В. Г. ДЕМИН

СУДЬБА СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ

В. Г. ДЕМИН

СУДЬБА СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ

ПОПУЛЯРНЫЕ ОЧЕРКИ ПО НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1969

521
Д 30
УДК 521·1

Демин В. Г.

Д-30 Судьба солнечной системы. Популярные очерки по небесной механике. М., «Наука», 1969.

256 стр. 44 к.

«Распадается ли солнечная система?» — таков основной вопрос, рассматриваемый в книге. Наряду с проблемой устойчивости, «прочности» Солнечной системы как единого механического целого, в книге подробно излагаются результаты разнообразных исследований движения отдельных групп тел Солнечной системы (астероидов, комет, спутников) на длительных, космогонических интервалах времени. Большой раздел книги посвящен строению Солнечной системы и физическим характеристикам входящих в нее небесных тел. Автор приводит многочисленные примеры из истории развития небесной механики.

$\frac{2\text{-}6\text{-}4}{175\text{-}69}$ 528

Владимир Григорьевич Демин

Судьба солнечной системы

М., 1969., 256 стр. с илл.

Редактор *Б. Е. Гельфгат*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно*
Корректоры *Е. А. Белицкая*
Э. Ш. Сукачева

Сдано в набор 28/III 1969 г. Подписано к печати 21/VII 1969 г. Бумага $84\times108^1/_{32}$.
Физ. печ. л. 8. Условн. печ. л. 13,44.
Уч.-изд. л. 13,07. Тираж 25 000 экз.
Т-08997. Цена книги 44 к.
Заказ № 2002

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

2-я типография издательства «Наука».
Москва, Шубинский пер., 10

$\frac{2\text{-}6\text{-}4}{175\text{-}69}$

Оглавление

«Все, что конечно, что имеет начало и происхождение, несет в себе знак своей ограниченной природы, должно погибнуть и иметь конец... Природа показывает, что она одинаково богата, одинаково неисчерпаема в произведении как самых выдающихся, так и самых ничтожных творений и что самая гибель их есть необходимая тень в разнообразии ее солнц, потому что произведение их ей ничего не стоит».

Иммануил Кант

Предисловие

Немногим менее двух столетий отделяет нас от поры, когда выдающиеся французские ученые Жозеф Луи Лагранж и Пьер Симон Лаплас, чьи имена вызывают почтительное и восхищенное уважение ученых всех времен, продолжая великое дело Исаака Ньютона и славной плеяды его последователей, создали величественное здание небесной механики. Около полувека, поддерживая непрерывную связь друг с другом, в духе постоянного творческого соперничества самозабвенно трудились Лагранж и Лаплас над общей проблемой построения теории движения больших планет. Им обоим по праву принадлежит постановка знаменитой задачи механики — задачи об устойчивости Солнечной системы, породившей ряд более частных задач об эволюции орбит и фигур небесных тел.

Лагранж и Лаплас пробили первую брешь в неприступной математической крепости, какой оказалась задача об устойчивости Солнечной системы, получив первое приближенное ее решение. Многие десятилетия виднейшие математики и механики штурмовали проблему Лагранжа — Лапласа. Медленно, шаг за шагом ученые шли вперед, вынужденные преодолевать постоянно встававшие на их пути сложнейшие математические преграды, одну за другой вырывая у природы тайны движения небесных тел. Одна за другой решались частные задачи об эволюции движений отдельных тел Солнечной системы. Но строгое решение знаменитой проблемы оставалось по-прежнему столь же далеким, как и во времена Лагранжа и Лапласа.

История развития теории устойчивости движения небесных тел изобилует разнообразными поучительными примерами, полна упорных заблуждений, драматизма, неожиданных побед и горьких разочарований, случайных совпадений и одновременных независимых открытий. Она дает нам немало свидетельств и доказательств того, как далекие от запросов практики сегодняшнего дня теоретические исследования становились некоторое время спустя ключом к успешному решению практических проблем, предостерегает нас от чрезмерного увлечения одними «сиюминутными» задачами науки. История развития теории устойчивости движения небесных тел, несомненно, доставит эстетическое наслаждение всем истинным ценителям науки.

Выдающиеся научные открытия конца прошлого и начала нашего века, принадлежащие французскому ученому Анри Пуанкаре и нашему соотечественнику А. М. Ляпунову, развитые впоследствии их продолжателями, стали тем трамплином, который в последнее десятилетие помог ученым приблизиться к полному решению классической задачи Лагранжа — Лапласа. Благодаря замечательным трудам проф. В. И. Арнольда решение задачи близко к завершению.

Настоящая книга посвящена истории, результатам и способам исследования эволюции орбит и фигур отдельных тел Солнечной системы и всей системы в целом. Автор старался избегать употребления математических формул, стремясь сделать книгу доступной возможно более широкому кругу читателей. Для понимания книги вполне достаточно знания элементарной математики и физики.

План книги был поддержан проф. Г. Н. Дубошиным. Отдельные разделы были прочитаны в рукописи проф. В. В. Белецким и канд. физ.-матем. наук А. Л. Куницыным. Ряд их советов автор учел при подготовке книги к печати. Ряд полезных уточнений и добавлений внес редактор книги Б. Е. Гельфгат. Всем названным коллегам автор выражает сердечную признательность. Автор считает приятным долгом выразить глубокую благодарность проф. Г. А. Чеботареву, внимательно прочитавшему всю рукопись книги и сделавшему ряд ценных замечаний.

Вл. Демин

«... Если бы мы были столь благоразумны, если бы мы были любопытны без нетерпения, вероятно, нам никогда бы не удалось создать науку...»

Анри Пуанкаре

Введение

Человек в своей извечной и всеобъемлющей жажде познания стремится проникнуть не только в тайны современной звездной Вселенной, но и в ее прошлое, уходящее в необъятную глубь веков, и тем более в ее будущее, даже в те бесконечно далекие его времена, когда человечество, возможно, вынуждено будет покинуть пределы Солнечной системы во имя своего спасения.

Эта книга посвящена будущему, будущему того небольшого ансамбля небесных тел, которые составляют Солнечную систему и в который входит колыбель человечества — Земля. Человечество имело в своем распоряжении еще слишком мало времени для уверенного и надежного выяснения своего отдаленного будущего. Всего три с половиной века отделяют нас от того момента, когда Галилео Галилей впервые направил на звездное небо телескоп, положив тем самым начало современной астрономии и вооружив науку надежным инструментом для исследования космических далей.

И хотя немалого достигли астрономы за протекшие три с половиной века, мы все еще не имеем возможности воссоздать хотя бы в общих чертах цельную картину будущего Солнечной системы, теряющегося в туманной дали веков, отделенных от нашего времени миллиардами и десятками миллиардов лет. Тем не менее уже сейчас можно с уверенностью набросать эскизы отдельных частей картины будущего устройства Солнечной системы. Можно также твердо утверждать, опираясь на тщательные исследования, что ряд путей эволюции для Солнечной системы запрещен. О развитии и судьбе отдельных тел Солнечной системы ученые получили уже вполне четкие представления.

Истинное знание сути вещей не возникает вдруг и никогда не является окончательным. Человек шаг за шагом не только в астрономии, но и во всех других науках, медленно приближается к истине, всякий раз оставляя на последующее что-то непознанным. В некоторых областях науки, как отмечал Ф. Энгельс, например, в геологии, истории человечества, космогонии, познание определенных явлений «должно навсегда остаться неполным и незаконченным уже вследствие недостаточности исторического материала».

Ограниченность наших сведений о прошлом Солнечной системы не могла не отразиться и на астрономических исследованиях процессов эволюции Солнечной системы, и на полноте наших представлений о ее будущем. Несомненно, постепенное пополнение наших знаний о Солнечной системе и решение проблемы ее происхождения дадут необходимый материал для составления прогнозов на большие промежутки времени, исчисляемые миллиардами и десятками миллиардов лет, т. е. на космогонические интервалы времени.

Отсутствие в настоящее время цельной картины будущего нашей планетной системы мы не склонны рассматривать как свидетельство слабости или даже бессилия астрономии. Недалеко то время, когда астрономия сможет дать убедительные ответы на большинство вопросов о судьбе планет. Именно поэтому мы не считали себя вправе трактовать выводы, вытекающие из гипотез, пусть даже и весьма вероятных, как бесспорные и окончательные, и и всегда стремились к разумной осторожности в оценке тех или иных результатов, приводя все «за» и все «против».

По-видимому, не только автору, но и читателям приходилось встречаться в научно-популярных публикациях, авторы которых проявляли неосторожную категоричность в суждениях о той или иной новой работе по астрономии, с сообщениями, опровергавшимися буквально через год-другой. Публикации подобного рода оказывают плохую услугу науке, ибо не будят в читателе стремления к поиску истины, но порождают превратное представление о науке и скептическое отношение к ее выводам и достижениям.

Автор будет считать свою цель достигнутой, если книга пробудит в читателе не только стремление усвоить ее содержание, но и критически отнестись к нему. Это будет означать, что читатель подошел к разбору книги с позиций истинно научного принципа «сомневаться во всем».

Долгосрочность космогонического прогноза обусловливает его исключительную сложность и порождает необходимость совместного учета различных физических, механических, химических и прочих взаимодействий небесных тел, образующих Солнечную систему. И чем более длительный интервал времени подлежит анализу, тем большее количество эффектов должно быть принято во внимание. В подтверждение сказанного остановимся на одном примере. Поправки, вносимые эйнштейновской теорией относительности в теорию движения больших планет, ничтожно малы для большинства планет, если интересующий нас интервал времени охватывает исторические сроки протяженностью в тысячи и десятки тысяч лет. В самом деле, например, для Земли предсказываемое теорией относительности вращение земной орбиты в ее плоскости составляет всего лишь $0'',04$ в год! Но совсем иной вклад в эволюцию земной орбиты внесет эйнштейновская поправка за миллиард лет: в течение этого промежутка времени вследствие указанного эффекта земная орбита совершит в своей плоскости свыше 300 оборотов!

На первый взгляд кажется возможным каждый из подобных малых эффектов оценить в отдельности, а затем все эффекты сложить друг с другом. Оказывается, однако, что этого не всегда бывает достаточно, так как различные малые влияния взаимодействуют друг с другом и их совокупный эффект не равен, вообще говоря, простой алгебраической сумме отдельно оцененных эффектов. Поэтому построение цельной теории эволюции Солнечной системы на основе только физических или только механических рассуждений было бы принципиально неверным. И тем не менее отдельные проблемы общей картины развития Солнечной системы можно воспроизвести, не прибегая к столь сложному всестороннему анализу, а исходя, например, почти полностью из чисто механических соображений.

Автор книги, будучи механиком, в первую очередь избирал именно такие проблемы эволюции Солнечной системы, в которых механический анализ должен приводить к уверенным выводам. К этому циклу проблем относятся задачи об эволюции орбит отдельных тел Солнечной системы и знаменитая задача об устойчивости Солнечной системы. Основное внимание посвящено последней задаче и изложению важных результатов, полученных при ее решении советским математиком В. И. Арнольдом.

Если читатель обратится к оригинальным исследованиям математиков и небесных механиков по теории устойчивости Солнечной системы, то он постоянно будет встречаться и со сложной математической символикой, и с незнакомыми и непонятными терминами типа «гамильтоновы системы», «консервативные возмущения», «гомеоморфизм» и т. д. Чтение этих работ — нелегкая задача не только для далекого от небесной механики читателя, но даже и для специалистов. Можно ли осуществить «перевод» результатов механико-математических исследований, изложенных на специфическом и лаконичном математическом языке, на всем нам понятный обычный язык?

Автор предпринял такую попытку общедоступного по форме изложения совершенных и математически элегантных результатов решения задачи об устойчивости планетных движений, памятуя о словах выдающегося немецкого математика Давида Гильберта, утверждавшего, что математическую теорию можно изложить первому встречному, если она достаточно совершенна.

Проблемы будущего Солнечной системы относятся к космогонии, изучающей происхождение и развитие отдельных небесных тел и их систем. Эти проблемы уже сейчас составляют самостоятельный раздел космогонии, который с полным правом можно было бы выделить в отдельную астрономическую дисциплину. Рано или поздно такое разделение космогонии, несомненно, произойдет. Не исключено, что мы присутствуем при становлении новой астрономической дисциплины — науки о будущем небесных тел и их систем, которую можно было бы назвать космопрогностикой или космической прогностикой. Основным задачам этой науки автор и посвящает настоящую книгу.

«...неправда, чтобы истины
науки были лишены поэзии...
Напротив, наука раскрывает
перед нами целый мир поэзии».

Герберт Спенсер

Глава I

Строение Солнечной системы. Законы планетных движений

§ 1. Солнечная система в цифрах

Иной раз говорят, что Солнечная система, членом которой является и наша Земля, состоит из небольшого числа больших тел и большого числа небольших тел. Наиболее массивное тело, физический центр системы — Солнце. Оно является обычной звездой, ничем не примечательной по сравнению с другими.

Солнечная свита многочисленна и разнообразна. Наиболее массивными ее представителями являются большие планеты, обращающиеся вокруг Солнца по сложным пространственным спиральным кривым, каждый из витков которых мало отличается от окружности. Строго говоря, большие планеты обращаются не вокруг Солнца, а вместе с ним вокруг общего центра масс, расположенного внутри Солнца на расстоянии 23,5 тыс. *км* от его центра.

К числу больших планет относят девять небесных тел: Меркурий, Венеру, Землю, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун и Плутон. Последняя из планет, перечисленных в порядке их удаления от Солнца, Плутон, была открыта только в 1930 г. Кстати, Плутон не всегда будет последним: в 1969 г. он должен временно проникнуть внутрь орбиты Нептуна! Большие планеты представляют собой холодные твердые тела почти сферической формы, вращающиеся вокруг своих осей. Большинство из них окружено газовыми оболочками — атмосферами, химический состав которых весьма различен. По своим физическим характеристикам планеты делятся на две группы: планеты типа Земли и планеты-гиганты, подобные Юпитеру (сравнительные размеры планет даны на рис. 1). К земной группе, кроме Земли, относятся Меркурий, Венера, Марс и, по-видимому, Плутон, оставшийся еще и до сих пор исследованным совершенно не достаточно.

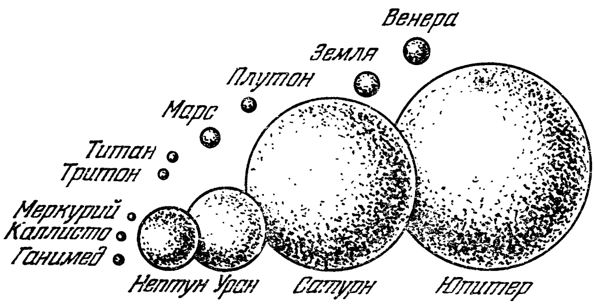

Рис. 1. Сравнительные размеры наиболее крупных тел Солнечной системы.

Меркурий, ближайшая к Со́лнцу планета, обращается вокруг него с периодом 88 суток на среднем расстоянии 89 млн. *км*. Имея радиус 2425 *км*, Меркурий по своим размерам занимает в планетной системе тринадцатое место, будучи наименьшим из всех девяти больших планет и уступая по размерам спутникам Юпитера Каллисто и Ганимеду, спутнику Сатурна Титану и спутнику Нептуна Тритону.

До последнего времени считалось, что сутки на Меркурии равны его году, т. е. период обращения Меркурия вокруг Солнца равен периоду его вращения вокруг оси. При совпадении этих периодов Меркурий постоянно был бы обращен к Солнцу одной и той же стороной. Однако совсем недавно новые наблюдательные данные, а также повторная обработка прежних наблюдений заставили усомниться в справедливости привычного представления о вращении Меркурия.

Дж. О'Киф, Ж. Коломбо и И. Шапиро пришли к выводу, что Меркурий вращается вокруг своей оси с периодом в 1,5 раза меньшим периода его обращения по орбите. Этот вывод подтверждается и данными радиолокационных наблюдений Меркурия, выполненных Р. Дайсом, Т. Голдом, С. Пила и др. Они определили период вращения Меркурия в 59 ± 5 суток.

Астрономические наблюдения свидетельствуют о практически полном отсутствии атмосферы у Меркурия. Не исключено, что Меркурий не смог своим слабым тяготением удержать атмосферу, и она постепенно рассеялась.

Температурный режим планеты исключительно суров. В центре освещенного Солнцем полушария температура достигает +430° С, а на ночной стороне может опускаться до —50° С. Возможно, что на дневном полушарии встречаются лужи, или даже озера свинца, олова, кадмия, цинка, таллия и висмута или их сплавов.

Данные о массе, плотности, силе тяжести на поверхности Меркурия весьма ненадежны, и мы их не приводим.

Планетой загадок или планетой «под вуалью» принято называть *Венеру*,— наиболее яркий после Луны объект ночного неба. О ней, вечно скрытой под пеленой мощных облаков, и до сих пор известно еще не достаточно, несмотря на то, что ученые в последнее десятилетие буквально штурмовали ее, пытаясь проникнуть в ее тайны и оптическими, и радиоастрономическими средствами, и при помощи космических зондов.

По своим размерам Венера очень близка к Земле: ее диаметр (включая облачный слой) составляет 12,3—12,7 тыс. *км*. Масса планеты, вычисленная по данным, полученным при полете к Венере американской межпланетной станции «Маринер-2», составляет 0,81485 земной массы. Период обращения Венеры вокруг Солнца равен 225 суткам. Наклон оси вращения планеты к плоскости ее орбиты до сих пор уверенно еще не определен. Косвенные методы дают значение порядка 30°, однако по советским и американским радиолокационным наблюдениям получается величина около 90°. Точно так же уверенно еще не установлен период вращения Венеры вокруг ее оси. Радиолокационные наблюдения позволяют сделать вывод, что Венера, в отличие от других планет, вращается в сторону, противоположную направлению ее движения вокруг Солнца, с периодом, близким к 250 суткам.

Протяженность атмосферы Венеры не превосходит 200 *км*, а облачный слой, как свидетельствуют радиолокационные измерения, составляет около 30 *км* в толщину и простирается до высот порядка 100 *км*. Плотность атмосферы Венеры намного превосходит плотность земной атмосферы. Советская автоматическая межпланетная станция (АМС) «Венера-4», опустившаяся 18 октября 1967 г. на поверхность планеты, зарегистрировала перепад давления от 1 до 20 атмосфер.

Исследование температурного режима на поверхности Венеры было сопряжено с исключительными трудностями. Разные астрономические методы приводили к внешне противоречивым результатам, так как давали температуру различных слоев атмосферы. Измерение температуры с помощью термопары в подсолнечной точке давало температуру порядка +100° С, а советские и американские радиоастрономические исследования +300 — +400° С. Эту температуру следует отнести к верхнему слою грунта. Окончательный ответ был получен советской АМС «Венера-4», которая проводила измерения на двадцатипятикилометровом участке полета (по высоте) и установила изменение температуры в диапазоне от +25 до +270° С. При выполнении этого космического эксперимента, кроме того, были получены надежные данные о химическом составе атмосферы Венеры. Там были обнаружены углекислый газ и в небольших количествах водяные пары и кислород.

Небезынтересно также отметить еще один вывод, к которому пришли ученые в результате полета «Маринера-2». Как оказалось, магнитное поле у Венеры по меньшей мере в 30 раз слабее земного магнитного поля. А это означает почти полное отсутствие у Венеры радиационных поясов.

Наша планета *Земля* имеет почти сферическую форму с радиусом 6378 *км*. Данные о Земле хорошо известны, и мы на них останавливаться не будем. По-видимому, основная специфическая особенность для Земли, могущая иметь большие последствия в процессе эволюции, связана с существованием массивного спутника — Луны. Луна — уникальный спутник в Солнечной системе. Хотя по своим размерам она среди спутников занимает только шестое место, тем не менее ее сравнительные размеры с Землей т. е. с центральной для нее планетой, весьма необычны. Луна всего лишь в четыре раза меньше Земли по своим размерам, в то время как все другие спутники исчезающе малы по сравнению со «своими» планетами. Масса Луны в 81,3 раза менее земной массы. Сказанное, а также и особенности в ее движении вокруг Земли и Солнца, о которых мы позднее будем говорить подробнее, дают основания рассматривать Луну скорее не как спутник Земли, а как ее компаньона, который вместе с Землей образует двойную планету.

Одна из интересных особенностей движения Луны состоит в том, что период ее обращения вокруг Земли в точности равен периоду ее вращения вокруг оси и составляет 27,6 суток. В результате совпадения этих двух периодов Луна всегда обращена к Земле одной и той же стороной.

Физическая природа поверхности Луны, вызывавшая еще недавно много горячих научных дискуссий, ныне начинает постепенно проясняться. Исключительное значение в этом отношении имели автоматические межпланетные станции, обследовавшие Луну. Это советские станции серии «Луна» и «Зонд» и американские — серии «Рейнджер» и «Сервейор». Данные, полученные благодаря «лунникам», позволили окончательно отвергнуть гипотезу о наличии пылевого слоя на Луне и многие другие гипотезы. Как показало прилунение советской космической станции «Луна-9», поверхность Луны твердая и пористая подобно «спекшемуся шлаку».

Лунная поверхность покрыта многочисленными кратерами, трещинами, скалами и прочими неровностями различных размеров. На фотографиях, сделанных американскими лунниками серии «Рейнджер» с расстояния в несколько сотен метров, четко видны эти образования размерами порядка метров и менее. Сейчас завершаются работы по картографированию Луны, начатые по фотографиям обратной ее стороны, переданным советской автоматической станцией «Луна-3», и продолженные по снимкам, переданным последующими советскими и американскими станциями. Картографирование Луны крайне трудоемкое дело, так как одних лишь кратеров размером от 1 до 100 *км* на ней насчитывается свыше 100 тысяч. Луна лишена практически атмосферы. Имея малую массу, она не смогла бы долго удержать ее. Одним из следствий отсутствия атмосферы является суровый температурный режим Луны: в центре освещенной поверхности температура достигает +120° С, а на ночной стороне она падает до —150° С. У Луны не обнаружено магнитное поле.

Следующий в ряду планет космический сосед Земли — загадочный *Марс*, с которым были связаны основные надежды человечества обнаружить ближайшую внеземную цивилизацию или по меньшей мере жизнь. Свой путь вокруг Солнца Марс совершает за 1 год 322 суток, при этом его расстояние до Солнца изменяется в пределах от 206 до 249 млн. *км*. В широких пределах, от 55 до 400 млн. *км*, изменяется расстояние между Марсом и Землей. Один раз в течение 15—17 лет Марс сближается с Землей на минимальное расстояние. Эти сближения называются великими противостояниями Марса.

Радиус Марса в два раза меньше земного, а его масса — в 9 раз меньше земной. Марс делает один оборот вокруг своей оси за 24 часа 37 мин. Ось его вращения наклонена к плоскости орбиты Марса, как и у Земли, под углом 67°. Вследствие этого смена времен года на различных широтах Марса протекает так же, как и на Земле.

Физические условия на Марсе были изучены астрономами достаточно хорошо. Помогло этому и то обстоятельство, что атмосфера Марса разреженная и прозрачная. Температура в различных областях Марса изменяется в пределах от —100° С до +15 — +20° С (а по некоторым данным, на экваторе и до +50° С), т. е. природные условия в некоторых районах Марса не более суровые, чем в Гималаях, где произрастает около 200 видов растений. Необходимо, правда, заметить, что резкий перепад температур в течение суток (от отрицательных до положительных) происходит в тропических областях даже в летние месяцы.

В атмосфере Марса обнаружен в больших количествах углекислый газ, наличие которого, как известно, необходимо для растений земного типа. Иногда наблюдаются временные помутнения отдельных областей Марса, «ды́мки», представляющие собой либо легкие облака, либо, возможно, результат пылевых бурь.

На Марсе весьма четко наблюдаются сезонные явления. Летом в соответствующем полушарии обширные области постепенно изменяют свою окраску с коричневой на серо-зеленую, быстро тают белые полярные шапки и т. д.

Загадка марсианских каналов, волновавшая ученых в течение почти ста лет, теперь близка к полному разрешению. Из множества гипотез о природе каналов: являются ли они полосами растительности или колоссальными сооружениями марсиан, или, наконец, представляют собой только оптическую иллюзию, осталась самая прозаическая. Полученные летом 1965 г. с борта американской космической станции «Маринер-4» фотографии развеяли романтические гипотезы о каналах Марса. На снимках, сделанных с расстояния 9000 *км* от Марса, видны ландшафты, подобные лунным. Выявлены кольцевые кратеры лунного типа. Каналы на снимках не обнаруживаются.

Вокруг Марса движутся две Луны — его спутники Фобос и Деймос, самые маленькие из известных спутников больших планет. Эти спутники также вызывают у астрономов жгучий интерес и породили ряд самых фантастических гипотез, о чем подробнее будет идти речь в главе 4.

Юпитер, самая большая планета Солнечной системы — типичный представитель планет-гигантов. Его радиус равен 71 434 *км*, а масса в 318 раз превосходит массу Земли и составляет около 1/1000 массы Солнца. Юпитер обладает большой сплюснутостью (сжатием), под которой понимают величину $\alpha=(r_э-r_п)/r_э$, где $r_э$ — наибольший (экваториальный), а $r_п$ — наименьший (полярный) радиус. Для Юпитера $\alpha=1/16$, в то время как для Земли $\alpha=1/298,3$. Плотность Юпитера невелика: немногим более плотности воды. Правда, здесь имеется в виду его средняя плотность, которая, возможно, несколько занижена за счет завышения радиуса твердой планеты. Юпитер, как и прочие планеты-гиганты, быстро вращается вокруг своей оси, почти перпендикулярной к плоскости его орбиты. Продолжительность суток на Юпитере примерно равна 10 часам. Юпитер окружен протяженной атмосферой, в состав которой входят метан, аммиак, водород. Протяженность атмосферы точно неизвестна, но, как можно думать, заключена в пределах от 1000 до 20 000 *км*. Наиболее вероятное значение толщины атмосферы — 13 тыс. *км*. Данные о вращении планеты относятся к облачному слою, и поэтому продолжительность вращения на разных широтах различна: от

9 час. 50 мин. до 9 час. 55 мин. С какой угловой скоростью вращается твердое тело планеты, неизвестно, так как астрономам не удалось пробиться через плотные многоярусные облака и увидеть хотя бы небольшой участок поверхности.

Температура верхних слоев атмосферы Юпитера равна —120—130° С. Температура твердой поверхности, если таковая существует, по мнению одних астрономов, равна +20°, а по мнению других,— не выше температуры верхних слоев. Согласно одной из гипотез твердое ядро Юпитера окружено толстым слоем замерзших газов, постепенно переходящих в жидкое состояние и образующих море, которое в свою очередь также постепенно переходит в атмосферу. По последним данным, основанным на опыте с лабораторным моделированием атмосферы Юпитера, гипотеза «замерзшего Юпитера» неприемлема.

Некоторые астрономы склонны считать Юпитер не планетой, а миниатюрной самостоятельной звездой, имея в виду собственное излучение планеты в радиодиапазоне. Как показали расчеты, за счет собственного излучения в радиодиапазоне Юпитер теряет втрое больше энергии, чем получает ее от Солнца. По-видимому, оптическими и радиоастрономическими средствами астрономам не удастся выяснить природу Юпитера; остается лишь ждать полетов на Юпитер космических зондов.

Упомянем еще об одной неразгаданной любопытной особенности Юпитера. На диске планеты хорошо видны шесть параллельных экватору полос желтого, оранжевого и коричневого цвета и протяженное овалоподобное красное пятно размером 50000×20000 *км*, медленно перемещающееся по диску планеты в ее экваториальной зоне.

Юпитер обращается вокруг Солнца на расстоянии 800 млн. *км*, совершая один оборот за 11,9 года. В движении вокруг Солнца Юпитер сопровождают 12 спутников, четыре из которых были открыты еще Галилеем.

Следующая за Юпитером планета-гигант — *Сатурн*, по размерам уступающая только Юпитеру. Видимый экваториальный радиус Сатурна равен 60 тыс. *км*, а масса его в 95 раз больше земной. Как и у Юпитера, средняя плотность Сатурна невелика: 0,7 плотности воды. Это возможно лишь при условии, что значительная часть видимого диска представляет собой не твердое тело планеты, а нижние слои ее атмосферы. Толщина атмосферы Сатурна оценивается в 25—31 тыс. *км*. Поэтому истинный радиус Сатурна примерно составляет 32 тыс. *км*.

Сатурн — наиболее сплюснутая из всех планет Солнечной системы ($\alpha = 1/10$): его видимые полярный и экваториальный диаметры разнятся друг от друга на 10%. Он быстро вращается вокруг собственной оси с периодом около 10 час. Как и у Юпитера, астрономы наблюдают на Сатурне зональное вращение облачного слоя с периодом от 10 час 14 мин. до 10 час. 38 мин. Ось вращения планеты наклонена к плоскости орбиты под углом в 27°, что свидетельствует о происходящей на Сатурне смене времен года.

Химический состав атмосферы Сатурна подобен составу юпитеровой атмосферы: в ней много аммиака, метана, причем последнего в процентном отношении даже несколько больше, чем на Юпитере. По-видимому, это объясняется тепловым режимом атмосферы. Температура облачного слоя близка к —160° С.

Вокруг Сатурна обращаются 10 спутников. Один из них, Титан, сравним по размерам с большими планетами земной группы, он обладает даже собственной метановой атмосферой.

Сатурн окружен изумительной по красоте системой тонких колец, весьма интересных как объект научного изучения. О кольцах Сатурна мы еще будем подробно говорить в одной из следующих глав. Вместе со свитой спутников и колец Сатурн обращается вокруг Солнца на среднем расстоянии почти в 1,5 млрд. *км*, которое в 9,54 раза больше среднего расстояния Земли от Солнца. Период обращения Сатурна вокруг Солнца составляет 29,5 года.

Уран, открытый в 1781 г. английским астрономом (немцем по происхождению) Фридрихом Вильямом Гершелем (1738—1822), также типичная планета юпитеровой группы. Масса его примерно в 15 раз больше массы Земли, а радиус равен 4,2 земного радиуса. Атмосфера Урана сходна с атмосферами Сатурна и Юпитера, однако в ней преобладает метан. Астрономы полагают, что и аммиак и метан частично находятся в твердом состоянии, поскольку наблюдаемая температура Урана близка к —180° С. По теоретическим оценкам протяженность атмосферы Урана меньшая, чем у двух предыдущих планет, и составляет 3—5 тыс. *км*.

В поступательном и вращательном движениях Урана наблюдаются любопытные особенности. Двигаясь на расстоянии почти 3 млрд. *км* от Солнца, Уран успевает сделать один оборот только за 84 года. Он движется вокруг Солнца, лежа «на боку». Дело в том, что ось его вращения образует с нормалью к плоскости орбиты угол 98°, т. е.

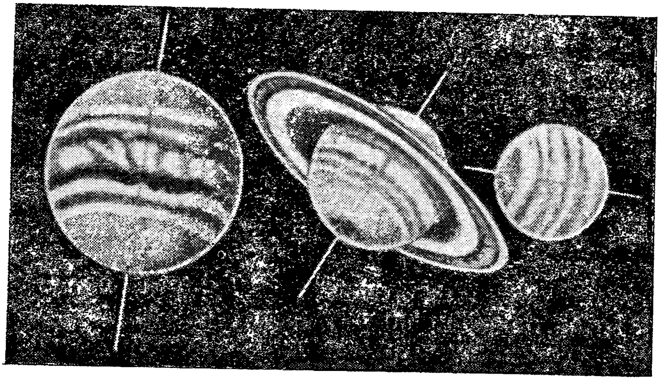

Рис. 2. Наклоны осей вращения больших планет.

лежит почти в плоскости его орбиты, и к тому же направлена в сторону, противоположную обычному направлению осей вращения всех других планет Солнечной системы (рис. 2). Период вращения Урана вокруг оси также невелик: 10 час. 49 мин. Однако этот период сам по себе еще не определяет длительности дня и ночи, так как в этом существенную роль играют и особенности движения Урана вокруг Солнца.

Пусть в некоторый момент ось Урана направлена на Солнце. Тогда его северный полюс и полярная область в течение нескольких лет постоянно освещены, а в южном полушарии в это время тянется долгая ночь. Через 21 год Уран, не изменяя ориентации своей оси вращения, переместится по орбите на четверть оборота, подставив под солнечные лучи экватор. В этом положении продолжительность дня и ночи зависит только от длительности суток на Уране: и в северном и в южном полушариях день и ночь равны и продолжаются 5,5 часа. Еще через четверть оборота Урана по орбите повторяется первоначальная картина, с той лишь только разницей, что южный и северный полюсы меняются местами. Необычно не только вращение самого Урана, но и обращение вокруг него всех его пяти известных спутников, которые движутся по сравнению со спутниками других больших планет в обратном направлении.

Причина отмеченных «странностей» движений в системе Урана пока не выяснена. Более того, эти особенности не укладываются ни в одну из предлагавшихся гипотез происхождения Солнечной системы.

Последний представитель группы планет-гигантов — *Нептун*. Его физические характеристики таковы: диаметр почти в четыре раза больше земного, а масса превосходит земную в 17 раз. Среднее расстояние от Солнца равно 4,5 млрд. *км*, а период обращения немногим менее 165 лет. Сутки на Нептуне длятся 15 час. 36 мин. Атмосфера Нептуна — аммиачно-метановая, температура облачного слоя около —180° С. На зеленоватом диске планеты почти невозможно рассмотреть какие-либо детали.

Известны два спутника Нептуна, однако не исключено существование других спутников, пока еще не доступных современным телескопам.

Последнюю из больших планет — *Плутон* — часто относят к планетам земной группы. Среднее расстояние Плутона от Солнца составляет около 6 млрд. *км*, что в сорок раз превышает расстояние от Земли до Солнца, а период его обращения равен 248 годам! Плутон крайне медленно движется по своей орбите. Его скорость 4,5 *км/сек*, в то время как для Земли она равна 30 *км/сек*. В среднем Плутон на 1400 млн. *км* дальше от Солнца, чем Нептун, однако с 1969 по 2009 г. Плутон будет двигаться внутри орбиты Нептуна, углубившись в нее на расстояние в 25 млн. *км*. В 1989 г. он пройдет через перигелий, отстоящий от Солнца на расстояние 4,4 млрд. *км*. Сутки на Плутоне продолжаются 6 земных суток и 9 часов.

Плутон имеет малые размеры и массу. Его радиус равен 2900 *км*, а масса практически равна массе Марса. Блеск Плутона оценивается 18-й звездной величиной. Он доступен для наблюдений только в очень сильные телескопы. Физические характеристики Плутона оцениваются крайне неуверенно, и мы их не приводим.

Познакомимся теперь со спутниками больших планет. В общей сложности сейчас известно 32 спутника больших планет. Только Меркурий, Венера и Плутон считаются не имеющими спутников. Напомним, что Земля имеет одного спутника — Луну, которую можно считать и одной из планет, Марс обладает двумя спутниками — Фобосом и Деймосом. Сведения об орбитах этих спутников приведены в табл. 1.

Таблица 1

Спутники	Среднее расстояние от центра Марса, тыс. *км*	Период обращения, сутки	Наклон орбиты к плоскости орбиты Марса
Фобос	9,35	0,319	26°19′
Деймос	23,5	1,263	26 02

У Юпитера открыто 12 спутников (рис. 3). Первые четыре из них открыты Галилео Галилеем в 1610 г. и одновременно с ним пражским ученым Симоном Мариусом. Человек с острым зрением мог бы наблюдать их невооруженным глазом, если бы не соседство яркого Юпитера. Они получили имена Ио, Европа, Ганимед и Каллисто в честь трех подруг Юпитера и его виночерпия. Эти спутники часто обозначаются римскими цифрами в порядке возрастания их расстояний от планеты. Галилеевы спутники обращаются вокруг Юпитера примерно в его экваториальной плоскости по почти круговым орбитам и находятся на расстоянии от 420 тыс. *км* до 1890 тыс. *км*. Периоды их обращения вокруг Юпитера — от $1^3/_4$ до $16^3/_4$ суток. В 1892 г. Барнард в США открыл ближайший к Юпитеру пятый спутник (Амальтею). Спутник этот очень слаб и имеет 19-ю звездную величину. Он удален от Юпитера на расстояние 181,5 тыс. *км* и делает полный оборот вокруг него за 12 час. В 1904—1905 гг. на Ликской обсерватории (США) были открыты фотографическим путем еще два спутника. Они находятся гораздо дальше, чем первые пять, движутся по заметно вытянутым орбитам, плоскости которых наклонены к плоскости экватора Юпитера на 30°.

В 1908 г. в Гринвичской обсерватории в Англии был открыт VIII спутник. Он также слаб и движется по вытянутой орбите, имеющей значительный наклон к экватору планеты. История исследования спутника драматична тем, что он дважды «терялся» астрономами.

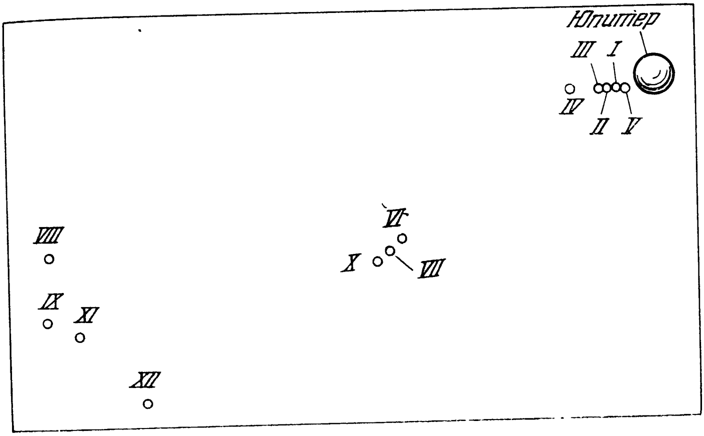

Рис. 3. Юпитер и его спутники.

В 1914 г. снова на Ликской обсерватории был обнаружен новый, IX спутник Юпитера. Он самый далекий спутник, движущийся на расстоянии 23,7 млн. *км* от центра Юпитера с периодом немногим более двух лет. Любопытно, что средние расстояния VIII и IX спутников от Юпитера весьма близки и отличаются друг от друга всего на 200 тыс. *км*.

X и XI спутники были открыты на обсерватории Маунт Вилсон в США в 1938 г. Там же был открыт в 1951 г. и XII спутник. Все эти три спутника открыты Никольсоном. X, XI и XII спутники движутся от Юпитера в среднем на расстояниях 11,5, 22,6 и 21,2 млн. *км*.

Размеры и массы юпитеровых спутников довольно разнообразны. Три галилеевых спутника по диаметру больше

Луны, а два (Ганимед и Каллисто) — больше Меркурия. Приведем радиусы некоторых из них: Ио — 3720 *км*, Европа — 3140 *км*, Ганимед — 5230 *км*, Каллисто — 5150 *км*. Массы двух последних спутников, однако, малы, в два раза меньше массы Меркурия. Это свидетельствует об их малой средней плотности. Отражательная способность поверхностей этих тел весьма высока. Эти особенности Ганимеда и Каллисто породили гипотезу о том, что они в основном состоят из льда или снега.

Наиболее загадочная и не объясняемая космогонией особенность системы спутников Юпитера связана с четырьмя внешними спутниками (VIII, IX, XI и XII), обращающимися вокруг Юпитера в направлении, противоположном направлению движения большинства других спутников планет.

Семейство спутников Сатурна несколько меньше. Их в настоящее время известно 10. В табл. 2 приведены основные данные о девяти спутниках.

Таблица 2

Спутники	Среднее расстояние спутника от центра планеты, тыс. *км*	Период обращения, сутки	Наклон орбиты к плоскости орбиты планеты
Мимас	185,7	0,94	26°45′
Энцелад	238,2	1,37	26 45
Тетис	294,8	1,89	26 45
Диона	337,7	2,74	26 45
Рёя	527,5	4,52	26 42
Титан	1223	15,95	27 07
Гиперион	1484	21,28	26 00
Япет	3563	79,33	16 18
Феба	12950	550,44	175 00

Орбиты всех спутников, исключая Фебу и Гиперион, очень близки к окружностям, а у Фебы и Гипериона заметно сжаты. Все спутники обладают прямым движением, кроме самого внешнего спутника — Фебы, которая, подобно внешним спутникам Юпитера, движется в обратном направлении.

Самый крупный и яркий спутник Сатурна — Титан. Он был открыт в 1655 г. Христианом Гюйгенсом (1629—1695). Несколько позднее французский астроном Д. Д. Кассини (1625—1712) один за другим открыл еще четыре спутника: Япет (1671 г.), Рею (1672 г.), Тетис и Диону (1684 г.). Спустя сто лет Вильям Гершель открыл самые близкие к Сатурну спутники — Мимас и Энцелад. В 1848 г. в обсерватории Гарвардского университета (США) Бонд открыл еще один спутник — Гиперион, а в 1898 г. также в США Пикеринг нашел девятый спутник — Фебу *).

Названия спутников Сатурна взяты из греческой мифологии: Гиперион, Япет, Тетис, Феба и Рея — дети Урана и Геи, Титан — сын Гипериона, Диона — дочь Тетис.

У Урана известно пять спутников: Миранда, Ариель, Умбриель, Титания и Оберон. Названия спутникам даны по именам действующих лиц из комедий Шекспира и По́па.

В 1787 г., через шесть лет после открытия Гершелем Урана, им же были открыты и спутники этой планеты Титания и Оберон. В 1851 г. Ласселем были открыты Ариель и Умбриель, а в 1951 г. Койпером (США) — Миранда. Сведения о спутниках приведены в табл. 3.

Таблица 3

Спутники	Среднее расстояние от центра Урана, тыс. *км*	Период обращения, сутки	Наклон орбиты к плоскости орбиты планеты
Миранда	120	1,4	97°59′
Ариель	191,8	2,52	97 59
Умбриель	267,3	4,14	97 59
Титания	438,7	8,71	97 59
Оберон	586,6	13,46	97 59

Замыкают список спутников планет Тритон и Нереида — спутники Нептуна. Тритон открыл Лассель в 1846 г. почти одновременно с Нептуном, а второй спутник был

*) Десятый спутник, Янус, открыт в 1966 г. французским астрономом Дольфюсом. Элементы орбиты этого спутника определены пока неуверенно.

открыт лишь в 1949 г. Койпером при помощи двухметрового телескопа. Заметим, что движение Тритона обратное, а Нереиды — прямое. Но и Нереида тоже «отличилась». Она поставила рекорд в отношении сплюснутости орбиты, которая напоминает скорее не спутниковую, а кометную.

Орбита Нереиды такова, что расстояние спутника от Нептуна изменяется в пределах от 1,5 до 9,6 млн. *км*. Орбите Тритона также присуща одна особенность: она наклонена к плоскости орбиты Нептуна под очень большим углом. Некоторые сведения о спутниках Нептуна даются в табл. 4.

Таблица 4

Спутники	Среднее расстояние от центра Нептуна, тыс. *км*	Период обращения, сутки	Наклон орбиты к плоскости орбиты планеты
Тритон	353,7	5,88	140°
Нереида	5500,0	359,90	3°14′

Кроме больших планет, вокруг Солнца движется, в основном между орбитами Марса и Юпитера, множество крошечных тел, получивших название *малых планет* или *астероидов* (иногда их называют также планетоидами). Первый из астероидов был открыт 1 января 1801 г. и получил имя Церера. К настоящему времени обнаружено около 2000 астероидов, причем семейство открытых астероидов непрерывно пополняется. Общее их число оценивается в 150—250 тысяч.

Малые планеты представляют собой лишенные атмосферы тела неправильной формы. Размеры астероидов весьма различны. Самый крупный из астероидов — Церера, поперечник которой равен 707 *км*. Поперечники малых планет Паллады, Весты и Гигеи превосходят 300 *км*. Около 400 малых планет имеют размеры в пределах от 15 до 300 *км*. Имеются астероиды размерами с километр и менее (рис. 4).

Формы астероидов весьма причудливы. Если бы астероиды имели сферическую форму, то блеск их менялся бы медленно по определенному закону. Но если в космосе будет лететь «горка», произвольно кувыркающаяся в полете, то должны наблюдаться случайные увеличения блеска или, наоборот, его падения. Так, например, блеск малой планеты Эрос временами возрастает в три раза. Эрос, по-видимому, имеет протяженную форму размером $25 \times \times 10$ *км*.

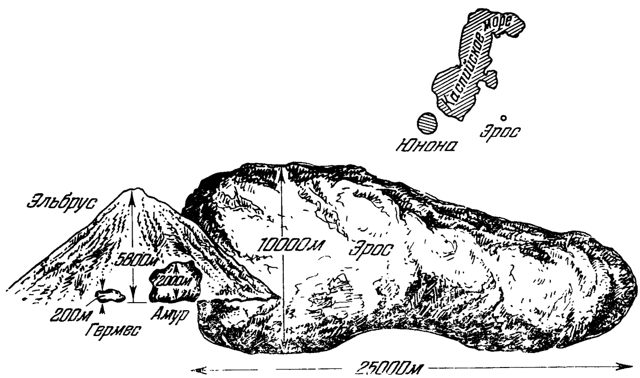

Рис. 4. Сравнительные размеры астероидов и земных объектов.

Названия астероидов брались из греческой мифологии. Когда запас имен из греческой мифологии был исчерпан, то астероидам стали присваивать имена произвольно. Среди новых названий мы встречаем астероид № 852 по имени Владилена, названный в честь В. И. Ленина, недавно открытый астероид Субботина, носящий имя директора Ленинградского института теоретической астрономии АН СССР М. Ф. Субботина (1893—1966).

Один из астероидов назван «Яхонтова» в честь советской женщины-астронома Н. С. Самойловой-Яхонтовой, которая около полувека занимается изучением малых планет. Под ее руководством издается ежегодник международного значения «Эфемериды малых планет».

Позднее мы возвратимся к изучению свойств планет-карликов и более тщательно изучим закономерности их движения.

Наиболее удивительными членами Солнечной системы являются кометы, представляющиеся в телескоп, а иногда

и невооруженному глазу, в виде хвостатой звезды. Основная часть кометы — ее ядро. По современным представлениям оно является твердым. Размеры ядра обычно не превышают 150 *км*. Ядро окружено оболочкой (комой), размеры которой изменяются в зависимости от расстояния кометы от Солнца. Как кома, так и развивающийся при сближении с Солнцем хвост состоят из газов и мелких частиц, которые пополняются веществом ядра кометы. Голова кометы, т. е. ядро и кома, иногда достигает гигантских размеров в десятки и сотни тысяч километров. Но наиболее внушительной частью кометы бывает хвост, простирающийся у отдельных комет на сотни миллионов километров. Например, комета Холмса 1882 г. имела голову диаметром в 1,5 млн. *км*, а длина ее хвоста достигала 300 млн. *км*. Иногда у кометы формируется два и даже три хвоста. В образовании хвостов комет повинны корпускулярные потоки и давление солнечных лучей, которое, оказываясь для частиц весьма малого диаметра преобладающим над силами солнечного тяготения, «выбивает» частицы и молекулы газа из головы кометы и формирует из них украшение кометы — ее хвост. Малая плотность кометного вещества часто бывает причиной для шутливых названий комет «мешок пустоты» или «видимое ничто».

По гипотезе голландского астрофизика Яна Оорта подавляющая часть комет образует кометное облако (облако Оорта), расположенное вне орбиты Плутона. Часть комет со временем изменяет орбиту и начинает двигаться внутри орбит больших планет. Некоторые из комет, вырвавшись по каким-либо причинам из облака Оорта, после сближений с отдельными большими планетами и Солнцем навсегда удаляются из Солнечной системы. Это однократные кометы. Но сказанное представляет собой всего лишь гипотезу, хотя и очень вероятную, так как мы не имеем возможности наблюдать такие слабые объекты, как комета, на гигантских расстояниях, превышающих радиус орбиты Плутона.

С кометами тесно связано родственными узами неисчислимое множество самых маленьких членов Солнечной системы — *метеорных тел*, движущихся в межпланетном пространстве и поодиночке и большими роями — метеорными потоками. К метеорным телам относятся и крупные «небесные камни» и очень мелкие частицы. Различные области межпланетного пространства насыщены метеорным веществом в разной степени. Сейчас, в эпоху космических полетов, многочисленные искусственные спутники Земли и межпланетные станции систематически дают нам сведения о плотности метеорной материи.

Под метеором понимают явление, в просторечии называемое «падающей звездой». Частицы космического вещества, врывающиеся в атмосферу Земли с большой скоростью, в результате колоссального сопротивления, испытываемого ими со стороны земной атмосферы, раскаляются и создают иллюзию «падающей звезды». Иногда метеорные тела больших размеров, не успевая разрушиться при полете в атмосфере, достигают Земли. Упавшие на Землю небесные камни называют метеоритами.

§ 2. Геометрия планетных движений

Современная кинематика Солнечной системы, т. е. геометрические законы движений небесных тел, составляющих Солнечную систему, установленные без анализа причин, порождающих движение, была заложена трудами немецкого ученого Иоганна Кеплера (1571—1630). В своих трудоемких поисках Кеплер опирался на богатый наблюдательный материал, накопленный датским астрономом Тихо Браге (1546—1601). Однако вряд ли Кеплеру удалось бы установить свои три знаменитых закона планетных движений, если бы геометры древности не составили достаточно богатой коллекции кривых линий.

Из этих кривых в динамической астрономии приобрели исключительное значение так называемые *коничгские сечения*. Они были открыты геометром и астрономом древности Менехмом (IV в. до н. э.), учеником Евдокса.

Менехм рассматривал конусы вращения и рассекал их плоскостями, перпендикулярными к образующей. Линия пересечения плоскости и конуса получила название конического сечения. В зависимости от угла раствора конуса Менехм получил три типа конических сечений. Если угол раствора α тупой (рис. 5, *в*), то в сечении получается *гипербола*. При прямом угле раствора α получается *парабола* (рис. 5, *б*). При остром угле раствора α (рис. 5, *а*) коническое сечение будет *эллипсом* *).

В астрономии используются все три типа конических сечений. Но наиболее важным является эллипс. Его

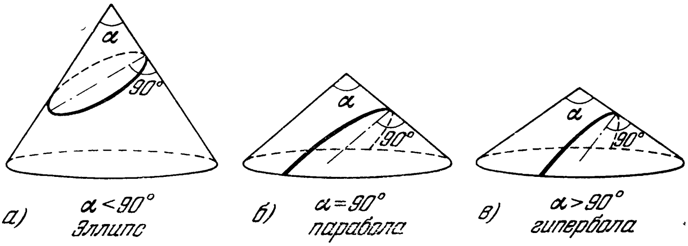

Рис. 5. Виды конических сечений.

уравнение в прямоугольных координатах имеет вид (рис. 6)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Если в этом уравнении ординату y положить равной нулю, то для x получим значения $x=\pm a$. Точки A и A' с координатами ($-a$, 0) и (a, 0) соответственно называются *вершинами* или *апсидами* эллипса, а прямая, их соединяющая, *большой осью* или линией апсид. Если теперь положить x равным нулю, то из уравнения эллипса найдем $y=\pm b$. Точки B и B' с координатами (0, b) и (0,$-b$) также называются *вершинами* эллипса, а соединяющая их прямая — *малой осью*. Как видно, a представляет собой большую полуось эллипса, т. е. его наибольший радиус,

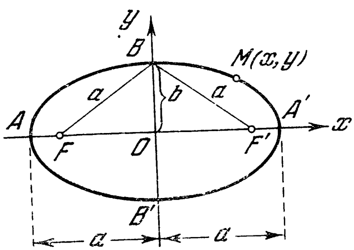

Рис. 6. Эллипс и его основные точки.

*) Рассмотрение Менехма охватывает далеко не все возможные варианты. Конические сечения можно получить, рассматривая сечения любых круговых конусов плоскостями. Если секущая плоскость параллельна двум образующим конуса, получаем гиперболу, если эта плоскость параллельна только одной образующей конуса, имеем параболу, а в случае отсутствия параллельных плоскости образующих конуса — эллипс.

а b — малую полуось эллипса (наименьший радиус). Точка O — точка пересечения осей — называется *центром эллипса.*

В частном случае, при $a=b$, эллипс превращается в окружность, а с уменьшением b при неизменном a он становится все более и более сплюснутым. За меру его сплюснутости принимают величину

$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a},$$

называемую *эксцентриситетом.* Эксцентриситету можно придать простой геометрический смысл. Для его выяснения из вершины малой оси B (рис. 6) раствором циркуля, равным a, сделаем на большой оси две засечки, F и F'. Расстояния OF и OF' равны $OF=OF'=\sqrt{a^2-b^2}$. Точки F и F' называются *фокусами эллипса.* Поскольку $\Delta OBF'$ прямоугольный, отношение $OF' : BF'$, равное эксцентриситету, есть не что иное, как синус угла $\angle OBF'$. Если $b\to a$, то эллипс приближается к окружности, а эксцентриситет e стремится к нулю. При этом фокусы стремятся слиться с центром эллипса. Если же при постоянном a стремить b к нулю, то угол $\angle OBF'$ увеличивается, фокусы удаляются друг от друга, а эксцентриситет стремится к единице. Эллипс при $e=1$ вырождается в отрезок.

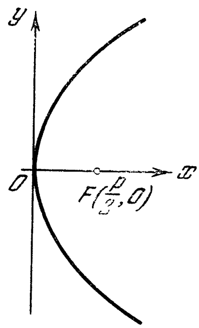

Рис. 7. График параболы.

Другой случай, в котором e равен единице, получается при неограниченном удалении только одного из фокусов, например F', в бесконечность. Эллипс в пределе разрывается с той стороны, где находится подвижный фокус, и получается кривая с бесконечными ветвями, называемая параболой. Ее вид указан на рис. 7, а уравнение параболы записывается в виде

$$y^2=2px.$$

Парабола обладает одной осью симметрии и одним фокусом F.

Третий тип конического сечения — гипербола. Ее уравнение обычно записывается следующим образом:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где a и b — некоторые постоянные.

Гипербола состоит из двух отдельных частей, уходящих в бесконечность и неограниченно приближающихся

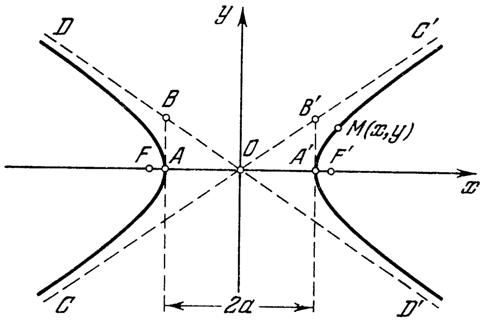

Рис. 8. Гипербола и ее основные точки.

к двум прямым — *асимптотам*. Прямая Ox — ее ось симметрии (рис. 8). Точки A и A' суть *вершины гиперболы*. Расстояние AA' носит название *действительной оси*. Так как из уравнения гиперболы при $y=0$ получается $x = \pm a$, то координаты вершины A' будут $(a, 0)$, а вершина A определяется координатами $(-a, 0)$. Поэтому действительная ось AA' равна $2a$, а действительная полуось OA' равна a. Отрезок $A'B'$ называется *мнимой полуосью*. Через F и F' обозначены два фокуса гиперболы. Они лежат на действительной оси на расстоянии $OF = OF' = \sqrt{a^2+b^2}$. Форма гиперболы зависит от величины эксцентриситета

$$e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}.$$

Эволюцию формы гиперболы с изменением эксцентриситета можно проследить при помощи асимптот. Так как асимптота CC' всегда проходит через центр и точку с координатами (a, b), то ее уравнение можно записать в форме

$y = \frac{b}{a} x$. Если b увеличивается при неизменном значении a, то асимптота поворачивается вокруг начала в сторону, противоположную часовой стрелке. Угол, в котором располагается одна из ветвей гиперболы, при этом увеличивается, а сама гипербола становится более «отлогой».

В небесной механике чаще всего используется общее для всех конических сечений уравнение, записываемое в полярных координатах. Начало координат (полюс) помещается в одном из фокусов конического сечения, а координатная ось направляется по оси симметрии конического сечения. Тогда *радиус-вектор* r произвольной точки кривой, т. е. отрезок, проведенный из фокуса до соответствующей точки конического сечения, связан с углом v наклона радиуса-вектора к оси (этот угол называется *истинной аномалией*) уравнением

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v},$$

в котором через p обозначена величина $p = a(1 - e^2)$, называющаяся фокальным параметром конического сечения.

Кеплер, подбирая кривые, которые наилучшим образом представляли бы движение Марса, после многих попыток использовал для этой цели эллипсы. Как оказалось позднее, эллиптические кривые прекрасно описывают не только движение Марса вокруг Солнца, но и движение всех больших планет, астероидов и спутников, как естественных, так и искусственных.

Кеплером открыты три закона планетных движений. Первый из законов, устанавливающий форму планетной орбиты, гласит:

Орбита каждой планеты лежит в плоскости, проходящей через центр Солнца, и представляет собой эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце.

Затем Кеплер перешел к выявлению закономерностей движения планет по эллипсам. Свои выводы он сформулировал в виде двух законов. Второй его закон утверждает:

Площади, заметаемые радиусом-вектором при движении планеты вокруг Солнца в равные промежутки времени, равны.

В более четкой математической форме этот закон записывается при помощи формулы

$$r^2\omega = \mathrm{const},$$

в которой r — радиус-вектор планеты в текущий момент времени, а ω — угловая скорость движения планеты, т. е. угол поворота радиуса-вектора за единицу времени.

Имеется и еще одна форма записи второго закона Кеплера:

$$rV\sin\alpha = \mathrm{const}.$$

Здесь V — скорость движения планеты по орбите в данный момент времени, а α — угол между направлениями радиуса-вектора и скорости (рис. 9).

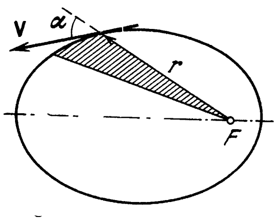

Рис. 9. Второй закон Кеплера.

Наконец, третий закон Кеплера связывает периоды обращения каких-либо двух планет с большими полуосями (средними расстояниями их от Солнца). Пусть T и T_1 — периоды обращения, а a и a_1 — большие полуоси орбит. Третий закон Кеплера утверждает:

$$T^2 : T_1^2 = a^3 : a_1^3,$$

т. е. что *квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца пропорциональны кубам их средних расстояний от него.*

Для описания движения небесных тел по коническим сечениям небесные механики используют ряд терминов. Ближайшую к Солнцу точку орбиты называют *перигелием*, а наиболее удаленную — *афелием*. Если речь идет о спутниках планет, то ближайшую к планете точку именуют *перицентром*, а наиболее далекую от нее — *апоцентром*.

При описании движения небесного тела прежде всего нужно задать положение плоскости его орбиты. Для этой цели всегда вводится какая-либо система координат. Движение планет относят к прямоугольной системе координат с началом в центре Солнца. Ось абсцисс этой системы обычно направляется в *точку весеннего равноденствия*, т. е. в ту точку неба, на которую Солнце проектируется в день весеннего равноденствия. За основную координатную плоскость выбирают плоскость эклиптики, в которой происходит движение Земли вокруг Солнца (рис. 10). Затем строится «небесная сфера», т. е. сфера произвольного радиуса с центром в Солнце. Плоскость планетной орбиты пересекает эту сферу по большому кругу. Линия SN пересечения плоскостей орбиты планеты и эклиптики носит название *линии узлов*.

Величины, определяющие положение плоскости орбиты и размеры и форму орбиты, называются *элементами орбиты*. В качестве одного из элементов принимают угол Ω

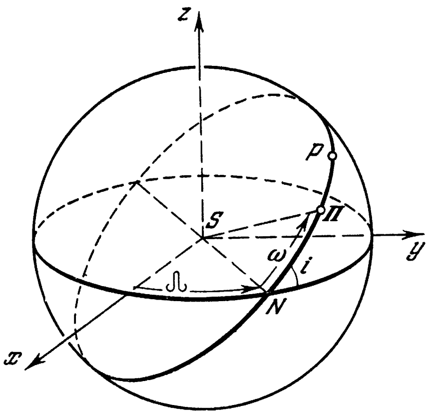

Рис. 10. Элементы орбит планет.

между направлением из Солнца на точку весеннего равноденствия и линией узлов. Для определенности угол Ω берется для луча линии узлов, пересекающего небесную сферу в точке, в которой планета бывает при переходе из южного полушария в северное. Построенный таким путем угол Ω получил название *долготы восходящего узла*. Второй из угловых элементов, характеризующих положение планетной орбиты в пространстве,— это угол между плоскостями эклиптики и орбиты. Он называется *наклонением* или *наклонностью*, или просто наклоном и обозначается через i. Элементы Ω и i полностью определяют положение в пространстве плоскости орбиты.

Еще одним элементом задается ориентация эллипса в орбитальной плоскости. Для этого используется угол между линией узлов и направлением на перицентр (перигелий) П, который именуется *аргументом перицентра* (перигелия) или *угловым расстоянием перицентра* (перигелия) от узла и обозначается греческой буквой ω (см. рис. 10).

Два элемента орбиты: большая полуось a и эксцентриситет e, характеризуют размеры и форму эллипса. Наконец, нужно указать положение планеты в какой-нибудь момент времени на орбите. Этот последний элемент выбирают различным образом. В качестве него иногда берут момент прохождения через перицентр (перигелий). Чаще же в роли этого элемента используется средняя долгота, измеряемая суммой двух дуг: долготы восходящего узла и угла между линией узлов и направлением на некоторое фиктивное положение планеты P, вычисленное в предположении, что она движется по своей орбите равномерно с периодом, равным периоду обращения реальной планеты.

Определив из наблюдений все шесть элементов орбиты, получаем возможность вычислить положение планеты в любой момент времени, воспользовавшись для этого законами Кеплера.

§ 3. Всемирное тяготение. Задача двух тел

Причины, объясняющие движение планет, интересовали многих ученых средневековья. Некоторые из них были на правильном пути. И Николай Коперник (1473—1543), и Иоганн Кеплер, и Галилео Галилей отмечали у небесных тел свойство притягиваться. Так, например, Кеплер писал: «Если бы в каком-нибудь месте мира находились два камня на близком расстоянии друг к другу и вне сферы действия какого бы ни было родственного им тела, то эти камни стремились бы соединиться друг с другом подобно двум магнитам». Еще ближе к истине были английский ученый Роберт Гук (1635—1703), указавший на рост силы взаимодействия небесных тел при уменьшении расстояния между ними, астроном Джованни Альфонсо Борелли (1608—1679) и Христиан Гюйгенс (1629—1695).

Полное и точное описание взаимодействия между притягивающимися телами дал Исаак Ньютон (1643—1727), подробно изложивший результаты многолетних исследований в своем знаменитом трактате «Математические начала натуральной философии», изданном в 1687 г. Ньютон открыл закон, получивший название закона всемирного тяготения. Этот закон состоит в следующем:

Любые две материальные частицы притягивают друг друга с силами, прямо пропорциональными произведению их масс и обратно пропорциональными квадрату расстояния между ними.

Этот закон записывается при помощи формулы

$$F = f\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

в которой m_1 и m_2 — массы притягивающихся частиц, r — расстояние между ними, а f — постоянная тяготения, в системе СИ равная $(6{,}67 \pm 0{,}01)\cdot 10^{-11}$ *м*^{3} *кг*$^{-1}$ *сек*$^{-2}$.

На основе закона всемирного тяготения Ньютоном была сформулирована и строго математически решена задача о движении двух притягивающихся материальных частиц. Она получила название *задачи двух тел* (или *задачи о двух телах*). На практике небесных механиков, как правило, интересует не движение обоих притягивающихся тел в пространстве, а движение одного из них относительно другого. Так, в теории движения планет мы занимаемся изучением движения планеты относительно Солнца, хотя, строго говоря, под действием силы притяжения к планете Солнце тоже описывает определенную небольшую по размерам траекторию в пространстве.

Решение задачи двух тел, данное Ньютоном, подтвердило справедливость законов Кеплера. Потребовалось внести лишь незначительное уточнение в третий закон Кеплера. Согласно Ньютону он дается формулой

$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{T_1^2(m_0 + m_1)}{T_2^2(m_0 + m_2)}.$$

В этой формуле новые обозначения m_0, m_1 и m_2 введены соответственно для массы Солнца и двух планет, движение которых сопоставляется.

Так как массы планет чрезвычайно малы по сравнению с массой Солнца (напомним, что масса Юпитера не превышает 0,001 от массы Солнца), то различие между уточненным Ньютоном третьим законом Кеплера и его первоначальной формулировкой оказывается крайне незначительным. В самом деле, преобразуем последнее соотношение к виду

$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2} \frac{1 + \dfrac{m_1}{m_0}}{1 + \dfrac{m_2}{m_0}}.$$

Очевидно, что малые величины m_1/m_0 и m_2/m_0 можно отбросить, не внося при этом заметной ошибки. В результате получается третий закон Кеплера в его первоначальной форме.

Закон всемирного тяготения и решение задачи двух тел применимы не только к материальным частицам, но и к телам сферической формы, которые либо однородны, либо состоят из однородных концентрических сфер. С достаточной точностью можно считать, что задача двух тел дает вполне удовлетворительное решение, если рассматривать движение планеты только в поле солнечного тяготения. Возникающие при таком решении задачи ошибки в описании движения планет вызываются неучтенными малыми силами взаимного тяготения планет. Поэтому решение задачи двух тел хорошо представляет движение планет только на сравнительно небольших промежутках времени.

Если представлять движения планет при помощи эллиптических орбит, то обязательно следует указывать, для какого года эти орбиты вычислялись. Эллиптические орбиты мы условились описывать введенными выше элементами орбит. К этим элементам необходимо добавлять еще эпоху, к которой они относятся.

В табл. 5 приводятся элементы орбит больших планет, вычисленные на основе решения задачи двух тел и относящиеся к эпохе 0 часов гринвичского времени, 0 суток, январь, 1930. Из приводимых элементов астрономы исходят при расчете таблиц движения планет.

§ 4. Взаимные возмущения планет

Любой из законов науки лишь приближенно верно описывает природный процесс. Возрастающая точность исследований и постепенное накопление научной информации неизбежно приводят к ниспровержению любого из законов науки, к замене его новым, более точным. В свою очередь новый закон рано или поздно уступает место другому. Весьма характерно, однако, что «низверженный» закон (если только он не был ошибочным) не отбрасывается, а продолжает и дальше служить науке. Но теперь уже

Таблица 5

Название планеты	Большая полуось орбиты		Эксцентриситет	Наклонение к эклиптике	Долгота восходящего узла
	а. е.	млн. *км*			
Меркурий	0,387099	57,9	0,205620	7°00′12″	47°30′05″
Венера	0,723322	108,1	0,006806	3 23 38	76 02 59
Земля	1,000000	149,5	0,016738	0 00 00	—
Марс	1,523688	227,8	0,093340	1 51 00	49 01 04
Юпитер	5,202803	777,8	0,048387	1 18 25	39 44 28
Сатурн	9,538843	1426,1	0,055786	2 29 28	113 02 43
Уран	19,190978	2869,1	0,047129	0 46 22	73 38 28
Нептун	30,070672	4495,7	0,008553	1 46 35	131 00 31
Плутон	39,517774	5908,0	0,248640	17 18 48	108 57 16

Название планеты	Долгота перигелия	Средняя долгота	Средняя скорость, *км/сек*	Расстояние от Земли, млн. *км*		Период обращения, сутки
				наименьшее	наибольшее	
Меркурий	76°21′59″	20°24′01″	48,89	82	217	87,9693
Венера	130 35 10	258 31 10	35,00	40	259	224,7008
Земля	101 44 12	99 55 39	29,77	—	—	365,2564
Марс	334 46 14	276 15 27	24,22	56	400	686,9797
Юпитер	13 11 41	68 56 26	13,07	591	965	4332,5879
Сатурн	91 40 34	273 37 05	9,65	1199	1653	10759,2008
Уран	169 31 47	12 20 01	6,80	2586	3153	30685,93
Нептун	44 01 07	150 59 03	5,43	4309	4682	60187,65
Плутон	202 28 34	121 24 14	4,74	4303	7517	90737,2

четко определены пределы его применимости и точность основанных на нем предсказаний.

Такая судьба постигла и законы планетных движений Кеплера. Уже Ньютону закон всемирного тяготения позволил выявить неточность кеплеровских законов и установить сферу их применимости.

Новая трактовка Ньютона отнюдь не перечеркнула, а, наоборот, обогатила законы Кеплера, наполнила их динамическим содержанием, установила их гравитационную природу. В сферу действия кеплеровских законов, как следует из результатов Ньютона, попадают не только планеты, но и любые два притягивающихся тела во Вселенной.

Законами Кеплера продолжают пользоваться и ныне, причем вполне успешно. Более того, в некоторых случаях предпочитают именно кеплеровскую формулировку третьего закона планетных движений ввиду ее большей простоты. Было бы нелепо при исследовании движения искусственного спутника Земли сохранять в третьем законе массу спутника, исчезающе малую по сравнению с массой Земли. Зато в задаче о движении Земли и Луны под действием взаимного притяжения кеплеровская формулировка третьего закона приводит к заметной ошибке, так как отношение масс Луны и Земли равно $^1/_{81}$.

Законы Кеплера были бы вполне справедливы, если бы вокруг Солнца двигалась только одна планета. В действительности же вокруг него обращается целая свита. Планеты взаимодействуют не только с Солнцем, но, согласно закону всемирного тяготения, и друг с другом, отклоняясь в результате от кеплеровских эллиптических орбит. Именно поэтому законы Кеплера, строго говоря, нельзя применять к планетам. Однако и Кеплер, и Ньютон, и более поздние исследователи в ряде случаев пользовались ими и получали неплохие результаты. В чем же здесь дело?

Для ответа на этот вопрос рассмотрим в общих чертах задачу о движении трех взаимно притягивающихся материальных точек. Эта задача называется *задачей о трех телах* и является одной из самых важных в небесной механике. В качестве трех тел примем Солнце, Землю и какую-либо другую планету. Движение каждого из них подчиняется второму закону Ньютона, известному из школьного курса физики. Если движение изучается относительно декартовой системы координат, обладающей равномерным, прямолинейным и поступательным движением*), то, например, движение Земли T описывается уравнением

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_s + \boldsymbol{F}_j,$$

в котором через m обозначена масса Земли, через $\boldsymbol{a}$ — ее ускорение, а $\boldsymbol{F}_s$ и $\boldsymbol{F}_j$ — соответственно силы притяжения к Солнцу S и планете J. Силы и ускорения, как известно, изображаются направленными отрезками (векторами), складывающимися друг с другом по правилу параллелограмма. Величины сил F_s и F_j в соответствии с законом Ньютона вычисляются по формулам

$$F_s = \frac{fmm_s}{r_s^2}, \qquad F_j = \frac{fmm_j}{r_j^2}.$$

В этих формулах использованы обозначения: f — постоянная тяготения, m_s — масса Солнца, m_j — масса планеты, r_s и r_j — расстояния от Земли до Солнца и планеты.

Для выяснения влияния сил взаимного тяготения планет на их движение сопоставим числовые значения сил F_s и F_j, приняв в качестве второй планеты Юпитер. Отношение величин этих сил равно

$$\frac{F_j}{F_s} = \frac{m_j}{m_s}\left(\frac{r_s}{r_j}\right)^2.$$

Действие Юпитера будет наибольшим, если расстояние между Землей и Юпитером минимально. А это имеет место при противостоянии Юпитера, когда Земля находится между Солнцем и Юпитером примерно на соединяющей их прямой. Полагая в последней формуле $r_s = 1$ а. е., $r_j = 5{,}2$ а. е., $m_s = 1$ и $m_j = 0{,}001$, получим**) $F_j : F_s = 0{,}0006$. Таким образом, сила притяжения Земли Юпитером чрезвычайно мала по сравнению с силой солнечного притяжения. Если первой силой пренебречь, то движение

*) Такие системы координат называются *инерциальными*. Их практическое построение представляет сложную задачу и обсуждается в физике.

**) Здесь и далее в качестве единицы длины используется астрономическая единица, равная большой полуоси земной орбиты. Сокращенно астрономическую единицу обозначают а.е., 1 а. е. = 149,5 млн. *км*.

Земли будет зависеть только от притяжения одного тела — Солнца, и тогда законы Кеплера окажутся справедливыми.

Если малая сила действует непродолжительно, то эффект ее действия невелик, и им обычно пренебрегают. Но если исследуется движение на большом промежутке времени то наличие постоянно действующей малой силы приведет к заметному эффекту. Отсюда следует вывод: законы Кеплера применимы на достаточно малых промежутках времени и качественно верно описывают движение, а на больших промежутках времени необходимо наряду с силой солнечного тяготения принимать во внимание силы взаимного притяжения планет.

В небесной механике движение планеты, происходящее по эллипсу и обусловленное притяжением одного Солнца, называется *невозмущенным*, а силы взаимного притяжения планет именуются *возмущающими*. Совокупное действие сил притяжения от Солнца и планет определяет *возмущенное движение* планет, а величины, характеризующие отклонение истинного движения планеты от эллиптического, кеплеровского, называются *возмущениями*.

Взаимное притяжение планет — не единственная причина, вследствие которой истинное движение планет отклоняется от эллиптического. Существует ряд других малых сил, возмущающих движение членов Солнечной системы и различных по своей физической природе. Возмущения в движении планет порождаются, например, сопротивлением межпланетной среды, несферичностью планет, изменением со временем их масс и массы Солнца и т. д.

Говоря о возмущенном движении планет, мы вкратце остановились на знаменитой *задаче трех тел*, всегда привлекавшей внимание крупных математиков и механиков. Что делает эту задачу столь важной для небесной механики? Ведь в природе в чистом виде не встречается ни задача двух тел, ни задача трех тел!

Здесь снова придется сделать небольшое отступление и осмыслить путь, избираемый естествоиспытателями при решении реальных научных проблем. Формы взаимодействия материальных объектов, участвующих в исследуемом процессе, многообразны и сложны, и даже в задачах механики и физики оказывается невозможным точное их описание с помощью математических уравнений. Если даже сами уравнения и удалось составить, то затем все равно пришлось бы столкнуться с непреодолимыми трудностями при их решении. Каков же выход?

Обычно ученый предварительно анализирует причины, определяющие качественный характер явления, его лицо, и отбрасывает малосущественные формы взаимодействия между материальными объектами. Математически задача при этом упрощается. Таким образом, формулируется некоторая упрощенная задача, близкая к реальной, в известной мере идеализирующая изучаемый процесс. Эти упрощенные задачи называют *схемами* или *модельными задачами*. В последующем математическому исследованию подвергаются именно модельные задачи. Одной из таких модельных задач небесной механики является задача трех тел.

Выясним ее практическое значение. Основная задача небесной механики о движении всех тел, образующих Солнечную систему, под действием сил взаимного тяготения, сопротивления среды, сил светового давления, сил магнитной и электромагнитной природы и т. д., в строгой постановке, очевидно, решена быть не может. Достаточно вспомнить, что число тел, образующих Солнечную систему и известных в настоящее время, превосходит две тысячи. Каждое из тел (а не точек!), если даже их считать абсолютно твердыми, обладает шестью степенями свободы, т. е. для характеристики его положения и движения необходимо знать шесть координат и шесть составляющих скорости. Действительно, свободное твердое тело, каким считают планету или спутник, обладает возможностью поступательно перемещаться в трех направлениях (например, в направлении каждой из координатных осей) и вращаться вокруг трех взаимно перпендикулярных осей. Поэтому для определения его положения нужно в каждый момент времени задавать числовые значения трех координат и трех углов поворота. Процесс движения характеризуется скоростями изменения со временем этих шести величин. Таким образом, общее количество неизвестных при исследовании движений в Солнечной системе будет составлять около 25 тысяч. Однако ни одно из тел Солнечной системы нельзя считать недеформируемым, абсолютно твердым

Солнце — газовый шар, различные слои которого вращаются с неодинаковыми скоростями. На Земле, кажущейся твердой лишь на первый взгляд, наблюдаются непрерывные изменения в коре, перемещения материков, возникновение новых островов и т. д. Эти деформации Земли влияют на скорость ее вращения, на положение оси вращения. При изменении фигуры Земли изменяется сила земного тяготения, а это приводит к возмущениям в движении Луны. В движении планет и их спутников нужно учитывать влияние приливов, о роли которых подробнее будет сказано позже. Вследствие ряда физических процессов Солнце теряет свою массу, силы солнечного тяготения при этом уменьшаются, орбиты планет также претерпевают изменения. Чтобы подсчитать количественно изменение параметров орбит планет, к написанным уравнениям движения необходимо добавить еще уравнение, описывающее физическое состояние Солнца.

Мы уже упоминали о межпланетной среде, также оказывающей влияние на движение планет. Это влияние имеет двоякий характер. Во-первых, межпланетная среда «питает» планеты и приводит к постепенному росту их массы и момента инерции при падении на планеты частиц, во-вторых, межпланетная среда порождает силы сопротивления, замедляющие движение планет. Этот механический процесс также должен быть описан уравнениями. Но здесь приходится вспомнить о Галактике, газово-пылевые облака которой снабжают Солнечную систему межпланетной материей. Помимо того, суммарное гравитационное действие звезд, входящих в Галактику, каким-то образом возмущает движение тел Солнечной системы.

Короче говоря, если бы мы предприняли попытку составить «точные» уравнения движения тел Солнечной системы, то она оказалась бы безнадежной. Именно поэтому необходимо строить модельные задачи. Как же построить модельную задачу для теории движения планет? Мы замечаем, что на избранную планету наибольшее действие будет оказывать Солнце. Из возмущений со стороны других тел Солнечной системы необходимо учесть прежде всего влияние Юпитера, как самого массивного члена Солнечной системы после Солнца. Возмущениями от других тел Солнечной системы на первом этапе вполне можно пренебречь. Таким образом, приходим к задаче о движении трех тел под действием сил взаимного тяготения.

Конечно, в других задачах небесной механики строятся и используются и другие модели. О методах исследования возмущенного движения небесных тел будет рассказано в следующей главе. Эффективность и надежность разработанных небесной механикой приближенных способов решения задач теории возмущений многократно проверена. В частности, серьезную проверку они прошли при расчетах движения искусственных спутников Земли и автоматических межпланетных станций. Мы приведем здесь только один пример применения теории возмущений, в котором ее методы приняли поистине «боевое крещение».

§ 5. Нептун и Плутон «на кончике пера»

В XIX в. у астрономов постоянно возникали затруднения при прогнозировании движения наиболее далекой из известных в то время планет — Урана. Уран все время «сбивался» с пути, начертанного небесными механиками. В начале XIX в. Уран перемещался по орбите быстрее, чем нужно, как будто его притягивало к себе какое-то тело, расположенное впереди него, а в 20-х годах он стал отставать от расчетного движения, будто удерживаемый чем-то сзади (рис. 11).

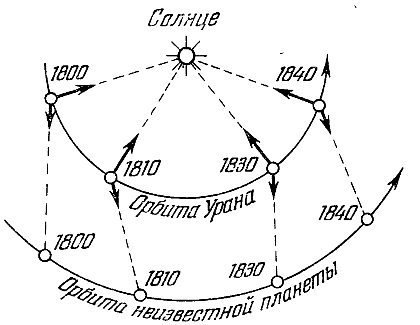

Рис. 11. Движение Урана в первой половине XIX века.

«В чем же дело»? — ломали голову небесные механики.

Видный немецкий астроном того времени Фридрих Вильгельм Бессель (1784—1846) в одной из работ высказал предположение: «Я думаю, что придет день, когда тайна Урана будет раскрыта с помощью новой планеты, элементы орбиты которой будут найдены по ее воздействию на Уран».

Высказанная Бесселем идея оказала сильное влияние на талантливого молодого английского ученого Джона Кауча Адамса (1819—1892). Адамс решил заняться теоретическими расчетами положения неизвестной планеты и, работая до самозабвения в течение около двух лет, завершил свой труд к осени 1845 г., приняв в качестве окончательного результата шестое по счету из полученных им решений.

Задача была далеко не из легких. Сначала было необходимо построить новую уточненную теорию движения Урана под действием сил притяжения к Солнцу и известным в то время большим планетам Солнечной системы. Затем, исходя из результатов наблюдений, нужно было найти отклонения истинного движения Урана от теоретического, расчетного движения. Несмотря на трудность, эта задача была вполне доступна для решения. Но после ее решения начинался самый сложный этап. Нужно было по полученным отклонениям в движении Урана, не укладывающимся в построенную теорию, попытаться найти массу, элементы орбиты и положение некоторой неизвестной планеты, движущейся вне орбиты Урана. Этой задачей и занялся Адамс.

Одновременно с Адамсом над этой же проблемой трудился парижский математик и небесный механик Урбан Жан Жозеф Леверье (1811—1877).

Для упрощения расчетов необходимо было знать хотя бы ориентировочно массу неизвестной планеты либо ее расстояние от Солнца. Массу планеты без расчетов узнать было, конечно, невозможно. А оценить ее расстояние, как считали и Адамс и Леверье, было несложным делом. В ту пору астрономы еще не теряли надежды установить достаточно простой закон планетных расстояний, причем его поиск вели вслепую, простым подбором различных комбинаций чисел, не пытаясь найти физическое объяснение, подобно тому как отыскивал свой третий закон Кеплер. Одним из популярных законов планетных расстояний в то время было правило, предложенное в 1772 г. директором Берлинской обсерватории Боде (1747—1826). Боде нашел эмпирическую зависимость между большими полуосями орбит шести известных в его время планет. Его правило состояло в следующем: к каждому из членов последовательности 0, 3, 6, 12, 24, 48, 96 необходимо прибавить 4 и результат поделить на десять. Тогда полученные числа дадут большие полуоси орбит планет, выраженные в астрономических единицах.

Этим правилом и воспользовались в своих исследованиях как Адамс, так и Леверье. Оба астронома для большой полуоси неизвестной планеты приняли значение 38,8 а. е. и, исходя из него, выполнили все последующие трудоемкие вычисления.

Однако Адамсу крайне не повезло. Он обратился с просьбой о поиске неизвестной планеты в указанном им месте к директору Гринвичской обсерватории, королевскому астроному сэру Джорджу Эри Биддену (1801—1892). Тот отнесся к результатам молодого Адамса с недоверием и поиски планеты не организовал. Лишь только после двух докладов, прочитанных Леверье в Парижской Академии наук, о чем стало известно Эри, в Кембридже были начаты поиски планеты. Но и после этого Адамса продолжали преследовать неудачи. Наблюдатель, ведший поиск планеты, как выяснилось позднее, дважды наблюдал ее, но по небрежности не удосужился сопоставить между собой результаты наблюдений, проведенных в различные сутки. Отнаблюдав свыше трех тысяч звезд, наблюдатель Кембриджской обсерватории так и не смог обнаружить планету.

Леверье оказался более удачливым. Хотя он и получил отказ от своих французских коллег, решивших не тратить времени на поиск планеты, ему все же удалось заинтересовать своими результатами астронома Берлинской обсерватории Иоганна Г. Галле, бывшего прекрасным знатоком звездного неба.

В письме к Галле Леверье писал: «Направьте телескоп в созвездие Водолея в точку эклиптики с долготой 326° и в пределах одного градуса от этого места вы найдете новую планету. Она девятой звездной величины и имеет заметно различимый диск».

Ознакомившись с просьбой Леверье, Галле, не откладывая дела в долгий ящик, немедленно занялся поиском неизвестной планеты. Планета была открыта в первую же ночь (рис. 12). Она получила название Нептун в честь римского бога морей.

Открытие Нептуна стало подлинным триумфом небесной механики, продемонстрировав силу законов механики Ньютона и закона всемирного тяготения.

Точное определение орбиты Нептуна было поручено обоим ученым: Леверье и Адамсу, установившим между собой дружеские отношения.

Не успели еще улечься страсти, порожденные открытием Нептуна, а астрономы стали строить планы организации поиска еще одной новой планеты. Астрономы еще более укрепились в своих стремлениях, когда обнаружилось, что Уран и после открытия Нептуна и учета его воздействия снова отклоняется от расчетной траектории.

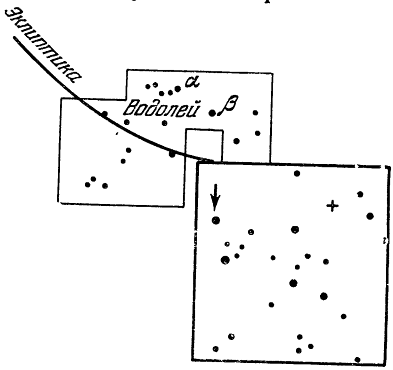

Рис. 12. Участок звездного неба из созвездия Водолея. Крестиком отмечено предсказанное Леверье положение Нептуна. Стрелка указывает место открытия Нептуна.

Эти поиски представляли намного более трудную задачу, так как орбита Нептуна не была изучена достаточно хорошо. Нептун и до сих пор после открытия еще не успел сделать даже одного оборота вокруг Солнца. А это значит, что наши наблюдения не охватывают всей его орбиты. Исходить же из возмущений только в движении Урана было очень трудно. В самом деле, обнаруженное избыточное притяжение, сбивавшее Уран с его пути, было в 60 раз меньше того, которое фигурировало в расчетах, предшествовавших открытию Нептуна.

И тем не менее, не побоявшись трудностей, за эту задачу взялся американский астроном **Персиваль Ловелл**, предпринявший в начале нашего века тщательный анализ исследований Леверье и Адамса. К 1905 г. он закончил свои вычисления и пришел к выводу, что девятая планета находится на расстоянии около 6 млрд. *км* от Солнца, совершая полный оборот вокруг него за 282 года, и должна быть видна с Земли как звезда 13-й звездной величины. Этот результат Ловелла следует признать хорошим, так как расстояние до новой планеты от Солнца он определил достаточно точно, допустив ошибку в периоде лишь на 40 лет, а в блеске планеты он ошибся на 5 звездных величин.

Несмотря на упорные поиски, Ловеллу не удалось открыть предвычисленную им планету. В 1916 г. он скоропостижно скончался. Эстафету поисков новой планеты подхватил постоянный помощник Ловелла астроном Уильям Генри Пикеринг.

Пикеринг повторил вычисления, значительно уточнив их. Неизвестную планету он стал искать посредством анализа возмущений не только Урана, но и Нептуна. Но все было безрезультатным. К 1929 году был построен новый фотографический телескоп, к работе с которым был привлечен молодой, страстно любивший астрономию Клайд Томбо, не имевший специального астрономического образования, но занимавшийся ею с детских лет.

Клайд Томбо обладал неиссякаемой энергией и посвящал наблюдениям все ночи. Работа по обнаружению нового очень слабого объекта требовала напряженного внимания. На каждой из полученных им пластинок находилось около 150 тысяч изображений звезд. Задача состояла в обнаружении такого небесного объекта, который бы от ночи к ночи очень незначительно перемещался среди звезд. Для этой цели решили воспользоваться микроскопом специальной конструкции. Изучая пластинку за пластинкой, Томбо перешел к областям неба, близким к Млечному Пути. Число звезд на каждой из пластинок возросло до 400 тысяч!

Изучая январские фотографии 1930 года, Томбо в феврале-марте этого же года обнаружил и затем строго доказал, что найденный им в созвездии Близнецов новый небесный объект и есть ранее неизвестная планета (рис. 13).

По предложению 11-летней девочки планета получила имя бога подземного царства Плутона и сокращенное обозначение ♇ в честь инициатора поисков планеты Персиваля Ловелла. Планета движется на окраине Солнечной системы, где господствует мрак, что вполне подходит для бога подземного царства. Не было диссонанса и с точки зрения греческо-римской мифологии, ибо Плутон — сын Сатурна и внук Урана и Геи, Нептун и Юпитер — его братья, а Венера, Меркурий и Марс — племянники.

Вопрос о существовании других планет в Солнечной системе обсуждается и в наше время. В § 8 эта проблема подвергнется подробному рассмотрению.

§ 6. Сферы действия небесных тел

В газетах и в популярных журналах можно встретить слова: «космическая ракета вышла из сферы действия Земли». Иногда слова «сфера действия планеты» понимают

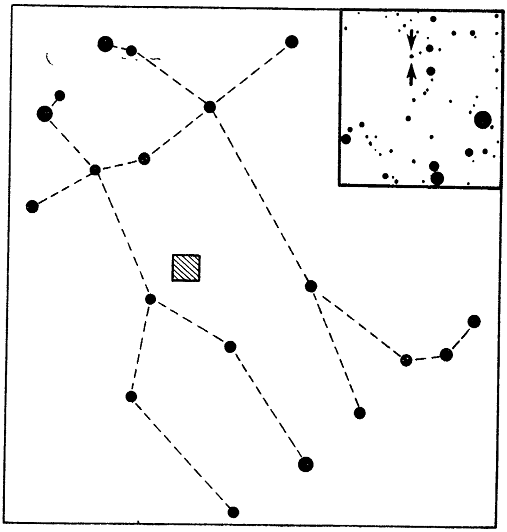

Рис. 13. Созвездие Близнецов. В квадрате стрелками указано положение Плутона в момент открытия.

в буквальном смысле, что-де планета обладает способностью притягивать только до расстояний, не превышающих определенных пределов, а на бóльших расстояниях от планеты ее притяжение отсутствует и действует только солнечное тяготение. Такое понимание сферы действия ошибочно, ибо оно противоречит закону всемирного тяготения, согласно которому гравитационное взаимодействие любых материальных тел должно проявляться при любых расстояниях, разделяющих эти тела.

Небесные механики вкладывают в понятие сферы действия совершенно иное содержание. Заметим, что говорить вообще о сфере действия Земли или Юпитера или иной планеты совершенно бессмысленно, так как сферу действия можно вводить лишь для пары небесных тел. Одно и то же небесное тело имеет различные сферы действия в зависимости от постановки задачи. Так, например, в задаче о движении космического корабля под действием сил лунного и солнечного тяготения радиус лунной сферы действия в среднем будет составлять около 162 тыс. *км*, а в задаче о движении корабля в поле притяжения Земли и Луны радиус сферы действия Луны в среднем равен 66 тыс. *км*.

В небесной механике употребляют три типа гравитационных сфер:

1. *Сфера действия планеты*. Под этой сферой понимают область пространства, в которой при расчетах возмущенного движения спутников и комет целесообразно принимать в качестве центрального тела не Солнце, а планету. Эта область ограничена поверхностью, в точках которой $F/R = F_1/R_1$, где R — ускорение, сообщаемое Солнцем исследуемому телу в случае, когда за центральное тело принято Солнце, F — величина возмущающего ускорения, вызываемого тяготением планеты (она равна геометрической разности ускорений исследуемого тела и Солнца, вызываемых тяготением планеты), R_1 — ускорение, сообщаемое планетой, когда последняя принята за центральное тело, а F_1 — величина возмущающего ускорения от Солнца.

Эта поверхность в действительности не является сферой, но мало отличается от нее. Для удобства ее заменяют сферой подходящего радиуса. Ее радиус зависит от расстояния между Солнцем и планетой, изменяющегося при движении планеты по эллиптической орбите вокруг Солнца.

В популярных статьях под сферами действия планет понимают сферы действия по отношению к Солнцу.

2. *Сфера тяготения планеты*. Эта сфера представляет собой область пространства вокруг планеты, внутри

которой притяжение планеты превосходит солнечное тяготение. Радиус сферы тяготения планеты также зависит от изменения ее расстояния от Солнца и, следовательно, изменяется со временем.

Сферы действия и тяготения позволяют более глубоко выяснить динамические особенности строения Солнечной системы. Как показывают расчеты, подавляющее большинство спутников планет движется внутри обеих гравитационных сфер. Единственное исключение представляет собой Луна, движущаяся вне сферы земного тяготения. Радиус сферы тяготения Земли колеблется в пределах от 256 до 265 тыс. *км*, в то время как большая полуось лунной орбиты равна 384 тыс. *км*. Именно этим объясняется, почему Луна движется относительно Солнца по орбите, во всех точках обращенной к Солнцу вогнутостью. Если, кроме того, учесть, что Луна имеет относительно большую массу по сравнению со спутниками других планет, естественно заключить, что Луну скорее следует считать не спутником Земли, а небольшой самостоятельной планетой. Иногда за пределы сферы тяготения центральной планеты выходят внешние восьмой и девятый спутники Юпитера, обладающие обратным движением. Радиус сферы тяготения Юпитера при различных положениях Юпитера на его орбите изменяется в пределах от 22,9 до 25,2 млн. *км*, а средние радиусы орбит указанных спутников Юпитера соответственно равны 23,5 и 23,7 млн. *км*.

3. *Сфера Хилла*. Американский математик и небесный механик Георг Хилл показал, что тело малой массы, движущееся под действием сил ньютоновского притяжения двух других небесных тел, обращающихся друг относительно друга по круговым орбитам, всегда будет оставаться внутри некоторой области, содержащей одну либо обе притягивающие массы, если только в какой-либо момент времени сумма кинетической и потенциальной энергии тела малой массы в относительном движении была отрицательной и достаточно большой по модулю *).

В этих упрощающих предположениях Хиллу удалось построить области, содержащие притягивающие массы,

---

*) Задача трех тел в изложенной постановке называется ограниченной круговой задачей трех тел.

внутри которых происходит движение малой массы. Форма и размеры этих областей существенно зависят от величин масс притягивающих тел и от энергии тела малой массы, т. е. от ее начального положения и начальной скорости. На рис. 14 приведены области движения тела малой массы для нескольких значений ее энергии и двух систем значений притягивающих масс. В случаях «*а*», «*б*», «*в*» даны области Хилла для задачи «Солнце — планета — спутник» и для задачи «Солнце — Юпитер — астероид». В случае «*а*» энергия наименьшая и малое тело может двигаться

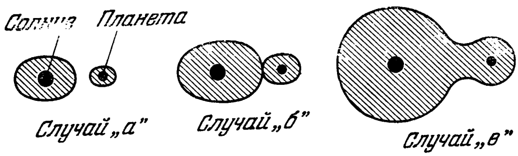

Рис. 14. Области Хилла.

либо только в замкнутой области, содержащей Солнце, либо в замкнутой области, охватывающей планету. Случай «*б*» является граничным и разделяет движение типа «*а*» от движений типа «*в*». В случае «*в*» полная энергия имеет бóльшую величину и здесь возможно такое движение, в котором тело, первоначально двигавшееся по спутниковой орбите вокруг планеты, пройдет через горловину области Хилла и станет обращаться вокруг Солнца, однако малое тело не может неограниченно удаляться от притягивающих тел.

Если для тела малой массы в начальный момент полная механическая энергия относительного движения достаточно велика по модулю и отрицательна, то и в дальнейшем это тело будет всегда оставаться на конечном расстоянии от притягивающих тел. Такое движение называют *устойчивым в смысле Хилла* (или *в смысле Лагранжа*). В задаче о движении спутника планеты при учете возмущающего действия Солнца можно построить сферу с центром в планете, внутри которой неограниченно долго будет находиться спутник, если только до этого он двигался вокруг планеты по орбите эллиптического типа. Сфера Хилла дает то максимальное расстояние, на котором могут двигаться

Таблица 6

Гравитационные сферы больших планет

Планета	Сфера тяготения		Сфера действия		Сфера Хилла	
	а. е.	млн. *км*	а. е.	млн. *км*	а. е.	млн. *км*
Меркурий	0,00016	0,024	0,00075	0,112	0,00148	0,221
Венера	0,00113	0,069	0,00412	0,616	0,00674	1,008
Земля	0,00174	0,260	0,00620	0,928	0,01001	1,497
Марс	0,00086	0,128	0,00386	0,577	0,00724	1,083
Юпитер	0,16076	24,042	0,32226	39,178	0,34697	51,872
Сатурн	0,16120	24,099	0,36458	54,495	0,42881	64,107
Уран	0,12690	18,972	0,34626	51,666	0,46494	69,509
Нептун	0,21638	32,349	0,58049	86,783	0,77035	115,167
Плутон	0,06586	9,846	0,23674	35,391	0,38392	54,286

небесные тела, оставаясь спутниками планеты. Например, для Земли радиус сферы Хилла равен 1,5 млн. *км*, в то время как радиус сферы действия Земли заключается в пределах 913—944 тыс. *км*. (рис. 15). В табл. 6 приводятся радиусы гравитационных сфер для больших планет (по отношению к Солнцу), рассчитанные проф. Г. А. Чеботаревым.

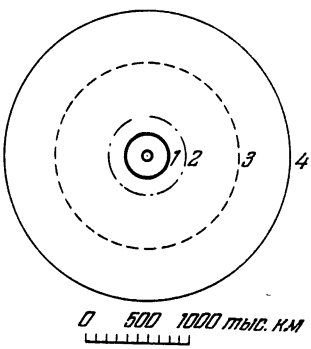

Рис. 15. Сравнительные размеры гравитационных сфер Земли. *1* — сфера тяготения, *2* — лунная орбита, *3* — сфера действия, *4* — сфера Хилла.

§ 7. Где границы Солнечной системы?

На первый взгляд кажется разумным в качестве границ Солнечной системы принять орбиту наиболее далекой планеты — Плутона, радиус которой равен 40 а. е. Однако если принять во внимание не только большие планеты, но и малые тела Солнечной системы, например, кометы, то границу Солнечной системы придется отнести на более далекое расстояние.

Немедленно возникает вопрос, а все ли крупные тела Солнечной системы известны нам в настоящее время? Ведь и до сих пор астрономы ежегодно открывают все новые и новые тела. Не исключено, как считают астрономы, существование по меньшей мере одной большой планеты, орбита которой расположена вне орбиты Плутона. Ее условно называют трансплутоновой планетой. Но возможно ли, что, имея мощные оптические средства, ученые до сих пор могли не заметить неизвестной планеты? По мнению первооткрывателя Плутона астронома К. Томбо, никаких неизвестных планет ярче 16-й звездной величины нет, однако более слабые по яркости необнаруженные планеты, возможно, существуют. Открытие таких слабых объектов затруднено по двум причинам. Во-первых, количество наблюдаемых светил весьма быстро возрастает с увеличением звездной величины, и обнаружение планетоподобных объектов становится крайне трудоемкой задачей. Второе затруднение вызвано уменьшением собственных движений планет относительно «неподвижных» звезд при увеличении их расстояний от Солнца. Для выявления перемещающихся среди звезд объектов, весьма удаленных от Солнца, необходимо иметь фотографии исследуемого участка неба, разделенные большим промежутком времени.

Имеются и динамические аргументы в пользу существования трансплутоновой планеты. Они вытекают из исследований, подобных работам Леверье. Одна из недавних работ подобного рода выполнена в 50-х годах немецким ученым Критцингером. Он обратил внимание на то, что в движении Урана имеются небольшие отклонения, которые нельзя объяснить возмущающим действием Нептуна и Плутона.

Исходя, как и Леверье, из предположения, что существует неизвестная планета, Критцингер предпринял попытку найти элементы орбиты этой гипотетической, трансплутоновой планеты и получил две системы элементов. Большая полуось одной из орбит должна равняться 65 а. е., период обращения по ней 535,5 года, а наклонение орбиты к эклиптике 56°. Другая из возможных орбит такова: большая полуось — 77 а. е., период — 675,5 года, наклонение 38°. Задача, стоявшая перед Критцингером, была исключительно сложна, так как она связана с анализом очень слабых эффектов. Поэтому результаты Критцингера нельзя считать надежными.

Астрономы в своих гипотезах уже давно присоединили заплутоновую область к Солнечной системе, заполнив ее различного рода объектами. Исходя из физических соображений, ряд астрофизиков поддерживает гипотезу о существовании пояса астероидов вне орбиты Плутона. Согласно гипотезе Оорта вне орбиты Плутона располагается кометное облако.

Наблюдательная астрономия в ближайшее время, очевидно, еще не сможет дать ответ на вопрос о границах Солнечной системы. Но проблему можно решить и теоретическим путем, средствами небесной механики.

С точки зрения механики найти границы Солнечной системы означает определить тот наибольший радиус орбиты небесного тела, при котором оно постоянно будет двигаться вокруг Солнца. На движение планеты или кометы в периферийных областях Солнечной системы наряду с силами притяжения к Солнцу и планетам будут оказывать влияние силы тяготения со стороны ближайших звезд и Галактики в целом. Оставляя пока в стороне весьма важный вопрос о том, могут ли силы взаимного тяготения между телами Солнечной системы обусловить выброс тела за границы Солнечной системы, сосредоточим свое внимание на проблеме захвата тел Солнечной системы силами тяготения со стороны ближайших звезд и Галактики. Если нам удастся установить ту область околосолнечного пространства, из которой внешние возмущающие силы не могут вырвать тело нашей планетной системы, то тем самым будут установлены и границы Солнечной системы.

Систематические исследования в этом направлении проводились в Ленинградском институте теоретической астрономии Академии наук СССР, большой научный коллектив которого занимается разработкой многих проблем небесной механики.

Основные исследования проводились под руководством директора этого института, проф. Г. А. Чеботарева. При анализе была использована теория гравитационных сфер небесных тел. Для простоты предполагалось, что вся масса Галактики сосредоточена в ее центре, и для нее было при нято значение $1{,}3 \cdot 10^{11}$ масс Солнца, радиус галактической орбиты Солнца был взят равным $16{,}5 \cdot 10^{8}$ а. е. Расчеты привели к следующим результатам: радиус сферы действия для Солнечной системы составляет 60 тыс. а. е., сферы притяжения — 4500 а. е. и сферы Хилла — 230 тыс. а. е.

Принимая в качестве динамической границы Солнечной системы сферу Хилла, можем сделать вывод, что Солнечная система простирается практически до соседних звезд. Ближайшая к Солнцу звезда α Центавра удалена на расстояние около 280 тыс. а. е., т. е. находится чуть дальше границы области Хилла.

Сделанные выводы небезупречны по своей математической строгости, так как основываются на задаче трех, а не большего числа тел. Тем не менее, если исключить маловероятные типы движения тел Солнечной системы, то к ним можно относиться с большой степенью доверия.

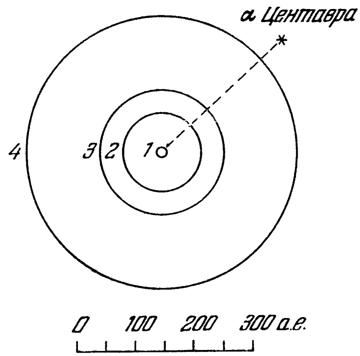

Рис. 16. Динамические границы Солнечной системы.

Небезынтересно заметить, что области устойчивого движения в смысле Хилла — Лагранжа получаются различными для прямых движений, следующих направлению общего вращения Солнечной системы, и для движений в обратном направлении. Так, для обратных движений наибольший радиус устойчивой по Лагранжу орбиты равен 100 тыс. а. е., т. е. в два с лишним раза меньше указанного выше значения радиуса сферы Хилла.

На рис. 16 изображены сравнительные размеры гравитационных сфер Солнца. Для сравнения размеров этих сфер с размерами орбит больших планет заметим, что в принятом масштабе орбита Плутона будет иметь радиус 0,0005 *см*. Окружность, помеченная цифрой *1*, изображает сферу тяготения, окружность *2* — сферу действия, окружность *3* — сферу Хилла для обратных движений, а окружность *4* — сферу Хилла для прямых движений.

§ 8. Экскурс в прошлое

Наша цель — узнать будущее Солнечной системы, хотя бы в общих чертах представить ее геометрию и качественные особенности движения через многие сотни миллионов и миллиарды лет. С формально-математической точки зрения для этого достаточно полностью знать состояние Солнечной системы (положения и скорости всех тел) в какой-либо момент времени и закон взаимодействия тел, образующих Солнечную систему. Задача сводится к решению системы уравнений, в которые наряду с искомыми величинами будут входить скорости их изменения и скорости изменения их скоростей. Эти уравнения принципиально отличны от алгебраических и носят названия дифференциальных. Для их решения необходимо знать начальные значения искомых величин и скоростей их изменения, так как дифференциальные уравнения допускают бесчисленное множество решений, из которых только одно будет описывать эволюцию Солнечной системы.

Поясним это на простом примере. Пусть материальная частица, на которую действует сила тяжести, движется вертикально вверх (вес будем считать постоянным). Требуется найти максимальную высоту подъема этой частицы. В соответствии со вторым законом Ньютона имеем

$$ma = -P,$$

где m — масса частицы, а a — ее ускорение, P — ее вес. Полагая $P = mg$, из предыдущего уравнения получим $a = -g$. В левой части этого уравнения стоит ускорение частицы, т. е. скорость изменения ее скорости. В этой задаче ускорение оказывается постоянным, что позволяет найти решение уравнения элементарным путем, не прибегая к помощи высшей математики. Это решение можно записать в виде

$$s = c_1 + c_2 t - gt^2/2.$$

Здесь через s обозначена высота подъема частицы в момент времени t; c_1 и c_2 — произвольные постоянные, зависящие от начального положения и начальной скорости частицы.

В самом деле, пусть в момент времени $t = t_0$ скорость v равна v_0, а высота частицы над поверхностью Земли равна s_0. Вспомним, что, кроме формулы для высоты подъема, имеется еще формула для скорости

$$v = c_2 - gt.$$

Подставляя в эти формулы вместо s и v их начальные значения, а вместо t начальный момент t_0, придем к системе уравнений

$$c_1 + c_2 t_0 = s_0 + g t_0^2/2,$$
$$c_2 = v_0 + g t_0,$$

определяющей значения произвольных постоянных c_1 и c_2 для рассматриваемого конкретного движения. Решая систему, получаем

$$c_1 = s_0 - v_0 t_0 - g t_0^2/2,$$
$$c_2 = v_0 + g t_0.$$

Заменяя в первоначальных общих формулах произвольные постоянные c_1 и c_2 найденными значениями, будем иметь

$$v = v_0 - g\,(t - t_0),$$
$$s = s_0 + v_0\,(t - t_0) - g(t - t_0)^2/2.$$

По этим уравнениям можно определить все, что произойдет с движущейся частицей в будущем, в частности, и максимальную высоту подъема. Из формул видно, что эта высота существенным образом зависит от начальных значений высоты и скорости и будет изменяться при изменении последних.

Аналогично, в принципе, обстоит дело и в задаче об эволюции Солнечной системы. Одно из различий (причем не самых важных) состоит в том, что вместо одного уравнения будем иметь систему большого числа уравнений весьма сложной структуры.

Поэтому математик мог бы сказать астроному: «Дайте мне полную информацию о начальном состоянии Солнечной системы, и я предскажу судьбу нашего мира на любой момент времени, сколь угодно далекий от нашего века». При этом математик добавляет, что для него безразлично, какой момент времени будет принят за начальный. В качестве такового можно взять или первый день двадцатого века, или 7 ноября 1917 г., или любой другой момент.

Однако астрономы не могут выполнить требования математиков. Что же делать? Прежде чем ответить на этот вопрос, попробуем провести одну рискованную аналогию. Хотя аналогия никогда ничего не доказывала, она всегда являлась одним из методов научного мышления. В нашем случае воспользуемся весьма поверхностной аналогией.

Как поступает руководитель предприятия при подборе нового сотрудника? Он прежде всего знакомится с поступающим на работу, с его квалификацией, семейным положением и т. д. в данный момент времени. Но вряд ли удастся таким образом выяснить все деловые качества работника, его энергию, стремления. И тогда на помощь приходят листок по учету кадров, автобиография и другие сведения о новом сотруднике. Данные о прошлом помогают делать прогнозы на будущее.

Видимо, и астрономам полезно и необходимо поступать таким же образом: восстановив прошлое Солнечной системы, выяснить тенденции развития и строить прогноз о ее будущем. Итак, путь в будущее проходит через прошлое.

Гипотезы о происхождении Солнечной системы предлагались неоднократно. Однако ни одну из многочисленных попыток восстановления биографии Солнечной системы нельзя признать полностью удачной. В настоящее время астрономическая наука не дает не только исчерпывающего, но даже надежного приближенно верного ответа на вопрос о происхождении Солнечной системы, ибо все до сих пор предлагавшиеся гипотезы в той или иной мере не свободны от недостатков, не могут объяснить некоторые из характерных особенностей Солнечной системы и подчас даже противоречат отдельным законам физики и механики. Причин столь неудовлетворительного состояния космогонии много и прежде всего, конечно, исключительная сложность стоящих перед ней проблем. С другой стороны, сказывается и недостаточная изученность Солнечной системы. Наконец, нельзя не отметить все еще наблюдающуюся разобщенность в усилиях ученых разных специальностей, являющуюся основным камнем преткновения на пути решения космогонических проблем.

Не только среди непрофессионалов, но даже среди специалистов-астрономов можно наблюдать пессимистическое отношение к вопросу о разрешимости проблемы происхождения Солнечной системы. Иногда скептицизм проявляется в завуалированной форме. Утверждают, что решение обсуждаемой проблемы следует отложить на будущее, так как не накоплена еще достаточная информация о Солнечной системе. По нашему мнению, эта концепция неприемлема, так как призывает к прекращению космогонических исследований.

Скорее всего, и в самом деле нельзя надеяться на быстрое решение проблем космогонии. Однако является ли это достаточной причиной для прекращения попыток решить эти проблемы? И здесь со всей категоричностью следует сказать: «Нет!». Вся история развития науки свидетельствует о полезности гипотез, нередко даже ошибочных. Ибо попытка решения большой научной проблемы стимулирует развитие как данной, так и смежных с ней наук. Приведем несколько примеров.

Планетарная атомная модель Нильса Бора, которая представляет собой лишь рабочую гипотезу, оказалась очень удобной и полезной для физиков, хотя она отнюдь и не соответствовала истинной структуре атома. Геоцентрическая птолемеева система мира, будучи принципиально неверной, долгое время служила вполне надежным средством для предвычисления движения планет, солнечных и лунных затмений и т. д. Более того, Николаю Копернику даже после совершенной им научной революции пришлось кое-что сохранить из сложных геометрических построений Клавдия Птолемея, например, эпициклы высших порядков. Подобное переплетение старого и нового в науке отнюдь не является случайностью, а вполне закономерно. Учение Птолемея можно трактовать с двух точек зрения. Во-первых, как систему мира, в центре которой поставлена Земля. С этой точки зрения учение Птолемея ошибочно и реакционно. Однако имеется вторая точка зрения, согласно которой на птолемеево учение можно смотреть как на способ расчета видимого движения планет. Для нас, землян, в практических задачах удобно вводить систему координат с началом в центре Земли. Эта система координат не будет какой-то привилегированной, она будет перемещаться в пространстве вместе с Землей. Именно к земной, или, как говорят, геоцентрической системе координат мы и относим движение планет. В астрономических ежегодниках и до сих пор приводятся геоцентрические координаты планет и их видимые движения на небесной сфере. С формально-математической точки зрения Птолемей искал геометрические пути решения задачи о видимом движении планет. Если бы решение Птолемея перевести на современный математический язык, то это означало бы, что он стремился представить координаты планет в виде линейных комбинаций косинусов и синусов углов, равномерно возрастающих со временем. «Позвольте,— воскликнет математик,— да ведь это задача гармонического анализа, задача о представлении периодических функций в виде бесконечных тригонометрических рядов Фурье!». Не зная механических законов движения планет, Птолемей шел кустарным, эмпирическим путем, подбирая численные значения коэффициентов в согласии с наблюдениями.

Возвратимся, однако, к космогонии. Можно не сомневаться в пользе разрабатываемых космогонических гипотез, если даже они не дают полной картины происхождения Солнечной системы. Весьма вероятно, что какая-то часть этих гипотез станет одним из кирпичиков в здании будущей единой и полной теории происхождения планетной системы.

При построении теории происхождения и эволюции изучаемых небесных тел очень важно полно и правильно выделить те наблюдаемые закономерности, которые обусловлены особенностями процесса происхождения небесных тел и которые будут играть определяющую роль в последующем развитии.

Обращаясь к Солнечной системе (см. § 2 и табл. 5), нетрудно обнаружить следующие существеннейшие особенности ее строения:

1. Все планеты обращаются вокруг Солнца в одном и том же направлении.

2. Все планеты вращаются вокруг своих осей в направлении, соответствующем направлению их обращения вокруг Солнца (исключение составляет Уран и, по-видимому, Венера).

3. Эксцентриситеты орбит планет очень мало отличаются от нуля, т. е. орбиты планет почти круговые. Исключение представляют орбиты Меркурия и Плутона.

4. Орбиты планет, кроме Меркурия и Плутона, лежат почти в одной плоскости, мало наклоненной к плоскости солнечного экватора.

5. Крайне неравномерно распределяется между Солнцем и планетами момент количества движения (для точки массы m, обращающейся по окружности радиуса r со скоростью v, момент количества движения равен mvr). На долю Солнца, в котором сосредоточено 99% всей массы Солнечной системы, приходится только 2% ее полного момента количества движения.

6. Вращение Солнца вокруг его оси происходит в ту же сторону, в какую движутся планеты вокруг Солнца.

7. Орбиты большинства спутников планет близки к круговым, а движения большинства спутников по их орбитам происходят в том же направлении, в каком планеты движутся вокруг Солнца.

8. Орбиты спутников в большинстве своем мало наклонены к плоскостям экваторов своих планет.

9. Планеты делятся на две группы: планеты типа Земли и планеты-гиганты типа Юпитера. Планеты с большей массой вращаются вокруг своих осей с меньшими периодами. Планеты-гиганты имеют наименьшую плотность.

Ни одной из существовавших и существующих космогонических гипотез не удается убедительно объяснить эти закономерности и особенности, и это обстоятельство порождает скептическое отношение к этим гипотезам. Наиболее распространенные современные гипотезы принадлежат к числу так называемых небулярных гипотез и в той или иной мере возрождают космогонические воззрения Иммануила Канта (1724—1804) и Пьера Симона Лапласа (1749—1827).

Первым, кто поставил проблему происхождения Солнечной системы, был знаменитый немецкий философ Иммануил Кант. Кант изложил первую в науке космогоническую гипотезу в трактате «Общая естественная история и теория неба», опубликованном в 1755 г. По сути дела сочинение Канта было бунтом против религии, перед которой даже великий Ньютон склонял свою голову, хотя это и был бунт на коленях, ибо в своем трактате Кант приносит почтительные извинения за выбор темы и неоднократно упоминает имя бога. Но именно в этой книге Кант первым в истории науки отстаивает право человеческого разума и произносит гордые слова: «Дайте мне материю, я построю вам из нее мир».

В блестящем, поэтически написанном произведении Канта нередки механические ошибки. Но ценность гипотезы Канта состоит не столько в физическом существе самой гипотезы, сколько в страстном доказательстве того, что решение космогонических проблем вполне по силам человеческому разуму.

В то время как гипотеза Канта знаменовала вступление ее тридцатилетнего автора на тернистую стезю науки, гипотеза Лапласа была венцом его многолетних работ по небесной механике. Свою гипотезу Лаплас поместил в качестве седьмого и последнего примечания в своем превосходном сочинении по астрономии «Изложение системы мира», опубликованном в 1796 г. Это не было случайностью: гипотеза, принесшая ее автору всемирную славу, была изложена им самим с оговорками. Лаплас свои размышления по поводу происхождения Солнечной системы представляет читателю «с недоверием, которое естественно там, где гипотеза не проверена наблюдением или вычислением».

Подобно Ньютону Лаплас избегал гипотез. И в этом смысле характерен приписываемый Лапласу ответ Наполеону.

«Господин Лаплас,— сказал Наполеон.— Ньютон в своей книге говорит о боге, в вашей же книге, которую я успел просмотреть, не встречал ни разу имени бога».

На вопрос Наполеона Лаплас дал гордый ответ: «Господин первый консул, в этой гипотезе я не нуждался!».

Согласно Лапласу планеты формировались из газового облака, а Кант придерживался мнения о корпускулярной природе облака, т. е. считал его состоящим из отдельных твердых частиц. По современным представлениям околосолнечное первобытное облако было газово-пылевым, а процентное содержание газа и пыли в облаке в разных гипотезах принимается различным. В отличие от работ Канта и Лапласа, в современных исследованиях предлагаются новые механизмы развития околосолнечного облака и, хотя и грубо, оцениваются с помощью математических расчетов происходящие в облаке процессы, чего, по существу, почти не было в работах первых космогонистов.

Вопрос о происхождении допланетного облака*) до сих пор вызывает наиболее жестокие споры. Некоторые, например, крупный английский астроном Ф. Хойл, придерживаются мнения об одновременном происхождении Солнца и планет из первичного облака. Но на этом пути возникают затруднения в объяснении распределения момента количества движения (количества вращения) между Солнцем и планетами, т. е. неудовлетворительно объясняются трудности, оказавшиеся роковыми для гипотезы Лапласа.

Более просто объяснить происхождение планет из облака, предположив, что это облако было захвачено Солнцем при его движении вокруг центра Галактики, в которой имеются большие скопления газово-пылевой материи. Этот подход далеко не нов. Соответствующие исследования проводились еще в конце прошлого и начале нашего веков рядом ученых, в частности, американским астрономом Си, французским аббатом Морэ, немецким ученым Нольке, а в последние десятилетия советским академиком Отто Юльевичем Шмидтом и его последователями. Так как захваченные Солнцем извне частицы могут нести любой момент количества движения, то вопрос о распределении моментов между Солнцем и планетами в этой гипотезе не возникает.

Но небесные механики, и особенно проф. МГУ Н. Д. Моисеев (1902—1955), поставили перед группой О. Ю. Шмидта другой вопрос: можно ли объяснить законами механики захват Солнцем частиц извне, а если возможно, то насколько вероятен такой захват, и наконец, удастся ли Солнцу захватить достаточное для образования планет количество вещества? Полные и математически строго обоснованные ответы на этот вопрос не даны и до сих пор, хотя в связи с этим решено много интересных небесно-механических задач, о которых позднее мы будем говорить.

Здесь отметим только, что О. Ю. Шмидту пришлось отказаться от первоначального варианта гипотезы. Кроме того, стало ясно, что захват газово-пылевого облака при чисто гравитационном взаимодействии Солнца и частиц практически невозможен. Сторонники гипотезы захвата должны были учесть важную роль неупругих столкновений

*) Это облако часто называют протопланетным.

частиц, приводящих к превращению механической энергии в тепловую.

Но и после этого продолжали высказываться возражения против гипотезы захвата. Самый серьезный дефект гипотезы захвата состоит в том, что она не может объяснить совпадение направлений вращения Солнца и планет и небольшие взаимные наклоны экваториальной плоскости Солнца и плоскостей орбит больших планет.

Оставляя в стороне вопрос о происхождении газово-пылевого облака около Солнца, ряд космогонистов нашего времени изучал различные этапы эволюции этого облака. Конечно, при таком изучении невозможно восстановить полную картину происхождения планетной системы, так как в этом варианте Солнце считается уже существующим, чего на самом деле могло и не быть. Тем не менее космогонисты надеются на этом пути получить общие представления о процессе образования планет. Не зная физического состояния Солнца в момент приобретения им допланетного облака и особенно его температуры и энергетического режима, легко впасть в ошибку при установлении химического состава планет и их атмосфер. Однако о механизме образования планет общее представление получить возможно.

Итак, сначала вокруг Солнца вращалось газово-пылевое облако, имевшее тороидальную форму, т. е. подобное баранке (рис. 17). Оно было намного толще, чем можно было бы предположить по наблюдающемуся в наше время расположению планетных орбит. Газ и пыль в этом облаке первоначально распределялись равномерно. На первом этапе эволюции облака основную роль играли взаимные неупругие столкновения твердых частиц, приводившие к потере частицами скорости и постепенному их «падению» на центральную плоскость. Иначе говоря, шел постепенный процесс «уплощения» облака.

Одновременно шел процесс выравнивания скоростей пылинок за счет их соударений. Частицы стали двигаться почти по круговым орбитам, причем случайные отклонения в относительных скоростях стали весьма малыми, от нескольких сантиметров в секунду до нескольких метров в секунду в различных зонах облака. Большую роль в эволюции облака на этом этапе сыграла солнечная радиация.

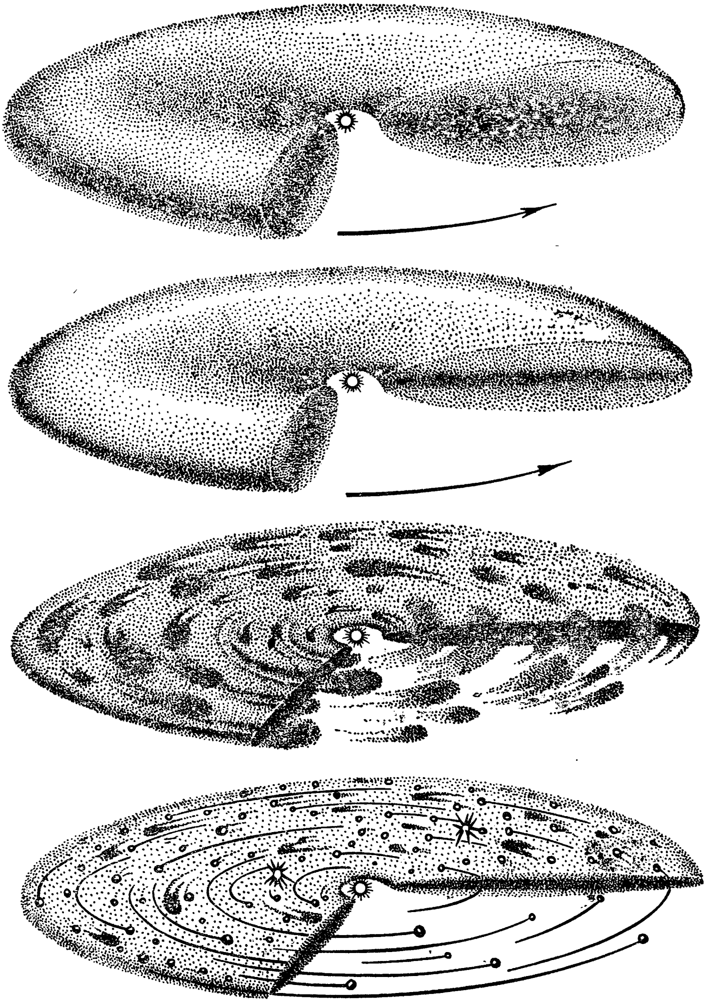

Рис. 17. Эволюция допланетного околосолнечного облака.

Ведь солнечные лучи сильно прогревали внутренние зоны облака и почти не проникали во внешние области. Поэтому во внутренней части облака могли сохраниться только частицы из тугоплавких веществ. В той же части облака, куда солнечный свет почти не проникал, наряду с твердыми частицами образовались «льдинки» из замерзших газов (возможно, метана и аммиака).

После уплощения облака и упорядочивания движения частиц в нем стал интенсивно происходить процесс объединения отдельных частиц друг с другом под действием сил тяготения и при соударениях, т. е. происходил процесс, подобный образованию хлопьев снега. В облаке возникали сгущения, размеры которых достигали размеров современных астероидов. Эти сгущения постепенно росли. При их движении вокруг Солнца они как бы «подметали» допланетное облако. Объединяя в себе частицы, двигавшиеся по орбитам с разными наклонами и эксцентриситетами, сгущения приобретали движения по осредненным орбитам малого наклона и с небольшим эксцентриситетом. Конечно, одновременно происходил и обратный процесс дробления первичных тел (рис. 18).

Этот процесс объединения и дробления из-за математической сложности задачи изучен еще недостаточно. Однако некоторые предварительные оценки уже выполнены. По подсчетам В. С. Сафронова, образование Земли должно было занять 100—200 млн. лет. Здесь под образованием Земли понимается процесс аккумуляции газово-пылевого вещества воедино, в одно тело с массой, несколько меньшей современной массы Земли.

Изложенная вкратце гипотеза в состоянии объяснить многие особенности Солнечной системы. Работа над гипотезой продолжается и сейчас. Наибольший вклад в гипотезу, высказанную в первоначальной форме еще в первые послевоенные годы О. Ю. Шмидтом, сделала группа сотрудников Шмидта, которая в настоящее время трудится в Институте физики Земли АН СССР под руководством доктора физ.-матем. наук Б. Ю. Левина. Большой вклад в разработку гипотезы еще в первые годы ее существования внесли советские ученые А. И. Лебединский и Л. Э. Гуревич. Небесно-механическую часть исследований проводил Г. Ф. Хильми.

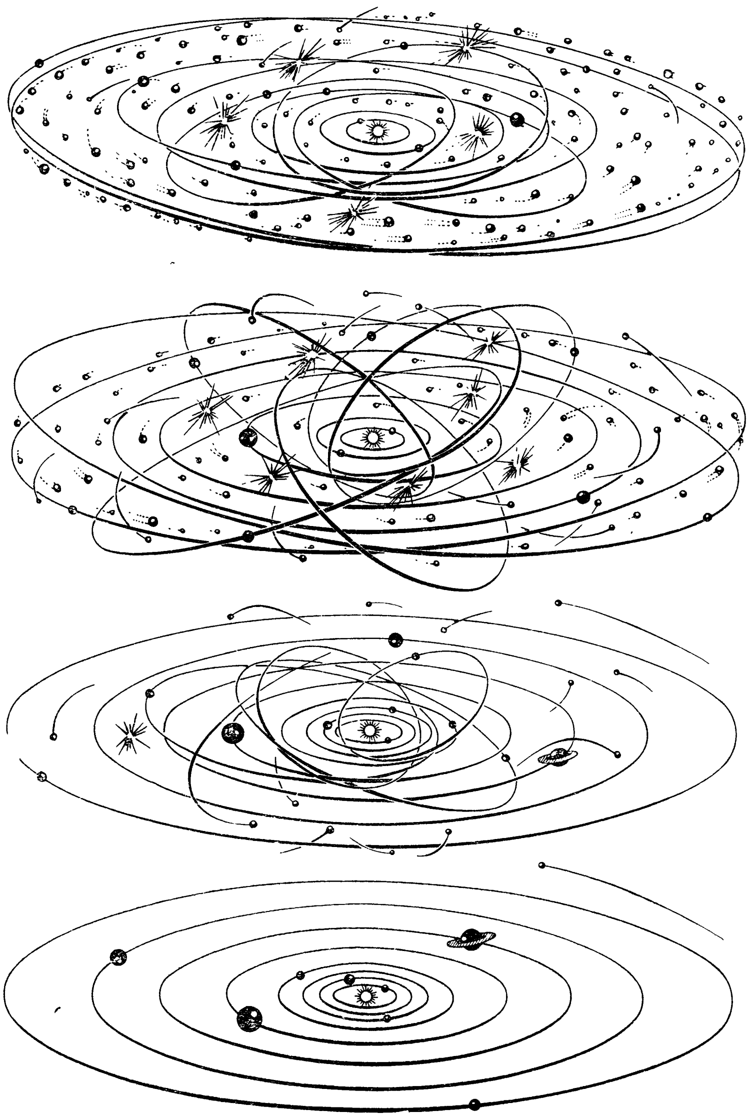

Рис. 18. Последний этап формирования Солнечной системы.

Возрождение небулярной гипотезы не является заслугой одного лишь Шмидта. Одновременно со Шмидтом изучением законов эволюции первобытного облака занимался видный немецкий ученый К. Вейцзеккер. Известный американский ученый Дж. Койпер также поддерживает и развивает идею образования планет из газово-пылевого облака. Можно отметить также вклад в развитие небулярных гипотез американцев Т. Голда и Г. Юри, француза Э. Шацмана и ряда других.

Не исключено также, что процесс эволюции был значительно сложнее, что большую роль сыграли физические процессы. На эту возможность указывали английский астрофизик Ф. Хойл и шведский физик и космогонист X. Альвен, отводившие основную роль магнитному полю Солнца и ионизации газа в допланетном облаке. Хотя эта гипотеза большинством астрономов принята не была, из нее все же можно извлечь рациональное зерно и попытаться уточнить изложенную гипотезу путем учета магнитных взаимодействий.

Гипотеза о происхождении Солнечной системы из газово-пылевого облака относит процесс образования облака на 5 млрд. лет назад, что вполне согласуется с определениями возраста горных пород и падающих метеоритов, полученными методами радиоактивного анализа.

Мы ограничимся сказанным, рекомендуя читателям более подробную статью Б. Ю. Левина*), из которой мы позаимствовали рис. 17 и 18.

---

*) Б. Ю. Левин, Вопросы планетной космогонии наших дней, «Земля и вселенная», № 6, 1967.

«Кто не знаком с законами движения, тот не может познать природы».

Галилео Галилей

Глава 2

Задача об устойчивости планетных движений

§ 9. Что такое устойчивость или прочность движения?

Наша основная задача состоит в выяснении будущего Солнечной системы, в отыскании ее геометрических и динамических характеристик в будущем на основе только законов механики. Нам необходимо проследить, как будут эволюционировать орбиты отдельных тел Солнечной системы, а также вся система в целом, возможны ли под действием внутренних и внешних возмущающих сил «выбросы» отдельных тел из Солнечной системы или, наоборот, постоянный или временный захват «чужого» небесного тела в сферу тяготения Солнца, возможны ли столкновения и падения тел друг на друга, обречены ли планеты, астероиды и кометы на постепенное или катастрофически быстрое разрушение в результате чисто механических процессов. Не менее интересен вопрос о том, будет ли планетная система распадаться, неограниченно расширяясь, или, наоборот, планеты будут постепенно приближаться к Солнцу.

Исходя из общих философских соображений, нужно, разумеется, помнить, что все, исключая Вселенную в целом, имеет свое начало и свой конец. Следовательно, «наш мир», наша Солнечная система также не вечна. Решать задачу о «конце» Солнечной системы только методами механики было бы глубоко ошибочно, так как в Солнечной системе большую роль играют не только механические, но и физические процессы. Поэтому помимо «динамической смерти» Солнечной системы логически возможна и «тепловая смерть» или совсем иной конец, даже не предугадываемый при современном уровне физических знаний. Тем не менее на ряд важнейших вопросов об эволюции Солнечной системы можно дать ответ, опираясь только на законы механики.

Можно ли решить столь сложные вопросы, если не удается получить точного решения даже в такой простой на первый взгляд задаче, как задача трех тел? Ведь имеющиеся приближенные решения уравнений движения планет пригодны лишь для сравнительно небольших, в лучшем случае исторических, а не космогонических интервалов времени! Как ни удивительно, но решение таких задач, несмотря на их трудность, оказывается более простым делом, чем построение теории движения, которая была бы справедлива неограниченно долгое время. Решение изложенных задач выполняется так называемыми качественными методами анализа. Эти методы таковы, что, не решая сложных, подчас математически неразрешимых уравнений, можно выяснить направление выпуклости траекторий во все время движения, периодичность движения, найти области, внутри которых происходит движение, доказать неизбежность или, наоборот, невозможность соударений небесных тел в процессе их движения, а также установить вероятность соударения, выяснить петлеобразный или спиралеобразный характер орбит и многое другое.

Одной из важнейших задач качественной небесной механики является *проблема устойчивости движения*. Задачи теории устойчивости движения небесных тел решаются методами общей теории устойчивости движения, представляющей весьма важный и развитый самостоятельный раздел механики. Характеризуя свойства движения механической системы, механики говорят: «система неустойчива по Ляпунову» или «система устойчива по Ляпунову», или, наконец, «система асимптотически устойчива по Ляпунову». Для выяснения смысла и содержания этих понятий обратимся к конкретным примерам из механики.

Рассмотрим покоящееся на неподвижной опоре тело яйцеобразной формы, подверженное действию только сил тяжести. Действием сил сопротивления среды пренебрежем. Если тело очень незначительно отклонить от положения равновесия, то оно либо будет совершать колебания с малой амплитудой около положения равновесия либо «упадет». Яйцо, положенное на стол «на бок», находится в состоянии устойчивого равновесия. Если его отклонить от положения равновесия, или слегка ударить по нему, то в последующем оно будет неограниченно долго находиться вблизи положения равновесия, совершая малые колебания вблизи него. Чем меньше будут начальные отклонения от положения равновесия или чем меньше будет начальный толчок, тем меньшей будет амплитуда всех последующих отклонений тела от состояния равновесия. Существенно еще одно: тело будет двигаться бесконечно долго в окрестности положения равновесия, каковы бы ни были по направлению его малые начальные смещения и каково бы ни было направление небольшого начального толчка. Равновесие такого рода называется *устойчивым в смысле Ляпунова*.

Если допустить, что на тело будет действовать сила сопротивления окружающей среды (воздуха), то в процессе движения из отклоненного положения тело либо очень быстро либо спустя довольно длительное время навсегда подойдет неограниченно близко к исходному положению равновесия, каковы бы ни были по направлению достаточно малые по величине отклонения и скорость тела. В этом случае говорят, что положение равновесия *асимптотически устойчивое*.

Наконец, третий случай. Предположим, что тело яйцеобразной формы поставлено на острый конец. Тогда, как бы малы ни были начальные отклонения или начальные толчки, тело «упадет», т. е. значительно отклонится от первоначального положения. Такое положение называется *неустойчивым по Ляпунову*.

Рассмотрим вращение стержня в горизонтальной плоскости, один конец которого шарнирно закреплен. Вращение стержня будет происходить с постоянной угловой скоростью ω по инерции, если предположить, что шарнир идеальный и в нем не действуют силы трения, а сам стержень помещен в пустоте. Вращение стержня можно задавать углом φ поворота стержня, отсчитываемого от некоторого неподвижного направления:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega (t - t_0).$$

В приведенной формуле t — текущий момент времени, t_0 — начальный момент, в который телу была сообщена угловая скорость ω, а φ_0 — начальный угол поворота. Пусть теперь в начальный момент стержень толкнули с большей угловой скоростью $\omega + \delta$, где δ — весьма малая величина; тогда новый угол поворота φ^* стержня определится формулой

$$\varphi^* = \varphi_0 + (\omega + \delta) (t - t_0).$$

Первое движение называется *невозмущенным*, а второе — *возмущенным*. Величина $\Delta\varphi = \varphi^* - \varphi$ называется *возмущением* угла φ. Очевидно, как бы ни был мал начальный толчок δ, называемый начальным возмущением, последующее возмущение угла, начиная с некоторого момента, станет больше любой наперед заданной величины. Иначе говоря, стержень в возмущенном движении отклоняется от его положения в невозмущенном движении на большие углы. Движение такого рода *неустойчиво в смысле Ляпунова*.

Рассматриваемое движение стержня, будучи вообще неустойчивым, обладает так называемой условной устойчивостью. Если стержень в начальный момент t_0 не толкать, не сообщать ему добавочной угловой скорости δ, а отклонить его от начального положения на малый угол λ, то в последующем движении, возмущенном таким образом, стержень будет двигаться по закону

$$\varphi^* = \varphi_0 + \lambda + \omega (t - t_0).$$

Возмущение угла φ всегда будет равно постоянной величине

$$\Delta\varphi = \varphi^* - \varphi = \lambda,$$

т. е. будет сохранять бесконечно долго постоянное значение. А это означает, что если в начальный момент отклонение весьма мало, то столь же малым оно останется и в последующем. Чем меньше величина возмущения угла φ в начальный момент, тем меньше она будет и во все последующие моменты времени, если только начальная угловая скорость остается неизменной, или, как говорят, не возмущается. Такое движение называется *условно устойчивым по Ляпунову*, в предположении, что начальные возмущения удовлетворяют дополнительному условию $\delta = 0$.

В приведенных примерах, за исключением примера условной устойчивости, существенную роль играли как возмущения в начальном положении, так и возмущения в начальной скорости (и в ее величине, и в ее направлении).

Движение устойчиво только в том случае, когда все возможные движения, достаточно мало отличающиеся в начальный момент времени от интересующего нас движения, названного невозмущенным, и в последующем вечно будут как по положению, так и по скоростям мало отклоненными от невозмущенного движения. Если же найдется хотя бы одна траектория, одно (!) движение, в начальный момент мало отличающееся от невозмущенного, которое постепенно, пусть и через большой промежуток времени, заметно отклонится от невозмущенного, то этого уже достаточно, чтобы выбранное невозмущенное движение было неустойчивым.

Если любое возмущенное движение, мало отличающееся от невозмущенного по положению и скоростям в начальный момент, со временем неограниченно приближается к невозмущенному, то такое движение будет *асимптотически устойчивым*.

В небесной механике важное значение имеет еще один тип устойчивости движения, а именно *орбитальная устойчивость*. Рассмотрим в качестве примера движение планеты по законам Кеплера, т. е. в рамках задачи двух тел.

Невозмущенное движение планеты происходит по эллипсу с фокусом в Солнце. Как же изменится движение планеты, если в какой-либо момент времени ее внезапно слегка «выбить» из орбиты и сообщить незначительную дополнительную скорость в произвольном направлении? Очевидно, новое, возмущенное движение планеты также эллиптическое, так как изменение скорости по величине было небольшим, но размеры, форма этого эллипса, а также его ориентация уже становятся другими (рис. 19). Сами орбиты, как возмущенная, так и невозмущенная, расположены в пространстве очень близко и отличаются незначительно. Но движение по этим орбитам, вообще говоря, будет разниться заметным образом. В самом деле, пусть a — невозмущенное, а $a^* = a + \delta$ — возмущенное значения большой полуоси орбиты. В соответствии с третьим законом Кеплера, периоды T и T^* обращения вокруг Солнца соответственно по невозмущенной и возмущенной орбитам подчиняются уравнению

$$\left(\frac{T^*}{T}\right)^2 = \left(\frac{a+\delta}{a}\right)^3 = \left(1 + \frac{\delta}{a}\right)^3,$$

откуда

$$T^{*^2} = T^2\left(1 + 3\frac{\delta}{a} + 3\frac{\delta^2}{a^2} + \frac{\delta^3}{a^3}\right).$$

Но изменение большой полуоси весьма мало́, поэтому отношение δ/a намного меньше единицы. Тогда квадратами и кубами величины δ/a можно пренебречь, так что приближенно получим

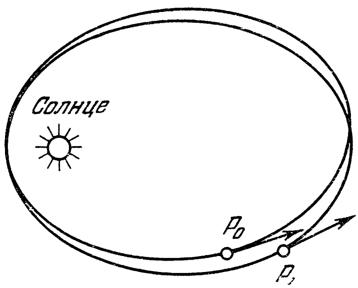

Рис. 19. Невозмущенное и возмущенное движения. P_0 — начальное положение планеты на невозмущенной орбите; P_1 — начальное положение планеты на возмущенной орбите.

$$T^{*^2} \cong T^2\left(1 + 3\frac{\delta}{a}\right).$$

Отсюда видим, что период возмущенного движения отличается от его невозмущенного значения на очень малую величину ε:

$$T^* = T + \varepsilon.$$

Рассмотрим теперь n полных оборотов по возмущенной орбите, причем число оборотов выберем достаточно большим. Тогда

$$nT^* = n\,(T + \varepsilon) = nT + n\varepsilon.$$

Выберем n так, чтобы

$$n\varepsilon \geqslant T,$$

что всегда возможно. Но это означает, что по возмущенной орбите планета совершит не n, а больше чем $n + 1$ оборот. Хотя орбиты и близки, планеты в возмущенном и невозмущенном движениях разойдутся на значительные расстояния. А это и есть неустойчивость движения планеты.

Возникает вопрос: если уже в задаче двух тел движение неустойчиво, то в задаче n тел, а значит, и в задаче об устойчивости Солнечной системы, и подавно следует ожидать неустойчивости движения?

Хотя в приведенном примере движение и не будет устойчивым, но оно происходит по орбитам, мало отличающимся друг от друга. Резко нарушается закон движения по орбите, но сама орбита деформируется мало. В задачах астрономии незначительность изменения орбит за счет мгновенных начальных возмущений означает, что планета не удаляется от Солнца и не падает на него, т. е. качественно орбита остается практически той же самой. Мы встречаемся здесь с особым типом устойчивости, но устойчивости не самого движения, а орбит. Такую устойчивость называют *орбитальной*. При исследовании устойчивости Солнечной системы достаточно установить орбитальную устойчивость движения по крайней мере для больших планет.

Орбитальная устойчивость — частный случай *устойчивости по отношению к части координат и скоростей*. Здесь малоизменяющимся за счет возмущений оказывается радиус-вектор планеты, если сравнивать его значения, соответствующие одинаковым углам поворота на орбитах. Но сами углы поворота в функции от времени изменяются различным образом и через достаточный промежуток времени будут отличаться друг от друга на любую сколь угодно большую величину. Иначе говоря, угол поворота оказывается неустойчивым. В общем случае часть координат будет обладать свойством устойчивости, а часть — нет. Движения такого рода называют устойчивыми по отношению к части переменных.

В теории устойчивости изучается ряд других типов устойчивости, на которых мы не имеем возможности останавливаться. Хочется только заметить, что свойство движения быть устойчивым Н. Е. Жуковский очень точно и образно именовал словом «прочность». Следуя Жуковскому, можно было бы сказать, что предметом наших рассуждений является проблема прочности Солнечной системы.

Постановку задачи о прочности Солнечной системы следует усложнить. Мы обязаны принять, что наряду со случайными, мгновенными возмущениями орбит планет (такие возмущения выше назывались начальными) имеют место и постоянно действующие малые возмущающие силы, которые не учитывались в нашей динамической модели Солнечной системы. Если и в этом случае движение оказывается близким к невозмущенному, то говорят об *устойчивости при постоянно действующих возмущениях.*

Созданием математически строгой и последовательной теории устойчивости движения наука обязана двум выдающимся ученым: французскому математику и механику Анри Пуанкаре (1854—1912) и русскому механику Александру Михайловичу Ляпунову (1857—1918), стяжавшим своими работами мировую известность. Большой, общепризнанный мировой наукой вклад в развитие теории устойчивости сделан рядом советских ученых, в частности, профессорами Московского университета Н. Г. Четаевым 1902—1959), Н. Д. Моисеевым и многими другими.

§ 10. Консервативные возмущения. Рассеивание энергии

Среди механических систем, т. е. собрания материальных тел или частиц, движение которых взаимозависимо, особенно любопытны по своим свойствам и крайне важны для небесной механики так называемые консервативные системы. К ним принадлежат такие механические системы, в которых постоянно имеет силу закон сохранения механической энергии, т. е. не происходит перехода, «перекачки» механической энергии в другие формы (теплоту, электричество и т. д.).

Согласно теоремам механики, разность значений кинетической энергии для двух моментов времени равна работе сил, приложенных к частицам и телам, составляющим механическую систему. *Если работа сил не зависит от путей, проходимых телами системы под действием этих сил, а определяется лишь начальными и конечными положениями этих тел, то действие сил полностью характеризуется одной функцией — потенциальной энергией.* И тогда полная механическая энергия, равная сумме кинетической и потенциальной энергий, сохраняет постоянно, как угодно долго, одно и то же числовое значение, равное ее значению в начальный момент времени.

Для механических систем, подчиняющихся закону сохранения энергии, иначе говоря, для консервативных систем, из закона сохранения энергии нередко можно извлечь вполне надежные выводы об устойчивости движения. Для иллюстрации вернемся снова к задаче об устойчивости равновесия яйца, помещенного на горизонтальную поверхность и подверженного действию только силы тяжести.

Известно, что потенциальная энергия силы тяжести равна произведению веса тела на высоту его центра тяжести. Поэтому для тела, подверженного только действию силы тяжести, выполняется и закон сохранения механической энергии. Из теории устойчивости следует, что положение равновесия устойчиво, если потенциальная энергия в положении равновесия принимает наименьшее значение по сравнению с ее значениями при всевозможных близких к равновесию положениях тела. Этот критерий устойчивости равновесия тяжелых тел был известен механикам еще задолго до рождения современной теории устойчивости, а честь его открытия принадлежит итальянскому ученому Эванджелисте Торричелли (1608—1647). Но потенциальная энергия минимальна при наиболее низком положении центра тяжести тела. Именно поэтому равновесное положение яйца «на боку» устойчиво. Равновесие яйца, поставленного на конец, условию минимума потенциальной энергии не удовлетворяет. Здесь, наоборот, при любом отклонении яйца от равновесного положения потенциальная энергия принимает меньшее значение, нежели в состоянии равновесия.

Но правильно ли проводить сравнение условий устойчивости равновесия и движения? На первый взгляд кажется, что покой и движение — взаимно исключающие, полярно противоположные понятия. На самом деле это не так. Противоположность покоя и движения весьма и весьма относительна. Под покоем понимается такое положение тела, когда его координаты относительно избранной системы координат все время остаются постоянными. Дом на поверхности Земли остается в покое, но этот покой относителен, это покой только по отношению к системе координат, жестко связанной с Землей. Если бы мы пожелали изучать движение дома относительно Солнца, то о покое не могло бы идти и речи! Поэтому, изучая движение тела, мы можем систему координат выбрать так, чтобы интересующие нас координаты тела оставались неизменными. Тогда мы с полным правом можем говорить о покое тела в этой системе координат.

Возможно обобщение понятия покоя еще в одном направлении, сущность которого мы выясним, рассматривая тяжелый шарик, помещенный на горизонтальную плоскость. Шарик может перемещаться вдоль любого горизонтального направления, но лишен возможности, находясь под действием силы тяжести, «взбежать» вверх по вертикали. Здесь наблюдается движение по горизонтали и «покой по вертикали». Если истолковывать покой в таком расширительном смысле, то ряд задач о движении небесных тел также будет сведен к задачам о покое. Пусть, например, планета движется по круговой орбите. Одна из ее координат — угол поворота радиуса-вектора планеты, — переменна, а другая координата — расстояние планеты от Солнца — неизменна. Такой «частичный покой» по одной координате, конечно, можно исследовать с помощью критериев, подобных критерию Торричелли, основанных на законе сохранения энергии.

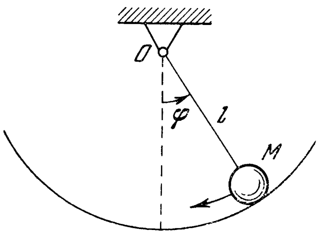

Рис. 20. Колебания математического маятника.

К сожалению, далеко не все задачи об устойчивости движения планет разрешаются с помощью закона сохранения энергии.

Из свойства консервативности системы вытекает и еще один не менее замечательный результат: в консервативных системах, вообще говоря, нельзя ожидать асимптотической устойчивости. Смысл этого утверждения нетрудно понять, если обратиться к задаче о движении математического маятника в пустоте. Под математическим маятником понимают тяжелую материальную точку, подвешенную на идеальной, нерастяжимой нити (рис. 20).

Положение маятника зададим углом отклонения нити от вертикали φ. При малых колебаниях движение маятника подчиняется закону гармонических колебаний

$$\varphi = a \sin \sqrt{\frac{l}{g}}\,(t - t_0),$$

где a — амплитуда колебаний, l — длина нити, g — ускорение силы тяжести, t — время, t_0 — начальный момент времени.

Если в начальный момент, в качестве которого для простоты примем момент $t_0 = 0$, нить находится в вертикальном положении, а скорость тяжелой точки M равна нулю, то маятник постоянно находится в равновесии. Это равновесие устойчиво по Ляпунову, так как потенциальная энергия в положении равновесия принимает минимальное значение. Будет ли эта устойчивость асимптотической? Для этого рассмотрим всевозможные движения маятника, при которых в начальный момент маятник незначительно отклонен от вертикали, а скорость его движения близка к нулю. Если все эти возмущенные движения с течением времени будут происходить в сколь угодно близкой к положению равновесия зоне, то равновесие асимптотически устойчиво. Но если найдется хотя бы одна траектория, не удовлетворяющая этому свойству, то движение будет устойчивым, но не асимптотически.

Из написанного закона колебаний маятника видим, что все близкие к положению равновесия движения подчиняются синусоидальному закону. Маятник, колеблясь около положения равновесия, не уменьшает по величине свои размахи. Следовательно, движение маятника устойчиво, но не асимптотически.

Точно так же и в более сложных механических системах, для которых выполнен закон сохранения энергии, асимптотической устойчивости быть не может. Из более тонких результатов теории устойчивости вытекает, что свойство асимптотической устойчивости и свойство неустойчивости являются грубыми свойствами. Иначе говоря, если к действующим силам будут добавлены малые возмущающие силы, то асимптотическая устойчивость сохранится. Что же касается свойства простой, неасимптотической устойчивости, то оно не является грубым, т. е. добавление к действующим силам даже весьма малых возмущающих сил может сделать движение неустойчивым.

Приведенные сведения из теории устойчивости в какой-то мере позволяют оценить степень сложности проблемы устойчивости Солнечной системы. Так как уравнения движения тел Солнечной системы с учетом всех сил и взаимодействий мы написать не в состоянии, то приходится обращаться к некоторой упрощенной модели Солнечной системы, которая была бы достаточно близка к реальной.

В качестве такой динамической модели обычно принимают *задачу n тел, т. е. рассматривают задачу о движении n материальных частиц только под действием сил взаимного ньютоновского тяготения*. Беря последовательно попарно частицы, представляющие собой тела Солнечной системы, для каждой пары частиц можно написать потенциальную энергию их взаимного тяготения. Складывая затем найденные потенциальные энергии, получим полную потенциальную энергию всей Солнечной системы. Тогда для нашей задачи закон сохранения энергии запишется в виде

$$\frac{1}{2}(m_1v_1^2+m_2v_2^2+\ldots+m_nv_n^2)-$$
$$-\left(\frac{fm_1m_2}{r_{12}}+\ldots+\frac{fm_im_j}{r_{ij}}+\ldots+\frac{fm_{n-1}m_n}{r_{n-1,\,n}}\right)=h,$$

где f — постоянная тяготения, m_i — масса i-й частицы, v_i — ее скорость, r_{ij} — расстояния между массами m_i и m_j, h — полная энергия системы.

Если бы каким-либо образом удалось доказать устойчивость Солнечной системы в рамках принятой динамической модели, то это еще не означало бы, что при более полном учете действующих сил, например, при учете эффекта фигур планет, притяжения общего галактического поля и т. д., свойство устойчивости сохранилось. Действительно, так как в рассматриваемой задаче закон сохранения справедлив, то возможна только простая, неасимптотическая устойчивость, а поэтому добавление неучтенных возмущающих сил в уравнении движения может эту устойчивость разрушить.

В некоторых случаях это осложнение удается преодолеть, приняв во внимание одну до сих пор не рассматривавшуюся категорию сил. Сначала возвратимся к задаче о математическом маятнике, внеся одну поправку в принятую нами модель. Если отказаться от искусственного предположения об отсутствии окружающей среды, то в уравнениях движения маятника нужно учесть силу сопротивления воздуха. Вряд ли стоит разъяснять эффект действия сопротивления воздуха. Из повседневного опыта он хорошо известен: амплитуда колебаний маятника под действием сил сопротивления уменьшается, и маятник начинает постепенно приближаться к положению равновесия при любых малых начальных возмущениях его положения и скорости. Но это как раз и означает, что постоянно действующие возмущающие силы сопротивления сделали положение равновесия маятника асимптотически устойчивым.

Соответствующая теорема была доказана Томпсоном (лордом Кельвином) для широкого класса механических систем. Высказанные соображения могут оказаться полезными и при решении проблемы прочности движений в Солнечной системе. Действительно, астрономические данные, подтвержденные и при полетах космических кораблей, свидетельствуют о том, что межпланетное пространство не пусто, а заполнено космической пылью. Хотя плотность космической пыли чрезвычайно мала, тем не менее на космогонических интервалах времени она в некоторой степени иногда может играть роль стабилизатора движения.

Чем же объясняется стабилизирующая роль сил сопротивления? Ответ на этот вопрос связан с природой этих сил. Под действием сил сопротивления часть механической энергии движущихся тел при столкновениях с частицами среды переходит в энергию хаотического движения молекул, т. е. в тепловую энергию. Хотя закон сохранения энергии в широком смысле, с учетом и немеханических видов энергии, например, тепловой, продолжает действовать, но закон сохранения механической энергии уже теряет силу, так как происходит превращение механической энергии в теплоту. Частицы, теряя скорость, приближаются к положению равновесия. Этот процесс называется процессом рассеивания или диссипации энергии, а силы, приводящие к потере энергии, именуются диссипативными.

§ 11. Небесный резонанс

В движении тел Солнечной системы обнаруживается много общего с колебаниями механических систем с несколькими степенями свободы. Если бы каждое из тел Солнечной системы притягивалось только к Солнцу и двигалось по круговой орбите, то его координаты выражались бы формулами (рис. 21)

$$x = a \cos n\,(t - t_0), \quad y = a \sin n\,(t - t_0),$$

в которых a — радиус круговой орбиты, n — угловая скорость (среднее движение), t — время, t_0 — начальный момент времени. Но эти формулы математически эквивалентны формуле, определяющей малые колебания математического маятника (см. § 10). Поэтому такая модельная планетная система с математической точки зрения ничем не отличается от колебательной системы.

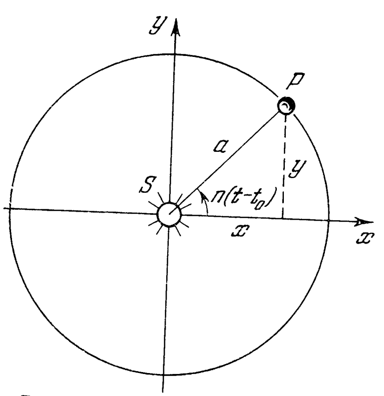

Рис. 21. Координаты планеты в круговом движении.

Однако реальная задача о движении планет более сложна, так как планеты не только притягиваются к Солнцу, но и взаимодействуют друг с другом. Как же за счет этого взаимодействия искажаются законы колебательного, синусоидального изменения координат планет? Как увидим позднее, результаты гравитационного взаимодействия планет накладывают исключительно сильный отпечаток на особенности планетных движений и существенно влияют на решение проблемы устойчивости Солнечной системы. Так как задача о движении планет механически и математически родственна задаче о колебаниях механической системы, то возникающие здесь эффекты можно выяснить, ознакомившись с результатами общей теории колебаний, к которой мы и переходим.

Русский певец Федор Шаляпин, по свидетельству его современников, обладал искусством «рвать» своим голосом стаканы. Держа в руках стакан, он подбирал звук определенной высоты, при котором стакан начинал вибрировать и спустя некоторое время рассыпался на части.

Физики нередко вспоминают другую поучительную историю о том, как под шедшим ритмичным и мерным шагом воинским подразделением рухнул прочный мост.

Оба эти феноменальных случая имеют общую физическую природу. «Виновником» в них является резонансный эффект. Что же представляет собой явление резонанса?

Обратимся снова к задаче о движении маятника. При отсутствии трения в подшипнике и сил сопротивления воздуха маятник движется в соответствии с законом гармонических колебаний сколь угодно долго, причем его амплитуда остается неизменной.

Изменим несколько опыт и приложим к маятнику малое периодическое воздействие, например, силу, изменяющуюся со временем по синусоидальному закону с частотой p. Так движется маятник электрических часов, получающий импульсы от электромагнита, который периодически включается под маятником. Маятник по-прежнему будет совершать колебательное движение, хотя и отличающееся от первоначального. Максимальное отклонение маятника изменится, оставшись, однако, конечным по величине, если только собственная частота (частота свободных колебаний) ω не совпадает с частотой приложенной периодической силы (ее часто называют возмущающей). Если же эти две частоты равны друг другу, то размах колебаний маятника будет неограниченно увеличиваться со временем. Как говорят в физике, наступит резонанс.

При резонансе происходит наиболее эффективная передача энергии от одного тела, порождающего возмущающую силу, к другому телу, совершающему вынужденные колебания. Происходящая «перекачка» энергии заставляет тело колебаться с неограниченно возрастающей амплитудой.

Теперь нетрудно дать объяснение тем явлениям, о которых говорилось в начале параграфа. Стакан имеет определенную собственную частоту. Источником возмущающей силы служат звуковые волны, распространяющиеся припении. Количественной мерой высоты звука служит частота колебаний частиц передающей среды (воздуха). Подбирая частоту звука, певец эмпирически решает задачу о резонансе, добиваясь совпадения частоты колебаний звука с собственной частотой стакана. Стакан начинает «петь», т. е. колебаться в резонанс с голосом певца, и при возросшей до определенного предела амплитуде колебаний разрушается. Аналогичным образом объясняется и история с аварией на мосту.

Рассмотренная картина может иметь место только тогда, когда силы и момент сил, вызывающие собственные колебания, пропорциональны первым степеням отклонений системы от положения равновесия. В этом случае говорят, что силы (или их моменты) линейно зависят от отклонений. Под отклонениями понимаются те приращения, которые получают величины (координаты), характеризующие положение колебательной системы при выведении ее из положения равновесия. Так, в задаче о колебаниях математического маятника роль этого отклонения выполняет угол между осью маятника и вертикалью. В задаче о колебаниях пружины за отклонение принимают удлинение пружины. В последней задаче колебания будут иметь описанный характер, если сила упругости пропорциональна отклонению, т. е. подчиняется закону Гука. Но закон Гука справедлив лишь при сравнительно малых деформациях упругого тела. Если предел упругости преодолен, например при резонансе, то в дальнейшем выводы изложенной теории теряют силу. Этот пример подтверждает положение о том, что линейная зависимость сил от отклонений справедлива практически для любых сил, если только эти отклонения достаточно малы.

Описанная теория называется теорией малых колебаний или теорией линейных колебаний. С теорией малых колебаний мы встречаемся и в небесной механике. Французский ученый Жозеф Луи Лагранж (1736—1813) в линейной постановке рассматривал задачу об изменении элементов эллиптических орбит планет со временем за счет возмущающего взаимодействия планет. Результаты теории линейных колебаний удовлетворительно описывают движение только на малых интервалах времени, так как силы, действующие в природе, обычно связаны с координатами не прямой пропорциональной зависимостью, а значительно более сложным образом. Для изучения колебательных движений в этих постоянно встречающихся в природе и технике сложных случаях математики и механики разработали специальный математический аппарат, составляющий теорию нелинейных колебаний. Задача об устойчивости Солнечной системы — одна из наиболее сложных, стоящих перед теорией нелинейных колебаний.

Основной, полностью еще не решенной проблемой теории нелинейных колебаний является задача о резонансах в нелинейных колебательных системах. В этих системах резонанс также может иметь место, но он оказывается не единственным, а расчеты движения при резонансах наталкиваются на пока еще непреодолимые математические трудности.

Если частоты свободных колебаний каждого из тел нелинейной системы совпадают, то, как и в случае малых колебаний, наступает резонанс. Этот резонанс называют *главным*. Кроме него, возможны резонансы и при других соотношениях между частотами свободных колебаний.

Как мы видели, основное условие для наступления резонанса состоит в равенстве собственных частот или, что то же самое, в равенстве соответствующих им периодов. Частота ω связана с периодом T соотношением $T = 2\pi/\omega$. Когда говорят о периоде, то обычно имеют в виду наименьший положительный период. Однако, если T — период то периодом будет и величина kT, где k — любое целое число.

Пусть теперь колебательную систему составляют два взаимодействующих тела, периоды свободных колебаний которых обозначим через T_1 и T_2, а соответствующие им частоты — через ω_1 и ω_2. Если найдутся такие два целых числа k_1 и k_2, для которых будет справедливо равенство

$$T_1/T_2 = k_2/k_1,$$

то k_1 полных периодов T_1 для первого тела в точности совпадают с k_2 полными периодами T_2 для второго тела. Но k_1T_1 является, по сказанному выше, периодом для первого тела, хотя и не наименьшим, а k_2T_2 — периодом второго тела. И в этом случае, как оказывается, также должен иметь место резонанс.

Вместо соотношения между периодами пользуются соотношениями между собственными частотами. Для этого в предыдущую формулу подставим вместо периодов их выражения через частоты. В результате получим $k_1\omega_1 = k_2\omega_2$. В этом случае говорят, что *частоты соизмеримы*.

Весьма существенно, что в написанном соотношении числа k_1 и k_2 — целые. Такие соотношения для колебательных систем выполняются не всегда. Если частоты будут выражаться произвольными иррациональными числами, то, вообще говоря, найти целые числа k_1 и k_2, при которых выполнялось бы подобное соотношение, невозможно.

Для колебательной системы с n степенями свободы, т. е. для такой системы, описание движения которой требует введения n независимых координат, колебания будут происходить по каждой из координат, и частоты по каждой из координат могут быть различными. Если обозначить частоты собственных колебаний через $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, то условие соизмеримости, резонансности частот, запишется в виде

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \ldots + k_n\omega_n = 0,$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — какая-либо система целых чисел. Если ни при каких целых числах $k_1, k_2, \ldots, k_n$ указанное соотношение невозможно, то колебательная система называется невырожденной.

Рассмотрим две планеты, движущиеся вокруг Солнца под действием сил его тяготения, пренебрегая взаимным тяготением планет. Движение планет определяется периодами их обращения вокруг Солнца T_1 и T_2. Зная периоды, находим средние движения (средние значения угловых скоростей) n_1 и n_2:

$$n_1 = 2\pi/T_1, \qquad n_2 = 2\pi/T_2.$$

Если эти периоды окажутся соизмеримыми, т. е. обяза тельно найдутся такие целые числа k_1 и k_2, что $k_1n_1 + k_2n_2 = 0$, то при учете сил взаимного тяготения планет, рассматриваемых как возмущающие силы, приходим к обычной задаче теории нелинейных колебаний, в которой выполнено условие резонансности.

На первый взгляд соизмеримость частот кажется почти невозможной, маловероятной. Но на самом деле это не так: случаи резонанса или близкие к резонансу движения по какой-то причине в Солнечной системе оказываются если и не правилом, то довольно обычным, распространенным событием. Например, средние движения Юпитера и Сатурна, соответственно равные $n_1 = 300'',1$ и $n_2 = 120''$, почти удовлетворяют соотношению (с невязкой, равной 0,0135) $2n_1 - 5n_2 = 0$. Можно указать и другое резонансное соотношение, выполняющееся с невязкой 0,0059: $n_1 - 2n_2 - n_3 - n_4 = 0$, где n_3 и n_4 — средние движения Урана и Плутона, подмеченное советским математиком А. М. Молчановым. Движение трех первых галилеевых спутников Юпитера — Ио, Европы и Ганимеда,— как заметил Лаплас, подчиняется другой весьма любопытной закономерности $n_1 - 3n_2 + 2n_3 = 0$, в которой через n_1, n_2 и n_3 обозначены в соответствующем порядке средние движения этих спутников. Последнее соотношение приводит к следующему выводу: если углы поворота спутников относительно Юпитера отсчитывать от некоторого общего направления, то, сложив угол поворота Ио с удвоенным поворотом Ганимеда и вычитая утроенный угол поворота Европы, для любого момента времени получим 180°.

Таким образом, в приведенных случаях собственные частоты соизмеримы.

Случаи соизмеримости нередки и для астероидов. Движение астероидов обычно рассматривают на основе уравнений задачи трех тел, а именно Солнца, массивного Юпитера и астероида. Существует, как оказывается, около десятка групп астероидов, средние движения которых соизмеримы со средним движением Юпитера. Примем среднее движение Юпитера n_1 равным 300″. Для астероидов типа Гильды среднее движение равно $n_2 = 450''$. Полагая в условии соизмеримости частот $k_1 = 3$, $k_2 = -2$, обнаруживаем, что $3n_1 - 2n_2 = 0$. Для малых планет типа Минервы ($n_2 = 750''$) справедливо другое соотношение: $5n_1 - 2n_2 = 0$.

Можно было бы указать и другие примеры соизмеримости. Но уже из приведенных данных ясно, что движениям небесных тел также присущ резонанс. А поэтому возникает очень важный вопрос: не «выбьет» ли резонанс соответствующие планеты, астероиды и спутники из Солнечной системы? В теории движения планет роль амлитуды исполняет большая полуось планетной орбиты, ее среднее расстояние от Солнца. В теории малых колебаний в резонансном случае, когда отсутствуют силы сопротивления, амплитуда колебаний возрастает беспредельно. Рассмотрение движений планет методами линейной теории колебаний приводит к выводу, что в резонансных случаях, при соизмеримости средних движений планет, большие полуоси их орбит будут подобно амплитудам неограниченно возрастать, и через некоторое время планеты покинут сферу действия Солнца, т. е. прекратят быть членами Солнечной Системы. Но такой вывод был бы поспешным, так как результаты линейной теории колебаний остаются справедливыми только на небольших отрезках времени.

§ 12. Вековые и периодические неравенства

Для выяснения основных особенностей движения планет на космогонических интервалах времени исследуются уравнения возмущенного движения. Эти исследования сопряжены с большими трудностями. Небесные механики умеют предвычислять положения планет достаточно точно на десятки и сотни лет вперед или устанавливать их положение в прошлые века. Но одно дело — изучить движение планет на промежутке времени в несколько столетий, и совершенно другой подход, другие методы требуются для решения даже очень приближенно той же задачи на интервалах времени в сотни миллионов и миллиарды лет!

Чтобы проиллюстрировать возникающие трудности, обратимся к упрощенной, так называемой ограниченной задаче трех тел и рассмотрим движение некоторой планеты или астероида под действием сил тяготения к Солнцу и Юпитеру в плоскости орбиты последнего. Пусть ради простоты Солнце S считается неподвижным, а Юпитер J обращается вокруг Солнца по заданной, например, круговой орбите (рис. 22). Обозначим через $\boldsymbol{a}$ вектор полного ускорения планеты P. Он равен геометрической сумме векторов $\boldsymbol{a}_s$ и $\boldsymbol{a}_j$. Вектор $\boldsymbol{a}_s$ характеризует ускорение, сообщаемое планете Солнцем, величина которого вычисляется по формуле, вытекающей из закона всемирного тяготения, $a_s = fm/r^2$, где f обозначает постоянную тяготения, m — массу Солнца, а r — расстояние от Солнца до планеты. Величина ускорения a_j, вызванного притяжением Юпитера, равна $a_j = f\mu/\rho^2$. Здесь μ — масса Юпитера, ρ — расстояние от планеты до Юпитера. Для удобства за единицу массы примем массу Солнца $m = 1$, тогда масса Юпитера будет равна $\mu = 0{,}001$.

Задача заключается в том, чтобы найти зависимость координат планеты от времени. И хотя значения координат и скорости планеты в начальный момент известны, а поэтому известно и ускорение планеты в этот момент, определить их в любое другое мгновение не так-то просто. Ведь эти координаты зависят от мгновенного значения ускорения, а последнее само определяется этими неизвестными координатами, причем зависимость между ними нелинейная!

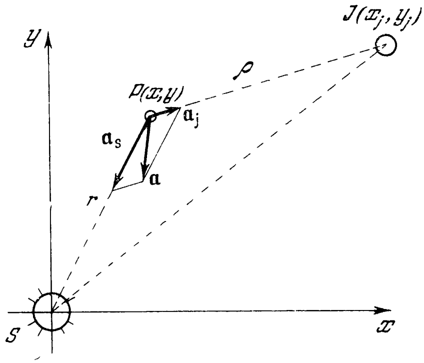

Рис. 22. Равнодействующая сил тяготения к Солнцу и Юпитеру. S — Солнце, J — Юпитер, P — планета.

Найти строгое решение этой задачи не удается. Поэтому для решения уравнения возмущенного движения $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_s + \boldsymbol{a}_j$ пользуются методом последовательных приближений. Сначала полагают массу Юпитера равной нулю. Масса Юпитера равна всего одной тысячной от массы Солнца, а поэтому можно ожидать, что получится результат с такой же ошибкой. Этот вывод верен только на небольших промежутках времени. За десятки и сотни миллионов лет суммарное действие незначительной силы тяготения Юпитера приведет к значительным искажениям, или, как говорилось ранее, возмущениям планетной орбиты.

Движение планеты под действием только солнечного тяготения, т. е. при $\mu = 0$, является невозмущенным и происходит по эллипсу. Это движение определяется без труда по законам Кеплера. Небесные механики обычно поступают следующим образом. Найдя координаты x, y планеты в невозмущенном движении, подставляют в выражение для a_j

$$a_j = \frac{f\mu}{(x-x_j)^2+(y-y_j)^2},$$

в котором через x, y обозначены координаты планеты, а через x_j, y_j — известные нам координаты Юпитера, вместо x и y их приближенные, невозмущенные значения x_0 и y_0. Тогда в правой части уравнения возмущенного движения планеты

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_s + \boldsymbol{a}_j$$

получается более простое, зависящее явно только от времени, выражение, и из этого уравнения находятся уточненные значения координат:

$$x = x_0 + \mu x_1, \qquad y = y_0 + \mu y_1,$$

где μx_1 и μy_1 — добавки, обусловленные возмущающим действием Юпитера.

Однако найденные формулы — приближенные. Они, как принято говорить, дают решение в первом приближении. Малые добавки μx_1 и μy_1 называются *возмущениями первого порядка*, так как они пропорциональны первой степени возмущающей массы Юпитера.

Затем найденные значения x и y снова подставляют в уравнение, определяющее суммарное ускорение планеты. В результате получается более точное уравнение, причем второе слагаемое в нем будет зависеть только от времени и не будет содержать неизвестных координат планеты. Это более точное уравнение также можно решить. В результате решения координаты планеты запишутся в форме

$$x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2, \qquad y = y_0 + \mu y_1 + \mu^2 y_2.$$

Добавочные члены $\mu^2 x_2$ и $\mu^2 y_2$ называются *возмущениями второго порядка.*

Продолжая этот процесс, именуемый методом последовательных приближений, можно в принципе выражения для координат получить в виде степенных функций относительно массы Юпитера:

$$x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \ldots + \mu^n x_n,$$
$$y = y_0 + \mu y_1 + \mu^2 y_2 + \ldots + \mu^n y_n.$$

В этих соотношениях члены вида $\mu^n x_n$ и $\mu^n y_n$ называются *возмущениями n-го порядка*. Они содержат множителем величину μ^n, которая при больших n очень мала. Так, для возмущений третьего порядка $\mu^3 = 10^{-9}$, т. е. равна одной миллиардной. Если даже μ^3 умножается на быстро растущие со временем функции x_3 и y_3, то и в этом случае временной интервал, на котором применены эти формулы, будет большим.

Небесные механики прошлого, само собой разумеется, стремились получить формулы, описывающие движение всех массивных членов Солнечной системы, верные на сколь угодно длительный период времени и с любой степенью точности. Но эти устремления наталкивались на препятствия. С каждым шагом при вычислении возмущений следующих порядков объем вычислительной работы прогрессивно нарастал. Уже для определения возмущений второго порядка требовались годы непрерывного труда. Небесным механикам при построении теории движения больших планет далее возмущений третьего порядка идти не удавалось. Слишком велик, даже непомерно велик был необходимый объем вычислительных работ.

Существует еще один способ изучения возмущенного движения. В этом способе определяются не координаты планеты, а элементы ее орбиты. Возмущенная орбита планеты в силу малости массы Юпитера очень близка к эллипсу. Можно сказать, что планета движется по эллипсу, который немного деформируется и одновременно как-то поворачивается. В результате большая полуось орбиты планеты a, ее эксцентриситет e и прочие элементы деформирующейся возмущенной орбиты планеты медленно изменяются со временем. Они выражаются через функции времени, которые подобно координатам, можно представить в виде сумм членов, содержащих множителями массу Юпитера в различных степенях. Например, большая полуось представится с помощью формулы вида

$$a = a_0 + \mu a_1(t) + \mu^2 a_2(t) + \ldots$$

Здесь члены $\mu^k\, a^k(t)$ называются также возмущениями k-го порядка.

Что же представляют собой функции $\mu^k a_k(t)$? Как показывают расчеты, они имеют сложную структуру и состоят из слагаемых трех типов:

1. $\mu^k A_k \cos \nu_k t$ или $\mu^k B_k \sin \nu_k t$, (A_k, B_k, ν_k — const),
2. $\mu^k C_k t^k$, $C_k = \text{const}$,
3. $\mu^k D_k t^n \sin \nu_k t$ или $\mu^k E_k t^n \cos \nu_k t$, ($D_k$, E_k, ν_k — const).

Члены первого типа называются *периодическими неравенствами* или возмущениями, члены второго типа — *вековыми неравенствами*, а члены третьего типа — *смешанными неравенствами*. Такое разделение неравенств четко проявлялось уже в многочисленных трудах Леонарда Эйлера (1707—1783), но в полной мере было раскрыто Лагранжем. Особое значение в небесной механике имеют периодические неравенства с малой величиной ν_k. Время, через которое это неравенство примет свое первоначальное значение, т. е. период, равно $2\pi/\nu_k$, и представляет собой очень большую величину, так как 2π делится на число, близкое к нулю. Неравенства (возмущения) этого типа называются *долгопериодическими* или *большими неравенствами*.

Попытаемся теперь хотя бы в общих чертах объяснить механическую природу неравенств, возникающих в возмущенном движении планет. Рассмотрим в качестве примера движение Венеры вокруг Солнца с учетом возмущений от Юпитера. Невозмущенное (кеплеровское) обращение Венеры вокруг Солнца происходит с периодом 225 земных суток, а время одного оборота Юпитера вокруг Солнца равно 12 земным годам. За время одного оборота Венеры вокруг Солнца Юпитер сместится по своей орбите примерно на 20°. Если сначала пренебречь этим перемещением, принимая во внимание его малость, то получим, что Венера, двигаясь по своей эллиптической орбите, должна постоянно «падать» в сторону Юпитера вследствие его тяготения. Конечно, падению на Юпитер препятствуют силы солнечного притяжения и стремление любого тела двигаться по инерции в направлении его скорости (первый закон Ньютона). Поэтому орбита Венеры на одном обороте будет несколько отличаться от эллипса. Она будет приближенно представлять собой овалоподобную кривую (вообще говоря, незамкнутую), близкую к эллипсу, но смещенную в сторону Юпитера. По истечении одного оборота Венеры ситуация вновь повторяется, и Венера будет испытывать точно такие же возмущающие воздействия со стороны Юпитера. Таким образом, в движении Венеры должны быть периодически изменяющиеся возмущения с периодом, равным времени ее оборота. Учтем теперь движение Юпитера по орбите. Оно приводит к тому, что направление «падения» планеты на Юпитер постоянно, хотя и медленно, изменяется. После того как Юпитер совершит полоборота по своей орбите, он будет стремиться «сместить» орбиту Венеры в направлении, диаметрально противоположном первоначальному направлению «падения». Поэтому происходит вращение овала, о котором только что говорилось. Период этих возмущений приближенно равен времени оборота Юпитера вокруг Солнца, т. е. 12 годам. Кроме отмеченных периодических неравенств в движении Венеры имеют место неравенства и с другими периодами.

Периодические неравенства в движении планет обычно бывают малыми. Максимальные амплитуды периодических смещений положения планет на небосводе составляют для Меркурия 15″, для Венеры 30″, для Марса 4′, для Урана 3′, для Нептуна 1′,5. Наиболее значительной величины достигают периодические возмущения Сатурна и Юпитера, соответственно равные 48′ и 28′. Возмущения планет, выраженные в мерах длины, оказываются весьма ощутительными. Так, например, для Нептуна они порядка 2 млн. *км*, для Марса 46 тысяч *км*. Периоды возмущений также весьма разнообразны. Наблюдаются возмущения с периодом в несколько сотен лет.

Природа вековых возмущений весьма сложна. Для некоторых координат или элементов орбиты планеты они имеют резонансное происхождение, о чем говорилось в предыдущем параграфе. Однако остается неясным вопрос об амплитуде колебаний при резонансе: будет ли она возрастать неограниченно, как в линейных колебаниях, или резонансные колебания совершаются с большой, но ограниченной амплитудой? Возникновение некоторых вековых неравенств понятно из элементарных соображений. Пусть на небесное тело действует такая сила, что большая полуось орбиты несколько уменьшается. Тогда средняя угловая скорость планеты n по третьему закону Кеплера уменьшится на малую величину Δn. Поэтому угол поворота планеты (полярный угол) вокруг Солнца определится из формулы

$$\varphi = [\varphi_0 + n(t - t_0)] + \Delta n (t - t_0).$$

В этой формуле первый член (в квадратных скобках) соответствует невозмущенному кеплеровскому движению, а второй член, $\Delta n\ (t - t_0)$, характеризует возмущение в угле поворота планеты и является вековым.

Мы привели лишь самые общие соображения, не претендующие на математическую и механическую строгость, но в какой-то мере качественно объясняющие характер планетных возмущений.

Если собрать воедино вековые возмущения для какого-либо элемента орбиты планеты, то получится многочлен, расположенный по возрастающим степеням времени t. Приведем для иллюстрации выражение для векового изменения эксцентриситета орбиты Земли:

$$e = 0{,}0167 - 0{,}0000426t - 0{,}000000137t^2,$$

причем t в этой формуле выражается в столетиях. Это выражение приближенно. Оно вычислялось Леверье с точностью до возмущений третьего порядка. Весьма вероятно, что при последовательном вычислении возмущений более высоких порядков эксцентриситет земной орбиты представился бы в виде бесконечной суммы, или, как принято говорить в математике, степенного ряда

$$e = e_0 + e_1 t + \ldots + e_n t^n + \ldots,$$

котором постоянные коэффициенты e_n постепенно убывают с ростом номера члена.

Возникает естественный вопрос: а нельзя ли вычислить эту сумму бесконечного числа слагаемых и узнать, какой же функцией записанной в конечном виде, представляется возмущение?

Исследование рядов составляет важный раздел математики и подчас приводит к неожиданным и курьезным выводам. Возьмем к примеру две элементарные периодические функции $\sin \nu t$ и $\cos \nu t$. В математике строго показано, что эти функции, имеющие период $2\pi/\nu$, совершенно точно выражаются с помощью бесконечных сумм, рядов:

$$\sin \nu t = \nu t - \frac{\nu^3 t^3}{3!} + \frac{\nu^5 t^5}{5!} - \frac{\nu^7 t^7}{7!} + \ldots,$$

$$\cos \nu t = 1 - \frac{\nu^2 t^2}{2!} + \frac{\nu^4 t^4}{4!} - \ldots$$

Кстати, эти ряды используются при вычислении значений тригонометрических функций на электронных вычислительных машинах. Каждое слагаемое ряда имеет вид At^k и не является периодической функцией, но в совокупности эта бесконечная сумма оказывается периодической!

Возвратимся теперь к выражению для эксцентриситета Земли. Не исключено, что после вычисления возмущений всех порядков получится сумма бесконечного числа слагаемых, равная комбинации синусов, или более сложных периодических функций, или функций колебательного типа. Каждое из неравенств в выражении для эксцентриситета является непериодическим, а взятые в совокупности все вековые неравенства окажутся периодическими! Обрывая ряд на очень малых по величине слагаемых, вместо периодической функции мы получаем непериодическую, возрастающую с течением времени, и приходим на больших промежутках времени к грубо ошибочным результатам, из которых нельзя извлечь правильных представлений об эволюции орбит планет!

Пусть, например, в точном решении задачи о возмущенном движении выражение одного из элементов орбиты содержит член вида $A \sin \mu\nu t \sin nt$, где A — постоянный коэффициент, n — величина, примерно равная среднему движению планеты, ν — постоянный множитель, а μ — масса возмущающего тела. Используя разложение синуса в ряд по степеням t, находим

$$A \sin \mu\nu t = A\left(\mu\nu t - \frac{A}{3!}\mu^3\nu^3t^3 + \ldots\right)$$

Тогда будем иметь

$$A \sin \mu\nu t \cdot \sin nt = A\,\mu\nu t \sin nt - \frac{1}{3!}A\mu^3\nu^3t^3 \sin nt + \ldots$$

Но в этой сумме каждый из членов представляет собой смешанное неравенство.

Теперь представим себе, что при решении задачи о возмущенном движении не была известна истинная форма точного решения $r = A \sin \mu\nu t \cdot \sin nt$ и пришлось применить метод последовательных приближений. Пусть для возмущений первого и второго порядков относительно возмущающей массы μ получились выражения $r_1 = A\mu\nu t \sin nt$, $r_2 = 0$. Полученные формулы свидетельствовали бы о постепенном разрушении орбиты, о ее неустойчивости. Но вправе ли мы из приближенного решения делать вывод, что рассматриваемый элемент возмущенной орбиты изменяется периодически с неограниченно возрастающей во времени амплитудой?

Из приведенных рассуждений совершенно ясно, что подобный вывод был ошибочным, так как мы опирались на решение, вполне пригодное для предвычисления положения планеты на десятки и сотни лет, но совершенно бесполезное и даже вредное (!) при решении задачи об устойчивости.

§ 13. Проблема Лапласа — Лагранжа

Реальны ли вековые или смешанные возмущения в больших полуосях и эксцентриситетах планетных орбит или они порождены дефектами используемых математических методов? Это основная задача, от решения которой зависит ответ на вопрос об устойчивости Солнечной системы.

Кардинальный для небесной механики и астрономии вопрос об устойчивости Солнечной системы был поставлен около двухсот лет назад Лапласом в его мемуаре, представленном в 1773 г. Парижской Академии наук. В этом мемуаре Лаплас доказал ставшую позднее знаменитой теорему «об устойчивости Солнечной системы», как иногда трактуют результат Лапласа. Результат Лапласа состоял в утверждении, что при несоизмеримости средних движений планет в выражениях для больших полуосей возмущенных орбит планет отсутствуют вековые неравенства первого порядка относительно масс планет. Это лишь в первом приближении означало, что планеты в своем движении вокруг Солнца не могут в результате сил взаимного притяжения изменить эллиптические орбиты на параболические и покинуть Солнечную систему.

Делавшийся отсюда вывод о вековой устойчивости Солнечной системы был нестрогим и преждевременным. Кстати, и само «доказательство» устойчивости Солнечной системы выполнено Лапласом только с точностью до квадратов эксцентриситетов. Через несколько лет знаменитый Лагранж дополнил доказательства Лапласа, распространив их на все степени эксцентриситета и синуса угла взаимного наклонения орбит планет.

Лагранж обратил также внимание на проблему вековых и долгопериодических возмущений и взаимосвязь последних, о чем уже говорилось в § 12. Лагранжу было ясно, что из-за недостатков математических методов вместо долгопериодического неравенства может получаться вековое. Лаплас и Лагранж подчеркнули важность задачи, показав, что большое неравенство в движении Юпитера и Сатурна, порожденное соизмеримостью их средних движений (см. § 11), в действительности не принадлежит к вековым. Ясно

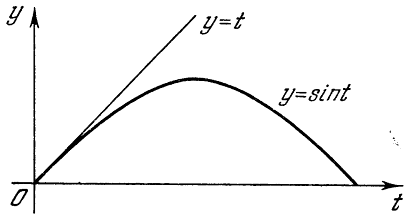

Рис. 23. Долгопериодические и вековые возмущения.

было и другое обстоятельство, а именно: эксперимент, практика, наблюдения здесь пока тоже бессильны. Если фактическое изменение какого-либо элемента орбиты планеты долгопериодическое синусоидальное, то для его выявления нужны весьма продолжительные наблюдения, охватывающие промежутки времени в несколько столетий, и даже тысячелетий! На небольших промежутках времени мы невольно заменим дугу синусоиды отрезком прямой (рис. 23) $y = t$ или, в лучшем случае, дугой кривой $y = t - t^3/6$.

Итак, привычная теория, и наблюдения бессильны дать ответ. Казалось бы, круг замкнулся. Но Лагранж настойчиво искал ответ. Им была по-новому переосмыслена задача и уточнена ее математическая постановка. Лагранжем был найден и новый математический метод решения.

Прежде всего Лагранж занялся анализом элементов орбит планет. Все ли они подлежат исследованию при решении задачи о прочности планетных движений? Оказалось, элементы можно в этом смысле разбить на две группы: к первой относятся большая полуось a, эксцентриситет e и наклонность орбиты i, поведение которых определяет «устойчивость» Солнечной системы, а ко второй — угловые элементы: долгота восходящего узла ☊, угловое расстояние перигелия от узла ω и момент прохождения через перигелий П.

Как бы ни менялись со временем за счет возмущений элементы Ω, ω и Π, планеты не покинут Солнечную систему и не упадут на Солнце. В самом деле, изменение ω приведет только к вращению планетного эллипса в его плоскости, либо к колебаниям относительно некоторой оси. Вращение эллипса в его плоскости происходит только при наличии в ω вековых возмущений. Значит, подобное вековое неравенство неопасно! Другой элемент — долгота восходящего узла Ω. Его изменение приводит либо к вращению

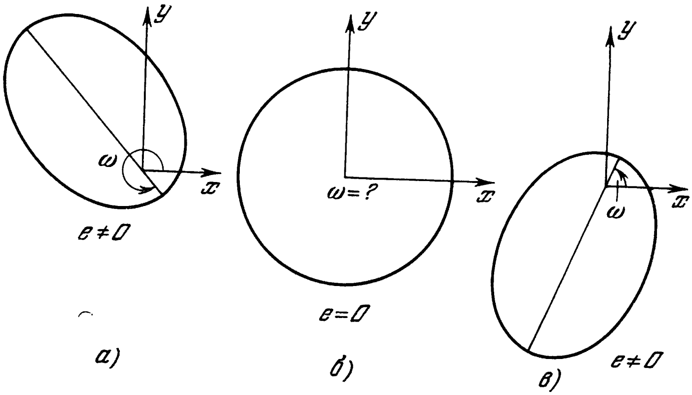

Рис. 24. Скачкообразное изменение углового расстояния перицентра от узла.

орбитальной плоскости вокруг некоторой оси (прецессии) либо к колебаниям относительно оси. В первом случае Ω также будет непериодической функцией времени, т. е. будет содержать вековые члены, однако эти вековые неравенства не повлияют на решение вопроса об устойчивости. Также обстоит дело и с оставшимся элементом Π.

В математических же исследованиях эти элементы будут помехой. Одно из многих возможных осложнений рассмотрим на следующем примере. Пусть в некоторый момент времени планета движется по эллипсу с исчезающе малым эксцентриситетом, уменьшающимся за счет возмущений. На рис. 24, *а* указано положение линии аспид в этот момент и отмечено угловое расстояние перигелия от узла. Наступит момент времени, когда эксцентриситет обратится в нуль (рис. 24, *б*). Положение линии апсид в этот момент оказывается неопределенным, «любым», подобно географической долготе полюса Земли. Спустя некоторое время эксцентриситет снова примет отличное от нуля значение, однако эллипс уже окажется сплюснутым в ином направлении (рис. 24, *в*). Следовательно, угловое расстояние перигелия от узла изменится «скачком». Математическое исследование изменения элементов при наличии «скачков» резко осложняется, но на задаче об устойчивости «скачкообразные» изменения ω не сказываются!

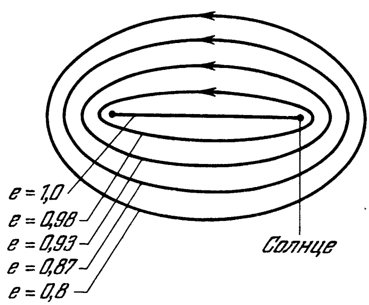

Рис. 25. Эволюция эллиптической орбиты при $e \to 1$.

Лагранж обратил внимание и на важность изучения эксцентриситета возмущенной орбиты планеты. На первый взгляд кажется достаточным установить лишь ограниченность большой полуоси в любой момент времени. Но это решает задачу об устойчивости планетных орбит только частично, а именно в смысле невозможности «разбегания» планет. Упускается другая неприятная для нас альтернатива: возможность столкновения планет с Солнцем.

Большая полуось планетной орбиты может оставаться ограниченной, конечной. Однако если эксцентриситет орбиты стремится к единице, то эллипс будет «сплющиваться», приближаясь по форме к отрезку прямой. Расстояние в перигелии планеты от Солнца будет уменьшаться при $e \to 1$ (рис. 25). Так как минимальное расстояние планеты от Солнца равно $r_{\min} = a\,(1 - e)$, то при $e \to 1$ это расстояние стремится к нулю. Очевидно, что планета врежется в Солнце, если, начиная с какого-нибудь момента времени станет справедливым неравенство $r_{\min} < r_{\odot}$ (здесь $r_{\odot}$ — радиус Солнца).

Таким образом, самое главное при анализе проблемы устойчивости — исследование элементов a, e и i. Но так как для этих элементов нельзя написать уравнений, не зависящих от других элементов, то Лагранж делает искусный маневр, «загоняя» угловые элементы под знаки тригонометрических функций и вводя новые элементы орбит:

$$p = e\cos(\Omega + \omega), \qquad u = \sin i\cos\Omega,$$
$$q = e\sin(\Omega + \omega), \qquad v = \sin i\sin\Omega,$$

Какие бы вековые члены ни входили в угловые элементы ω, Ω, тригонометрические функции синус и косинус нейтрализуют их, так как эти тригонометрические функкии всегда изменяются в конечных пределах: от -1 до $+1$.

Выполнив эти преобразования, Лагранж получил наиболее удачные уравнения для исследования эволюции элементов орбит планет. Этими уравнениями пользовался сам Лагранж, Лаплас и ряд последующих исследователей. Они позволили получить «тригонометрические выражения для вековых возмущений», т. е. то, о чем говорилось выше.

В 1784 г. Лаплас опубликовал статью, содержавшую две замечательные теоремы. Первая из них утверждает: *Если массу каждой планеты умножить на квадратный корень из большой полуоси ее орбиты и на квадрат эксцентриситета, то сумма таких произведений для всех планет за вычетом периодических членов есть величина постоянная.*

Эта теорема выражается при помощи следующей формулы:

$$m_1 e_1^2\sqrt{a_1} + m_2 e_2^2\sqrt{a_2} + \ldots + m_n e_n^2\sqrt{a_n} = \text{const}.$$

Здесь m_i — масса планеты, a_i — большая полуось, e_i — эксцентриситет, n — число планет.

Вторая теорема гласит:

Если массу каждой планеты умножить на квадратный корень из большой полуоси ее орбиты и на квадрат тангенса наклонности, то сумма этих произведений для всех планет за вычетом периодических неравенств есть величина постоянная.

Обозначая через i наклонение орбиты к плоскости эклиптики, выразим вторую теорему с помощью следующей формулы:

$$m_1\sqrt{a_1}\,\mathrm{tg}^2 i_1 + m_2\sqrt{a_2}\,\mathrm{tg}^2 i_2 + \ldots + m_n\sqrt{a_n}\,\mathrm{tg}^2 i_n = \text{const}.$$

Справедливость теорем устанавливалась при некоторых ограничивающих предположениях, а именно, предполагалось, что большие полуоси орбит испытывают малые колебания. Как видим из приведенных формул, если эксцентриситет одной орбиты возрастает, то эксцентриситет другой должен уменьшаться. То же самое справедливо и относительно наклонностей орбит. Но увеличение эксцентриситета любой из планет оказывается ограниченным. Если, например, происходит увеличение эксцентриситета и наклонности орбиты Юпитера, то он может возрасти только на 25%, а наклонность к эклиптике может измениться не более чем вдвое. Напомним, что все это справедливо в предположении малых изменений больших полуосей орбит планет и одинакового направления движения планет вокруг Солнца. Если бы последнее не имело места, то различные члены в обсуждаемых формулах имели бы различные знаки, а тогда нам не удалось бы сделать заключения об ограниченности изменения e и i.

Количественные результаты Лагранжа и Лапласа представляют сейчас в основном исторический интерес, так как Нептун и Плутон в то время еще не были открыты, сведения об орбите Урана были неточны, а массы Меркурия, Венеры и Марса были неизвестны и для них были взяты предположительные значения. Леверье в 1839 г. проделал повторные вычисления с учетом возмущений от Урана, но не приняв во внимание Нептун, открытый им позднее, в 1846 г.

Результаты Леверье в пределах точности его теории свидетельствовали о существовании верхних пределов изменения элементов. Так, для эксцентриситетов и наклонностей планетных орбит получились следующие результаты, содержащиеся в табл. 7.

Приведенные величины получены при выполнении расчетов без нахождения короткопериодических неравенств, что, впрочем, делалось и в других исследованиях этого направления. Поэтому не приводится никаких данных о больших полуосях планетных орбит, так как они остаются неизменными в том смысле, что в них отсутствуют вековые возмущения первого порядка.

Наиболее полные и надежные результаты принадлежат Стокуэллу, завершившему свои вычисления к 1870 г. Из них можно вывести ряд важных заключений об эволюции планетных орбит на достаточно протяженных промежутках времени порядка нескольких сотен тысяч лет. Пример

Таблица 7

Пределы изменения эксцентриситетов и наклонностей орбит больших планет

Планета	Предел изменения эксцентриситета	Предел изменения наклонности
Меркурий	0,226	9°17′
Венера	0,087	5 18
Земля	0,078	4 52
Марс	0,142	7 9
Юпитер	0,062	2 1
Сатурн	0,085	2 33
Уран	0,064	2 33

представления вековых возмущений в более правильной, тригонометрической форме дает полученная Стокуэллом формула для одного из лагранжевых элементов орбиты Юпитера:

$$\begin{aligned} e\cos(\Omega+\omega) = &-0{,}0000090\cos(5'',463803t+88°0'38'')+\\ &+0{,}0000106\cos(7'',248427t+20°50'19'')-\\ &-0{,}0000011\cos(17'',014373t+335°11'31'')+\\ &+0{,}0000011\cos(17'',784456t+137°6'36'')+\\ &+0{,}0000636\cos(0'',616685t+67°56'35'')+\\ &+0{,}0431601\cos(3'',716607t+28°8'46'')+\\ &+0{,}0156383\cos(22'',460848t+307°56'50''). \end{aligned}$$

Аналогичную форму имеют выражения для других элементов орбит планет.

Приведем некоторые данные об эволюции орбит больших планет Солнечной системы, следующие из теории Стокуэлла.

Меркурий. Наклонность его орбиты к основной плоскости изменяется в пределах от 4°44′27″ до 9°10′41″. Максимум эксцентриситета составляет 0,23172. Минимальное расстояние планеты от Солнца находится по формуле $r_{\min} = a(1-e)$. Подставляя сюда $a = 0{,}387$ а.е. и вместо e его наибольшее значение, находим, что $r_{\min}$ составляет 44,8 млн. *км*. Следовательно, столкновение Меркурия с Солнцем в пределах точности теории невозможно. Орбита Меркурия вращается в своей плоскости и делает полный оборот примерно за 238 тысяч лет (таков период одного из долгопериодических возмущений!). Кроме того, медленно вращается и сама плоскость орбиты в направлении, обратном направлению обращения Меркурия вокруг Солнца, причем период этого движения также составляет около 200 тысяч лет.

Венера. Наибольшее значение, достигаемое эксцентриситетом ее орбиты, равно 0,0706329, а наименьшее — нулю. Относительно вращения или колебаний линии апсид и линии узлов орбиты Венеры анализ Стокуэлла дает неуверенные результаты. В учебниках нередко пишут, что орбита Венеры является единственной из орбит, имеющей обратное движение в своей плоскости, т. е. движение в сторону, противоположную направлению обращения Венеры вокруг Солнца. Хотя это утверждение верно и для наших дней, тем не менее с точки зрения теории эволюции Солнечной системы такое утверждение следует считать ошибочным. В самом деле, возвращаясь на тысячу лет назад от начального момента, в качестве которого Стокуэлл в своих расчетах принял начало 1850 года, находим, что в этот период времени орбита Венеры вращалась в своей плоскости в прямом направлении. Теперь в течение 30 000 лет это вращение будет идти в обратном направлении, причем орбита повернется примерно на 60°. Но затем вращение орбиты снова станет прямым. Хотя эти движения и не имеют решающего значения в проблеме разрушения Солнечной системы, тем не менее для физической эволюции планет Солнечной системы эти особенности движения крайне существенны. По-видимому, некоторые из возмущений планетных орбит помогут объяснить причины ледниковых периодов на планетах.

Максимум наклонности орбиты Венеры равен 3°16′18″. Вращение плоскости орбиты остается неясным.

Земля. Эксцентриситет земной орбиты в процессе изменения не превосходит значения 0,067735, а наименьшее значение равно нулю. Максимальное значение наклонности земной орбиты составляет 3°6′0″. Хотя движение самой плоскости земной орбиты известно на большом протяжении времени, все же остается неясным, будет ли плоскость орбиты вращаться или совершать только колебательные движения около некоторого положения. В наши дни земная орбита вращается в положительном направлении, и это движение сохранится в течение следующих 100 тысяч лет. Изменение эксцентриситета и наклонности земной орбиты даются на рис. 26.

Марс. Изменения эксцентриситета и наклонности орбиты Марса аналогичны приведенным для Земли. Так как возможные неточности в определении массы Земли сильно

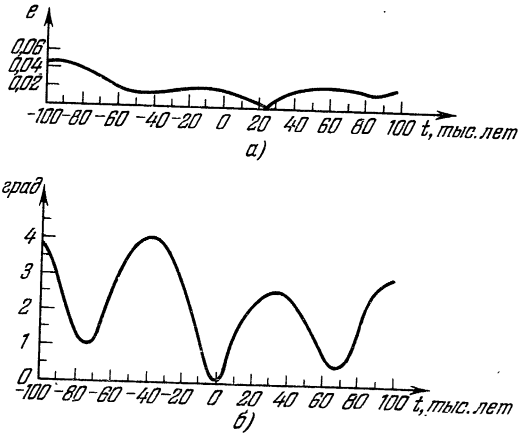

Рис. 26. Изменение эксцентриситета (*а*) и наклонности (*б*) земной орбиты ($t = 0$ соответствует 1850 г.)

изменяют выводы о характере возмущенного движения Марса, то заключение Стокуэлла о постоянном вращении орбиты Марса в ее плоскости и движении самой плоскости следует признать ненадежным.

Юпитер. Эксцентриситет Юпитера колеблется в пределах от 0,0255 до 0,608. Орбита Юпитера вращается с годичной угловой скоростью 17″,8. Наклонность орбиты изменяется незначительно: от 0°47′16″ до 1°0′39″. Плоскость орбиты Юпитера обладает обратным вращением со скоростью 26″ в год.

Сатурн. Наименьшее значение эксцентриситета равно 0,0124, а наибольшее — 0,0843. Перигелий орбиты Сатурна в течение года в прямом движении перемещается на 22″,5. Наклонность орбиты заключается в пределах от 0°47′16″ до 1°0′39″. Плоскость орбиты вращается точно так же, как и у Юпитера. Это совпадение не случайно, а связано с взаимным притяжением этих двух гигантских планет. Оказывается, что восходящие узлы их орбит всегда будут находиться в диаметрально противоположных точках, если пренебрегать периодическими возмущениями. С учетом последних восходящие узлы могут сближаться, но не менее, чем на 153°.

Уран и Нептун движутся подобно другим планетам, и мы не будем приводить числовых данных о возмущениях их орбит. Что же касается орбиты Плутона, то он в расчеты Стокуэлла не включался, так как был открыт значительно позднее. Его теория движения была закончена лишь в 1964 г. научной сотрудницей ленинградского Института теоретической астрономии АН СССР Ш. Г. Шараф. Кроме того, для Плутона были получены долгосрочные прогнозы. Зарубежные ученые С. Коуэн и Е. Хаббард рассчитали эволюцию орбит пяти внешних планет на 120 000 лет вперед. Оказалось, что даже при наиболее тесных сближениях Нептуна и Плутона расстояние между ними будет не менее 1—8 а. е. Расположение перигелия орбиты Плутона внутри орбиты Нептуна не оказывает существенного влияния на устойчивость движения Плутона. Дж. Ичиро-Хори и Дж. Джиакаглия изучили вековые неравенства в движении Плутона и пришли к важному заключению, что эксцентриситет e и наклонность i его орбиты могут изменяться в тесных пределах $(0{,}243 < e < 0{,}266; 14°{,}1 < i < 15°{,}4)$, а линия апсид должна совершать полный оборот за 15 млн. лет.

Результаты Лапласа, Лагранжа и других авторов об устойчивости Солнечной системы основывались на анализе возмущений только первого порядка, поэтому их выводы об устойчивости Солнечной системы были приближенными. Последователи Лапласа и Лагранжа продолжали искать пути решения проблемы.

Пуассон (1809 г.) рассмотрел возмущения второго порядка и установил, что при отсутствии соизмеримостей средних движений больших планет среди неравенств второго порядка для больших полуосей планетных орбит вековые члены отсутствуют, однако имеются смешанные члены. Наконец, в конце прошлого века С. Харетю в возмущениях третьего порядка нашел чисто вековые неравенства.

В фундаментальной работе Стокуэлла позднее были обнаружены некоторые ошибки и опечатки. Поэтому уже в конце прошлого века были предприняты новые вычисления вековых возмущений орбит больших планет. Такую трудоемкую вычислительную работу провел П. Гарцер. В наше время на основе более точных значений астрономических постоянных (масс планет, больших полуосей их орбит и т. д.) в 50-х годах Д. Брауэр и Вурком, а затем ленинградские ученые Ш. Г. Шараф, Н. А. Будникова и В. И. Скрипниченко предприняли новые исследования и получили более точные и уверенные сведения о вековых изменениях элементов орбит больших планет. Наши ученые все расчеты проводили на быстродействующей электронной вычислительной машине М-20.

В работах Лагранжа и Стокуэлла остался невыясненным вопрос о характере изменения долгот восходящих узлов орбит Венеры, Земли, Марса и долгот перигелиев орбит Венеры, Земли и Урана. Оставшийся пробел в обсуждаемой проблеме был ликвидирован в работе В. И. Скрипниченко. На рис. 27, заимствованном нами из статьи В. И. Скрипниченко *), приведены результаты расчетов. Кривые на этих графиках изображают движение узлов и перигелиев. Если бы орбиты рассматриваемых планет вращались в своих плоскостях равномерно, а сами плоскости в свою очередь также вращались равномерно, то графики изменения элементов были бы прямыми линиями, изображенными на рис. 27. Так как разности ординат соответствующих кривых и прямых в один и тот же момент времени могут превосходить 180°, то возмущенные движения узлов и перигелиев происходят иногда в прямом, а иногда в обратном направлениях. Но в основном преобладают движения в одну сторону.

Другое уточнение старых результатов получено Шараф и Будниковой в работе о вековых изменениях элементов земной орбиты. Их расчеты охватывают интервал времени

*) В. И. Скрипниченко, «Определение средних движений элементов планетных орбит в тригонометрической теории вековых возмущений», Бюлл. Института теоретич. астрономии, т. XI, № 7 (130), 1968.

в 30 млн. лет (назад от 1950 г.). Полученный результат важен не только в связи с проблемой устойчивости движения Земли, но и, что весьма примечательно, для геологии

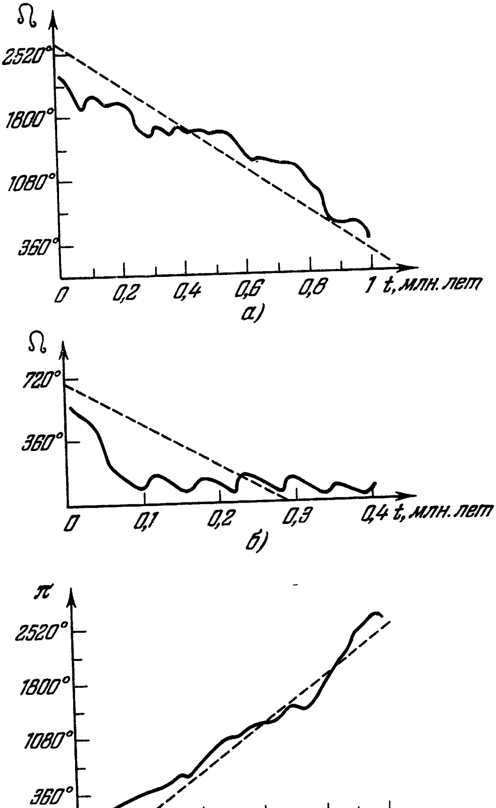

Рис. 27. Движение восходящих узлов Венеры (*а*), Земли (*б*) и перигелия Венеры (*в*).

и климатологии. В 1939 г. югославский ученый М. Миланкович *) установил зависимость между инсоляцией (величина

*) М. Миланкович, Математическая климатология и астрономическая теория колебаний климата, ГОНТИ, 1939.

тепловой энергии, получаемой Землей от Солнца) для разных географических широт и вековыми изменениями эксцентриситета, долготы перигелия Земли и наклонности земной орбиты (эклиптики) к экватору. Трудами Миланковича и другого югославского ученого, проф. В. В. Мишковича, был заложен фундамент новой отрасли науки, получившей название астрономической теории колебаний климата. Позднее Д. Брауэр и Вурком распространили

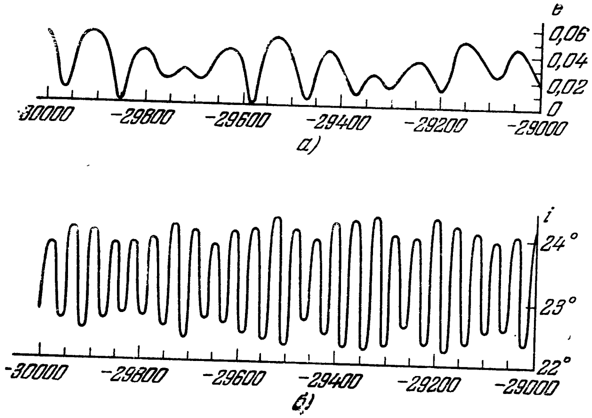

Рис. 28. Изменение эксцентриситета (*а*) и наклонения к экватору (*б*) орбиты Земли (по оси абсцисс отложено время в тысячелетиях до 1950 г.)

результаты югославских ученых на более длительный период. Шараф и Будникова повторно произвели расчеты и уточнили теорию Брауэра и Вуркома. Эти расчеты свидетельствуют, что изменения эксцентриситета и наклонности для земной орбиты носят характер малых колебаний. Небольшую часть графического материала Шараф и Будниковой мы воспроизводим на рис. 28.

Все приведенные результаты означают, что ни «распада» Солнечной системы, ни «падения» планет на Солнце нельзя ожидать очень и очень долгое время, но отсюда еще не вытекает желаемое: «вечная» устойчивость Солнечной системы! Поэтому многие ученые, математики и небесные механики, продолжали прилагать усилия к разрешению этой проблемы. Ценный вклад в этом направлении был сделан уже упоминавшимся выдающимся французским ученым А. Пуанкаре, оценившим влияние отдельных вековых и смешанных неравенств на эволюцию планетной системы.

Поиски новых способов решения задачи о возмущенном движении планет, которые не приводили бы к возникновению вековых членов там, где они не обусловлены физической природой, продолжались. Используя достижения аналитической динамики, француз Шарль Делоне (1816—1872) развил способ построения решений в «чисто тригонометрической» форме, который позднее был усовершенствован Ф. Тиссераном и Г. Хиллом. Казалось бы, задача решена. Однако осталось еще одно «но».

Решение Делоне, так же как и все предыдущие, имело форму бесконечных сумм, рядов, слагаемыми в которых были только тригонометрические функции синус и косинус. Делоне с помощью своего метода преодолел самую главную трудность, но тем не менее его метод не выдержал чисто математической проверки. Математики, как известно, стремятся к крайней строгости доказательств, от чего «прикладники» подчас отмахиваются, считая это ненужной и излишней вещью. В данном случае потребовалось решить совершенно обычную при использовании рядов задачу: установить, будут ли ряды, полученные по методу Делоне, сходящимися. Дело в том, что понятие суммы в математике определено только для конечного, хотя и сколь угодно большого числа слагаемых. Если же число слагаемых бесконечно, то они в совокупности могут давать или конечную величину или бесконечно большую величину, или вообще ничего определенного не давать, т. е. понятие суммы бесконечного числа слагаемых иногда лишено смысла. Если ряд обладает суммой, то он называется сходящимся, в противном случае математики говорят о расходимости ряда. Если ряды Делоне сходятся, тогда ответ на вопрос об устойчивости Солнечной системы будет дан. Если ряды Делоне расходятся, то вопрос останется открытым.

Чтобы представить себе важность понятия сходимости рядов, рассмотрим один частный пример из теории рядов. Наиболее простой и известный читателю из элементарной математики пример ряда представляет сумма бесконечного числа членов геометрической прогрессии

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots$$

Сумма этого ряда существует, иначе говоря, ряд сходится только тогда, когда знаменатель прогрессии удовлетворяет условию $|q| < 1$, т. е. в случае убывающей прогрессии. Если же $|q| \geqslant 1$, то этот ряд будет расходящимся. При $q \geqslant 1$ сумма n первых членов ряда растет неограниченно при неограниченном возрастании n. При $q = -1$ сумма n первых членов при росте n попеременно принимает значения 0 или a и вообще ни к какому пределу не стремится.

Насколько осторожно следует обращаться с рядами, видно из другого примера. Пусть имеется числовой ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \ldots$$

Переставим члены ряда так, чтобы после каждого положительного члена следовало два отрицательных

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \ldots$$

Сложив затем каждый положительный член с последующим отрицательным членом, найдем

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \ldots$$

но этот ряд, полученный из исходного простой перестановкой слагаемых, после вынесения общего множителя 1/2 за скобку будет равен

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\right),$$

что в два раза меньше суммы исходного ряда.

Хотя этот пример и не имеет прямого отношения к поставленной задаче, все же представляет собой убедительное свидетельство, насколько осторожно следует пользоваться рядами. Ведь даже простая перестановка слагаемых некоторых рядов приводит к неожиданным результатам!

Итак, исследование сходимости рядов, получающихся в теории возмущенного движения, существенно необходимо. Такие исследования проводились. Они привели к неутешительным результатам: бесконечные суммы, ряды, используемые в небесной механике в теории возмущений, как правило, являются расходящимися, т. е. не имеют сумм.

Полный результат исследования рядов был весьма любопытным. Хотя сами ряды и расходятся, но их обрывки, первые члены бесконечных сумм, хорошо представляют реальные движения планет на конечных промежутках времени!

Проблема устойчивости Солнечной системы оставалась неразрешенной, а теорема Лагранжа — Лапласа, именовавшаяся теоремой об устойчивости Солнечной системы, в строгом смысле осталась недоказанной.

Штурм задачи продолжался. Ею занимались астрономы, механики, математики. Общая проблема устойчивости породила и ряд частных задач об устойчивости и эволюции орбит отдельных тел. В заключительной главе книги мы еще вернемся к общей задаче, а в последующих главах рассмотрим основные результаты ученых, полученные в задачах об эволюции движения отдельных тел Солнечной системы.

«Может случиться,... что один астероид налетит на другой и что при этом движение его изменится настолько, что он наскочит на Землю...».

Джеймс Джинс

Глава 3

Будущее астероидов и комет

§ 14. Астероидное кольцо

После открытия «закона» Боде (см. § 6) в Солнечной системе стало «недоставать» ровно одной планеты. В последовательности Боде 0, 3, 6, 12, 24, 48 и т. д. число 24 было лишним. Прибавляя к нему, как уже объяснялось, 4 и деля сумму на 10, находим среднее расстояние от Солнца следующей за Марсом планеты, которое равно 2,8 а. е. Но в XVIII в. следующим после Марса считался Юпитер с большой полуосью орбиты 5,2 а. е.

И вот в общем-то неверный закон стимулировал поиски недостающей планеты. И эта планета была найдена Джузеппе Пиацци (1746—1826), директором Палермской обсерватории. Этой планетой был астероид *), получивший название Церера. Но каково же было удивление астрономов, когда немногим более года спустя Генрих Ольберс (1758—1840) нашел еще одну планету, названную Палладой, также движущуюся между орбитами Марса и Юпитера! В 1804 г. был открыт астероид Юнона, а в 1807 г.— Веста. Следующая малая планета, Астрея, была открыта почти сорок лет спустя Карлом Генке (1793—1866), продолжавшим поиск 15 лет. Последующие открытия уже, пожалуй, не удивляли астрономов. Они продолжаются и до сих пор.

*) Термин «астероид» введен В. Гершелем и означает «звездоподобный».

Астероидам посвящено много гипотез. Некоторые из них касаются происхождения астероидов или их эволюции. Одни гипотезы связывают с астероидами возможные катастрофы в солнечной системе, согласно другим астероиды пополняют спутниковые свиты больших планет.

Большинство астероидов движется от Солнца на расстояниях от 2,2 до 3,6 а. е., т. е. их орбиты в основном лежат в круглом кольце, внутренний и внешний радиусы которого равны указанным числам. Однако по своим средним расстояниям от Солнца астероиды распределяются неравномерно. У них наблюдаются «излюбленные» зоны, и зоны, которые астероиды «стараются избегать».

Эти пустоты в распределении астероидных орбит делят все многочисленное семейство астероидов на несколько подсемейств, каждое из которых образует собственное кольцо. Выделяют семь таких основных колец. Замечательно и крайне важно, что границы отдельных колец связаны с характеристиками движения Юпитера и Марса.

При исследовании движения астероидов исходят из задачи трех тел или ее упрощенного варианта — ограниченной круговой задачи трех тел. Орбиты астероидов находятся ближе всего к орбите Юпитера. Поэтому на их движение, кроме Солнца, наибольшее влияние оказывает Юпитер. Притяжение других планет на довольно больших промежутках времени весьма мало́. Характер движения зависит от соотношения между средними движениями Юпитера и исследуемого астероида. Если средние движения соизмеримы, т. е. их отношение равно рациональному числу, то в движении астероидов могут проявляться резонансные эффекты.

Обозначим через n_j среднее суточное движение Юпитера, приняв его равным 300″, а через n — среднее движение астероида. Если отношение n_j/n для какой-либо малой планеты равно отношению целых чисел, то условия наступления резонанса оказываются выполненными. Зная среднее движение n, находим период обращения астероида вокруг Солнца P, а затем по третьему закону Кеплера вычисляем большую полуось орбиты. Таким образом, резонансным случаям соответствуют вполне определенные средние расстояния астероида от Солнца. Небесные механики выделили семь резонансных случаев. Это случаи, в которых отношение n_j/n равно 1 : 1, 3 : 4, 2 : 3, 1 : 2, 2 : 5, 1 : 3, 2 : 7 и 1 : 4.

Особенность распределения астероидов по большим полуосям легко обнаруживается с помощью следующего графического построения. Возьмем прямоугольную систему координат и на ее оси абсцисс будем откладывать значения

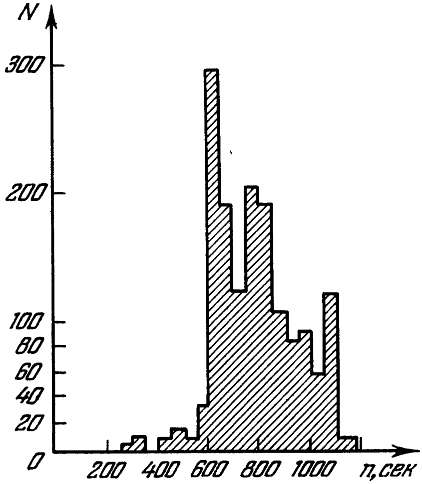

Рис. 29. Зависимость между числом астероидов N и средним движением n.

средних движений, а на оси ординат — количество астероидов, имеющих соответствующее среднее движение. Тогда получится ступенчатая фигура (рис. 29), называемая гистограммой *). Взглянув на построенную гистограмму, обнаруживаем у нее несколько минимумов, соответствующих именно резонансным средним движениям, для которых n_j/n равно 1/2, 1/3, 2/5 и т. д. Как говорят небесные механики, в кольце астероидов имеются «люки» соизмеримости. На эту особенность впервые обратил внимание в 1866 г. Д. Кирквуд.

*) Гистограмма, приведенная на рис. 29, взята нами из книги Г. А. Чеботарева «Аналитические и численные методы небесной механики», «Наука», 1965.

Возникает весьма сложный, не разрешенный до сих пор вопрос, от которого зависит решение проблемы устойчивости астероидного кольца: будут ли со временем астероиды стремиться двигаться по «резонансным» орбитам или, наоборот, они станут двигаться в промежутках между ними и не смогут подходить к ним? В настоящее время в непосредственной близости к резонансным орбитам движутся только малочисленные группы наиболее «смелых» астероидов. К ним принадлежат астероиды типа «троянцев», типа Гильды со средним движением $n = 450''$, Гекубы ($n = 600''$), Минервы ($n = 750''$) и т. д. Может быть, в процессе эволюции эти группы астероидов будут пополняться? А возможно, и наоборот, астероиды этих групп будут покидать свои «опасные» орбиты?

Во всяком случае, совершенно непонятно существование люков соизмеримости. Если в возмущенном движении астероиды стараются избегать люки соизмеримости, т. е. резонансные орбиты, то неясно, почему астероиды группы Гильды и других подобных групп предпочитают движение почти по резонансным орбитам? В поведении ряда астероидов обнаруживаются неожиданные особенности. Интересный случай был указан Н. С. Самойловой — Яхонтовой относительно астероида Гриквы, принадлежащего к группе Гекубы. Первоначально ее среднее суточное движение составляло $596''$, к 1947 г. под действием возмущений от Юпитера оно возросло и достигло резонансного значения, равного удвоенному среднему движению Юпитера. Таким образом, Юпитер на какой-то срок «перебросил» Грикву на резонансную орбиту. В результате этого, как показал американский астроном Рабе, в течение сорокалетнего срока видимое положение Гриквы сместится относительно невозмущенного на $57°$.

В чем кроется причина столь странного поведения избранных малочисленных групп астероидов? Возможно, что эта особенность связана с процессом происхождения астероидов. Но возможно, что здесь сказывается постоянное действие возмущений, в первую очередь от ближайшей к астероидам планеты Юпитер, а также и от других планет.

Большинство небесных механиков, изучавших вековые возмущения астероидов, склоняются к мнению, что люки соизмеримости возникли не в процессе образования астероидного кольца, а позднее, в результате возмущений от Юпитера, особенно значительных для резонансных орбит. Но этот вывод нельзя считать окончательным и надежным, так как он основан на анализе возмущений первого порядка. Таким образом, мы имеем лишь аргумент в пользу высказанного соображения, но не корректное математическое доказательство.

В главе 5 будут подробно обсуждаться важные результаты, полученные проф. Арнольдом в задаче об устойчивости движения больших планет. Его математические результаты применимы и к астероидам. Если использовать результаты Арнольда, считая движение астероидов происходящим не по резонансным орбитам, то можно прийти к выводу об устойчивости их орбит в том смысле, что большие полуоси и эксцентриситеты орбит мало изменяются за счет возмущений, и астероиды не смогут ни опасно сблизиться с Солнцем, ни вырваться из сферы его тяготения.

Но имеется и другая точка зрения. Ее придерживается советский математик А. М. Молчанов, считающий резонанс не случайным, а закономерным явлением в Солнечной системе. Если принять гипотезу Молчанова, то выводы об устойчивости потребуют дополнительной проверки.

§ 15. Существовал ли Фаэтон?

Судьбу астероидного кольца было бы намного легче установить, если бы нам была известна прошлая история астероидов, их происхождение. Однако и в этом направлении исследовательские работы еще далеки от завершения. Сделаны лишь первые шаги.

В прошлом веке один из первооткрывателей астероидов, Ольберс, высказал гипотезу о происхождении астероидного кольца, долгое время считавшуюся правдоподобной.

Согласно гипотезе Ольберса некогда вокруг Солнца на среднем расстоянии 2,8 а. е. обращалась только одна гипотетическая планета, позднее разлетевшаяся на куски в результате какой-то катастрофы. Возможно, она разрушилась при тесном сближении с Юпитером. Осколки этой распавшейся небольшой планеты и представляют собой современные астероиды. Гипотетическую планету одни астрономы называют Фаэтоном, а другие Астероидией. Хотя гипотеза Ольберса оказалась ошибочной, все же она сыграла положительную роль, так как стимулировала поиски новых малых планет.

Согласно другой гипотезе астероидное кольцо — это остатки той первобытной материи, из которой образовалась планетная система. Здесь в период образования Солнечной системы формировалась самостоятельная планета, но она несколько «опоздала» родиться, так как почти сформировавшийся Юпитер своим мощным тяготением помешал процессу объединения первоначальных сгущений, двигавшихся в зоне астероидов (см. § 9).

С ростом числа открытых астероидов все чаще и чаще ученые стали задаваться вопросом о необходимости тщательной проверки гипотезы Ольберса. Большое исследование предпринял японский ученый Хираяма. Статистические исследования показали неоднородность астероидного кольца и распадение его на несколько семейств с различными свойствами, трудно объяснимыми с позиций гипотезы Ольберса.

Статистическое изучение астероидов было продолжено азербайджанским ученым Г. Ф. Султановым, руководившим постройкой первоклассной горной астрономической обсерватории, расположенной близ древнего азербайджанского города Шемахи. Г. Ф. Султанов предпринял всестороннее изучение семейства астероидов. Сначала был поставлен и разрешен вопрос, каким по своему характеру должен быть «взрыв» или «мгновенное разрушение» планеты, позволяющие объяснить современное строение астероидного кольца. Султанов просмотрел ряд вариантов распределения скоростей у осколков гипотетической планеты Фаэтон в момент «взрыва», однако ни один из них не привел к наблюдаемому распределению астероидных орбит. Отсюда следовал вывод: гипотетической планеты Фаэтон существовать не могло.

Но этим Г. Ф. Султанов не ограничился. Выполняется новый тщательный анализ, но уже на основе другого предположения, что некогда на месте астероидов двигалась не одна планета, а несколько первичных крупных тел. Исходя из ограниченной задачи трех тел «Солнце —

Юпитер — первичное тело», удалось выяснить, какие из элементов орбит в процессе эволюции остаются почти неизменными, устойчивыми. Затем были проведены статистические подсчеты распределения астероидов по этим элементам. Как оказалось, астероиды разделяются на 12 групп-семейств астероидов, у которых значения устойчивых элементов близки друг к другу. Это свидетельствовало об общности происхождения астероидов каждой группы. В самом деле, так как выявленные устойчивые элементы орбит астероидов почти не изменяются за счет притяжения Юпитера, то элементы имели приблизительно то же самое значение, что и сейчас, и в те далекие времена, когда кольцо астероидов только зарождалось. По-видимому, каждое семейство астероидов произошло из одного первичного тела.

Остался нерешенным вопрос о происхождении первичных тел: произошли ли они в процессе конденсации первобытного облака, некогда окружавшего Солнце, или эти первичные тела были осколками «взрыва» большой планеты?

Хотя сам Султанов и не дает ответа, тем не менее ясно, что попытки сохранить подновленный вариант гипотезы Ольберса носят искусственный характер. Трудно отыскать причины, вызвавшие сначала распад большой планеты на несколько отдельных кусков, а затем распад каждого из кусков на части.

Так, оказав благотворное влияние на развитие астероидной астрономии, погибла старая гипотеза Ольберса.

§ 16. «Греки» и «троянцы»

Небесная механика еще не в состоянии воспроизвести полную картину эволюции астероидного кольца. Слишком сложна математически эта проблема! Тем не менее о будущем ряда различных групп астероидов сейчас можно говорить вполне уверенно.

Рассмотрим группу астероидов, характеризующихся соизмеримостью их средних движений со средним движением Юпитера типа 1 : 1. Такая соизмеримость означает равенство средних движений Юпитера и астероидов. Эти астероиды и Юпитер движутся вокруг Солнца с одним и тем же периодом почти по одной и той же орбите.

Прежде чем говорить об этой группе малых планет, остановимся на одном любопытном примере из истории небесной механики, имеющем прямое отношение к исследуемой группе астероидов.

В 1772 г. Лагранж опубликовал замечательный мемуар, посвященный задаче трех тел, удостоенный премии Парижской Академии наук. В нем, занимаясь уравнениями задачи трех тел, Лагранж, между прочим, указывает на существование одной группы движений в задаче трех тел, которые легко исследуются и описываются несложными математическими формулами.

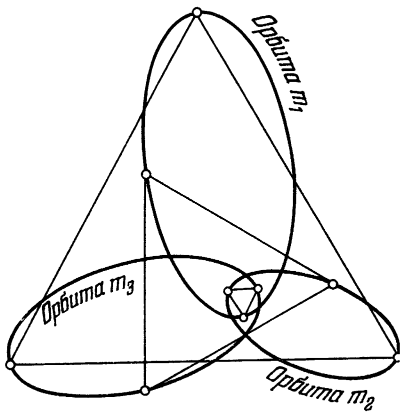

Рис. 30. Треугольные решения Лагранжа.

Три взаимно притягивающие по закону Ньютона точки m_1, m_2, m_3, расположенные в вершинах равностороннего треугольника произвольных размеров, при определенных по направлению и величине скоростях будут и в последующем двигаться, постоянно образуя равносторонний треугольник. Этот треугольник периодически пульсирует и, подчиняясь второму закону Кеплера, вращается вокруг центра масс трех притягивающихся точек. На рис. 30 изображено лагранжево решение (указаны положения тел для трех моментов времени).

Если относительные начальные скорости равны нулю, то треугольник сохраняет постоянные размеры. Такие решения задачи трех тел называются *треугольными либрационными решениями*. Обнаружив эти решения, сам Лагранж не придал им значения, отнесясь к ним скорее как к математическому курьезу, нежели как к нужному для астрономической практики решению. Но природа в своих проявлениях оказалась более многообразной, чем предполагал Лагранж.

22 февраля 1907 г. в Гейдельберге был открыт астероид, названный впоследствии Ахиллесом, движущийся примерно по орбите Юпитера впереди него на 60° (рис. 31). Солнце, Юпитер и астероид Ахиллес образуют приближенно равносторонний треугольник со стороной 5,2 а. е. Таким образом, было обнаружено движение, предсказанное Лагранжем чисто теоретическим путем намного ранее.

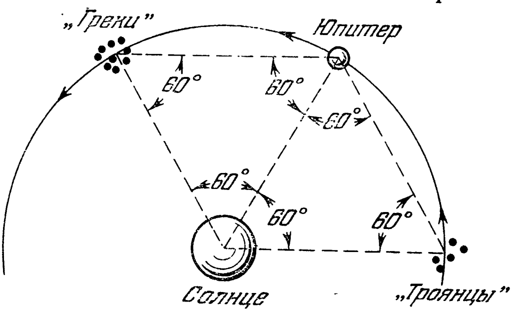

Рис. 31. «Греки» и «троянцы».

Последующие поиски привели к открытию еще восьми малых планет, движущихся вблизи Ахиллеса почти в вершине равностороннего треугольника. Кроме того, найдено еще пять астероидов, движущихся почти по орбите Юпитера на угловом расстоянии 60° от него, но отставая от него. Они тоже образуют треугольную лагранжеву конфигурацию.

Эти малые планеты названы в честь героев древнегреческого эпоса о Троянской войне. Астероиды первой группы — Ахиллес, Гектор, Нестор, Агамемнон, Одиссей, Аякс, Диомед, Антилох и Менелай, исключая Гектора,— названы именами героев греческого войска. Иногда поэтому их и называют «греками». Астероиды, отстающие от Юпитера, получили свои названия в честь защитников Трои. Это Приам, Эней, Анхиз, Троил, кроме которых в эту группу входит еще Патрокл. Астероиды этой группы именуются «троянцами».

Как и для Юпитера, среднее движение «греков» и «троянцев» соизмеримо со средним движением Сатурна (соизмеримость 5 : 2).

Из многолетних высокоточных наблюдений за движением «греков» обнаружено, что эти планеты не находятся в точности в вершинах равносторонних треугольников и некоторые из них иногда отклоняются на заметные расстояния. Например, Ахиллес «убегает» вперед почти на 11°, описывая весьма замысловатую по своей форме орбиту, причем его движение близко к периодическому. Это обстоятельство побудило московского ученого Ю. А. Рябова предпринять попытку построить теорию движения астероидов группы троянцев, подобрав подходящим образом периодическую траекторию. В результате длительной и трудоемкой работы Рябов пришел к выводу, что троянцы могут с течением времени уходить на далекие расстояния от треугольных точек относительного равновесия. В связи с этим еще большее значение приобрела старая задача об изучении устойчивости лагранжевых треугольных точек либрации.

Интерес к треугольным решениям Лагранжа еще более усилился после открытия, сделанного астрономом Краковской обсерватории К. Кордилевским. Кордилевский занимался изучением межпланетной материи. После десятилетних поисков весной 1961 г. он обнаружил два облака метеорной пыли, находящихся вблизи вершины равностороннего треугольника, в двух других вершинах которого находятся Земля и Луна. Позднее им были найдены и другие космические облака, располагающиеся в вершине другого равностороннего треугольника с вершинами в Земле и Луне.

Открытые Кордилевским новые небесные объекты предоставляют астрономам второй пример лагранжевых решений.

Как объяснить существование космических облаков Кордилевского? Частица попадает в положение равновесия относительно Земли и Луны, если, оказавшись в вершине равностороннего треугольника «Земля — Луна — частица», она мгновенно лишится скорости относительно Земли и Луны. Можно полагать, что процесс накопления космической пыли в треугольной точке либрации, весьма медленный и постепенный, происходит в результате столкновений частиц в окрестности точек либрации, приводящих к потере частицами относительной скорости. Если бы соударения метеоритных частиц не происходили, то частицы должны были бы проходить через точки либрации без остановок.

Представляется вероятным существование облаков космической пыли не только в окрестности Земли, но и других планет, обладающих массивными спутниками, в частности, у планет-гигантов.

Насколько устойчивы эти образования? Будут ли со временем облака расти или, наоборот, происходит постепенный процесс их рассеяния? Ответ на этот вопрос зависит от решения задачи об устойчивости треугольных точек либрации.

Заметим, что вопрос о концентрации космической пыли в окрестности планет для астрономии не нов. Астрономы пытались воспользоваться еще одним классом частных решений, также открытым Лагранжем, для объяснения так называемого противосияния — слабого свечения областей неба, располагающихся в направлении, диаметрально противоположном направлению на Солнце. Это свечение вызвано солнечным светом, отраженным от разреженных облаков космической материи, располагающихся вблизи Земли. Советские ученые И. С. Астапович и В. Г. Фесенков пришли к выводу, что от внешних слоев земной атмосферы тянется газовый шлейф, похожий на кометный хвост.

Часть околоземной космической материи,— считали астрономы,— собирается в так называемых *коллинеарных точках либрации*. Лагранж обнаружил, что, кроме треугольных положений относительного равновесия, круговая задача трех тел допускает еще один класс положений относительного равновесия. Эти точки равновесия лежат на прямой, проходящей через центры притягивающих тел. Если рассматривать задачу трех тел в точной постановке, то можно найти такие движения трех притягивающихся тел, в которых все три тела постоянно находятся на одной прямой, вращающейся вокруг центра тяжести притягивающихся тел в соответствии со вторым законом Кеплера, а расстояния между телами изменяются со временем также согласно законам Кеплера. Эти частные решения были названы *коллинеарными*.

Возможность накопления метеорной и газовой материи в районах коллинеарных точек либрации была теоретическим путем исследована небесными механиками. Космическая материя будет накапливаться только в том случае, если коллинеарные решения устойчивы. Исследования устойчивости этих решений привели к отрицательному результату. Это значит, что материя, поступающая в окрестность коллинеарной точки либрации, случайными возмущениями выбрасывается из этой окрестности. Но тогда должен существовать постоянный источник, питающий скопления космической материи.

Исследование устойчивости треугольных решений представляло более трудную задачу, полностью не разрешенную и в настоящее время. Если бы удалось получить точный ответ в этой задаче, то стала бы ясной дальнейшая судьба и троянцев, и облаков-спутников, открытых Кордилевским.

Самый простой путь состоит в исследовании потенциальной энергии троянца. Так как небесный треугольник Лагранжа должен быть неизменным, то мы имеем случай относительного равновесия, которое будет устойчивым, если в треугольной конфигурации потенциальная энергия астероида минимальна. Но этот способ ничего не дал, так как ни минимума, ни максимума потенциальной энергии в треугольной точке либрации не обнаружено. Поэтому положение относительного равновесия может быть как устойчивым, так и неустойчивым.

Небесные механики пошли по другому пути и решили сначала изучить малые колебания астероида вблизи точки либрации. Соответствующие исследования выполнялись как для треугольных решений точной задачи трех тел, так и для ограниченной круговой задачи трех тел. В обеих задачах были получены условия устойчивости малых колебаний. Первое наиболее подробное решение задачи об устойчивости треугольных решений, не потерявшее своего значения и до сих пор, дал в 1875 г. известный английский механик Эдвард Дж. Раус. Условие устойчивости Рауса в первом приближении имеет вид

$$\frac{(m_0+m_1+m_2)^2}{m_0 m_1+m_1 m_2+m_2 m_0}>27.$$

Здесь через m_0, m_1 и m_2 обозначены массы взаимно притягивающихся точек.

Раус решал задачу об устойчивости относительно величин сторон треугольника. Кроме того, он дополнительно предполагал, что начальные возмущения не выводят ни одно из трех тел из общей плоскости невозмущенного движения, а скорости тел в возмущенном движении также лежат в этой плоскости. Таким образом, полученная Раусом устойчивость была условной.

Работу Рауса продолжил А. М. Ляпунов. Он снял ограничение, наложенное Раусом на начальные возмущения, и исследовал на устойчивость не стороны, а углы треугольника, т. е. он считал лагранжево решение устойчивым, если в возмущенном движении треугольник, образованный притягивающимися телами, всегда мало отличается от равностороннего. Ляпунов пришел к тому же условию устойчивости, что и Раус.

Применяя условие устойчивости к телам Солнечной системы, без труда находим, что и движение троянцев под действием сил тяготения к Солнцу и Юпитеру, и движение облаков Кордилевского под действием сил тяготения Земли и Луны в первом приближении устойчивы. Следовательно, их движения на протяжении больших промежутков времени будут происходить вблизи точек либрации.

Из условий Рауса — Ляпунова легко находится условие устойчивости точек либрации в ограниченной круговой задаче трех тел. Оно записывается в виде неравенства

$$1 - 27\mu(1 - \mu) > 0,$$

где принято $m_2 = 0$, $m_1 = \mu$, $m_2 = 1 - \mu$ (масса системы принята равной единице), которое выполняется для произведения масс притягивающих тел, меньших 1/27.

Итак, мы установили устойчивость треугольных решений на конечном, хотя и большом интервале времени. Но остается неясным, сохранится ли свойство устойчивости постоянно, всегда?

В недавнее время вновь стали предприниматься многочисленные попытки решить задачу строго и полностью. Наибольшего успеха добился А. М. Леонтович под руководством проф. Арнольда. Им было доказано, что движение вблизи рассматриваемого положения относительного равновесия будет устойчивым, т. е. движущееся тело малой массы всегда останется на близком расстоянии от вершины равностороннего треугольника, если и в начале оно было достаточно близко от него. Все траектории, начинающиеся в близкой окрестности точки либрации и характеризующиеся малой начальной скоростью относительно притягивающих тел, будут всегда располагаться недалеко от начального положения.

Этим результатом практически решен старый вопрос об устойчивости точек либрации. Осталось рассмотреть небольшое количество случаев, выпавших из исследований Леонтовича и скорее представляющих лишь теоретический интерес *).

Конечно, полученное решение дает ответ лишь на математическую часть проблемы. Нужны еще дополнительные высокоточные определения из наблюдений фактических движений астероидов троянской группы, прежде чем можно будет сделать вывод, что мы имеем орбиты именно такого рода, которым посвящена работа Леонтовича. Но теперь с большой степенью вероятности можно говорить об устойчивости движений, близких к треугольным точкам либрации.

§ 17. О столкновениях астероидов с планетами

Говоря о возможных «перипетиях в судьбе» астероидов, нужно обсудить и другие возможные варианты разрушения астероидного кольца или по крайней мере ухода отдельных астероидов из области этого кольца. Это тем более необходимо, поскольку накопленный наблюдательный материал дает достаточные основания считать, что ряд астероидов либо гибнет, «неосторожно» приближаясь к большим планетам, либо, возможно, переходит в разряд спутников планет.

Рассматривая первую возможность, вспомним падение Сихотэ-Алиньского метеорита, происшедшее 12 февраля 1947 г. Экспедиция акад. В. Г. Фесенкова и Е. Л. Кринова обнаружила на месте падения свыше сотни воронок диаметром от 0,6 до 28 *м* и глубиной до 6 *м*. На месте падения

---

*) Результаты старых работ излагаются в популярной статье Г. Н. Дубошина, «О некоторых проблемах неклассической небесной механики», «Мироведение», т. 24, вып. 1, 1935.

было собрано 37 *т* метеоритного железа. А первоначальный вес метеорита по оценкам мог достигать миллиона тонн! Фесенков выполнил сложные вычисления и нашел орбиту движения метеорита до встречи с Землей. Согласно этим расчетам афелий орбиты находился далеко за орбитой Марса и лежал внутри пояса астероидов (рис. 32). Фесенков пришел к выводу, что Сихотэ-Алиньский метеорит до падения был небольшим астероидом или его осколком.

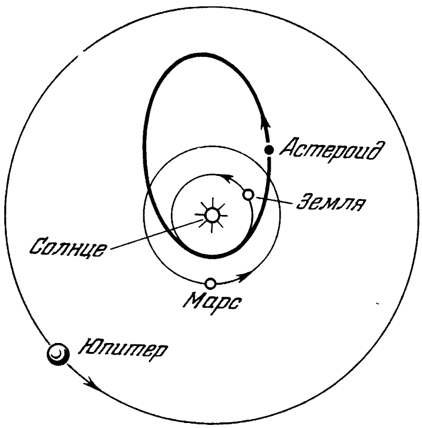

Рис. 32. Орбита Сихотэ-Алиньского метеорита до встречи с Землей.

Падение астероидов на планеты — событие вполне возможное, хотя и редкое на исторических промежутках времени. Об этом свидетельствуют данные об орбитах ряда астероидов. Приведем несколько примеров.

В конце прошлого века наблюдения движения астероида Эрос показали, что он в своем движении пересекает орбиты Марса и Земли, углубляясь внутрь орбиты последней более чем на 20 млн. *км* и периодически возвращаясь в афелии в область астероидного кольца. Орбита Эроса на две трети лежит внутри орбиты Марса. Малая планета Адонис в своем движении пересекает орбиты четырех планет: Марса, Земли, Венеры и Меркурия. В перигелии Адонис подходит к Солнцу на расстояние чуть меньше 60 млн. *км*, т. е. ближе, чем Меркурий (рис. 33).

В 1932 г. астероид Аполлон прошел мимо Земли на расстоянии 10 млн. *км*. В 1936 г. минимальное расстояние между Землей и Адонисом составило всего 2,4 млн. *км*, а годом позднее Гермес «чуть не столкнулся» с Землей, проскочив мимо нее на расстоянии 800 тыс. *км*! По расчетам, наибольшее сближение произойдет в одно из возвращений Гермеса, когда он пройдет между Землей и Луной на расстоянии 350 тыс. *км* от Земли. Конечно, эти расчеты, возможно, не вполне надежны, так как для расчета тесных сближений необходимо вычислять элементы орбит астероидов с высокой точностью, а в этом отношении наши возможности ограничены точностью угловых измерений положений небесных тел, достигнутой астрономами.

По-видимому, существуют также и астероиды, пока недоступные для наблюдений, периодически пересекающие орбиты внешних планет — Юпитера, Сатурна и т. д. Сейчас

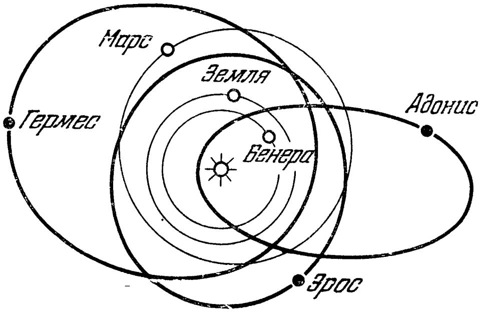

Рис. 33. Орбиты астероидов, сближающихся с Венерой, Землей и Марсом.

известен только один такой астероид — мятежный Гидальго, пересекающий орбиту Юпитера и делающий поворот в сторону Солнца где-то вблизи орбиты Сатурна.

Число известных астероидов, пересекающих в своем движении орбиты больших планет и могущих столкнуться с последними, непрерывно растет. Астрономы открывают все новые и новые крошечные астероиды, движущиеся по «опасным» орбитам. Не исключено существование большого количества еще не открытых астероидов такого типа. Так, например, астероид Географос, входящий внутрь орбиты Земли на расстояние 30 млн. *км*, открыт только в 1954 г.

На больших, космогонических интервалах времени гибель ряда астероидов при столкновениях с большими планетами не вызывает никаких сомнений. И здесь возникает более серьезный вопрос: а не может ли вызвать столкновение с большим астероидом распад большой планеты, который в последующем приведет к образованию нового астероидного пояса в Солнечной системе?

Если исходить из накопленного учеными фактического материала, то подобную возможность нужно исключить. Последствия таких встреч неоднократно изучались. В американском штате Техас найден кратер, носящий имя Одессы, диаметром 162 *м* и глубиной 5 *м*, из которого извлечены многочисленные осколки метеоритного железа. В Австралии имеется метеоритный кратер радиусом 420 *м* и глубиной 30 *м*. По-видимому, в результате падения небесного тела типа астероида возник «Каньон Дьявола» в Аризоне (США), представляющий собой воронку радиусом 600 *м* и глубиной 180 *м*.

Последствия падения больших астероидов будут ужасны, если падение произойдет на крупный город. Понятно, что любая из крупнейших столиц мира при таком падении будет уничтожена, но катастрофы глобального масштаба ожидать нельзя. В худшем случае мы станем свидетелями землетрясения.

Нужно иметь в виду «естественную броню» Земли — ее атмосферу. Выше мы говорили, что Сихотэ-Алиньский метеорит «весил» до входа в атмосферу около миллиона тонн, а до Земли долетела лишь его незначительная доля. Наглядное представление о разрушающем действии сопротивления земной атмосферы можно получить, вспоминая полеты космических аппаратов. При входе в атмосферу внешняя обшивка корабля нагревается до испепеляюще высоких температур в 10 тысяч градусов, превосходящих даже поверхностную температуру Солнца! Но космический корабль летит со скоростью порядка 8—11 *км/сек*, а полет метеорита происходит со скоростями в десятки километров в секунду!

Можно вспомнить и о нашей соседке — Луне, лишенной атмосферы. Несмотря на свою изрытость, имеющую, по-видимому, метеоритную природу, она все-таки цела.

Большой интерес вызывал астероид Икар, открытый в 1949 г. В перигелии он подходит к Солнцу всего на 28 млн. *км*. Тесные сближения Икара с большими планетами, вполне вероятные из-за особенностей его орбиты, могут привести его к гибели. В результате близкого прохождения мимо планеты орбита Икара может измениться так, что перигелийное расстояние Икара станет очень малым, и Икар либо столкнется с Солнцем, либо разрушится при сближении с ним. Возможно также столкновение Икара с планетой. Так, например, расстояние между Икаром и Землей может уменьшаться до нескольких миллионов километров. Но так ли уж страшно для Земли столкновение с Икаром? По подсчетам, удар Икара при столкновении с Землей был бы равносилен взрыву 100 мегатонн тринитротолуола или нескольких водородных бомб. Взрыв такой силы не повредил бы Земли в целом. Однако разрушительный эффект от него был бы намного значительнее, чем при извержении вулкана Кракатау в 1884 г., породившем океанскую волну, ставшую причиной гибели десятков тысяч человек.

Небезынтересно отметить, что в связи со сближением Икара с Землей в начале 1968 г. в английский парламент поступил запрос от члена парламента Стейтона: «По сведениям, английское правительство полностью доверяет исследованиям русских, пришедших к выводу, что малая планета Икар не столкнется с Землей в момент их наибольшего сближения 15 июня 1968 г. Правительство в своих утверждениях не стало дожидаться результатов работы Массачусетского технологического института, занимающегося той же проблемой. Изучается ли этот вопрос английскими учеными? Если опасность существует, то какие следует принять меры?»

Ответ правительства Великобритании гласил, что подробные исследования, проведенные Международным центром сбора сведений об астероидах и их орбитах, находящемся при ленинградском Институте теоретической астрономии, привели к выводу о невозможности столкновения. Представитель правительства заявил также, что нет никаких оснований не доверять этим данным, а английская газета «Таймс» высказалась еще более категорично: «Доверие в таких вопросах к работе международных центров — непреложное правило, ибо в их руках точнейшие сведения, основанные на современных расчетах».

В астрономической литературе указывается еще одна гипотеза частичного рассеивания астероидного кольца. Она, по существу, касается не всего кольца в целом, а только отдельных астероидов. Речь идет об астероидном происхождении некоторых из спутников больших планет.

Четыре внешних спутника Юпитера обладают обратным движением. Объяснить происхождение всех спутников как с прямым, так и с обратным движениями в едином процессе очень трудно. Разумно поэтому поставить вопрос: а не приобретены ли спутники с обратным движением Юпитером потом, «по случаю»? Не остался ли надолго в окрестностях Юпитера случайно «забредший» в его сферу действия астероид? Такое явление небесные механики называют захватом *). Астрономы, мало знакомые с небесной механикой, считают возможность захвата вполне вероятной. Однако доказать строго математически возможность и большую или достаточно заметную вероятность захвата совсем не просто. Пока мы не имеем ее количественных оценок. Поэтому правильнее воздержаться от ответа на этот вопрос.

§ 18. Поставщики межпланетной пыли

Обратимся теперь еще к одной категории малых тел — «мешкам пустоты», кометам. Эволюция как самих комет, так и их орбит, пожалуй, наиболее изучена, развитие ряда комет прослежено до конца, вплоть до момента их гибели.

Эти небесные объекты из-за ничтожности их массы не в состоянии ни при близких прохождениях, ни при лобовых столкновениях с планетами и их спутниками привести к катастрофе, изменить орбиты планет или как-то еще повлиять на эволюцию больших планет Солнечной системы. Более того, при прохождении больших планет даже непосредственно через кометные хвосты оказывается совершенно незаметным изменение химического состава планетных атмосфер. Находясь в центре хвоста кометы, не удается даже почувствовать «запаха и вкуса» ядовитых газов хвоста, таких как циан, метан и т. д. Они не фиксируются и лабораторными приборами, ибо плотность вещества в хвостах комет меньше, чем в самых глубоких вакуумах, когда-либо создававшихся в физических лабораториях.

По мнению лауреата Нобелевской премии проф. Гарольда Юри и академика В. Г. Фесенкова некоторые из крупных метеоритов, падающих на Землю, до столкновения с Землей входили в состав кометных ядер.

---

*) Аналогичные гипотезы высказывались и относительно спутников с прямым движением. Так, например, в 1963 г. шведский физик X. Альвен, основываясь на сомнительных расчетах немецкого ученого Герстенкорна, опубликовал нашумевшую гипотезу о пленении Землей в далеком прошлом своего спутника Луны.

Оценки, проделанные Г. Юри, свидетельствуют о малой вероятности столкновений комет с планетами. За время существования Земли таких катастроф произошло около 100, т. е. за 40—60 млн. лет в среднем происходит одно столкновение Земли с кометами.

Возможный пример недавнего столкновения кометы с Землей представляет так называемый Тунгусский «метеорит». Напомним вкратце историю его падения. 30 июня 1908 г. в 7 часов утра в глухой таежной местности, невдалеке от реки Хушмы, притока Подкаменной Тунгуски, со скоростью в несколько десятков километров в секунду в атмосферу Земли влетело межпланетное тело. Продукты его взрыва наблюдались за сотни километров от места падения и поднялись на высоту 20—25 *км*. Звуковая волна от взрыва была зарегистрирована на расстояниях более 500—700 *км*. А в 50—100 *км* от места взрыва огненная вспышка охватила широкие участки неба. Взрывная волна, распространившаяся в воздухе, дважды обежала земной шар и была зарегистрирована метеорологическими обсерваториями мира.

Через 20 лет после описанного события на место падения Тунгусского метеорита прибыла экспедиция, организованная ученым-энтузиастом Леонидом Алексеевичем Куликом (1883—1942). Малочисленная, плохо оснащенная аппаратурой и машинами, экспедиция все же смогла собрать интересный материал, хотя остатки метеорита найдены не были. Как оказалось, диаметр площади, пострадавшей от взрыва, был равен 25 *км*.

На снимке (рис. 34), сделанном Е. Л. Криновым в 1927 г., виден вывал леса, вызванный взрывом метеорита. На заднем плане — поваленный лес и почвенные складки. Изучение Тунгусского метеорита, выполненное акад. Фесенковым, привело его к выводу, что 30 июня 1908 г. произошла встреча Земли с небольшой кометой. Фесенков оценил массу ее ядра в 1 млн. *т*, а его размеры — в несколько сотен метров. Проникновение этого небесного тела в плотные слои земной атмосферы и последовавший затем взрыв на высоте 5—6 *км* обусловили все те явления, которые и получили название «Тунгусский метеорит».

Астрономы не раз бывали свидетелями гибели комет. Одно из последних таких событий произошло в 1959 г., когда исчезла хорошо развитая комета с великолепным хвостом. Будучи открытой англичанином Алкоком, комета через 9 суток, огибая Солнце, навсегда скрылась от земных наблюдателей. Тесно сблизившись с Солнцем, комета Алкока погибла в губительных испепеляющих солнечных лучах. Описанный случай — лишь один из возможных вариантов гибели кометы и, скорее всего, не самый типичный, так как, хотя кометы ближе других тел Солнечной

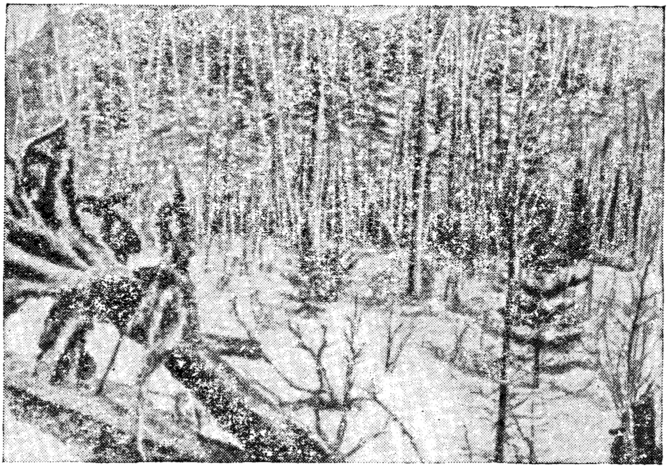

Рис. 34. Место падения Тунгусского метеорита.

системы подходят к Солнцу, они обычно все же «держатся» от него на почтительном расстоянии, редко приближаясь к нему на расстояние, меньшее нескольких десятков миллионов километров.

Исчезновения комет наблюдались и ранее, хотя и при несколько иных обстоятельствах. Так, в 1913 г. пропала комета Вестфаля, а в 1926 г.— комета Энзора III. Обе кометы, постепенно слабея в блеске, исчезли еще до сближения с Солнцем.

Влияние Солнца гибельно сказывается на кометах не только при тесных сближениях с ним. Иногда Солнце уничтожает кометы даже на расстоянии силами тяготения. Действие Солнца привело к распаду кометы Брукса в 1889 г., кометы Тэйлора в 1916 г.

Между прочим, наблюдение распада комет позволяет небесным механикам «взвесить» кометы. Определение масс небесных тел наиболее надежно производится при помощи третьего закона Кеплера, для чего необходимо иметь два тела, движущихся под действием сил взаимного тяготения. Если у тела нет спутников, то уверенное определение его массы затруднительно. Именно поэтому распад кометного

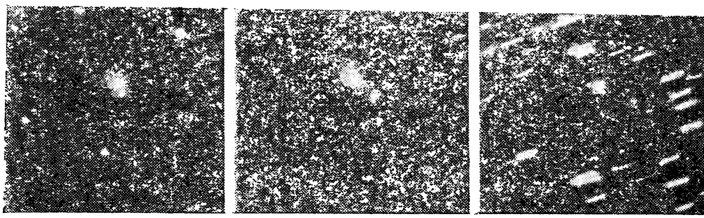

Рис. 35. Распад кометы Виртанена.

ядра на два или большее количество кусков доставляет астрономам редкий случай для оценки массы кометного ядра. Для этих нужд астрономы воспользовались наблюдениями последнего распада кометного ядра, происшедшего у кометы Виртанена в начале 1962 г. Ядро кометы Виртанена разделилось на две части. С течением времени у обеих половинок развились самостоятельные хвосты (рис. 35). На снимках, выполненных с помощью 40-дюймового телескопа американской Морской обсерватории, виден процесс деления кометы Виртанена. Снимки сделаны 21 июля 1957 г., 11 апреля 1958 г., 11 июля 1959 г. Расстояние между вновь образовавшимися кометами возрастало медленно, со скоростью в несколько метров в секунду. Относительное движение новых комет происходило по гиперболическим орбитам, близким к параболическим. Примем для простоты относительное движение за параболическое. Тогда из закона сохранения энергии механического движения $v^2 = f(m_0 + m)(2/r - 1/a)$ нетрудно определить суммарную массу ядер обеих комет. Найденная таким путем масса кометы Виртанена была оценена в 10^{17} *г*, что в миллиард раз меньше массы Земли. Отсюда мы еще раз делаем вывод о невозможности глобальной катастрофы для Земли, как и для всякой иной большой планеты, при столкновении с кометой, в силу малости кометных масс.

Наиболее впечатляющим был распад кометы Биэлы, до этого неоднократно наблюдавшейся в течение более чем 70 лет. При появлении кометы в 1846 г. она буквально на глазах наблюдателей сначала приняла форму груши, а затем разделилась на две самостоятельные кометы, которые постепенно стали удаляться друг от друга, следуя, впрочем, практически по одной и той же орбите. При следующем (1852 г.) сближении с Солнцем они были уже на большом расстоянии друг от друга. После этого комета более не наблюдалась.

Время и место появления обеих комет были рассчитаны точно и тем не менее ни в 1859 г., ни в 1866 г. в назначенном месте кометы обнаружить не удалось. Как показывали расчеты, в 1872 г. должно было произойти тесное сближение кометы с Землей. Комета и на этот раз не появилась, но зато вместо нее астрономы стали свидетелями редкостного по красоте зрелища — «звездного дождя», порожденного «прахом» кометы Биэлы. Метеорный поток, порожденный кометой Биэлы, астрономы назвали потоком Андромедид (по названию созвездия, в котором находится радиант, т. е. точка схода видимых путей метеоров).

Причины подобной эволюции кометы легко объяснимы. Ядро кометы не обязательно должно быть цельным, а скорее всего состоит из отдельных глыб. Как же действует притяжение Солнца на отдельные части ее ядра? По закону всемирного тяготения ускорения отдельных частей были бы совершенно одинаковыми, если бы они находились в одной и той же точке пространства. Однако отдельные глыбы следуют друг от друга на некотором отдалении. Поэтому гравитационные ускорения, вызываемые притяжением Солнца, у них несколько разнятся. По мере сближения с Солнцем различие в ускорениях растет, что в конечном итоге приводит к распаду комет и постепенному распределению кометного вещества по орбите. В конце концов вещество кометы распределяется по орбите более равномерно, и Солнце создает вокруг себя вращающийся пояс метеорного вещества. Наблюдать его мы не имеем возможности, однако в некоторых случаях мы узнаем о «прахе» комет. Это бывает тогда, когда в ясную ночь наблюдаются «звездные дожди», т. е. интенсивные и частые полеты метеоров в земной атмосфере. Астрономы говорят, что Земля в это

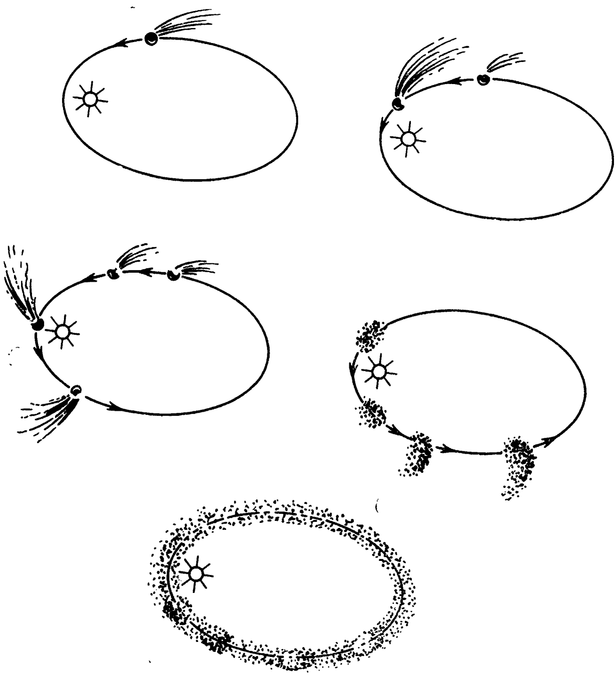

Рис. 36. Распад кометы и образование метеорного потока.

время проходит через метеорный поток. В течение года Земля неоднократно проходит через метеорные рои. Например, 16 ноября она пересекает в своем движении вокруг Солнца метеорный поток Леонид, а 12 августа — метеорный поток Персеид. Таким образом, кометы и в самом деле являются поставщиками межпланетной пыли — метеорного вещества. На рис. 36 изображен постепенный распад кометы.

Такова эволюция тех комет, которые заходят внутрь земной орбиты и, светясь отраженным солнечным светом, оказываются доступными для астрономических наблюдений. Те же кометы, которые далеки от Солнца и по этой причине не развивают больших по размерам хвостов, в большинстве своем не могут наблюдаться с Земли. Тем не менее астрономы собрали весьма любопытную информацию об эволюции их орбит, которая, возможно, будет полезной и для обсуждения будущего некоторых из астероидов.

По особенностям орбитального движения вокруг Солнца кометы делятся на две группы: *короткопериодические* и *долгопериодические кометы*. Весьма интересен факт разделения короткопериодических комет на пять семейств. Кометы четырех семейств оказываются связанными с одной из больших планет. Периоды обращения и афелийные расстояния кометных орбит каждого семейства близки к значениям соответствующих величин для одной из больших внешних планет. Это означает, что в афелии кометы оказываются близ орбит соответствующих планет. Факт этот не случаен и, конечно, связан с эволюцией кометных орбит вообще. Но указанное разбиение короткопериодических орбит любопытно и еще в одном важном отношении. Одному из кометных семейств с афелийным расстоянием в 52 а. е. «не хватает» планеты. Эти кометы в афелии выходят за пределы орбиты Плутона. Чем это вызвано? Вспоминая наши рассуждения о границах Солнечной системы, изложенные в гл. 1, в приведенном факте можно усмотреть серьезный аргумент в пользу существования еще одной большой, неизвестной пока планеты Солнечной системы.

К другой группе относятся долгопериодические кометы. Судя по орбитам, определенным из наблюдений, эти кометы приходят издалека и движутся по крайне вытянутым орбитам, мало отличающимся от парабол. Известно около 20 комет со временем обращения вокруг Солнца от 100 до 1000 лет и около 30 комет с периодами в 1000—10 000 лет. Иногда из-за малочисленности и недостаточной точности наблюдений бывает трудно сказать, движется ли комета по вытянутой эллиптической орбите или в действительности ее орбита параболическая или даже гиперболическая.

Выше была рассмотрена механическая эволюция формы самой кометы и ее постепенный распад. Теперь изучим другой вопрос — эволюцию орбит комет. Многочисленные и разнообразные расчеты их движения привели к ряду интересных выводов. Как выяснилось, на изменение орбит комет сильное влияние оказывают большие планеты и в первую очередь гигант Юпитер. Сближение кометы с Юпитером приводит к резкому изменению кометной орбиты. Изучение возмущенного движения комет проводилось рядом ученых Института теоретической астрономии АН СССР. Эффект тесных сближений комет с большими планетами тщательно исследован в работах ленинградского астронома, прекрасного знатока комет Е. И. Казимирчак-Полонской, а также в трудах С. Г. Маковера, И. В. Галибиной и других.

Трудоемкие численные расчеты движения комет на длительных интервалах времени показывают, что большие планеты могут «перебросить» комету с далекой от Солнца орбиты на орбиту с небольшим перигелийным расстоянием и, наоборот, выбросить комету далеко к окраинам Солнечной системы. Метод расчета первоначальных и будущих орбит комет был разработан в Институте теоретической астрономии. Для иллюстрации роли планетных возмущений приведем результат И. В. Галибиной, рассчитавшей движение долгопериодической кометы ван-Гента. Эта комета была открыта в Иоганнесбургской обсерватории астрономом ван-Гентом в 1944 г. В последний раз она наблюдалась в августе 1945 г. Из траекторных расчетов того времени следовало, что ее орбита гиперболическая, т. е. комета должна была покинуть Солнечную систему и удалиться в межзвездное пространство. И. В. Галибина выполнила точный расчет движения и установила, что первоначальная орбита кометы была не гиперболической, а весьма вытянутым эллипсом, мало отличавшимся от параболы. В афелии комета удалялась от Солнца на колоссальное расстояние в 280 000 а. е. В последующем вследствие возмущений от ближайших звезд ее перигелийное расстояние уменьшилось до 2,2 а. е.. и она стала видимой с Земли.

По другим расчетам Галибиной планетные возмущения иногда приводят к выбросу комет из пределов Солнечной системы. Для шести изученных ею комет будущие орбиты оказались гиперболическими, а одна из комет (комета 1902 III) будет переброшена на более близкую к Солнцу орбиту. Большая полуось первоначальной орбиты этой кометы составляла около 60 тыс. а. е., а для будущей орбиты большая полуось станет равной 1100 а. е.

Из расчетов Казимирчак-Полонской становится ясной причина открытия ряда «новых» комет, а также и причины исчезновения известных комет после их удаления от Солнца. Повинен во всем этом Юпитер. Ряд комет семейства Юпитера был открыт после их близкого прохождения мимо него. Сильное возмущающее притяжение Юпитера повлекло за

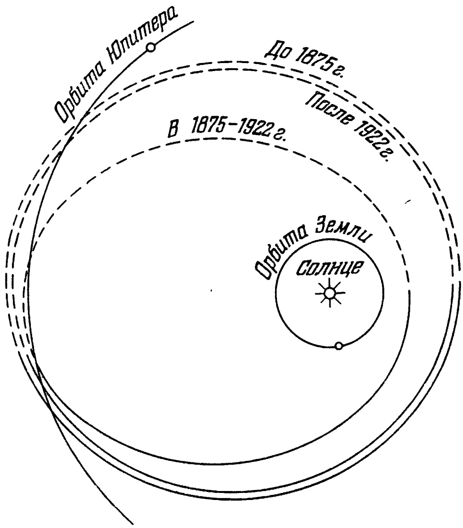

Рис. 37. Изменение орбиты кометы Вольфа в результате возмущений от Юпитера при неоднократных сближениях.

собой уменьшение размеров орбит и улучшило условия видимости этих комет. И наоборот, известные неоднократно наблюдавшиеся кометы исчезали после сближения с Юпитером. Пример изменения орбиты кометы вследствие возмущений от Юпитера приведен на рис. 37.

Приведем результаты расчета движения еще одной кометы — кометы Отерма III, открытой в 1943 г. в финской астрономической обсерватории в г. Турку. Ее орбита обладает одной замечательной особенностью: она резко отличается от обычных кометных орбит и похожа скорее на астероидную, так как эксцентриситет орбиты невелик и равен 0,144. До сближения с Юпитером, которое произошло в 1937 г., комета Отерма III двигалась по характерной для комет орбите и не наблюдалась с Земли. Большая полуось орбиты в то время составляла 8 а. е., в перигелии комета приближалась к Солнцу на 5,4 а. е., т. е. на расстояние порядка радиуса юпитеровой орбиты, и делала полный оборот вокруг Солнца примерно за 23 г. Орбита кометы Отерма III была близка к резонансной, так как отношение средних движений кометы и Юпитера почти равнялось рациональному числу 2 : 3.

Вычисления, выполненные в Институте теоретической астрономии АН СССР, показали, что в процессе сближения кометы с Юпитером возникли очень большие изменения орбиты: большая полуось уменьшилась до 4,4 а. е., средняя угловая скорость движения возросла вдвое, заметно уменьшился эксцентриситет, а период обращения стал равным 9,3 года. Что особенно интересно, движение кометы Отерма III на протяжении нескольких лет происходило по спутниковой орбите. Орбита кометы относительно Юпитера характеризовалась следующими значениями элементов: большая полуось 0,29 а. е., эксцентриситет 0,34, расстояние в перицентре 0,176 а. е. (для сравнения напомним элементы орбиты VIII спутника Юпитера: большая полуось 0,157 а. е., эксцентриситет 0,378, перицентрическое расстояние 0,216 а. е.).

Таким образом, по крайней мере временные захваты малых тел планетами не только возможны, но и происходят в действительности. А это делает гипотезу о приобретении Юпитером и другими планетами некоторых внешних спутников в результате захвата астероидов менее неожиданной и более правдоподобной.

Как видно из приведенных примеров, многие из комет с весьма удаленных в начале орбит переходят на близкие к Солнцу орбиты в результате планетных возмущений. Поэтому для выяснения судьбы комет очень существенно знать первоначальные орбиты, по которым они двигались на периферии Солнечной системы. Не менее важно изучить будущие орбиты комет, которые они будут иметь в результате отдельных или многократных тесных сближений с большими планетами. К настоящему времени из 550 комет с известными орбитами только около полусотни движутся по эллиптическим орбитам с небольшим периодом обращения (порядка 6 лет). Орбиты остальных комет — либо очень вытянутые эллипсы, либо гиперболические. Для 40 комет тщательно изучены первоначальные и будущие орбиты. Большинство комет в афелии удаляется на расстояния в тысячи и сотни тысяч а. е. Так, например, комета 1898 VIII в афелии находилась на расстоянии 200 тыс. а. е. от Солнца, а комета 1902 III на еще большем расстоянии — около 400 тыс. а. е. Изучение первоначальных орбит комет говорит о том, что около трети комет приходят к Солнцу из областей, удаленных на расстояния в несколько десятков тысяч а. е. Как предполагают астрономы, на периферии Солнечной системы имеется целое облако комет. Это облако получило название облака Оорта в честь крупного голландского астронома Яна Оорта, выдвинувшего гипотезу о его существовании. Облако Оорта простирается до расстояний в 100—150 тыс. а. е. и содержит около 100 млрд. комет с общей массой порядка 0,1 массы Земли.

Движение комет в облаке Оорта зависит от притяжения не только Солнца и планет, но и ближайших к Солнцу звезд. В результате звездных возмущений некоторые из комет вырываются из сферы действия Солнца, а другие приближаются к Солнцу по параболическим или почти параболическим орбитам. Изучая «падение» комет на Солнце, специалисты по небесной механике устанавливают их будущие орбиты. Если после сближений с планетами комета приобретет положительную энергию и станет двигаться по гиперболической орбите относительно Солнца, то она никогда больше не возвратится в Солнечную систему. Если полная энергия относительного движения станет вследствие планетных возмущений отрицательной, то движение кометы сначала будет происходить почти по эллиптической орбите, однако отсюда еще нельзя сделать вывод, что она до своего разрушения останется постоянным членом Солнечной системы.

В пользу существования кометного облака Оорта свидетельствуют и аргументы физического характера. Как уже отмечалось, гибель комет происходит как из-за механической эволюции их орбит, так и из-за физического процесса распада самих комет вследствие постепенного распределения их вещества по орбите и за счет действия солнечной радиации. Астрономы легко отличают новые кометы, только что попавшие из облака Оорта в область, доступную для наблюдений, от комет, совершивших несколько оборотов.

На рис. 38—41 приведены некоторые результаты расчетов кометных орбит, выполненные в Институте теоретической астрономии. На рис. 38 изображена траектория движения кометы в прямом направлении, т. е. в направлении преимущественного движения в Солнечной системе. В начальный момент комета отстоит от Солнца на расстояние 250 тыс. а. е., а ее скорость перпендикулярна к радиусу-вектору.

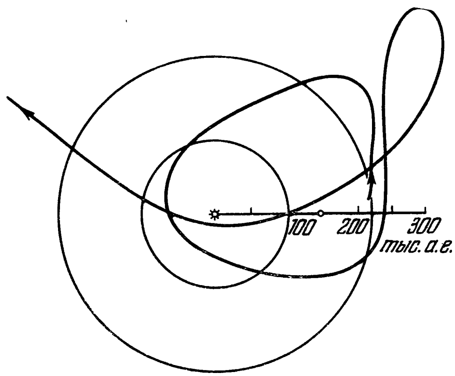

Рис. 38. Неустойчивая орбита прямого движения кометы.

Комета, первоначально движущаяся по орбите, близкой к эллиптической, после одного оборота вокруг Солнца меняет направление своего движения на обратное. Затем в результате сильных возмущений ее орбита становится близкой к гиперболической, после чего комета покидает Солнечную систему. Здесь мы имеем пример, в котором движение неустойчиво и разрушается постоянно действующими возмущающими силами. На рис. 39 изображена неустойчивая траектория обратного движения. В начальный момент комета удалена от Солнца на расстояние 150 тыс. а. е. После полутора оборотов вокруг Солнца комета переходит почти на гиперболическую орбиту и уходит из Солнечной системы.

При других начальных условиях, т. е. при других значениях начального расстояния и начальной скорости, движение комет может быть устойчивым даже и тогда, когда первоначальное движение происходило в весьма удаленных областях Солнечной системы. На рис. 40 приводится пример устойчивой орбиты, период движения по которой составляет около 70—90 млн. лет. А на рис. 41 изображено движение кометы, находившейся вначале на расстоянии 230 тыс. а. е. и затем перешедшей в более близкую окрестность Солнца.

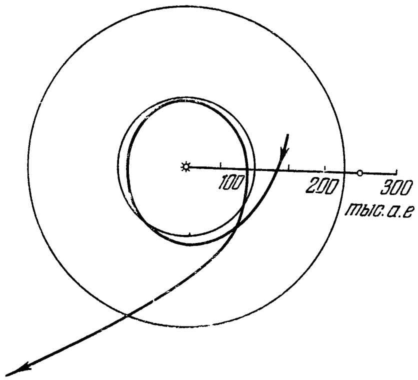

Рис. 39. Неустойчивая траектория обратного движения кометы.

Новая комета, по-видимому, содержит в своем составе замерзшие газы (если гипотеза о происхождении Солнечной системы из газово-пылевого допланетного облака справедлива, то наличие в ядрах комет льдинок из замерзших газов неминуемо) и метеорные частицы, сравнимые по размерам с молекулами, которые по мере приближения к Солнцу «выбиваются» из ядра кометы силами давления солнечной радиации. Неоднократные возвращения

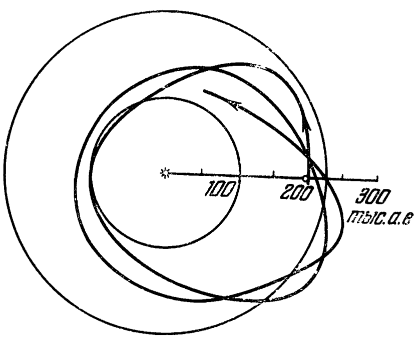

Рис. 40. Устойчивая траектория прямого движения кометы.

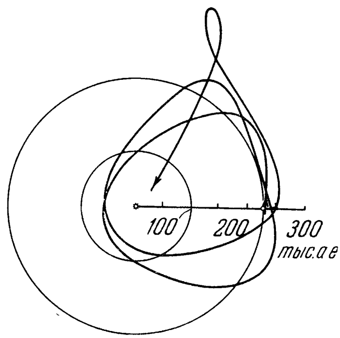

Рис. 41. Траектория перехода кометы с периферии Солнечной системы в ближайшую окрестность Солнца.

комет к Солнцу приводят к потере кометой газово-пылевого вещества, уменьшению ее головы и хвоста, а значит, и яркости.

По расчетам, принадлежащим астроному Эпику, при каждом обороте кометы вокруг Солнца теряется от 100 до 10 000 *т* газового вещества кометы. Если принять массу ядра кометы равной 10 млн. *т*, то полное истощение кометы должно наступить после 1—100 миллионов оборотов кометы вокруг Солнца. Фактически разрушение кометы наступает еще раньше. Легко подсчитать продолжительность жизни комет. Для комет юпитеровой группы с периодом около 6 лет на разрушение кометы потребуется около миллиона лет.

Но Солнечная система существует миллиарды лет, и если бы не происходило пополнения запасов короткопериодических комет, то мы уже не могли бы наблюдать эти небесные объекты. Гипотеза о существовании на периферии Солнечной системы большого кометного облака убедительно объясняет происходящий процесс.

Процесс эволюции комет изучался советскими астрономами Б. Ю. Левиным, С. К. Всехсвятским, зарубежным ученым Вуркомом и др. Большой вклад в теорию комет был сделан латышским астрономом К. А. Штейнсом и его коллегами, работающими в Латвийском университете.

Эта группа ученых построила идеализированную модель кометного облака и с помощью электронной вычислительной машины проследила эволюцию такого теоретического облака, проанализировав около 60 тысяч воображаемых (условных) комет. При расчетах использовались как методы небесной механики, так и методы теории вероятностей. Эволюция орбит происходит за счет потери или приобретения кометой механической энергии при звездных возмущениях и при возмущениях, вызванных тесным сближением с планетами. Для всего облака в целом процесс этот вполне закономерен и определен. Но для отдельной кометы сближение с той или иной планетой следует считать случайным. Рассматривая для простоты уменьшение механической энергии комет, движущихся по первоначальным орбитам, на целое число условных единиц (1, 2, 3 и т. д.), и считая возможность уменьшения энергии кометы на то или иное значение равновероятной, приходим к типичной задаче теории вероятности о бросании игральной кости: какова вероятность выпадения того или иного числа при многократных бросаниях игральной кости? Проделав расчеты, латвийские астрономы получили представление о том, какой процент комет выбрасывается из Солнечной системы и какой процент составляет короткопериодические кометы.

Группа ученых во главе с К. А. Штейнсом преследовала цель проверить старые выводы об эволюции орбит короткопериодических комет, опиравшиеся на приближенные расчеты.

По старым представлениям появление комет юпитеровой группы и процесс изменения кометных орбит идут следующим образом. Долгопериодическая комета сближается с Юпитером, изменяющим ее орбиту. Характер изменения орбиты зависит от относительной скорости и направления сближения. Часть комет перейдет на гиперболические орбиты и покинет Солнечную систему, а часть уменьшит свой период и, согласно третьему закону Кеплера, перейдет на орбиты с меньшей большой полуосью. При последующих встречах с Юпитером период обращения кометы вокруг Солнца будет постепенно уменьшаться. Если начальное движение кометы происходит в направлении движения Юпитера, а перигелийное расстояние кометной орбиты достаточно велико, то после сближения с Юпитером комета станет двигаться прямым движением по эллипсу. При встречном движении с Юпитером и большом перигелийном расстоянии последующее движение кометы происходит по гиперболической орбите с прямым движением. При малых перигелийных расстояниях соответственно получаются орбиты эллиптические с обратным движением. Таков механизм эволюции кометных орбит, в результате действия которого в течение миллионов лет Юпитер пополняет свою семью комет. Прикидочные расчеты дают следующую картину: из миллиарда комет Юпитер захватит около 3500 комет, из них около 125 комет будут иметь период обращения порядка 6 лет, 840 комет — период порядка 12 лет и около 2700 комет — не более 24 лет. Приведенные результаты грубо ориентировочные, так как не учитывалось неизвестное распределение первоначальных кометных орбит

Работы К. А. Штейнса свободны от этих недостатков. Штейнс исходил из следующих предположений: 1) начальная механическая энергия кометы очень близка к нулю, 2) известен возможный возраст кометы, 3) известно перигелийное расстояние кометы. Остальное зависит от маршрута последующего движения кометы. Однако он нам неизвестен. Штейнс находит все возможные варианты маршрута и оценивает вероятность каждого из них. Затем, тоже с оценками вероятности, вычисляется эффект случайных сближений с большими планетами. Если энергия станет положительной, то происходит выброс кометы из Солнечной системы, а в противном случае комета возвращается в зону больших

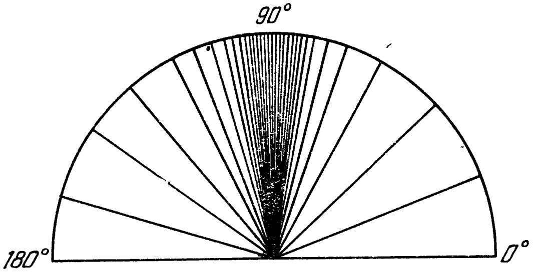

Рис. 42. Распределение плоскостей орбит новых комет.

планет, подвергаясь возмущениям с их стороны. Случайное накопление возмущений за счет сил тяготения планет называется *диффузией комет*. Штейнс указал три закона диффузии.

Согласно первому закону диффузии *накопление случайных возмущений в движении комет приводит к постепенному уменьшению наклонов плоскостей орбит комет к плоскости эклиптики*. На рис. 42 указано распределение орбит по их наклонам к эклиптике для вновь открываемых комет, а на рис. 43 приведено распределение старых комет по наклонам их орбит к плоскости эклиптики. Как видно, для новых орбит равновероятны как прямые, так и обратные движения, в то время как большинство остальных комет движется вокруг Солнца в прямом направлении.

По второму закону диффузии *накопление возмущающих эффектов приводит к тому, что орбиты с большими перигелийными расстояниями имеют в среднем меньшие эксцентриситеты и меньшие значения больших полуосей* (рис. 44).

Второй закон диффузии находится в очень хорошем согласии с данными наблюдений всех комет, которые были открыты и наблюдались после 1700 г. Он характеризует

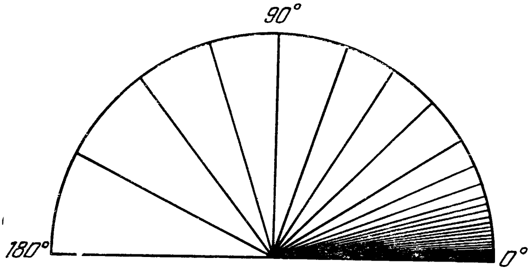

Рис. 43. Распределение старых комет по наклонам их орбит к плоскости эклиптики.

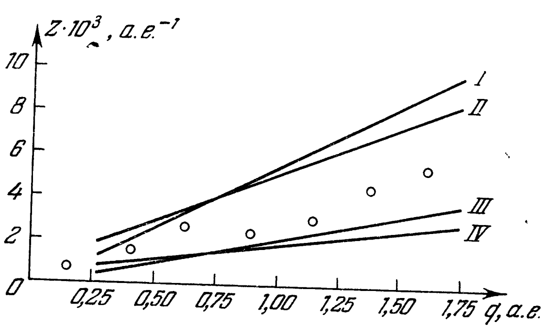

Рис. 44. Зависимость среднего значения обратной величины большой полуоси $z = 1/a$ от расстояния перигелия q комет. Кружками отмечены наблюдательные данные. Кривые I и II построены для комет, совершивших 60 оборотов, кривые III и IV — для комет, совершивших 7 оборотов

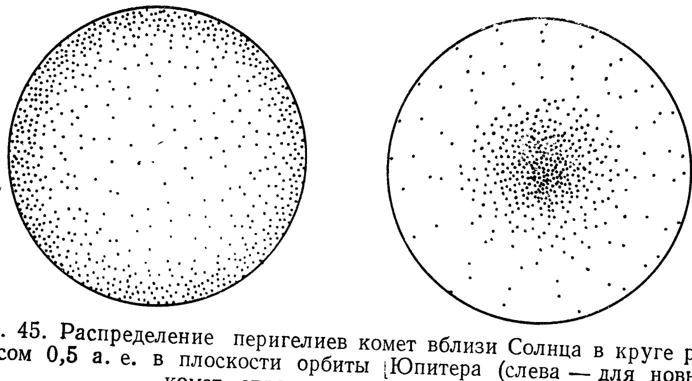

Рис. 45. Распределение перигелиев комет вблизи Солнца в круге радиусом 0,5 а. е. в плоскости орбиты Юпитера (слева — для новых комет, справа — для всех комет).

направление эволюции кометных орбит под действием планетных возмущений.

Третий закон диффузии объясняет распределение орбит новых комет в пространстве и формулируется следующим образом: *количество наблюдаемых новых комет возрастает с уменьшением перигелийного расстояния*. Он находит простое объяснение: кометы с большими перигелийными расстояниями разрушаются намного медленнее, нежели те кометы, которые в перигелии проходят очень близко к Солнцу *) (рис. 45).

*) Более подробно с законами диффузии и эволюции кометного облака Оорта читатель может познакомиться по статье К. А. Штейнса «В путешествие с кометой», опубликованной в журнале «Земля и Вселенная», № 5, 1965. Приведенные здесь рис. 42—45 заимствованы нами из этой статьи.

«При изучении наук примеры не менее поучительны, чем правила».

Исаак Ньютон

Глава 4

Эволюция спутниковых движений

§ 19. Запретная зона Роша

Судьбы спутников планет прежде всего зависят от эволюции их орбит. Отклонение спутников от эллиптических кеплеровских орбит вызывается в первую очередь возмущающим действием солнечного притяжения и сплюснутостью самих планет. Если рассматривается далекий спутник планеты, то основное значение имеет возмущающее действие Солнца. Для близких к планете спутников наибольший эффект даст фигура планеты. Естественно поставить вопрос: не могут ли солнечные возмущения настолько расшатать орбиту спутника, что он в конце концов преодолеет силу притяжения к планете и обратится в самостоятельную маленькую планету Солнечной системы? Необходимо исследовать и другой возможный вариант эволюции спутниковой орбиты, в котором спутник постепенно приближается к планете. И, наконец, возможен еще один тип возмущенного движения спутника, в котором борьба возмущающих сил заканчивается мирным исходом и спутник движется неограниченно долго по периодической или почти периодической траектории внутри некоторой кольцевой зоны с центром в планете.

Сначала рассмотрим одну старую работу, выполненную французским математиком Эдвардом Рошем в 1847—1850 гг. В течение почти пятидесяти лет после опубликования мемуары Роша незаслуженно оставались незамеченными.

Проблема, успешно решенная Рошем, состояла в изучении фигуры равновесия жидкого небесного тела, равномерно вращающегося вокруг своей оси и испытывающего притяжение некоторого тела, движущегося в экваториальной плоскости первого тела по круговой орбите с угловой скоростью, равной скорости вращения исследуемого тела.

Система двух небесных тел с таким движением на первый взгляд кажется слишком экзотической. Однако на самом деле такие системы известны и, возможно, нередки и даже типичны для определенной стадии эволюции небесных тел. Наиболее яркий пример такого рода представляет система «Земля — Луна». Астрономы-звездники утверждают, что среди тесных двойных звезд встречаются такие системы, в которых звезды постоянно обращены друг к другу одной и той же стороной. По мнению Дж. Дарвина, такие системы в космогоническом смысле вообще типичны.

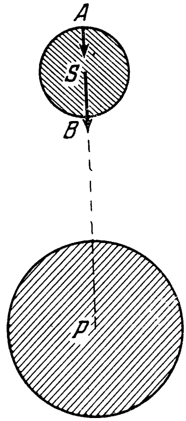

Рис. 46. Приливообразующая сила. P — планета, S — спутник.

Поставленная Рошем задача состоит в выяснении условий существования спутников больших планет. На каждую частицу спутника действуют силы притяжения к другим частицам спутника (или силы сцепления для твердых спутников), центробежные силы инерции, обусловленные вращением спутника вокруг оси, и силы притяжения к планете. Всегда ли под действием этих сил спутник сохранится как единое тело? Силы взаимодействия между частицами спутника препятствуют его разрушению. Центробежные силы, направленные перпендикулярно к оси вращения, вызывают сжатие спутника. Силы тяготения со стороны центральной планеты оказывают разрушающее действие. Подобного рода силы называются приливными (или приливообразующими).

Остановимся кратко на характере их действия. Рассмотрим планету с центром в точке P и ее спутник с центром в точке S (рис. 46). Планету для простоты будем считать шаром, притягивающим с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния от центра планеты.

Пусть f — постоянная тяготения, m — масса планеты, r — расстояние между центрами спутника и планеты, ρ — радиус спутника. Запишем ускорения, вызываемые планетой в точках A и S, считая, что в этих точках расположены единичные массы. В соответствии с ньютоновым законом тяготения имеем

$$w_A = \frac{fm}{(r+\rho)^2}, \qquad w_S = \frac{fm}{r^2}.$$

Сравним теперь ускорения в точках A и S:

$$w_A - w_S = \frac{fm}{(r+\rho^2)} - \frac{fm}{r^2}.$$

Приводя к общему знаменателю правую часть формулы для $w_A - w_S$ и вынося из круглой скобки в числителе fm, а в знаменателе r^2, получаем

$$w_A - w_S = \frac{fm}{r^2}\left\{\frac{1}{\left(1+\frac{\rho}{r}\right)^2} - 1\right\} = -\frac{fm}{r^2}\cdot\frac{2\frac{\rho}{r}+\frac{\rho^2}{r^2}}{\left(1+\frac{\rho}{r}\right)^2}.$$

Предполагая отношение ρ/r малым, т. е. ограничиваясь случаем, в котором радиус спутника значительно меньше расстояния между ним и планетой, опустим в формуле величину $(\rho/r)^2$. Тогда с достаточной степенью точности получим выражение для приливообразующего ускорения (это ускорение можно назвать возмущающим)

$$w_A - w_S = -2fm\rho/r^3.$$

Точно так же для разности $w_B - w_S$ приближенно имеем

$$w_B - w_S = 2fm\rho/r^3.$$

Из двух последних формул видно, что точка B стремится в своем «падении» на центральную планету опередить центр S спутника, так как ускорение этой точки относительно центра планеты $w_B - w_S$ положительно. Ускорение точки A относительно центра S направлено в сторону, противоположную планете, так как $w_A - w_S$ отрицательно. Иначе говоря, «падение» точки A на планету P должно происходить с меньшим ускорением, чем «падение» центра спутника. Таким образом, силы тяготения планеты стремятся растянуть спутник в направлении линии, соединяющей центры спутника и планеты

Рош занимался математическим изучением поведения жидкого спутника тяготеющей планеты. Он установил фигуру равновесия спутника и условия ее устойчивости. Другой важный результат Роша заключается в том, что вблизи планеты существуют области, где силы тяготения планеты должны «разорвать» спутник. Им было найдено минимальное расстояние $r_{\min}$, на которое может подойти жидкий спутник к планете, не подвергаясь опасности быть разорванным приливообразующими силами. Оно дается формулой $r_{\min} = 2{,}20R$, где R — радиус планеты. Этот результат найден в предположении, что спутник имеет эллипсоидальную форму и одинаковую с планетой плотность.

Для спутников малых размеров с плотностью σ граница запретной зоны $r_{\min}$ (так называемый предел Роша) определяется формулой

$$r_{\min} = 2{,}4554\,R\sqrt[3]{\frac{\sigma}{\sigma_0}},$$

в которой σ_0 — плотность планеты, а R — ее радиус.

Много позднее исследования Роша были продолжены известным английским ученым Джеффрисом, распространившим результаты Роша на твердые спутники (1947 г.). Джеффрис выяснил, что разрушение твердого спутника гравитационными силами центральной планеты происходит только при достаточно большом радиусе спутника. Если рассмотреть спутник Юпитера, по плотности и твердости близкий к земным горным породам, движущийся непосредственно вблизи поверхности Юпитера, то критический радиус спутника окажется равным 200—250 *км*. При больших размерах спутник будет разорван силами тяготения Юпитера. При увеличении радиуса орбиты спутника в k раз максимально возможный радиус спутника возрастает в $\sqrt{k^3}$ раз.

Конечно, здесь не учитывались те изменения, которые должна претерпевать центральная планета. Но, как следует из более точных расчетов, изменение предела Роша за счет неучтенных факторов достаточно мало́.

Если предположить, что спутник планеты по каким-либо причинам постепенно приближается к ней, то эволюция фигуры спутника происходит следующим образом. Пусть центральная планета представляет собой однородный шар, а спутник обращен подобно Луне всегда одной стороной к планете. Вследствие тяготения планеты на спутнике образуются в экваториальных областях «выпуклости», расположенные в направлении прямой, соединяющей центры планеты и спутника. При сближении с планетой спутник деформируется под действием приливообразующей силы,

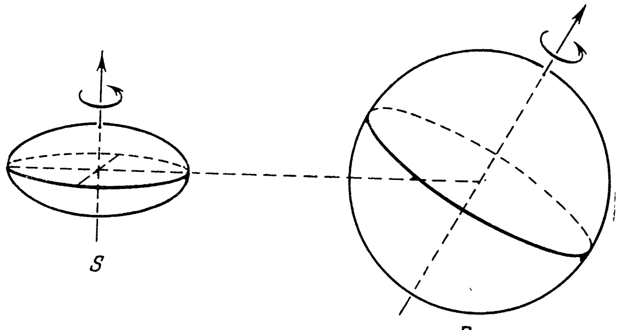

Рис. 47. Предельная форма спутника перед стадией разрушения.

которая обратно пропорциональна кубу расстояния от планеты, а следовательно, возрастает намного быстрее, чем сила ньютоновского тяготения. Спутник, приближаясь к планете, постепенно сплющивается, а его экваториальные выпуклости, «горбы», увеличиваются, так что спутник должен вытягиваться вдоль прямой «планета — спутник».

Для малого по сравнению с центральной планетой P спутника S Рош определил предельную фигуру спутника, предшествующую стадии его разрушения (рис. 47). Эта предельная фигура весьма похожа по форме на яйцо. В плоскости, перпендикулярной к направлению «планета — спутник», сечение спутника имеет вид слабо сплюснутого эллипса. Его эксцентриситет равен примерно $^1/_3$, а это значит, что разность между большой и малой полуосями эллипса равна $^1/_{17}$ доле большой полуоси. Длина оси спутника в направлении на планету в два раза превосходит ось перпендикулярного сечения.

После входа в зону Роша на спутнике вспучатся огромные приливные горбы в направлении на планету и с противоположной стороны. Вся поверхность спутника, и горы, и равнины, придет в движение. В конечном итоге спутник рассыплется на части. Таким образом, для исследования условий устойчивости и существования спутников необходимо выяснить, может ли в процессе эволюции орбита спутника стать такой, чтобы ее перицентр лежал в зоне Роша. Если это возможно, то рано или поздно спутник погибнет.

Каковы же границы зоны Роша для различных планет? Точные их значения указать для ряда планет затруднительно, так как в уточненную формулу предела Роша входят плотности планеты и спутника, известные не для всех из них. Но оценки изменения предела Роша при изменении плотности планеты и спутника в несколько раз показывают, что радиусы зон Роша меняются слабо, примерно в полтора раза.

Наиболее уверенное определение предела Роша сделано для системы «Земля — Луна». Отношение плотностей Земли и Луны хорошо известно и равно $^8/_5$. Применяя приводившуюся формулу, с помощью простых вычислений находим радиус зоны Роша. Он равен 18 300 *км*, т. е. примерно трем земным радиусам

Подсчеты, проделанные для Марса в предположении, что отношение плотности его спутников к плотности Марса такое же, как и в системе «Земля — Луна», приводило исследователей к выводу, что ближайший к Марсу спутник Фобос находится в зоне Роша. Радиус зоны Роша получался равным 2,86 радиуса Марса, а большая полуось орбиты Фобоса составляет 2,75 радиуса Марса. К анализу этого результата мы вернемся в § 21.

При определении радиуса зоны Роша для Юпитера целесообразнее пользоваться результатами Джеффриса. Приближенно можно принять значение, равное 2,44 радиуса Юпитера. Тогда приходим к заключению, что все спутники Юпитера, исключая ближайший к нему, находятся далеко за пределами опасной зоны. Что же касается крошечного ближайшего V спутника, находящегося около самой границы зоны Роша, то здесь определенного ответа дать еще нельзя. Расстояние V спутника от центра Юпитера составляет 2,5 радиуса Юпитера. Его период обращения

12 часов, т. е. всего на два часа больше юпитеровых суток. Если учесть соображения Джеффриса, то, по-видимому, V спутник может безбоязненно приближаться к Юпитеру, так как его диаметр слишком мал (160 *км*).

Для Сатурна предел Роша указан на рис. 48. Ближайшая к Сатурну граница зоны Роша относится к очень хрупким

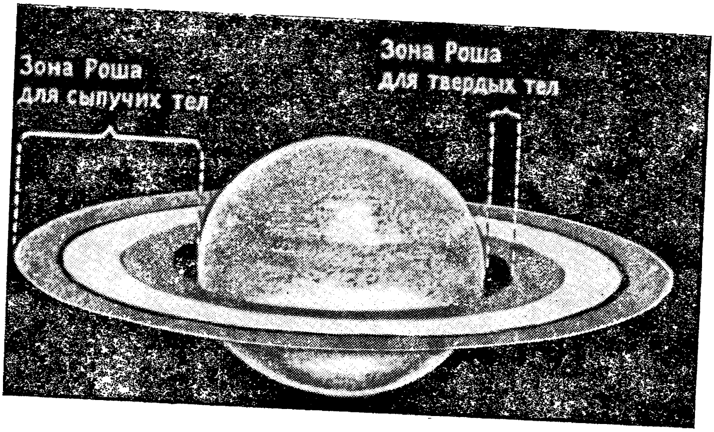

Рис. 48. Зона Роша для Сатурна.

(жидким или сыпучим) телам. Для твердых спутников предел Роша близок к 175 тыс. *км*. Некоторые авторы считают, что достаточно твердые тела могут безболезненно находиться в зоне Роша даже в непосредственной близости к поверхности Сатурна, если их размеры не превышают 60 *км* в поперечнике. Таким образом, спутники Сатурна пока не обречены на гибель в зоне Роша.

Но в Солнечной системе существует целая группа спутников, вступление которых в зону Роша — дело времени. Это шесть из 32 спутников больших планет, обладающих обратным движением. Эти спутники, обращаясь навстречу вращению планет вокруг их осей, будут испытывать сильное приливное воздействие со стороны центральных планет. Постепенно они будут затянуты в зону Роша. К этим спутникам относится прежде всего Тритон, спутник Нептуна. Не исключено, что наши далекие потомки будут свидетелями гибели Тритона.

§ 20. Кольца Сатурна

Великий итальянец Галилей наблюдал в течение 1610—1612 гг. неизвестные небесные образования вокруг Сатурна. О своем открытии он сообщил в отчете великому герцогу Тосканы Джулиано Медичи, одновременно опубликовав анаграмму: «Наиболее далекую планету тройною наблюдал». Неблагоприятное для наблюдений положение колец, а также в некоторой мере и дефекты галилеева телескопа, обеспечивавшего лишь тридцатидвухкратное увеличение, привели Галилея к ошибочному выводу: он решил, что им открыты спутники Сатурна.

Только через сорок лет Христиан Гюйгенс, выполнявший наблюдения в более благоприятный период времени, разгадал тайну наблюдавшегося Галилеем небесного объекта. Свое открытие Гюйгенс также зашифровал в виде анаграммы, которая была разъяснена им через три года после ее опубликования. Анаграмма гласила:

«Кольцом окружен тонким, плоским, нигде не прикасающимся, к эклиптике наклоненным».

Через несколько лет один из представителей французской династии астрономов Кассини обнаружил существование двух отдельных колец. Двумя столетиями позднее американский астроном Бонд и английский ученый Доуэс независимо друг от друга и практически одновременно открыли еще одно, внутреннее кольцо.

По современным представлениям система колец начинается с расстояния в 14—15 тыс. *км* от поверхности Сатурна слабо светящимся полупрозрачным, так называемым «креповым» кольцом шириной в 18,5 тыс. *км*. От второго кольца его отделяет «щель Кассини» шириной в 1600 *км*. По ширине второе (среднее) кольцо составляет 26 тыс. *км* и отделено от внешнего кольца промежутком в 4800 *км*.

Периферия внешнего кольца удалена от центра Сатурна на расстояние 140 тыс. *км*, а по некоторым оценкам наружный диаметр системы колец Сатурна равен 270 тыс. *км*. Можно считать, что все кольцо Сатурна находится в зоне Роша. Толщина колец порядка 15 *км*, во всяком случае она не превосходит 40 *км*. Общая масса кольца примерно в 800 раз меньше массы Луны.

Система концентрических вложенных друг в друга колец лежит в экваториальной плоскости Сатурна и наклонена к плоскости земной орбиты под углом в 28°.

Выяснением физической природы колец Сатурна и его будущего занимались многие ученые. Астрономы и физики, механики и математики настойчиво стремились установить истинную природу этих редких небесных образований. Окончательный ответ сначала был получен математическим путем, «на кончике пера», и лишь позднее был подтвержден астрофизическими наблюдениями.

Обстоятельному математическому анализу были подвергнуты все три логически возможные гипотезы: твердое кольцо, жидкое кольцо и пояс твердых частиц.

Исследование гипотезы твердого кольца начал Лаплас. Предполагая кольцо однородным, он показал, что оно находится по отношению к центральному телу, Сатурну, в положении неустойчивого равновесия. Достаточно сколь угодно малого смещения центра кольца от центра Сатурна, чтобы притяжение Сатурна повлекло за собой дальнейшее увеличение расстояния между этими центрами, и в конце концов кольцо неминуемо упало бы на поверхность планеты. Степень неустойчивости относительного равновесия кольца столь же велика, как и степень неустойчивости равновесного состояния карандаша, поставленного в идеально вертикальное положение на свое острие. Что же касается возмущений, могущих вызвать смещение колец Сатурна, то их в системе Сатурна вполне достаточно. Притяжение со стороны десяти спутников Сатурна, естественно, не обладает симметрией относительно оси вращения Сатурна, а поэтому неминуемо выбьет кольцо из положения равновесия.

Итак, если бы кольцо было твердым,— считал Лаплас,— то мы стали бы свидетелями его медленного падения на центральную планету. Однако самые тщательные наблюдения не обнаруживают асимметрии в расположении колец относительно Сатурна. Следовательно, гипотеза о твердотельности колец неверна.

Но результат Лапласа — только первый шаг в ниспровержении этой гипотезы. В рассуждениях Лапласа, по-видимому, из-за математической сложности проблемы, было сделано, вообще говоря, неправомерное допущение об однородности кольца.

Это было подмечено замечательным английским физиком Джеймсом Кларком Максвеллом (1831—1879), попытавшимся освободить анализ Лапласа от изъянов. Выполненная Максвеллом работа по исследованию равновесия кольца Сатурна получила высокую оценку и принесла ему премию имени Адамса.

Максвелл рассмотрел другой крайний случай: однородное кольцо с одной присоединенной к нему массой. Проведя соответствующие расчеты, Максвелл установил, что для обеспечения устойчивости кольца в добавочной массе должно быть сосредоточено не менее $^4/_5$ всей массы кольца. Таким образом, Сатурн вместо кольца, по существу, имел бы спутник с некоторым легким придатком. Показав несостоятельность гипотезы твердого кольца, Максвелл предпринял новые глубокие исследования. Он предположил, что кольцо состоит из определенного количества отдельных малых тел, равных по массе. Ранее эта гипотеза была высказана Д. Д. Кассини. Даже общие рассуждения Максвелла, не сопровождающиеся математическим анализом, изложены весьма убедительно. Критикуя гипотезу твердых колец Сатурна, Максвелл пишет:

«Так как вид колец не дает никаких указаний на что-либо подобное и не дает никаких предпосылок для такой большой неравномерности распределения масс (имеется в виду твердое кольцо с придатком.— *В. Д.*), то теория твердых колец становится весьма неправдоподобной. А если мы отметим добавочное затруднение, состоящее в стремлении жидких и разрозненных частиц приблизиться и скопиться как раз там, где кольцо толще, и тем самым нарушить чувствительные и малоустойчивые условия нагрузки, от которых зависит все равновесие, то мы получим новое опровержение теории твердых колец. А если мы еще примем во внимание громадные размеры самих колец и их сравнительную тонкость, то само по себе обнаружится, насколько подобная теория лишена смысла. Кольцо таких размеров, сделанное из железа, стало бы не только пластичным, но даже полужидким под действием тех сил и натяжений, которые оно должно было бы испытывать, а мы не имеем никаких оснований предполагать, что кольца Сатурна неестественно тверды, будучи построены из материалов, неизвестных нам здесь на Земле».

Затем Максвелл рассмотрел упрощенную модель кольца, предположив его состоящим из частиц, равноудаленных друг от друга. Но так как абсолютно точного выполнения условий такого относительного равновесия частиц мы ожидать не вправе, то для проверки выдвинутой гипотезы необходимо было исследовать устойчивость такой конфигурации частиц, т. е. рассмотреть движение частиц в предположении, что они по каким-либо причинам оказались несколько отклоненными от положений относительного равновесия. Если бы оказалось, что малые смещения частиц постепенно привели к их значительным перемещениям от первоначальных положений, то тогда структура колец была бы нарушена, а это свидетельствовало бы о несостоятельности гипотезы.

Трудность задачи, поставленной Максвеллом, состояла в том, что надлежало выяснить некоторые общие свойства движения частиц, притягивающихся к центральному телу и взаимно притягивающих друг друга, т. е. рассмотреть свойства движения в задаче n тел. С поставленной проблемой Максвелл справился блестяще. Он показал, что частицы должны колебаться вблизи своих равновесных состояний, а это означает невозможность быстрого распада колец Сатурна.

Максвеллу удалось установить, что в системе колец должны иметь место чередующиеся между собой сгущения и разрежения частиц, перемещающихся вдоль кольца: по вращающемуся кольцу должны бежать волны сгущений и разрежений. Однако для того, чтобы этот волновой процесс не внес беспорядок в структуру колец, масса последнего не должна превосходить некоторого верхнего предела.

Если обозначить через m отношение массы колец к массе Сатурна, через p — число частиц, его составляющих, то установленный Максвеллом предел определится из неравенства $m < 2{,}3/p^2$. Отсюда, зная из наблюдений размеры колец, вычисляют максимально допустимую плотность. Как оказалось, для твердых или жидких частиц наибольшая плотность не превысит $1/300$ средней плотности Сатурна. Но жидкостей с такой плотностью мы не знаем, поэтому кольцо не может быть жидким. Заметим, кстати, что жидкое кольцо исключалось и по соображениям, вытекающим из результатов Лапласа. Считая кольцо состоящим из двух отдельных колец эллиптического сечения, Лаплас нашел, что плотность внешнего кольца не больше 0,5, а плотность внутреннего не должна превосходить 2,0. Но эта оценка намного превышает верхний предел плотности, указанный Максвеллом!

Заключая свое исследование, Максвелл пишет:

«...кольцо должно состоять из несвязанных одна с другой частиц: они могут быть как твердыми, так и жидкими, но они должны быть отдельными и независимыми. Вся система должна поэтому состоять или из рядов многих концентрических колец, движущихся каждое со своей собственной угловой скоростью и несущих каждое свою систему волн, или же все кольца являются смешанным множеством вращающихся вокруг планеты частиц, не сгруппированных в отдельные кольца и непрестанно сталкивающихся между собой.

В первом случае мы находим, что безграничное число различных возможных вариантов взаимных возмущений двух колец, устойчивых самих по себе, могло бы с течением времени увеличиваться и, наконец, принять величину, опасную для равновесия...

Результат длительных возмущений выразится в распространении колец в ширину, причем внешние кольца будут расплываться наружу, а внутренние — по направлению к центру, к планете...

Эти частицы могут быть собраны в систему узких колец или они могут двигаться одна за другой без особой закономерности. В первом случае процесс разложения системы будет весьма медленным, во втором оно наступит гораздо быстрее, но все-таки тут играет роль стремление частиц располагаться в узкие кольца, что замедляет процесс разложения».

Следующий этап в исследованиях связан с именем небесного механика Радо. Он изучил наиболее общий случай кольца с переменной плотностью и пришел к заключению, что при устойчивом относительном равновесии твердого кольца его плотность должна изменяться в пределах от 2,7 до 0,04, т. е. в 67 раз. Но такой перепад плотности совершенно невероятен!

Еще одно существенное возражение против гипотезы твердого кольца привел Гирн. Как показывают наблюдения, толщина кольца весьма мала. Чтобы оно было цельным, ему все время нужно выдерживать притяжение спутников Сатурна, которые, обращаясь с различными периодами, непрерывно изменяют свое взаимное расположение и своим притяжением будут стремиться вырвать из кольца различные его области. Поэтому кольцо останется целым только при достаточной его жесткости. Расчеты Гирна показали, что по жесткости кольцо должно быть в 1000 раз прочнее стали. Но вещества с такой жесткостью пока не известны.

Первоначальный анализ гипотезы о жидкой природе кольца провел также Лаплас. Он изучил случаи, когда плоское сечение кольца, перпендикулярное к его плоскости, имеет форму эллипса. Иначе говоря, Лаплас исходил из предположения, что кольцо имеет вид баранки или, как говорят математики, тора. Он нашел приближенное решение задачи о форме поверхности жидкого кольца при ее равновесии.

Снова потребовались дополнительные исследования для получения точного ответа. Они были выполнены нашей соотечественницей Софьей Ковалевской, работавшей в то время в Стокгольмском университете. Получив блестящее математическое образование под руководством крупнейшего немецкого математика Вейерштрасса, она добилась выдающихся результатов в решении ряда механических проблем. Принесшая ей заслуженную славу работа, посвященная решению классической задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки, была удостоена премии Парижской Академии наук.

Одна из работ С. В. Ковалевской, менее известная среди непрофессионалов, посвящена исследованию кольца Сатурна. Опубликованный в 1885 г. мемуар Ковалевской носит название «Замечания и дополнения к теории кольца Сатурна, данной Лапласом». С. В. Ковалевская показала, что эллиптическая форма перпендикулярного сечения кольца невозможна. Более того, она вообще не может быть симметричной относительно прямой, параллельной оси вращения.

Последний удар по гипотезе жидкого кольца нанес французский ученый Анри Пуанкаре, писавший в своих «Лекциях по космогоническим гипотезам»:

«Мы нашли верхний и нижний предел для плотности жидкого кольца; для того чтобы кольцо было устойчивым, необходимо, чтобы одновременно выполнялись следующие неравенства:

$$3\omega^2 + 2\omega\varepsilon R < 4\pi f\sigma < \omega^2/14».$$

Здесь Пуанкаре использует следующие обозначения: f — постоянная тяготения, ω — угловая скорость частицы на расстоянии R от центра кольца, ε — угловое ускорение частицы в функции от R, σ — плотность кольца.

Далее Пуанкаре продолжает:

«Таким образом, в начале кольцо устойчиво, но это состояние не может продолжаться; прежде всего в силу охлаждения плотность σ будет увеличиваться и первое неравенство может оказаться нарушенным; затем, по Лапласу, трение слоев друг по другу будет выравнивать их угловую скорость, которая сделается постоянной, ε обратится в нуль; тогда оба неравенства будут несовместны и жидкое кольцо не сможет существовать далее».

Гипотеза жидкого кольца находится в противоречии еще с одним результатом Пуанкаре. Однородная жидкая фигура, вращающаяся с постоянной угловой скоростью и подверженная воздействию только внутренних сил взаимного притяжения между частицами кольца, устойчива только при выполнении условия

$$\omega^2 < 2\pi f\sigma.$$

Полагая здесь ω равным угловой скорости спутника, орбита которого проходит через середину кольца, из третьего закона Кеплера найдем эту угловую скорость. Тогда из неравенства получим, что плотность кольца превосходит $^1/_{16}$ плотности Сатурна. Но это противоречит пределу Максвелла. Поэтому гипотеза жидкого кольца должна быть отброшена.

Итак, теоретические исследования подтверждали метеоритную гипотезу строения сатурновых колец, высказанную астрономом Кассини. Теоретический вывод был в начале этого века подтвержден наблюдениями спектра колец, выполненными американским астрономом Килером. Последний измерил скорость вращения в различных точках кольца. Как оказалось, внутренний край крепового кольца движется со скоростью 21 *км/сек*, а наиболее удаленные точки внешнего кольца — со скоростью 15,5 *км/сек*.

Подобное вращение твердого тела невозможно, так как скорости точек вращающегося твердого тела пропорциональ-

6*

ны расстояниям от оси вращения; здесь же наблюдается убывание скорости с расстоянием. Поэтому кольца не могут быть твердыми и сплошными, а должны состоять из отдельных малых тел, каждое из которых самостоятельно обращается вокруг Сатурна в соответствии с законами Кеплера.

В нашем веке метеоритная теория строения колец Сатурна уже не вызывала сомнений. Оставались еще некоторые нерешенные вопросы относительно будущего этих колец. В частности, будет ли происходить предсказанный Максвеллом из общих соображений постепенный распад колец? Значительный вклад в решение этой проблемы был сделан крупным советским ученым Г. Н. Дубошиным. Г. Н. Дубошин решил уточнить исследования Максвелла, применив для исследования устойчивости колец Сатурна безукоризненную в математическом отношении теорию устойчивости Ляпунова. Кроме того, он учел силы сопротивления, действующие на частицы колец Сатурна, пренебрежение которыми ничем не оправдано. В этой строгой постановке Г. Н. Дубошину удалось установить условия, при которых кольцо Сатурна будет устойчивым.

Хотя редкостное небесное образование, каким является кольцо Сатурна, и не имеет значения для судеб человечества, тем не менее его изучение сыграло выдающуюся роль в развитии науки, чем и объясняется столь подробное рассмотрение его эволюции. Жгучий интерес к кольцу Сатурна, сравнимый разве лишь с тем, который всегда проявлялся в отношении каналов Марса и жизни на нем, связан не только с уникальностью кольца, но прежде всего с влиянием его изучения на развитие космогонии Солнечной системы.

Лаплас, например, усматривал в существовании колец Сатурна наглядный пример, подтверждавший справедливость его космогонических воззрений. По его мнению, от Солнца в свое время также отрывались кольца, которые затем сконденсировались в планеты. Однако обнаруженное в 1877 г. более быстрое вращение колец по сравнению с самим Сатурном резко противоречило предположениям Лапласа, так как вещество, истекавшее, по предположению Лапласа, из экваториальных областей Сатурна, естественно, должно было иметь скорость, не превышающую скорость точек поверхности планеты.

Существуют различные гипотезы о происхождении колец Сатурна. Согласно одним, кольца порождены спутником Сатурна, вступившим в зону Роша; согласно другим, кольцо состоит из допланетного вещества, т. е. вещества, из которого образовались планеты, но не аккумулировавшегося из-за нахождения в зоне Роша. Во всяком случае, мы здесь имеем наглядную иллюстрацию значения зоны Роша вне зависимости от того, как наука решит проблему происхождения этих колец.

§ 21. Что ожидает «Страх» и «Ужас»?

Получив от своего друга Вахенфальса сообщение об открытии четырех спутников Юпитера, И. Кеплер в своем ответе написал:

«Я настолько далек от того, чтобы не верить в существование четырех планет около Юпитера, что тоскую по какой-нибудь зрительной трубе, чтобы предвосхитить у вас, если возможно, открытие двух планет около Марса, как это требует, по всей видимости, пропорциональность шести или восьми около Сатурна и, быть может, по одной около Венеры и Меркурия».

Кеплеровские соображения по аналогии о числе спутников планет неоднократно использовались в художественной литературе. Более того, они проникли даже в некоторые пособия по астрономии. Поэтому нет ничего удивительного в том, что и Вольтер, и Джонатан Свифт упоминали в своих произведениях о марсианских лунах.

Многочисленные прогнозы были подтверждены открытием, сделанным в 1877 г. астрономом А. Холлом. Два открытых им спутника Марса получили название Фобос и Деймос, что в переводе с древнегреческого означает «Страх» и «Ужас». «Страх» и «Ужас» — два пса, вечно сопровождающих бога войны Марса.

Спутники Марса, как и кольцо Сатурна — одни из самых любопытных объектов Солнечной системы. Первый из спутников, Фобос, находится от центра Марса на расстоянии 9350 *км*, составляющем три радиуса Марса. Полный оборот вокруг планеты Фобос делает за 7 час. 30 мин., т. е. менее чем за одну треть марсианских суток, продолжающихся 24 час. 37 мин. Поэтому Фобос в течение марсианских суток успевает дважды пересечь небосвод Марса, перемещаясь по нему не с востока на запад, подобно всем иным небесным светилам, а с запада на восток. Второй спутник Марса, Деймос, обращается по орбите с большой полуосью в 23,5 тыс. *км*, т. е. на расстоянии семи марсианских радиусов. Его период обращения вокруг планеты равен 30 час. 18 мин., что несколько больше марсианских суток.

Мы не без умысла остановились на предыстории открытия спутников Марса. Дело в том, что среди популяризаторов стало почти модой акцентировать внимание публики на качественном совпадении предсказаний Свифта, сделанных за полторы сотни лет до открытия спутников Марса, представляя их как удивительное событие, подлежащее объяснению. При этом, сознательно или бессознательно, не упоминается о первопричине свифтовских предсказаний, связанной с высказанной Кеплером гипотезой, и совершенно игнорируется то обстоятельство, что Свифт и Вольтер явно высмеивают тех философов и естествоиспытателей, которые либо схоластичны в своих рассуждениях, либо мыслят только аналогиями, либо за аргументами обращаются к теологии.

Со спутниками Марса связана еще одна загадка, ответ на которую небесные механики пока не дали. Более двадцати лет назад американский ученый Шарплесс обнаружил одну непонятную особенность движения ближайшего к Марсу спутника — Фобоса. Наблюдения выявили постепенное уменьшение среднего расстояния Фобоса от Марса и связанное с этим сокращение периода его обращения. Каждые сутки период обращения Фобоса сокращается на 0,000001 секунды.

После этого неожиданного открытия ряд ученых начал поиски причин, вызывающих указанное ускорение. Испытывались и проверялись различные возмущающие силы. Были изучены воздействие приливов, возникающих в коре Марса и подобных наблюдающимся на море, в коре и атмосфере Земли; возмущения от фигуры Марса; от светового давления солнечных лучей и сопротивления верхних слоев марсианской атмосферы. Мнения специалистов разделились.

Заметим сразу же, что пока мы не располагаем достаточными данными ни о фигуре Марса, ни о поле его тяготения, ни о плотности и протяженности его атмосферы, нет уверенных сведений о магнитном поле и, что очень существенно, надежных данных о спутниках Марса. В основу всех подсчетов эффекта ускоренного движения Фобоса приходилось класть некоторые дополнительные гипотезы. Поэтому ожидать получения надежных и достоверных результатов было нельзя, так как каждый из исследователей в той или иной мере в исходных гипотезах был вынужден допускать произвол.

И тем не менее проведенные исследования, носившие характер разведки, были очень полезными и привлекли внимание небесных механиков к новой сложной динамической проблеме. Этому особенно способствовала смелая и неожиданная гипотеза московского проф. И. С. Шкловского об искусственном происхождении спутников Марса.

Для искусственных спутников Земли хорошо известен так называемый «парадокс спутников», заключающийся в том, что под действием сопротивления атмосферы спутник, приближаясь к Земле, начинает двигаться быстрее.

Именно этим эффектом и пытался объяснить проф. Шкловский вековое ускорение в движении марсианского спутника Фобоса. Проведенные оценки других возмущающих эффектов не дали желаемых результатов, поэтому Шкловский обратился к оценке эффекта аэродинамического торможения. Плотность марсианской атмосферы на высотах полета Фобоса, по расчетам Шкловского, явно недостаточна для объяснения векового ускорения Фобоса. И Шкловский предположил, что спутники Марса имеют большие полости. Торможение будет достаточным только в том случае, если плотность спутника принять равной 0,001 *г/см*^{3}. А такую плотность у естественных спутников даже при самой смелой фантазии предположить невозможно. Оставалось одно: объявить спутники Марса искусственными и пустотелыми.

Гипотеза Шкловского не выдержала проверки временем, но она сыграла положительную роль, ибо повлекла за собой ряд разнообразных исследований.

В частности, американский ученый Г. Шиллинг, используя новейшие данные об атмосфере Марса, оценил плотность Фобоса в 6 *г/см*^{3}, исключив тем самым надобность в гипотезе Шкловского. Однако эта проблема не может считаться решенной. Действительно, известно, что плотность верхних слоев земной атмосферы очень сильно зависит от состояния солнечной активности, меняясь иногда в десятки и сотни раз. То же самое должно происходить и в атмосфере Марса.

Шиллинг провел интересное сопоставление, сравнив ускорение в движении Фобоса на большом интервале времени с количеством солнечных пятен (корпускулярное излучение Солнца резко увеличивается при прохождении по его диску темных пятен). Результат сравнения показывает прекрасное совпадение характера изменения ускорения Фобоса и числа солнечных пятен. А отсюда по меньшей мере следует необходимость учета сопротивления атмосферы Марса в движении Фобоса *).

Другой причиной векового ускорения Фобоса, несомненно, является притяжение приливных горбов, возникающих в коре Марса. Природу приливов мы подробно рассмотрим в следующем параграфе. Здесь же ограничимся лишь упоминанием об оценках приливного эффекта в движении Фобоса, выполненных московским проф. Н. Н. Парийским и позднее американскими учеными Фишем и Редмондом. Эти ученые оценили величину приливов, вызываемых в коре Марса притяжением Фобоса. Сложность расчетов связана с отсутствием сведений о твердости этой коры. Если принимать твердость коры Марса такой же, как и у Земли, то приливного эффекта недостаточно для объяснения векового изменения орбиты Фобоса, что и было отмечено И. С. Шкловским. Но если жесткость коры Марса принять меньшей, то наблюдаемое ускорение Фобоса вполне объяснимо только приливным воздействием.

Существуют и другие попытки объяснения. Одна из них была высказана В. В. Радзиевским и В. П. Виноградовой. Эти ученые выполнили исследование тормозящего воздействия солнечной радиации. Хотя аналогичные оценки производились и И. С. Шкловским, тем не менее не исключено, что они занижены. Шкловский исходил из предположения о сферической форме Фобоса. А так ли это, нам до сих пор не известно. Возможно, что спутники Марса, как и астероиды, имеют неправильную форму. Тогда при соответствующей ориентации спутников по отношению к Солнцу они могут

*) Дополнительные подробности по обсуждаемому вопросу читатель найдет в статье В. А. Бронштэна «Спутники Марса — какие они?», опубликованной в журнале «Земля и Вселенная», № 2, 1965.

испытывать большее по величине воздействие со стороны солнечных лучей.

Итак, на данном этапе развития астрономии пока не удается однозначно ответить на поставленный вопрос. Нам не хватает информации о физических и механических характеристиках Марса и его спутников. Однако можно не сомневаться, что межпланетные автоматические станции и космические зонды в скором времени сообщат нам необходимые сведения, и тогда небесные механики «на кончике пера» установят во всех деталях судьбу спутников.

Но даже не вдаваясь в подробности причин векового ускорения Фобоса, можно констатировать, что в результате постепенного сближения с Марсом Фобос рано или поздно вступит в зону Роша и будет в ней разорван силами марсианского тяготения, если только окажется хрупким и неплотным. Если же твердость Фобоса достаточно велика, то наши далекие потомки не будут иметь возможности наблюдать около Марса кольцо, похожее на кольцо Сатурна. Но тогда одно из будущих поколений станет свидетелем не менее внушительной катастрофы, когда на Марс упадет его спутник с поперечником в 15 *км*.

Возможно, и некоторые другие спутники больших планет в будущем также разделят судьбу Фобоса.

§ 22. Дарвин о гибели Луны

Речь пойдет не о трудах великого творца теории происхождения видов Чарлза Роберта Дарвина, а о работах его второго сына Джорджа Говарда Дарвина (1845—1912), крупного английского небесного механика, геофизика и космогониста. Небезынтересно заметить, что в различных сферах науки успешно трудилась целая династия Дарвинов. Первым ее представителем был шотландский поэт и физик Эразм Дарвин (1731—1802), а традиции рода и сейчас продолжает английский физик младший Чарлз Дарвин, внук прославленного естествоиспытателя. В этом параграфе в общих чертах будет изложено содержание работы Дж. Дарвина об эволюции двойной планеты «Земля — Луна» *).

---

*) Дополнительные подробности читатель найдет в книге Дж. Дарвина «Приливы и родственные им явления в Солнечной системе», вышедшей в русском переводе вторым изданием в 1965 г.

После открытия закона всемирного тяготения небесные механики создали математическую теорию движения Луны. Разработанная теория давала возможность точно предвычислить моменты наступления солнечных затмений и места их видимости. Астрономы проделали большую работу по вычислению как предстоящих, так и прошедших затмений, охватив своими расчетами несколько веков. Сподвижник и друг Ньютона Эдмонд Галлей провел сопоставление результатов теоретических расчетов с историческими сведениями о затмениях, почерпнутыми из летописей и трудов историков. Позднее подобные исследования неоднократно повторялись. Весьма интересную работу в этом направлении проделал знаменитый узник Шлиссельбургской крепости Н. А. Морозов, осужденный за революционную деятельность к пожизненному заключению в страшном Алексеевском равелине Петропавловской крепости и освобожденный из заключения революционной бурей 1905 года. Все подобные исследования показали, что места и моменты затмений, указанные в летописях, не совпадают с теми, которые следуют из расчетов астрономов. В чем же дело?

Правильное предположение, объяснявшее обнаруженное несовпадение, впервые было высказано И. Кантом, который утверждал, что наблюдаемый эффект связан с замедлением вращения Земли вследствие приливов, вызванных на Земле Луной, а остроумное обоснование этой идеи было дано французом Шарлем Делоне.

В начале главы уже анализировалось возмущающее воздействие сил тяготения планеты на различные точки ее спутника и была введена приливообразующая сила. Приливообразующие силы вызывают приливные явления не только на спутнике, но и на самой планете. Так, например, приливное воздействие со стороны Луны на Землю приводит к возникновению в земных океанах пологих приливных горбов: одного на полушарии, обращенном к Луне, а другого — на противоположном полушарии. Вершины обеих приливных волн лежат близко к прямой, соединяющей центры Земли и Луны. Приливы наблюдаются не только в морях и океанах, но и в земной коре и даже в атмосфере. Кора Земли вследствие лунных приливов медленно вздымается на несколько десятков сантиметров!

Космогоническое значение приливов и попытался выяснить в конце прошлого столетия Джордж Дарвин. Он показал, что приливы порождают силы трения, замедляющие вращение Земли. Приливная волна все время следует за Луной, т. е. ее вершина находится почти в подлунной точке. Но Луна движется вокруг Земли с угловой скоростью, почти в тридцать раз меньшей угловой скорости вращения Земли вокруг своей оси. А это означает, что приливные волны должны перемещаться на Земле в направлении, противоположном ее вращению. Именно поэтому и возникают силы трения, тормозящие вращение Земли.

Точные астрономические наблюдения подтверждают так называемое вековое замедление вращения Земли (увеличение продолжительности земных суток). Особенно точные измерения удалось выполнить в последние десятилетия, когда наряду с астрономическими методами измерения времени были созданы «молекулярные» и «атомные» стандарты времени. Удлинение суток очень незначительно: оно составляет около полутора тысячных долей секунды за столетие. Это удлинение почти полностью объясняется теорией приливов.

Но согласно общим законам механики действию всегда соответствует равное и противоположно направленное противодействие. Если Луна своим тяготением заставляет приливные горбы «отставать» от вращения Земли, то последние в свою очередь будут стремиться замедлить орбитальное движение Луны относительно Земли. Следовательно, одновременно с замедлением вращения Земли должно происходить увеличение продолжительности месяца.

Дарвин отмечает и еще один очень важный в космогоническом отношении эффект, порождаемый приливным трением. Силы трения уменьшают полную механическую энергию. Но в силу физических законов «исчезновение» энергии невозможно, возможна лишь передача энергии от одного тела к другому или переход одной формы энергии в другую. В нашем случае при трении происходит превращение энергии механического движения в теплоту. Вследствие приливного трения механическая энергия поступательного и вращательного движения Луны и Земли постепенно уменьшается. Если пренебречь энергией вращательного движения, то изменение механической энергии системы «Земля — Луна» можно легко связать с изменением большой полуоси лунной орбиты. Для задачи двух тел имеем (см. § 4)

$$v^2/2 - fm/r = -1/2a.$$

Здесь первое слагаемое дает кинетическую энергию Луны в ее движении относительно Земли, второе слагаемое представляет собой потенциальную энергию тяготения, а a — большую полуось лунной орбиты. Если скорость Луны уменьшится по каким-либо причинам, то левая часть уравнения также станет меньшей, и тогда должна уменьшиться правая часть, что возможно только при увеличении радиуса лунной орбиты a.

Более точные рассуждения должны опираться на анализ еще одного соотношения, выражающего закон сохранения вращения (закон сохранения момента количества движения).

Дж. Дарвин проследил влияние приливного трения как в прошедшие эпохи, так и в будущем. Он обнаружил, что современная скорость увеличения продолжительности земных суток гораздо больше, чем скорость изменения продолжительности месяца. Хотя месяц становится продолжительнее, тем не менее количество земных суток, содержащееся в одном периоде обращения Луны, уменьшается. Как следует из расчетов Дарвина, при продолжительности месяца в 37 современных суток угловая скорость собственного вращения Земли будет вдвое меньше по сравнению с настоящей. Поэтому в месяце будет заключаться только 18 суток новой эпохи.

По Дарвину, в дальнейшем будет происходить постепенное увеличение продолжительности земных суток и месяца до тех пор, пока оба периода вращения не сравняются. Этот общий период составит примерно 55 наших суток. Напомним, что одновременно с этим процессом Луна будет медленно удаляться от Земли, переходя на другую орбиту с большей полуосью.

В упоминавшейся ранее книге Дж. Дарвин пишет об эволюции системы «Земля — Луна»:

«Обращаясь к прошедшим эпохам, мы найдем, что по мере нашего удаления в глубь времен и сутки, и месяц укорачиваются, но сутки меняются быстрее, чем месяц. Земля могла совершать большее число оборотов в течение месяца, чем теперь, хотя месяц сам по себе был короче, чем наш, современный. Так, мы возвращаемся к той эпохе, когда месяц заключал в себе 29 вращений Земли вокруг ее же оси вместо $27^1/_3$ современных. Эта эпоха является своего рода критической в истории системы Земля — Луна, так как можно доказать, что месяц не заключал в себе никогда более 27 суток. И раньше этой эпохи в месяце было меньше 29 суток и после этой эпохи тоже. Хотя эта эпоха в истории Земли весьма удалена от нас, но в общей последовательности всех изменений она должна быть рассматриваема как сравнительно недавняя. В известном смысле, таким образом, мы можем говорить, что лишь недавно пережили срединную стадию нашей истории.

Затем, прослеживая последовательность изменения от той эпохи, которая характеризуется наибольшим числом суток в месяце, мы увидим, что Земля вращается все быстрее и быстрее, что Луна подходит все ближе и ближе к Земле и обращается вокруг нее в промежутки все более и более короткие. Но тут наступает резкая перемена: месяц сокращается быстрее, чем сутки. Поэтому Луна снова, так сказать, нагоняет Землю, которая не может вращаться с таким же числом оборотов в месяц, как прежде. Другими словами, число суток в месяце уменьшается от своего максимального значения (29) и окончательно сводится к одним суткам. Когда это было так, Земля и Луна вращались с одной и той же самой скоростью, и Луна всегда была против одной и той же стороны поверхности Земли; поскольку это касается взаимного движения, Луна и Земля как бы соединились твердым стержнем.

Итак, мы пришли к тому заключению, которое мы предвидели и для далекого будущего; но оба случая глубоко различны: в будущем период совместного обращения будет заключать 55 наших суток, а в давно прошедшие времена оба небесных тела вращались одно около другого в период, равный от 3 до 5 наших часов. Спутник, обращающийся вокруг Земли в такой короткий промежуток времени, должен почти касаться земной поверхности. Таким образом, мы проследили состояние системы до той эпохи, когда Земля и Луна почти соприкасались и вращались как одно тело».

Здесь мы встречаемся с весьма эффектным примером, на котором хорошо видно значение теории устойчивости в космогонических задачах. И на начальном этапе эволюции системы «Земля — Луна», когда периоды вращения и обращения были равными, но Луна и Земля практически составляли одно тело, и при максимальном (по Дарвину) удалении Луны от Земли, когда Земля и Луна также должны двигаться подобно единому твердому телу, как если бы они были жестко скреплены недеформируемым стержнем, движения кажутся совершенно одинаковыми. Однако в первом случае, в начале эволюции, движение неустойчиво и достаточно небольшого смещения Луны от первоначального положения, как гигантские приливные волны быстро разрушат положение относительного равновесия и приведут либо к падению Луны на Землю либо к быстрому удалению ее от Земли. Во втором случае, при максимальном удалении Луны от Земли, состояние относительного равновесия Дарвин считает устойчивым, предполагая, что никакие другие силы, например, силы солнечного притяжения, не действуют. Дарвин сравнивает эти два равновесия с положениями равновесия яйца на горизонтальной плоскости. Начальное относительное равновесие системы «Земля — Луна» похоже на положение равновесия яйца, поставленного на конец: ничтожное отклонение яйца от положения равновесия нарушает его. Второе положение равновесия аналогичного равновесию яйца, лежащего на боку: незначительные толчки вызывают лишь малые колебания яйца вблизи равновесия.

Хотя сам Дарвин и считает свои расчеты устойчивости вполне строгими, на самом деле их можно считать приемлемыми только в предположении, что колебательные процессы малы. Исследование устойчивости движения должно опираться на точные методы теории А. М. Ляпунова. Поэтому результаты Дарвина дают устойчивость лишь в первом приближении. Немного позже укажем и еще одну причину, могущую вызывать нарушение устойчивости. Приведенные соображения дают нам прекрасный пример, разъясняющий стремление небесных механиков получить ответы на вопрос об устойчивости из исследований уравнений движения, выполненных со всей математической строгостью.

Механические исследования Дарвина о роли приливов в эволюции спутниковых орбит подлежат различным уточнениям.

На одно из них указывал и сам Дарвин. Речь идет об оценке влияния солнечных приливов. Несмотря на удаленность Солнца от Земли и, казалось бы, весьма незначительную величину приливообразующей силы Солнца, люди даже без каких-либо точных физических приборов давно заметили, что океанские приливы существенно зависят от положения Луны и Солнца относительно Земли. Лунные приливы повторяются через 6 часов 13 минут, а солнечные приливы — через 6 часов. Сложение солнечных и лунных приливов и отливов в различные дни и месяцы приводит к разным результатам. Иногда солнечные приливы усиливают лунные, а иногда несколько «гасят» их. Очевидно, что наиболее сильные приливы происходят в те дни, когда Земля, Луна и Солнце располагаются вдоль одной прямой, т. е. при полнолунии и новолунии.

Если учесть действие приливообразующих сил солнечного тяготения, то окажется, что относительное равновесие Луны и Земли при предельном удалении их друг от друга, указанном Дарвином, не будет устойчивым. Хотя приливные горбы на Земле, вращающейся вокруг своей оси за 55 современных суток, будут постоянно направлены в сторону Луны, на земной поверхности будут пробегать приливные волны меньшей высоты, вызванные солнечным тяготением.

Земные сутки на этом этапе должны постепенно стать больше 55 нынешних суток, и лунные приливные волны будут отставать от направления на Луну. Луна будет стремиться возвратить Землю в положение относительного равновесия, т. е. ускорять ее вращение, однако солнечное тяготение постепенно будет уменьшать механическую энергию Луны, которая будет затрачиваться на «раскручивание» Земли и на приливное трение. В результате Луна начнет постепенно приближаться к Земле и в конечном итоге обрушится на нее.

Принять справедливость всех выводов Дж. Дарвина нельзя, так как его расчеты приближенны. Будет ли на самом деле гибель Луны такой, как это предписывает работа Дарвина, сказать затруднительно. Необходимо повторить расчеты Дарвина, проводя их более строго и точно. Несомненно одно: движение Луны нельзя считать устойчивым, а приливное трение действительно играет заметную роль в эволюции системы «Земля — Луна» и действует в направлении, указанном Дарвином.

В последние десятилетия у ряда ученых снова возродился интерес к приливной теории эволюции Земли и Луны. В 1955 г. немецкий астроном Х. Герстенкорн повторил исследования Дж. Дарвина, приняв более точные значения постоянных, характеризующих фигуры Земли и Луны. Он пришел к выводу, что расстояние Луны в момент наибольшего сближения равно 2,89, т. е. в точности совпадает с пределом Роша. Этот результат, сам по себе весьма любопытный, желательно было бы подвергнуть еще одной дополнительной проверке, так как космогонические выводы Герстенкорна о происхождении Луны несколько неожиданны и не укладываются в общепринятые представления. По Герстенкорну в прошлом наклонность лунной орбиты достигала 90—120°, а эксцентриситет был близок к единице, т. е. Луна двигалась ранее почти по параболической орбите. Почти одновременно Г. Джеффрис, Л. Слихтер, В. Каула, Г. Макдональд, Е. Л. Рускол выполнили новые оценки эффекта приливного трения. Результаты Герстенкорна не подтвердились, а результаты других авторов, которые иллюстрируются рис. 49 и 50, оказались близкими к классическим исследованиям Дж. Дарвина.

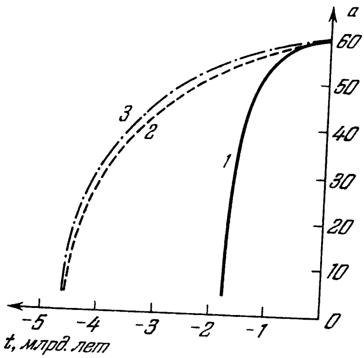

Рис. 49. Продолжительность эволюции системы «Земля — Луна»: *1* — при постоянном угле запаздывания (Макдональд), *2* — при линейном во времени запаздывании (Е. Л. Рускол), *3* — при квадратичном законе запаздывания (Е. Л. Рускол).

Большое значение может иметь приливное трение в эволюции спутниковых орбит. Этому вопросу в последнее время был посвящен ряд работ (П. Гольфрайх, Л. Урей, В. Эльзессер, М. Рочестер и др.). Интересный космогонический результат был получен Т. Маккордом, изучавшим движение спутников Нептуна. По его мнению, благодаря приливному трению Нептун приобрел спутник Тритон (см. § 2), который в прошлом двигался по параболической орбите.

В связи с приливной теорией Дарвина отметим и другие эффекты, которые должны иметь место в Солнечной системе. Вне сомнения, приливообразующие силы Солнца сыграли большую роль в эволюции вращательного движения ближайших к Солнцу планет — Меркурия и Венеры. Если даже,

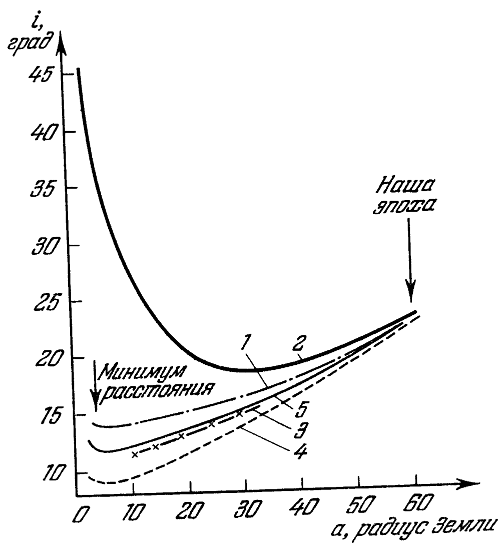

Рис. 50. **Изменение наклона плоскости лунной орбиты к земному экватору за счет приливного трения.** *1* — Дж. Дарвин (1879 г.), *2* — Герстенкорн (1955 г.), *3* — Слихтер (1963 г.), *4* — Макдональд (1964 г.), *5* — Сорокин (1965 г.).

как сейчас предполагают, Меркурий и не повернут к Солнцу одной стороной, то продолжительность суток на Меркурии намного больше, чем у Земли, Марса и других планет. И повинно в этом только Солнце с его приливообразующими силами. Несомненно и другое: солнечные приливы в какой-то мере сказываются на размерах орбит ближайших планет.

Выше была отмечена связь приливных явлений с фигурами планет. Некоторые из выводов теории фигур были вскользь упомянуты. Основные результаты этой теории будут более подробно рассмотрены в § 23.

«Когда, после стольких усилий, приходишь, наконец, к достоверному результату, то испытываешь при этом одно из наиболее радостных чувств, какое только способна ощущать человеческая душа».

Луи Пастер

Глава 5

Эволюция орбит и фигур больших планет

§ 23. Фигуры планет

Теория фигур планет интересна не только своими выводами, но и поучительна своим историческим развитием. В истории ее становления мы сталкиваемся и с открытиями «на кончике пера», убедительно доказывающими силу и эффективность теоретических рассмотрений на основе законов классической механики Ньютона, и с примерами, ярко свидетельствующими об опасности делать научные выводы, основываясь лишь на неглубоких механических аналогиях. Остановимся сначала на двух примерах, связанных с работами по определению фигуры Земли и с анализом космогонической гипотезы Лапласа о происхождении Солнечной системы.

Работы по определению фигуры Земли начались задолго до того, как Ньютон сформулировал законы движения и закон всемирного тяготения. Однако до Ньютона вопрос об отклонении фигуры Земли от шарообразной формы не вставал. С помощью закона всемирного тяготения Ньютон доказал, что Земля имеет форму сплюснутой с полюсов сферы — сфероида, причем для сжатия Земли α он получил значение $\alpha = 1/227$ (под сжатием понимают отношение разности экваториального и полярного радиусов к экваториальному радиусу). Вывод Ньютона упорно оспаривал ряд ученых Европы и, в частности, французский астроном Джованни (Жан) Доминик Кассини (1625—1712). Кассини был присущ ряд глубоких заблуждений: он не признавал учения Коперника, отвергал закон тяготения и был твердо уверен, что Земля имеет форму не сжатого, а вытянутого сфероида. Как ни кажется странным, Кассини в отношении фигуры Земли исходил не из теоретических соображений, а из градусных измерений, выполненных к тому времени.

Для опровержения теоретических выводов Ньютона французы организовали три экспедиции для производства градусных измерений, одной из которых руководил выдающийся французский ученый Пьер Луи Моро де Мопертюи (1698—1759). Одна экспедиция измерила длину градуса по меридиану в Перу, другая — во Франции, а третья — в Лапландии. Результаты этих экспедиций показали, что длина градуса меридиана возрастает вместе с широтой, а это означает не вытянутость, а сплюснутость Земли. Теория Ньютона восторжествовала.

Вторая задача теории фигур небесных тел, волновавшая ученых в течение долгого времени, была связана с космогонической гипотезой Лапласа, согласно которой Солнечная система произошла из газовой туманности, вращавшейся вокруг своей оси. Вследствие постепенного сжатия угловая скорость вращения туманности увеличивалась в соответствии с законом сохранения момента количества движения (количества вращения). На определенном этапе благодаря действию центробежной силы в экваториальной области туманности отрывались гигантские кольца, из которых впоследствии в результате конденсации и образовались планеты.

Основная проблема теории фигур планет первоначально сводилась к решению задачи: может ли жидкая однородная масса, изолированная в пространстве, вращаться как твердое тело, т. е. так, что взаимные расстояния между всеми ее частицами остаются неизменными? Какова будет форма жидкости? Будет ли фигура, которую примет жидкость, устойчивой?

Со временем эта проблема все более и более усложнялась, решалась с учетом дополнительных сил и факторов. Ею занимались все крупнейшие математики и механики послеиьютоновского периода.

Исследования Ньютона по теории фигуры Земли были продолжены в превосходной работе шотландского ученого

Колена Маклорена (1698—1746). Он показал, что фигурой равновесия вращающейся однородной жидкой массы будет эллипсоид вращения, в каждой точке поверхности которого равнодействующая приложенных сил должна быть перпендикулярной к этой поверхности. Эти фигуры равновесия получили название эллипсоидов Маклорена.

Затем замечательные результаты, не утратившие значения и до сих пор, получил французский ученый Алексис Клод Клеро (1713—1765), кстати сказать, принимавший участие в упоминавшейся экспедиции Мопертюи. Клеро решал более общую задачу, рассмотрев различные случаи равновесия неоднородной массы. Им была установлена формула, связывающая сжатие, силу тяжести и центробежную силу на поверхности планеты, в предположении о малости угловой скорости вращения планеты вокруг оси.

Дальнейшие исследования задачи связаны с именами французских ученых Адриана Мари Лежандра (1752—1833) и Лапласа. Лежандр дал новый математический метод исследования, а Лаплас доказал, что сжатый эллипсоид, мало отклоняющийся от шара, остается фигурой равновесия даже и в том случае, когда на него действуют малые возмущающие силы со стороны другого тела. Лаплас, таким образом, отказался от предположения, что планета должна быть изолированной в пространстве. Он обнаружил также, что сфероид с окружающим его кольцом представляет собой фигуру равновесия.

После этих исследований долгое время полагали невозможными иные фигуры равновесия. Следующий принципиально новый результат был получен выдающимся немецким механиком и математиком Карлом Густавом Яковом Якоби (1804—1851). Он показал, что фигуры равновесия не обязательно должны быть телами вращения: условиям равновесия удовлетворяют и трехосные эллипсоиды, т. е. фигуры, получающиеся из шара посредством сжатия как с полюсов, так и в направлении, лежащем в экваториальной плоскости.

В научном мире открытие Якоби вызвало немалое удивление. Некоторые из ученых, в частности, автор одной из теорий движения Луны Филипп Густав Дульсе де Понтекулан (1795—1874), пытались даже опровергать результат Якоби. Но повторные исследования не только подтвердили правоту Якоби, но и установили связь между эллипсоидами Маклорена и Якоби.

Как оказалось, при уменьшении угловой скорости вращения эллипсоид постепенно вытягивается и приобретает форму сигары или иглы. Кроме иглообразной фигуры равновесия при небольших угловых скоростях возможны еще две фигуры — типа шара и типа диска. Между этими тремя предельными фигурами равновесия располагаются две серии

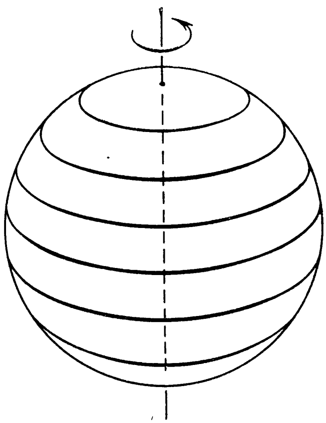

Рис. 51. Планетоподобная фигура равновесия Маклорена.

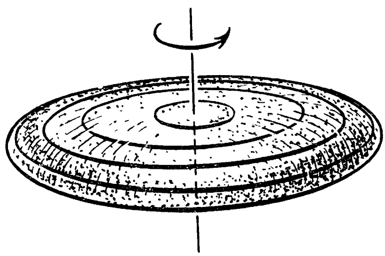

Рис. 52. Дископодобная фигура равновесия Маклорена.

фигур: сжатые эллипсоиды вращения Маклорена и удлиненные трехосные эллипсоиды Якоби. Планетоподобный (почти шарообразный) тип фигуры равновесия Маклорена

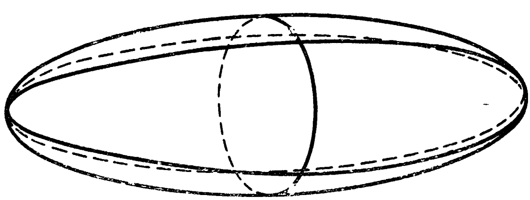

Рис. 53. Трехосный эллипсоид Якоби.

изображен на рис. 51, дискообразный эллипсоид Маклорена — на рис. 52, а трехосный эллипсоид Якоби — на рис. 53.

Первые два типа фигур равновесия интересны для планетной космогонии, а сигарообразные фигуры равновесия, как кажется на первый взгляд, практического интереса не представляют. Однако это не так. Мы снова имеем возможность убедиться в многообразии природных форм и снова можем видеть, как теория предвосхищает практику. Вряд ли астрономы, не зная о сигарообразных фигурах равновесия, смогли бы подозревать о существовании иглообразных галактик. А такие галактики, как утверждают астрономы-звездники, имеются *).

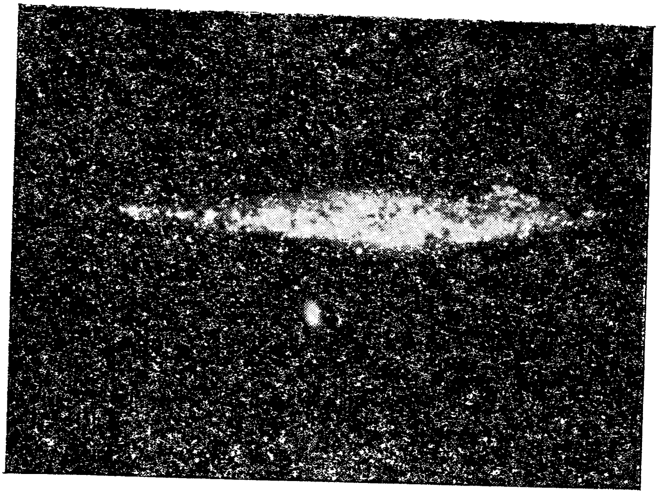

Рис. 54. Иглообразная галактика NGC 4631.

На рис. 54 приведена фотография иглообразной галактики NGC 4631. Сказанное позволяет нам еще раз отметить ошибочность получившей в последнее время распространение концепции, согласно которой теоретическая научная работа в ряде отраслей знания должна быть поставлена в прямую связь с практикой сегодняшнего дня.

Полную ясность в вопросе об эволюции фигур равновесия при изменении угловой скорости вращения внес Жозеф Лиувилль (1809—1882), профессор Сорбонны (Парижский университет) и непременный секретарь Парижской Акаде-

*) Сведения об иглообразных галактиках приводятся в книге К. Ф. Огородникова «Динамика звездных систем», Физматгиз, 1958, глава 10.

мии наук. Объяснения Лиувилля сочли достаточными, и проблема снова была предана забвению. Интерес к ней возродился лишь после выхода в 1883 г. третьим изданием знаменитого сочинения «Трактат по натуральной философии» английских ученых Томсона и Тэта *), которое, к сожалению, не было переведено на русский язык.

Как обнаружили Томсон и Тэт, серия фигур равновесия, начинающаяся от шара и проходящая через эллипсоиды Маклорена до «первого» эллипсоида Якоби, при последовательном увеличении момента вращения, а не угловой скорости, состоит только из устойчивых фигур. Следующая серия состоит из постепенно удлиняющихся эллипсоидов Якоби, которые в конце концов должны закончиться разрывом эллипсоида на два отдельных тела. Томсон и Тэт указали на отсутствие серии промежуточных фигур, предшествующих разрыву.

Решением проблемы Томсона и Тэта занимались крупнейшие ученые конца прошлого и начала этого века Анри Пуанкаре и А. М. Ляпунов, а также Джордж Дарвин и астроном Дж. Джинс. А. М. Ляпунов занялся этой проблемой в 1882 г. по совету акад. П. Л. Чебышева (1821—1894), с которым он обсуждал тему магистерской диссертации. П. Л. Чебышев поставил перед А. М. Ляпуновым следующий вопрос:

«Известно, что при некоторой величине угловой скорости эллипсоидальные формы перестают служить формами равновесия вращающейся жидкости. Не переходят ли они при этом в какие-либо новые формы равновесия, которые при малом увеличении угловой скорости мало отличались бы от эллипсоидов?»

Иначе говоря, Чебышев предложил не только изучить новые фигуры равновесия, но и выяснить, будут ли они устойчивыми. Кстати, этот же вопрос Чебышев предлагал и Ковалевской.

Сам А. М. Ляпунов в следующих словах вспоминает об истории этой работы **):

---

*) Мы не касаемся здесь замечательных работ Софьи Ковалевской и других ученых, посвященных специальной задаче теории фигур небесных тел, связанной с эволюцией колец Сатурна, которые были обсуждены в предыдущей главе.

**) А. М. Ляпунов, Собрание сочинений, т. 3, Изд-во АН СССР, 1959 (в статье «О форме небесных тел»).

«В этой работе я пришел к следующим заключениям.

Пока момент количества движения менее того предела, при котором эллипсоиды Маклорена переходят в эллипсоиды Якоби, эллипсоиды Маклорена устойчивы. Если же момент количества движения J будем увеличивать, начиная от J_1, эти эллипсоиды теряют устойчивость, и устойчивыми делаются эллипсоиды Якоби. Однако последние не всегда остаются устойчивыми, а только до тех пор, пока J, возрастая, не достигнет некоторого предела J_2, при котором, насколько можно судить по первому приближению, эллипсоиды переходят в какие-то новые фигуры равновесия... Эти фигуры впоследствии были названы грушевидными...

Через год после опубликования моей диссертации, я, просматривая «Comptes rendus» (доклады Парижской Академии наук.— *В. Д.*), встретил заинтересовавшую меня заметку Пуанкаре, тогда еще молодого, но уже получившего известность ученого. В этой заметке Пуанкаре говорит, что, желая доказать некоторые результаты, только что опубликованные Томсоном без доказательства, он занялся вопросом о формах равновесия вращающейся жидкости и сообщает полученные им при этом выводы. Последние оказались совпадающими с моими; хотя о новых фигурах равновесия Пуанкаре говорит не с той осторожностью, как я, а прямо утверждает, что эти фигуры существуют. Прочитав эту заметку, я тотчас же послал Пуанкаре экземпляр своей диссертации с письмом, в котором говорю о тех затруднениях, которые я встретил, желая доказать существование тех фигур, на которые указывает первое приближение. При этом я выразил сомнение относительно возможности получить это доказательство при помощи метода последовательных приближений...

Однако так как Пуанкаре утверждает, что фигуры, о которых идет речь, действительно существуют, то, следовательно, он должен обладать какой-либо другой методой для доказательства их существования, я и просил его сообщить, в чем состоит эта метода. На это письмо Пуанкаре вскоре ответил, что он встретил те же затруднения, что и я... Если же он все-таки утверждает, что формы равновесия, о которых идет речь, действительно существуют, то только на основании некоторых аналогий и на основании своего убеждения, что строгое доказательство может быть найдено...

После этого я почти в течение 20 лет не занимался этим вопросом, будучи отвлечен другими занятиями, и только после избрания меня в Академию, получив надлежащий досуг, вновь возвратился к вопросу Чебышева. Замечательно, что я при этом вновь встретился с Пуанкаре, который около этого же времени занялся вопросом об устойчивости грушевидной формы равновесия».

Далее А. М. Ляпунов пишет:

«...и, таким образом, я пришел к строгому доказательству существования тех форм равновесия, о которых речь шла выше. Вместе с тем я получил и полное решение задачи Чебышева, ответ на которую получился отрицательный.

Что касается упомянутой выше работы Пуанкаре, то он, желая решать вопрос об устойчивости, должен был заняться разысканием второго приближения...

Этим вопросом Пуанкаре занялся вследствие обращенного к нему письма Дарвина, который в это время старался разрешить вопрос об устойчивости грушевидной фигуры и просил Пуанкаре помочь ему в разыскании необходимого для этого второго приближения, найти которое ему самому не удалось.

После мемуара Пуанкаре, в котором содержатся лишь общие формулы, между тем как вопрос зависит от численных вычислений, Дарвин опубликовал свой мемуар, в котором производит эти, в высшей степени сложные, вычисления и в результате приходит к выводу, что грушевидная форма равновесия устойчива...

Однако я, занимаясь тем же вопросом, пришел к противоположному заключению, а именно, что грушевидная фигура неустойчива, и я считал свой результат правильным, так как при вычислениях я исходил из точных формул, тогда как Дарвин пользовался формулами приближенными. Я опубликовал свои результаты в мемуаре 1905 г. «Sur un problème de Tchébyschef» («О проблеме Чебышева».—*В. Д.*), дающем резюме моих исследований о формах равновесия, мало отличающихся от эллипсоидальных».

Условия существования фигур равновесия и их устойчивости, полученные в теоретических работах, были проверены для больших планет Солнечной системы. Оказалось, что угловые скорости вращения планет вокруг своих осей намного меньше предельных значений угловых скоростей, при которых соответствующие формы равновесия становятся невозможными. Отсюда мы можем сделать заключение об устойчивости фигур больших планет, предполагая, что в будущем продолжительность суток для различных планет будет оставаться почти неизменной.

§ 24. Эффект переменности массы

Исследование будущих орбит больших планет мы начнем с рассмотрения нескольких частных проблем. Одна из них связана с новыми представлениями о природе тяготения. Мы ограничимся лишь анализом динамических следствий, не касаясь физического аспекта проблемы.

Теория относительности породила неожиданные гипотезы о свойствах тяготеющих тел. Согласно современным представлениям, гравитационное взаимодействие тел зависит не только от расстояний, разделяющих тела, но и от свойств пространства и времени. Некоторые крупные физики, среди которых первым нужно назвать выдающегося английского теоретика П. А. М. Дирака, считают, что энергия гравитационного взаимодействия уменьшается с течением времени. Немецкий физик Йордан, например, объясняет это тем, что постоянная тяготения вовсе и не является постоянной, а обратно пропорциональна протекшему времени; другие объясняют изменение силы тяготения уменьшением массы во времени без ее излучения. Для небесных механиков безразлично, какая из указанных величин подвержена изменению, ибо в закон всемирного тяготения постоянная тяготения и масса входят в виде произведения. Во всяком случае, физика уже давно отказалась от представления о массе как постоянной величине. Так, по теории относительности масса тела дается формулой

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

где m_0 — так называемая масса покоя, v — скорость тела, c — скорость света. Точно так же можно допустить и старение материи, приводящее к убыванию со временем величины взаимодействия тяготеющих тел.

Если даже эта гипотеза и неверна, нам все же необходимо исследовать движение планет с учетом уменьшения солнечной массы, происходящего постоянно вследствие излучения и выброса вещества из Солнца. В абсолютном выражении суточный размер потерь солнечной массы весьма внушителен. Уменьшение массы Солнца только за счет излучения составляет свыше 250 млн. m в минуту.

Переменность тяготения тел Солнечной системы в некоторой степени зависит также от процессов роста массы планет вследствие выпадения на них метеорного вещества. В движении самих планет этот эффект не вызовет сколько-нибудь заметных изменений, однако этого нельзя утверждать относительно движения спутников планет на космогонических интервалах времени.

Итак, при изучении движения тел Солнечной системы на длительных интервалах времени учет переменности масс тел Солнечной системы неминуем. Иногда достаточно найти возмущения, вызванные переменностью массы Солнца, а в других случаях нужно учитывать и изменение масс планет. Первую задачу можно назвать задачей о движении в поле тяготения одного неподвижного центра с переменной массой, а вторую задачу — задачей о двух телах переменной массы.

Первая задача рассматривалась еще в прошлом веке Гуго Гильденом (1841—1896) и И. В. Мещерским (1859—1935). Последний получил точное решение задачи в предположении, что масса изменяется по закону

$$m = \frac{1}{\sqrt{a + bt + ct^2}}.$$

Этому закону подчиняется изменение масс некоторых звезд. Он также действителен и в случае изменения гравитационной постоянной в гипотезе Йордана. Таким образом, здесь мы опять встречаемся с примером, в котором теоретическая задача десятилетиями позднее оказалась необходимой для практики.

Следует отметить основополагающий характер работ И. В. Мещерского. Полученные им результаты позднее легли в основу динамики ракет. И в этом отношении И. В. Мещерский намного опередил как практиков, так и теоретиков. Его результаты намного более общи, нежели результаты

К. Э. Циолковского (1857—1935) и еще более поздние результаты итальянского академика Тулио Леви-Чивита.

При изменении массы притягивающего тела по закону Мещерского уравнения движения допускают частное решение, для которого имеет место указанное Джинсом равенство $\mu a = \text{const}$, где μ — произведение постоянной тяготения f на массу M, a — большая полуось.

Однако закон Мещерского охватывает далеко не все возможные законы, в соответствии с которыми могут изменяться массы небесных тел. В общем же случае задача двух тел переменной массы представляет значительные математические трудности. Для ее исследования можно использовать теорию так называемых *адиабатических инвариантов*. Адиабатическими инвариантами называются такие механические или физические величины, которые в процессе движения механической системы остаются практически постоянными, если условия движения меняются очень медленно (в нашем случае медленно изменяется масса притягивающего тела). Именно таким образом неоднократно упоминавшийся нами А. Пуанкаре показал, что одним из адиабатических инвариантов является эксцентриситет e. Отсюда следует и постоянство произведения fMa.

Аналогичные результаты были позднее получены Джинсом, Г. Н. Дубошиным *) и Б. Е. Гельфгатом.

Однако временной интервал, в течение которого указанные адиабатические инварианты дают правильное описание поведения решений задачи двух тел переменной массы, ограничен. Его длительность определяется, с одной стороны, начальными условиями движения, с другой стороны, видом закона изменения массы со временем. Действительно, предположим, что материальная точка движется вокруг гравитирующего центра переменной массы по эллиптической орбите, очень близкой к параболе. Это означает, что ее полная энергия h, определяемая формулой $h = v^2 - 2fM/r$, хотя и отрицательна, но очень близка к нулю. Очевидно, достаточно небольшого уменьшения M, особенно в момент прохождения перицентра, чтобы h обратилась в нуль или

*) Научно-популярное изложение результатов исследований движения тела в поле тяготения переменной массы содержится в статье Г. Н. Дубошина «О некоторых проблемах неклассической небесной механики», «Мироведение», т. 23, № 4, 1934.

даже стала положительной. А это означает переход с эллиптической орбиты на параболическую и даже гиперболическую, т. е. распад системы. Если произведение fM убывает быстро, то и процесс распада займет немного времени, если же изменение fM медленное, то и изменение знака h будет происходить весьма долго.

Согласно современным представлениям теории внутреннего строения и эволюции звезд, уменьшение массы Солнца за счет излучения происходит чрезвычайно медленно. Только ее уменьшение в два раза должно занять около 10^{13} лет. Орбиты больших и малых планет станут более вытянутыми, совсем непохожими на круговые (их размеры, конечно, увеличатся), но все же будут очень отличаться от параболических. Часть же комет перейдет на гиперболические орбиты, перестав тем самым быть членами Солнечной системы.

Мы упомянули еще один эффект, могущий оказать влияние на эволюцию спутниковых движений, а именно, эффект роста массы планет за счет выпадения метеорной материи. Этот эффект в наше время весьма невелик, ибо, например, Земля за счет падения метеорной материи каждый год увеличивает свою массу примерно на 3—6 тыс. *т*, однако он сказывается на движении Луны. Если бы количество метеорной материи в Солнечной системе не пополнялось, то влиянием незначительного роста масс планет можно было бы пренебречь. К сожалению, этого нельзя утверждать.

Существует гипотеза, согласно которой ледниковые периоды на Земле повторяются с периодичностью порядка 200 млн. лет. Геологические данные не противоречат этой гипотезе. Причину ледниковых периодов иногда связывают с движением Солнечной системы вокруг центра Галактики. Как известно, в Галактике наблюдаются в значительных количествах протяженные газово-пылевые облака. Солнечная система, проходя через эти облака, пополняет запасы метеорного вещества. Если это происходит, то при прохождении Солнечной системы внутри газово-пылевых облаков частицы пыли экранируют солнечное излучение, Земля и планеты начинают получать значительно меньшее количество солнечной энергии, а это приводит к понижению средней температуры на Земле и других планетах. В свою очередь изменение температурного режима Земли вызывает наступление ледников.

Напомним читателю, что согласно космогонической гипотезе О. Ю. Шмидта материю для образования планет Солнце приобрело в Галактике именно таким путем. Если этот процесс имеет место, то рост масс планет неизбежен. Но если массы планет будут постепенно возрастать, тогда силы тяготения планет увеличатся, и радиусы орбит спутников должны уменьшиться. Не произойдет ли столь значительного сокращения радиусов орбит, при котором спутники войдут в зону Роша? На этот вопрос астрономы пока не в состоянии дать уверенный ответ.

Из приведенных соображений ясно, что процесс эволюции Солнечной системы должен быть изучен с учетом переменности масс Солнца и планет при одновременном анализе причин, приводящих к уменьшению масс и к их возрастанию.

§ 25. Тормоза из пыли

Если происходит захват межзвездной пыли и газа, то орбиты планет и спутников будут эволюционировать не только вследствие изменения масс тел Солнечной системы, но и вследствие действия сил сопротивления газово-пылевой среды.

Изменение орбит скорее всего должно быть незначительным, так как плотность межзвездных газово-пылевых облаков весьма и весьма мала. Захваченное солнечным тяготением облако пыли не следует представлять плотным и непрозрачным. Живя на Земле и наблюдая за Солнцем, мы могли бы и не заметить, что Солнечная система вступила в облако пыли, так как уменьшение блеска Солнца невооруженный глаз вряд ли бы зарегистрировал. И тем не менее, непрерывная бомбардировка планет микрометеоритами постепенно приводила бы к уменьшению кинетической энергии планет. Поэтому большие полуоси орбит постоянно бы уменьшались.

Кроме того, сопротивление среды приводит, как правило к уменьшению эксцентриситетов орбит (см. гл. 1), т. е. орбиты становятся по форме близкими к круговым.

Многое, однако, зависело бы от распределения орбит частиц космической пыли и направления скорости движения по ним. Действительно, достаточно вспомнить кольца Сатурна. Из упоминавшихся исследований Г. Н. Дубошина, посвященных проблеме устойчивости колец Сатурна, следует, что сопротивлением среды, частицы которой движутся упорядоченным образом в одном и том же направлении и примерно в одной и той же плоскости, система не только не разрушается, а наоборот, движение оказывается асимптотически устойчивым по Ляпунову. Это означает, что если частица была выбита на незначительное расстояние со своей круговой орбиты при столкновении с другой частицей или возмущающими силами иной природы, то в последующем она будет стремиться возвратиться на свою первоначальную орбиту.

Конечно, нельзя ожидать большой упорядоченности движения захваченных Солнцем частиц. Все зависит от закономерностей движения материи в облаке, через которое прошло Солнце, от угла между скоростями движения Солнца и облака вокруг центра Галактики.

Весьма вероятно, что процесс пополнения Солнечной системы веществом будет незначительным, если Солнце постоянно проходит через одни и те же области Галактики. Если для периода обращения Солнца в Галактике принять значение 180—200 млн. лет., полученное в 1951 г. проф. МГУ П. П. Паренаго (1906—1960), то за время существования Солнечной системы, т. е. за 4—6 млрд. лет, Солнце через каждое из облаков, движущихся вдоль его орбиты, должно было проходить примерно 30 раз. Поэтому оно еще в процессе формирования планетной системы «вычерпало» почти всю массу газово-пылевых облаков.

По мнению проф. Н. Д. Моисеева, критиковавшего гипотезу Шмидта, масса пыли, захваченной Солнцем из облаков, даже при многократных прохождениях невелика.

Однако нельзя исключить возможность того, что Солнце в своих «странствиях» через Галактику встречается не с определенной группой облаков диффузной материи, а проходит через облака, случайно пересекающие солнечную траекторию. В этой ситуации Солнце не сможет «вычерпать» пыль из облаков и будет всегда иметь источник для пополнения запасов пыли.

По-видимому, тормозящий эффект космической среды незначителен для больших планет, хотя его аккуратных оценок и не имеется. Но в движении спутников больших планет, особенно близких, картина может быть и иной. Выше уже приводились некоторые оценки торможения спутников Марса, Фобоса и Деймоса, под влиянием среды, окружающей Марс. Можно ожидать, что у многих планет, кроме атмосфер, имеются протяженные пылевые оболочки или «хвосты». Эта околопланетная материя вызовет постепенное, хотя и незначительное, уменьшение размеров спутниковых орбит, но достаточное для перехода спутника в зону Роша.

Имеется немало оснований полагать, что межпланетная среда играет важную роль в эволюции астероидного кольца. Классическая теория возмущений наталкивается на определенные трудности при попытке дать объяснения наблюдаемым «люкам» и «сгущениям» в кольце астероидов. А. Клюзе показал, что для астероидов со средними движениями от 600″ до 1100″ в сутки люки и сгущения объяснить одним действием Юпитера невозможно. Японский ученый К. Хираяма дал удовлетворительное объяснение для люка Гекубы, развивая теорию Е. Брауна. При этом ему пришлось ввести в рассмотрение силы сопротивления межпланетной среды. Он установил, что сгущения астероидов близ резонансных орбит происходят только при движении по траекториям, для которых средние движения n не превышают 500″, а эксцентриситеты меньше 0,3. Если $n = 580''$, то образуются люки соизмеримости даже при учете эффекта сопротивляющейся среды.

К сожалению, мы не в состоянии дать даже приближенную оценку эффекта межпланетной среды в движении больших планет, так как плотность космической материи и ее распределение в пределах Солнечной системы изучены крайне недостаточно. Можно, однако, не сомневаться, что в скором времени астрономы будут иметь в своем распоряжении сведения о плотности межпланетной среды, полученные с помощью приборов, устанавливаемых на космических кораблях. Советские и американские космические ракеты, летавшие к Венере и Марсу, уже положили начало этим исследованиям.

Помимо тормозящего эффекта космической пыли, на тела Солнечной системы воздействует и солнечная радиация, которая порождает не только световое давление, но и вызывает дополнительное (радиативное) торможение. Последнее особенно сильно проявляется в движении малых тел, в частности, метеорной пыли. В этом направлении важные исследования были проведены академиком В. Г. Фесенковым *). Приведем некоторые из его результатов. Радиативное торможение приводит к уменьшению размеров орбит. Так, для частицы радиусом в 1 *см* с плотностью в 3 *г/см*^{3}, первоначально двигавшейся по орбите с большой полуосью в 2 а. е., время падения на Солнце составляет около 60 млн. лет. Для микрометеоритов радиусом в 10 *мк* с плотностью в 1 *г/см*^{3}, движущихся в окрестности земной орбиты, время падения на Солнце составляет всего 7000 лет. Отсюда следует, что межпланетное пространство должно постепенно «очищаться» от космической пыли, если не будет происходить компенсация ее пополнением из каких-либо других источников.

§ 26. Проблема захвата

Уже неоднократно возникал вопрос о том, возможно ли такое взаимодействие небесных тел, в результате которого какое-либо небесное тело, первоначально не принадлежащее к Солнечной системе, при тесном сближении с ней будет «захвачено» силами солнечного притяжения, т. е. либо навсегда останется в Солнечной системе либо после нескольких оборотов вокруг Солнца навсегда покинет пределы Солнечной системы? Или, наоборот, возможно ли, что при сближении Солнечной системы с какой-либо массивной звездой (одиночной или двойной) силы тяготения последней вырвут одну из больших планет или малое тело из Солнечной системы?

Вопросы такого рода исследуются в так называемой теории захвата. В прошлом веке многие космогонисты, не проводя строгих математических доказательств, а исходя лишь из общих физических соображений, считали захват вполне возможным. Строгие исследования проблем захвата были начаты только в нашем веке. Особый интерес к теории захвата возник у астрономов, а затем и у математиков в 50-х годах нашего века в связи с гипотезой происхождения Солнечной системы, выдвинутой О. Ю. Шмидтом. В первона-

---

*) В. Г. Фесенков, «Метеорная материя в междупланетном пространстве», Изд-во АН СССР, 1947.

чальном варианте гипотезы Шмидта захвату отводилась решающая роль в процессе образования и формирования первобытного облака в окрестности Солнца.

В последнее десятилетие проблемы, родственные теории захвата, стали привлекать внимание механиков в связи с развитием космонавтики. Так как при межпланетных перелетах космическому кораблю необходимо сообщать гиперболическую скорость удаления от Земли, что связано с созданием реактивных двигателей большой мощности, то естественно возникает вопрос: а нельзя ли заставить, например, Луну служить источником механической энергии для улетающего с Земли корабля? Нельзя ли космический корабль запустить так, чтобы он при прохождении вблизи Луны получил дополнительный гравитационный импульс в направлении перелета к другой планете? Проблема «гравитационного разгона» космического аппарата тоже родственна задачам теории захвата.

Перечисленные задачи стимулировали развитие теории захвата. И теперь, хотя до полного решения задачи еще далеко, уже имеется возможность судить о роли захвата в процессе эволюции Солнечной системы.

Первые систематические исследования задач теории захвата принадлежат французскому ученому Ж. Шази. Шази рассмотрел важнейшую задачу небесной механики о движении трех тел под действием сил взаимного притяжения и пришел к выводу, что захват невозможен. Иначе говоря, если первоначально два небесных тела, m_1 и m_2, были весьма близки друг к другу и обращались вокруг общего центра масс практически по эллиптическим орбитам, а третье тело, m_3, сначала было удалено от первых двух на очень большое расстояние и двигалось по направлению к ним по гиперболической орбите, то, согласно Шази, это третье тело ни при каких начальных скоростях при сближении с двумя близкими телами не могло «примкнуть» к ним и начать постоянно двигаться по ограниченной в пространстве орбите вблизи этих тел (рис. 55) *).

В 1947 г. О. Ю. Шмидт опубликовал пример, противоречащий выводу Шази. Этот пример породил сомнения у не-

*) Рис. 55—57 имеют лишь иллюстративное значение и ни в коей мере не отражают реальных направлений движения и форм орбит.

бесных механиков как в правильности доказательства Шази, так и в строгости рассуждений Шмидта. Дело в том, что доказательство Шази было выполнено в общем виде, т. е. с помощью буквенных формул, а Шмидт привел пример, опирающийся на числовые расчеты, причем в этом примере свой вывод о возможности захвата он сделал на основе вычисления движения на некотором конечном интервале времени. А поэтому возникали сомнения в строгости результатов Шмидта. Кто же прав: Шмидт или Шази?

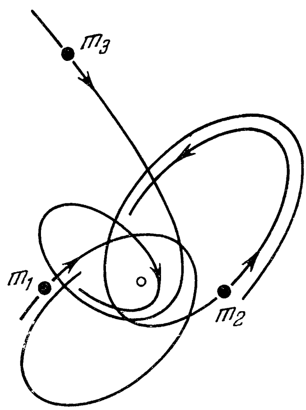

Рис. 55. Захват в задаче трех тел.

Наиболее серьезные возражения против выводов Шмидта были высказаны московскими учеными Н. Д. Моисеевым и А. И. Рыбаковым. А. И. Рыбаков тщательно проверил и оценил ошибки в расчетах, на которые ссылался Шмидт и которые по его просьбе выполнил Г. Ф. Хильми. Почти одновременно с работой А. И. Рыбакова в Институте теоретической астрономии АН СССР в Ленинграде также выполнялись контрольные вычисления под руководством В. Ф. Проскурина.

В последующие годы этой проблемой занялись ленинградский небесный механик Г. А. Мерман и московские математики В. М. Алексеев и К. А. Ситников. Эти ученые строго доказали возможность захвата. В частности, Г. А. Мерман установил правоту Шмидта и Хильми. Наряду с теоретическим доказательством возможности захвата Мерман рассчитал численно около 50 траекторий движения в ограниченной задаче трех тел, соответствующих захвату.

Однако возник новый, важный для космогонии вопрос: насколько вероятен захват, часто ли могут наблюдаться захваты в мире звезд и планет? Пока в этом отношении полной ясности еще нет. Но уже сейчас можно сказать, что вероятность захвата очень мала. Из работы Ситникова выяснились до некоторой степени и условия, благоприятные для захвата. Решающее условие захвата в задаче трех тел сводится к близкому прохождению пары тел друг около друга.

Из всех этих работ следует, что вероятность ухода какой-либо большой планеты навсегда из Солнечной системы или пополнения Солнечной системы новым телом исключительно мала. Иначе говоря, захват не играет заметной роли в эволюции Солнечной системы.

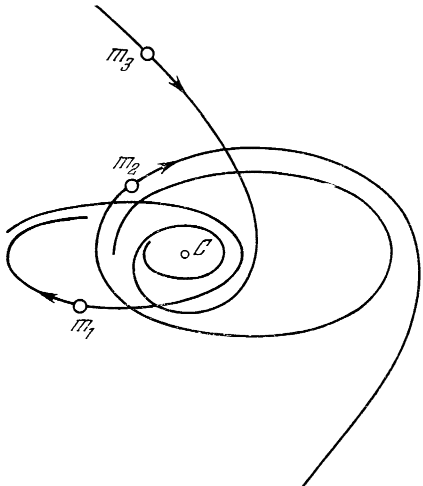

Рис. 56. Случай «обмена» в задаче трех тел.

Имеется еще одна возможность изменения состава планетной системы. Рассмотрим для простоты только три взаимно притягивающихся тела. Пусть пара тел, m_1 и m_2, движется вблизи друг друга, а третье тело, m_3, приходит из «бесконечности». Сближаясь с парой тел, оно передает одному из них (m_2) часть своего запаса механической энергии. Уменьшив свою энергию, это тело m_3 остается навсегда в окрестности того из тел пары, энергия которого изменилась незначительно. Тело m_2, получившее энергию от пришельца, уходит от своего «компаньона» почти по гиперболической орбите. Как говорят в этом случае, происходит обмен (рис. 56).

Математические расчеты задачи об обмене показали его возможность, но вероятность обмена оказалась небольшой, поэтому процессы обмена, по-видимому, также не играют заметной роли в эволюции планетной системы.

Наконец, еще один возможный случай в эволюции — временные захваты (рис. 57). Они изучены крайне слабо и сказать об их роли в развитии Солнечной системы в настоящее время не представляется возможным. Отметим только, что работы В. М. Алексеева и ленинградцев В. Ф. Проскурина и Л. И. Румянцевой установили возможность временного захвата, однако его вероятность осталась неизученной.

Любопытные результаты о возможной роли временных захватов получены группой небесных механиков из Глазго (Р. Хафнер, М. Овендон, А. Рой). Согласно расчетам, проведенным при помощи вычислительных электронных машин, возмущающее действие Юпитера может перевести временно некоторые астероиды на спутниковые орбиты вокруг этой планеты, с выбросом их потом на гелиоцентрические орбиты с $a \approx 7$ а. е. При этом астероиды со средним движением $n < 450''$ должны попадать в число спутников Юпитера с прямым движением, а астероиды с $n > 450''$ — в число его спутников с обратным движением. Как видно, границей здесь служит резонансное среднее движение с соизмеримостью $n : n_j$ 2:3, которое характерно для семейства астероидов типа Гильды (см. § 14).

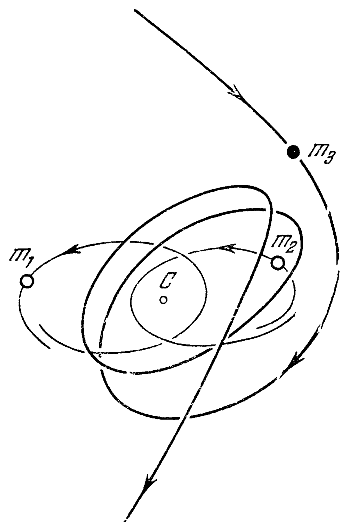

Рис. 57. Временный захват гравитирующими массами m_1 и m_2 тела m_3.

Приведем два примера, изученных В. М. Алексеевым в одном частном случае задачи трех тел. В. М. Алексеев предположил, что одна из притягивающих масс значительно больше двух других, причем малые массы (планетоиды) равны между собой. Рассматривается возможность захвата и обмена при столкновении планетоидов. Результаты анализа скоростей в момент столкновения графически изображены на рис. 58 и 59. Через v_1 (—0) и v_2 (—0) обозначены скорости планетоидов p непосредственно перед ударом, а через v_1 (+0) и v_2 (+0) — сразу же после столкновения. Другой пример был приведен В. А. Егоровым и связан с расчетами траекторий межпланетных кораблей *). Результаты численного решения круговой задачи трех тел иллюстрируют нам возможность, по крайней мере теоретическую, выброса малого спутника, обращавшегося вокруг центрального тела, при его тесном сближении с другим массивным спутником центрального тела. Вероятность такого события, естественно, ничтожна и требует исключительной комбинации величин и направлений скоростей и расстояний между телами в некоторый момент времени.

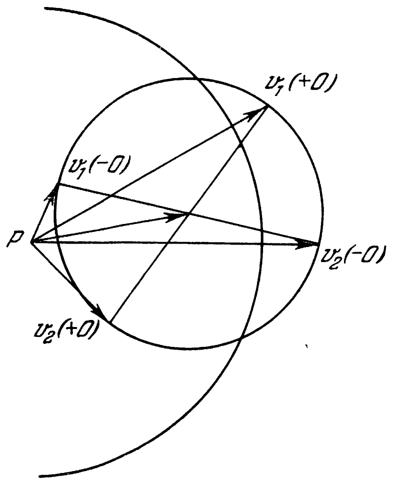

Рис. 58. Диаграмма скоростей в точке столкновения при обмене.

Прекрасным примером, иллюстрирующим сложность количественных и качественных исследований задачи о трех телах, является так называемая пифагорейская задача о трех телах. Это задача о движении трех взаимно притягивающихся тел с массами m_1, m_2, m_3, находящимися в отношении 3 : 4 : 5, которые в начальный момент покоятся и находятся в вершинах египетского (пифагорейского) треугольника (рис. 60). Пифагорейский вариант задачи трех тел первоначально численно решался в 1913 г. небесным механиком К. Бурро. Промежуток времени, на котором им было изучено движение, был невелик. Недавно американские ученые во главе с В. Себехеем провели весьма точные

*) Подробности можно найти в прекрасной книге В. И. Левантовского «Ракетой к Луне», Физматгиз, 1960.

расчеты на электронной машине, снабженной автоматическим устройством для вычерчивания траекторий. На рис.

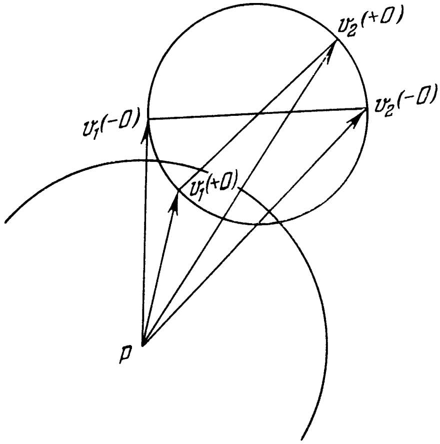

Рис. 59. Диаграмма скоростей в точке столкновения при захвате.

61—67 представлены результаты расчета. Траектория массы m_1 на этих рисунках изображена пунктирной линией, траектория массы m_2 — штриховой линией, а сплошная линия представляет собой траекторию третьей массы m_3. На всех траекториях имеются отметки времени (в некотором условном масштабе). Если взять три звезды с массами в 3, 4 и 5 солнечных масс и первоначально поместить их в вершины пифагорейского треугольника со сторонами 3, 4 и 5 парсек (1 парсек = =206 265 а. е.), то используемая единица времени составит $1{,}43 \cdot 10^7$ лет, а весь расчет будет охватывать интервал времени в 1 млрд. лет.

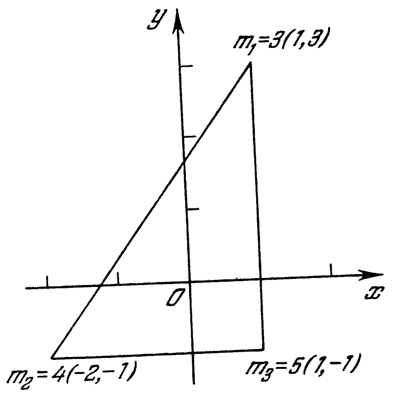

Рис. 60. Начальная конфигурация в пифагорейской задаче трех тел.

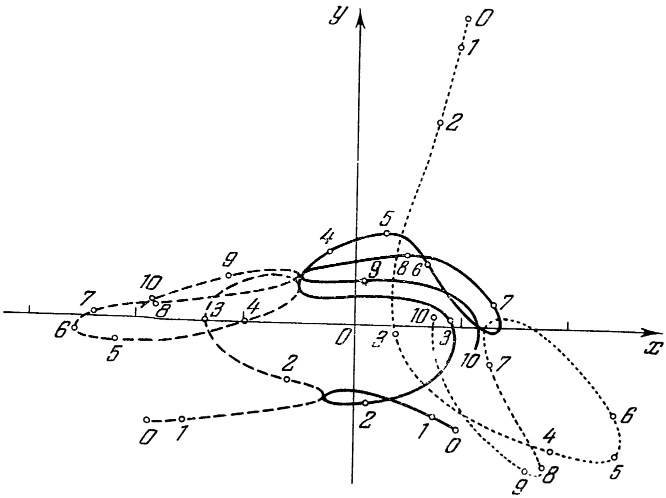

Рис. 61. Движение притягивающихся масс в пифагорейской задаче трех тел на интервале времени от $t = 0$ до $t = 10$.

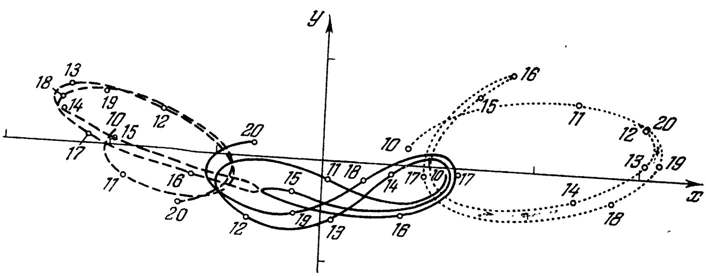

Рис. 62. Изменение орбит в пифагорейской задаче на интервале времени от $t = 10$ до $t = 20$.

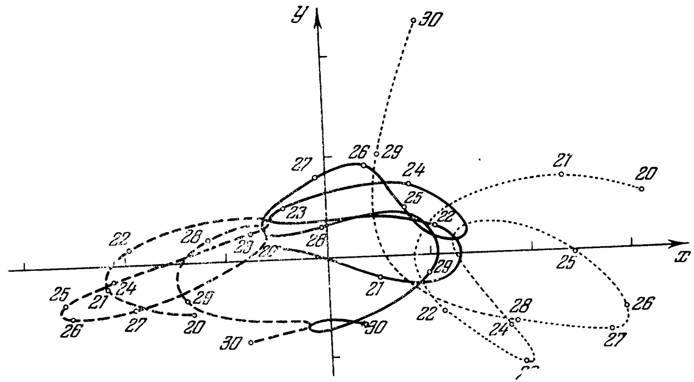

Рис. 63. Вид орбит в пифагорейской задаче трех тел на интервале времени от $t = 20$ до $t = 30$.

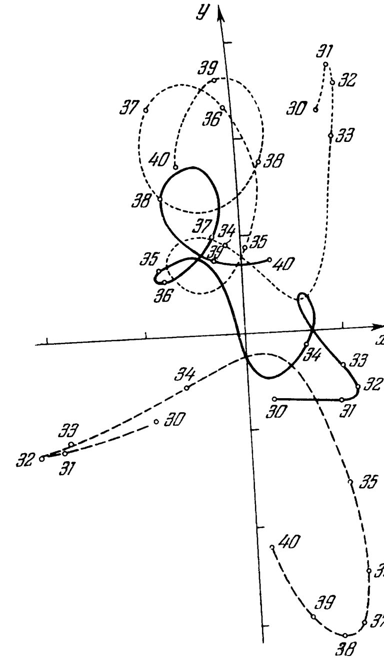

Рис. 64. Возмущенное движение в пифагорейской задаче трех тел на интервале времени от $t = 30$ до $t = 40$.

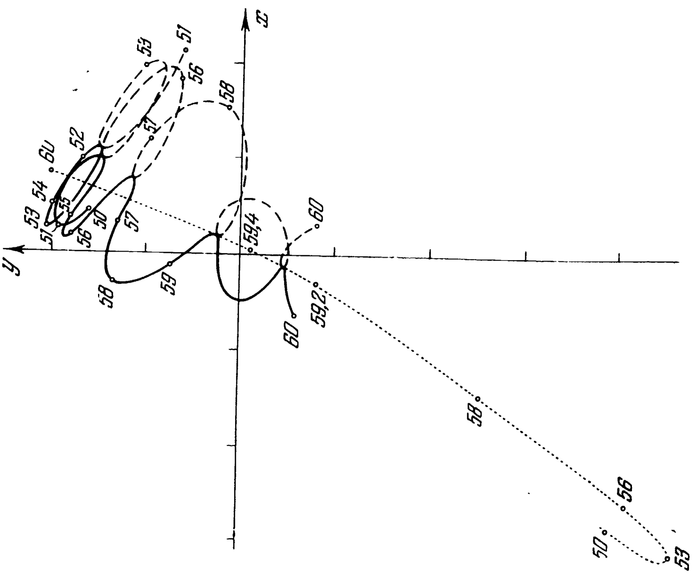

Рис. 66. Эволюция орбит пифагорейской задачи трех тел на интервале времени от $t = 50$ до $t = 60$.

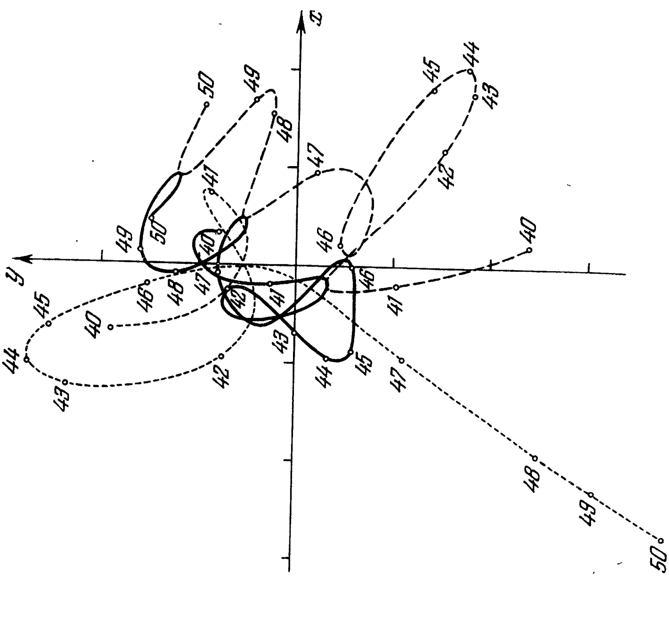

Рис. 65. Вид орбит пифагорейской задачи трех тел на интервале времени от $t = 40$ до $t = 50$.

На этих рисунках можно видеть и близкие, тесные сближения, и соударения, и распад тройной системы, и образование двойной звезды. Траектории так сложны, что становится ясным, почему так трудно построить теорию движения в задаче трех и большего числа тел на длительном промежутке времени в виде конечных математических выражений с использованием известных в математике функций.

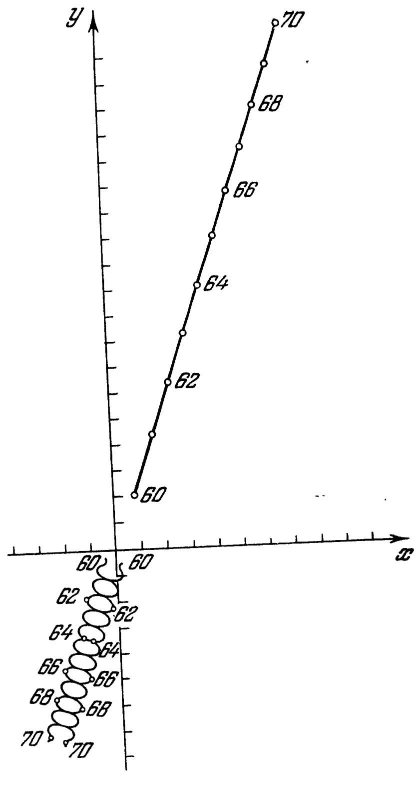

Рис. 67. Образование двойной звезды в пифагорейской задаче трех тел (от $t = 60$ до $t = 70$).

§ 27. Теорема доказана!

Около двух столетий попытки решения важнейшей задачи об устойчивости Солнечной системы, поставленной Лапласом и Лагранжем, были безуспешными. В многочисленных работах, посвященных этой задаче, ученым удавалось лишь незначительно продвинуться вперед. Из этих работ следовала только «практическая» устойчивость Солнечной системы, означавшая, что на исторических промежутках времени в сотни тысяч лет орбиты больших планет не претерпят существенных изменений. Но на вопрос о том, какие изменения произойдут с орбитами планет на космогонических интервалах времени, несмотря на настойчивые попытки, ученые не могли дать ответа.

Сначала необходимо остановиться на ожидаемом характере устойчивости. Не может ли, например, случиться так, что планеты, испытывая взаимные возмущения, отклонятся от начальных невозмущенных орбит, а потом с течением времени станут к ним неограниченно приближаться? Иначе говоря, возможна ли асимптотическая устойчивость планетных движений (см. гл. 2)?

В механике этот вопрос выяснен и получен отрицательный ответ, причем не только для Солнечной системы, но и для любой другой механической системы, в которой все действующие силы обладают потенциальной энергией. Движения таких механических систем описываются уравнениями, предложенными ирландским ученым В. Гамильтоном. В честь этого ученого они получили название уравнений Гамильтона, а сами механические системы такого рода часто называются гамильтоновыми.

Для механической системы с n степенями свободы получается система $2n$ уравнений движения относительно n пар специальным образом выбираемых искомых величин. Половину из $2n$ величин, по одной из каждой пары, составляют координаты, определяющие положение материальных точек системы в пространстве. Координатами могут быть обычные декартовы координаты, какие-либо расстояния, углы и т. д. Эти координаты называются *обобщенными* или *лагранжевыми*. В другую группу искомых величин входят оставшиеся n переменных. Это так называемые *обобщенные* или *канонические импульсы*. Механический смысл их можно усмотреть из следующего частного примера.

Пусть изучается движение свободной точки массы m на плоскости. Ее положение будем задавать прямоугольными координатами x и y. Примем их в качестве лагранжевых координат. Обобщенными импульсами будут служить проекции количества движения на координатные оси mv_x, mv_y, где v_x, v_y — составляющие скорости точки по координатным осям. При выборе в качестве лагранжевой координаты угла импульс будет равен моменту количества движения (иначе говоря, «количеству вращения»).

Обозначим через $q_1, q_2, \ldots, q_n$ обобщенные координаты, а через $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — соответствующие им импульсы. Если T — кинетическая энергия системы, выраженная через лагранжевы координаты и импульсы, а V — потенциальная энергия для приложенных к механической системе сил, которая зависит от обобщенных координат, то функция Гамильтона H, равная полной механической энергии, дается формулой

$$H = T + V.$$

Как видно, H зависит одновременно от всех $2n$ канонических переменных:

$$H = H(p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n,\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n).$$

Уравнения движения в форме Гамильтона имеют следующую структуру:

$$\left(\begin{array}{c}\text{скорость изменения}\\ \text{во времени обобщенной}\\ \text{координаты } q_i\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\text{скорость изменения}\\ \text{гамильтоновой функции } H\\ \text{при изменении только}\\ \text{одного импульса } p_i\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c}\text{скорость изменения}\\ \text{во времени обобщенного}\\ \text{импульса } p_i\end{array}\right) = -\left(\begin{array}{c}\text{скорость изменения}\\ \text{гамильтоновой функции } H\\ \text{при изменении только}\\ \text{одной координаты } q_i\end{array}\right)$$

Написанные уравнения содержат не только искомые величины, но и скорости их изменения, и, следовательно, как уже говорилось в гл. 1, являются дифференциальными уравнениями. Из этих уравнений видно, что характер изменения со временем неизвестных q_i и p_i определяется только свойствами одной функции H.

Поведение механической системы удобнее изучать не в пространстве координат, а в $2n$-мерном пространстве координат q_i и импульсов p_i. Это пространство играет в механике особую роль и называется *фазовым*. Каждая точка фазового пространства определяет состояние движения системы. Введение фазового пространства дает возможность выяснить ряд свойств движения при помощи глубокой аналогии с пространственным течением жидкостей, изучаемым в гидродинамике.

Рассмотрим случай установившегося течения жидкости, когда в каждой точке пространства скорость течения жидкости постоянна в любой момент времени и по величине, и по направлению. Для установившегося движения линии тока жидкости, т. е. линии, касательные к которым в каждой точке направлены вдоль скорости жидкости, представляют собой траектории движения частиц жидкости. Если жидкость несжимаема (а это с достаточной степенью точности справедливо для реальных жидкостей), то произвольная область, выделенная в жидкости, в процессе движения будет изменять свою форму, сохраняя при этом свой объем. Полный поток жидкости через всю поверхность выделенного объема равен нулю, т. е. сколько жидкости втекает через поверхность, столько и вытекает через нее в любой момент времени. Нарисованная гидродинамическая картина полностью переносится на фазовое пространство.

Вообразим, что фазовое пространство переменных q_1, q_2, ..., q_n, p_1, p_2, ..., p_n наполнено фиктивной жидкостью, которую будем называть фазовой. Уравнения Гамильтона в каждой точке фазового пространства определяют значения скоростей изменения p_i и q_i, иначе говоря, дают распределение в пространстве скоростей для фазовой жидкости, причем это распределение не зависит от времени. Линии тока фазовой жидкости одновременно являются фазовыми траекториями механической системы.

Как показал Лиувилль (1838 г.), произвольно вырезанный объем фазовой жидкости в процессе движения остается постоянным, т. е. фазовая жидкость оказывается несжимаемой, а поток фазовой жидкости через любую замкнутую поверхность всегда равен нулю.

Отсюда немедленно следует, что всевозможные траектории, первоначально бывшие достаточно близкими к интересующей нас невозмущенной траектории, в дальнейшем не могут все одновременно стремиться к «слиянию» с невозмущенной, так как в этом случае фазовый объем стал бы уменьшаться. Но если это невозможно, то не может быть и асимптотической устойчивости.

Так как силы тяготения планет характеризуются полностью их потенциалом, то движение планетной системы может быть описано уравнениями Гамильтона. Поэтому и в Солнечной системе движения планет заведомо не происходят по орбитам, постепенно приближающимся к первоначальным эллиптическим невозмущенным орбитам, т. е. если планетные движения устойчивы, то их устойчивость будет простой, а не асимптотической. Наши рассуждения справедливы только при условии, что мы пренебрегаем процессом превращения механической энергии в другие формы. А такие процессы в Солнечной системе наблюдаются (приливное трение, сопротивление среды и т. д.).

Какую бы отрасль точных наук или техники ни взять, мы непременно обнаружим множество исследованных или нерешенных, но ждущих решения задач, в той или иной мере связанных с теорией устойчивости движения. В небесной механике — это задачи об устойчивости планетных и спутниковых орбит, вращения небесных тел вокруг их осей. Эти и подобные им задачи решались методами Ляпунова.

Но любая научная теория или научный метод рано или поздно с постановкой новых задач будут нуждаться в существенной доработке и дальнейшем развитии. В наши дни даже столь совершенная теория, какой является ляпуновская теория устойчивости, уже недостаточна для решения некоторых технических задач. Напомним, что в теории Ляпунова выделяется интересующее нас движение, которое выше мы называли невозмущенным, и исследуется поведение всех «соседних» движений, в начальный момент мало отличающихся от невозмущенного. Если все такие соседние движения всегда близки к избранному невозмущенному, то согласно Ляпунову движение устойчиво. Для теории Ляпунова существенно, чтобы возмущенное движение происходило под действием тех же самых сил, как и для невозмущенного. Это предположение, лежащее в основе теории Ляпунова, стало ограничивающим в исследованиях по механике. В самом деле, ученым всегда в математических теориях приходится изучать не те уравнения, которые совершенно точно описывают движение интересующей механической системы, а уравнения упрощенной, модельной системы. Точные уравнения движения мы никогда и не имеем возможности составить. На определенной стадии исследования ученым удается изучить те малые силы, которые первоначально не были учтены при составлении уравнений движения. Тогда составляются новые, более точные уравнения. Но очень часто оказывается, что новые уравнения уже не допускают того решения, которое ранее было получено и исследовалось на устойчивость. Более того, при том же начальном состоянии движения, что и в более ранних задачах, не удается получить решения в виде конечных математических выражений.

Механики и математики предприняли обходной маневр и поставили задачу об устойчивости при постоянно действующих малых силах, не входивших в уравнения первоначальной, более простой модельной задачи. Будем, решили ученые, исследовать решение неточных первоначальных уравнений, учитывая и начальные возмущения, и постоянно действующие возмущения. Если все движения, мало отличающиеся в начальный момент от интересующего невозмущенного движения, в результате действия малых возмущающих сил останутся близки к невозмущенному, то последнее будет устойчивым и при постоянно действующих возмущениях, а решение упрощенной системы уравнений вполне надежно. Для решения задачи об устойчивости в новой постановке ученые использовали старые, испытанные методы Ляпунова. Основной результат, полученный на этом пути, сводился к теореме, утверждавшей, что если невозмущенное движение при отсутствии постоянных возмущающих сил асимптотически устойчиво, то оно устойчиво и при постоянном воздействии малых по величине сил. Методы Ляпунова исследования устойчивости продолжают вполне успешно служить в задачах автоматического регулирования, где исследователь сам выбирает постоянные воздействия, обеспечивающие движения с нужными свойствами.

В несколько ином положении оказались те разделы механики, где изучаются естественные процессы и где исследователь не может по своему желанию добавлять малые возмущающие силы. В этих случаях, как мы видели, в упрощенных модельных задачах асимптотической устойчивости нет, если предполагать, что все действующие силы полностью характеризуются потенциальной энергией. Попытки распространения методов Ляпунова на такие задачи пока не привели к разработке эффективных критериев устойчивости.

Возвратимся к нашей основной задаче — проблеме устойчивости движения больших планет Солнечной системы под действием силы солнечного тяготения и малых взаимных сил тяготения планет. Здесь наиболее простая модельная задача сводится к изучению движения планет под действием солнечного тяготения без учета сил взаимодействия планет. Получающиеся здесь движения планет — эллиптические, их устойчивость полностью исследована методами

Ляпунова. Учтя теперь силы взаимного притяжения планет, приходим к задаче о движении десяти взаимно притягивающихся тел: Солнца и девяти больших планет. В этой задаче не удается найти точно ни одного нужного нам решения. Как же решать задачу об устойчивости Солнечной системы? Один из возможных выходов — исследовать устойчивость эллиптических невозмущенных движений планет, учитывая и начальные возмущения и постоянно действующие возмущения, которыми здесь являются силы взаимного притяжения планет. Эти силы малы, они и выполняют роль постоянно действующих возмущений. К сожалению, как уже говорилось, полученные к настоящему времени теоремы ляпуновской теории устойчивости при постоянно действующих возмущениях в проблеме устойчивости Солнечной системы оказываются бессильными. Ученые стали перед дилеммой: либо пытаться развивать в желаемом направлении методы Ляпунова либо разрабатывать качественно новые способы.

Развитие механики и математики подготовило ученых к новому штурму знаменитой проблемы устойчивости. Новые пути решения проблемы наметились в начале второй половины нашего века в работах выдающегося советского математика акад. А. Н. Колмогорова. Идеи Колмогорова легли в основу большого исследования, выполненного его учеником В. И. Арнольдом. За полученные результаты Математический институт АН СССР имени В. А. Стеклова присудил Арнольду ученую степень доктора физико-математических наук, а позднее Арнольд и Колмогоров были удостоены Ленинской премии.

Работы Арнольда исключительно сложны не только для неискушенных в математике, но даже для специалистов. Поэтому, будучи не в состоянии разбирать труд Арнольда со всеми подробностями, дадим лишь общее представление об основных идеях доказательства устойчивости Солнечной системы и сформулируем существо результатов.

Одно из исходных соображений состоит в том, что движение планет не может быть устойчивым по отношению ко всем координатам или по отношению ко всем элементам их орбит, о чем уже говорилось в гл. 2. Напомним один пример: в рамках задачи двух тел величина гелиоцентрического расстояния планеты, движущейся по круговой орбите, будет устойчивой, а полярный угол неустойчивым. Если же учитывать, кроме силы солнечного тяготения, еще и силы взаимного тяготения планет, принимая последние за постоянно действующие возмущения, то устойчивости по отношению к полярному углу планеты и подавно ожидать

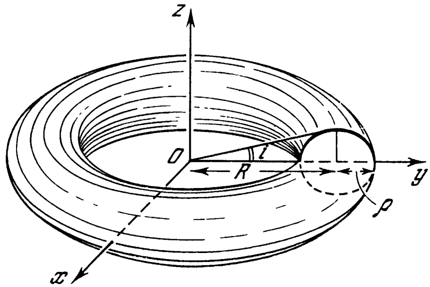

Рис. 68. Тор.

невозможно. Но нас и не интересует устойчивость по отношению ко всем координатам! Для нас достаточно, чтобы планетная орбита всегда была заключена внутри «бублика», или, как говорят в геометрии, тора (рис. 68). Понятно, что при любом сколь угодно замысловатом виде траектории расстояние r от Солнца, измеренное в средней (экваториальной) плоскости тора, до проекции положения планеты на эту плоскость, а также расстояние планеты от этой плоскости (аппликата) z будут всегда заключены в конечных пределах,

$$R-\rho \leqslant r \leqslant R+\rho, \qquad -\rho \leqslant z \leqslant \rho.$$

И как бы ни изменялся полярный угол, планета не уйдет от Солнца и не упадет на него. А этого достаточно для сохранения Солнечной системы, если дополнительно потребовать еще, чтобы торы различных планет P_1 и P_2 не пересекались друг с другом (рис. 69). При выполнении этого требования планеты не смогут столкнуться друг с другом. Очевидно, для этого необходимо, чтобы пределы изменения r и z были бы небольшими.

Это требование можно выразить, используя постоянно изменяющиеся за счет взаимных возмущений элементы планетных орбит. Самая «далекая» возможная орбита планеты будет круговой с радиусом (большой полуосью) $r = R + \rho$, а самая «близкая» — круговой с радиусом $r = R - \rho$. Возможна также орбита, двигаясь по которой планета будет приближаться к Солнцу в перигелии на расстояние $R - \rho$ и удаляться в афелии на расстояние $R + \rho$. Такой орбитой

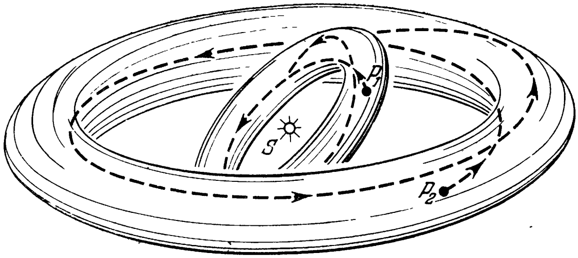

Рис. 69. Торы, внутри которых должны быть заключены орбиты планет.

будет эллипс, для которого большая полуось a и эксцентриситет e выражаются формулами

$$a = R, \qquad e = \rho : R.$$

Пределы изменения z определят максимально возможный наклон орбиты к экватору тора. Из рис. 68 видно, что

$$-\operatorname{tg} i \leqslant z/r \leqslant \operatorname{tg} i.$$

Заметим, что при движении планеты внутри тора ее орбита может меняться очень быстро: планетный эллипс может вращаться в своей плоскости, т. е. угловое расстояние перигелия от восходящего узла будет переменным, плоскость орбиты также может вращаться, что скажется на изменении со временем долготы восходящего узла.

Итак, мы снова видим, что для доказательства устойчивости планетной системы достаточно установить устойчивость движения по отношению к элементам орбиты a, e, i. Иначе говоря, если взаимные возмущения планет вызывают малые приращения элементов a, e, i для всех планетных орбит, то теорема об устойчивости Солнечной системы будет доказана. Изменение же во времени остальных трех элементов ☊, ω, Π на решение задачи никакого влияния не оказывает. Таким образом, задача состоит в изучении устойчивости движения планет по отношению к части переменных при наличии постоянно действующих возмущающих сил.

Арнольд учел и еще одну отмечавшуюся ранее особенность движения больших планет. Эта особенность для невозмущенных движений планет, т. е. для движений, рассматриваемых без учета взаимных возмущений, состоит в условно-периодическом характере движения. Что же понимают механики под словами «условно-периодическое движение?»

Предварительно заметим, что хотя невозмущенное движение каждой планеты периодическое, тем не менее в целом движение всей планетной системы периодическим назвать нельзя, так как нельзя найти такой промежуток времени, по истечении которого все планеты возвратятся в свои первоначальные положения. Движение планетной системы в целом назовем в рассматриваемом случае условно-периодическим. Однако движение планетной системы лишь частный пример условно-периодического движения.

Рассмотрим еще один пример. Пусть в возмущенном движении отдельной планеты ее расстояние от Солнца (радиус-вектор) изменяется по закону

$$r = r_0 \sin \omega_1 t \sin \omega_2 t,$$

в котором r_0, ω_1, ω_2 — некоторые постоянные. В приведенную формулу входят два синуса, каждый из которых представляет собой периодическую тригонометрическую функцию. Можно ли утверждать, что изменение r периодическое? Вообще говоря, нет! Изменение r носит колебательный характер, но периодичность будет зависеть от соотношения между величинами $2\pi/\omega_1$ и $2\pi/\omega_2$. Если найдутся два целых числа k_1 и k_2, для которых справедливо соотношение

$$2\pi k_1/\omega_1 = 2\pi k_2/\omega_2,$$

то движение окажется периодическим. В самом деле, из этого соотношения заключаем, что продолжительность k_1 периодов первого синуса в точности соответствует продолжительности k_2 периодов второго синуса. Поэтому промежуток времени

$$T = 2\pi k_1/\omega_1$$

будет общим периодом обоих синусов, по истечении которого r примет исходное значение. Но так как периоды синусов в этом соотношении можно заменить через частоты ω_1 и ω_2, то условие периодичности изменения r запишется в виде

$$k_1\omega_2 - k_2\omega_1 = 0.$$

Такое условие нам уже встречалось в гл. 2. Оно было названо условием соизмеримости частот и всегда сопутствовало резонансу.

Представим теперь себе случай, когда ни при каких целых значениях k_1 и k_2 условие соизмеримости не выполняется. Тогда общего для обоих синусов периода нет. Движение будет ограниченным и колебательным, но непериодическим. Здесь мы снова имеем пример условно-периодического движения.

В общем случае понятие условной периодичности можно ввести так. Пусть координаты x, y, z каждой из материальных точек, образующих механическую систему, в действительном движении представляют собой периодические функции от некоторых величин $u_1, u_2, \ldots, u_n$:

$$x = f(u_1, u_2, \ldots, u_n), \quad y = \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n),$$
$$z = \psi(u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

т. е.

$$f(u_1 + 2\pi k_1, u_2 + 2\pi k_2, \ldots, u_n + 2\pi k_n) \equiv f(u_1, u_2, \ldots, u_n),$$
$$\varphi(u_1 + 2\pi k_1, u_2 + 2\pi k_2, \ldots, u_n + 2\pi k_n) \equiv \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n),$$
$$\psi(u_1 + 2\pi k_1, u_2 + 2\pi k_2, \ldots, u_n + 2\pi k_n) \equiv \psi(u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — любые целые числа (здесь для простоты взят период 2π). Что же касается величин $u_1, u_2, \ldots, u_n$, то они в свою очередь являются линейными функциями времени

$$u_i = n_i t + c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где n_i и c_i — постоянные величины. Понятно, что для изменения переменной u_i на 2π необходим промежуток времени $2\pi/n_i$. Для различных u_i этот промежуток времени, вообще говоря, различен. Если n_i несоизмеримы, то не найдется такого интервала времени, по истечении которого все u_i изменятся на целые кратные 2π. Но в таком случае, хотя x, y, z и будут периодическими относительно u_i, они не будут обладать периодичностью по времени t.

Движение, описываемое с помощью таких функций, называется условно-периодическим.

Существенной особенностью невозмущенного движения планетной системы является условная периодичность их движения. Возникает вопрос: могут ли нарушить взаимные возмущения планет условно-периодический характер движения или нет?

Итак, основная задача как при изучении эволюции Солнечной системы, так и других консервативных колебательных систем, состоит в выяснении характера изменений

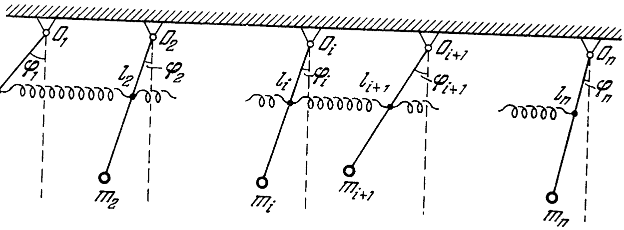

Рис. 70. Колебательная система связанных маятников.

условно-периодических движений при малых изменениях действующих сил. О малых возмущающих силах предполагается, что они не вызывают «утечки» или «притока» механической энергии или превращения механической энергии в тепловую или иные формы энергии. Начиная с 50-х годов эта задача стала предметом постоянных исследований группы ученых во главе с акад. Колмогоровым. Ряд основополагающих идей Колмогоров сформулировал в 1954 г. в своем программном докладе на Международном математическом конгрессе в Амстердаме.

Сначала познакомимся более детально со свойствами условно-периодических движений. В качестве примера рассмотрим систему из n маятников с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и длинами $l_1, l_2, \ldots, l_n$, подвешенных в точках $O_1, O_2, \ldots$ $\ldots, O_n$ (рис. 70). Маятники могут колебаться только в вертикальной плоскости, проходящей через точки O_i. Пусть $O_1O_2 = O_2O_3 = \ldots = O_{n-1}\ O_n = a$. Соединим маятники пружинками так, чтобы возникающие силы упругости были малыми по сравнению с весом каждого из маятников. Точки крепления пружин к маятникам расположены на расстоянии d от линии $O_1 O_n$. Коэффициенты жесткости пружинок обозначим через $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$.

Эта система обладает n степенями свободы, т. е. для ее описания нужно выбрать n координат, например, в качестве их можно взять углы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Задача состоит в определении углов φ_i как функций времени. Система маятников консервативна (гамильтонова), так как и силы тяжести, и силы упругости можно задать с помощью потенциальной энергии. Как известно, потенциал силы тяжести для одного тела выражается через произведение веса

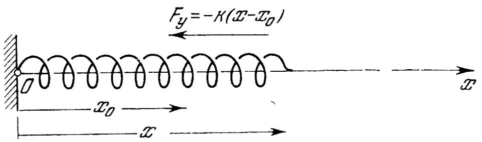

Рис. 71. Сила упругости спиральной пружины.

тела на высоту его подъема. Отсчитывая высоту подъема i-го маятника от горизонтальной прямой O_1O_n, для потенциальной энергии этого маятника получим

$$-m_i g l_i \cos\varphi_i.$$

Тогда потенциальная энергия сил тяжести для всей системы равна

$$\Pi_т = -m_1 g l_1 \cos\varphi_1 - m_2 g l_2 \cos\varphi_2 - \ldots - m_n g l_n \cos\varphi_n.$$

Вычислим теперь потенциал упругих сил. Сначала рассмотрим отдельно одну пружину, свободная длина которой равна x_0, а коэффициент жесткости k (рис. 71). Если пружина растянута до длины x, то по закону Гука сила упругости равна $-k(x-x_0)$. Здесь взят знак «минус», так как сила упругости направлена в сторону, противоположную растяжению. Среднее значение силы упругости при растяжении равно

$$\frac{0-k(x-x_0)}{2} = -\frac{1}{2}k(x-x_0),$$

а перемещение точки приложения силы составляет $x-x_0$. Поэтому работа силы равна

$$-\frac{1}{2}k(x-x_0)^2.$$

Как известно из физики, работа силы, будучи взятой с противоположным знаком, называется потенциальной энергией. С помощью формул тригонометрии в нашей задаче находим изменение длины пружинки между i-м и $(i+1)$-м маятниками. Оно приближенно равно $a + d(\varphi_{i+1} - \varphi_i)$. Тогда потенциальная энергия отдельной пружинки определяется выражением

$$\frac{1}{2} k_i d^2 (\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2,$$

а потенциальная энергия упругих сил всех пружин $П_у$ равна

$$П_у = \frac{d^2}{2} [k_1 (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \ldots + k_{n-1} (\varphi_n - \varphi_{n-1})^2].$$

Затем вычислим кинетическую энергию i-го маятника, предполагая, что веса пружин и стержней ничтожно малы по сравнению с весом чечевицы. Если скорость изменения угла φ_i обозначить через ω_i, то линейная скорость чечевицы будет $l_i\omega_i$, а ее кинетическая энергия составит $m_i l_i^2 \omega_i^2/2$. Поэтому кинетическая энергия всей системы равна

$$T = \frac{m_1 l_1^2 \omega_1^2}{2} + \frac{m_2 l_2^2 \omega_2^2}{2} + \ldots + \frac{m_n l_n^2 \omega_n^2}{2}.$$

Складывая кинетическую и потенциальную энергии, находим полную энергию всей системы E:

$$E = T + П_т + П_у.$$

При сделанных предположениях величина $П_у$ оказывается малой по сравнению с $П_т$, и поэтому возмущающей силой будет сила упругости. Невозмущенное движение определится энергией E_0,

$$E_0 = T + П_т,$$

и будет представлять собой колебания n свободных маятников. Роль малого параметра будет играть жесткость пружин.

Изучим сначала невозмущенное движение. При малых колебаниях маятники будут совершать гармонические колебания, периоды которых определяются формулой

Гюйгенса

$$P_i = 2\pi\sqrt{\frac{l_i}{g}}.$$

Более строгое исследование приводит к выводу, что

$$P_i = 2\pi\sqrt{\frac{l_i}{g}}\left(1+\frac{\alpha^2}{16}\right),$$

где α — амплитуда малых колебаний (максимальный угол отклонения маятника от вертикали в радианах).

Задача состоит в исследовании устойчивости колебаний маятниковой системы при учете слабого взаимодействия с пружинами. Нарушится ли колебательное движение системы через достаточно длительный промежуток времени или возмущенное движение будет похожим на невозмущенное?

При решении задачи об устойчивости данной или любой другой механической системы могут встретиться четыре случая, существенно различные в математическом отношении:

1. *Невырожденное движение*. Длины маятников и амплитуды колебаний таковы, что все P_i различны, причем частоты колебаний $\nu_i = 2\pi/P_i$ несоизмеримы, т. е. нельзя найти такие целые числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, для которых выполнялось бы равенство

$$\lambda_1\nu_1 + \lambda_2\nu_2 + \ldots + \lambda_n\nu_n = 0.$$

Здесь число независимых частот равно числу степеней свободы. Невырожденное движение будет иметь условно-периодический характер.

2. *Случайное вырождение*. Из формулы для периода колебаний математического маятника видим, что изменение начальных отклонений и начальных скоростей влечет за собой изменение периода, поскольку при этом изменяется амплитуда колебаний α. Поэтому начальные условия можно выбрать так, чтобы два или большее число периодов были бы равными или соизмеримыми. Тогда будет выполняться условие

$$\lambda_1\nu_1 + \lambda_2\nu_2 + \ldots + \lambda_n\nu_n = 0,$$

где λ_i — какие-либо целые числа.

Здесь уже число независимых периодов меньше числа степеней свободы.

3. *Предельное вырождение*. При колебательных движениях системы каждая из координат последовательно принимает все значения, заключенные в некотором интервале, попеременно достигая то одной, то другой из границ интервалов. Так, например, в рассмотренной системе из n маятников каждая из координат φ_i также изменяется в определенных пределах. Значения границ изменения координат зависят от начальных условий. Изменяя начальные условия, можно добиться того, чтобы обе границы совпадали для какой-либо из координат. Тогда соответствующая координата в невозмущенном движении изменяться не будет, т. е. один из маятников будет постоянно находиться в равновесии. Такого рода движения называют предельным вырождением. При движении планет по кеплеровским эллипсам случай предельного вырождения также встречается. Радиус-вектор в эллиптическом движении изменяется в пределах от $a(1-e)$ до $a(1+e)$. Если начальные условия изменять так, чтобы эксцентриситет e стремился к нулю, то границы изменения радиуса-вектора будут стремиться друг к другу. При $e = 0$ наступает предельное вырождение: радиус-вектор перестает изменяться колебательным образом. При этом один из периодов колебаний исчезает.

4. *Собственное вырождение*. Возвратимся снова к системе маятников и выделим невозмущенное движение иным образом, чем ранее. К числу возмущающих сил отнесем не только силы упругости, но частично и силы тяжести. В выражение для потенциальной энергии сил тяжести входят косинусы углов φ_i. Если амплитуды колебаний малы, то углы φ_i в невозмущенном движении изменяются немного, и тогда, в соответствии с формулами § 13,

$$\cos\varphi_i = 1 - \frac{\varphi_i^2}{2!} + \frac{\varphi_i^4}{4!} - \ldots$$

Поэтому для потенциальной энергии можно написать новое выражение:

$$\Pi_{\text{т}} = -m_1 l_1\left(1 - \frac{\varphi_1^2}{2!} + \frac{\varphi_1^4}{4!} - \ldots\right) - \ldots$$

$$\ldots - m_n l_n\left(1 - \frac{\varphi_n^2}{2!} + \frac{\varphi_n^4}{4!} - \ldots\right).$$

Так как потенциальная энергия определяется с точностью до постоянной, то, опуская постоянные члены в выражении для $\Pi_т$, получим

$$\Pi_т = + \frac{1}{2!}(m_1 l_1 \varphi_1^2 + \ldots + m_n l_n \varphi_n^2) - \\ - \frac{1}{4!}(m_1 l_1 \varphi_1^4 + \ldots + m_n l_n \varphi_n^4) + \ldots$$

Но φ_i малы, поэтому φ_i^4 намного меньше φ_i^2, и, значит, первая из круглых скобок в $\Pi_т$ намного больше второй. Условимся теперь за невозмущенное движение брать такое, для которого потенциальная энергия определяется первой скобкой. Тогда вторая круглая скобка определит потенциал возмущающих сил. При таком выборе невозмущенного движения периоды колебаний определяются формулой Гюйгенса и не будут зависеть от начальных условий. Если среди маятников системы q маятников будет иметь одинаковую длину, то их периоды при любых начальных условиях будут равными. Движение будет вырожденным, ибо число независимых периодов будет меньше числа степеней свободы. Такого рода вырождение называется собственным.

Четыре приведенных типа колебательных движений встречаются не только в технических задачах, но и в задачах небесной механики. Более того, в задачах небесной механики одновременно имеют место два или три типа вырождения. Это обстоятельство и порождает основные трудности в исследовании возмущенного движения.

Всем особым, вырожденным случаям движения гамильтоновых систем посвящена основная теорема Арнольда. Прежде чем говорить о результатах применения основной теоремы Арнольда к Солнечной системе, мы познакомим читателя с одной из работ, что позволит более ясно понять те трудности проблемы, которые Арнольду необходимо было преодолеть.

Изложим результаты численного анализа траекторий, проведенного французским ученым М. Хеноном (Парижский астрофизический институт). Он рассмотрел круговую задачу трех тел (см. § 7), состоящую в исследовании движения малого по массе тела (притягиваемого, но не притягивающего) в поле тяготения двух массивных тел, движущихся по круговым орбитам вокруг общего центра масс.

Удобнее изучать относительное движение малой массы. Для этой цели поступают так. Берут вращающуюся систему координат с началом в центре тяжести больших тел. Ось x проводят через притягивающие тела, а ось y перпендикулярно к оси x. В этой системе координат на тело малой массы, кроме сил тяготения, действуют еще центробежные силы (подобные тем, какие возникают на вращающейся Земле). И силы тяготения, и центробежные силы характеризуются потенциальной энергией, вследствие чего для этой задачи оказывается справедливым закон сохранения механической энергии в относительном движении. Математически он выражается так называемым *интегралом Якоби*. В дальнейшем ограничимся изучением только плоского движения (в плоскости xy). Если через x, y обозначить координаты тела малой массы, через v_x, v_y — составляющие его скорости по координатным осям, то интеграл Якоби запишется в виде

$$\frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2) + \Pi_{\text{ц}} + \Pi_{\text{т}} = C = \text{const},$$

где $\Pi_{\text{ц}}$ — потенциальная энергия центробежных сил, $\Pi_{\text{т}}$ — потенциальная энергия сил тяготения, а первый член представляет собой кинетическую энергию, приходящуюся на единицу массы. Величина C для каждой траектории во все время движения остается постоянной и называется постоянной Якоби.

Для полного описания движения необходимо знать в каждый момент времени значения x, y, v_x, v_y. Для графического изображения движения нужны четыре координатные оси (по числу переменных x, y, v_x, v_y), т. е. нужно рассматривать четырехмерное фазовое пространство, что практически мы сделать не в состоянии. Поэтому можно поступить так. Пользуясь интегралом Якоби, одну из четырех переменных можно исключить, выразив ее через три другие. Пусть исключена переменная v_y. Теперь для изображения движения достаточно обычного трехмерного пространства. Однако это тоже неудобно. Не случайно в технике рабочие чертежи деталей и механизмов дают в проекциях на различные плоскости. Поэтому для изучения движений в круговой задаче трех тел будем рассматривать сечения пространства x, y, v_x плоскостью $y = 0$ и выяснять, как располагаются точки пересечения фазовых траекторий с плоскостью переменных x, v_x (рис. 72). Для выделения траекторий будем задавать начальные условия (см. § 8), т. е. значения координат и скоростей в некоторый (начальный) момент времени. Здесь это делалось так. На плоскости x, v_x выбиралась какая-либо точка в качестве начальной, y по договоренности принималось равным нулю, а v_y вычислялось по интегралу Якоби. Кроме того, задавались численные значения C. После этого не аналитически, а шаг за шагом, численно, решались уравнения движения точки.

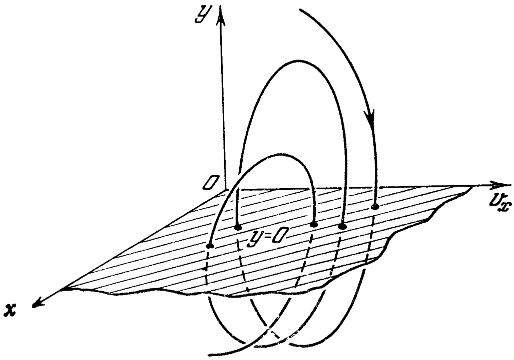

Рис. 72. Поведение траекторий в пространстве x, y, v_x.

В работе Хенона оказалось достаточным для выяснения обстоятельств движения в пространстве x, v_x вычислять по 50 последовательных пересечений траекторий с плоскостью $y = 0$. Несколько слов о выборе значений C. Здесь полезно вспомнить задачу двух тел. Если полная энергия в этой задаче отрицательна, то движение эллиптическое (ограниченное). При положительных или нулевом значении полной энергии движение гиперболическое или параболическое, т. е. происходит в неограниченной области пространства. Возвратимся к нашей задаче. Если движение притягиваемой точки происходит в близкой окрестности одной из притягивающих масс, то влияние другой в течение долгого времени будет не очень значительным, и, следовательно, при отрицательных значениях постоянной энергии движение малой массы будет почти эллиптическим. Поэтому целесообразно и постоянную Якоби брать отрицательной. В задаче двух тел при стремлении к нулю полной энергии орбита становится все более вытянутой и затем превращается в параболическую. Нужно и в рамках круговой задачи посмотреть, как будет вести себя траектория при значениях постоянной Якоби, стремящихся к нулю. Дело в том, что при таких значениях C траектория точки в невозмущенном движении будет уходить от ближайшего в начальный момент тела, и поэтому возможно, что второе тело окажет большое влияние на движение малой массы. Итак, изменяя значения постоянной Якоби от какого-либо отрицательного значения в сторону нуля, можно проследить за эволюцией орбит и выяснить возмущающее действие второго из притягивающих тел. Стоит, однако, заметить еще, что каждому значению C соответствует не одна, а бесчисленное множество орбит, так как при заданном C можно, по желанию, придать x, v_x различные числовые значения.

Изложенный план действий как раз и был принят в работе Хенона. Результаты его числовых расчетов приводятся на рис. 73—77. Сделаем по поводу этих рисунков ряд пояснений. Хенон вел свои расчеты для копенгагенского варианта круговой задачи трех тел, т. е. для случая равных притягивающих масс. Выгода этой задачи в том, что она хорошо изучена численно, а ее уравнения движения несколько проще уравнений для общего случая. В расчетах была использована необычная система единиц. За единицу расстояния принималось расстояние между притягивающими телами, в качестве единицы массы была взята сумма масс притягивающих тел, а единица времени была выбрана так, чтобы угловая скорость движения притягивающих масс по орбитам, а значит, и угловая скорость вращения системы координат равнялась единице. При таком выборе единиц координаты одного из притягивающих тел будут $x = -0{,}5$; $y = 0$, а для другого — $x = +0{,}5$, $y = 0$ (начало координат лежит посередине между ними). Скорости этих тел во вращающейся системе координат равны нулю. В выбранной системе единиц на рис. 73—77 по оси x отложены расстояния, а по оси v_x — значения скорости v_x.

На всех рисунках изображена штриховая линия. Это кривая Якоби, вне которой движение невозможно. Кривая Якоби играет ту же роль, как и кривая Хилла (§ 6, рис. 14).

Если кривые Якоби незамкнуты, то через их горловины траектории могут «вырваться», а тело, первоначально двигавшееся вокруг одной (или обеих) притягивающих масс, получит возможность неограниченно удаляться от них. Точки одной и той же траектории соединены сплошной линией. Изолированные крестики внутри овалов соответствуют периодическим траекториям, замыкающимся после первого оборота (точка, сделав оборот, возвращается в исходное положение). Штрих-пунктирная линия на рис. 77 есть кривая «выброса»: точки вне этой кривой соответствуют уходящим траекториям.

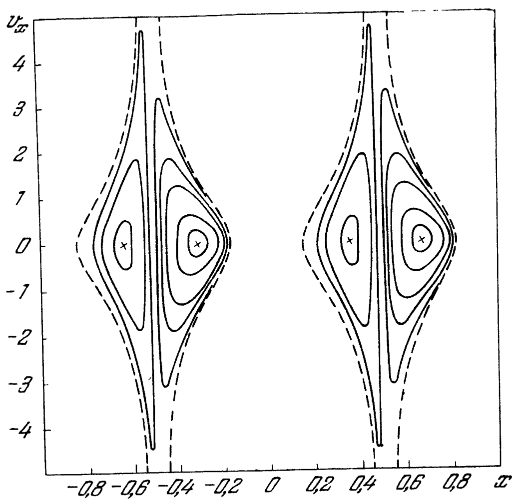

Рис. 73. «Карта» траекторий в круговой задаче трех тел (копенгагенский вариант) при $C = -4{,}5$.

На рис. 73 изображена «карта» движения на плоскости x, v_x для $C = -4, 5$. Как видим, для таких отрицательных энергий относительного движения точки одной и той же траектории лежат на замкнутых кривых, охватывающих притягивающие массы. Можно думать, что траектория в фазовом пространстве x, y, v_x, v_y наматывается на тор (или трубку) с неправильным сечением, который пересекается по одной из кривых, изображенных на рис. 73 с плоскостью (x, v_x). Более внешние кривые принимают довольно замысловатую форму. Так сказывается на движении возмущающее действие второго притягивающего тела.

Возьмем теперь значения постоянной Якоби $C = -4$. Здесь (рис. 74), помимо старых семейств вложенных друг в друга кривых, появляется шесть небольших островков, каждый из которых содержит по периодической орбите (крестик внутри овала). Однако появляются и принципиально нового характера движения. Появилось много точек, разбросанных хаотично внутри кривой Якоби. Эти точки

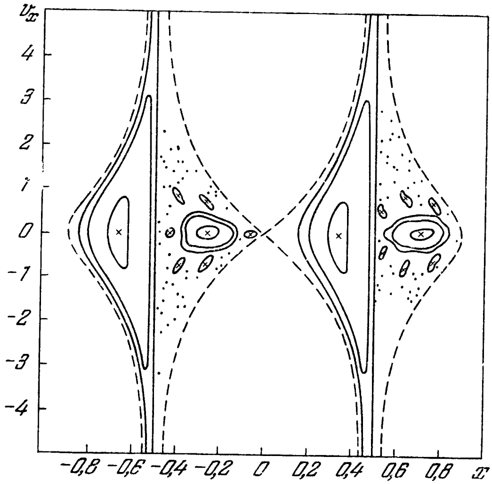

Рис. 74. «Карта» траекторий в круговой задаче трех тел (копенгагенский вариант) при $C = -4{,}0$.

уже невозможно соединить какой-либо кривой, они занимают площадь между ней и вертикальной линией. Траектория, которой соответствуют эти точки, при последовательных прохождениях через плоскость x, v_x пересекается с ней «в каких попало» точках. Можно ожидать, что в пространстве x, v_x, v_y траектория заполняет внутренность трубки, сечение которой плоскостью (x, v_x) изображено на чертеже. Здесь мы имеем случай, очень похожий на тот, с которым мы встретимся при изложении теоремы Колмогорова, когда резонансный тор разрушается возмущающими силами. Траектории такого типа Оллонгрен назвал *трубчатыми*, а Хенон — *полуэргодическими*. Когда говорят об эргодичности, то имеют в виду, что изучаемое явление носит случайный характер и подчиняется законам теории вероятностей. Точки трубчатых траекторий на плоскости x, v_x располагаются «как попало» в указанной ранее области, случайным образом. В этом смысле траектории и носят эргодический характер.

При стремлении постоянной C к нулю область эргодичности, внутри которой расположены точки, возрастает, т. е. возмущающее действие второго притягивающего тела

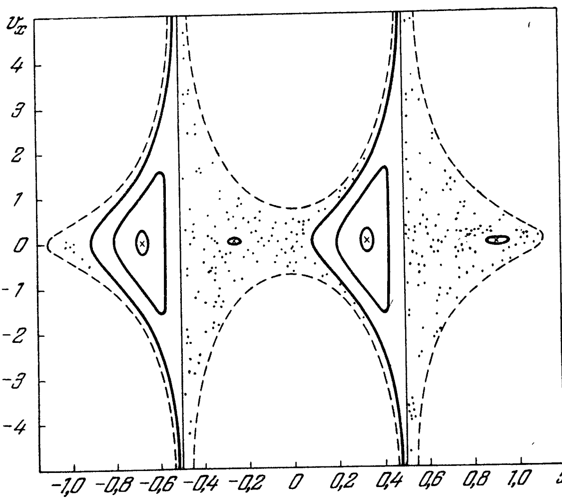

Рис. 75. «Карта» движений в копенгагенской задаче трех тел при $C = -3{,}5$.

растет. На рис. 75 и 76 изображены результаты расчета для $C = -3{,}5$ и $C = -2$. На рис. 76 кривая Якоби уже незамкнута в направлении оси x, и тело может ускользнуть в образовавшийся рукав. Как следует из расчетов, для многих начальных условий действительно происходит выброс тела. Интересно, однако, отметить, что для обратных движений в ряде случаев тело «игнорирует» эту возможность, что, кстати, подтверждается результатами исследования движения комет (§ 18, рис. 38—40).

На рис. 77 приводится область, более удаленная от притягивающих масс. Точки внутри овалов представляют периодическую траекторию, охватывающую обе массы. Замкнутые вокруг нее кривые с удалением становятся все более и более рыхлыми и, наконец, разрушаются. Все траектории вне штрих-пунктирной линии приводят к выбросу тела.

Задача, рассмотренная Хеноном, — весьма частный случай гамильтоновых систем. Задача Арнольда состояла не в численном, а аналитическом изучении произвольных гамильтоновых систем как в невырожденном случае, так и

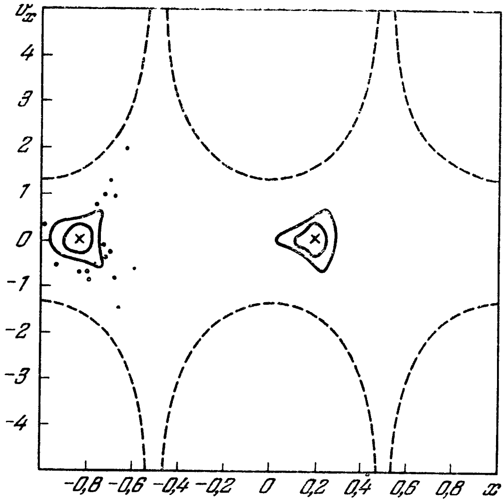

Рис. 76. «Карта» движений в копенгагенской задаче трех тел с возросшей областью эргодичности ($C = -2$).

при различных вырождениях. Ему нужно было выяснить, при каких по величине консервативных возмущениях торы, на которые накручиваются траектории, не разрушаются, а лишь несколько деформируются, при каких условиях траектории становятся трубчатыми, эргодическими.

Рассмотрим теперь планетную систему. Пусть m_0 — масса Солнца, m_1 — масса Меркурия, m_2 — масса Венеры и т. д. и, наконец, m_9 — масса Плутона. Пусть, далее, r_1 — расстояние от Солнца до Меркурия, r_2 — расстояние от Солнца до Венеры и т. д. Взаимные расстояния между планетами будем обозначать через r_{ij}, где индексы i и j указывают, какое из взаимных расстояний планет взято. Например, расстояние между Меркурием и Сатурном будет обозначено через r_{16}, а расстояние между Венерой и Марсом — через r_{24}. В принятых обозначениях потенциальная энергия

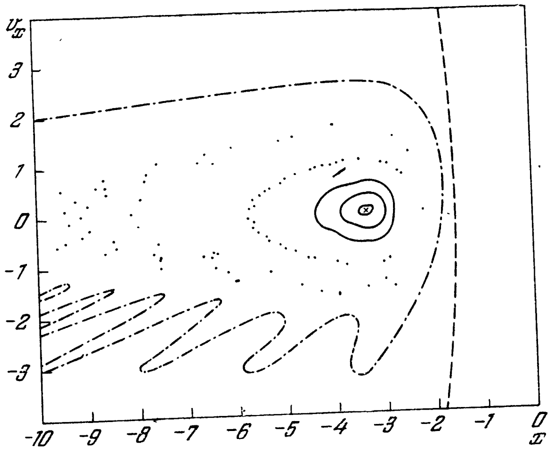

Рис. 77. «Карта» области траекторий, охватывающих обе притягивающие массы, и зоны «выброса» ($C = -4$).

Солнечной системы записывается при помощи формулы

$$V = -\frac{fm_0m_1}{r_1} - \frac{fm_0m_2}{r_2} - \ldots - \frac{fm_0m_9}{r_9} - \frac{fm_1m_2}{r_{12}} - \ldots$$
$$\ldots - \frac{fm_im_j}{r_{ij}} - \ldots - \frac{fm_8m_9}{r_{89}}.$$

Это выражение приводилось на стр. 82*).

Не все слагаемые в этой формуле имеют одинаково важное значение. Основное значение в теории движения планет будут иметь те члены, в которых произведение масс велико, т. е. члены, содержащие множителем массу Солнца. В самом деле, если массу Солнца принять за единицу, то

*) Элементарный вывод формулы для потенциала двух притягивающихся по закону Ньютона материальных точек читатель найдет в книге Е. А. Гребеникова и В. Г. Демина «Межпланетные полеты», «Наука», 1965.

масса Юпитера окажется равной 0,001, масса Сатурна 0,0003, а массы других планет выразятся еще меньшими числами. Например, масса Земли в этом масштабе измерения равна 0,00003.

Таким образом, структура потенциала сил тяготения планетной системы именно такова, какая необходима для

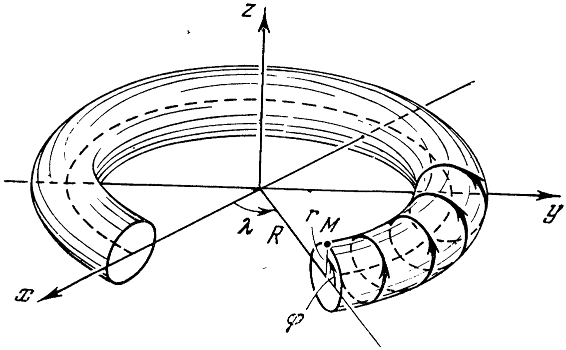

Рис. 78. Условно-периодическое движение по тору.

применения теории Арнольда. Невозмущенное движение характеризуется функцией

$$V_0 = -\frac{fm_0m_1}{r_1} - \frac{fm_0m_2}{r_2} - \ldots - \frac{fm_0m_9}{r_9},$$

а малые возмущающие силы задаются потенциальной энергией

$$V_1 = -\frac{fm_1m_2}{r_{12}} - \ldots - \frac{fm_im_j}{r_{ij}} - \ldots - \frac{fm_8m_9}{r_{89}}.$$

Свое исследование Арнольд вел в особых, так называемых канонических переменных «действие» и «угол».

Геометрически переменные «действие — угол» удобно проиллюстрировать на торе (рис. 78). Пусть R — радиус осевой линии тора, r — радиус его поперечного сечения. Положение точки на торе можно определить однозначно, задав два угла λ и φ. Угол λ отсчитывается в плоскости экватора тора от некоторого неподвижного направления до плоскости, проходящей через ось симметрии тора и изучаемую точку его поверхности. Угол λ подобен географической долготе точки земной поверхности. Второй угол отсчитывается в поперечном сечении тора, проведенном через изучаемую точку, и откладывается от экваториальной плоскости. Угол φ напоминает географическую широту.

Заставим теперь изучаемую точку равномерно вращаться в одном и том же направлении в плоскости сечения тора. Пусть при этом вращении угол φ возрастает. Тогда $\varphi = \omega_1 t + \varphi_0$, где ω_1 — угловая скорость точки. Если затем привести и само сечение, содержащее точку M, в равномерное вращение против часовой стрелки, то другая координата точки M также будет изменяться пропорционально времени: $\lambda = \omega_2 t + \lambda_0$, где ω_2 — угловая скорость вращения сечения. Введя прямоугольную систему координат (см. рис. 78), с помощью теорем элементарной тригонометрии получим для прямоугольных координат точки следующие выражения:

$$x = (R + r\cos\varphi)\cos\lambda,$$
$$y = (R + r\cos\varphi)\sin\lambda,$$
$$z = r\sin\varphi.$$

Как показывают эти формулы, движение точки по тору будет условно-периодическим, так как здесь имеются две частоты, ω_1 и ω_2. Если отношение частот — рациональное число, то движение будет просто периодическим. Если же отношение частот равно иррациональному числу, то движущаяся точка никогда не возвратится в первоначальное положение, ибо это означало бы периодичность движения. Но за неограниченно долгое время точка будет многократно подходить сколь угодно близко к своему начальному положению, а витки траектории точки всюду плотно покроют поверхность тора. Переменная r дает нам пример величины, обладающей свойством переменных «действия», а координаты φ и λ подобны переменным типа «угол».

Именно такие переменные выбрал Арнольд для характеристики движения планет Солнечной системы, следуя в этом отношении работам Делоне и Пуанкаре. Мы приведем здесь без вывода переменные «действия» для задачи двух тел:

$$\xi_1 = \sqrt{fma},$$
$$\xi_2 = \sqrt{fma}\,(1 - \sqrt{1 - e^2}),$$
$$\xi_3 = \sqrt{fma\,(1 - e^2)}\,(1 - \cos i).$$

Для планет Солнечной системы элементы e и i малы (см. гл. 1), поэтому переменные действия ξ_2 и ξ_3 также малы. Если бы удалось доказать, что взаимные возмущения планет на неограниченных промежутках времени изменяют величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 незначительно, то тогда из формул для «действия» сразу же вытекала бы устойчивость по отношению к элементам a, e, i.

Сразу же делаем и еще один крайне важный вывод. Если в невозмущенном движении n планет Солнечной системы условие соизмеримости их периодов (частот) выполнено, т. е. найдутся такие целые числа $k_1, \ldots, k_n$, из которых по крайней мере два числа не равны нулю и

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \ldots + k_n\omega_n = 0,$$

где $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ — средние движения планет, то будут выполняться условия для наступления вырождения. А в вырожденных случаях классические методы приводили к возникновению в элементах орбит планет вековых членов, наличие которых мешало небесным механикам исследовать устойчивость. Если даже точное условие соизмеримости и не выполняется, но сумма $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \ldots + k_n\omega_n$ чрезвычайно близка к нулю, или, как говорят небесные механики, имеет место острая соизмеримость, то и тогда классические методы для возмущений элементов дают выражения вида

$$\frac{A \sin\left[(k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \ldots + k_n\omega_n)\,t + \lambda\right]}{k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \ldots + k_n\omega_n},$$

где знаменатель очень мал. Вследствие малости знаменателей выводов об устойчивости сделать не удается.

Прежде всего нужно было найти подходящий способ решения уравнений движения. Классическому способу, в котором решения отыскиваются в виде рядов, расположенных по возрастающим степеням малых масс μ, т.е. для какого-либо элемента «э» планетной орбиты получают первые члены ряда

$$э = э_0 + э_1\mu + э_2\mu^2 + \ldots + э_n\mu^n + \ldots,$$

присущи большие недостатки. Некоторые из коэффициентов $э_n$ в случае малых знаменателей оказывались непомерно большими и делали решение непригодным для применения.

Иначе говоря, некоторые из членов $э_n\ \mu^n$ имеют из-за острой соизмеримости средних движений планет столь малые знаменатели, что они не «гасятся» малыми множителями μ^n. Более того, ряды указанного выше вида, используемые в небесной механике, расходятся (см. гл. 2), т.е. не имеют суммы. Это было доказано еще Пуанкаре. А в Солнечной системе наблюдается острая соизмеримость периодов обращения Сатурна и Юпитера. Частоты орбитальных движений этих планет относятся друг к другу почти как 5:2. Налицо либо резонансное либо «предрезонансное» состояние. Хорошего при таком положении от классических методов ожидать было совершенно нельзя. Возникла необходимость разработки принципиально нового способа решения уравнений движения планет.

К тому времени, когда к проблемам теории возмущений обратился Арнольд, трудности проблемы малых знаменателей в некоторых задачах математиками были уже преодолены. В период с 1942 г. по 1957 г. западногерманский математик К. Л. Зигель, советские ученые А. Е. Гельман и А. Н. Колмогоров уже одержали первые победы.

В основе исследований Колмогорова лежала простая идея, высказанная для алгебраических уравнений еще Ньютоном. Триста лет успешно служит математикам при решении сложных алгебраических уравнений или их систем метод касательных Ньютона. Но только в последние десятилетия благодаря работам Колмогорова и других ученых удалось внедрить способ, подобный ньютоновскому, в практику решения и исследования дифференциальных уравнений, т. е. уравнений, содержащих наряду с искомыми переменными и скорости их изменения (см. § 8).

Теперь обратимся к методу Ньютона и рассмотрим геометрическую трактовку этого способа в случае одного алгебраического уравнения с одним неизвестным. Пусть дано уравнение

$$f(x) = 0.$$

Необходимо найти его корень. Рассмотрим функцию $y = f(x)$ и построим ее график (рис. 79). Корнем уравнения будет абсцисса точки P пересечения графика с осью x. Эту неизвестную абсциссу нужно найти. Возьмем на графике какую-либо точку Q и проведем касательную к кривой в этой точке. Проведение касательной не представляет труда ни при геометрическом решении, ни при решении с помощью формул. Касательная пересечет ось x в некоторой точке P_1, которая с корнем, вообще говоря, не совпадет. Затем вычислим значение функции $f(x)$ при $x = x_1$. Если оно отлично от нуля, то из точки P_1 проведем ординату и найдем другую точку графика Q_1, откуда снова проведем касательную

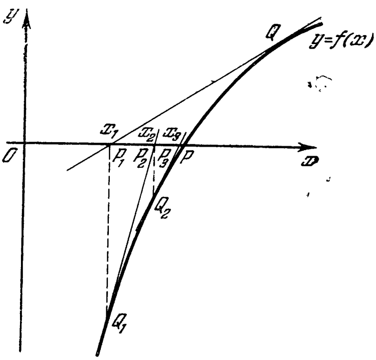

Рис. 79. Графическое определение корня уравнения по методу касательных Ньютона.

к кривой. Вторая касательная пересечет ось x в точке P_2 с абсциссой x_2. Взяв эту абсциссу, еще раз вычислим значение функции при $x = x_2$ и построим новую точку Q_2. Проведем новую касательную к кривой в точке Q_2. Она пересечется с осью x в точке с абсциссой $x = x_3$. Продолжая далее этот процесс, на каком-то шаге, или, как говорят, приближении, получим точку пересечения касательной с осью x, почти не отличающуюся от искомого корня. В этом состоит метод касательных Ньютона.

Как показывает практика, при использовании метода Ньютона часто бывают достаточны два-три приближения, в то время как другие методы последовательных приближений требуют большего количества шагов. Такое различие в эффективности способов не случайно. Метод Ньютона обеспечивает очень быстрое приближение к искомому значению корня для любых уравнений вида $f(x) = 0$, если только график функции $y = f(x)$ не имеет разрывов и изломов.

Если исходное, первое приближение к значению корня выбрано удачно, то при сделанных предположениях относительно функции $f(x)$ справедливо утверждение, что каждое последовательное приближение удваивает число верных знаков в найденном значении корня.

Нетрудно указать и причину эффективности и особых достоинств метода Ньютона. Дело в том, что в методе Ньютона учитывается тенденция, характер изменения функции (или ее графика). Проводя касательную к кривой и отыскивая точку ее пересечения с осью абсцисс, мы как бы заменяем кривую касательной. А касательная из всевозможных прямых линий «ближе всего» подходит к кривой в окрестности точки касания. Ординаты кривой и касательной в окрестности точки касания почти одинаковы. Иначе говоря, пользуясь методом Ньютона, мы принимаем в расчет не только вычисленные значения функции, но и ее поведение. Поэтому-то нам и удается очень быстро нащупать корень уравнения.

Это основное достоинство метода было сохранено при его распространении на дифференциальные уравнения. Модифицированный метод Ньютона успешно применяется в теории нелинейных колебаний, в небесной механике и т. д., позволяя избегать использования расходящихся рядов.

Нужно, конечно, иметь в виду, что метод Ньютона для алгебраических уравнений отличается от той формы обобщенного метода Ньютона, который применяется в теории возмущений. Общим здесь оказывается лишь сам подход, руководящая идея.

В дифференциальных уравнениях, в частности, в теории возмущений, метод Ньютона обеспечивает наиболее выгодный выбор новых переменных, т. е. переход от старых координат к некоторым новым. Этот переход должен быть таким, чтобы в новых переменных полученные уравнения можно было бы решать быстрее и проще. Замена неизвестных величин широко практикуется при решении алгебраических и тригонометрических уравнений. Очень выгодна замена переменных и при исследовании дифференциальных уравнений.

Опишем теперь ту задачу, которая решается методом Ньютона в теории возмущенного движения. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — переменные действия, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — угловые переменные, характеризующие движение планет. Движение планет полностью определяется функцией Гамильтона $H = T + V$, где T — кинетическая энергия, V — потенциальная энергия сил тяготения. Предполагается, что функция H выражена через переменные x_i, y_i. Потенциальная энергия V, как мы видели, состоит из потенциальной энергии, характеризующей невозмущенное эллиптическое движение V_0, и потенциальной энергии сил, обусловленных взаимным возмущающим притяжением планет, V_1. Таким образом, гамильтонову функцию H можно представить в виде

$$H = H_0 + R,$$

где $H_0 = T + v_0$ — механическая энергия невозмущенного движения, а R — член, определяющий возмущенное движение. Если ввести величину ε (малый параметр), имеющую порядок отношения массы планеты к массе Солнца, то, как уже говорилось, в функции R можно выделить малые члены порядка ε, малые члены порядка ε^2 и т. д. Эти члены будем соответственно обозначать через H_1, H_2 и т. д.

Обобщенный метод Ньютона позволяет сделать такое преобразование переменных x_i, y_i к другим переменным p_i, q_i, т. е. найти такие зависимости:

$$p_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n, \varepsilon),$$
$$q_i = \psi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n, \varepsilon),$$

где f_i и ψ_i обозначают функции от x_i и y_i, что в новых переменных в невырожденном случае гамильтонова функция H не будет содержать члены порядка ε, а уравнения сохраняют гамильтонову форму. В H останутся лишь очень малые члены более высокого порядка ε^2 и выше.

Если сделать еще одно преобразование переменных p_i, q_i к новым переменным, то в функции H возмущающие члены будут иметь уже порядок ε^4. Если замену переменных произвести s раз, то члены в H, характеризующие возмущения, будут иметь порядок ε^{2s}. При неограниченном продолжении процесса замены переменных возмущающий член в H будет стремиться к нулю, а сам процесс будет сходиться. Метод Ньютона обеспечивает очень удачный выбор новых переменных, приводящий к быстрой сходимости, что и обеспечивает нейтрализацию действия малых знаменателей. В вырожденных случаях весь анализ значительно усложняется.

Метод Ньютона является краеугольным камнем в теории, построенной Колмогоровым и Арнольдом. С помощью него Арнольд сначала доказывает теорему, высказанную ранее Колмогоровым. Изложим сущность этой теоремы, рассматривая для простоты механическую систему с двумя степенями свободы.

В этом случае движение в фазовом пространстве можно изобразить на обычном торе (рис. 80).

Тор, на который навивается невозмущенная траектория, определяется по начальным условиям. Каждому тору соответствуют определенные и неизменные значения переменных действия, а характер наматывания траектории на тор определяется угловыми переменными. Если бы рассматривалось

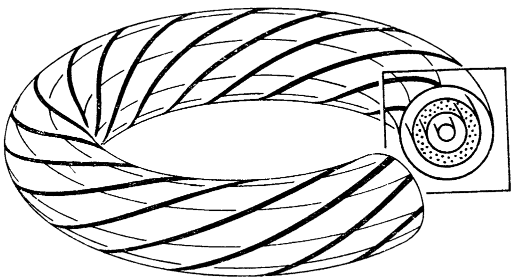

Рис. 80. Поведение траекторий на торах в пространстве переменных «действие — угол».

только плоское движение одной планеты, то размеры тора определялись бы переменными действия

$$\xi_1 = \sqrt{fma}, \quad \xi_2 = \sqrt{fma}\,(1 - \sqrt{1 - e^2}).$$

Соседние торы между собой не пересекаются и разделены везде щелями. Что же касается самих траекторий на торе, то они наматываются на него равномерно и постепенно всюду плотно покрывают его подобно нити, намотанной на катушку. Такая картина имеет место только при отсутствии случайного вырождения, т. е. при несоизмеримости частот. Если же начальные условия приводят к резонансному случаю, т. е. к случайному вырождению, то обмотка соответствующего тора не будет равномерной и всюду плотной. Такая картина будет, в частности, для периодического движения, в котором траектория, навиваясь на тор, через один или несколько оборотов замкнется. Периодическая траектория будет напоминать проволочную спираль, концы которой соединены.

Что же произойдет с механической системой при действии малых консервативных возмущающих сил? Теорема

Колмогорова утверждает, что торы, несущие на себе фазовые траектории, сохраняются, несколько деформируясь, исключая те из них, которые соответствуют движению со случайным вырождением. Но при деформации изменяются переменные действия, определяющие габариты тора. Так как деформации тора незначительны при малых возмущениях, то изменение переменных действия также невелико. Следовательно, в возмущенном движении переменные действия будут вечно близкими к своим невозмущенным значениям. А это и означает устойчивость движения по отношению к переменным действиям. Кроме того, было доказано, что возмущенные движения по-прежнему будут условно-периодическими.

Обратимся теперь к резонансному случаю. Здесь картина может быть более сложной. Как оказывается, резонансные торы могут разрушиться под действием возмущающих сил, и тогда возмущенная траектория начнет блуждать. При этом траектория не может пересекать другие торы (так как тогда из точки пересечения исходили бы две траектории: резонансная и нерезонансная, а это означало бы, что точке пересечения на торе соответствуют такие начальные условия, при которых система одновременно должна описывать два различных движения). Поэтому возмущенные резонансные траектории будут постоянно находиться в щелях между торами. Им некуда ускользнуть из этого слоя. И поскольку объем этих зазоров ограничен (ведь сами торы изменяются мало), движение будет устойчивым. На рис. 80 показано поведение возмущенной резонансной траектории, для которой невозмущенный тор располагается между вторым и третьим из вложенных торов. Точки соответствуют точкам пересечения с плоским сечением. Как видно, они могут располагаться в кольцевой полосе.

Для более общих систем с большим числом степеней свободы геометрические построения нужно проводить в пространствах большего числа измерений. Геометрическая картина усложняется. Щели между соседними торами уже не будут занимать ограниченный объем. Возмущенная резонансная траектория получает возможность при разрушении резонансного тора блуждать в щелях между торами и уходить очень далеко от невозмущенной траектории. Здесь уже об устойчивости резонансных траекторий ничего определенного сказать нельзя. Такие же осложнения получаются и при наличии собственных и предельных вырождений.

Говоря о доказательстве Арнольда теоремы Колмогорова, нужно добавить еще, что остается открытым вопрос о поведении не только резонансных траекторий, но и всех достаточно близких к ним, причем количество выпадающих из рассмотрения траекторий тем меньше, чем меньше по величине члены H_1, H_2 и т. д. в функции Гамильтона.

Теорема Колмогорова, однако, не дает исчерпывающего ответа на вопрос о возмущенных движениях в гамильтоновых системах. Необходимо решить задачу о «рождении новых частот», сущность которой мы поясним на примере.

В рамках упрощенной задачи о невозмущенном движении девяти больших планет Солнечной системы, в результате взаимодействия планет только с Солнцем, возникает лишь по одному периоду (или соответствующей ему частоте). Естественно ожидать, что при учете имеющих место взаимодействий планет друг с другом могут появиться новые частоты. Подобно тому как у струны с небольшой жесткостью частота колебаний мала (период велик), слабое взаимодействие планет с малыми (по сравнению с солнечной) массами породит колебательные изменения координат с малыми частотами. В возмущенных значениях элементов орбит неизбежно появятся неравенства с малыми знаменателями, т. е. члены вида $\frac{A}{\mu}\sin\mu t$, где μ — малый параметр, тем меньший, чем меньше отношение массы возмущающей планеты к массе Солнца. Но, как мы говорили в § 14, классическая теория возмущений дает вместо $\sin\mu t$ величину μt, т. е. вековое возмущение At.

Рассматривая теорему Колмогорова и результаты численного расчета Хенона, мы отмечали возможность разрушения резонансных торов вследствие возмущений. Как же изменится эволюционная картина в фазовом пространстве при рождении новых частот? Исследованием именно этого вопроса и занялся в дальнейшем Арнольд.

В этой сложной задаче уже не удается найти преобразование переменных, которое «убивало» бы в гамильтоновой функции H возмущающий член H_1. Выход был найден в том, чтобы иначе, чем ранее, делить функцию H на невозмущенную и возмущенную части. Если ранее невозмущенное движение определялось функцией H_0, то теперь невозмущенное движение стало определяться функцией $H_0 + H_1$. Этот прием подобен тому, который мы описали, рассматривая собственное вырождение в случае системы n связанных маятников, когда невозмущенное движение выбиралось двояким образом. Пренебрежение силами упругости пружин и пренебрежение в потенциальной энергии сил тяжести членами, имеющими более высокий порядок, чем квадрат угла отклонения маятника от вертикали (движение в соответствии с формулой Гюйгенса) подобно сохранению в невозмущенном движении только H_0. Если же пренебрегать только силами упругости, то в невозмущенном движении будут учитываться члены, содержащие все степени малых углов отклонения маятников, что в общей задаче о гамильтоновых системах аналогично выбору невозмущенного движения, определяемого гамильтоновой функцией $H_0 + H_1$.

Настойчивые поиски решения задачи об устойчивости движения в произвольных гамильтоновых системах при наличии постоянно действующих консервативных возмущений, предпринятые Арнольдом, увенчались успехом. Из общей теоремы об устойчивости гамильтоновых систем как следствие им была получена следующая теорема:

Если массы планет достаточно малы, то для большинства возможных начальных положений планет и их начальных скоростей, которым соответствуют невозмущенные орбиты с достаточно малыми эксцентриситетами и достаточно малыми наклонностями их плоскостей к плоскости эклиптики, движения планет с учетом малых взаимных возмущений будут вечно условно-периодическими, эксцентриситеты и наклонности будут вечно оставаться малыми, а большие полуоси будут вечно колебаться вблизи своих первоначальных значений.

Итак, если в какой-либо момент времени, который мы назовем начальным, орбиты планет очень близки к окружностям и лежат в плоскостях, мало наклоненных друг к другу, то практически для большинства планетных систем с описанной структурой в дальнейшем движения будут мало отличаться от начальных невозмущенных движений и планетная система не разрушится. Ни одна из планет не сможет навсегда покинуть свою планетную систему, ни одна из планет не упадет на центральное тело системы.

Возмущенные орбиты планет будут напоминать спиралеобразные кривые, заключенные внутри тороподобных тел. Орбиты планет могут слегка пульсировать, временами чуть сплющиваться, несколько увеличивая свой эксцентриситет, орбиты планет будут слегка покачиваться вблизи первоначальной плоскости орбиты, а сами плоскости или будут вращаться с переменной скоростью или колебаться около некоторых средних положений. Иначе говоря, линии узлов планетных орбит и линии апсид могут либо вращаться либо колебаться. Начальный характер этих движений будет таким, как было описано в гл. 2 при рассмотрении результатов Стокуэлла, уточнившего результаты Лагранжа, Лапласа и Леверье.

Общая теорема Арнольда об устойчивости движений в гамильтоновых системах была применена не только к задаче о планетных движениях, но и к задачам о движении спутников и астероидов. В тех задачах механики, где для описания движения нужно задавать только две координаты (система с двумя степенями свободы), из теоремы Арнольда вытекает более сильный результат, чем для более сложных механических систем. Например, в случае движения материальной частицы в плоскости из теоремы Арнольда можно получить ляпуновскую устойчивость, т. е. возмущенные значения переменных действия будут близкими к невозмущенным для всех начальных положений и скоростей, мало отличающихся от невозмущенных их значений, а не для большинства начальных условий, как это было в сформулированной выше теореме об устойчивости планетной системы.

Как уже говорилось ранее, А. М. Леонтович исследовал устойчивость движения в плоской ограниченной круговой задаче трех тел. Цель работы состояла в доказательстве устойчивости треугольных точек либрации, т. е. положений относительного равновесия астероида троянской группы в задаче «Солнце — Юпитер — астероид» или облаков-спутников, открытых Кордилевским, в рамках задачи «Земля — Луна — облако». Устойчивость лагранжевых треугольных решений была строго доказана почти для всех значений притягивающих масс. Выпавшие из анализа Леонтовича случаи, за исключением одного, позже были рассмотрены Депри.

Теорема Арнольда оказалась полезной для исследования устойчивости движения спутников сфероидальных планет. В предыдущих параграфах мы почти не говорили о влиянии фигур планет на движение спутников. Дело в том, что сила притяжения планетой спутника будет обратно пропорциональна квадрату расстояния до спутника только в том случае, когда планета представляет собой шар, состоящий из концентрических однородных слоев. Однако, как мы видели, планеты имеют сплюснутую форму, а поэтому силы их притяжения отличаются от силы тяготения, принятой в задаче двух тел. Как же влияют на движение спутников экваториальные утолщения больших планет? Будут ли они способствовать падению спутников на планету? Или, наоборот, эти экваториальные утолщения вызовут постепенное удаление спутника от планеты?

В спутниковых задачах небесным механикам также не удалось получить точного решения, пригодного на бесконечно большие промежутки времени. Поэтому решение задачи об устойчивости спутниковых движений при постоянных возмущениях имело большое практическое значение как для космогонии, так и для космонавтики.

Применение теоремы Арнольда к этой задаче привело к выводу об устойчивости всех спутниковых орбит, если предполагать, что учитываются возмущения, вызванные только полярным сжатием планет. Если же дополнительно предположить существование возмущающих сил, обусловленных экваториальным сжатием планет или иными телами, то устойчивость может быть доказана только для большинства спутниковых орбит. Мозеру позднее удалось усилить результаты Колмогорова и Арнольда. Затем с помощью теоремы Мозера была доказана устойчивость треугольных решений в уже упоминавшейся работе Депри, а также устойчивость движений спутников слабо сжатой планеты.

§ 28. Снова сомнения!

В основной теореме Арнольда об устойчивости Солнечной системы на начальные положения и начальные скорости накладывается одно небольшое ограничение: требуется, чтобы планетные движения не были соизмеримы, т. е. в начальный момент ни при каких целых числах $k_1, k_2, \ldots, k_n$ не выполнялось условие

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \ldots + k_n\omega_n = 0.$$

Начальные условия не должны удовлетворять не только точной соизмеримости средних движений, но не должны также быть достаточно близкими к соизмеримости.

О теореме, доказанной в таких предположениях, математики говорят так: «теорема выполняется почти для всех начальных условий», или: «теорема доказана для всех начальных условий, за исключением множества начальных условий малой меры». Что же означает это математическое «почти»? Вполне ли удовлетворяет астрономов это «почти»? В этом «почти» и состоит существенное различие в понимании устойчивости по Арнольду и устойчивости по Ляпунову. Устойчивость движения по Ляпунову означает, что любая возмущенная траектория, достаточно близкая к невозмущенной в начальный момент, всегда останется близкой к последней и в любой последующий момент. Устойчивость по Арнольду в этом отношении — менее сильное свойство. При этом допускается существование относительно небольшого количества траекторий, близких в начале к невозмущенным, которые впоследствии удалятся от невозмущенного движения далеко. Здесь устойчивость следует понимать в вероятностной трактовке.

Возьмем для простоты механическую систему с двумя степенями свободы, характеризующуюся двумя частотами ω_1 и ω_2. Могут представиться два случая: либо отношение частот ω_1/ω_2 иррационально, т. е. нерезонансный случай, в котором соизмеримости нет, либо это отношение есть простая дробь, рациональное число, соответствующее резонансному случаю. При различных начальных положениях и скоростях отношение ω_1/ω_2 принимает как рациональные, так и иррациональные значения. Сколько же начальных условий приводит к соизмеримости, а сколько к несоизмеримости? Чтобы ответить на этот вопрос, нужно подсчитать количество рациональных и количество иррациональных чисел. Но и тех и других бесчисленное множество! Ведь если взять два рациональных числа, то между ними можно вставить сколько угодно других рациональных чисел! Пусть, к примеру, взяты дробные числа $^1/_3$ и $^1/_2$. Их полусумма $^5/_{12}$ будет больше $^1/_3$ и меньше $^1/_2$. Возьмем теперь полусумму

$^1/_3$ и нового числа $^5/_{12}$. Эта полусумма $^3/_8$ также будет заключена между $^1/_3$ и $^1/_2$. Взяв затем полусумму $^1/_3$ и $^3/_8$, снова получим рациональное число $^{17}/_{48}$, заключенное между $^1/_3$ и $^1/_2$. Этот процесс можно продолжать бесконечно. Какой же смысл тогда в устойчивости «почти для всех начальных условий», когда «неподходящих» начальных условий так много?

Оказывается, однако, бесконечности бывают очень разными и нельзя «все» бесконечности «стричь под одну гребенку». Математики умеют «пересчитывать» все рациональные числа, а про иррациональные говорят, что множество их несчетно (составляет континуум). Что же это обозначает? Вспомните натуральные числа 1, 2, 3, 4, ... Какое бы натуральное число мы ни взяли, всегда можно указать соседа справа и соседа слева, т. е. все натуральные числа можно поставить в ряд и затем «пересчитать». Справедливо ли это для всех рациональных чисел? Математики на этот вопрос дают утвердительный ответ. Для этого все рациональные числа нужно только расположить в определенном порядке.

Сделать это можно различным образом, например, так:

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\ \ldots$$

Как видно, для каждого знаменателя, последовательно берущегося из натурального ряда чисел в порядке их возрастания, числителю придаются возрастающие натуральные значения 1, 2, 3 и т. д. меньшие знаменателя и взаимно простые с последним. А теперь уже нетрудно пронумеровать все рациональные числа. При таком порядке расположения не будет упущено ни одного рационального числа, и множество рациональных чисел, как говорят математики, счетно по Кантору.

Если же взять иррациональные числа, то их пронумеровать не удается. Такие множества называют несчетными. «Арифметика» множеств — дело довольно любопытное и хитрое. Математики, говоря о множествах, характеризуют число их элементов не количеством, а мощностью. Множество иррациональных чисел несчетно, его мощность — континуум. Согласно выводам теории множеств «количества» точек на прямой и на отрезке прямой «одинаковы». Это — множества равной мощности!

Как известно, множество вещественных чисел (как рациональных, так и иррациональных) вполне эквивалентно множеству точек прямой линии. Каждой точке числовой оси соответствует определенное действительное число, и наоборот, каждому действительному числу соответствует только одна определенная точка числовой оси. Представьте себе, что вы берете наудачу точку числовой оси. Какое число будет изображать наудачу взятая точка — рациональное или иррациональное? «Как и в лотерее,— скажете вы,— дело случая!». Но если «дело случая», то в действие вступают законы теории вероятности. Однако лотереи бывают разными: в одной лотерее выигрывает один билет из миллиона, и, зная об этом, вы не примете в ней участия, а в другой лотерее, подобной проводящимся у нас в стране, выигрывает в среднем один билет из 14, и в такой лотерее вы с удовольствием примете участие. Все определяется вероятностью выигрыша. Какова же вероятность того, что наудачу взятая точка числовой оси изображает рациональное число? Практически она равна нулю, хотя рациональных чисел бесконечно много, и объясняется это тем, что вероятность «вытащить» рациональное число равна, грубо говоря, отношению «количества» всех рациональных чисел к общему «количеству» всех действительных чисел. Первых же чисел неизмеримо меньше всех действительных чисел. Поэтому на математическом языке можно сказать так: «Наугад взятое число иррационально». А это значит, что начальные условия, соответствующие рациональному значению отношения ω_1/ω_2, невероятно редки.

Но наша задача более сложна. Теорема Арнольда неприменима не только при соизмеримости частот, но и вблизи соизмеримости. Нужно проводить новые подсчеты вероятности «попасть» на неподходящие к условиям теоремы начальные условия.

Пусть имеется колебательная система с двумя частотами ω_1 и ω_2, величины которых зависят от начальных условий. Неподходящий к теореме Арнольда случай мы будем иметь тогда, когда отношение ω_1/ω_2 рациональное или очень близко к рациональному. Такой колебательной системе будет соответствовать «солнечная система», состоящая из Солнца и двух планет. Роль частот будут играть средние суточные движения планет. По средним движениям с помощью третьего закона Кеплера находим большие полуоси орбит планет. Если предположить для простоты, что обе планеты движутся в одной и той же плоскости, то при рациональном значении отношения ω_1/ω_2 можно указать на этой плоскости две окружности, приводящие к соизмеримым движениям (для удобства предположим начальные движения планет круговыми). Для исключения неподходящих к условиям теоремы начальных значений радиусов окружностей около найденных окружностей нужно построить еще узкие кольцевые зоны, в которые планеты тоже не должны попадать. Затем нужно перебрать все резонансные условия и подсчитать вероятность попадания планет в зоны соизмеримости. Рассмотрим начальные условия на отрезке от нуля до единицы. Заметим, что вероятность получить число n_1/n_2 при приближенном его представлении обыкновенной дробью p/q, где p, q — целые, допустив при этом ошибку, не превосходящую c/q^3, будет меньше $4c$. Пусть возмущающие силы таковы, что благодаря их действию торы, несущие на себе почти резонансные траектории, начинают разрушаться, если отношение частот n_1/n_2 отличается от ближайшего рационального числа меньше, чем на $0{,}01/q^3$. Тогда общая мера резонансных зон, приводящих к неустойчивым движениям, составит всего 4% ($4c = 0{,}04$). Стало быть, «почти все начальные условия» составляют в данном примере 96%. Иначе говоря, из 100 наудачу взятых траекторий планет 96 будут удовлетворять теореме Арнольда, и только для четырех вопрос об их поведении в будущем остается нерешенным. Как видно, слова «почти всем» или «для большинства начальных условий» нужно понимать в буквальном смысле.

Вот в этом-то вероятностном смысле и надо понимать доказанную теорему об устойчивости Солнечной системы. Конечно, это не совсем то, что вполне устраивает астрономов, но все же теорема Арнольда представляет собой исключительно большой прогресс в решении классической проблемы устойчивости планетной системы.

Если отвлечься от рассмотрения устойчивости именно нашей планетной системы, а рассматривать множество планетных систем других звезд нашей Галактики, то подавляющая часть их должна представлять собой устойчивые образования, так как вероятность резонансных начальных условий очень мала.

Можем ли мы сказать что-либо более определенное об устойчивости именно нашей планетной системы? Нельзя ли выяснить, удовлетворяют ли наблюдаемые движения планет условиям теоремы Арнольда, будут ли выполнены условия несоизмеримости? Ответить на этот вопрос крайне трудно. Скорее всего, элементы планетных орбит будут выражаться иррациональными числами, но из наблюдений мы всегда получаем числа рациональные, т. е. числа, представляемые в виде конечных десятичных дробей. Может быть, та или иная из измеряемых величин и представляет бесконечную непериодическую десятичную дробь, число иррациональное, но наши приборы фиксируют эту бесконечную дробь с ошибкой, а мы сами обязательно выполняем округление.

Имеется еще одно не менее важное соображение. Наши подсчеты носили вероятностный характер. Они правомерны, если выполняются аксиомы, лежащие в основе теории вероятностей. Одна из исходных гипотез теории вероятностей состоит в том, что все возможные варианты, могущие возникнуть случаи должны быть равновозможными! Если это не так, то вероятностные рассуждения теряют свою силу. Можем ли мы утверждать, что случаи соизмеримости и несоизмеримости для планетной системы будут равновозможными? Ответить на этот вопрос никто не может.

Более того, некоторые исследователи считают, что в процессе своего происхождения планеты должны были «выбрать» резонансные орбиты как более «выгодные» для них. О такой альтернативе говорит московский математик А. М. Молчанов, подкрепляя свои доводы массой подобранных свидетельств о «почти» соизмеримости планетных или спутниковых движений.

Вкратце остановимся на предыстории вопроса. При изучении естественных процессов важно различать физическую и математическую формулировки задачи. Если в математической постановке задачи при ее идеализации лежат грубые физические предпосылки, то, как бы ни были точны математические расчеты, хорошего согласия теории и наблюдений ожидать нельзя. Здесь как нельзя более справедливы слова одного знаменитого английского естествоиспытателя: «Математика подобно жернову перемалывает лишь то, что под него засыпают». И если в математическую мельницу засыпать лебеду (грубые физические допущения), то пшеничной муки (хорошей теории, согласующейся с природой) не получишь.

Если проследить за эволюцией взглядов ученых, то можно заметить, что еще с древних времен философы, физики, а позднее и механики отдавали приоритет идее об определенной «организации» Солнечной системы. Так, Платон выдвинул принцип «идеальности» небесных движений, согласно которому небесные движения должны быть равномерными и круговыми. Этот принцип на многие века определил математические приемы построения теории движения с помощью эпициклов и деферентов, нашедших отражение даже в теории Коперника. Естественно, что в эпоху Коперника и Кеплера принцип Платона стал тормозить науку. И, несмотря на это, в этом принципе нельзя не заметить рационального зерна. В природе действительно чаще всего мы встречаемся с почти круговыми движениями. С другой стороны, принцип Платона заставляет задумываться над вопросом: «А не «выбирают» ли планеты свои орбиты по какому-либо неизвестному еще физическому принципу?»

В течение двух последних веков, начиная от Тициуса и Боде, не один астроном пытался найти закон планетных расстояний. Эти попытки не прекращаются и сейчас (достаточно вспомнить закон планетных расстояний О. Ю. Шмидта). И несмотря на эмпиризм и слепой поиск, несмотря на отсутствие физических и механических руководящих идей, сами эти поиски не оцениваются нами как поиски философского камня.

Почему бы и в самом деле не существовать закону планетных расстояний? Могут ли планеты двигаться «на каких попало» орбитах? Не обязаны ли они в своем выборе орбит подчиняться каким-то правилам?

Ведь существует же определенная иерархия и порядок в строении атома, в движениях стайки электронов вокруг ядра, что уже давно подметили физики! Квантовая механика утверждает, что электрон движется вокруг ядра по одной из дозволенных орбит, а не по произвольной (мы пользуемся здесь терминологией и представлениями рабочей модели Бора о строении атома). При случайных возбуждениях электрон перескакивает не на «какую попало» орбиту, а на одну из определенной серии орбит. Орбиты, на которых только и может находиться электрон, отличаются друг от друга энергией, причем разность энергий всегда равна целому кратному некоторой константы. Поэтому при перескоке с орбиты на орбиту электрон изменяет свою энергию на одну или несколько равных «порций», квантов. Как говорят, происходит квантование орбит. Хотя силы ядерного взаимодействия отличны от сил гравитационного взаимодействия в Солнечной системе, все же поиски принципов «квантования» орбит планет кажутся вполне естественными.

Против приведенной аналогии «электрон — планета, ядро — Солнце» возможны возражения. Планета в своем движении проявляет только свойства частиц, а электрон, как и свет, обладает свойствами и частицы, и волны. Но здесь уместно вспомнить о так называемой «оптико-механической аналогии». Оказывается, непреодолимого барьера между классической и квантовой механикой нет. Это особенно ясно показал член-корр. АН СССР Н. Г. Четаев *). Он неоднократно высказывал интереснейшую мысль, оставшуюся, к сожалению, без внимания: «*Устойчивость, явление принципиально общее, как-то должна, по-видимому, проявляться в основных законах природы*» (курсив наш. — *В. Д.*).

Четаев ставит задачу: найти необходимые условия устойчивости движения в произвольных гамильтоновых системах при действии малых консервативных возмущающих сил. Результат Четаева поразителен. Правило отбора устойчивых действительных движений в гамильтоновых системах совпадает с правилами квантования орбит электронов: оно приводит к фундаментальному для современной физики уравнению Шредингера. Результат Четаева свидетельствует, во-первых, о правомерности аналогий между квантовой и классической механиками и, во-вторых, приводит к еще одному важному заключению. Если принять постулат об отборе природой только устойчивых движений, то окажется, что не все математически возможные траектории гамильтоновых систем равновозможны. Наоборот, выбирая устойчивые движения, природа отдает предпочтение особым случаям, «для

*) См. статьи Н. Г. Четаева «Устойчивость и классические законы» и «Об устойчивых траекториях динамики» в книге: Н. Г. Четаев, Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. Изд-во АН СССР, 1962.

которых необходимо удовлетворить некоторым специальным соотношениям между отдельными величинами, характеризующими состояние материальной системы»,— как пишет Четаев.

В своих рассуждениях Четаев идет дальше. Он считает, что в природе господствует асимптотическая устойчивость, причем эта устойчивость обеспечивается малыми диссипативными силами (силами сопротивления), с которыми мы постоянно и каждодневно сталкиваемся.

По своей эвристической направленности и идеям к работам Четаева примыкают недавние исследования А. М. Молчанова, выдвинувшего гипотезу резонансной структуры Солнечной системы. Он считает, что нелинейные колебательные системы с течением времени приходят к такому состоянию движения, когда их частоты имеют различного рода соизмеримости. А. М. Молчанов пишет: «Эволюционно зрелые колебательные системы неизбежно резонансны, а их строение задается (подобно квантовым системам) набором целых чисел».

Анализируя движение в Солнечной системе, Молчанов наряду с издавна известными острыми соизмеримостями средних движений планет и спутников обнаружил ряд новых. Конечно, строго резонансных соотношений нет, а имеются почти резонансные.

Далее он выясняет, насколько вероятно образование планетных систем с почти резонансной структурой, подобных нашей Солнечной системе. Сначала приводится ряд соображений и оценок, свидетельствующих о редкости подобных планетных систем у других звезд. Ставится вопрос: *случайна* ли почти резонансная структура Солнечной системы? С этой целью определяется вероятность случайного образования резонансных систем, подобных Солнечной. В результате оказывается, что вероятность таких систем не превосходит 10^{-13}. Далее Молчанов заключает:

«... заметим, что число звезд в нашей Галактике порядка 10^{11}. Даже если каждую звезду снабдить планетной системой, то потребуются десятки галактик, чтобы получить хотя бы одну систему, подобную Солнечной. В настоящее время люди не рискуют, по-видимому, настаивать на такой своей исключительности. Наблюдаются, скорее, противоположные тенденции».

И далее:

«Приведенные рассуждения... делают все же весьма сомнительной применимость к Солнечной системе теории возмущений гамильтоновых систем....

Основной задачей настоящего доклада была попытка показать прямую противоположность фактического положения дел в Солнечной системе. Если это так, то метрический аспект теории возмущений (т. е. работы Арнольда. — *В. Д.*) является, видимо, абстракцией, не имеющей отношения к задаче, из которой он возник (что, конечно, не мешает ему быть весьма полезным в других областях).»

Таковы представления Молчанова. Как отмечает он сам, у него нет строгих доказательств. Более того, можно привести контраргументы против доводов Молчанова. Мы наблюдали, что астероиды в большинстве своем избегают движения по резонансным орбитам, в кольце Сатурна на месте резонансных орбит пустоты, щели! Неужели эти системы не достигли «эволюционной зрелости»?

Таким образом, мы не имеем еще права утверждать резонансность структуры Солнечной системы. Кто же прав: Арнольд или Молчанов? Какова ценность теорем Арнольда?

По мнению автора, на эти вопросы следует ответить так: вероятность устойчивости Солнечной системы очень велика. Почти все возможные варианты ее устройства приводят к устойчивости. Если же окажется прав Молчанов, то нам остается выполнить по сравнению с достигнутыми результатами исследование лишь очень небольшой части возможных орбит планет, выпавших пока из анализа Арнольда. По сравнению с тем состоянием исследования, которое было во времена Лапласа и Лагранжа, небесные механики несравненно ближе подошли к окончательному решению задачи. Задача об устойчивости Солнечной системы в постановке Лагранжа и Лапласа почти решена. Как и предписывает теория познания, перед нами возник еще один вопрос из новых «ста тысяч почему». Мы очень близко подошли к истине, но... таков естественный ход познания природы.

Имеется еще одна сторона проблемы. Почти исчерпанной оказалась не проблема устойчивости Солнечной системы, а проблема ее устойчивости в понимании Лапласа и Лагранжа. Мы имели дело с определенной математической моделью, а не с исследованием реальной задачи. Решалась задача об устойчивости движения взаимно притягивающихся по закону Ньютона материальных точек. Но ведь планеты не точки. Они не только поступательно перемещаются в пространстве, но вращаются вокруг своих осей, наблюдается «перекачка» энергии вращательного движения в поступательное и обратный переход, неминуемо идет процесс рассеивания механической энергии с частичным переходом ее в теплоту. И нам, значительно обогащенным знаниями, нужно уточнять математическую модель.

Одно из возможных уточнений связано с переходом к задаче о поступательно-вращательном движении n притягивающихся в соответствии с законом Ньютона твердых тел. В общей постановке задача о поступательно-вращательном движении небесных тел была сформулирована в 1952 г. проф. Г. Н. Дубошиным. По-видимому, с этой задачей после накопления более точной и полной информации о планетных движениях будет связана уточненная постановка проблемы устойчивости Солнечной системы.

Но и ее решение не даст нам окончательного ответа. Наука будет стремиться уточнять сроки существования Солнечной системы, будет уточнять детали эволюции планетных движений.

Неограниченность во времени процесса познания не должна приводить нас к пессимизму в оценке достигнутого. С точки зрения практических и ближайших интересов ныне живущих вполне достаточно ответа, вытекающего из теоремы Лапласа — Лагранжа, согласно которой Солнечная система не может распасться не только в течение жизни одного человеческого поколения, но даже и за исторически обозримые сроки. Таким образом, в решении проблемы устойчивости Солнечной системы не практические запросы человечества, а совсем иное стимулирует вечный человеческий поиск. Неутолимая жажда познания движет человеком. И неожиданное обнаружение на каждом этапе познания новых тайников природы свидетельствует не о слабости человеческого разума, а, наоборот, о его могуществе. Вновь возникающие сомнения — вполне закономерный процесс.

«Если путь твой к познанию мира ведет,—
Как бы ни был он долог и труден — вперед!»

Фирдоуси

«Что могущественней разума? Ему — власть, сила и господство над всем Космосом. Последний сам рождает в себе силу, которая им управляет. Она могущественнее всех остальных сил природы».

К. Э. Циолковский

Заключение

§ 29. Реконструкция Солнечной системы — возможно ли это?

В своем повествовании мы следовали словам Галилео Галилея: «Кто не знаком с законами движения, тот не может познать природы». Мы имели немало возможностей убедиться в том, насколько прав Галилей. Даже чисто механический подход к проблемам эволюции Солнечной системы позволил во многих случаях получить уверенные ответы на ряд вопросов космогонии.

Мы видели, что время существования ряда малых тел Солнечной системы ограничено сроком в несколько миллионов или десятков миллионов лет. Мы познакомились с тем, как происходит распад комет и превращение их в метеорные потоки, как могучее тяготение Юпитера перебрасывает кометы в область опасно близкого соседства с Солнцем или вообще изгоняет их из пределов Солнечной системы. Мы узнали о предстоящей гибели спутников типа Фобоса и ему подобных в зоне Роша или, может быть, при падении на планету, о столкновениях некоторых астероидов и комет с большими планетами и о многом другом.

Наконец, мы проследили за двухсотлетней драматической историей решения знаменитой проблемы об устойчивости Солнечной системы, завершившейся доказательством теоремы Арнольда, из которой следует, что с большой степенью вероятности Солнечная система представляет собой устойчивое образование. Что же касается вопроса об устойчивости

Солнечной системы на конечном промежутке времени порядка многих десятков миллионов лет, то о ней можно говорить как о достоверном факте, исходя даже из исторически первых результатов Лапласа и Лагранжа.

Но такой была бы слишком робкая оценка математика. Мы же вслед за Дж. Джинсом с уверенностью склонны считать, что «...перед человечеством открыты перспективы на будущее в десятки миллиардов лет».

Нельзя познать природы, не познав законов движения. Но было бы глубокой ошибкой, познав законы движения, ограничиться этим. Динамическая устойчивость Солнечной системы есть лишь необходимое, но отнюдь не достаточное условие устойчивости Солнечной системы как единого физического целого.

Нет никакого сомнения в том, что физические процессы на Солнце и планетах неминуемо как-то скажутся на эволюции орбит тел Солнечной системы. Разумеется, необходимы дополнительные оценки эффектов, обусловленных магнитными полями, световым давлением, релятивистского взаимодействия, процессов, протекающих в недрах планет, и т. д. И тем не менее, несмотря на это, можно надеяться, что учет этих дополнительных эффектов в силу их малости приведет не к радикальному изменению полученных на основе механики выводов, а лишь к некоторому уточнению времени существования тех или иных тел Солнечной системы.

В заключение нам хотелось обратить внимание читателя на один из аспектов обсуждаемых проблем, быть может, и несколько неожиданный. Будущее человечества в связи с ростом народонаселения, постепенным оскудением энергетических и прочих запасов Земли и, наконец, в связи с невозможностью неограниченного наращивания производственных мощностей без риска изменить тепловой режим Земли, химический состав ее атмосферы и т. д. немыслимо без экспансии и колонизации других тел Солнечной системы. Благодаря фантастически бурному прогрессу космической техники человечество уже сейчас стоит на грани этих великих и дерзновенных свершений.

Но так ли уж необходима человечеству колонизация Солнечной системы? А если необходима, то какое отношение имеет она к проблеме будущего Солнечной системы?

Уже к началу будущего столетия население Земли превзойдет 6 млрд. человек. По мнению проф. Кембриджского университета Хойла, при сохранении современной скорости роста народонаселения общая масса людей через 5 тыс. лет превзойдет массу нашей Галактики и других галактик, наблюдаемых в 5-метровый телескоп! Если даже принять вместо наблюдающегося ныне роста народонаселения по гиперболическому закону более медленный, по осторожным оценкам Шкловского, показательный (экспоненциальный) закон, то и тогда рано или поздно перед человечеством неминуемо возникнет проблема жизненного пространства, а вместе с ней и проблема расширения производства энергии и более эффективной утилизации природной энергии.

Итак, колонизация планет неизбежна! Но человек, этот венец природной химии белковых соединений, не в состоянии будет свободно жить в аммиачной атмосфере Юпитера, в метановой атмосфере Титана. Неужели же уделом человека на других планетах будет скафандр и герметизированные города? Неужели же человек примирится с холодом и мраком таких небесных рефрижераторов, как Уран и Нептун, создав искусственный микроклимат и искусственное освещение в своих закрытых городах?

А проблема энергии? Трудно представить себе, что человек своими руками станет «рубить сук, на котором он сидит», что человек сам будет «выбивать из-под своих ног почву, на которой он стоит», извлекая постоянно энергию из недр Земли.

На эти вопросы хочется ответить только словами: «Нет и еще раз нет!», ибо все существо человека должно протестовать против подобных перспектив.

Обращаясь к результатам расчета, проведенного в США научным сотрудником НАСА, проф. Хуаном Су-шу, можно прийти к выводу о необходимости перемещения больших планет в случае их заселения человечеством в более близкую к Солнцу зону обитаемости.

Итак, человечеству нужно будет «перевернуть мир». И здесь нам приходится вспомнить смелые слова Архимеда: «Дайте мне точку опоры...». В чем же найдет человек «точку опоры» для своих космических преобразований?

В сущности, эта точка опоры уже найдена современной физикой и кроется в самой знаменитой и короткой формуле:

$E = mc^2$, связывающей массу m с той энергией E, носителем которой она является (здесь c — скорость света). Проникая в глубь атома, человек одновременно проникает и в глубь космоса.

Сказанное не есть плод необузданной, смелой и необоснованной фантазии автора. Скорее здесь проявляется некоторая робость по сравнению с обсуждаемыми в научном мире проектами. Можно вспомнить идеи Циолковского создания «цепи эфирных городов» из вещества астероидного кольца, согласно которым масса астероидов «разбирается до дна». По Циолковскому, человечество станет управлять движением небесных тел, подобно тому «как мы управляем лошадьми»! С равным успехом можно воспользоваться астероидами с целью утилизации ядерной энергии, скрытой в их веществе.

Но и это не предел полета научной фантазии! В 1961 г. Дэрол Фромен, заместитель директора той научной лаборатории в Лос-Аламосе, где была создана первая атомная бомба, говоря о будущей тепловой смерти Солнца, выдвинул идею о перемещении Земли в окрестности другой звезды, использовав в качестве источника топлива Луну, от которой при отсутствии солнечного излучения «нам не будет никакой пользы». По расчетам Фромена, система по перемещению Земли будет действовать в течение 8 млрд. лет и обеспечит перелет Земли на расстояние 130 световых лет. Фромен утверждал: «Самым комфортабельным космическим кораблем, который только можно себе представить, является сама Земля. Поэтому если нам не понравится здесь, потому что Солнце будет погибать или с ним случится что-нибудь еще, давайте уйдем куда-нибудь вместе с Землей и всем прочим».

А вот что пишет У. Салливан, научный редактор газеты «Нью-Йорк таймс», известный популяризатор науки, о беседе с чл.-корр. АН СССР И. С. Шкловским: «Шкловский высказывался о возможности для высокоразвитых цивилизаций получить дополнительное сырье, взрывая соседние звезды. Это можно было бы сделать с помощью лазеров гамма-лучей... Действие пучка гамма-лучей на ядро звезды,— говорил Шкловский,— может вызвать взрыв Сверхновой или катастрофический звездный взрыв такого типа, при котором могут синтезироваться тяжелые элементы. Сверхцивилизации взрывали бы звезды на безопасных для себя расстояниях и затем собирали бы урожай вновь созданного сырья».

Завершая изложение, трудно удержаться от соблазна и не привести замечательных слов, сказанных большим ученым и патриотом астрономии, прекрасным ее популяризатором Джеймсом Джинсом *).

«Поскольку речь идет о пространстве, изучение астрономии ведет в лучшем случае к познанию подавляющей обширности мира. Поскольку речь идет о времени, оно превращается в поучение почти беспредельной возможности и надежды. Как обитатели Земли, мы живем в самом начале времен: мы вступаем в бытие в свежих красотах рассвета, и перед нами расстилается день невообразимой длины с его возможностями почти неограниченных достижений. В далеком будущем наши потомки, взирая с другого конца на эту длинную перспективу времен, будут считать наши века за туманное утро истории мира; наши современники будут казаться им героическими личностями, которые сквозь дебри невежества и предрассудков пробивали себе путь к познанию истины, к умению подчинять себе силы природы, к построению мира, достойного того, чтобы человечество могло в нем жить. Мы окутаны еще слишком предрассветным туманом, чтобы могли даже смутно представить себе, каким явится этот мир для тех, кому суждено увидеть его в полном сиянии дня. Но и в том свете, который мы видим теперь, мы различаем, что и астрономия в ее основе несет в себе надежду для человеческого рода в целом и познание ответственности для каждой отдельной личности,— ответственности, так как мы создаем планы и строим основания для будущего, гораздо более продолжительного, чем нам было бы легко представить».

---

*) Джеймс Джинс, «Вселенная вокруг нас», ГТТИ, 1932.

Рекомендуемая литература

а) Научно-популярная литература

1. Гинзбург В., Как устроена Вселенная и как она развивается во времени, «Наука и жизнь», №№ 1—3, 1968.
2. Гребеников Е. А., Демин В. Г., Межпланетные полеты, «Наука», 1965.
3. Гребеников Е. А., Рябов Ю. А., Что такое небесная механика, «Наука», 1966.
4. Рябов Ю. А., Движение небесных тел, изд. 2-е, Физматгиз, 1962.
5. Шкловский И. С., Вселенная, жизнь, разум, изд. 2-е, «Наука», 1965.
6. Саймон Т., Поиски планеты ИКС, «Мир», 1966.
7. Левин Б. Ю., Вопросы планетной космогонии наших дней, «Земля и Вселенная», № 6, 1967.
8. Штейнс К. А., В путешествие с кометой, «Земля и Вселенная», № 5, 1965.
9. Бронштэн В. А., Спутники Марса — какие они? «Земля и Вселенная», № 2, 1965.
10. Дарвин Дж., Приливы и родственные им явления в Солнечной системе, «Наука», 1965.

б) Научная литература

1. Путилин И. И., Малые планеты, Гостехиздат, 1953.
2. Сб. «Проблемы движения искусственных небесных тел», «Наука», 1963.
3. Чеботарев Г. А., Аналитические и численные методы небесной механики, «Наука», 1965.
4. Четаев Н. Г., Устойчивость движения. Работы по аналитической механике, Изд-во АН СССР, 1962.

Цена 44 к.