(s+1)} E_{in} - \tilde{\alpha}_{in}^{(s+1)} B_{in} - \tilde{\gamma}_{in}^{(s)} V_{in}),$$

$$i = N_i - 1, \dots, 2, \quad \gamma_{N_i-1, n}^{(s+1)} = \varphi_{N_i-1, n};$$

$$\tilde{\alpha}_{i, n+1}^{(s+1)} = V_{in} / (C_{in} - \tilde{\alpha}_{in}^{(s+1)} B_{in} - \alpha_{in}^{(s+1)} K_{in} - \gamma_{in}^{(s+1)} E_{in}),$$

$$i = 2, \dots, N_i - 1, \quad \tilde{\alpha}_{i2}^{(s+1)} = \varphi_{i2}; \quad n = 2, \dots, N_n. \quad (4.15)$$

$$\tilde{\gamma}_{i, n-1}^{(s+1)} = B_{in} / (C_{in} - \tilde{\gamma}_{in}^{(s+1)} V_{in} - \alpha_{in}^{(s+1)} K_{in} - \gamma_{in}^{(s+1)} E_{in}),$$

$$i = 2, \dots, N_i - 1, \quad n = N_n - 1, \dots, 2, \quad \tilde{\gamma}_{i, N_n-1}^{(s+1)} = \varphi_{i, N_n-1},$$

здесь  $s$  — номер итерации.

После окончания « $\alpha$ »-итерационного процесса (4.14)—(4.15) можно приступить к нахождению коэффициентов  $\beta$ ,  $\tilde{d}$ ,  $\tilde{\beta}$ ,  $\tilde{d}$ . Система уравнений (4.12) при известных коэффициентах  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\gamma}$  является линейной относительно  $\beta$ ,  $\tilde{d}$ ,  $\tilde{\beta}$ ,  $\tilde{d}$ . Для решения этой системы уравнений рассмотрим « $\beta$ »-итерационный процесс:

$$\beta_{i+1, n} = \frac{\beta_{in}^{(s+1)} K_{in} + \tilde{\beta}_{in}^{(s+1)} B_{in} + \tilde{d}_{in}^{(s)} V_{in} + F_{in}}{C_{in} - \alpha_{in} K_{in} - \tilde{\alpha}_{in} B_{in} - \tilde{\gamma}_{in} V_{in}},$$

$$i = 2, \dots, N_i - 1, \quad \beta_{2n}^{(s+1)} = \xi_{2n};$$
(4.16)

$$d_{i-1, n}^{(s+1)} = \frac{d_{in}^{(s+1)} E_{in} + \tilde{\beta}_{in}^{(s+1)} B_{in} + \tilde{d}_{in}^{(s)} V_{in} + F_{in}}{C_{in} - \gamma_{in} E_{in} - \tilde{\alpha}_{in} B_{in} - \tilde{\gamma}_{in} V_{in}},$$

$$i = N_i - 1, \dots, 2, \quad d_{N_i-1, n}^{(s+1)} = \xi_{N_i-1, n};$$

$$\tilde{\beta}_{i, n+1}^{(s+1)} = \frac{\tilde{\beta}_{in}^{(s+1)} B_{in} + \beta_{in}^{(s+1)} K_{in} + d_{in}^{(s+1)} E_{in} + F_{in}}{C_{in} - \tilde{\alpha}_{in} B_{in} - \alpha_{in} K_{in} - \gamma_{in} E_{in}},$$

$$i = 2, \dots, N_i - 1, \quad \tilde{\beta}_{i2}^{(s+1)} = \xi_{i2}, \quad n = 2, \dots, N_n;$$

$$\tilde{d}_{i, n-1}^{(s+1)} = \frac{\tilde{d}_{in}^{(s+1)} V_{in} + \beta_{in}^{(s+1)} K_{in} + d_{in}^{(s+1)} E_{in} + F_{in}}{C_{in} - \tilde{\gamma}_{in} V_{in} - \alpha_{in} K_{in} - \gamma_{in} E_{in}},$$

$$= 2, \dots, N_i - 1, \quad n = N_n - 1, \dots, 2, \quad \tilde{d}_{i, N_n-1}^{(s+1)} = \xi_{i, N_n-1}.$$
(4.17)

Аналогичным образом итерационный процесс может быть построен и для области, состоящей из произвольного числа прямоугольников. Для этого в выражениях (4.14) — (4.17) достаточно учесть изменения границы области.

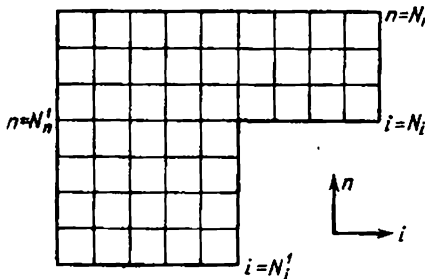


Рис. 51

Так, например, для области  $\Pi_1$ , изображенной на рис. 51, в итерационных формулах при  $2 \leq n \leq N_n^1$  индекс  $i$  меняется в пределах  $2 \leq i \leq N_i - 1$ , а при

$N_n^1 < n$  индекс  $i$  меняется в пределах  $2 \leq i \leq N_i - 1$ .

Наряду с итерационным процессом (4.14) — (4.17) рассмотрим близкий к нему, хотя и несколько более громоздкий алгоритм:

$$\alpha_{i+1, n}^{(s+1/2)} = E_{in} / (C_{in} - \alpha_{in}^{(s+1/2)} K_{in} - \tilde{\alpha}_{in}^{(s+1/2)} B_{in} - \tilde{\gamma}_{in}^{(s)} V_{in}),$$

$$i = 2, \dots, N_i - 1, \quad \alpha_{2n}^{(s+1/2)} = \Phi_{2n};$$

$$\gamma_{i-1, n}^{(s+1/2)} = K_{in} / (C_{in} - \gamma_{in}^{(s+1/2)} E_{in} - \tilde{\alpha}_{in}^{(s+1/2)} B_{in} - \tilde{\gamma}_{in}^{(s)} V_{in}), \quad (4.18)$$

$$i = N_i - 1, \dots, 2, \quad \gamma_{N_i-1, n}^{(s+1/2)} = \Phi_{N_i-1, n};$$

$$\bar{\alpha}_{i, n+1}^{(s+1/2)} = V_{in} / (C_{in} - \tilde{\alpha}_{in}^{(s+1/2)} B_{in} - \alpha_{in}^{(s+1/2)} K_{in} - \gamma_{in}^{(s+1/2)} E_{in}),$$

$$i = 2, \dots, N_i - 1, \quad \bar{\alpha}_{i2}^{(s+1/2)} = \Phi_{i2}, \quad n = 2, \dots, N_n;$$

$$\alpha_{i+1, n}^{(s+1)} = E_{in} / (C_{in} - \alpha_{in}^{(s+1)} K_{in} - \tilde{\alpha}_{in}^{(s+1/2)} B_{in} - \tilde{\gamma}_{in}^{(s+1/2)} V_{in}),$$

$$i = 2, \dots, N_i - 1, \quad \alpha_{2n}^{(s+1)} = \Phi_{2n};$$

$$\gamma_{i-1, n}^{(s+1)} = K_{in} / (C_{in} - \gamma_{in}^{(s+1)} E_{in} - \tilde{\alpha}_{in}^{(s+1/2)} B_{in} - \tilde{\gamma}_{in}^{(s+1)} V_{in}), \quad (4.19)$$

$$i = N_i - 1, \dots, 2, \quad \gamma_{N_i-1, n}^{(s+1)} = \Phi_{N_i-1, n};$$

$$\tilde{\gamma}_{i, n-1}^{(s+1)} = B_{in} / (C_{in} - \tilde{\gamma}_{in}^{(s+1)} V_{in} - \alpha_{in}^{(s+1)} K_{in} - \gamma_{in}^{(s+1)} E_{in}),$$

$$i = 2, \dots, N_i - 1, \quad \tilde{\gamma}_{i, N_n-1}^{(s+1)} = \Phi_{i, N_n-1}, \quad n = N_n - 1, \dots, 2;$$

$$\beta_{i+1, n}^{(s+1/2)} = \frac{\beta_{in}^{(s+1/2)} K_{in} + \tilde{\beta}_{in}^{(s+1/2)} B_{in} + \tilde{d}_{in}^{(s)} V_{in} + F_{in}}{C_{in} - \alpha_{in} K_{in} - \tilde{\alpha}_{in} B_{in} - \tilde{\gamma}_{in} V_{in}},$$

$$i = 2, \dots, N_i - 1, \quad \beta_{2n}^{(s+1/2)} = \xi_{2n};$$

$$d_{i-1, n}^{(s+1/2)} = \frac{d_{in}^{(s+1/2)} E_{in} + \tilde{\beta}_{in}^{(s+1/2)} B_{in} + \tilde{d}_{in}^{(s)} V_{in} + F_{in}}{C_{in} - \gamma_{in} E_{in} - \tilde{\alpha}_{in} B_{in} - \tilde{\gamma}_{in} V_{in}}, \quad (4.20)$$

$$i = N_i - 1, \dots, 2, \quad d_{N_i-1, n}^{(s+1/2)} = \xi_{N_i-1, n};$$

$$\tilde{\beta}_{i, n+1}^{(s+1/2)} = \frac{\tilde{\beta}_{in}^{(s+1/2)} B_{in} + \beta_{in}^{(s+1/2)} K_{in} + d_{in}^{(s+1/2)} E_{in} + F_{in}}{C_{in} - \tilde{\alpha}_{in} B_{in} - \alpha_{in} K_{in} - \gamma_{in} E_{in}},$$

$$i = 2, \dots, N_i - 1, \quad \tilde{\beta}_{i2}^{(s+1/2)} = \xi_{i2}, \quad n = 2, \dots, N_n;$$

$$\beta_{i+1, n}^{(s+1)} = \frac{\beta_{in}^{(s+1)} K_{in} + \tilde{d}_{in}^{(s+1)} V_{in} + \tilde{\beta}_{in}^{(s+1/2)} B_{in} + F_{in}}{C_{in} - \alpha_{in} K_{in} - \tilde{\alpha}_{in} B_{in} - \tilde{\gamma}_{in} V_{in}},$$

$$i = 2, \dots, N_i - 1, \quad \beta_{2n}^{(s+1)} = \xi_{2n};$$

$$d_{i-1, n}^{(s+1)} = \frac{d_{in}^{(s+1)} E_{in} + \tilde{d}_{in}^{(s+1)} V_{in} + \tilde{\beta}_{in}^{(s+1/2)} B_{in} + F_{in}}{C_{in} - \gamma_{in} E_{in} - \tilde{\alpha}_{in} B_{in} - \tilde{\gamma}_{in} V_{in}}, \quad (4.21)$$

$$i = N_i - 1, \dots, 2, \quad d_{N_i-1, n}^{(s+1)} = \xi_{N_i-1, n};$$

$$\tilde{d}_{i,n-1}^{(s+1)} = \frac{\tilde{d}_{in}^{(s+1)}V_{in} + \beta_{in}^{(s+1)}K_{in} + d_{in}^{(s+1)}E_{in} + F_{in}}{C_{in} - \tilde{\gamma}_{in}V_{in} - \alpha_{in}K_{in} - \gamma_{in}E_{in}},$$

$$\tilde{d}_{i,N_n-1}^{(s+1)} = \xi_{i,N_n-1}, \quad i=2, \dots, N_t-1,$$

$$n = N_n - 1, \dots, 2.$$

Итерационный процесс (4.18)—(4.21) сходится несколько быстрее, чем итерационный процесс (4.14)—(4.17). Алгоритм (4.18)—(4.21) являлся основным алгоритмом, используемым в работах [58, 59, 204] для решения систем сеточных уравнений, возникающих при аппроксимации многогрупповых уравнений диффузии.

**3. Скорость сходимости « $\alpha$ — $\beta$ »-итерационного процесса.** Доказательство сходимости « $\alpha$ — $\beta$ »-итерационного процесса ввиду его нелинейного характера затруднено. Однако сравнительно легко можно доказать сходимость (без получения конкретных оценок для скорости сходимости) « $\alpha$ »-итерационного процесса (4.14)—(4.15) или (4.18)—(4.19).

Наложим естественные ограничения на коэффициенты и граничные условия разностной схемы (4.5):

$$B_{in} + K_{in} + E_{in} + V_{in} \leq C_{in}, \quad (4.22)$$

$$\Phi_{2n} \leq 1, \quad \Phi_{N_t-1,n} \leq 1, \quad \Phi_{i2} \leq 1, \quad \Phi_{i,N_n-1} \leq 1. \quad (4.23)$$

Предположим, что начальное значение  $\tilde{\gamma}_{in}^{(0)}$  выбрано в виде

$$\tilde{\gamma}_{in}^{(0)} = 0. \quad (4.24)$$

Имеет место утверждение:

*При выполнении условий (4.22)—(4.24) « $\alpha$ »-итерационный процесс сходится.*

В самом деле, из начального условия (4.24), граничных условий (4.23) и условия монотонности разностной схемы (4.22) следует, что все значения коэффициентов  $\alpha_{in}^{(s)}$ ,  $\gamma_{in}^{(s)}$ ,  $\tilde{\alpha}_{in}^{(s)}$ ,  $\tilde{\gamma}_{in}^{(s)}$  меньше единицы, т. е. последовательности  $\alpha^{(s)}$ ,  $\gamma^{(s)}$ ,  $\tilde{\alpha}^{(s)}$ ,  $\tilde{\gamma}^{(s)}$  ограничены сверху.

С другой стороны, из (4.14)—(4.15) и (4.18)—(4.19) видно, что при начальном значении  $\tilde{\gamma}_{in}^{(0)} = 0$  последовательности  $\alpha^{(s)}$ ,  $\gamma^{(s)}$ ,  $\tilde{\alpha}^{(s)}$ ,  $\tilde{\gamma}^{(s)}$  являются неубывающими. Из этого факта и из ограниченности последовательностей следует сходимость « $\alpha$ »-итерационного процесса.

Доказательство сходимости « $\beta$ »-итерационного процесса (4.16)—(4.17) и (4.20)—(4.21), несмотря на его

линейный характер, сопряжено с большими трудностями. Это связано с тем, что знаменатели соответствующих формул могут быть получены только после решения системы « $\alpha$ »-уравнений (4.11). Следует отметить, что в работах [94, 119] была доказана сходимость « $\beta$ »-итерационного процесса (без получения оценок для скорости сходимости). Результаты этих работ можно использовать для обоснования корректности метода. Однако основная тяжесть в выявлении скорости сходимости метода и в сопоставлении его с другими алгоритмами ложится на вычислительный эксперимент.

Первые расчеты, проведенные в 1974 г., показали высокую скорость сходимости « $\alpha$ »-итерационного процесса. Погрешность

$$\delta^{(s)} = \max_{i,n} |(\alpha_{in}^{(s)} - \alpha_{in}^{(s-1)}) / \alpha_{in}^{(s-1)}| \quad (4.25)$$

убывала приблизительно в 100 раз от итерации к итерации. Такая же высокая скорость сходимости « $\alpha$ »-итерации отмечалась во всех следующих расчетах [2, 59, 60, 114, 127, 205]. Практически во всех решаемых задачах для достижения нужной точности необходимо было провести всего две-четыре « $\alpha$ »-итерации.

Скорость сходимости « $\beta$ »-итераций меньше. Именно она и определяет в конечном итоге скорость сходимости всего « $\alpha$ — $\beta$ »-процесса. Однако в целом, как показывают проведенные расчеты, скорость сходимости « $\beta$ »-итераций является в достаточной степени высокой.

В качестве примера рассмотрим разностную задачу

$$\sum_{\alpha=1}^2 (a_{\alpha}(x_1, x_2) y_{\bar{x}_{\alpha}})_{x_{\alpha}} = -\Phi(x_1, x_2), \quad y|_{\Gamma} = 0, \quad (4.26)$$

определенную на равномерной сетке  $h_1 = h_2 = h = 1/N$  в единичном квадрате. Коэффициенты  $a_1(x_1, x_2)$  и  $a_2(x_1, x_2)$  выберем следующим образом:

$$\begin{aligned} a_1(x_1, x_2) &= 1 + c [(x_1 - 0,5)^2 + (x_2 - 0,5)^2], \\ a_2(x_1, x_2) &= 1 + c [0,5 - (x_1 - 0,5)^2 - (x_2 - 0,5)^2], \end{aligned} \quad (4.27)$$

где  $c$  — константа.

Правая часть  $\Phi$  подбирается из условия, чтобы функция  $y = (1-x_1)x_1(1-x_2)x_2$  была точным решением разностной задачи (4.26)—(4.27). Начальные условия для всех рассматриваемых итерационных процессов задавались в виде  $y^{(0)} = 0$ . Данная задача явилась одной

из тестовых задач, на примере которой в книге А. А. Самарского и Е. С. Николаева [168] сравнивались различные итерационные методы.

При решении задач динамики излучающего газа часто приходится сталкиваться с ситуацией, когда коэффициенты разностных схем (4.2) и (4.3) сильно изменяются в рассматриваемой области. В этих условиях многие итерационные методы ухудшают свою скорость сходимости. Поэтому тестовые расчеты проводились при целом ряде значений параметра  $\omega = c_2/c_1$ , где  $c_2$  — максимальное значение коэффициентов (4.27), а  $c_1$  — их минимальное значение. Такое изменение параметра  $\omega$  достигалось варьированием константы  $c$  в выражении (4.27).

В табл. 2 и 3 представлены данные по числу итераций, необходимых для достижения точности  $\varepsilon = 10^{-4}$ , с использованием метода наискорейшего спуска (табл. 2)

Таблица 2

Число итераций, необходимых для достижения точности  $\varepsilon = 10^{-4}$  методом наискорейшего спуска

$c_2/c_1$	2	8	32	128	512
$N=32$	297	481	694	945	1223
$N=64$	1326	1966	2714	3585	4616

и метода минимальных невязок (табл. 3). Здесь  $\varepsilon$  определяется с помощью выражения  $\varepsilon = (Az, z)$ , где  $A$  — разностный оператор (4.26),  $z$  — погрешность итерационного решения уравнения (4.26).

Таблица 3

Число итераций, необходимых для достижения точности  $\varepsilon = 10^{-4}$  методом минимальных невязок

$c_2/c_1$	2	8	32	128	512
$N=32$	361	517	724	972	1250
$N=64$	1458	2029	2764	3630	4654

В табл. 4 представлены данные по числу « $\beta$ »-итераций, необходимых для достижения той же точности при решении задачи (4.26)—(4.27). Число « $\alpha$ »-итераций бы-

Таблица 4

Число « $\beta$ »-итераций, необходимых для достижения  
точности  $\varepsilon = 10^{-4}$

$c_2/c_1$	2	8	32	128	512
$N=32$	16	16	18	21	27
$N=64$	59	59	63	76	94

ло крайне незначительным и во всех случаях не превышало трех. Здесь  $N$  — число узлов разностной сетки по каждому направлению.

Из сопоставления приведенных данных видно, что « $\alpha$ — $\beta$ »-итерационный метод дает существенный выигрыш в скорости сходимости по сравнению с методом сопряженных градиентов и методом минимальных невязок\*). Отметим, что « $\alpha$ — $\beta$ »-итерационный алгоритм не требует знания априорной информации о спектре разностного оператора, в качестве условия его применимости не закладывается жестко требование обязательной самосопряженности разностной схемы. Кроме того, как видно из табл. 4, скорость сходимости « $\beta$ »-итерационного процесса весьма слабо зависит от отношения  $c_2/c_1$ . Скорость сходимости « $\beta$ »-итераций асимптотически уменьшается пропорционально  $1/N^2$  с ростом числа узлов разностной сетки.

В табл. 5 и 6 приведены данные [120, 168] по скорости сходимости тестовой задачи (4.26)—(4.27) соответственно для метода верхней релаксации и обобщенного попеременно-треугольного метода (ОПТМ).

Сопоставление результатов расчетов показывает, что « $\alpha$ — $\beta$ »-итерационный алгоритм, несмотря на то, что он имеет худшую асимптотическую скорость сходимости, вполне конкурентоспособен с методом верхней релакса-

\*) При сопоставлении методов необходимо принимать во внимание число арифметических операций, идущих на одну итерацию. Так, например, на одну « $\beta$ »-итерацию идет в 1,8 раза больше действий, чем на одну итерацию для метода наискорейшего спуска.

Т а б л и ц а 5

Число итераций, необходимых для достижения точности  $\varepsilon = 10^{-4}$  методом верхней релаксации с оптимальным значением параметра релаксации

$c_2/c_1$	2	8	32	128	512
$N = 32$	65	81	95	96	98
$N = 64$	129	164	192	193	195

Т а б л и ц а 6

Число итераций, необходимых для достижения точности  $\varepsilon = 10^{-4}$  для обобщенного попеременно-треугольного метода

$c_2/c_1$	2	8	32	128	512
$N = 32$	18	21	23	24	24
$N = 64$	26	30	34	36	36

ции на сетках порядка  $50 \times 50$  и меньше. По сравнению с обобщенным попеременно-треугольным методом он дает несколько худшую скорость сходимости\*). Следует отметить, что для эффективного применения методов верхней релаксации и ОПТМ, в отличие от « $\alpha$ — $\beta$ »-алгоритма, требуется знание априорной информации о спектре разностного оператора или умение определять его границы. Результаты табл. 5 и 6 получены с учетом наличия этой информации.

З а м е ч а н и е 1. Используемый вариант (4.14)—(4.17) « $\alpha$ — $\beta$ »-итерационного метода по сути дела является одним из простейших алгоритмов решения системы уравнений (4.11)—(4.12). Этот вариант непосредственно использовался при решении задач динамики излучающего газа. Однако новая система уравнений (4.11)—(4.12) допускает и другие подходы к ее решению.

\*) При сопоставлении данных табл. 4 с данными, приведенными в табл. 5 и 6, необходимо помнить, что на одну « $\beta$ »-итерацию тратится приблизительно в 3,6 раза больше действий, чем в методе верхней релаксации, и в 1,8 раза больше действий, чем в попеременно-треугольном методе.

Так, в работе [206] было рассмотрено применение метода верхней релаксации к решению системы « $\beta$ »-уравнений (4.12). Расчеты модельной задачи (4.26)—(4.27), проведенные с помощью этого метода, показали существенное увеличение скорости сходимости по сравнению с данными, приведенными в табл. 4. Кроме того, асимптотическая скорость сходимости стала уменьшаться с ростом числа точек пропорционально  $1/N$ , а не  $1/N^2$ , как для итерационного процесса (4.14)—(4.17). К сожалению, при таком подходе, так же как и при решении исходной системы уравнений (4.26) методом верхней релаксации (данные табл. 5), возникает проблема автоматического выбора оптимального параметра релаксации.

Из других модификаций алгоритма следует указать на предложенный В. Я. Гольдиным и А. В. Колпаковым вариант « $\alpha$ — $\beta$ »-процесса [80], использующий в качестве своей основы одномерные формулы потоковой прогонки.

**З а м е ч а н и е 2.** Следует отметить, что « $\alpha$ — $\beta$ »-итерационный алгоритм, как и другие методы решения системы сеточных уравнений (4.2), аппроксимирующих уравнения диффузии (4.1), уменьшает скорость сходимости с ростом длины свободного пробега  $l$ . Этот факт необходимо учитывать при решении задач РГД.

**4. Применение « $\alpha$ — $\beta$ »-итерационного алгоритма для решения систем девятиточечных уравнений.** При аппроксимации уравнений диффузии и теплопроводности на неортогональных связанных с лагранжевым описанием газодинамического движения четырехугольных сетках возникают девятиточечные разностные схемы вида

$$A_{in}U_{l-1,n-1} + B_{in}U_{l-1,n} + L_{in}U_{l+1,n-1} + K_{in}U_{l-1,n} - \\ - C_{in}U_{in} + E_{in}U_{l+1,n} + D_{in}U_{l-1,n+1} + V_{in}U_{l,n+1} + \\ + Y_{in}U_{l+1,n+1} + F_{in} = 0 \quad (4.28)$$

с граничными условиями (4.6), соответствующими заданию производной в направлении, перпендикулярном границе области. Случай применения « $\alpha$ — $\beta$ »-алгоритма для решения девятиточечных схем, когда производные на границе заданы не обязательно в перпендикулярном направлении, будет рассмотрен в § 5.

Приведем формулы « $\alpha$ — $\beta$ »-итерационного алгоритма, применяемые в программном комплексе решения двумерных задач динамики излучающего газа [59, 204] для расчета девятиточечных разностных схем.

С помощью условий (4.8) преобразуем уравнение (4.28) к виду

$$\begin{aligned}
 & (K_{in} + \tilde{\alpha}_{i-1,n}A_{in} + \tilde{\gamma}_{i-1,n}D_{in})U_{i-1,n} - \\
 & \quad - (C_{in} - \tilde{\alpha}_{in}B_{in} - \tilde{\gamma}_{in}V_{in})U_{in} + \\
 & \quad + (E_{in} + \tilde{\alpha}_{i+1,n}L_{in} + \tilde{\gamma}_{i+1,n}Y_{in})U_{i+1,n} + \\
 & \quad + (F_{in} + \tilde{\beta}_{i-1,n}A_{in} + \tilde{d}_{i-1,n}D_{in} + \\
 & \quad + \tilde{\beta}_{in}B_{in} + \tilde{d}_{in}V_{in} + \tilde{\beta}_{i+1,n}L_{in} + \tilde{d}_{i+1,n}Y_{in}) = 0. \quad (4.29)
 \end{aligned}$$

Аналогично с помощью условий (4.7) получим

$$\begin{aligned}
 & (B_{in} + \alpha_{i,n-1}A_{in} + \gamma_{i,n-1}L_{in})U_{i,n-1} - \\
 & \quad - (C_{in} - \alpha_{in}K_{in} - \gamma_{in}E_{in})U_{in} + \\
 & \quad + (V_{in} + \alpha_{i,n+1}D_{in} + \gamma_{i,n+1}Y_{in})U_{i,n+1} + \\
 & \quad + (F_{in} + \beta_{i,n-1}A_{in} + d_{i,n-1}L_{in} + \\
 & \quad + \beta_{in}K_{in} + d_{in}E_{in} + \beta_{i,n+1}D_{in} + d_{i,n+1}Y_{in}) = 0. \quad (4.30)
 \end{aligned}$$

Схематически этот переход к уравнениям (4.29) — (4.30) изображен на рис. 52, а и б.

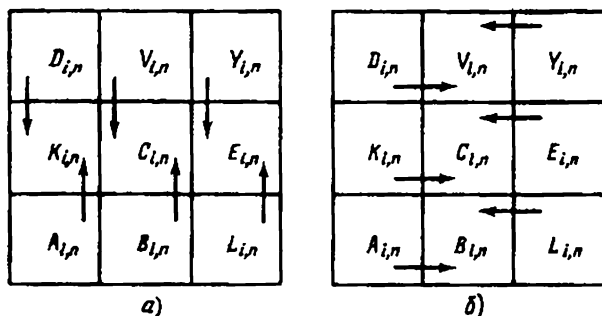


Рис. 52. Вывод « $\alpha$ - $\beta$ »-уравнений для девятиточечной схемы

Уравнения (4.29) — (4.30) являются трехточечными относительно значений сеточной функции  $U_{i-1,n}$ ,  $U_{in}$ ,  $U_{i+1,n}$  и  $U_{i,n-1}$ ,  $U_{in}$ ,  $U_{i,n+1}$ . Так же как и для пятиточечной схемы (4.5), с помощью формул одномерной прогонки из уравнений (4.29) — (4.30) можно получить систему из восьми уравнений для нахождения коэффициентов  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\gamma}$ ,  $\beta$ ,  $d$ ,  $\tilde{\beta}$ ,  $\tilde{d}$ . Для решения этой системы уравнений применим итерационный процесс,

аналогичный (4.18)–(4.21):

$$\alpha_{i+1,n}^{(s+1/2)} = (E_{in} + \tilde{\alpha}_{i+1,n}^{(s+1/2)} L_{in} + \tilde{\gamma}_{i+1,n}^{(s)} Y_{in}) [C_{in} - \tilde{\alpha}_{in}^{(s+1/2)} B_{in} - \\ - \tilde{\gamma}_{in}^{(s)} V_{in} - \alpha_{in}^{(s+1/2)} (K_{in} + \alpha_{i-1,n}^{(s+1/2)} A_{in} + \gamma_{i-1,n}^{(s)} D_{in})]^{-1}, \\ i=2, \dots, N_i-1, \quad \alpha_{2n}^{(s+1/2)} = \Phi_{2n};$$

$$\gamma_{i-1,n}^{(s+1/2)} = (K_{in} + \tilde{\alpha}_{i-1,n}^{(s+1/2)} A_{in} + \tilde{\gamma}_{i-1,n}^{(s)} D_{in}) [C_{in} - \tilde{\alpha}_{in}^{(s+1/2)} B_{in} - \\ - \tilde{\gamma}_{in}^{(s)} V_{in} - \gamma_{i+1,n}^{(s+1/2)} (E_{in} + \tilde{\alpha}_{i+1,n}^{(s+1/2)} L_{in} + \tilde{\gamma}_{i+1,n}^{(s)} Y_{in})]^{-1}, \quad (4.31) \\ i=N_i-1, \dots, 2, \quad \gamma_{N_i-1,n}^{(s+1/2)} = \Phi_{N_i-1,n};$$

$$\tilde{\alpha}_{i,n+1}^{(s+1/2)} = (V_{in} + \alpha_{i,n+1}^{(s)} D_{in} + \gamma_{i,n+1}^{(s)} Y_{in}) [C_{in} - \alpha_{in}^{(s+1/2)} K_{in} - \\ - \gamma_{in}^{(s+1/2)} E_{in} - \tilde{\alpha}_{in}^{(s+1/2)} (B_{in} + \alpha_{i,n-1}^{(s+1/2)} A_{in} + \gamma_{i,n-1}^{(s+1/2)} L_{in})]^{-1}, \\ i=2, \dots, N_i-1, \quad \tilde{\alpha}_{i2}^{(s+1/2)} = \Phi_{i2}, \\ n=2, \dots, N_n-1;$$

$$\alpha_{i+1,n}^{(s+1)} = (E_{in} + \tilde{\alpha}_{i+1,n}^{(s+1/2)} L_{in} + \tilde{\gamma}_{i+1,n}^{(s+1)} Y_{in}) [C_{in} - \tilde{\alpha}_{in}^{(s+1/2)} B_{in} - \\ - \tilde{\gamma}_{in}^{(s+1)} V_{in} - \alpha_{in}^{(s+1)} (K_{in} + \tilde{\alpha}_{i-1,n}^{(s+1/2)} A_{in} + \tilde{\gamma}_{i-1,n}^{(s+1)} D_{in})]^{-1}, \\ i=2, \dots, N_i-1, \quad \alpha_{2n}^{(s+1)} = \Phi_{2n};$$

$$\gamma_{i-1,n}^{(s+1)} = (K_{in} + \tilde{\alpha}_{i-1,n}^{(s+1/2)} A_{in} + \tilde{\gamma}_{i-1,n}^{(s+1)} D_{in}) [C_{in} - \tilde{\alpha}_{in}^{(s+1/2)} B_{in} - \\ - \tilde{\gamma}_{in}^{(s+1)} V_{in} - \gamma_{i+1,n}^{(s+1)} (E_{in} + \tilde{\alpha}_{i+1,n}^{(s+1/2)} L_{in} + \tilde{\gamma}_{i+1,n}^{(s+1)} Y_{in})]^{-1}, \quad (4.32) \\ i=N_i-1, \dots, 2, \quad \gamma_{N_i-1,n}^{(s+1)} = \Phi_{N_i-1,n};$$

$$\tilde{\gamma}_{i,n-1}^{(s+1)} = (B_{in} + \alpha_{i,n-1}^{(s+1/2)} A_{in} + \gamma_{i,n-1}^{(s+1/2)} L_{in}) [C_{in} - \alpha_{in}^{(s+1)} K_{in} - \\ - \gamma_{in}^{(s+1)} E_{in} - \tilde{\gamma}_{in}^{(s+1)} (V_{in} + \alpha_{i,n+1}^{(s+1/2)} D_{in} + \gamma_{i,n+1}^{(s+1)} Y_{in})]^{-1}, \\ i=N_i-1, \dots, 2, \quad \gamma_{i,N_n-1}^{(s+1)} = \Phi_{i,N_n-1}, \\ n=N_n-1, \dots, 2.$$

Как показали проведенные расчеты двумерных задач динамики излучающего газа, « $\alpha$ »-итерационный процесс (4.31)–(4.32), так же как аналогичный итерационный процесс (4.18)–(4.19) для пятиточечной разностной схемы, сходится исключительно быстро.

После определения коэффициентов  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\gamma}$  приступим к нахождению прогоночных коэффициентов  $\beta$ ,  $d$ ,  $\tilde{\beta}$ ,  $\tilde{d}$ :

$$\beta_{i+1,n}^{(s+1/2)} = (\Phi_{\alpha in} \beta_{in}^{(s+1/2)} + M_{in}^{(s+1/2)}) / \Psi_{\alpha in}, \quad \beta_{2n}^{(s+1/2)} = \xi_{2n}, \quad (4.33)$$

$$M_{in}^{(s+1/2)} = \tilde{d}_{i-1,n}^{(s)} D_{in} + \tilde{d}_{in}^{(s)} V_{in} + \tilde{d}_{i+1,n}^{(s)} Y_{in} + \tilde{\beta}_{i-1,n}^{(s+1/2)} A_{in} + \\ + \tilde{\beta}_{in}^{(s+1/2)} B_{in} + \tilde{\beta}_{i+1,n}^{(s+1/2)} L_{in} + F_{in}, \quad (4.34)$$

$$\Phi_{\alpha in} = K_{in} + \tilde{\alpha}_{i-1,n} A_{in} + \tilde{\gamma}_{i-1,n} D_{in}, \quad (4.35)$$

$$\Psi_{\alpha in} = C_{in} - \tilde{\alpha}_{in} B_{in} - \tilde{\gamma}_{in} V_{in} - \alpha_{in} \Phi_{\alpha in}, \quad (4.36)$$

$$i = 2, \dots, N_i - 1, \quad n = 2, \dots, N_n - 1;$$

$$d_{i-1,n}^{(s+1/2)} = (\Phi_{\gamma in} d_{in}^{(s+1/2)} + M_{in}^{(s+1/2)}) / \Psi_{\gamma in}, \quad (4.37)$$

$$d_{N_i-1,n}^{(s+1/2)} = \xi_{N_i-1,n}$$

$$\Phi_{\gamma in} = E_{in} + \tilde{\alpha}_{i+1,n} L_{in} + \tilde{\gamma}_{i+1,n} Y_{in}, \quad (4.38)$$

$$\Psi_{\gamma in} = C_{in} - \tilde{\alpha}_{in} B_{in} - \tilde{\gamma}_{in} V_{in} - \gamma_{in} \Phi_{\gamma in}, \quad (4.39)$$

$$i = N_i - 1, \dots, 2, \quad n = 2, \dots, N_n - 1;$$

$$\tilde{\beta}_{i,n+1}^{(s+1/2)} = (\Phi_{\tilde{\alpha} in} \tilde{\beta}_{in}^{(s+1/2)} + \beta_{in}^{(s+1/2)} K_{in} + d_{in}^{(s+1/2)} E_{in} + \\ + \beta_{i,n-1}^{(s+1/2)} A_{in} + d_{i,n-1}^{(s+1/2)} L_{in} + \beta_{i,n+1}^{(s)} D_{in} + \\ + d_{i,n+1}^{(s)} Y_{in} + F_{in}) \Psi_{\tilde{\alpha} in}^{-1}, \quad \tilde{\beta}_{i2}^{(s+1/2)} = \xi_{i2}, \quad (4.40)$$

$$\Phi_{\tilde{\alpha} in} = B_{in} + \alpha_{i,n-1} A_{in} + \gamma_{i,n-1} L_{in}, \quad (4.41)$$

$$\Psi_{\tilde{\alpha} in} = C_{in} - \alpha_{in} K_{in} - \gamma_{in} E_{in} - \tilde{\alpha}_{in} \Phi_{\tilde{\alpha} in}, \quad (4.42)$$

$$i = 2, \dots, N_i - 1, \quad n = 2, \dots, N_n - 1;$$

$$\beta_{i+1,n}^{(s+1)} = (\Phi_{\alpha in} \beta_{in}^{(s+1)} + M_{in}^{(s+1)}) / \Psi_{\alpha in}, \quad \beta_{2n}^{(s+1)} = \xi_{2n}, \quad (4.43)$$

$$M_{in}^{(s+1)} = \tilde{d}_{i-1,n}^{(s+1)} D_{in} + \tilde{d}_{in}^{(s+1)} V_{in} + \tilde{d}_{i+1,n}^{(s+1)} Y_{in} + \\ + \beta_{i-1,n}^{(s+1/2)} A_{in} + \tilde{\beta}_{in}^{(s+1/2)} B_{in} + \tilde{\beta}_{i+1,n}^{(s+1/2)} L_{in} + F_{in}, \quad (4.44)$$

$$i = 2, \dots, N_i - 1, \quad n = N_n - 1, \dots, 2;$$

$$d_{i-1,n}^{(s+1)} = (\Phi_{\gamma in} d_{in}^{(s+1)} + M_{in}^{(s+1)}) / \Psi_{\gamma in}, \quad d_{N_i-1,n}^{(s+1)} = \xi_{N_i-1,n} \quad (4.45)$$

$$\tilde{d}_{i,n-1}^{(s+1)} = [\Phi_{\tilde{\gamma} in} \tilde{d}_{in}^{(s+1)} + \beta_{i,n+1}^{(s+1)} D_{in} + d_{i,n+1}^{(s+1)} Y_{in} + \beta_{in}^{(s+1)} K_{in} + \\ + d_{in}^{(s+1)} E_{in} + \beta_{i,n-1}^{(s+1/2)} A_{in} + d_{i,n-1}^{(s+1/2)} L_{in} + F_{in}] \Psi_{\tilde{\gamma} in}^{-1}, \quad (4.46)$$

$$\tilde{d}_{i,N_n-1}^{(s+1)} = \xi_{i,N_n-1},$$

$$\Phi_{\tilde{\gamma} in} = V_{in} + \alpha_{i,n+1} D_{in} + \gamma_{i,n+1} Y_{in}, \quad (4.47)$$

$$\Psi_{\tilde{\gamma}in} = C_{in} - \alpha_{in}K_{in} - \gamma_{in}E_{in} - \tilde{\gamma}_{in}\Phi_{\tilde{\gamma}in}, \quad (4.48)$$

$$i = N_l - 1, \dots, 2, \quad n = N_n - 1, \dots, 2.$$

Отметим, что коэффициенты  $\Phi_{\alpha in}$ ,  $\Phi_{\gamma in}$ ,  $\Phi_{\tilde{\alpha} in}$ ,  $\Phi_{\tilde{\gamma} in}$ ,  $\Psi_{\alpha in}$ ,  $\Psi_{\gamma in}$ ,  $\Psi_{\tilde{\alpha} in}$ ,  $\Psi_{\tilde{\gamma} in}$  при итерациях не пересчитываются и могут быть определены сразу после окончания «а»-процесса.

После нахождения прогоночных коэффициентов решение исходной системы уравнений (4.28) может быть определено, например, с помощью выражения (4.13).

Обратим внимание на одну особенность, связанную с вычислением прогоночных коэффициентов девятиточечной схемы (4.28) вблизи границы. В этом случае, например, для вычисления коэффициентов  $\alpha_{N_l-1, n}$  и  $\beta_{N_l-1, n}$  необходимо знать значения коэффициентов  $\tilde{\alpha}_{N_l, n}$ ,  $\tilde{\beta}_{N_l, n}$ ,  $\tilde{\gamma}_{N_l, n}$ ,  $\tilde{d}_{N_l, n}$ , которые нельзя определить ввиду отсутствия соответствующих уравнений. С другой стороны, если коэффициенты  $L$  и  $Y$  разностной схемы (4.28) вблизи границы обращаются в нуль, то знание коэффициентов  $\tilde{\alpha}_{N_l, n}$ ,  $\tilde{\beta}_{N_l, n}$ ,  $\tilde{\gamma}_{N_l, n}$ ,  $\tilde{d}_{N_l, n}$  уже не является необходимым для решения.

Трансформируем девятиточечную разностную схему (4.28) так, чтобы коэффициенты  $L$  и  $Y$  вблизи правой границы обратились в нуль. Воспользовавшись граничным условием

$$U_{N_l, n} = \Phi_{N_l-1, n} U_{N_l-1, n} + \xi_{N_l-1, n},$$

перепишем разностное уравнение (4.28) при  $i = N_l - 1$  в следующем виде:

$$A_{N_l-1, n} U_{N_l-2, n} + \tilde{B}_{N_l-1, n} U_{N_l-1, n-1} + K_{N_l-1, n} U_{N_l-2, n-1} -$$

$$- C_{N_l-1, n} U_{N_l-1, n} + E_{N_l-1, n} U_{N_l, n} + D_{N_l-1, n} U_{N_l-2, n+1} +$$

$$+ \tilde{V}_{N_l-1, n} U_{N_l-1, n+1} + \tilde{F}_{N_l-1, n} = 0, \quad (4.49)$$

где

$$\tilde{B}_{N_l-1, n} = B_{N_l-1, n} + \Phi_{N_l-1, n-1} L_{N_l-1, n}, \quad (4.50)$$

$$\tilde{V}_{N_l-1, n} = V_{N_l-1, n} + \Phi_{N_l-1, n+1} Y_{N_l-1, n}, \quad (4.51)$$

$$\tilde{F}_{N_l-1, n} = F_{in} + \xi_{N_l-1, n-1} L_{N_l-1, n} + \xi_{N_l-1, n+1} Y_{N_l-1, n}. \quad (4.52)$$

Аналогичным образом разностная схема может быть видоизменена вблизи других границ области, что позволяет применить « $\alpha$ — $\beta$ »-итерационный алгоритм для решения девятиточечных систем уравнений. Отметим, что такие системы возникают не только при аппроксимации уравнений диффузии и теплопроводности на ортогональных сетках, но и при аппроксимации на ортогональных сетках эллиптических уравнений со смешанными производными [162]

$$\sum_{p,k=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_p} \kappa_{pk} \frac{\partial u}{\partial x_k} + \kappa u = f. \quad (4.53)$$

**5. Решение системы векторных уравнений.** В работе [123] было рассмотрено применение « $\alpha$ — $\beta$ »-итерационного алгоритма для решения систем векторных уравнений. Следуя этой работе, рассмотрим систему

$$A_{in}X_{l-1,n} + B_{in}X_{l,n-1} + L_{in}X_{l+1,n-1} + K_{in}X_{l-1,n} - C_{in}X_{ln} + \\ + E_{in}X_{l+1,n} + D_{in}X_{l-1,n+1} + V_{in}X_{l,n+1} + Y_{in}X_{l+1,n+1} + \\ + F_{in} = 0. \quad (4.54)$$

Здесь  $X_{ln}$  — вектор, состоящий из двух компонент  $X_{ln} = (x_{ln}^1, x_{ln}^2)$  и являющейся искомым решением системы сеточных уравнений;  $A_{in}, B_{in}, L_{in}, K_{in}, C_{in}, E_{in}, V_{in}, Y_{in}, D_{in}$  — матрицы второго порядка;  $F_{in} = (F_{in}^1, F_{in}^2)$  — известный вектор.

Предположим, что решение исходной системы уравнений (4.54) таково, что существуют  $\alpha_{in}, \gamma_{in}, \tilde{\alpha}_{in}, \tilde{\gamma}_{in}$  — матрицы второго порядка и  $\beta_{in}, d_{in}, \tilde{\beta}_{in}, \tilde{d}_{in}$  — векторы, с помощью которых выполнены условия

$$X_{ln} = \alpha_{l+1,n} X_{l+1,n} + \beta_{l+1,n}, \quad (4.55)$$

$$X_{ln} = \gamma_{l-1,n} X_{l-1,n} + d_{l-1,n},$$

$$X_{ln} = \tilde{\alpha}_{l,n+1} X_{l,n+1} + \tilde{\beta}_{l,n+1}, \quad (4.56)$$

$$X_{ln} = \tilde{\gamma}_{l,n-1} X_{l,n-1} + \tilde{d}_{l,n-1}.$$

Используя условия (4.55) и (4.56), аналогично системе « $\alpha$ — $\beta$ »-уравнений (4.11) — (4.12), получим

$$\alpha_{l+1,n} = (\tilde{C}_{ln} - \tilde{K}_{ln} \alpha_{in})^{-1} \tilde{E}_{ln}, \quad (4.57)$$

$$\beta_{l+1,n} = (\tilde{C}_{ln} - \tilde{K}_{ln} \alpha_{in})^{-1} (\tilde{F}_{ln} + \tilde{K}_{ln} \beta_{in}). \quad (4.58)$$

В уравнениях (4.57) — (4.58) использовались обозначения:

$$\tilde{C}_{ln} = C_{ln} - B_{in} \tilde{\alpha}_{in} - V_{in} \tilde{\gamma}_{in}, \quad (4.59)$$

$$\tilde{K}_{in} = K_{in} + A_{in}\tilde{\alpha}_{i-1,n} + D_{in}\tilde{\gamma}_{i-1,n}, \quad (4.60)$$

$$\tilde{E}_{in} = E_{in} + L_{in}\tilde{\alpha}_{i+1,n} + Y_{in}\tilde{\gamma}_{i+1,n}, \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{in} = & F_{in} + B_{in}\tilde{\beta}_{in} + V_{in}\tilde{d}_{in} + A_{in}\tilde{\beta}_{i-1,n} + D_{in}\tilde{d}_{i-1,n} + \\ & + L_{in}\tilde{\beta}_{i+1,n} + Y_{in}\tilde{d}_{i+1,n}. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Остальные уравнения для определения матриц  $\gamma$ ,  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\gamma}$  и векторов  $d$ ,  $\tilde{\beta}$ ,  $\tilde{d}$  получаются аналогичным образом и будут здесь опущены. Для решения соответствующей системы уравнений можно применить итерационный процесс, аналогичный ранее рассмотренному (4.33) — (4.48).

Естественно, что данный подход может быть применен и для решения систем векторных уравнений, размерность которых больше, чем два. Однако необходимо помнить, что с ростом размерности вектора  $X$  резко возрастает объем вычислений для нахождения обратных матриц, входящих в выражения (4.57) — (4.58).

Описанный выше способ решения систем векторных уравнений (4.54) был применен для расчета двумерных уравнений Навье — Стокса, записанных в переменных функция тока, вихрь [123, 124]. Подобный алгоритм также может быть использован для решения некоторых задач нейтронной физики и двумерных задач газовой динамики с одновременным наличием ионной и электронной теплопроводности.

**6. Некоторые возможности использования безытерационных способов решения.** Решение разностного уравнения (4.5) на каждом шаге по времени может существенно увеличить машинное время, необходимое для расчета всей задачи динамики излучающего газа. Было бы неплохо, решая уравнение (4.5) сравнительно редко, на большинстве шагов по времени находить плотность энергии излучения  $U$  (естественно, с достаточной степенью точности) с помощью сравнительно простых уравнений. Полученная система « $\alpha$ — $\beta$ »-уравнений позволяет построить такой алгоритм.

Решим на  $j$ -м временном шаге с помощью « $\alpha$ — $\beta$ »-итераций или какого-нибудь другого метода уравнение (4.5), определим  $U_{in}^j$  и отношение

$$U_{in}^j = U_{i,n+1}^j / U_{in}^j. \quad (4.63)$$

В течение последующих  $N_2$  шагов по времени будем считать отношение (4.63) неизменным (замороженным).

Для решения системы « $\alpha$ — $\beta$ »-уравнений (4.11)—(4.12) прямым методом достаточно знать значения прогоночных коэффициентов  $\tilde{\gamma}$  и  $\tilde{d}$ .

Во второе из соотношений (4.8)

$$U_{ln} = \tilde{\gamma}_{l,n-1} U_{l,n-1} + \tilde{d}_{l,n-1}$$

вместо  $\tilde{d}_{l,n-1}$  подставим нуль, а вместо  $\tilde{\gamma}_{l,n-1}$  — значение отношения  $l_{l,n-1}$ . Это дает возможность на последующих после  $j$ -го шага  $N_2$  слоях по времени ( $j' = j+1, \dots, \dots, j+N_2$ ) определять остальные прогоночные коэффициенты с помощью безытерационных формул:

$$\alpha_{i+1,n} = \frac{E_{ln}}{C_{ln} - \alpha_{ln} K_{ln} - \tilde{\alpha}_{ln} B_{ln} - l_{ln} V_{ln}}, \quad \alpha_{2n} = \varphi_{2n}; \quad (4.64)$$

$$\beta_{i+1,n} = \frac{\beta_{ln} K_{ln} + \tilde{\beta}_{ln} B_{ln} + F_{ln}}{C_{ln} - \alpha_{ln} K_{ln} - \tilde{\alpha}_{ln} B_{ln} - l_{ln} V_{ln}}, \quad \beta_{2n} = \xi_{2n}, \quad (4.65)$$

$$i = 2, \dots, N_i - 1, \quad n = 2, \dots, N_n - 1;$$

$$\gamma_{i-1,n} = \frac{K_{ln}}{C_{ln} - \gamma_{ln} E_{ln} - \tilde{\alpha}_{ln} B_{ln} - l_{ln} V_{ln}},$$

$$\gamma_{N_i-1,n} = \varphi_{N_i-1,n}; \quad (4.66)$$

$$d_{i-1,n} = \frac{d_{ln} E_{ln} + \tilde{\beta}_{ln} B_{ln} + F_{ln}}{C_{ln} - \gamma_{ln} E_{ln} - \tilde{\alpha}_{ln} B_{ln} - l_{ln} V_{ln}},$$

$$d_{N_i-1,n} = \xi_{N_i-1,n}, \quad (4.67)$$

$$i = N_i - 1, \dots, 2, \quad n = 2, \dots, N_n - 1;$$

$$\tilde{\alpha}_{l,n+1} = \frac{V_{ln}}{C_{ln} - \tilde{\alpha}_{ln} B_{ln} - \alpha_{ln} K_{ln} - \gamma_{ln} E_{ln}}, \quad \tilde{\alpha}_{l2} = \varphi_{l2}; \quad (4.68)$$

$$\tilde{\beta}_{l,n+1} = \frac{\tilde{\beta}_{ln} B_{ln} + \beta_{ln} K_{ln} + d_{ln} E_{ln} + F_{ln}}{C_{ln} - \tilde{\alpha}_{ln} B_{ln} - \alpha_{ln} K_{ln} - \gamma_{ln} E_{ln}}, \quad \tilde{\beta}_{l2} = \xi_{l2}, \quad (4.69)$$

$$i = 2, \dots, N_i - 1, \quad n = 2, \dots, N_n - 1;$$

$$U_{ln} = \tilde{\alpha}_{l,n+1} U_{l,n+1} + \tilde{\beta}_{l,n+1},$$

$$U_{lN_n} = \frac{\varphi_{l,N_n-1} \tilde{\beta}_{lN_n} + \xi_{l,N_n-1}}{1 - \varphi_{l,N_n-1} \tilde{\alpha}_{lN_n}}, \quad (4.70)$$

$$i = 2, \dots, N_i - 1, \quad n = N_n - 1, \dots, 1.$$

На временном шаге  $j+N_2$  вновь решается исходное уравнение (4.5), вычисляются коэффициенты (4.63), и вся процедура повторяется. Заметим, что при таком

подходе само решение  $U$  изменяется с течением времени в зависимости от изменения правой части и коэффициентов разностной схемы (4.5). Эффективность указанного приема, в смысле уменьшения машинного времени, идущего на расчет задачи, очевидна\*).

В качестве примера, позволяющего оценить точность предложенного метода, рассмотрим задачу, описывающую лучистый теплообмен в полукруге [60]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} l r \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} l \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad 0 \leq r \leq R, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad (4.71)$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} l r \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} l \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \kappa U = \kappa 4 \sigma T^4, \quad \kappa = \frac{1}{l}, \quad (4.72)$$

с граничными условиями

$$U|_{r=R} = U_0, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=-\pi/2} = \left. \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\pi/2} = 0, \\ R = 5,95, \quad U_0 = 3,5 \cdot 10^{-5}. \quad (4.73)$$

Начальное распределение температуры и длина свободного пробега выбирались следующие:

$$T(r, \varphi, 0) = \begin{cases} 1,2(1 + 0,25 \cos \varphi), & 0 \leq r \leq 2,35, \\ 0,03, & 2,35 \leq r \leq R, \end{cases} \\ l = 1 / [(2,5T^2 + 0,1)(1 + 0,3 \sin \varphi)].$$

\*) На первый взгляд может показаться, что предлагаемый безитерационный алгоритм близок к следующему. С помощью отношения (4.63) заменим исходное уравнение (4.5) на уравнение

$$B_{in} U_{i, n-1}^{j'} + K_{in} U_{i-1, n}^{j'} - (C_{in} - l_{in}^j V_{in}) U_{in}^{j'} + \\ + E_{in} U_{i+1, n}^{j'} + F_{in}^{j'} = 0,$$

$$j' = j, \dots, j + N_2, \quad i = 2, \dots, N_i - 1, \quad n = 2, \dots, N_n - 1,$$

которое можно решить прямым методом. На шагах по времени с индексами  $j' = j, \dots, j + N_2$  решение  $U_{in}^{j'}$  получается с помощью применения формул одномерной прогонки на  $n$ -й строке и последующего перехода на  $n+1$  строку.

При таком способе полученное значение сеточной функции  $U_{in}^{j'}$ , в отличие от решения исходной системы уравнений (4.5), не зависит от свободного члена  $F_{in}^{j'}$  и коэффициентов разностной схемы на строках с индексом большим, чем  $n$ . В безытерационном алгоритме (4.64)—(4.70) значение сеточной функции  $U_{in}^{j'}$  зависит от значений коэффициентов и свободного члена во всех точках исследуемой области. Связано это с тем, что в рассмотренной процедуре (4.64)—(4.70)  $U_{in}^{j'}$  определяется уже после нахождения прогоночных коэффициентов с помощью выражения (4.70).

Уравнения (4.71) — (4.72) решались на равномерной сетке по углу и квазиравномерной сетке по радиусу:

$$\varphi_n = \varphi_{n-1} + \Delta\varphi, \quad \Delta\varphi = \pi/20, \quad \varphi_1 = -\pi/2, \\ r_i = r_{i-1} + \Delta r_i, \quad \Delta r_i = \Delta r_{i-1} \cdot 1,05, \quad r_1 = 0.$$

Уравнение (4.72) аппроксимировалось с помощью пятиточечной разностной схемы (4.5).

Рассматривались три способа решения системы уравнений (4.71) — (4.72). Первый — эталонный, когда уравнение (4.72), описывающее поведение плотности энергии излучения, считалось на каждом шаге по времени. Во втором варианте уравнение (4.72) считалось один раз на пять шагов по времени. На остальных шагах плотность энергии излучения  $U$  определялась с помощью безытерационного алгоритма (4.64) — (4.70). Уравнения энергии (4.71) при этом считалось на каждом шаге по времени. В третьем способе система (4.71) — (4.72) решалась на каждом шаге по времени, но этот шаг был в пять раз более крупным, чем во втором варианте. Третий вариант по числу операций в целом близок ко второму варианту, так как в том и другом вариантах происходит одинаковое число итерационных, потребляющих основное машинное время решений уравнения (4.72). По сути дела, если во втором варианте в течение пяти шагов по времени замораживался лишь коэффициент  $l$  (4.63), а само решение  $U_2$  изменялось с течением времени в зависимости от изменения температуры, то в третьем варианте в течение пяти шагов замораживалось само решение  $U_3$ .

В проведенных расчетах максимальное относительное отклонение  $\delta_2 = (U_1 - U_2)/U_2$  между «эталонным» решением  $U_1$  и решением  $U_2$ , полученным с помощью безытерационного алгоритма (4.64) — (4.70), не превышало 2,5%. В свою очередь максимальное отклонение  $\delta_3 = (U_1 - U_3)/U_3$  результатов расчета по третьему варианту от «эталонного» составило 60%\*).

Большая величина погрешности  $\delta_3$  не в последнюю очередь связана с сильной нелинейной зависимостью правой части и коэффициентов (4.72) от температуры. Именно с такой ситуацией приходится сталкиваться при

---

\*) Естественно, что значения погрешностей  $\delta_2$  и  $\delta_1$  зависят от конкретного шага по времени  $\tau^j$ . С уменьшением  $\tau^j$  величины  $\delta_2$  и  $\delta_3$  также уменьшаются.

математическом моделировании большинства задач динамики излучающего газа. Поэтому использование безытерационной схемы (4.64)—(4.70) может оказаться полезным при решении двумерных задач РГД.

Правда, как показывает опыт численных расчетов, применять безытерационный алгоритм необходимо с достаточной степенью осторожности. Чтобы не допустить значительной потери точности, пересчет коэффициентов (4.63) следует проводить не более чем через 2—3 шага по времени.

Аналогичную безытерационную процедуру можно использовать и для решения девятиточечной схемы (4.28). Решим на  $j$ -м шаге по времени систему уравнений (4.28) и определим коэффициенты

$$\begin{aligned} l'_{in} &= U^j_{i, n+1} / U^j_{in}, \quad l'_{1in} = U^j_{i+1, n+1} / U^j_{in}, \\ l'_{2in} &= U^j_{i-1, n+1} / U^j_{in}. \end{aligned} \quad (4.74)$$

В дальнейшем в течение  $N_2$  шагов по времени будем считать коэффициенты (4.74) неизменными и определим плотность энергии излучения  $U$  с помощью следующей схемы:

$$\alpha_{i+1, n} = E_{in} [C_{in} - \tilde{\alpha}_{in} (B_{in} + \alpha_{i, n-1} A_{in} + \gamma_{i, n-1} L_{in}) - \alpha_{in} K_{in} - l_{in} V_{in} - l_{1in} Y_{in} - l_{2in} D_{in}]^{-1}, \quad \alpha_{2n} = \Phi_{2n}; \quad (4.75)$$

$$\begin{aligned} \beta_{i+1, n} &= [\beta_{in} K_{in} + \beta_{i, n-1} A_{in} + d_{i, n-1} L_{in} + \tilde{\beta}_{in} (B_{in} + \\ &+ \alpha_{i, n-1} A_{in} + \gamma_{i, n-1} L_{in}) + F_{in}] [C_{in} - \tilde{\alpha}_{in} (B_{in} + \alpha_{i, n-1} A_{in} + \\ &+ \gamma_{i, n-1} L_{in}) - \alpha_{in} K_{in} - l_{in} V_{in} - l_{1in} Y_{in} - l_{2in} D_{in}]^{-1}, \\ \beta_{2n} &= \xi_{2n}, \end{aligned} \quad (4.76)$$

$$i = 2, \dots, N_i - 1, \quad n = 2, \dots, N_n - 1;$$

$$\begin{aligned} \gamma_{i-1, n} &= K_{in} [C_{in} - \tilde{\alpha}_{in} (B_{in} + \alpha_{i, n-1} A_{in} + \gamma_{i, n-1} L_{in}) - \\ &- \gamma_{in} E_{in} - l_{in} V_{in} - l_{1in} Y_{in} - l_{2in} D_{in}]^{-1}, \\ \gamma_{N_i-1, n} &= \Phi_{N_i-1, n}, \end{aligned} \quad (4.77)$$

$$\begin{aligned} d_{i-1, n} &= [d_{in} E_{in} + \beta_{i, n-1} A_{in} + d_{i, n-1} L_{in} + \tilde{\beta}_{in} (B_{in} + \\ &+ \alpha_{i, n-1} A_{in} + \gamma_{i, n-1} L_{in}) + F_{in}] [C_{in} - \tilde{\alpha}_{in} (B_{in} + \alpha_{i, n-1} A_{in} + \\ &+ \gamma_{i, n-1} L_{in}) - \gamma_{in} E_{in} - l_{in} V_{in} - l_{1in} Y_{in} - l_{2in} D_{in}]^{-1}, \\ d_{N_i-1, n} &= \xi_{N_i-1, n}, \end{aligned} \quad (4.78)$$

$$i = N_i - 1, \dots, 2, \quad n = 2, \dots, N_n - 1;$$

$$\tilde{\alpha}_{i, n+1} = V_{in} [C_{in} - \tilde{\alpha}_{in} (B_{in} + \alpha_{i, n-1} A_{in} + \gamma_{i, n-1} L_{in}) - \alpha_{in} K_{in} - \gamma_{in} E_{in} - l_{1in} Y_{in} - l_{2in} D_{in}]^{-1}, \quad \tilde{\alpha}_{i2} = \varphi_{i2}; \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_{i, n+1} = & [\tilde{\beta}_{in} (B_{in} + \alpha_{i, n-1} A_{in} + \gamma_{i, n-1} L_{in}) + \beta_{i, n-1} A_{in} + \\ & + d_{i, n-1} L_{in} + \beta_{in} K_{in} + d_{in} E_{in} + F_{in}] [C_{in} - \\ & - \tilde{\alpha}_{in} (B_{in} + \alpha_{i, n-1} A_{in} + \gamma_{i, n-1} L_{in}) - \alpha_{in} K_{in} - \gamma_{in} E_{in} - \\ & - l_{1in} Y_{in} - l_{2in} D_{in}]^{-1}, \quad \tilde{\beta}_{i2} = \xi_{i2}, \quad (4.80) \\ & i=2, \dots, N_i-1, \quad n=2, \dots, N_n-1; \end{aligned}$$

$$U_{in} = \tilde{\alpha}_{i, n+1} U_{i, n+1} + \tilde{\beta}_{i, n+1}, \quad i=2, \dots, N_i-1, \\ n=N_n-1, \dots, 1, \quad (4.81)$$

где

$$U_{iN_n} = (\varphi_{i, N_n-1} \tilde{\beta}_{iN_n} + \xi_{i, N_n-1}) / (1 - \varphi_{i, N_n-1} \tilde{\alpha}_{iN_n}).$$

В расчетах двумерных задач РГД  $N_2$  — число шагов, через которые пересчитывались коэффициенты (4.63) и (4.74), — было относительно невелико  $2 \leq N_2 \leq 4$  [59]. Тем не менее такой подход позволил заметно сократить машинное время, идущее на решение задачи динамики излучающего газа в целом.

**7. Попеременно-треугольный метод с сопряженными градиентами (ПТМ-СГ).** Каноническая форма итерационной схемы. Подробно рассмотренный в этом параграфе « $\alpha$ — $\beta$ »-итерационный метод, конечно, не является единственным алгоритмом, который можно применять для решения разностных схем уравнений (4.2) и (4.3). Выбору итерационного алгоритма может помочь понятие канонической формы итерационной схемы [162, 168].

Запишем разностную аппроксимацию эллиптического уравнения в виде операторного уравнения

$$Au = f, \quad (4.82)$$

где  $u$  — искомый,  $f$  — заданный элемент конечномерного гильбертова пространства сеточных функций  $H$ ,  $A$  — оператор, отображающий  $H$  в  $H$ .

Любая линейная двухслойная итерационная схема для уравнения (4.82), связывающая два приближения  $y_{k+1}$ ,  $y_k$ , может быть записана в каноническом виде

$$B_{k+1} \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = f, \quad k=0, 1, \dots, \quad y_0 \in H. \quad (4.83)$$

Соответственно трехслойная схема, связывающая три приближения, примет вид

$$B_{k+1}y_{k+1} = \alpha_{k+1}(B_{k+1} - \tau_{k+1}A)y_k + (1 - \alpha_{k+1})B_{k+1}y_{k-1} + \alpha_{k+1}\tau_{k+1}f, \quad k=1, 2, \dots, \quad (4.84)$$

$$B_1y_1 = (B_1 - \tau_1A)y_0 + \tau_1f.$$

Здесь  $\{B_k\}$  — последовательность линейных и, как правило, легко обратимых операторов,  $\{\tau_k\}$  и  $\{\alpha_k\}$  — последовательности итерационных параметров,  $y_0$  — произвольное приближение.

Если в схемах (4.83) или (4.84) операторы  $B_k$  для всех  $k$  совпадают с единичным,  $B_k \equiv E$ , то такие схемы называются *явными*, в противном случае — *неявными*. Наиболее широко используются схемы с операторами, не зависящими от номера итераций  $B_k \equiv B$ . При заданной последовательности  $\{B_k\}$  итерационные параметры  $\{\tau_k\}$  и  $\{\alpha_k\}$  выбираются из условия минимума числа итераций, достаточных для решения исходного уравнения (1.1) с некоторой точностью.

К числу успешных модификаций попеременно-треугольного метода следует отнести попеременно-треугольный метод с сопряженными градиентами (ПТМ-СГ), рассмотренный в работе [46].

Алгоритм ПТМ-СГ применяется для решения разностных уравнений (4.82) с самосопряженным положительно-определенным оператором  $A$ . Этот алгоритм является трехслойным и может быть описан с помощью канонической формы (4.84). В свою очередь оператор  $B_k$  не зависит от номера итерации, самосопряжен, положительно определен и задается в виде

$$B = (D + \omega A_1)D^{-1}(D + \omega A_2). \quad (4.85)$$

Здесь операторы  $A_1$ ,  $A_2$  и  $D$  такие, что выполнены условия  $A_1 = A_2^*$ ,  $A_1 + A_2 = A$  и  $D = D^* > 0$ . Априорная информация в этом методе задается с помощью чисел  $\delta$  и  $\Delta$ , которые в свою очередь определяются из неравенств:  $\delta D \leq A$ ,  $A_1 D^{-1} A_2 \leq \Delta A / 4$ ,  $\delta > 0$ . Оптимальное значение параметра  $\omega$ , входящего в выражение (4.85), определяется по формуле

$$\omega = 2 / \sqrt{\delta \Delta}. \quad (4.86)$$

Для того чтобы окончательно определить итерационный алгоритм ПТМ-СГ, необходимо задать параметры  $\{\tau_k\}$ ,  $\{\alpha_k\}$ , входящие в выражение (4.84). Эти параметры

определяются по формулам методов сопряженных направлений [168]:

$$\tau_{k+1} = \frac{(A w_k, z_k)}{(A w_k, w_k)}, \quad k=0, 1, \dots, \quad (4.87)$$

$$\alpha_{k+1} = \left[ 1 - \frac{\tau_{k+1}}{\tau_k} \frac{(A w_k, z_k)}{(A w_{k-1}, z_{k-1})} \frac{1}{\alpha_k} \right]^{-1}, \\ k=1, 2, \dots, \alpha_1 = 1, \quad (4.88)$$

где  $w_k = B^{-1} r_k$  — поправка,  $A z_k = A y_k - f$  — невязка.

8. Метод неполного разложения Холецкого с сопряженными градиентами (ICCG). Метод ICCG (Incomplete Cholesky — Conjugate Gradient) [218] может быть определен с помощью трехслойной итерационной схемы, записанной в канонической форме (4.84) [46]. Оператор  $B$  задается с помощью факторизованной матрицы  $\beta$

$$\beta = LDL', \quad (4.89)$$

построенный по алгоритму неполного разложения Холецкого. При этом предполагается, что матрица  $a$  исходного оператора  $A$  — симметричная,  $L$  — нижнетреугольная,  $L'$  — матрица, транспонированная к  $L$ ,  $D$  — диагональная матрица. Параметры итерационной схемы (4.84) определяются по формулам

$$\tau_{k+1} = \frac{(D w_k, z_k)}{(D w_k, w_k)}, \quad k=0, 1, \dots, \quad (4.90)$$

$$\alpha_{k+1} = \left[ 1 - \frac{\tau_{k+1}}{\tau_k} \frac{(D w_k, z_k)}{(D w_{k-1}, z_{k-1})} \frac{1}{\alpha_k} \right]^{-1}, \quad k=1, 2, \dots, \quad (4.91) \\ \alpha_1 = 1.$$

Для того чтобы понять структуру матрицы  $\beta$ , рассмотрим вначале алгоритм полного разложения Холецкого. Известно, что положительно-определенную симметричную матрицу  $a$  размерности  $N \times N$  можно представить в виде треугольных матриц  $\tilde{L}$  и  $\tilde{L}'$  и диагональной матрицы  $\tilde{D}$

$$a = \tilde{L} \tilde{D} \tilde{L}'. \quad (4.92)$$

Элементы  $\tilde{l}_{in}$ ,  $\tilde{d}_{in}$  матриц  $\tilde{L}$  и  $\tilde{D}$  определяются из системы, состоящей из  $M \times N$  уравнений

$$\sum_{k=1}^n \tilde{l}_{ik} \tilde{l}_{nk} \tilde{d}_{kk} = a_{ij}, \quad i=n, n+1, \dots, N, \\ \tilde{l}_{in} = 0, \quad i < n, \quad n=1, 2, \dots, N. \quad (4.93)$$

Решение системы уравнений (4.92) дается формулами

алгоритма полного разложения Холецкого:

$$\begin{aligned} \tilde{l}_{in} &= a_{in} - \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{l}_{ik} \tilde{l}_{nk} \tilde{d}_{kk}, \\ \tilde{d}_{ii} &= 1/\tilde{l}_{ii}, \quad i = n, n+1, \dots, N, \\ \tilde{l}_{in} &= 0, \quad i < n, \quad n = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Следует отметить, что даже для разреженных матриц  $a$ , с которыми приходится иметь дело при решении систем уравнений (4.2) и (4.3), алгоритм полного разложения приводит к плотно заполненным матрицам  $\tilde{L}$ . Поэтому для решения систем разностных уравнений такой прямой метод требует слишком много машинного времени и практически неприменим.

В алгоритме неполного разложения Холецкого по исходной матрице  $a$  строится матрица  $L$  также разреженной структуры. При этом симметричная матрица  $\beta = LDL'$ , вообще говоря, не равна исходной матрице  $a$ .

Потребуем выполнения условий  $(LDL')_{in} = a_{in}$  не для всех индексов  $i, n$ , как это требуется в алгоритме полного разложения, а только для тех индексов, для которых  $a_{in} \neq 0$ . Для остальных индексов будем предполагать, что  $l_{in} = 0$ . Тем самым структуры разреженности матриц  $L, L'$  и исходной матрицы  $a$  будут совпадать. Окончательно алгоритм неполного разложения Холецкого, позволяющий сформировать матрицу  $\beta$ , строится так:

1) задается множество  $P$  индексов  $(i, n)$ ,  $a_{in} \neq 0$ , для которых полагается  $l_{in} = 0, i > n$ ;

2) определяются элементы  $l_{in}$  и  $d_{ii}$  матриц  $L$  и  $D$  по формулам

$$\begin{aligned} l_{in} &= a_{in} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{ik} l_{nk} d_{kk}, \quad (i, n) \in P, \\ d_{ii} &= 1/l_{ii}, \quad i = n, n+1, \dots, N, \\ l_{in} &= 0, \quad (i, n) \notin P, \quad n = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.95)$$

С помощью полученных таким образом матриц  $\beta = LDL'$  и  $D$  определяются оператор  $B$  и параметры (4.90), (4.91), участвующие в трехслойной итерационной схеме (4.84).

Построенный таким образом оператор  $B$  не обязательно оказывается близким к исходному оператору  $A$ . Существуют примеры, когда алгоритм неполного разложения дает матрицу  $\beta$ , не сохраняющую даже поло-

жительную определенность матрицы  $a$ . Однако указанная «поэлементная» близость матриц  $\beta$  и  $a$  позволяет надеяться в большинстве случаев на хорошую сходимость итерационного алгоритма, что подтверждают приведенные в работе [218] примеры численного решения уравнений диффузионного типа.

В заключение параграфа следует вновь отметить, что решение систем сеточных уравнений (4.2) и (4.3) является одним из важнейших элементов расчета двумерных задач РГД. Совершенствование итерационных алгоритмов, использование новых принципов их построения должно привести к дальнейшему повышению эффективности численного решения многомерных задач динамики излучающего газа.

### § 5. Некоторые методы численного решения уравнения переноса излучения

Рассмотренные в третьем и четвертом параграфах настоящей главы методы применялись для расчета системы многогрупповых уравнений диффузии — одной из математических моделей, широко применяемых для описания поля излучения в двумерных задачах радиационной газовой динамики. В этом параграфе рассматриваются алгоритмы, используемые непосредственно для решения двумерного уравнения переноса излучения. В силу того, что уравнение переноса имеет одинаковую структуру для всех групп, все рассмотрение, если это специально не оговаривается, будет проведено на примере одногруппового уравнения

$$\Omega \operatorname{grad} I + \kappa I = \kappa \sigma T^4 / \pi. \quad (5.1)$$

1. Метод характеристик,  $S_n$ -метод. В методе характеристик исходное уравнение (5.1) заменяется на обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dI}{ds} + \kappa I = \frac{\kappa \sigma T^4}{\pi}, \quad (5.2)$$

решаемое вдоль характеристической координаты  $s$ , направление которой совпадает с направлением полета фотона  $\Omega$ .

Для решения уравнения (5.2) можно использовать различные разностные схемы, например схемы с кусочно-постоянной интерполяцией.

Так, для вычисления интенсивности энергии излучения  $I_{in}$  вдоль направления  $\Omega_1$  в центре ячейки  $i, n$

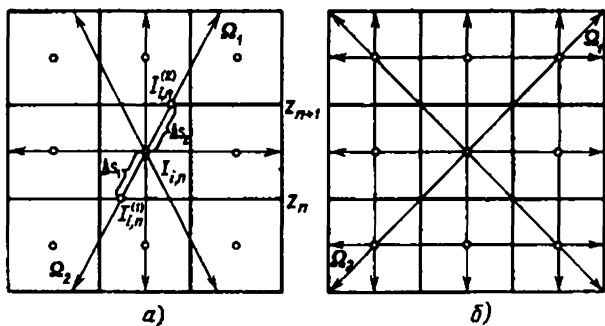


Рис. 53. К решению двумерного уравнения переноса методом характеристик: а) разностная сетка по пространству, не согласованная с выбранными угловыми направлениями; б) разностная сетка и угловые направления согласованы

(рис. 53, а) используем выражение, аналогичное (3.6) (гл. III):

$$\frac{I_{in} - I_{in}^{(1)}}{\Delta s_1} + \kappa_{in} \frac{I_{in} + I_{in}^{(1)}}{2} = \kappa_{in} \frac{\sigma T_{in}^4}{\pi}, \quad (5.3)$$

или более точную схему, аналогичную схеме (3.12) (гл. III):

$$I_{in} = I_{in}^{(1)} \exp\{-\kappa_{in} \Delta s_1\} + \frac{\sigma \kappa_{in} T_{in}^4}{\pi} (1 - \exp\{-\kappa_{in} \Delta s_1\}). \quad (5.4)$$

Здесь  $I_{in}^{(1)}$  — значение интенсивности энергии излучения в точке (рис. 53, а) пересечения характеристики 1 и прямой  $z = z_n$ ,  $\Delta s_1$  — длина соответствующего отрезка характеристики 1 внутри ячейки  $i, n$ .

Для направления  $\Omega_2$  соответствующие выражения, определяющие  $I_{in}$ , примут вид

$$\frac{I_{in} - I_{in}^{(2)}}{\Delta s_2} + \kappa_{in} \frac{I_{in} + I_{in}^{(2)}}{2} = \kappa_{in} \frac{\sigma T_{in}^4}{\pi}, \quad (5.5)$$

$$I_{in} = I_{in}^{(2)} \exp\{-\kappa_{in} \Delta s_2\} + \frac{\sigma \kappa_{in} T_{in}^4}{\pi} (1 - \exp\{-\kappa_{in} \Delta s_2\}). \quad (5.6)$$

Здесь  $I_{in}^{(2)}$  — значение интенсивности энергии излучения в точке (рис. 53, а) пересечения характеристики 2 и прямой  $z = z_{n+1}$ ,  $\Delta s_2$  — длина отрезка характеристики 2 внутри ячейки  $i, n$ .

Аналогично выражениям (5.3), (5.5) и (5.4), (5.6) могут быть вычислены значения интенсивности энергии излучения  $I_{in}$  и в других направлениях. После нахождения  $I_{in}$  значения плотности  $U$  и потока энергии  $W$

в центре ячейки  $i, n$  определяются с помощью квадратурных формул, соответствующих интегрированию интенсивности энергии излучения по всем направлениям. Однако такой способ нахождения потока с помощью схем (5.3)—(5.6) следует использовать, когда оптическая толщина разностных ячеек невелика. Более рациональным как с точки зрения повышения точности расчетов, так и с целью существенного уменьшения объема вычислений, представляется применение схем, основанных на кусочно-постоянной интерполяции для решения уравнения переноса одновременно с решением системы уравнений квазидиффузии. При этом, как и в одномерном случае, результаты расчетов по этим схемам следует использовать только для нахождения квазидиффузионных коэффициентов. К сожалению, в научной литературе пока отсутствуют примеры использования квазидиффузионной системы уравнений для решения двумерных задач РГД.

Уравнение (5.2) можно решать и с помощью разностных схем, использующих кусочно-линейную интерполяцию, например с помощью схемы, аналогичной (4.57) (гл. III):

$$I_{in} = I_{in}^{(1)} \exp\{-\kappa_{in}\Delta s_1\} - bT^2 \frac{dT}{ds} \beta \frac{(1 - \exp\{-\kappa_{in}\Delta s_1\})}{\kappa_{in}},$$

$$b = \frac{2k^3}{h^3 c^3}, \quad \beta = \frac{(T_* x / T)^4 \exp\{T_* x / T\}}{(\exp\{T_* x / T\} - 1)^2}, \quad x = \frac{h\nu}{kT_*}, \quad (5.7)$$

где  $T_*$  — некоторая фиксированная температура. Эта схема, используемая, например, в работе [208], дает правильное асимптотическое значение потока энергии  $W$  и в случае больших оптических толщин разностных ячеек.

Из рис. 53, а видно, что для нахождения интенсивности  $I_{i-1, n-1}$  внутри ячейки  $i-1, n-1$  необходимо вводить свою систему характеристик, отличную от той, которая использовалась для определения  $I_{in}$ . Использование индивидуальной системы характеристик для определения интенсивности внутри каждой ячейки может сделать нереальным расчет из-за очень больших затрат машинного времени.

На рис. 53, б приведена система характеристик, согласованная с расчетной сеткой. При этом каждая характеристика одновременно служит для определения поля излучения во многих пространственных точках. Такой подход гораздо более экономичен. Однако он

требует тесного увязывания существующей пространственной сетки и разбиения по угловым направлениям, что не всегда оправдано с точки зрения расчета газодинамической задачи. Например, такой подход исключает использование лагранжевой системы координат, в которой пространственная сетка постоянно подстраивается под газодинамическое течение.

Часто употребляются схемы, использующие небольшое число угловых направлений. При этом относительно просто удается добиться согласования пространственной сетки и разбиения по угловым направлениям.

В работах [156, 208] рассматривалось двухпоточное приближение. Поток энергии излучения определялся как разность односторонних потоков в положительном (1, 3) и отрицательном (2, 4) направлениях осей  $z$  и  $r$  соответственно (рис. 54, а). В работах

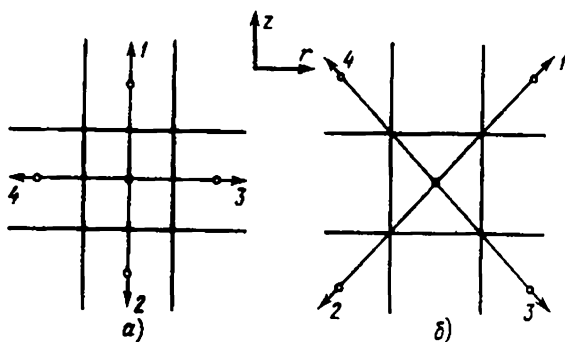


Рис. 54. Виды разбиений, использующих небольшое число направлений

Ю. Д. Шмыглевского и соавторов [103, 104] использовалось другое угловое разбиение (рис. 54, б), которое условно можно назвать диагональным.

Естественно, что применение лишь небольшого числа угловых направлений для описания поля излучения может привести к негативному счетному «эффекту луча» (§ 1, гл. IV). Однако для работ [103, 104, 156] этот эффект, по всей видимости, не имеет места, так как размеры зоны, в основном генерирующей собственное излучение плазмы, были близки к размерам всей исследуемой области. В работе [208] для устранения «эффекта луча» принимались меры, основанные на специальном выделении зоны, генерирующей излучение.

Для описания поля излучения в двумерных задачах радиационной газовой динамики можно использовать также и  $S_n$ -метод. Рассмотрим его применительно к решению уравнения переноса в декартовой системе координат [31]:

$$\sqrt{1-\gamma^2} \left( \mu \frac{\partial I}{\partial r} + \sqrt{1-\mu^2} \frac{\partial I}{\partial z} \right) + \kappa I = \frac{\kappa \sigma T^4}{\pi}. \quad (5.8)$$

Здесь  $\mu$  — косинус угла между направлением полета фотона и осью  $r$ ,  $\gamma$  — косинус угла между направлением полета фотона и осью, перпендикулярной плоскости  $(r, z)$ .

Выберем дискретную сеть угловых направлений  $\mu_m$ ,  $\gamma_l$  и введем в прямоугольной области узлы  $z_n$ ,  $r_i$ . На рис. 55, а изображена ячейка пространственной сетки,

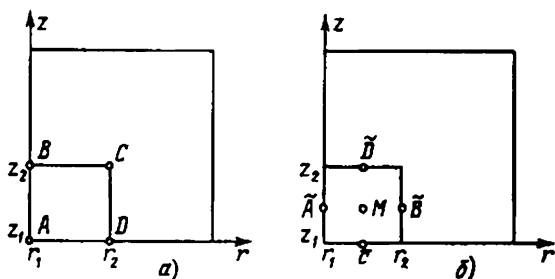


Рис. 55. а) К выводу формул  $S_n$ -метода. б) К выводу формул  $DS_n$ -метода

расположенная в левом нижнем углу. От этой ячейки начинается счет при положительных значениях  $\mu_m$ .

Угловые переменные  $\mu$  и  $\gamma$  играют роль параметров, поэтому проинтегрируем исходное уравнение (5.8) только по пространственным переменным. При этом получим схему

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{1-\gamma_l^2}}{2} \mu_m (I_C + I_D - I_A - I_B) \Delta z_n + \\ & + \frac{\sqrt{1-\gamma_l^2} \sqrt{1-\mu_m^2}}{2} (I_B + I_C - I_A - I_D) \Delta r_i + \\ & + \frac{\Delta r_i \Delta z_n}{4} \kappa_{in} (I_A + I_B + I_C + I_D) = \frac{\Delta r_i \Delta z_n \kappa_{in} \sigma T_{in}^4}{\pi}, \quad (5.9) \\ & i=1, \dots, N_i, \quad n=1, \dots, N_n. \end{aligned}$$

Из этого уравнения по известным граничным значениям  $I_A, I_B, I_D$  находим  $I_C$ . Далее расчет продолжается для всех ячеек нижнего ряда в направлении увеличения индекса  $i$ , затем для ячеек второго ряда и т. д. в направлении увеличения индекса  $n$ . Для отрицательных  $\mu_m$  счет начинается с правой границы.

Схема  $S_n$ -метода применялась в работе [226] для решения задачи об эволюции огненного шара в воздухе. К сожалению, в этой работе не приводятся конкретные разностные схемы, используемые для решения уравнения переноса.

Наряду со схемами  $S_n$ -метода рассмотрим схемы  $DS_n$ -метода, которые связывают значения интенсивности энергии излучения в середине ячейки (точка  $M$  на рис. 55, б) с ее значениями в серединах сторон (точки  $\bar{A}, \bar{D}, \bar{B}$  и  $\bar{C}$ ).

Схемы  $DS_n$ -метода, так же как и  $S_n$ -метода, получаются путем интегрирования исходного уравнения переноса по ячейке  $r_i \leq r \leq r_{i+1}, z_n \leq z \leq z_{n+1}$ :

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 - \gamma_i^2} \mu_m (I_{\bar{B}} - I_{\bar{A}}) \Delta z_n + \\ & + \sqrt{1 - \gamma_i^2} \sqrt{1 - \mu_m^2} (I_{\bar{D}} - I_{\bar{C}}) \Delta r_i + \\ & + \Delta r_i \Delta z_n \chi_{in} I_M = \Delta r_i \Delta z_n \chi_{in} \sigma T_{in}^4 / \pi, \quad (5.10) \\ & i = 1, \dots, N_i, \quad n = 1, \dots, N_n. \end{aligned}$$

В уравнении (5.10) известны  $I_{\bar{A}}$  и  $I_{\bar{C}}$  и неизвестны  $I_{\bar{B}}, I_{\bar{D}}, I_M$ . Свяжем решение в центре ячейки со значениями на противоположных сторонах:

$$I_M = a I_{\bar{B}} + (1 - a) I_{\bar{A}}, \quad (5.11)$$

$$I_M = b I_{\bar{D}} + (1 - b) I_{\bar{C}}, \quad (5.12)$$

где

$$a = \frac{r_m - r_i}{r_{i+1} - r_i}, \quad b = \frac{z_m - z_n}{z_{n+1} - z_n}.$$

С помощью выражений (5.11) и (5.12) исключаем из уравнения (5.10) значения  $I_{\bar{B}}$  и  $I_{\bar{D}}$  и находим из него значение  $I_M$ . Затем, используя (5.11) и (5.12), зная  $I_{\bar{A}}, I_{\bar{C}}$  и  $I_M$ , находим  $I_{\bar{D}}, I_{\bar{B}}$ . При  $a = b = 0,5$  схема  $DS_n$ -метода называется *ромбической схемой*.

Автор не встречал в литературе примеров использования  $DS_n$ -методов для решения двумерных задач радиационной газовой динамики. Однако эти методы применяются для решения близкого по своей структуре к уравнению переноса излучения кинетического уравнения для нейтронов [49, 135, 212, 220].

2. Определение поля излучения с помощью самосопряженного уравнения. В. С. Владимировым было показано [51], что решение уравнения переноса нейтронов

$$\Omega \operatorname{grad} \varphi + \kappa \varphi = \frac{\lambda}{4\pi} \int \theta(\mu_0, \mathbf{r}) \varphi(\Omega', \mathbf{r}) d\Omega' + F(\Omega, \mathbf{r}) \quad (5.13)$$

с условием на границе

$$\varphi(\Omega, \Gamma) = 0, \quad (\Omega, \mathbf{n}) \leq 0$$

и выполнением соотношений

$$F(-\Omega, \mathbf{r}) = F(\Omega, \mathbf{r}), \quad (5.14)$$

$$\theta(\mu_0, \mathbf{r}) = \theta(\cos(\Omega, \Omega'), \mathbf{r}) = \theta(-\mu_0, \mathbf{r}) \quad (5.15)$$

относительно источника нейтронов  $F$  и индикатрисы рассеяния  $\theta$  может быть найдено из решения самосопряженного уравнения

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{\kappa} \Omega \operatorname{grad}\right)^2 u + u &= \\ &= \frac{\lambda}{4\pi} \int \theta(\mu_0, \mathbf{r}) u(\Omega', \mathbf{r}) d\Omega + F(\Omega, \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (5.16)$$

с граничным условием

$$-\frac{1}{\kappa} \Omega \operatorname{grad} u + u = 0 \quad (5.17)$$

при  $(\Omega, \mathbf{n}) < 0$ , где  $\mathbf{n}$  — вектор нормали к граничной поверхности  $\Gamma$ .

При этом имеет место следующая связь между решением исходного уравнения (5.13) и уравнения (5.16):

$$\varphi = u - \Omega \frac{1}{\kappa} \operatorname{grad} u. \quad (5.18)$$

Аналогично для уравнения переноса излучения (5.1) с граничным условием

$$I(\Omega, \Gamma) = 0 \text{ при } (\Omega, \mathbf{n}) < 0$$

решение может быть найдено из уравнения

$$\left(-\frac{1}{\kappa} \Omega \operatorname{grad}\right)^2 u + u = \frac{\kappa \sigma T^4}{\kappa} \quad (5.19)$$

с граничным условием

$$-\frac{1}{\kappa} \Omega \operatorname{grad} u + u = 0, \quad (\Omega, n) < 0. \quad (5.20)$$

Будем определять поле излучения с помощью уравнения (5.19). Однако его непосредственное применение еще не дает гарантию отсутствия «эффекта луча». В самом деле, разобьем всю сферу направлений на телесные углы  $\omega_m$  ( $m=1, \dots, N_m$ ). Внутри каждого угла  $\omega_m$  выберем специальное направление  $\Omega_m$ .

Уравнение (5.19) можно решить, интегрируя вначале вдоль направления  $\Omega_m$ , а затем вдоль направления  $-\Omega_m$ . Полученное таким образом значение  $u_m$  будем считать значением  $u$  внутри телесного угла  $\omega_m$ .

Предположим, что область, генерирующая излучение, невелика (на рис. 56 она заштрихована). Тогда значение интенсивности энергии излучения  $I_m$  в точке  $B$ , так же как и при решении исходного уравнения переноса (5.1), будет существенно зависеть от выбора направления  $\Omega_m$ .

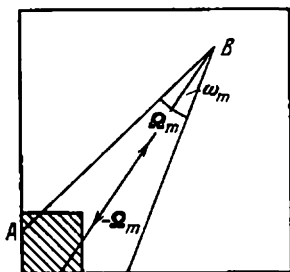


Рис. 56

Рассмотрим другой способ решения самосопряженного уравнения (5.19) [150]. Проинтегрируем это уравнение внутри каждого телесного угла  $\omega_m$ , полагая при этом  $u$  не зависящим от угловой переменной. В декартовой системе координат получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\kappa} \frac{\partial u_m}{\partial r} \int_{\omega_m} \Omega_r^2 d\Omega - \left[ \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\kappa} \frac{\partial u_m}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\kappa} \frac{\partial u_m}{\partial z} \right] \times \\ \times \int_{\omega_m} \Omega_r \Omega_z d\Omega - \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\kappa} \frac{\partial u_m}{\partial z} \int_{\omega_m} \Omega_z^2 d\Omega + \\ + \kappa u_m \int_{\omega_m} d\Omega = \frac{\kappa \sigma T^4}{\pi} \int_{\omega_m} d\Omega, \quad (5.21) \end{aligned}$$

$$m = 1, \dots, N_m.$$

Здесь  $\Omega_r$  и  $\Omega_z$  — косинусы углов между направлением полета фотона и осями  $r$  и  $z$ . Внутри каждого телесно-

го угла  $\omega_m$  будем определять  $u_m$ , решая уравнение (5.21).

Использование системы уравнений, аналогичной системе (5.21), было предложено В. И. Лебедевым в работе [121] в качестве одного из способов решения уравнения переноса нейтронов.

Отметим, что решение  $u_m$  системы уравнений (5.21) в той или иной мере зависит от всех направлений внутри телесного угла  $\omega_m$ . Если проинтегрировать уравнение (5.19) по всей сфере направлений ( $N_m=1$ ), полагая при этом  $u$  не зависящим от угла, то получится одно уравнение

$$-\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\kappa} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\kappa} \frac{\partial u}{\partial z} + \kappa u = \kappa 4\sigma T^4, \quad (5.22)$$

которое совпадает с уравнением диффузии.

Тем самым уравнение диффузии является частным случаем системы уравнений (5.21). Поэтому можно ожидать, что причина, приводящая к появлению не физических осцилляций в поле излучения для решения уравнений (5.21), так же как и для уравнений диффузии, будет отсутствовать.

В качестве примера использования системы уравнений (5.21) рассмотрим решение модельной задачи, определенной в единичном квадрате  $0 \leq r \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$ . Для исходного самосопряженного уравнения (5.19) правая часть задается в виде

$$\kappa 4\sigma T^4 = \begin{cases} 1, & 0 \leq r \leq 0,25, \quad 0 \leq z \leq 0,25, \\ 0 & \text{в остальных точках квадрата.} \end{cases} \quad (5.23)$$

Для простоты решения самосопряженного уравнения (5.19) рассматривалось только в плоскости  $(r, z)$ , т. е. фактически решалось уравнение

$$-\cos^2 \varphi \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\kappa} \frac{\partial u}{\partial r} - \cos \varphi \sin \varphi \left( \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\kappa} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\kappa} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \sin^2 \varphi \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\kappa} \frac{\partial u}{\partial z} + \kappa u = F \quad (5.24)$$

с граничным условием

$$-\frac{1}{\kappa} \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{\kappa} \sin \varphi \frac{\partial u}{\partial z} + u = 0, \quad (\Omega, n) < 0. \quad (5.25)$$

Здесь  $\kappa$  — коэффициент поглощения,  $\varphi$  — угол между направлением полета фотона и осью  $r$ ,  $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ .

Разобьем область изменения угла  $\varphi$  на  $N_m$  равных отрезков. Интегрируя внутри каждого из отрезков урав-

нение (5.24) и граничное условие (5.25), получим аналог системы уравнений (5.21), для аппроксимации которой использовалась девятиточечная разностная схема [150]:

$$\begin{aligned}
 &A_{min}u_{m,l-1,n-1} + B_{min}u_{ml,n-1} + L_{min}u_{m,l+1,n-1} + \\
 &\quad + K_{min}u_{m,l-1,n} - C_{min}u_{min} + E_{min}u_{m,l+1,n} + \\
 &\quad + D_{min}u_{m,l-1,n+1} + V_{min}u_{ml,n+1} + \\
 &\quad + Y_{min}u_{m,l+1,n+1} + F_{min} = 0. \quad (5.26)
 \end{aligned}$$

Граничные условия для уравнения (5.26), например, при  $r=0$ , аппроксимируются следующим образом:

$$u_{min} = R_{m2n}u_{m2n} + P_{m2n}u_{m2,n+1} \quad (5.27)$$

или

$$u_{min} = R_{m2n}u_{m2n} + P_{m2n}u_{m2,n-1}$$

в зависимости от углового интервала.

Не выписывая конкретный вид коэффициентов разностной схемы (5.26) и граничных условий (5.27), отметим, что условия (5.27) аппроксимируют производные вдоль направлений, неортогональных к граничной поверхности.

Будем решать разностную схему уравнений (5.26)—(5.27) с помощью « $\alpha$ — $\beta$ »-итерационного алгоритма, подробно рассмотренного в § 4. В качестве граничных значений прогоночных коэффициентов, участвующих в этих итерациях, с учетом условий (5.26) используем следующее:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{2n}^{(s+1)} &= R_{m2n}, & \beta_{2n}^{(s+1)} &= P_{m2n}u_{m2,n+1}^{(s)}, \\
 \alpha_{2n}^{(s+1)} &= R_{m2n}, & \beta_{2n}^{(s+1)} &= P_{m2n}u_{m2,n-1}^{(s)}.
 \end{aligned} \quad (5.28)$$

Аналогичным образом выбираются граничные значения для остальных прогоночных коэффициентов.

Единственное отличие от рассмотренного в предыдущем параграфе алгоритма заключается в том, что после окончания каждой итерации вновь вычисляются значения сеточной функции  $u_{min}^{(s)}$ . Это необходимо, чтобы пересчитать граничные значения коэффициентов (5.28).

На рис. 57 изображено поведение плотности энергии излучения на прямой  $r=0,5$  в зависимости от числа угловых интервалов. Решение получено с помощью системы (5.26)—(5.27). Для этого варианта предполагалось, что коэффициент поглощения  $\kappa$  постоянен по всей области решения ( $\kappa=2$ ), шаг пространственной сетки  $h$  одинаков по всем направлениям и равен 0,05.

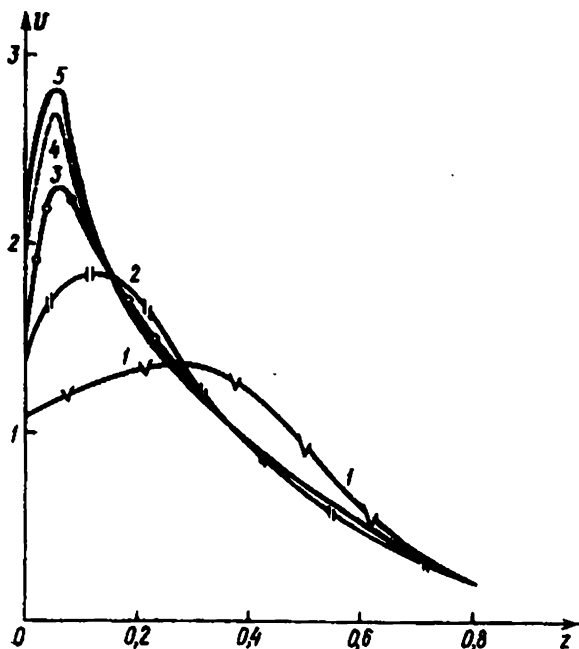


Рис. 57. Зависимость плотности энергии излучения, взятой в безразмерной системе единиц, от числа угловых интервалов. Кривые 1—5 соответствуют: 1 — двум угловым интервалам, 2 — шести, 3 — десяти, 4 — двадцати, 5 — сорока интервалам

Как и ожидалось, резкого изменения поведения численного решения в зависимости от изменения числа угловых интервалов, характерных для «эффекта луча», в данных расчетах не наблюдалось. Такой подход можно применять для более аккуратного, чем это следует из использования диффузионного приближения, определения поля излучения в задачах РГД.

Следует еще раз отметить, что данная методика, учитывающая угловое распределение, практически без изменения вписывается в рассмотренный ранее алгоритм решения двумерных задач радиационной газовой динамики, в которых для описания поля излучения используется многогрупповое диффузионное приближение. Правда, число групп при этом резко возрастает с  $N_k$  для диффузионного приближения до  $N_k \times N_m$  при более точном учете углового распределения.

**3. Об одной квазиодномерной модели для описания поля излучения.** Рассмотрим еще один подход, позволя-

ющий более точно по сравнению с диффузионным приближением определять поле излучения в двумерных задачах РГД.

Проинтегрируем уравнение переноса, записанное в декартовой системе координат:

$$\Omega_r \frac{\partial I}{\partial r} + \Omega_z \frac{\partial I}{\partial z} + \kappa I = \frac{\kappa \sigma T^4}{\pi} \quad (5.29)$$

по всем углам один раз с весом 1, а другой раз с весом  $\Omega$ . При этом получим систему двумерных уравнений квазидиффузии [75]

$$\frac{\partial W_r}{\partial r} + \frac{\partial W_z}{\partial z} + c\kappa U = c\kappa \sigma T^4, \quad (5.30)$$

$$c \frac{\partial D_{rr}U}{\partial r} + c \frac{\partial D_{rz}U}{\partial z} + \kappa W_r = 0, \quad (5.31)$$

$$c \frac{\partial D_{rz}U}{\partial r} + c \frac{\partial D_{zz}U}{\partial z} + \kappa W_z = 0, \quad (5.32)$$

где

$$D_{rr} = \frac{\int \Omega_r^2 I d\Omega}{\int I d\Omega}, \quad D_{zz} = \frac{\int \Omega_z^2 I d\Omega}{\int I d\Omega}, \quad D_{rz} = \frac{\int \Omega_r \Omega_z I d\Omega}{\int I d\Omega}, \quad (5.33)$$

с условием на границе  $\Gamma$

$$\left. \frac{W_n}{U} \right|_{\Gamma} = C_n, \quad (5.34)$$

где  $n$  — направление внешней нормали к границе области

$$C_n = \frac{\int (\Omega, n) I(\Gamma, \Omega) d\Omega}{\int I(\Gamma, \Omega) d\Omega}, \quad (\Omega, n) < 0. \quad (5.35)$$

Так же как для одномерных задач (§ 4, гл. III), воспользуемся следующим приемом. На каком-то шаге по времени решим уравнение переноса (5.29) и определим коэффициенты (5.34) и (5.35). Затем в течение  $N$  шагов по времени будем определять поток и плотность энергии излучения, считая коэффициенты (5.34) — (5.35) неизменными (замороженными) по времени. Такой подход был применен в работе [2] для решения двумерного уравнения переноса нейтронов.

Как уже отмечалось ранее (замечание 2, § 4, гл. III), использование квазидиффузионной системы позволяет существенно увеличить точность расчета потока энергии излучения по сравнению с его непосредственным определением из уравнения переноса. Этот факт представляет особую ценность для решения двумерных задач, так

как позволяет использовать для определения поля излучения относительно простые схемы для решения уравнения переноса на не очень подробных разностных сетках. При этом так же, как и для одномерных задач, нет необходимости в выполнении требования, чтобы исходные разностные схемы для уравнения переноса давали асимптотическое значение потока в случае, когда справедливо приближение лучистой теплопроводности.

Недостатком такого подхода, который может частично осложнить решение задач РГД, является необходимость расчета на целом ряде шагов по времени двумерного уравнения переноса излучения, что в любом случае приводит к значительному увеличению объема вычислений.

Рассмотрим упрощенный вариант системы (5.30)—(5.32) [24]:

$$\frac{\partial W_r}{\partial r} + \frac{\partial W_z}{\partial z} + c\kappa U = c\kappa 4\sigma T^4, \quad (5.36)$$

$$c \frac{\partial D_{rr}U}{\partial r} + \kappa W_r = 0, \quad (5.37)$$

$$c \frac{\partial D_{zz}U}{\partial z} + \kappa W_z = 0. \quad (5.38)$$

Коэффициенты  $D_{rr}$  и  $D_{zz}$  в свою очередь определяются из решения одномерных уравнений

$$\mu \frac{dI_r}{dr} + \kappa I_r = 2\kappa\sigma T^4, \quad -1 \leq \mu \leq 1, \quad (5.39)$$

$$\eta \frac{dI_z}{dz} + \kappa I_z = 2\kappa\sigma T^4, \quad -1 \leq \eta \leq 1, \quad (5.40)$$

$$D_{rr} = \int_{-1}^1 \mu^2 I_r d\mu \bigg/ \int_{-1}^1 I_r d\mu, \quad D_{zz} = \int_{-1}^1 \eta^2 I_z d\eta \bigg/ \int_{-1}^1 I_z d\eta. \quad (5.41)$$

Уравнения (5.39) и (5.40) решаются вдоль строк и столбцов (рис. 58), т. е. фактически вместо одного двумерного уравнения переноса считается  $N_i + N_n$  одномерных уравнений, где  $N_n$  — число строк, а  $N_i$  — число столбцов, возникающих при разностной аппроксимации пространственной области.

Система уравнений (5.36)—(5.38) отличается от аналогичной системы уравнений диффузии только за счет коэффициентов  $D_{rr}$  и  $D_{zz}$ , которые не обязательно равны  $1/3$ .

Использование системы уравнений (5.36)—(5.38) позволяет более точно по сравнению с диффузионным при-

ближением определять дивергенцию потока энергии излучения в двумерных задачах РГД. Однако для точек (например, точка  $C$  на рис. 58), из которых проведенные

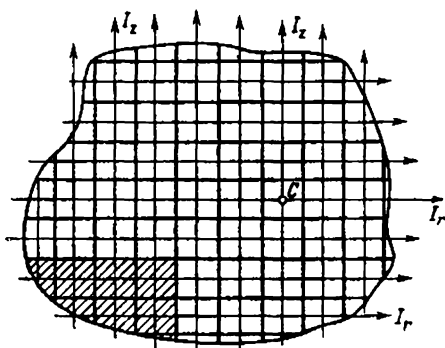


Рис. 58

параллельно осям координат лучи не пересекают светящуюся область (на рис. 58 она заштрихована), это увеличение точности незначительно: Отметим, что использование системы (5.36)—(5.39), так же как и использование системы уравнений диффузии, не приводит к появлению «эффекта луча».

В заключение параграфа отметим, что в нем не рассматривается применение метода Монте-Карло для решения многомерного уравнения переноса излучения. Этот вероятностный метод радикально отличается от рассматриваемых здесь конечно-разностных алгоритмов. Его подробное описание потребовало бы введения новых понятий и определений, рассмотрения специальных подходов к решению задач, что в конечном счете могло бы сильно отразиться на объеме книги.

Для читателей, интересующихся применением метода Монте-Карло к решению задач динамики излучающего газа, укажем несколько работ, посвященных этому вопросу. В работе М. Сандфорда и Р. Андерсона [225] рассматривается применение алгоритма [213] для решения двумерных задач динамики излучающего газа. В работе А. С. Мельниченко и В. Н. Огибина [136] предложен оригинальный вариант метода Монте-Карло, который также может быть применен для определения поля излучения в задачах РГД.

## § 6. Алгоритмы понижения размерности уравнений, определяющих поле излучения в двумерных задачах РГД

Решение уравнений, описывающих перенос излучения в двумерных задачах РГД, связано со значительно большими вычислительными трудностями, чем расчет соответствующих уравнений в одномерных задачах. Поэтому использование алгоритмов понижения размерности при решении двумерных задач динамики излучающего газа дает большой эффект экономии машинного времени.

В данном параграфе будут рассмотрены несколько алгоритмов понижения размерности, используемых при решении двумерных задач РГД. Отметим, что эти методы самым тесным образом связаны с алгоритмами понижения размерности, применяемыми при решении одномерных задач динамики излучающего газа.

**1. Осреднение уравнений диффузии по энергиям фотонов.** Выпишем разностную аппроксимацию на четырехугольных неортогональных сетках системы многогрупповых уравнений диффузии

$$\begin{aligned}
 &A_{kln}U_{k,i-1,n-1} + B_{kln}U_{ki,n-1} + L_{kln}U_{k,i+1,n-1} - C_{kln}U_{kln} + \\
 &+ E_{kln}U_{k,i+1,n} + D_{kln}U_{k,i-1,n+1} + V_{kln}U_{ki,n+1} + \\
 &+ Y_{kln}U_{k,i+1,n+1} - \alpha_{kln}U_{kin} + F_{kin} = 0, \\
 &k = 1, \dots, N_k, \quad i = 2, \dots, N_i - 1, \quad n = 2, \dots, N_n - 1. \quad (6.1)
 \end{aligned}$$

Здесь  $k$  — номер группы,  $i, n$  — индексы узлов пространственной сетки, на которой рассматривается разностная аппроксимация:

$$\begin{aligned}
 U_{k1n} &= \varphi_{k2n}U_{k2n} + \xi_{k2n}, \\
 U_{kN_i n} &= \varphi_{k,N_i-1,n}U_{k,N_i-1,n} + \xi_{k,N_i-1,n}, \\
 U_{k11} &= \varphi_{k12}U_{k12} + \xi_{k12}, \\
 U_{k1N_n} &= \varphi_{k1,N_n-1}U_{k1,N_n-1} + \xi_{k1,N_n-1}.
 \end{aligned}$$

Вместе с разностными уравнениями (6.1) для групповой плотности энергии излучения  $U_k$  рассмотрим разностные уравнения для групповых потоков  $W_{kin}$  и  $W_{kln}^i$ , вычисляемых (п. 3, § 3) соответственно в серединах ребер, соединяющих узлы с индексами  $(i, n)$ ,  $(i, n+1)$ , а также

узлы с индексами  $(i, n)$ ,  $(i+1, n)$ :

$$\begin{aligned}
 W'_{rkin} = & P'_{kin} (z_{in} - z_{i,n+1}) U_{kin} + \\
 & + M'_{kin} (z_{i+1,n} + z_{i+1,n+1} - z_{i-1,n} - z_{i-1,n+1}) U_{ki,n+1}/8 + \\
 & + H'_{kin} (z_{i+1,n} + z_{i+1,n+1} - z_{i-1,n} - z_{i-1,n+1}) U_{k,i-1,n+1}/8 + \\
 & + R'_{kin} (z_{i,n+1} - z_{in}) U_{k,i-1,n} + \\
 & + T'_{kin} (z_{i-1,n} + z_{i-1,n+1} - z_{i+1,n} - z_{i+1,n+1}) U_{k,i-1,n-1}/8 + \\
 & + G'_{kin} (z_{i-1,n} + z_{i-1,n+1} - z_{i+1,n} - z_{i+1,n+1}) U_{ki,n-1}/8, \quad (6.2) \\
 & k=1, \dots, N_k,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W'_{zkin} = & P'_{kin} (r_{i,n+1} - r_{in}) U_{kin} + \\
 & + M'_{kin} (r_{i-1,n} + r_{i-1,n+1} - r_{i+1,n} - r_{i+1,n+1}) U_{ki,u+1}/8 + \\
 & + H'_{kin} (r_{i-1,n} + r_{i-1,n+1} - r_{i+1,n} - r_{i+1,n+1}) U_{k,i-1,n+1}/8 + \\
 & + R'_{kin} (r_{in} - r_{i,n+1}) U_{k,i-1,n} + \\
 & + T'_{kin} (r_{i+1,n} + r_{i+1,n+1} - r_{i-1,n} - r_{i-1,n+1}) U_{k,i-1,n-1}/8 + \\
 & + G'_{kin} (r_{i+1,n} + r_{i+1,n+1} - r_{i-1,n} - r_{i-1,n+1}) U_{ki,n-1}/8, \quad (6.3) \\
 & k=1, \dots, N_k.
 \end{aligned}$$

Конкретный вид коэффициентов  $A_{kin}$ ,  $B_{kin}$ , ...,  $T'_{kin}$ ,  $G'_{kin}$  в уравнениях (6.1) — (6.3) здесь не выписывается ввиду громоздкости получающихся при этом выражений. Так же как и коэффициенты (3.27) — (3.35), они могут быть получены с помощью алгоритмов построения разностных схем, описанных в § 3 данной главы. Аналогично разностным выражениям (6.2) и (6.3) для потоков  $W'_{rkin}$  и  $W'_{zkin}$  могут быть выписаны схемы определения потоков  $W'_{rkin}$  и  $W'_{zkin}$ , вычисляемых в серединах ребер, соединяющих узлы с индексами  $(i, n)$  и  $(i+1, n)$ .

Просуммировав разностные схемы (6.1) — (6.3) по всем группам, получим

$$\begin{aligned}
 A_{in}U_{i-1,n-1} + B_{in}U_{i,n-1} + L_{in}U_{i+1,n-1} + K_{in}U_{i-1,n} - \\
 - C_{in}U_{in} + E_{in}U_{i+1,n} + D_{in}U_{i-1,n+1} + V_{in}U_{i,n+1} + \\
 + Y_{in}U_{i+1,n+1} - \kappa_{in}U_{in} + \sum_{k=1}^{N_k} F_{kin} = 0, \\
 i=2, \dots, N_i, \quad n=2, \dots, N_n,
 \end{aligned} \quad (6.4)$$



$$\begin{aligned} \kappa_{ln} &= \left( \sum_{k=1}^{N_k} \kappa_{kin} U_{kin} \right) / \left( \sum_{k=1}^{N_k} U_{kin} \right), \\ \varphi_{2n} &= \left( \sum_{k=1}^{N_k} \varphi_{k2n} U_{k2n} \right) / \left( \sum_{k=1}^{N_k} U_{k2n} \right), \dots, \varphi_{i, N_n-1} = \\ &= \left( \sum_{k=1}^{N_k} \varphi_{ki, N_n-1} U_{ki, N_n-1} \right) / \left( \sum_{k=1}^{N_k} U_{ki, N_n-1} \right), \quad (6.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P'_{ln} &= \left( \sum_{k=1}^{N_k} P'_{kin} U_{kin} \right) / \left( \sum_{k=1}^{N_k} U_{kin} \right), \\ &\dots \dots \dots \quad (6.9) \end{aligned}$$

$$G'_{ln} = \left( \sum_{k=1}^{N_k} G'_{kin} U_{kl, n-1} \right) / \left( \sum_{k=1}^{N_k} U_{kl, n-1} \right).$$

В программном комплексе решения двумерных задач динамики излучающего газа [59, 204] реализован следующий алгоритм.

1) При  $t=t^j$  решается система многогрупповых уравнений (6.1) и определяются коэффициенты (6.7)—(6.9).

2) На последующих  $N_1$  шагах по времени ( $j' = j+1, \dots, j+N_1$ ) интегральная плотность энергии излучения определяется из осредненного уравнения (6.4) с неизменными (замороженными) по времени коэффициентами (6.7)—(6.9)\*. После нахождения плотности энергии излучения  $U$  поток энергии излучения  $W$  определяется с помощью выражений (6.5)—(6.6).

3) На шаге по времени с номером  $j+N_1$  многогрупповые уравнения (6.1) пересчитываются вновь, и вся процедура повторяется.

З а м е ч а н и е 1. Специальное выделение осредненных потоков связано с необходимостью построения консервативных схем для аппроксимации уравнения энергии. Используя осредненные потоки, выпишем дивергент-

\* ) Вычисление коэффициентов (6.7)—(6.9) осредненного уравнения (6.4) может происходить и на каждом шаге по времени с помощью выражений, аналогичных (4.48) (гл. III). Данный подход также позволяет эффективно сокращать время расчета двумерных задач динамики излучающего газа, так как при этом отсутствует необходимость в итерационном решении многогрупповой системы разностных уравнений (6.1).

ную разностную схему для осесимметричного случая:

$$\frac{e_{in}^j - e_{in}^{j-1}}{\tau^{j-1}} = -\frac{\pi}{M_{in}} \{ (r_{i+1,n} + r_{i+1,n+1}) [W'_{r,i+1,n}(z_{i+1,n+1} - z_{i+1,n}) + W'_{z,i+1,n}(r_{i+1,n} - r_{i+1,n+1})] + (r_{i+1,n+1} + r_{i,n+1}) \times [W'_{r,i,n+1}(z_{i,n+1} - z_{i+1,n+1}) + W'_{z,i,n+1}(r_{i+1,n+1} - r_{i,n+1})] + (r_{in} + r_{i,n+1}) [W'_{rin}(z_{in} - z_{i,n+1}) + W'_{zin}(r_{i,n+1} - r_{in})] + (r_{i+1,n} + r_{in}) [W'_{rin}(z_{i+1,n} - z_{in}) + W'_{zin}(r_{in} - r_{i+1,n})] \} + Q_{in}. \quad (6.10)$$

$M_{in}$  — фиксированная масса четырехугольной ячейки,  $Q_{in}$  — разностная аппроксимация работы сил сжатия.

Такой подход обеспечивает сохранение баланса энергии и в тех случаях, когда разностные уравнения (6.1) — (6.4) для определения плотности энергии излучения, например в силу медленной сходимости итераций, решаются недостаточно точно. Аналогичным образом, используя ранее полученные значения потоков для аппроксимации уравнения энергии, можно строить дивергентные схемы и для решения двумерных задач газовой динамики с теплопроводностью [116, 182].

**Замечание 2.** Для пятиточечных разностных схем, аппроксимирующих многогрупповые уравнения диффузии на четырехугольных ортогональных сетках

$$B_{kin}U_{ki,n-1} + K_{kin}U_{k,i-1,n} - C_{kin}U_{kin} + E_{kin}U_{k,i+1,n} + V_{kin}U_{ki,n+1} + F_{kin} = 0, \\ k=1, \dots, N_k, \quad i=2, \dots, N_i-1, \quad n=2, \dots, N_n-1, \quad (6.11)$$

алгоритм осреднения по энергиям фотонов строится аналогичным образом. При этом для определения групповых и осредненных потоков  $W_{rin}$  и  $W_{zin}$  используются выражения (3.7)—(3.8) или (3.13)—(3.14).

**Замечание 3.** Практически без изменений переносятся на двумерный случай и некоторые другие алгоритмы осреднения уравнения переноса излучения по энергиям фотонов. Так, рассмотренный в § 4 гл. III моментный метод [209, 210] опирается на уравнение переноса, записанное в характеристической форме. Поэтому осреднение по частоте вдоль каждого направления полета фотона будет иметь одинаковый вид для любой

геометрии. Аналогичным образом можно перенести на случай решения двумерных задач и способ осреднения по энергиям, предложенный в работе [61] (§ 4, гл. III).

**2. Осреднение по угловым направлениям.** Алгоритм осреднения по энергиям фотонов уравнений, описывающих перенос излучения, можно автоматически использовать в ряде случаев и для осреднения по угловым переменным.

Для описания углового распределения поля излучения воспользуемся уравнениями (5.21), которые в свою очередь получены из самосопряженного уравнения (5.19). Просуммировав их разностную аппроксимацию (5.26) по всем угловым направлениям, получим

$$A_{in}U_{i-1,n-1} + B_{in}U_{i,n-1} + L_{in}U_{i+1,n-1} + K_{in}U_{i-1,n} - \\ - C_{in}U_{in} + E_{in}U_{i+1,n} + D_{in}U_{i-1,n+1} + V_{in}U_{i,n+1} + \\ + Y_{in}U_{i+1,n+1} + \sum_{m=1}^{N_m} F_{min} = 0, \quad (6.12)$$

$$i = 2, \dots, N_i - 1, \quad n = 2, \dots, N_n - 1,$$

$$U_{1n} = R_{2n}U_{2n} + P_{12n}U_{2,n+1} + P_{22n}U_{2,n-1}, \quad (6.13)$$

где

$$U_{in} = \sum_{m=1}^{N_m} u_{min}, \\ A_{in} = \left( \sum_{m=1}^{N_m} A_{min} u_{m,i-1,n-1} \right) / \left( \sum_{m=1}^{N_m} u_{m,i-1,n-1} \right), \dots, \\ Y_{in} = \left( \sum_{m=1}^{N_m} Y_{min} u_{m,i+1,n+1} \right) / \left( \sum_{m=1}^{N_m} u_{m,i+1,n+1} \right), \quad (6.14) \\ R_{2n} = \left( \sum_{m=1}^{N_m} R_{m2n} u_{m2n} \right) / \left( \sum_{m=1}^{N_m} u_{m2n} \right).$$

Коэффициенты  $P_{12n}$  и  $P_{22n}$  определяются с помощью выражений, аналогичных (6.14), по формулам

$$P_{12n} = \left( \sum_{m=1}^{N_m} P_{m2n} u_{m,2,n+1} \right) / \left( \sum_{m=1}^{N_m} u_{m2,n+1} \right), \quad (6.15)$$

$$P_{22n} = \left( \sum_{m=1}^{N_m} P_{m2n} u_{m2,n-1} \right) / \left( \sum_{m=1}^{N_m} u_{m2,n-1} \right).$$

Для получения  $P_{12n}$  суммируется первое из выражений (5.27), а для  $P_{22n}$  — второе. При таком определении  $P_{12n}$  для тех угловых интервалов, в которых используется второе условие (5.27), в первой из сумм, входящих в выражение (6.15), надо полагать  $P_{m2n} = 0$ . Аналогично определяется и  $P_{22n}$ .

Осредненное уравнение (6.12), с помощью многократно рассмотренной процедуры замораживания по времени коэффициентов, может быть использовано для эффективного получения интегральных характеристик поля излучения.

Другим возможным способом понижения размерности уравнения переноса излучения в двумерных задачах РГД является использование квазидиффузионной системы (5.30)—(5.35). В литературе не встречалось описание использования квазидиффузионной системы уравнений для расчета двумерных задач динамики излучающего газа.

Однако ряд обстоятельств делает весьма перспективным будущее их использование.

Во-первых, аппроксимация уравнений диффузии на неортогональных сетках приводит к появлению девяти-точечных разностных схем вида (4.3), для решения которых имеется целый ряд алгоритмов. Именно к таким девятиточечным разностным схемам приводит аппроксимация двумерных уравнений квазидиффузии (5.30)—(5.32), что дает возможность прямого использования для их численного решения ранее накопленного опыта.

Во-вторых, использование квазидиффузионной системы, когда многомерное уравнение переноса считается сравнительно редко, позволяет существенно сократить объем вычислений.

Кроме того, как показывают расчеты одномерных задач [81], точность определения интегральных характеристик, полученных из решения уравнения квазидиффузии, значительно выше, чем при их непосредственном нахождении из уравнения переноса. Это позволяет надеяться, что для определения коэффициентов квазидиффузии (5.33) и (5.35) при решении уравнения переноса излучения можно будет использовать достаточно простые разностные схемы на не очень подробных сетках по угловым переменным.

## § 7. Неявные схемы для определения температуры в двумерных задачах РГД

1. Неявные схемы совместного решения уравнения энергии и уравнений, описывающих перенос излучения, рассмотренные в § 5, гл. III для одномерных задач, практически без изменений переносятся на случай двумерной геометрии. Так, схема (5.39)—(5.41) (гл. III), полученная в случае, когда радиационный теплообмен значительно превышает кондуктивный теплообмен, для двумерных задач при аппроксимации уравнений диффузии на неортогональных сетках примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 (1 + g_i) (A_{in} U_{i-1, n-1}^j + B_{in} U_{i, n-1}^j + L_{in} U_{i+1, n-1}^j + \\
 + K_{in} U_{i-1, n}^j - C_{in} U_{in}^j + E_{in} U_{i+1, n}^j + D_{in} U_{i-1, n+1}^j + \\
 + V_{in} U_{i, n+1}^j + Y_{in} U_{i+1, n+1}^j) - \kappa_{in} U_{in}^j + F_{in}^{j-1} + \\
 + \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)^{j-1} \frac{\tau^{j-1}}{(\partial \varepsilon / \partial T)^{j-1}} \left[ \frac{(1-\lambda)}{\rho} (A_{in} U_{i-1, n-1}^{j-1} + \right. \\
 \left. + B_{in} U_{i, n-1}^{j-1} + L_{in} U_{i+1, n-1}^{j-1} + K_{in} U_{i-1, n}^{j-1} - C_{in} U_{in}^{j-1} + \right. \\
 \left. + E_{in} U_{i+1, n}^{j-1} + D_{in} U_{i-1, n+1}^{j-1} + V_{in} U_{i, n+1}^{j-1} + Y_{in} U_{i+1, n+1}^{j-1}) + \right. \\
 \left. + \lambda Q_{in}^j + (1-\lambda) Q_{in}^{j-1} \right] = 0, \quad (7.1)
 \end{aligned}$$

$$g_i = \lambda \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)^{j-1} \tau^{j-1} / \left[ \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)^{j-1} \rho \right], \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned}
 T^j = T^{j-1} + \frac{\tau^{j-1}}{(\partial \varepsilon / \partial T)^{j-1}} \left[ \frac{\lambda}{\rho} \tilde{D}W^j + \frac{(1-\lambda)}{\rho} \tilde{D}W^{j-1} + \right. \\
 \left. + \lambda Q_{in}^j + (1-\lambda) Q_{in}^{j-1} \right]. \quad (7.3)
 \end{aligned}$$

Здесь  $\lambda$  — весовой множитель  $0 \leq \lambda \leq 1$ ;  $Q_{in}$  — разностное выражение для работы сил сжатия;  $\tilde{D}W$  — разностная аппроксимация для дивергенции потока энергии излучения\*), при определении потока  $W$  используются выражения типа (6.5)—(6.6).

На четырехугольных ортогональных сетках неявная схема строится идентичным образом. Так, первое уравнение (7.1), аппроксимирующее перенос излучения, в этом случае переписется в виде

$$(1 + g_i) (B_{in} U_{i, n-1}^j + K_{in} U_{i-1, n}^j - C_{in} U_{in}^j + E_{in} U_{i+1, n}^j +$$

\*) Конкретный вид  $\tilde{D}W$  для осесимметричного случая представлен в правой части выражения (6.10).

$$\begin{aligned}
& +V_{in}U_{i, n+1}^j - \kappa_{in}U_{in}^j + F_{in}^{j-1} + \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)^{j-1} \frac{\tau^{j-1}}{(\partial z/\partial T)^{j-1}} \times \\
& \times \left[ \frac{(1-\lambda)}{\rho} (B_{in}U_{i, n-1}^{j-1} + K_{in}U_{i-1, n}^{j-1} - C_{in}U_{in}^{j-1} + E_{in}U_{i+1, n}^{j-1} + \right. \\
& \left. + V_{in}U_{i, n+1}^{j-1}) + \lambda Q_{in}^j + (1-\lambda) Q_{in}^{j-1} \right] = 0. \quad (7.4)
\end{aligned}$$

**З а м е ч а н и е.** Рассмотренный алгоритм совместно с решением не обязательно связан с использованием диффузионной модели для описания поля излучения. Так, суммируя разностную аппроксимацию уравнений (5.21) по всем угловым разбиениям и группам по частоте, придем к одnogрупповому девятиточечному уравнению вида (6.4), осредненные коэффициенты которого определяются с помощью выражений

$$\begin{aligned}
U_{in} &= \sum_{k=1}^{N_k} \sum_{m=1}^{N_m} u_{kmin}, \quad \kappa_{in} = \sum_{k=1}^{N_k} \sum_{m=1}^{N_m} \kappa_{kin} u_{kmin} / U_{in}, \\
A_{in} &= \sum_{k=1}^{N_k} \sum_{m=1}^{N_m} A_{kmin} u_{km, i-1, n-1} / U_{i-1, n-1}, \dots, \quad (7.5) \\
Y_{in} &= \sum_{k=1}^{N_k} \sum_{m=1}^{N_m} Y_{kmin} u_{km, i+1, n+1} / U_{i+1, n+1}.
\end{aligned}$$

Таким образом, и в этом случае неявная схема может быть построена в виде (7.1) — (7.3).

## 2. Разностная схема для уравнения энергии

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = -\operatorname{div} \mathbf{W} + \operatorname{div} (\chi \operatorname{grad} T) - p \operatorname{div} \mathbf{u} \quad (7.6)$$

при наличии заметного кондуктивного теплообмена запишется на неортогональных сетках следующим образом:

$$\begin{aligned}
T_{in}^j &= T_{in}^{j-1} + \frac{\tau^{j-1}}{(\partial \varepsilon / \partial T)^{j-1}} \left[ \frac{\lambda}{\rho} (A_{in}U_{i-1, n-1}^j + B_{in}U_{i, n-1}^j + \right. \\
& + L_{in}U_{i+1, n-1}^j + K_{in}U_{i-1, n}^j - C_{in}U_{in}^j + E_{in}U_{i+1, n}^j + \\
& + D_{in}U_{i-1, n+1}^j + V_{in}U_{i, n+1}^j + Y_{in}U_{i+1, n+1}^j) + \\
& + \frac{\lambda}{\rho} (A_{Tin}T_{i-1, n-1}^j + B_{Tin}T_{i, n-1}^j + L_{Tin}T_{i+1, n-1}^j + \\
& + K_{Tin}T_{i-1, n}^j - C_{Tin}T_{in}^j + E_{Tin}T_{i+1, n}^j + D_{Tin}T_{i-1, n+1}^j + \\
& + V_{Tin}T_{i, n+1}^j + Y_{Tin}T_{i+1, n+1}^j) + \\
& \left. + \frac{(1-\lambda)}{\rho} (\tilde{D}\mathbf{W}^{j-1} + \tilde{D}\mathbf{W}_T^{j-1}) + \lambda Q_{in}^j + (1-\lambda) Q_{in}^{j-1} \right]. \quad (7.7)
\end{aligned}$$

Здесь  $\dot{A}_{Tln}, \dots, \dot{Y}_{Tln}$  — коэффициенты разностной аппроксимации члена  $\text{div}(\chi \text{grad } T)$ , описывающего перенос тепла за счет теплопроводности;  $\bar{D}W^{j-1}$  и  $\bar{D}W_T^{j-1}$  — разностные аппроксимации для  $-\text{div } W$  и  $\text{div } W_T$  ( $W_T = -\chi \text{grad } T$ ) на предыдущем шаге по времени.

Для нахождения плотности энергии излучения  $U$  используется уравнение

$$A_{in}U_{i-1, n-1}^j + B_{in}U_{i, n-1}^j + L_{in}U_{i+1, n-1}^j + K_{in}U_{i-1, n}^j - C_{in}U_{in}^j + E_{in}U_{i+1, n}^j + D_{in}U_{i-1, n+1}^j + V_{in}U_{i, n+1}^j + Y_{in}U_{i+1, n+1}^j - \kappa_{in}U_{in}^j + F_{in}^{j-1} + \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)^{j-1}(T_{in}^j - T_{in}^{j-1}). \quad (7.8)$$

Уравнение (7.8) отличается от уравнения (7.1) тем, что в нем разность  $T_{in}^j - T_{in}^{j-1}$  не выражается через  $\text{div } W$ , а участвует непосредственно.

Для нахождения температуры и плотности энергии излучения уравнения (7.7) и (7.8) решаются совместно. Это совместное решение может быть осуществлено с помощью матричного варианта « $\alpha$ — $\beta$ »-итерационного алгоритма (п. 5 § 4 данной главы), используемого для решения систем разностных уравнений.

После итерационного определения  $T$  и  $U$  из системы уравнений (7.7) — (7.8) для сохранения баланса энергии температуру следует пересчитать с помощью дивергентной разностной схемы

$$T_{in}^j = T_{in}^{j-1} + \frac{\tau^{j-1}}{(\partial \varepsilon / \partial T)^{j-1}} \left[ \frac{\lambda}{\rho} (\bar{D}W^j + \bar{D}W_T^j) + \frac{(1-\lambda)}{\rho} (\bar{D}W^{j-1} + \bar{D}W_T^{j-1}) + \lambda Q_{in}^j + (1-\lambda) Q_{in}^{j-1} \right], \quad (7.9)$$

где  $\bar{D}W^j$  и  $\bar{D}W_T^j$  определяются из решения системы (7.7) — (7.8).

В заключение данного параграфа отметим, что основным алгоритмом, используемым в работах [58, 59, 204] при решении двумерных задач динамики излучающего газа, являлась неявная схема (7.1) — (7.3). Применение неявной схемы с учетом теплопроводности также не вызывает особых трудностей при расчете одномерных задач РГД. Однако для двумерных задач применение схемы (7.7) — (7.9) требует значительно большего объема вычислений, чем схемы (7.1) — (7.3).

Во многих из рассматриваемых задач перенос тепла за счет излучения значительно превышает перенос тепла за счет теплопроводности. Естественно, что для получения такой оценки вовсе не обязательно проводить дорогостоящие двумерные расчеты. Предварительный физический анализ или расчет в приближенной постановке с помощью одномерных программ позволяет оценить влияние тех или иных факторов и выбрать сравнительно простую математическую модель для последующего решения двумерной задачи динамики излучающего газа.

## § 8. Общая схема решения двумерных задач РГД

1. В предыдущих параграфах главы рассматривались различные методы решения двумерных задач динамики излучающего газа. Как правило, при решении задач математической физики переход от двумерных по пространству задач к трехмерным вызывает гораздо меньше принципиальных вычислительных сложностей, чем при переходе от одномерных задач к двумерным. Поэтому большинство из рассмотренных алгоритмов можно было бы в дальнейшем использовать и при решении трехмерных задач РГД. Однако при существующей вычислительной технике достаточно трудным является решение даже трехмерных задач газовой динамики, тем более нереальным в ближайшие годы представляются расчеты трехмерных задач динамики излучающего газа из-за огромного количества необходимого для этого машинного времени. Таким образом, относительно трехмерных задач приведенные в этой главе алгоритмы следует рассматривать как один из возможных в будущем подходов к решению этих задач.

Рассмотрим схему расчета двумерных задач РГД, основываясь на использовании многогруппового диффузионного приближения для описания поля излучения.

На первом шаге по времени из начальных данных известны скорость, плотность и температура вещества. На этом же шаге по времени с помощью методов, описанных в § 3, 4, решается многогрупповая система уравнений диффузии. Там же уравнения диффузии, записанные в разностном виде, осредняются по энергиям фотонов, и находятся коэффициенты  $A_{in}, \dots, Y_{in}, \chi_{in}$  с помощью процедуры, рассмотренной в § 6.

При переходе на новый шаг по времени скорости и плотности определяются с помощью одного из алгоритмов расчета газодинамического течения, рассмотренных в § 2. Если используется лагранжева система координат, то при этом определяются и новые координаты узлов сетки. Так же как и для одномерных задач, температура определяется с помощью неявных схем из совместного решения уравнения энергии и осредненного по всем частотам разностного уравнения, описывающего перенос излучения (§ 7). Возможны итерации как между газодинамическим и тепловым блоком, так и внутри теплового блока.

Через  $N_1$  шагов по времени система многогрупповых уравнений диффузии пересчитывается и вновь определяются осредненные коэффициенты  $A_{in}, \dots, Y_{in}, \kappa_{in}$ . Возможно также использование безытерационной схемы (4.64) — (4.70) или (4.75) — (4.81) при расчете осредненного уравнения \*). Пересчет коэффициентов (4.63) и (4.74) происходит за один раз на  $N_2$  шагов по времени. Этот переход происходит чаще, чем переход от многогрупповых уравнений диффузии к осредненному уравнению,  $N_1 = kN_2$ . Обычно  $k = 2$  или 3.

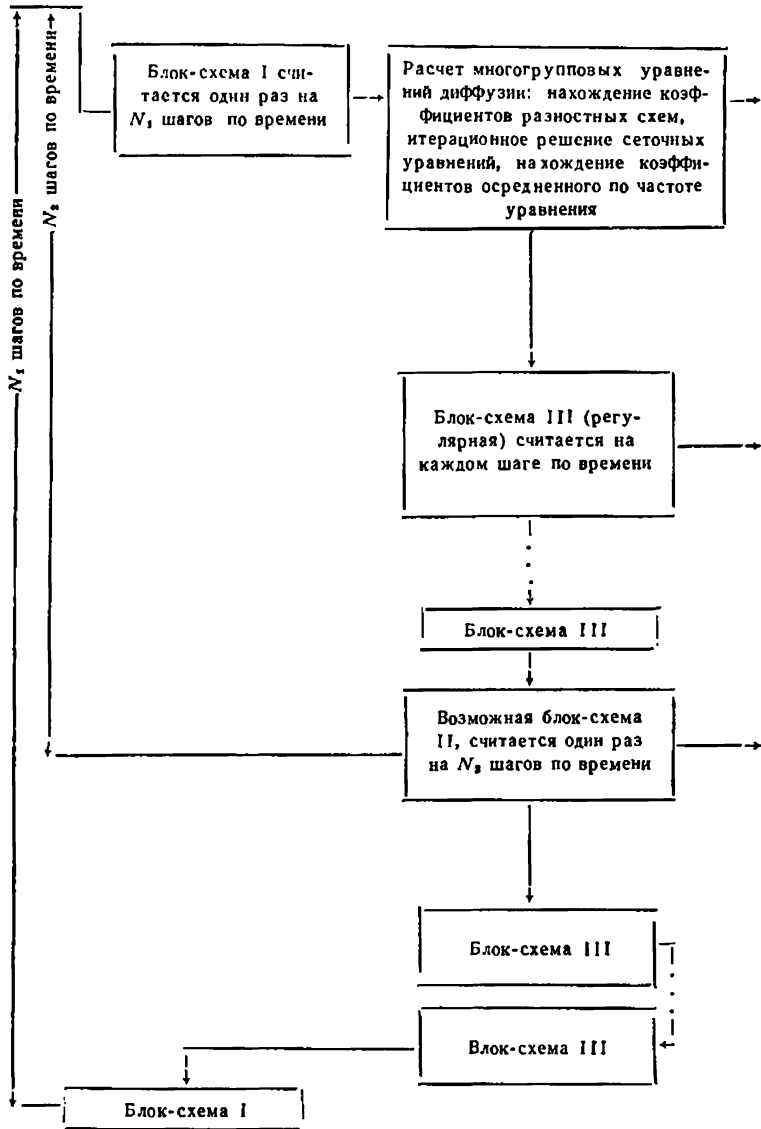
Общий алгоритм расчета двумерных задач РГД состоит из отдельных блок-схем: блок-схема I — решение на тех шагах, где происходит пересчет многогрупповых уравнений диффузии; возможная блок-схема II — где происходит переход от осредненного уравнения к безытерационной схеме; блок-схема III — регулярная, в которой решаются уравнения газодинамики и определяется температура. Этот алгоритм расчета двумерных задач динамики излучающего газа изображен на схеме.

В приведенную схему естественным образом вписывается алгоритм решения двумерных задач РГД, в котором поле излучения определяется с помощью самосопряженного уравнения. Единственное изменение при этом вносится в блок-схему I. Вместо расчета многогрупповых уравнений диффузии проводится решение системы многогрупповых уравнений вида (5.21), разностная аппроксимация которых осредняется не только по частотам фотонов, но и по угловым направлениям. Остальные элементы схемы, связанные с итерационным решением многогрупповых и осредненного уравнения,

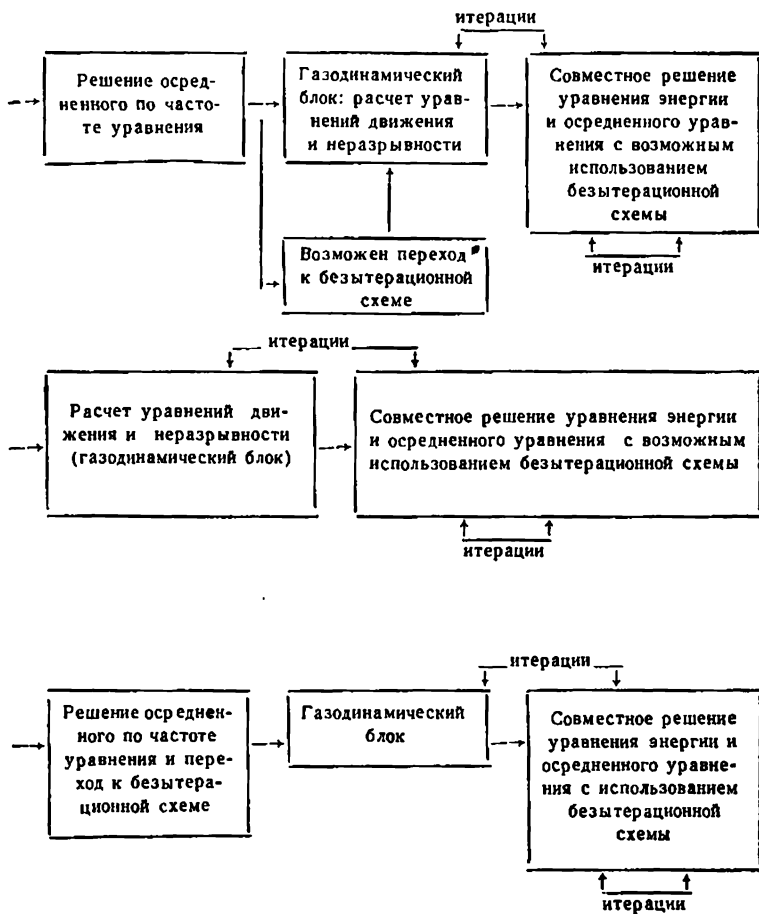
---

\*) При использовании неявной схемы по безытерационной схеме решаются уравнения (7.1) или (7.4).

## Схема расчета двумерных



задач РГД



газодинамическим блоком, при этом остаются неизменными.

Рассмотренная схема реализовывалась при решении целого ряда двумерных задач динамики излучающего газа [58, 59, 204]. Она является одной из возможных схем расчета, опирается на конкретные численные методы, лежащие в ее основе, и при использовании других алгоритмов может быть видоизменена.

**2. Некоторые замечания относительно численного моделирования задач динамики излучающего газа.** В предыдущих главах был рассмотрен ряд алгоритмов решения одномерных и двумерных задач динамики излучающего газа. Сделаем на их основе ряд общих замечаний относительно численного моделирования этих задач.

1. Алгоритм расчета задач РГД, как и других сложных задач математической физики, может быть разбит на отдельные блоки. В каждом из этих блоков рассматривается та или иная частная проблема. Для решения каждой из таких проблем в принципе может быть предложено несколько подходов.

Однако эффективный алгоритм решения сложной задачи вовсе не должен состоять из механически объединенных хороших методов решения частных задач. Необходимо, чтобы методы решения, используемые в различных блоках, были бы «совместными». Добиться «совместности» методов решения отдельных блоков, оригинальных или ранее известных, зачастую бывает нелегко.

Так, практическое использование неявной схемы для решения одномерных и двумерных задач РГД задерживалось потому, что ее применение требовало, чтобы перенос излучения описывался односторонним уравнением диффузионного типа. Переход к такому уравнению был осуществлен с помощью алгоритма осреднения, рассмотренного в § 4 гл. III, § 6 гл. IV.

Полученные таким образом осредненные разностные уравнения уже не являются самосопряженными, даже если исходные разностные многосторонние уравнения самосопряжены. Поэтому итерационный алгоритм их решения не должен требовать в явном виде для своего применения самосопряженности соответствующих разностных уравнений. Таким алгоритмом является рассмотренный в § 4 (гл. IV) нелинейный « $\alpha$ — $\beta$ »-итерационный метод.

Отметим, что рассмотренные в § 3—5 алгоритмы решения двумерных задач динамики излучающего газа не являются жестко связанными с той или иной конкретной методикой расчета уравнений газовой динамики. В самом деле, предложенная разностная аппроксимация многогрупповых уравнений диффузии, итерационный « $\alpha$ — $\beta$ »-алгоритм, методы осреднения уравнений диффузии по энергиям фотонов, неявная схема решения могут быть практически без изменений использованы и в целом ряде программных комплексов, в которых для расчета уравнений газодинамики используются четырехугольные сетки.

Другим примером является использование схем с кусочно-постоянной интерполяцией для решения уравнения переноса (гл. III). Их непосредственное использование может приводить к существенным ошибкам в вычислении потока  $W$ . Однако в сочетании с квазидиффузионной системой уравнений, когда схемы с кусочно-постоянной интерполяцией используются лишь для вычисления коэффициентов  $D$  и  $C$ , их применение вполне оправдано.

2. Весьма важным для решения как одномерных, так и двумерных задач динамики излучающего газа является использование реальных уравнений состояния вещества  $P(T, \rho)$ ,  $\varepsilon(T, \rho)$  и групповых коэффициентов поглощения света  $\kappa_h(T, \rho)$ . К сожалению, полученные с помощью данных эксперимента или теоретических рассмотрений таблицы значений материальных функций зачастую не аппроксимируются с помощью простых аналитических выражений.

Непосредственное использование табличных представлений, например, с помощью метода логарифмической интерполяции, предложенного Н. Н. Калиткиным [77], не вносит дополнительных принципиальных трудностей по сравнению с применением простых аналитических выражений для описания материальных функций. Тем не менее применение табличных уравнений состояния и коэффициентов поглощения требует дополнительных усилий при программной реализации методов расчета задач динамики излучающего газа.

3. Проведение дорогостоящих расчетов двумерных и некоторых одномерных задач РГД в настоящее время сопряжено со значительными трудностями. Поэтому наиболее оптимальным представляется такой подход, когда вначале по одномерным моделям рассматривается

упрощенный вариант задачи. Расчет по простой одномерной модели позволяет выяснить некоторые физические особенности задачи и тем самым окончательно выбрать математическую модель, которая, с одной стороны, отличалась бы максимальной простотой, а с другой стороны, — учитывала бы основные особенности изучаемого явления. Кроме того, такой предварительный расчет позволяет выбрать оптимальный вариант разбиения пространственной сетки и спектра излучения по группам для последующего проведения более сложного одномерного или двумерного расчетов.

Тем самым используется своеобразный итерационный подход к математическому моделированию процессов РГД: предварительная математическая модель — расчет на ЭВМ — уточненная математическая модель [164]. При необходимости этот процесс уточнения модели может быть продолжен. Некоторые примеры такого построения математической модели в задачах РГД будут рассмотрены в гл. V.

## **ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ИЗЛУЧАЮЩЕГО ГАЗА**

В предыдущих главах рассматривались постановка задач динамики излучающего газа, различные приближения и методы, используемые при их решении. Настоящая глава будет посвящена обсуждению и физическому анализу результатов расчетов некоторых задач РГД. Как известно, вычислительный эксперимент в сочетании с натурным экспериментом позволяет успешно исследовать различные физические и технологические процессы [164—165]. Не составляют исключения в этом смысле и высокотемпературные радиационно-газодинамические процессы. Использование вычислительного эксперимента при изучении сильноточных излучающих разрядов, взаимодействия лазерного излучения с плазмой, обтекания тел, входящих с большой скоростью в атмосферы планет, и других явлений позволяет ускорить и повысить качество научных исследований, опытно-конструкторских работ, предложить новые технические решения проблемы.

### **§ 1. Моделирование сильноточных излучающих разрядов**

Электрические разряды в плотных газах представляют собой классический объект физических исследований. Сначала эти исследования были связаны с атмосферным электричеством, а в последствии с многочисленными техническими приложениями. Отметим некоторые из них.

Высокоинтенсивные источники излучения применяются для лазерной техники [3, 4, 10, 11], в исследованиях фотохимических реакций [3, 4], в спектроскопии

[89], для задач скоростной фотографии [190] и т. п. Важное применение находят разряды в высоковольтной технике, во взрывной технике и многих других. Электрические разряды являются удобным объектом для изучения физических свойств плотной плазмы [12, 77, 111].

Использование разнообразных явлений, протекающих в импульсных разрядах (излучение, резкое изменение магнитного поля и сопротивления, ударные волны и т. п.), требует комплексного исследования процесса. Однако экспериментальное изучение зачастую оказывается весьма дорогостоящим и трудно осуществимым, полученные с его помощью результаты иногда не поддаются однозначному истолкованию. Кроме того, затруднен перенос экспериментальных результатов, полученных в отдельных опытах с разрядами, на разряды с другими параметрами. Это связано с тем, что теория подобия в задачах магнитной радиационной газовой динамики (МРГД) имеет весьма приближенный характер.

Большие возможности для изучения подобных сложных явлений дает совместное экспериментальное и математическое исследование с помощью расчетов на ЭВМ. В данном параграфе будут рассмотрены результаты такого исследования сильноточных излучающих разрядов в литиевой плазме и в инертных газах. Эти исследования начнем с рассмотрения математической модели, описывающей сильноточные разряды.

**1. Система уравнений.** Численное решение уравнений магнитной радиационной газовой динамики (МРГД) сталкивается с еще большими трудностями, чем те, которые встречаются при расчете задач динамики излучающего газа. Поэтому не удивительно, что большинство результатов численного моделирования относится к задачам в одномерной постановке. К счастью, применение одномерной цилиндрически-симметричной модели является вполне оправданным для многих сильноточных разрядов. Система одномерных МРГД уравнений, описывающих такие разряды, выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial r}{\partial t} = u, \quad \rho r dr = dm, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -r \frac{\partial}{\partial m} (p + \omega) + \frac{F}{\rho}, \quad F = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H}, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} = - (p + \omega) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho} \right) - \frac{\partial}{\partial m} (W + W_T) + \frac{q}{\rho}, \quad q = \frac{j_z^2}{\sigma}, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{H_\varphi}{r\rho} \right) = \frac{\partial E_z}{\partial m}, \quad E_z = \frac{\rho}{4\pi\sigma} \frac{\partial}{\partial m} (rH_\varphi), \quad j_z = \sigma E_z, \quad (1.4)$$

$$W_T = -\chi\rho r \frac{\partial T}{\partial m}, \quad (1.5)$$

$$p = p(T, \rho), \quad \varepsilon = \varepsilon(T, \rho), \quad \sigma = \sigma(T, \rho), \\ \chi = \chi(T, \rho), \quad \kappa_k = \kappa_k(T, \rho), \quad (1.6)$$

$$W = \sum_{k=1}^{N_k} r \int_{-1}^1 \frac{\mu d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \int_{-1}^1 \sqrt{1-\gamma^2} I_k d\gamma, \quad (1.7)$$

$$\sqrt{1-\gamma^2} \left( \mu \frac{\partial I_k}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial I_k}{\partial \mu} \right) + \kappa_k I_k = \frac{\kappa_k \sigma_k T^k}{\pi}, \\ k = 1, \dots, N_k. \quad (1.8)$$

Здесь  $r$  — расстояние от оси симметрии  $z$  до исследуемой точки,  $t$  — время,  $u$  — скорость в радиальном направлении,  $m$  — массовая лагранжева координата,  $\rho$  — плотность,  $p$  — давление,  $\varepsilon$  — внутренняя энергия вещества,  $F$  и  $q$  — лоренцева сила и джоулево тепло, отнесенные к единице объема,  $W_T$  — поток энергии, обусловленный электронной или ионной теплопроводностью,  $W$  — поток энергии излучения,  $E_z$  и  $H_\varphi$  — компонента напряженности электрического поля и азимутальная компонента напряженности магнитного поля,  $j_z$  — плотность тока,  $\sigma$  — проводимость плазмы,  $\chi$  — коэффициент теплопроводности,  $I_k$  — групповая интенсивность энергии излучения для частот  $\nu \in [\nu_k, \nu_{k+1}]$ ,  $\kappa_k$  — групповой коэффициент поглощения,  $\gamma$  — косинус угла между направлением полета фотона и осью  $z$ ,  $\mu$  — косинус угла между проекцией направления полета фотона на плоскость, перпендикулярную оси симметрии, и радиусом  $r$  (рис. 59),  $\sigma_k$  определяется из равновесной интенсивности энергии излучения с помощью выражений (5.6) — (5.7) (гл. II),  $\omega$  — искусственная вязкость, используемая для организации сквозного счета.

Граничные условия для уравнений (1.1) — (1.8) выбираются в соответствии с конкретной задачей. В ряде случаев их форма очевидна. Так, в центре ( $r=0$ ) используются условия, вытекающие из симметрии разряда при  $u=0$ ,  $\partial T/\partial m=0$ . Если конструкция ограничена жесткой стенкой, то на внешней границе плазмы  $r_{гр}$

надо полагать  $u(r_{1p}, t) = 0$ . Но есть и более сложные случаи, связанные с определением граничных условий для электромагнитного поля.

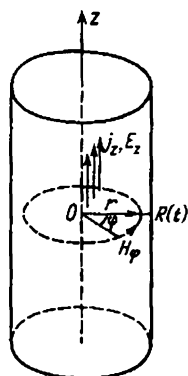


Рис. 59. Постановка задачи о сильноточном разряде в одномерной цилиндрически-симметричной геометрии

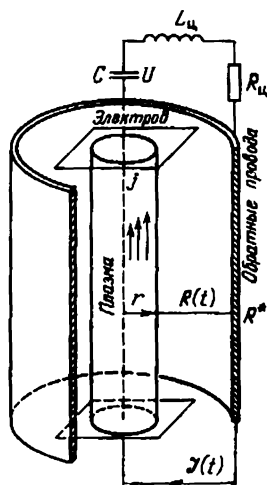


Рис. 60. Схема разряда типа z-пинча

Например, для разряда типа z-пинча, общая схема которого изображена на рис. 60, граничные условия для магнитного поля следующие:  $H_\varphi(0, t) = 0$ ,  $H_\varphi(R(t), t) = 2\mathcal{J}(t)/R(t)^*$ , где  $\mathcal{J}(t)$  — полный ток, протекающий через плазму,  $R(t)$  — внешняя граница плазмы, которая определяется из газодинамического расчета. В свою очередь полный ток в цепи определяется из решения электротехнического уравнения

$$\frac{d}{dt} [(L_{ц} + L_{пл}) \mathcal{J}] + (R_{ц} + R_{пл}) \mathcal{J} + U_0 - \frac{1}{C_0} \int_0^t \mathcal{J}(t') dt' = 0. \quad (1.9)$$

Здесь  $L_{ц}$  и  $L_{пл}$  — индуктивность цепи и плазменного столба,  $R_{ц}$  и  $R_{пл}$  — сопротивление цепи и разряда,  $U_0$ ,

\*) Эти граничные условия легко могут быть получены из уравнений Максвелла, записанных в интегральной форме.

$C_0$  — начальные напряжения и емкость батареи конденсаторов. Величины  $L_{пл}$  и  $R_{пл}$  зависят от распределения температуры и плотности в разряде и должны пересчитываться на каждом шаге по времени.

Таким образом, для аккуратного нахождения граничных значений напряженности магнитного поля уравнение для внешней цепи (1.9) должно решаться совместно с уравнениями МРГД (1.1)—(1.8), что еще более усложняет математическое моделирование сильноточных разрядов.

Эффективные алгоритмы решения одномерных уравнений магнитной газовой динамики, в том числе учитывающие влияние внешней электротехнической цепи, рассмотрены в книге А. А. Самарского и Ю. П. Попова [169]. Эти методы совместно с методами решения одномерных задач динамики излучающего газа (гл. III) явились основой для алгоритмов, используемых при математическом моделировании сильноточных разрядов [55, 77, 148].

**2. Электротехническое приближение.** Наряду с системой уравнений (1.1)—(1.9) рассмотрим также электротехническое приближение [79], позволяющее упростить математическое моделирование некоторых одномерных задач МРГД.

Рассмотрим конструкцию типа z-пинча, в которой ток от батареи конденсаторов к разряду подводится с помощью сплошного медного электрода (см. рис. 60). Проводимость меди на 3—4 порядка выше проводимости низкотемпературной плазмы, поэтому электрод должен быть эквипотенциальной поверхностью\*). Предположим, что электрическое поле  $E_z$  будет зависеть от радиуса. Из одномерности разряда следует, что разность потенциалов между электродами тоже должна быть функцией радиуса. Однако это противоречит условию эквипотенциальности. Поэтому можно ожидать, что если в радиальном направлении компонента электрического поля  $E_z$  меняется существенно, то возникнет неоднородность поля и вдоль оси. Достаточным условием отсутствия этих эффектов является малость характерных размеров системы  $d$  по сравнению с длиной диффузии  $\Delta r$  магнитного поля за характерное время  $\Delta t$ .

---

\*) Проводимость высокотемпературной плазмы близка к проводимости меди, поэтому к разрядам в высокотемпературной плазме эти рассуждения не относятся.

Для разрядов конденсаторных батарей с периодом  $t \approx 10$  мкс это приводит к довольно жесткому ограничению: линейные размеры плазменного слоя не должны превышать нескольких сантиметров.

Действительно, эксперимент показывает, что при нарушении условия малости во много раз, например, при электрическом взрыве проволок длиной  $\sim 1$  м, нередко наблюдается сильная неоднородность по оси разряда [50]. Однако при небольшом нарушении этого условия отклонения от одномерности обычно несущественны. Последнее имеет место в конструкциях с быстрой батареей и размерами газоразрядной камеры до 10—15 см [16]. Для описания этих конструкций можно предложить относительно простое электротехническое приближение.

Будем считать электроды эквипотенциальными поверхностями, а электрическое поле между ними однородным. Тогда плазменный столб можно рассматривать просто как проводник, имеющий переменную по радиусу проводимость. Он характеризуется собственным сопротивлением и индуктивностью, его емкостью можно пренебречь.

Из решения уравнений газовой динамики определяются распределение температуры и плотности по радиусу. С их помощью нетрудно найти проводимость плазмы  $\sigma(T, \rho)$ . Подсчет сопротивления плазменного столба  $R_{пл}$  по известной проводимости очевиден

$$R_{пл} = 1 \int_0^{R(t)} \sigma(T, \rho) r dr. \quad (1.10)$$

Индуктивность плазменного столба определяется из соотношения

$$\frac{1}{2} L_{пл} I^2 = \frac{1}{8\pi} \int_0^{R(t)} H^2 r dr. \quad (1.11)$$

Здесь интегрирование ведется по всей области, в которой имеется магнитное поле  $0 \leq r \leq R(t)$ .

Магнитное поле в конкретной точке  $r$  цилиндрического плазменного столба равно

$$H(r) = \frac{2}{r} I(r), \quad (1.12)$$

где  $I(r)$  — ток, протекающий через сечение радиуса  $r$ :

$$I(r) = 2\pi \int_0^r j(r') r' dr'. \quad (1.13)$$

В свою очередь плотность тока  $j$  определяется по закону Ома

$$j = \sigma(T, \rho) E.$$

Учитывая, что в рассматриваемом приближении напряженность электрического поля  $E$  постоянна, используя выражения (1.12) — (1.13), приведем (1.11) к виду

$$\begin{aligned} L_{\text{на}} &= \frac{1}{4\pi} \frac{\int_0^{R(t)} H^2 r dr}{\left[ \int_0^{R(t)} j r dr \right]^2} = \frac{E^2 \int_0^{R(t)} \frac{dr}{r} \left[ \int_0^r \sigma(T(r'), \rho(r')) r' dr' \right]^2}{E^2 \left[ \int_0^{R(t)} \sigma(T(r'), \rho(r')) r' dr' \right]^2} = \\ &= \int_0^{R(t)} \frac{dr}{r} \left[ \int_0^r \sigma r' dr' \right]^2 / \left[ \int_0^{R(t)} \sigma r dr \right]^2. \quad (1.14) \end{aligned}$$

Тем самым индуктивность плазменного столба не зависит в явном виде от напряженности электрического поля.

Определив сопротивление и индуктивность газового разряда из выражений (1.11) — (1.14), полный ток  $\mathcal{I}$  найдем из решения уравнения (1.9). В дальнейшем, используя полученное таким образом значение полного тока в качестве граничного условия, из уравнений магнитной газовой динамики можно найти распределение магнитного поля  $H$ , величину джоулева нагрева  $q$  и лоренцеву силу  $F$ . Однако применяя рассуждения, аналогичные тем, которые привели к выражению (1.14), можно вообще отказаться от решения уравнения (1.4).

В самом деле, из условия постоянства  $E$  найдем, что полный ток, протекающий через газовый разряд, равен

$$\mathcal{I} = 2\pi E \int_0^{R(t)} r \sigma dr. \quad (1.15)$$

Определив значение полного тока  $\mathcal{I}$  из решения электротехнического уравнения (1.9), найдем конкретную величину напряженности электрического поля

$$E = \mathcal{I} \left[ 2\pi \int_0^{R(t)} r \sigma dr \right]^{-1}. \quad (1.16)$$

Зная  $E$ , определим плотность тока  $j = \sigma E$  и значение напряженности магнитного поля из выражений (1.12) — (1.13). С помощью  $j$  и  $H$  найдем величину лоренцевой силы  $F$  и джоулева нагрева  $q$ .

Очевидно, что электрическое приближение заметно проще магнитогидродинамического; особенно удобно оно тем, что позволяет легко включать в расчет разнообразные и сложные внешние электрические цепи. Вероятно, для низкотемпературных  $z$ -пинчей в камерах со сплошными электродами электротехническое приближение имеет примерно ту же физическую точность, что и одномерное МГД-приближение. Доводом в пользу такого предположения служит то, что расчеты разрядов в газах, выполненные в обоих этих приближениях, дают очень близкие результаты. На рис. 61 приведены результаты такого сопоставления, взятые из работы [79].

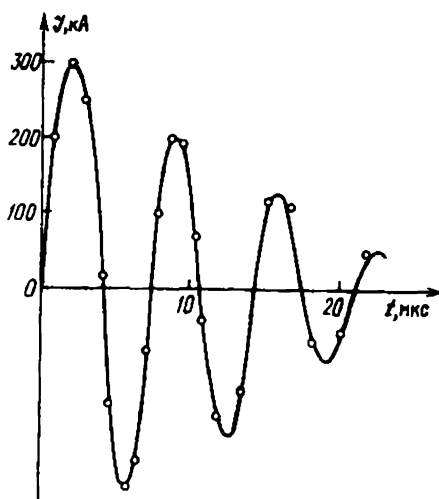


Рис. 61. Полный ток в цепи: сплошная кривая — данные, полученные из одномерного МГД-расчета, кружки — результаты, полученные с помощью электротехнического приближения

Следует отметить, что электротехническое приближение не переносится на  $\theta$ -пинчи.

**3. Разряд в литиевой плазме.** Экспериментальное и теоретическое исследование сильноточных разрядов с целью изучения возможности создания импульсных источников излучения для накачки ОКГ проводилось в конце 60-х — начале 70-х годов [3, 4, 10, 50, 111]. Схема-

тически опишем некоторые из этих экспериментов, которые послужили основой для последующего математического моделирования [15, 16, 77].

Мощная батарея конденсаторов (см. рис. 60) разряжается через проволочку, которая располагается в вакуумной камере. Процесс электрического взрыва проволочек сопровождается испарением металла, падением вследствие этого проводимости среды, «паузой тока», явлением пробоя паров и, наконец, сильноточным разрядом через образовавшуюся плазму.

Плотность плазмы в мощных разрядах составляет  $10^{17}$ — $10^{19}$  ч/см<sup>3</sup>, а ее температура доходит до нескольких электронвольт. Возникающие магнитные поля достигают величины  $30 \div 50$  килоэрстед. Они задерживают разлет плазмы, могут проводить к пинчеванию и образованию квазистационарных режимов. Поэтому время излучения в таких разрядах оказывается много больше характерных газодинамических времен, тем самым большая доля вложенной в плазму энергии успевает перейти в излучение. Для целей накачки ОКГ представляет интерес не только общий выход излучения, но и его спектральный состав. В. Б. Розановым был предложен плазменный источник с селективным излучением на основе литиевой плазмы [152]. Опишем некоторые результаты расчетов таких разрядов.

На рис. 62—65 представлены данные расчетов [77] разряда со следующими параметрами электротехниче

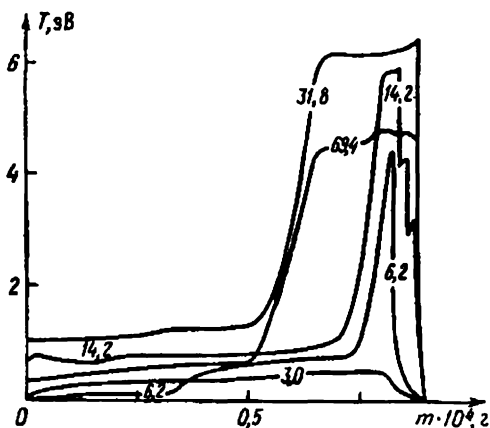


Рис. 62. Распределение температуры в различные моменты времени ( $t$ —в мкс) по массе плазменного столба

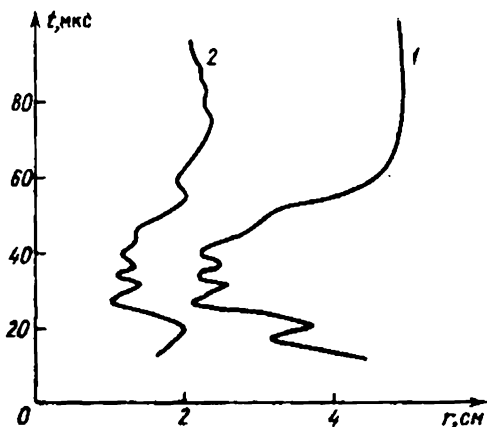


Рис. 63. Внешняя граница плазмы (кривая 1) и холодной зоны (кривая 2)

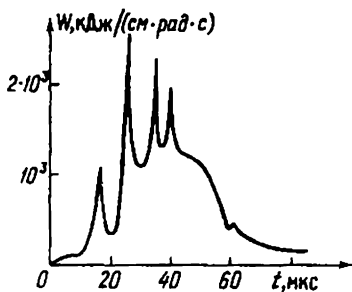


Рис. 64. Полный поток энергии излучения, выходящий из плазмы

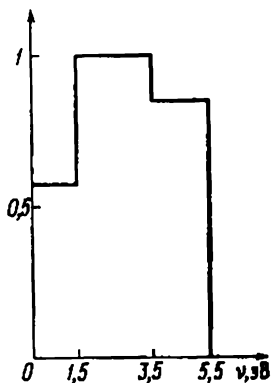


Рис. 65. Гистограмма потока энергии излучения, нормированная на его максимальное значение в диапазоне частот  $0 < \nu < 5,5$  эВ

ской цепи:  $C=1800$  мкФ,  $U=5$  кВ,  $L=0,25$  мкФ,  $R=2,25$  Ом, длина и радиус разрядной камеры  $l=15$  см,  $r_h=5$  см, радиус обратных проводов  $r^*=7$  см, начальный диаметр проволоки  $d=0,037$  см.

В начальной стадии процесса ( $t < 3$  мкс), когда пары металла уже ионизованы, а разрядный ток еще невелик, магнитные силы слабо влияют на движение плазмы.

**Плазменный** шнур, расширяясь в вакуум, быстро охлаждается, электропроводность среды при этом падает.

К моменту времени  $t=4$  мкс плазма достигает стенок разрядной камеры ( $r=5$  см). При отражении плазмы от камеры образуется ударная волна, которая распространяется к центру. Образуется неравномерный профиль температуры, а следовательно и проводимости. В дальнейшем на этой неоднородности возникает  $T$ -слой\*) (см. рис. 62).

Электрические токи в силу нелинейной зависимости электропроводности от температуры концентрируются в  $T$ -слое. Температура в нем резко повышается.

Отраженная ударная волна кумулируется на ось, вновь отражается и далее многократно проходит по плазме, вызывая кратковременные пульсации разряда. Вблизи максимума тока ( $t \sim 30-40$  мкс) магнитные силы становятся большими и некоторое время удерживают внешнюю границу плазменного шнура на расстоянии  $r \approx 2-3$  см (рис. 63).

Тепловой фронт, идущий от  $T$ -слоя к центру, останавливается. В результате на развитой стадии разряда плазма оказывается как бы разбитой на две зоны: низкотемпературное ( $T \approx 1$  эВ) и плотное центральное ядро и горячую внешнюю зону с температурой 5—6 эВ. Электрические токи текут в основном по горячей внешней зоне, проводимость которой велика. Движение границы между холодной и горячей зонами показано на рис. 63. После прохождения максимума тока плазменный шнур постепенно расширяется из-за уменьшения лоренцевой силы. Джоулев нагрев, поддерживающий  $T$ -слой, ослабевает.

Зависимость выходящего из плазмы потока энергии излучения от времени показана на рис. 64. Наибольший выход энергии наблюдается вблизи максимума тока. На этом рисунке хорошо видны кратковременные вспышки яркости (пики) продолжительностью 1—5 мкс. Они могут быть объяснены динамическими пульсациями плазменного шнура и наличием  $T$ -слоя. Так как  $T$ -слой оптически тонок, то поток энергии из него пропорциона-

---

\*) Физический эффект  $T$ -слоя, связанный с образованием самоподдерживающихся высокотемпературных областей в магнитогидродинамических процессах, был обнаружен с помощью вычислительного эксперимента [180]. Впоследствии эффект был подтвержден натурным экспериментом.

лен коэффициенту поглощения. Во время пульсаций плотность плазмы и зависящий от нее коэффициент поглощения существенно меняются, что и приводит к значительным изменениям потока энергии излучения.

Спектр излучения рассчитывался в пятигрупповом приближении со следующими значениями граничных частот:  $\nu_1=0$ ,  $\nu_2=1,5$  эВ,  $\nu_3=3,5$  эВ,  $\nu_4=5,5$  эВ,  $\nu_5=75$  эВ,  $\nu_6=600$  эВ. Эффективная спектральная плотность энергии излучения определялась по формуле  $W_{k, \text{эф}} = W_k / (\nu_{k+1} - \nu_k)$ .

На рис. 65 представлена гистограмма потока энергии излучения в инфракрасном видимом и ближнем ультрафиолетовом диапазонах вблизи максимума тока. За первый период колебания разрядного тока ( $t \approx 80$  мкс) из системы в виде излучения вышло 25% полной энергии, заключенной в начальный момент времени в батарее конденсаторов; при этом в диапазоне частот  $\nu \leq 5,5$  эВ высветилось 25% общей энергии, покинувшей систему в виде излучения.

Таким образом, характерной чертой процесса, во многом определяющей всю расчетную картину явления, является наличие квазистационарного образования типа *T*-слоя, расположенного на внешней границе плазмы и имеющего температуру порядка 6—7 эВ. Однако при параллельном экспериментальном исследовании этого процесса таких высоких температур не наблюдалось. С другой стороны, численное решение хорошо соответствует системе уравнений (1.1)—(1.9), в том числе и физическим предположениям, используемым при выборе материальных функций (1.6).

Хорошая точность решения по выбранной математической модели и одновременно существенное расхождение между данными расчета и эксперимента говорят о том, что первоначальная математическая модель нуждается в уточнении. Как показали дальнейшие исследования, в первую очередь это касалось выбранной модели коэффициента поглощения.

В первоначально выбранной модели коэффициента поглощения учитывались только тормозные процессы и фотоэффект. На рис. 66 изображен график коэффициента поглощения, полученный А. Ф. Никифоровым и В. Б. Уваровым [77] с учетом этих процессов для характерной плотности  $\rho = 10^{-5}$  г/см<sup>3</sup> высокотемпературной горячей оболочке. Скачки кривых соответствуют началу фотоионизации определенных уровней лития.

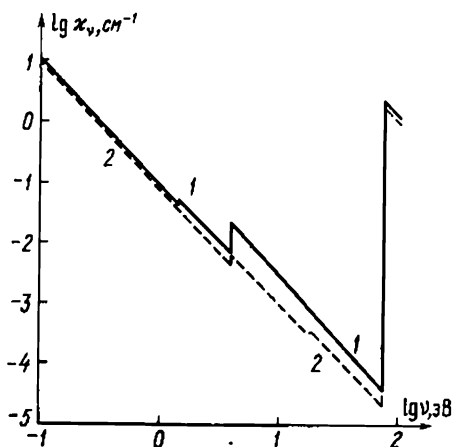


Рис. 66. Зависимость коэффициента поглощения литиевой плазмы ( $\rho=10^{-5}$  г/см<sup>3</sup>) от частоты; кривая 1 соответствует  $T=3,16$  эВ, кривая 2 —  $T=5,62$  эВ

Перенос излучения в линиях в этой модели не учитывался. Первоначальные физические оценки показывали, что суммарная площадь линий невелика, и поэтому энергия, высвечиваемая в них, будет мала по сравнению с потерями энергии в сплошном спектре.

Основываясь на выбранной модели коэффициента поглощения, рассмотрим, за счет чего происходит стабилизация температуры во внешней горячей оболочке. Как показывают данные расчетов, на стадии интенсивного пинчевания плазмы вкладом газодинамического движения и электронной теплопроводности в нагрев или охлаждение плазмы можно пренебречь. И, следовательно, при составлении баланса энергии необходимо учитывать только два конкурирующих процесса: нагрев плазмы за счет притока джоулева тепла и ее охлаждение за счет высвечивания энергии.

Джоулев нагрев плазмы определяется с помощью выражения  $q = \sigma E^2$ . Полагая напряженность электрического поля, которая в значительной мере определяется параметрами внешней цепи, слабо меняющейся с течением времени, получим, что в основном изменение джоулева нагрева определяется проводимостью плазмы  $q(t) \sim \sigma(T(t), \rho(t))$ . Классической зависимостью проводимости плазмы от температуры является закон  $\sigma \sim T^{3/2}$ . Более точные табличные данные [107] дают приближи-

тельно тот же закон зависимости, хотя при этом конкретные значения проводимости могут существенно отличаться от классических. Следовательно, зависимость джоулевого нагрева плазменного слоя температуры можно с достаточной степенью точности записать в виде

$$q = aT^{3/2}, \text{ где } a \text{ — постоянная.} \quad (1.17)$$

Потери энергии за счет излучения на единицу объема для оптически тонкого слоя определяются выражением

$Q_w = \int_0^{\infty} I_{\nu p} \kappa_{\nu} d\nu$ , где  $I_{\nu p}$  — интенсивность излучения абсолютно черного тела (1.11) (гл. I). Если в излучении плазмы учитываются только тормозные процессы, коэффициент поглощения которых пропорционален  $\kappa_{\nu} \sim 1/(T^{1/2} \nu^3)$ , то потери энергии на высвечивание равны

$$Q_w = bT^{1/2}, \quad (1.18)$$

где  $b$  — постоянная, не зависящая от температуры.

Из сопоставления выражений (1.17) и (1.18) видно, что потери энергии за счет тормозного излучения не могут компенсировать джоулев нагрев. В этих условиях рост температуры слоя может продолжаться неограниченно.

Изучаемая экспериментально литиевая плазма имела характерную плотность в горячей оболочке  $\rho \sim 10^{-4} + \div 10^{-5}$  г/см<sup>3</sup> и толщину внешнего слоя  $\sim 2 \div 3$  см. В этих условиях литиевая плазма оптически непрозрачна (рис. 66) для излучения, лежащего в диапазоне частот  $\nu \sim 75 \div 100$  эВ, что связано с отрывом второго электрона. При этом с единицы площади поверхности плазмы для данных частот фотонов теряется энергия

$\sim \int_{75}^{100} I_{\nu p} d\nu$ . Для характерных температур  $T \sim 6 \div 7$  эВ эти потери могут быть получены с помощью выражений (5.6) — (5.7) (гл. II):

$$Q_{w1} = e^{-75/T} T^4. \quad (1.19)$$

Из выражения (1.19) видно, что эти потери ничтожны при температурах меньших, чем 5 эВ, и их можно не учитывать. С ростом же температуры потери энергии на высвечивание резко возрастают. Они же компенсируют джоулев нагрев внешней оболочки плазменного столба и стабилизируют его температуру на уровне 6 эВ. Если бы скачок фотопоглощения происходил бы не при час-

тоте  $\nu = 75$  эВ, а при меньшей частоте, например  $\nu = 60$  эВ, то температура в разряде стабилизировалась бы на уровне  $T \approx 5$  эВ.

Проведенный анализ показывает, что излучение в диапазоне частот, для которых плазменный столб оптически непрозрачен, может компенсировать джоулев нагрев, несмотря на то, что общие потери энергии на высвечивание в нем невелики. Важно, чтобы нарастание потерь энергии в этом диапазоне с увеличением температуры газового разряда компенсировало прирост энергии за счет джоулева нагрева [55, 88].

Значительно меньшая по сравнению с 6 эВ экспериментально наблюдаемая температура разряда и результаты проведенного анализа стационарного состояния плазменного столба заставили учесть в математической модели ранее казавшееся несущественным излучение в линиях. Как потом показали данные экспериментов, в ближнем ультрафиолете наблюдались линии, в том числе и линии элементов примесей, с суммарной шириной  $\Delta\nu \sim 1$  эВ.

Для модельного учета влияния этих линий была дополнительно введена в расчет группа в диапазоне частот  $5,5 \text{ эВ} \leq \nu \leq 6,5 \text{ эВ}$  с большим коэффициентом поглощения в ней. В решении, полученном с добавочной группой (кривая  $T_2$ , рис. 67), горячая внешняя оболочка отсутствует [55, 88], характерная температура  $T \approx 3,5$  эВ близка к экспериментально наблюдаемой.

Таким образом, анализ проведенных расчетов, их сравнение с данными натурального эксперимента позволили уточнить исходную математическую модель, сделали ее более адекватной изучаемому физическому процессу.

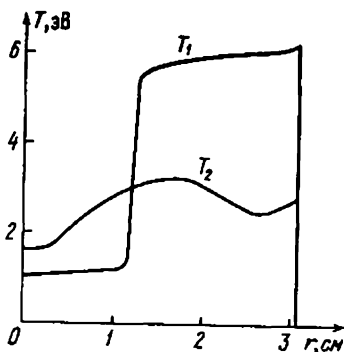


Рис. 67. Характерные расчетные профили температуры для стационарной стадии разряда в литиевой плазме:  $T_1$  — без учета излучения в линиях,  $T_2$  — с учетом излучения в линиях

**4. Излучающие разряды в ксеноне.** Изучение разрядов в литиевой плазме было одним из первых исследований этих физических процессов с помощью расчетов на ЭВМ, использующих достаточно полные математические модели. Накопленный при этом опыт эффективного взаимодействия между натурным и вычислительным экспериментами позволили в дальнейшем более успешно проводить математическое моделирование, добиваясь не только правильного качественного, но и более точного количественного описания явлений в разрядах.

Рассмотрим некоторые результаты математического моделирования разрядов в ксеноновой плазме [15—17]. Схема соответствующей установки, на которой проводились экспериментальные исследования в ГОИ им. С. И. Вавилова, изображена на рис. 68. Ток разряда течет по центральному металлическому стержню диаметра  $d_0$  и возвращается по плазменному цилиндру, образуя коаксиальную систему. Внутренний диаметр токового слоя в плазме равен  $d_1$ . Поверхность металлического стержня покрыта диэлектриком. Разряд

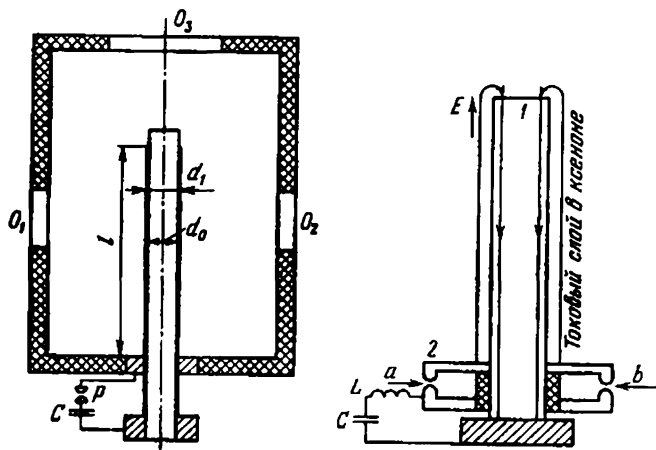


Рис. 68. Схема экспериментальной установки: слева — общий вид разрядной камеры, справа — центральная часть камеры с энергетической установкой. Обозначения:  $C$  — конденсаторная батарея,  $P$  — разрядник,  $l$  — длина разрядного промежутка,  $d_0$  — диаметр токоведущего стержня,  $d_1$  — наружный диаметр диэлектрической пленки,  $O$  — кварцевые окна,  $1$  и  $2$  — электроды основного разряда, стрелки  $a$  и  $b$  указывают «поджигающие» электроды кольцевого разрядника

проводился в камерах, наполняемых различными газами при начальном давлении от 10 до 600 Тор (мм рт. ст.).

При включении разрядника  $P$  (рис. 68) высокое напряжение возникало между центральным стержнем 1 и электродом 2, что приводило к развитию «скользящих» по поверхности диэлектрика разрядов [11]. В рассматриваемых условиях «скользящие» разряды формировали однородный плазменный цилиндр в инертных газах при  $p_0 \leq 600$  Тор. В воздухе и других электроотрицательных газах получение однородной цилиндрической поверхности затруднено: возникшие вначале отдельные каналы не сливаются.

Несмотря на наличие общих черт, сплошная плазменная оболочка имеет принципиальное отличие от оболочки, состоящей из системы отдельных проводников. Каждая из отдельных плазменных «нитей» окружена собственным магнитным полем, при росте которого такая «нить» стремится сжаться к собственной оси, что способствует развитию силовых неустойчивостей. Сплошная плазменная оболочка совместно с центральным тоководущим стержнем образует своеобразный кабель, оплеткой которого является плазменный цилиндр. При этом вместо системы ударных волн, окружающих каждую из нитей, образуется одна цилиндрическая симметричная ударная волна, охватывающая весь плазменный шнур.

Экспериментальное исследование динамики плазменной оболочки производилось через кварцевые окна  $O$  (рис. 68) с помощью скоростного фоторегистратора (СФР) как вдоль, так и поперек разряда оси.

Как показывают данные эксперимента, при включении высокого напряжения развитие скользящего разряда образует на диэлектрической поверхности однородный слой плазмы толщиной порядка  $10^{-1}$  см с температурой около 1 эВ. Это значение температуры носит оценочный характер. Разряд с достаточной степенью точности обладает одномерной цилиндрической симметрией \*).

---

\*) Электрод 2 (рис. 68) представляет собой эквипотенциальную поверхность. С другой стороны, у стержневого электрода 1 линии тока и напряженности электрического поля искажаются. Область искажения распространяется вдоль промежутка на величину  $\Delta r$ , примерно равную двум толщинам плазменного слоя, что составляет 10—20% длины разрядного промежутка  $\Delta r \leq 0,2 l$ .

Экспериментально наблюдалось снижение температуры у поверхности диэлектрического покрытия центрального стержня. Это снижение связано с процессом испарения материала диэлектрика центрального стержня. Временные развертки спектров, снятые вдоль оси разряда, показывают появление линий элементов, составляющих диэлектрик у поверхности центрального стержня. В дальнейшем в парах диэлектрика возникают явления, связанные с вторичным пробоем. Однако с точки зрения энерговыделения влиянием продуктов испарения практически можно пренебречь: площадь, занимаемая ими, не превышала и 10% площади сечения плазменного столба\*).

Проведенные экспериментальные исследования [16] позволили с уверенностью использовать для математического моделирования разрядов систему одномерных МРГД уравнений (1.1) — (1.8). Для учета влияния внешней цепи использовалось электротехническое приближение. Явления, связанные с испарением вещества диэлектрика и вторичным пробоем, при численном моделировании не учитывались.

Для окончательного создания математической модели необходимо осуществить выбор для каждого конкретного вещества правильных термодинамических функций, транспортных коэффициентов и коэффициентов поглощения. Для определения термодинамических функций и проводимости плазмы целого ряда веществ, в том числе и ксенона, существуют таблицы [107], надежность которых опробована во многих случаях экспериментов.

Расчет коэффициентов поглощения сталкивается с большими трудностями. Они связаны с необходимостью учета многих состояний атомов и ионов в различных переходах, определением формы линии и т. д. К счастью, во многих задачах динамики излучающего газа интересующий поток энергии излучения определяется не всеми деталями коэффициента поглощения. Это позволяет пользоваться своеобразным итерационным способом выбора эффективных коэффициентов поглощения.

Для рассматриваемой серии расчетов существовали экспериментальные данные по коэффициентам поглоще-

---

\*) Данный вывод относится к разрядам, начальное давление газа в которых составляло несколько десятков Тор и выше. При понижении начального давления газа удельная масса испаренного вещества возрастает, при этом она начинает оказывать существенное влияние на все процессы в разряде.

ния ксенона в области пропускания кварца [13]. Кроме того, было известно, что для частот  $\nu > 8$  эВ существует сложная система зачастую перекрывающихся линий поглощения излучения, а при приближении частоты  $\nu$  к 12 эВ коэффициент поглощения резко возрастает из-за фотоионизации с основного состояния.

Предварительные расчеты показали, что окончательные данные существенным образом зависят лишь от деталей коэффициента поглощения в видимом свете и ближнем ультрафиолете. Для более жесткой части спектра важным оказывается лишь то, прозрачным или непрозрачным является плазменный столб ксенона. Поэтому в окончательной модели коэффициент поглощения для жесткой части спектра был выбран постоянным и достаточно большим. Его же конкретная величина особой роли не играла\*).

Таким образом, для окончательного построения математической модели используется своеобразная итерационная схема: первоначальная модель коэффициента поглощения — расчет задачи МРГД — уточнение модели коэффициента поглощения — расчет задачи МРГД. Следует отметить, что такое непосредственное использование расчетов задачи динамики излучающего газа позволяет зачастую восполнить недостаток теоретической и экспериментальной информации о коэффициентах поглощения, о котором говорилось ранее в §1 гл. II.

Рассмотренный подход, хотя и не дает возможности получить «истинные» значения коэффициента поглощения во всем интересующем диапазоне параметров, позволяет построить сравнительно простую модель этих коэффициентов, вполне пригодную для численного решения данного класса задач. Естественно, что при переходе к другому типу задач выбранная модель коэффициента поглощения должна подвергнуться пересмотру.

Следует отметить, что на таком пути, использующем общую методологию вычислительного эксперимента, можно во многих случаях существенно сократить число групп, необходимых для определения поля излучения в

---

\*) Естественно, что такая модель справедлива лишь для определенного диапазона температур плазменного столба  $T < 5$  эВ. При дальнейшем росте температуры следует учитывать фотоионизацию второго уровня и излучение в линиях. Их учет может привести с ростом температуры к образованию перегретой неустойчивости, которая уже была рассмотрена в связи с разрядами в литиевой плазме.

задачах РГД. В самом деле, предварительное численное решение на грубых моделях позволяет выяснить те особенности в коэффициенте поглощения, к которым данный класс задач чувствителен. Во многих случаях число таких особенностей невелико. Это и позволяет выбрать для окончательного расчета модель, использующую сравнительно небольшое число групп.

Рассмотрим общую картину [15, 16] расходящегося  $z$ -пинча в ксеноновой плазме, полученную на основе совместного использования данных расчета и эксперимента. Параметры контура выбирались следующие: емкость  $C=30$  кмФ, индуктивность  $L_{ц}=0,25$  мкГн, напряжение конденсаторной батареи  $U=20$  кВ, сопротивлении цепи  $R_{ц}=1,5 \cdot 10^{-2}$  Ом, начальная энергия контура  $\mathcal{E}=6$  кДж. Длина разрядного промежутка  $l=10$  см. Центральный токопровод имел токоведущий диаметр  $d_0=0,8$  см и был покрыт лавсановой пленкой толщиной  $0,1$  см ( $d_1=1$  см). Внутренний радиус камеры, которая заполнялась ксеноном с первоначальным давлением  $180$  Тор, равнялся  $15$  см.

Инициирование плазменного столба осуществляется искровым разрядом вдоль внешней поверхности центрального токопровода. При этом источник высокого на-

пряжения, имеющий по сравнению с основной батареей небольшую мощность, вызывает пробой в тонком слое газа. В численных расчетах зона пробоя задавалась с помощью тонкого слоя толщиной порядка нескольких десятых долей миллиметра, нагретого до температуры от  $0,2$  до  $1$  эВ.

Исследовалось влияние параметров нагретого слоя, которые выбирались в качестве начальных данных, на развитие основного разряда. Расчеты показали, что при слишком малой начальной температуре  $T_0$  разряд не развивается. Начиная с некоторой пороговой температуры ( $\sim 0,3$  эВ для ксе-

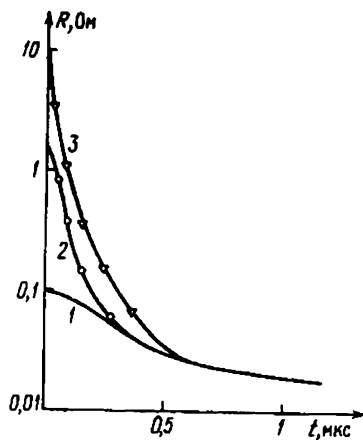


Рис. 69. Сопротивление разряда при различных источниках инициирования. Кривая 1 --  $T_0=0,5$  эВ, кривая 2 --  $T_0=0,4$  эВ, кривая 3 --  $T_0=0,35$  эВ

нона), разряд развивается нормально, причем ход процесса только в первые доли микросекунды зависит от температуры  $T_0$  инициирования. Например, при  $T_0 = 0,5$  эВ и выше разряд развивается практически сразу, при  $T_0 = 0,4$  эВ — с задержкой 0,25 мкс и при  $T_0 = 0,35$  эВ — с задержкой 0,5 мкс (рис. 69).

Существование порогового значения связано с сильной зависимостью проводимости от температуры  $\sigma \sim \exp\{-\varphi/T\}$  при малых  $T$ . Строго говоря, пороговая температура должна зависеть не только от вида газа, но и от параметров электрической цепи, длины камеры и толщины подожженного слоя. Однако зависимость проводимости от температуры настолько сильна, что практически пороговая температура определяется только видом газа, точнее, величиной потенциала ионизации  $\varphi$ .

Таким образом, слабая чувствительность основного разряда к деталям инициирования позволяет достаточно просто выбирать начальные значения для основной системы уравнений (1.1) — (1.8).

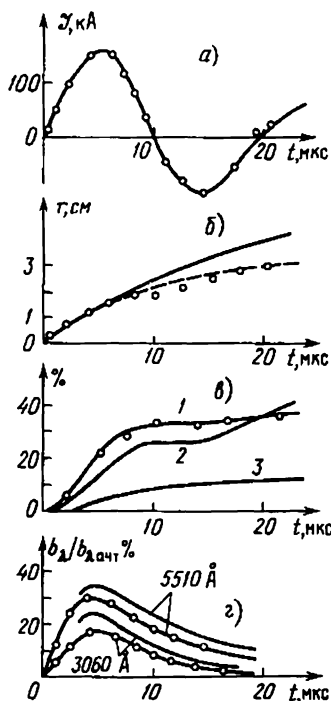


Рис. 70. Сравнение экспериментальных данных (кружки) с расчетными: а) для тока; б) для радиуса фронта ударной волны (сплошная кривая) и границы области свечения (пунктир); в) для энергетического баланса в процентах от  $CU_0^2/2$  — начальной энергии батареи конденсаторов: 1 — энергия, вложенная в плазму, 2 — энергия, выделившаяся вне разряда, 3 — энергия, покинувшая разряд в виде излучения; г) относительная яркость  $b_\lambda/b_{\text{лэнт}}$  ( $b_\lambda$  — яркость излучения, выходящего из разряда на длине волны  $\lambda$ ,  $b_{\text{лэнт}}$  — яркость абсолютно черного тела при  $T = 40\,000$  К), данные расчета представлены сплошными кривыми

По образовавшемуся за счет искрового разряда плазменному слою начинает течь ток, который быстро нарастает (рис. 70, а) и достигает первого максимума при  $t=5,2$  мкс. При этом в плазму за счет джоулева нагрева быстро вкладывается энергия (рис. 70, б).

Температура в плазменном столбе нарастает и достигает в момент максимума тока величины  $\sim 3$  эВ (рис. 71). Образовавшаяся при этом область высокого давления в центре приводит к появлению ударной волны, которая характеризуется в расчетах с искусственной вязкостью как зона с большими градиентами давления плотности и скорости (рис. 71 и 72). Движение этой ударной волны показано также на рис. 70, б.

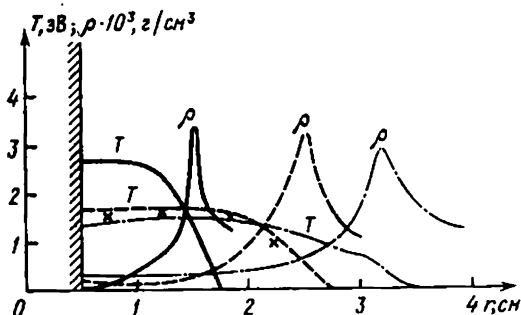


Рис. 71. Расчетные значения температуры и плотности в различные моменты времени (сплошные кривые —  $t=5,2$  мкс, пунктир —  $t=9,8$  мкс, штрихпунктир —  $t=14,4$  мкс, крестиками обозначены экспериментальные значения температуры для  $t=9,8$  мкс)

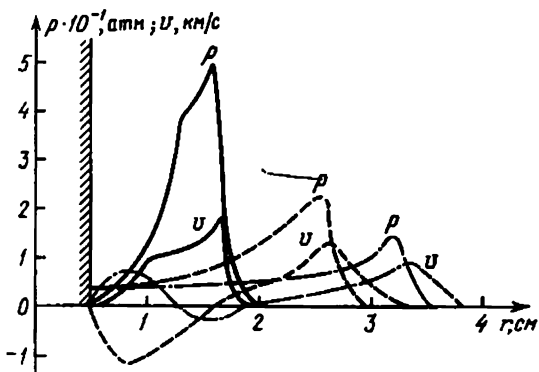


Рис. 72. Расчетные значения давления и скорости в различные моменты времени

Движение границы зоны с повышенной температурой экспериментально определяется как движение границы области интенсивного свечения (рис. 70, б). Эта граница с достаточной степенью точности соответствует температуре  $T \approx 0,9$  эВ. При данной температуре ионизация ксенона достигает 10%. Если температура падает на 0,1 эВ, то ионизация падает на порядок. Поэтому даже при не слишком крутом профиле температуры граница ионизованной области является резкой. Так как величина коэффициента поглощения сильно зависит от концентрации электронов, то и регистрируемый на СФР-грамме поток света резко меняется на волне ионизации.

Вначале граница светящейся области совпадает с ударной волной, затем отстает от нее. Интересно обратить внимание на некоторое экспериментально наблюдаемое снижение температуры вблизи центрального стержня, что связано с испарением материала диэлектрика (см. рис. 71) \*).

Следует отметить плавный рост температуры за фронтом ударной волны (см. рис. 71). Такое поведение свидетельствует о существенной роли прогрева газа потоком квантов со сравнительно большими пробегами, которое и обуславливает «язык прогрева» — область плавного спадания температуры. Это излучение, обеспе-

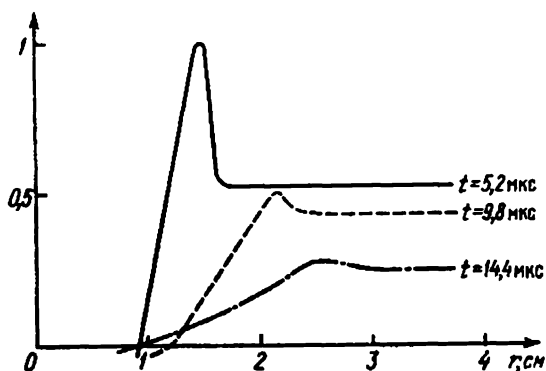


Рис. 73. Радиальное (относительное) распределение потока энергии излучения в различные моменты времени

\*) В математической модели разряда процессы испарения не учитывались, поэтому в расчетах снижения температуры вблизи центра не наблюдалось.

чивающее нагрев холодного ксенона, генерируется в центральной горячей зоне.

Из рис. 73 видно, что в районе максимума тока ( $t = 5,2$  мкс) на радиусе  $r = 0,94$  см (это соответствует границе области с постоянным распределением температуры) результирующий лучистый поток равен нулю. При увеличении радиуса от  $r = 0,94$  см до  $r = 1,27$  см результирующий поток резко увеличивается. В этой области — «оболочке» канала разряда плотность и температура не постоянны. Значение плотности в этой зоне значительно выше, чем в канале, а температура падает примерно на 20%.

При увеличении радиуса поток излучения падает: жесткая часть его ( $v \geq 8$  эВ) поглощается холодными и плотными слоями газа, остальное излучение почти беспрепятственно доходит до внешних стенок камеры.

В дальнейшем выходящий из центральной зоны поток энергии излучения, особенно его жесткая часть, падает. Это связано с общим уменьшением температуры в разряде после прохождения первого максимума тока.

В свою очередь падение температуры связано с уменьшением энерговыделения в плазму. На рис. 70, в приведены энергетические характеристики разряда. На этом же рисунке приведены предельные значения энерговложений в процентах к концу разряда. Видно, что основная часть энергии вкладывается в разряд уже ко времени  $t \approx 8$  мкс, т. е. меньше чем за половину периода. Заметно также характерное плато, соответствующее прохождению тока через нуль. В дальнейшем к моменту времени  $t \approx 14$  мкс скорость вложения энергии в разряд, несмотря на большие относительные значения полного тока, невелика. Это связано с тем, что к моменту времени  $t \geq 10$  мкс площадь сечения разряда становится значительной и соответственно уменьшается его сопротивление.

Примерно половина энергии (54%) выделяется на внешнем сопротивлении. Половина энергии, выделившейся в плазме (22% от общей энергии батареи конденсаторов), выходит в виде излучения. Это говорит о существенной роли радиации в энергетическом балансе.

На рис. 70, г приводятся расчетная и экспериментально наблюдаемая яркости излучения на длинах волн  $\lambda = 3060$  Å и  $\lambda = 5510$  Å, выходящего по радиусу камеры. Это яркость измеряется в долях яркости эталонного источника с температурой  $T = 40\,000$  К. Из рисунка

Видно, что до первого максимума тока расчетная и экспериментальная яркости для более мягкого излучения ( $\lambda=5510 \text{ \AA}$ ) близки. В дальнейшем экспериментальная яркость уменьшается по сравнению с расчетной. Для  $\lambda=3060 \text{ \AA}$  превышение расчетной яркости несколько больше.

Эти расхождения объясняются не учитываемым в расчете поглощением выходящего излучения на внутренней испаряющейся поверхности кварцевых окон [14], через которые проводились замеры оптических характеристик разряда (см. рис. 68). При этом поглощение растет со временем, и оно действительно должно быть больше для жесткого излучения.

Наблюдаемое расхождение яркости соответствует очень малым различиям в температуре плазмы, примерно 0,1—0,2 эВ. Следовательно, температуры в расчете и эксперименте близки, что и подтверждается прямыми измерениями (см. рис. 71). Этот факт, а также аккуратная передача в расчете границы светящейся области, говорят о хорошей точности численного определения потока энергии излучения.

Данные расчетов (см. рис. 72) говорят о большой роли магнитного давления в динамике плазменного разряда. В районе максимума тока ( $t=5,2 \text{ мкс}$ ) газокINETическое давление на ударной волне достигает 50 атм, в то время как у центрального стержня из-за малой плотности оно равно 1,5 атм. При этом, однако, вся масса газа движется по радиусу с положительной скоростью.

Когда ток равен нулю ( $t=9,8 \text{ мкс}$ ), магнитное давление падает и часть массы газа возвращается к оси (отрицательная скорость), а другая часть продолжает течь за ударной волной. Где-то на середине газ неподвижен ( $v=0$ ). Газодинамическое давление у стержня несколько повышается (до 2 атм). В районе второго максимума тока ( $t=14,4 \text{ мкс}$ ) газ снова движется в положительном направлении у центрального стержня.

В заключении рассмотрения результатов исследований расходящегося  $z$ -пинча в ксеноновой плазме отметим, что приведенное сравнение (см. рис. 70) показывает, что принятая математическая модель разряда хорошо соответствует эксперименту. Это дает основание для использования данных расчета в качестве физических результатов.

5. Разряд в ксеноне, сходящийся  $z$ -пинч. Рассмотрим некоторые результаты совместного эксперименталь-

ного и с помощью расчетов на ЭВМ исследования разрядов в ксеноне типа z-пинч большого радиуса» [9]. В отличие от предыдущего процесса оболочка не расширяется, а наоборот, сходится к оси разряда. Помимо чисто утилитарных технических целей такой разряд может служить средством физического исследования плотной, нагретой до температур  $T \geq 1$  эВ плазмы, которая получается при кумуляции в центре камеры.

Схема разрядной камеры и электрической цепи изображена на рис. 74. Начальный тонкий плазменный слой формировался на внутренней поверхности кварцевой колбы радиуса  $r_0$  за счет скользящего разряда. В качестве обратного токопровода использовался сплошной металлический цилиндр радиуса  $r_1$ .

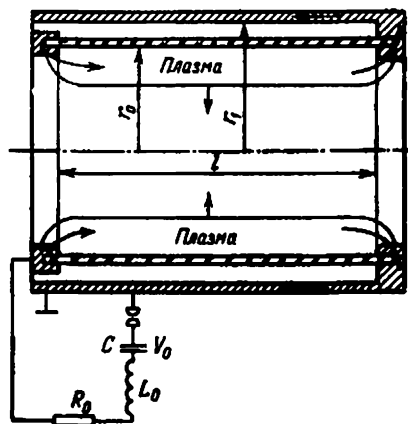


Рис. 74. Схема разрядной камеры и электрической цепи

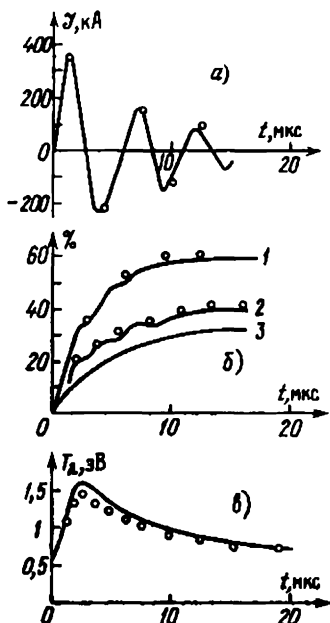
В качестве конкретных параметров разрядной камеры использовались следующие:  $r_0 = 4,9$  см;  $r_1 = 6,75$ ; расстояние между электродами  $l$  равнялось 14 см; камера была наполнена ксеноном при первоначальном давлении  $p_0 = 75$  торр.

Параметры электрического контура выбирались следующие:  $C = 1,7$  мкФ,  $L_0 = 50$  нГн,  $R_0 = 0,006$  Ом,  $V_0 = 30$  кВ.

По образовавшейся в пристеночной области плазме начинает течь ток, который быстро нарастает (рис. 75, а). За счет джоулева нагрева происходит быстрое вложение энергии в плазму (рис. 75, б) и соответственно повышение ее температуры к моменту времени  $t = 1,6$  мкс до 2,7 эВ. При прохождении тока через нуль скорость вложения энергии резко падает, что находит отражение в характерных плато на кривой  $I$  (рис. 75, б).

Наличие в пристеночной области зоны высокой температуры и соответственно давления приводит к образованию ударной волны, движущейся по направлению

Рис. 75. Сравнение данных расчета и эксперимента для сходящегося разряда (сплошные кривые — данные расчета, кружки — данные эксперимента): а) полный ток, протекающий через разряд; б) энергетический баланс в процентах от начальной энергии батареи (1 — энергия, вложенная в плазму, 2 — энергия, выделившаяся на внешнем сопротивлении, 3 — энергия вышедшего из плазмы излучения); в) яркостная температура на длине волны  $\lambda = 5510 \text{ \AA}$



к центру (рис. 76). Вначале граница области повышенной температуры совпадает с положением ударной волны, а затем ее движение начинает замедляться. С момента времени  $t \approx 15 \text{ мкс}$  положение границы светящейся области практически не меняется.

В момент времени  $t = 30 \text{ мкс}$  происходит кумуляция ударной волны на оси цилиндра. При этом вблизи оси

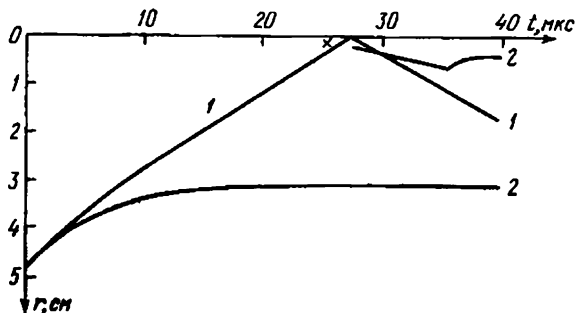


Рис. 76. Расчетные значения положения ударной волны (кривая 1) и границы светящейся области (кривая 2). Крестиком обозначено начало возникновения экспериментально наблюдаемой светящейся области в центре.

образуется область радиуса  $r=0,3$  см, с давлением  $p \approx \approx 100$  атм и температурой  $T=1,2$  эВ. Момент схлопывания ударной волны экспериментально регистрируется по появлению светящейся области в центре разрядной камеры (рис. 76).

После момента кумуляции отраженная ударная волна начинает двигаться в обратном направлении. При этом в центре образуется светящаяся область, которая некоторое время существует одновременно с горячим внешним кольцевым слоем газа, расположенным вблизи стенок камеры (рис. 76).

К моменту окончания процесса в плазме выделяется около 60% энергии, первоначально запасенной в батарее конденсаторов. Остальная энергия выделяется на внешнем сопротивлении (рис. 75, б). При этом основная доля энергии вкладывается в плазму за первые 8 мкс с момента начала процесса.

Около половины энергии, запасенной в плазме, уходит в виде излучения. На рис. 75, в приведены значения экспериментальных и расчетных значений яркостной температуры на длине волны  $\lambda=5510$  Å для излучения, выходящего из разряда по радиусу. Расчетная температура выше экспериментальной. Причем расхождение несколько больше, чем в расходящемся разряде. Это объясняется тем, что зона повышенной температуры у сходящегося разряда непосредственно примыкает к стенке камеры. Данный факт приводит к более сильному испарению кварца и ухудшению прохождения света через него.

В целом, как видно из рис. 75, для сходящегося разряда в ксеноне получено такое же хорошее совпадение между данными расчета и эксперимента, как и для разряда расходящегося. Это позволяет, используя ряд общих положений о вычислительном эксперименте [164], сделать некоторые замечания о математическом моделировании задач высокотемпературной газовой динамики.

Замечание 1. Результаты целого ряда расчетов показывают, что при математическом моделировании задач высокотемпературной газовой динамики, в том числе радиационной газовой динамики (РГД) и магнитной радиационной газовой динамики (МРГД), может быть достигнута высокая степень точности не только в качественном, но и количественном описаниях процессов. Это позволяет получать значительную долю инфор-

мации об интересующих процессах путем расчета на ЭВМ, используя данные численного расчета для лучшего понимания картины явления и оптимизации конструкций. Кроме того, вычислительный эксперимент позволяет существенно уменьшить время, идущее на научно-исследовательские и опытно-конструкторские работы.

Замечание 2. Из предыдущего замечания вовсе не следует вывод об уменьшении роли натурального эксперимента, о его постепенном вытеснении вычислительным экспериментом. Просто возрастание возможности математического моделирования может поставить вопрос о некотором смещении акцентов в экспериментальных исследованиях [15, 16], об их тесном взаимодействии с вычислительным экспериментом. Так, например, исключительно высокой оказывается роль эксперимента в выборе математических моделей, правильно описывающих физические процессы, типы физических конструкций.

При таком совместном исследовании процесса в эксперименте основные усилия не обязательно должны быть затрачены на измерение параметров, непосредственно интересующих конструкторов (часто это сильно усложняет эксперимент). Они могут быть сосредоточены на определении тех параметров, которые позволяют подтвердить или уточнить применяемую для расчетов на ЭВМ математическую модель.

Замечание 3. Что же касается непосредственно численного решения задач динамики излучающего газа, то использование предварительных расчетов на ЭВМ, их сопоставление с данными натурального эксперимента может существенно восполнить недостаток подробной информации о коэффициентах поглощения. В ряде случаев таким путем удается построить сравнительно простую, удобную для расчетов модель коэффициента поглощения, с помощью которой с высокой степенью точности можно описать перенос излучения в интересующей конструкции или физическом процессе.

В заключение параграфа отметим, что для численного моделирования сильноточных излучающих разрядов в литиевой и ксеноновой плазме использовались методы, предложенные в работах [34, 75, 83, 85, 118, 189]. Эти алгоритмы ранее подробно были рассмотрены в гл. III.

## § 2. Обтекание затупленных тел потоком излучающего газа

Математическое моделирование процессов обтекания затупленных тел потоком излучающего газа тесно связано с развитием космических исследований. При торможении космических аппаратов, входящих с большой скоростью в атмосферу Земли или других планет Солнечной системы, температура окружающего газа может достигать  $10^4$  К и выше. В этих условиях излучение начинает оказывать существенное влияние на все процессы теплообмена. Пренебрежение им может привести к значительным количественным и качественным ошибкам.

Материалы, приведенные в этом параграфе, основаны на результатах численного моделирования, проведенного в работах О. М. Белоцерковского, Л. М. Бибермана, А. Б. Карасева, А. Н. Румынского, В. П. Стулова и других авторов [40, 44, 45, 109, 115, 137, 158].

**1. Постановка задачи и система уравнений.** При торможении затупленного тела, входящего с большой скоростью (число Маха  $M \gg 1$ ) в атмосферу, перед ним на расстоянии  $\delta$  образуется ударная волна (рис. 77). Зона, расположенная между ударной волной и летательным аппаратом, — ударный слой — представляет наибольший интерес при исследовании процессов обтекания.

Рассмотрим математическую постановку задачи, с помощью которой можно определить параметры газа в окрестности осевой линии тока. Однако прежде чем

выписать соответствующую систему уравнений, обсудим основные физические допущения, положенные в основу их вывода.

**Квазистационарность.** Изменение скорости обтекания при торможении тела происходит очень медленно по сравнению с изменением параметров в удар-

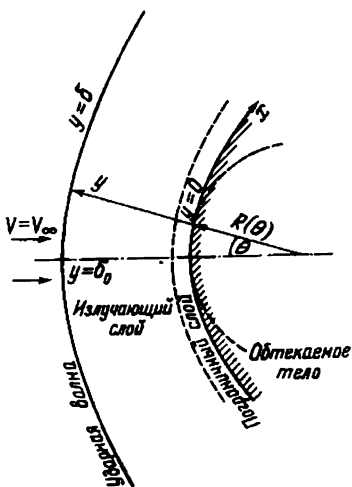


Рис. 77. Схема течения в окрестности осевой линии

ном слое. Поэтому весь процесс обтекания можно рассматривать как последовательность стационарных задач с набором различных скоростей  $V_\infty$ .

Влияние вязкости. Как известно, при течении в пограничном слое вблизи поверхности тела влияние вязких членов существенно. Поэтому при решении задачи об обтекании затупленного тела в системе уравнений, описывающей течение в ударном слое, сохраняются вязкие члены, на ударной волне считаются справедливыми соотношения Ренкина—Гюгонно [27]. Эта концепция справедлива в том случае, когда толщина пограничного слоя меньше, чем толщина ударного слоя.

Локально-термодинамическое равновесие. Одним из существенных допущений, положенных в основу вывода уравнений, описывающих обтекание, является предположение о существовании ЛТР в ударном слое. Это предположение будет справедливо, если размеры зоны релаксации, где параметры газа неравновесны, будут много меньше толщины ударного слоя  $\delta$ . В работе [98] показано, что в широком диапазоне параметров  $p_\infty \geq 10^{-5}$  атм,  $V_\infty \geq 7$  км/с,  $R \approx 1$  ролью излучения неравновесной релаксационной зоны можно пренебречь.

Перенос излучения. В настоящее время в подавляющем большинстве работ, посвященных математическому моделированию процессов обтекания, используется предположение локальной одномерности излучающего газа. О хорошей применимости этого приближения свидетельствуют результаты с учетом двумерности излучения, полученные в работе [122] в рамках диффузионной модели.

Излучение, генерируемое в ударном слое, может частично поглощаться холодным газом в невозмущенной области. При этом параметры невозмущенного газа должны измениться. Изменение параметров невозмущенного газа в принципе должно сказаться на состоянии газа в ударном слое и на потоках энергии, воздействию которых подвергается обтекаемое тело. Однако этот эффект обратного влияния проявляется лишь при достаточно больших скоростях обтекания. Так, в работе [45] показано, что даже при скорости набегающего потока  $V_\infty = 16$  км/с и плотности воздуха, соответствующей высоте  $h = 48$  км, обратный вклад прогрева невозмущенного газа в лучистый поток на тело не превышает 25%.

Разрушение поверхности тела. При гиперзвуковом обтекании тела в плотных слоях атмосферы

ры поверхность тела подвергается интенсивному нагреву и, как следствие, — частичному разрушению. Продукты разрушения теплозащитного слоя изменяют термодинамические и оптические свойства окружающего летательный аппарат газа и могут повлиять на структуру течения и теплообмен в нем. В работах, посвященных численному решению проблемы обтекания, абляция теплозащитного покрытия моделируется вдувом газа с поверхности тела. При этом скорость вдува зависит от интенсивности теплового воздействия на поверхность тела, а термодинамические и оптические свойства вдуваемого газа зависят от состава материала теплозащитного покрытия.

С учетом сделанных предположений система уравнений, описывающих обтекание тела вблизи осевой линии, выглядит следующим образом [36, 45]:

$$r \frac{d\rho v}{dy} + 2(\rho u' + \rho v) = 0, \quad 0 \leq y \leq \delta, \quad (2.1)$$

$$r \frac{dp_1}{dy} - 2\rho u'^2 = 0, \quad p_1 = \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=0}, \quad (2.2)$$

$$r\rho v \frac{du'}{dy} + \rho u'^2 + \rho u'v + p_1 = \frac{d}{dy} \left( \tilde{\mu} \frac{du'}{dy} \right), \quad (2.3)$$

$$\rho v \frac{d}{dy} \left( h + \frac{v^2}{2} \right) = -\operatorname{div} \mathbf{W} + \frac{d}{dy} \left( \frac{\tilde{\mu}}{Pr} \frac{dh}{dy} \right), \quad (2.4)$$

$$\mathbf{W} = \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 \mu I_\nu d\mu, \quad (2.5)$$

$$\mu \frac{dI_\nu}{dy} + \kappa_\nu I_\nu = \kappa_\nu I_{\nu p}, \quad (2.6)$$

В системе уравнений (2.1) — (2.6) использовались следующие обозначения (рис. 77):  $y$  — расстояние по нормали от поверхности тела;  $\theta$  — угол между осью симметрии и нормалью к поверхности тела;  $R(\theta)$  — радиус кривизны;  $r = y + R(\theta)$ ;  $\rho$  — плотность;  $p$  — давление;  $v$  — нормальная составляющая скорости;  $u'$  — производная касательной составляющей скорости по угловой координате в окрестности  $\theta=0$ ;  $h$  — энтальпия;  $\tilde{\mu}$  — коэффициент вязкости;  $Pr$  — число Прандтля;  $I_\nu$  — интенсивность энергии излучения для фотонов частоты  $\nu$ ;  $\kappa_\nu$  — коэффициент поглощения;  $\mu$  — косинус угла между направлением полета фотона и осью  $y$ ;  $I_{\nu p}$  — интенсивность излучения абсолютно черного тела при температуре  $T$ .

Систему уравнений (2.1) — (2.6) дополним граничными условиями на поверхности тела

$$y=0, \quad u=0, \quad h=h_w, \quad (\rho v) = (\rho v)_w = (q_w - \sigma T_w^4) / H_w, \\ I_v = I_{vp}(v, T_w), \quad \mu > 0, \quad (2.7)$$

где  $q_w$  — падающий на тело поток излучения,  $\sigma T_w^4$  — излучение поверхности тела,  $H_w$  — энтальпия испарения. На ударной волне ( $y = \delta$ ) считаются справедливыми соотношения Ренкина—Гюгонио. Для уравнения переноса используется условие  $I_v = 0, \mu < 0$ .

При выводе системы уравнений были опущены члены первого и выше порядка малости по  $\epsilon$  ( $\epsilon = \delta/R$ ). Если сохранить члены первого порядка, то получим более полную систему уравнений, позволяющую рассматривать обтекание всей лобовой поверхности тела [158]:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + H \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\rho uv}{R} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( H \bar{\mu} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \\ + \frac{1}{R} \left( \bar{\mu} \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial y} \right), \quad (2.8)$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\rho u^2}{RH} = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\bar{\mu}}{r'} \frac{\partial (r' u)}{\partial x} \right) + \bar{\mu} \frac{\partial v}{\partial y} + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x} \right) + \frac{\partial u \partial \bar{\mu}}{\partial y \partial x} - \frac{1}{r'} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial y} \frac{\partial (r' u)}{\partial x} - \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial x} \left( r' \frac{\partial (\bar{\mu} u)}{\partial y} \right), \quad (2.9)$$

$$\frac{\rho u \partial h}{H \partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{u}{H} \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{H r'} \frac{\partial}{\partial y} \left( H r' \frac{\bar{\mu}}{Pr} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \\ + \bar{\mu} \left( H \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u}{H} \right) \right)^2 - \text{div } W, \quad (2.10)$$

$$r' \rho u \frac{\partial c}{\partial x} + r' \rho v H \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( H r' \frac{\bar{\mu}}{Sh} \frac{\partial c}{\partial y} \right), \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (r' \rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (r' \rho v H) = 0. \quad (2.12)$$

Для определения потока энергии излучения  $W$  аналогично (2.1) — (2.6) используется одномерное приближение плоского слоя.

Помимо ранее использованных в системе уравнений (2.8) — (2.12), дополнительно применяются обозначения:  $y$  — расстояние по нормали к телу;  $x$  — ортогональная ей координата, отсчитываемая от оси симметрии;  $v$  — скорость вдоль оси  $y$ ;  $r' = (R + y) \sin(x/R)$ ;  $H = 1 + y/R$ ;  $c$  — массовая концентрация вдуваемого газа;  $Sh$  — число Шмидта. В качестве граничных условий для системы

(2.8)—(2.12) можно использовать условие (2.7), к которому добавлены условия для концентрации  $c$ :  $y=0$ ,  $\frac{\partial c}{\partial y} = \frac{v_w}{D}(c_w - 1)$ ,  $y=\delta$ ,  $c=0$ , где  $D$ —коэффициент диффузии.

**2. Решение уравнения переноса.** В данной работе не будут рассматриваться методы решения квазиодномерной (2.1)—(2.6) и двумерной (2.8)—(2.12) систем уравнений, описывающих обтекание затупленных тел. Читателям, интересующимся численными методами решения задач обтекания, можно посоветовать специально обратиться к работам и монографиям [38, 41, 122, 158, 179].

Остановимся на алгоритме решения уравнения переноса (2.6). В квазистационарных задачах обтекания особенно удобным оказывается использование интегрального представления для определения потока энергии излучения.

Из решения уравнения переноса (2.6) с граничным условием (2.7) следует, что интенсивность энергии излучения  $I_v$  может быть представлена в виде

$$I_v(v, \mu, y) = \int_y^\delta \frac{-I_{vp}(v, T(y'))}{\mu} \kappa_v(v, T(y'), \rho(y')) \times \\ \times \exp\left\{-\int_{y'}^y \frac{\kappa_v(v, y'')}{\mu} dy''\right\} dy', \quad \mu < 0, \quad (2.13)$$

$$I_v(v, \mu, y) = \int_0^y \frac{I_{vp}(v, y')}{\mu} \kappa_v(v, y') \exp\left\{-\int_{y'}^y \frac{\kappa_v dy''}{\mu}\right\} dy' + \\ + I_{vp}(v, T_w) \exp\left\{-\int_0^y \frac{\kappa_v}{\mu} dy''\right\}, \quad \mu \geq 0.$$

Интегрируя (2.13) по всем углам и частотам, получим выражение для потока энергии излучения

$$W = \int_0^\infty dv \int_0^\delta I_{vp}(v, y') \kappa_v(v, y') E_2\left(\left|\int_y^{y'} \kappa_v(v, y'') dy''\right|\right) \times \\ \times \text{sign}(y - y') dy' +$$

$$+\int_0^{\infty} dv I_{vp}(v, T_w) E_3 \left( \int_0^y \kappa_v(v, y') dy' \right), \quad (2.14)$$

где  $E_p(t) = \int_1^{\infty} z^{-p} \exp\{-zt\} dz$  ( $p=1, 2, 3, \dots$ ).

Решение системы уравнений, описывающих обтекание с учетом лучистого теплообмена, строится с помощью итераций. По заданным газодинамическим параметрам температуры и плотности с помощью выражения (2.14) определяется  $W$  и  $\operatorname{div} W$ . Часто  $\operatorname{div} W$  удобнее находить не с помощью разностной аппроксимации производной потока энергии излучения по пространству, а непосредственно из интегрального выражения

$$\operatorname{div} W = \int_0^{\infty} dv \left[ 2\kappa_v I_{vp} - \int_{-1}^1 \mu \kappa_v I_v d\mu \right], \quad (2.15)$$

где  $I_v$  определяется по формуле (2.13). Напомним, что (2.15) легко может быть получено из уравнения переноса (2.6) путем интегрирования его по угловой переменной  $\mu$  и частоте  $v$ .

Считая  $\operatorname{div} W$  известной, решается система уравнений (2.1)—(2.4) или (2.8)—(2.12) и определяются газодинамические параметры течения. По найденным таким образом  $T$  и  $\rho$  вновь определяется поле излучения, и итерационная процедура повторяется. Следует отметить, что при решении стационарных задач определение потока энергии излучения или его дивергенции соответственно из интегральных выражений (2.14) и (2.15) оказывается более предпочтительным с точки зрения организации итерационного процесса, чем непосредственное нахождение из численного решения уравнения переноса (2.6).

**3. Некоторые результаты численных расчетов.** Рассмотрим некоторые результаты расчетов обтекания затупленных тел, обращая при этом особое внимание на роль излучения.

На рис. 78 приведены профили температуры и дивергенции энергии излучения в ударном слое (данные работы [45]). Рассматривались следующие условия обтекания в воздухе: скорость обтекания  $V_{\infty} = 18$  км/с; плотность невозмущенного газа  $\rho_{\infty} = 0,3 \cdot 10^{-3} \rho_0$ , где  $\rho_0 = 1,29 \cdot 10^{-3}$  г/см<sup>3</sup> — плотность воздуха на уровне моря; радиус закругления тела  $R = 3$  м. Результаты получены

на основе расчета системы уравнений (2.1)—(2.6), описывающей обтекание в окрестности осевой линии.

Для вычисления потока энергии излучения (2.14) линии и остальной спектр (фон) рассматривались отдельно. Фон разбивался на двадцать один спектральный интервал (групп). Кроме того, учитывалось около 57 интенсивных мультиплетов.

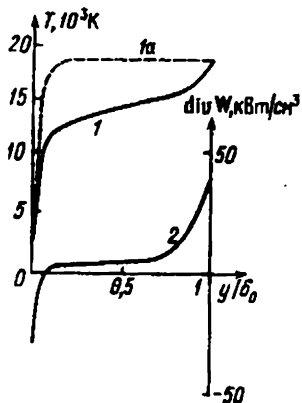


Рис. 78. Профили температуры (кривая 1) и  $\text{div } W$  (кривая 2) в окрестности осевой линии. Пунктиром (кривая 1а) дан профиль температуры, полученной без учета излучения

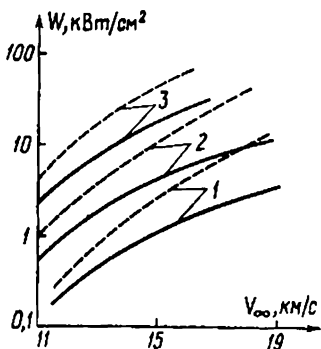


Рис. 79. Зависимость величины лучистого потока на поверхность тела  $W$  от скорости набегающего потока при трех значениях плотности  $\rho_\infty$  (кривая 1 —  $\rho_\infty = 10^{-4}\rho_0$ , кривая 2 —  $\rho_\infty = 0,3 \cdot 10^{-3}\rho_0$ , кривая 3 —  $\rho_\infty = 10^{-3}\rho_0$ ). Пунктиром приведены значения лучистых потоков, полученных в предположении, что излучение не влияет на параметры ударного слоя

Как видно из рис. 78, перенос излучения существенно снижает температуру в ударном слое. С другой стороны, как показывают данные расчетов, учет влияния излучения практически не меняет давления. Практически неизменяемость давления при уменьшении температуры приводит к увеличению плотности в излучающем ударном слое по сравнению с неизлучающим слоем.

На рис. 79 приведены зависимости лучистых потоков энергии от скорости набегающего потока для различных значений плотности  $\rho_\infty$  невозмущенного газа [45]. Результаты получены в предположении, что излу-

чение не оказывает обратного влияния на профиль температуры в ударном слое (пунктирные кривые) и с учетом такого влияния. Полученные данные, так же как и результаты, представленные на рис. 78, свидетельствуют о сильной взаимной зависимости температурных и радиационных полей в ударном слое. Напомним, что тесная взаимосвязь поля излучения и газодинамических полей специфична для задач радиационной газовой динамики и во многом определяет трудности их численного решения.

Следует обратить внимание на рост лучистых потоков с увеличением плотности. Это связано с увеличением оптической толщины ударного слоя и, как следствие, с ростом высвечивания из него.

Как видно из рис. 79, лучистый поток, падающий на поверхность обтекаемого тела, резко возрастает с увеличением скорости набегающего потока. На рис. 80, а и

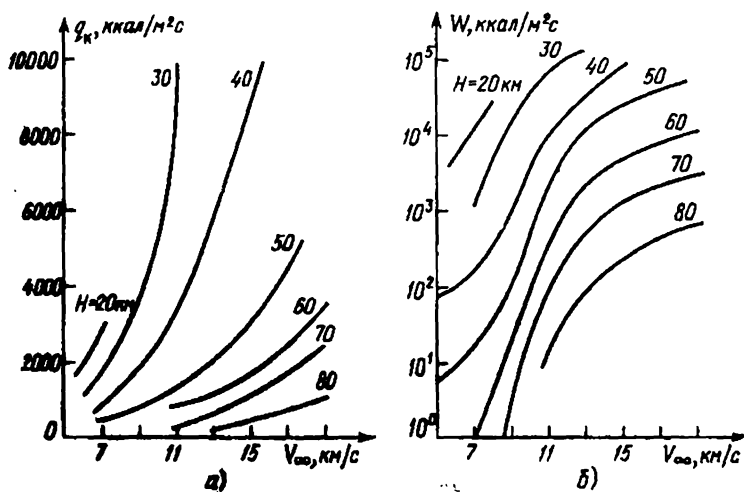


Рис. 80. а) Зависимость конвективного потока от скорости набегающего потока воздуха;  $H$  — высота, на которой происходит обтекание; б) Зависимость лучистого потока от скорости набегающего воздуха

б изображены зависимости конвективного и лучистого потоков в окрестности критической точки при разных режимах обтекания [158]. Радиус закругления  $R=2$  м, параметры невозмущенного воздуха определялись по

данном стандартной атмосферы на соответствующей высоте.

Данные расчетов показывают, что для умеренных высот ( $h \leq 50$  км) при скорости обтекания  $V_\infty \geq 10$  км/с лучистый поток существенно превышает конвективный поток. Однако с уменьшением плотности набегающего потока воздуха его величина падает гораздо быстрее ( $\sim \rho_\infty^{1,2}$ ), чем значение конвективного потока ( $\sim \rho_\infty^{0,5}$ ).

Распределение параметров внутри ударного слоя при различных значениях угла  $\theta$  (рис. 77) качественно совпадает с только что рассмотренной картиной течения в окрестности осевой линии.

На рис. 81 приведены профили энтальпии для различных значений параметра  $\xi = x/R$  [158] с учетом переноса излучения и без него.

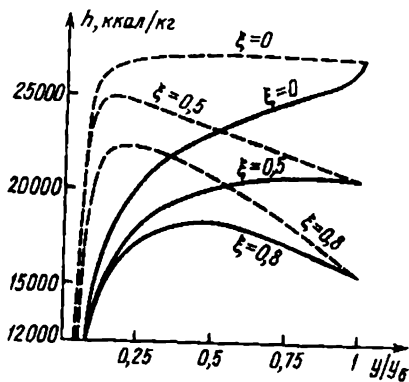


Рис. 81. Профили энтальпии по лучам для различных значений параметра  $\xi$ . Сплошные кривые — данные расчета с учетом переноса излучения, пунктирные кривые — расчет без учета излучения

Данные получены на основе расчета двумерной системы уравнений (2.8)—(2.12). Видно, что по мере удаления от осевой линии нагрев газа в ударном слое уменьшается.

Рассмотрим влияние продуктов разрушения поверхности обтекаемого тела на параметры ударного слоя. Как уже отмечалось, абляция теплозащитного покрытия моделируется вдувом газа с поверхности тела.

При сильном вдуве пограничный слой, состоящий из обтекающего газа, оттесняется газообразными продуктами испарения от поверхности тела. Рассмотрим некоторые результаты математического моделирования процесса обтекания с учетом сильного вдува [44]. Предполагалось, что материал разрушаемой поверхности в основном состоял из смеси элементов С, О, Н. Термодинамические свойства и состав продуктов разрушения рассчитывались по методике работы [147].

При определении коэффициентов поглощения учитывались процессы фотоионизации и свободно-свободные

переходы, непрерывное поглощение в вакуумном ультрафиолете  $C_2$ ,  $CO$ ,  $H_2$ ,  $C_2$ ,  $H_2$ , поглощение в системах полос двухатомных молекул и поглощение многоатомными молекулами  $C_3$ ,  $C_2H_2$ ,  $C_2H$ . Спектральные линии атомов не учитывались, так как при относительно низких температурах в слое паров их вкладом можно было пренебречь.

На рис. 82 представлено типичное распределение по частоте потока энергии излучения, падающего на контактную границу (границу раздела между газообразными продуктами разрушения поверхности и воздухом), — сплошная линия и на поверхности тела — пунктирная линия. Распределение усреднено по сравнительно малым спектральным интервалам. Скорость обтекания при этом предполагалась равной  $V_\infty = 18$  км/с, отношение плотности набегающего потока воздуха к нормальной  $\rho_\infty/\rho_0 = 0,3 \cdot 10^{-3}$ , радиус закругления тела  $R = 1$  м.

Видно, что слой паров продуктов разрушения экранирует тело от коротковолновой части спектра излучения, что приводит к существенному снижению радиационного нагрева поверхности. Аналогичное уменьшение радиационных потоков испаренным слоем наблюдалось в достаточно широком диапазоне параметров обтекания.

Из рис. 82 видно, что длинноволновая часть спектра  $1/\lambda \leq 6 \cdot 10^4$  см<sup>-1</sup> практически не поглощается слоем паров. Следовательно, поток энергии на поверхности тела при условии сильного вдува может быть определен только по длинноволновой части спектра, излучаемой нагретым воздухом в ударном слое.

Большая оптическая толщина слоя вдуваемого газа для коротковолнового излучения и, наоборот, его прозрачность для длинноволновой части спектра подтверждается расчетами других авторов [38, 158]. Это поз-

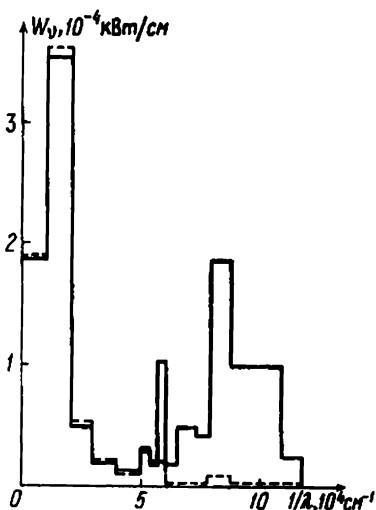


Рис. 82. Спектральный поток энергии излучения, падающий на тело (пунктирная кривая) и контактную поверхность (сплошная кривая)

воляет строить сравнительно простую математическую модель для описания процесса обтекания с учетом сильного вдува.

Для определения нагрева в окрестности критической точки достаточно вычислить поток излучаемой длинноволновой части спектра, который генерируется ударным слоем чистого воздуха. При этом уже нет необходимости в сложном, трудоемком определении коэффициентов поглощения смеси, составляющей материал разрушаемой поверхности. Можно просто в длинноволновой части спектра коэффициент поглощения в смеси выбрать равным коэффициенту поглощения в воздухе. В коротковолновой области коэффициент поглощения следует выбирать постоянным, но достаточно большим для того, чтобы оптическая толщина слоя паров составляла несколько единиц и более \*).

В заключение отметим, что сложившаяся здесь ситуация во многом типична для математического моделирования задач динамики излучающего газа. Так же как и для рассмотренных в предыдущем параграфе сильноточных разрезов, предварительные расчеты позволяют выяснить зависимость результатов численного решения от особенностей коэффициента поглощения, что в свою очередь приводит к окончательному выбору для описания процесса относительно простой математической модели.

### § 3. Моделирование процессов, связанных с образованием и развитием лазерной плазмы

Вопросам, связанным с математическим моделированием процессов, происходящих в лазерной плазме, в настоящее время посвящено достаточно большое количество работ. Отметим некоторые из них: [18, 20, 21, 29, 42, 47, 87, 103, 113, 128, 153, 199, 207, 224].

Подобный интерес к этой проблеме не случаен. Он вызван все более широким применением лазерной техники в различных технологических процессах, медици-

---

\*) Данная модель не справедлива для случая, когда слой паров вещества конструкции достаточно тонок (слабый вдув). В этой ситуации слой паров не полностью экранирует коротковолновую часть спектра излучения, генерируемого в ударном слое, и для аккуратного математического моделирования необходимо учитывать особенности поведения коэффициента поглощения испаренного вещества.

те, исследованиях, связанных с решением проблемы управляемого термоядерного синтеза (УТС). Кроме того, нагретое до высоких температур под действием лазерного излучения вещество используется в качестве объекта непосредственного изучения фундаментальных свойств высоко- и низкотемпературной плазмы.

В этом параграфе будут рассмотрены примеры моделирования некоторых процессов, связанных с динамикой лазерной плазмы. Задачи рассматриваются как в пространственно одномерной, так и в пространственно двумерной постановке.

1. Разлет и охлаждение сферического сгустка лазерной плазмы в среде с противодавлением. Исследования высокотемпературной лазерной плазмы тесным образом связаны с проблемой лазерного термоядерного синтеза (ЛТС). Большое количество работ, посвященных математическому моделированию проблемы ЛТС, связано с определением выхода термоядерной энергии в будущих энергетических установках, что в свою очередь позволяет найти более оптимальные пути их создания. Кроме того, много внимания уделяется совместному изучению средствами натурального и вычислительного экспериментов отдельных процессов, происходящих в высокотемпературной лазерной плазме.

Рассмотрим некоторые результаты численных расчетов разогрева под действием лазерного импульса сферической мишени из дейтерированного полиэтилена ( $C_nD_{2n}$ ) и последующего разлета в окружающий воздух образовавшейся при этом плазмы [87].

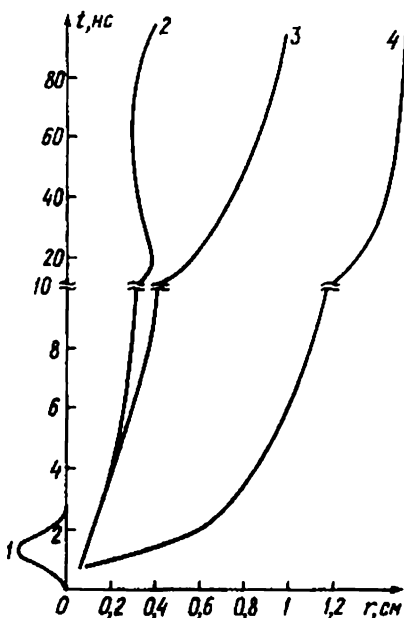


Рис. 83. 1 — форма лазерного импульса, 2 — положение контактной границы, 3 — фронт ударной волны, 4 — фронт волны ионизации

Предполагалось, что лазерное излучение с общей энергией импульса 200 Дж падает на мишень сферически-симметрично. Форма импульса приведена на рис. 83. Отражение излучения не учитывается. Масса мишени, используемая в расчетах, равна  $6,4 \cdot 10^{-7}$  г. Давление окружающего воздуха в камере равно 15 торр. Эти условия близки к условиям эксперимента, результаты которого опубликованы в работе [30].

Задача обладает сферической симметрией и описывалась следующей системой уравнений динамики излучающего газа:

$$\frac{dp}{dt} + \frac{\rho}{r^2} \frac{\partial r^2 u}{\partial r} = 0, \quad 0 \leq r \leq R, \quad (3.1)$$

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial r}, \quad (3.2)$$

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{p}{r^2} \frac{\partial r^2 u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \chi r^2 \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 (W + W_n)], \quad (3.3)$$

$$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial I_\nu}{\partial \mu} + \kappa_\nu I_\nu = \kappa_\nu I_{\nu p}, \quad -1 \leq \mu \leq 1, \quad (3.4)$$

$$W = \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 \mu I_\nu d\mu, \quad (3.5)$$

$$\varepsilon = \varepsilon(T, \rho), \quad p = p(T, \rho), \quad \kappa_\nu = \kappa_\nu(\nu, T, \rho), \\ \chi = \chi(T, \rho). \quad (3.6)$$

Поток энергии лазерного излучения  $W_n$  определялся с помощью выражения

$$W_n = W_{0n} \exp \left\{ - \int_r^R \kappa_n dr' \right\}, \quad (3.7)$$

где  $W_{0n}$  — граничное значение потока,  $\kappa_n$  — коэффициент поглощения энергии лазерного излучения. Так же как и при математическом моделировании сильноточных разрядов, при численном решении системы уравнений (3.1)–(3.7) использовались методы, подробно рассмотренные в работах [34, 75, 83, 85, 118, 201].

Для проведения расчетов необходимо знать физические свойства плазмы, возникающей при разогреве полиэтилена и воздуха. Уравнения состояния и коэффициент электронной теплопроводности для полиэтилена были рассчитаны авторами работы [107] дополнитель-

но к имеющимся в ней данным. Коэффициент поглощения полиэтилена определялся в водородоподобном приближении с учетом только тормозных процессов. Коэффициенты поглощения для воздуха были взяты из работы [112]. Уравнения состояния и коэффициент электронной теплопроводности для воздуха брались из работ [107, 117].

Поглощение лазерного излучения мишенью приводит к нагреву ее внешней поверхности до температуры  $\sim 1$  кэВ. Вследствие образовавшейся на поверхности мишени зоны высокого давления начинается интенсивный разлет плазмы в окружающий воздух. При этом в воздухе, примыкающем к плазме материала мишени, возникает ударная волна (рис. 83, 84). Кроме этой волны появляется также ударная волна, идущая внутрь материала мишени.

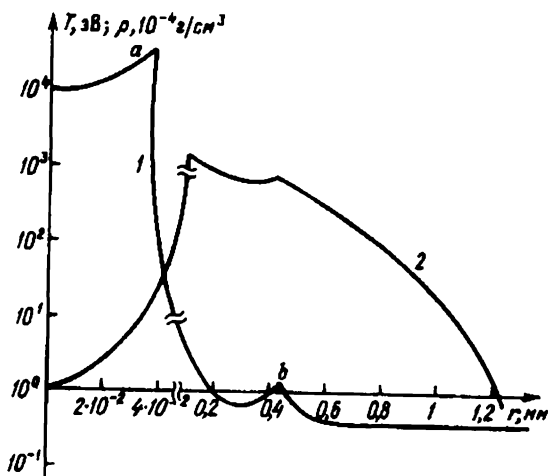


Рис. 84. Зависимость плотности (кривая 1) и температуры (кривая 2) от радиуса для  $t=1$  нс. Буквами *a* и *b* отмечено положение ударных волн

В начальные моменты времени контактная граница (граница раздела между воздушной плазмой и плазмой материала мишени) примыкает к ударной волне, а затем отстает от нее (рис. 83).

Как известно, закон движения фронта сильной ударной волны определяется формулой Седова [172]

$$r_{ув}(t) = [aE_0 t^2 / \rho_0]^{0.2}, \quad (3.8)$$

где  $E_0$  — энергия, выделившаяся при точечном взрыве,  $\rho_0$  — плотность окружающего невозмущенного газа,  $a$  — постоянная. Следя за движением фронта ударной волны с помощью формулы (3.8), можно определять долю энергии лазерного импульса, вложенную в мишень.

Однако выражение (3.8) получено для идеального неизлучающего газа. Поэтому представляет интерес проверить справедливость формулы (3.8) для реального газа при значительных потерях энергии на излучение.

Как показали проведенные расчеты [87], оценка по полученному в вычислительном эксперименте положению фронта ударной волны дает значение первоначально вложенной энергии 192 Дж при исходном значении 200 Дж. Вариации коэффициентов поглощения в несколько раз практически не меняют оценочного значения вложенной энергии. Таким образом, прямые расчеты подтверждают справедливость использования выражения (3.8) для оценки энергии лазерной плазмы.

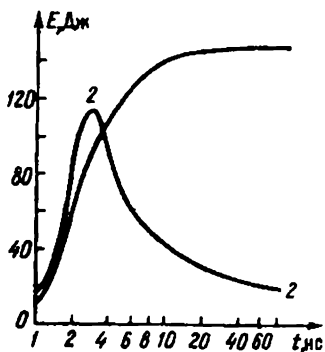


Рис. 85. Внутренняя энергия (кривая 1) и кинетическая энергия (кривая 2) лазерной плазмы в зависимости от времени

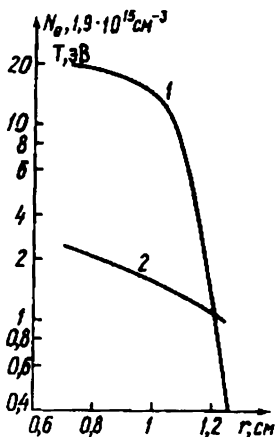


Рис. 86. Концентрация электронов (кривая 1) и профиль температуры (кривая 2) на момент времени  $t=20$  нс

Внутренняя энергия лазерной плазмы при  $t > 10$  нс длительное время остается практически постоянной (рис. 85), а кинетическая энергия, начиная с момента

времени  $t=3$  нс, падает. Именно это уменьшение и определяет потери на высвечивание на моменты времени  $10 \text{ нс} \leq t \leq 100 \text{ нс}$ . По сути дела, имеет место следующий многоступенчатый механизм преобразования энергии: какое-то количество кинетической энергии переходит во внутреннюю, а равное по величине этому приращению количество внутренней энергии теряется на излучение.

Из экспериментальных данных работы [30] видно, что область, занятая плазмой, достаточно быстро (к  $t \sim 50$  нс) достигает диаметра  $\sim 1,5$  см. Этот факт объяснялся воздействием далекого ультрафиолетового и мягкого рентгеновского излучений, выходящих из нагретой мишени на окружающие ее слои холодного воздуха. Такое же ионизирующее влияние ультрафиолетового излучения, генерируемого нагретой лазерным импульсом мишенью, ранее отмечалось в работе [19]. Рассмотрим подробнее этот эффект на основе данных вычислительного эксперимента.

Нагретая до высоких температур ( $T \sim 1$  кэВ) мишень (рис. 84) в свою очередь начинает прогревать излучением окружающие ее слои воздуха. Разогретый воздух частично теряет прозрачность для падающего лазерного излучения. В нагретом воздухе поглощается до 5% энергии лазерного импульса.

Комбинированный прогрев за счет излучения, идущего от мишени и лазерного излучения в первые моменты времени ( $t < 3$  нс), приводит к быстрому распространению фронта волны ионизации (рис. 83). Ударная волна распространяется значительно медленнее. Различие в скорости распространения ударной волны и волны ионизации можно наблюдать также на теневых фотографиях, приведенных в работе [30].

В качестве границы ионизованного воздуха принималась граница области с  $T \geq 1$  эВ. Выбор температуры  $T=1$  эВ в качестве опорной обусловлен тем, что при ней степень равновесной ионизации резко возрастает. На рис. 86 приведен расчетный профиль температуры на момент времени  $t=20$  нс и соответствующий ему профиль концентрации свободных электронов. Несмотря на относительно гладкое изменение температуры, можно говорить о резком пространственном изменении степени ионизации воздуха. Это в свою очередь и определяет скачкообразное изменение свойств, в том числе излучательных свойств воздушной плазмы,

После окончания действия лазерного импульса скорость распространения фронта ионизации волны замедляется. Затем вследствие остывания мишени он практически становится неподвижным (рис. 83). Качественно близкая к рассмотренной в этом пункте картина явления была получена при математическом моделировании ионизации воздуха рентгеновским и ультрафиолетовым излучениями плазмы, образованной под действием лазерного импульса на углеродную мишень [8].

**2. Низкотемпературная лазерная плазма вблизи металлических поверхностей в газах высокого давления.** В последнее время все большее значение приобретает использование низкотемпературной лазерной плазмы для решения проблем современной техники и технологии \*). Подавляющее большинство исследований в этой области относится к тому случаю, когда первоначальное давление окружающей газовой среды не превышает одной атмосферы или имеет близкую величину  $p_0 \approx 1$  атм. Однако уже первые эксперименты, проведенные Н. Н. Рыкалиным и др. [159, 160] по исследованию воздействия на металлы лазерного излучения в среде инертного газа (азот, водород, углекислый газ) высокого давления ( $p_0 \leq 100$  атм), показали, что в этих условиях наблюдается ряд интересных с точки зрения технических приложений эффектов. В частности, было показано, что в некотором диапазоне давлений и интенсивности излучения процессы механического разрушения мишени практически отсутствуют. Это свойство в дальнейшем было использовано для поверхностного упрочнения стали [185] и синтеза нитрида титана в азотной среде [62]. Рассмотрим более подробно результаты этих экспериментальных исследований.

Основной комплекс экспериментов был выполнен с импульсным неодимовым лазером, длительность импульса которого  $\tau = 0,5-1$  мс. Излучение фокусировалось на поверхность пластин из металла (молибден, медь, титан, нержавеющая сталь и др.), полупроводника (германий, кремний), диэлектрика (текстолит). Исследуемые материалы помещались в камеру, которая заполнялась газом (азот, аргон, гелий и др.) при начальном давлении 1—140 атм [128, 159—161].

---

\*) Интересный научно-популярный обзор, посвященный промышленному применению лазеров, дан в статье Альдо В. ла Рокка [7].

В исследованиях, проведенных при атмосферном давлении или при давлениях до 10 атм, было отмечено развитие экранировки поверхности мишени на эрозионном (состоящем из паров вещества мишени) плазменном факеле [32, 33]. Эта экранировка возникала вследствие развития пробоя в парах вещества мишени при действии миллисекундного лазерного импульса с длиной волны  $\lambda = 1,06$  мкм и средней плотностью потока  $G = 10^7$  Вт/см<sup>2</sup>. Существенно новым обстоятельством в экспериментах с лазерным воздействием на вещества с различными физическими свойствами при давлениях окружающего газа выше 40—50 атм явилось развитие экранировки мишени практически без разрушения ее поверхности. На поверхности мишени, например, из молибдена, наблюдается только «обоженная зона» и не видны даже следы оплавления.

Отметим особенности взаимодействия излучения неодимового лазера ( $\lambda = 1,06$  мкм) при средней плотности потока  $G = 10^7$  Вт/см<sup>2</sup>— $10^8$  Вт/см<sup>2</sup> с мишенью при росте давления окружающего газа. Основной акцент сделаем на некоторых физических особенностях воздействия излучения лазера на неподвижные мишени в азотной среде.

Рост давления азота изменяет характер воздействия излучения на мишени. При давлениях до  $\sim 20$  атм во всех мишенях толщиной 2 мм образуется сквозное отверстие или кратер, характеристики которых зависят от свойств материала мишени и плотности излучения. В диапазоне 40—70 атм разрушение поверхности мишени резко снижается, на участках термического воздействия лишь малую область занимает зона плавления. При давлениях свыше 70 атм на таких материалах, как молибден, отсутствует и зона плавления\*).

Термический цикл обработки мишеней излучением дает возможность изменения микротвердости материалов. Однако наряду с чисто термическим влиянием для изменения микротвердости существенны и плазменные явления. Опыты с гелием и аргоном показывают, что микротвердость мишеней в зоне воздействия лазерного

---

\*) В гелии, в отличие от азота и аргона, на поверхности мишени при любых использованных давлениях всегда имеется оплавленная зона. Это означает, что в гелии в диапазоне давлений до 140 атм образование плазменного облака происходит в парах вещества мишени.

излучения и плазмы может только уменьшаться. Это связано с возможностью образования пористой структуры в поверхностном слое. Наоборот, плазма азотной среды оказывает на металлы упрочняющее воздействие. Так, микротвердость стали возрастает в 1,5—2 раза [160, 185]. Измерения показали, что размеры области изменения параметров мишени значительно превосходят размеры зоны воздействия лазерного излучения. При исходном радиусе пятна фокусировки  $r_{\phi} = 0,25$ — $0,3$  мм радиус обожженной зоны составляет несколько десятых долей сантиметра, т. е. в несколько раз больше.

Одной из наиболее важных особенностей экспериментов в атмосфере азота является возможность синтеза нитридов в поверхностных слоях мишеней из таких материалов, как титан [62], цирконий, ванадий. Одним из условий синтеза нитридов является наличие плазмы у поверхности мишени. Толщина образованного слоя нитридов (при давлениях азота 70—90 атм) порядка 10 мкм и слабо зависит от плотности излучения.

Начальная стадия развития лазерной плазмы связана с пробоем газа мощным световым потоком. С момента открытия этого явления в 1963 г. оно является объектом пристального изучения в теоретических и экспериментальных работах [101, 149, 215, 222].

Установлено, что высокие пороги пробоя чистых холодных газов обусловлены лишь начальной стадией процесса, когда с помощью многофотонной ионизации, требующей высокой интенсивности излучения, образуются затравочные электроны. Фокусировка излучения на твердую мишень резко снижает пороговые интенсивности излучения [28].

Причинами, приводящими к снижению пороговых интенсивностей лазерного излучения, могут быть следующие: испарение вещества мишени и термоэмиссия электронов и ионов. Так как при повышенных начальных давлениях азота испарение вещества мишени не наблюдалось, то причиной снижения порога пробоя в серии экспериментов [159, 160] следует признать термоэмиссию поверхности мишени.

В заключение краткого описания результатов экспериментальных работ по исследованию низкотемпературной лазерной плазмы в газах высокого первоначального давления следует вновь обратить внимание на

сложность изучения протекающих процессов средствами одного лишь натурального эксперимента. Эти трудности, с одной стороны, связаны с многочисленностью и взаимообусловленностью явлений, протекающих в такой плазме, а с другой стороны, — с чисто техническими сложностями экспериментального исследования быстротекущих процессов в плазме высокого давления. Поэтому для этих явлений, как и при изучении многих других процессов, наиболее рациональным путем исследования является одновременное их исследование средствами натурального и вычислительного экспериментов [164, 165].

Описание вычислительного эксперимента начнем с рассмотрения математического моделирования пробоя в газах высокого давления вблизи металлических мишеней. Уравнения кинетики, описывающие процесс пробоя, отличаются по своему виду от уравнений динамики излучающего газа. Однако краткое рассмотрение вопросов, связанных с математическим моделированием этих явлений, приводящих к созданию лазерной плазмы, представляется полезным в рамках данной книги.

**3. Математическое моделирование оптического пробоя в плотных газах.** В основу физической модели пробоя положен механизм термоэмиссии электронов с поверхности молибденовой пластины и развития электронной лавины в плотном газе под действием лазерного излучения. Высокое давление окружающей среды ( $p_0 \sim 100$  атм) уменьшает диффузию электронов и сдвигает температуру кипения металла в более высокую область. В результате при высоких давлениях поверхность мишени еще не разрушается, однако вблизи нее имеется достаточно высокая концентрация электронов, величина которой определяется эмиссионными свойствами мишени и потенциалом пространственного заряда. Попадая в газ, термоэлектроны набирают энергию, необходимую для ионизации нейтральной частицы за счет тормозного поглощения лазерного излучения. В дальнейшем развитие лавины происходит по классическим представлениям, рассмотренным в работе Я. Б. Зельдовича и Ю. П. Райзера [101].

Развитие электронной лавины в молекулярных газах, к каковому относится азот, характеризуется сложной кинетикой столкновительных реакций. При математическом моделировании [128 — 130] учитывались следующие реакции, протекающие в азоте: электронное возбуждение

и девозбуждение атомов и молекул электронным ударом  $N + e \rightleftharpoons N^* + e$ ,  $N_2 + e \rightleftharpoons N_2^* + e$ , колебательное возбуждение молекул электронным ударом  $N_2 + e \rightarrow N_2^* + e$ , термическая диссоциация и диссоциация электронным ударом  $N_2 + N_2 \rightarrow 2N + N_2$ ,  $N_2 + e \rightarrow 2N + e$ , реакции ассоциации  $N_2 + 2N \rightarrow N_2^* + N_2$ ,  $N + 2N \rightarrow N_2^* + N$ , ионизация атомов и молекул из основного и возбужденного состояния и их трехчастичная рекомбинация  $N + e \rightleftharpoons N^+ + 2e$ ,  $N^* + e \rightleftharpoons N^+ + 2e$ ,  $N_2 + e \rightleftharpoons N_2^+ + 2e$ ,  $N_2^* + e \rightleftharpoons N_2^+ + 2e$ , ассоциативная ионизация атомов  $N + N \rightarrow N_2^+ + e$ , диссоциативная рекомбинация  $N_2^+ + e \rightarrow 2N$ ,  $N_3^+ + e \rightarrow 3N$ ,  $N_4^+ + e \rightarrow 2N_2$ , реакции конверсии  $N^+ + 2N_2 \rightleftharpoons N_3^+ + N_2$ ,  $N_2^+ + 2N_2 \rightleftharpoons N_4^+ + N_2$ .

Из процессов переноса учитывались диффузия и дрейф в электрическом поле заряженных частиц, теплопроводность электронного газа и тяжелых частиц. Перечисленные реакции описываются уравнениями химической кинетики (3.9)—(3.16) (см. ниже). Более подробное описание столкновительных реакций и коэффициенты их скорости приведены в работах [125, 128].

Анализ столкновительных реакций показал, что коэффициенты скорости являются функциями трех температур: поступательных температур электронов  $T_e$ , тяжелых частиц  $T_g$  и колебательной температуры  $T_k$ . Поэтому система уравнений кинетики дополняется тремя уравнениями баланса энергии (3.18)—(3.20).

Учет неупругих потерь энергии электронов в молекулярной составляющей азота (см. уравнение (3.18)) производился с помощью экспериментального коэффициента  $\delta$  (рис. 87), приведенного в работе [227]. Этот коэффициент показывает, во сколько раз суммарные потери энергии электронов при неупругих столкновениях больше, чем при упругих.

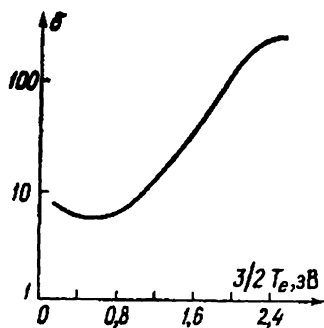


Рис. 87. Экспериментальные данные отношения неупругих потерь к упругим

Поле пространственного заряда описывается уравнением Пуассона (3.21).

Окончательно математическая постановка задачи о лазерном пробое азота вблизи металлической мишени примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_2}{\partial t} = & - (k_2^+ N_2 - \beta_2^+ N_2^+ N_e) N_e - (k_2^* N - \beta_2^* N^*) N_e - \\ & - (k_4^c N_2^+ N_2 - \beta_4^c N_4^+) N_2 - (k_3^c N^+ N_2 - \beta_3^c N_3^+) N_2 - \\ & - k_d^c N_2 N_e - (k_d N_2 - k_a N^2) N_2 + k_a^c N^3 + 2\alpha_4 N_4^+ N_e, \quad (3.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_2^*}{\partial t} = & (k_2^* N_2 - \beta_2^* N_2^*) N_e - (k_2^{**} N_2^* - \beta_2^+ N_2^+ N_e) N_e - \\ & - k_d N_2^* N_e, \quad (3.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_2^+}{\partial t} = & (k_2^+ N_2 - \beta_2^+ N_2^+ N_e) N_e + (k_2^{**} N_2^* - \beta_2^+ N_2^+) N_e - \\ & - (k_4^c N_2^+ N_2 - \beta_4^c N_4^+) N_2 - \alpha_2 N_2^+ N_e - k_a N^2 - \frac{\partial J_2^+}{\partial x}, \quad (3.11) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial N_4^+}{\partial t} = (k_4^c N_2^+ N_2 - \beta_4^c N_4^+) N_2 - \alpha_4 N_4^+ N_e - \frac{\partial J_4^+}{\partial x}, \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} = & k_d^c N_2 N_e + [k_d (N_2 + N_2^*) - k_a N^2] N^2 - k_a^c N^3 - \\ & - (k^+ N - \beta^+ N^+ N_e) N_e - (k^* N - \beta^* N^*) N_e - k_a N^2 + \\ & + 2\alpha_2 N_2^+ N_e + 3\alpha_3 N_3^+ N_e, \quad (3.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N^+}{\partial t} = & (k^+ N - \beta^+ N^+ N_e) N_e + (k^{**} N^* - \beta^+ N^+ N_e) N_e - \\ & - (k_3^c N^+ N_2 - \beta_3^c N_3^+) N_2 - \frac{\partial J^+}{\partial x}, \quad (3.14) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial N^*}{\partial t} = (k^* N - \beta^* N^*) N_e - (k^{**} N^* - \beta^+ N^+ N_e) N_e,$$

$$\frac{\partial N_3^+}{\partial t} = (k_3^c N^+ N_2 - \beta_3^c N_3^+) N_2 - \alpha_3 N_3^+ N_e - \frac{\partial J_3^+}{\partial x}, \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_e}{\partial t} = & (k_2^+ N_2 - \beta_2^+ N_2^+ N_e) N_e + (k_2^{**} N_2^* - \beta_2^+ N_2^+ N_e) N_e + \\ & + (k^+ N - \beta^+ N^+ N_e) N_e^+ + (k^{**} N^* - \beta^+ N^+ N_e) N_e + \\ & + (k_a N N - \alpha_2 N_2^+ N_e) - \alpha_3 N_3^+ N_e - \alpha_4 N_4^+ N_e - \frac{\partial J_e}{\partial x}, \quad (3.16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_i^+ = & e\mu_i N_i^+ E - eD_i \text{grad } N_i^+, \\ J_e = & e\mu_e N_e E + eD_e \text{grad } N_e, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t} (N_e T_e) = & \left[ \frac{4\pi e G}{mc (\omega^2 + v_{\text{эф}}^2)} - \frac{3}{2} \delta \frac{m}{M} (T_e - T_g) \right] v_{\text{эф}} N_e + \\ & + \left[ \frac{4\pi e G}{mc (\omega^2 + v_{\text{эф}}^2)} - \frac{3}{2} \frac{m}{M} (T_e - T_g) \right] (v_{ei}^a + v_{en}^a) N_e - \\ & - I^+ (k^+ N - \beta^+ N^+ N_e) N_e - I^* (k^* N - \beta^* N^* N_e) N_e - \\ & - I^{*+} (k^{*+} N^* - \beta^+ N^+ N_e) N_e + \frac{\partial}{\partial x} \kappa_e \frac{\partial T_e}{\partial x}, \\ & \beta^+ = \beta^{*+}, \quad v_{\text{эф}} = v_{ei} + v_{en}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (N_g T_g)}{\partial t} = & \frac{m}{M} (T_e - T_g) v_{\text{эф}} N_e + \\ & + \frac{2m}{M} (T_e - T_g) (v_{ei}^a + v_{en}^a) N_e + \\ & + T_g [(k_4^c N_2^+ N_2 - \beta_4^c N_4^+) N_2 + (k_3^c N^+ N_2 - \beta_3^c N_3^+) N_2] + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \kappa_g \frac{\partial T_g}{\partial x}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (N_2 T_n) = & \hbar \omega_k k \times N_2 N_e - \\ & - I_d [(k_d N_2 - k_a N N) N_2 - k_a^a N^3], \end{aligned} \quad (3.20)$$

где

$$N_g = (N + N^* + N_2 + N_2^* + N^+ + N_2^+ + N_3^+ + N_4^+), \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 4\pi e \left( N_e - \sum_{i=1}^4 N_i^+ \right), \quad E = -\frac{\partial U}{\partial x}.$$

На левой границе у мишени при  $x=0$  задавались температуры поверхности и термоэлектронный поток

$$T = \frac{2G_n}{\lambda} \left( \frac{bt}{\pi} \right)^{1/2}, \quad U = 0, \quad (3.22)^*$$

$$D_e \frac{\partial N_e}{\partial x} = BT^2 \exp \left\{ -\frac{\Phi + \Phi_1}{T} \right\}, \quad N_i^+ = 0. \quad (3.23)$$

На правой границе при  $x=L$  условия задавались в виде

\*) Граничное условие (3.22) получено из точного решения задачи о распределении температуры в полупространстве при заданном потоке энергии  $G_n$ .

следующих соотношений:

$$D_e \frac{\partial N_e}{\partial x} = -\frac{1}{2} v_e N_e, \quad D_i = \frac{\partial N_i^+}{\partial x} = -\frac{1}{2} v_g N_i^+, \quad (3.24)$$

$$\kappa_e \frac{\partial T_e}{\partial x} = -\frac{1}{2} v_e N_e T_e, \quad \kappa_g \frac{\partial T_g}{\partial x} = -\frac{1}{2} v_g N_g T_g.$$

В системе уравнений (3.9)—(3.24) приняты следующие обозначения:  $N$ ,  $N^*$ ,  $N_2$ ,  $N_2^*$ ,  $N^+$ ,  $N_2^+$ ,  $N_3^+$ ,  $N_4^+$ ,  $N_e$ —концентрации заряженных и нейтральных частиц;  $k$ ,  $\alpha$ —коэффициенты скорости прямых реакций;  $\beta$ —коэффициенты скорости реакций обратных;  $\omega$ —частота лазерного излучения;  $G_n$ —поглощаемая поверхностью доля лазерного излучения  $G_0$ ;  $R$ —коэффициент отражения ( $G = (1 + R) G_0$ );  $v_e$ ,  $v_g$ —тепловые скорости электронов и тяжелых частиц;  $v_{ei}^a$ ,  $v_{en}^a$ ,  $v_{ei}$ ,  $v_{en}$ —частоты столкновений атомарного иона или нейтрала (индекс  $a$ ) и молекулярного иона или нейтрала с электроном;  $D_e$ ,  $D_i$ ,  $\mu_e$ ,  $\mu_i$ —коэффициенты диффузии и подвижности электронов и ионов;  $\kappa_e$ ,  $\kappa_g$ —коэффициенты теплопроводности электронов и тяжелых частиц;  $b$ ,  $\lambda$ —коэффициенты температуропроводности и теплопроводности молибдена;  $\varphi$ —работа выхода;  $\varphi_1 = eU$ —дополнительная работа выхода, создаваемая полем пространственного заряда;  $U$ ,  $E$ —потенциал и напряженность электрического поля.

Кратко рассмотрим алгоритм численного решения уравнений, описывающих пробой. Как правило, системы уравнений, описывающие ступенчатую ионизацию, рекомбинацию и обмен энергией между частицами, относятся к жестким системам, у которых собственные значения матрицы Якоби имеют отрицательные вещественные части и большой разброс по абсолютной величине. Одним из хорошо зарекомендовавших себя алгоритмов для решения жестких систем уравнений является методика, предложенная Г. Гиром [73, 214].

С целью применения алгоритма Гира для решения системы уравнений в частных производных (3.9)—(3.20) преобразуем их с помощью метода прямых к системе обыкновенных дифференциальных уравнений\*). Напри-

\*) Число получающихся при этом уравнений равно  $P_1 \times P_2$ , где  $P_1$ —число уравнений в исходной системе,  $P_2$ —число внутренних узлов разностной сетки.

мер, уравнение (3.18) при этом примет следующий вид.

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t} (N_e T_e)_n = & \left[ \frac{4\pi e G}{mc (\omega^2 + v_{3\Phi}^2)} - \frac{3}{2} \delta \frac{m}{M} (T_e - T_g) \right] v_{3\Phi} N_e + \\ & + \left[ \frac{4\pi e G}{mc (\omega^2 + v_{3\Phi}^2)} - \frac{3}{2} \frac{m}{M} (T_e - T_g) \right] (v_{ei}^a + v_{en}^a) N_e - \\ & - I^+ (k^+ N - \beta^+ N^+ N_e) N_e - I^* (k^* N - \beta^* N^*) N_e - \\ & - I^{*+} (k^{*+} N^* - \beta^+ N^+ N_e) N_e \}_n + \\ & + A_n T_{e,n-1} - C_n T_{en} + B_n T_{e,n+1}, \quad (3.25) \end{aligned}$$

где  $n$  — номер узла пространственной сетки,  $A_n$ ,  $C_n$ ,  $B_n$  — коэффициенты, получающиеся при разностной аппроксимации члена  $\partial / (\kappa_e \partial T_e / \partial x) / \partial x$ .

Однако применение методики Гира непосредственно к таким образом преобразованной системе желаемых результатов не принесло. Более эффективным для решения системы уравнений (3.9)—(3.20) оказался метод суммарной аппроксимации. С этой целью исходная система уравнений была представлена в виде суммы двух последовательно решаемых на каждом шаге по времени задач [131]: для процессов кинетики, описываемых уравнением типа

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t} (N_e T_e) = & \left[ \frac{4\pi e G}{mc (\omega^2 + v_{3\Phi}^2)} - \frac{3}{2} \delta \frac{m}{M} (T_e - T_g) \right] v_{3\Phi} N_e + \\ & + \left[ \frac{4\pi e G}{mc (\omega^2 + v_{3\Phi}^2)} - \frac{3}{2} \frac{m}{M} (T_e - T_g) \right] (v_{ei}^a + v_{en}^a) N_e - \\ & - I^* (k^+ N - \beta^+ N^+ N_e) N_e - I^* (k^* N - \beta^* N^*) N_e - \\ & - I^{*+} (k^{*+} N^* - \beta^+ N^+ N_e), \quad (3.26) \end{aligned}$$

и для процесса переноса — уравнением

$$\frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t} (N_e T_e) = \frac{\partial}{\partial x} \kappa_e \frac{\partial T_e}{\partial x}. \quad (3.27)$$

Переход с  $j$ -го слоя по времени на  $(j+1)$ -й слой осуществляется через вспомогательный  $(j+0,5)$ -й слой. Сначала по неявным схемам на  $(j+0,5)$ -м слое решают уравнения переноса типа (3.27). Затем, используя полученные таким образом данные в качестве начальных, решают уравнения кинетики и тем самым осуществляют переход на  $(j+1)$ -й слой. Для расчета уравнений кинетики без учета процессов переноса, например (3.26), использовался метод Нордсика [129], возможность применения которого предусмотрена в алгоритме Гира.

Построенный таким образом алгоритм [131] использовался для математического моделирования процессов пробоя. Основные результаты вычислительных экспериментов по пробоею молекулярного азота вблизи металлической поверхности при начальном давлении газа  $p_0 = 10-200$  атм изложены в работах [125, 128-130, 132].

4. Газодинамическая стадия в низкотемпературной лазерной плазме при высоком давлении. После первоначального пробоя от области поджига навстречу лазерному излучению движется волна поглощения, оставляющая позади себя плазменные образования. Особенностью исследуемой задачи является то, что здесь наряду с газодинамическим механизмом переноса энергии существенную роль играет механизм переноса излучения. Роль теплопроводностных процессов незначительна. Кроме того, в условиях большой длительности лазерного импульса и сравнительно небольшого пятна фокусировки ( $r_{\Phi} \sim 250$  мкм) [159, 160] на общую картину процесса существенное влияние оказывают эффекты двумерности, возникающие из-за бокового расширения плазменного облака, которое в свою очередь является осесимметричным. Предполагается, что в лазерной плазме выполняется условие термодинамического равновесия.

Весь процесс моделируется системой уравнений динамики излучающего газа в многогрупповом диффузионном приближении, которые имеют следующий вид:

$$\frac{dp}{dt} = -\rho \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad (3.28)$$

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial r}, \quad \rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z}, \quad (3.29)$$

$$\rho \frac{de}{dt} = -p \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial(rW_r)}{\partial r} - \frac{\partial W_z}{\partial z} - \frac{\partial W_n}{\partial z}, \quad (3.30)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rW_{rk}) + \frac{\partial W_{zk}}{\partial z} + \kappa_k c U_k = \kappa_k A \sigma_k T^4, \quad (3.31)$$

$$\frac{c}{3} \frac{\partial U_k}{\partial r} = -\kappa_k W_{rk}, \quad \frac{c}{3} \frac{\partial U_k}{\partial z} = -\kappa_k W_{zk}, \quad W = \sum_{k=1}^{N_k} W_k, \quad (3.32)$$

$$W_n = G \exp \left\{ - \int_z^{z_n} \kappa_n dz' \right\}. \quad (3.33)$$

В системе (3.28)–(3.33) использовались введенные ранее для уравнений динамики излучающего газа обозна-

чения. Кроме того, дополнительно использовались обозначения:  $W_{\text{л}}$  — поток энергии лазерного излучения,  $G$  — исходная мощность лазера,  $\kappa_{\text{л}}$  — коэффициент поглощения лазерного излучения,  $z_{\text{п}}(r, t)$  — верхняя граница плазмы (рис. 88).

Система уравнений (3.28)—(3.33) решалась в лагранжовой системе координат с помощью алгоритмов, предложенных в работах [59, 204]. Эти методы решения двумерных задач РГД подробно изложены в гл. IV.

Схематически процесс взаимодействия лазерного излучения с плазмой изображен на рис. 88. Лазерное излучение падает вдоль оси  $z$ . Его начальное поглощение происходит в узком  $\sim 10$  мкм нагретом слое (на рис. 88 он специально выделен), который моделирует область оптического пробоя.

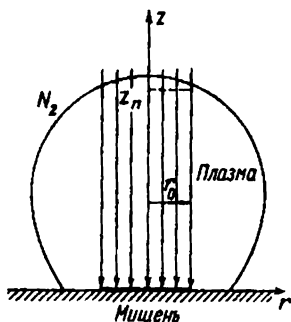


Рис. 88. Схема эксперимента по взаимодействию лазерного излучения с газом вблизи металлической поверхности. Слой первоначального поглощения лазерного излучения выделен жирной чертой

Температура горячего слоя азота\*) выбирается в пределе 1,7—2 эВ, что приводит к резкому росту в нем по сравнению с холодным азотом коэффициента поглощения лазерного излучения. Это в свою

очередь приводит к интенсивному поглощению лазерного излучения в горячем слое.

Вследствие поглощения лазерного излучения в тонком приповерхностном слое температура и давление в нем резко возрастают. Начинается интенсивный газодинамический разлет горячей зоны, сопровождающийся движением ударной волны в холодный газ.

На рис. 89 представлены пространственно-временные профили температуры, плотности и давления, характеризующие динамику развития плазмы для следующих зна-

\*) Влияние испаренного вещества мишени на первоначальный состав горячего слоя в расчетах не учитывался. Это связано с тем (п. 3 данного параграфа), что оптический пробой молекулярного азота при давлениях  $p_0 \geq 30$  атм обусловлен термоэмиссионными явлениями. При более низких давлениях, например, при 10 атм время пробоя значительно возрастает, что увеличивает возможность появления испарения в облучаемой зоне.



$\approx 5$  нс давление достигает своего максимального значения  $p = 6 \cdot 10^3$  атм. В дальнейшем, несмотря на рост температуры, давление в горячей области падает. Это происходит из-за уменьшения плотности вещества, обусловленного интенсивным газодинамическим разлетом горячей зоны.

Ударная волна, генерируемая при этом, к моменту времени  $t \sim 10$  нс достигает своей максимальной скорости

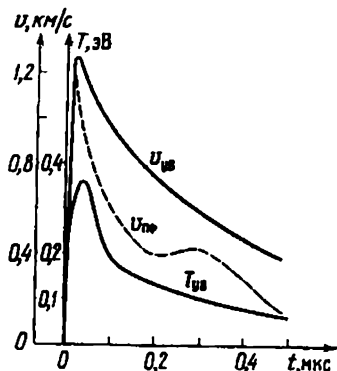


Рис. 90. Зависимость скорости ударной волны  $v_{уВ}$  плазменного фронта  $v_{пф}$  и температуры ударной волны  $T_{уВ}$  от времени ( $p_0 = 100$  атм,  $G = 5 \cdot 10^7$  Вт/см<sup>2</sup>)

сти  $v_{уВ} = 1,3$  км/с (рис. 90). Температура газа, нагреваемого ударной волной,  $T \leq 0,36$  эВ (рис. 90). Этого недостаточно для интенсивного поглощения лазерного излучения, и ударная волна практически прозрачна для него. Поэтому в данной ситуации светодетонационный режим не реализуется.

В силу того, что скорость ударной волны превышает скорость движения плазменного фронта  $v_{пф}$  (рис. 90), ударная волна отрывается от нагретой лазерным излучением зоны (см. рис. 89). Холодный азот ( $T \leq 1$  эВ) прозрачен для видимого света и ближнего ультрафиолета, однако хорошо поглощает излучение с частотой  $h\nu > 14$  эВ. Поглощение этого жесткого излучения, которое генерируется горячей областью с характерной температурой  $T = 3,5$  эВ (рис. 89), происходит на расстоянии  $\sim 50$  мкм (рис. 91). Таким образом, подкачки энергии в ударную волну ни за счет собственного излучения, ни за счет лазерного не происходит, и она становится затухающей. Скорость и температура за ней быстро спадают\*).

\*) Следует еще раз отметить, что используемые в расчетах значения коэффициентов поглощения должны опираться не только на существующие для них таблицы, но и на физический анализ рассматриваемого процесса. Если в расчетах использовать истинные данные о коэффициенте поглощения в видимом свете для холодного азота [108], то в силу их малости это приведет к резкому увеличению числа итераций, необходимых для решения систем сеточных уравнений, возникающих при аппроксимации уравнений диффу-

Несмотря на то, что светодетонационный режим при рассматриваемых мощностях лазерного излучения не реализуется, вклад газодинамических сил в энергобаланс плазмы в начальные моменты времени значителен. На рис. 91 представлены распределения составляющих энерговыделения вдоль оси  $z$ , обусловленные работой газодинамических сил  $p \operatorname{div} \mathbf{u}$  и переноса собственного излучения плазмы  $\operatorname{div} \mathbf{W}$ . Видно, что с течением време-

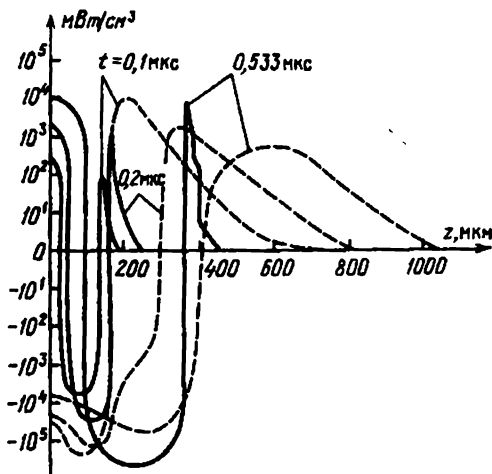


Рис. 91. Энерговклад в нагрев вещества за счет переноса собственного излучения (сплошные кривые) и за счет газодинамического движения (пунктирные кривые) ( $p_0 = 100 \text{ атм}$ ,  $G = 5 \cdot 10^7 \text{ Вт/см}^2$ )

ни энерговыклад за счет переноса излучения возрастает, а энерговыклад за счет сил газодинамического движения падает. В основном энергия высвечивается из горячей зоны ( $T \approx 3,5 \text{ эВ}$ ,  $t = 0,53 \text{ мкс}$ ), отстоящей на расстояние  $\sim 100 \text{ мкм}$  от поверхности мишени.

Расчеты показали, что в начальные моменты времени течение было одномерным, распространяющимся вдоль оси  $z$ . Однако к моменту времени  $t = 0,1 \text{ мкс}$  размеры плазмы в этом направлении (рис. 89) стали сопоставимы с радиусом пятна фокусировки ( $r_f = 250 \text{ мкм}$ ), появ-

ени Анализ данного процесса показывает, что увеличение коэффициента поглощения до таких значений, при которых оптическая толщина холодного азота в видимом свете составила величину порядка  $10^{-3}$ , не оказывает влияния ни на выход излучения из системы, ни на прогрев холодной зоны. Вместе с тем использование таким образом увеличенных коэффициентов позволяет резко сократить число итераций.

ляются значительные скорости в боковом направлении, и движение приобретает двумерный характер.

Расчеты показали сложную структуру плазменного облака. Вблизи поверхности мишени образуется слой плазмы с температурой более низкой, чем температура последующего плазменного слоя, который в свою очередь приобретает форму полумесяца (рис. 89). Происхождение такой структуры связано с одновременным воздействием на плазму эффекта экранировки мишени и газодинамического растекания из области интенсивного поглощения лазерного излучения.

Максимальное значение температуры в горячей области достигает 3,65 эВ. Дальнейший ее рост ограничивается быстрым увеличением потерь энергии на высвечивание. Вследствие экранировки лазерного излучения на поверхность мишени воздействует только поток собственного излучения  $W \leq 10^5$  Вт/см<sup>2</sup>. Площадь поверхности мишени, подверженной термическому воздействию собственного излучения, в несколько раз превышает площадь пятна фокусировки лазерного излучения. Отметим, что радиус плазменного облака  $r_{пл} \sim 500$ —600 мкм (рис. 89), а радиус пятна фокусировки  $r_{ф} = 250$  мкм. Этот факт хорошо соответствует данным эксперимента, где наблюдалось значительное увеличение зоны термического воздействия на мишень по сравнению с радиусом пятна лазерного излучения [159, 160]. Отметим также, что замена лазерного излучения потоком собственного излучения, очевидно, и является основным фактором, позволяющим избежать разрушения поверхности мишени.

Снижение давления азотной среды до 50—30 атм сопровождалось частичным разрушением поверхности мишени, появившимся в виде кратеров в зоне фокусировки. Опираясь на результаты вычислительного эксперимента, проанализируем причины разрушения поверхности мишени и особенности взаимодействия лазерного излучения с веществом при начальном давлении азота  $p_0 = 30$  атм [134].

Расчеты показали, что в начальные моменты времени  $t \leq 0,1$  мкс развитие плазменного облака протекает аналогично случаю с начальным давлением  $p_0 = 100$  атм. Лазерное излучение в основном поглощается в области пробоя, нагрет и последующий разлет которой сопровождается генерированием в холодный азот ударной волны. Скорость ударной волны достигает к моменту

времени  $t=10$  нс своего максимального значения  $v_{ув \max} = 1,9$  км/с.

Как и при начальном давлении 100 атм, толщина горячей зоны становится много больше длины свободного пробега для лазерного излучения. В результате основная доля лазерного излучения поглощается в периферийной части горячей зоны, а область, непосредственно прилегающая к поверхности мишени, практически перестает нагреваться (рис. 92,  $t=0,1$  мкс). При  $t=0,1$  мкс

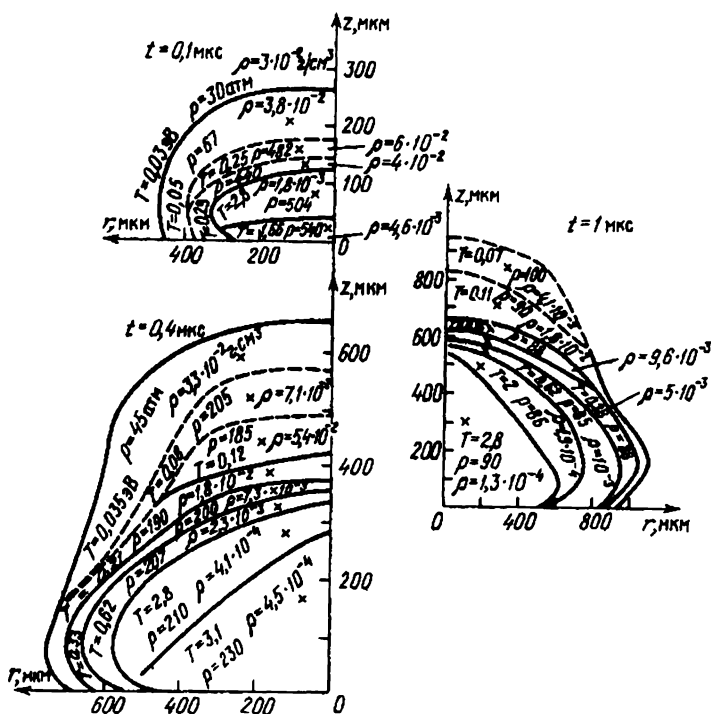


Рис. 92. Профили температуры плотности и давления на различные моменты времени  $t=0,1$  мкс,  $t=0,4$  мкс,  $t=1$  мкс. Начальное давление азота  $p_0=30$  атм,  $G=5 \cdot 10^7$  Вт/см<sup>2</sup>. Значения параметров локализованы в точках, отмеченных крестиками

уже наблюдаются значительные скорости в боковых направлениях. Так же как и для случая  $p_0=100$  атм, виден эффект газодинамического растекания горячей области. Однако на этом сходство в развитии лазерной плазмы для случаев 100 атм и 30 атм заканчивается.

В силу меньшей исходной плотности при 30 атм горячая область ( $t > 0,1$  мкс) успевает разлететься до такой степени, что вновь становится прозрачной для лазерного излучения. Это излучение проникает в пристеночную область, где плотность значительно выше, и нагревает газ в ней (рис. 92,  $t = 0,4$  мкс). Кроме того, значи-

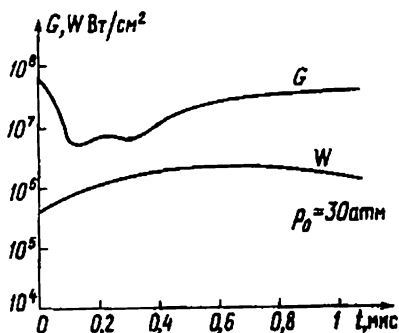


Рис. 93. Потоки собственного  $W$  излучения плазмы и лазерного излучения  $G$ , достигающие поверхности мишени

тельная доля лазерного излучения начинает падать непосредственно на поверхность мишени.

На рис. 93 представлены временные зависимости потоков собственного и лазерного излучений, достигающих поверхности мишени. Максимальное значение потока собственного излучения лазерной плазмы, идущего на мишень, достигает величины

$3 \cdot 10^6$  Вт/см<sup>2</sup>, затем снижается до  $1,6 \cdot 10^6$  Вт/см<sup>2</sup>. Радиус воздействия при  $t = 1$  мкс  $r \approx 600$  мкм.

Зависимость от времени потока лазерного излучения  $G(t)$  носит немонотонный характер. В интервале времени, равном  $0,1 \div 0,4$  мкс, наблюдается значительное (примерно на порядок до  $6 \cdot 10^6$  Вт/см<sup>2</sup>) уменьшение потока, обусловленного наличием малопрозрачного плазменного облака. В дальнейшем, начиная с  $t = 0,6$  мкс, в результате просветления плазмы его интенсивность возрастает. К моменту времени  $t = 1$  мкс поверхности мишени достигает около 80% лазерного потока. Экранирующий эффект плазмы практически полностью исчезает, и под влиянием лазерного излучения начинается разрушение мишени. Таким образом, в результате вычислительного эксперимента были установлены причины наблюдаемого разрушения мишеней при понижении начального давления азота до 30—50 атм.

Достаточно важным оказался факт существования в течение некоторого времени ( $t = 0,1$  мкс  $\div$   $0,4$  мкс) плазменного слоя, малопрозрачного для лазерного излучения. Это явление открывает пути создания технологических циклов как для синтеза новых материалов, так

и для поверхностного упрочнения их при давлениях порядка 30 атм, где ожидаются более благоприятные условия для реализации этих процессов.

**5. Динамика плазмы, образованной при воздействии электронного пучка на металл.** Взаимодействие лазерного излучения с металлами или газами не является единственным процессом, приводящим к возникновению небольших объемов плазмы. Другими источниками, приводящими к появлению такого рода плазмы, являются электронные и протонные пучки. Вопросам, связанным с математическим моделированием этих процессов, в научной литературе уделено значительно меньше внимания, чем исследованию аналогичных явлений, возникающих при взаимодействии лазерного излучения с веществом. Укажем некоторые работы, посвященные вычислительному эксперименту в этой области [92, 93, 155, 216].

Рассмотрим постановку задачи и результаты численного моделирования процесса взаимодействия пучка электронов умеренной мощности с алюминием и его параметрами [187, 188]. Остановимся вначале на некоторых особенностях поглощения энергии электронного пучка веществом.

При бомбардировке вещества электронами энергией от нескольких тысяч до сотен тысяч электронвольт быстрые первичные электроны теряют энергию главным образом на ионизацию, причем большинство вторичных электронов имеет энергию более одного или нескольких десятков электронвольт и быстро приходят в тепловое равновесие с веществом. Для наших целей определения мощности выделяемой электронным пучком в единице объема вещества достаточно приближенного описания, вытекающего из полуэмпирической диффузионной модели торможения первичных частиц [217].

Согласно этой модели быстрый электрон, попадая в вещество, в результате рассеяния полностью теряет первоначальное направление полета на некоторой глубине  $y_c$  и далее движется с равной вероятностью в любом направлении. Область его торможения в однородной среде ограничена в первом приближении усеченной сферой с центром на расстоянии  $y_c$  от поверхности и радиусом  $R_c = R_t - y_c$ , где  $R_t$  — полная длина пробега первичного электрона.

Приведем без вывода, основываясь на данных работ [173, 187], выражения для величин, определяющих поглощение электронного

пучка в веществе. Количество энергии, выделяемой электронным пучком в единице объема, определяется с помощью выражения

$$Q = W_0 C_N \left( \frac{y - y_c}{\tilde{y} - y_c} \right)^2 \exp \left\{ - \frac{(\tilde{y} - y_c)^2}{2\tilde{\sigma}^2} \right\}. \quad (3.34)$$

В свою очередь  $W_0$  определяется с помощью формулы [174]

$$W_0 = jU(1 - \eta\eta_E)(1 - \eta)^{-1}. \quad (3.35)$$

Здесь  $j$  — плотность тока, создаваемого электронным пучком,  $U$  — ускоряющее напряжение,  $\eta$  и  $\eta_E$  — соответственно отношение числа и средней энергии обратно рассеянных электронов к числу и энергии электронов, падающих на границу вещества (для алюминия  $\eta = 0,13$ ,  $\eta_E = 0,5$ ).

Нормировочная постоянная  $C_N$  задается с помощью выражения

$$C_N^{-1} = \int_0^{\infty} \left( \frac{y - y_c}{\tilde{y} - y_c} \right)^2 \exp \left\{ - \frac{(\tilde{y} - y_c)^2}{2\tilde{\sigma}^2} \right\} dy. \quad (3.36)$$

Расстояние  $y$  отсчитывается в отрицательном направлении оси  $z$  от границы вещества, с которой можно совместить границу расчетной области. Массовая толщина пройденного пучком слоя равна

$$\tilde{y} = \int_0^y \rho(r, z) dz, \quad (3.37)$$

где  $\rho$  — плотность вещества. Координаты  $\tilde{y}_c$  находятся из выражения

$$\tilde{y}_c = \frac{R_t}{2} \left[ 1 - \frac{(1,1\gamma)^2}{(1 + \gamma)^2} \right], \quad \gamma = 0,187Z_1^{2/3}, \quad (3.38)$$

$$R_t = 2,76 \cdot 10^{-11} AZ_1^{-8/9} U^{5/3} (1 + 0,978 \cdot 10^{-8} U)^{5/3} (1 + 1,957 \cdot 10^{-8} U)^{-4/3}$$

Здесь  $A$  — атомный вес,  $Z_1$  — атомный номер вещества,  $U$  — ускоряющее напряжение, определяющее начальную энергию электрона, выражено в вольтах.

В свою очередь координата  $y_c$ , на которой электрон в результате рассеяния теряет первоначальное направление, определяется из уравнения

$$\tilde{y}_c = \int_0^{y_c} \rho(r, z) dz. \quad (3.39)$$

Параметр  $\tilde{\sigma}$ , определяющий ширину гауссова распределения, равен

$$\tilde{\sigma} = 0,5 (R_t - \tilde{y}_c). \quad (3.40)$$

Эффективная глубина проникновения электронов пучка в глубь металла составляет величину порядка

$$L \approx y_c + 0,5\lambda, \quad \text{где } \lambda_{\text{мет}} - \tilde{y}_c = \tilde{\sigma}\sqrt{2}. \quad (3.41)$$

Остановимся на описании процесса испарения и теплопроводности в металле. Температура в металле по нормали к поверхности меняется значительно сильнее,

чем вдоль нее, поэтому для описания процесса теплопереноса можно воспользоваться одномерным уравнением

$$a \frac{\partial T(r, z, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \chi \frac{\partial T(r, z, t)}{\partial z} \right) = Q(r, z, t), \quad (3.42)$$

в которое координата  $r$  входит в качестве параметра. Здесь  $Q$  — энергосвыделение за счет поглощения энергии электронного пучка, которое определяется с помощью выражения (3.34).

Если в результате газодинамического расчета давление газа на границе с расплавленным металлом  $p_T$  оказывается больше или равно давлению насыщенных паров  $p_0$  при температуре стенки в данный момент времени

$$p_T \geq p_0, \quad (3.43)$$

то испарение отсутствует.

Если неравенство (3.43) не выполняется, то используются условия на волне испарения с известной плотностью потока энергии  $F$ , падающего на стенку. Эти условия включают непрерывность потоков массы, импульса, энергии и температуры [43]. В предположении локальной одномерности процессов у волны испарения эти условия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} D\rho_{\text{мет}} &= (D - u_n)\rho, \quad p_0 + \rho_{\text{мет}}D^2 = p + \rho(D - u_n)^2, \\ \left(H_0 + \frac{D^2}{2}\right) D\rho_{\text{мет}} + \chi \frac{\partial T}{\partial z} &= \\ &= \left[ \epsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{(D - u_n)^2}{2} \right] (D - u_n)\rho - F. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Здесь  $D$  — скорость волны испарения,  $H_0$  — энтальпия расплавленного металла,  $\rho_{\text{мет}}$  — его плотность,  $u_n$  — составляющая скорости паров в направлении, перпендикулярном к волне испарения. Кроме того, к условиям (3.44) добавляется условие Жуге

$$C_0 + u_n \geq D, \quad (3.45)$$

где  $C_0$  — местная скорость звука.

Используемая модель испарения совпадает с ранее предложенной в работе [103], которая применялась для расчета задач о взаимодействии лазерного излучения с металлическими мишенями [103, 187].

Следует отметить, что условия на границе пар — расплавленный металл в случае выполнения неравенства  $C_0 + u_n > D$  определялись путем совместного решения

с помощью итерационной процедуры уравнений газовой динамики и условий (3.44).

**Замечание 1.** Значения параметров плазмы, возникшей при воздействии лазерного излучения и электронных пучков на металлические мишени, существенным образом зависят от используемой в расчетах модели испарения. Поэтому дальнейшие исследования по усовершенствованию таких моделей представляются весьма актуальными. В качестве таких исследований следует указать модели испарения, предложенные в работах [126, 138].

**Замечание 2.** При описании задач предполагалось, что возникающие электромагнитные поля не оказывают существенного влияния на движение плазмы и ее эволюция хорошо описывается системой уравнений динамики излучающего газа в цилиндрической системе координат вида (3.28)—(3.32). В подобной постановке единственное изменение вносится в уравнение энергии (3.30), которое примет следующий вид:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -p \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial(rW_r)}{\partial r} - \frac{\partial W_z}{\partial z} + Q, \quad (3.46)$$

где  $Q$  определяется с помощью выражения (3.34). Таким образом, единственным отличием в математической постановке этой задачи от задачи о взаимодействии лазерного излучения с металлическими мишенями является характер энерговыделения в плазме и металле. Как показывает анализ выражений (3.34)—(3.41), электронные пучки проникают на значительно большую глубину в металл, их поглощение в отличие от лазерного луча практически не зависит от температуры плазмы.

Рассмотрим некоторые результаты численных расчетов процесса взаимодействия с алюминиевой мишенью электронного пучка [187, 188], обладающего следующими параметрами: радиус пучка  $r_0 = 1,5$  мм, энергия первичных электронов  $eU = 50$  кэВ, плотность потока энергии в пучке  $W_0 = 10^9$  Вт/см<sup>2</sup>. Для сравнения приведем также данные расчетов задачи о взаимодействии лазерного пучка с алюминиевой мишенью. Параметры лазерного луча выбирались следующие: частота излучения  $h\nu = 1,06$  эВ, плотность потока  $W_0 = 10^9$  Вт/см<sup>2</sup>, радиус пятна фокусировки  $r_\phi = 1,5$  мм. Общая схема расчета для этой задачи в основном опиралась на алгоритмы, рассмотренные в [197].

Расчеты проводились до момента времени  $t_M = 1,5$  мкс. В начальные моменты времени происходит

только прогрев металла электронным пучком. К моменту времени  $t \approx 15$  нс температура металла на его поверхности достигает  $T_w \approx 0,3$  эВ, и начинается испарение мишени. При этом скорость волны испарения  $D \approx 0,1$  м/с.

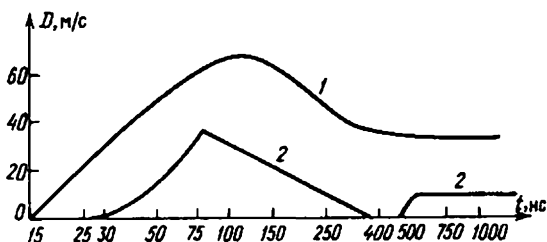


Рис. 94. Зависимость скорости волны испарения от времени: кривая 1 — для электронного пучка, кривая 2 — для лазерного излучения

Затем эта скорость быстро возрастает и к моменту времени  $t = 100$  нс достигает своего максимального значения  $D = 65$  м/с (рис. 94). Толщина слоя металла, испарившегося за время  $t_M$  с поверхности, на которую падал электронный пучок, составила 38 мкм. Испарение металла с остальной части поверхности вне радиуса

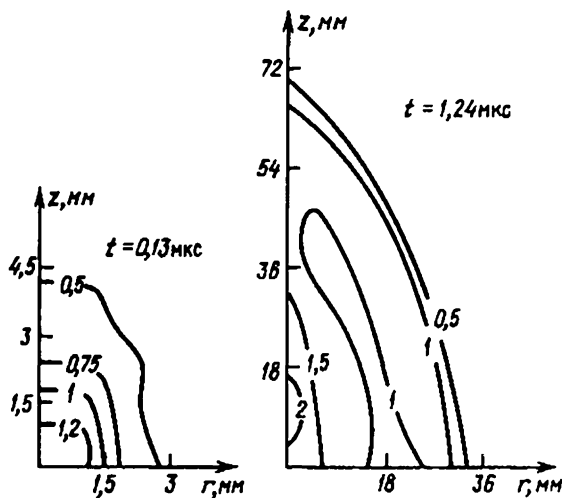


Рис. 95. Линии уровня температуры (в электронвольтах) для плазмы, образованной воздействием электронного пучка в моменты времени  $t = 0,13$  мкс и  $t = 1,24$  мкс

действия электронного пучка, которое должно было происходить под действием собственного излучения плазмы, практически отсутствовало.

Вначале процесса вблизи поверхности, на которую падает пучок электронов, образуется область плотной ( $\rho = 2 \cdot 10^{-2}$  г/см<sup>3</sup>) и относительно горячей  $T = 1,2$  эВ плазмы (рис. 95). В дальнейшем эта область расширяется, а зона с максимальной температурой отделяется от металлической поверхности. К моменту времени 0,3 мкс максимальная температура 1,9 эВ достигается на расстоянии 1,5 мм от мишени, в то время как температура вблизи нее составляет 1,6 эВ.

Максимальная температура в плазме  $T_{\max} = 2,3$  эВ достигается к моменту времени  $t = 0,5$  мкс, а затем очень медленно падает до значения 2,1 эВ при  $t = t_M$ . Максимальная плотность плазмы достигает значения  $2,2 \cdot 10^{-2}$  г/см<sup>3</sup> в момент времени  $t = 0,22$  мкс, а затем по мере разлета убывает до  $3,5 \cdot 10^{-3}$  г/см<sup>3</sup> ( $t = t_M$ ). При этом зона максимальной плотности всегда непосредственно примыкает к участку поверхности, облучаемому электронным пучком.

На рис. 96 изображено поле вектора скорости образовавшейся плазмы на момент времени  $t = 1,24$  мкс. Сильный разлет в боковом направлении служит объяснением наблюдаемой на этот момент времени некоторой немонотонности в профиле температуры (см. рис. 95).

На рис. 94 (кривая 2) изображена скорость волны испарения, возникшей под действием лазерного излучения той же мощности. Максимальная скорость волны испарения почти вдвое ниже ( $D = 36$  м/с).

В целом толщина испаренного слоя алюминия в 2,5 раза меньше, чем толщина слоя, испаренного электронным пучком, и составляет 14 мкм. Это объясняет значительно меньшие средние плотности плазмы, наблюдаемые в лазерном варианте.

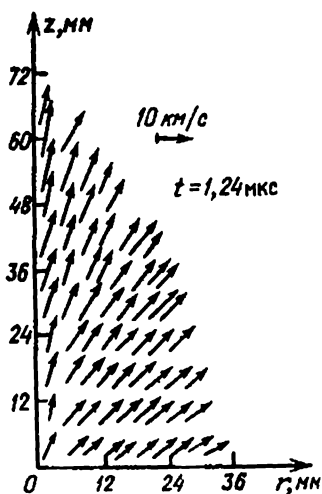


Рис. 96. Поле скоростей в момент времени  $t = 1,24$  мкс (воздействие электронного пучка)

Большая глубина проникновения электронного пучка в глубь металла\*) не является единственным фактором, вызывающим существенные различия в ходе процесса. Второй причиной такого расхождения является резкая зависимость коэффициента поглощения лазерного излучения от температуры плазмы при  $T=1 \div \pm 1,5$  эВ. Напомним, что поглощение электронного пучка практически не зависит от температуры.

На рис. 97 приведены линии уровня температуры для алюминиевой плазмы, образованной под действием лазерного излучения. В отличие от плазмы, образован-

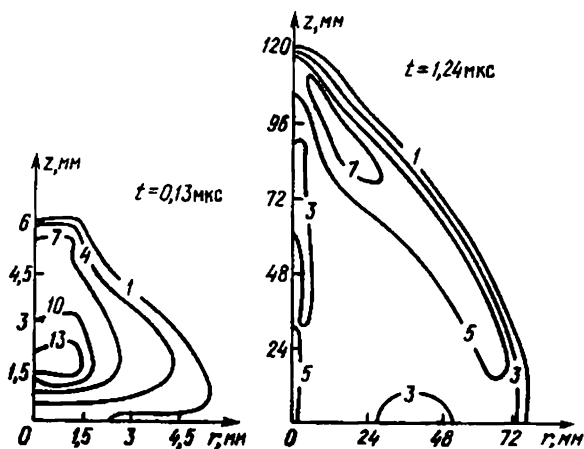


Рис. 97. Линии уровня температуры (в электронвольтах) в моменты времени  $t=0,13$  мкс и  $t=1,24$  мкс (для алюминиевой плазмы, образованной воздействием лазерного излучения)

ной электронным пучком, которая более или менее равномерно нагрета до температур  $\sim 1-2$  эВ (рис. 95), здесь наблюдаются существенные градиенты температурных полей. Это связано с быстрым возрастанием коэффициента поглощения лазерного излучения при увеличении температуры, что приводит к интенсивному поглощению энергии в парах, их быстрому нагреву и экранировке поверхности. Наличие такой экранировки хорошо иллюстрирует рис. 94 (кривая 2), на которой

\*) Оценки, проведенные на основе выражения (3.41), дают значение глубины проникновения  $L$  в алюминий ( $A=27$ ,  $Z_1=13$ ) электронов первоначальной энергии 50 кэВ, приблизительно равной  $L=15$  мкм.

видно полное прекращение процесса испарения поверхности для  $400 \text{ нс} \leq t \leq 500 \text{ нс}$ . В дальнейшем, после  $t = 500 \text{ нс}$ , сильно нагретая плазма разлетается, плотность в ней падает и лазерное излучение вновь начинает доходить до мишени, вследствие чего испарение возобновляется (рис. 94).

Экранировка лазерного излучения совместно с интенсивным газодинамическим течением приводит к лунообразной структуре плазмы (рис. 97,  $t = 1,24 \text{ мкс}$ ). Напомним, что аналогичная структура наблюдалась при взаимодействии лазерного излучения с азотной плазмой (рис. 89 и 92).

Итак, из сравнения результатов можно сделать вывод, что при одинаковых условиях воздействие электронного пучка на металл приводит к более сильному его испарению и к образованию более плотной, холодной и однородной по температуре плазмы, чем при воздействии лазерного излучения. Эти различия могут оказаться полезными для разнообразных целей, связанных с технологией обработки материалов потоками энергии умеренной мощности.

Использование эффективных вычислительных алгоритмов играет большую роль в численном моделировании различных научных и технических задач, в том числе РГД. Однако в этой главе сознательно почти полностью были опущены чисто математические вопросы, связанные с решением задач динамики излучающего газа. Вызвано это двумя причинами.

Во-первых, для ряда рассмотренных задач (сильноточный излучающий разряд, динамика лазерной плазмы) используемые алгоритмы подробно изложены в гл. III и IV. Во-вторых, и это главное, хотелось обратить основное внимание на конкретные физические и технологические результаты, полученные с помощью расчетов на ЭВМ. Именно они, а не эффективное решение пусть и очень сложных уравнений того или иного класса должны являться конечным результатом численного моделирования.

Результаты, имеющие конкретный физический смысл для задач динамики излучающего газа, невозможно получить автоматически, численно решая соответствующие уравнения на ЭВМ, так как в большинстве случаев исходная постановка задачи известна недостаточно точно. И здесь уточнению исходной постановки, выбору той

математической модели, которая, с одной стороны, допускает практическое численное решение, а с другой — правильно описывает основные особенности изучаемого процесса, может помочь тесная взаимосвязь между натурным и вычислительным экспериментами, внутреннее исследование математической модели на устойчивость к тем или иным факторам, детальный физический анализ полученных результатов расчета. Кроме того, таким путем можно существенно упростить и само численное решение задачи динамики излучающего газа: уменьшить необходимую для проведения расчетов информацию об особенностях коэффициента поглощения, ускорить сходимость итерационных процессов при решении многогрупповых уравнений диффузии и т. д.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авилова И. В., Биберман Л. М., Воробьев В. С., Замалин В. М., Кобзев Г. А., Лагарьков А. Н., Мнацаканян А. Х., Норман Г. Э. Оптические свойства горячего воздуха. — М.: Наука, 1970, 320 с.
2. Аксенов Н. Н., Гольдин В. Я. Расчет двумерного стационарного уравнения переноса нейтронов методом квазидиффузии. — ЖВМ и МФ, 1979, 19, № 5, с. 1341—1343.
3. Александров А. Ф., Зосимов В. В., Курдюмов С. П., Попов Ю. П., Рухадзе А. А., Тимофеев И. Б. Динамика и излучение прямых сильноточных разрядов в воздухе. — ЖЭТФ, 1971, 61, с. 1841.
4. Александров А. Ф., Рухадзе А. А. Сильноточные электроразрядные источники света. — Усп. физ. наук, 1974, 112, № 2, с. 193—230.
5. Александров В. В. Течение излучающего водорода в осесимметричных соплах. — Изв. АН СССР. Мех. жидкости и газа, 1967, № 4, с. 19—23.
6. Александров В. В., Епихова Н. В. О расчете структуры ударной волны в селективно излучающем газе. — В кн.: Материалы объединенного семинара по вычислительной физике. Тбилиси, Изд. ТГУ, 1976, с. 35—59.
7. Альдо В. ла Рокка. Лазеры в промышленности. — В мире науки, 1983, № 1, с. 36—43.
8. Ананьин О. Б., Быковский Ю. А., Любченко О. С., Новиков И. К., Ступицкий Е. Л., Фролов С. П. Исследование поглощения фоновой средой излучения лазерной плазмы. — В кн.: Тезисы докладов 5-й Всесоюзной конференции по динамике излучающего газа. М., Изд. ИПМ АН СССР, 1983, с. 40—41.
9. Андреев С. И., Байков О. Г., Гольдин В. Я., Гольдина Д. А., Дашук П. Н., Калиткин Н. Н., Попов П. Г., Самарский А. А., Четверушкин Б. Н. Излучающие импульсные разряды в инертных газах. Сходящийся z-пинч. — М., 1975. (Препринт/Институт прикл. мат. АН СССР: № 102.)
10. Андреев С. И., Ванюков М. П., Егоров А. А., Соколов Б. М. Применение безэлектродного высокочастотного разряда для накачки оптических квантовых генераторов. — Оптика и спектроскопия. 1967, 23, № 5, с. 784—788.
11. Андреев С. И., Ванюков М. П., Даниэль Е. В. Применение искрового разряда для накачки оптических квантовых генераторов. — ЖТФ, 1967, 37, № 8, с. 1527—1531.
12. Андреев С. И., Гаврилов В. Е. Температурная зависимость электропроводности ксеноновой плазмы. — ЖТФ, 1970, 40, № 6, с. 1300—1302.

13. Андреев С. И., Гаврилов В. Е. Излучательная способность плотной ксеноновой плазмы. — Журн. прикл. спектр., 1970, 13, № 6, с. 988—992.
14. Андреев С. И., Гаврилов В. Е. Об обратимой непрозрачности кварцевой трубки ксеноновых импульсных ламп. — Журн. прикл. спектр., 1974, 20, № 5, с. 780—783.
15. Андреев С. И., Гольдин В. Я., Гольдина Д. А., Зобов Е. А., Калиткин Н. Н., Самарский А. А., Соколов В. Г., Четверушкин Б. Н. Импульсные излучающие разряды в инертных газах. — ДАН СССР, 1976, 226, № 6, с. 1045—1048.
16. Андреев С. И., Гольдин В. Я., Гольдина Д. А., Зобов Е. А., Калиткин Н. Н., Самарский А. А., Соколов В. Г., Четверушкин Б. Н. Излучающие импульсные разряды в инертных газах. Расходящийся z-пучок. — М., 1975 (Препринт/Институт прикл. мат. АН СССР: № 32.)
17. Андреев С. И., Гольдин В. Я., Зобов Е. А., Калиткин Н. Н., Соколов В. Г., Четверушкин Б. Н. Световая детонация в излучающих разрядах. — Письма в ЖТФ, 1976, 2, вып. 13, с. 598—602.
18. Анисимов С. И., Иванов М. Ф., Пашинин П. П., Прохоров А. М. Газовая оболочечная мишень для лазерного инициирования термоядерных реакций. — Письма в ЖЭТФ, 1975, 22, вып. 6, с. 343—346.
19. Арифов Т. У., Аскаръян Г. А., Тарасова Н. М. Ионизация среды ультрафиолетовым излучением от вещества, нагретого в фокусе луча лазера. — ЖЭТФ, 1969, 56, вып. 2, с. 516—521.
20. Афанасьев Ю. В., Басов Н. Г., Волосевич П. П., Гамалий Е. Г., Крохин О. Н., Курдюмов С. П., Леванов Е. И., Розанов В. Б., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Анализ физических процессов в лазерных мишенях для эксперимента на уровне энергии лазера 200—300 Дж. — Квантовая электроника, 1975, 2, № 8, с. 1816—1818.
21. Афанасьев Ю. В., Вергунова Г. А., Волосевич П. П., Гамалий Е. Г., Гуськов С. Ю., Демченко Н. Н., Розанов В. Б., Тишкин В. Ф., Фаворский А. П. Сжатие стеклянных газонаполненных мишеней в гидродинамическом режиме на уровне поглощенной энергии  $E_{\text{погл}} = 20 \div 40$  Дж. — В кн.: Труды ФИАН СССР. Теория нагрева и сжатия низкоэнтропийных термоядерных мишеней. 1982, 134, с. 103—114.
22. Бабаева О. Ю. Неявная схема для определения температуры при наличии радиационно-кондуктивного теплообмена. — ЖВМ и МФ, 1982, 22, № 6, с. 1434—1441.
23. Бабаева О. Ю., Четверушкин Б. Н. Об одной неявной схеме решения задач динамики излучающего газа. — М., 1980. (Препринт/Институт прикл. матем. АН СССР: № 110.)
24. Бабаева О. Ю., Четверушкин Б. Н. Определение потока энергии излучения в двумерных задачах радиационной газовой динамики. — М., 1981. (Препринт/Институт прикл. матем. АН СССР: № 145.)
25. Базылев Б. Н., Романов Г. С. Численное решение спектральной радиационно-газодинамической задачи о лучистом охлаждении сферического объема плазмы с учетом нестационарности процесса переноса излучения. — Инженерно-физический журнал, 1981, 41, № 2, с. 318—326.

26. Базылев Б. Н., Романов Г. С. Перенос излучения в задачах высокотемпературной газовой динамики. — ДАН БССР, 1981, 25, № 2, с. 116—119.
27. Байшин. Динамика излучающего газа. — М.: Мир, 1968. — 323 с.
28. Барчуков А. И., Бункин Ф. В., Конов В. И., Любин А. А. Исследование низкорогового пробоя газов вблизи твердых мишеней излучением  $\text{CO}_2$ -лазера. — ЖЭТФ, 1974, 66, вып. 3, с. 965—981.
29. Басов Н. Г., Крохин О. Н. Условия разогрева плазмы излучением оптического генератора. — ЖЭТФ, 1964, 46, вып. 1, с. 171—175.
30. Басов Н. Г., Крохин О. Н., Склизков Г. В., Федотов С. И., Шиканов А. С. Мощная лазерная установка и исследование эффективности высокотемпературного нагрева плазмы. — ЖЭТФ, 1972, 62, вып. 1, с. 203—212.
31. Басс Л. П. Конечно-разностные методы решения уравнения переноса в задачах со сложной геометрией. — М., 1975. (Препринт/Институт прикл. мат. АН СССР: № 14.)
32. Батанов В. А., Богатырев В. А., Суходрев Н. К., Федоров В. Б. Спектральная диагностика плазменного факела, образующегося при развитом испарении металлов лазерным излучением. — ЖЭТФ, 1973, 64, вып. 3, с. 825—832.
33. Батанов В. А., Бункин Ф. В., Прохоров А. М., Федоров В. Б. Газодинамическая структура плазменного факела, возникающего при испарении металлов мощным оптическим излучением. — ЖЭТФ, 1972, 63, вып. 4, с. 1240—1246.
34. Башурин В. П., Варламов Ю. В., Гольдин В. Я., Четверушкин Б. Н. Методы решения одномерных задач радиационной газовой динамики. Часть II. — ЖВМ и МФ, 1973, 13, № 5, с. 1298—1306.
35. Белоцерковский О. М. О некоторых численных моделях в физике плазмы. — В кн.: Современные проблемы вычислительной математики и математической физики. М.: Наука, 1982, с. 48—63.
36. Белоцерковский О. М., Биберман Л. М., Бронин С. Я., Лагарьков А. Н., Фомин В. Н. Обтекание и нагрев затупленных тел гиперзвуковым потоком газа с учетом переноса излучения. — Теплофизика высоких температур, 1969, 7, № 3, с. 529—541.
37. Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М. Нестационарный метод «крупных частиц» для газодинамических расчетов. — ЖВМ и МФ, 1971, 11, № 1, с. 182—207.
38. Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М. Метод «крупных частиц» в газовой динамике. — М.: Наука, 1982. — 391 с.
39. Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М., Скотников В. П., Фомин В. Н. Исследование обтекания затупленных тел с учетом излучения методом «крупных частиц». — Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа, 1982, № 4, с. 106—113.
40. Белоцерковский О. М., Осетрова С. Д., Фомин В. Н., Холодов А. С. Гиперзвуковое обтекание затупленных тел потоком излучающего газа. — ЖВМ и МФ, 1974, 14, № 4, с. 992—1003.
41. Белоцерковский О. М., Фомин В. Н. Расчет течений излучающего газа в ударном слое. — ЖВМ и МФ, 1969, 9, № 2, с. 397—412.

42. Бергельсон В. И., Лосева Т. В., Немчинов И. В. Численный расчет задачи о распространении по газу навстречу потоку светового излучения плоской дозвуковой радиационной волны. — Журнал прикл. мех. и техн. физ., 1974, № 4, с. 22—34.
43. Бергельсон В. И., Голубь А. П., Немчинов И. В., Попов С. П. Образование плазмы в слое паров, возникающих под действием излучения ОКГ на твердое тело. — Квантовая электроника, 1973, 16, № 4, с. 20—27.
44. Биберман Л. М., Бронин С. Я., Брыкин М. В., Мнацаканян А. Х. Влияние газообразных продуктов разрушения теплозащитного покрытия на теплообмен в окрестности критической точки затупленного тела. — Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа, 1978, № 3, с. 129—136.
45. Биберман Л. М., Бронин С. Я., Лагарьков А. Н. Радиационно-конвективный теплообмен при гиперзвуковом обтекании затупленного тела. — Изв. АН СССР. Мех. жидкости и газа, 1972, № 5, с. 112—123.
46. Богданова М. С., Кучеров А. Б., Николаев Е. С., Таран М. Д., Тишкин В. Ф., Фаворский А. П., Шапошникова С. А., Шашков М. Ю. Некоторые неявные итерационные методы. Анализ и сравнение. — М., 1978. (Препринт/Институт прикл. мат. АН СССР: № 115.)
47. Бояч-Бруевич А. М., Зинченко В. И., Имас Я. А., Капорский Л. Н., Романов Г. С., Станкевич Ю. А. Теоретическое и экспериментальное излучение светоэрозивной плазмы в режиме развитого поглощения. — ЖТФ, 1981, 51, вып. 5, с. 919—924.
48. Буздин В. П., Добкин А. В., Косарев И. Б. Коэффициенты поглощения излучения, спектральные и интегральные характеристики излучения алюминиевой плазмы в диапазоне температур  $8 \div 240 \cdot 10^3$  К и относительных плотностей  $3,16 \cdot 10^{-3} \div 100$ . — Ин-т физики Земли АН СССР. М., 1979, с. 23. Рукопись деп. в ВИНТИ, № 370—79.
49. Варганова Л. Ф., Гаджиев А. Д. О конечно-разностном методе решения уравнения переноса нейтронов в квазиклассических координатах. — Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1974, 5, с. 27—36.
50. Вехов А. А., Клементов А. Д., Николаев Ф. А., Розанов В. Б., Рубцов В. А., Свириденко Ю. П. Протяженный импульсный разряд в парах лития. — В кн.: Краткие сообщения по физике. М.: Изд. ФИАН, 1970, № 10, с. 53—59.
51. Владимиров В. С. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц. — Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1961, 61. — 158 с.
52. Владимиров В. С. Численное решение кинетического уравнения для сферы. — В кн.: Вычислительная математика, М.: Изд. АН СССР, 1958, № 3, с. 3—33.
53. Владимиров В. С. Особенности решения уравнения переноса. — ЖВМ и МФ, 1968, 8, № 4, с. 842—852.
54. Волосевич П. П., Гольдин В. Я., Калиткин Н. Н., Курдюмов С. П., Попов Ю. П., Розанов В. Б., Самарский А. А., Четверушкин Б. Н. Численный расчет сильноточного разряда в литиевой плазме. — В кн.: Сборник докладов IX международной конференции по явлениям в ионизированной плазме. Бухарест: Изд. Института физики АН СРР, 1969, с. 348.

55. Волосевич П. П., Гольдин В. Я., Калиткин Н. Н., Курдюмов С. П., Попов Ю. П., Розанов В. Б., Самарский А. А., Четверушкин Б. Н. Некоторые стадии сильноточного разряда в плазме. — М., 1971. (Препринт/Институт прикл. матем. АН СССР: № 46.)
56. Волчинская М. И., Ибраев Р. А., Мажукин В. И., Пестрякова Г. А., Четверушкин Б. Н. Численное моделирование двумерного осесимметричного плазменного факела. — М., 1982. (Препринт/Института прикл. мат. АН СССР: № 88.)
57. Волчинская М. И., Мажукин В. И., Репина Г. Е., Четверушкин Б. Н. Численное моделирование двумерной задачи о распространении плазменных разрядов. — ЖВМ и МФ, 1982, 22, № 1, с. 171—177.
58. Волчинская М. И., Мажукин В. И., Четверушкин Б. Н., Чурбанова Н. Г. Решение двумерных нестационарных задач динамики излучающего газа. — ЖВМ и МФ, 1983, 23, № 5, с. 1177—1185.
59. Волчинская М. И., Четверушкин Б. Н. Решение двумерных нестационарных задач радиационной газовой динамики. — ЖВМ и МФ, 1979, 19, № 5, с. 1262—1275.
60. Волчинская М. И., Четверушкин Б. Н. Об одном итерационном методе решения двумерных уравнений диффузии излучения. — ЖВМ и МФ, 1977, 17, № 2, с. 428—436.
61. Выскребенцев А. И. Метод численного решения уравнения переноса излучения в одномерных задачах. — ЖВМ и МФ, 1981, 21, № 5, с. 1206—1214.
62. Галиев А. Л., Крапивкин Л. А., Миркин Л. И., Углов А. А. Синтез нитрида титана в атмосфере азота при высоких давлениях и лазерном излучении. — ДАН СССР, 1980, 251, № 2, с. 336—338.
63. Гамалий Е. Г., Розанов В. Б., Самарский А. А., Тишкин В. Ф., Тюрин Н. Н., Фаворский А. П. Гидродинамическая устойчивость сжатия сферических лазерных мишеней. — ЖЭТФ, 1980, 79, вып. 2(8), с. 459—471.
64. Герасимов Б. П., Семушкин С. А. Расчет на неподвижной эйлеровой сетке обтеканий тел изменяющейся формы. — Дифференциальные уравнения, 1981, XVII, № 7, с. 1214—1221.
65. Гермогенова Т. А., Басс Л. П. О решении уравнения переноса методом характеристик. — В кн.: Вопросы физики защиты реакторов. М.: Атомиздат, 1969, вып. 3, с. 69—77.
66. Гермогенова Т. А., Сушкевич Т. А. Решение уравнения переноса методом средних потоков. — В кн.: Вопросы физики защиты реакторов. М.: Атомиздат, 1969, вып. 3, с. 34—43.
67. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений гидродинамики. — Мат. сборник, 1959, 47 (89), с. 271—306.
68. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. — М.: Наука, 1976.—400 с.
69. Головизнин В. М., Рязанов М. А. О решении нестационарных задач теплопроводности вариационно-разностным методом. — Дифференциальные уравнения, 1983, XIX, № 5, с. 860—869.
70. Головизнин В. М., Самарский А. А., Фаворский А. П. Вариационный подход к построению конечно-

- разностных моделей в гидродинамике. — ДАН СССР, 1977, 235, № 6, с. 1285—1288.
71. Голубь А. П. Конечно-разностная аппроксимация для осредненных уравнений переноса излучения. — Ин-т физики Земли АН СССР. М., 1978, с. 16. Рукопись деп. в ВИНТИ, № 282—79.
  72. Голубь А. П. Численный метод решения уравнения переноса излучения для цилиндрических задач радиационной газовой динамики. — Ин-т физики Земли АН СССР. М., 1980, с. 21. Рукопись деп. в ВИНТИ, № 2821—80.
  73. Гольберг С. М., Захаров А. Ю., Филиппов С. С. О некоторых численных методах решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. — М., 1976 (Препринт/Институт прикл. мат. АН СССР: № 12.)
  74. Гольдин В. Я. Характеристическая разностная схема для нестационарного кинетического уравнения. — ДАН СССР, 1960, 133, № 4, с. 748—751.
  75. Гольдин В. Я. Квазидиффузионный метод решения кинетического уравнения. — ЖВМ и МФ, 1964, 4, № 6, с. 1078—1084.
  76. Гольдин В. Я. О математическом моделировании задач сплошной среды с неравновесным переносом. — М., 1980. (Препринт/Институт прикл. мат. АН СССР: № 145.)
  77. Гольдин В. Я., Гольдина Д. А., Данилова Г. В. и др. Исследование задач магнитной радиационной газодинамики численными методами на ЭВМ. — М., 1971.—67 с. (Препринт/ИПМ АН СССР: № 36.)
  78. Гольдин В. Я., Данилова Г. В., Четверушкин Б. Н. Приближенный метод расчета нестационарного кинетического уравнения. — В кн.: Вычислительные методы в теории переноса. М.: Атомиздат, 1969, с. 50—58.
  79. Гольдин В. Я., Калиткин Н. Н., Четверушкин Б. Н. Электротехническое приближение для сильноточных излучающих разрезов. — Журнал прикл. мех. и техн. физ., 1975, № 1, с. 41—44.
  80. Гольдин В. Я., Колпаков А. В. Нелинейный метод потоковой прогонки для решения многомерного диффузионного уравнения. — М., 1982. (Препринт/Институт прикл. матем. АН СССР: № 22.)
  81. Гольдин В. Я., Колпаков А. В., Соколов А. В. Методы решения стационарной квазидиффузионной системы уравнений. — М., 1978. (Препринт/Институт прикл. мат. АН СССР: № 80.)
  82. Гольдин В. Я., Кудинова Г. А. Расчет потока энергии излучения в воздухе. — ЖВМ и МФ, 1976, 16, № 3, с. 805—808.
  83. Гольдин В. Я., Четверушкин Б. Н. Методы расчета переноса излучения в одномерных задачах низкотемпературной плазмы. — М., 1970. (Препринт/Институт прикл. мат. АН СССР: № 12.)
  84. Гольдин В. Я., Четверушкин Б. Н. Эффективный метод решения уравнения переноса излучения в низкотемпературной плазме. — ДАН СССР, 1970, 195, № 2, с. 315—317.
  85. Гольдин В. Я., Четверушкин Б. Н. Методы решения одномерных задач радиационной газовой динамики. — ЖВМ и МФ, 1972, 12, № 4, с. 990—1001.
  86. Гольдин В. Я., Четверушкин Б. Н. Перенос неравновесного излучения в плазме. — В кн.: Вопросы физики низкотемпературной плазмы. Минск, 1970, с. 110—112.

87. Гольдин В. Я., Четверушкин Б. Н. Исследование охлаждения и разлета сферической мишени, разогретой излучением лазера. — ЖЭТФ, 1975, 68, вып. 5, с. 1768—1771.
88. Гольдин В. Я., Четверушкин Б. Н. Стационарное решение задачи о сильноточном разряде с переносом излучения. — В кн.: Сборник докладов III Всесоюзной конференции по физике низкотемпературной плазмы. М.: Изд. МГУ, 1971, с. 182—184.
89. Горшкова Л. Д., Горшков В. А., Подмошенский И. В. Спектроскопические исследования плазмы мощного  $H$ -прижатого разряда. — Теплофизика высоких температур, 1969, 7, № 1, с. 3—6.
90. Грынъ В. И. О вариационных принципах для уравнения переноса и их связи с  $P_N$ -приближением метода сферических гармоник. — ЖВМ и МФ, 1984, 24, № 1, с. 75—91.
91. Джексон Д. Ряды Фурье и ортогональные полиномы. — М.: ИЛ, 1948.—260 с.
92. Добкин А. В., Косарев И. Б., Немчинов И. В. Оптические свойства высокотемпературной алюминиевой плазмы и ее излучение при нагреве лазерами и мощными пучками быстрых частиц. — В кн.: Тезисы докладов 5-й Всесоюзной конференции. Динамика излучающего газа. М.: Изд. ИПМ АН СССР, 1983, с. 11—12.
93. Добкин А. В., Малявина Т. Б., Немчинов И. В. Стационарный режим разлета паров, нагреваемых потоками излучения или быстрых частиц. — Журнал прикл. мех. и техн. физ., 1982, № 6, с. 14—22.
94. Дорофеева Н. Н., Кучеров А. Б. Исследование метода двумерных прогонок для решения сеточных эллиптических уравнений. — В кн.: Разностные методы математической физики. М.: Изд. МГУ, 1980, с. 3—10.
95. Думкина Г. В., Козманов М. Ю. Метод характеристик для решения системы уравнений энергии и нестационарного переноса излучения. — Численные методы механики сплошной среды, 1977, 8, № 5, с. 53—57.
96. Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. — М.: Госатомиздат, 1960. — 520 с.
97. Ельяшевич М. А., Боровик Ф. Н., Каськова С. И., Романов Г. С., Степанов К. Л., Сыркин М. И., Толкач В. И. Термодинамические функции и коэффициенты поглощения плазмы висмута и ксенона при температурах до 30 эВ. — В кн.: Труды IV Всесоюзной конференции «Динамика излучающего газа». М.: Изд. МГУ, 1981, 1, с. 129—139.
98. Железняк М. Б., Мнацаканян А. Х., Якубов И. Т. Релаксация и неравновесное излучение за ударными волнами в воздухе. — Изв. АН СССР. Мех. жидкости и газа, 1970, № 4, с. 161—174.
99. Забродин А. В., Пекарчук С. Б. Об одном методе численного решения нелинейного уравнения теплопроводности на параллелограммной сетке точек. — Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики, 1982, вып. 2 (10), с. 14—22.
100. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных газодинамических явлений. — М.: Наука, 1966. — 686 с.

101. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. О лавинной ионизации под действием светового импульса. — ЖЭТФ, 1964, 47, вып. 3, с. 1150—1161.
102. Зигель Р., Хауэлл Дж. Теплообмен излучением. — М.: Мир, 1975. — 934 с.
103. Зубов В. И., Кривцов В. М., Наумова И. Н., Шмыглевский Ю. Д. Расчет движения паров твердого тела под действием лазерного излучения. — В кн.: Динамика излучающего газа. М.: Изд. ВЦ АН СССР, 1980, вып. 3, с. 76—104.
104. Зубов В. И., Кривцов В. М., Наумова И. Н., Шмыглевский Ю. Д. Расчет действия лазера на плоскую преграду и ее пары. — В кн.: Тезисы докладов 5-й Всесоюзной конференции по динамике излучающего газа. М.: Изд. ИПМ АН СССР, 1983, с. 43—44.
105. Зуев А. И. Применение метода Ньютона—Канторовича для решения задачи о распространении неравновесного излучения. — ЖВМ и МФ, 1973, 13, № 3, с. 792—798.
106. Имшенник В. С., Морозов Ю. П. Радиационная релятивистская газодинамика высокотемпературных явлений. — М.: Атомиздат, 1981. — 88 с.
107. Калиткин Н. Н., Кузьмина Л. В., Рогов В. С. Таблицы термодинамических функций и транспортных коэффициентов плазмы. — М.: Изд. Института прикл. матем. АН СССР, 1972. — 112 с.
108. Каменщиков В. А., Пластинин Ю. А., Николаев В. М., Новицкий Л. А. Радиационные свойства газов при высоких температурах. — М.: Машиностроение, 1971, 440 с.
109. Карасев А. Б., Кондранин Т. В. Влияние продуктов уноса массы на теплообмен при разрушении графита в излучающей воздушной плазме. — Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа, 1971, № 1, с. 23—31.
110. Карлсон Б., Бем Д. Ж. Решение транспортного уравнения  $S_n$ -методом. — В кн.: Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1958, Избранные доклады иностранных ученых. М.: 1959, 3, с. 408—432.
111. Клементов А. Д., Михайлов Г. В., Николаев Ф. А., Розанов В. Б., Свириденко Ю. П. Сильноточный импульсный разряд в литии. — Теплофизика высоких температур, 1970, 8, № 4, с. 736—740.
112. Кобзев Г. А. Непрерывные спектры ионов азота и кислорода при высоких температурах. — Теплофизика высоких температур, 1970, 8, № 5, с. 1087—1090.
113. Козик Е. А., Лосева Т. В., Немчинов И. В., Новикова В. В. Дозвуковые радиационные волны, распространяющиеся от преграды навстречу излучению  $CO_2$ -лазера. — Квантовая электроника, 1978, 5, № 10, с. 2138—2147.
114. Козлов И. М., Романов Г. С. Динамика излучающего плазменного облака, возникшего при мгновенном энерговыделении у твердой поверхности. — В кн.: Тез. докладов 5-й Всесоюзной конференции по динамике излучающего газа. М.: Изд. ИПМ АН СССР, 1983, с. 24—25.
115. Коньков А. А., Нейланд В. Я., Николаев В. М., Пластинин Ю. А. Проблемы лучистого теплообмена в гиперзвуковой аэродинамике. — Теплофизика высоких температур, 1969, 7, № 1, с. 140—164.

116. Коршия Т. К., Тишкин В. Ф., Фаворский А. П., Шашков М. Ю. Вариационный подход к построению разностных схем для уравнения теплопроводности на криволинейных сетках. — ЖВМ и МФ, 1980, 20, № 2, с. 401—421.
117. Кузнецов Н. М. Термодинамические функции и ударные адиабаты воздуха при высоких температурах. — М.: Машиностроение, 1965. — 463 с.
118. Куликов Ю. Н., Четверушкин Б. Н. Неявный разностный метод определения температуры в задачах радиационной газовой динамики. — ЖВМ и МФ, 1973, 13, № 1, с. 136—146.
119. Кучеров А. Б., Макаров М. М. Применение метода двумерных прогонок к решению пятиточечных разностных уравнений. — В кн.: Разностные методы математической физики. М.: Изд. МГУ, 1981, с. 31—38.
120. Кучеров А. Б., Николаев Е. С. Попеременно-треугольный итерационный метод решения сеточных эллиптических уравнений в прямоугольнике. — ЖВМ и МФ, 1976, 16, № 5, с. 1164—1175.
121. Лебедев В. И.  $P_{NI}$ -уравнения. — ЖВМ и МФ, 1967, 7, № 4, с. 813—824.
122. Лебедев В. И., Фомин В. Н. Обтекание затупленных тел гиперзвуковым потоком газа с учетом селективного излучения и поглощения энергии. — ЖВМ и МФ, 1969, 9, № 3, с. 655—663.
123. Мажорова О. С. Итерационный метод решения двумерных матричных уравнений — М., 1979. (Препринт/Институт прикл. матем. АН СССР: № 48.)
124. Мажорова О. С., Попов Ю. П. О методах численного решения уравнений Навье—Стокса. — ЖВМ и МФ, 1980, 20, № 4, с. 1005—1020.
125. Мажукин В. И. Численное моделирование пробоя плотного молекулярного газа лазерным излучением вблизи металлической поверхности. — М., 1979. (Препринт/Институт прикл. матем. АН СССР: № 30.)
126. Мажукин В. И., Пестрякова Г. А. Численное моделирование процессов поверхностного испарения металла лазерным излучением. — М., 1984. (Препринт/Институт прикл. матем. АН СССР: № 48.)
127. Мажукин В. И., Таран М. Д. Численное решение двумерной нестационарной задачи лазерного прогрева вещества. — М., 1978. (Препринт/Институт прикл. матем. АН СССР: № 9.)
128. Мажукин В. И., Углов А. А., Четверушкин Б. Н. Низкотемпературная лазерная плазма вблизи металлических поверхностей в газах высокого давления. — Квантовая электроника, 1983, 10, № 4, с. 679—702.
129. Мажукин В. И., Углов А. А., Четверушкин Б. Н. Моделирование пробоя плотного молекулярного газа лазерным излучением вблизи металлической поверхности. — ДАН СССР, 1979, 246, № 6, с. 1338—1342.
130. Мажукин В. И., Углов А. А., Четверушкин Б. Н. Оптический пробой молекулярного азота в широком диапазоне давлений вблизи твердой мишени. — Квантовая электроника, 1982, 9, № 5, с. 906—917.
131. Мажукин В. И., Углов А. А., Четверушкин Б. Н. Численное исследование задачи о лазерном пробое плотного газа. — ЖВМ и МФ, 1980, 20, № 2, с. 451—460.

132. Мажукин В. И., Углов А. А., Четверушкин Б. Н. Численный анализ возникновения лазерной искры в плотном газе вблизи металлической мишени.— Физика и химия обработанных материалов, 1979, № 6, с. 73—79.
133. Мажукин В. И., Углов А. А., Четверушкин Б. Н. Численное моделирование динамики лазерной плазмы вблизи твердой поверхности при высоком давлении окружающей среды.— ДАН СССР, 1981, 256, № 5, с. 1100—1105.
134. Мажукин В. И., Углов А. А., Четверушкин Б. Н. О развитии низкотемпературной лазерной плазмы в азотной среде повышенного давления.— ДАН СССР, 1981, 257, № 3, с. 584—589.
135. Марчук Г. И., Лебедев В. И. Численные методы в теории переноса нейтронов.— М.: Атомиздат, 1981.— 496 с.
136. Мельниченко А. С.; Огибин В. Н. Применение метода Монте-Карло к решению спектральных задач лучистого теплообмена.— ЖВМ и МФ, 1977, 17, № 4, с. 1068—1074.
137. Мирский В. Н., Стулов В. П. Течение излучающего газа около затупленного тела при интенсивном испарении.— Теплофизика высоких температур, 1976, 14, № 1, с. 112—119.
138. Найт Ч. Дж. Теоретическое моделирование быстрого поверхностного испарения при наличии противодействия.— Ракетная техника и космонавтика, 1976, 17, № 5, с. 81—86.
139. Наумова И. Н., Шмыглевский Ю. Д. Расчет течений излучающего воздуха в трубе.— В кн.: Динамика излучающего газа. М.: Изд. ВЦ АН СССР, 1976, вып. 2, с. 99—109.
140. Немчинов И. В. Осреднение уравнений переноса в задачах радиационной газовой динамики. Ин-т физики Земли АН СССР. М., 1983. С. 119. Рукопись деп. в ВИНТИ, № 1721—83.
141. Немчинов И. В. Об усредненных уравнениях переноса излучения и их использовании при решении газодинамических задач.— Прикл. матем. и механ., 1970, 34, вып. 4, с. 706—722.
142. Никифоров А. Ф., Орлов Н. Ю., Уваров В. Б. Сравнение результатов расчета коэффициентов поглощения света по модифицированной модели Хартри—Фока—Слэтера с экспериментальными данными для ударно сжатой аргоновой плазмы.— Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1979, вып. 4(6), с. 36—39.
143. Никифоров А. Ф., Орлов Н. Ю., Уваров В. Б. Расчет сечений тормозного поглощения света по модифицированной модели Хартри—Фока—Слэтера.— М., 1982. (Препринт/Институт прикл. мат. АН СССР: № 10.)
144. Никифорова А. В., Тарасов В. А., Трощев В. Е. О решении кинетических уравнений дивергентным методом характеристик.— ЖВМ и МФ, 1972, 12, № 4, с. 1041—1048.
145. Николайшвили Ш. С. О решении односкоростного уравнения переноса с использованием приближения Ивона—Мертенса.— Атомная энергия, 1966, 20, с. 344.
146. Оганесян А. А., Руховец А. А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений.— Ереван: Изд. АН АрмССР, 1979, с. 332.
147. Окулов Б. А., Семенов А. М. Расчет состава и термодинамических свойств гетерогенных химически реагирующих систем, в которых возникают безразмерные состояния.— Теплофизика высоких температур, 1974, 12, № 2, с. 282.

148. Попов Ю. П. Расчет электротехнических цепей в задачах магнитной гидродинамики. — ЖВМ и МФ, 1971, 11, № 2, с. 449—456.
149. Райзер Ю. П. Основы современной физики газоразрядных процессов. — М.: Наука, 1980.—415 с.
150. Репина Г. Е., Четверушкин Б. Н. Об одном методе решения уравнения переноса излучения в двумерных задачах радиационной газовой динамики. — ЖВМ и МФ, 1979, 19, № 6, с. 1513—1520.
151. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. — М.: Мир, 1972.—418 с.
152. Розанов В. Б. Возможные характеристики источника тормозного излучения для накачки ОКГ. — ДАН СССР, 1968, 182, № 2, с. 320—323.
153. Романов Г. С., Станкевич Ю. А. Расчет нестационарных осесимметричных плазменных факелов в режиме световой детонации. — ДАН БССР, 1977, 21, № 6, с. 503—506.
154. Романов Г. С., Степанов К. Л., Сыркин М. И. Спектральные и средние коэффициенты поглощения углеродной плазмы. — Оптика и спектроскопия, 1979, 47, № 5, с. 860—868.
155. Романов Г. С., Сузденцов М. В. Динамика кратерообразования при действии сильнооточных пучков заряженных частиц на металлическую преграду. — ДАН БССР, 1982, XXVI, № 6, с. 496—499.
156. Романов Г. С., Урбан В. В. Расчет параметров импульсного источника света на основе взрывного плазменного генератора. — В кн.: Сборник Трудов IV Всесоюзной конференции. Динамика излучающего газа. М.: Изд. МГУ, 1981, с. 12—20.
157. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. — М.: Мир, 1980.—604 с.
158. Румынский А. Н., Чуркин В. П. Обтекание затупленных тел гиперзвуковым потоком вязкого излучающего газа. — ЖВМ и МФ, 1974, 14, № 6, с. 1553—1570.
159. Рыкалин Н. Н., Углов А. А., Низаметдинов М. М. О пробое газа излучением лазера при малых плотностях потока и высоких давлениях. — ДАН СССР, 1974, 218, № 2, с. 330—331.
160. Рыкалин Н. Н., Углов А. А., Низаметдинов М. М. Особенности взаимодействия излучения лазера с материалами при высоком давлении окружающей среды. — ЖЭТФ, 1975, 69, вып. 2, с. 722—731.
161. Рыкалин Н. Н., Углов А. А., Низаметдинов М. М. О воздействии лазерного излучения на материалы в широком диапазоне давлений аргона. — Квантовая электроника, 1978, 5, № 1, с. 89—98.
162. Самарский А. А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977.—656 с.
163. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. — М.: Наука, 1971.—552 с.
164. Самарский А. А. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент. — Вестник АН СССР, 1979, № 5, с. 38—48.
165. Самарский А. А. Численные методы решения многомерных задач механики и физики. — ЖВМ и МФ, 1980, 20, № 6, с. 1416—1464.
166. Самарский А. А., Андреев В. Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. — М.: Наука, 1976.—352 с.

167. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. — М.: Наука, 1973. — 415 с.
168. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 590 с.
169. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики. — М.: Наука, 1980. — 352 с.
170. Самарский А. А., Фрязинов И. В. О разностных методах аппроксимации задач математической физики. — Усп. матем. наук, 1976, № 31, с. 167—197.
171. Светцов В. В. Расчет сферически-симметричной задачи о взрыве методом осреднения уравнения переноса. — В кн.: Динамика излучающего газа. М.: Изд. ВЦ АН СССР, 1980, вып. 3, с. 46—57.
172. Седов Л. И. Движение воздуха при сильном взрыве. ДАН СССР, 1946, 52, № 1, с. 17—20.
173. Селезнева М. А., Филиппов С. С. Вычисление диффузионных токов при (р—п)-переходах для протяженных источников, возбуждаемых электронным зондом. — М., 1975. (Препринт/Институт прикл. мат. АН СССР: № 60.)
174. Селезнева М. А., Филиппов С. С. Решение стационарного уравнения диффузии с точечным источником для электронно-зондового метода исследования полупроводников. — М., 1975. (Препринт/Институт прикл. мат. АН СССР: № 38.)
175. Смелов В. В. Лекции по теории переноса нейтронов. — М.: Атомиздат, 1978. — 216 с.
176. Смелов В. В. Об обосновании итерационного процесса по подобластям для задач теории переноса в нечетном  $P_{2N+1}$ -приближении. — ЖВМ и МФ, 1982, 22, № 1, с. 151—162.
177. Султангазин У. М. Методы сферических гармоник и дискретных ординат в задачах кинетической теории переноса. — Алма-Ата: Наука КазССР, 1979. — 268 с.
178. Сэмпсон Д. Уравнения переноса энергии и количества движения в газах с учетом излучения. — М.: Мир, 1969. — 206 с.
179. Тирский Г. А., Пилюгин Н. Н. Основы динамики излучающего газа. — М.: Изд. МГУ, 1979. — 148 с.
180. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Заклязьминский Л. А., Волосевич П. П., Соколов В. С., Фаворский А. П. Нелинейный эффект образования самоподдерживающегося высокотемпературного слоя газа в нестационарных процессах магнитной гидродинамики. — ДАН СССР, 1967, 173, № 4, с. 808—811.
181. Тишкин В. Ф., Фаворский А. П. Разностные методы решения двумерных задач газовой динамики. — М.: Центр. НИИ информации и технико-экономических исследований по атомной науке и технике, 1982. — 54 с.
182. Тишкин В. Ф., Фаворский А. П., Шашков М. Ю. Алгоритм численного решения второй краевой задачи для уравнения теплопроводности на прямоугольной сетке. — М., 1978. (Препринт/Институт прикл. мат. АН СССР: № 113.)
183. Трощиев В. Е., Юдинцев В. Ф., Федянин В. И. Об ускорении сходимости итераций при решении кинетического уравнения. — ЖВМ и МФ, 1968, 8, № 2, с. 452—458.
184. Трощиев В. Е., Юдинцев В. Ф. Итерационный метод постоянных поправок для решения спектральных задач переноса излучения. — Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1978, вып. 2(2), с. 13—16.

185. Углов А. А., Гнедовец А. Г., Галиев А. Л. Изменение микротвердости стали в атмосфере инертных газов при лазерном облучении. — Физика и химия обработки материалов, 1978, № 4, с. 18—23.
186. Филиппов С. С., Четверушкин Б. Н., Шильников Е. В. Численное моделирование испарения металла электронным пучком. — М., 1982. (Препринт/Институт прикл. мат. АН СССР: № 187.)
187. Филиппов С. С., Четверушкин Б. Н., Шильников Е. В. Математическое моделирование испарения металла под действием электронного пучка. — ДАН СССР, 1983, 272, № 4, с. 835—838.
188. Филиппов С. С., Четверушкин Б. Н., Шильников Е. В. Расчет и сравнение параметров плазмы, образованной при испарении металла электронным и лазерным лучом. — В кн.: Тезисы докладов VI Всесоюзной конференции по физике низкотемпературной плазмы. Ленинград: Изд. ЛГУ и ЛФТИ АН СССР, 1983, 2, с. 190—192.
189. Филиппычев Д. С., Четверушкин Б. Н. Об одном способе осреднения уравнений диффузионного типа по энергиям фотонов. — ЖВМ и МФ, 1976, 16, № 6, с. 1601—1605.
190. Фольрат К. Искровые источники света и высокочастотная кинематография. — В кн.: Физика быстротекущих процессов. М.: Мир, 1971, с. 96—199.
191. Фрязинов И. В. Метод баланса и вариационно-разностные схемы. Схемы переменных направлений на нерегулярных сетках. — М., 1979. (Препринт/Институт прикл. мат. АН СССР: № 53.)
192. Харлоу Ф. Х. Численный метод частиц в ячейках для задач гидродинамики. — В кн.: Вычислительные методы в гидродинамике/Под ред. Б. Олдера, С. Фербаха, М. Роттенберга, М.: Мир, 1967, с. 316—342.
193. Хёрт С. Произвольный лагранжево-эйлеров численный метод. — В кн.: Численные методы в механике жидкостей. — М.: Мир, 1973, с. 156—164.
194. Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии. — М.: ИЛ, 1953. — 431 с.
195. Чарахчян А. А. Об одном подходе к расчету уравнения переноса для задач динамики излучающего газа. — В кн.: Динамика излучающего газа. М.: Изд. ВЦ АН СССР, 1976, вып. 2, с. 16—35.
196. Чарахчян А. А. Об одной численной схеме для уравнения переноса на оптически грубой сетке. — ЖВМ и МФ, 1975, 15, № 4, с. 999—1005.
197. Чарахчян А. А., Шмыглевский Ю. Д. Численные методы в динамике излучающего газа. — ЖВМ и МФ, 1980, 20, № 5, с. 1249—1265.
198. Четверушкин Б. Н. Об устойчивости явной схемы совместного решения уравнения энергии и уравнения переноса излучения. — В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1970, 1, № 1, с. 85—89.
199. Четверушкин Б. Н. Численное решение спектральной задачи о прогреве падающим извне излучением вещества. — Журнал прикл. мех. и техн. физ., 1971, № 2, с. 48—53.
200. Четверушкин Б. Н. Построение тестов и некоторые вопросы численного решения уравнения переноса нейтронов. —

В кн.: Вычислительные методы в теории переноса. М.: Атомиздат, 1969, с. 189—201.

201. Четверушкин Б. Н. Решение одномерных задач радиационной газовой динамики. — М., 1978. (Препринт/Институт прикл. мат. АН СССР: № 44.)
202. Четверушкин Б. Н. Методы численного решения и исследование некоторых задач радиационной газовой динамики. Автореферат дис. ... канд. физ.-мат. наук. — М.: Институт прикл. мат. АН СССР, 1971.
203. Четверушкин Б. Н. Об одном методе совместного решения уравнения энергии и уравнения переноса излучения. — ЖВМ и МФ, 1970, 10, № 5, с. 1290—1292.
204. Четверушкин Б. Н. Решение двумерных задач динамики излучающего газа. — В кн.: Современные проблемы вычислительной математики и математической физики. М.: Наука, 1982, с. 321—332.
205. Четверушкин Б. Н. Об одном итерационном алгоритме решения разностных уравнений. — ЖВМ и МФ, 1976, 16, № 2, с. 519—524.
206. Чурбанова Н. Г. Некоторые модификации « $\alpha$ - $\beta$ »-алгоритма решения эллиптических уравнений. — М., 1982. (Препринт/Институт прикл. мат. АН СССР: № 46.)
207. Шильников Е. В. Расчет воздействия лазерного излучения на газообразный углерод. — В кн.: Динамика излучающего газа. М.: Изд. ВЦ АН СССР, 1980, вып. 3, с. 25—32.
208. Шильников Е. В. Исследование движения газа под действием сфокусированного лазерного излучения. — В кн.: Динамика излучающего газа. М.: Изд. ВЦ АН СССР, 1981, вып. 4, с. 74—91.
209. Шмыглевский Ю. Д. Вариант моментного метода расчета переноса селективного излучения. — ЖВМ и МФ, 1977, 17, № 3, с. 785—790.
210. Шмыглевский Ю. Д. Расчет переноса лучистой энергии методом Галеркина. — ЖВМ и МФ, 1973, 13, № 2, с. 398—407.
211. Шмыглевский Ю. Д. Моментный метод расчета переноса селективного излучения. — В кн.: Динамика излучающего газа. М.: Изд. ВЦ АН СССР, 1976, вып. 2, с. 42—60.
212. Carlson B. G. The numerical theory of neutron transport. — Methods of computational physics. N. Y., 1963, 1, p. 1—42.
213. Fleck J. A., Cummings Jr. and J. D. An implicit Monte-Carlo scheme for calculating time and frequency dependent nonlinear radiation transport. — J. of Comput. Phys., 1971, 8, p. 313—342.
214. Gear G. W. DIFSUB for solution of ordinary differential equations. — Comm. Assoc. Comput. Math., 1971, 14, p. 185—190.
215. Gill D. H., Dougal A. A. Breakdown minimum due to electron-impact ionization in superhighpressure gases irradiated by a focused giant pulse laser. — Phys. Rev. Letters, 1965, 15, p. 845.
216. Humphries Jr. Intense pulsed ion beams for fusion applications. — Nuclear fusion, 1980, 2, № 2, p. 1549—1612.
217. Капая К., Okayama S. Penetration and energy loss theory of electrons in solid targets. — J. Phys. (Appl. Phys.), 1972, 5, № 1, p. 43.
218. Kershaw D. The incomplete Cholesky conjugate gradient method for iterative solution of systems of linear equations. — J. Comp. Phys., 1978, 26, № 1, p. 43—65.
219. Lathrop K. D. Ray effects in discrete ordinates equations. — Nucl. Sci. Eng., 1968, 32, p. 357—369.

220. Lathrop K. D. Spatial differencing of transport equation. — J. Comp. Phys., 1969, 4, № 4, p. 475—498.
221. Marshak R. Note on the spherical harmonic method as applied to the Milne problem for a sphere. — Phys. Rev., 1947, 71, p. 443.
222. Meyer and R. G., Hayght A. F. Gas breakdown at optical frequencies. — Phys. Rev. Letters., 1963, 11, p. 401—405.
223. Nordsieck A. On numerical integration of ordinary differential equations. — Math. Comm., 1962, 16, p. 22—49.
224. Nuckolls I., Wood L., Thissen A., Zimmerman G. Laser compression of matter to super-high densities. Thermonuclear applications. — Nature, 1972, 239, p. 139—142.
225. Sandford M. T., Anderson R. C. Two-dimensional implicit radiation hydrodynamics. — J. Comp. Phys., 1973, 13, № 1, p. 130—157.
226. Sandford M. T., Anderson R. C., Horak H. G. and Kodis T. W. Improved, implicit radiation hydrodynamics. — J. Comp. Phys., 1975, 19, № 3, p. 280—297.
227. Sutton G. W., Sherman S. Engineering magnetohydrodynamics. New York: McGraw-Hill Book Company, 1965, p. 548.
228. Wick G. Über ebene Diffusionsprobleme. — Z. Phys., 1943, 121, S. 702.
229. Zinn J. A Finite difference scheme for time-dependent spherical radiation hydrodynamics problems. — J. Comput. Phys., 1973, 13, № 4, p. 569—590.