

Г. Н. ДУБОШИН

НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА

ОСНОВНЫЕ
ЗАДАЧИ
И МЕТОДЫ



Г. Н. ДУБОШИН

НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования РСФСР
в качестве учебного пособия для университетов*



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1963

ОГЛАВЛЕНИЕ

От автора	9

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ОБЩАЯ ЗАДАЧА НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

Г л а в а I. Уравнения Лагранжа и Гамильтона	15
§ 1. Уравнения Лагранжа второго рода	16
1. Абсолютные уравнения движения материальной системы (16). 2. Уравнения Лагранжа (19). 3. Явная форма уравнений Лагранжа (25).	
§ 2. Вывод уравнений Лагранжа из принципа наименьшего действия. Первые интегралы	26
1. Принцип Остроградского — Гамильтона (26). 2. Первые интегралы. Теорема Лиувилля (29). 3. Примеры (36).	
§ 3. Канонические уравнения и их интегралы	41
1. Канонические переменные. Уравнения Гамильтона (41). 2. Первые интегралы канонической системы (45).	
§ 4. Канонические преобразования	48
1. Теорема Якоби (48). 2. Формулировка Пуанкаре теоремы Якоби (54).	
§ 5. Метод Гамильтона — Якоби	59
1. Уравнение Гамильтона — Якоби (59). 2. Случай интегрируемости Лиувилля и Штеккеля (63). 3. Метод изменения произвольных постоянных (68).	
Г л а в а II. Дифференциальные уравнения поступательного движения небесных тел	72
§ 1. Постановка основной задачи небесной механики . . .	72
1. Задача о движении небесных тел (72). 2. Необходимые упрощения (76). 3. Последовательные приближения (79).	
§ 2. Задача многих тел в абсолютных осях координат . . .	82
1. Дифференциальные уравнения задачи (82). 2. Силовая функция и ее свойства (85). 3. Десять	

	классических интегралов (89). 4. Вопрос о новых интегралах (96). 5. Уравнение Лагранжа — Якоби (99).	
§ 3.	Дифференциальные уравнения относительного движения задачи многих тел	102
	1. Уравнения движения в барицентрических координатах (103). 2. Уравнения движения в относительных координатах (108). 3. Уравнения движения в координатах Якоби (116).	
§ 4.	Другие виды дифференциальных уравнений движения задачи многих тел	124
	1. Уравнения движения в цилиндрических координатах (124). 2. Уравнения движения в сферических координатах (128). 3. Уравнения Лапласа — Клеро (131). 4. Уравнения движения в канонической форме (137). 5. Векторные уравнения (142).	
Глава III.	Дифференциальные уравнения поступательно-вращательного движения небесных тел	145
§ 1.	Взаимно притягивающиеся абсолютно твердые тела в пространстве	146
	1. Определение положений твердых тел в пространстве (146). 2. Силы взаимных притяжений и моменты этих сил (150).	
§ 2.	Силовая функция задачи и ее свойства	153
	1. Силовая функция системы тел (153). 2. Свойства силовой функции (155). 3. Приближенное выражение силовой функции (158).	
§ 3.	Дифференциальные уравнения задачи и их первые интегралы	163
	1. Уравнения поступательно-вращательного движения в абсолютных осях (163). 2. Десять классических интегралов (166). 3. Дополнительные интегралы (170). 4. Уравнения движения в относительных осях (173). 5. Система координат, связанных с телом M_0 (175). 6. Уравнения поступательно-вращательного движения в канонической форме (178).	

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

НЕВОЗМУЩЕННОЕ КЕПЛЕРОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

Глава IV.	Интегрирование дифференциальных уравнений невозмущенного движения	181
§ 1.	Дифференциальные уравнения невозмущенного кеплеровского движения	181
	1. Задача двух тел (181). 2. Уравнения невозмущенного движения в прямоугольных координатах (185). 3. Уравнения невозмущенного движения в полярных координатах (188). 4. Каноническая форма уравнений невозмущенного движения (190).	

§ 2. Первые интегралы уравнений невозмущенного кеплеровского движения	192
1. Интегралы площадей, живой силы и интегралы Лапласа (192). 2. Общий интеграл уравнений невозмущенного движения (197). 3. Определение произвольных постоянных по начальным условиям (201).	
§ 3. Общие формулы невозмущенного движения	205
1. Общие уравнения невозмущенной орбиты (205).	
2. Выражения пространственных координат через орбитальные (209). 3. Скорость и ее составляющие (214).	
4. Кеплеровские элементы невозмущенного движения (216).	
§ 4. Другие способы интегрирования дифференциальных уравнений невозмущенного движения	222
1. Задача о движении под действием центральной силы (223). 2. Уравнение Бине и его решение для случая невозмущенного движения (229). 3. Интегрирование уравнений невозмущенного движения в координатах Клеро — Лапласа (234). 4. Интегрирование канонических уравнений невозмущенного движения (239).	
Глава V. Исследование невозмущенного движения . . .	247
§ 1. Общие свойства невозмущенного движения	247
1. Типы орбит в невозмущенном движении (247). 2. Зависимость типа орбиты от величины и направления начальной скорости (250). 3. Эволюция орбиты при изменении направления начальной скорости (255).	
4. Эволюция орбиты при изменении величины начальной скорости и радиуса-вектора (260).	
§ 2. Основные типы невозмущенного движения	263
1. Эллиптическое движение. Уравнение Кеплера (263).	
2. Третий закон Кеплера (268). 3. Эллиптические элементы. Основные формулы эллиптического движения (271). 4. Гиперболическое движение (275).	
§ 3. Предельные и вырожденные случаи невозмущенного кеплеровского движения	281
1. Круговое движение (281). 2. Параболическое движение (285). 3. Прямолинейное движение (288).	
§ 4. Зависимость элементов невозмущенного кеплеровского движения от начальных условий	292
1. Определение кеплеровских элементов для любого типа орбиты (292). 2. Определение эллиптических элементов (296). 3. Изменение элементов орбиты при изменении начальных условий (299). 4. Производные от координат по элементам (303).	
Глава VI. Ряды невозмущенного эллиптического движения	309
§ 1 Разложения координат эллиптического движения по степеням эксцентриситета	309

1. Ряд Лагранжа (309). 2. Применение ряда Лагранжа к уравнению Кеплера. Предел Лапласа для эксцентриситета (315). 3. Разложения координат по степеням эксцентриситета (318). 4. Разложения скорости и ее составляющих (322). 5. Формулы для основных коэффициентов (326).
- § 2. Разложения координат эллиптического движения в ряды Фурье 329
1. Ряд Фурье и теорема Дирихле (329). 2. Разложения координат в ряды Фурье (332). 3. Разложения скорости и ее составляющих (336). 4. Основные свойства функций Бесселя (340). 5. Дополнительные замечания о сходимости рядов (347).

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

- Глава VII. Основные методы теории возмущенного движения 351
- § 1. Метод Лагранжа изменения произвольных постоянных 351
1. Общая задача о движении точки с произвольной возмущающей силой (351). 2. Основная идея метода Лагранжа (356). 3. Геометрический и механический смысл метода Лагранжа (360).
- § 2. Вывод дифференциальных уравнений метода Лагранжа 365
1. Основная операция. Проекция возмущающего ускорения (365). 2. Вывод дифференциальных уравнений для оскулирующих элементов (370). 3. Уравнения Ньютона (375).
- § 3. Частные случаи уравнений Ньютона 380
1. Случай центральной возмущающей силы (381). 2. Случай возмущающей силы, возникающей от сопротивления среды (385). 3. Случай движения эллиптического типа (389). 4. Уравнения для эллиптических оскулирующих элементов (393).
- § 4. Уравнения Лагранжа 397
1. Производные от полярных координат по элементам (397). 2. Вывод уравнений Лагранжа (401). 3. Общий метод Лагранжа (405). 4. Вывод по методу Лагранжа общих уравнений для оскулирующих элементов (409).
- § 5. Основные методы приближенного интегрирования дифференциальных уравнений возмущенного движения 414
1. Разложение прямоугольных координат по степеням малого параметра (414). 2. Теорема Пуанкаре об интегрировании уравнений в вариациях. Определение возмущений координат (418). 3. Применение метода малого параметра к уравнениям Ньютона (423).

4. Метод последовательных приближений Пикара (426).
 5. Возмущения элементов движения эллиптического типа (430).

Глава VIII. Общая теория возмущений 435

- § 1. Дифференциальные уравнения возмущенного движения в основной задаче небесной механики 435
 1. Уравнения возмущенного движения в относительных координатах (435). 2. Метод изменения произвольных постоянных для задачи многих тел (439). 3. Уравнения Лагранжа для оскулирующих элементов (442).
 § 2. Интегрирование уравнений возмущенного движения . . 446
 1. Явная форма уравнений, определяющих оскулирующие элементы (446). 2. Интегрирование уравнений при помощи рядов, расположенных по степеням возмущающих масс (451). 3. Возмущения первого порядка. Вековые и периодические неравенства (455). 4. Вековые возмущения. Теорема Лапласа о вековых возмущениях больших полуосей (459).
 § 3. Теорема Лапласа об устойчивости солнечной системы 464
 1. Необходимое условие устойчивости в смысле Лагранжа (464). 2. Теорема Лапласа (467). 3. Теорема Якоби об исключении узлов в задаче трех тел (471).

Глава IX. Канонические уравнения теории возмущений 474

- § 1. Канонические системы оскулирующих элементов . . . 474
 1. Уравнения возмущенного движения в координатах Якоби (474). 2. Применение метода изменения произвольных постоянных. Элементы Якоби (478). 3. Форма разложения возмущающей функции. Элементы Делонэ (483). 4. Две системы канонических элементов Пуанкаре (488).
 § 2. Принципы разложения возмущающей функции 492
 1. Разложения элементов Лагранжа по степеням элементов Пуанкаре (492). 2. Разложения координат Якоби по степеням элементов Лагранжа (496). 3. Разложение возмущающей функции. Вековая часть возмущающей функции (500).
 § 3. Теория Лагранжа вековых возмущений 505
 1. Уравнения, определяющие вековые возмущения элементов. Применение способа Пикара (505). 2. Способ Лагранжа в трактовке Ляпунова — Пуанкаре (509). 3. Вычисление в первом приближении вековых возмущений эксцентриситетов и долгот перигелиев (512). 4. Вычисление в первом приближении вековых возмущений наклонов и долгот узлов (518). 5. Некоторые заключительные замечания (521).

П Р И Л О Ж Е Н И Е

ИСТОРИКО-БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ ОЧЕРК РАЗВИТИЯ
НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

§ 1. Возникновение небесной механики	525
1. Законы Кеплера (525). 2. «Начала» Ньютона (527).	
§ 2. Развитие небесной механики в XVIII в.	532
1. Основатели небесной механики (532). 2. «Аналитическая механика» Лагранжа (536). 3. Первая часть «Небесной механики» Лапласа (539).	
§ 3. Небесная механика в первой половине XIX в.	543
1. Вторая часть «Небесной механики» Лапласа (543). 2. Переводы трактата Лапласа. Сочинение Ф. И. Шуберта (546). 3. Дальнейшее развитие небесной механики. Открытие Нептуна (549). 4. Учебник по небесной механике Понтекулана (552).	
§ 4. Небесная механика во второй половине XIX в.	554
1. Работы Делонэ, Хилла и Ганзена (554). 2. Работы Линдстедта, Баклунда, Гильдена и др. (557). 3. Трактат по небесной механике Тиссерана (559). 4. А. М. Ляпунов. Пуанкаре и его «Новые методы небесной механики» (566).	
§ 5. Развитие небесной механики в XX в.	570
1. Учебники по небесной механике Шарлье, Пуанкаре и Мультона (570). 2. Качественные методы (575). 3. Новые книги по небесной механике (580). 4. Возникновение теории движения искусственных небесных тел (584).	

ОТ АВТОРА

Небесная механика до самого недавнего времени изучалась и рассматривалась только немногими специалистами-астрономами, которых вполне удовлетворяли несколько учебников по небесной механике на разных языках и также не очень многочисленная журнальная литература в этой области.

На русском языке, кроме пары очень старых книг, являющихся ныне библиографической редкостью, до революции никаких учебников собственно по небесной механике не было.

В советское время до сих пор изданы всего три книги учебного характера по небесной механике и несколько книг по ее частному разделу — теоретической астрономии.

Упомянутые три книги изданы примерно в одно и то же время. В 1935 г. издано в русском переводе «Введение в небесную механику» известного американского астрономатеоретика Ф. Мультона, в 1937 г. вышел 2-й том «Курса небесной механики» профессора М. Ф. Субботина, в 1938 г. появилось мое «Введение в небесную механику» и, наконец, в 1949 г. напечатан 3-й том небесной механики М. Ф. Субботина.

Первый том этого фундаментального сочинения М. Ф. Субботина, вышедший вторым изданием в 1941 г., посвящен вопросам определения орбит и относится, в сущности, к теоретической астрономии.

Как видим, все эти книги вышли в свет более 20 лет тому назад и не могут полностью обеспечить научные и учебные нужды современной небесной механики. К тому же в продаже этих книг давным-давно нет. Автор поставил себе целью написать серию руководств по небесной механике, которыми могли бы пользоваться без особых затруднений достаточно широкие круги читателей,

Первая из книг серии «Теория притяжения» издана в 1961 г. Настоящая книга — «Небесная механика. Основные задачи и методы» — является второй в задуманной серии. Третья книга, которая в настоящее время готовится автором, будет иметь название «Небесная механика. Аналитические и качественные методы». Наконец, в более отдаленном будущем автор запланировал подготовку рукописей: «Теория движения искусственных небесных тел», «Теория вращательного движения небесных тел» и, возможно, «Теория фигур небесных тел».

Если намеченная программа будет выполнена, то получится руководство, каждую часть которого можно будет использовать в отдельности и которое вместе с тем можно будет рассматривать, если угодно, как нечто целое.

Возвращаясь теперь к настоящей книге, охарактеризую вкратце ее содержание.

Как показывает подзаголовок книги, в ней рассматриваются основные задачи и основные методы небесной механики.

Основными задачами небесной механики можно считать:

- 1) задачу о поступательном движении одной планеты или одного спутника вокруг центрального тела (задача двух тел);
- 2) задачу о поступательном движении нескольких планет вокруг Солнца (задача многих тел);
- 3) задачу о поступательном движении спутников какой-либо планеты и
- 4) задачу о вращательном движении планеты или спутника вокруг собственного центра инерции.

Основными методами небесной механики являются:

- 1) точное интегрирование (когда это возможно) дифференциальных уравнений движения; этот метод используется главным образом в первой из вышеперечисленных основных задач или в теории невозмущенного движения;
- 2) интегрирование дифференциальных уравнений движения способом изменения произвольных постоянных и
- 3) разложение интегралов дифференциальных уравнений движения в бесконечные ряды того или иного вида.

Отсюда следует, что прежде всего приходится заниматься составлением дифференциальных уравнений движения задачи, а затем уже приступать к интегрированию этих уравнений и к последующему анализу полученных формул.

Этим и определяется построение книги и ее содержание.

Книга делится на три части, каждая из которых посвящена одному из основных вопросов небесной механики, причем каждая из следующих является продолжением предыдущей.

Часть первая — «Общая задача небесной механики» — посвящена постановке математической задачи, к которой после ряда упрощений приводится задача о действительных движениях настоящих небесных тел («естественных» или «искусственных»). В этой части речь идет о составлении, преобразованиях и общих свойствах тех дифференциальных уравнений, которые определяют (в некотором первом приближении) движения интересующих нас небесных тел.

Вторая часть — «Невозмущенное кеплеровское движение» — посвящена подробному исследованию проблемы о движении одной материальной точки под действием ньютоновского притяжения другой материальной точки. Эта проблема может быть применена к множеству различных астрономических задач.

Третья часть книги — «Теория возмущенного движения» — рассматривает движение материальной точки (или системы материальных точек), находящейся под действием основной силы притяжения от центрального тела и дополнительной возмущающей силы, численно малой по сравнению с основной.

В конце книги помещен краткий историко-библиографический очерк развития небесной механики от Кеплера до наших дней.

Здесь же в хронологическом порядке рассматриваются трактаты и руководства по небесной механике, изданные за то же время, и отмечаются их специфические особенности.

Таким образом, книга представляет собой математическую теорию движения небесных тел, изложенную в настолько общей форме, чтобы ее результаты можно было применить к различным конкретным задачам астрономии и космонавтики. В книгу не включены многие важные вопросы современной небесной механики. Так, не затрагиваются прикладные вопросы, т. е. способы вычисления орбит и эфемерид, способы вычисления возмущений при помощи численного интегрирования дифференциальных уравнений движения и способы определения некоторых параметров солнечной

системы при помощи сравнений аналитической теории с данными наблюдений, а также и другие вопросы подобного же рода.

Позволю себе остановиться на терминологических вопросах, а именно, на названии той части астрономии, которая рассматривает и изучает движения небесных тел.

Название *небесная механика* было введено в науку знаменитым французским астрономом-теоретиком и математиком П. Лапласом, который определил также и содержание этой дисциплины, о чем подробнее говорится в историческом очерке.

Это название было без возражений принято специалистами во всех странах, а затем и всеми учеными вообще. В девятнадцатом столетии некоторые авторы употребляли также наряду с названием *небесная механика* название *теоретическая астрономия* или даже *математическая астрономия*, обозначая этими словами ту же часть астрономии, которую Лаплас назвал небесной механикой.

Несколько позднее термином *теоретическая астрономия* стали обозначать некоторую часть небесной механики, заключающую в себе теорию невозмущенного кеплеровского движения и вопросы вычисления эфемерид и орбит. Изложение этих вопросов составило содержание многих учебников теоретической астрономии, выпущенных в разных странах.

В самое последнее время некоторые специалисты-астрономы стали употреблять название *теоретическая астрономия* для обозначения части астрономии, которая занимается изучением движений всяких небесных тел, оставляя название *небесная механика* для той части теоретической астрономии, которая занимается изучением движений тел только в пределах солнечной системы. Кроме того, некоторые специалисты, преимущественно не астрономы, склонны понимать под *теоретической астрономией* вообще все части астрономии, в которых применяются методы математики. Таким образом, они включают в теоретическую астрономию не только небесную механику, но и астрономию сферическую, а также и теоретическую астрофизику и звездную динамику. В результате получается некоторая нежелательная путаница терминологического порядка, а поэтому прежде чем приступить к изложению материала необходимо

точно определить, какая терминология принята в этой и в последующих наших книгах.

Мы принимаем следующее определение:

Небесной механикой называется часть астрономии, занимающаяся изучением поступательных, вращательных и деформационных движений любых небесных объектов, естественных и искусственных, находящихся под действием сил притяжений, отталкиваний, сил сопротивлений, вызываемых наличием пылевых, газообразных или жидких сред, сил электромагнитных, сил лучевых давлений и т. п.

Объектами, движения которых изучает или должна изучать небесная механика, являются всевозможные материальные образования, двигающиеся в космическом пространстве, — от мельчайших частиц космической пыли до колоссальных звезд и даже до звездных систем. Таким образом в ведение небесной механики включаются, можно сказать, все объекты, изучаемые в астрономии, и различие между небесной механикой и другими частями астрономии заключается главным образом в методах исследования.

При составлении настоящей книги автор пользовался многими руководствами по небесной механике и смежным дисциплинам (математике и теоретической механике), а также мемуарной и журнальной литературой. Основные руководства и мемуары по небесной механике разобраны в историческом очерке, а некоторые другие указаны в подстрочных примечаниях, так что в специальном списке литературы, по нашему мнению, нет надобности.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ОБЩАЯ ЗАДАЧА НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

ГЛАВА I

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА И ГАМИЛЬТОНА

Из курса теоретической механики известно, что изучение движений каких-либо тел, находящихся под действием заданных сил, приводится к составлению и интегрированию некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Неизвестными функциями в этих уравнениях, называемых *дифференциальными уравнениями движения*, являются некоторые величины (параметры), определяющие положения и скорости тел относительно выбранной подходящим образом системы отсчета (системы координат).

Задача интегрирования заключается в нахождении этих величин в зависимости от времени и надлежащего числа произвольных постоянных так, чтобы все уравнения движения были удовлетворены и чтобы были выполнены также заданные начальные условия.

Когда такое интегрирование возможно, то мы получаем формулы (*конечные уравнения движения*), позволяющие вычислять значения параметров для любого момента времени, а также устанавливать общие свойства и законы изучаемого движения.

Однако строгое интегрирование удастся выполнить только в немногих исключительных случаях, а обычно уравнения движения оказываются неинтегрируемыми, а тогда можно ставить вопрос лишь о их приближенном решении или о численном их интегрировании.

При этом весьма важную роль играет удачный выбор системы отсчета и параметров, или координат, которые должны быть определены как функции времени и начальных условий.

Иногда в процессе решения задачи приходится переходить от одной системы отсчета к какой-либо другой, почему-либо более выгодной, и заменять первоначально выбранные параметры другими, более удобными или более простыми.

Иначе говоря, дифференциальные уравнения движения постоянно приходится подвергать некоторым преобразованиям, заменяя старые переменные какими-то новыми, связанными с первоначальными заданными формулами преобразования.

Вообще говоря, такие преобразования или подстановки приводят к сложным и громоздким выкладкам, а поэтому естественно отыскивать такие формы уравнений движения и такие законы преобразований, которые позволили бы эти выкладки упростить на сколько возможно.

Это удается осуществить, если уравнения движения записаны в особой форме, называемой лагранжевой, и особенно, когда их удастся привести к так называемому *каноническому виду* (гамильтонова форма).

В последнем случае можно осуществить множество преобразований, не изменяющих канонического вида уравнений.

Эти преобразования (канонические преобразования или преобразования прикосновения) играют в небесной механике важную роль, а поэтому мы начнем изложение именно с рассмотрения этого важного вопроса.

§ 1. Уравнения Лагранжа второго рода

1. Абсолютные уравнения движения материальной системы. Рассмотрим задачу о движении системы свободных материальных точек $M_0, M_1, \dots, M_n$, находящихся под действием заданных сил. Пусть m_i есть масса точки M_i и ξ_i, η_i, ζ_i — ее прямоугольные декартовы координаты в некоторой абсолютной системе отсчета.

Обозначим через Ξ_i, H_i, Z_i составляющие (проекции на оси координат) равнодействующей всех сил, действующих на точку M_i .

Эти величины являются заданными функциями времени t , координат $\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \xi_1, \eta_1, \zeta_1, \dots, \xi_n, \eta_n, \zeta_n$ и их первых производных по времени (составляющих скоростей точек M_i)

$\dot{\xi}_0, \dot{\eta}_0, \dot{\zeta}_0, \dot{\xi}_1, \dot{\eta}_1, \dot{\zeta}_1, \dots, \dot{\xi}_n, \dot{\eta}_n, \dot{\zeta}_n$.

Для упрощения мы введем для этих величин, а также и для других функций многих переменных сокращенные обозначения. Всякую функцию F времени, координат и составляющих скоростей всех точек системы мы будем записывать следующим образом:

$$F = F(t | \xi, \eta, \zeta | \dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}).$$

Точно также функцию от времени и только от координат и функцию только от одних координат мы будем обозначать соответственно так:

$$F = F(t | \xi, \eta, \zeta), \quad F = F(\xi, \eta, \zeta).$$

В этих обозначениях дифференциальные уравнения движения рассматриваемой материальной системы могут быть написаны следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} m_i \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} &= E_i(t | \xi, \eta, \zeta | \dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}), \\ m_i \frac{d^2 \eta_i}{dt^2} &= H_i(t | \xi, \eta, \zeta | \dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}), \\ m_i \frac{d^2 \zeta_i}{dt^2} &= Z_i(t | \xi, \eta, \zeta | \dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}), \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

или, еще более просто:

$$m_i \ddot{\xi}_i = E_i, \quad m_i \ddot{\eta}_i = H_i, \quad m_i \ddot{\zeta}_i = Z_i.$$

Может случиться, что действующие силы обладают *силовой функцией*, т. е. что существует такая функция $U(t | \xi, \eta, \zeta)$, не зависящая от составляющих скоростей (она может не зависеть также и от времени), частные производные которой по координатам точки M_i равны составляющим силы, действующей на эту точку. Тогда

$$E_i = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad H_i = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i},$$

и уравнения (1.1) принимают вид

$$m_i \ddot{\xi}_i = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad m_i \ddot{\eta}_i = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \quad m_i \ddot{\zeta}_i = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}.$$

Система (1.1) состоит из $3n + 3$ дифференциальных уравнений второго порядка, и неизвестными функциями в ней являются координаты точек M_i . Рассматривая как неизвестные функции также составляющие скоростей точек системы, мы можем заменить систему (1.1) равносильной ей системой $6n + 6$ дифференциальных уравнений первого порядка, которая запишется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\dot{\xi}_i}{dt} &= \dot{\xi}_i, & m_i \frac{d\dot{\xi}_i}{dt} &= \Xi_i, \\ \frac{d\dot{\eta}_i}{dt} &= \dot{\eta}_i, & m_i \frac{d\dot{\eta}_i}{dt} &= \Pi_i, \\ \frac{d\dot{\zeta}_i}{dt} &= \dot{\zeta}_i, & m_i \frac{d\dot{\zeta}_i}{dt} &= Z_i \end{aligned} \right\} \quad (1.1')$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Общее решение системы (1.1') определяет координаты и составляющие скоростей точек M_i как функции времени и $6n + 6$ произвольных постоянных интегрирования, которые могут быть выражены через начальные значения этих функций, соответствующих определенному моменту времени t_0 , который называется *начальным моментом* или *эпохой*.

В этой главе мы будем обозначать начальное значение какой-нибудь величины ξ через ξ^0 , так что полная система начальных данных для системы (1.1) запишется так:

$$\begin{aligned} \xi_i^0 &= \xi_i(t_0), & \eta_i^0 &= \eta_i(t_0), & \zeta_i^0 &= \zeta_i(t_0); \\ \dot{\xi}_i^0 &= \dot{\xi}_i(t_0), & \dot{\eta}_i^0 &= \dot{\eta}_i(t_0), & \dot{\zeta}_i^0 &= \dot{\zeta}_i(t_0) \end{aligned}$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Тогда общее решение системы (1.1), а также системы (1.1') представится равенствами вида

$$\begin{aligned} \xi_i &= \xi_i(t | \xi^0, \eta^0, \zeta^0 | \dot{\xi}^0, \dot{\eta}^0, \dot{\zeta}^0), & \dot{\xi}_i &= \dot{\xi}_i(t | \xi^0, \eta^0, \zeta^0 | \dot{\xi}^0, \dot{\eta}^0, \dot{\zeta}^0), \\ \eta_i &= \eta_i(t | \xi^0, \eta^0, \zeta^0 | \dot{\xi}^0, \dot{\eta}^0, \dot{\zeta}^0), & \dot{\eta}_i &= \dot{\eta}_i(t | \xi^0, \eta^0, \zeta^0 | \dot{\xi}^0, \dot{\eta}^0, \dot{\zeta}^0), \\ \zeta_i &= \zeta_i(t | \xi^0, \eta^0, \zeta^0 | \dot{\xi}^0, \dot{\eta}^0, \dot{\zeta}^0), & \dot{\zeta}_i &= \dot{\zeta}_i(t | \xi^0, \eta^0, \zeta^0 | \dot{\xi}^0, \dot{\eta}^0, \dot{\zeta}^0) \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Если правые части уравнений (1.1) удовлетворяют некоторым, достаточно общим, условиям, то обычные теоремы

теории обыкновенных дифференциальных уравнений обеспечивают существование единственного решения системы (1.1), удовлетворяющего заданным начальным условиям и определенного для всех значений времени, заключенных в некотором промежутке, включающем начальный момент t_0 .

Вместо общего решения системы (1.1), или (1.1'), мы будем рассматривать часто общий интеграл этой системы, т. е. совокупность $6n+6$ независимых между собой уравнений вида

$$F_j(t|\xi, \eta, \zeta|\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}) = C_j = \text{const}, \quad (j = 1, 2, \dots, 6n+6) \quad (1.2')$$

обращающихся в тождества после подстановки вместо величин $\xi_i, \eta_i, \zeta_i, \dot{\xi}_i, \dot{\eta}_i, \dot{\zeta}_i$ функций, удовлетворяющих уравнениям (1.1).

Каждое из равенств вида (1.2) называется, как известно, *первым интегралом* системы (1.1) и характеризуется тем, что его полная производная по времени, взятая в силу уравнений (1.1), равна тождественно нулю, так что имеем следующие тождества:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_j}{\partial t} + \sum_{i=0}^n \left[\frac{\partial F_j}{\partial \xi_i} \dot{\xi}_i + \frac{\partial F_j}{\partial \eta_i} \dot{\eta}_i + \frac{\partial F_j}{\partial \zeta_i} \dot{\zeta}_i + \right. \\ \left. + \frac{1}{m_i} \left(\frac{\partial F_j}{\partial \dot{\xi}_i} \Xi_i + \frac{\partial F_j}{\partial \dot{\eta}_i} \mathcal{H}_i + \frac{\partial F_j}{\partial \dot{\zeta}_i} \mathcal{Z}_i \right) \right] \equiv 0. \end{aligned}$$

Полагая в равенствах (1.2') $t = t_0$, мы сможем выразить все произвольные постоянные C_j через начальные значения координат и составляющих скоростей точек M_i .

2. Уравнения Лагранжа. Введем теперь вместо переменных ξ_i, η_i, ζ_i некоторые другие переменные $q_1, q_2, \dots, q_k$ ($k = 3n+3$), связанные с абсолютными координатами определенными соотношениями (формулами преобразования), которые могут также содержать время t .

В силу принятого способа сокращенной записи формулы преобразования могут быть представлены в виде

$$\xi_i = \xi_i(t|q), \quad \eta_i = \eta_i(t|q), \quad \zeta_i = \zeta_i(t|q). \quad (1.3)$$

Допустим, что правые части этих равенств суть заданные непрерывные и однозначные функции своих аргументов.

Тогда, при заданном значении момента времени t , всякой системе значений величин $q_1, \dots, q_k$ соответствует единственная система значений абсолютных координат, т. е. определенное положение системы материальных точек.

Таким образом, положение системы точек M_i однозначно определяется значениями величин q_j , которые называются *обобщенными координатами системы* или переменными Лагранжа.

Выведем дифференциальные уравнения, определяющие переменные Лагранжа. Для этого помножим уравнения (1.1) соответственно на $\frac{\partial \xi_i}{\partial q_j}$, $\frac{\partial \eta_i}{\partial q_j}$, $\frac{\partial \zeta_i}{\partial q_j}$, где индекс j принимает все значения от 1 до k , и сложим все уравнения. Мы получим k ($k = 3n + 3$) уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n m_i \left(\ddot{\xi}_i \frac{\partial \xi_i}{\partial q_j} + \ddot{\eta}_i \frac{\partial \eta_i}{\partial q_j} + \ddot{\zeta}_i \frac{\partial \zeta_i}{\partial q_j} \right) = \\ = \sum_{i=0}^n \left(\Xi_i \frac{\partial \xi_i}{\partial q_j} + \Pi_i \frac{\partial \eta_i}{\partial q_j} + Z_i \frac{\partial \zeta_i}{\partial q_j} \right). \end{aligned}$$

Имея в виду очевидные тождества

$$\ddot{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial q} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial q} \right) - \dot{\xi} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \xi}{\partial q} \right)$$

и полагая для сокращения

$$\begin{aligned} P_j &= \sum_{i=0}^n m_i \left(\dot{\xi}_i \frac{\partial \xi_i}{\partial q_j} + \dot{\eta}_i \frac{\partial \eta_i}{\partial q_j} + \dot{\zeta}_i \frac{\partial \zeta_i}{\partial q_j} \right), \\ Q_j &= \sum_{i=0}^n m_i \left[\dot{\xi}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial q_j} \right) + \dot{\eta}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial q_j} \right) + \dot{\zeta}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \zeta_i}{\partial q_j} \right) \right], \\ R_j &= \sum_{i=0}^n \left(\Xi_i \frac{\partial \xi_i}{\partial q_j} + \Pi_i \frac{\partial \eta_i}{\partial q_j} + Z_i \frac{\partial \zeta_i}{\partial q_j} \right), \end{aligned}$$

мы перепишем предыдущие уравнения в следующем простом виде:

$$\frac{dP_j}{dt} - Q_j = R_j \quad (j = 1, 2, \dots, k). \quad (1.4)$$

Выразим P_j , Q_j , R_j через время, обобщенные координаты q и их первые производные $\dot{q}$ (обобщенные скорости).

Для этого подставим в величины P_j , Q_j , R_j вместо абсолютных координат их выражения (1.3) и вместо составляющих абсолютных скоростей следующие их значения, получаемые дифференцированием формул преобразования по времени полным образом:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi}_i &= \frac{\partial \xi_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^k \frac{\partial \xi_i}{\partial q_j} \dot{q}_j, \\ \dot{\eta}_i &= \frac{\partial \eta_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^k \frac{\partial \eta_i}{\partial q_j} \dot{q}_j, \\ \dot{\zeta}_i &= \frac{\partial \zeta_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^k \frac{\partial \zeta_i}{\partial q_j} \dot{q}_j. \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Делая указанную подстановку, мы и получим нужный нам результат. При этом для величин P_j и Q_j можно получить простые выражения.

Действительно, рассмотрим полную *живую силу* системы T , определяемую в абсолютных координатах формулой

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n m_i (\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2), \quad (1.6)$$

где v_i есть абсолютная скорость точки M_i .

Используя формулы (1.5), мы получим выражение живой силы в переменных Лагранжа

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n m_i \left\{ \left[\frac{\partial \xi_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^k \frac{\partial \xi_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[\frac{\partial \eta_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^k \frac{\partial \eta_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right]^2 + \left[\frac{\partial \zeta_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^k \frac{\partial \zeta_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right]^2 \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что T есть многочлен второй степени относительно обобщенных скоростей $\dot{q}$, который удобно представить в виде

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \quad (1.6')$$

где T_s ($s = 2, 1, 0$) — однородный многочлен степени s относительно величин $\dot{q}$.

Очевидно, мы можем написать

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{s, j=1}^k A_{sj} \dot{q}_s \dot{q}_j, \quad T_1 = \sum_{j=1}^k B_j \dot{q}_j,$$

где коэффициенты определяются формулами

$$A_{sj} = A_{js} = \sum_{i=0}^n m_i \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial q_s} \frac{\partial \xi_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \eta_i}{\partial q_s} \frac{\partial \eta_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \zeta_i}{\partial q_s} \frac{\partial \zeta_i}{\partial q_j} \right),$$

$$B_j = \sum_{i=0}^n m_i \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial q_j} \frac{\partial \xi_i}{\partial t} + \frac{\partial \eta_i}{\partial q_j} \frac{\partial \eta_i}{\partial t} + \frac{\partial \zeta_i}{\partial q_j} \frac{\partial \zeta_i}{\partial t} \right).$$

Кроме того,

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n m_i \left[\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta_i}{\partial t} \right)^2 \right].$$

Если формулы преобразования (1.3) не содержат время t , то, как легко видеть, $T_1 = T_0 \equiv 0$ и живая сила T будет однородным многочленом второй степени относительно обобщенных скоростей:

$$T = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{s, j=1}^k A_{sj} \dot{q}_s \dot{q}_j.$$

Покажем теперь, что

$$P_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}, \quad Q_j = \frac{\partial T}{\partial q_j}.$$

Действительно, дифференцируя выражение (1.6) для живой силы T частным образом по $\dot{q}_j$, мы получаем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=0}^n m_i \left(\dot{\xi}_i \frac{\partial \xi_i}{\partial \dot{q}_j} + \dot{\eta}_i \frac{\partial \eta_i}{\partial \dot{q}_j} + \dot{\zeta}_i \frac{\partial \zeta_i}{\partial \dot{q}_j} \right).$$

С другой стороны, дифференцируя по $\dot{q}_j$ соотношение (1.5), имеем

$$\frac{\partial \dot{\xi}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \xi_i}{\partial q_j}, \quad \frac{\partial \dot{\eta}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \eta_i}{\partial q_j}, \quad \frac{\partial \dot{\zeta}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \zeta_i}{\partial q_j},$$

вследствие чего находим

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=0}^n m_i \left(\dot{\xi}_i \frac{\partial \xi_i}{\partial q_j} + \dot{\eta}_i \frac{\partial \eta_i}{\partial q_j} + \dot{\zeta}_i \frac{\partial \zeta_i}{\partial q_j} \right) \equiv P_j.$$

Дифференцируя теперь выражение (1.6) для T частным образом по координате q_j , мы получим

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=0}^n m_i \left(\dot{\xi}_i \frac{\partial \xi_i}{\partial q_j} + \dot{\eta}_i \frac{\partial \eta_i}{\partial q_j} + \dot{\zeta}_i \frac{\partial \zeta_i}{\partial q_j} \right).$$

Чтобы найти производные от составляющих скоростей, продифференцируем по q_j формулы (1.5), что дает

$$\frac{\partial \dot{\xi}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t \partial q_j} + \sum_{s=1}^k \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial q_s \partial q_j} \dot{q}_s$$

(аналогичные выражения имеем также для двух других производных).

Дифференцируя затем формулы (1.3) по q_j и беря от полученных выражений полные производные по t , мы найдем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial q_j \partial t} + \sum_{s=1}^k \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial q_j \partial q_s} \dot{q}_s.$$

Предполагая формулы преобразования (1.3) такими, чтобы правые их части обладали непрерывными частными производными первого и второго порядков, мы будем иметь

$$\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t \partial q_j} = \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial q_j \partial t}, \quad \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial q_s \partial q_j} = \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial q_j \partial q_s},$$

вследствие чего найдем

$$\frac{\partial \dot{\xi}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial q_j} \right), \quad \frac{\partial \dot{\eta}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial q_j} \right), \quad \frac{\partial \dot{\zeta}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \zeta_i}{\partial q_j} \right),$$

а поэтому

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=0}^n m_i \left[\dot{\xi}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial q_j} \right) + \dot{\eta}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial q_j} \right) + \dot{\zeta}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \zeta_i}{\partial q_j} \right) \right] \equiv Q_j.$$

Теперь уравнения (1.4) напишутся следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = R_j \quad (j = 1, 2, \dots, k), \quad (1.7)$$

где T определяется формулой (1.6) и величины R_j предполагаются выраженными через t , q и $\dot{q}$.

Поэтому уравнения (1.7) определяют обобщенные координаты q в функции времени и произвольных постоянных, за которые могут быть приняты, например, начальные значения q^0 и $\dot{q}^0$, так что общее решение этих уравнений представится в виде

$$q_j = q_j(t | q^0, \dot{q}^0) \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

Уравнения (1.7) и называются *уравнениями Лагранжа второго рода* или просто — *уравнениями Лагранжа*.

Величины R_j определяются действующими силами и называются *обобщенными силами*, хотя размерности этих величин, вообще говоря, отличны от размерности силы.

Уравнения Лагранжа позволяют весьма просто переходить от абсолютных координат к каким угодно переменным, а также непосредственно составлять уравнения движения, определяющие любые заданные параметры q_j .

Действительно, для этого нужно только выразить через новые переменные или параметры q_j живую силу системы T и составить выражения для обобщенных сил R_j .

Если, в частности, действующие силы обладают силовой функцией U , то составление уравнений Лагранжа еще более упрощается. В самом деле, тогда мы имеем

$$\Xi_i = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad \Pi_i = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i},$$

вследствие чего

$$R_j = \sum_{i=0}^n \left(\frac{\partial U}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial \eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} \frac{\partial \zeta_i}{\partial q_j} \right) \equiv \frac{\partial U}{\partial q_j},$$

и уравнения (1.7) напишутся в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{\partial U}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, k). \quad (1.7')$$

3. Явная форма уравнений Лагранжа. Покажем теперь, что уравнения (1.7) можно разрешить относительно вторых производных от обобщенных координат. Действительно, составляя выражения для производных от живой силы T по обобщенным скоростям, мы имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{s=1}^k A_{sj} \dot{q}_s + B_j.$$

Подставляя эти выражения в уравнения (1.7), мы приведем их, как нетрудно видеть, к следующей форме:

$$\sum_{s=1}^k A_{sj} \ddot{q}_s = D_j(t | q | \dot{q}), \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (1.8)$$

где D_j суть известные функции своих переменных.

Уравнения (1.8) представляют собой систему линейных уравнений относительно величин $\ddot{q}$, определитель которой мы обозначим через A :

$$A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{k1} & A_{k2} & \dots & A_{kk} \end{vmatrix}.$$

Покажем, что этот определитель не может быть равен нулю. Заменяя величины A_{ij} их выражениями и воспользовавшись известными теоремами о сложении и умножении определителей, мы найдем

$$A = (m_0 m_1 \dots m_n)^3 \cdot D^2,$$

где

$$D = \frac{D(\xi | \eta | \zeta)}{D(q)} = \frac{D(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \xi_1, \eta_1, \zeta_1, \dots, \xi_n, \eta_n, \zeta_n)}{D(q_1, q_2, \dots, q_{3n+3})}$$

есть определитель Якоби от системы абсолютных координат, рассматриваемых как функции величин q .

Так как было предположено, что обобщенные координаты однозначно определяют положение рассматриваемой материальной системы (системы свободных материальных точек M_i), то соотношения (1.3), связывающие старые и новые переменные, должны быть между собою независимыми, а поэтому определитель Якоби системы функций ξ, η, ζ от k ($k = 3n + 3$) независимых переменных q заведомо должен быть отличен от нуля.

Но при $D \neq 0$ также и $A \neq 0$, а, следовательно, уравнения (1.8) разрешимы относительно вторых производных $\ddot{q}_j$ и дают для них единственные значения.

Решая систему (1.8), мы получим уравнения движения в следующем виде:

$$\ddot{q}_j = \Phi_j(t | q | \dot{q}) \quad (j = 1, 2, \dots, k),$$

где Φ_j суть известные функции времени, обобщенных координат и обобщенных скоростей.

Наконец, можно представить предыдущие уравнения в виде системы $2k$ уравнений первого порядка:

$$\frac{dq_j}{dt} = \dot{q}_j, \quad \frac{d\dot{q}_j}{dt} = \Psi_j(t | q | \dot{q}) \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

§ 2. Вывод уравнений Лагранжа из принципа наименьшего действия. Первые интегралы

1. Принцип Остроградского — Гамильтона. Мы вывели уравнения Лагранжа из уравнений абсолютного движения системы конечного числа свободных материальных точек, подверженных действиям заданных сил.

Но те же уравнения можно получить другим, более простым и общим способом, основываясь на каком-либо основном принципе механики, например, исходя из интегрального принципа Остроградского — Гамильтона.

Рассмотрим какую-нибудь материальную систему без неинтегрируемых дифференциальных связей и с конечным числом степеней свободы.

Тогда, если число степеней свободы есть k , то положение системы может быть однозначно определено k независи-

мыми между собою параметрами — *обобщенными координатами*:

$$q_1, q_2, \dots, q_k.$$

Пусть $T = T(t | q | \dot{q})$ есть живая сила рассматриваемой материальной системы, являющаяся непрерывной функцией времени t , обобщенных координат q и обобщенных скоростей $\dot{q}$ и обладающая непрерывными частными производными первого и второго порядков.

Представим себе, что движение материальной системы происходит под действием сил, обладающих силовой функцией U , являющейся непрерывной функцией времени и обобщенных координат q , имеющей непрерывные частные производные первого и второго порядков.

Положим

$$L = T + U. \quad (1.9)$$

Очевидно, что $L(t | q | \dot{q})$, называемая *функцией Лагранжа*, непрерывна и обладает непрерывными частными производными первого и второго порядков.

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_{t_0}^{t_1} L(t | q | \dot{q}) dt, \quad (1.10)$$

называемой обычно *действием по Гамильтону*.

Принцип Остроградского — Гамильтона утверждает, что *действительное движение материальной системы отличается от всех других возможных ее движений тем, что оно удовлетворяет необходимому условию экстремума гамильтонова действия*.

При этом предполагается, что начальное (для $t = t_0$) и конечное (для $t = t_1$) состояния системы одинаковы для всех ее движений (т. е. для действительного и всех возможных движений). Иными словами, начальные значения $q^0, \dot{q}^0$ координат и скоростей и конечные их значения $q^1, \dot{q}^1$ неизменны для всех движений.

Необходимым условием экстремума интеграла I является, как известно из вариационного исчисления*), равенство нулю

*) См., например, Лаврентьев М. А. и Люстерник Л. А., Основы вариационного исчисления, ОНТИ, 1935 и Су слов Г. К., Теоретическая механика, Гостехиздат, 1944.

его первой вариации δI , т. е. мы должны иметь

$$\delta I = \delta \int_{t_0}^{t_1} L(t | q | \dot{q}) dt = 0.$$

Вычисляя вариацию δI по правилам вариационного исчисления, мы находим

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \delta L \cdot dt = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{j=1}^k \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j \right] \right\} dt.$$

Для преобразования этого выражения заметим, что, так как время t не варьируется, то операции варьирования и дифференцирования по времени переместительны. В самом деле, обозначая через $\tilde{q}$ варьированное значение функции q , имеем

$$\delta q = \tilde{q} - q.$$

Взяв от обеих частей этого равенства производные, получим

$$\frac{d}{dt} (\delta q) = \dot{\tilde{q}} - \dot{q} = \delta \dot{q}.$$

На этом основании мы можем написать

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j dt &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d(\delta q)}{dt} dt = \\ &= \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt. \end{aligned}$$

По условию, начальные и конечные положения системы во всех ее движениях одинаковы, т. е. вариации δq_j обобщенных координат равны нулю при $t = t_0$ и при $t = t_1$; поэтому имеем

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j dt = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt.$$

и выражение для вариации функционала I можно представить в следующем виде:

$$\delta I = - \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{j=1}^k \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] \delta q_j \right\} dt. \quad (1.11)$$

Так как промежуток интегрирования (t_0, t_1) совершенно произволен, то из равенства интеграла нулю в формуле (1.11) следует равенство нулю подынтегрального выражения, т. е. мы должны иметь:

$$\sum_{j=1}^k \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0.$$

Но вариации обобщенных координат произвольны и между собою независимы. Поэтому предыдущая сумма может быть равна нулю только тогда, когда коэффициент при каждой вариации в отдельности есть нуль. Поэтому в действительном движении рассматриваемой материальной системы обобщенные координаты q_j должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k). \quad (1.12)$$

Но из формулы (1.9) мы имеем

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}, \quad \frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j},$$

и уравнения (1.12) примут вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{\partial U}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, k), \quad (1.12')$$

а это и есть уравнения Лагранжа в случае, когда существует силовая функция U , зависящая только от времени и обобщенных координат q .

Подобным же образом можно вывести уравнения Лагранжа и из какого-либо другого принципа механики.

2. Первые интегралы. Теорема Ливуилля. Уравнения Лагранжа, представляющие собой систему дифференциальных уравнений второго порядка, вообще говоря,

не допускают интегралов, выражающихся через известные функции или через квадратуры от известных функций.

Однако можно указать некоторые, весьма немногие, но важные для приложений, случаи, когда такие интегралы существуют и выводятся из дифференциальных уравнений без всякого труда.

Рассмотрим случай, когда живая сила материальной системы T определяется формулой (1.6') и не зависит явно от времени t . Пусть, кроме того, действующие силы обладают силовой функцией $U(q)$, также не зависящей от времени явно. Тогда уравнения (1.12) имеют интеграл

$$T_2 - T_0 = U + h,$$

также не зависящий явно от времени.

Действительно, помножим уравнения (1.12) соответственно на $\dot{q}_j$ и сложим все уравнения; мы получим

$$\sum_{j=1}^k \dot{q}_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_{j=1}^k \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{j=1}^k \dot{q}_j \frac{\partial U}{\partial q_j}.$$

Но, очевидно,

$$\sum_{j=1}^k \dot{q}_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^k \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \sum_{j=1}^k \ddot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j},$$

и предыдущее равенство напишется в виде

$$\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^k \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \sum_{j=1}^k \left(\ddot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) = \sum_{j=1}^k \dot{q}_j \frac{\partial U}{\partial q_j}. \quad (1.13)$$

Но формула (1.6') дает

$$\sum_{j=1}^k \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{j=1}^k \dot{q}_j \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{j=1}^k \dot{q}_j \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j},$$

а так как T_2 и T_1 суть однородные функции величин $\dot{q}$, второго и первого измерений соответственно, то, по теореме Эйлера об однородных функциях, мы имеем

$$\sum_{j=1}^k \dot{q}_j \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j} = 2T_2, \quad \sum_{j=1}^k \dot{q}_j \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j} = T_1,$$

откуда

$$\sum_{j=1}^k \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 2T_2 + T_1.$$

Далее, в силу независимости T и U от времени, мы имеем

$$\sum_{j=1}^k \left(\ddot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) = \frac{dT}{dt}, \quad \sum_{j=1}^k \dot{q}_j \frac{\partial U}{\partial q_j} = \frac{dU}{dt},$$

вследствие чего равенство (1.13) примет вид

$$\frac{d(2T_2 + T_1)}{dt} - \frac{d(T_2 + T_1 + T_0)}{dt} = \frac{dU}{dt},$$

откуда интегрированием получаем

$$T_2 - T_0 = U' + h, \quad (1.14)$$

где h обозначает постоянную интегрирования, что мы и хотели показать.

Заметим, что в частном случае, когда $T_1 = T_0 = 0$, живая сила $T = T_2$ и есть однородная функция второй степени относительно величин $\dot{q}$, а тогда интеграл (1.14) принимает вид

$$T = U + h \quad (1.14')$$

и называется *интегралом живой силы*.

Равенство (1.14) можно написать еще в виде

$$T + (-U) = h = \text{const.}$$

Так как живая сила T определяет кинетическую энергию, а $-U$ — потенциальную энергию, то предыдущее равенство устанавливает неизменность полной энергии системы во все время движения. По этой причине равенство (1.14') называется еще *интегралом энергии*.

Такое движение материальной системы, во время которого ее полная энергия не изменяется, называется *консервативным*.

Рассмотрим теперь случай, когда живая сила системы и ее силовая функция обе не зависят от какой-нибудь одной

из координат q , которая называется в таком случае *циклической координатой*. Не нарушая общности, мы можем считать, что циклической координатой является q_1 . Тогда

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial U}{\partial q_1} \equiv 0,$$

и из уравнений (1.12) мы находим

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = c_1, \quad (1.15)$$

или

$$A_{11}\dot{q}_1 + A_{21}\dot{q}_2 + \dots + A_{k1}\dot{q}_k + B_1 = c_1, \quad (1.15')$$

где c_1 есть произвольная постоянная.

Очевидно, что равенство (1.15) является интегралом системы (1.12) или (1.12'). С помощью этого интеграла, линейного относительно обобщенных скоростей, можно исключить из уравнений (1.12') величину $\dot{q}_1$. Тогда уравнения

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{\partial U}{\partial q_j} \quad (j = 2, 3, \dots, k) \quad (1.12'')$$

образуют систему $2k - 2$ порядка с неизвестными функциями $q_2, q_3, \dots, q_k$ и, следовательно, порядок первоначальной системы мы понизили на две единицы.

Если система (1.12'') проинтегрирована, то из соотношения (1.15') мы найдем оставшуюся функцию q_1 — циклическую координату — простой квадратурой.

Подобным же образом, если переменные $q_1, q_2, \dots, q_s$ ($s < k$) являются циклическими координатами, то мы получим s линейных интегралов, типа (1.15), с помощью которых можем понизить порядок системы на $2s$ единиц. После интегрирования преобразованной системы $2k - 2s$ -го порядка мы получим все циклические координаты при помощи s квадратур.

При помощи интеграла живой силы также можно, конечно, понизить порядок системы уравнений Лагранжа, но так как соотношение (1.14) не линейно относительно величин $\dot{q}$, то осуществить это понижение порядка на деле крайне затруднительно, поэтому на практике его не производят.

Никаких других интегралов в общем случае уравнения Лагранжа не допускают, но можно указать некоторые част-

ные случаи, в которых возможно найти даже полную систему интегралов системы (1.12'), т. е. проинтегрировать эту систему до конца.

Один из таких случаев указан Лиувиллем. Так как теорема Лиувилля находит применение в задачах небесной механики, то мы здесь ее рассмотрим.

Теорема Лиувилля. Если живая сила системы и ее силовая функция определяются формулами вида

$$2T = B \sum_{j=1}^k A_j(q_j) \dot{q}_j^2, \quad U = \frac{1}{B} \sum_{j=1}^k U_j(q_j), \quad (1.16)$$

где

$$B = \sum_{j=1}^k B_j(q_j),$$

то уравнения Лагранжа интегрируются в квадратурах.

Приведем наиболее простое доказательство этой теоремы данное Пенлеве.

Положим

$$du_j = \sqrt{A_j(q_j)} dq_j \quad (j = 1, 2, \dots, k). \quad (1.17)$$

Это равенство устанавливает связь между обобщенной координатой q_j и соответствующей новой переменной u_j . Предполагая, что q_j выражено через u_j , мы можем положить

$$B_j(q_j) = G_j(u_j), \quad U_j(q_j) = F_j(u_j);$$

тогда, формулы (1.16) запишутся в виде

$$2T = G \sum_{j=1}^k \dot{u}_j^2, \quad U = \frac{F}{G} = \frac{\sum_{j=1}^k F_j(u_j)}{\sum_{j=1}^k G_j(u_j)}.$$

Будем рассматривать теперь величины u_j как обобщенные координаты и напишем для них уравнения Лагранжа. Мы получим:

$$\frac{d}{dt}(G\dot{u}_j) - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u_j} \sum_{j=1}^k \dot{u}_j^2 = \frac{\partial U}{\partial u_j} \quad (j = 1, 2, \dots, k). \quad (1.18)$$

Так как T и U не зависят явно от времени и живая сила содержит только квадраты величин $\dot{u}_j$, то уравнения (1.18) имеют интеграл живой силы

$$T = \frac{1}{2} G \sum_{j=1}^k \dot{u}_j^2 = U + h,$$

где h — произвольная постоянная.

Умножив теперь каждое равенство (1.18) на $2G\dot{u}_j$ и имея в виду интеграл живой силы, мы получаем

$$\frac{d}{dt} (G^2 \dot{u}_j^2) - 2\dot{u}_j \frac{\partial G}{\partial u_j} (U + h) = 2\dot{u}_j G \frac{\partial U}{\partial u_j}$$

или

$$\frac{d}{dt} (G^2 \dot{u}_j^2) = 2\dot{u}_j \frac{\partial G (U + h)}{\partial u_j}.$$

Далее, так как $GU = F$, имеем

$$\frac{d}{dt} (G^2 \dot{u}_j^2) = 2\dot{u}_j \frac{\partial (F + hG)}{\partial u_j} = 2\dot{u}_j \frac{d (F_j + hG_j)}{du_j}$$

или

$$\frac{d}{dt} (G^2 \dot{u}_j^2) = 2 \frac{d}{dt} (F_j + hG_j).$$

Интегрируя эти равенства, найдем

$$G^2 \dot{u}_j^2 = 2 (F_j + hG_j + \alpha_j), \quad (1.19)$$

где α_j суть произвольные постоянные интегрирования.

Эти постоянные не независимы. Действительно, складывая равенства (1.19), мы находим

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k G^2 \dot{u}_j^2 &= 2GT = 2 \sum_{j=1}^k (F_j + hG_j + \alpha_j) = \\ &= 2F + 2hG + 2 \sum_{j=1}^k \alpha_j = \\ &= 2G(U + h) + 2 \sum_{j=1}^k \alpha_j. \end{aligned}$$

Сравнение полученного равенства с интегралом живой силы приводит к соотношению

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j = 0$$

между произвольными постоянными α .

Далее, из (1.19) имеем

$$\frac{du_j}{\sqrt{F_j + hG_j + \alpha_j}} = \frac{\sqrt{2} dt}{G}.$$

Помножая каждое из этих равенств на G_j и складывая, мы получим

$$\sum_{j=1}^k \frac{G_j du_j}{\sqrt{F_j + hG_j + \alpha_j}} = \sqrt{2} dt. \quad (1.20)$$

Переходя, наконец, в равенствах (1.18) и (1.19) от переменных u_j обратно к обобщенным координатам и производя соответствующие интегрирования, мы получим полную систему первых интегралов уравнений Лагранжа в случае Лнувиля в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{\Lambda_1}{\Psi_1}} dq_1 + \beta_1 &= \dots = \int \sqrt{\frac{\Lambda_k}{\Psi_k}} dq_k + \beta_k, \\ \sqrt{2}(t - \tau) &= \int B_1 \sqrt{\frac{\Lambda_1}{\Psi_1}} dq_1 + \dots + \int B_k \sqrt{\frac{\Lambda_k}{\Psi_k}} dq_k, \end{aligned}$$

где для сокращения принято

$$\Psi_j = U_j(q_j) + hW_j(q_j) + \alpha_j.$$

Независимыми произвольными постоянными в этих формулах являются величины

$$\begin{aligned} \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, h, \\ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{k-1}, \tau, \end{aligned}$$

число которых равно $2k$, т. е. порядку системы. Поэтому вышенаписанные формулы представляют общий интеграл уравнений Лагранжа в случае Лнувиля. Теорема доказана.

3. П р и м е р ы. Рассмотрим некоторые простые примеры на применение уравнений Лагранжа. Пусть мы имеем задачу о движении одной материальной точки под действием силы, составляющие которой по осям абсолютной системы координат суть Ξ , H , Z . Дифференциальные уравнения движения имеют тогда следующий вид:

$$m\ddot{\xi} = \Xi, \quad m\ddot{\eta} = \text{H}, \quad m\ddot{\zeta} = \text{Z}.$$

Введем теперь вместо прямоугольных координат ξ , η , ζ сферические — r , φ , λ посредством формул

$$\xi = r \cos \varphi \cos \lambda, \quad \eta = r \cos \varphi \sin \lambda, \quad \zeta = r \sin \varphi,$$

где $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ есть радиус-вектор точки, φ — широта и λ — долгота.

Чтобы получить выражение для живой силы

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2)$$

в сферических координатах, дифференцируем сначала формулы преобразования, что дает

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \dot{r} \cos \varphi \cos \lambda - r \dot{\varphi} \sin \varphi \cos \lambda - r \dot{\lambda} \cos \varphi \sin \lambda, \\ \dot{\eta} &= \dot{r} \cos \varphi \sin \lambda - r \dot{\varphi} \sin \varphi \sin \lambda + r \dot{\lambda} \cos \varphi \cos \lambda, \\ \dot{\zeta} &= \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi, \end{aligned}$$

откуда находим

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + r^2 \cos^2 \varphi \cdot \dot{\lambda}^2). \quad (1.21)$$

Примем за обобщенные координаты — сферические, полагая

$$q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = \lambda.$$

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}, & \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m r (\dot{\varphi}^2 + \dot{\lambda}^2 \cos^2 \varphi), \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi}, & \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = -m r^2 \dot{\lambda}^2 \sin \varphi \cos \varphi, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}} = m r^2 \dot{\lambda} \cos^2 \varphi, & \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}} = 0. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения частных производных в уравнения Лагранжа (1.7), мы получим дифференциальные уравнения движения точки в сферических координатах:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r\dot{\lambda}^2 \cos^2 \varphi &= \frac{1}{m} R_1, \\ \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) + r^2\dot{\lambda}^2 \sin \varphi \cos \varphi &= \frac{1}{m} R_2, \\ \frac{d}{dt}(r^2\dot{\lambda} \cos^2 \varphi) &= \frac{1}{m} R_3. \end{aligned} \right\} \quad (1.21')$$

Выражения для обобщенных сил найдутся по формулам § 1:

$$R_1 = E \cos \varphi \cos \lambda + H \cos \varphi \sin \lambda + Z \sin \varphi = R,$$

$$R_2 = r [E (-\sin \varphi \cos \lambda) + H (-\sin \varphi \sin \lambda) + Z \cos \varphi] = r\Phi,$$

$$R_3 = r \cos \varphi [E (-\sin \lambda) + H \cos \lambda + Z \cdot 0] = r \cos \varphi \Lambda,$$

где R есть проекция силы на направление радиуса-вектора движущейся точки, Λ — проекция силы на направление, перпендикулярное плоскости, проходящей через радиус-вектор и ось аппликат (ось $O\xi_3$) и, наконец, Φ — проекция силы на направление, перпендикулярное двум предыдущим (т. е. лежащее в плоскости, проходящей через радиус-вектор и ось аппликат).

Если существует силовая функция $U(t, r, \varphi, \lambda)$, то, как мы уже знаем,

$$R_1 = \frac{\partial U}{\partial r}, \quad R_2 = \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad R_3 = \frac{\partial U}{\partial \lambda}.$$

В случае, когда силовая функция не зависит явно от времени, уравнения (1.21') имеют интеграл живой силы

$$T = U + h,$$

а если силовая функция вдобавок не зависит от долготы λ , то последняя является циклической координатой (так как T также не зависит от λ) и уравнения (1.21') имеют еще один интеграл

$$r^2 \cos^2 \varphi \cdot \dot{\lambda} = c.$$

В качестве второго примера рассмотрим преобразование тех же уравнений движения материальной точки к вращающейся системе координат. Пусть ось аппликат новой системы

координат совпадает с осью аппликат старой системы, а новая ось абсцисс образует с осью $O\xi$ угол v , который будем считать известной функцией времени. Тогда, переход к новым координатам x , y , z определится формулами

$$\xi = x \cos v - y \sin v, \quad \eta = x \sin v + y \cos v, \quad \zeta = z,$$

откуда дифференцированием находим

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \dot{x} \cos v - \dot{y} \sin v - \dot{v}(x \sin v + y \cos v), \\ \dot{\eta} &= \dot{x} \sin v + \dot{y} \cos v + \dot{v}(x \cos v - y \sin v), \\ \dot{\zeta} &= \dot{z}\end{aligned}$$

и выражение для живой силы T в новых координатах

$$T = \frac{m}{2} [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + 2\dot{v}(x\dot{y} - y\dot{x}) + \dot{v}^2(x^2 + y^2)]. \quad (1.22)$$

Возьмем за обобщенные координаты величины x , y , z , т. е. положим

$$q_1 = x, \quad q_2 = y, \quad q_3 = z.$$

Выражения для частных производных от живой силы T будут иметь вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= m(\dot{x} - \dot{v}y), & \frac{\partial T}{\partial x} &= m\dot{v}(\dot{y} + \dot{v}x), \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} &= m(\dot{y} + \dot{v}x), & \frac{\partial T}{\partial y} &= m\dot{v}(-\dot{x} + \dot{v}y), \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} &= m\dot{z}, & \frac{\partial T}{\partial z} &= 0.\end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в уравнения Лагранжа (1.7), мы получим уравнения движения во вращающихся осях в виде

$$\left. \begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{v}\dot{y} - \dot{v}^2x - \ddot{v}y &= \frac{1}{m}R_1, \\ \ddot{y} + 2\dot{v}\dot{x} - \dot{v}^2y + \ddot{v}x &= \frac{1}{m}R_2, \\ \ddot{z} &= \frac{1}{m}R_3,\end{aligned}\right\} \quad (1.22')$$

где, согласно формулам § 1,

$$R_1 = E \cos v - H \sin v = X,$$

$$R_2 = E \sin v + H \cos v = Y,$$

$$R_3 = Z = Z,$$

так что X, Y, Z суть проекции силы на подвижные оси. Если существует силовая функция U , то мы имеем

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Часто встречается случай, когда новая система координат вращается равномерно вокруг оси Oz . Тогда

$$\dot{v} = \text{const} = n, \quad \ddot{v} = 0,$$

и уравнения (1.22') напишутся в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + 2n\dot{y} - n^2x &= \frac{1}{m} X, \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y &= \frac{1}{m} Y, \\ \ddot{z} &= \frac{1}{m} Z. \end{aligned} \right\} \quad (1.22'')$$

Если в последнем случае существует силовая функция U , не зависящая явно от времени, то, так как живая сила T при $\dot{v} = n$ также не зависит от времени, уравнения движения (1.22'') допускают интеграл вида

$$T_2 - T_0 = U + h.$$

Но по формуле (1.22)

$$T_2 = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad T_0 = \frac{mn^2}{2} (x^2 + y^2),$$

и упомянутый интеграл можно написать в виде

$$\frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \Omega + h, \quad (1.23)$$

где положено

$$\Omega = T_0 + U.$$

Интеграл (1.23) называется *интегралом Якоби*. Заметим, кстати, что этот интеграл нельзя назвать интегралом живой

силы или интегралом энергии, так как левая часть равенства (1.23) содержит только часть полной живой силы, а, следовательно, интеграл Якоби не выражает принципа сохранения энергии.

Преобразуем еще систему (1.22'') к обычным полярным координатам на плоскости (x, y) , полагая

$$x = \rho \cos \lambda, \quad y = \rho \sin \lambda.$$

Тогда, как легко проверить,

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\lambda}^2, \quad x\dot{y} - y\dot{x} = \rho^2 \dot{\lambda},$$

и выражение для живой силы T примет вид

$$T = \frac{m}{2} [\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\lambda}^2 + \dot{z}^2 + 2n\rho^2 \dot{\lambda} + n^2 \rho^2].$$

Принимая за обобщенные координаты величины ρ , λ , z , мы получим из уравнений Лагранжа следующие дифференциальные уравнения:

$$\ddot{\rho} - \rho(\dot{\lambda} + n)^2 = \frac{1}{m} P_1,$$

$$\frac{d}{dt} [\rho^2(\dot{\lambda} + n)] = \frac{1}{m} P_2,$$

$$\ddot{z} = \frac{1}{m} Z,$$

где обобщенные силы P_1 и P_2 определяются формулами

$$P_1 = X \cos \lambda + Y \sin \lambda = P_\rho,$$

$$P_2 = \rho(-X \sin \lambda + Y \cos \lambda) = \rho P_\lambda.$$

Очевидно, что P_ρ есть составляющая действующей силы по направлению, параллельному проекции радиуса-вектора на плоскость (xy) , а P_λ — составляющая силы по направлению, перпендикулярному предыдущему и лежащему также в плоскости (xy) .

Наконец, если существует силовая функция U , то имеем

$$P_1 = \frac{\partial U}{\partial \rho}, \quad P_2 = \frac{\partial U}{\partial \lambda}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

откуда, в случае независимости U от времени, следует интеграл Якоби

$$\frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\lambda}^2 + \dot{z}^2 + n^2 \rho^2) = U + h.$$

Этими двумя примерами мы здесь и ограничимся. В дальнейшем мы рассмотрим еще другие примеры применения уравнений Лагранжа.

§ 3. Канонические уравнения и их интегралы

1. Канонические переменные. Уравнения Гамильтона. Уравнения Лагранжа представляют собой систему k совместных дифференциальных уравнений второго порядка, определяющих обобщенные координаты в функции времени и $2k$ произвольных постоянных, за которые можно принять начальные значения q^0 и $\dot{q}^0$.

Как известно, увеличивая соответствующим образом число неизвестных функций, мы всегда можем заменить эту систему равносильной ей системой $2k$ дифференциальных уравнений первого порядка.

Эту замену можно произвести различными способами, простейший из которых указан в конце § 1.

Теперь мы рассмотрим один специальный случай такого преобразования, который приведет нас к особенно удобной и симметричной форме дифференциальных уравнений движения, называемой *канонической* или *гамильтоновой*.

Рассмотрим уравнения Лагранжа в общем виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = R_j \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (1.7)$$

и введем вместо обобщенных скоростей $\dot{q}_j$ новые зависимые переменные, обозначаемые по традиции буквами p_j , при помощи формул

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \quad (j = 1, 2, \dots, k). \quad (1.24)$$

Если живая сила T определяется формулой типа (1.6'), то p_j суть линейные функции обобщенных скоростей и мы имеем

$$p_j = \sum_{s=1}^k A_{sj} \dot{q}_s + B_j \quad (j = 1, 2, \dots, k). \quad (1.24')$$

Было доказано, что определитель $A = |A_{sj}|$ не равен нулю тождественно, вследствие чего уравнения (1.24') можно

разрешить относительно $\dot{q}_j$, что дает

$$\dot{q}_j = \sum_{s=1}^k \frac{\bar{A}_{js}}{A} (p_s - B_s), \quad (1.24'')$$

где $\bar{A}_{js}$ обозначает алгебранческое дополнение элемента A_{js} определителя A . Следовательно, зная для какого-либо момента времени значения величин q и p , мы будем знать также значения величин q и $\dot{q}$, определяющих состояние системы. Поэтому переменные

$$\left. \begin{array}{l} q_1, q_2, \dots, q_k, \\ p_1, p_2, \dots, p_k \end{array} \right\} \quad (1.25)$$

полностью определяют состояние системы (т. е. ее положение и скорости) и могут быть рассматриваемы вместо обобщенных координат и обобщенных скоростей.

Величины (1.25) будем называть *каноническими переменными* или *каноническими координатами*.

Величины p называются обыкновенно *обобщенными импульсами* или просто *импульсами*.

Выведем теперь дифференциальные уравнения, определяющие канонические переменные q и p .

Прежде всего мы имеем

$$\frac{dq_j}{dt} = \dot{q}_j, \quad \frac{dp_j}{dt} = \frac{\partial T}{\partial q_j} + R_j. \quad (1.26)$$

Остается выразить правые части этих равенств через канонические переменные, для чего достаточно подставить вместо обобщенных скоростей их выражения, даваемые формулами (1.24). Результаты этих подстановок можно представить в очень простом и симметричном виде, если ввести вспомогательную функцию K при помощи формулы

$$K = \sum_{s=1}^k p_s \dot{q}_s - T. \quad (1.27)$$

Считая величины $\dot{q}_s$ функциями времени и канонических переменных, определяемыми уравнениями (1.24) (в частности, уравнениями (1.24'')), мы можем рассматривать K так же, как функцию времени и канонических переменных, а поэтому можем дифференцировать эту функцию и по q_j и по p_j .

Выполняя эти дифференцирования, мы найдем

$$\frac{\partial K}{\partial q_j} = \sum_{s=1}^k p_s \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial q_j} - \sum_{s=1}^k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial q_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

и

$$\frac{\partial K}{\partial p_j} = \dot{q}_j + \sum_{s=1}^k p_s \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial p_j} - \sum_{s=1}^k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial p_j},$$

откуда, в силу (1.24) и (1.26), имеем

$$\begin{aligned} \dot{q}_j &= \frac{\partial K}{\partial p_j}, & \frac{\partial T}{\partial q_j} &= -\frac{\partial K}{\partial q_j}, \\ \frac{dq_j}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial p_j}, & \frac{dp_j}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial q_j} + R_j. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Эти уравнения, являющиеся следствиями уравнений Лагранжа, имеют место при любых функциях T и R_j , так что вовсе не обязательно, чтобы T представляла живую силу некоторой материальной системы.

Допустим теперь, что R_j являются частными производными от некоторой функции $U(t|q)$ по координатам q_j , т. е. что мы имеем

$$R_j = \frac{\partial U}{\partial q_j}.$$

Полагая тогда

$$H(t|q|p) = K(t|q|p) - U(t|q), \quad (1.29)$$

мы напомним уравнения (1.28) следующим образом:

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}. \quad (1.30)$$

Уравнения (1.30) и называются *каноническими уравнениями*, или *уравнениями Гамильтона*, а функция H , определяющая аналитическую структуру правых частей этих уравнений, называется *характеристической функцией*, или *функцией Гамильтона* (иногда — *гамильтонианом*).

В наиболее интересном для нас случае, когда T есть живая сила некоторой материальной системы с k степенями свободы, определяемая формулой (1.6'), выражение для

функции K и соответственно для функции H принимает чрезвычайно простой вид, имеющий ясный механический смысл.

Действительно, в этом случае

$$\sum_{s=1}^k p_s \dot{q}_s = \sum_{s=1}^k \dot{q}_s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} = \sum_{s=1}^k \dot{q}_s \left(\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_s} \right) = 2T_2 + T_1,$$

и формула (1.27) дает

$$K = 2T_2 + T_1 - T = 2T_2 + T_1 - (T_2 + T_1 + T_0),$$

т. е.

$$K = T_2 - T_0. \quad (1.27')$$

Если, как это часто бывает, живая сила T есть однородный многочлен второй степени относительно обобщенных скоростей, то $\dot{T}_1 = T_0 = 0$, $T = T_2$, и мы имеем просто

$$K = T.$$

Далее, если существует силовая функция, не зависящая от обобщенных скоростей, то формула (1.29) дает

$$H = T_2 - T_0 - U, \quad (1.29')$$

а когда T есть однородный многочлен второй степени, мы имеем

$$H = T - U. \quad (1.29'')$$

Таким образом, в этом последнем случае характеристическая функция H канонической системы есть *полная энергия*.

Заметим еще, что каноническую систему вида (1.30) можно, разумеется, рассматривать просто как особую форму системы обыкновенных дифференциальных уравнений, не связывая ее с какой-либо механической задачей. Тогда характеристическую функцию H нужно рассматривать просто как некоторую заданную функцию от независимой переменной t и от величин q и p , являющихся неизвестными функциями.

Рассматривая каноническую систему с такой общей точки зрения, мы можем изучать свойства этих уравнений, а также свойства функций, ими определяемых, чисто математическим путем, что может оказаться полезным также и для приложений гамильтоновых систем в небесной механике.

2. Первые интегралы канонической системы. Выразим теперь функции K и H через канонические переменные, предполагая, что T есть живая сила, определяемая формулой (1.6'). Так как T_0 зависит только от t и величин q , то, в силу формулы (1.27'), остается выразить через канонические переменные квадратичную форму T_2 .

Воспользовавшись теоремой Эйлера, мы можем написать

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j,$$

но

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j} + B_j,$$

откуда

$$\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j} = p_j - B_j,$$

и мы получим

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k (p_j - B_j) \dot{q}_j.$$

Подставляя сюда вместо $\dot{q}_j$ его выражение (1.24''), найдем окончательно

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \sum_{s=1}^k \frac{\bar{A}_{js}}{A} (p_j - B_j) (p_s - B_s).$$

Очевидно, что T_2 не будет, вообще говоря, однородным многочленом относительно импульсов p , но если $T_1 \equiv 0$, то B_i также есть нуль при любом значении индекса i , и мы имеем

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \sum_{s=1}^k \frac{\bar{A}_{js}}{A} p_j p_s,$$

то есть однородную функцию второй степени относительно величин p .

Найдя T_2 , мы получим K по формуле (1.27') и, в случае существования силовой функции, H по формуле (1.29).

Рассматривая теперь произвольную каноническую систему, покажем, что если характеристическая функция H не зависит от времени, т. е. если

$$H = H(q | p),$$

то система (1.30) всегда имеет интеграл $H = \text{const.}$

Действительно, помножим уравнения (1.30) соответственно на $\frac{dp_j}{dt}$ и на $-\frac{dq_j}{dt}$ и сложим все уравнения. Мы получим:

$$0 = \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{dp_j}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} \right) = \frac{dH}{dt},$$

откуда получаем первый интеграл канонической системы

$$H(q | p) = h = \text{const.} \quad (1.31)$$

В том случае, когда уравнения (1.30) определяют движение материальной системы, обладающей силовой функцией, то H определяется формулой (1.29'), и если живая сила T и силовая функция U не зависят от времени, то мы имеем первый интеграл

$$H = T_2 - T_0 - U = h,$$

совпадающий с интегралом (1.14) уравнений Лагранжа.

Если T есть однородный многочлен второй степени относительно импульсов p , то предыдущий интеграл принимает вид

$$H = T - U = h$$

и является интегралом энергии или живых сил.

Другой простейший тип интеграла системы (1.30) мы будем иметь в том случае, когда характеристическая функция H не зависит от какой-либо из переменных q ; действительно, если, например, H не зависит от q_1 , то $\frac{\partial H}{\partial q_1} \equiv 0$ и из (1.30) следует:

$$p_1 = c_1 = \text{const.}$$

Такие интегралы называются иногда интегралами обобщенных кинетических моментов или моментов количества движения.

Если система (1.30) описывает движение материальной системы, то q_1 есть циклическая координата и указанный интеграл совпадает с интегралом (1.15) уравнений Лагранжа.

Чтобы дать примеры канонических уравнений, рассмотрим сначала задачу о движении материальной точки под действием силы, обладающей не зависящей от времени силовой функцией.

В сферических координатах живая сила T определится формулой (1.21), а поэтому, полагая $p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$, имеем:

$$p_1 = m\dot{r}, \quad p_2 = mr^2\dot{\varphi}, \quad p_3 = mr^2\cos^2\varphi \cdot \dot{\lambda}.$$

Уравнения движения приведутся к виду (1.30) ($j = 1, 2, 3$) с характеристической функцией

$$H = \frac{1}{2m} \left[p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2} + \frac{p_3^2}{r^2 \cos^2 \varphi} \right] - U.$$

Очевидно, что в этом примере существует интеграл $H = h$, являющийся интегралом энергии. Если вдобавок силовая функция U не зависит от долготы λ , то H тоже не зависит от λ и мы имеем еще один интеграл $p_3 = mr^2 \cos^2 \varphi \cdot \dot{\lambda} = c_3 = \text{const.}$

Для второго примера возьмем уравнения движения материальной точки в системе координат, вращающейся вокруг оси аппликат с постоянной угловой скоростью n . Кроме того, предположим, что действующая сила имеет силовую функцию, не зависящую от времени.

Живая сила T определится в этом случае по формуле (1.22), где надо положить $\dot{\psi} = n$, т. е.

$$T = \frac{m}{2} [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + 2n(x\dot{y} - y\dot{x}) + n^2(x^2 + y^2)],$$

откуда находим выражения для импульсов

$$p_1 = m(\dot{x} - ny), \quad p_2 = m(\dot{y} + nx), \quad p_3 = m\dot{z},$$

и уравнения движения могут быть написаны в виде (1.30) с характеристической функцией:

$$\begin{aligned} H &= T_2 - T_0 - U = \\ &= \frac{1}{2m} [(p_1 + mnq_2)^2 + (p_2 - mnq_1)^2 + p_3^2] - \Omega, \end{aligned}$$

где, как и ранее,

$$\Omega = T_0 + U = \frac{mn^2}{2} (q_1^2 + q_2^2) + U.$$

Очевидно, что в этом примере также существует интеграл

$$H = h,$$

являющийся интегралом Якоби.

§ 4. Канонические преобразования

1. Теорема Якоби. Канонические уравнения обладают одним замечательным свойством, которое заключается в том, что они не изменяют своего вида при некоторых преобразованиях зависимых переменных q и p . Это свойство было сначала открыто Якоби, затем изучалось и многими другими учеными, а теперь формулируется обычно в виде теоремы, называемой *теоремой Якоби* *).

Рассмотрим произвольно заданную каноническую систему

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, k), \quad (1.30)$$

полностью определяемую заданием характеристической функции

$$H = H(t | q | p),$$

которую будем предполагать непрерывной функцией независимой переменной t и величин q и p , обладающей непрерывными частными производными первого порядка **).

Пусть далее

$$\psi = \psi(t | q | \xi)$$

есть произвольно заданная, однозначная и непрерывная функция от k переменных $q_1, q_2, \dots, q_k$, k новых переменных

*) См. Якоби К., Лекции по динамике (перевод с нем. под ред. Н. С. Кошлякова, ОНТИ, 1936), или Леви-Чивита Т. и Амальди У., Курс теоретической механики, т. 2, ч. 2 (перевод с итальян. под ред. И. И. Метелицына. ИЛ, 1951).

**) Рассматриваемые канонические уравнения вовсе не обязательно являются уравнениями движения некоторой материальной системы.

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ и от t . Мы предположим сверх того, что ψ имеет непрерывные частные производные первого и второго порядков и что якобиан $\left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_j \partial \xi_s} \right| = \bar{\psi}$ не равен тождественно нулю.

Введем вместо переменных q_j и p_j новые переменные ξ_j и η_j посредством соотношений

$$\frac{\partial \psi}{\partial q_j} = p_j, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \xi_j} = -\eta_j \quad (j = 1, 2, \dots, k), \quad (1.32)$$

исходя из которых можно выразить и старые переменные через новые и, наоборот, новые — через старые.

Действительно, так как по предположению функциональный определитель $\left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_j \partial \xi_s} \right|$ не есть нуль, то уравнения

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi_j} = -\eta_j \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

разрешимы относительно величин q_j и позволяют выразить эти переменные как однозначные функции от t, ξ, η . Подставляя полученные выражения в равенства

$$p_j = \frac{\partial \psi}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, k),$$

мы получим также переменные p как однозначные функции ξ, η и t . Аналогичное рассуждение покажет, что ξ и η являются однозначными функциями от t, p, q .

Итак, мы можем написать

$$q_j = q_j(t | \xi | \eta), \quad p_j = p_j(t | \xi | \eta). \quad (1.32')$$

Теорема, которую мы хотим доказать, формулируется следующим образом:

Если уравнения (1.30) преобразуются к новым переменным ξ, η посредством подстановки (1.32), то уравнения, определяющие новые переменные, также будут иметь каноническую форму и напишутся в виде

$$\frac{d\xi_j}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \eta_j}, \quad \frac{d\eta_j}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \xi_j} \quad (j = 1, 2, \dots, k), \quad (1.33)$$

где новая характеристическая функция R определяется формулой

$$R = H + \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (1.34)$$

в которой H и $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ должны быть выражены через ξ и η при помощи соотношений (1.32').

Доказательство. Считая, что характеристическая функция H зависит от ξ и η через посредство q и p , вычислим частную производную от H по η_j .

Мы имеем

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_j} = \sum_{s=1}^k \frac{\partial H}{\partial q_s} \frac{\partial q_s}{\partial \eta_j} + \sum_{s=1}^k \frac{\partial H}{\partial p_s} \frac{\partial p_s}{\partial \eta_j},$$

что в силу уравнений (1.30) приводится к виду

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_j} = - \sum_{s=1}^k \frac{dp_s}{dt} \frac{\partial q_s}{\partial \eta_j} + \sum_{s=1}^k \frac{dq_s}{dt} \frac{\partial p_s}{\partial \eta_j}.$$

Далее из соотношений (1.32) находим

$$\frac{\partial p_s}{\partial \eta_j} = \sum_{l=1}^k \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_s \partial q_l} \frac{\partial q_l}{\partial \eta_j},$$

вследствие чего последнее равенство принимает вид

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_j} = - \sum_{s=1}^k \frac{dp_s}{dt} \frac{\partial q_s}{\partial \eta_j} + \sum_{s=1}^k \sum_{i=1}^k \frac{dq_s}{dt} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_s \partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \eta_j}.$$

Заменяя в первой сумме индекс s на i и изменяя порядок суммирования во второй сумме, мы напомним предыдущее равенство в следующем виде:

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_j} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial q_i}{\partial \eta_j} \left[- \frac{dp_i}{dt} + \sum_{s=1}^k \frac{dq_s}{dt} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_i \partial q_s} \right].$$

Продифференцировав теперь равенство

$$p_i = \frac{\partial \psi}{\partial q_i}$$

полным образом по t , получим

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_{s=1}^k \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_i \partial q_s} \frac{dq_s}{dt} + \sum_{s=1}^k \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_i \partial \xi_s} \frac{d\xi_s}{dt} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_i \partial t}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_j} = - \sum_{i=1}^k \sum_{s=1}^k \frac{\partial q_i}{\partial \eta_j} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_i \partial \xi_s} \frac{d\xi_s}{dt} - \sum_{i=1}^k \frac{\partial q_i}{\partial \eta_j} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_i \partial t}.$$

Коэффициент при $\frac{d\xi_s}{dt}$ в этом выражении равен

$$- \sum_{i=1}^k \frac{\partial q_i}{\partial \eta_j} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_i \partial \xi_s}.$$

Но если мы будем дифференцировать соотношение

$$- \eta_s = \frac{\partial \psi}{\partial \xi_s}$$

по величинам $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$, то получим для $j \neq s$:

$$0 = \sum_{i=1}^k \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_s \partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \eta_j}$$

и для $j = s$:

$$-1 = \sum_{i=1}^k \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_s \partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \eta_j}.$$

Следовательно, в выражении для $\frac{\partial H}{\partial \eta_j}$ из двойной суммы остается только один член, для которого $s = j$, и мы находим

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_j} = \frac{d\xi_j}{dt} - \sum_{i=1}^k \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \eta_j}.$$

Полагая теперь

$$R = H + \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

мы напомним последнее уравнение в следующем виде:

$$\frac{d\xi_j}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \eta_j} \quad (j = 1, 2, \dots, k),$$

и, следовательно, половина теоремы доказана.

Подобным же образом доказывается и вторая половина теоремы. Прежде всего, вычисляя частную производную от H по ξ_j , имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \xi_j} &= \sum_{s=1}^k \left(\frac{\partial H}{\partial q_s} \frac{\partial q_s}{\partial \xi_j} + \frac{\partial H}{\partial p_s} \frac{\partial p_s}{\partial \xi_j} \right) = \\ &= \sum_{s=1}^k \left(-\frac{dp_s}{dt} \frac{\partial q_s}{\partial \xi_j} + \frac{dq_s}{dt} \frac{\partial p_s}{\partial \xi_j} \right). \end{aligned}$$

Дифференцируя затем соотношение

$$p_s = \frac{\partial \psi}{\partial q_s}$$

частным образом по ξ_j и полным образом по t , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_s}{\partial \xi_j} &= \sum_{i=1}^k \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_s \partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_s \partial \xi_j}, \\ \frac{dp_s}{dt} &= \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial q_s \partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_s \partial \xi_i} \frac{d\xi_i}{dt} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_s \partial t}; \end{aligned}$$

поэтому выражение для $\frac{\partial H}{\partial \xi_j}$ напишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \xi_j} &= - \sum_{s=1}^k \sum_{i=1}^k \frac{\partial q_s}{\partial \xi_j} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_s \partial \xi_i} \frac{d\xi_i}{dt} - \\ &\quad - \sum_{s=1}^k \frac{\partial q_s}{\partial \xi_j} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_s \partial t} + \sum_{s=1}^k \frac{dq_s}{dt} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_s \partial \xi_j}. \end{aligned}$$

Для упрощения правой части последнего равенства заметим, что коэффициент при $\frac{d\xi_s}{dt}$ в первой сумме равен

$$- \sum_{s=1}^k \frac{\partial q_s}{\partial \xi_j} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_s \partial \xi_i}.$$

Но, продифференцировав по ξ_j соотношение

$$-\eta_i = \frac{\partial \psi}{\partial \xi_i},$$

получим

$$0 = \sum_{s=1}^k \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_i \partial q_s} \frac{\partial q_s}{\partial \xi_j} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_i \partial \xi_j},$$

откуда следует, что упомянутый коэффициент приводится к одночленному выражению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_i \partial \xi_j},$$

и производная $\frac{\partial H}{\partial \xi_j}$ напишется в виде *)

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_j} = \sum_{s=1}^k \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_s \partial \xi_j} \frac{d \xi_s}{dt} + \sum_{s=1}^k \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_s \partial \xi_j} \frac{dq_s}{dt} - \sum_{s=1}^k \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_s \partial t} \frac{dq_s}{\partial \xi_j}.$$

С другой стороны, дифференцируя соотношение

$$-\eta_j = \frac{\partial \psi}{\partial \xi_j}$$

полным образом по t , получим

$$-\frac{d \eta_j}{dt} = \sum_{s=1}^k \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_j \partial q_s} \frac{dq_s}{dt} + \sum_{s=1}^k \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_j \partial \xi_s} \frac{d \xi_s}{dt} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_j \partial t}.$$

Вычитая это равенство из предыдущего, найдем

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_j} + \frac{d \eta_j}{dt} = - \sum_{s=1}^k \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_s \partial t} \frac{dq_s}{\partial \xi_j} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_j \partial t}.$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial \xi_j} + \sum_{s=1}^k \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial q_s} \frac{\partial q_s}{\partial \xi_j},$$

*) Для однородности мы заменили в первой сумме бегущий индекс i на s .

то окончательно

$$\frac{d\eta_j}{dt} = - \frac{\partial R}{\partial \xi_j} \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

Таким образом, теорема доказана полностью.

Заметим теперь, что, изменяя несколько обозначения для независимых переменных, мы можем получить другие виды записи преобразования, в результате которого каноническая система (1.30) переходит в каноническую же систему (1.33) с характеристической функцией (1.34).

Таким образом, каждое из трех следующих преобразований:

$$1) \quad \psi = \psi(t | p | \eta),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial p} = q, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = -\xi,$$

$$2) \quad \psi = \psi(t | q | \eta),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial q} = p, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \xi,$$

$$3) \quad \psi = \psi(t | p | \xi),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial p} = q, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \eta$$

также будет каноническим.

Примечание. Если формулы первоначального преобразования написать в виде

$$\frac{\partial \psi}{\partial q} = p, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \eta$$

(что сводится просто к замене η на $-\eta$), то преобразованные уравнения будут иметь вид

$$\frac{d\xi_j}{dt} = - \frac{\partial R}{\partial \eta_j}, \quad \frac{d\eta_j}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \xi_j}.$$

2. **Формулировка Пуанкаре теоремы Якоби.** Если функция преобразования ψ не зависит от времени, то формулы преобразования также не будут содержать t , а поэтому вместо (1.32') мы будем иметь соотношения вида

$$q_j = q_j(\xi | \eta), \quad p_j = p_j(\xi | \eta). \quad (1.32'')$$

Кроме того, в этом случае

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} \equiv 0, \quad R \equiv H,$$

так что характеристическая функция преобразованной системы получится простой подстановкой в первоначальную характеристическую функцию H вместо q и p их выражений (1.32"). Полезно рассматривать этот частный случай, как отдельную теорему, которая более полно может быть сформулирована следующим образом:

Каноническая система

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_j}$$

переходит в каноническую систему того же вида

$$\frac{d\xi_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \eta_j}, \quad \frac{d\eta_j}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial \xi_j},$$

если преобразование переменных устанавливается одним из следующих четырех способов:

$$1) \quad \psi = \psi(q|\xi),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial q} = p, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = -\eta;$$

$$2) \quad \psi = \psi(p|\eta),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial p} = q, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = -\xi;$$

$$3) \quad \psi = \psi(q|\eta),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial q} = p, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \xi;$$

$$4) \quad \psi = \psi(p|\xi)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial p} = q, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \eta,$$

причем во всех случаях функция преобразования ψ есть любая однозначная, непрерывная функция указанных аргументов, обладающая непрерывными частными производными первого и второго порядка.

Теорема Якоби может быть сформулирована еще, как указал Пуанкаре *), другим, весьма изящным образом. Действительно, рассмотрим, например, функцию преобразования вида $\psi(q|\xi)$ и найдем ее полный дифференциал.

Мы будем иметь

$$d\psi = \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial \psi}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \psi}{\partial \xi_j} d\xi_j \right),$$

что можно представить с помощью формул преобразования в виде

$$d\psi(q|\xi) = \sum_{j=1}^k (p_j dq_j - \eta_j d\xi_j),$$

откуда следует, что выражение

$$\sum_{j=1}^k (p_j dq_j - \eta_j d\xi_j) \quad (1.35)$$

есть полный дифференциал.

Наоборот, пусть заданы формулы преобразования (1.32''). Если разрешить уравнения (1.32'') относительно p и η , то получим соотношения вида

$$p_j = p_j(q|\xi), \quad \eta_j = \eta_j(q|\xi).$$

Допустим, что после подстановки этих значений в выражение (1.35) последнее сделается полным дифференциалом некоторой функции $\psi(q|\xi)$ переменных q и ξ .

Тогда мы можем написать

$$\sum_{j=1}^k (p_j dq_j - \eta_j d\xi_j) = d\psi = \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial \psi}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \psi}{\partial \xi_j} d\xi_j \right),$$

откуда имеем, очевидно:

$$p_j = \frac{\partial \psi}{\partial q_j}, \quad -\eta_j = \frac{\partial \psi}{\partial \xi_j},$$

т. е. $\psi(q|\xi)$ есть функция канонического преобразования.

*) См. Poincaré H., Les methodes nouvelles de la mécanique céleste. т. I.

Аналогичный результат получим также, рассматривая и любой из остальных случаев преобразования, вследствие чего теорему Якоби можно сформулировать следующим образом:

Канонические уравнения не изменяют своего вида при всех преобразованиях переменных, при которых одно из четырех выражений

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k (p_j dq_j - \eta_j d\xi_j), \quad \sum_{j=1}^k (p_j dq_j + \xi_j d\eta_j), \\ \sum_{j=1}^k (q_j dp_j - \xi_j d\eta_j), \quad \sum_{j=1}^k (q_j dp_j + \eta_j d\xi_j) \end{aligned}$$

есть полный дифференциал.

Эта формулировка теоремы Якоби удобна тем, что при ее применении нам не нужно знать функцию преобразования.

Рассмотрим, например, преобразование

$$\begin{aligned} q_1 &= \sqrt{2\xi_1} \cos \eta_1, & p_1 &= \sqrt{2\xi_1} \sin \eta_1, \\ q_s &= \xi_s, & p_s &= \eta_s \quad (s = 2, 3, \dots, k). \end{aligned}$$

Так как

$$q_1 dp_1 = 2\xi_1 \cos^2 \eta_1 d\eta_1 + \sin \eta_1 \cos \eta_1 d\xi_1,$$

то

$$q_1 dp_1 - \xi_1 d\eta_1 = \xi_1 \cos 2\eta_1 d\eta_1 + \frac{1}{2} \sin 2\eta_1 d\xi_1 = d\left(\frac{1}{2} \xi_1 \sin 2\eta_1\right),$$

и мы находим, что выражение

$$\sum_{j=1}^k (q_j dp_j - \xi_j d\eta_j) = d\left(\frac{1}{2} \xi_1 \sin 2\eta_1\right)$$

есть полный дифференциал. Поэтому сделанное преобразование есть каноническое *).

Рассмотрим еще линейное преобразование вида

$$q_j = \sum_{s=1}^k \alpha_{js} \xi_s, \quad p_j = \sum_{s=1}^k \beta_{js} \eta_s, \quad (1.36)$$

*) Этот пример показывает, между прочим, что можно преобразовывать только некоторые пары канонических переменных.

где все α и β постоянны. Предположим, что эти постоянные таковы, что мы имеем тождественно

$$\sum_{j=1}^k q_j p_j = \sum_{j=1}^k \xi_j \eta_j. \quad (1.36')$$

Тогда формулы (1.36) определяют каноническое преобразование. Действительно, из (1.36) следует, что dp связаны с $d\eta$ теми же линейными соотношениями, как и p с η . Поэтому в тождестве (1.36') мы можем заменить p_j и η_j на dp_j и $d\eta_j$, что приводит к следующему тождеству:

$$\sum_{j=1}^k q_j dp_j = \sum_{j=1}^k \xi_j d\eta_j,$$

откуда

$$\sum_{j=1}^k (q_j dp_j - \xi_j d\eta_j) = 0.$$

что, очевидно, есть полный дифференциал.

Возьмем теперь частный случай линейного преобразования, когда $\beta_{js} = \alpha_{js}$, т. е. когда имеем

$$q_j = \sum_{s=1}^k \alpha_{js} \xi_s, \quad p_j = \sum_{s=1}^k \alpha_{js} \eta_s. \quad (1.36'')$$

Покажем, что если это преобразование является ортогональным, то оно будет также каноническим.

Действительно, если преобразование (1.36), определяемое коэффициентами α_{js} , ортогонально, то выполняются следующие условия *):

$$\sum_{s=1}^k \alpha_{js}^2 = 1, \quad \sum_{s=1}^k \alpha_{js} \alpha_{is} = 0 \quad (i \neq j),$$

откуда вытекают соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k q_j^2 &= \sum_{j=1}^k \xi_j^2, & \sum_{j=1}^k p_j^2 &= \sum_{j=1}^k \eta_j^2, \\ \sum_{j=1}^k (q_j + p_j)^2 &= \sum_{j=1}^k (\xi_j + \eta_j)^2, \end{aligned}$$

*) См., например, Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 3, Гостехиздат, 1951 (1953) или Курош А. Г., Курс высшей алгебры, Гостехиздат, 1946.

из которых в свою очередь следует

$$\sum_{j=1}^k q_j p_j = \sum_{j=1}^k \xi_j \eta_j.$$

Это соотношение, в силу только что доказанного, является условием того, что преобразование (1.36'') является каноническим.

§ 5. Метод Гамильтона — Якоби

1. Уравнение Гамильтона — Якоби. Из теории канонических преобразований вытекает примечательный способ нахождения общего решения какой-нибудь канонической системы.

Пусть нам нужно проинтегрировать систему

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad (1.37)$$

где характеристическая функция H есть заданная функция времени и переменных q и p .

Как показано в предыдущем параграфе, если нам дана функция $\psi(t|q|\xi)$ от t , старых переменных q и новых переменных ξ , то, делая преобразование переменных посредством подстановки

$$\frac{\partial \psi}{\partial q_j} = p_j, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \xi_j} = - \eta_j, \quad (1.38)$$

мы получим преобразованные уравнения в виде

$$\frac{d\xi_j}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \eta_j}, \quad \frac{d\eta_j}{dt} = - \frac{\partial R}{\partial \xi_j}, \quad (1.37')$$

где

$$R = \frac{\partial \psi}{\partial t} + H \quad (1.38')$$

есть новая характеристическая функция.

Поэтому, если нам удастся проинтегрировать преобразованную систему (1.37'), то мы будем знать новые переменные ξ и η в функции времени и $2k$ произвольных постоянных, а тогда, по формулам (1.38), мы получим также и первоначальные переменные q и p как функции t и $2k$

произвольных постоянных, т. е. получим общее решение, или общий интеграл заданной системы (1.37).

Поэтому можно поставить следующую задачу: *считая функцию ψ неизвестной, найти или подобрать ее таким образом, чтобы преобразованная система могла быть решена без труда.*

Мы достигнем этой цели, подбирая, например, функцию ψ так, чтобы новая характеристическая функция R была равна тождественно нулю. Действительно, тогда уравнения (1.37') дают просто

$$\xi_j = \alpha_j, \quad \eta_j = -\beta_j, \quad (1.39)$$

где α и β — постоянные интегрирования, и наша задача решена.

Итак, функцию преобразования ψ нужно определить из условия

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + H = 0, \quad (1.38'')$$

после чего по формулам (1.38) с помощью (1.39) получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial q_j} = p_j, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_j} = \beta_j, \quad (1.40)$$

а эти равенства и представляют собой общий интеграл системы (1.37), ибо дают возможность определить неизвестные q и p как функции времени и $2k$ произвольных постоянных α и β .

Посмотрим теперь, что представляет собой условие (1.38''). Так как характеристическая функция H зависит от t , q и p , а, с другой стороны, по формулам (1.40) должно быть $p_j = \frac{\partial \psi}{\partial q_j}$, то, заменяя в условии (1.38'') величины p на производные $\frac{\partial \psi}{\partial q}$, мы напомним это условие в следующем виде:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + H\left(t, q, \frac{\partial \psi}{\partial q}\right) = 0 \quad (1.41)$$

или, в более подробной записи:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + H\left(t; q_1, q_2, \dots, q_k; \frac{\partial \psi}{\partial q_1}, \frac{\partial \psi}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial q_k}\right) = 0.$$

Это есть уравнение в частных производных первого порядка, называемое *уравнением Гамильтона — Якоби*.

Неизвестной функцией в этом уравнении является искомая функция преобразования ψ , которая должна содержать кроме $k+1$ независимых переменных t и q еще k величин α , являющихся произвольными постоянными.

Таким образом, чтобы найти функцию ψ , дающую общий интеграл системы (1.37), мы должны отыскать такое решение уравнения (1.41), которое включает в себе k произвольных постоянных.

В теории дифференциальных уравнений такое решение уравнения с частными производными называется *полным интегралом*, и наша задача приводится теперь к нахождению полного интеграла уравнения (1.41)*).

Вообще говоря, задача об интегрировании уравнения с частными производными ничуть не проще интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.37).

В теории дифференциальных уравнений даже показывается, что эти обе задачи совершенно эквивалентны и одна приводится к другой, так что когда удастся найти полный интеграл уравнения (1.41), то в таких случаях удастся проинтегрировать и каноническую систему прямым способом. Однако с теоретической точки зрения метод Гамильтона — Якоби представляет большой интерес, ибо является источником разнообразных приближенных методов интегрирования уравнений движения в задачах небесной механики и позволяет дать этим методам наиболее простую и удобную форму.

Если характеристическая функция H не содержит явно времени, то уравнение Гамильтона — Якоби можно несколько упростить. Действительно, сделаем в уравнении (1.41) подстановку

$$\psi = -ht + W, \quad (1.42)$$

где h — произвольная постоянная, а W — новая неизвестная функция, зависящая только от величин q .

*) Собственно говоря, *полным интегралом* называется такое решение уравнения с частными производными, которое содержит столько же произвольных постоянных, сколько есть независимых переменных. Но так как в уравнение (1.41) сама функция не входит, то одна из постоянных является аддитивной и здесь не существенна. См., например, Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, изд. 6-е, Гостехиздат, 1953 или Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 4, изд. 3-е, Гостехиздат, 1953.

Мы будем иметь

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -h, \quad \frac{\partial \psi}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q},$$

и уравнение Гамильтона — Якоби примет следующий вид:

$$H\left(q \left| \frac{\partial W}{\partial q} \right. \right) = h. \quad (1.43)$$

Это уравнение немного проще уравнения (1.41), так как в него не входит t и, следовательно, независимых переменных на одно меньше. Найдя какое-нибудь решение этого уравнения, зависящее, кроме h , еще от $k-1$ произвольных постоянных $\alpha_2, \dots, \alpha_k$, мы получим полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби по формуле (1.42).

Применяя теперь теорему Гамильтона — Якоби, мы можем написать общий интеграл канонической системы (1.37), где $H = H(q|p)$, в следующем виде:

$$\frac{\partial W}{\partial h} = t + \beta, \quad \frac{\partial W}{\partial x_2} = \beta_2, \dots, \quad \frac{\partial W}{\partial x_k} = \beta_k, \quad (1.44)$$

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \dots, \quad \frac{\partial W}{\partial q_k} = p_k \quad (1.44')$$

с произвольными постоянными

$$h, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k,$$

$$\beta, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_k.$$

Все уравнения (1.44), кроме первого, не содержат независимой переменной t . Следовательно, мы можем определить из них какие-нибудь $k-1$ из величин q в функции одной из них, например q_1 , и произвольных постоянных. Таким образом, мы можем написать:

$$q_s = q_s(q_1, h|\alpha|\beta) \quad (s = 2, 3, \dots, k). \quad (1.45)$$

Уравнения (1.45) не содержат времени и поэтому дают только геометрическую картину движения. Эти уравнения называются еще *уравнениями траектории*, так как *траекторией* называется, как обычно, геометрическое место точек одного измерения в пространстве k измерений. Вставляя

затем выражения (1.45) в первое из уравнений (1.44), мы получим соотношение между t и q_1 , с помощью которого можем определить q_1 , а потом и все остальные q в функции времени и произвольных постоянных. После этого уравнения (1.44') дадут также величины p .

2. Случай интегрируемости Лиувилля и Штеккеля. Уравнение Гамильтона — Якоби представляет собой нелинейное уравнение с частными производными, а поэтому найти решение этого уравнения почти никогда не удается.

Только в некоторых простейших случаях оказывается возможным получить полный интеграл каким-нибудь искусственным способом. Эти случаи немногочисленны, и характерно то, что те же случаи можно исследовать и непосредственно, не прибегая к помощи теоремы Гамильтона — Якоби. Неизвестно пока ни одного случая, который допускал бы решение только этим методом, так что эффективность его для интегрирования канонических систем весьма невелика.

Лиувилль первый указал случай, когда уравнение Гамильтона — Якоби интегрируется в квадратурах. Затем более общий случай указал Штеккель, и позднейшие исследования были посвящены различным обобщениям результатов этих двух ученых.

В 1911 г. итальянский ученый Бургатти поставил общую задачу — найти все случаи, в которых уравнение Гамильтона — Якоби интегрируется в квадратурах. Его анализ привел к довольно общей форме уравнения, из которой все предыдущие получаются как частные случаи.

Мы ограничимся здесь рассмотрением случаев Лиувилля и Штеккеля, как представляющих наибольший интерес для небесной механики.

Случай Лиувилля мы рассматривали уже в § 2, как пример интегрирования в квадратурах уравнений Лагранжа. Поэтому остается только показать, что в этом случае уравнение Гамильтона — Якоби также может быть интегрировано.

Возьмем формулы (1.16) и построим с их помощью характеристическую функцию соответствующей канонической системы.

Так как

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = B A_j(q_j) \dot{q}_j,$$

то мы имеем

$$H = \frac{1}{B} \sum_{j=1}^k \left[\frac{p_j^2}{2A_j(q_j)} - U_j(q_j) \right].$$

Эта характеристическая функция не зависит от t , а поэтому уравнение Гамильтона — Якоби напишется в виде

$$\frac{1}{B} \sum_{j=1}^k \left[\frac{1}{2A_j(q_j)} \left(\frac{\partial W}{\partial q_j} \right)^2 - U_j(q_j) \right] = h,$$

или в виде

$$\sum_{j=1}^k \left[\frac{1}{2A_j(q_j)} \left(\frac{\partial W}{\partial q_j} \right)^2 - U_j(q_j) - hB_j(q_j) \right] = 0.$$

Чтобы найти решение этого уравнения, зависящее от $k-1$ произвольных постоянных, заметим, что левая его часть является суммой k слагаемых, каждое из которых содержит только одну из переменных q . Поэтому будем искать решение уравнения также в виде суммы членов, каждый из которых зависит только от одной из переменных q , т. е. положим

$$W = \sum_{j=1}^k W_j(q_j).$$

Подставляя это выражение для W в наше уравнение, мы увидим, что ему можно удовлетворить, приравнявая каждое слагаемое в отдельности произвольной постоянной, т. е. полагая

$$\frac{1}{2A_j(q_j)} \left(\frac{dW_j}{dq_j} \right)^2 - U_j(q_j) - hB_j(q_j) = \alpha_j,$$

при условии, что

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j = 0.$$

Таким образом, каждая из функций W_j определяется простой квадратурой

$$W_j(q_j) = \int \sqrt{2A_j(q_j)[U_j(q_j) + hB_j(q_j) + \alpha_j]} dq_j,$$

и мы получим решение уравнения Гамильтона — Якоби в виде

$$W = \sum_{j=1}^k \int \sqrt{2A_j(q_j)[U_j(q_j) + hB_j(q_j) + \alpha_j]} dq_j,$$

которое содержит k произвольных постоянных $h, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, а $\alpha_1 = -\alpha_2 - \dots - \alpha_k$.

Рассмотрим теперь случай интегрируемости Штеккеля.

Пусть даны $k(k+1)$ функций, каждая из которых зависит только от одной из переменных q :

$$\varphi_{ji}(q_j), \quad U_j(q_j) \quad (j, i = 1, 2, \dots, k),$$

и таких, что определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(q_1) & \varphi_{21}(q_2) & \dots & \varphi_{k1}(q_k) \\ \varphi_{12}(q_1) & \varphi_{22}(q_2) & \dots & \varphi_{k2}(q_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{1k}(q_1) & \varphi_{2k}(q_2) & \dots & \varphi_{kk}(q_k) \end{vmatrix}$$

не равен тождественно нулю, а во всем остальном совершенно произвольных. Тогда, если живая сила T и силовая функция U определяются формулами

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k A_j p_j^2, \quad U = \sum_{j=1}^k A_j U_j(q_j),$$

где

$$A_j = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{j1}} \quad (j = 1, 2, \dots, k),$$

то уравнение Гамильтона — Якоби интегрируется в квадратурах.

Действительно, характеристическая функция

$$H = T - U = \sum_{j=1}^k \left[\frac{1}{2} A_j p_j^2 - A_j U_j \right]$$

в данном случае не зависит от t и поэтому уравнение Гамильтона — Якоби напишется в виде

$$\sum_{j=1}^k A_j \left[\left(\frac{\partial W}{\partial q_j} \right)^2 - 2U_j(q_j) \right] = 2h.$$

Чтобы привести это уравнение к квадратурам, заметим, что определитель

$$\Delta = \sum_{j=1}^k \varphi_{j1} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{j1}},$$

поэтому

$$\sum_{j=1}^k \varphi_{j1} A_j = 1.$$

С помощью этого соотношения уравнение Гамильтона — Якоби приводится к виду

$$\sum_{j=1}^k A_j \left[\left(\frac{\partial W}{\partial q_j} \right)^2 - 2U_j(q_j) - 2h\varphi_{j1}(q_j) \right] = 0. \quad (1.46)$$

Будем опять искать решение в виде суммы

$$W = \sum_{j=1}^k W_j(q_j).$$

Тогда мы удовлетворим уравнению (1.46), полагая

$$\left(\frac{dW_j}{dq_j} \right)^2 = 2U_j(q_j) + 2h\varphi_{j1}(q_j) + \sum_{i=2}^k \alpha_i \varphi_{ji}(q_j),$$

где $\alpha_2, \dots, \alpha_k$ — произвольные постоянные.

Действительно, подставляя эти выражения для $\left(\frac{dW_j}{dq_j} \right)^2$ в уравнение (1.46), мы представим левую его часть в виде

$$\sum_{j=1}^k \left(A_j \sum_{i=2}^k \alpha_i \varphi_{ji} \right) = \sum_{i=2}^k \alpha_i \left(\sum_{j=1}^k A_j \varphi_{ji} \right),$$

а заменяя здесь A_j их значениями, будем иметь

$$\sum_{j=1}^k A_j \varphi_{ji} = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^k \varphi_{ji} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{j1}} \quad (i = 2, 3, \dots, k).$$

В силу известного свойства определителей правая часть равна тождественно нулю для всякого i из ряда $2, 3, \dots, k$.

Определяя теперь W_j квадратурой и беря сумму полученных выражений, найдем окончательно

$$W = \sum_{j=1}^k \int \sqrt{2U_j(q_j) + 2h\varphi_{j1}(q_j) + \sum_{i=2}^k \alpha_i \varphi_{ji}(q_j)} dq_j. \quad (1.47)$$

Таким образом, нужное решение уравнения Гамильтона — Якоби получено.

В качестве примера рассмотрим задачу о движении материальной точки под действием силы, обладающей силовой функцией $U(r)$, зависящей только от расстояния r точки до начала координат. Как показано в § 3, уравнения движения могут быть написаны в канонической форме с характеристической функцией $H = T - U$, где

$$T = \frac{1}{2m} \left[p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2} + \frac{p_3^2}{r^2 \cos^2 \varphi} \right].$$

Положим теперь

$$\varphi_{11} = 1, \quad \varphi_{21} = 0, \quad \varphi_{31} = 0,$$

$$\varphi_{12} = -\frac{1}{r^2}, \quad \varphi_{22} = 1, \quad \varphi_{32} = 0,$$

$$\varphi_{13} = 0, \quad \varphi_{23} = -\frac{1}{\cos^2 \varphi}, \quad \varphi_{33} = 1,$$

и

$$U_1 = U(r), \quad U_2 = 0, \quad U_3 = 0.$$

Составляя определитель Δ , найдем

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{21} & \varphi_{31} \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} & \varphi_{32} \\ \varphi_{13} & \varphi_{23} & \varphi_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{r^2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\cos^2 \varphi} & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

откуда имеем

$$A_1 = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{11}} = 1, \quad A_2 = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{21}} = \frac{1}{r^2},$$

$$A_3 = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{31}} = \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi},$$

так что мы действительно имеем случай Штеккеля.

Решение соответствующего уравнения Гамильтона — Якоби мы получим по формуле (1.47), где надо положить $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = \lambda$ и заменить величины φ_{ji} , A_j и U_j их приведенными значениями. Мы получим

$$W = \int \sqrt{mU(r) + 2h - \frac{\alpha_2}{r^2}} dr + \\ + \int \sqrt{\alpha_2 - \frac{\alpha_3}{\cos^2 \varphi}} d\varphi + \int \sqrt{\alpha_3} d\lambda.$$

Задача решена.

3. Метод изменения произвольных постоянных. Возвращаясь теперь к общей канонической системе

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, k), \quad (1.48)$$

рассмотрим весьма важный для последующего способ ее интегрирования, называемый *методом изменения произвольных постоянных*.

Разложим характеристическую функцию $H(t|q|p)$ произвольным образом на сумму двух слагаемых, полагая

$$H(t|q|p) = H_0(t|q|p) + H_1(t|q|p),$$

и рассмотрим каноническую систему с упрощенной характеристической функцией $H_0(t|q|p)$:

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial q_j}. \quad (1.48')$$

Предположим, что соответствующее уравнение Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + H_0\left(t|q|\frac{\partial \psi}{\partial q}\right) = 0 \quad (1.49)$$

мы сумели каким-то способом проинтегрировать т. е. получили решение этого уравнения $\psi(t|q|\alpha)$, зависящее от k произвольных постоянных α .

Тогда по формулам (1.40) мы найдем общий интеграл системы (1.48') в следующем виде:

$$\frac{\partial \psi}{\partial q_j} = p_j, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_j} = \beta_j \quad (j = 1, 2, \dots, k), \quad (1.50)$$

а решая эти уравнения относительно q и p , мы получим общее решение системы (1.48'):

$$q_j = q_j(t | \alpha | \beta), \quad p_j = p_j(t | \alpha | \beta). \quad (1.50')$$

Функции (1.50') удовлетворяют уравнениям (1.48'), каковы бы ни были значения произвольных постоянных α и β , но они, конечно, не удовлетворяют первоначальной системе (1.48).

Однако если считать величины α и β не постоянными, а некоторыми функциями времени, то мы можем подобрать эти функции так, чтобы выражения (1.50') удовлетворяли также уравнениям (1.48).

В этом и заключается основная идея метода изменения (вариации) произвольных постоянных, обоснованного Лагранжем и приспособленного Якоби для канонических систем.

С математической точки зрения этот метод представляет собой просто замену переменных q и p переменными α и β посредством формул преобразования (1.50'), или (1.50) с функцией преобразования ψ , удовлетворяющей уравнению (1.49).

Поэтому, на основании теоремы Якоби, новые переменные α и β определяются канонической системой с характеристической функцией

$$R = H + \frac{\partial \psi}{\partial t} = H - H_0 = H_1.$$

В силу примечания к теореме Якоби эта каноническая система будет иметь вид

$$\frac{d\alpha_j}{dt} = - \frac{\partial H_1}{\partial \beta_j}, \quad \frac{d\beta_j}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_j}. \quad (1.48'')$$

Решая систему (1.48''), мы получим α и β как функции времени и $2k$ произвольных постоянных α' и β' в виде

$$\alpha_j = \alpha_j(t | \alpha' | \beta'), \quad \beta_j = \beta_j(t | \alpha' | \beta'),$$

а подставляя эти выражения в формулы (1.50'), мы найдем также общее решение заданной канонической системы (1.48).

В небесной механике широко пользуются этим методом в различных его видоизменениях.

Заметим, что когда этот метод применяется к задачам небесной механики, т. е. когда уравнения (1.48) определяют движение некоторой материальной системы (одного или нескольких небесных тел), то уравнения (1.48') называются уравнениями *промежуточного* или *невозмущенного* движения. Величины α и β называют тогда *каноническими элементами*, а H_1 — *возмущающей* (или *пертурбационной*) функцией.

Если характеристическая функция H не зависит от времени, то естественно выбрать H_0 также не зависящей от времени, а тогда вместо уравнения (1.49) мы будем иметь следующее:

$$H_0 \left(q \left| \frac{\partial W}{\partial q} \right. \right) = h. \quad (1.49')$$

Если $W(q|\alpha|h)$ есть решение этого уравнения, зависящее кроме h еще от $k-1$ произвольных постоянных α , то общий интеграл упрощенной системы (невозмущенного движения) определится формулами

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial h} &= t + \beta, & \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} &= \beta_2, \dots, \frac{\partial W}{\partial \alpha_k} = \beta_k, \\ \frac{\partial W}{\partial q_1} &= p_1, & \frac{\partial W}{\partial q_2} &= p_2, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_k} = p_k, \end{aligned} \quad (1.50'')$$

которые и будут формулами преобразования к новым переменным, для определения которых будем иметь те же уравнения (1.48''), в которых нужно только положить $\alpha_1 = h$ и $\beta_1 = \beta$.

Отметим, что иногда бывает удобно взять за одну из новых переменных $t + \beta$ вместо β , что не изменит канонического вида уравнений, но слегка изменит характеристическую функцию. Действительно, сделаем в уравнениях (1.48'') подстановку

$$\begin{aligned} t + \beta &= \beta_1^*, & \beta_s &= \beta_s^*, \\ h &= \alpha_1^*, & \alpha_s &= \alpha_s^* \end{aligned} \quad (s = 2, 3, \dots, k).$$

Тогда имеем

$$\frac{d\beta_1^*}{dt} = 1 + \frac{d\beta}{dt} = 1 + \frac{\partial H_1}{\partial h} = \frac{\partial (H_1 + \alpha_1^*)}{\partial x_1^*}, \quad \frac{\partial H_1}{\partial \beta} = \frac{\partial H_1}{\partial \beta_1^*}.$$

Полагая

$$H_1^* = H_1 + \alpha_1^*,$$

будем иметь вместо системы (1.48'') следующую:

$$\frac{dx_j^*}{dt} = -\frac{\partial H_1^*}{\partial \beta_j^*}, \quad \frac{d\beta_j^*}{dt} = \frac{\partial H_1^*}{\partial x_j^*}. \quad (1.51)$$

ГЛАВА II

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

§ 1. Постановка основной задачи небесной механики

1. Задача о движении небесных тел. Как было отмечено в конце предисловия, мы условились называть *небесной механикой* (в согласии с подавляющим большинством специалистов) тот отдел астрономии, в котором изучаются движения небесных тел или, лучше сказать, *небесных объектов*.

Последнее понятие включает в себя как естественные небесные образования (частицы космической пыли, планеты, кометы, отдельные звезды, звездные системы, туманности и т. д.), так и искусственные небесные тела (искусственные спутники Земли, космические корабли, межпланетные станции и т. п.), число которых начиная с 1957 г. быстро растет *).

Изучить движение какого-либо небесного тела — это значит, с одной стороны, установить общие законы, характеризующие это движение в целом, а с другой стороны — получить возможность определять для всякого момента времени (заключенного в некотором, конечном или бесконечном, промежутке) положение и скорость рассматриваемого тела по отношению к другим телам вселенной.

Эти две части исследования всякого движения известны под названиями *качественного* и *количественного* анализа движения и, строго говоря, не могут быть отделены друг

*) Изучение и «покорение» космического пространства развивается такими гигантскими шагами, что в будущем мы, быть может, научимся фабриковать из космического материала целые планеты.

от друга, если мы ставим своей целью возможно более полное изучение окружающего нас мира.

Как известно из теоретической механики, движение всякого тела составляется из *поступательного движения* его центра инерции, из *вращательного движения* вокруг собственного центра инерции и из *изменения формы и структуры тела* *).

Эти три части изучения движения также не могут быть отделены одна от другой и должны рассматриваться совместно.

Всякое движение происходит вследствие совместного действия ряда сил. Для исследования движения необходимо прежде всего точно знать характер каждой силы и законы, определяющие ее изменение. Если это известно, то, как показано в главе первой, изучение движения сводится к составлению дифференциальных уравнений движения и к последующему исследованию этих уравнений и их интегралов.

Силы, обуславливающие движения небесных тел, как естественных, так и искусственных, чрезвычайно многочисленны и разнообразны по своему характеру и происхождению. Законы, определяющие их изменение, в некоторых случаях известны только весьма приблизительно, а в других случаях и совершенно неизвестны, вследствие чего изучение движений, с абсолютной точностью и во всех подробностях, становится фактически невозможным **).

Поэтому мы оказываемся вынужденными заранее отказаться от такой явно безнадежной задачи и заменить ее другой, более простой задачей — приближенным исследованием движений небесных тел.

Эта задача приводит нас к хорошо известному и широко применяющемуся почти во всех отраслях знания методу последовательных приближений, основная идея которого состоит в замене интересующей нас, но очень

*) Вместо центра инерции (или центра масс) иногда выгоднее рассматривать какую-либо другую точку, неизменно связанную с телом и, может быть, даже не принадлежащую этому телу.

**) Начавшееся совсем недавно широкое изучение космического пространства несомненно позволит уточнить наши знания о природе космических сил и, возможно, обнаружить новые, до сих пор никому неизвестные, силы. Некоторые придется в дальнейшем принимать во внимание.

сложной задачи рядом более простых, с каждым шагом все усложняющихся задач.

Применяя этот основной метод, мы прежде всего упрощаем нашу задачу, отбрасывая все усложняющие ее обстоятельства, с тем, чтобы ее возможно было решить до конца.

Эта упрощенная задача, конечно, может значительно отличаться от действительной задачи и ее решение дает только некоторое приближение к действительности, которое называют первым (а иногда — нулевым) приближением.

Принимая затем во внимание некоторые из отброшенных вначале обстоятельств, мы ставим другую задачу, решение которой дает нам второе приближение к действительности.

Таким же образом мы поступаем и далее, строя третье и последующие приближения, результаты каждого из которых должны все меньше и меньше отличаться от действительности.

Вставая на путь последовательных приближений, мы должны прежде всего выбрать некоторый объект, движение которого может нас интересовать, а затем отобрать те причины, которые влияют на движение этого объекта и которые мы соглашаемся принимать во внимание.

Выбор объекта обуславливается тем, что задача о совместном исследовании движений всех тел вселенной не имеет смысла, хотя бы потому, что большинство небесных тел нам еще не известно и с каждым днем открываются (или делаются!) все новые и новые небесные тела.

Кроме того, мы оказываемся вынужденными рассматривать только такие небесные тела, которые могут быть наблюдаемы с достаточной уверенностью при помощи астрономических инструментов, так как то, что нельзя наблюдать, нельзя, разумеется, и изучать.

Поэтому первые задачи небесной механики заключались в изучении движений тел нашей солнечной системы, т. е. планет, их спутников, комет, астероидов, метеоритов и различных комбинаций из перечисленных объектов.

При этом делалось молчаливое допущение о том, что кроме солнечной системы ничего более в природе не существует, что наша система находится как бы в одиночестве во всем необъятном мировом пространстве. Такое допущение основывается, конечно, на том, что расстояния от Солнца

даже до ближайших звезд и вообще между двумя любыми звездными системами настолько велики, что на интересующем нас промежутке времени их влияния друг на друга, несомненно, ничтожны, и этими влияниями можно полностью пренебречь. Таким образом, мы можем рассматривать солнечную систему изолированно от всех прочих звезд и изучать движения тел, принадлежащих к этой системе.

В дальнейшем, вследствие накопления обширного наблюдательного материала, стало возможным ставить задачи и о движениях в других звездных системах, например, в системах двойных или, вообще, кратных звезд, а затем и в галактиках.

Но естественно, что каждая такая система, будь то двойная звезда или галактика, также может рассматриваться изолированно от всех прочих систем так, как будто бы она находится одна во всей вселенной.

Выбрав тот или иной объект вселенной для изучения его движения, мы должны затем, как было отмечено выше, отобрать те силы, которые могут существенно влиять на это движение и характер которых нам достаточно хорошо известен.

Все прочие силы мы соглашаемся (по крайней мере временно, в первом приближении) не рассматривать и проводим исследование так, как будто бы они совершенно не существовали.

Следуя этому принципу, небесная механика сосредоточивает свое внимание прежде всего на силах притяжения, происхождение и природа которых, правда, до сих пор неизвестны, но наличие которых было установлено великим Ньютоном в законе всемирного тяготения, который и теперь считается (и долго еще будет считаться!) одним из основных законов природы.

Другую категорию сил, существование которых не вызывает никаких сомнений, так как их проявления известны нам из повседневного опыта, составляют силы сопротивления среды, в которой происходит движение. Особенно часто приходится принимать во внимание силу сопротивления земной атмосферы, действующую на двигающиеся около Земли искусственные спутники, а также метеоры и метеориты.

Существуют также некоторые другие известные категории сил, действия которых иногда должны приниматься

во внимание и законы действия которых более или менее изучены.

Но основной силой, которую во всех случаях в небесной механике приходится рассматривать и принимать во внимание, является безусловно сила ньютоновского притяжения, определяемая законом Ньютона, который, как известно, формулируется следующим образом:

Всякая материальная частица притягивает каждую другую материальную частицу с силой, пропорциональной произведению масс этих частиц и обратно пропорционально квадрату их взаимного расстояния.

Обозначим через m и m' массы двух материальных частиц и через r — их взаимное расстояние. Согласно закону Ньютона каждая из этих частиц находится под действием силы, направленной к другой частице и равной по величине

$$F = f \frac{mm'}{r^2},$$

где f — коэффициент пропорциональности, численное значение которого зависит от выбора основных единиц (длины, массы и времени). Этот коэффициент называется постоянной тяготения или гравитационной постоянной. Заметим, что в целях упрощения формул основные единицы выбираются иногда таким образом, чтобы постоянная тяготения равнялась единице.

2. Непременные упрощения. Установив характер сил, которые мы соглашаемся рассматривать, мы можем составить теперь дифференциальные уравнения движения тел, принадлежащих к некоторой системе, относительно какой-нибудь подходящим образом выбранной системы координат и прийти таким образом к чисто математической задаче, решение которой и составляет главную цель небесной механики.

Как известно из теоретической механики, центр инерции материальной системы, не подверженной действиям внешних сил, движется в абсолютном пространстве *) прямолинейно

*) Абсолютным пространством мы называем здесь все внешнее по отношению к рассматриваемой звездной системе пространство. «Абсолютной» системой координат мы будем называть систему координат, связанную с абсолютным пространством, т. е. по существу с какой-либо другой звездной системой, весьма удаленной от той, на которой мы сосредоточиваем свое внимание. Таким образом, для солнечной системы абсолютной системой координат будет система, связанная с нашей Галактикой.

и равномерно. Так как мы согласились изучать любую звездную систему изолированно от всей остальной вселенной, то всякая такая система (например, солнечная система) всегда будет обладать указанным свойством. Это свойство определяет движение системы в целом и позволяет ограничиться исследованием движений тел относительно общего центра масс всей системы.

Далее будет показано, что если мы сумеем определить движения тел системы относительно центра масс, то уже без всяких затруднений определим и их абсолютные движения, так как движение центра масс известно.

Но и эта задача еще чрезвычайно сложна и мы вынуждены опять вносить в нее некоторые упрощения. Прежде всего мы строго ограничим число тел в системе, выбирая из всех тел системы только наиболее крупные, обладающие наибольшими массами по сравнению с остальными более мелкими, которые мы в первом приближении исключим из рассмотрения. Такой отбор оправдывается тем, что тела, обладающие очень малыми массами, оказывают крайне слабые влияния на тела с большими массами, и мы можем считать в первом приближении, что эти влияния просто равны нулю.

Второе упрощение заключается в том, что мы соглашаемся рассматривать тела как абсолютно твердые, отвлекаясь таким образом от изменений их формы и отделяя поступательные движения тел от их вращательных движений вокруг центров инерции.

Точно так же мы допустим, что массы тел системы не изменяются с течением времени, т. е. что они суть величины постоянные. Кроме того, в первом приближении мы совершенно пренебрежем эффектом сопротивления среды, т. е. будем рассматривать пространство, в котором движутся интересующие нас тела, как абсолютно пустое.

Все эти допущения, конечно, строго говоря, не соответствуют действительности, но ошибки, проистекающие от этих допущений, в большинстве случаев ничтожно малы и могут не приниматься во внимание.

Однако существуют отдельные частные случаи, в которых сделанные допущения оказываются несостоятельными и должны быть полностью или частично отброшены. Такие случаи будут рассматриваться отдельно после рассмотрения той

задачи, которую мы здесь ставим и которую называем основной задачей небесной механики.

Наконец, последнее упрощение, которое мы сделаем в первом приближении, заключается в том, что мы отвлекаемся от линейных размеров тел и уславливаемся все тела системы рассматривать как материальные точки.

Возможность этого допущения оправдывается соображениями, основанными на известных результатах теории притяжения*), а именно в теории притяжения показывается, что два тела, обладающие любой формой и произвольным внутренним строением, взаимно притягиваются с силой, почти обратно пропорциональной квадрату расстояния между их центрами инерции, если линейные размеры этих тел весьма малы по сравнению с упомянутым расстоянием.

Кроме того, в той же теории притяжения доказывается, что два шара, обладающие сферическим строением, притягиваются взаимно с силой, строго пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между их центрами.

Так как звезды, планеты и их спутники имеют примерно шарообразную форму, а расстояния между небесными телами, вообще говоря, весьма велики, то соединение двух приведенных результатов теории притяжения позволяет считать с достаточным основанием, что такие небесные тела взаимно притягиваются друг к другу так же, как притягивались бы материальные точки, помещенные в центрах инерции этих тел и обладающие их массами.

Другие тела (астеронды, метеоры и искусственные небесные тела), не обладающие правильной сферической формой, имеют зато ничтожно малые размеры, что также позволяет рассматривать их как материальные точки до тех пор, по крайней мере, пока они не приближаются к большому телу.

Изложенные соображения позволяют сформулировать задачу, которую и можно назвать основной задачей небесной механики:

Изучить движение механической системы, состоящей из конечного числа свободных материальных точек, обладающих постоянными массами и движущихся

*) См. Дубошин Г. Н., Теория притяжения, Физматгиз, 1961, а также Субботин М. Ф., Курс небесной механики, т. 3, Гостехиздат, 1949.

в абсолютно пустом пространстве под действием сил взаимных притяжений, определяемых законом всемирного тяготения Ньютона.

Сформулированная задача представляет собой, очевидно, некоторую искусственную математическую схему, которая, строго говоря, не соответствует реальной физической задаче о движении реальных небесных тел, которую мы заменяем в первом приближении этой схемой.

Однако ввиду малости факторов, отброшенных в первом приближении, движения материальных точек в нашей схеме будут мало отличаться от движений настоящих небесных тел, по крайней мере в течение некоторого конечного, не очень большого промежутка времени.

Сказанное вполне подтверждается астрономическими наблюдениями, показывающими, что отличия искусственной математической теории от действительности, вообще говоря, достаточно малы. В редких случаях обнаруживаются скольконибудь значительные отклонения, происходящие от недостаточности установленной теории. Существование таких случаев показывает, что в небесной механике нельзя ограничиться одним только первым приближением. Это заключение делается еще более справедливым, если мы захотим распространить нашу математическую теорию на очень большие промежутки времени, так как в этом случае отклонения теории от действительности могут сделаться настолько большими, что неудовлетворительность первого приближения окажется совершенно очевидной.

3. Последовательные приближения. Математическая схема, которая кладется в основу небесной механики, является весьма удобным и гибким аппаратом, могущим быть приложенным к приближенному исследованию многочисленных и разнообразных задач астрономии и даже других областей знания.

Движения больших планет солнечной системы и движения звезд в звездном скоплении, движения спутников и движения малых планет и комет, движение мельчайшей частицы космической пыли и движение сгущения в первоначальной туманности — все эти задачи, по крайней мере на первом этапе своего исследования, основываются на схеме движения материальных точек, взаимно притягивающихся по закону Ньютона.

Точно также свободный полет межпланетного корабля, движения искусственных спутников вокруг Земли, движение электронов в атомной системе и движение заряженных частиц в световом потоке исследуются прежде всего как движения материальных точек.

Ввиду такой исключительной важности понятия «материальная точка» вполне уместно напомнить здесь точное его определение. Это определение может быть сформулировано следующим образом:

Материальной точкой называется всякое тело, линейные размеры которого весьма малы по сравнению с расстояниями, могущими играть роль в его движении.

Таким образом, например, искусственный спутник Земли может рассматриваться как материальная точка, когда исследуется его поступательное движение, но тот же спутник не может считаться материальной точкой, когда рассматривается его вращательное движение вокруг собственного центра масс.

Сама Земля может рассматриваться как материальная точка, когда исследуется ее движение вокруг Солнца и должна рассматриваться как тело, при изучении ее вращения вокруг своей оси и т. д.

Заканчивая этот параграф, мы хотим еще раз подчеркнуть, что математическая теория движения некоторого количества материальных точек, которую мы будем рассматривать в этой главе, является только первым приближением задачи о действительном движении небесных тел, как естественных, так и искусственных. Это первое приближение, даже в том случае, если бы оно могло быть осуществлено с абсолютной математической строгостью и полнотой, всегда нуждается в исправлениях, которые приходится вносить, чтобы приблизиться к реальной астрономической или физической задаче.

Характер этих поправок, определяющих второе, третье и последующее приближения, в большой мере зависит от общего состояния науки в рассматриваемую эпоху, и несомненно, что если в настоящее время количество этих поправок не очень велико, то с течением времени, в связи с общим развитием науки, число их может сильно возрасти и тогда неизбежно встанет вопрос о пересмотре основных классических результатов механики вообще и небесной ме-

ханики в частности и возможно, что в будущем придется создавать небесную механику заново на основании новых принципов, быть может, совершенно отличных от современных.

Как известно, такие перестройки науки происходили уже частично в физике, химии, биологии и т. д. и ввиду того, что небесная механика существует не изолированно, а входит необходимым звеном в общую цепь наук, изучающих природу, нет никаких оснований предполагать, что она останется неприкосновенной и неизменной и не испытает глубокого переворота, аналогичного тем, которые произойдут и в других областях знания.

Если говорить не о глубокой, коренной перестройке, а только о некоторых изменениях или улучшениях, связанных с прогрессом науки вообще, то они, конечно, происходят в небесной механике (так же, как и в других науках) постоянно и особенно заметны за последние двадцать — тридцать лет.

Действительно, за это время великим Эйнштейном была обоснована теория относительности и связанная с ней теория тяготения или гравитации. Применение последней к движениям небесных тел обнаруживает некоторые — впрочем, весьма небольшие — расхождения с теорией, основанной на законе Ньютона. Поэтому необходимы некоторые релятивистские поправки, которые и рассматриваются в небесной механике в настоящее время.

Вообще возможно построить небесную механику целиком на принципах релятивистской теории тяготения, и такие попытки частично уже делались. Однако при этом происходит такое усложнение математического аппарата, что при современном состоянии математики мы не можем и мечтать сейчас о такой перестройке и вынуждены откладывать ее на будущее.

Кроме того, бурное развитие техники, которое мы наблюдаем за последнее, особенно за послевоенное, время, неизбежно сказывается также и на развитии всех отделов астрономии.

Для небесной механики особенно существенным является появление быстродействующих вычислительных машин, позволяющих теперь с необыкновенной быстротой и легкостью производить такие вычисления, о которых не могли даже и мечтать вычислители 18-го и 19-го веков.

Эти вычисления, со своей стороны, способствуют также и развитию математических (аналитических) теорий в небесной механике, которые, в свою очередь, требуют применения и новейших достижений математики.

Кроме основных математических дисциплин, которыми в небесной механике пользуются еще со времен Ньютона (аналитическая и дифференциальная геометрии, дифференциальное и интегральное исчисления, теория дифференциальных уравнений, вариационное исчисление, теория функций и т. д.), в арсенале небесной механики появляются одна за другой и новые области математики, как, например, теория функций действительного и комплексного переменного, качественная теория дифференциальных уравнений, современная алгебра с теорией матриц, функциональный анализ и многое другое.

Но ясно, что прежде чем говорить об этих последних достижениях, необходимо прежде всего ознакомиться и освоиться с основными задачами и основными методами небесной механики, чтобы иметь необходимый, крепкий фундамент, на котором можно будет продолжать строительство того прекрасного здания, которое носит такое гордое название — *небесная механика*.

§ 2. Задача многих тел в абсолютных осях координат

1. Дифференциальные уравнения задачи. Как было выяснено в предыдущем параграфе, основной задачей небесной механики является задача о движении системы, состоящей из некоторого конечного числа материальных точек, взаимно притягивающихся по закону Ньютона.

Эта задача и называется *задачей многих тел*, частными случаями которой являются задачи двух, трех, четырех и т. д. тел, к которым приводятся задачи о движении различных конкретных небесных тел *).

*) Правильнее было бы назвать эту задачу — *задачей о движении многих материальных точек*, но термин *тело* будет напоминать нам, что рассматривается хотя и приближенная, но все же астрономическая задача. Кроме того, если все тела системы являются шарами, обладающими сферическим строением, то их движения (поступательные!) не отличаются от движений материальных точек.

Так как для вывода дифференциальных уравнений движения и установления их основных свойств число материальных точек системы не имеет существенного значения, то мы можем обозначить это число какой-нибудь буквой. Для удобства дальнейших приложений мы обозначим это число через $n+1$, а материальные точки, составляющие систему, — буквами $M_0, M_1, \dots, M_n$ *).

Возьмем теперь некоторую систему прямоугольных декартовых координат $O\xi\eta\zeta$ с началом в произвольно выбранной точке O пространства и с неизменными направлениями осей.

Обозначим массу материальной точки M_i через m_i , а ее координаты через ξ_i, η_i, ζ_i ($i=0, 1, 2, \dots, n$). Эти координаты будут функциями времени t , и наша задача состоит, таким образом, в определении $3(n+1)$ неизвестных функций одной независимой переменной.

Составим дифференциальные уравнения, которым должны удовлетворять эти функции.

Пусть Δ_{ij} обозначает взаимное расстояние между какими-либо точками M_i и M_j , так что

$$\Delta_{ij} = M_i M_j = \sqrt{(\xi_i - \xi_j)^2 + (\eta_i - \eta_j)^2 + (\zeta_i - \zeta_j)^2}, \quad (2.1)$$

причем очевидно, что $\Delta_{ji} = \Delta_{ij}$.

На каждую точку M_i нашей системы действует n сил притяжения, направленных соответственно по прямым $M_i M_0, M_i M_1, \dots, M_i M_n$ и величины которых равны

$$f \frac{m_i m_0}{\Delta_{i0}^2}, \quad f \frac{m_i m_1}{\Delta_{i1}^2}, \quad \dots, \quad f \frac{m_i m_n}{\Delta_{in}^2}.$$

Проекции этих сил на оси координат будут соответственно равны

$$f \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}^2} \frac{\xi_j - \xi_i}{\Delta_{ij}}, \quad f \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}^2} \frac{\eta_j - \eta_i}{\Delta_{ij}}, \quad f \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}^2} \frac{\zeta_j - \zeta_i}{\Delta_{ij}},$$

где

$$j = 0, 1, 2, \dots, n, \quad j \neq i.$$

*) Точка M_0 будет представлять наибольшее тело системы. Так, в теории движения больших планет M_0 обозначает Солнце, в теории спутников Юпитера M_0 обозначает Юпитер и т. д. Или, вообще, M_0 обозначает тело, играющее главную роль в рассматриваемой теории.

Поэтому составляющие равнодействующей всех сил притяжения, действующих на точку M_i , которые обозначим через Ξ_i , H_i , Z_i , определяются формулами *):

$$\left. \begin{aligned} \Xi_i &= f \sum_{j=0}^n m_i m_j \frac{\xi_j - \xi_i}{\Delta_{ij}^3}, \\ H_i &= f \sum_{j=0}^n m_i m_j \frac{\eta_j - \eta_i}{\Delta_{ij}^3}, \\ Z_i &= f \sum_{j=0}^n m_i m_j \frac{\zeta_j - \zeta_i}{\Delta_{ij}^3}. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Поэтому дифференциальные уравнения движения системы взаимно притягивающихся точек напишутся в виде

$$m_i \ddot{\xi}_i = \Xi_i, \quad m_i \ddot{\eta}_i = H_i, \quad m_i \ddot{\zeta}_i = Z_i, \quad (2.3)$$

где $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Уравнения (2.3) представляют собой систему $3(n+1)$ совместных дифференциальных уравнений второго порядка, определяющих неизвестные функции — абсолютные координаты движущихся материальных точек.

Для полного определения функций, удовлетворяющих уравнениям (2.3), необходимо еще знать начальные условия, т. е. числовые значения этих функций и их первых производных для некоторого момента времени t_0 , принимаемого за начальный (начальная эпоха или просто эпоха).

Эти начальные значения

$$\xi_i^0, \eta_i^0, \zeta_i^0, \dot{\xi}_i^0, \dot{\eta}_i^0, \dot{\zeta}_i^0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (2.4)$$

должны быть заданы, тогда общее решение системы (2.3) представится формулами вида

$$\left. \begin{aligned} \xi_i &= \xi_i(t | \xi^0, \eta^0, \zeta^0 | \dot{\xi}^0, \dot{\eta}^0, \dot{\zeta}^0), \\ \eta_i &= \eta_i(t | \xi^0, \eta^0, \zeta^0 | \dot{\xi}^0, \dot{\eta}^0, \dot{\zeta}^0), \\ \zeta_i &= \zeta_i(t | \xi^0, \eta^0, \zeta^0 | \dot{\xi}^0, \dot{\eta}^0, \dot{\zeta}^0), \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

*) «Штрих» при знаке суммы напоминает, что при суммировании должен быть пропущен член, для которого $j = i$.

и задача о движении системы взаимно притягивающихся точек приводится к следующей математической задаче.

Определить функции ξ_i , η_i , ζ_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), удовлетворяющие совместно уравнениям (2.3) и начальным условиям (2.4) для всех значений времени $t \geq t_0$. Отметим, что функция называется определенной в каком-либо промежутке времени, если известны свойства функции в этом промежутке и установлено правило, при помощи которого можно вычислять значение функции и ее производной для любого момента времени в этом промежутке.

Определяя движение системы для $t \geq t_0$, мы узнаем судьбу ее в будущем. Чтобы узнать также прошедшую судьбу системы, нужно, очевидно, определить движение также для $t < t_0$.

Так как уравнения (2.3) не изменяются при замене t на $-t$, то мы получим значения функций для $t < t_0$, заменяя в формулах (2.5) переменную t на $-t$, и движение будет определено для всех значений времени от $-\infty$ до $+\infty$.

2. Силовая функция и ее свойства. Уравнения движения (2.3) можно записать гораздо проще, если заметить, что правые их части являются частными производными от одной и той же функции координат всех точек системы.

Действительно, положим

$$U = f \left\{ \frac{m_0 m_1}{\Delta_{01}} + \frac{m_0 m_2}{\Delta_{02}} + \dots + \frac{m_0 m_n}{\Delta_{0n}} + \right. \\ \left. + \frac{m_1 m_2}{\Delta_{12}} + \dots + \frac{m_1 m_n}{\Delta_{1n}} + \right. \\ \left. + \dots + \frac{m_{n-1} m_n}{\Delta_{n-1, n}} \right\}, \quad (2.6)$$

что более кратко может быть написано так:

$$U = \frac{1}{2} f \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n{}' \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}}.$$

Вычислим частные производные функции U по координатам ξ_i , η_i , ζ_i точки M_i .

Мы находим, например,

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_i} = -f \frac{m_i m_0}{\Delta_{i0}^2} \frac{\partial \Delta_{i0}}{\partial \xi_i} - \dots - f \frac{m_i m_n}{\Delta_{in}^2} \frac{\partial \Delta_{in}}{\partial \xi_i},$$

но из формулы (2.1) имеем

$$\frac{\partial \Delta_{ij}}{\partial \xi_i} = \frac{\xi_i - \xi_j}{\Delta_{ij}} = - \frac{\xi_j - \xi_i}{\Delta_{ij}} \quad (j \neq i),$$

в силу чего получаем

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_i} = f \left\{ m_i m_0 \frac{\xi_0 - \xi_i}{\Delta_{i0}^3} + \dots + m_i m_n \frac{\xi_n - \xi_i}{\Delta_{in}^3} \right\}.$$

Сравнивая это выражение с подобными ему, полученные дифференцированием по η_i и ζ_i , с формулами (2.2), мы можем написать

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_i} = E_i, \quad \frac{\partial U}{\partial \eta_i} = H_i, \quad \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} = Z_i, \quad (2.7)$$

вследствие чего уравнения движения (2.3) примут вид

$$m_i \ddot{\xi}_i = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad m_i \ddot{\eta}_i = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \quad m_i \ddot{\zeta}_i = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}. \quad (2.3')$$

Так как частные производные функции U , определенной формулой (2.6), равны соответствующим составляющим равнодействующей всех сил притяжения, действующих на точку M_i , то эта функция есть *силовая функция* сил притяжения.

Заметим, что силовая функция U зависит только от взаимных расстояний между точками $M_0, M_1, \dots, M_n$ и, следовательно, не зависит от выбора системы координат.

Полезно заметить также, что силовая функция не зависит ни от производных $\dot{\xi}_i, \dot{\eta}_i, \dot{\zeta}_i$, ни от времени (явно).

Функция U , как видно из формулы (2.6), есть алгебраическая (иррациональная) функция, определенная для любых вещественных значений координат ξ_i, η_i, ζ_i , и принимающая только неотрицательные значения.

Она обращается в нуль только в том случае, когда все взаимные расстояния делаются бесконечно большими, т. е. когда все точки M_i уходят в бесконечность.

Наоборот, функция U обращается в бесконечность всякий раз, когда хотя бы одно из взаимных расстояний делается равным нулю, т. е. когда хотя бы две из всех точек системы сталкиваются в одной точке пространства.

Выведем теперь два свойства силовой функции, вытекающие из ее независимости от выбора координатной системы.

Действительно, так как функция U не зависит от выбора координат, то она не изменит своего значения при параллельном преобразовании системы координат.

Сместим начало координат вдоль оси $O\xi$ на бесконечно малую величину $\Delta\xi$, вследствие чего всякая из координат ξ_i получит приращение $\Delta\xi$, а координаты η_i и ζ_i не изменятся.

Так как взаимные расстояния Δ_{ij} зависят только от разностей координат, то они также не изменятся, а поэтому функция U тоже не изменится и, следовательно, ее полное приращение будет равно нулю.

Но это приращение функции U в общем случае определяется формулой

$$dU = \sum_{i=0}^n \left(\frac{\partial U}{\partial \xi_i} d\xi_i + \frac{\partial U}{\partial \eta_i} d\eta_i + \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} d\zeta_i \right), \quad (2.8)$$

и так как в рассматриваемом случае

$$d\xi_i = \Delta\xi, \quad d\eta_i = d\zeta_i = 0, \quad dU = 0,$$

то получим, сокращая на $\Delta\xi$, $\sum_{i=0}^n \frac{\partial U}{\partial \xi_i} = 0$.

В силу равноправности координат ξ , η , ζ имеем три равенства:

$$\sum_{i=0}^n \frac{\partial U}{\partial \xi_i} = 0, \quad \sum_{i=0}^n \frac{\partial U}{\partial \eta_i} = 0, \quad \sum_{i=0}^n \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} = 0. \quad (2.8')$$

Эти соотношения выражают первое из двух свойств силовой функции.

Чтобы получить второе свойство, повернем систему координат вокруг одной из осей координат, например вокруг оси $O\zeta$ на бесконечно малый угол $\Delta\varphi$. Тогда, очевидно,

координаты ζ_i не изменятся, а координаты ξ_i и η_i получат соответственно приращения *)

$$d\xi_i = -\eta_i \cdot \Delta\varphi, \quad d\eta_i = +\xi_i \cdot \Delta\varphi.$$

Ни одно из взаимных расстояний не изменится, а поэтому $dU = 0$ и формула (2.8) дает после сокращения на $\Delta\varphi$

$$\sum_{i=0}^n \left(\xi_i \frac{\partial U}{\partial \eta_i} - \eta_i \frac{\partial U}{\partial \xi_i} \right) = 0.$$

Аналогичные соотношения мы получим, вращая систему координат также вокруг оси $O\xi$ и вокруг оси $O\eta$.

Поэтому в результате имеем три следующих соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^n \left(\eta_i \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} - \zeta_i \frac{\partial U}{\partial \eta_i} \right) &= 0, \\ \sum_{i=0}^n \left(\zeta_i \frac{\partial U}{\partial \xi_i} - \xi_i \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} \right) &= 0, \\ \sum_{i=0}^n \left(\xi_i \frac{\partial U}{\partial \eta_i} - \eta_i \frac{\partial U}{\partial \xi_i} \right) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.8'')$$

выражающие второе свойство силовой функции.

Равенства (2.8') и (2.8'') могут быть получены также и непосредственно из выражений (2.2) для составляющих равнодействующей сил притяжения.

*) Действительно, обозначая новые координаты точки M_i через ξ'_i и η'_i ($\zeta'_i = 0$), мы имеем по формулам преобразования

$$\xi'_i = \xi_i \cos \Delta\varphi - \eta_i \sin \Delta\varphi, \quad \eta'_i = \xi_i \sin \Delta\varphi + \eta_i \cos \Delta\varphi.$$

Ввиду малости угла $\Delta\varphi$ $\sin \Delta\varphi$ можно заменить самим углом, а $\cos \Delta\varphi$ — единицей. Вследствие чего имеем

$$\xi'_i = \xi_i - \eta_i \Delta\varphi, \quad \eta'_i = \eta_i + \xi_i \Delta\varphi,$$

откуда получаем

$$d\xi_i = \xi'_i - \xi_i = -\eta_i \Delta\varphi, \quad d\eta_i = \eta'_i - \eta_i = +\xi_i \Delta\varphi.$$

Действительно, мы имеем, например,

$$\sum_{i=0}^n \frac{\partial U}{\partial \xi_i} = \sum_{i=0}^n \Xi_i = f \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n{}' m_i m_j \frac{\xi_j - \xi_i}{\Delta_{ij}^3} \equiv 0$$

и точно так же

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \left(\xi_i \frac{\partial U}{\partial \eta_i} - \eta_i \frac{\partial U}{\partial \xi_i} \right) &= \sum_{i=0}^n (\xi_i H_i - \eta_i \Xi_i) = \\ &= f \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n{}' m_i m_j \frac{\xi_i \eta_j - \eta_i \xi_j}{\Delta_{ij}^3} \equiv 0. \end{aligned}$$

Отметим еще одно свойство силовой функции. Формула (2.6) показывает, что U есть однородная функция от переменных ξ_i , η_i , ζ_i минус первого измерения, а поэтому, в силу известной теоремы Эйлера об однородных функциях, мы можем написать:

$$\sum_{i=0}^n \left(\xi_i \frac{\partial U}{\partial \xi_i} + \eta_i \frac{\partial U}{\partial \eta_i} + \zeta_i \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} \right) = -U. \quad (2.9)$$

3. Десять классических интегралов. Уравнения движения взаимно притягивающихся материальных точек образуют систему $6(n+1)$ -го порядка и для полного ее интегрирования нужно получить либо ее общее решение, содержащее $6(n+1)$ независимых произвольных постоянных, либо ее общий интеграл, т. е. совокупность $6(n+1)$ независимых между собою первых интегралов.

Общие принципы теоретической механики позволяют сразу получить десять из этих $6(n+1)$ первых интегралов.

Однако предпочтительнее вывести эти интегралы из самих уравнений (2.3).

Выведем эти десять первых интегралов, называемых обычно *классическими интегралами задачи многих тел*.

Прежде всего, складывая все уравнения (2.3), или (2.3'), для каждой координаты в отдельности (для $i=0, 1, 2, \dots, n$) и имея в виду равенства (2.8'), мы получим следующие три уравнения:

$$\sum_{i=0}^n m_i \ddot{\xi}_i = 0, \quad \sum_{i=0}^n m_i \ddot{\eta}_i = 0, \quad \sum_{i=0}^n m_i \ddot{\zeta}_i = 0. \quad (2.10)$$

Уравнения (2.10) являются следствиями уравнений (2.3) и замечательны тем, что левые их части представляют собой точные производные по t . Поэтому, уравнения (2.10) можно непосредственно интегрировать, что дает следующие три первые интеграла:

$$\sum_{i=0}^n m_i \dot{\xi}_i = a_1, \quad \sum_{i=0}^n m_i \dot{\eta}_i = a_2, \quad \sum_{i=0}^n m_i \dot{\zeta}_i = a_3. \quad (2.10')$$

Уравнения (2.10') также, очевидно, можно проинтегрировать, что дает еще три первых интеграла:

$$\sum_{i=0}^n m_i \xi_i = a_1 t + b_1, \quad \sum_{i=0}^n m_i \eta_i = a_2 t + b_2, \quad \sum_{i=0}^n m_i \zeta_i = a_3 t + b_3, \quad (2.10'')$$

где b_1, b_2, b_3 — три новые произвольные постоянные.

Уравнения (2.10') и (2.10''), которые можно еще написать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^n m_i \dot{\xi}_i &= a_1, & \sum_{i=0}^n m_i (\xi_i - t \dot{\xi}_i) &= b_1, \\ \sum_{i=0}^n m_i \dot{\eta}_i &= a_2, & \sum_{i=0}^n m_i (\eta_i - t \dot{\eta}_i) &= b_2, \\ \sum_{i=0}^n m_i \dot{\zeta}_i &= a_3, & \sum_{i=0}^n m_i (\zeta_i - t \dot{\zeta}_i) &= b_3, \end{aligned} \right\} \quad (2.10''')$$

называются *интегралами движения центра масс* (или центра инерции), так как эти интегралы определяют движение центра масс системы материальных точек относительно абсолютных осей.

Действительно, обозначая координаты центра масс нашей системы через $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$, мы имеем для них следующие выражения через координаты точек системы:

$$\bar{\xi} = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^n m_i \xi_i, \quad \bar{\eta} = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^n m_i \eta_i, \quad \bar{\zeta} = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^n m_i \zeta_i, \quad (2.11)$$

где

$$m = m_0 + m_1 + \dots + m_n$$

есть полная масса всей системы.

Теперь интегралы (2.10') и (2.10'') дают:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\xi} &= \frac{a_1}{m} t + \frac{b_1}{m}, & \dot{\bar{\xi}} &= \frac{a_1}{m}, \\ \bar{\eta} &= \frac{a_2}{m} t + \frac{b_2}{m}, & \dot{\bar{\eta}} &= \frac{a_2}{m}, \\ \bar{\zeta} &= \frac{a_3}{m} t + \frac{b_3}{m}, & \dot{\bar{\zeta}} &= \frac{a_3}{m}. \end{aligned} \right\} \quad (2.11')$$

Формулы (2.11') показывают, что центр масс нашей системы движется в абсолютном пространстве прямолинейно и равномерно.

Если Солнце и большие планеты рассматривать как материальные точки, взаимно притягивающиеся по закону Ньютона и не подверженные действиям каких-либо других сил, то выведенное свойство показывает, что вся солнечная система в целом движется относительно неподвижных звезд прямолинейно и равномерно. Как известно, это движение направлено примерно к созвездию Геркулеса и совершается со скоростью 20 км/сек.

Полезно отметить, что если мы примем во внимание действие звезд, составляющих нашу Галактику, на солнечную систему, то движение последней уже не будет равномерным и прямолинейным.

Произвольные постоянные a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 могут быть определены из начальных условий. Действительно, подставляя в формулы (2.10''') вместо координат и компонентов скоростей их начальные значения и заменяя t на t_0 , мы получим:

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{i=0}^n m_i \dot{\xi}_i^0, & b_1 &= \sum_{i=0}^n m_i (\xi_i^0 - t_0 \dot{\xi}_i^0), \\ a_2 &= \sum_{i=0}^n m_i \dot{\eta}_i^0, & b_2 &= \sum_{i=0}^n m_i (\eta_i^0 - t_0 \dot{\eta}_i^0), \\ a_3 &= \sum_{i=0}^n m_i \dot{\zeta}_i^0, & b_3 &= \sum_{i=0}^n m_i (\zeta_i^0 - t_0 \dot{\zeta}_i^0). \end{aligned}$$

Переходим к выводу следующей группы первых интегралов. Помножая второе из уравнений (2.3') на $-\zeta_i$,

третье — на $+\eta_i$, складывая результаты и суммируя по i от $i=0$ до $i=n$, мы получим следующее уравнение, являющееся следствием уравнений движения:

$$\sum_{i=0}^n m_i (\eta_i \ddot{\zeta}_i - \zeta_i \ddot{\eta}_i) = \sum_{i=0}^n \left(\eta_i \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} - \zeta_i \frac{\partial U}{\partial \eta_i} \right),$$

или, в силу первого из равенств (2.8''),

$$\sum_{i=0}^n m_i (\eta_i \ddot{\zeta}_i - \zeta_i \ddot{\eta}_i) = 0.$$

Комбинируя подобным же образом две другие пары из уравнений (2.3') и используя остальные два равенства (2.8''), мы получим еще два уравнения, являющиеся следствиями уравнений (2.3). Но левые части полученных таким образом трех уравнений являются точными производными по t , а следовательно, интегрируя эти уравнения, мы получим следующие три первых интеграла:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^n m_i (\eta_i \dot{\zeta}_i - \zeta_i \dot{\eta}_i) &= c_1, \\ \sum_{i=0}^n m_i (\zeta_i \dot{\xi}_i - \xi_i \dot{\zeta}_i) &= c_2, \\ \sum_{i=0}^n m_i (\xi_i \dot{\eta}_i - \eta_i \dot{\xi}_i) &= c_3. \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

где c_1, c_2, c_3 суть произвольные постоянные.

Уравнения (2.12) называются *интегралами площадей* или *интегралами моментов количеств движения* (или проще — *интегралами моментов*).

Смысл этих названий заключается в следующем. Рассмотрим общий член какой-либо из трех сумм в равенствах (2.12), например $m_i (\eta_i \dot{\zeta}_i - \zeta_i \dot{\eta}_i)$. Выражение $\eta_i d\zeta_i - \zeta_i d\eta_i$ представляет собой удвоенную площадь $dS_{\eta\zeta}^{(i)}$ элементарного треугольника, образованного на плоскости $O\eta\zeta$ проекциями точек M_i и M'_i , соответствующими моментам времени t и $t+dt$.

Тогда первое из уравнений (2.12) напишется в виде

$$\sum_{i=0}^n m_i dS_{\eta\zeta}^{(i)} = c_1 dt.$$

Интегрируя последнее равенство и два других, ему подобных, мы получим как следствия интегралов (2.12) следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^n m_i S_{\eta\zeta}^{(i)} &= c_1 t + c'_1, \\ \sum_{i=0}^n m_i S_{\xi\zeta}^{(i)} &= c_2 t + c'_2, \\ \sum_{i=0}^n m_i S_{\xi\eta}^{(i)} &= c_3 t + c'_3, \end{aligned} \right\} \quad (2.12')$$

где c'_1, c'_2, c'_3 — три новые произвольные постоянные.

Формулы (2.12') показывают, что суммы произведений масс точек системы на площади, описанные проекциями радиусов-векторов на координатные плоскости, изменяются пропорционально времени, что и дало повод называть уравнения (2.12) интегралами площадей.

Примечание. Полезно отметить, что равенства (2.12') не являются интегралами уравнений движения, так как величины $S_{\eta\zeta}^{(i)}, S_{\xi\zeta}^{(i)}, S_{\xi\eta}^{(i)}$ не выражаются конечным образом через координаты и компоненты скорости точки M_i .

Рассмотрим теперь смысл второго названия интегралов (2.12). Если v_i есть абсолютная скорость точки M_i , то вектор $m_i v_i$ есть количество движения этой точки.

Момент этого вектора относительно начала координат есть векторное произведение вектора количества движения на радиус-вектор точки M_i и его составляющие по осям координат суть

$$m_i (\eta_i \dot{\zeta}_i - \zeta_i \dot{\eta}_i), \quad m_i (\zeta_i \dot{\xi}_i - \xi_i \dot{\zeta}_i), \quad m_i (\xi_i \dot{\eta}_i - \eta_i \dot{\xi}_i).$$

Поэтому левые части равенств (2.12) суть составляющие вектора момента количества движения всей системы материальных точек. Интегралы (2.12) показывают, следовательно, что этот вектор остается постоянным (по величине

и направленно) во все время движения. Это обстоятельство и позволило назвать уравнения (2.12) интегралами моментов.

Вообразим теперь плоскость, проходящую через центр масс G системы и определяемую уравнением

$$c_1(\xi - \bar{\xi}) + c_2(\eta - \bar{\eta}) + c_3(\zeta - \bar{\zeta}) = 0. \quad (2.12'')$$

Очевидно, эта плоскость сохраняет неизменную ориентацию в пространстве и перпендикулярна вектору момента количества движения. Она имеет важное значение для небесной механики и называется *неизменяемой плоскостью Лапласа*.

Постоянные интегралов площадей, называемые еще просто *постоянными площадей*, определяются начальными условиями по очевидным формулам, вытекающим из (2.12):

$$c_1 = \sum_{i=0}^n m_i (\eta_i^0 \dot{\zeta}_i^0 - \zeta_i^0 \dot{\eta}_i^0),$$

$$c_2 = \sum_{i=0}^n m_i (\zeta_i^0 \dot{\xi}_i^0 - \xi_i^0 \dot{\zeta}_i^0),$$

$$c_3 = \sum_{i=0}^n m_i (\xi_i^0 \dot{\eta}_i^0 - \eta_i^0 \dot{\xi}_i^0),$$

и зависят как от начальных положений, так и от начальных скоростей всех точек системы.

Если мы обозначим величину вектора момента количества движения всей системы через c , то будем иметь

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2},$$

а направляющие косинусы этого вектора будут соответственно $\frac{c_1}{c}$, $\frac{c_2}{c}$, $\frac{c_3}{c}$.

Остается получить последний из классических интегралов уравнений движения. Умножая уравнения (2.3') соответственно на $\dot{\xi}_i$, $\dot{\eta}_i$, $\dot{\zeta}_i$, складывая и суммируя затем по i от 0 до n , мы получим следующее уравнение, являющееся следствием уравнений движения:

$$\sum_{i=0}^n m_i (\dot{\xi}_i \ddot{\xi}_i + \dot{\eta}_i \ddot{\eta}_i + \dot{\zeta}_i \ddot{\zeta}_i) = \sum_{i=0}^n \left(\frac{\partial U}{\partial \xi_i} \dot{\xi}_i + \frac{\partial U}{\partial \eta_i} \dot{\eta}_i + \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} \dot{\zeta}_i \right),$$

что, очевидно, можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=0}^n \frac{m_i}{2} (\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2) = \frac{dU}{dt},$$

откуда, интегрируя, находим

$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^n m_i (\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2) = U + h, \quad (2.13)$$

где h есть произвольная постоянная.

Равенство (2.13) можно еще написать в виде

$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^n m_i v_i^2 = U + h, \quad (2.13')$$

что показывает, что полная живая сила системы

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n m_i v_i^2$$

зависит только от силовой функции, а следовательно, только от взаимных расстояний между точками M_i , и поэтому не зависит от выбора системы координат.

Вследствие этого обстоятельства уравнение (2.13) называется *интегралом живой силы* (или интегралом живых сил).

Так как, кроме того, величина $-U$ есть потенциальная энергия всей системы, то, переписав равенство (2.13') в виде

$$T - U = h,$$

мы получаем, что полная энергия системы остается неизменной во все время движения, вследствие чего равенство (2.13) называется еще *интегралом энергии*.

Таким образом, движение системы взаимно притягивающихся материальных точек является консервативным движением.

Постоянная живых сил (или постоянная энергии) h определяется по начальным условиям и мы можем написать

$$h = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n m_i v_i^{02} - U_0,$$

где

$$v_i^0 = \sqrt{\dot{\xi}_i^{02} + \dot{\eta}_i^{02} + \dot{\zeta}_i^{02}}$$

есть начальная скорость точки M_i , а

$$U_0 = \frac{1}{2} f \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n'} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}^0},$$

так что Δ_{ij}^0 суть начальные взаимные расстояния

$$\Delta_{ij}^0 = \sqrt{(\xi_i^0 - \xi_j^0)^2 + (\eta_i^0 - \eta_j^0)^2 + (\zeta_i^0 - \zeta_j^0)^2}.$$

Отметим, что постоянная живых сил h зависит только от начальной конфигурации точек системы и от величин их начальных скоростей, но не зависит от направлений начальных скоростей.

4. Вопрос о новых интегралах. Найденные десять классических интегралов являются единственными известными до сих пор интегралами задачи многих тел и имеют, как мы видели, простое механическое значение.

Из этих десяти интегралов только три (а именно, вторая группа интегралов движения центра масс (2.10''')) содержат время t явным образом. В остальные семь интегралов время явно не входит.

Весьма существенным является также то обстоятельство, что левые части всех десяти классических интегралов суть простые алгебраические функции от координат и их первых производных по времени.

При этом левые части интегралов движения центра масс (формулы (2.10''')) суть линейные функции указанных переменных, а левые части интегралов площадей (формулы (2.12)) суть целые, однородные функции второй степени. Интеграл живых сил является функцией второй степени относительно составляющих скоростей, но относительно координат является функцией иррациональной, так как содержит координаты под знаками квадратных корней.

Знание только десяти первых интегралов задачи является совершенно недостаточным для ее решения, а поэтому издавна предпринимались попытки найти остальные недостающие интегралы, или хотя бы некоторые из них, кроме классических.

Все эти попытки оставались безуспешными, но продолжались до конца 19-го столетия, пока не выяснилось, что они совершенно бесполезны.

Действительно, в 1887 г. Брунс доказал, что уравнения движения (2.3) для $n=2$ (т. е. для задачи трех тел) не имеют никаких других интегралов, левые части которых были бы алгебраическими функциями координат и составляющих скоростей. Точнее, Брунс доказал, что всякий новый алгебраический интеграл задачи трех тел является следствием десяти классических интегралов.

Доказательство Брунса было вскоре распространено Пенлеве на задачу какого угодно числа тел, но оба эти доказательства слишком длинны и сложны и здесь помещены быть не могут.

В 1889 г. Пуанкаре, рассматривая также задачу трех тел, доказал, что уравнения движения не имеют даже трансцендентных интегралов, выражающихся через однозначные аналитические функции, а Пенлеве обобщил это доказательство и на задачу многих тел *).

Упомянутые доказательства показывают, что вопрос о нахождении новых интегралов задачи многих тел имеет теперь только теоретическое значение, так как эти интегралы были бы чрезвычайно сложными для того, чтобы иметь какое-либо практическое приложение.

Посмотрим теперь, какую пользу может нам принести знание десяти известных, классических интегралов.

Так как знание каждого первого интеграла системы обыкновенных дифференциальных уравнений позволяет принципиально понизить порядок системы на одну единицу, то при помощи десяти классических интегралов уравнений движения взаимно притягивающихся материальных точек мы имеем возможность понизить порядок системы (2.3) на десять единиц.

Это преобразование можно выполнить либо исключая из уравнений движения, записанных в виде системы уравнений первого порядка, какие-нибудь десять из неизвестных функций, и выражая их через остальные $6n-4$ при помощи

*) Доказательства теорем Брунса и Пуанкаре можно найти в сокращенном виде в книге Уиттекера Е. Т., Аналитическая динамика, перев. с англ., ОНТИ, 1937.

десяти классических интегралов, либо выражая все $6n + 6$ неизвестных через $6n - 4$ новых переменных, которые могут быть выбраны совершенно произвольно при том лишь условии, чтобы все классические интегралы были тождественно удовлетворены.

Получив тем или иным способом из системы (2.3) систему уравнений $6n - 4$ порядка, мы можем понизить порядок полученной системы еще на одну единицу, исключая dt (время t явно в уравнения движения не входит!) и принимая таким образом за независимую переменную одну из определяемых функций. Когда преобразованная таким образом система будет проинтегрирована (если это возможно, разумеется), время t найдется при помощи одной квадратуры и общая задача приведет, следовательно, к интегрированию системы $6n - 5$ порядка и к одной квадратуре.

Наконец, можно еще понизить порядок системы на одну единицу, используя то обстоятельство, что действующие силы зависят исключительно от взаимных расстояний между точками системы.

Окончательно, после всех указанных приведений, мы получим систему уравнений, порядок которой равен $6n - 6$ и после интегрирования которой нужно будет выполнить еще две квадратуры.

Все указанные понижения порядка системы дифференциальных уравнений движения материальных точек действительно возможно выполнить и фактически выполнялись неоднократно многими авторами и различными способами. Лагранж первый выполнил понижение порядка уравнений движения трех тел, приведя задачу к интегрированию системы седьмого порядка (время t Лагранж не исключал *).

Однако полное понижение порядка системы на 12 единиц приводит к очень сложным и громоздким уравнениям и к тому же несколько не облегчает дальнейшее решение задачи.

Действительно, для главной задачи небесной механики — задачи о движении больших планет солнечной системы, где число планет $n = 9$ (Меркурий, Венера, Земля, Марс, Юпи-

*) См. Oeuvres de Lagrange, т. 6. Essai sur le problème des trois corps; Tisserand, Traité de mécanique céleste, т. 1, а также Уиттекер Е. Т., Аналитическая динамика, где подробно рассмотрен вопрос о понижении порядка уравнений движения трех тел.

тер, Сатурн, Уран, Нептун и Плутон) — первоначальный порядок уравнений абсолютного движения есть $6n + 6 = 60$.

Если выполнить все возможные понижения порядка, то мы получим систему уравнений порядка $6n - 6 = 48$, для которой мы не знаем никаких интегралов, а поэтому можем решать ее только приближенными методами.

Но ясно, что для приближенного решения почти совершенно безразлично, будет ли порядок системы равен 60 или 48, а сложность уравнений, наоборот, имеет весьма существенное значение.

Легко только понизить порядок системы (2.3) на шесть единиц при помощи интегралов движения центра масс.

Действительно, левые части интегралов (2.10''') линейны относительно координат и составляющих скоростей точек системы, а это обстоятельство и позволяет без всякого труда выполнить преобразования, связанные с использованием этих интегралов.

При этом очевидно, что понижение порядка можно произвести бесчисленным множеством способов, из которых естественно выбрать наиболее простые и удобные.

Важнейшие из этих способов мы рассмотрим в следующем параграфе.

5. Уравнение Лагранжа — Якоби. В заключение этого параграфа, посвященного дифференциальным уравнениям абсолютного движения, используем последнее свойство силовой функции — свойство ее однородности, выражаемое формулой (2.9), — для вывода одного замечательного уравнения, связывающего только взаимные расстояния между материальными точками.

Для этого помножим уравнения (2.3') соответственно на ξ_i , η_i , ζ_i и просуммируем затем по i от 0 до n .

В силу формулы (2.9) мы получим:

$$\sum_{i=0}^n m_i (\xi_i \ddot{\xi}_i + \eta_i \ddot{\eta}_i + \zeta_i \ddot{\zeta}_i) = -U.$$

Складывая это равенство с интегралом живых сил (2.13), умноженным на 2, найдем

$$\sum_{i=0}^n m_i [\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2 + \eta_i \ddot{\eta}_i + \dot{\eta}_i^2 + \zeta_i \ddot{\zeta}_i + \dot{\zeta}_i^2] = U + 2h,$$

что можно переписать также в виде

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=0}^n m_i (\dot{\xi}_i \dot{\xi}_i + \dot{\eta}_i \dot{\eta}_i + \dot{\zeta}_i \dot{\zeta}_i) = U + 2h,$$

или в виде

$$-\frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=0}^n m_i (\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2) = 2U + 4h. \quad (2.14)$$

Положим

$$I = \sum_{i=0}^n m_i (\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2) = \sum_{i=0}^n m_i r_i^2.$$

Тогда уравнение (2.14) напишется чрезвычайно просто следующим образом:

$$\ddot{I} = 2U + 4h, \quad (2.14')$$

где, очевидно, I есть момент инерции всей системы материальных точек относительно начала координат.

Уравнение (2.14) зависит, разумеется, от выбора системы абсолютных координат, ибо содержит расстояния r_i точек системы до начала координат.

Преобразуем теперь это уравнение таким образом, чтобы вместо расстояний r_i в него входили бы только взаимные расстояния Δ_{ij} .

Для этого используем следующее алгебраическое тождество, называемое *тождеством Лагранжа*:

$$\sum_{i=0}^k a_i^2 \sum_{i=0}^k b_i^2 = \left(\sum_{i=0}^k a_i b_i \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k (a_i b_j - a_j b_i)^2, \quad (2.15)$$

в котором a_i и b_i обозначают какие угодно величины и k есть любое целое, положительное, число (это тождество легко проверяется непосредственно).

Полагая в тождестве (2.15) $k=n$ и заменяя a_i на $\sqrt{m_i}$, а b_i , последовательно, на $\sqrt{m_i} \xi_i$, $\sqrt{m_i} \eta_i$, $\sqrt{m_i} \zeta_i$, мы будем

иметь три следующих тождества:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n m_i \sum_{i=1}^n m_i \xi_i^2 &= \left(\sum_{i=0}^n m_i \xi_i \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n m_i m_j (\xi_j - \xi_i)^2, \\ \sum_{i=0}^n m_i \sum_{i=0}^n m_i \eta_i^2 &= \left(\sum_{i=0}^n m_i \eta_i \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n m_i m_j (\eta_j - \eta_i)^2, \\ \sum_{i=0}^n m_i \sum_{i=0}^n m_i \zeta_i^2 &= \left(\sum_{i=0}^n m_i \zeta_i \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n m_i m_j (\zeta_j - \zeta_i)^2,\end{aligned}$$

складывая которые, получим

$$\begin{aligned}mI &= m \sum_{i=0}^n m_i (\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2) = \left(\sum_{i=0}^n m_i \xi_i \right)^2 + \left(\sum_{i=0}^n m_i \eta_i \right)^2 + \\ &+ \left(\sum_{i=0}^n m_i \zeta_i \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n m_i m_j [(\xi_j - \xi_i)^2 + (\eta_j - \eta_i)^2 + (\zeta_j - \zeta_i)^2].\end{aligned}\quad (2.15')$$

Используя теперь формулы (2.10'') и формулу (2.1), мы напомним равенство (2.15') в следующем виде:

$$\begin{aligned}mI &= (a_1 t + b_1)^2 + (a_2 t + b_2)^2 + (a_3 t + b_3)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n m_i m_j \Delta_{ij}^2,\end{aligned}\quad (2.16)$$

откуда, полагая еще для сокращения

$$R = \frac{1}{2m} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n m_i m_j \Delta_{ij}^2, \quad (2.17)$$

найдем следующее важное соотношение:

$$I = \frac{1}{m} [(a_1 t + b_1)^2 + (a_2 t + b_2)^2 + (a_3 t + b_3)^2] + R. \quad (2.16')$$

Дифференцируя это равенство по времени два раза, будем иметь

$$\ddot{I} = \frac{2}{m} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + \ddot{R}.$$

Подставляя это выражение для $\ddot{I}$ в уравнение (2.14'), мы получим

$$\ddot{R} = 2U + 4h', \quad (2.17')$$

где

$$h' = h - \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2m}$$

есть новая произвольная постоянная.

Уравнение (2.17'), связывающее только взаимные расстояния, играет важную роль в качественных исследованиях движений небесных тел и называется *уравнением Лагранжа — Якоби*.

В дальнейшем мы дадим интересные приложения формулы (2.17') для установления некоторых общих свойств движения системы взаимно притягивающихся точек *).

Отметим, что постоянную h' можно представить еще в следующем виде (см. формулы (2.11)):

$$h' = h - \frac{1}{2} m \bar{v}^2,$$

где

$$\bar{v} = \sqrt{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2}$$

есть абсолютная скорость центра масс системы.

Так как $\frac{1}{2} m \bar{v}^2$ есть живая сила (или кинетическая энергия) центра масс всей системы, то h' равна полной энергии всей системы, уменьшенной на кинетическую энергию движения центра масс.

§ 3. Дифференциальные уравнения относительного движения задачи многих тел

Дифференциальные уравнения абсолютного движения взаимно притягивающихся материальных точек мало удобны для практического использования при изучении движений реальных небесных тел.

Действительно, формулы, служащие для вычислений эфемерид, должны содержать численные значения произвольных

*) Эти свойства будут рассмотрены в следующей моей книге, которая будет составлять продолжение настоящей и готовится к печати под названием «Аналитические и качественные методы небесной механики». Простейшее применение формулы Лагранжа — Якоби будет рассмотрено в восьмой главе этой книги.

постоянных интегрирования, которые в свою очередь определяются заданными числовыми значениями координат и их производных в начальный момент времени t_0 .

Но известно, что определить из наблюдений абсолютные положения и абсолютные скорости небесных тел принципиально невозможно.

Поэтому пользоваться абсолютной, в строгом смысле этого слова, системой координат для изучения движений небесных тел мы также не можем.

Если же условиться называть абсолютными координатами числа, определяющие положения небесных тел в изучаемой системе (например, в солнечной системе) относительно другой небесной системы, весьма удаленной от рассматриваемой, то здесь мы сталкиваемся с затруднениями чисто технического характера.

В самом деле, при современном состоянии астрономической техники невозможно определить при помощи астрономических инструментов координаты планет, например, относительно системы координат, связанной с галактикой. Поэтому пользоваться абсолютными и в таком понимании этого слова координатами мы также фактически не можем.

Астрономические наблюдения дают нам только относительные положения и скорости небесных тел, а поэтому естественно и удобно ставить задачу об определении относительных движений.

1. Уравнения движения в барицентрических координатах. В предыдущем параграфе мы установили, что центр масс системы материальных точек $M_0, M_1, \dots, M_n$ движется относительно абсолютных осей координат прямолинейно и равномерно. Это свойство определяет движение всей системы в целом и позволяет нам ограничиться изучением движений отдельных точек системы относительно ее центра масс.

Рассмотрим уравнения движения системы взаимно притягивающихся материальных точек в абсолютных осях*):

$$m_i \ddot{\xi}_i = \Xi_i, \quad m_i \ddot{\eta}_i = \Pi_i, \quad m_i \ddot{\zeta}_i = \Upsilon_i \quad (2.18) \\ (i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

*) Здесь мы переписываем те же самые уравнения абсолютного движения (2.3), которые рассматривались в предыдущем параграфе.

правые части которых, определяемые формулами (2.2), зависят только от разностей одноименных координат точек M_i и являются частными производными от силовой функции

$$U = \frac{1}{2} f \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n - \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}}. \quad (2.19)$$

Пусть G есть центр масс всей системы и $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ — его абсолютные координаты, которые, в силу интегралов движения центра масс (2.11'), суть линейные функции времени t .

Перейдем теперь от абсолютной системы координат $O\xi\eta\zeta$ к относительной, начало которой возьмем в точке G .

Оси этой новой системы координат $G\xi'\eta'\zeta'$ возьмем параллельными соответствующим осям старой системы, так что переход от старой системы к новой определяется формулами параллельного переноса осей координат *).

Обозначая новые координаты точки M_i буквами ξ'_i , η'_i , ζ'_i , мы имеем следующие формулы преобразования:

$$\xi_i = \xi'_i + \bar{\xi}, \quad \eta_i = \eta'_i + \bar{\eta}, \quad \zeta_i = \zeta'_i + \bar{\zeta}. \quad (2.20)$$

Из этих формул следует, что преобразованные дифференциальные уравнения движения будут иметь в точности такой же вид, как и первоначальные уравнения (2.18). Действительно, так как величины $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ суть линейные функции времени, то их вторые производные тождественно равны нулю, а, с другой стороны,

$$\xi_j - \xi_i = \xi'_j - \xi'_i, \quad \eta_j - \eta_i = \eta'_j - \eta'_i, \quad \zeta_j - \zeta_i = \zeta'_j - \zeta'_i$$

для всякой пары значков j и i .

Поэтому уравнения относительного движения напишутся следующим образом:

$$m_i \ddot{\xi}'_i = \Xi'_i, \quad m_i \ddot{\eta}'_i = \Pi'_i, \quad m_i \ddot{\zeta}'_i = \Sigma'_i, \quad (2.18')$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

*) Введенная нами система координат с началом в центре масс всей системы называется иногда «барицентрической» системой, а координаты ξ' , η' , ζ' — «барицентрическими» координатами.

где

$$\Xi'_i = f \sum_{j=0}^n m_i m_j \frac{\xi'_j - \xi'_i}{\Delta_{ij}^3},$$

и аналогичные выражения имеем для величин Π'_i и Z'_i .

Выражение для силовой функции (2.19) не изменится, а взаимные расстояния в новой системе координат определяются формулой

$$\Delta_{ij} = V(\xi'_j - \xi'_i)^2 + (\eta'_j - \eta'_i)^2 + (\zeta'_j - \zeta'_i)^2.$$

Очевидно, что мы имеем также

$$\Xi'_i = \frac{\partial U}{\partial \xi'_i}, \quad \Pi'_i = \frac{\partial U}{\partial \eta'_i}, \quad Z'_i = \frac{\partial U}{\partial \zeta'_i},$$

так что уравнения относительного движения могут быть написаны еще в виде

$$m_i \ddot{\xi}'_i = \frac{\partial U}{\partial \xi'_i}, \quad m_i \ddot{\eta}'_i = \frac{\partial U}{\partial \eta'_i}, \quad m_i \ddot{\zeta}'_i = \frac{\partial U}{\partial \zeta'_i} \quad (2.18'')$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Уравнения (2.18') и (2.18'') имеют такой же вид, как и уравнения (2.3) и (2.3') соответственно, поэтому уравнения относительного движения имеют такие же первые интегралы, как и уравнения абсолютного движения. При этом, вдобавок, интегралы движения центра масс тождественно удовлетворяются, ибо в новой системе координат центр масс совпадает с началом координат $\bar{Q}$ и остается неподвижным.

Следовательно, относительные координаты точек системы не являются независимыми и связаны между собой следующими тремя соотношениями:

$$\sum_{i=0}^n m_i \xi'_i = 0, \quad \sum_{i=0}^n m_i \eta'_i = 0, \quad \sum_{i=0}^n m_i \zeta'_i = 0. \quad (2.20')$$

Из этих соотношений мы можем выразить какие-нибудь три из переменных ξ'_i , η'_i , ζ'_i , например, координаты ξ'_0 , η'_0 ,

ξ'_0 точки M_0 , через остальные, что дает

$$\begin{aligned}\xi'_0 &= -\frac{1}{m_0} \sum_{i=1}^n m_i \xi'_i, & \eta'_0 &= -\frac{1}{m_0} \sum_{i=1}^n m_i \eta'_i, \\ \zeta'_0 &= -\frac{1}{m_0} \sum_{i=1}^n m_i \zeta'_i.\end{aligned}\quad (2.20'')$$

Исключая при помощи этих формул неизвестные ξ'_0 , η'_0 , ζ'_0 из уравнений (2.18'), мы получим систему $3n$ уравнений второго порядка с $3n$ неизвестными — координатами точек $M_1, \dots, M_n$.

Таким образом, порядок преобразованной системы уравнений будет равен $6n$, т. е. на шесть единиц меньше порядка системы уравнений абсолютного движения.

Нетрудно убедиться, что преобразованная система уравнений движения может быть написана в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned}\ddot{\xi}'_i &= -f \frac{(m_0 + m_i) \xi'_i + \sum_{j=1}^n m_j \xi'_j}{\Delta_{i0}^3} + f \sum_{j=1}^n m_j \frac{\xi'_j - \xi'_i}{\Delta_{ij}^3}, \\ \ddot{\eta}'_i &= -f \frac{(m_0 + m_i) \eta'_i + \sum_{j=1}^n m_j \eta'_j}{\Delta_{i0}^3} + f \sum_{j=1}^n m_j \frac{\eta'_j - \eta'_i}{\Delta_{ij}^3}, \\ \ddot{\zeta}'_i &= -f \frac{(m_0 + m_i) \zeta'_i + \sum_{j=1}^n m_j \zeta'_j}{\Delta_{i0}^3} + f \sum_{j=1}^n m_j \frac{\zeta'_j - \zeta'_i}{\Delta_{ij}^3}\end{aligned}\right\} \quad (2.21)$$

($i = 1, 2, \dots, n$),

где

$$\begin{aligned}\Delta_{i0} &= \frac{1}{m_0} \left\{ \left[(m_0 + m_i) \xi'_i + \sum_{j=1}^n m_j \xi'_j \right]^2 + \right. \\ &\quad + \left[(m_0 + m_i) \eta'_i + \sum_{j=1}^n m_j \eta'_j \right]^2 + \\ &\quad \left. + \left[(m_0 + m_i) \zeta'_i + \sum_{j=1}^n m_j \zeta'_j \right]^2 \right\}^{1/2}.\end{aligned}$$

Уравнения (2.21) имеют только четыре первых интеграла, а именно три интеграла площадей и интеграл живых сил.

Чтобы получить эти интегралы, мы должны написать сначала соответствующие интегралы системы (2.18'), которые, как уже замечено, имеют такой же вид, как и интегралы уравнений абсолютного движения, а затем исключить из написанных интегралов координаты точки M_0 при помощи формул (2.20'').

В результате мы получим следующие интегралы:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{m_0} \left[\sum_{j=1}^n m_j \eta'_j \sum_{j=1}^n m_j \dot{\xi}'_j - \sum_{j=1}^n m_j \zeta'_j \sum_{j=1}^n m_j \dot{\eta}'_j \right] + \\ & \quad + \sum_{i=1}^n m_i (\eta'_i \dot{\xi}'_i - \zeta'_i \dot{\eta}'_i) = c'_1, \\ & \frac{1}{m_0} \left[\sum_{j=1}^n m_j \zeta'_j \sum_{j=1}^n m_j \dot{\xi}'_j - \sum_{j=1}^n m_j \xi'_j \sum_{j=1}^n m_j \dot{\zeta}'_j \right] + \\ & \quad + \sum_{i=1}^n m_i (\zeta'_i \dot{\xi}'_i - \xi'_i \dot{\zeta}'_i) = c'_2, \\ & \frac{1}{m_0} \left[\sum_{j=1}^n m_j \xi'_j \sum_{j=1}^n m_j \dot{\eta}'_j - \sum_{j=1}^n m_j \eta'_j \sum_{j=1}^n m_j \dot{\xi}'_j \right] + \\ & \quad + \sum_{i=1}^n m_i (\xi'_i \dot{\eta}'_i - \eta'_i \dot{\xi}'_i) = c'_3, \end{aligned} \right\} \quad (2.21')$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2m_0} \left[\left(\sum_{j=1}^n m_j \dot{\xi}'_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^n m_j \dot{\eta}'_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^n m_j \dot{\zeta}'_j \right)^2 \right] + \\ & \quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{\xi}'_i{}^2 + \dot{\eta}'_i{}^2 + \dot{\zeta}'_i{}^2) = U + h', \end{aligned} \right\} \quad (2.21'')$$

где c'_1 , c'_2 , c'_3 и h' суть произвольные постоянные, определяемые начальными значениями относительных координат и скоростей точек $M_1, \dots, M_n$.

Мы видим, что уравнения (2.21) и их интегралы имеют более сложный и громоздкий вид, чем соответствующие уравнения абсолютного движения.

Уравнения (2.21) можно, конечно, записать и в виде (2.18''). Тогда мы будем иметь

$$m_i \ddot{\xi}_i' = \frac{\partial U}{\partial \xi_i'}, \quad m_i \ddot{\eta}_i' = \frac{\partial U}{\partial \eta_i'}, \quad m_i \ddot{\zeta}_i' = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i'} \quad (2.18''')$$

$$(i = 1, 2, \dots, n),$$

причем подразумевается, что из выражения силовой функции U , входящей в эти уравнения, исключены координаты точки M_0 при помощи формул (2.20').

2. Уравнения движения в относительных координатах. Перейдем теперь от барицентрической системы координат к другой относительной системе, более удобной, с началом в одной из движущихся точек M_i и с неизменными направлениями осей.

Не нарушая общности можем взять за начало новой системы координат точку M_0 , а новые оси $\overrightarrow{M_0x}$, $\overrightarrow{M_0y}$, $\overrightarrow{M_0z}$ будем считать параллельными соответственным осям старой системы $O\xi'\eta'\zeta'$ или, что то же, осям абсолютной системы $O\xi\eta\zeta^*$).

Обозначая координаты точки M_i ($i = 1, 2, \dots, n$) буквами x_i , y_i , z_i , имеем, очевидно, по формулам параллельного преобразования координат

$$x_i = \xi_i' - \xi_0', \quad y_i = \eta_i' - \eta_0', \quad z_i = \zeta_i' - \zeta_0' \quad (2.22)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

Используя формулы (2.20), отсюда находим

$$m_0 x_i = (m_0 + m_i) \xi_i' + \sum_{j=1}^n m_j \xi_j' \quad (2.22')$$

и подобные же выражения для двух других координат.

* Система M_0xyz не имеет общего названия. Если же рассматривается задача о движении больших планет и если точка M_0 изображает Солнце, то эта система координат называется *гелиоцентрической*. Если рассматривается задача о движении спутников какой-либо планеты и точка M_0 изображает эту планету, то введенная система координат называется обычно по имени планеты, т. е. *геоцентрической*, *сатурноцентрической* и т. д., а вообще — *планетоцентрической*. В задаче о движении звездной системы мы будем иметь дело с *астроцентрической* системой координат.

Чтобы получить дифференциальные уравнения, определяющие относительные координаты x_i, y_i, z_i , продифференцируем прежде всего дважды формулы (2.22), что дает *)

$$\ddot{x}_i = \ddot{\xi}'_i - \ddot{\xi}'_0,$$

а затем заменим здесь $\ddot{\xi}'_i$ и $\ddot{\xi}'_0$ их выражениями из уравнений (2.21) и (2.18').

Обозначая расстояния точек $M_i (i = 1, 2, \dots, n)$ от точки M_0 через r_i , т. е. полагая

$$\Delta_{i0} = r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$$

и имея в виду, что

$$\xi'_j - \xi'_i = x_j - x_i, \quad \eta'_j - \eta'_i = y_j - y_i, \quad \zeta'_j - \zeta'_i = z_j - z_i,$$

мы с помощью формул (2.22') будем иметь

$$\ddot{x}_i = -f \frac{m_0 x_i}{r_i^3} + f \sum_{j=1}^{n'} m_j \frac{x_j - x_i}{\Delta_{ij}^3} - f \frac{m_i x_i}{r_i^3} - f \sum_{j=1}^{n'} m_j \frac{x_j}{r_j^3},$$

где

$$\Delta_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}$$

и штрих при знаке суммы по-прежнему обозначает, что при суммировании должен быть пропущен член, для которого $j = i$.

Окончательно мы напишем уравнения относительного движения в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_i + f(m_0 + m_i) \frac{x_i}{r_i^3} &= f \sum_{j=1}^{n'} m_j \left(\frac{x_j - x_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{x_j}{r_j^3} \right), \\ \ddot{y}_i + f(m_0 + m_i) \frac{y_i}{r_i^3} &= f \sum_{j=1}^{n'} m_j \left(\frac{y_j - y_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{y_j}{r_j^3} \right), \\ \ddot{z}_i + f(m_0 + m_i) \frac{z_i}{r_i^3} &= f \sum_{j=1}^{n'} m_j \left(\frac{z_j - z_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{z_j}{r_j^3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

($i = 1, 2, \dots, n$).

*) Для сокращения мы сделаем необходимые выкладки только для одного уравнения, после чего два других напишем по аналогии.

Правые части этих уравнений можно представить также в виде частных производных от некоторых функций координат всех точек $M_1, \dots, M_n$. Действительно, положим

$$R_i = f \sum_{j=1}^n m_j R_{ij} \quad (2.24)$$

и

$$R_{ij} = \frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j}{r_j^3}. \quad (2.24')$$

Тогда, как легко проверить непосредственно, имеем

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial x_i} = \frac{x_j - x_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{x_j}{r_j^3}.$$

Полагая еще для сокращения

$$\mu_i = f(m_0 + m_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

мы представим уравнения (2.23) в следующей классической форме:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_i + \frac{\mu_i x_i}{r_i^3} &= \frac{\partial R_i}{\partial x_i}, \\ \ddot{y}_i + \frac{\mu_i y_i}{r_i^3} &= \frac{\partial R_i}{\partial y_i}, \\ \ddot{z}_i + \frac{\mu_i z_i}{r_i^3} &= \frac{\partial R_i}{\partial z_i} \end{aligned} \right\} \quad (2.23')$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

Функции R_i ($i = 1, 2, \dots, n$) называются *возмущающими функциями* (или пертурбационными функциями), так как они определяют действия притяжений (возмущений), которые испытывают точки M_i со стороны всех остальных точек системы (кроме точки M_0 !).

Это название — возмущающие функции — возникло в задаче о движении больших планет солнечной системы, массы которых малы по сравнению с массой Солнца — точки M_0 .

Действительно, каждая из девяти больших планет испытывает действие притяжения Солнца и действия притяжений всех остальных восьми планет.

Так как массы всех больших планет достаточно малы по сравнению с массой Солнца, то действие Солнца является главной причиной, управляющей движением каждой планеты, а действия всех остальных восьми планет весьма малы по сравнению с действием Солнца и могут производить только незначительные, вообще говоря, изменения в движении каждой планеты вокруг Солнца. Эти незначительные изменения и принято называть — *возмущениями*, а отсюда и появилось название для функций R_i .

Определив из уравнений (2.23') относительные координаты x_i, y_i, z_i точек $M_1, M_2, \dots, M_n$, мы можем найти и барицентрические координаты всех точек системы.

Действительно, прибавляя к обеим частям формулы

$$m_0 \dot{\xi}'_0 = - \sum_{j=1}^n m_j \dot{\xi}'_j$$

величину $\dot{\xi}'_0 \sum_{j=1}^n m_j$, мы получим $\left(m = \sum_{i=0}^n m_i \right)$

$$m \dot{\xi}'_0 = - \sum_{j=1}^n m_j (\dot{\xi}'_j - \dot{\xi}'_0) = - \sum_{j=1}^n m_j x_j,$$

откуда, с помощью формул (2.22), найдем *)

$$\left. \begin{aligned} \xi'_i &= x_i - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n m_j x_j, \\ \eta'_i &= y_i - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n m_j y_j, \\ \zeta'_i &= z_i - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n m_j z_j \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Заменяя теперь в равенствах (2.21') и (2.21''), которые являются интегралами уравнений (2.21), барицентрические

*) Эти формулы пригодны также и для точки M_0 , так как $x_0 = y_0 = z_0 = 0$.

координаты их выражениями (2.25), мы получим также соответствующие интегралы уравнений относительного движения (2.23). Произведем эту замену только в первом из уравнений (2.21'), ибо два других получаются из первого циклической перестановкой букв. Отметим прежде всего, что из формул (2.25) мы имеем

$$\sum_{j=1}^n m_j \dot{\xi}_j' = \sum_{j=1}^n m_j x_j - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n m_j x_j \sum_{j=1}^n m_j = \frac{m_0}{m} \sum_{j=1}^n m_j x_j,$$

а, следовательно, также

$$\sum_{j=1}^n m_j \dot{\xi}_j' = \frac{m_0}{m} \sum_{j=1}^n m_j \dot{x}_j$$

и аналогичные формулы для двух других координат.

С помощью этих формул и формул (2.25) мы напишем первый из интегралов (2.21') следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{m_0}{m^2} \left[\sum_{j=1}^n m_j y_j \sum_{j=1}^n m_j \dot{z}_j - \sum_{j=1}^n m_j z_j \sum_{j=1}^n m_j \dot{y}_j \right] + \\ + \sum_{i=1}^n m_i \left\{ \left[y_i - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n m_j y_j \right] \left[\dot{z}_i - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n m_j \dot{z}_j \right] - \right. \\ \left. - \left[z_i - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n m_j z_j \right] \left[\dot{y}_i - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n m_j \dot{y}_j \right] \right\} = c'_1, \end{aligned}$$

откуда после упрощений получаем первый из интегралов системы (2.23) и два остальных в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} - \frac{1}{m} \left[\sum_{j=1}^n m_j y_j \sum_{j=1}^n m_j \dot{z}_j - \sum_{j=1}^n m_j z_j \sum_{j=1}^n m_j \dot{y}_j \right] + \\ + \sum_{i=1}^n m_i (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i) = c'_1, \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

$$\left. \begin{aligned}
 & -\frac{1}{m} \left[\sum_{j=1}^n m_j z_j \sum_{j=1}^n m_j \dot{x}_j - \sum_{j=1}^n m_j x_j \sum_{j=1}^n m_j \dot{z}_j \right] + \\
 & \quad + \sum_{i=1}^n m_i (z_i \dot{x}_i - x_i \dot{z}_i) = c'_2, \\
 & -\frac{1}{m} \left[\sum_{j=1}^n m_j x_j \sum_{j=1}^n m_j \dot{y}_j - \sum_{j=1}^n m_j y_j \sum_{j=1}^n m_j \dot{x}_j \right] + \\
 & \quad + \sum_{i=1}^n m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) = c'_3.
 \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

Преобразуя таким же образом равенство (2.21''), мы получим четвертый интеграл системы уравнений относительного движения, аналогичный интегралу живых сил в абсолютном движении.

Этот последний интеграл напишется в виде

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2m} \left\{ \left[\sum_{i=1}^n m_i \dot{x}_i \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^n m_i \dot{y}_i \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^n m_i \dot{z}_i \right]^2 \right\} + \\
 & \quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = U + h'. \quad (2.26')
 \end{aligned}$$

Хотя интегралы (2.26) и (2.26') не имеют столь же ясного механического или геометрического значения, как в абсолютном движении, но для них сохраняется та же терминология.

Поэтому равенства (2.26) называются *интегралами площадей*, а равенство (2.26') — *интегралом живых сил* относительного движения.

Произвольные постоянные c_1 , c'_2 , c'_3 и h' могут быть определены через начальные значения

$$x_i^0, y_i^0, z_i^0, \dot{x}_i^0, \dot{y}_i^0, \dot{z}_i^0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.27)$$

относительных координат и их первых производных (составляющих относительных скоростей). Для солнечной системы, например, эти начальные значения могут быть выведены из результатов наблюдений планет, а значит, могут быть фактически определены.

Полученные интегралы позволяют понизить порядок системы (2.23) на четыре единицы, но, как уже было сказано, это понижение фактически не производится, так как в его результате получаются слишком сложные и громоздкие уравнения, с которыми неудобно иметь дело.

Поэтому интегралы (2.26) и (2.26') играют небольшую роль при решении задачи и могут быть использованы только для некоторых теоретических выводов или как контрольные формулы для некоторой проверки правильности произведенных вычислений (например, на быстродействующих вычислительных машинах).

Примечание. Уравнения относительного движения могут быть получены, конечно, также преобразованием уравнений абсолютного движения (2.3), так как из формул (2.20) и (2.22) следует также, что

$$x_i = \xi_i - \xi_0, \quad y_i = \eta_i - \eta_0, \quad z_i = \zeta_i - \zeta_0.$$

Поэтому и интегралы (2.26) и (2.26') можно вывести также и преобразованием интегралов (2.12) и (2.13).

Уравнения (2.23) можно вывести также и непосредственно. Действительно, рассмотрим систему материальных точек $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$, взаимно притягивающихся по закону Ньютона. Условимся рассматривать движения точек $M_1, M_2, \dots, M_n$ относительно точки M_0 , в которой поместим начало декартовой системы координат M_0xyz с неизменными направлениями осей. Координаты точки M_i ($i = 1, 2, \dots, n$) обозначим опять через x_i, y_i, z_i . Тогда проекции относительного ускорения в движении точки M_i будут соответственно $\ddot{x}_i, \ddot{y}_i, \ddot{z}_i$.

Чтобы получить дифференциальные уравнения движения, нужно выразить составляющие ускорения через координаты движущихся точек, применяя второй закон Ньютона, согласно которому составляющая ускорения точки по любой оси координат равна сумме составляющих всех сил, действующих на эту точку, поделенной на ее массу. Но это правило справедливо только для неподвижной системы координат и поэтому в нашем случае, где система координат движется вместе с точкой M_0 , непосредственно неприменимо.

Чтобы иметь возможность применить второй закон Ньютона в этом случае, нужно предварительно «остановить»

точку M_0 , для чего необходимо сообщить этой точке ускорения, равные по величине и противоположные по направлениям тем ускорениям, которые ей сообщают притяжения точек $M_1, M_2, \dots, M_n$. Но тогда мы должны и каждой из точек $M_1, M_2, \dots, M_n$ сообщить такие же ускорения, вследствие чего относительные движения точек M_i могут быть рассматриваемы как абсолютные.

Подсчитаем теперь все ускорения, приложенные к точке M_i ($i = 1, 2, \dots, n$) в проекции на ось $\overrightarrow{M_0 x_i}$.

Прежде всего точка M_i находится под действием притяжения точки M_0 , что дает следующую составляющую ускорения $\ddot{x}_i$:

$$- fm_0 \frac{x_i}{r_i^3}.$$

Далее, как сказано выше, мы должны приложить к точке M_i составляющие ускорений

$$- fm_1 \frac{x_1}{r_1^3}, \quad - fm_2 \frac{x_2}{r_2^3}, \quad \dots, \quad - fm_n \frac{x_n}{r_n^3},$$

представляющие собой величины, обратные по знаку составляющим ускорений, сообщаемых действиями притяжений точек $M_1, M_2, \dots, M_n$ движению точки M_0 .

Наконец, точка M_i находится под действием притяжений всех остальных точек M_j ($j = 1, 2, \dots, n, j \neq i$), которые дают следующие составляющие полного ускорения точки M_i :

$$- fm_1 \frac{x_i - x_1}{\Delta_{i1}^3}, \quad - fm_2 \frac{x_i - x_2}{\Delta_{i2}^3}, \quad \dots, \quad - fm_n \frac{x_i - x_n}{\Delta_{in}^3}.$$

Складывая все эти составляющие ускорения, мы получим составляющую полного ускорения в движении точки M_i , что дает следующее равенство:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i = & - fm_0 \frac{x_i}{r_i^3} - fm_1 \frac{x_1}{r_1^3} - \dots - fm_n \frac{x_n}{r_n^3} + \\ & + fm_1 \frac{x_1 - x_i}{\Delta_{i1}^3} + fm_2 \frac{x_2 - x_i}{\Delta_{i2}^3} + \dots + fm_n \frac{x_n - x_i}{\Delta_{in}^3}. \end{aligned}$$

Это равенство можно, очевидно, переписать в виде

$$\ddot{x}_i = - f(m_0 + m_i) \frac{x_i}{r_i^3} + \sum_{j=1}^n m_j \left(\frac{x_j - x_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{x_j}{r_j^3} \right),$$

а это и есть первое из уравнений (2.23); остальные два уравнения получаются таким же образом.

Но получив уравнения (2.23) непосредственно, не опираясь на уравнения абсолютного движения, мы не можем уже получить интегралы этих уравнений преобразованием интегралов абсолютного движения, а должны вывести эти интегралы из самих уравнений (2.23).

Это нетрудно сделать, но потребует выполнения довольно громоздких выкладок, которые для сокращения книги мы производить не будем, предоставляя проделать это читателю в качестве упражнения.

3. Уравнения движения в координатах Якоби. Уравнения относительного движения системы взаимно притягивающихся материальных точек вида (2.23') обладают тем существенным недостатком, что их правые части являются частными производными от различных функций, так что каждая из точек M_i ($i = 1, 2, \dots, n$) имеет свою собственную возмущающую функцию R_i .

Этот недостаток, весьма существенный в некоторых отношениях *), можно устранить, выбирая относительные координаты каким-либо другим способом.

Рассмотрим преобразование переменных, осуществленное впервые Якоби и называемое по этой причине *преобразованием Якоби*.

Обозначим через G_i центр масс системы материальных точек $M_0, M_1, \dots, M_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), так что G_0 совпадает с M_0 , а G_n есть центр масс всей системы, обозначенный ранее через G .

Введем n систем прямоугольных координат, начало каждой из которых помещается в одной из точек G_j ($j = 0, 1, \dots, n - 1$), а одноименные оси которых все параллельны друг другу и параллельны соответствующим осям барикентрической системы $G\xi'\eta'\zeta'$, а также, конечно, осям абсолютной системы $O\xi\eta\zeta$.

Пусть x'_i, y'_i, z'_i есть координаты точки M_i ($i = 1, 2, \dots, n$) в системе координат $G_{i-1}x'y'z'$ с началом в точке G_{i-1} .

*) Вследствие этого обстоятельства, например, относительные координаты не являются каноническими переменными, а поэтому уравнения (2.23') нельзя непосредственно привести к гамильтоновой форме.

Покажем, что относительные координаты x'_i, y'_i, z'_i , называемые также *координатами Якоби*, определяются уравнениями, имеющими симметричный вид и содержащими частные производные от одной и той же функции, а именно от силовой функции системы U .

Для вывода дифференциальных уравнений Якоби воспользуемся уравнениями Лагранжа *), принимая за обобщенные координаты q_j координаты Якоби x'_i, y'_i, z'_i .

Тогда уравнения движения в координатах Якоби можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}'_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x'_i} &= \frac{\partial U}{\partial x'_i}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}'_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial y'_i} &= \frac{\partial U}{\partial y'_i}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}'_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial z'_i} &= \frac{\partial U}{\partial z'_i} \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

и нам остается только выразить живую силу системы T и силовую функцию U через новые координаты.

Так как выражения для T и для U в функции бариецентрических или абсолютных координат нам известны, то наша задача приводится теперь к нахождению формул, связывающих координаты Якоби с бариецентрическими или с абсолютными координатами.

Обозначим бариецентрические координаты точки G_j через $\bar{x}'_j, \bar{y}'_j, \bar{z}'_j$. Тогда формулы параллельного переноса координат дают соотношения:

$$\xi'_i = x'_i + \bar{\xi}'_{i-1}, \quad \eta'_i = y'_i + \bar{\eta}'_{i-1}, \quad \zeta'_i = z'_i + \bar{\zeta}'_{i-1} \quad (2.29)$$

и

$$x'_i = \xi'_i - \bar{\xi}'_{i-1}, \quad y'_i = \eta'_i - \bar{\eta}'_{i-1}, \quad z'_i = \zeta'_i - \bar{\zeta}'_{i-1}. \quad (2.29')$$

Обозначим через σ_i массу подсистемы материальных точек $M_0, M_1, \dots, M_i$, т. е. положим

$$\sigma_i = m_0 + m_1 + \dots + m_{i-1} + m_i = \sum_{j=0}^i m_j,$$

причем очевидно, что $\sigma_0 = m_0$ и $\sigma_n = m$.

*) См. главу I, § 1.

Тогда, по свойствам центра масс системы материальных точек, имеем *)

$$\sigma_i \bar{\xi}'_i = \sum_{j=0}^i m_j \xi'_j \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (2.30)$$

Теперь формулы (2.29') дают

$$\sigma_{i-1} x'_i = \sigma_{i-1} \xi'_i - \sigma_{i-1} \bar{\xi}'_{i-1} = \xi'_i \sum_{j=0}^{i-1} m_j - \sum_{j=0}^{i-1} m_j \xi'_j,$$

откуда имеем

$$x'_i = \frac{1}{\sigma_{i-1}} \sum_{j=0}^{i-1} m_j (\xi'_i - \xi'_j). \quad (2.31)$$

Таким образом, соотношения (2.31) выражают новые координаты (координаты Якоби) через старые (барицентрические) **).

Выразим теперь барицентрические координаты через координаты Якоби.

Для этого заметим, прежде всего, что из формул (2.30) вытекает следующее соотношение:

$$m_k \xi'_k = \sigma_k \bar{\xi}'_k - \sigma_{k-1} \bar{\xi}'_{k-1}. \quad (2.32)$$

Заменяя в последней формуле m_k на $\sigma_k - \sigma_{k-1}$, а координаты точек G_k и G_{k-1} их выражениями из формул (2.29), мы получим

$$(\sigma_k - \sigma_{k-1}) \xi'_k = \sigma_k (\xi'_{k+1} - x'_{k+1}) - \sigma_{k-1} (\xi'_k - x'_k),$$

откуда найдем

$$\xi'_{k+1} - \xi'_k = x'_{k+1} - \frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k} x'_k. \quad (2.32')$$

Придавая здесь индексу k значения $0, 1, 2, \dots, l-1$ и складывая получающиеся равенства, мы найдем без труда

$$\xi'_l - \xi'_0 = x'_l + \sum_{k=1}^{l-1} \frac{m_k x'_k}{\sigma_k}. \quad (2.32'')$$

*) Для упрощения мы будем писать все формулы и производить все выкладки только для одной координаты, например, для абсциссы.

**) В частности, формулы (2.31) дают $x'_i = \xi'_i - \xi'_0$, что очевидно.

Умножая равенства (2.32'') соответственно на m_i и суммируя по i от 1 до n , мы получим с помощью формул (2.20'') следующее равенство:

$$\xi'_0 = - \sum_{k=1}^n \frac{m_k x'_k}{\sigma_k}, \quad (2.32''')$$

которое позволяет найти ξ'_0 , после чего формулы (2.32'') дадут и все остальные барицентрические координаты.

Это показывает, что якобиевские координаты точек M_i ($i = 1, 2, \dots, n$) полностью определяют положение всей системы $n + 1$ точек в барицентрической, а стало быть, и в абсолютной системе координат.

Теперь из формул (2.32'') выводим также, считая $j > i$,

$$\xi'_j - \xi'_i = x'_j - x'_i + \sum_{k=1}^{j-1} \frac{m_k x'_k}{\sigma_k},$$

что позволяет выразить взаимные расстояния через новые координаты, а, значит, также и силовую функцию U .

Найдем теперь выражение для живой силы T . Заменим для этого в формуле (2.32), написанной для $k = i$, ξ'_i его выражением (2.29), что даст

$$m_i x'_i = \sigma_i \bar{\xi}'_i - \sigma_{i-1} \bar{\xi}'_{i-1}.$$

Дифференцируя это соотношение и то, из которого оно получено, имеем два следующих равенства:

$$m_i \dot{\xi}'_i = \sigma_i \dot{\bar{\xi}}'_i - \sigma_{i-1} \dot{\bar{\xi}}'_{i-1},$$

$$m_i \dot{x}'_i = \sigma_i \dot{\bar{\xi}}'_i - \sigma_{i-1} \dot{\bar{\xi}}'_{i-1}.$$

Возводя каждое из этих равенств в квадрат и исключая из полученных равенств произведение $\dot{\bar{\xi}}'_i \dot{\bar{\xi}}'_{i-1}$, найдем следующее соотношение:

$$m_i \dot{\xi}'_i{}^2 - \frac{m_i \sigma_{i-1}}{\sigma_i} \dot{x}'_i{}^2 = \sigma_i \dot{\bar{\xi}}'_i{}^2 - \sigma_{i-1} \dot{\bar{\xi}}'_{i-1}{}^2,$$

из которого, суммируя по i от 1 до n , получим

$$\sum_{i=1}^n m_i \dot{\xi}_i'^2 - \sum_{i=1}^n \frac{m_i \sigma_{i-1}}{\sigma_i} \dot{x}_i'^2 = \sigma_n \dot{\xi}_n'^2 - \sigma_0 \dot{\xi}_0'^2.$$

Но $\bar{\xi}_0' = \xi_0'$ и $\bar{\xi}_n' = 0$, так что мы имеем окончательно

$$\sum_{i=0}^n m_i \dot{\xi}_i'^2 = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \sigma_{i-1}}{\sigma_i} \dot{x}_i'^2.$$

Написав подобные же равенства для двух других координат, мы получим

$$\begin{aligned} T' &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n m_i (\dot{\xi}_i'^2 + \dot{\eta}_i'^2 + \dot{\zeta}_i'^2) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{m_i \sigma_{i-1}}{\sigma_i} (\dot{x}_i'^2 + \dot{y}_i'^2 + \dot{z}_i'^2). \end{aligned}$$

Величина T' отличается от живой силы T только на постоянную. Действительно, мы можем написать

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n m_i (\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n m_i [(\dot{\xi}_i' + \dot{\xi})^2 + (\dot{\eta}_i' + \dot{\eta})^2 + (\dot{\zeta}_i' + \dot{\zeta})^2] = \\ &= T' + \dot{\xi} \sum_{i=0}^n m_i \dot{\xi}_i' + \dot{\eta} \sum_{i=0}^n m_i \dot{\eta}_i' + \dot{\zeta} \sum_{i=0}^n m_i \dot{\zeta}_i' + \frac{m}{2} (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) \end{aligned}$$

откуда, используя свойства центра масс (см. формулы (2.11') и (2.20')), найдем

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i' (\dot{x}_i'^2 + \dot{y}_i'^2 + \dot{z}_i'^2) + \frac{1}{2m} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2), \quad (2.33)$$

где для сокращения введено обозначение

$$m_i' = \frac{m_i \sigma_{i-1}}{\sigma_i} = \frac{m_i (m_0 + m_1 + \dots + m_{i-1})}{m_0 + m_1 + \dots + m_{i-1} + m_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.33')$$

Постоянные m'_i , зависящие только от масс материальных точек, называются иногда «приведенными массами».

Теперь по формулам (2.28) получим окончательно уравнения движения нашей материальной системы в координатах Якоби в следующей симметричной форме:

$$\left. \begin{aligned} m'_i \ddot{x}'_i &= \frac{\partial U}{\partial x'_i}, \\ m'_i \ddot{y}'_i &= \frac{\partial U}{\partial y'_i}, \\ m'_i \ddot{z}'_i &= \frac{\partial U}{\partial z'_i} \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.34)$$

Уравнения (2.34) можно также, конечно, вывести прямым преобразованием при помощи формул (2.32'') и (2.32''') из уравнений (2.18''). Поэтому и интегралы системы (2.34) можно получить из интегралов системы (2.18'') при помощи такого же преобразования. При этом легко проверить, что соотношения (2.20') удовлетворяются тождественно, а интегралы площадей и живых сил напишутся совершенно в такой же форме, как и соответствующие интегралы системы (2.18''), или как интегралы уравнений абсолютного движения.

Таким образом, система (2.34) имеет следующие четыре интеграла:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n m'_i (y'_i \dot{z}'_i - z'_i \dot{y}'_i) &= c'_1, \\ \sum_{i=1}^n m'_i (z'_i \dot{x}'_i - x'_i \dot{z}'_i) &= c'_2, \\ \sum_{i=1}^n m'_i (x'_i \dot{y}'_i - y'_i \dot{x}'_i) &= c'_3, \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m'_i (\dot{x}'_i{}^2 + \dot{y}'_i{}^2 + \dot{z}'_i{}^2) = U + h', \quad (2.35')$$

произвольные постоянные которых могут быть определены через начальные значения

$$x'_i{}^0, \quad y'_i{}^0, \quad z'_i{}^0, \quad \dot{x}'_i{}^0, \quad \dot{y}'_i{}^0, \quad \dot{z}'_i{}^0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

координат Якоби и их первых производных.

Заметим еще, что если система (2.34) проинтегрирована, то мы можем получить также и относительные координаты x_i , y_i , z_i точек M_i . Эти координаты, в силу формул (2.22), получатся непосредственно из формул (2.32''), так что мы имеем

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x'_i + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{m_k x'_k}{\sigma_k}, \\ y_i &= y'_i + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{m_k y'_k}{\sigma_k}, \\ z_i &= z'_i + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{m_k z'_k}{\sigma_k}. \end{aligned} \right\} \quad (2.35'')$$

Примечание 1. Уравнения (2.34) можно также рассматривать как дифференциальные уравнения абсолютного движения n материальных точек M'_i , обладающих массами m'_i , в поле сил, определяемом силовой функцией U , зависящей только от координат x'_i , y'_i , z'_i этих точек.

Тогда интегралы площадей и интеграл живых сил можно написать сразу, без всякого преобразования, в виде (2.35) и (2.35'). Заметим еще, что интеграл живых сил следует также из уравнений (2.28) в силу свойств уравнений Лагранжа.

Примечание 2. В уравнения (2.34) входит только одна функция U , но зато она имеет более сложный вид, чем возмущающие функции R_i в уравнениях относительного движения (2.23'). Действительно, величины Δ_{ij} определяются через координаты Якоби формулами:

$$\begin{aligned} \Delta_{ij}^2 &= \left(x'_j - x'_i + \sum_{k=1}^{j-1} \frac{m_k x'_k}{\sigma_k} \right)^2 + \\ &+ \left(y'_j - y'_i + \sum_{k=1}^{j-1} \frac{m_k y'_k}{\sigma_k} \right)^2 + \left(z'_j - z'_i + \sum_{k=1}^{j-1} \frac{m_k z'_k}{\sigma_k} \right)^2 \\ &\quad (i, j = 0, 1, 2, \dots, n; j > i). \end{aligned}$$

Выпишем для примера уравнения (2.34) для случая, когда $n=2$, т. е. для задачи трех тел. В этом случае

$$U = f \left(\frac{m_0 m_1}{\Delta_{01}} + \frac{m_0 m_2}{\Delta_{02}} + \frac{m_1 m_2}{\Delta_{12}} \right), \quad (2.36)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{01}^2 &= x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2, \\ \Delta_{02}^2 &= \left(x_2' + \frac{m_1}{\sigma_1} x_1' \right)^2 + \left(y_2' + \frac{m_1}{\sigma_1} y_1' \right)^2 + \left(z_2' + \frac{m_1}{\sigma_1} z_1' \right)^2, \\ \Delta_{12}^2 &= \left(x_2' - \frac{m_0}{\sigma_1} x_1' \right)^2 + \left(y_2' - \frac{m_0}{\sigma_1} y_1' \right)^2 + \left(z_2' - \frac{m_0}{\sigma_1} z_1' \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.36')$$

Формулы (2.36) и (2.36') дают

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_1'} &= -f \frac{m_0 m_1 x_1'}{\Delta_{01}^3} - f \frac{m_0 m_2}{\Delta_{02}^3} \cdot \frac{m_1}{\sigma_1} \left(x_2' + \frac{m_1}{\sigma_1} x_1' \right) + \\ &\quad + f \frac{m_1 m_2}{\Delta_{12}^3} \cdot \frac{m_0}{\sigma_1} \left(x_2' - \frac{m_0}{\sigma_1} x_1' \right), \\ \frac{\partial U}{\partial x_2'} &= -f \frac{m_0 m_2}{\Delta_{02}^3} \left(x_2' + \frac{m_1}{\sigma_1} x_1' \right) - f \frac{m_1 m_2}{\Delta_{12}^3} \left(x_2' - \frac{m_0}{\sigma_1} x_1' \right), \end{aligned}$$

вследствие чего уравнения движения задачи трех тел напишутся в координатах Якоби следующим образом:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1' &= - \frac{\mu_1 x_1'}{r_1'^3} - \mu_1' x_1' \left(\frac{m_1}{\Delta_{02}^3} + \frac{m_0}{\Delta_{12}^3} \right) - \mu_1'' x_2' \left(\frac{1}{\Delta_{02}^3} - \frac{1}{\Delta_{12}^3} \right), \\ \ddot{x}_2' &= - m_1' \mu_2' x_1' \left(\frac{1}{\Delta_{02}^3} - \frac{1}{\Delta_{12}^3} \right) - \mu_2' x_2' \left(\frac{m_0}{\Delta_{02}^3} + \frac{m_1}{\Delta_{12}^3} \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} r_1' &= \Delta_{01}, & \mu_1 &= f(m_0 + m_1), & \mu_1' &= \frac{f m_2}{m_0 + m_1}, \\ \mu_1'' &= f m_2, & \mu_2' &= \frac{f(m_0 + m_1 + m_2)}{m_0 + m_1}, & m_1' &= \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1}. \end{aligned}$$

Аналогичные уравнения имеем для двух других координат.

§ 4. Другие виды дифференциальных уравнений движения задачи многих тел

Прямоугольные декартовские координаты (абсолютные или относительные) в ряде случаев оказываются по тем или иным причинам неудобными для применения в конкретных задачах небесной механики и тогда их заменяют какими-либо другими, более подходящими переменными.

Рассмотрение различных форм дифференциальных уравнений движения системы взаимно притягивающихся точек (небесных тел!) и является целью настоящего параграфа.

1. Уравнения движения в цилиндрических координатах. Рассмотрим сначала простейшую не прямолинейную систему, а именно систему цилиндрических координат.

Если желательно преобразовать к этой системе координат абсолютные уравнения движения системы (2.3'), то нужно положить

$$\xi_i = \rho_i \cos \lambda_i, \quad \eta_i = \rho_i \sin \lambda_i, \quad \zeta_i = \zeta_i, \quad (2.37)$$

где ρ_i есть проекция радиуса-вектора r_i точки M_i на плоскость $O\xi\eta$, а λ_i — угол, образуемый этой проекцией с положительным направлением оси абсцисс *).

Тогда (см. § 2 главы I) уравнения движения напишутся следующим образом:

$$m_i (\ddot{\rho}_i - \rho_i \dot{\lambda}_i^2) = \frac{\partial U}{\partial \rho_i}, \quad m_i \frac{d}{dt} (\rho_i^2 \dot{\lambda}_i) = \frac{\partial U}{\partial \lambda_i}, \quad m_i \ddot{\zeta}_i = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} \quad (2.37')$$

($i = 0, 1, 2, \dots, n$).

Силовая функция U , входящая в эти уравнения, определяется той же формулой (2.6), но взаимные расстояния Δ_{ij} должны быть выражены через новые переменные (2.37).

Таким образом,

$$\Delta_{ij}^2 = \rho_i^2 + \rho_j^2 - 2\rho_i\rho_j \cos(\lambda_i - \lambda_j) + (\zeta_i - \zeta_j)^2,$$

*) В системе координат (2.37) за основную плоскость взята плоскость $O\xi\eta$ и за основное направление — ось абсцисс. Разумеется, что такой выбор не является обязательным и за основную плоскость, например, можно брать любую координатную плоскость.

вследствие чего правые части уравнений (2.37') представятся в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \rho_i} &= -f m_i \sum_{j=0}^{n'} m_j \frac{\rho_i - \rho_j \cos(\lambda_i - \lambda_j)}{\Delta_{ij}^3}, \\ \frac{\partial U}{\partial \lambda_i} &= -f m_i \rho_i \sum_{j=0}^{n'} m_j \rho_j \frac{\sin(\lambda_i - \lambda_j)}{\Delta_{ij}^3}, \\ \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} &= -f m_i \sum_{j=0}^{n'} m_j \frac{\zeta_i - \zeta_j}{\Delta_{ij}^3}. \end{aligned} \right\} \quad (2.37'')$$

Уравнения (2.37') имеют, конечно, те же классические интегралы, как и уравнения (2.3); но эти интегралы нужно преобразовать к новым переменным при помощи формул (2.37).

Например, интеграл живых сил напишется следующим образом:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^n m_i (\dot{\rho}_i^2 + \rho_i^2 \dot{\lambda}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2) = U + h.$$

Выражения для других интегралов не представляют особого интереса, и мы их выписывать не будем.

Точно так же можно преобразовать к цилиндрическим координатам и уравнения относительного движения (2.21). Полагая

$$\xi'_i = \rho'_i \cos \lambda'_i, \quad \eta'_i = \rho'_i \sin \lambda'_i, \quad \zeta'_i = \zeta'_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2.38)$$

мы будем иметь вместо уравнений (2.21) следующие:

$$\ddot{\rho}'_i - \rho'_i \dot{\lambda}'_i{}^2 = P'_i, \quad \frac{d}{dt} (\rho'^2_i \dot{\lambda}'_i) = \Lambda'_i, \quad \ddot{\zeta}'_i = Z'_i, \quad (2.38')$$

где, как легко проверить,

$$\begin{aligned}
 P'_i = & -f \frac{(m_0 + m_i) \rho'_i + \sum_{j=1}^n m_j \rho'_j \cos(\lambda'_i - \lambda'_j)}{\Delta_{i0}^3} + \\
 & + f \sum_{j=1}^n m_j \frac{\rho'_i \cos(\lambda'_j - \lambda'_i) - \rho'_j}{\Delta_{ij}^3}, \\
 \Lambda'_i = & \frac{f}{\Delta_{i0}^3} \sum_{j=1}^n m_j \rho'_j \sin(\lambda'_i - \lambda'_j) - f \sum_{j=1}^n \frac{m_j \rho'_j \sin(\lambda'_i - \lambda'_j)}{\Delta_{ij}^3},
 \end{aligned} \tag{2.38''}$$

$$Z'_i = -f \frac{(m_0 + m_i) \zeta'_i + \sum_{j=1}^n m_j \zeta'_j}{\Delta_{i0}^3} + f \sum_{j=1}^n m_j \frac{\zeta'_i - \zeta'_j}{\Delta_{ij}^3},$$

причем взаимные расстояния определяются формулами

$$\begin{aligned}
 \Delta_{i0}^2 = & \left[\left(1 + \frac{m_i}{m_0} \right) \rho'_i \cos \lambda'_i + \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{m_0} \rho'_j \cos \lambda'_j \right]^2 + \\
 & + \left[\left(1 + \frac{m_i}{m_0} \right) \rho'_i \sin \lambda'_i + \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{m_0} \rho'_j \sin \lambda'_j \right]^2 + \\
 & + \left[\left(1 + \frac{m_i}{m_0} \right) \zeta'_i + \sum_{j=1}^n m_j \zeta'_j \right]^2
 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
 \Delta_{ij}^2 = & \rho_i'^2 + \rho_j'^2 - 2\rho'_i \rho'_j \cos(\lambda'_i - \lambda'_j) + (\zeta'_i - \zeta'_j)^2 \\
 & (i, j = 1, 2, \dots, n; j \neq i).
 \end{aligned}$$

Четыре первых интеграла уравнений (2.38') получатся из интегралов (2.21') и (2.21'') преобразованием к новым переменным при помощи формул (2.38). Эти, довольно громоздкие, уравнения мы приводить здесь не будем.

Рассмотрим теперь преобразование уравнений относительного движения (2.23') к цилиндрическим координатам.

Положим предварительно

$$\Omega_i = \frac{f(m_0 + m_i)}{r_i} + R_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Тогда уравнения (2.23') напишутся в виде

$$\ddot{x}_i = \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_i}, \quad \ddot{y}_i = \frac{\partial \Omega_i}{\partial y_i}, \quad \ddot{z}_i = \frac{\partial \Omega_i}{\partial z_i}. \quad (2.39)$$

Переходя теперь к цилиндрическим координатам по формулам *)

$$x_i = \rho_i \cos \lambda_i, \quad y_i = \rho_i \sin \lambda_i, \quad z_i = z_i, \quad (2.39')$$

мы получим вместо уравнений (2.39) следующие:

$$\ddot{\rho}_i - \rho_i \dot{\lambda}_i^2 = \frac{\partial \Omega_i}{\partial \rho_i}, \quad \frac{d}{dt}(\rho_i^2 \dot{\lambda}_i) = \frac{\partial \Omega_i}{\partial \lambda_i}, \quad \ddot{z}_i = \frac{\partial \Omega_i}{\partial z_i}. \quad (2.39'')$$

Функции Ω_i имеют в цилиндрических координатах следующие выражения:

$$\Omega_i = \frac{f(m_0 + m_i)}{\sqrt{\rho_i^2 + z_i^2}} + f \sum_{j=1}^n m_j \left[\frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{\rho_i \rho_j \cos(\lambda_i - \lambda_j) + z_i z_j}{(\rho_j^2 + z_j^2)^{3/2}} \right],$$

где

$$\Delta_{ij}^2 = \rho_i^2 + \rho_j^2 - 2\rho_i \rho_j \cos(\lambda_i - \lambda_j) + (z_i - z_j)^2.$$

Составляя частные производные от Ω_i , мы найдем

$$\frac{\partial \Omega_i}{\partial \rho_i} = - \frac{f(m_0 + m_i) \rho_i}{(\rho_i^2 + z_i^2)^{3/2}} +$$

$$+ f \sum_{j=1}^n m_j \left[\frac{\rho_j \cos(\lambda_i - \lambda_j) - \rho_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{\rho_j \cos(\lambda_i - \lambda_j)}{(\rho_j^2 + z_j^2)^{5/2}} \right],$$

$$\frac{\partial \Omega_i}{\partial \lambda_i} = - f \rho_i \sum_{j=1}^n m_j \rho_j \left[\frac{1}{\Delta_{ij}^3} - \frac{1}{(\rho_j^2 + z_j^2)^{3/2}} \right] \sin(\lambda_i - \lambda_j),$$

$$\frac{\partial \Omega_i}{\partial z_i} = - \frac{f(m_0 + m_i) z_i}{(\rho_i^2 + z_i^2)^{3/2}} + f \sum_{j=1}^n m_j \left[\frac{z_j - z_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{z_j}{(\rho_j^2 + z_j^2)^{3/2}} \right].$$

*) Здесь ρ_i обозначает проекцию радиуса-вектора $r_i = \vec{M_0 M_i}$ точки M_i на плоскость x, y , а λ_i — угол, образуемый этой проекцией с положительным направлением оси $\vec{M_0 x}$. Обозначение относительных цилиндрических координат теми же буквами, что и абсолютных, не может привести к недоразумениям.

Первые интегралы уравнений (2.39''), получаемые преобразованием интегралов (2.26) и (2.26') при помощи формул (2.39'), также приводить не будем.

Дифференциальные уравнения движения в координатах Якоби, конечно, тоже можно преобразовать к цилиндрическим координатам, вводя для каждой из точек M_i свою систему цилиндрических координат, связанную с собственной, прямоугольной системой $O_{i-1}x'y'z'$.

Так как уравнения (2.34) имеют такой же вид, как и уравнения абсолютного движения (2.3'), то и преобразованные к цилиндрическим координатам уравнения будут иметь такой же вид, как и уравнения (2.37'), только их правые части, написанные в раскрытом виде, будут значительно сложнее выражений (2.36''), и мы их приводить не будем.

2. Уравнения движения в сферических координатах. Рассмотрим теперь уравнения движения системы взаимно притягивающихся материальных точек в сферических координатах.

Преобразуем абсолютные координаты точек M_i при помощи формул

$$\xi_i = r_i \cos \varphi_i \cos \lambda_i, \quad \eta_i = r_i \cos \varphi_i \sin \lambda_i, \quad z_i = r_i \sin \varphi_i \quad (2.40)$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots, n),$$

где $r_i = \overrightarrow{OM_i}$ есть радиус-вектор точки M_i ; λ_i — так же, как и в цилиндрической системе, — есть угол, образованный проекцией радиуса-вектора на плоскость $O\xi\eta$ с положительным направлением оси $O\xi$, и φ_i — угол, образованный радиусом-вектором с плоскостью $O\xi\eta$.

Уравнения движения в полярных координатах напишутся по образцу уравнений (1.21) § 2 главы I в виде

$$\left. \begin{aligned} m_i (\ddot{r}_i - r_i \dot{\varphi}_i^2 - r_i \dot{\lambda}_i^2 \cos^2 \varphi_i) &= \frac{\partial U}{\partial r_i}, \\ m_i \left[\frac{d}{dt} (r_i^2 \dot{\varphi}_i) + r_i^2 \dot{\lambda}_i^2 \sin \varphi_i \cos \varphi_i \right] &= \frac{\partial U}{\partial \varphi_i}, \\ m_i \frac{d}{dt} (r_i^2 \dot{\lambda}_i \cos^2 \varphi_i) &= \frac{\partial U}{\partial \lambda_i} \end{aligned} \right\} \quad (2.40')$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Силовая функция U сохраняет свой вид (2.6), но взаимные расстояния определяются следующим образом:

$$\Delta_{ij}^2 = r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos \gamma_{ij},$$

где для сокращения положено

$$\cos \gamma_{ij} = \sin \varphi_i \sin \varphi_j + \cos \varphi_i \cos \varphi_j \cos (\lambda_i - \lambda_j),$$

так что γ_{ij} есть угол, образованный радиусами-векторами точек M_i и M_j .

Составляя выражения частных производных от U по сферическим координатам, мы будем иметь

$$\frac{\partial U}{\partial r_i} = -f m_i \sum_{j=0}^n m_j \frac{r_i - r_j \cos \gamma_{ij}}{\Delta_{ij}^3},$$

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda_i} = -f m_i r_i \cos \varphi_i \sum_{j=0}^n m_j r_j \cos \varphi_j \frac{\sin (\lambda_i - \lambda_j)}{\Delta_{ij}^3},$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_i} = f m_i r_i \sum_{j=0}^n m_j r_j \frac{\cos \varphi_i \sin \varphi_j - \sin \varphi_i \cos \varphi_j \cos (\lambda_i - \lambda_j)}{\Delta_{ij}^3}.$$

Преобразуя теперь уравнения относительного движения (относительно точки M_0), написанные в виде (2.39), к сферическим координатам по формулам, подобным (2.40),

$$x_i = r_i \cos \varphi_i \cos \lambda_i, \quad y_i = r_i \cos \varphi_i \sin \lambda_i, \quad z_i = r_i \sin \varphi_i \quad (2.41) \\ (i = 1, 2, \dots, n),$$

где r_i обозначают расстояния точек M_i от точки M_0 , а λ_i и φ_i имеют значения, аналогичные вышерассмотренным, мы получим следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{r}_i - r_i \dot{\varphi}_i^2 - r_i \dot{\lambda}_i^2 \cos^2 \varphi_i &= \frac{\partial \Omega_i}{\partial r_i}, \\ \frac{d}{dt} (r_i^2 \dot{\varphi}_i) + r_i^2 \dot{\lambda}_i \sin \varphi_i \cos \varphi_i &= \frac{\partial \Omega_i}{\partial \varphi_i}, \\ \frac{d}{dt} (r_i^2 \dot{\lambda}_i \cos^2 \varphi_i) &= \frac{\partial \Omega_i}{\partial \lambda_i}, \end{aligned} \right\} \quad (2.41')$$

где (в сферических координатах)

$$\Omega_i = \frac{f(m_0 + m_i)}{r_i} + f \sum_{j=1}^n m_j \left(\frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{r_i \cos \gamma_{ij}}{r_j^2} \right),$$

причем

$$r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2},$$

а взаимные расстояния выражаются такими же формулами, как и для уравнений абсолютного движения.

Правые части уравнений (2.41') выразятся, как нетрудно проверить, следующими формулами:

$$\frac{\partial \Omega_i}{\partial r_i} = - \frac{f(m_0 + m_i)}{r_i} + f \sum_{j=1}^n m_j \left(\frac{r_j \cos \gamma_{ij} - r_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{\cos \gamma_{ij}}{r_j^2} \right),$$

$$\frac{\partial \Omega_i}{\partial \lambda_i} = - f r_i \cos \varphi_i \sum_{j=1}^n m_j r_j \cos \varphi_j \left(\frac{1}{\Delta_{ij}^3} - \frac{1}{r_j^3} \right) \sin (\lambda_i - \lambda_j),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_i}{\partial \varphi_i} = f r_i \sum_{j=1}^n m_j r_j \left(\frac{1}{\Delta_{ij}^3} - \frac{1}{r_j^3} \right) [\cos \varphi_i \sin \varphi_j - \\ - \sin \varphi_i \cos \varphi_j \cos (\lambda_i - \lambda_j)]. \end{aligned}$$

Аналогично можно преобразовать и уравнения движения в координатах Якоби, вводя (так же, как было указано выше) для каждой точки M_i собственную систему сферических координат, связанную с собственной прямоугольной системой $G_{i-1}x'y'z'$. Уравнения движения будут иметь такой же вид, как и уравнения (2.40'), однако, так как силовая функция зависит от координат Якоби гораздо более сложным образом, чем от обыкновенных прямоугольных координат, то и ее частные производные по полярным координатам также будут выражаться довольно сложно, и мы их приводить не будем.

Уравнения движения относительно точки M_0 в цилиндрических координатах (2.39'') или в сферических координатах (2.41') особенно удобны для исследования движения планет солнечной системы.

Действительно, все большие планеты движутся почти в одной плоскости по орбитам, очень близким к круговым. Поэтому, принимая упомянутую плоскость за основную координ-

натную плоскость, мы добьемся того, что радиусы-векторы планет так же, как и их проекции на основную плоскость (длительное время по крайней мере), будут мало отличаться от некоторых постоянных величин (радиусов некоторых круговых орбит), а аппликаты z_i и широты φ_i будут вообще весьма малы.

Это обстоятельство значительно упрощает приближенное интегрирование уравнений движения больших планет солнечной системы, заданных в форме (2.39'') или (2.41'), о чем подробнее будет идти речь ниже.

3. Уравнения Лапласа — Клеро. Рассмотрим еще одно специальное преобразование уравнений движения, использованное вначале Клеро в одной частной задаче, а затем Лапласом и другими в более общем случае.

Будем исходить из уравнений движения системы материальных точек, находящихся под действием данных сил, в цилиндрических координатах

$$\ddot{\rho}_i - \rho_i \dot{\lambda}_i^2 = P_i, \quad \frac{d}{dt}(\rho_i^2 \dot{\lambda}_i) = \Lambda_i, \quad \ddot{z}_i = Z_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2.42)$$

где P_i , Λ_i , Z_i суть заданные функции величин ρ_1 , λ_1 , z_1 , ..., ρ_n , λ_n , z_n и их первых производных по времени, но не зависят явно от времени t . Тогда, как известно, исключая время и принимая за независимую переменную любую из координат, мы можем понизить порядок системы (2.42) на одну единицу. Наиболее удобно взять за новую независимую переменную одну из долгот λ_1 , ..., λ_n , например λ_k (где k — любое из ряда чисел 1, 2, ..., n).

Преобразуем уравнения (2.42) введением новой переменной, полагая для упрощения письма $\lambda_k = \lambda$, и введем, кроме того, вместо зависимых переменных ρ_i и z_i новые зависимые переменные u_i и s_i посредством формул

$$u_i = \frac{1}{\rho_i}, \quad s_i = \frac{z_i}{\rho_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

так что u_i есть обратное значение проекции радиуса-вектора ρ_i точки M_i на плоскость $z = 0$, а s_i есть тангенс широты этой точки.

Положим теперь

$$\rho_i^2 \dot{\lambda}_i = \Gamma_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.43)$$

Тогда старая и новая независимые переменные будут связаны следующим соотношением:

$$\frac{d\lambda}{dt} = u_k^2 \Gamma_k. \quad (2.43')$$

Производная по времени от какой-либо функции Φ выражается через производную той же функции по переменной λ следующим образом:

$$\dot{\Phi} = \frac{d\Phi}{dt} = u_k^2 \Gamma_k \frac{d\Phi}{d\lambda}. \quad (2.44)$$

Отсюда, в частности, имеем

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_i &= u_k^2 \Gamma_k \frac{d\rho_i}{d\lambda}, & \dot{z}_i &= u_k^2 \Gamma_k \frac{dz_i}{d\lambda}, \\ \dot{\lambda}_i &= u_k^2 \Gamma_k \frac{d\lambda_i}{d\lambda}, & \frac{d\Gamma_i}{dt} &= u_k^2 \Gamma_k \frac{d\Gamma_i}{d\lambda}. \end{aligned}$$

Далее, из формулы (2.44) выводим следующую:

$$\ddot{\Phi} = \frac{d^2\Phi}{dt^2} = u_k^2 \Gamma_k \frac{d}{d\lambda} \left(u_k^2 \Gamma_k \frac{d\Phi}{d\lambda} \right), \quad (2.44')$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} \ddot{\rho}_i &= u_k^2 \Gamma_k \frac{d}{d\lambda} \left(u_k^2 \Gamma_k \frac{d\rho_i}{d\lambda} \right) = - u_k^2 \Gamma_k \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{u_k^2 \Gamma_k}{u_i^2} \frac{du_i}{d\lambda} \right), \\ \ddot{z}_i &= u_k^2 \Gamma_k \frac{d}{d\lambda} \left(u_k^2 \Gamma_k \frac{dz_i}{d\lambda} \right) = u_k^2 \Gamma_k \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{u_k^2 \Gamma_k}{u_i^2} \left(u_i \frac{ds_i}{d\lambda} - s_i \frac{du_i}{d\lambda} \right) \right]. \end{aligned}$$

Теперь уравнения (2.42) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} - u_k^2 \Gamma_k \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{u_k^2 \Gamma_k}{u_i^2} \frac{du_i}{d\lambda} \right) - \frac{u_k^4 \Gamma_k^2}{u_i} \left(\frac{d\lambda_i}{d\lambda} \right)^2 &= P_i, \\ u_k^2 \Gamma_k \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{u_k^2 \Gamma_k}{u_i^2} \left(u_i \frac{ds_i}{d\lambda} - s_i \frac{du_i}{d\lambda} \right) \right] &= Z_i, \\ u_k^2 \Gamma_k \frac{d\Gamma_i}{d\lambda} &= \Lambda_i, \end{aligned}$$

причем в выражениях для P_i , Z_i и Λ_i величины ρ_i , z_i , λ_i , $\dot{\rho}_i$, $\dot{z}_i$, $\dot{\lambda}_i$ должны быть заменены их выражениями в функции новых переменных.

Чтобы привести написанные уравнения к окончательному виду, исключим из них производную от Γ_k по λ при помощи формулы

$$\frac{d\Gamma_k}{d\lambda} = \frac{1}{u_k^2 \Gamma_k} \Lambda_k, \quad (2.45)$$

затем из второго уравнения исключим при помощи первого вторую производную от u_i по λ и, наконец, заметим, что в силу (2.43) и (2.43') имеем для $i \neq k$

$$\Gamma_i = \frac{u_k^2 \Gamma_k}{u_i^2} \frac{d\lambda_i}{d\lambda}.$$

В результате указанных преобразований и упрощений уравнения движения системы n материальных точек приведутся к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 u_i}{d\lambda^2} + z_i^2 u_i &= U_i, \\ \frac{d^2 s_i}{d\lambda^2} + z_i^2 s_i &= S_i, \\ \frac{d^2 \lambda_i}{d\lambda^2} &= L_i \quad (i \neq k), \\ (i &= 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \right\} \quad (2.46)$$

где $z_i = \frac{d\lambda_i}{d\lambda}$,

$$\begin{aligned} U_i &= -\frac{u_i^2}{u_k^4 \Gamma_k^2} \left\{ P_i + u_k^2 \left[\frac{\Lambda_k}{u_i^2} + \Gamma_k^2 \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{u_k^2}{u_i^2} \right) \right] \frac{du_i}{d\lambda} \right\}, \\ S_i &= -\frac{u_i}{u_k^4 \Gamma_k^2} \left\{ P_i s_i - Z_i + u_k^2 \left[\frac{\Lambda_k}{u_i} + \Gamma_k^2 \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{u_k^2}{u_i^2} \right) \right] \frac{ds_i}{d\lambda} \right\}, \\ L_i &= \frac{u_i^2}{u_k^4 \Gamma_k^2} \left\{ \Lambda_i - u_k^2 \left[\frac{\Lambda_k}{u_i^2} + \Gamma_k^2 \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{u_k^2}{u_i^2} \right) \right] \frac{d\lambda_i}{d\lambda} \right\} \quad (i \neq k). \end{aligned}$$

Входящая в уравнения (2.46) вспомогательная переменная Γ_k определяется уравнением (2.45), которое может быть присоединено к системе (2.46).

Принтегрировав уравнения (2.46) и (2.45), мы получим величины u_i , s_i , λ_i и Γ_k в функции независимой переменной λ и $6n - 1$ произвольных постоянных. После этого из уравнения (2.43') простой квадратурой определим и время t , как функцию переменной λ :

$$t - t_0 = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda}{u_k^2 \Gamma_k}, \quad (2.47)$$

где λ_0 можно рассматривать как последнюю произвольную постоянную.

Разрешая уравнение (2.47) относительно λ , мы определим эту величину как функцию времени, а затем без труда получим и все остальные переменные в зависимости от времени и $6n$ произвольных постоянных.

Заметим еще, что из уравнения (2.45) интегрированием мы найдем

$$\Gamma_k^2 = \gamma^2 + \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\Lambda_k d\lambda}{u_k^2},$$

где γ^2 есть произвольная постоянная.

Подставляя это выражение в уравнения (2.46), мы исключим эту вспомогательную переменную, но превратим уравнения движения из дифференциальных в интегро-дифференциальные, что, впрочем, несколько не усложнит процесс приближенного интегрирования этих уравнений.

Можно также заменить уравнения $\frac{d^2 \lambda_i}{d\lambda^2} = L_i$ уравнениями $u_k^2 \Gamma_k \frac{d\Gamma_i}{d\lambda} = \Lambda_i$ и определить сначала все функции u_i , s_i , Γ_i в зависимости от λ и $5n$ произвольных постоянных, после чего для определения долгот λ_i ($i \neq k$) останется еще решить $n - 1$ уравнений первого порядка и выполнить одну квадратуру.

Примечание. Полезно отметить, что уравнения движения, соответствующие $i = k$, имеют гораздо более простой вид, чем все остальные уравнения. Действительно, $z_k = 1$, и мы можем написать

$$\frac{d^2 u_k}{d\lambda^2} + u_k = U_k, \quad \frac{d^2 s_k}{d\lambda^2} + s_k = S_k,$$

где, как легко видеть,

$$U_k = -\frac{1}{u_k^2 \Gamma_k^2} \left(P_k + \Lambda_k \frac{du_k}{d\lambda} \right),$$

$$S_k = -\frac{1}{u_k^3 \Gamma_k^2} \left(P_k s_k - Z_k + u_k \Lambda_k \frac{ds_k}{d\lambda} \right).$$

В заключение этого раздела рассмотрим случай, когда

$$P_i = \frac{\partial \Omega_i}{\partial \rho_i}, \quad \Lambda_i = \frac{\partial \Omega_i}{\partial \lambda_i}, \quad Z_i = \frac{\partial \Omega_i}{\partial z_i},$$

где функции Ω_i зависят только от координат ρ_i, z_i, λ_i точек M_i . Тогда величины P_i и Z_i легко выразить через производные от Ω_i по переменным u_i и s_i . Мы имеем

$$P_i = \frac{\partial \Omega_i}{\partial \rho_i} = \frac{\partial \Omega_i}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial \rho_i} + \frac{\partial \Omega_i}{\partial s_i} \frac{\partial s_i}{\partial \rho_i} = -u_i^2 \frac{\partial \Omega_i}{\partial u_i} - s_i u_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial s_i},$$

$$Z_i = \frac{\partial \Omega_i}{\partial z_i} = \frac{\partial \Omega_i}{\partial s_i} \frac{\partial s_i}{\partial z_i} = u_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial s_i},$$

где

$$\Omega_i = \frac{f(m_0 + m_i) u_i}{V \sqrt{1 + s_i^2}} + f \sum_{j=1}^n m_j \left(\frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{u_j^2}{u_i} \frac{s_i s_j + \cos(\lambda_i - \lambda_j)}{(1 + s_j^2)^{3/2}} \right), \quad (2.48)$$

а взаимные расстояния определяются формулой

$$\Delta_{ij} = \frac{1}{u_i u_j} \sqrt{u_i^2 + u_j^2 - 2u_i u_j \cos(\lambda_i - \lambda_j) + (s_i u_j - s_j u_i)^2}.$$

С помощью этих формул выражения для величин U_i, S_i, L_i приведем к следующему виду:

$$U_i = \frac{u_i^2}{u_k^4 \Gamma_k^2} \left\{ u_i^2 \frac{\partial \Omega_i}{\partial u_i} + s_i u_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial s_i} - \right.$$

$$\left. - u_k^2 \left[\frac{1}{u_i^2} \frac{\partial \Omega_k}{\partial \lambda} + \Gamma_k^2 \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{u_k^2}{u_i^2} \right) \right] \frac{du_i}{d\lambda} \right\},$$

$$S_i = \frac{u_i}{u_k^4 \Gamma_k^2} \left\{ u_i^2 s_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial u_i} + u_i (1 + s_i^2) \frac{\partial \Omega_i}{\partial s_i} - \right.$$

$$\left. - u_k^2 \left[\frac{1}{u_i} \frac{\partial \Omega_k}{\partial \lambda} + \Gamma_k^2 \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{u_k^2}{u_i^2} \right) \right] \frac{ds_i}{d\lambda} \right\},$$

$$L_i = \frac{u_i^2}{u_k^4 \Gamma_k^2} \left\{ \frac{\partial \Omega_i}{\partial \lambda_i} - u_k^2 \left[\frac{1}{u_i^2} \frac{\partial \Omega_k}{\partial \lambda} + \Gamma_k^2 \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{u_k^2}{u_i^2} \right) \right] \frac{d\lambda_i}{d\lambda} \right\} \quad (i \neq k),$$

где

$$\Gamma_k^2 = \gamma^2 + \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{1}{u_k^2} \frac{\partial \Omega_k}{\partial \lambda} d\lambda.$$

Полагая $i = k$, мы получим, в частности, выражения для функций U_k и S_k , подставляя которые в уравнения, определяющие движение точки M_k , мы напомним эти уравнения следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_k}{d\lambda^2} + u_k &= \frac{1}{\Gamma_k^2} \left[\frac{\partial \Omega_k}{\partial u_k} + \frac{s_k}{u_k} \frac{\partial \Omega_k}{\partial s_k} - \frac{1}{u_k^2} \frac{\partial \Omega_k}{\partial \lambda} \frac{du_k}{d\lambda} \right], \\ \frac{d^2 s_k}{d\lambda^2} + s_k &= \frac{1}{\Gamma_k^2} \left[\frac{s_k}{u_k} \frac{\partial \Omega_k}{\partial u_k} + \frac{1 + s_k^2}{u_k^2} \frac{\partial \Omega_k}{\partial s_k} - \frac{1}{u_k^2} \frac{\partial \Omega_k}{\partial \lambda} \frac{ds_k}{d\lambda} \right], \end{aligned}$$

причем

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{u_k^2 \Gamma_k}.$$

Эти уравнения и были даны Лапласом в его трактате по небесной механике. Они приводятся также в трактате Тиссерана и курсе М. Ф. Субботина.

Чтобы получить развернутые выражения для величин P_i , Z_i , Λ_i , входящих в правые части уравнений (2.46), нужно вычислить частные производные от функций Ω_i , определяемых формулой (2.48), и произвести затем надлежащие подстановки.

Можно также воспользоваться выражениями для частных производных от функций Ω_i , приведенных в конце раздела первого. Заменяя в этих производных величины ρ_i и z_i их выражениями через новые переменные, будем иметь:

$$\begin{aligned} P_i &= - \frac{f(m_0 + m_i) u_i^2}{(1 + s_i^2)^{3/2}} + \\ &\quad + f \sum_{j=1}^n m_j \left[\frac{u_i \cos(\lambda_i - \lambda_j)}{u_i u_j \Delta_{ij}^3} - \frac{u_j^2 \cos(\lambda_i - \lambda_j)}{(1 + s_j^2)^{3/2}} \right], \\ Z_i &= - \frac{f(m_0 + m_i) s_i u_i^2}{(1 + s_i^2)^{5/2}} + f \sum_{j=1}^n m_j \left[\frac{u_i s_j - s_i u_j}{u_i u_j \Delta_{ij}^3} - \frac{s_j u_j^2}{(1 + s_j^2)^{3/2}} \right], \\ \Lambda_i &= - \frac{f}{u_i} \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{u_j} \left[\frac{1}{\Delta_{ij}^3} - \frac{u_j^3}{(1 + s_j^2)^{3/2}} \right] \sin(\lambda_i - \lambda_j). \end{aligned}$$

Полагая в последней из этих формул $i = k$ и заменяя λ_k на λ , мы найдем также выражение для производной $\frac{\partial \Omega_k}{\partial \lambda}$, после чего получим также Γ_k^2 по следующей формуле *):

$$\Gamma_k^2 = \gamma^2 - f \sum_{j=1}^n m_j \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\sin(\lambda - \lambda_j)}{u_k^3 u_j} \left[\frac{1}{\Delta_{kj}^3} - \frac{u_j^3}{(1 + s_j^2)^{3/2}} \right] d\lambda.$$

4. Уравнения движения в канонической форме. Дифференциальные уравнения движения системы взаимно притягивающихся материальных точек можно также записать и в гамильтоновой (канонической) форме.

Рассмотрим сначала уравнения движения (2.3') в абсолютных прямоугольных координатах

$$m_i \ddot{\xi}_i = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad m_i \ddot{\eta}_i = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \quad m_i \ddot{\zeta}_i = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} \quad (2.49)$$

($i = 0, 1, 2, \dots, n$),

где U есть силовая функция, и обозначим, как обычно, через T полную живую силу системы, т. е. положим

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n m_i (\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2). \quad (2.50)$$

Чтобы написать уравнения (2.49) в канонической форме, достаточно принять ξ_i , η_i , ζ_i за Лагранжевы координаты и ввести импульсы формулами

$$\xi_i^* = m_i \dot{\xi}_i, \quad \eta_i^* = m_i \dot{\eta}_i, \quad \zeta_i^* = m_i \dot{\zeta}_i.$$

Полагая теперь

$$H = T - U = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \frac{\xi_i^{*2} + \eta_i^{*2} + \zeta_i^{*2}}{m_i} - U, \quad (2.50')$$

мы можем написать систему (2.49) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \xi_i^*}, & \frac{d\eta_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \eta_i^*}, & \frac{d\zeta_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \zeta_i^*}, \\ \frac{d\xi_i^*}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \xi_i}, & \frac{d\eta_i^*}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \eta_i}, & \frac{d\zeta_i^*}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \zeta_i}. \end{aligned} \right\} \quad (2.49')$$

*) Штрих при знаке суммы обозначает, что при суммировании должны быть пропущены члены, для которых $j = k$.

Те же уравнения (2.49) можно написать гораздо короче, вводя подходящие обозначения для обобщенных координат.

Действительно, будем обозначать все координаты одной буквой q_j ($j = 1, 2, \dots, 3n+3$), так что

$$\xi_i = q_{3i+1}, \quad \eta_i = q_{3i+2}, \quad \zeta_i = q_{3i+3} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n),$$

и введем для симметрии новые обозначения для масс точек, полагая

$$m_i = m_{3i+1}^* = m_{3i+2}^* = m_{3i+3}^* \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Тогда живая сила системы определится формулой

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3n+3} m_j^* \dot{q}_j^2, \quad (2.50'')$$

откуда получим выражения для обобщенных импульсов

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = m_j^* \dot{q}_j \quad (j = 1, 2, \dots, 3n+3),$$

вследствие чего уравнения (2.49) примут следующий вид:

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad (2.49'')$$

где

$$H = T - U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3n+3} \frac{p_j^2}{m_j^*} - U.$$

Классические интегралы системы (2.49'') получатся из интегралов (2.10''') и (2.12) простым переходом к новым обозначениям и напишутся следующим образом:

Интегралы движения центра масс

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n p_{3i+1} &= a_1, & \sum_{i=0}^n (m_{3i+1}^* q_{3i+1} - t p_{3i+1}) &= b_1, \\ \sum_{i=0}^n p_{3i+2} &= a_2, & \sum_{i=0}^n (m_{3i+2}^* q_{3i+2} - t p_{3i+2}) &= b_2, \\ \sum_{i=0}^n p_{3i+3} &= a_3, & \sum_{i=0}^n (m_{3i+3}^* q_{3i+3} - t p_{3i+3}) &= b_3. \end{aligned}$$

Интегралы площадей

$$\sum_{i=0}^n (q_{3i+2} p_{3i+3} - q_{3i+3} p_{3i+2}) = c_1,$$

$$\sum_{i=0}^n (q_{3i+3} p_{3i+1} - q_{3i+1} p_{3i+3}) = c_2,$$

$$\sum_{i=0}^n (q_{3i+1} p_{3i+2} - q_{3i+2} p_{3i+1}) = c_3$$

и, наконец, интеграл живой силы

$$H = h.$$

Совершенно аналогично можно привести к канонической форме и уравнения (2.34), т. е. уравнения относительного движения в координатах Якоби.

Полагая

$$x_i^* = m_i' \dot{x}_i', \quad y_i^* = m_i' \dot{y}_i', \quad z_i^* = m_i' \dot{z}_i'$$

и

$$H' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{*2} + y_i^{*2} + z_i^{*2}}{m_i'} - U,$$

мы напомним уравнения (2.34) в форме

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_i'}{dt} &= \frac{\partial H'}{\partial x_i^*}, & \frac{dy_i'}{dt} &= \frac{\partial H'}{\partial y_i^*}, & \frac{dz_i'}{dt} &= \frac{\partial H'}{\partial z_i^*}, \\ \frac{dx_i^*}{dt} &= -\frac{\partial H'}{\partial x_i'}, & \frac{dy_i^*}{dt} &= -\frac{\partial H'}{\partial y_i'}, & \frac{dz_i^*}{dt} &= -\frac{\partial H'}{\partial z_i'} \end{aligned} \right\} \quad (2.51)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

Уравнения (2.51) также можно записать более кратко, вводя новые обозначения для координат Якоби и приведенных масс. Действительно, положим

$$x_i' = q'_{3i-2}, \quad y_i' = q'_{3i-1}, \quad z_i' = q'_{3i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

и

$$m_i' = m_{3i-2}^* = m_{3i-1}^* = m_{3i}^*.$$

Тогда

$$T' = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3n} m_j^* \dot{q}_j',$$

откуда найдем

$$p_j' = \frac{\partial T'}{\partial \dot{q}_j'} = m_j^* \dot{q}_j',$$

вследствие чего уравнениям (2.50) можно придать вид

$$\frac{dq_j'}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial p_j'}, \quad \frac{dp_j'}{dt} = - \frac{\partial H'}{\partial q_j'} \quad (j = 1, 2, \dots, 3n). \quad (2.51')$$

Интегралы системы (2.51') выведем из интегралов (2.35) и (2.35') переходом к новым обозначениям переменных, что дает

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (q'_{3i-1} p'_{3i} - p'_{3i} q'_{3i-1}) &= c'_1, \\ \sum_{i=1}^n (q'_{3i} p'_{3i-2} - q'_{3i-2} p'_{3i}) &= c'_2, \\ \sum_{i=1}^n (p'_{3i-2} p'_{3i-1} - q'_{3i-1} p'_{3i-2}) &= c'_3, \\ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3n} \frac{p_j'^2}{m_j} - U &= h'. \end{aligned}$$

Уравнения движения в цилиндрических или сферических координатах также легко привести к каноническому виду. Действительно, рассмотрим уравнения движения (2.37') в абсолютных цилиндрических координатах. В этих координатах живая сила нашей материальной системы имеет следующее выражение:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n m_i (\rho_i^2 + \rho_i^2 \dot{\varphi}_i^2 + \dot{z}_i^2).$$

Принимая величины ρ_i , λ_i , ξ_i за лагранжевы координаты, мы определим соответствующие им импульсы формулами

$$P_i = m_i \dot{\rho}_i, \quad \Lambda_i = m_i \rho_i^2 \dot{\lambda}_i, \quad Z_i = m_i \dot{\xi}_i,$$

откуда следует, что уравнения (2.37') можно переписать в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\rho_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial P_i}, & \frac{dP_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \rho_i}, \\ \frac{d\lambda_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \Lambda_i}, & \frac{d\Lambda_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \lambda_i}, \\ \frac{d\xi_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial Z_i}, & \frac{dZ_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \xi_i} \end{aligned} \right\} \quad (2.52)$$

($i = 0, 1, 2, \dots, n$),

где

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \frac{1}{m_i} \left[P_i^2 + \frac{\Lambda_i^2}{\rho_i^2} + Z_i^2 \right] - U$$

есть соответствующая характеристическая функция.

Приведем еще к гамильтоновой форме относительные уравнения движения в координатах Якоби, преобразованные предварительно к сферическим координатам с помощью формул

$$x'_i = r'_i \cos \varphi'_i \cos \lambda'_i, \quad y'_i = r'_i \cos \varphi'_i \sin \lambda'_i, \quad z'_i = r'_i \sin \varphi'_i.$$

Тогда живая сила системы T' определится формулой

$$T' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m'_i \left[\dot{r}'_i{}^2 + r_i'^2 \dot{\varphi}'_i{}^2 + r_i'^2 \cos^2 \varphi'_i \dot{\lambda}'_i{}^2 \right].$$

Примем величины r'_i , φ'_i , λ'_i за обобщенные лагранжевы координаты и обозначим соответствующие им импульсы через R'_i , Φ'_i , L'_i , т. е. положим*)

$$R'_i = m'_i \dot{r}'_i, \quad \Phi'_i = m'_i r_i'^2 \dot{\varphi}'_i, \quad L'_i = r_i'^2 \cos^2 \varphi'_i \dot{\lambda}'_i.$$

*) Здесь буквы R , Φ , L , так же, как и буквы P , Λ , Z в предыдущих уравнениях, обозначают импульсы, а не составляющие сил, как это было выше.

Тогда относительное движение системы определится следующими каноническими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr'_i}{dt} &= \frac{\partial H'}{\partial R'_i}, & \frac{dR'_i}{dt} &= -\frac{\partial H'}{\partial r'_i}, \\ \frac{d\varphi'_i}{dt} &= \frac{\partial H'}{\partial \Phi'_i}, & \frac{d\Phi'_i}{dt} &= -\frac{\partial H'}{\partial \varphi'_i}, \\ \frac{d\lambda'_i}{dt} &= \frac{\partial H'}{\partial L'_i}, & \frac{dL'_i}{dt} &= -\frac{\partial H'}{\partial \lambda'_i} \end{aligned} \right\} \quad (2.53)$$

($i = 1, 2, \dots, n$),

где

$$H' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} \left[R_i'^2 + \frac{\Phi_i'^2}{r_i'^2} + \frac{L_i'^2}{r_i'^2 \cos^2 \varphi'_i} \right] - U.$$

Полезно напомнить, что x'_i, y'_i, z'_i суть декартовы координаты точки M_i ($i = 1, 2, \dots, n$) в системе координат $G_{i-1}x'y'z'$ с началом в центре инерции G_{i-1} системы материальных точек $M_0, M_1, \dots, M_{i-1}$ и с неизменными направлениями осей, параллельных соответствующим осям абсолютной системы координат.

Поэтому радиус-вектор r'_i точки M_i представляет расстояние $\overline{G_{i-1}M_i}$, φ'_i есть угол, образованный этим радиусом-вектором с плоскостью $x'y'$ собственной системы координат, а λ'_i есть угол, образованный проекцией радиуса-вектора r'_i на плоскость $x'G_{i-1}y'$ с положительным направлением оси $G_{i-1}x'$.

Примечание. Мы привели к гамильтоновой форме уравнения абсолютного движения и уравнения относительного движения в координатах Якоби. Уравнения движения системы относительно одной из ее точек, т. е. уравнения (2.23) или (2.23'), нельзя привести к канонической форме, так как правые части этих уравнений являются частными производными от различных (возмущающих) функций.

5. Векторные уравнения. Заканчивая этот параграф, мы укажем еще на возможность записывать уравнения движения системы взаимно притягивающихся материальных

точек в векторной форме, которой часто пользуются в современной литературе по небесной механике, хотя эта форма уравнений никаких преимуществ, кроме сокращения записи, по сравнению с координатной формой не имеет.

Обозначим через r_i вектор, модуль которого равен радиусу-вектору r_i точки M_i в некоторой системе координат и проекции которого на координатные оси той же системы являются соответствующими координатами этой точки.

Тогда скорость и ускорение точки M_i в той же системе координат суть также векторы, которые обозначим соответственно через v_i и g_i , причем

$$v_i = \dot{r}_i, \quad g_i = \ddot{r}_i.$$

Обозначая теперь через R_i главный вектор для точки M_i , т. е. равнодействующую всех сил, приложенных к этой точке, мы можем написать уравнения движения нашей системы в следующей краткой форме:

$$\ddot{r}_i = \frac{1}{m_i} R_i. \quad (2.54)$$

Различные виды уравнений движения системы будут теперь отличаться друг от друга различными видами записи вектора R_i .

Таким образом, в случае абсолютных уравнений движения (2.3) мы будем иметь

$$R_i = f \sum_{j=0}^n m_i m_j \frac{r_j - r_i}{\Delta_{ij}^3} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n),$$

а проекции этого вектора на оси абсолютной системы координат определяются формулами (2.2).

Если рассматриваются уравнения движения системы относительно одной из ее точек (точки M_0), т. е. уравнения (2.23), то в этом случае будем иметь

$$\frac{1}{m_i} R_i = - \frac{f(m_0 + m_i) r_i}{r_i^3} + f \sum_{j=1}^n m_j \left(\frac{r_j - r_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{r_j}{r_j^3} \right) \\ (i = 1, 2, \dots, n).$$

Приведем еще векторную запись дифференциальных уравнений движения задачи трех тел в форме Якоби (см. стр. 123):

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}'_1 &= - \frac{\mu_1 \mathbf{r}'_1}{r_1^3} - \mu'_1 \mathbf{r}'_1 \left(\frac{m_1}{\Delta_{02}^3} + \frac{m_0}{\Delta_{12}^3} \right) - \mu''_1 \mathbf{r}'_2 \left(\frac{1}{\Delta_{02}^3} - \frac{1}{\Delta_{12}^3} \right), \\ \ddot{\mathbf{r}}'_2 &= - m'_1 \mu'_2 \mathbf{r}'_1 \left(\frac{1}{\Delta_{02}^3} - \frac{1}{\Delta_{12}^3} \right) - \mu'_2 \mathbf{r}'_2 \left(\frac{m_0}{\Delta_{02}^3} + \frac{m_1}{\Delta_{12}^3} \right).\end{aligned}$$

Примечание. На этом мы заканчиваем рассмотрение видов дифференциальных уравнений движения основной задачи небесной механики, т. е. задачи о движении системы конечного числа взаимно притягивающихся материальных точек.

Разумеется, что приведенные нами формы уравнений движения не являются единственно возможными, так как выбор основных переменных, определяющих положения и скорости точек системы, по существу совершенно произволен и его можно разнообразить бесчисленным множеством способов.

Некоторые из этих способов, отличные от уже рассмотренных, встретятся нам в следующих главах этой книги.

Г Л А В А III

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПОСТУПАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

В начале предыдущей главы говорилось, что во многих случаях реальные небесные тела можно рассматривать как материальные точки, движущиеся в абсолютно пустом пространстве под действием сил взаимных притяжений согласно закону всемирного тяготения Ньютона.

При этих предположениях мы установили дифференциальные уравнения движения тел-точек и таким образом выяснили природу той математической задачи, к которой приводится, в первом приближении, исследование движения планет, их спутников, комет, астероидов и т. п.

Однако не всегда возможно довольствоваться таким первым приближением и в ряде существенных случаев приходится усложнять первоначально поставленную задачу, вводя дополнительные гипотезы или условия, вследствие чего рассматриваемая задача делается более близкой к действительности.

Так иногда приходится вводить в рассмотрение кроме сил взаимных притяжений некоторые другие силы. В некоторых случаях оказывается невозможным рассматривать реальные небесные тела как материальные точки и приходится принимать во внимание влияние их формы и физического строения.

Например, при исследовании движений близких спутников больших планет, особенно в задаче о движении искусственных спутников Земли, необходимо учитывать отклонение формы планеты от сферической и эффект ее неоднородности.

При изучении вращательного движения небесного тела вокруг его собственного центра инерции приходится рассматривать это небесное тело как «тело» в собственном смысле этого слова, так как задача о вращательном движении материальной точки явно не имеет никакого смысла.

Наконец, может случиться, что вращение тела вокруг его центра инерции оказывает влияние на поступательное движение этого центра инерции, вследствие чего действительное (наблюдаемое) поступательное движение небесного тела может оказаться несколько отличным от поступательного движения тела, рассматриваемого как материальная точка.

Разумеется, что такое движение невозможно рассматривать во всей его общности и мы вынуждены поэтому и здесь ввести некоторые упрощающие предположения.

Мы будем рассматривать только абсолютно твердые тела, частицы которых взаимно притягиваются по закону Ньютона.

Вследствие действия этих сил взаимных притяжений каждое тело будет обладать и поступательным движением и вращательным вокруг своего центра инерции. Такое совместное движение мы и называем *поступательно-вращательным*.

В действительности небесные тела не являются материальными точками, но они не являются, конечно, и абсолютно твердыми телами, а всегда обладают известной степенью пластичности или даже представляют собой жидкие (или газообразные) образования.

Поэтому, рассматривая задачу о движении абсолютно твердых тел, мы делаем только следующий шаг на пути последовательных приближений к естественным условиям природы.

§ 1. Взаимно притягивающиеся абсолютно твердые тела в пространстве

1. Определение положений твердых тел в пространстве. Рассмотрим систему свободных, абсолютно твердых тел $M_0, M_1, \dots, M_n$, элементарные частицы которых взаимно притягиваются по закону Ньютона.

Мы будем предполагать, что каждое из этих тел имеет определенную форму, характеризующую его внешней поверх-

ностью и определенное физическое строение, характеризующее заданием плотности в каждой внутренней точке.

Мы допустим также, что каждое из рассматриваемых тел имеет конечные размеры и конечную массу.

Чтобы установить параметры, определяющие положение каждого из тел системы в пространстве, выберем некоторую абсолютную систему прямоугольных координат $O\xi\eta\zeta$.

Выберем далее для каждого из тел M_i некоторую определенную точку G_i , неизменно связанную с телом M_i , которую будем рассматривать как начало «собственной» для тела M_i системы координат.

Вообще точку G_i можно выбирать совершенно произвольно, но для упрощения последующих рассуждений и выкладок мы будем считать, что каждая из этих точек является центром инерции соответствующего тела.

Проведем теперь через точку G_i ($i = 0, 1, \dots, n$) три взаимно перпендикулярные прямые, неизменно связанные с телом M_i и образующие собственную систему прямоугольных координат для этого тела.

Эти три взаимно перпендикулярные прямые можно выбрать в теле M_i совершенно произвольно, лишь бы они были жестко связаны с телом. В частности, за эти прямые можно принять главные центральные оси инерции тела M_i .

Обозначим оси собственной для тела M_i системы координат соответственно через $\overrightarrow{G_i\xi'_i}$, $\overrightarrow{G_i\eta'_i}$, $\overrightarrow{G_i\zeta'_i}$.

Тогда положение и ориентация тела M_i относительно абсолютной системы координат полностью определятся заданием абсолютных координат точки G_i и косинусов углов, образуемых собственными осями с абсолютными.

Обозначим координаты точки G_i через ξ_i , η_i , ζ_i , а через $a_{ks}^{(i)}$ — направляющие косинусы собственных осей в системе $O\xi\eta\zeta$ по следующей схеме:

	ξ'_i	η'_i	ζ'_i
ξ	$a_{11}^{(i)}$	$a_{12}^{(i)}$	$a_{13}^{(i)}$
η	$a_{21}^{(i)}$	$a_{22}^{(i)}$	$a_{23}^{(i)}$
ζ	$a_{31}^{(i)}$	$a_{32}^{(i)}$	$a_{33}^{(i)}$

Так как эти девять направляющих косинусов связаны шестью известными соотношениями, то можно выбрать три

независимых угла, заданием которых эти косинусы однозначно определяются.

Эти независимые углы можно выбирать различными способами. Для большей простоты и определенности мы будем брать за независимые углы, определяющие ориентацию тела M_i в абсолютной системе координат, обычные в динамике твердого тела эйлеровы углы*), которые определяются следующим образом (рис. 1): угол прецессии ψ_i есть угол,

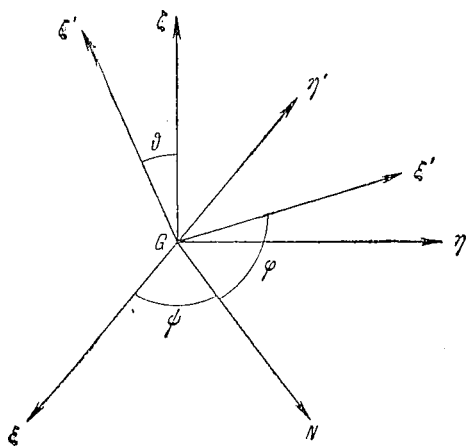


Рис. 1.

образуемый линией пересечения плоскостей $O\xi\eta$ и $G_i\xi'_i\eta'_i$ с положительным направлением оси $O\xi$; угол собственного вращения φ_i образуется той же линией пересечения двух плоскостей с положительным направлением оси $G_i\xi'_i$; наконец, угол нутации ϑ_i есть угол между положительными направлениями осей $O\xi$ и $G_i\xi'_i$.

Чтобы выразить теперь девять направляющих косинусов $a_{ks}^{(i)}$ через три эйлеровых угла, вообразим сферу произвольного радиуса с центром в точке O и обозначим буквами ξ, η, ζ точки пересечения этой сферы с положитель-

*) См., например, Некрасов А. И., Курс теоретической механики, т. 2, Гостехиздат, 1953.

ными направлениями абсолютных осей и буквами ξ' , η' , ζ' точки пересечения сферы с прямыми, проходящими через точку O параллельно положительным направлениям собственных для тела M_i осей. Наконец, пусть точка N обозначает точку пересечения линии пересечения плоскостей $O\xi\eta$ и $O\xi'\eta'$ с этой же сферой. Рассматривая теперь сферические треугольники, образованные дугами больших кругов на сфере, проходящих соответственным образом через отмеченные точки

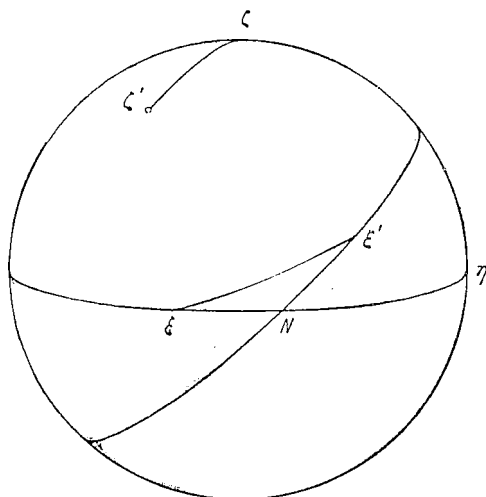


Рис. 2.

и применяя к каждому из этих треугольников первую основную формулу сферической тригонометрии, мы и получим формулы, выражающие направляющие косинусы $a_{ks}^{(i)}$ через эйлеровы углы.

Рассмотрим для примера сферический треугольник $\widehat{\xi N \xi'}$ (рис. 2). Применяя к стороне $\widehat{\xi \xi'}$ основную формулу сферической тригонометрии, мы имеем

$$\cos(\widehat{\xi \xi'}) = a_{11}^{(i)} = \cos(\widehat{\xi N}) \cos(\widehat{N \xi'}) + \sin(\widehat{\xi N}) \sin(\widehat{N \xi'}) \cos(\angle \xi N \xi'),$$

но $\widehat{\xi N} = \psi_i$, $\widehat{N \xi'} = \varphi_i$ и $\angle \xi N \xi' = 180^\circ - \vartheta_i$, так что найдем:

$$a_{11}^{(i)} = \cos \psi_i \cos \varphi_i - \sin \psi_i \sin \varphi_i \cos \vartheta_i.$$

Подобным же образом выводятся и остальные формулы для направляющих косинусов, так что имеем

$$\left. \begin{aligned} a_{11}^{(i)} &= \cos \varphi_i \cos \psi_i - \sin \varphi_i \sin \psi_i \cos \vartheta_i, \\ a_{21}^{(i)} &= \cos \varphi_i \sin \psi_i + \sin \varphi_i \cos \psi_i \cos \vartheta_i, \\ a_{31}^{(i)} &= \sin \varphi_i \sin \vartheta_i, \\ a_{12}^{(i)} &= -\sin \varphi_i \cos \psi_i - \cos \varphi_i \sin \psi_i \cos \vartheta_i, \\ a_{22}^{(i)} &= -\sin \varphi_i \sin \psi_i + \cos \varphi_i \cos \psi_i \cos \vartheta_i, \\ a_{32}^{(i)} &= \cos \varphi_i \sin \vartheta_i, \\ a_{13}^{(i)} &= \sin \psi_i \sin \vartheta_i, \\ a_{23}^{(i)} &= -\cos \psi_i \sin \vartheta_i, \\ a_{33}^{(i)} &= \cos \vartheta_i. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Итак, положение и ориентация каждого тела M_i системы относительно абсолютной системы координат полностью определяется шестью независимыми друг от друга параметрами

$$\xi_i, \eta_i, \zeta_i, \psi_i, \varphi_i, \vartheta_i,$$

нахождение которых как функций времени и надлежащего числа произвольных постоянных и составляет задачу о поступательно-вращательном движении этого тела.

2. Силы взаимных притяжений и моменты этих сил. Перейдем теперь к расчетам сил притяжения и их моментов, действующих на наши тела.

Рассмотрим какие-нибудь два тела системы M_i и M_j ($i, j = 0, 1, 2, \dots, n; j \neq i$).

Пусть $P_i(a_i, b_i, c_i)$ — произвольная („текущая“) точка тела M_i , в которой сосредоточена элементарная масса dm_i и $P_j(a_j, b_j, c_j)$ — произвольная точка тела M_j с элементом массы dm_j .

Точка P_i притягивается точкой P_j с силой, составляющие которой по осям $O\xi, O\eta, O\zeta$ суть

$$f \frac{(a_j - a_i) dm_i dm_j}{\Delta_{ij}^3}, \quad f \frac{(b_j - b_i) dm_i dm_j}{\Delta_{ij}^3}, \quad f \frac{(c_j - c_i) dm_i dm_j}{\Delta_{ij}^3}$$

и составляющие момента которой относительно точки G_i будут равны *)

$$\begin{aligned} & f \frac{(b_i - \eta_i)(c_j - c_i) - (c_i - \xi_i)(b_j - b_i)}{\Delta_{ij}^3} dm_i dm_j, \\ & f \frac{(c_i - \xi_i)(a_j - a_i) - (a_i - \xi_i)(c_j - c_i)}{\Delta_{ij}^3} dm_i dm_j, \\ & f \frac{(a_i - \xi_i)(b_j - b_i) - (b_i - \eta_i)(a_j - a_i)}{\Delta_{ij}^3} dm_i dm_j, \end{aligned}$$

где по-прежнему f есть постоянная притяжения и

$$\Delta_{ij}^2 = (a_i - a_j)^2 + (b_i - b_j)^2 + (c_i - c_j)^2.$$

Поэтому составляющие приложенной к точке G_i равнодействующей сил притяжения, действующих на тело M_i , определяются формулами:

$$\left. \begin{aligned} \Xi_i^{(j)} &= f \int_{(M_i)} \int_{(M_j)} \frac{(a_j - a_i) dm_i dm_j}{\Delta_{ij}^3}, \\ \mathcal{H}_i^{(j)} &= f \int_{(M_i)} \int_{(M_j)} \frac{(b_j - b_i) dm_i dm_j}{\Delta_{ij}^3}, \\ \mathcal{Z}_i^{(j)} &= f \int_{(M_i)} \int_{(M_j)} \frac{(c_j - c_i) dm_i dm_j}{\Delta_{ij}^3}, \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

а составляющие момента этой равнодействующей относительно точки G_i будут соответственно

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_i^{(j)} &= f \int_{(M_i)} \int_{(M_j)} \frac{(b_i - \eta_i)(c_j - c_i) - (c_i - \xi_i)(b_j - b_i)}{\Delta_{ij}^3} dm_i dm_j, \\ \mathcal{M}_i^{(j)} &= f \int_{(M_i)} \int_{(M_j)} \frac{(c_i - \xi_i)(a_j - a_i) - (a_i - \xi_i)(c_j - c_i)}{\Delta_{ij}^3} dm_i dm_j, \\ \mathcal{N}_i^{(j)} &= f \int_{(M_i)} \int_{(M_j)} \frac{(a_i - \xi_i)(b_j - b_i) - (b_i - \eta_i)(a_j - a_i)}{\Delta_{ij}^3} dm_i dm_j. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

*) См., например, Дубошин Г. Н., Теория притяжения, Физматгиз, 1961.

Интегралы в формулах (3.2) и (3.3) берутся по всей массе тела M_i и по всей массе тела M_j и их кратности могут быть любыми числами от 2 до 6 в зависимости от структуры рассматриваемых тел.

Обозначим теперь через a'_i , b'_i , c'_i координаты точки P_i в собственной для тела M_i системе координат $G_i\xi'_i\eta'_i\zeta'_i$. Тогда по формулам преобразования координат абсолютные координаты точки P_i выразятся следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} a_i &= \bar{z}_i + a_{11}^{(i)}a'_i + a_{12}^{(i)}b'_i + a_{13}^{(i)}c'_i, \\ b_i &= \eta_i + a_{21}^{(i)}a'_i + a_{22}^{(i)}b'_i + a_{23}^{(i)}c'_i, \\ c_i &= \zeta_i + a_{31}^{(i)}a'_i + a_{32}^{(i)}b'_i + a_{33}^{(i)}c'_i, \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

где направляющие косинусы $a_{sk}^{(i)}$ определяются формулами (3.1). Подобные же формулы имеем и для тела M_j .

Поэтому, рассматривая как переменные интегрирования в формулах (3.2) и (3.3) координаты a'_i , b'_i , c'_i точки P_i в собственной для тела M_i системе координат и координаты a'_j , b'_j , c'_j точки P_j в собственной системе тела M_j , мы представим все упомянутые интегралы как функции 12 величин:

$$\left. \begin{aligned} \xi_i, \eta_i, \zeta_i, \psi_i, \varphi_i, \vartheta_i, \\ \xi_j, \eta_j, \zeta_j, \psi_j, \varphi_j, \vartheta_j, \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

т. е. шести параметров тела M_i и шести параметров тела M_j .

Полагая теперь *)

$$\left. \begin{aligned} E_i &= \sum_{j=0}^n E_i^{(j)}, \\ H_i &= \sum_{j=0}^n H_i^{(j)}, \\ Z_i &= \sum_{j=0}^n Z_i^{(j)}, \end{aligned} \right\} \quad (3.2')$$

мы получим составляющие равнодействующей всех сил притяжения, действующих на тело M_i со стороны всех остальных

*) Штрих при знаке суммы указывает, что при суммировании нужно пропустить член, для которого $j=i$.

ных тел системы. Эта равнодействующая также приложена к точке G_0 , а составляющие ее моменты относительно этой точки будут соответственно

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_i &= \sum_{j=0}^{n'} \Lambda_i^{(j)}, \\ M_i &= \sum_{j=0}^{n'} M_i^{(j)}, \\ N_i &= \sum_{j=0}^{n'} N_i^{(j)}. \end{aligned} \right\} \quad (3.3')$$

Очевидно, что величины (3.2') и (3.3') суть функции $6n + 6$ независимых переменных:

$$\left. \begin{aligned} &\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \xi_1, \eta_1, \zeta_1, \dots, \xi_n, \eta_n, \zeta_n, \\ &\psi_0, \varphi_0, \vartheta_0, \psi_1, \varphi_1, \vartheta_1, \dots, \psi_n, \varphi_n, \vartheta_n, \end{aligned} \right\} \quad (3.5')$$

определение которых в зависимости от времени и надлежащего числа произвольных постоянных и составляет задачу о поступательно-вращательном движении системы абсолютно твердых тел, находящихся под воздействием сил взаимных притяжений.

§ 2. Силовая функция задачи и ее свойства

1. Силовая функция системы тел. Обратим теперь внимание на то, что, как показывается в теории притяжения*), составляющие сил, действующих на тела системы, и составляющие моментов этих сил относительно точек G_i **) весьма просто выражаются через частные производные от одной и той же функции величин (3.5').

*) См., например, мою книгу по теории притяжения, ссылка на которую дана на стр. 151.

**) В дальнейшем за точки G_i будут приняты, как уже отмечалось, центры инерции тел системы. Однако здесь под этими точками можно подразумевать какие-угодно точки, лишь бы каждая точка G_i была неизменно связана с соответствующим телом M_i .

Действительно, определим силовую функцию двух тел M_i и M_j как функцию 12 независимых переменных (3.5) формулой

$$U_{ij} = f \int_{(M_i)} \int_{(M_j)} \frac{dm_i dm_j}{\Delta_{ij}}. \quad (3.6)$$

Сделаем совершенно естественное допущение, что тела M_i и M_j не имеют никакой общей части, так что Δ_{ij} нигде в области интегрирования в нуль заведомо не обращается. Тогда интеграл (3.6) есть собственный и к нему можно применять обычную операцию дифференцирования по параметру под знаком интеграла.

Имея в виду формулы (3.4), найдем

$$\Xi_i^{(j)} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial \tilde{z}_i}, \quad H_i^{(j)} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial \eta_i}, \quad Z_i^{(j)} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial \tilde{z}_i}. \quad (3.7)$$

Введем теперь в рассмотрение, кроме составляющих момента силы притяжения, действующей на тело M_i по абсолютным осям, его составляющие по трем другим осям, а именно по оси $G_i \xi'_i$, называемой *осью собственного вращения*, по оси, проходящей через G_i параллельно $O\xi$, называемой *осью прецессии*, и оси, проходящей через G_i параллельно линии пересечения плоскостей $O\tilde{z}\eta$ и $G_i \xi'_i \eta'_i$, называемой *осью нутации*.

Обозначая эти три составляющие соответственно через $\Phi_i^{(j)}$, $\Psi_i^{(j)}$, $\Theta_i^{(j)}$, будем иметь *)

$$\Phi_i^{(j)} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial \tilde{z}_i}, \quad \Psi_i^{(j)} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial \psi_i}, \quad \Theta_i^{(j)} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial \vartheta_i}. \quad (3.8)$$

Только что введенные составляющие момента связаны с составляющими момента по абсолютным осям очевидными формулами:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_i^{(j)} &= \Lambda_i^{(j)} \sin \psi_i \sin \vartheta_i - M_i^{(j)} \cos \psi_i \sin \vartheta_i + N_i^{(j)} \cos \vartheta_i, \\ \Psi_i^{(j)} &= N_i^{(j)}, \\ \Theta_i^{(j)} &= \Lambda_i^{(j)} \cos \psi_i + M_i^{(j)} \sin \psi_i. \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

*) См. Дубошин Г. Н., Теория притяжения, Физматгиз, 1961

Введем теперь в рассмотрение силовую функцию всей системы тел $M_0, M_1, \dots, M_n$, определяя ее следующей формулой:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n'} U_{ij}. \quad (3.6')$$

Тогда, как легко проверить, будем иметь

$$\Xi_i = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad \eta_i = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \quad \zeta_i = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} \quad (3.7')$$

и

$$\Phi_i = \frac{\partial U}{\partial \varphi_i}, \quad \Psi_i = \frac{\partial U}{\partial \psi_i}, \quad \Theta_i = \frac{\partial U}{\partial \vartheta_i}, \quad (3.8')$$

где положено

$$\left. \begin{aligned} \Phi_i &= \sum_{j=0}^{n'} \Phi_i^{(j)}, \\ \Psi_i &= \sum_{j=0}^{n'} \Psi_i^{(j)}, \\ \Theta_i &= \sum_{j=0}^{n'} \Theta_i^{(j)}. \end{aligned} \right\} \quad (3.9')$$

2. Свойства силовой функции. Силовая функция U системы взаимно притягивающихся твердых тел, определенная формулой (3.6'), есть функция $6n + 6$ независимых переменных (3.5'), обладающая некоторыми примечательными свойствами, аналогичными свойствам силовой функции системы материальных точек, рассмотренным в § 2 главы II.

Действительно, силовая функция U , очевидно, не зависит от выбора абсолютной системы координат $O\xi\eta\zeta$, а поэтому остается неизменной при любом (не изменяющем масштаба) преобразовании координат.

Следовательно, при всяком бесконечно малом преобразовании системы координат полное приращение силовой функции, определяемое следующей общей формулой:

$$dU = \sum_{i=0}^n \left[\frac{\partial U}{\partial \xi_i} d\xi_i + \frac{\partial U}{\partial \eta_i} d\eta_i + \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} d\zeta_i + \right. \\ \left. + \frac{\partial U}{\partial \psi_i} d\psi_i + \frac{\partial U}{\partial \varphi_i} d\varphi_i + \frac{\partial U}{\partial \vartheta_i} d\vartheta_i \right], \quad (3.10)$$

должно быть равно нулю.

Сместим начало координат абсолютной системы $O\xi\eta\zeta$ вдоль оси абсцисс на бесконечно малую величину α , не изменяя направлений осей. Тогда все абсциссы точек G_i получат одно и то же приращение α , а ординаты и аппликаты не изменятся. Так как направления координатных осей остаются неизменными, то эйлеровы углы всех тел системы также не изменятся. Итак, при сделанном преобразовании переменные получают следующие приращения:

$$\begin{aligned} d\xi_i &= \alpha, & d\eta_i &= 0, & d\zeta_i &= 0, \\ d\psi_i &= 0, & d\varphi_i &= 0, & d\vartheta_i &= 0. \end{aligned}$$

Приращение силовой функции должно быть равно нулю, вследствие чего формула (3.10) дает следующее соотношение между частными производными функции U :

$$\sum_{i=0}^n \frac{\partial U}{\partial \xi_i} = 0.$$

Смещая подобным же образом начало координат абсолютной системы вдоль оси $O\eta$ и вдоль оси $O\zeta$ и рассуждая так же, как и выше, получим еще два подобных же соотношения. В результате имеем следующие три равенства:

$$\sum_{i=0}^n \frac{\partial U}{\partial \xi_i} = 0, \quad \sum_{i=0}^n \frac{\partial U}{\partial \eta_i} = 0, \quad \sum_{i=0}^n \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} = 0. \quad (3.11)$$

Повернем теперь систему абсолютных осей вокруг оси $O\xi$ на бесконечно малый угол ω . Тогда переменные (3.5') получают следующие приращения:

$$\begin{aligned} d\xi_i &= 0, & d\eta_i &= -\omega \cdot \zeta_i, & d\zeta_i &= +\omega \cdot \eta_i, \\ d\psi_i &= -\frac{\sin \psi_i \cos \vartheta_i}{\sin \vartheta_i} \cdot \omega, & d\varphi_i &= \frac{\sin \psi_i}{\sin \vartheta_i} \cdot \omega, & d\vartheta_i &= \cos \psi_i \cdot \omega. \end{aligned}$$

В самом деле, приращения прямоугольных координат точек G_i определяются так же, как и приращения прямоугольных координат, выведенные в § 2 главы II. Что же касается приращений эйлеровых углов, то они получаются следующим образом: рассмотрим опять сферу произвольного радиуса с центром в точке O . После поворота системы ко-

ординат вокруг оси $O\xi$ на угол ω точка N займет новое положение N' на сфере (рис. 3). В образовавшемся бесконечно малом сферическом треугольнике $\xi NN'$ стороны равны: $\widehat{\xi N} = \psi_i$, $\widehat{\xi N'} = \psi'_i = \psi_i + d\psi_i$, $\widehat{NN'} = \varphi'_i - \varphi_i = d\varphi_i$. Далее, внутренний угол при точке ξ равен ω , внутренний

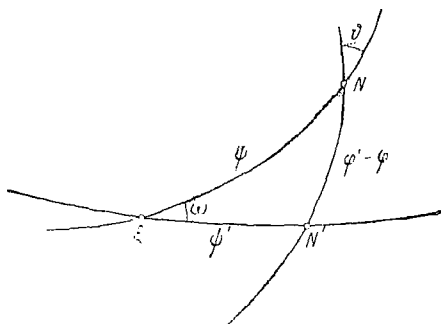


Рис. 3.

угол при точке N равен ϑ_i и, наконец, внешний угол при точке N' равен $\vartheta'_i = \vartheta_i + d\vartheta_i$. Здесь $d\psi_i$, $d\varphi_i$, $d\vartheta_i$ обозначают бесконечно малые приращения эйлеровых углов.

Применяя теперь к треугольнику $\xi NN'$ основные формулы сферической тригонометрии, имеем следующие соотношения:

$$\frac{\sin \psi_i}{\sin (180^\circ - \vartheta'_i)} = \frac{\sin (\varphi'_i - \varphi_i)}{\sin \omega},$$

$$\begin{aligned} \sin \omega \cos \psi_i &= \cos (180^\circ - \vartheta'_i) \sin \vartheta_i + \\ &+ \sin (180^\circ - \vartheta'_i) \cos \vartheta_i \cos (\varphi'_i - \varphi_i), \end{aligned}$$

$$\sin \psi'_i \cos \omega = \cos (\varphi'_i - \varphi_i) \sin \psi_i - \sin (\varphi'_i - \varphi_i) \cos \psi_i \cos \vartheta_i.$$

Принимая теперь во внимание, что синус бесконечно малого угла можно заменить самим углом, а косинус бесконечно малого угла можно принять равным единице, мы получим из написанных формул вышеприведенные выражения для приращений эйлеровых углов.

Аналогичным образом выведем следующие приращения переменных (3.5'), получающиеся при повороте координатной системы на бесконечно малый угол ω вокруг оси $O\eta$:

$$\begin{aligned} d\xi_i &= +\omega \cdot \zeta_i, & d\eta_i &= 0, & d\zeta_i &= -\omega \cdot \xi_i, \\ d\psi_i &= \frac{\cos \psi_i \cos \vartheta_i}{\sin \vartheta_i} \cdot \omega, & d\varphi_i &= -\frac{\cos \psi_i}{\sin \vartheta_i} \cdot \omega, & d\zeta_i &= \sin \psi_i \cdot \omega. \end{aligned}$$

Наконец, поворачивая систему координат на бесконечно малый угол ω вокруг оси $O\zeta$, выведем следующие приращения переменных (3.5):

$$\begin{aligned} d\xi_i &= -\omega \cdot \eta_i, & d\eta_i &= +\omega \cdot \xi_i, & d\zeta_i &= 0, \\ d\psi_i &= \omega, & d\varphi_i &= 0, & d\vartheta_i &= 0. \end{aligned}$$

При каждом из этих бесконечно малых преобразований силовая функция остается неизменной, а поэтому из формулы (3.10) получим следующие три соотношения между частными производными функции U :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^n \left\{ \eta_i \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} - \zeta_i \frac{\partial U}{\partial \eta_i} - \frac{\sin \psi_i \cos \vartheta_i}{\sin \vartheta_i} \frac{\partial U}{\partial \psi_i} + \frac{\sin \psi_i}{\sin \vartheta_i} \frac{\partial U}{\partial \varphi_i} + \right. \\ \left. + \cos \psi_i \frac{\partial U}{\partial \vartheta_i} \right\} &= 0, \\ \sum_{i=0}^n \left\{ \zeta_i \frac{\partial U}{\partial \xi_i} - \xi_i \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} + \frac{\cos \psi_i \cos \vartheta_i}{\sin \vartheta_i} \frac{\partial U}{\partial \psi_i} - \frac{\cos \psi_i}{\sin \vartheta_i} \frac{\partial U}{\partial \varphi_i} + \right. \\ \left. + \sin \psi_i \frac{\partial U}{\partial \vartheta_i} \right\} &= 0, \\ \sum_{i=0}^n \left\{ \xi_i \frac{\partial U}{\partial \eta_i} - \eta_i \frac{\partial U}{\partial \xi_i} + \frac{\partial U}{\partial \psi_i} \right\} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

3. Приближенное выражение силовой функции. Для фактического представления силовой функции в виде явной функции переменных (3.5') приходится прибегать к помощи разложений в бесконечные ряды.

Для силовой функции U_{ij} двух тел M_i и M_j подобное разложение указано в нашей книге «Теория притяжения».

Это разложение, для двух совершенно произвольных тел, при произвольном выборе собственных систем координат, имеет следующий вид

$$U_{ij} = f \sum_{k=0}^{\infty} \frac{U_{ij}^{(k)}}{R_{ij}^{2k+1}}, \quad (3.13)$$

где

$$R_{ij}^2 = (\xi_i - \xi_j)^2 + (\eta_i - \eta_j)^2 + (\zeta_i - \zeta_j)^2,$$

а величины $U_{ij}^{(k)}$ суть целые многочлены относительно разностей координат точек G_i и G_j , коэффициенты которых зависят некоторым образом от эйлеровых углов обоих тел.

Разложение (3.13) сходится абсолютно и представляет силовую функцию взаимного притяжения двух тел в области, определяемой неравенством

$$R_{ij} > \bar{R}_i + \bar{R}_j,$$

где

$$\bar{R}_i = \text{Max}(\overline{G_i P_i}), \quad \bar{R}_j = \text{Max}(\overline{G_j P_j}).$$

Подставляя выражение (3.13) для U_{ij} в формулу (3.6'), мы получим также полное разложение для силовой функции системы любого числа тел.

Приведем теперь формулы для нескольких первых коэффициентов ряда (3.13), позволяющие составить важное для практических приложений приближенное выражение силовой функции двух (а стало быть и какого угодно числа) тел.

Прежде всего для любых тел и при произвольном выборе собственных систем координат мы имеем

$$U_{ij}^{(0)} = m_i m_j. \quad (3.14)$$

Далее, для любых тел, но в предположении, что точки G_i и G_j суть центры инерции тел M_i и M_j , мы будем иметь

$$U_{ij}^{(1)} = 0. \quad (3.14')$$

Наконец, считая, что каждое из двух тел обладает тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии формы

и физической структуры, и принимая оси симметрии (являющиеся одновременно главными центральными осями инерции тел) за оси собственных систем координат, мы имеем:

$$U_{ij}^{(2)} = \frac{1}{2} R_{ij}^2 \{ m_i [A_j + B_j + C_j - 3I_j^{(i, j)}] + \\ + m_j [A_i + B_i + C_i - 3I_i^{(i, j)}] \}. \quad (3.14'')$$

В последней формуле A_s, B_s, C_s ($s = i, j$) обозначают главные, центральные моменты тела, а $I_s^{(i, j)}$ есть момент инерции тела, относительно прямой, проходящей через центры инерции G_i и G_j обоих тел.

По известной теореме теоретической механики мы можем написать:

$$I_s^{(i, j)} = A_s (\alpha_s^{(i, j)})^2 + B_s (\beta_s^{(i, j)})^2 + C_s (\gamma_s^{(i, j)})^2, \quad (3.15)$$

где $\alpha_s^{(i, j)}, \beta_s^{(i, j)}, \gamma_s^{(i, j)}$ суть косинусы углов, образуемых прямой $\overline{G_i G_j}$ с главными, центральными осями инерции тела M_s . Так как эти оси приняты за оси собственной для тела M_s ($s = i, j$) системы координат, то очевидно

$$\left. \begin{aligned} \alpha_s^{(i, j)} &= a_{11}^{(s)} \frac{\xi_j - \xi_i}{R_{ij}} + a_{21}^{(s)} \frac{\eta_j - \eta_i}{R_{ij}} + a_{31}^{(s)} \frac{\zeta_j - \zeta_i}{R_{ij}}, \\ \beta_s^{(i, j)} &= a_{12}^{(s)} \frac{\xi_j - \xi_i}{R_{ij}} + a_{22}^{(s)} \frac{\eta_j - \eta_i}{R_{ij}} + a_{32}^{(s)} \frac{\zeta_j - \zeta_i}{R_{ij}}, \\ \gamma_s^{(i, j)} &= a_{13}^{(s)} \frac{\xi_j - \xi_i}{R_{ij}} + a_{23}^{(s)} \frac{\eta_j - \eta_i}{R_{ij}} + a_{33}^{(s)} \frac{\zeta_j - \zeta_i}{R_{ij}}, \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

причем направляющие косинусы $a^{(s)} \dots$ определяются такими же формулами, как и формулы (3.1).

Подставляя выписанные выражения для первых коэффициентов в формулу (3.13), получим следующее приближенное выражение для силовой функции взаимного притяжения двух тел:

$$U_{ij} = f \frac{m_i m_j}{R_{ij}} + f m_i \frac{A_j + B_j + C_j - 3I_j^{(i, j)}}{2R_{ij}^3} + \\ + f m_j \frac{A_i + B_i + C_i - 3I_i^{(i, j)}}{2R_{ij}^3} + \dots \quad (3.13')$$

Заметим, что приближенное выражение силовой функции (3.13') годится также для двух совершенно произвольных тел, лишь бы их линейные размеры были достаточно малы по сравнению с расстоянием между их центрами инерции и если за собственные оси координат выбраны главные, центральные оси инерции этих тел*).

Отметим еще, что если каждое из двух тел представляет собой шар, однородный или обладающий сферическим распределением плотностей, то все коэффициенты $U_{ij}^{(k)}$, для которых $k \neq 0$, равны нулю и выражение силовой функции приводится к простейшему виду

$$U_{ij} = f \frac{m_i m_j}{R_{ij}}, \quad (3.13'')$$

т. е. представляет собой силовую функцию двух материальных точек, помещенных в центрах шаров и обладающих массами, равными массам этих шаров.

То же самое выражение (3.13'') получим и для силовой функции двух тел любой формы и произвольного физического строения, линейные размеры которых настолько малы по сравнению с расстоянием между их центрами инерции, что в разложении (3.13) можно пренебречь всеми членами, кроме первого, соответствующего $k = 0$.

Таким образом, как об этом уже говорилось выше, многие задачи небесной механики, т. е. задачи о движении небесных тел, приводятся к более простой задаче о движении взаимно притягивающихся материальных точек.

Дифференцируя теперь разложение (3.13) по координатам и эйлеровым углам тела M_i , мы получим соответствующие разложения для составляющих силы притяжения, действующей на тело M_i (со стороны тела M_j), и для составляющих момента этой силы относительно точки G_i .

Таким образом, получим следующие разложения:

$$\Xi_i^{(f)} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial \xi_i} = f \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{\partial U_{ij}^{(k)}}{\partial \xi_i} + \frac{(2k+1)(\xi_j - \xi_i)}{R_{ij}^{2k+3}} U_{ij}^{(k)} \right\} \quad (3.17)$$

*) См. Д у б о ш и н Г. Н., Теория притяжения, Физматгиз, 1961.

(аналогично для двух других составляющих) и

$$\Phi_i^{(j)} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial \varphi_i} = f \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial U_{ij}^{(k)}}{R_{ij}^{2k+1}} \quad (3.18)$$

(аналогично для двух других составляющих момента).

Если ограничиться приближенным разложением силовой функции (3.13'), то получим соответственно *)

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{ij}}{\partial \xi_i} = & f m_i m_j \frac{\xi_j - \xi_i}{R_{ij}^3} + \\ & + \frac{3}{2} f m_i [A_j + B_j + C_j - 3I_j^{(i,j)}] \frac{\xi_j - \xi_i}{R_{ij}^5} + \\ & + \frac{3}{2} f m_j [A_i + B_i + C_i - 3I_i^{(i,j)}] \frac{\xi_j - \xi_i}{R_{ij}^5} - \\ & - \frac{3}{2} \frac{f m_i}{R_{ij}^3} \frac{\partial I_i^{(i,j)}}{\partial \xi_i} - \frac{3}{2} \frac{f m_j}{R_{ij}^3} \frac{\partial I_j^{(i,j)}}{\partial \xi_i} + \dots \end{aligned}$$

и

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial \varphi_i} = - \frac{3}{2} \frac{f m_i}{R_{ij}^3} \frac{\partial I_i^{(i,j)}}{\partial \varphi_i} + \dots,$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_s^{(i,j)}}{\partial \xi_i} &= 2A_s \alpha_s^{(i,j)} \frac{\partial \alpha_s^{(i,j)}}{\partial \xi_i} + 2B_s \beta_s^{(i,j)} \frac{\partial \beta_s^{(i,j)}}{\partial \xi_i} + 2C_s \gamma_s^{(i,j)} \frac{\partial \gamma_s^{(i,j)}}{\partial \xi_i}, \\ \frac{\partial I_s^{(i,j)}}{\partial \varphi_i} &= 2A_s \alpha_s^{(i,j)} \frac{\partial \alpha_s^{(i,j)}}{\partial \varphi_i} + 2B_s \beta_s^{(i,j)} \frac{\partial \beta_s^{(i,j)}}{\partial \varphi_i} + 2C_s \gamma_s^{(i,j)} \frac{\partial \gamma_s^{(i,j)}}{\partial \varphi_i}. \end{aligned}$$

Подобным же образом можно получить выражения и для всех остальных частных производных силовой функции. Входящие в эти выражения производные по координатам и эйлеровым углам от величин (3.16) находятся легко и мы эти производные выписывать не будем.

Заметим еще только, что если одно из тел обладает осевой симметрией формы и распределения плотностей, то, выбирая ось симметрии (на которой обязательно лежит центр

*) Дубошин Г. Н., О дифференциальных уравнениях поступательно-вращательного движения, Астрон. журн., 35, вып. 2, 1958.

инерции) за ось аппликат собственной системы координат, мы сделаем силовую функцию не зависящей от угла собственного вращения тела, а поэтому частная производная силовой функции по этой переменной будет заведомо равна нулю.

§ 3. Дифференциальные уравнения задачи и их первые интегралы

1. Уравнения поступательно - вращательного движения в абсолютных осях. Перейдем к рассмотрению дифференциальных уравнений поступательно-вращательного движения системы взаимно притягивающихся твердых тел.

Эти уравнения проще всего получить из общих уравнений Лагранжа второго рода (глава I, § 1), принимая за обобщенные координаты системы переменные (3.5'), т. е. абсолютные координаты центров инерции тел системы и эйлеровы углы, определяющие ориентацию тел в абсолютных осях.

Так как действующие в системе силы притяжения обладают силовой функцией, то для написания уравнений движения остается только составить выражение для кинетической энергии системы, которое можно взять из любого учебника по теоретической механике *).

Обозначим, как обычно, через p_i , q_i , r_i проекции угловой скорости вращения тела в собственной для этого тела системе координат $G_i\xi'_i\eta'_i\zeta'_i$. Эти величины связаны с эйлеровыми углами тела известными кинематическими уравнениями Эйлера, имеющими вид:

$$\left. \begin{aligned} p_i &= \sin \varphi_i \sin \vartheta_i \cdot \dot{\psi}_i + \cos \varphi_i \cdot \dot{\vartheta}_i, \\ q_i &= \cos \varphi_i \sin \vartheta_i \cdot \dot{\psi}_i - \sin \varphi_i \cdot \dot{\vartheta}_i, \\ r_i &= \cos \vartheta_i \cdot \dot{\psi}_i + \dot{\varphi}_i. \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Если теперь за оси собственной системы координат принять главные центральные оси инерции тела M_i , то живая сила T_i этого тела определится следующей формулой:

$$T_i = \frac{1}{2} m_i (\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2) + \frac{1}{2} (A_i p_i^2 + B_i q_i^2 + C_i r_i^2), \quad (3.20)$$

*) См., например, Су слов Г. К., Теоретическая механика, ОНТИ, 1944.

а если T есть полная живая сила всей системы тел, то

$$T = \sum_{i=0}^n T_i. \quad (3.20')$$

Так как живая сила каждого тела не зависит от координат точки G_i и, в силу уравнений (3.19), от угла прецессии ψ_i , то уравнения Лагранжа в нашем случае будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_i} \right) &= \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_i} \right) &= \frac{\partial U}{\partial \psi_i}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}_i} \right) &= \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} &= \frac{\partial U}{\partial \varphi_i}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\zeta}_i} \right) &= \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}, & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \vartheta_i} &= \frac{\partial U}{\partial \vartheta_i}. \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

Подставляя сюда выражение для T , разрешая вторую группу уравнений относительно производных от проекций угловых скоростей и присоединяя к получившимся уравнениям кинематические уравнения Эйлера, мы напишем окончательно полную систему уравнений поступательно-вращательного движения системы абсолютно твердых тел в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} m_i \ddot{\xi}_i &= \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \\ m_i \ddot{\eta}_i &= \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \\ m_i \ddot{\zeta}_i &= \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}, \end{aligned} \right\} \quad (3.21')$$

$$\left. \begin{aligned} A_i \dot{p}_i - (B_i - C_i) q_i r_i &= \left[\frac{\partial U}{\partial \psi_i} - \cos \vartheta_i \frac{\partial U}{\partial \varphi_i} \right] \frac{\sin \varphi_i}{\sin \vartheta_i} + \cos \varphi_i \frac{\partial U}{\partial \vartheta_i}, \\ B_i \dot{q}_i - (C_i - A_i) r_i p_i &= \left[\frac{\partial U}{\partial \psi_i} - \cos \vartheta_i \frac{\partial U}{\partial \varphi_i} \right] \frac{\cos \varphi_i}{\sin \vartheta_i} - \sin \varphi_i \frac{\partial U}{\partial \vartheta_i}, \\ C_i \dot{r}_i - (A_i - B_i) p_i q_i &= \frac{\partial U}{\partial \varphi_i}, \end{aligned} \right\} \quad (3.21'')$$

$$\left. \begin{aligned} p_i &= \sin \varphi_i \sin \vartheta_i \cdot \dot{\psi}_i + \cos \varphi_i \cdot \dot{\vartheta}_i, \\ q_i &= \cos \varphi_i \sin \vartheta_i \cdot \dot{\psi}_i - \sin \varphi_i \cdot \dot{\vartheta}_i, \\ r_i &= \cos \vartheta_i \cdot \dot{\psi}_i + \dot{\varphi}_i \end{aligned} \right\} \quad (3.21''')$$

($i = 0, 1, 2, \dots, n$)

В написанные уравнения входят вспомогательные переменные — проекции угловых скоростей тел системы p_i, q_i, r_i . Эти переменные можно исключить при помощи кинематических уравнений Эйлера (3.21). Произведя это исключение и разрешив полученные уравнения относительно вторых производных от углов Эйлера, мы представим дифференциальные уравнения поступательно-вращательного движения еще в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} m_i \ddot{\xi}_i &= \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, & \ddot{\psi}_i &= \Psi_i^*, \\ m_i \ddot{\eta}_i &= \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, & \ddot{\varphi}_i &= \Phi_i^*, \\ m_i \ddot{\zeta}_i &= \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}, & \ddot{\vartheta}_i &= \Theta_i^*, \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

где положено для сокращения:

$$\left. \begin{aligned} \sin \vartheta_i \cdot \Psi_i^* &= \dot{\vartheta}_i \dot{\varphi}_i - \cos \vartheta_i \cdot \dot{\vartheta}_i \dot{\psi}_i + \left(\frac{1}{A_i} - \frac{1}{B_i} \right) \sin \varphi_i \cos \varphi_i \frac{\partial U}{\partial \vartheta_i} + \\ &+ \csc \vartheta_i \left(\frac{\sin^2 \varphi_i}{A_i} + \frac{\cos^2 \varphi_i}{B_i} \right) \left[\frac{\partial U}{\partial \psi_i} - \cos \vartheta_i \frac{\partial U}{\partial \varphi_i} \right] + \\ &+ (\cos \vartheta_i \cdot \dot{\psi}_i + \dot{\varphi}_i) \left[\left(\frac{B_i - C_i}{A_i} + \frac{C_i - A_i}{B_i} \right) \sin \varphi_i \cos \varphi_i \sin \vartheta_i \cdot \dot{\psi}_i + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{C_i - A_i}{B_i} \cos^2 \varphi_i - \frac{B_i - C_i}{A_i} \sin^2 \varphi_i \right) \dot{\vartheta}_i \right], \\ \Phi_i^* &= \frac{1}{C_i} \frac{\partial U}{\partial \varphi_i} - \csc \vartheta_i \cdot \dot{\vartheta}_i \dot{\psi}_i - \operatorname{ctg} \vartheta_i \cdot \Psi_i^* + \\ &+ \frac{A_i - B_i}{C_i} (\sin \varphi_i \sin \vartheta_i \cdot \dot{\psi}_i + \cos \varphi_i \cdot \dot{\vartheta}_i) (\cos \varphi_i \sin \vartheta_i \cdot \dot{\psi}_i - \sin \varphi_i \cdot \dot{\vartheta}_i), \\ \Theta_i^* &= -\sin \vartheta_i \cdot \dot{\psi}_i \dot{\varphi}_i + \left(\frac{\cos^2 \varphi_i}{A_i} + \frac{\sin^2 \varphi_i}{B_i} \right) \frac{\partial U}{\partial \vartheta_i} + \\ &+ \left(\frac{1}{A_i} - \frac{1}{B_i} \right) \frac{\sin \varphi_i \cos \varphi_i}{\sin \vartheta_i} \left[\frac{\partial U}{\partial \psi_i} - \cos \vartheta_i \frac{\partial U}{\partial \varphi_i} \right] + \\ &+ (\cos \vartheta_i \cdot \dot{\psi}_i + \dot{\varphi}_i) \left[\left(\frac{B_i - C_i}{A_i} \cos^2 \varphi_i - \frac{C_i - A_i}{B_i} \sin^2 \varphi_i \right) \sin \vartheta_i \cdot \dot{\psi}_i + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{C_i - B_i}{A_i} + \frac{A_i - C_i}{B_i} \right) \sin \varphi_i \cos \varphi_i \cdot \dot{\vartheta}_i \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

Если какое-нибудь из тел системы обладает осевой симметрией, то, принимая ось симметрии за ось аппликат собственной для этого тела системы координат, мы можем значительно упростить предыдущие выражения. Действительно, пусть осевой симметрией обладает тело M_0 . Тогда, очевидно, $A_0 = B_0$ и силовая функция U не зависит от угла собственного вращения φ_0 этого тела. Поэтому предыдущие формулы дают *):

$$\left. \begin{aligned} \sin \vartheta_0 \cdot \Psi_0^* &= -2 \cos \vartheta_0 \cdot \dot{\vartheta}_0 \dot{\psi}_0 + \\ &+ \frac{C_0}{A_0} \dot{\vartheta}_0 (\cos \vartheta_0 \cdot \dot{\psi}_0 + \dot{\varphi}_0) + \frac{\csc \vartheta_0}{A_0} \frac{\partial U}{\partial \psi_0}, \\ \Phi_0^* &= -\csc \vartheta_0 \cdot \dot{\vartheta}_0 \dot{\psi}_0 - \csc \vartheta_0 \cdot \Psi_0^*, \\ \Theta_0^* &= \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 \cdot \dot{\psi}_0^2 - \\ &- \frac{C_0}{A_0} \dot{\psi}_0 (\cos \vartheta_0 \cdot \dot{\psi}_0 + \dot{\varphi}_0) \sin \vartheta_0 + \frac{1}{A_0} \frac{\partial U}{\partial \vartheta_0}. \end{aligned} \right\} \quad (3.23')$$

2. Десять классических интегралов. Уравнения (3.21) или (3.22) образуют систему $6n + 6$ дифференциальных уравнений второго порядка, т. е. представляют собой совместную систему $12(n + 1)$ порядка.

Поэтому общий интеграл этой системы, дающий полное решение рассматриваемой задачи, должен состоять из $12(n + 1)$ независимых первых интегралов и должен содержать такое же число произвольных постоянных интегрирования, которые могли бы быть однозначно определены начальными значениями величин (3.5') и начальными значениями первых производных этих величин.

Однако так же, как и дифференциальные уравнения движения взаимно притягивающихся материальных точек, уравнения поступательно-вращательного движения имеют в общем случае только десять первых интегралов, вытекающих из принципов сохранения движения центра инерции, момента количества движения и полной энергии системы.

Эти интегралы выводятся из уравнений (3.21) при помощи рассмотренных в предыдущем параграфе свойств силовой функции.

*) Формулы (3.23) и (3.23') приведены в моей статье «О некоторых частных решениях задачи о поступательно-вращательном движении двух тел», Сообщения ГАИШ, № 108, 1960.

Действительно, просуммируем по индексу i каждое из равенств группы уравнений (3.21'), что дает следующие три уравнения, являющиеся следствиями уравнений (3.21'):

$$\sum_{i=0}^n m_i \ddot{\xi}_i = \sum_{i=0}^n \frac{\partial U}{\partial \xi_i},$$

$$\sum_{i=0}^n m_i \ddot{\eta}_i = \sum_{i=0}^n \frac{\partial U}{\partial \eta_i},$$

$$\sum_{i=0}^n m_i \ddot{\zeta}_i = \sum_{i=0}^n \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}.$$

Отсюда, вследствие соотношений (3.11), находим следующие уравнения:

$$\sum_{i=0}^n m_i \ddot{\xi}_i = 0, \quad \sum_{i=0}^n m_i \ddot{\eta}_i = 0, \quad \sum_{i=0}^n m_i \ddot{\zeta}_i = 0,$$

интегрируя которые два раза подряд, получаем первую группу первых интегралов уравнений поступательно-вращательного движения взаимно притягивающихся тел:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^n m_i \dot{\xi}_i &= a_1, & \sum_{i=0}^n m_i \xi_i &= a_1 t + b_1, \\ \sum_{i=0}^n m_i \eta_i &= a_2, & \sum_{i=0}^n m_i \eta_i &= a_2 t + b_2, \\ \sum_{i=0}^n m_i \dot{\zeta}_i &= a_3, & \sum_{i=0}^n m_i \zeta_i &= a_3 t + b_3. \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

Так как, согласно принятому условию, точки G_i являются центрами инерции тел M_i ($i = 0, 1, \dots, n$), то координаты центра инерции всей системы, которые обозначим через $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$, определятся формулами

$$\bar{\xi} = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^n m_i \xi_i, \quad \bar{\eta} = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^n m_i \eta_i, \quad \bar{\zeta} = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^n m_i \zeta_i, \quad (3.25)$$

где

$$m = \sum_{i=0}^n m_i$$

обозначает полную массу всей системы тел.

Формулы (3.25) и (3.24) дают

$$\begin{aligned}\bar{\xi} &= \frac{a_1}{m} t + \frac{b_1}{m}, & \bar{\eta} &= \frac{a_2}{m} t + \frac{b_2}{m}, & \bar{\zeta} &= \frac{a_3}{m} t + \frac{b_3}{m}, \\ \dot{\bar{\xi}} &= \frac{a_1}{m}, & \dot{\bar{\eta}} &= \frac{a_2}{m}, & \dot{\bar{\zeta}} &= \frac{a_3}{m}.\end{aligned}$$

Эти уравнения показывают, что центр инерции всей системы тел движется в абсолютном пространстве прямолинейно и равномерно. Поэтому интегралы (3.24) называются (так же, как и в задаче о движении взаимно притягивающихся материальных точек) *интегралами движения центра инерции*.

Вторая группа первых интегралов, выражающих принцип сохранения момента количества движения всей системы, получается несколько более длинным и громоздким путем.

Помножим второе и третье из уравнений группы (3.21') соответственно на $-\zeta_i$ и $+\eta_i$, уравнения группы (3.21'') соответственно на $a_{11}^{(i)}$, $a_{12}^{(i)}$, $a_{13}^{(i)}$ и, наконец, уравнения группы (3.21''') — соответственно на $A_i \dot{a}_{11}^{(i)}$, $B_i \dot{a}_{12}^{(i)}$, $C_i \dot{a}_{13}^{(i)}$. Сложим после этого восемь получившихся равенств и просуммируем по индексу i от $i=0$ до $i=n$.

Обозначая для сокращения правые части равенств (3.21) через P_i , Q_i , R_i , мы получим в результате следующее уравнение, являющееся следствием всех уравнений (3.21):

$$\begin{aligned}& \sum_{i=0}^n \{m_i(\eta_i \ddot{\xi}_i - \zeta_i \ddot{\eta}_i) + A_i \dot{p}_i a_{11}^{(i)} + B_i \dot{q}_i a_{12}^{(i)} + C_i \dot{r}_i a_{13}^{(i)} + \\& \quad + A_i p_i \dot{a}_{11}^{(i)} + B_i q_i \dot{a}_{12}^{(i)} + C_i r_i \dot{a}_{13}^{(i)}\} = \\& = \sum_{i=0}^n \left\{ \eta_i \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} - \zeta_i \frac{\partial U}{\partial \eta_i} + (B_i - C_i) q_i r_i a_{11}^{(i)} + (C_i - A_i) r_i p_i a_{12}^{(i)} + \right. \\& \quad \left. + (A_i - B_i) p_i q_i a_{13}^{(i)} + A_i p_i \dot{a}_{11}^{(i)} + B_i q_i \dot{a}_{12}^{(i)} + C_i r_i \dot{a}_{13}^{(i)} + \right. \\& \quad \left. + P_i a_{11}^{(i)} + Q_i a_{12}^{(i)} + R_i a_{13}^{(i)} \right\}.\end{aligned}$$

Легко видеть, что левая часть последнего равенства есть точная производная по t . Преобразуем правую часть равенства, воспользовавшись формулами *)

$$\dot{a}_{11}^{(i)} = r_i a_{12}^{(i)} - q_i a_{13}^{(i)}, \quad \dot{a}_{12}^{(i)} = p_i a_{13}^{(i)} - r_i a_{11}^{(i)}, \quad \dot{a}_{13}^{(i)} = q_i a_{11}^{(i)} - p_i a_{12}^{(i)},$$

подставляя вместо P_i , Q_i , R_i их выражения и производя затем необходимые сокращения и упрощения.

Тогда предыдущее равенство переписывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^n \{m_i (\eta_i \dot{\zeta}_i - \zeta_i \dot{\eta}_i) + A_i p_i a_{11}^{(i)} + B_i q_i a_{12}^{(i)} + C_i r_i a_{13}^{(i)}\} = \\ & = \sum_{i=0}^n \left\{ \eta_i \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} - \zeta_i \frac{\partial U}{\partial \eta_i} + \frac{\sin \psi_i}{\sin \vartheta_i} \frac{\partial U}{\partial \varphi_i} - \frac{\sin \psi_i \cos \vartheta_i}{\sin \vartheta_i} \frac{\partial U}{\partial \psi_i} + \cos \psi_i \frac{\partial U}{\partial \vartheta_i} \right\}. \end{aligned}$$

Но в силу первого из соотношений (3.12) правая часть последнего равенства есть нуль, а поэтому выражение, стоящее под знаком производной в левой части равенства, есть величина постоянная, что и дает первый из интегралов второй группы.

Подобным же образом получаются еще два интеграла, которые, впрочем, легко выводятся из найденного первого циклической перестановкой букв ξ , η , ζ и заменой первого индекса 1 у направляющих косинусов индексами 2 и 3 соответственно.

Выведенные три интеграла напишутся в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^n \{m_i (\eta_i \dot{\zeta}_i - \zeta_i \dot{\eta}_i) + A_i p_i a_{11}^{(i)} + B_i q_i a_{12}^{(i)} + C_i r_i a_{13}^{(i)}\} &= c_1, \\ \sum_{i=0}^n \{m_i (\zeta_i \dot{\xi}_i - \xi_i \dot{\zeta}_i) + A_i p_i a_{21}^{(i)} + B_i q_i a_{22}^{(i)} + C_i r_i a_{23}^{(i)}\} &= c_2, \\ \sum_{i=0}^n \{m_i (\xi_i \dot{\eta}_i - \eta_i \dot{\xi}_i) + A_i p_i a_{31}^{(i)} + B_i q_i a_{32}^{(i)} + C_i r_i a_{33}^{(i)}\} &= c_3. \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

*) См., например, Су слов Г. К., Теоретическая механика, изд. 3-е, Гостехиздат, 1944 (1946). Впрочем, эти формулы нетрудно получить, непосредственно дифференцируя формулы (3.1) и преобразуя полученные выражения при помощи формул (3.19).

где c_1, c_2, c_3 обозначают три произвольные постоянные интегрирования.

Так как левые части равенств (3.26) представляют собой проекции на абсолютные оси вектора полного момента количества движения всей системы тел, то интегралы (3.26) можно назвать *интегралами моментов количества движения* или, более просто, *интегралами моментов*.

Наконец, последний интеграл — *интеграл живой силы* или *интеграл энергии* — можно написать сразу, имея в виду, что наши уравнения (3.21) получены из уравнений Лагранжа второго рода. Поэтому этот последний интеграл напишется в следующем виде:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \{m_i(\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2) + A_i p_i^2 + B_i q_i^2 + C_i r_i^2\} = U + h, \quad (3.27)$$

где h есть произвольная постоянная.

Итак, дифференциальные уравнения поступательно-вращательного движения системы абсолютно твердых взаимно притягивающихся тел имеют такие же десять первых интегралов, как и уравнения поступательного движения системы взаимно притягивающихся материальных точек.

При этом выведенные интегралы имеют место независимо от вида и структуры тел системы, а также при любом их числе.

3. **Дополнительные интегралы.** Если тела системы $M_0, M_1, \dots, M_n$ вполне произвольны, то уравнения поступательно-вращательного движения не имеют других первых интегралов, кроме десяти указанных. Но в частных случаях уравнения (3.21) могут иметь еще некоторые интегралы.

Действительно, пусть некоторые тела системы, например $M_0, M_1, \dots, M_k$ ($k < n$), суть шары, обладающие сферическими распределениями плотностей. Тогда для каждого из этих тел любые три взаимно перпендикулярные прямые, проходящие через центр шара, являются главными, центральными осями инерции. Поэтому, очевидно,

$$A_i = B_i = C_i \quad (i = 0, 1, \dots, k)$$

и, кроме того, ясно, что силовая функция U не зависит

от углов *)

$$\psi_i, \varphi_i, \vartheta_i \quad (i = 0, 1, \dots, k).$$

Тогда

$$\frac{\partial U}{\partial \psi_i} = \frac{\partial U}{\partial \varphi_i} = \frac{\partial U}{\partial \vartheta_i} \quad (i = 0, 1, \dots, k),$$

и уравнения (3.21'') дают немедленно

$$p_i = p_i^{(0)} = \text{const}, \quad q_i = q_i^{(0)} = \text{const}, \quad r_i = r_i^{(0)} = \text{const} \quad (3.28)$$

$$(i = 0, 1, \dots, k),$$

а это и есть дополнительные интегралы наших уравнений.

Интегралы (3.28) показывают, что угловая скорость вращения каждого из тел $M_0, M_1, \dots, M_k$ остается постоянной по величине и направлению относительно собственной для каждого тела системы координат.

Но так как главные оси инерции, принятые за оси собственной системы координат, для каждого из тел M_i ($i = 0, 1, \dots, k$) совершенно произвольны, то отсюда следует, что угловая скорость вращения каждого из этих тел будет оставаться постоянной (по величине и направлению) и относительно абсолютной системы координат. Иными словами, каждое из этих тел-шаров будет вращаться равномерно вокруг некоторой неизменной оси, определяемой исключительно начальными условиями задачи.

Так как силовая функция U не зависит от эйлеровых углов тел-шаров, то уравнения (3.21') и (3.21'') не будут содержать этих переменных, а поэтому порядок системы, определяющей остальные неизвестные, будет на $6k$ единиц ниже порядка первоначальной системы (3.21).

Особого внимания заслуживает случай, когда $k = n$, т. е. когда каждое из тел системы есть шар, обладающий сферическим распределением плотностей **).

*) См. нашу книгу «Теория притяжения».

**) Заметим, что каждый из этих шаров может быть сплошным или полым, так как в теории притяжения показывается, что шаровые слои, обладающие сферическими распределениями плотностей, притягиваются взаимно как материальные точки, помещенные в центрах слоев.

Тогда силовая функция U совершенно не зависит от эйлеровых углов и уравнения (3.21) приводятся только к системе (3.21'), определяющей поступательные движения точек G_i — центров шаров — как материальных точек, взаимно притягивающихся, строго по закону Ньютона.

Вращательное движение тел-шаров не зависит от их поступательных движений и может быть определено без всякого труда.

Действительно, вращательное движение каждого тела-шара определяется независимой системой уравнений группы (3.21), которая представляет собой систему трех дифференциальных уравнений первого порядка относительно эйлеровых углов каждого тела.

Решение этих уравнений может быть написано сразу, если заметить, что благодаря произволу выбора собственной для каждого тела системы координат эту собственную систему можно выбрать так, чтобы ось $G_i K'_i$ совпадала с направлением вектора угловой скорости вращения тела. Тогда будем иметь

$$p_i = 0, \quad q_i = 0, \quad r_i = \omega_i = \text{const},$$

и уравнения (3.21''') дадут, как легко проверить,

$$\psi_i = \psi_i^{(0)} = \text{const}, \quad \vartheta_i = \vartheta_i^{(0)} = \text{const}, \quad \varphi_i = \omega_i t + \varphi_i^{(0)}.$$

Второй важный для приложений частный случай будем иметь тогда, когда каждое из k тел системы (например тел $M_0, M_1, \dots, M_k$) есть тело вращения, обладающее осесимметричным распределением плотностей (ось симметрии распределения плотностей должна совпадать с осью поверхности вращения, ограничивающей тело извне).

Тогда центр инерции такого тела обязательно лежит на оси симметрии, которую и можно принять за ось аппликат собственной для такого тела системы координат. Легко убедиться*), что в этом случае будем иметь

$$A_i = B_i \quad (i = 0, 1, \dots, k)$$

и что силовая функция U не будет зависеть от углов

$$\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k.$$

*) См. «Теория притяжения», либо любой курс теоретической механики.

Поэтому третьи уравнения группы (3.21'') дают

$$r_i = r_i^{(0)} = \text{const} \quad (i = 0, 1, \dots, k).$$

Эти интегралы позволяют понизить порядок системы на $2k$ единиц, так что решение задачи приведет к интегрированию системы $12n + 12 - 2k$ порядка и определению затем циклических переменных $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k$ простыми квадратурами соответствующих уравнений группы (3.21'''):

$$\varphi_i = \varphi_i^{(0)} + r_i^{(0)}t - \int_{t_0}^t \dot{\psi}_i \cos \vartheta_i dt \quad (i = 0, 1, \dots, k).$$

Никаких других интегралов, кроме рассмотренных, мы указать не можем.

4. Уравнения движения в относительных осях. Десять классических интегралов (3.24), (3.26) и (3.27) позволяют, конечно, понизить порядок системы уравнений поступательно-вращательного движения на 10 единиц.

Однако, так же, как и в случае задачи о движении взаимно притягивающихся материальных точек, эффективным для практических приложений оказывается лишь использование шести интегралов движения центра инерции всей системы.

Для понижения порядка системы уравнений (3.21) перейдем от абсолютной системы координат к относительной с началом в одной из точек G_i . Для определенности, возьмем начало координат новой системы в точке G_0 , оставляя направления осей координат неизменными и параллельными соответствующим осям абсолютной системы.

Обозначим относительные координаты тела M_i через x_i, y_i, z_i , так что будем иметь для $i = 1, 2, \dots, n$:

$$x_i = \xi_i - \xi_0, \quad y_i = \eta_i - \eta_0, \quad z_i = \zeta_i - \zeta_0. \quad (3.29)$$

Другие переменные, т. е. эйлеровы углы всех тел системы, не изменятся, так как направления новых осей совпадают с направлениями абсолютных осей.

Так как силовая функция U зависит только от разностей абсолютных координат точек G_i и так как

$$\xi_j - \xi_i = x_j - x_i, \quad \eta_j - \eta_i = y_j - y_i, \quad \zeta_j - \zeta_i = z_j - z_i \\ (i, j = 1, 2, \dots, n),$$

то после преобразования к новым переменным U будет функцией от $3n$ относительных координат точек G_i ($i = 1, 2, \dots, n$) и от $3n + 3$ эйлеровых углов всех $n + 1$ тел $M_0, M_1, \dots, M_n$.

Чтобы получить преобразованные уравнения, заметим, что, например,

$$\ddot{x}_i = \ddot{\xi}_i - \ddot{\xi}_0 = \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial \xi_i} - \frac{1}{m_0} \frac{\partial U}{\partial \xi_0} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

но очевидно, что

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_0} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial U_{j0}}{\partial \xi_0} = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial U_{j0}}{\partial x_j}.$$

Далее имеем точно так же

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i} = \sum_{j=0}^n \frac{\partial U_{ij}}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

что позволяет написать

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial \xi_i} - \frac{1}{m_0} \frac{\partial U}{\partial \xi_0} &= \frac{1}{m_i} \sum_{j=0}^n \frac{\partial U_{ij}}{\partial x_i} + \frac{1}{m_0} \sum_{j=1}^n \frac{\partial U_{j0}}{\partial x_j} = \\ &= \frac{m_0 + m_i}{m_0 m_i} \frac{\partial U_{i0}}{\partial x_i} + \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^n \frac{\partial U_{ij}}{\partial x_i} + \frac{1}{m_0} \sum_{j=1}^n \frac{\partial U_{j0}}{\partial x_j} = \\ &= \frac{m_0 + m_i}{m_0 m_i} \frac{\partial U_{i0}}{\partial x_i} + \frac{\partial R_i}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

где положено для сокращения

$$R_i = \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{1}{m_i} U_{ij} + \frac{1}{m_0} \left[x_i \frac{\partial U_{j0}}{\partial x_j} + y_i \frac{\partial U_{j0}}{\partial y_j} + z_i \frac{\partial U_{j0}}{\partial z_j} \right] \right\}. \quad (3.30)$$

Составляя таким же образом вторые производные для y_i и z_i , мы напишем уравнения поступательного относительного

движения тел $M_1, M_2, \dots, M_n$ в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_i &= \frac{m_0 + m_i}{m_0 m_i} \frac{\partial U_{i0}}{\partial x_i} + \frac{\partial R_i}{\partial x_i}, \\ \ddot{y}_i &= \frac{m_0 + m_i}{m_0 m_i} \frac{\partial U_{i0}}{\partial y_i} + \frac{\partial R_i}{\partial y_i}, \\ \ddot{z}_i &= \frac{m_0 + m_i}{m_0 m_i} \frac{\partial U_{i0}}{\partial z_i} + \frac{\partial R_i}{\partial z_i} \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

Присоединяя к уравнениям (3.31) уравнения (3.21'') и (3.21'''), которые остаются неизменными*), мы получим полную систему $6n + 3$ уравнений второго порядка с таким же числом неизвестных функций

$$\left. \begin{aligned} &x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n; \\ &\psi_0, \varphi_0, \vartheta_0, \psi_1, \varphi_1, \vartheta_1, \dots, \psi_n, \varphi_n, \vartheta_n. \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

Таким образом, порядок всей системы действительно снизился на шесть единиц.

Для полученных уравнений можно написать четыре первые интеграла, преобразуя интегралы (3.26) и (3.27) к новым переменным. Мы эти интегралы выписывать не будем.

Если тело M_0 есть шар (или шаровой слой), обладающий сферическим распределением плотностей, то U не зависит от углов $\psi_0, \varphi_0, \vartheta_0$, а поэтому из уравнений (3.21'') и (3.21''') можно отбросить те, для которых $i = 0$. Оставшиеся уравнения этих двух групп и уравнения (3.31) образуют тогда совместную систему порядка $12n$ с таким же числом неизвестных функций**).

5. Система координат, связанных с телом M_0 . Движения тел $M_1, M_2, \dots, M_n$ можно отнести также к системе осей координат, совпадающих с главными центральными осями инерции тела M_0 , т. е. к системе координат, у которой и положение начала и направления осей не будут оставаться неизменными с течением времени.

При переходе к такой системе координат изменятся и уравнения поступательного движения и уравнения враща-

*) Нужно только, само собой разумеется, выразить силовую функцию через относительные координаты.

**) Включая в число неизвестных функций также первые производные от относительных координат и эйлеровых углов.

тельного движения. Не останавливаясь на выводе этих уравнений, мы приведем только их окончательную форму*).

Пусть x'_i, y'_i, z'_i суть координаты точек $G_i (i=1, 2, \dots, n)$ относительно главных осей инерции тела M_0 ; p'_i, q'_i, r'_i суть проекции угловой скорости относительного движения тела M_i на главные центральные оси инерции этого тела и, наконец, p_0, q_0, r_0 — проекции угловой скорости тела M_0 на его оси инерции.

Тогда уравнения поступательно-вращательного движения напишутся в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}'_i + 2(q_0 \dot{z}'_i - r_0 \dot{y}'_i) + z'_i \dot{q}_0 - y'_i \dot{r}_0 - x'_i \omega_0^2 + \\ + p_0(p_0 x'_i + q_0 y'_i + r_0 z'_i) &= \frac{m_0 + m_i}{m_0 m_i} \frac{\partial U_{i0}}{\partial x'_i} + \frac{\partial R_i}{\partial x'_i}, \\ \ddot{y}'_i + 2(r_0 \dot{x}'_i - p_0 \dot{z}'_i) + x'_i \dot{r}_0 - z'_i \dot{p}_0 - y'_i \omega_0^2 + \\ + q_0(p_0 x'_i + q_0 y'_i + r_0 z'_i) &= \frac{m_0 + m_i}{m_0 m_i} \frac{\partial U_{i0}}{\partial y'_i} + \frac{\partial R_i}{\partial y'_i}, \\ \ddot{z}'_i + 2(p_0 \dot{y}'_i - q_0 \dot{x}'_i) + y'_i \dot{p}_0 - x'_i \dot{q}_0 - z'_i \omega_0^2 + \\ + r_0(p_0 x'_i + q_0 y'_i + r_0 z'_i) &= \frac{m_0 + m_i}{m_0 m_i} \frac{\partial U_{i0}}{\partial z'_i} + \frac{\partial R_i}{\partial z'_i}, \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

$$\left. \begin{aligned} A_i(\dot{p}'_i + \dot{p}_0^i) - (B_i - C_i)(q'_i + q_0^i)(r'_i + r_0^i) &= \\ = \left[\frac{\partial U}{\partial \psi'_i} - \cos \vartheta'_i \frac{\partial U}{\partial \varphi'_i} \right] \frac{\sin \varphi'_i}{\sin \vartheta'_i} + \cos \varphi'_i \frac{\partial U}{\partial \vartheta'_i}, \\ B_i(\dot{q}'_i + \dot{q}_0^i) - (C_i - A_i)(r'_i + r_0^i)(p'_i + p_0^i) &= \\ = \left[\frac{\partial U}{\partial \psi'_i} - \cos \vartheta'_i \frac{\partial U}{\partial \varphi'_i} \right] \frac{\cos \varphi'_i}{\sin \vartheta'_i} - \sin \varphi'_i \frac{\partial U}{\partial \vartheta'_i}, \\ C_i(\dot{r}'_i + \dot{r}_0^i) - (A_i - B_i)(p'_i + p_0^i)(q'_i + q_0^i) &= \frac{\partial U}{\partial \varphi'_i}, \end{aligned} \right\} \quad (3.33')$$

*) См., например, Су слов Г. К., Теоретическая механика, изд. 3-е, Гостехиздат, 1944 (1946), а также мою статью в Астрон. журн. 35, вып. 2, 1958.

$$\left. \begin{aligned} A_0 \dot{p}_0 - (B_0 - C_0) q_0 r_0 &= \left[\frac{\partial U}{\partial \psi_0} - \cos \vartheta_0 \frac{\partial U}{\partial \varphi_0} \right] \frac{\sin \varphi_0}{\sin \vartheta_0} + \cos \varphi_0 \frac{\partial U}{\partial \vartheta_0}, \\ B_0 \dot{q}_0 - (C_0 - A_0) r_0 p_0 &= \left[\frac{\partial U}{\partial \psi_0} - \cos \vartheta_0 \frac{\partial U}{\partial \varphi_0} \right] \frac{\cos \varphi_0}{\sin \vartheta_0} - \sin \varphi_0 \frac{\partial U}{\partial \vartheta_0}, \\ C_0 \dot{r}_0 - (A_0 - B_0) p_0 q_0 &= \frac{\partial U}{\partial \varphi_0}, \end{aligned} \right\} \quad (3.33'')$$

где

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= p_0^2 + q_0^2 + r_0^2, \\ p_0^i &= a_{11}^{i(i)} p_0 + a_{21}^{i(i)} q_0 + a_{31}^{i(i)} r_0, \\ q_0^i &= a_{12}^{i(i)} p_0 + a_{22}^{i(i)} q_0 + a_{32}^{i(i)} r_0, \\ r_0^i &= a_{13}^{i(i)} p_0 + a_{23}^{i(i)} q_0 + a_{33}^{i(i)} r_0, \end{aligned}$$

и $a_{ij}^{i(i)}$ суть направляющие косинусы главных центральных осей инерции тела M_i по отношению к осям $G_0 x' y' z'$.

Эти направляющие косинусы, а также величины p_0^i , q_0^i , r_0^i и p_0 , q_0 , r_0 связаны с углами Эйлера ψ_i' , φ_i' , ϑ_i' и ψ_0 , φ_0 , ϑ_0 формулами, совершенно подобными формулам (3.1) и (3.19), так что выписывать эти формулы заново нет необходимости.

Силовая функция U , а также функции U_{i0} и R_i должны быть, конечно, выражены через новые переменные, т. е. через

$$\left. \begin{aligned} x_1', y_1', z_1', \dots, x_n', y_n', z_n', \\ \psi_0, \varphi_0, \vartheta_0, \psi_1', \varphi_1', \vartheta_1', \dots, \psi_n', \varphi_n', \vartheta_n', \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

которые и являются неизвестными функциями в этой задаче.

Уравнения (3.33) значительно упрощаются, если тело M_0 есть шар, или шаровой слой, обладающий сферическим распределением плотностей. Действительно, в этом случае, как мы уже видели выше, $A_0 = B_0 = C_0$ и силовая функция не зависит от углов ψ_0 , φ_0 , ϑ_0 . Поэтому уравнения (3.33''') дают $p_0 = \text{const}$, $q_0 = \text{const}$, $r_0 = \text{const}$. Таким образом, тело M_0 вращается вокруг неизменной оси с постоянной угловой скоростью, которую обозначим через ω_0 . Выбирая теперь упомянутую неизменную ось за ось аппликат собственной для тела M_0 системы координат, мы будем иметь

$$p_0 = 0, \quad q_0 = 0, \quad r_0 = \omega_0.$$

Отсюда получаем

$$p_0^i = a_{31}^{(i)} r_0 = \omega_0 \sin \varphi'_i \sin \vartheta'_i,$$

$$q_0^i = a_{32}^{(i)} r_0 = \omega_0 \cos \varphi'_i \sin \vartheta'_i,$$

$$r_0^i = a_{33}^{(i)} r_0 = \omega_0 \cos \vartheta'_i.$$

Полагая затем для сокращения

$$\bar{p}_i = p'_i + p_0^i, \quad \bar{q}_i = q'_i + q_0^i, \quad \bar{r}_i = r'_i + r_0^i,$$

мы напомним уравнения поступательно-вращательного движения тел $M_1, M_2, \dots, M_n$ относительно вращающейся равномерно вместе с телом M_0 системы координат в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}'_i - 2\omega_0 \dot{y}'_i - \omega_0^2 x'_i &= \frac{m_0 + m_i}{m_0 m_i} \frac{\partial U_{i0}}{\partial x_i} + \frac{\partial R_i}{\partial x_i}, \\ \ddot{y}_i + 2\omega_0 \dot{x}'_i - \omega_0^2 y'_i &= \frac{m_0 + m_i}{m_0 m_i} \frac{\partial U_{i0}}{\partial y_i} + \frac{\partial R_i}{\partial y_i}, \\ \ddot{z}_i &= \frac{m_0 + m_i}{m_0 m_i} \frac{\partial U_{i0}}{\partial z_i} + \frac{\partial R_i}{\partial z_i}, \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

$$\left. \begin{aligned} A_i \dot{\bar{p}}_i - (B_i - C_i) \bar{q}_i \bar{r}_i &= \left[\frac{\partial U}{\partial \psi'_i} - \cos \vartheta'_i \frac{\partial U}{\partial \varphi'_i} \right] \frac{\sin \varphi'_i}{\sin \vartheta'_i} + \cos \varphi'_i \frac{\partial U}{\partial \vartheta'_i}, \\ B_i \dot{\bar{q}}_i - (C_i - A_i) \bar{r}_i \bar{p}_i &= \left[\frac{\partial U}{\partial \psi'_i} - \cos \vartheta'_i \frac{\partial U}{\partial \varphi'_i} \right] \frac{\cos \varphi'_i}{\sin \vartheta'_i} - \sin \varphi'_i \frac{\partial U}{\partial \vartheta'_i}, \\ C_i \dot{\bar{r}}_i - (A_i - B_i) \bar{p}_i \bar{q}_i &= \frac{\partial U}{\partial \varphi'_i}, \end{aligned} \right\} \quad (3.35')$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}_i &= (\dot{\psi}'_i + \omega_0) \sin \varphi'_i \sin \vartheta'_i + \dot{\vartheta}'_i \cos \varphi'_i, \\ \bar{q}_i &= (\dot{\psi}'_i + \omega_0) \cos \varphi'_i \sin \vartheta'_i - \dot{\vartheta}'_i \sin \varphi'_i, \\ \bar{r}_i &= (\dot{\psi}'_i + \omega_0) \cos \vartheta'_i + \dot{\varphi}'_i. \end{aligned} \right\} \quad (3.35'')$$

6. Уравнения поступательно-вращательного движения в канонической форме. В заключение этого параграфа представим уравнения поступательно-

вращательного движения (3.22) в канонической форме, что возможно, так как упомянутые уравнения являются следствиями уравнений (3.21), которые являются уравнениями Лагранжа второго рода.

Принимая за обобщенные координаты Лагранжа абсолютные координаты точек G_i и эйлеровы углы тел системы, введем сопряженные им канонические импульсы посредством формул

$$\left. \begin{aligned} \xi_i^* &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_i} = m_i \dot{\xi}_i, & \psi_i^* &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_i} = A_i p_i \sin \varphi_i \sin \vartheta_i + \\ & & & + B_i q_i \cos \varphi_i \sin \vartheta_i + C_i r_i \cos \vartheta_i, \\ \eta_i^* &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}_i} = m_i \dot{\eta}_i, & \varphi_i^* &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} = C_i r_i, \\ \zeta_i^* &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\zeta}_i} = m_i \dot{\zeta}_i, & \vartheta_i^* &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}_i} = A_i p_i \cos \varphi_i - B_i q_i \sin \varphi_i. \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

Тогда характеристическая (или Гамильтонова) функция

$$H = T - U \quad (3.37)$$

и представляет полную энергию рассматриваемой системы взаимно притягивающихся твердых тел.

Теперь уравнения поступательно-вращательного движения этих тел напишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi}_i &= \frac{\partial H}{\partial \xi_i^*}, & \dot{\xi}_i^* &= -\frac{\partial H}{\partial \xi_i}, & \dot{\psi}_i &= \frac{\partial H}{\partial \psi_i^*}, & \dot{\psi}_i^* &= -\frac{\partial H}{\partial \psi_i}, \\ \dot{\eta}_i &= \frac{\partial H}{\partial \eta_i^*}, & \dot{\eta}_i^* &= -\frac{\partial H}{\partial \eta_i}, & \dot{\varphi}_i &= \frac{\partial H}{\partial \varphi_i^*}, & \dot{\varphi}_i^* &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi_i}, \\ \dot{\zeta}_i &= \frac{\partial H}{\partial \zeta_i^*}, & \dot{\zeta}_i^* &= -\frac{\partial H}{\partial \zeta_i}, & \dot{\vartheta}_i &= \frac{\partial H}{\partial \vartheta_i^*}, & \dot{\vartheta}_i^* &= -\frac{\partial H}{\partial \vartheta_i}. \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

Остается выразить H через канонические переменные, для чего достаточно в выражение (3.20) для кинетической энергии подставить вместо производных от абсолютных координат и эйлеровых углов их выражения через обобщенные скорости, определяемые формулами (3.36).

Определим для этого истинные скорости из уравнений (3.36). Мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi}_i &= \frac{1}{m_i} \xi_i^*, & \dot{\eta}_i &= \frac{1}{m_i} \eta_i^*, & \dot{\zeta}_i &= \frac{1}{m_i} \zeta_i^*, \\ p_i &= \frac{\csc \vartheta_i}{A_i} (\psi_i^* \sin \varphi_i - \varphi_i^* \sin \varphi_i \cos \vartheta_i + \vartheta_i^* \cos \varphi_i \sin \vartheta_i), \\ q_i &= \frac{\csc \vartheta_i}{B_i} (\psi_i^* \cos \varphi_i - \varphi_i^* \cos \varphi_i \cos \vartheta_i - \vartheta_i^* \sin \varphi_i \sin \vartheta_i), \\ r_i &= \frac{1}{C_i} \varphi_i^*, \end{aligned} \right\} (3.39)$$

$(i = 0, 1, 2, \dots, n).$

Подставляя эти выражения в формулу (3.20), получим

$$\begin{aligned} T_i &= \frac{1}{2m_i} (\xi_i^{*2} + \eta_i^{*2} + \zeta_i^{*2}) + \\ &+ \frac{\csc^2 \vartheta_i}{2A_i} (\psi_i^* \sin \varphi_i - \varphi_i^* \sin \varphi_i \cos \vartheta_i + \vartheta_i^* \cos \varphi_i \sin \vartheta_i)^2 + \\ &+ \frac{\csc^2 \vartheta_i}{2B_i} (\psi_i^* \cos \varphi_i - \varphi_i^* \cos \varphi_i \cos \vartheta_i - \vartheta_i^* \sin \varphi_i \sin \vartheta_i)^2 + \frac{1}{2C_i} \varphi_i^{*2}, \end{aligned}$$

после чего найдем полную живую силу T по формуле (3.21) и функцию Гамильтона по формуле (3.37).

Система (3.38) представляет собой систему $12(n+1)$ дифференциальных уравнений первого порядка с таким же числом неизвестных функций, которыми являются канонические переменные — абсолютные координаты точек G_i , эйлеровы углы и импульсы, определяемые формулами (3.36).

Уравнения (3.38) имеют, разумеется, те же десять первых интегралов, которые получаются из соотношений (3.24), (3.26) и (3.27) заменой истинных скоростей их выражениями (3.39).

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

НЕВОЗМУЩЕННОЕ КЕПЛЕРОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

ГЛАВА IV

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

1. Дифференциальные уравнения невозмущенного кеплеровского движения

1. Задача двух тел. Рассмотрим частный случай общей задачи многих тел (здесь — материальных точек), когда система состоит всего из двух материальных точек, взаимно притягивающихся по закону Ньютона.

Дифференциальные уравнения движения в этой задаче, называемой обычно *задачей двух тел*, получим из уравнений (2.3) и формул (2.2), полагая $n+1=2$, т. е. $n=1$:

$$\left. \begin{aligned} m_0 \ddot{\xi}_0 &= f m_0 m_1 \frac{\xi_1 - \xi_0}{\Delta_{01}^3}, & m_1 \ddot{\xi}_1 &= f m_1 m_0 \frac{\xi_0 - \xi_1}{\Delta_{10}^3}, \\ m_0 \ddot{\eta}_0 &= f m_0 m_1 \frac{\eta_1 - \eta_0}{\Delta_{01}^3}, & m_1 \ddot{\eta}_1 &= f m_1 m_0 \frac{\eta_0 - \eta_1}{\Delta_{10}^3}, \\ m_0 \ddot{\zeta}_0 &= f m_0 m_1 \frac{\zeta_1 - \zeta_0}{\Delta_{01}^3}, & m_1 \ddot{\zeta}_1 &= f m_1 m_0 \frac{\zeta_0 - \zeta_1}{\Delta_{10}^3}, \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

где

$$\Delta_{01} = \Delta_{10} = \sqrt{(\xi_1 - \xi_0)^2 + (\eta_1 - \eta_0)^2 + (\zeta_1 - \zeta_0)^2}.$$

Шесть уравнений (4.1) образуют систему двенадцатого порядка, для которой мы можем написать десять первых интегралов, получающихся из формул (2.10'), (2.10''), (2.12) и (2.13) при $n=1$.

При помощи этих десяти интегралов можно было бы понизить порядок системы (4.1) на десять единиц, а исключая

еще время, привести окончательно эту систему к одному дифференциальному уравнению первого порядка, разрешаемому квадратурой.

Однако сначала мы используем для понижения порядка системы (4.1) только шесть первых интегралов движения центра инерции системы двух точек и получим таким образом уравнения нашей задачи в относительных координатах.

Отнесем движения обеих материальных точек M_0 и M_1 к системе координат с началом в общем центре инерции G и с неизменными направлениями осей. Тогда уравнения относительного движения M_1 получатся из общих уравнений (2.21) и напишутся, как легко видеть, следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi}'_1 &= - \frac{f m_0^3}{(m_0 + m_1)^2} \frac{\xi'_1}{r_1'^3}, \\ \ddot{\eta}'_1 &= - \frac{f m_0^3}{(m_0 + m_1)^2} \frac{\eta'_1}{r_1'^3}, \\ \ddot{\zeta}'_1 &= - \frac{f m_0^3}{(m_0 + m_1)^2} \frac{\zeta'_1}{r_1'^3}, \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

где

$$r_1' = \sqrt{\xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2}$$

есть расстояние точки M_1 от начала координат, т. е. от общего центра инерции обеих точек.

Система (4.2) есть система шестого порядка, определяющая относительное движение точки M_1 . Как будет показано ниже, эту систему можно полностью проинтегрировать, т. е. получить координаты ξ'_1 , η'_1 , ζ'_1 точки M_1 как явные функции времени и шести произвольных постоянных интегрирования. После этого относительные координаты точки M_0 найдутся без всякого интегрирования.

Действительно, из формул (2.20'), или просто по свойствам центра инерции, мы имеем

$$m_0 \xi'_0 + m_1 \xi'_1 = 0, \quad m_0 \eta'_0 + m_1 \eta'_1 = 0, \quad m_0 \zeta'_0 + m_1 \zeta'_1 = 0,$$

откуда

$$\xi'_0 = - \frac{m_1}{m_0} \xi'_1, \quad \eta'_0 = - \frac{m_1}{m_0} \eta'_1, \quad \zeta'_0 = - \frac{m_1}{m_0} \zeta'_1.$$

Кроме того, отсюда следует, что координаты точки M_0 удовлетворяют уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi}'_0 &= -\frac{fm_1^3}{(m_0+m_1)^2} \frac{\xi'_0}{r_0'^3}, \\ \ddot{\eta}'_0 &= -\frac{fm_1^3}{(m_0+m_1)^2} \frac{\eta'_0}{r_0'^3}, \\ \ddot{\zeta}'_0 &= -\frac{fm_1^3}{(m_0+m_1)^2} \frac{\zeta'_0}{r_0'^3}, \end{aligned} \right\} \quad (4.2')$$

где

$$r_0' = \frac{m_1}{m_0} r_1' = \sqrt{\xi_0'^2 + \eta_0'^2 + \zeta_0'^2}.$$

Мы видим, что системы (4.2) и (4.2') имеют совершенно одинаковый вид, differing друг от друга только числовым множителем в правых частях этих уравнений.

Отсюда можно заключить, что движения точек M_0 и M_1 в одной и той же барицентрической системе координат обладают одинаковыми свойствами и совершенно подобны друг другу.

Уравнения (4.2) являются *точными уравнениями* задачи двух тел-точек, но в некоторых случаях эти уравнения можно также рассматривать как уравнения первого приближения общей задачи многих тел (рассматриваемых как материальные точки).

Действительно, вернемся опять к уравнениям (2.21), определяющим относительные движения n тел-точек в барицентрической системе координат.

Предположим, что массы тел-точек $M_1, M_2, \dots, M_n$, как это часто бывает в реальных астрономических задачах, весьма малы по сравнению с массой тела M_0 *).

Допустим, кроме того, что взаимные расстояния Δ_{ij} никогда не делаются слишком малыми. Тогда все члены в правых частях уравнений (2.21), кроме членов, имеющих множителем сумму масс $m_0 + m_i$, будут весьма малы, что

*) Таков, например, случай солнечной системы. Если за тело M_0 принять Солнце, то масса m_0 будет весьма велика по сравнению с массами даже больших планет.

дает основание пренебречь этими членами и получить таким образом уравнения, мало отличающиеся от точных уравнений рассматриваемой задачи.

Мы получим вместо точных уравнений (2.21) приближенные уравнения, которые напишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi}'_i &= - \frac{fm_0^3}{(m_0 + m_i)^2} \frac{\xi'_i}{r_i'^3}, \\ \ddot{\eta}'_i &= - \frac{fm_0^3}{(m_0 + m_i)^2} \frac{\eta'_i}{r_i'^3}, \\ \ddot{\zeta}'_i &= - \frac{fm_0^3}{(m_0 + m_i)^2} \frac{\zeta'_i}{r_i'^3} \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n),$$

где величины

$$r'_i = \sqrt{\xi_i'^2 + \eta_i'^2 + \zeta_i'^2} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

так же, как и выше, обозначают расстояния точек M_i от их общего центра инерции G .

Так как правые части уравнений (4.3) зависят от координат только одной точки M_i , то система (4.3) состоит из n отдельных независимых систем, каждая из которых описывает в первом приближении движение только одной из точек M_i в барицентрической системе координат.

Очевидно, эти уравнения первого приближения (4.3) имеют совершенно такой же вид, как и точные уравнения (4.2) задачи двух тел (точек!).

Поэтому и для решения точной задачи двух тел и для решения приближенной задачи многих тел нужно интегрировать одну и ту же систему дифференциальных уравнений.

Мы не будем сейчас касаться вопроса о том, насколько близко будет решение приближенных уравнений (4.3) к решению точных уравнений (2.21) задачи многих тел-точек.

С теоретической точки зрения этот вопрос не разрешен еще и в настоящее время из-за значительных математических затруднений, а как решается этот вопрос практически для случая задачи о движении больших планет в солнечной системе, мы будем говорить далее.

2. Уравнения невозмущенного движения в прямоугольных координатах. Рассмотрим теперь уравнения (2.23), определяющие движения тел-точек $M_1, \dots, M_n$ относительно точки M_0 .

В простейшем случае, когда $n = 1$, мы получим уравнения движения точки M_1 относительно точки M_0 в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + f(m_0 + m_1) \frac{x_1}{r_1^3} &= 0, \\ \ddot{y}_1 + f(m_0 + m_1) \frac{y_1}{r_1^3} &= 0, \\ \ddot{z}_1 + f(m_0 + m_1) \frac{z_1}{r_1^3} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

где

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

есть расстояние точки M_1 от точки M_0 , которое называется также радиусом-вектором движущейся точки.

Если $n \neq 1$, но все массы $m_1, m_2, \dots, m_n$ весьма малы по сравнению с массой m_0 , то, пренебрегая в первом приближении всеми членами в правых частях равенств (2.23), как содержащими в качестве множителей малые массы, мы получим следующую систему уравнений первого приближения:

$$\left. \begin{aligned} x_i + f(m_0 + m_i) \frac{x_i}{r_i^3} &= 0, \\ \ddot{y}_i + f(m_0 + m_i) \frac{y_i}{r_i^3} &= 0, \\ \ddot{z}_i + f(m_0 + m_i) \frac{z_i}{r_i^3} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.4')$$

где

$$r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

суть радиусы-векторы движущихся точек.

Очевидно, что система (4.4') распадается на n независимых систем, каждая из которых определяет движение одной

из точек M_i относительно точки M_0 так, как если бы все остальные точки не существовали.

По этой причине, в астрономических задачах, уравнения (4.4') называются *дифференциальными уравнениями невозмущенного движения*, а тогда точные уравнения относительного движения (2.23) в задаче многих тел называются соответственно *дифференциальными уравнениями возмущенного движения*.

Мы видим, что уравнения (4.4) и (4.4') имеют в точности такую же форму, как и уравнения (4.2) или (4.3), отличаясь друг от друга только значением постоянного множителя, зависящего от масс.

Таким образом, мы опять приходим к той же самой математической задаче, рассмотренной ранее.

К такой же форме уравнений мы придем, исходя из уравнений относительного движения в координатах Якоби.

Возьмем, например, уравнения относительного движения задачи трех тел-точек, получающиеся из уравнений (2.34), приведенных на стр. 123*).

Предполагая по-прежнему, что масса m_0 велика по сравнению с массами m_1 и m_2 , пренебрежем в правых частях упомянутых уравнений всеми членами, содержащими множителем m_1 или m_2 . Точно также, в выражении для Δ_{02} пренебрежем членами, содержащими множителем массу m_1 . В результате мы получим следующие уравнения первого приближения рассматриваемой задачи:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}'_1 &= -f(m_0 + m_1) \frac{x'_1}{r'^3_1}, \\ \ddot{y}'_1 &= -f(m_0 + m_1) \frac{y'_1}{r'^3_1}, \\ \ddot{z}'_1 &= -f(m_0 + m_1) \frac{z'_1}{r'^3_1}, \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

*) Ясно, что для задачи двух тел координаты Якоби совпадают с обычными относительными координатами и уравнения движения будут в точности такие же, как и уравнения (4.4):

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}'_2 &= - \frac{f(m_0 + m_1 + m_2)m_0}{m_0 + m_1} \frac{x'_2}{r_2'^3}, \\ \ddot{y}'_2 &= - \frac{f(m_0 + m_1 + m_2)m_0}{m_0 + m_1} \frac{y'_2}{r_2'^3}, \\ \ddot{z}'_2 &= - \frac{f(m_0 + m_1 + m_2)m_0}{m_0 + m_1} \frac{z'_2}{r_2'^3}, \end{aligned} \right\} \quad (4.5')$$

где

$$r'_1 = \sqrt{x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2}$$

и

$$r'_2 = \sqrt{x_2'^2 + y_2'^2 + z_2'^2}.$$

Уравнения (4.5) определяют движение точки M_1 относительно точки M_0 так, как будто бы третьей точки вовсе и не было.

Уравнения (4.5') определяют движение третьей точки M_2 относительно центра инерции точек M_0 и M_1 .

Очевидно, что уравнения (4.5) и (4.5') имеют такую же форму, как и все выше рассмотренные уравнения либо в задаче двух тел, либо в первом приближении к задаче многих тел.

Итак, все задачи, нами здесь рассмотренные, приводят к одной и той же математической задаче, которая заключается в интегрировании системы трех дифференциальных уравнений второго порядка, которую в общем виде мы будем записывать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= - \frac{\mu x}{r^3}, \\ \ddot{y} &= - \frac{\mu y}{r^3}, \\ \ddot{z} &= - \frac{\mu z}{r^3}, \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

где μ есть некоторая постоянная, зависящая от масс точек, а

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

есть расстояние движущейся точки M от начала координат.

В рассмотрении и интегрировании системы уравнений (4.6) и заключается *теория невозмущенного кеплеровского движения*.

3. Уравнения невозмущенного движения в полярных координатах. В уравнениях невозмущенного движения (4.6) неизвестными функциями являются прямоугольные декартовские координаты движущейся точки M .

Иногда оказывается более удобным и выгодным вместо прямоугольных координат рассматривать какие-либо другие, например, цилиндрические или сферические координаты.

Соответствующие дифференциальные уравнения легко получить из уравнений (4.6) посредством преобразования координат или вывести их из общих уравнений задачи многих тел в криволинейных координатах, приведенных в главе второй.

Уравнения задачи в цилиндрических координатах напишутся в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\rho} - \rho \dot{\lambda}^2 &= -\frac{\mu \rho}{r^3}, \\ \frac{d}{dt}(\rho^2 \dot{\lambda}) &= 0, \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu z}{r^3}, \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

где ρ есть проекция радиуса-вектора r на плоскость xu , λ есть угол, образуемый этой проекцией с положительным направлением оси абсцисс, а аппликата z , как обычно, есть расстояние точки M от плоскости xu . Цилиндрические координаты связаны с прямоугольными известными формулами

$$x = \rho \cos \lambda, \quad y = \rho \sin \lambda$$

и

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}.$$

Преобразуя теперь уравнения (4.6) к сферическим координатам посредством формул

$$x = r \cos \varphi \cos \lambda, \quad y = r \cos \varphi \sin \lambda, \quad z = r \sin \varphi,$$

мы получим уравнения нашей задачи в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r\dot{\lambda}^2 \cos^2 \varphi &= -\frac{\mu}{r^2}, \\ \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) + r^2\dot{\lambda} \sin \varphi \cos \varphi &= 0, \\ \frac{d}{dt}(r^2\dot{\lambda} \cos^2 \varphi) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

где λ имеет то же значение как и в цилиндрических координатах, а φ есть угол, образуемый радиусом-вектором r с плоскостью xu .

В астрономии угол λ называется обычно долготой, а угол φ — широтой.

Очень простой вид принимают уравнения невозмущенного кеплеровского движения в переменных Клеро — Лапласа. Эти уравнения можно вывести из общих уравнений Клеро — Лапласа (2.46), либо получить непосредственно из уравнений (4.7), полагая

$$u = \frac{1}{\rho}, \quad s = \frac{z}{\rho}$$

и принимая за независимую переменную долготу λ вместо времени.

Действительно, второе из уравнений (4.7) дает

$$\rho^2 \dot{\lambda} = \bar{c} = \text{const}, \quad (4.9)$$

с помощью чего находим *)

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} &= -\bar{c}^2 u^2 u'', \\ \ddot{z} &= \bar{c}^2 u^2 (us'' - su''), \end{aligned}$$

и уравнения (4.7) приводятся к виду

$$\left. \begin{aligned} u'' + u &= \frac{\mu}{\bar{c}^2} (1 + s^2)^{-3/2}, \\ s'' + s &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.9')$$

образуя систему двух уравнений с двумя неизвестными функциями u и s , после интегрирования которой из уравнения (4.9) определим квадратурой и время t в зависимости от λ .

*) Здесь дифференцирования по переменной λ обозначены штрихами.

4. Каноническая форма уравнений невозмущенного движения. Наконец, уравнения невозмущенного движения можно записать и в канонической форме, что позволит применить для интегрирования этих уравнений метод Гамильтона — Якоби.

Действительно, уравнения (4.6) можно переписать в виде

$$\ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (4.10)$$

где

$$U = \frac{\mu}{r}. \quad (4.11)$$

Принимая теперь за обобщенные координаты величины x, y, z , а за импульсы — производные $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, мы представим систему (4.6) в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \dot{x}}, & \frac{d\dot{x}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \dot{y}}, & \frac{d\dot{y}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y}, \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \dot{z}}, & \frac{d\dot{z}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

где характеристическая функция определяется формулой

$$H = T - U = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{\mu}{r}. \quad (4.11')$$

Если мы желаем воспользоваться сферическими координатами, r, φ, λ , то прежде выразим в этих координатах живую силу, что даст

$$T = \frac{1}{2}(r^2\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\lambda}^2 + r^2\cos^2\varphi\dot{\lambda}^2). \quad (4.13)$$

Вводя теперь обобщенные импульсы обычными формулами

$$\begin{aligned} R &= \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = \dot{r}, \\ \Phi &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = r^2\dot{\varphi}, \\ \Lambda &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}} = r^2\cos^2\varphi\dot{\lambda}, \end{aligned} \quad (4.13')$$

мы получим уравнения невозмущенного движения в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial R}, & \frac{dR}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial r}, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \Phi}, & \frac{d\Phi}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi}, \\ \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \Lambda}, & \frac{d\Lambda}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \lambda}, \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

где

$$H = \frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{\Phi^2}{r^2} + \frac{\Lambda^2}{r^2 \cos^2 \varphi} \right) - \frac{\mu}{r} \quad (4.18'')$$

есть функция Гамильтона, выраженная в новых канонических переменных.

Примечание. Мы получили уравнения невозмущенного кеплеровского движения, рассматривая либо задачу двух тел (т. е. задачу о движении системы двух взаимно притягивающихся материальных точек), либо первое приближение общей задачи многих тел (т. е. задачи о движении системы любого числа материальных точек, взаимно притягивающихся по закону Ньютона и не подверженных никаким другим силам).

Однако те же уравнения невозмущенного движения можно получить, рассматривая первое приближение и в более общей задаче.

Действительно, пусть, например, поставлена задача о движении одной материальной точки, находящейся под действием некоторых заданных сил.

Обозначая проекции полного ускорения точки на некоторые неподвижные оси координат через X^* , Y^* , Z^* , мы будем иметь уравнения движения точки в следующем виде:

$$\ddot{x} = X^*, \quad \ddot{y} = Y^*, \quad \ddot{z} = Z^*. \quad (4.15)$$

Правые части этих уравнений надлежит рассматривать как заданные функции времени t , координат движущейся точки x , y , z и составляющих ее скорости $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$.

Уравнения (4.15) вообще не интегрируются ни в известных функциях, ни в квадратурах от известных функций, а поэтому для решения задачи мы должны большей частью встать на путь ее приближенного решения.

Допустим, что функции X^* , Y^* , Z^* можно представить в виде

$$X^* = X_0 + X, \quad Y^* = Y_0 + Y, \quad Z^* = Z_0 + Z,$$

так что уравнения

$$\ddot{x} = X_0, \quad \ddot{y} = Y_0, \quad \ddot{z} = Z_0 \quad (4.15')$$

оказываются полностью интегрируемыми.

Тогда, производя это интегрирование, мы получаем некоторое первое приближение нашей задачи, которое может оказаться близким к точному решению уравнений (4.15).

Поэтому и уравнения (4.15') называются обычно в механике *уравнениями первого приближения*, а в астрономии эти уравнения называются *уравнениями невозмущенного движения*, тогда как точные уравнения (4.15) называются *уравнениями возмущенного движения*.

Характер невозмущенного движения зависит, конечно, от выбора величин X_0 , Y_0 , Z_0 , которые подчинены единственному условию, а именно должны быть такими, чтобы уравнения (4.15') можно было проинтегрировать.

Если величины X_0 , Y_0 , Z_0 можно определить формулами

$$X_0 = -\frac{\mu x}{r^3}, \quad Y_0 = -\frac{\mu y}{r^3}, \quad Z_0 = -\frac{\mu z}{r^3},$$

где μ есть некоторая постоянная, а

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

есть радиус-вектор движущейся точки, то уравнения (4.15') делаются тождественными уравнениям (4.6), которые мы назвали *уравнениями невозмущенного кеплеровского движения*, так как далее будет показано, что движение, определяемое этими уравнениями, подчиняется законам Кеплера.

Но из сказанного следует, что, вообще говоря, невозмущенное движение не будет подчиняться законам Кеплера, а потому и не может называться *кеплеровским*.

§ 2. Первые интегралы уравнений невозмущенного кеплеровского движения

1. Интегралы площадей живой силы и интегралы Лапласа. Переходим к задаче об интегрировании дифференциальных уравнений невозмущенного движения.

Рассмотрим сначала уравнения движения (4.6) в прямоугольных декартовых координатах:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{\mu x}{r^3}, \\ \ddot{y} &= -\frac{\mu y}{r^3}, \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu z}{r^3}. \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

Здесь μ есть некоторая постоянная, а r — радиус-вектор движущейся точки, так что

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Система (4.16) представляет собой систему трех дифференциальных уравнений второго порядка, которую можно записать также в виде системы уравнений первого порядка:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \dot{x}, & \frac{d\dot{x}}{dt} &= -\frac{\mu x}{r^3}, \\ \frac{dy}{dt} &= \dot{y}, & \frac{d\dot{y}}{dt} &= -\frac{\mu y}{r^3}, \\ \frac{dz}{dt} &= \dot{z}, & \frac{d\dot{z}}{dt} &= -\frac{\mu z}{r^3}. \end{aligned} \right\} \quad (4.16')$$

Таким образом, система уравнений невозмущенного кеплеровского движения представляет собой систему 6-го порядка, а поэтому *общий интеграл* этой системы есть совокупность шести независимых между собою *первых интегралов*, к нахождению которых и сводится задача об интегрировании системы (4.16).

Так как уравнения (4.16) можно рассматривать как частный случай уравнений относительного движения задачи многих тел, то четыре из шести первых интегралов можно было бы написать сразу.

Однако мы предпочитаем из методических соображений вывести все интегралы уравнений (4.16) непосредственно.

Выведем сначала *интегралы площадей* или *моментов количества движения*.

Помножим для этого второе из уравнений (4.16) на $-z$, третье на $+y$ и сложим оба уравнения. Затем помножим

первое из уравнений (4.16) на $+z$, третье на $-x$ и также сложим их. Наконец, помножим второе из уравнений (4.16) на $+x$, первое на $-y$ и опять сложим. В результате мы получим следующие три уравнения, являющиеся непосредственным следствием уравнений движения (4.16):

$$\begin{aligned} y\ddot{z} - z\ddot{y} &= \frac{d}{dt} (y\dot{z} - z\dot{y}) = 0, \\ z\ddot{x} - x\ddot{z} &= \frac{d}{dt} (z\dot{x} - x\dot{z}) = 0, \\ x\ddot{y} - y\ddot{x} &= \frac{d}{dt} (x\dot{y} - y\dot{x}) = 0. \end{aligned}$$

Интегрируя эти уравнения и обозначая через c_1, c_2, c_3 три произвольные постоянные, мы получим следующие три первые интеграла уравнений (4.16):

$$\left. \begin{aligned} y\dot{z} - z\dot{y} &= c_1, \\ z\dot{x} - x\dot{z} &= c_2, \\ x\dot{y} - y\dot{x} &= c_3. \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

Уравнения (4.17) и называются интегралами площадей, или интегралами моментов количества движения. Произвольные постоянные c_1, c_2, c_3 называются обычно *постоянными площадей*.

Переходим к выводу *интеграла живой силы*, или *интеграла энергии*. Помножим уравнения (4.16) соответственно на $2\dot{x}$, $2\dot{y}$, $2\dot{z}$ и сложим. Мы получим следующее уравнение, также являющееся следствием уравнений движения:

$$2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y} + 2\dot{z}\ddot{z} = -\frac{2\mu}{r^3} (x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}).$$

Но, дифференцируя равенство $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, мы имеем

$$x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = r\dot{r},$$

вследствие чего предыдущее уравнение примет вид

$$\frac{d}{dt} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = -\frac{2\mu}{r^2} \dot{r} = \frac{d}{dt} \left(\frac{2\mu}{r} \right).$$

Обе части последнего равенства являются точными производными по t , поэтому, интегрируя, найдем

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \frac{2\mu}{r} + h. \quad (4.18)$$

Произвольная постоянная h называется *постоянной живой силы* или *постоянной энергии*.

Обозначим через V скорость движущейся точки. Тогда

$$V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2,$$

и уравнение (4.18) может быть написано в таком виде:

$$V^2 = \frac{2\mu}{r} + h. \quad (4.18')$$

Интегралы (4.17) и (4.18) являются частными случаями интегралов задачи многих тел, рассмотренных в предыдущих главах. Но уравнения (4.16) имеют еще другие интегралы, которые мы ранее не встречали и которые существуют только в задаче о невозмущенном кеплеровском движении. Эти интегралы, к выводу которых мы сейчас перейдем, впервые были получены Лапласом и называются по этой причине *интегралами Лапласа*.

Выведем предварительно некоторое вспомогательное соотношение между радиусом-вектором и его производными.

Положим для этого

$$r' = r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} \quad (4.19)$$

(r' есть скалярное произведение векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{V}$). Дифференцируя теперь равенство (4.19), получим

$$\dot{r}' = x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2.$$

Подставляя сюда вместо вторых производных их значения из уравнений (4.16) и вместо квадрата скорости — его выражение из формулы (4.18), мы найдем

$$\dot{r}' = \frac{\mu}{r} + h. \quad (4.19')$$

Дифференцируя полученное равенство, получим нужное нам соотношение

$$\ddot{r}' = -\frac{\mu r'}{r^3}. \quad (4.19'')$$

Это уравнение имеет такой же вид, как и каждое из уравнений (4.16). Поэтому, комбинируя это уравнение с каждым из уравнений (4.16), мы получим соотношения, имеющие такую же форму, как и интегралы площадей.

Действительно, умножая первое из уравнений (4.16) на $-r'$, уравнение (4.19'') на $+x$ и складывая оба получившиеся равенства, мы имеем

$$x\ddot{r}' - r'\ddot{x} \equiv \frac{d}{dt}(xr' - r'\dot{x}) = 0,$$

и аналогично

$$y\ddot{r}' - r'\ddot{y} \equiv \frac{d}{dt}(yr' - r'\dot{y}) = 0,$$

$$z\ddot{r}' - r'\ddot{z} \equiv \frac{d}{dt}(zr' - r'\dot{z}) = 0.$$

Интегрируя последние три уравнения и обозначая через f_1, f_2, f_3 три произвольные постоянные, мы получим следующие три соотношения:

$$\left. \begin{aligned} xr' - r'\dot{x} &= f_1, \\ yr' - r'\dot{y} &= f_2, \\ zr' - r'\dot{z} &= f_3. \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

Эти уравнения и называются интегралами Лапласа.

Интегралы Лапласа можно представить еще в другой форме, делая левые их части явными функциями от координат и составляющих скорости движущейся точки.

Исключим для этого h из равенства (4.19') и из интеграла живой силы (4.18') и напишем результат исключения в виде

$$\dot{r}' = -\frac{\mu}{r} + V^2.$$

Подставляя теперь в уравнения (4.20) вместо $\dot{r}'$ полученное его выражение и вместо r' величину $r\dot{r}'$, мы получим интегралы Лапласа в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} xV^2 - \frac{\mu x}{r} - r\dot{r}'\dot{x} &= f_1, \\ yV^2 - \frac{\mu y}{r} - r\dot{r}'\dot{y} &= f_2, \\ zV^2 - \frac{\mu z}{r} - r\dot{r}'\dot{z} &= f_3. \end{aligned} \right\} \quad (4.20')$$

Наконец, заменяя здесь V^2 и $r\dot{r}$ их выражениями, мы можем написать найденные интегралы еще в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\mu x}{r} + \dot{y}(x\dot{y} - y\dot{x}) - \dot{z}(z\dot{x} - x\dot{z}) &= f_1, \\ -\frac{\mu y}{r} + \dot{z}(y\dot{z} - z\dot{y}) - \dot{x}(x\dot{y} - y\dot{x}) &= f_2, \\ -\frac{\mu z}{r} + \dot{x}(z\dot{x} - x\dot{z}) - \dot{y}(y\dot{z} - z\dot{y}) &= f_3. \end{aligned} \right\} \quad (4.20'')$$

2. Общий интеграл уравнений невозмущенного движения. Итак, мы нашли семь первых интегралов уравнений невозмущенного движения — три интеграла площадей, интеграл живой силы и три интеграла Лапласа, т. е. как будто больше, чем нужно, так как общий интеграл системы должен состоять из шести независимых первых интегралов.

Однако найденные семь интегралов не могут составить общего интеграла системы (4.16), во-первых, по той причине, что ни один из этих интегралов не содержит времени явно, а во-вторых, потому, что эти семь интегралов не являются независимыми.

Действительно, мы сейчас покажем, что между найденными семью интегралами существуют два тождественных соотношения. Помножим для этого левые части интегралов площадей (4.17) соответственно на левые части интегралов (4.20) и результаты сложим. Мы получим

$$\begin{aligned} (y\dot{z} - z\dot{y})(x\dot{r}' - r'\dot{x}) + (z\dot{x} - x\dot{z})(y\dot{r}' - r'\dot{y}) + \\ + (x\dot{y} - y\dot{x})(z\dot{r}' - r'\dot{z}) = c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3, \end{aligned}$$

что можно написать также следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{r}' [x(y\dot{z} - z\dot{y}) + y(z\dot{x} - x\dot{z}) + z(x\dot{y} - y\dot{x})] + \\ + r' [\dot{x}(y\dot{z} - z\dot{y}) + \dot{y}(x\dot{z} - z\dot{x}) + \dot{z}(y\dot{x} - x\dot{y})] = \\ = c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3. \end{aligned}$$

Легко видеть, что каждая из квадратных скобок в левой части последнего равенства тождественно равна нулю,

а поэтому мы получаем следующее соотношение:

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 = 0, \quad (4.21)$$

которому можно придать простой геометрический смысл.

Действительно, c_1, c_2, c_3 суть проекции на оси координат вектора момента количества движения (точнее говоря — момента скорости) движущейся точки.

Величины f_1, f_2, f_3 можно также рассматривать как проекции некоторого вектора, который назовем *вектором Лапласа*. Тогда равенство (4.21) выражает условие перпендикулярности двух указанных векторов.

Выведем теперь второе соотношение между семью найденными первыми интегралами. Для этого возведем каждое из равенств (4.17) в квадрат и сложим три получившихся равенства, что даст соотношение

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = (y\dot{z} - z\dot{y})^2 + (z\dot{x} - x\dot{z})^2 + (x\dot{y} - y\dot{x})^2,$$

которое с помощью тождества Лагранжа *) может быть написано в виде

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - (x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z})^2,$$

откуда с помощью формул (4.18) и (4.19) имеем

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = r^2 \left(\frac{2\mu}{r} + h \right) - r'^2. \quad (4.22)$$

Далее из уравнений (4.20)

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = r^2 \dot{r}'^2 - 2r'^2 \dot{r}' + r'^2 V^2,$$

откуда с помощью формул (4.18') и (4.19') выводим

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = r^2 \left(\frac{\mu}{r} + h \right)^2 - hr'^2. \quad (4.22')$$

Исключая теперь из уравнений (4.22) и (4.22') величину r'^2 , мы получим после упрощений

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = \mu^2 + h(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2). \quad (4.23)$$

*) См. § 2 главы второй, где тождество Лагранжа приведено в общем виде. В нашем случае нужно положить $k=3$, $a_1=x$, $a_2=y$, $a_3=z$, $b_1=\dot{x}$, $b_2=\dot{y}$, $b_3=\dot{z}$.

Это и есть второе соотношение между семью первыми интегралами уравнений невозмущенного движения.

Из двух найденных соотношений мы можем выразить какие-нибудь две из семи постоянных

$$c_1, c_2, c_3, h, f_1, f_2, f_3 \quad (4.24)$$

в функции пяти остальных, которые остаются произвольными.

Это показывает, что из семи найденных нами интегралов уравнений (4.16) только пять являются независимыми, а поэтому эти семь интегралов не образуют общего интеграла системы (4.16).

Но последний недостающий интеграл может быть найден довольно легко простой квадратурой.

Действительно, из уравнений (4.17), (4.18) и (4.20), в силу соотношений (4.21) и (4.23), мы можем выразить какие-нибудь пять из величин:

$$x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$$

через шестую. Например, мы можем выразить величины $y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ через x и, разумеется, через произвольные постоянные (4.24). Выполнив это, мы получим соотношения вида *)

$$\left. \begin{aligned} y &= \varphi_1(x; h | c | f), \\ z &= \varphi_2(x; h | c | f), \\ \dot{x} &= \varphi_3(x; h | c | f), \\ \dot{y} &= \varphi_4(x; h | c | f), \\ \dot{z} &= \varphi_5(x; h | c | f). \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

Возьмем теперь какое-нибудь из уравнений

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad \frac{dz}{dt} = \dot{z},$$

например первое, и напомним его, используя (4.25), следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = \varphi_3(x; h | c | f).$$

*) Мы пишем здесь сокращения $\varphi(x; h | c | f)$ вместо $\varphi(x; h, c_1, c_2, c_3, f_1, f_2, f_3)$.

Это соотношение представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка с переменными x и t , которое интегрируется разделением переменных.

Выполняя это интегрирование, мы получим соотношение

$$\int \frac{dx}{\varphi_3(x; h | c | f)} = t + g,$$

где g обозначает произвольную постоянную интегрирования.

Из последнего уравнения принципиально возможно определить координату x как функцию независимой переменной t , так что мы можем написать

$$x = \gamma_1(t; h, c_1, c_2, c_3, f_1, f_2, f_3, g).$$

Подставляя теперь найденное выражение для x в формулы (4.25), мы определим также все остальные неизвестные, вследствие чего получим следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} x &= \gamma_1(t; h, g | c | f), \\ y &= \gamma_2(t; h, g | c | f), \\ z &= \gamma_3(t; h, g | c | f), \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \gamma_4(t; h, g | c | f), \\ \dot{y} &= \gamma_5(t; h, g | c | f), \\ \dot{z} &= \gamma_6(t; h, g | c | f). \end{aligned} \right\} \quad (4.26')$$

Эти уравнения представляют собой шесть соотношений между неизвестными функциями, временем и шестью произвольными постоянными *), а поэтому составляют *общий интеграл уравнений движения* (4.16).

Так как, кроме того, уравнения (4.26) и (4.26') дают явные выражения для неизвестных величин в зависимости от времени и надлежащего числа произвольных постоянных, то они представляют также *общее решение уравнений движения*.

*) Было показано, что из семи постоянных (4.24) только пять являются независимыми, а шестой постоянной является g .

При этом равенства (4.26) представляют параметрические уравнения траектории движущейся точки *). Они дают также возможность определить координаты точки для любого момента времени.

Формулы (4.26') определяют составляющие скорости движущейся точки для любого момента времени, а следовательно, величину и направление скорости. Действительно, величину скорости получаем по формуле

$$V = \sqrt{\dot{\chi}_4^2 + \dot{\chi}_5^2 + \dot{\chi}_6^2},$$

а направление скорости определится ее направляющими косинусами, которые соответственно равны

$$\frac{\dot{\chi}_4}{V}, \quad \frac{\dot{\chi}_5}{V}, \quad \frac{\dot{\chi}_6}{V}.$$

3. Определение произвольных постоянных по начальным условиям. Произвольные постоянные, входящие в формулы общего решения (4.26) и (4.26'), могут быть однозначно определены через начальные значения неизвестных функций (координат и проекций скорости), которые обычно являются данными задачи.

Выберем некоторый момент времени t_0 , который условимся считать *начальным моментом* **), и обозначим соответствующие этому моменту значения координат и составляющих скорости через

$$x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0. \quad (4.27)$$

Эти величины и называются *начальными значениями* или *начальными данными* рассматриваемой задачи и пред-

*) Например, это будет траектория планеты в ее относительном движении вокруг Солнца, или траектория искусственного спутника Земли в его движении вокруг Земли. Заметим, что сама кривая, по которой движется точка, в астрономии обыкновенно называется орбитой.

**) Начальный момент t_0 , называемый в астрономии также *начальной эпохой* (или просто *эпохой*), может быть выбран произвольно и подбирается обычно из различных практических соображений. Например, в задаче о движении искусственного спутника Земли за начальный момент принимают часто момент, в который перестает действовать реактивная сила.

ставляют шесть независимых чисел, которые могут быть заданы произвольно *).

По величинам (4.27) определим также начальное значение радиуса-вектора движущейся точки и величину ее начальной скорости при помощи формул

$$r_0 = +\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}, \quad V_0 = +\sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2}, \quad (4.27')$$

а также начальное значение скалярного произведения радиуса-вектора на скорость по формуле

$$r'_0 = x_0 \dot{x}_0 + y_0 \dot{y}_0 + z_0 \dot{z}_0. \quad (4.27'')$$

Теперь формулы (4.17) дают

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= y_0 \dot{z}_0 - z_0 \dot{y}_0, \\ c_2 &= z_0 \dot{x}_0 - x_0 \dot{z}_0, \\ c_3 &= x_0 \dot{y}_0 - y_0 \dot{x}_0. \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

Эти величины суть проекции вектора момента количества движения (точнее, момента скорости) на оси координат. Величина или модуль этого вектора найдется по формуле

$$c = +\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}, \quad (4.28')$$

а его направляющие косинусы будут соответственно равны

$$\frac{c_1}{c}, \quad \frac{c_2}{c}, \quad \frac{c_3}{c}. \quad (4.28'')$$

Далее из формулы (4.18') получаем

$$h = V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}, \quad (4.29)$$

т. е. величину полной энергии движущейся точки (которая остается постоянной во все время движения). Она может быть величиной положительной или отрицательной, или равной нулю.

*) В действительном движении начальные значения суть числа вещественные. Однако, вообще говоря, эти начальные значения могут быть какими угодно числами, даже комплексными.

Остается определить постоянные Лапласа. Сначала из формулы (4.19') найдем начальное значение величины $\dot{r}'$:

$$\dot{r}'_0 = \frac{\mu}{r_0} + h = V_0^2 - \frac{\mu}{r_0},$$

после чего формулы (4.20) дают

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= x_0 \dot{r}'_0 - r'_0 \dot{x}_0, \\ f_2 &= y_0 \dot{r}'_0 - r'_0 \dot{y}_0, \\ f_3 &= z_0 \dot{r}'_0 - r'_0 \dot{z}_0. \end{aligned} \right\} \quad (4.30)$$

Эти величины суть проекции вектора Лапласа на оси координат.

Обозначим величину, или модуль, вектора Лапласа через f . Тогда

$$f = + \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}, \quad (4.30')$$

а направляющие косинусы этого вектора получим из отношений

$$\frac{f_1}{f}, \quad \frac{f_2}{f}, \quad \frac{f_3}{f}. \quad (4.30'')$$

Постоянные Лапласа можно также вывести из формул (4.20') или (4.20''). Например, формулы (4.20'') дают

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= -\frac{\mu x_0}{r_0} + c_3 \dot{y}_0 - c_2 \dot{z}_0, \\ f_2 &= -\frac{\mu y_0}{r_0} + c_1 \dot{z}_0 - c_3 \dot{x}_0, \\ f_3 &= -\frac{\mu z_0}{r_0} + c_2 \dot{x}_0 - c_1 \dot{y}_0. \end{aligned} \right\} \quad (4.30''')$$

Для контроля вычисления произвольных постоянных (4.24) можно применить выведенные выше соотношения между семью первыми интегралами. Действительно, мы должны иметь

$$\left. \begin{aligned} c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 &= 0, \\ f^2 &= \mu^2 + hc^2. \end{aligned} \right\} \quad (4.31)$$

Как уже было отмечено, первое из этих соотношений есть условие перпендикулярности двух векторов или двух направлений с направляющими косинусами (4.28'') и (4.30'').

Второе из этих соотношений связывает модули векторов $\mathbf{f}$ и $\mathbf{c}$ с полной энергией движущейся точки.

Остается определить последнюю произвольную постоянную g . Положим для сокращения

$$\Phi_3(x; h | c | f) = \int \frac{dx}{\varphi_3(x; h | c | f)}.$$

Тогда шестой независимый первый интеграл напишется в виде

$$\Phi_3(x; h | c | f) = t + g,$$

откуда находим

$$g = -t_0 + \Phi_3(x_0; h | c | f). \quad (4.32)$$

Примечание 1. Если все начальные значения (4.27) суть числа действительные, то такими же будут и все произвольные постоянные $c_1, c_2, c_3, h, g, f_1, f_2, f_3$, каждая из которых может получиться положительной или отрицательной, или равной нулю. Может оказаться также, что все три постоянные площадей равны нулю или что равны нулю все три постоянные Лапласа. Однако второе из соотношений (4.31) показывает, что не могут быть одновременно равны нулю и постоянные площадей, и постоянные Лапласа. Точно также не могут быть одновременно равны нулю постоянные Лапласа и постоянная энергии.

Примечание 2. Подставляя найденные выражения для произвольных постоянных в формулы (4.26) и (4.26'), мы получим другое представление общего решения уравнений невозмущенного движения, в котором все неизвестные функции задачи (координаты и их первые производные по времени) выражаются через время и начальные значения этих функций.

Это решение может быть написано в виде

$$\left. \begin{aligned} x &= \tilde{\gamma}_1(t; t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ y &= \tilde{\gamma}_2(t; t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ z &= \tilde{\gamma}_3(t; t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \tilde{\gamma}_4(t; t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ \dot{y} &= \tilde{\gamma}_5(t; t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ \dot{z} &= \tilde{\gamma}_6(t; t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0). \end{aligned} \right\} \quad (4.33')$$

Полагая в этих равенствах $t = t_0$, мы получим, разумеется, тождества.

§ 3. Общие формулы невозмущенного движения

1. Общие уравнения невозмущенной орбиты. Описанный в предыдущем параграфе способ получения общего решения уравнений невозмущенного движения не является эффективным и представляет собой скорее конструктивное доказательство существования этого общего решения.

Действительно, чтобы получить формулы (4.25), нужно разрешить уравнения (4.17), (4.18) и (4.20) относительно каких-нибудь пяти из шести неизвестных функций.

Но эти уравнения являются уравнениями второй степени относительно всех шести неизвестных и содержат, кроме того, иррациональность, представляемую радиусом-вектором r .

Поэтому решение этих уравнений представляет собой весьма сложную алгебраическую задачу, вообще в буквенном виде не разрешимую, и это обстоятельство заставляет нас искать другую форму общего решения, которая была бы пригодна для практических приложений.

Для этого выведем прежде всего уравнения, содержащие только три координаты x , y , z движущейся точки и представляющие собой уравнения той пространственной кривой, которую описывает точка M во время своего движения.

Эти уравнения получаются как простые следствия найденных первых интегралов.

Рассмотрим сначала интегралы площадей (4.17). Умножая эти равенства соответственно на x , y , z и складывая, мы получим следующее уравнение, являющееся следствием первых интегралов, а поэтому справедливое для любого момента времени:

$$c_1x + c_2y + c_3z = 0. \quad (4.84)$$

Уравнение (4.84) есть уравнение плоскости, проходящей через начало координат; оно показывает, что движение точки M происходит в неизменной плоскости и что, следовательно, траектория точки есть плоская кривая.

Чтобы определить вид и расположение этой кривой, нужно иметь второе уравнение, содержащее координаты движущейся точки M .

Чтобы получить это второе уравнение, обратимся к интегралам Лапласа (4.20). Помножим эти уравнения соответственно на x , y , z и сложим. Мы получим следующее равенство, справедливое (как следствие первых интегралов) для любого момента времени:

$$(x^2 + y^2 + z^2) \dot{r}' - r'^2 = f_1 x + f_2 y + f_3 z.$$

Исключая отсюда $\dot{r}'$ и r'^2 с помощью формул (4.19') и (4.22), мы найдем следующее равенство:

$$\rho r = c^2 - f_1 x - f_2 y - f_3 z. \quad (4.35)$$

Это уравнение содержит только координаты точки M и представляет собой уравнение некоторой поверхности, на которой остается точка M во все время своего движения. Поэтому два уравнения, нами полученные, представляют собой общие уравнения кривой, по которой движется точка M . Эта кривая, как уже было замечено выше, называется *орбитой* движущейся точки, и ее геометрические свойства вполне определяются ее общими уравнениями.

Действительно, пространственная кривая, определяемая уравнениями

$$\left. \begin{aligned} c_1 x + c_2 y + c_3 z &= 0, \\ \rho r + f_1 x + f_2 y + f_3 z - c^2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.36)$$

есть линия пересечения плоскости (4.34) с поверхностью (4.35). Но уравнение (4.35) есть, очевидно, уравнение второй степени относительно координат x , y , z , и поэтому оно изображает поверхность второго порядка. Линия пересечения плоскости с поверхностью второго порядка есть кривая второго порядка, а, следовательно, *орбита точки M в ее невозмущенном движении есть какое-то коническое сечение, т. е. окружность, эллипс, парабола, гипербола или (в вырожденном случае) пара прямых, различных или сливающихся.*

Рассмотрим уравнение (4.35) более внимательно. Это равенство показывает, что радиус-вектор r текущей точки поверхности выражается рациональным образом через координаты этой точки. Так как радиус-вектор есть рас-

стояние точки от начала координат, то отсюда следует, что начало координат является одним из фокусов поверхности *).

Покажем теперь, что поверхность (4.35) есть поверхность вращения вокруг оси, проходящей через начало координат.

Действительно, рассмотрим прямую, определяемую уравнениями

$$\frac{x}{f_1} = \frac{y}{f_2} = \frac{z}{f_3} \quad (4.37)$$

и определяющую, следовательно, направление вектора Лапласа.

Вообразим семейство плоскостей, определяемое уравнением

$$f_1x + f_2y + f_3z - d = 0, \quad (4.37')$$

где d — любая постоянная (параметр семейства).

Очевидно, что всякая плоскость семейства (4.37') перпендикулярна прямой (4.37), которая в силу соотношения

$$c_1f_1 + c_2f_2 + c_3f_3 = 0$$

лежит в плоскости (4.34), т. е. в плоскости орбиты.

Из уравнений (4.35) и (4.37') находим

$$\mu r = c^2 - d = \text{const.}$$

Отсюда видно, что сечение поверхности (4.35) любой плоскостью из семейства (4.37') есть окружность, центр которой лежит на прямой (4.37). Следовательно, (4.35) есть действительно поверхность вращения вокруг оси (4.37). Один из фокусов этой поверхности лежит в начале координат.

Таким образом, поверхность (4.35) есть либо эллипсоид вращения, либо параболоид вращения, либо гиперболоид вращения (а в вырожденном случае — либо круглый конус, либо круглый цилиндр).

Так как плоскость орбиты (4.34) проходит через ось вращения поверхности (4.37), то орбита имеет те же фокусы

*) В аналитической геометрии фокусом поверхности или кривой линии называется такая точка пространства, расстояние которой от любой точки поверхности (соответственно линии) выражается рациональным образом через координаты этой точки.

и те же вершины, что и эта поверхность. Поэтому мы заключаем, что *невозмущенная орбита движущейся точки есть плоская кривая второго порядка, один из фокусов которой находится в начале координат (в центре силы притяжения) и главная, или фокальная, ось которой совпадает с направлением вектора Лапласа.*

Эта ось орбиты называется в астрономии *линией апсид*, точки пересечения которой с орбитой называются *апсидами*.

Апсиды совпадают с вершинами кривой второго порядка, которая представляет орбиту, и имеют собственные названия, различные в зависимости от того, что является центром силы.

В общем случае точка орбиты, ближайшая к центру силы, называется *перицентром*, а наиболее удаленная — *апоцентром*.

Если орбита есть парабола, то вторая ее вершина лежит в бесконечности, а поэтому для параболической орбиты апоцентр не рассматривается. Если орбита есть гипербола — кривая, состоящая из двух ветвей, — то движение может происходить, конечно, только по одной ее ветви, а именно по той, фокус которой находится в начале координат. Вторая вершина гиперболы лежит на другой ее ветви и по этой причине апоцентр для гиперболы также не рассматривается.

В конкретных задачах астрономии апсиды орбиты имеют свои собственные названия. Так, если рассматривается движение (невозмущенное) планеты или кометы вокруг Солнца, то перицентр называется *перигелием*, а апоцентр — *афелием*; если рассматривается движение Луны, или искусственного спутника вокруг Земли, то перицентр называется *перигеем*, а апоцентр — *апогеем*. Если рассматривается движение спутника (естественного или искусственного — безразлично) вокруг какой-нибудь из больших планет солнечной системы, то, в зависимости от названия планеты, перицентр называется *перимарсием*, *периювием*, *перисатурнием* и т. д., а апоцентр соответственно — *апомарсием*, *апоювием*, *апосатурнием* и т. д. Нам придется также рассматривать иногда и движение искусственного спутника вокруг Луны, а следовательно, нужно ввести в употребление и соответствующие названия для апсид орбиты, в фокусе которой находится Луна. Перицентр такой орбиты можно назвать

перилунием или *периселением*, а апоцентр — *аполунием* или *апоселением* *).

2. Выражение пространственных координат через орбитальные. Чтобы привести общие уравнения (4.36) к простейшему виду и получить возможность выразить каждую из координат x , y , z в зависимости от времени, заметим, что в силу уравнения плоскости орбиты (4.34) три текущие координаты связаны одним соотношением, а поэтому независимыми из них являются как минимум две.

Иначе можно сказать, что все три координаты могут быть выражены в функции каких-нибудь двух независимых параметров, которые можно выбирать различными способами и которые будем называть *координатами точки в плоскости орбиты* или *орбитальными координатами*.

Мы будем рассматривать здесь две системы орбитальных координат, а именно прямоугольную декартову систему и связанную с ней систему полярных координат.

Чтобы выбрать из бесчисленного множества систем орбитальных координат наиболее удобную, рассмотрим сначала новую систему пространственных координат $(O\xi\eta\zeta)$, которую определим следующим образом: за плоскость $\xi O\eta$ примем плоскость орбиты (4.34). Положительную ось $O\xi$ направим по оси орбиты, т. е. по прямой (4.37) в сторону ближайшей к началу координат вершины, т. е. к перигею. Положительную ось $O\zeta$ направим по перпендикуляру к плоскости орбиты, т. е. по прямой, определяемой уравнениями

$$\frac{x}{c_1} = \frac{y}{c_2} = \frac{z}{c_3}.$$

Наконец, ось $O\eta$ выберем таким образом, чтобы систему координат $(\xi\eta\zeta)$ можно было совместить надлежащим вращением с первоначальной системой (xyz) .

*) Перигеиум и апогеиум — по латинскому произношению имени Юпитера (Jove). Периселений и апоселений — по имени богини Луны в греческой мифологии (Селена). Когда будут посылаться космические корабли на Венеру, то придется рассматривать также их орбиты относительно этой планеты. Перигеиум и апогеиум такой орбиты придется назвать *перивенерием* и *аповенерием*.

Тогда направляющие косинусы новых осей относительно старых определяются следующей таблицей:

	ξ	η	ζ
x	$\frac{f_1}{f}$	$\frac{c_2 f_3 - c_3 f_2}{cf}$	$\frac{c_1}{c}$
y	$\frac{f_2}{f}$	$\frac{c_3 f_1 - c_1 f_3}{cf}$	$\frac{c_2}{c}$
z	$\frac{f_3}{f}$	$\frac{c_1 f_2 - c_2 f_1}{cf}$	$\frac{c_3}{c}$

Поэтому новые координаты выразятся через старые посредством формул:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{f_1}{f} x + \frac{f_2}{f} y + \frac{f_3}{f} z, \\ \eta &= \frac{c_2 f_3 - c_3 f_2}{cf} x + \frac{c_3 f_1 - c_1 f_3}{cf} y + \frac{c_1 f_2 - c_2 f_1}{cf} z, \\ \zeta &= \frac{c_1}{c} x + \frac{c_2}{c} y + \frac{c_3}{c} z. \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

Точно так же старые координаты выразятся через новые следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{f_1}{f} \xi + \frac{c_2 f_3 - c_3 f_2}{cf} \eta + \frac{c_1}{c} \zeta, \\ y &= \frac{f_2}{f} \xi + \frac{c_3 f_1 - c_1 f_3}{cf} \eta + \frac{c_2}{c} \zeta, \\ z &= \frac{f_3}{f} \xi + \frac{c_1 f_2 - c_2 f_1}{cf} \eta + \frac{c_3}{c} \zeta. \end{aligned} \right\} \quad (4.38')$$

Координаты ξ и η и примем за наиболее удобные орбитальные координаты точки M . В этой системе координат осью абсцисс является, следовательно, фокальная ось или линия апсид орбиты, а начало координат помещается в том фокусе кривой, который совпадает с центром силы.

В новых координатах общие уравнения орбиты (4.36) напишутся, очевидно, следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= 0, \\ \mu r &= c^2 - f\xi, \end{aligned} \right\} \quad (4.39)$$

где вследствие ортогональности преобразования координат и первого из уравнений (4.39) радиус-вектор r определяется формулой

$$r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

Очевидно, что плоскость движения, т. е. плоскость $\xi\eta$ является неизменяемой плоскостью (см. главу 2) для невозмущенного движения, так как эта плоскость по определению перпендикулярна прямой, на которой лежит главный вектор момента количества движения (здесь момента скорости).

Поэтому интегралы площадей в новых координатах будут иметь вид

$$\begin{aligned}\eta\dot{\xi} - \xi\dot{\eta} &= 0, \\ \xi\dot{\xi} - \xi\dot{\xi} &= 0, \\ \xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi} &= c.\end{aligned}$$

Но в новой системе координат $\xi = 0$ во все время движения и два первых из написанных уравнений удовлетворяются тождественно. Поэтому из трех интегралов площадей в орбитальной системе координат остается только один последний

$$\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi} = c, \quad (4.40)$$

который носит название *интеграла площадей в плоскости орбиты*.

Введем теперь наряду с прямоугольными орбитальными координатами ξ и η полярные орбитальные координаты r и ν формулами

$$\xi = r \cos \nu, \quad \eta = r \sin \nu, \quad (4.41)$$

где ν есть угол, образуемый радиусом-вектором движущейся точки с положительным направлением оси $O\xi$, т. е. с направлением на перицентр орбиты. Этот угол называется в астрономии *истинной аномалией* и отсчитывается от перицентра в положительном направлении (против часовой стрелки) от нуля до 360° или от нуля до бесконечности.

Вследствие формул (4.41) второе из уравнений (4.39), или уравнение орбиты в плоскости движения, напишется в полярных координатах следующим образом:

$$\mu r = c^2 - fr \cos \nu,$$

или

$$r = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + \frac{f}{\mu} \cos v}. \quad (4.42)$$

Это — полярное уравнение кривой второго порядка, причем полюс лежит в фокусе кривой и полярная ось направлена по фокальной оси кривой.

Обозначим, как обычно принято в аналитической геометрии, через p параметр кривой*) и через e — ее эксцентриситет. Тогда

$$p = \frac{c^2}{\mu}, \quad e = \frac{f}{\mu}, \quad (4.43)$$

и уравнение орбиты (4.42) приведет к хорошо знакомому виду

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}. \quad (4.42')$$

Это уравнение определяет радиус-вектор r как функцию истинной аномалии v . Подразумевая под r это его значение, мы получим по формулам (4.41) и орбитальные координаты ξ и η тоже как функции истинной аномалии, а тогда формулы (4.38') дадут также и пространственные координаты x , y , z в зависимости от той же истинной аномалии. Действительно, так как во все время движения $\zeta = 0$, то мы имеем из (4.38')

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{f_1}{f} \xi + \frac{c_2 f_3 - c_3 f_2}{cf} \eta, \\ y &= \frac{f_2}{f} \xi + \frac{c_3 f_1 - c_1 f_3}{cf} \eta, \\ z &= \frac{f_3}{f} \xi + \frac{c_1 f_2 - c_2 f_1}{cf} \eta. \end{aligned} \right\} \quad (4.44)$$

Таким образом, окончательное решение задачи приводится к нахождению истинной аномалии v как функции времени.

*) Параметр кривой второго порядка есть половина фокальной хорды кривой, перпендикулярной фокальной оси.

Подставим в уравнение (4.40) вместо ξ и η их выражения из формул преобразования (4.41).

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi} &= \dot{r} \cos v - r \dot{v} \sin v, \\ \dot{\eta} &= \dot{r} \sin v + r \dot{v} \cos v, \end{aligned} \right\} \quad (4.41')$$

и уравнение (4.40) приведет к виду

$$r^2 \dot{v} = c. \quad (4.40')$$

Это соотношение называется *интегралом площадей в плоскости орбиты в полярных координатах*.

Уравнение (4.40') устанавливает связь между v и t . Действительно, подставляя вместо r его выражение (4.42') из уравнения орбиты, мы напомним соотношение (4.40) в следующем виде:

$$\frac{p^2 dv}{(1 + e \cos v)^2} = c dt,$$

а это равенство легко проинтегрировать.

Обозначим через τ тот момент времени, когда движущаяся точка попадает в перигецентр, или, точнее, когда истинная аномалия v обращается в нуль. Тогда из последнего равенства интегрированием получаем:

$$c(t - \tau) = p^2 \int_0^v \frac{dv}{(1 + e \cos v)^2}. \quad (4.45)$$

Это равенство определяет t как функцию v , а разрешая уравнение (4.41) относительно v , мы найдем формулу вида

$$v = v(t - \tau), \quad (4.45')$$

откуда можно вычислить v для каждого значения t .

Определив v , мы найдем радиус-вектор r по формуле (4.42') и таким образом определим положение точки M на ее орбите в плоскости движения. Зная r и v , найдем орбитальные координаты ξ и η по формулам (4.41), после чего получим и пространственные координаты x , y , z по формулам (4.44).

Все найденные формулы, кроме формулы (4.45'), весьма просты и содержат только элементарные функции. Интеграл

в формуле (4.45) также вычисляется элементарно, но нахождение v в зависимости от времени в общем случае представляет задачу трансцендентную, которая в конечном виде не решается. Далее мы специально займемся этой задачей и покажем, что истинная аномалия представляется бесконечным рядом по крайней мере в наиболее часто встречающемся случае, когда орбита движущейся точки есть эллипс.

3. Скорость и ее составляющие. Чтобы получить полное решение задачи, нужно вывести еще выражения для производных $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, определяющих величину и направление скорости движущейся точки в каждый момент времени.

Прежде всего отметим, что формула (4.40') определяет *секториальную скорость* движущейся точки. Действительно, пусть dS есть элемент площади в полярных координатах, т. е. площадь бесконечно малого сектора, с вершиной в начале координат O и с углом раствора $d\vartheta$. Тогда

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\vartheta,$$

или, по формуле (4.40'),

$$\frac{dS}{dt} = \frac{c}{2}. \quad (4.46)$$

Таким образом, *секториальная скорость остается постоянной во все время движения*.

Теперь, из формулы (4.40') находим *угловую скорость* движущейся точки

$$\dot{\vartheta} = \frac{c}{r^2}, \quad (4.47)$$

которая уже не является постоянной величиной, как секториальная скорость, а изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния от центра притяжения.

Дифференцируя затем формулу (4.42') по времени и заменяя в полученном выражении $\dot{\vartheta}$ ее выражением (4.47), мы найдем величину $\dot{r}$, которая называется в астрономии *радиальной скоростью*:

$$\dot{r} = \frac{ce}{p} \sin \vartheta. \quad (4.47')$$

Зная $\dot{v}$ и $\dot{r}$, найдем по формулам (4.41') производные $\dot{\xi}$ и $\dot{\eta}$, т. е. составляющие скорости движущейся точки вдоль осей орбитальной системы координат.

После необходимых упрощений эти формулы примут вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi} &= -\frac{c}{p} \sin v, \\ \dot{\eta} &= \frac{c}{p} (e + \cos v). \end{aligned} \right\} \quad (4.48)$$

Если обозначить теперь, как принято в механике, через V_r и V_n проекции скорости V на радиус-вектор и на перпендикуляр к радиусу-вектору в плоскости орбиты, то мы будем иметь

$$\left. \begin{aligned} V_r = \dot{r} &= \frac{ce}{p} \sin v, \\ V_n = r\dot{v} &= \frac{c}{p} (1 + e \cos v). \end{aligned} \right\} \quad (4.48')$$

После этого из формул (4.48) или (4.48') получим величину скорости

$$\begin{aligned} V &= + \sqrt{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2} = + \sqrt{V_r^2 + V_n^2} = \\ &= + \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{v}^2} = + \frac{c}{p} \sqrt{1 + 2e \cos v + e^2}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Наконец, при помощи (4.48) из формул (4.44) найдем проекции скорости на оси пространственной системы координат

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{c}{p} \left[-\frac{f_1}{f} \sin v + \frac{c_2 f_3 - c_3 f_2}{cf} (e + \cos v) \right], \\ \dot{y} &= \frac{c}{p} \left[-\frac{f_2}{f} \sin v + \frac{c_3 f_1 - c_1 f_3}{cf} (e + \cos v) \right], \\ \dot{z} &= \frac{c}{p} \left[-\frac{f_3}{f} \sin v + \frac{c_1 f_2 - c_2 f_1}{cf} (e + \cos v) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4.50)$$

Из этих формул опять найдем

$$V = + \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = + \frac{c}{p} \sqrt{1 + 2e \cos v + e^2}.$$

Кроме того, величину скорости можно определить еще из интеграла живой силы (4.18'), что дает

$$V = + \sqrt{\frac{2\mu}{r} + h}. \quad (4.49')$$

Если из этой формулы исключить h при помощи соотношения $f^2 = \mu^2 + hc^2$ и использовать формулы (4.42') и (4.43), то получим опять выражение (4.49).

Заметим еще, что из уравнения плоскости орбиты (4.34) мы имеем соотношение

$$c_1 \dot{x} + c_2 \dot{y} + c_3 \dot{z} = 0,$$

которое показывает, что вектор скорости лежит в плоскости орбиты, что, впрочем, следует также из того, что орбита есть плоская кривая, а вектор скорости всегда направлен по касательной к траектории движения.

Общее решение задачи представляют формулы (4.44), (4.41), (4.42') и (4.50), дающие координаты x , y , z и их первые производные $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ как функции истинной аномалии ϑ и произвольных постоянных, за которые здесь можно принять: параметр орбиты p , эксцентриситет орбиты e и шесть направляющих косинусов осей $O\xi$ и $O\eta$ в системе (x, y, z) . Но шесть направляющих косинусов связаны тремя соотношениями (сумма квадратов направляющих косинусов каждой оси равна единице и сумма произведений направляющих косинусов обонх осей равна нулю), а поэтому независимыми из них являются только три. Таким образом, формулы (4.44) и (4.50) дают координаты и составляющие скорости как функции угла ϑ и пяти произвольных постоянных. Шестая произвольная постоянная входит через выражение ϑ как функции времени и, следовательно, общее решение содержит необходимое число произвольных постоянных.

4. Кеплеровские элементы невозмущенного движения. Вместо направляющих косинусов орбитальных осей в системе (x, y, z) можно ввести другие, более удобные и более употребительные в астрономии постоянные.

Для этого заметим, что направляющие косинусы определяют ориентацию системы координат $O\xi\eta\zeta$ относительно системы Ox, y, z . Но ориентация одной системы координат относительно другой может быть определена также тремя

эйлеровыми углами, которые являются независимыми между собой. Эти углы, в интересующем нас случае, имеют собственные названия и обозначения, издавна укоренившиеся в астрономии.

Рассмотрим линию пересечения плоскости $O\xi\eta$, т. е. плоскости орбиты, с основной плоскостью Oxy (рис. 4). Эта линия называется в астрономии *линией узлов*, а точки

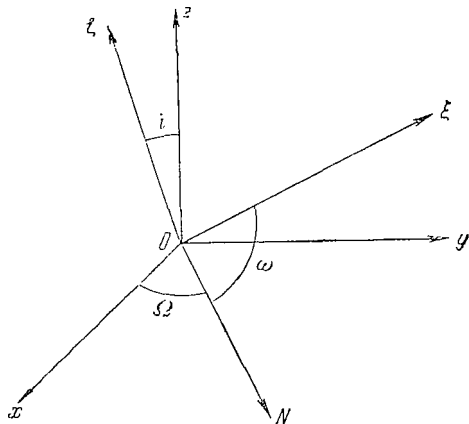


Рис. 4.

пересечения этой линии с орбитой называются *узлами орбиты*. Тот узел орбиты, который движущаяся точка проходит, переходя из области отрицательных аппликат в область положительных, называется *восходящим узлом*, а противоположный — *нисходящим узлом*. Угол прецессии триедра $O\xi\eta\zeta$ есть угол между направлением на восходящий узел и направлением положительной оси Ox . Этот угол называется в астрономии *долготой восходящего узла* (или просто *долготой узла*) и обозначается буквой Ω . Угол собственного вращения триедра $O\xi\eta\zeta$ есть угол между направлением на восходящий узел и направлением положительной оси $O\xi$ или угол между направлением на восходящий узел и направлением на перигецентр. Этот угол обозначается буквой ω и называется *угловым расстоянием перигецентра от узла*. Наконец, угол нутации триедра $O\xi\eta\zeta$ есть угол между положительными направлениями осей $O\xi$ и Oz . Этот угол равен

также углу, который плоскость орбиты образует с основной плоскостью Ox и называется поэтому наклонением или *наклонностью орбиты* и обозначается буквой i .

Эти три угла определяют положение плоскости орбиты в пространстве и положение линии апсид, т. е. расположение орбиты. Каждый из них измеряется обычным образом в радианах, или в градусах, минутах и секундах дуги.

Долгота восходящего узла Ω отсчитывается от оси Ox в сторону движения точки M от 0 до 360° . Угловое расстояние перигентра от восходящего узла отсчитывается также в плоскости орбиты в сторону движения точки M от 0 до 360° . Наконец, наклонность i изменяется от 0 до 180° . При этом если $0 < i < 90^\circ$, то движение точки M называется прямым, а если $90^\circ < i < 180^\circ$, то движение точки называется обратным. В подавляющем большинстве случаев движения небесных тел суть прямые движения, но имеются также некоторые случаи обратных движений.

Теперь формулы, совершенно подобные формулам (3.1) и написанные только в других обозначениях, дадут следующие выражения для направляющих косинусов осей триедра $O\xi\eta\zeta$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{c_1}{c} &= \sin i \sin \Omega, \\ \frac{c_2}{c} &= -\sin i \cos \Omega, \\ \frac{c_3}{c} &= \cos i; \end{aligned} \right\} \quad (4.51)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{f_1}{f} &= \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i, \\ \frac{f_2}{f} &= \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i, \\ \frac{f_3}{f} &= \sin \omega \sin i; \end{aligned} \right\} \quad (4.51')$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{c_2 f_3 - c_3 f_2}{cf} &= -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i, \\ \frac{c_3 f_1 - c_1 f_3}{cf} &= -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i, \\ \frac{c_1 f_2 - c_2 f_1}{cf} &= \cos \omega \sin i, \end{aligned} \right\} \quad (4.51'')$$

причем последние формулы (4.51'') можно вывести также, как нетрудно проверить, из формул (4.51) и (4.51').

Заменяя теперь в формулах (4.44) направляющие косинусы их выражениями (4.51') и (4.51''), а орбитальные координаты ξ и η их выражениями (4.41), мы получим для координат x , y , z еще следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} x &= r (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\ y &= r (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\ z &= r \sin u \sin i, \end{aligned} \right\} \quad (4.52)$$

где положено для сокращения

$$u = v + \omega. \quad (4.53)$$

Нетрудно видеть, что u есть угол, образуемый радиусом-вектором точки r с направлением на восходящий узел орбиты *). Этот угол называется *аргументом широты* и играет такую же роль, что и истинная аномалия v .

Ввиду (4.53) формулы (4.52) дают выражения для прямоугольных пространственных координат в зависимости от истинной аномалии v и пяти постоянных: Ω , i , ω , p и e . Шестая постоянная τ входит в уравнения посредством v .

Заметим, что выражение для v , определяемое из соотношения (4.45), содержит еще постоянные p и e **). В результате координаты x , y , z представляются формулами (4.52) как функции времени t и шести независимых произвольных постоянных

$$\Omega, i, \omega, p, e, \tau. \quad (4.54)$$

Эти постоянные называются *элементами кеплеровской орбиты*, *кеплеровскими элементами невозмущенной орбиты* ***) или просто *элементами орбиты*.

Элементы орбиты (4.54) можно разделить на три группы. К первой группе отнесем элементы

$$\Omega, i, \omega,$$

*) Хотя этот угол обозначен той же буквой u , которой обозначено обратное расстояние $1/p$ в § 1, путаницы не произойдет, если остерегаться употреблять оба обозначения одновременно.

**) Постоянная τ выражается через p .

***)) Ниже мы встретимся еще с другими видами элементов невозмущенной орбиты.

определяющие положение плоскости орбиты в пространстве и положение орбиты в ее плоскости. Во вторую группу включим элементы

$$p, e,$$

определяющие размеры орбиты и ее форму. Наконец, к третьей группе отнесем единственный элемент

$$\tau,$$

определяющий положение планеты на ее орбите в начальный момент *).

Элементы первой и второй групп — чисто геометрические величины, связанные с двумя основными векторами — вектором момента количества движения и вектором Лапласа. При этом элементы первой группы определяют направления векторов, а элементы второй группы связаны с их модулями.

Так как элемент третьей группы τ связан с движением по орбите или с динамикой движения, то он называется также иногда *динамическим элементом*.

Вместо τ можно взять какую-нибудь другую зависящую от него величину, например истинную аномалию v_0 в начальный момент, или, как говорят астрономы, *истинную аномалию эпохи*.

Дифференцируя теперь формулы (4.52) по времени t и заменяя в полученных выражениях $\dot{v}$ и $\dot{r}$ их значениями (4.47) и (4.47'), мы получим проекции скорости движущейся точки в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{c}{p} [e \sin v (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i) + \\ &\quad + (1 + e \cos v) (-\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i)], \\ \dot{y} &= \frac{c}{p} [e \sin v (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i) + \\ &\quad + (1 + e \cos v) (-\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i)], \\ \dot{z} &= \frac{c}{p} [e \sin v \sin u \sin i + (1 + e \cos v) \cos u \sin i], \end{aligned} \right\} \quad (4.55)$$

*) Положим в формуле (4.45) $t = t_0$ и обозначим начальное значение истинной аномалии v через v_0 . Тогда получим соотношение вида $v_0 = v(t_0 - \tau)$, связывающее две постоянные v_0 и τ .

т. е. как функции истинной аномалии v и пяти произвольных постоянных, а значит как функции времени и шести элементов орбиты (4.54)*).

Полученные формулы удобно также представить в несколько ином виде. Обозначим направляющие косинусы радиуса-вектора r через α , β , γ и направляющие косинусы прямой, перпендикулярной радиусу-вектору и лежащей в плоскости орбиты, через α' , β' , γ' ***). Тогда имеем

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{x}{r} = \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i, \\ \beta &= \frac{y}{r} = \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i, \\ \gamma &= \frac{z}{r} = \sin u \sin i; \end{aligned} \right\} \quad (4.56)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= \frac{da}{du} = -\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i, \\ \beta' &= \frac{d\beta}{du} = -\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i, \\ \gamma' &= \frac{d\gamma}{du} = \cos u \sin i, \end{aligned} \right\} \quad (4.56')$$

и общее решение уравнений невозмущенного движения представится в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} x &= \alpha r, & \dot{x} &= \frac{c}{p} [\alpha e \sin v + \alpha' (1 + e \cos v)], \\ y &= \beta r, & \dot{y} &= \frac{c}{p} [\beta e \sin v + \beta' (1 + e \cos v)], \\ z &= \gamma r, & \dot{z} &= \frac{c}{p} [\gamma e \sin v + \gamma' (1 + e \cos v)], \end{aligned} \right\} \quad (4.57)$$

где, согласно (4.45'), истинная аномалия v есть некоторая функция времени и элементов p , e и τ .

*) Формулы (4.55) нетрудно также вывести из формул (4.50), заменяя направляющие косинусы их выражениями (4.51') и (4.51'') и делая некоторые элементарные преобразования.

**) Чтобы получить второе направление, нужно повернуть радиус-вектор в плоскости орбиты по направлению возрастания угла v на 90° .

Примечание. Если в формулах (4.56) и (4.56') положить $t = \tau$, то $v = 0$ и формулы (4.56) дадут направляющие косинусы линии апсид, или оси $O\xi$, а формулы (4.56') дадут направляющие косинусы прямой, перпендикулярной линии апсид или оси $O\eta$. Обозначая эти направляющие косинусы теми же буквами, как и направляющие косинусы радиуса-вектора и перпендикуляра к нему, но со значком τ , мы можем написать следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_\tau &= \frac{f_1}{f} = \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i, \\ \beta_\tau &= \frac{f_2}{f} = \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i, \\ \gamma_\tau &= \frac{f_3}{f} = \sin \omega \sin i; \end{aligned} \right\} \quad (4.58)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha'_\tau &= \frac{c_2 f_3 - c_3 f_2}{cf} = -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i, \\ \beta'_\tau &= \frac{c_3 f_1 - c_1 f_3}{cf} = -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i, \\ \gamma'_\tau &= \frac{f_2 - c_2 f_1}{cf} = \cos \omega \sin i. \end{aligned} \right\} \quad (4.58')$$

С этими обозначениями общее решение уравнений невозмущенного движения представится следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} x &= \alpha_\tau \xi + \alpha'_\tau \eta, & \dot{x} &= \alpha_\tau \dot{\xi} + \alpha'_\tau \dot{\eta}, \\ y &= \beta_\tau \xi + \beta'_\tau \eta, & \dot{y} &= \beta_\tau \dot{\xi} + \beta'_\tau \dot{\eta}, \\ z &= \gamma_\tau \xi + \gamma'_\tau \eta, & \dot{z} &= \gamma_\tau \dot{\xi} + \gamma'_\tau \dot{\eta}, \end{aligned} \right\} \quad (4.59)$$

где ξ и η суть прямоугольные орбитальные координаты, а $\dot{\xi}$ и $\dot{\eta}$ — их первые производные по времени.

§ 4. Другие способы интегрирования дифференциальных уравнений невозмущенного движения

Мы вывели общее решение дифференциальных уравнений невозмущенного движения из общего интеграла системы (4.16), т. е. из совокупности независимых между собою первых интегралов, легко получающихся составлением интегрируемых комбинаций из уравнений движения.

Это же общее решение можно получить и многими другими способами. Некоторые из них полезно и поучительно здесь рассмотреть.

1. Задача о движении под действием центральной силы. Прежде всего мы рассмотрим более общую задачу о движении материальной точки под действием *центральной силы*. Частным случаем этой задачи является задача о невозмущенном кеплеровском движении.

Пусть материальная точка M находится под действием некоторой силы, направление которой постоянно проходит через неподвижную точку O — *центр силы*.

Возьмем центр силы за начало прямоугольной системы координат, с неизменными направлениями осей $\vec{Ox}$, $\vec{Oy}$, $\vec{Oz}$. Примем массу движущейся точки за единицу массы и обозначим через $1 \cdot G$ величину силы, действующей на эту точку. Тогда проекции ускорения, вызываемого действием этой силы, будут равны соответственно

$$X = \mp G \cdot \frac{x}{r}, \quad Y = \mp G \cdot \frac{y}{r}, \quad z = \mp G \cdot \frac{z}{r},$$

где знак минус относится к тому случаю, когда сила направлена к началу координат (центральная сила есть сила притяжения), а знак плюс соответствует случаю, когда сила направлена от начала координат (случай силы отталкивания).

Положим для упрощения

$$\mp G = F.$$

Тогда дифференциальные уравнения движения материальной точки под действием центральной силы напишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= F \frac{x}{r}, \\ \ddot{y} &= F \frac{y}{r}, \\ \ddot{z} &= F \frac{z}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (4.60)$$

Мы можем рассматривать F как величину силы, действующей на материальную точку единичной массы, считая

силу притяжения отрицательной, а силу отталкивания — положительной.

Уравнения задачи о невозмущенном движении получатся из уравнений (4.60), если положить

$$F = -\frac{\mu}{r^2}.$$

Таким образом, мы можем рассматривать уравнения (4.16) как уравнения движения материальной точки единичной массы, притягиваемой к неподвижному центру O с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния точки от центра силы.

В общем случае величина F может зависеть произвольным образом от расстояния r от центра силы, радиальной скорости $\dot{r}$ и времени t .

Если, в частном случае, сила F зависит только от радиуса-вектора r , то ее можно рассматривать как производную по r от некоторой функции U , называемой *силовой функцией* или *функцией сил*.

Действительно, положим

$$U(r) = \int F(r) dr.$$

Тогда

$$F(r) = \frac{dU}{dr},$$

и так как $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, то

$$F(r)\frac{x}{r} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F(r)\frac{y}{r} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F(r)\frac{z}{r} = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Поэтому в рассматриваемом случае уравнения движения можно написать также в виде

$$\ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (4.61)$$

Уравнения невозмущенного движения (4.16) получаются из уравнений (4.61) при

$$U = \frac{\mu}{r}.$$

Уравнения (4.60) при произвольной функции $U(r)$ не могут быть проинтегрированы до конца, хотя бы в квадратурах.

но задачу интегрирования можно значительно упростить, используя существующие здесь первые интегралы.

Действительно, какова бы ни была величина F , уравнения (4.60) всегда имеют три интеграла, аналогичные интегралам площадей уравнений невозмущенного движения.

В самом деле, помножим второе из уравнений (4.60) на $-z$, третье на $+y$ и сложим их, что даст

$$y\ddot{z} - z\ddot{y} = 0,$$

откуда интегрированием получим

$$\left. \begin{aligned} y\dot{z} - z\dot{y} &= c_1, \\ z\dot{x} - x\dot{z} &= c_2, \\ x\dot{y} - y\dot{x} &= c_3 \end{aligned} \right\} \quad (4.62)$$

(два последних равенства написаны по очевидной аналогии).

Уравнения (4.62), которые мы будем называть *интегралами площадей*, показывают, что движение под действием любой центральной силы происходит в неизменной плоскости, проходящей через начало координат (центр силы). Действительно, помножая уравнения (4.62) соответственно на x , y , z и складывая, мы получим

$$c_1x + c_2y + c_3z = 0, \quad (4.63)$$

т. е. уравнение плоскости, проходящей через начало.

В силу уравнения (4.63) координаты x , y , z можно выразить через какие-нибудь две независимые переменные, которые будем называть *орбитальными координатами*. Примем за эти две независимые переменные радиус-вектор r движущейся точки и угол ϖ , образованный радиусом-вектором с линией пересечения плоскости движения с плоскостью xOy (линия узлов). Тогда чисто геометрическим путем нетрудно получить формулы, выражающие три пространственные координаты через две орбитальные.

Вообразим сферу произвольного радиуса с центром в начале координат и обозначим буквами x , y , z , P точки пересечения координатных осей и радиуса-вектора точки M с этой сферой (рис. 5). Далее обозначим через N точку пересечения линии узлов с этой же сферой (восходящий узел!). Проводя через отмеченные на сфере точки дуги больших

кругов, получим ряд сферических треугольников. Рассмотрим, например, треугольник (xNP) . В этом треугольнике сторона $\widehat{xP}$ измеряет угол между радиусом-вектором и положительным направлением оси абсцисс, косинус которого есть x/r .

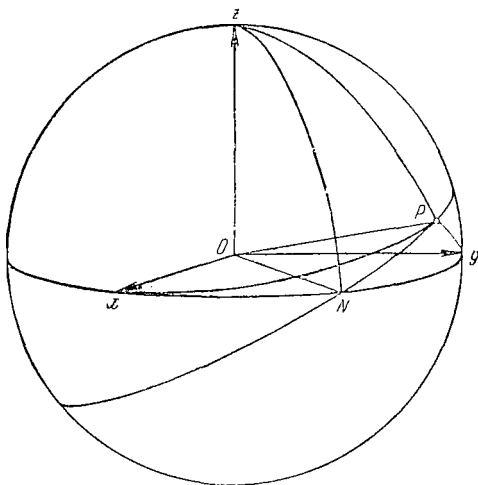


Рис. 5.

Сторона $\widehat{xN}$ есть долгота восходящего узла Ω , а сторона $\widehat{NP}$ измеряет угол ω между радиусом-вектором и линией узлов. Наконец, сферический угол $\widehat{xNP}$ равен дополнению до 180° наклонности i плоскости движения к плоскости xOy .

Применяя основную формулу сферической тригонометрии к стороне $\widehat{xP}$ этого треугольника и к двум другим треугольникам (yNP) и (zNP) , мы получим следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} x &= r (\cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i), \\ y &= r (\cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i), \\ z &= r \sin \omega \sin i, \end{aligned} \right\} \quad (4.64)$$

выражающие пространственные координаты через орбитальные координаты и две постоянные Ω и i , определяющие положение плоскости движения в системе $(Oxyz)$.

Постоянные Ω и i связаны с произвольными постоянными c_1 , c_2 , c_3 интегралов площадей (4.62). Эти зависимости также легко получаются из соответствующих сферических треугольников. Действительно, положим

$$c = + \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2},$$

тогда

$$\frac{c_1}{c}, \quad \frac{c_2}{c}, \quad \frac{c_3}{c}$$

будут направляющими косинусами перпендикуляра к плоскости движения (4.63). Обозначим через c точку пересечения этого перпендикуляра со сферой и рассмотрим сферические треугольники xNc , yNc , zNc .

Из этих треугольников выводим формулы

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= c \sin \Omega \sin i, \\ c_2 &= -c \cos \Omega \sin i, \\ c_3 &= c \cos i. \end{aligned} \right\} \quad (4.62')$$

Отсюда, зная c_1 , c_2 , c_3 , найдем также долготу узла Ω и наклонность i , которые могут рассматриваться как две произвольные постоянные.

Определив затем r и ω как функции времени и четырех произвольных постоянных, мы получим по формулам (4.64) общее решение задачи.

Итак, задача сводится к нахождению двух неизвестных r и ω . Нетрудно получить дифференциальные уравнения, которым должны удовлетворять эти две неизвестные функции.

Дифференцируя формулы (4.64) по времени, имеем

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \frac{x}{r} + r\dot{\omega} (-\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i), \\ \dot{y} &= \dot{r} \frac{y}{r} + r\dot{\omega} (-\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i), \\ \dot{z} &= \dot{r} \frac{z}{r} + r\dot{\omega} \cos \omega \sin i, \end{aligned} \right\} \quad (4.65)$$

что можно написать короче, используя обозначения (4.56) и (4.56'), в виде *)

$$\dot{x} = \dot{r}\alpha + r\dot{\omega}\alpha', \quad \dot{y} = \dot{r}\beta + r\dot{\omega}\beta', \quad \dot{z} = \dot{r}\gamma + r\dot{\omega}\gamma'. \quad (4.65')$$

Дифференцируя затем формулы (4.65'), получим

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= (\ddot{r} - r\dot{\omega}^2)\alpha + (r\ddot{\omega} + 2\dot{r}\dot{\omega})\alpha', \\ \ddot{y} &= (\ddot{r} - r\dot{\omega}^2)\beta + (r\ddot{\omega} + 2\dot{r}\dot{\omega})\beta', \\ \ddot{z} &= (\ddot{r} - r\dot{\omega}^2)\gamma + (r\ddot{\omega} + 2\dot{r}\dot{\omega})\gamma'. \end{aligned} \right\} \quad (4.65'')$$

Подставляя теперь выражения (4.65'') и (4.64) в уравнения (4.60), мы получим следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} (\ddot{r} - r\dot{\omega}^2 - F)\alpha + (r\ddot{\omega} + 2\dot{r}\dot{\omega})\alpha' &= 0, \\ (\ddot{r} - r\dot{\omega}^2 - F)\beta + (r\ddot{\omega} + 2\dot{r}\dot{\omega})\beta' &= 0, \\ (\ddot{r} - r\dot{\omega}^2 - F)\gamma + (r\ddot{\omega} + 2\dot{r}\dot{\omega})\gamma' &= 0, \end{aligned} \right\}$$

из которых выводим

$$\left. \begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\omega}^2 - F &= 0, \\ r\ddot{\omega} + 2\dot{r}\dot{\omega} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.66)$$

Заметим, что второе из уравнений (4.66) можно один раз проинтегрировать, что дает первый интеграл этих уравнений в виде

$$r^2\dot{\omega} = \text{const.} \quad (4.67)$$

Этот же интеграл можно вывести также из интегралов площадей (4.62), подставляя в них вместо координат и их производных выражения (4.64) и (4.65). Каждое из трех уравнений (4.62) приводится к одному единственному уравнению (4.67), в котором константа интегрирования равна постоянной c .

*) В нашем случае только угол, образованный радиусом-вектором движущейся точки с линией узлов (аргумент широты), обозначен буквой ω , так как буква u будет обозначать в этом параграфе другую величину.

Таким образом система (4.66) приведет к виду

$$\left. \begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\omega}^2 - F &= 0, \\ r^2\dot{\omega} &= c, \end{aligned} \right\} \quad (4.66')$$

а эта система распадается на два отдельных уравнения.

Действительно, исключая из уравнений (4.66') угловую скорость $\dot{\omega}$, мы получим одно уравнение

$$\ddot{r} - \frac{c^2}{r^3} - F(t, r, \dot{r}) = 0 \quad (4.66'')$$

с одной неизвестной функцией r . Если это уравнение возможно проинтегрировать, то мы получим радиус-вектор как функцию времени и трех произвольных постоянных. После этого из уравнения

$$r^2\dot{\omega} = c \quad (4.66''')$$

найдем квадратурой

$$\omega = \omega_0 + c \int_{t_0}^t \frac{dt}{r^2},$$

где ω_0 — четвертая произвольная постоянная.

2. Уравнение Бине и его решение для случая невозмущенного движения. Таким образом, задача сводится к интегрированию единственного дифференциального уравнения второго порядка с одной неизвестной функцией. Однако, вообще говоря, это уравнение не может быть проинтегрировано в квадратурах, так что решение задачи нельзя довести до конца.

Рассмотрим частный случай задачи о движении под действием центральной силы, предполагая, что величина F не зависит явно от t и является некоторой функцией радиуса-вектора r и радиальной производной $\dot{r}$.

Тогда уравнение (4.66'') можно несколько упростить, исключая из него dt при помощи равенства (4.66'''), т. е. вводя угол ω как независимую переменную вместо t .

Принимая еще за неизвестную функцию обратное значение радиуса-вектора

$$\tilde{u} = \frac{1}{r},$$

найдем

$$\begin{aligned}\dot{r} &= -c \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{w}}, \\ \ddot{r} &= -c^2 \tilde{u}^2 \frac{d^2\tilde{u}}{d\tilde{w}^2},\end{aligned}$$

вследствие чего равенство (4.66'') приведет к виду

$$\frac{d^2\tilde{u}}{d\tilde{w}^2} + \tilde{u} = -\frac{1}{c^2\tilde{u}^2} F\left(\frac{1}{\tilde{u}}, -c \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{w}}\right), \quad (4.67)$$

называемому обычно *уравнением Бине*.

Это уравнение, вообще говоря, также не может быть проинтегрировано, но если величина F зависит только от $\tilde{u}$, то решение уравнения (4.67) сводится к квадратурам.

Положим, как обычно делают в этом случае,

$$\tilde{p} = \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{w}}$$

и примем $\tilde{u}$ за независимую переменную. Тогда уравнение Бине напишется в виде

$$\tilde{p} \frac{d\tilde{p}}{d\tilde{u}} + \tilde{u} = -\frac{1}{c^2\tilde{u}^2} F\left(\frac{1}{\tilde{u}}\right) = \Phi(\tilde{u})$$

и легко интегрируется в квадратурах, что дает

$$\tilde{p}^2 = c_1^2 - \tilde{u}^2 + \int \Phi(\tilde{u}) d\tilde{u}. \quad (4.67')$$

Найдя $\tilde{p}$ как функцию $\tilde{u}$, получим теперь и $\tilde{w}$ как функцию $\tilde{u}$ по формуле

$$\tilde{w} = c_2 + \int \frac{d\tilde{u}}{\tilde{p}},$$

что и дает общий интеграл нашего дифференциального уравнения, а следовательно, и общее решение задачи в квадратурах, которые, однако, не всегда могут быть выполнены.

Случай, когда сила зависит только от радиуса-вектора движущейся точки, можно рассмотреть еще иначе.

Действительно, в этом случае, как мы видели выше, существует силовая функция U и уравнения движения имеют вид (4.61). Эти уравнения, кроме трех интегралов площадей,

имеют еще один интеграл — *интеграл живой силы*, который получим, умножая уравнения (4.61) соответственно на $2\dot{x}$, $2\dot{y}$, $2\dot{z}$, складывая результаты и интегрируя.

В результате получим

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2U + h, \quad (4.68)$$

что можно также написать в виде

$$V^2 = 2U + h \quad (4.68')$$

(постоянная интегрирования h есть постоянная живой силы).

Переходя к орбитальным координатам r и ϖ по формулам (4.64), мы в силу (4.65) получим интеграл живой силы в следующем виде:

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\varpi}^2 = 2U + h. \quad (4.69)$$

Исключая отсюда dt с помощью интеграла площадей (4.66''') и беря за искомую функцию $\tilde{u}$ вместо r , мы напомним предыдущее уравнение следующим образом:

$$c^2 \left(\frac{d\tilde{u}}{d\varpi} \right)^2 + c^2 \tilde{u}^2 = 2U + h. \quad (4.69')$$

Это уравнение, как нетрудно проверить, совпадает с уравнением (4.67'), если в последнем положить $F = -\tilde{u}^2 \frac{dU}{d\tilde{u}}$.

Уравнение (4.69') интегрируется разделением переменных, в результате чего получаем соотношение между $\tilde{u}$ и ϖ или уравнение траектории (или орбиты) в полярных орбитальных координатах:

$$c \int \frac{d\tilde{u}}{\sqrt{2U + h - c^2 \tilde{u}^2}} = \varpi + C. \quad (4.70)$$

Рассмотрим теперь, как частный случай задачи о движении под действием центральной силы, задачу о невозмущенном движении. Тогда, как уже отмечено,

$$F = -\mu \tilde{u}^2,$$

и уравнение Бине примет вид

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{d\varpi^2} + \tilde{u} = \frac{\mu}{c^2}. \quad (4.71)$$

Мы получили линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, общее решение которого находится без всякого труда. Действительно, частное решение уравнения (4.71) есть, очевидно, μ/c^2 , а независимыми частными решениями уравнения без правой части будут $\cos \varpi$ и $\sin \varpi$.

Поэтому общее решение уравнения (4.71) напишется в следующем виде:

$$\tilde{u} = \frac{\mu}{c^2} + C_1 \cos \varpi + C_2 \sin \varpi, \quad (4.72)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Положим для сокращения $\frac{\mu}{c^2} = \frac{1}{p}$ и введем вместо C_1 и C_2 две другие постоянные e и ω при помощи формул

$$C_1 = \frac{e}{p} \cos \omega, \quad C_2 = \frac{e}{p} \sin \omega.$$

Тогда уравнение орбиты (4.72) примет вид

$$p\tilde{u} = 1 + e \cos(\varpi - \omega), \quad (4.72')$$

а если положить

$$\vartheta = \varpi - \omega$$

и разрешить предыдущее уравнение относительно радиуса-вектора r , то получим

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}, \quad (4.72'')$$

т. е. уже знакомое нам уравнение невозмущенной орбиты в полярных координатах.

Это же уравнение можно вывести и из (4.70). Действительно, для невозмущенного движения $U = p\tilde{u}$ и (4.70) примет вид

$$c \int \frac{d\tilde{u}}{\sqrt{2\mu u + h - c^2 \tilde{u}^2}} = \varpi + C,$$

откуда имеем

$$\tilde{u} = \frac{1}{r} = \frac{\mu}{c^2} + \frac{\sqrt{\mu^2 + hc^2}}{c^2} \sin(\varpi + C).$$

Полагая здесь

$$\frac{\mu}{c^2} = \frac{1}{p}, \quad \frac{\sqrt{\mu^2 + hc^2}}{\mu} = e, \quad C = \frac{\pi}{2} - \omega, \quad \vartheta = \varpi - \omega,$$

получим опять хорошо знакомое уравнение кривой второго порядка в полярных координатах

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos \vartheta,$$

причем фокус кривой находится в начале координат, т. е. в притягивающем центре.

Входящие сюда постоянные имеют обычные значения. Величина p есть параметр кривой второго порядка или половина фокальной хорды кривой, перпендикулярной фокальной оси. Величина e есть эксцентриситет кривой, а если положим

$$f = \sqrt{\mu^2 + hc^2},$$

то будем иметь, как и ранее,

$$e = \frac{f}{\mu}.$$

Угол ϑ есть, очевидно, угол между радиусом-вектором и фокальной осью кривой, т. е. истинная аномалия, а ω есть угол между фокальной осью и линией узлов, т. е. угловое расстояние перигентра от узла.

Зная r как функцию ϑ , мы получим пространственные координаты x , y , z по формулам (4.64), а их первые производные (проекции скорости V) по формулам (4.65).

Окончательное решение задачи опять приводится к нахождению истинной аномалии ϑ в зависимости от времени. Так как, очевидно, $\dot{\vartheta} = \dot{\varpi}$, то из (4.66''') имеем

$$r^2 \dot{\vartheta} = c.$$

Это есть интеграл площадей в плоскости орбиты в полярных координатах. Отсюда по формуле (4.45) найдем соотношение между ϑ и t так же как это было описано выше, и решение задачи приведет к вычислению интеграла в уравнении (4.45) и к последующему затем решению полученного уравнения относительно истинной аномалии ϑ .

3. Интегрирование уравнений невозмущенного движения в координатах Клеро—Лапласа. Рассмотрим теперь дифференциальные уравнения невозмущенного движения в форме Клеро-Лапласа

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 u}{d\lambda^2} + u &= \frac{\mu}{c^2} (1 + s^2)^{-3/2}, \\ \frac{d^2 s}{d\lambda^2} + s &= 0, \\ \frac{d\lambda}{dt} &= \bar{c} u^2, \end{aligned} \right\} \quad (4.73)$$

где $\bar{c}$ — произвольная постоянная.

Второе из этих уравнений есть линейное дифференциальное уравнение второго порядка простейшего вида, общее решение которого можем написать сразу:

$$s = \bar{C}_1 \cos \lambda + \bar{C}_2 \sin \lambda,$$

где $\bar{C}_1$ и $\bar{C}_2$ — произвольные постоянные.

Полагая теперь

$$\bar{C}_1 = -v \sin \theta, \quad \bar{C}_2 = v \cos \theta,$$

где v и θ — две новые произвольные постоянные, мы представим предыдущее равенство в виде

$$s = v \sin (\lambda - \theta). \quad (4.74)$$

Подставляя найденное выражение для s , как функции независимой переменной λ , в первое из уравнений (4.72), мы получим для определения второй неизвестной u следующее уравнение:

$$\frac{d^2 u}{d\lambda^2} + u = \frac{\mu}{c^2} [1 + v^2 \sin^2 (\lambda - \theta)]^{-3/2}.$$

Нетрудно проверить, что функция

$$\frac{\mu}{c^2} \frac{\sqrt{1 + v^2 \sin^2 (\lambda - \theta)}}{1 + v^2}$$

удовлетворяет этому уравнению, а поэтому общее его решение напишется следующим образом:

$$u = C'_1 \cos \lambda + C'_2 \sin \lambda + \frac{\mu}{c^2} \frac{\sqrt{1 + v^2 \sin^2(\lambda - \theta)}}{1 + v^2},$$

где C'_1 и C'_2 — новые произвольные постоянные.

Полагая теперь

$$C'_1 = \frac{\mu \varepsilon \cos \bar{\omega}}{c^2 (1 + v^2)}, \quad C'_2 = \frac{\mu \varepsilon \sin \bar{\omega}}{c^2 (1 + v^2)},$$

мы представим функцию u в форме

$$u = \frac{\mu}{c^2 (1 + v^2)} [\varepsilon \cos(\lambda - \bar{\omega}) + \sqrt{1 + v^2 \sin^2(\lambda - \theta)}]. \quad (4.75)$$

Таким образом, величины u и s представлены как функции долготы λ и пяти произвольных постоянных

$$\bar{c}, v, \theta, \varepsilon, \bar{\omega}.$$

Последнее из уравнений (4.73) после интегрирования даст соотношение между долготой λ и временем t , содержащее еще одну — шестую — произвольную постоянную, которую обозначим через λ_0 .

Наконец, по формулам

$$x = \frac{\cos \lambda}{u}, \quad y = \frac{\sin \lambda}{u}, \quad z = \frac{s}{u} \quad (4.76)$$

найдем прямоугольные пространственные координаты, а по формуле

$$r = \frac{\sqrt{1 + s^2}}{u} \quad (4.76')$$

радиус-вектор движущейся точки.

Установим геометрическое значение постоянных, входящих в полученные нами формулы.

Для этого подставим сначала в уравнение плоскости орбиты

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0$$

вместо прямоугольных координат их выражения (4.76), а вместо постоянных площадей их выражения (4.62').

Результат подстановки представим в виде

$$s = \operatorname{tg} i \cdot \sin(\lambda - \Omega) \quad (4.73')$$

и сравним полученное выражение для s с выражением (4.74).

Сравнение дает

$$v = \operatorname{tg} i, \quad \theta = \Omega, \quad (4.77)$$

т. е. постоянная v есть тангенс наклонности орбиты к основной плоскости (xOy), а θ — долгота восходящего узла.

Таким образом, постоянные v и θ определяют положение плоскости орбиты, а уравнение (4.74) есть не что иное, как уравнение плоскости орбиты в переменных Клеро — Лапласа.

Чтобы получить значения остальных постоянных, приведем уравнение орбиты (4.75) к виду обычного уравнения кривой второго порядка в полярных координатах.

Для этого заменим сначала в первых двух формулах (4.76) координаты x и y их выражениями из формул (4.64).

Имея еще в виду формулу (4.76'), мы получим соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\cos \lambda}{\sqrt{1+s^2}} &= \cos w \cos \Omega - \sin w \sin \Omega \cos i, \\ \frac{\sin \lambda}{\sqrt{1+s^2}} &= \cos w \sin \Omega + \sin w \cos \Omega \cos i; \end{aligned}$$

из которых выведем следующие формулы:

$$\frac{\cos(\lambda - \Omega)}{\sqrt{1+s^2}} = \cos w, \quad \frac{\sin(\lambda - \Omega)}{\sqrt{1+s^2}} = \frac{\sin w}{\sqrt{1+v^2}}. \quad (4.78)$$

Теперь из формулы (4.75) находим

$$r = \frac{\frac{c^2(1+v^2)}{\mu}}{1 + \varepsilon \frac{\cos(\lambda - \theta) \cos(\bar{\omega} - \theta) + \sin(\lambda - \theta) \sin(\bar{\omega} - \theta)}{\sqrt{1+s^2}}},$$

откуда с помощью (4.78) получим

$$r = \frac{\frac{c^2(1+v^2)}{\mu}}{1 + \varepsilon \left[\cos w \cos(\bar{\omega} - \theta) + \frac{\sin w \sin(\bar{\omega} - \theta)}{\sqrt{1+v^2}} \right]}. \quad (4.79)$$

Сравним это выражение для радиуса-вектора с выражением (4.72''), которое можно написать в виде

$$r = \frac{p}{1 + e [\cos \varpi \cos \omega + \sin \varpi \sin \omega]}.$$

Так как оба эти выражения для r должны быть тождественны, то мы имеем

$$\begin{aligned} p &= \frac{\bar{c}^2 (1 + \nu^2)}{\mu}, \\ e \cos \omega &= \epsilon \cos (\bar{\omega} - \theta), \\ e \sin \omega &= \frac{\epsilon \sin (\bar{\omega} - \theta)}{\sqrt{1 + \nu^2}}, \end{aligned}$$

откуда выводим

$$\left. \begin{aligned} \bar{c} &= c \cdot \cos i = \sqrt{\mu} \sqrt{p \cos i}, \\ \epsilon &= e \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 i \sin^2 \omega}, \\ \operatorname{tg} (\bar{\omega} - \theta) &= \operatorname{tg} \omega \cos i, \end{aligned} \right\} \quad (4.80)$$

и наоборот

$$\left. \begin{aligned} c &= \bar{c} \sqrt{1 + \nu^2}, \\ \epsilon &= e \sqrt{1 + \nu^2 \cos^2 (\bar{\omega} - \theta)}, \\ \operatorname{tg} \omega &= \frac{\operatorname{tg} (\bar{\omega} - \theta)}{\sqrt{1 + \nu^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.80')$$

Таким образом, постоянная $\bar{c}$ есть величина проекции вектора момента количества движения на ось Oz пространственной системы координат. Величина ϵ пропорциональна эксцентриситету орбиты и самостоятельного геометрического значения не имеет.

Однако можно ввести в рассмотрение некоторый вектор, лежащий в плоскости xOy , величина и направление которого определяют постоянные ϵ и $\bar{\omega}$ и с которым связан вектор Лапласа.

Действительно, пусть Π есть перигентр орбиты, а L — его проекция на плоскость xOy (рис. 6). Рассмотрим вектор,

лежащий в плоскости xOy , направление которого совпадает с направлением от начала координат к точке L . Величину этого вектора $\bar{f}$ определим формулой

$$\bar{f} = f \cdot \sec i,$$

где f — величина вектора Лапласа.

Тогда будем иметь

$$\epsilon = \frac{\bar{f}}{\mu}, \quad \bar{\omega} = \angle xOL. \quad (4.81)$$

В самом деле, проведем через перицентр Π прямую, лежащую в плоскости $O\Pi L$ и перпендикулярную линии апсид,

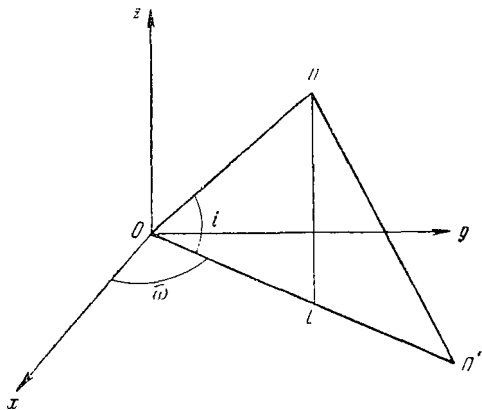


Рис. 6.

т. е. прямой $O\Pi$, и обозначим через Π' точку пересечения этого перпендикуляра с плоскостью $x'Oy$.

В образовавшихся треугольниках сторона $O\Pi$ есть расстояние от фокуса орбиты до перицентра, которое обозначим буквой q . Сторона ΠL есть аппликата перицентра, которую можно определить из третьей формулы (4.64), полагая в последней $v = 0$, а следовательно, $r = q$ и $\omega = \bar{\omega}$. Таким образом, $\Pi L = q \sin \bar{\omega} \sin i$. Теперь из треугольника $\Pi L \Pi'$ находим $\Pi \Pi' = q \operatorname{tg} i \sin \bar{\omega}$, а из треугольника $O\Pi \Pi'$ имеем

$$O\Pi' = q \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 i \sin^2 \bar{\omega}} = q \sec i.$$

Отсюда с помощью второй из формул (4.80) находим

$$\varepsilon = e \sec i = \frac{f}{\mu} \sec i = \frac{\bar{f}}{\mu}.$$

Далее опустим из точки Π перпендикуляр ΠN на линию узлов орбиты и точку N соединим с точкой L .

Тогда из образовавшихся треугольников $N\Pi L$, ONL и $ON\Pi$ имеем

$$\overline{NL} = \overline{N\Pi} \cdot \cos i, \quad \overline{N\Pi} = \overline{ON} \cdot \operatorname{tg} \omega,$$

$$\overline{NL} = \overline{ON} \operatorname{tg} \omega \cos i = \overline{ON} \operatorname{tg} (\angle NOL).$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} (\angle NOL) = \operatorname{tg} \omega \cos i,$$

сравнивая это выражение с третьей из формул (4.80), найдем, что $\angle NOL = \bar{\omega} - \theta$, а поэтому

$$\bar{\omega} = \angle NOL + \angle NOx = \angle xOL$$

и справедливость формул (4.81) установлена.

В результате проведенного интегрирования уравнений (4.73) общее решение уравнений невозмущенного движения будет содержать шесть постоянных

$$\nu, \theta, \bar{\omega}, \bar{c}, \varepsilon, \lambda_0, \quad (4.82)$$

которые полностью определяют невозмущенное движение, а поэтому могут быть названы также *элементами орбиты*.

Естественно назвать величины (4.82) *лапласовскими элементами невозмущенного движения* или просто *элементами Лапласа*.

Примечание. Заметим, что вектор Лапласа является проекцией вектора $\bar{f}$ на плоскость орбиты.

4. Интегрирование канонических уравнений невозмущенного движения. Рассмотрим в заключение этого параграфа интегрирование дифференциальных

уравнений невозмущенного движения по способу Гамильтона — Якоби.

Если взять за канонические переменные прямоугольные координаты и составляющие скорости, то уравнения движения будут иметь вид (4.12), где функция Гамильтона H определяется формулой (4.11'). Так как функция H не зависит от времени, то соответствующее системе (4.12) уравнение Гамильтона — Якоби напишется в виде *)

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 = \frac{2\mu}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + 2\alpha_1, \quad (4.83)$$

где W обозначает неизвестную функцию. Найдя решение уравнения (4.83), зависящее, кроме α_1 , еще от двух произвольных постоянных, мы найдем затем общий интеграл уравнений невозмущенного движения по формулам, аналогичным формулам (1.44) и (1.44') главы первой.

Однако уравнение (4.83) не удастся решить непосредственно, вследствие чего применить метод Гамильтона — Якоби к системе (4.14) оказывается невозможным.

Но достаточно перейти от прямоугольных координат к сферическим, чтобы метод Гамильтона — Якоби оказался применимым без всяких затруднений.

Действительно, введем вместо прямоугольных координат x, y, z сферические координаты r, φ, λ :

$$x = r \cos \varphi \cos \lambda, \quad y = r \cos \varphi \sin \lambda, \quad z = r \sin \varphi \quad (4.84)$$

и сопряженные им канонические переменные (обобщенные импульсы) (4.13'). Тогда уравнения невозмущенного движения запишутся в виде (4.14), где функция Гамильтона определяется формулой (4.13'').

Соответствующее уравнение Гамильтона — Якоби напишется в следующем виде **):

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda}\right)^2 - \frac{2\mu}{r} = 2\alpha_1, \quad (4.85)$$

*) См. § 5 главы первой.

**) Здесь постоянная энергии обозначена для симметрии буквой α_1 .

и нужную функцию W , удовлетворяющую этому уравнению, найти очень легко *).

В самом деле, это решение найдется по способу разделения переменных, для чего представим неизвестную функцию в виде

$$W = W_1(r) + W_2(\varphi) + W_3(\lambda), \quad (4.85')$$

где каждое слагаемое зависит только от одной из координат.

Подставляя (4.85') в уравнение (4.85), мы представим последнее в следующем виде:

$$\left(\frac{dW_1}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{dW_2}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \left(\frac{dW_3}{d\lambda}\right)^2 - \frac{2\mu}{r} = 2\alpha_1. \quad (4.85'')$$

Мы удовлетворим полученному уравнению, полагая

$$\left. \begin{aligned} \frac{dW_3}{d\lambda} &= \alpha_3, \\ \left(\frac{dW_2}{d\varphi}\right)^2 + \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \varphi} &= \alpha_2^2, \\ \left(\frac{dW_1}{dr}\right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{r^2} - \frac{2\mu}{r} &= 2\alpha_1, \end{aligned} \right\} \quad (4.85''')$$

где α_3 и α_2 суть две новые произвольные постоянные. Определяя из (4.85''') функции W_3 , W_2 , W_1 и подставляя найденные выражения в (4.85'), мы найдем решение уравнения (4.85), содержащее три необходимые произвольные постоянные, в следующем виде:

$$W = \alpha_3 \lambda + \int \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \varphi}} d\varphi + \int \sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}} dr. \quad (4.86)$$

*) Мы могли бы сразу написать нужное решение по формулам § 5 главы первой, где дано решение уравнения Гамильтона — Якоби для более общего случая. Однако из методических соображений мы предпочитаем провести здесь решение уравнения (4.85) более простым приемом.

Поэтому общий интеграл системы (4.14) определится следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} &= \int \frac{dr}{\sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} = t + \beta_1, \\ \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} &= \alpha_2 \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \varphi}}} - \\ &\quad - \alpha_2 \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} = \beta_2, \\ \frac{\partial W}{\partial \alpha_3} &= \lambda - \alpha_3 \int \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \varphi}}} = \beta_3; \end{aligned} \right\} \quad (4.86')$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial r} &= \sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}} = \dot{r}, \\ \frac{\partial W}{\partial \varphi} &= \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \varphi}} = r^2 \dot{\varphi}, \\ \frac{\partial W}{\partial \lambda} &= \alpha_3 = r^2 \cos^2 \varphi \cdot \dot{\lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (4.86'')$$

Равенства (4.86') и (4.86'') содержат шесть необходимых для общего интеграла уравнений невозмущенного движения произвольных постоянных

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \quad (4.87)$$

которые называются *каноническими элементами Якоби* или просто *элементами Якоби*.

Так как формулы (4.86') и (4.86'') представляют общий интеграл системы (4.14), а значит, и системы (4.12), то эти формулы эквивалентны (4.52) и (4.55), и элементы Якоби могут быть выражены через обычные кеплеровские элементы орбиты, а следовательно, и через начальные значения координат и составляющих скорости.

Чтобы получить упомянутые соотношения между элементами (4.87) и (4.54), рассмотрим выведенные нами первые интегралы (4.86') и (4.86''). В действительном движении выражения, стоящие под знаком квадратного корня в этих формулах, не могут принимать отрицательных значений. Поэтому, в частности, изменение угла φ должно быть ограничено неравенством

$$\cos^2 \varphi \geq \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}.$$

Поэтому должно быть

$$\left| \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \right| \leq 1,$$

и мы можем положить

$$\alpha_3 = \alpha_2 \cos i, \quad (4.88)$$

где i — некоторая новая постоянная.

Вычисляя теперь интеграл в третьей из формул (4.86'), мы получим следующее соотношение между координатами φ и λ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} i \cdot \sin (\lambda - \beta_3), \quad (4.89)$$

которое, как нетрудно убедиться, представляет собой уравнение плоскости, проходящей через начало координат.

Действительно, переходя от полярных координат к прямоугольным по формулам (4.84), мы получим из (4.89)

$$\sin \beta_3 \sin i \cdot x - \cos \beta_3 \sin i \cdot y + \cos i \cdot z = 0.$$

Так как последнее уравнение должно быть тождественно с уравнением плоскости орбиты (4.63), то мы имеем

$$\sin \beta_3 \sin i = \frac{c_1}{c}, \quad -\cos \beta_3 \sin i = \frac{c_2}{c}, \quad \cos i = \frac{c_3}{c}, \quad (4.89')$$

т. е. постоянная i есть наклонность плоскости орбиты к основной плоскости (xOy), а постоянная β_3 есть долгота восходящего узла.

Рассмотрим теперь второе из уравнений (4.86'). Введем вместо широты φ новую переменную u подстановкой

$$\sin \varphi = \sin i \sin u. \quad (4.90)$$

Тогда это уравнение может быть переписано, как легко видеть, следующим образом:

$$\alpha_2 \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} = \beta_2 - u, \quad (4.91)$$

откуда имеем

$$r = \frac{\frac{\alpha_2^2}{\mu}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{\mu^2} \cos(u - \beta_2)}}.$$

Мы пришли, таким образом, к хорошо знакомому уравнению кривой второго порядка в полярных координатах с началом в фокусе кривой. Это уравнение должно быть поэтому тождественно уравнению (4.42'), а следовательно, мы должны иметь

$$u - \beta_2 = v, \quad \beta_2 = \omega,$$

т. е. u есть аргумент широты, а β_2 — угловое расстояние перицентра от узла. Далее

$$\frac{\alpha_2^2}{\mu} = p, \quad \alpha_2 = c = \sqrt{\mu} \sqrt{p},$$

и по формуле (4.88)

$$\alpha_3 = c \cdot \cos i = \sqrt{\mu} \sqrt{p} \cos i.$$

Наконец,

$$\sqrt{1 + \frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{\mu^2}} = e,$$

где e — эксцентриситет кривой, откуда

$$\alpha_1 = \frac{\mu}{2p} (e^2 - 1).$$

Наконец заметим, что интеграл в первой из формул (4.86') обращается в нуль одновременно с интегралом в формуле (4.91), а последний исчезает при $u = \beta_2 = \omega$, т. е. при $v = 0$, что соответствует моменту прохождения через перицентр.

Поэтому $\beta_1 = -\tau$. Таким образом, мы имеем следующие выражения элементов Якоби через кеплеровские:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\mu}{2p}(e^2 - 1), & \alpha_2 &= \sqrt{\mu} \sqrt{p}, & \alpha_3 &= \sqrt{\mu} \sqrt{p} \cos i, \\ \beta_1 &= -\tau, & \beta_2 &= \omega, & \beta_3 &= \Omega. \end{aligned} \right\} (4.92)$$

Из формул (4.86') можно вывести также уже знакомые нам выражения для прямоугольных координат. Для этого выведем предварительно еще одно соотношение. Дифференцируя равенство (4.89) по t , мы имеем

$$\dot{\varphi} \sec^2 \varphi = \operatorname{tg} i \cos(\lambda - \beta_3) \cdot \dot{\lambda}.$$

Исключая из этого равенства $\dot{\varphi}$ и $\dot{\lambda}$ при помощи формул (4.86'') и имея в виду подстановку (4.90), находим:

$$\cos u = \cos \varphi \cos(\lambda - \beta_3). \quad (4.93)$$

Перепишем теперь формулы (4.89) и (4.93), заменяя β_3 на Ω , в следующем виде:

$$\cos \varphi \sin \lambda \cdot \cos \Omega - \cos \varphi \cos \lambda \cdot \sin \Omega = \sin u \cos i,$$

$$\cos \varphi \sin \lambda \cdot \sin \Omega + \cos \varphi \cos \lambda \cdot \cos \Omega = \cos u,$$

откуда находим

$$\cos \varphi \sin \lambda = \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i,$$

$$\cos \varphi \cos \lambda = \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i.$$

Теперь формулы (4.84) дают

$$x = r \cos \varphi \cos \lambda = r (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i),$$

$$y = r \cos \varphi \sin \lambda = r (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i),$$

$$z = r \sin \varphi = r \sin u \sin i.$$

Из этих формул простым дифференцированием по t выведем выражения для составляющих скорости $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ в виде (4.65). Остается получить выражения для $\dot{r}$ и $\dot{u}$. Формулы (4.86'') дают

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sqrt{e^2 - \left(\frac{p}{r} - 1\right)^2},$$

$$r^2 \dot{\varphi} \cos \varphi = \sqrt{\mu} \sqrt{p} \cos u \sin i,$$

но

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos v,$$

а из формулы (4.90) найдем

$$\dot{\phi} \cos \varphi = \dot{u} \cos u \sin i.$$

Поэтому предыдущие формулы дают

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin v, \quad \dot{u} = \frac{\sqrt{\mu} \sqrt{p}}{r^2}$$

в согласии с ранее полученными результатами.

Таким образом, метод Гамильтона — Якоби позволяет не только провести полное интегрирование уравнений невозмущенного движения, но и получить все общие формулы, выведенные ранее другими способами.

ГЛАВА V

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

В предыдущей главе были выведены формулы, дающие общее решение или общий интеграл дифференциальных уравнений невозмущенного кеплеровского движения и содержащие необходимое число произвольных постоянных.

В общем решении эти произвольные постоянные могут иметь какие угодно вещественные значения, определяемые произвольно задаваемыми начальными значениями координат и составляющих скорости движущейся точки (планеты или спутника).

Однако при различных начальных условиях одно и то же невозмущенное движение обладает, вообще говоря, различными свойствами. Так, например, вид и геометрические свойства орбит существенно зависят от начальных условий, а от вида орбиты зависит функциональная связь между истинной аномалией и временем. От способа вычисления истинной аномалии зависит последовательность формул, служащих для вычисления эфемерид, т. е. для определения места небесного тела в пространстве.

Эта глава и посвящается рассмотрению всех вопросов, связанных с исследованием свойств орбит и свойств движений в задаче о невозмущенном движении в зависимости от начальных условий задачи.

§ 1. Общие свойства невозмущенного движения

1. Типы орбит в невозмущенном движении. В предыдущей главе было установлено, что невозмущенное кеплеровское движение происходит в некоторой неизменной плоскости, проходящей через начало координат (центр силы притяжения) и что траектория или *орбита* движущейся точки

есть кривая второго порядка, один из фокусов которой совпадает с началом координат *).

Это свойство напоминает нам известный из курса общей астрономии первый закон Кеплера, выведенный знаменитым ученым для больших планет солнечной системы и устанавливающий, что орбита планеты есть эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце.

Но эллипс есть частный случай кривой второго порядка, а поэтому выведенное нами свойство является несколько более общим и может быть названо обобщенным законом Кеплера, который мы сформулируем теперь следующим образом:

Первый (обобщенный) закон Кеплера. В невозмущенном движении орбита движущейся материальной точки есть кривая второго порядка, в одном из фокусов которого находится центр силы притяжения.

Второй закон Кеплера, устанавливающий неизменность секторальной скорости, был также выведен для случая эллиптической орбиты планеты в ее движении вокруг Солнца, но распространяется также на случай какого угодно невозмущенного движения.

Действительно, секторальная скорость движущейся точки определяется формулой (4.46), где c — величина вектора момента скорости. Из этой формулы, предполагая, что $c \neq 0$ **), сразу получаем

$$S = \frac{c}{2} t + c', \quad (5.1)$$

где c' обозначает новую произвольную постоянную, что приводит нас ко второму закону Кеплера в следующей формулировке:

Второй (обобщенный) закон Кеплера. В невозмущенном движении площадь, описываемая радиусом-вектором движущейся материальной точки, изменяется пропорционально времени.

*) Для планеты или кометы солнечной системы фокус орбиты находится в центре Солнца. Для Луны или для искусственного спутника Земли фокус помещается в центре Земли и т. д.

**) В случае $c = 0$, который будет рассмотрен ниже, закон площадей, очевидно, не имеет смысла.

Из общей астрономии нам известен еще третий закон Кеплера, устанавливающий связь между средним расстоянием планеты от Солнца и временем ее обращения вокруг Солнца.

Очевидно, этот закон имеет место только для случая эллиптического движения, а поэтому не имеет такого общего значения, как два первых. Мы рассмотрим этот третий закон в несколько обобщенном виде в следующем параграфе*).

Первые два закона Кеплера в их полной формулировке имеют место только для невозмущенного движения, происходящего под действием силы притяжения, обратно пропорциональной квадрату расстояния до центра силы. Поэтому невозмущенное движение и называется также часто *кеплеровским движением*.

Положение плоскости орбиты в невозмущенном движении зависит от постоянных площадей c_1, c_2, c_3 , т. е. от направления вектора момента скорости. Положение орбиты в ее плоскости определяется направлением линии апсид, т. е. направлением вектора Лапласа. Наконец, вид орбиты зависит от величины вектора Лапласа, а ее размеры — от величины вектора момента скорости.

Действительно, уравнение орбиты в полярных орбитальных координатах было выведено в виде

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}, \quad (5.2)$$

где p — параметр кривой, определяющий ее размеры, а e — ее эксцентриситет, характеризующий форму.

Мы имели

$$p = \frac{c^2}{\mu}, \quad e = \frac{f}{\mu}. \quad (5.3)$$

Если $0 \leq e < 1$, то орбита есть эллипс, и движение точки называется в этом случае *эллиптическим кеплеровским движением* или просто *эллиптическим движением*.

В частности, если $e = 0$, то эллипс превращается в окружность с центром в начале и соответствующее движение называется *круговым движением*.

*) В задаче о движении под действием центральной силы также существуют интегралы площадей, следствием которых являются неизменность плоскости орбиты и закон площадей. Таким образом, в этой задаче второй закон Кеплера выполняется полностью, а первый — частично.

Если $1 < e < \infty$, то орбита есть гипербола (точнее, ветвь гиперболы, внутри которой находится центр силы) и движение точки называется *гиперболическим кеплеровским движением* или просто *гиперболическим движением*.

В предельном случае может быть $e = 1$, и тогда орбита точки есть парабола; в этом случае движение точки называется *параболическим кеплеровским движением* или *параболическим движением*.

Таким образом, тип движения полностью характеризуется величиной f вектора Лапласа и мы имеем:

если $f = 0$,	то орбита есть окружность,
» $f < \rho$,	» » эллипс,
» $f = \rho$,	» » парабола,
» $f > \rho$,	» » гипербола.

Общими случаями являются случаи эллиптического и гиперболического движения. Случаи кругового и параболического движения, для выполнения которых постоянная f должна быть строго равна нулю или ρ , должны рассматриваться как предельные.

При установлении типов кеплеровского движения мы предполагали неявно, что постоянная $c \neq 0$, откуда следует также, что и $\rho \neq 0$ и орбита имеет определенные размеры.

Если же $c = 0$, то и $\rho = 0$ и уравнение (5.2) теряет смысл. Обращаясь тогда к общему уравнению (4.35) поверхности второго порядка, мы увидим, что в случае $c = 0$ эта поверхность превращается в конус с вершиной в начале координат. Поэтому траектория движения (которая есть линия пересечения поверхности (4.35) и плоскости (4.34)) есть в этом случае прямая линия, проходящая через начало координат, и движение, происходящее по этой прямой, называется *прямолинейным кеплеровским движением* или *прямолинейным движением*. Этот случай мы будем рассматривать как вырожденный.

2. Зависимость типа орбиты от величины и направления начальной скорости. Как мы только что видели, тип движения характеризуется величиной вектора Лапласа, направление которого определяет положение орбиты в ее плоскости. Таким образом, два вектора — c и

f — полностью характеризуют вид и расположение орбиты, т. е. геометрические свойства невозмущенного движения.

Однако определение типа орбиты по постоянной f не очень удобно и предпочтительнее связать вид орбиты с постоянной живой силы h , т. е. с начальной скоростью движущейся точки V_0 . Для этого рассмотрим соотношение (4.23) между произвольными постоянными первых интегралов дифференциальных уравнений невозмущенного движения, которое напомним в виде

$$f^2 = \mu^2 + hc^2, \quad (5.4)$$

откуда имеем

$$\mu^2(e^2 - 1) = hc^2. \quad (5.4')$$

Из этого соотношения следует, что при $c \neq 0$ мы имеем:

если $h < 0$, то $e < 1$ и орбита есть эллипс *),
 » $h = 0$, » $e = 1$ » » » парабола,
 » $h > 0$, » $e > 1$ » » » гипербола.

Если $c = 0$, то при любом значении h мы имеем $f = \mu$, и если сохранить обозначение $e = f/\mu$ и для этого случая, то мы должны считать эксцентриситет прямолинейной орбиты равным единице. Ниже мы увидим, какой смысл имеет это утверждение.

Постоянная живой силы (или постоянная энергии) h зависит от начального радиуса-вектора и величины начальной скорости (см. формулу (4.29)), так что

$$h = V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}. \quad (5.5)$$

Отсюда и из предыдущего следует, что если начальная скорость удовлетворяет условию

$$V_0^2 < \frac{2\mu}{r_0} \quad \left(V_0 < \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}} \right), \quad (5.6)$$

то мы имеем эллиптическое движение; если начальная скорость определяется формулой

$$V_0^2 = \frac{2\mu}{r_0} \quad \left(V_0 = \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}} \right), \quad (5.6')$$

*) Окружность можно рассматривать как частный случай эллипса, а именно — как эллипс, эксцентриситет которого равен нулю.

то движение будет происходить по параболе, а если начальная скорость удовлетворяет неравенству

$$V_0^2 > \frac{2\mu}{r_0} \quad \left(V_0 > \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}} \right), \quad (5.6'')$$

то движение будет гиперболическим.

В соответствии с этим начальная скорость V_0 называется *эллиптической, параболической или гиперболической*.

Отметим еще, что при $e = 0$ формула (5.4') дает $-\mu^2 = -hc^2$, откуда, ввиду (5.3), имеем $-\mu = hp$. Но из уравнения орбиты (5.2) при $e = 0$ имеем просто $r = p = \text{const}$, что должно также совпадать с начальным значением радиуса вектора r_0 . Таким образом, в случае кругового движения мы имеем $h = -\mu/r_0$ и, следовательно,

$$V_0^2 = \frac{\mu}{r_0} \quad \left(V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}} \right). \quad (5.6''')$$

Начальная скорость, определяемая последним равенством, называется *круговой начальной скоростью*.

Итак, тип орбиты зависит от величины начальной скорости и величины начального радиуса-вектора. Так как скорость всегда направлена по касательной к траектории, то вектор скорости всегда лежит в плоскости орбиты — так же, конечно, как и радиус-вектор. Поэтому плоскость орбиты определяется направлениями двух векторов и, следовательно, вся геометрическая картина движения в пространстве характеризуется также двумя векторами — вектором начальной скорости $\dot{\mathbf{V}}_0$, проекции которого на оси координат суть $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$, и начальным радиусом-вектором $\mathbf{r}_0$, проекции которого равны x_0, y_0, z_0 .

Для дальнейшего удобно еще ввести в рассмотрение угол, образуемый начальной скоростью с начальным радиусом-вектором.

Обозначим величину этого угла для любого момента времени через δ . Тогда, очевидно, имеем

$$\cos \delta = \frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{rV} = \frac{\dot{r}}{V}, \quad (5.7)$$

а следовательно, угол δ_0 , образуемый направлением начальной скорости с направлением начального радиуса-вектора, определится формулой

$$\cos \delta_0 = \frac{x_0 \dot{x}_0 + y_0 \dot{y}_0 + z_0 \dot{z}_0}{r_0 V_0} = \frac{\dot{r}_0}{V_0}. \quad (5.7')$$

Отметим еще, что угол δ может быть выражен в зависимости от истинной аномалии φ . Действительно, формулы (4.48') и (4.49) позволяют написать формулу (5.7) в следующем виде:

$$\cos \delta = \frac{e \sin \varphi}{\sqrt{1 + 2e \cos \varphi + e^2}}. \quad (5.8)$$

Для круговой орбиты имеем

$$\delta = \delta_0 = 90^\circ,$$

а поэтому соотношение

$$x_0 \dot{x}_0 + y_0 \dot{y}_0 + z_0 \dot{z}_0 = 0 \quad (5.9)$$

является необходимым условием того, чтобы орбита была окружностью.

Найдем еще зависимость между постоянной c и углом δ_0 . Формулы (5.7) и (4.49) дают прежде всего

$$\sin \delta = \frac{r \dot{\varphi}}{V},$$

откуда с помощью формулы (4.47) имеем

$$\sin \delta = \frac{c}{r V}. \quad (5.10)$$

Отсюда

$$c = r_0 V_0 \sin \delta_0. \quad (5.10')$$

а это и есть искомая формула *).

*) Формулы (5.7) и (5.10) выведены нами чисто аналитическим путем. Но эти формулы легко также получить и из геометрических соображений. В самом деле, опустим перпендикуляр из конца вектора скорости на направление радиуса-вектора. Тогда получим прямоугольный треугольник, гипотенуза которого есть V , катеты равны соответственно V_r и V_n , а один из углов есть δ или $180^\circ - \delta$. Из этого треугольника имеем $V_n = V \sin \delta$, $V_r = V \cos \delta$, откуда с помощью формул (4.48') получим вновь формулы (5.7) и (5.10).

Если $\sin \delta_0 = 0$, то и $c = 0$ и, как уже было отмечено, движение происходит по прямой, проходящей через центр силы. Но если $c = 0$, то также необходимо равны нулю и все три постоянные площади c_1 , c_2 , c_3 , что, в силу формул (4.28), имеет место, когда начальные значения связаны следующими соотношениями:

$$y_0 \dot{z}_0 - z_0 \dot{y}_0 = 0, \quad z_0 \dot{x}_0 - x_0 \dot{z}_0 = 0, \quad x_0 \dot{y}_0 - y_0 \dot{x}_0 = 0. \quad (5.11)$$

Последние условия выполняются или когда одновременно $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ (движение начинается из начала координат), или когда одновременно $\dot{x}_0 = 0$, $\dot{y}_0 = 0$, $\dot{z}_0 = 0$ (движение начинается без начальной скорости), или, наконец, когда имеем

$$\frac{\dot{x}_0}{x_0} = \frac{\dot{y}_0}{y_0} = \frac{\dot{z}_0}{z_0},$$

т. е. когда вектор скорости и радиус-вектор коллинеарны.

Подводя итоги, мы можем выписать следующие необходимые и достаточные условия для различных типов кеплеровского движения:

для кругового движения

$$\delta_0 = 90^\circ, \quad V_0^2 = \frac{\mu}{r_0},$$

для прямолинейного движения

$$\sin \delta_0 = 0,$$

для эллиптического движения

$$0 < V_0^2 < \frac{2\mu}{r_0}, \quad \sin \delta_0 \neq 0,$$

для параболического движения

$$V_0^2 = \frac{2\mu}{r_0}, \quad \sin \delta_0 \neq 0,$$

для гиперболического движения

$$V_0^2 > \frac{2\mu}{r_0}, \quad \sin \delta_0 \neq 0.$$

Заметим, что для осуществимости кругового движения «радиальная скорость», т. е. величина $V_r = \dot{r}$, необходимо

должна быть равна нулю (см. (5.7')), а для осуществимости прямолинейного движения должна быть равна нулю «поперечная скорость», т. е. величина $V_n = r\dot{\nu}$ (см. (5.10')).

3. Эволюция орбиты при изменении направления начальной скорости. Формулы невозмущенного движения содержат, как мы знаем, шесть произвольных постоянных. За них можно принять, например, кеплеровские элементы орбиты, которые, в свою очередь, зависят от начальных условий задачи. Ниже будет показано, что заданием начальных условий элементы орбиты определяются однозначно, а стало быть начальные условия определяют также однозначно форму и размеры орбиты.

В обычных задачах небесной механики, т. е. в задачах о движении естественных небесных тел, начальные значения определяются довольно сложным путем из наблюдений и вычислений.

Наблюдения иногда оказываются «плохими», т. е. недостаточно точными, или даже неверными, а вычисления всегда сопровождаются неизбежными ошибками. Поэтому начальные значения, которые мы приписываем координатам и составляющим скорости, могут оказаться не такими, какие они есть в действительности, вследствие чего и орбита интересующего нас небесного тела может оказаться в действительности не такой, какую мы себе представляем.

Эти же соображения справедливы и для искусственных небесных тел, а поэтому представляет интерес посмотреть, как изменится орбита (в невозмущенном движении!) при соответствующем изменении начальных данных.

Для теории движения искусственных небесных тел эта задача имеет и другое значение, ибо искусственные спутники и космические ракеты запускаются с поверхности Земли, а поэтому начальные значения, т. е. значения интересующих нас величин в конце активного участка траектории, в значительной мере зависят от нас и определяются характером задачи, которую должно решать посылаемое в космическое пространство искусственное небесное тело.

В настоящем параграфе мы рассмотрим эту важную задачу лишь частично, а именно посмотрим, как будут изменяться размеры и форма орбиты при изменении либо угла δ_0 , либо величины начальной скорости V_0 , либо начального радиуса-вектора r_0 .

Для этого удобно выразить параметр и эксцентриситет орбиты непосредственно через указанные начальные значения.

Прежде всего с помощью формулы (5.10') мы находим:

$$p = \frac{c^2}{\mu} = \frac{1}{\mu} r_0^2 V_0^2 \sin^2 \delta_0. \quad (5.12)$$

Далее формула (5.4') с помощью (5.5) и (5.10') дает

$$e^2 = 1 + \frac{hc^2}{\mu^2} = 1 + \frac{1}{\mu^2} (r_0 V_0^2 - 2\mu) r_0 V_0^2 \sin^2 \delta_0. \quad (5.13)$$

Наконец, отметим еще выражения для наименьшего и наибольшего значений радиуса-вектора, которые получаются из уравнения орбиты (5.2) и выражаются через параметр и эксцентриситет.

Обозначим наименьшее значение радиуса-вектора, или расстояние от центра силы до перигентра *), через q , так что

$$q = r_{\min} = \frac{p}{1+e}. \quad (5.14)$$

Соответственно наибольшее значение радиуса-вектора, или расстояние от центра силы до апоцентра (если последний существует), обозначим через Q , так что

$$Q = r_{\max} = \frac{p}{1-e}. \quad (5.14')$$

Переходя теперь к исследованию, заметим прежде всего, что если начальные значения координат и составляющих скорости изменяются таким образом, что величины δ_0 , V_0 , r_0 остаются неизменными, то величины p , e , q и Q также не изменяются, так что форма и размеры орбиты остаются неизменными.

В этом случае, следовательно, эффект изменения начальных условий сказывается только на изменении положения плоскости орбиты в пространстве и на изменении положения орбиты (линии апсид) в ее плоскости.

Будем теперь считать, что начальные значения изменяются таким образом, что положение плоскости орбиты и положение орбиты в ее плоскости остаются неизменными, а изме-

*) Для планет солнечной системы величина q называется *перигелийным расстоянием*, а величина Q — *афелийным расстоянием*. Для спутников Земли эти величины называются соответственно *перигейным* и *апогейным* расстояниями. Величина q — R , где R есть радиус Земли, называется *высотой перигея*.

няется одна из величин δ_0 , V_0 или r_0 . Оставим сначала неизменными начальную скорость V_0 и начальный радиус-вектор r_0 и будем изменять («варьировать») только направление начальной скорости в плоскости орбиты, т. е. угол δ_0 .

Тогда, очевидно, постоянная живой силы h (или — энергия) не будет изменяться и, следовательно тип орбиты будет сохраняться, но ее размеры и форма будут, разумеется, изменяться.

Формула (5.12) показывает, что когда δ_0 возрастает от 0 до 90° , параметр p также возрастает

от нуля до $p_{\max} = \frac{1}{\mu} r_0^2 V_0^2$,

а когда δ_0 изменяется от 90° до 180° , p убывает от $p_{\max}$ до 0. Наоборот, при уменьшении δ_0 (во второй

четверти) параметр p возрастает, а потом (в первой четверти) убывает.

Когда параметр орбиты растет, то орбита как бы «распухает», а когда p убывает, то орбита «сжывается» (рис. 7). Когда δ_0 обращается в нуль или в 180° , а параметр обращается в нуль, орбита вырождается в (конечный или бесконечный) отрезок прямой.

Формула (5.13) показывает, что при изменении δ_0 от нуля до 180° изменение эксцентриситета зависит от знака величины $r_0 V_0^2 - 2\mu$, т. е. от типа орбиты.

Если $r_0 V_0^2 - 2\mu < 0$, т. е. если орбита есть эллипс, то ее эксцентриситет сначала уменьшается от единицы до наименьшего значения, определяемого формулой

$$e_{\min} = \frac{r_0 V_0^2 - \mu}{\mu},$$

а потом увеличивается от $e_{\min}$ до единицы.

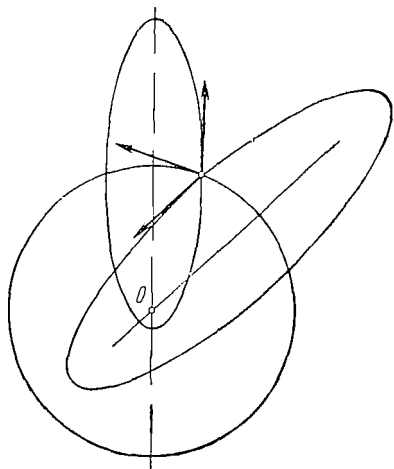


Рис. 7.

Формула (5.14) показывает, что величина q растет (при изменении δ_0 от 0° до 180°) от нуля до r_0 , а затем убывает от r_0 до 0 *).

Формула (5.14') дает неопределенность при $\sin \delta_0 = 0$, которая, впрочем, легко раскрывается при помощи правила Лопиталья и дает величину

$$\frac{2\mu r_0}{2\mu - r_0 V_0^2}.$$

Заметим, что в рассматриваемом случае изменение Q определяется изменением q . В самом деле, для эллипса параметр p , как известно из аналитической геометрии, определяется формулой

$$p = a(1 - e^2),$$

где a есть половина большой оси эллипса («большая полуось»), т. е. половина расстояния между его вершинами, лежащими на фокальной оси. Поэтому для эллипса

$$q = a(1 - e), \quad Q = a(1 + e),$$

а, следовательно,

$$q + Q = 2a.$$

Обращаясь теперь к формуле (5.4'), заменим в ней c^2 на $\mu p = \mu a(1 - e^2)$, что даст важное соотношение между большой полуосью эллиптической орбиты и постоянной энергии

$$a = -\frac{\mu}{h^2}, \quad (5.15)$$

откуда, заменяя h его значением (5.5), получаем также

$$a = \frac{\mu r_0}{2\mu - r_0 V_0^2}. \quad (5.15')$$

Так как в рассматриваемом случае r_0 и V_0 по условию не изменяются, то и большая ось эллипса также остается без изменения, а поэтому когда q возрастает от нуля до r_0 , величина Q убывает от $2a$ до $2a - r_0$.

*) Для того чтобы в этом убедиться, следует подставить вместо p и e их значения, положить $\sin \delta_0 = 1$ и произвести упрощения.

Полезно заметить еще, что малая полуось эллипса b зависит от δ_0 , что видно из легко получаемой формулы

$$b = a \sqrt{1 - e^2} = \frac{r_0 \sqrt{r_0} V_0 \sin \delta_0}{\sqrt{2\mu - r_0 V_0^2}}. \quad (5.15'')$$

Последняя формула еще более наглядно показывает, как «распухает» или «сжывается» эллиптическая орбита в зависимости от изменения угла δ_0 .

Из полученных формул также видно, что в предельном случае, т. е. при $\sin \delta_0 = 0$, эллипс вырождается в конечный отрезок прямой, длина которого равна $2a$ и концы которого являются одновременно и фокусами и вершинами вырожденного эллипса, причем один из концов — перигей — совпадает с началом координат, т. е. с центром силы.

Если $r_0 V_0^2 - 2\mu > 0$, т. е. если орбита есть гипербола, то, как видно опять из формулы (5.13), эксцентриситет e (при возрастании δ_0 от нуля до 90°) также растет от единицы до наибольшего значения, определяемого формулой

$$e_{\max} = \frac{r_0 V_0^2 - \mu}{\mu},$$

а затем (при изменении δ_0 от 90° до 180°) уменьшается от $e_{\max}$ до единицы.

Обозначая через a действительную полуось гиперболы, мы имеем, как известно,

$$p = a(e^2 - 1),$$

откуда

$$q = a(e - 1).$$

Далее, так же, как и в случае эллипса, находим

$$a = + \frac{\mu}{a}, \quad (5.16)$$

или

$$a = \frac{\mu r_0}{r_0 V_0^2 - 2\mu}. \quad (5.16')$$

Мнимая полуось гиперболы b определится формулой

$$b = a \sqrt{e^2 - 1} = \frac{r_0 \sqrt{r_0} V_0 \sin \delta_0}{\sqrt{r_0 V_0^2 - 2\mu}}, \quad (5.16'')$$

которая наглядно показывает, как «распухает» или «съезживается» гипербола при изменении угла δ_0 .

Легко видеть также, что в предельном случае, т. е. при $\sin \delta_0 = 0$, гипербола вырождается в бесконечную полупрямую, выходящую из начала координат, которое является одновременно и вершиной (перигентром) и фокусом вырожденной гиперболы *).

Наконец, если $r_0 V_0^2 - 2\mu = 0$, т. е. если орбита есть парабола, то формула (5.13) дает для эксцентриситета e единственное значение, равное единице, не зависящее вовсе от угла δ_0 .

Формулы (5.12) и (5.14) дают в случае параболы

$$p = 2r_0 \sin^2 \delta_0, \quad q = r_0 \sin^2 \delta_0, \quad (5.17)$$

откуда видно, как «распухает» или «съезживается» парабола при изменении угла δ_0 .

В предельном случае, т. е. при $\sin \delta_0 = 0$, имеем $p = 0$ и $q = 0$, откуда видно, что парабола вырождается в бесконечную полупрямую, проходящую через начало координат, которое является одновременно и вершиной (перигентром) и фокусом вырожденной параболы.

4. Эволюция орбиты при изменении величины начальной скорости и радиуса-вектора. Рассмотрим теперь зависимость формы и размеров орбиты от величины начальной скорости V_0 , которую и будем варьировать, оставляя r_0 и δ_0 неизменными.

Будем изменять V_0 от нуля до бесконечности, и для большей наглядности положим $\delta_0 = 90^\circ$, так что в начальный момент скорость перпендикулярна радиусу-вектору, т. е. начальное положение движущейся точки совпадает с перигентром или с апоцентром (рис. 8).

Когда $V_0 = 0$ (что следует рассматривать как предельный случай), орбита представляет собой отрезок прямой, для которого начало координат является перигентром, а другой конец — апоцентром.

*) В астрономии нас интересует только одна ветвь гиперболы, внутри которой находится центр силы. Но если рассматривать и вторую ветвь гиперболы (по которой движение не может происходить), то нетрудно убедиться, что в предельном случае она вырождается в другую половину бесконечной прямой, исходящей из точки, отстоящей от начала на расстоянии a .

При возрастании начальной скорости от нуля до $\sqrt{\frac{\mu}{r_0}}$ орбита все время остается эллипсом сначала весьма «тощим», но «распухающим» при увеличении V_0 , что ясно видно из формул (5.12), (5.14) и (5.16"). Начальное положение является для всех этих эллипсов общим апоцентром,

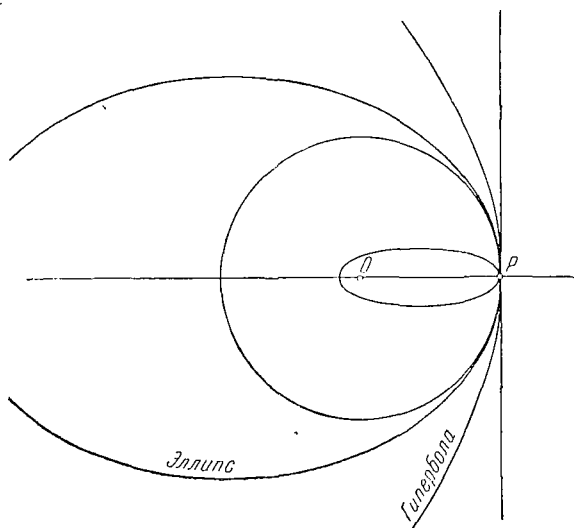


Рис. 8.

а большая полуось эллипса возрастает (как показывает формула (5.15')) от $r_0/2$ до r_0 .

Эксцентриситет эллипса, как следует из (5.13), уменьшается от единицы до нуля, а перигентр перемещается из начала координат в противоположную от начального положения сторону.

При $V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}$ эллипс превращается в окружность с центром в начале координат. Любая точка этой окружности может быть рассматриваема и как перигентр, и как апоцентр, но если считать полученную окружность предельной орбитой, то ее апоцентр будет опять совпадать с начальным положением, а перигентр попадет в противоположный конец

диаметра окружности, проходящего через начальное положение точки.

При дальнейшем увеличении V_0 от $\sqrt{\frac{\mu}{r_0}}$ до $\sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}$ эксцентриситет растет от нуля до единицы и орбита продолжает оставаться эллиптической. Но теперь начальное положение точки делается перигеием, а апоцентр удаляется в противоположную сторону до бесконечности.

При $V_0 = \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}$ орбита превращается в параболу, параметр которой равен $2r_0$ *).

Когда скорость V_0 делается большей чем $\sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}$ и продолжает расти до бесконечности, орбита превращается в гиперболу, для которой начальное положение точки продолжает оставаться перигеием и эксцентриситет которой возрастает от единицы до бесконечности. Действительная полуось гиперболы, как видно из формулы (5.16), уменьшается от ∞ до нуля, а параметр монотонно растет до бесконечности.

В предельном случае, когда V_0 обращается в бесконечность, гипербола превращается в прямую, проходящую через начальное положение перпендикулярно начальному радиус-вектору.

Остается рассмотреть случай, когда меняется только r_0 , а V_0 и δ_0 остаются неизменными. При этом опять для наглядности положим $\delta_0 = 90^\circ$.

Будем изменять r_0 от нуля до бесконечности, предполагая, что V_0 имеет некоторое конечное значение.

Случай $r_0 = 0$ надлежит рассматривать как предельный, в котором орбита вырождается просто в одну точку — начало координат. Когда r_0 растет от нуля до $\frac{\mu}{V_0^2}$, орбита является эллипсом, эксцентриситет которого убывает от единицы до нуля. Так как из формулы (5.14') следует, что $Q = r_0$, то апоцентром эллиптической орбиты является начальное положение точки.

*) Параболу можно рассматривать и как предельный случай эллипса, и как предельный случай гиперболы.

При $r_0 = \frac{\mu}{V_0^2}$ эксцентриситет обращается в нуль и орбита превращается в окружность с центром в начале координат.

При дальнейшем увеличении r_0 от $\frac{\mu}{V_0^2}$ до $\frac{2\mu}{V_0^2}$ орбита продолжает оставаться эллипсом, эксцентриситет которого растет от нуля до единицы. Но теперь, как видно из формулы (5.14), $q = r_0$, т. е. начальное положение точки делается перигеием орбиты, а апоцентр удаляется в противоположную сторону до бесконечности.

При $r_0 = \frac{2\mu}{V_0^2}$ эксцентриситет делается равным единице, и орбита превращается в параболу, параметр которой равен $2r_0$.

Наконец, когда r_0 продолжает расти от $\frac{2\mu}{V_0^2}$ до бесконечности, эксцентриситет становится большим единицы, и орбита делается гиперболой, параметр и эксцентриситет которой монотонно растут. В предельном случае, когда r_0 обращается в бесконечность, орбита превращается в бесконечно удаленную прямую, рассматривать которую не имеет смысла.

Примечание. Подобным же образом можно рассмотреть и более общий случай, когда $\delta_0 \neq 90^\circ$, в котором только невозможны случаи круговых орбит, а поэтому картина эволюции орбиты при изменении V_0 или r_0 делается менее простой и менее наглядной.

Эту эволюцию читатель без особого труда проследит самостоятельно, пользуясь общими формулами, полученными в этом параграфе.

§ 2. Основные типы невозмущенного движения

1. Эллиптическое движение. Уравнение Кеплера. Общие формы невозмущенного движения, выведенные в предыдущей главе, представляют координаты и составляющие скорости движущейся точки (планеты или спутника) в виде явных функций истинной аномалии ψ , которая входит в эти формулы под знаками синусов и косинусов.

Чтобы получить координаты и составляющие скорости как функции времени t , нужно, следовательно, выразить через t истинную аномалию, связь между которой и временем устанавливается посредством соотношения

$$\int_0^v \frac{dv}{(1 + e \cos v)^2} =: \frac{V_{\mu}^-}{p^{3/2}} (t - \tau), \quad (5.18)$$

где τ — момент прохождения через перигеум — есть последний, динамический, элемент кеплеровской орбиты.

Вычисляя интеграл в формуле (5.18), мы можем выразить $t - \tau$ через v , откуда путем обращения можем также получить и v как функцию $t - \tau$.

Однако этот прямой путь решения последней задачи теории невозмущенного движения оказывается невыполнимым, так как требует разрешения трансцендентного уравнения, которое в конечном виде не решается. Поэтому мы выберем другой путь, на котором решение задачи осуществляется посредством введения некоторой вспомогательной переменной, через которую истинная аномалия выражается очень просто, а связь которой с временем определяется также трансцендентным уравнением, но более простым, чем то, которое может получиться на прямом пути.

Эта вспомогательная переменная вводится несколько различными способами для эллиптического и гиперболического движений, а поэтому каждый из этих двух случаев придется рассматривать в отдельности.

Пусть начальные условия таковы, что

$$V_0^2 < \frac{2\mu}{r_0}, \quad f \neq 0, \quad c \neq 0,$$

тогда $0 < e < 1$, и орбита есть эллипс.

Для вычисления интеграла в формуле (5.18) введем вместо v новую переменную E посредством вещественной подстановки

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}, \quad (5.19)$$

из которой видно, что когда v изменяется от нуля до 360° , E также изменяется от нуля до 360° и когда v обращается в нуль, 180° или 360° (т. е. когда точка находится в пери-

центре или в апоцентре), E также обращается в нуль, 180° , 360° соответственно.

Дифференцируя соотношение (5.19), получим

$$\sec^2 \frac{v}{2} dv = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \sec^2 \frac{E}{2} dE; \quad (5.19')$$

но

$$\sec^2 \frac{v}{2} = 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2} = 1 + \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg}^2 \frac{E}{2}, \quad (5.19'')$$

а поэтому из равенства (5.19') найдем

$$dv = \frac{\sqrt{1-e^2} dE}{1-e \cos E}. \quad (5.20)$$

Нам остается выразить еще $1+e \cos v$ через новую переменную E . Заменяя $\cos v$ его выражением из формулы половинного угла *) и воспользовавшись затем формулой (5.19), мы будем иметь, после упрощений,

$$1 + e \cos v = \frac{1-e^2}{1-e \cos E}. \quad (5.21)$$

Подставляя выражения (5.20) и (5.21) в формулу (5.18) и принимая во внимание, что для эллипса $p = a(1-e^2)$, мы получим следующее соотношение:

$$\int_0^E (1 - e \cos E) dE = \frac{\sqrt{1-e^2}}{a^{3/2}} (t - \tau),$$

откуда

$$E - e \sin E = \frac{\sqrt{1-e^2}}{a^{3/2}} (t - \tau).$$

Положим еще

$$n = \frac{\sqrt{1-e^2}}{a^{3/2}} \quad (5.22)$$

и

$$M = n(t - \tau). \quad (5.22')$$

*) $\cos v = 2 \cos^2 \frac{v}{2} - 1$.

Тогда предыдущее уравнение напишется в следующем виде:

$$E - e \sin E = M. \quad (5.23)$$

Это трансцендентное уравнение определяет вспомогательную переменную E , когда e и M даны, и называется *уравнением Кеплера*. Аналитическое решение этого уравнения будет рассмотрено в следующей главе, а сейчас заметим, что при

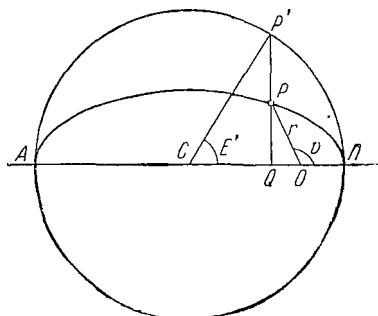


Рис. 9.

численных значениях e и M уравнение Кеплера может быть решено приближенно методом последовательных приближений или графическим путем, или же при помощи специальных таблиц *).

Выясним смысл введенных только что величин E , n , M .

Начертим эллипс (рис. 9), представляющий орбиту движущейся точки и обозначим буквами C , O , P соответственно центр эллипса, фокус (центр силы притяжения) и перигей. Пусть P есть положение движущейся точки на орбите в момент времени t . Тогда $\nu = \angle POR$.

Построим теперь окружность радиуса a , центр которой совпадает с центром эллипса C и опустим перпендикуляр PQ из точки P на линию апсид.

Пусть P' есть пересечение продолжения этого перпендикуляра с окружностью и $E' = \angle PCP'$. Покажем, что E' равно E , определяемому формулой (5.19).

Действительно, из рисунка мы видим, что

$$CQ + QO = CO = ae,$$

но

$$CQ = a \cos E' \text{ и } QO = -r \cos \nu.$$

Поэтому

$$ae = a \cos E' - r \cos \nu. \quad (5.24)$$

*) См., например, Субботин М. Ф., Курс небесной механики, т. I, ОГИЗ, 1941.

Заменяя в этом равенстве r его выражением из уравнения орбиты (5.2) и определяя из полученного соотношения $\cos v$, мы находим

$$\cos v = \frac{\cos E' - e}{1 - e \cos E'}.$$

Далее, из чертежа имеем:

$$P'Q = a \sin E', \quad PQ = r \sin v,$$

но, с другой стороны, по свойствам эллипса

$$\frac{PQ}{P'Q} = \frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}, \quad (5.24')$$

то дает следующее соотношение:

$$r \sin v = a \sqrt{1 - e^2} \sin E'. \quad (5.25)$$

Заменяя здесь r его выражением (5.2) и исключая затем $\cos v$ при помощи (5.25), мы получим

$$\sin v = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E'}{1 - e \cos E'}. \quad (5.25')$$

Формулы (5.25) и (5.25') дают соотношение

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \frac{\sin v}{1 + \cos v} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 - e} \frac{\sin E'}{1 + \cos E'} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \operatorname{tg} \frac{E'}{2},$$

сравнивая которое с подстановкой (5.19), имеем $E' = E$, что мы и хотели показать.

Угол E называется в астрономии *эксцентрической аномалией* и измеряется так же, как и истинная аномалия v , от 0 до 360° в сторону движения.

Очевидно, что когда движущаяся точка (например, планета солнечной системы) обходит полностью свою орбиту, как v , так и E изменяются на 360° .

Пусть движение начинается из перигея. Обозначим через T время полного оборота точки вокруг центра силы по своей эллиптической орбите. Тогда уравнение Кеплера (5.23) дает

$$360^\circ = nT,$$

откуда получаем

$$n = \frac{360^\circ}{T}. \quad (5.26)$$

Следовательно, n есть средняя угловая скорость движущейся точки и поэтому называется в астрономии *средним движением* *). Формула (5.22) показывает, что величина n связана с большой полуосью орбиты, а поэтому может характеризовать размеры орбиты.

Рассмотрим теперь величину M . Формула (5.22') показывает, что эта величина M возрастает пропорционально времени, обращаясь в нуль при $t = \tau$, т. е. когда точка находится в перигеии и когда v и E равны нулю. При $t = \tau + \frac{T}{2}$, т. е. когда движущаяся точка попадает в апоцентр, $M = 180^\circ$ — так же, как v и E . Наконец, когда точка, завершая полный оборот, опять приходит в перигеи, M делается равным 360° , опять так же, как v и E .

Величина M называется *средней аномалией*. Если мы представим теперь фиктивную точку, движущуюся по окружности радиуса a с постоянной угловой скоростью n , то M будет равна углу, который образует радиус-вектор этой фиктивной точки с направлением на перигеи.

Из сказанного выше следует, что фиктивная точка проходит через перигеи и апоцентр одновременно с движущейся точкой и делает по кругу полный оборот за время T .

2. Третий закон Кеплера. Из формул (5.24) и (5.24'), заменяя E' на E , получим также следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} r \cos v &= \xi = a (\cos E - e), \\ r \sin v &= \eta = a \sqrt{1 - e^2} \sin E, \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

где ξ и η суть прямоугольные орбитальные координаты точки, движущейся по эллиптической орбите.

Затем из формул (5.2) и (5.21) выводим выражение для радиуса-вектора движущейся точки в зависимости от эксцентрической аномалии E :

$$r = a (1 - e \cos E). \quad (5.28)$$

Уравнение (5.28) может быть названо *уравнением эллиптической орбиты*. Скорость эллиптического движения

*) Если время, как обычно принято в астрономии, измеряется в средних солнечных сутках, то величину n называют *средним синодическим движением*.

можно определить из интеграла живой силы, заменяя постоянную h ее выражением (5.15) через большую полуось эллипса. Мы имеем

$$V^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (5.29)$$

Приведенные формулы полностью определяют характер движения по эллиптической орбите. Действительно, радиус-вектор точки, определяемой формулой (5.2), является периодической функцией от истинной аномалии ν ; ее период равен 2π . Можно также сказать на основании уравнения (5.28), что r есть также периодическая функция от E и при этом имеет тот же период 2π .

Так как ν (или E) изменяется на 2π за время полного оборота T , то радиус-вектор есть также периодическая функция времени с периодом T .

Скорость V , определяемая формулой (5.29) также есть периодическая функция и от ν и от E , и от времени t . Когда точка приходит в перигей, радиус-вектор получает наименьшее значение $q = a(1 - e)$, а скорость — наибольшее, определяемое формулой

$$V_{\max}^2 = \frac{\mu}{a} \frac{1+e}{1-e},$$

которая получается из формулы (5.29) заменой r на $r_{\min} = q$. Наоборот, когда точка приходит в апогей, r получает наибольшее значение $r_{\max} = Q = a(1 + e)$, а скорость — наименьшее, определяемое формулой

$$V_{\min}^2 = \frac{\mu}{a} \frac{1-e}{1+e}.$$

Из двух последних формул следует также

$$\frac{V_{\min}}{V_{\max}} = \frac{1-e}{1+e} = \frac{r_{\min}}{r_{\max}}, \quad (5.30)$$

т. е. скорости в аписидальных точках обратно пропорциональны расстояниям соответствующих аписид от центра силы.

Отметим теперь, что для эллиптических орбит имеет место третий закон Кеплера, правда, в несколько обобщенном виде.

Для этого заменим в формуле (5.26) среднее движение n его выражением (5.22) через большую полуось, что дает соотношение

$$\frac{\sqrt{\mu} T}{a^{3/2}} = 2\pi \quad (5.31)$$

между периодом полного обращения и большой полуосью, показывающее, что с увеличением размеров орбиты увеличивается также (но не пропорционально!) и период обращения.

Пусть теперь имеем две материальные точки с массами соответственно m_1 и m_2 , каждая из которых движется под действием притяжения массы m_0 . Будем рассматривать движение каждой из этих двух масс относительно массы m_0 и допустим, что начальные условия таковы, что каждая из масс m_1 и m_2 движется вокруг массы m_0 по своей эллиптической орбите. Обозначая через a_1 и a_2 полуоси этих эллиптических орбит, а через T_1 и T_2 — соответственные периоды обращения, будем иметь по формуле (5.31):

$$\frac{\sqrt{\mu_1} T_1}{a_1^{3/2}} = 2\pi, \quad \frac{\sqrt{\mu_2} T_2}{a_2^{3/2}} = 2\pi.$$

Так как $\mu_1 = f(m_0 + m_1)$ и $\mu_2 = f(m_0 + m_2)$, то предыдущие соотношения напишутся следующим образом:

$$\frac{\sqrt{f(m_0 + m_1)} T_1}{a_1^{3/2}} = 2\pi, \quad \frac{\sqrt{f(m_0 + m_2)} T_2}{a_2^{3/2}} = 2\pi.$$

Но здесь f обозначает постоянную закона всемирного тяготения, которая имеет универсальное значение *).

Поэтому, возводя каждое из предыдущих равенств в квадрат и исключая постоянную тяготения f , мы получим следующее важное соотношение:

$$\frac{T_1^2(m_0 + m_1)}{T_2^2(m_0 + m_2)} = \frac{a_1^3}{a_2^3}. \quad (5.31')$$

Мы получили следующее свойство эллиптического движения, которое назовем третьим законом Кеплера.

*) Выше буквой f была обозначена также величина вектора Лапласа.

Третий (обобщенный) закон Кеплера. *В невозмущенном эллиптическом движении двух материальных точек произведения квадратов времен обращения на суммы масс центральной и движущейся точек относятся как кубы больших полуосей орбит.*

Если рассмотреть, например, две какие-нибудь планеты солнечной системы, каждая из которых обращается вокруг Солнца под действием только его притяжения, то получится случай, рассмотренный Кеплером. Так как, кроме того, массы планет весьма малы по сравнению с массой Солнца m_0 , то, пренебрегая этими малыми массами, мы выведем из (5.31')

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}, \quad (5.31'')$$

что и даст третий закон Кеплера в формулировке самого великого ученого.

Квадраты времен обращений двух планет вокруг Солнца относятся, как кубы больших полуосей их эллиптических орбит.

Соотношения (5.31') и (5.31'') играют в астрономии важную роль, ибо позволяют при знании каких-нибудь трех из величин

$$a_1, T_1, a_2, T_2,$$

найти четвертую.

3. Эллиптические элементы. Основные формулы эллиптического движения. Случай эллиптического движения играет в небесной механике наиболее важную роль, а поэтому нуждается во всестороннем рассмотрении.

За элементы эллиптической орбиты могут быть приняты величины (4.54), но обычно в астрономии некоторые из этих величин заменяют другими, более удобными или, во всяком случае, более привычными.

Положение плоскости эллиптической орбиты определяется теми же величинами Ω и i , т. е. *долготой восходящего узла и наклонностью орбиты*. Форма орбиты характеризуется обычно эксцентриситетом e , вместо которого иногда употребляют элемент φ , связанный с e соотношением

$$\sin \varphi = e$$

и называемый *углом эксцентриситета*,

Размеры орбиты обычно определяют величиной большой полуоси эллипса a , вместо которой иногда употребляют также среднее движение n или период T .

Положение линии апсид определяют или величиной ω — *угловым расстоянием перицентра от узла*, или связанной с нею другой величиной π , которая определяется формулой

$$\pi = \Omega + \omega$$

и называется *долготой перицентра* *).

Наконец, вместо элемента τ употребляют обычно значение средней аномалии в начальный момент времени. Этот элемент, обозначаемый буквой M_0 , определяется соотношением

$$M_0 = n(t_0 - \tau)$$

и имеет название *средняя аномалия в эпоху* или *средняя аномалия эпохи*.

Кроме M_0 берут также иногда вместо элемента τ величину ϵ , определяемую следующим образом. Положим

$$l = \Omega + \omega + M = \pi + M.$$

Эта величина называется *средней долготой в орбите* или просто *средней долготой*. Значение средней долготы l в начальный момент t_0 (в эпоху!), обозначаемое обыкновенно через ϵ , так что

$$\epsilon = \Omega + \omega + M_0 = \pi + M_0,$$

и принимают иногда за шестой элемент эллиптической орбиты.

Таким образом, кеплерова эллиптическая орбита характеризуется следующими шестью величинами, которые называются *элементами эллиптической орбиты* или просто

*) Не следует путать долготу перицентра π с известным числом π , представляющим отношение длины окружности к ее диаметру.

элементами орбиты *):

$$\begin{array}{cccccc} \Omega, & i, & \omega, & a, & e, & M_0, \\ & & \pi, & n, & \varphi, & \varepsilon, \\ \alpha_\tau, & \beta_\tau, & \gamma_\tau, & T, & & \tau, \\ \alpha'_\tau, & \beta'_\tau, & \gamma'_\tau, & p & & \end{array} \quad (5.32)$$

Если эти элементы известны, то положение и скорость движущейся точки в любой момент времени t определяются следующей последовательностью формул.

Прежде всего находим среднюю аномалию M по одной из формул:

$$M = n(t - \tau) = n(t - t_0) + M_0 = n(t - t_0) + \varepsilon - \pi; \quad (5.33)$$

затем, решая уравнение Кеплера

$$E - e \sin E = M,$$

находим соответствующее значение эксцентрической аномалии E .

Зная E , получим радиус-вектор r и орбитальные координаты ξ и η по формулам:

$$\left. \begin{array}{l} r = a(1 - e \cos E), \\ \xi = r \cos v = a(\cos E - e), \\ \eta = r \sin v = a \sqrt{1 - e^2} \sin E \end{array} \right\} \quad (5.34)$$

и соответствующее значение истинной аномалии из формулы

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}. \quad (5.35)$$

Истинную аномалию можно также определить из формул (5.34), которые дают $\cos v$ и $\sin v$, а значит, и сам угол v .

*) В первой строчке таблицы (5.32) условимся писать элементы, которые мы желаем считать основными. Под некоторыми основными элементами подписаны в колонке те величины, каждая из которых может заменить основной элемент. Под элементами подписаны еще шесть направляющих косинусов, определяющих положение линии апсид и прямой, перпендикулярной к ней, лежащей в плоскости орбиты. Эти шесть косинусов связаны тремя известными соотношениями, а поэтому могут заменить три элемента орбиты.

Найдя v , получим аргумент широты

$$u = v + \omega = v + \pi - \Omega,$$

а затем прямоугольные координаты x , y , z по известным уже формулам

$$\left. \begin{aligned} x &= r (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\ y &= r (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\ z &= r \sin u \sin i. \end{aligned} \right\} \quad (5.36)$$

Радиус-вектор r можно вычислить также из общего уравнения орбиты, которое в рассматриваемом случае может быть написано в виде

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}. \quad (5.37)$$

Составляющие скорости $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ можно получить по общим формулам (4.55) или (4.57).

В случае эллиптического движения координаты и составляющие скорости удобно также выразить через эксцентрическую аномалию E , которая может играть роль независимой переменной вместо v . Координаты сразу получим по первой группе формул (4.59), в которых ξ и η нужно заменить их выражениями (5.34). Чтобы получить составляющие скорости в функции E , нужно еще найти соответствующие выражения для $\dot{\xi}$ и $\dot{\eta}$.

Дифференцируя формулы (5.34) по t , будем иметь

$$\dot{\xi} = -a \sin E \cdot \dot{E}, \quad \dot{\eta} = a \sqrt{1 - e^2} \cos E \cdot \dot{E}.$$

Чтобы определить $\dot{E}$, дифференцируем по t уравнение Кеплера, что дает

$$(1 - e \cos E) \dot{E} = \dot{M} = n,$$

откуда находим

$$\dot{E} = \frac{n}{1 - e \cos E} = \frac{an}{r},$$

после чего получаем:

$$\dot{\xi} = -\frac{a^2 n \sin E}{r}, \quad \dot{\eta} = \frac{a^2 n \sqrt{1 - e^2} \cos E}{r}. \quad (5.38)$$

Теперь по формулам (4.59) находим искомые выражения для координат и составляющих скорости эллиптического движения в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{a} &= \alpha_{\tau} (\cos E - e) + \alpha'_{\tau} \sqrt{1 - e^2} \sin E, \\ \frac{y}{a} &= \beta_{\tau} (\cos E - e) + \beta'_{\tau} \sqrt{1 - e^2} \sin E, \\ \frac{z}{a} &= \gamma_{\tau} (\cos E - e) + \gamma'_{\tau} \sqrt{1 - e^2} \sin E; \end{aligned} \right\} \quad (5.39)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\dot{x}}{na} &= \frac{a}{r} [-\alpha_{\tau} \sin E + \alpha'_{\tau} \sqrt{1 - e^2} \cos E], \\ \frac{\dot{y}}{na} &= \frac{a}{r} [-\beta_{\tau} \sin E + \beta'_{\tau} \sqrt{1 - e^2} \cos E], \\ \frac{\dot{z}}{na} &= \frac{a}{r} [-\gamma_{\tau} \sin E + \gamma'_{\tau} \sqrt{1 - e^2} \cos E]. \end{aligned} \right\} \quad (5.39')$$

Наконец, скорость V , которая определяется в эллиптическом движении формулой (5.29), также может быть выражена в зависимости от эксцентрической аномалии.

Для этого достаточно заменить в (5.29) радиус-вектор r его значением из формулы (5.34), что дает

$$V^2 = \frac{\mu}{a} \frac{1 + e \cos E}{1 - e \cos E}. \quad (5.40)$$

На этом рассмотрение основных формул для случая эллиптического движения мы можем закончить.

4. Гиперболическое движение. Перейдем к случаю гиперболического движения. Пусть начальные условия таковы, что

$$V_0^2 > \frac{2\mu}{r_0} \quad \text{и} \quad c \neq 0.$$

Тогда $e > 1$ и орбита есть гипербола.

Чтобы вывести соотношение между временем и истинной аномалией, сделаем в формуле (5.18) вещественную подстановку

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{tg} \frac{F}{2}, \quad (5.41)$$

где F — вспомогательная переменная.

Так же, как и в случае эллиптического движения, выведем последовательно

$$\sec^2 \frac{v}{2} dv = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \sec^2 \frac{F}{2} dF, \quad \sec^2 \frac{v}{2} = 1 + \frac{e+1}{e-1} \operatorname{tg}^2 \frac{F}{2},$$

откуда

$$dv = \frac{\sqrt{e^2-1} dF}{e - \cos F}.$$

Далее находим

$$1 + e \cos v = 1 - e + 2e \cos^2 \frac{v}{2} = \frac{(e^2-1) \cos F}{e - \cos F},$$

после чего, принимая $F=0$ при $v=0$, получим из (5.18) следующее соотношение:

$$\int_0^F \frac{e - \cos F}{\cos^2 F} dF = \frac{\sqrt{e^2-1} (e^2-1)^{3/2}}{p^{3/2}} (t - \tau),$$

откуда, наконец, выводим, имея еще в виду, что для гиперболы параметр $p = a(e^2 - 1)$:

$$e \operatorname{tg} F - \ln \operatorname{tg} \left(\frac{F}{2} + 45^\circ \right) = n (t - \tau), \quad (5.42)$$

где положено

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}.$$

Трансцендентное уравнение (5.42), являющееся аналогом уравнения Кеплера, в конечном виде решено быть не может. Однако всегда можно найти решение этого уравнения путем последовательных приближений, или при помощи специальных таблиц, или еще каким-нибудь приближенным способом.

Найдя для данного значения t соответствующее значение переменной F , мы найдем затем истинную аномалию v , а затем и радиус-вектор r из уравнения орбиты (5.2). После этого найдем координаты и составляющие скорости по общим формулам предыдущей главы.

Отметим, что для скорости гиперболического движения можно получить формулу, аналогичную (5.29), заменяя в интеграле живой силы постоянную h ее значением из формулы (5.16), что дает следующую формулу:

$$V^2 = \mu \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right). \quad (5.43)$$

За элементы гиперболического движения (или гиперболической орбиты) принимают следующие величины:

$$\Omega, l, \omega, a, e, \tau,$$

причем вместо ω можно взять также долготу перигея $\pi = \Omega + \omega$, а вместо действительной полуоси a — параметр p или расстояние от центра силы до перигея, т. е. $q = a(e - 1)$.

Чтобы проследить за характером движения, будем увеличивать истинную аномалию ν , начиная от нуля (т. е. от перигея). При $\nu = 0$, или при $t = \tau$, r имеет наименьшее значение, определяемое формулой

$$r_{\min} = q = a(e - 1),$$

а скорость V — наибольшее, определяемое формулой

$$V_{\max}^2 = \frac{\mu}{a} \frac{e + 1}{e - 1}.$$

При возрастании угла ν от нуля до $\bar{\nu} = \arccos(-1/e)$ радиус-вектор r , как видно из уравнения орбиты (5.2), постоянно растет от $r_{\min}$ до бесконечности, а скорость V постоянно убывает от $V_{\max}$ до наименьшего значения $V_{\min}$, которое получается из (5.43) при $r = \infty$ и определяется формулой

$$V_{\min}^2 = \frac{\mu}{a}.$$

Нетрудно и для гиперболического движения получить формулы, аналогичные формулам (5.34) и (5.39).

Прежде всего из выражения для $1 + e \cos \nu$ имеем

$$r = a(e \sec F - 1). \quad (5.44)$$

Далее, из этого же выражения находим $\cos \nu$ и $\sin \nu = \sqrt{1 - \cos^2 \nu}$, после чего, с помощью формулы (5.44), получим

$$\xi = a(e - \sec F), \quad \eta = a \sqrt{e^2 - 1} \operatorname{tg} F. \quad (5.44')$$

Дифференцируя теперь уравнение (5.42), мы найдем

$$\dot{F} = \frac{na \cos F}{r},$$

после чего из формул (5.44') получим

$$\dot{\xi} = \frac{na^2 \operatorname{tg} F}{r}, \quad \dot{\eta} = \frac{na^2 \sqrt{e^2 - 1} \sec F}{r}. \quad (5.44'')$$

Формулы (4.59) дают теперь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{a} &= \alpha_\tau (e - \sec F) + \alpha'_\tau \sqrt{e^2 - 1} \operatorname{tg} F, \\ \frac{y}{a} &= \beta_\tau (e - \sec F) + \beta'_\tau \sqrt{e^2 - 1} \operatorname{tg} F, \\ \frac{z}{a} &= \gamma_\tau (e - \sec F) + \gamma'_\tau \sqrt{e^2 - 1} \operatorname{tg} F, \\ \frac{\dot{x}}{na} &= \frac{a}{r} [\alpha_\tau \operatorname{tg} F + \alpha'_\tau \sqrt{e^2 - 1} \sec F], \\ \frac{\dot{y}}{na} &= \frac{a}{r} [\beta_\tau \operatorname{tg} F + \beta'_\tau \sqrt{e^2 - 1} \sec F], \\ \frac{\dot{z}}{na} &= \frac{a}{r} [\gamma_\tau \operatorname{tg} F + \gamma'_\tau \sqrt{e^2 - 1} \sec F]. \end{aligned} \right\} \quad (5.45)$$

Наконец, формулы (5.43) и (5.44) дают

$$V^2 = \frac{\mu}{a} \frac{e + \cos F}{e - \cos F}. \quad (5.45')$$

Укажем теперь геометрическое значение величины F .

Рассмотрим ветвь гиперболы, по которой происходит движение (рис. 10). Пусть буквы O , Π и C обозначают соответственно фокус, вершину (перицентр) и центр гиперболы.

Если P есть положение движущейся точки в момент времени t , то угол ΠOP есть истинная аномалия φ . Опустим теперь перпендикуляр PQ из точки P на линию апсид (прямая $O\Pi C$) и из точки Q проведем касательную QP' к окружности радиуса a с центром в точке C . Тогда угол $\Pi CP'$ и есть F , что можно легко проверить совершенно так же, как это было сделано в случае эллиптического движения для эксцентрической аномалии E .

Для гиперболического движения можно получить и другие формулы, содержащие вместо тригонометрических функций угла F гиперболические функции другой переменной.

Действительно, введем вместо F новую переменную H посредством подстановки:

$$H = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{F}{2} + 45^\circ \right). \quad (5.46)$$

Тогда, как легко проверить,

$$\operatorname{tg} F = \operatorname{sh} H, \quad \sec F = \operatorname{ch} H, \quad \operatorname{tg} \frac{F}{2} = \operatorname{th} \frac{H}{2}$$

и вместо равенств (5.41), (5.42), (5.44) и (5.44') мы будем

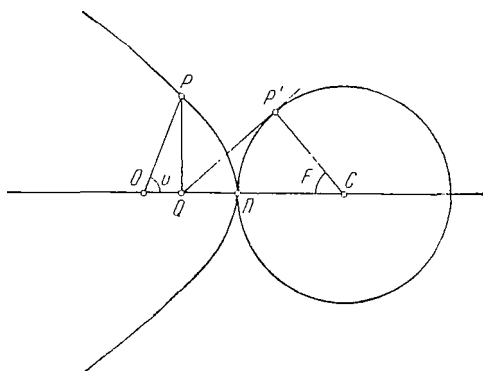


Рис. 10.

иметь следующие соотношения: зависимость между истинной аномалией v и вспомогательной переменной H

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{th} \frac{H}{2}, \quad (5.47)$$

формула, аналогичная уравнению Кеплера

$$e \operatorname{sh} H + H = n(t - \tau), \quad (5.48)$$

уравнение гиперболической орбиты в другом виде

$$r = a(e \operatorname{ch} H - 1), \quad (5.49)$$

орбитальные координаты в зависимости от H

$$\xi = a(e - \operatorname{ch} H), \quad \eta = a \sqrt{e^2 - 1} \operatorname{sh} H. \quad (5.49')$$

Далее, формулы (5.43) и (5.49) дают соотношение, выражающее скорость V через H

$$V^2 = \frac{\mu}{a} \frac{e \operatorname{ch} H + 1}{e \operatorname{ch} H - 1}. \quad (5.50)$$

Дифференцируя теперь уравнение (5.48) и формулы (5.49'), найдем

$$\dot{H} = \frac{na}{r}, \quad \dot{\xi} = -\frac{na^2 \operatorname{sh} H}{r}, \quad \dot{\eta} = \frac{na^2 \sqrt{e^2 - 1} \operatorname{ch} H}{r}, \quad (5.51)$$

после чего формулы (4.49) дают следующие выражения для пространственных координат и составляющих скорости:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{a} &= \alpha_\tau (e - \operatorname{ch} H) + \alpha'_\tau \sqrt{e^2 - 1} \operatorname{sh} H, \\ \frac{y}{a} &= \beta_\tau (e - \operatorname{ch} H) + \beta'_\tau \sqrt{e^2 - 1} \operatorname{sh} H, \\ \frac{z}{a} &= \gamma_\tau (e - \operatorname{ch} H) + \gamma'_\tau \sqrt{e^2 - 1} \operatorname{sh} H; \\ \frac{\dot{x}}{na} &= \frac{a}{r} [-\alpha_\tau \operatorname{sh} H + \alpha'_\tau \sqrt{e^2 - 1} \operatorname{ch} H], \\ \frac{\dot{y}}{na} &= \frac{a}{r} [-\beta_\tau \operatorname{sh} H + \beta'_\tau \sqrt{e^2 - 1} \operatorname{ch} H], \\ \frac{\dot{z}}{na} &= \frac{a}{r} [-\gamma_\tau \operatorname{sh} H + \gamma'_\tau \sqrt{e^2 - 1} \operatorname{ch} H]. \end{aligned} \right\} \quad (5.52)$$

Заметим, что когда движущаяся точка перемещается из перигея, удаляясь в бесконечность, угол F , как следует из его геометрического значения, или из формулы (5.41), постоянно возрастает от нуля до 90° , а переменная H , как видно из формулы (5.46), постоянно растет от нуля до бесконечности.

Примечание. Заметим, что формулы гиперболического движения, в которых независимой переменной является H , вполне подобны соответствующим формулам эллиптического движения, в которых независимой переменной является E .

Сверх того, формулы (5.47), (5.48), (5.49), (5.49'), (5.50), (5.51), (5.52) и (5.53) могут быть формально получены из формул (5.19), (5.23), (5.28), (5.27), (5.40), (5.38), (5.39)

и (5.39') соответственно, если в последних заменить a на $-a$, положить $iE = H(i = \sqrt{-1})$ и иметь в виду, что

$$i \sin E = \frac{e^{iE} - e^{-iE}}{2} = \frac{e^H - e^{-H}}{2} = \operatorname{sh} H,$$

$$\cos E = \frac{e^{iE} + e^{-iE}}{2} = \frac{e^H + e^{-H}}{2} = \operatorname{ch} H,$$

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos E}{1 + \cos E}} = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{ch} H}{1 + \operatorname{ch} H}} = \operatorname{tg} \frac{H}{2},$$

где e обозначает основание натуральных логарифмов, т. е. $e = 2,7182 \dots$

§ 3. Предельные и вырожденные случаи невозмущенного кеплеровского движения

1. Круговое движение. Пусть начальные условия таковы, что мы имеем

$$f_1 = f_2 = f_3 = 0, \quad (5.53)$$

вследствие чего величина вектора Лапласа f делается равной нулю, а его направление становится неопределенным.

Из анализа, проведенного в § 1 этой главы, следует, что условия (5.53) равносильны следующим соотношениям между начальными значениями:

$$\left. \begin{aligned} x_0 \dot{x}_0 + y_0 \dot{y}_0 + z_0 \dot{z}_0 &= 0, \\ \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2 &= \frac{\mu}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (5.53')$$

выполнение которых необходимо и достаточно для осуществления кругового движения.

Таким образом, орбита движущейся точки есть в этом случае окружность, центр которой совпадает с центром силы, а радиус равен начальному радиусу-вектору r_0 .

Так как окружность есть частный случай эллипса, то все формулы кругового движения мы можем получить из соответствующих формул эллиптического движения, полагая в последних эксцентриситет e равным нулю.

Кроме того, так как направление вектора Лапласа (т. е. направление линии апсид) становится неопределенным, то

понятия перигея и апогея утрачивают смысл*), а угловое расстояние перигея от узла также делается неопределенным и его можно принять просто равным нулю.

Поэтому круговая орбита определяется всего четырьмя элементами, за которые примем величины

$$\Omega, i, a, M_0 \quad (5.54)$$

(M_0 обозначает угол, образуемый начальным радиусом-вектором с направлением на восходящий узел орбиты).

Теперь формулы предыдущего параграфа дают

$$r = p = a = r_0, \quad V^2 = V_0^2 = \frac{\mu}{a}, \quad (5.55)$$

затем

$$u = v = E = M = n(t - t_0) + M_0 \quad (5.56)$$

и

$$\left. \begin{aligned} x &= a (\cos M \cos \Omega - \sin M \sin \Omega \cos i), \\ y &= a (\cos M \sin \Omega + \sin M \cos \Omega \cos i), \\ z &= a \sin M \sin i; \end{aligned} \right\} \quad (5.57)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= na (-\sin M \cos \Omega - \cos M \sin \Omega \cos i), \\ \dot{y} &= na (-\sin M \sin \Omega + \cos M \cos \Omega \cos i), \\ \dot{z} &= na \cos M \sin i. \end{aligned} \right\} \quad (5.57')$$

Если ввести орбитальные координаты, полагая

$$\xi = a \cos M, \quad \eta = a \sin M, \quad (5.58)$$

то можно также воспользоваться общими формулами (4.59), которые дают:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{a} &= \alpha_\tau \cos M + \alpha'_\tau \sin M, & \frac{\dot{x}}{na} &= -\alpha_\tau \sin M + \alpha'_\tau \cos M, \\ \frac{y}{a} &= \beta_\tau \cos M + \beta'_\tau \sin M, & \frac{\dot{y}}{na} &= -\beta_\tau \sin M + \beta'_\tau \cos M, \\ \frac{z}{a} &= \gamma_\tau \cos M + \gamma'_\tau \sin M, & \frac{\dot{z}}{na} &= -\gamma_\tau \sin M + \gamma'_\tau \cos M. \end{aligned} \right\} \quad (5.59)$$

*) Если угодно, то любую точку круговой орбиты можно рассматривать и как перигей, и как апогей. Ось абсцисс $O\xi$ в орбитальной системе координат можно также выбрать произвольно и проще всего принять за эту ось линию узлов. Тогда величина ω будет равна нулю.

Имея в виду, что из формул (4.58) и (4.58') при $\omega = 0$ следует

$$\begin{aligned} \alpha_\tau &= \cos \Omega, & \beta_\tau &= \sin \Omega, & \gamma_\tau &= 0, \\ \alpha'_\tau &= -\sin \Omega \cos i, & \beta'_\tau &= \cos \Omega \cos i, & \gamma'_\tau &= \sin i, \end{aligned}$$

мы опять возвратимся к формулам (5.57) и (5.57').

Случай кругового движения, который мы рассматривали здесь как частный случай эллиптического движения, можно также рассматривать как предельный случай эллиптического движения, изменяя начальную скорость V_0 и угол δ_0 , образуемый ею с начальным радиусом-вектором, непрерывным образом так, чтобы мы имели в пределе

$$\lim V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}, \quad \lim \delta_0 = 90^\circ.$$

Ясно, что в действительности случай кругового движения никогда не может быть осуществлен, так как весьма мало вероятно, чтобы начальные условия реальных небесных тел удовлетворяли условиям (5.53').

Однако в астрономии известно множество случаев, когда эти условия почти выполняются, т. е. когда движение планеты или спутника, являясь строго говоря, эллиптическим, весьма мало отличается от кругового. В таких случаях выгодно пользоваться формулами кругового движения, которые значительно проще формул эллиптического движения и в которых и координаты и составляющие скорости выражаются через время явным образом.

С другой стороны, если эксцентриситет эллиптической орбиты, не будучи строго нулем, есть величина малая, то удобно рассматривать круговое движение, как первое приближение к эллиптическому движению.

Эта точка зрения будет использована нами в следующей главе, в которой будут рассмотрены разложения координат кеплеровского движения в бесконечные ряды.

Примечание. Полезно заметить, что круговое движение существует также и в более общей задаче, а именно в задаче о движении материальной точки под действием центральной силы.

В самом деле, рассмотрим случай, когда центральная сила F не зависит от времени, так что

$$F = F(r, \dot{r}), \quad (5.60)$$

и возьмем уравнения (4.66), определяющие полярные орбитальные координаты точки, движущейся под действием силы F .

Легко видеть, что эти уравнения имеют частное решение

$$r = a, \quad \dot{\varphi} = n, \quad (5.61)$$

где a и n — постоянные, связанные соотношением

$$an^2 + F(a, 0) = 0. \quad (5.62)$$

Отсюда видно, что если $F < 0$ (т. е. если действующая сила есть сила притяжения), то каждому значению a соответствует вещественное значение n , откуда следует, что наша задача имеет бесчисленное множество частных решений вида (5.61). Каждому из этих частных решений соответствует равномерное движение точки по окружности, угловая скорость которого зависит от радиуса a этой круговой орбиты и определяется формулой (5.62).

Обозначим через T время полного обращения точки по своей круговой орбите. Тогда

$$n = \frac{2\pi}{T},$$

и из формулы (5.62) можно вывести следующую

$$\frac{T^2}{a^3} = -\frac{4\pi^2}{a^2 \cdot F(a, 0)}, \quad (5.62')$$

из которой вытекает третий закон Кеплера для круговых орбит задачи кеплеровского движения.

Если в рассматриваемой общей задаче существует силовая функция $U(r)$, то

$$F(r) = U'(r)$$

и условие (5.62) примет вид

$$an^2 + U'(a) = 0$$

(здесь штрих обозначает производную по r или по a).

Для фактического определения кругового движения в рассматриваемой задаче можно использовать, очевидно, те же формулы (5.57) или (5.59), в которых только постоянная a должна быть определена по формуле (5.62').

2. Параболическое движение. Пусть начальные условия связаны соотношением

$$\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2 = \frac{2\mu}{V x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}, \quad c \neq 0; \quad (5.63)$$

тогда $h=0$, $e=1$ и орбита есть парабола. Уравнение орбиты напишется в виде

$$r = \frac{p}{1 + \cos v} = q \sec^2 \frac{v}{2}, \quad (5.64)$$

где q — расстояние от фокуса параболы до вершины, т. е. до перигентра.

Чтобы получить необходимые формулы параболического движения, нужно прежде всего выразить истинную аномалию v в зависимости от времени, для чего служит опять то же уравнение (5.18), которое в рассматриваемом случае принимает следующий вид:

$$\frac{1}{2} \int_0^v \sec^4 \frac{v}{2} dv = \frac{V_\mu}{V^2 q^{3/2}} (t - \tau).$$

Простым интегрированием (без всякой подстановки!) найдем следующее уравнение:

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{v}{2} = n(t - \tau), \quad (5.65)$$

где для сокращения положено

$$n = \frac{V_\mu}{V^2 q^{3/2}}.$$

Уравнение (5.65) проще соответствующего уравнения в теории эллиптического и гиперболического движения и сводится к кубическому уравнению относительно $\operatorname{tg} \frac{v}{2}$.

Действительно, положим

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sigma. \quad (5.66)$$

Тогда уравнение (5.65) примет вид

$$\sigma^3 + 3\sigma = 3n(t - \tau). \quad (5.65')$$

Это уравнение всегда имеет единственный вещественный корень, который может быть найден любым из приближенных способов решения алгебраического уравнения. Зная σ , найдем соответствующее значение половины истинной аномалии $v/2$, которая в параболическом движении может принимать значения только в первой и второй четверти ($-90^\circ \leq v/2 \leq +90^\circ$).

Определив v , найдем r из уравнения параболической орбиты (5.64) и скорость V из интеграла живой силы, который для параболического движения принимает вид

$$V^2 = \frac{2\mu}{r}. \quad (5.67)$$

Элементами параболического движения являются следующие пять величин:

$$\Omega, i, \omega, q, \tau \quad (5.68)$$

(для параболы e всегда равно единице).

Зная r и v , мы можем определить пространственные координаты и составляющие скорости по общим формулам главы четвертой.

Однако можно получить более удобные формулы параболического движения, принимая за независимую переменную величину σ вместо v .

Действительно, с помощью подстановки (5.66) уравнение орбиты (5.64) примет следующий вид:

$$r = q(1 + \sigma^2). \quad (5.69)$$

Далее, из формулы (5.66) имеем

$$\cos v = \frac{1 - \sigma^2}{1 + \sigma^2}, \quad \sin v = \frac{2\sigma}{1 + \sigma^2},$$

что позволяет выразить орбитальные координаты ξ и η в зависимости от σ по формулам

$$\begin{aligned} \xi &= r \cos v = q(1 - \sigma^2), \\ \eta &= r \sin v = 2q\sigma. \end{aligned} \quad (5.70)$$

Теперь из (5.65') и (5.64) получаем

$$\dot{\sigma} = \frac{nq}{r},$$

вследствие чего из формул (5.70) найдем

$$\dot{\xi} = -\frac{2nq^2\sigma}{r}, \quad \dot{\eta} = \frac{2nq^2}{r}, \quad (5.70')$$

после чего получаем координаты и составляющие скорости по формулам (4.59) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{q} &= \alpha_{\tau}(1 - \sigma^2) + 2\alpha'_{\tau}\sigma, & \frac{\dot{x}}{nq} &= \frac{2q}{r} [-\alpha_{\tau}\sigma + \alpha'_{\tau}], \\ \frac{y}{q} &= \beta_{\tau}(1 - \sigma^2) + 2\beta'_{\tau}\sigma, & \frac{\dot{y}}{nq} &= \frac{2q}{r} [-\beta_{\tau}\sigma + \beta'_{\tau}], \\ \frac{z}{q} &= \gamma_{\tau}(1 - \sigma^2) + 2\gamma'_{\tau}\sigma, & \frac{\dot{z}}{nq} &= \frac{2q}{r} [-\gamma_{\tau}\sigma + \gamma'_{\tau}]. \end{aligned} \right\} \quad (5.71)$$

Характер параболического движения выясняется из уравнения орбиты и интеграла живой силы.

Пусть время прохождения через перигеи τ больше, чем начальная эпоха t_0 . Тогда точка движется по параболической орбите к перигею с возрастающей скоростью.

При $t = \tau$ точка проходит через перигеи; здесь радиус-вектор имеет наименьшее значение, равное q , а скорость — наибольшее, определяемое формулой

$$V_{\max}^2 = \frac{2\mu}{q}.$$

После прохождения через перигеи точка постоянно удаляется от центра силы и уходит в бесконечность, так как при $\nu = 180^\circ$ $r = \infty$. Уравнение (5.65) показывает, что уход в бесконечность совершается в бесконечное время, а из формулы (5.67) следует, что скорость V постоянно убывает и стремится к нулю, когда r неограниченно растет.

Параболическое движение — так же, как и круговое — является предельным случаем эллиптического или гиперболического движения и в действительности никогда не осуществляется.

Однако в астрономии нередко встречаются случаи движения комет по весьма вытянутым эллиптическим орбитам, метеоритов по весьма вытянутым гиперболическим орбитам. И в том и в другом случае эксцентриситет орбиты весьма близок к единице, а следовательно, движение светила, по крайней мере вблизи перигея (т. е. вблизи Солнца) мало

отличается от параболического движения и может быть рассчитано по формулам настоящего раздела.

С другой стороны, парабола как бы отделяет эллипсы от гипербол, а поэтому понятие *параболической скорости*, как некоторого предела скоростей эллиптических и гиперболических, имеет в астрономии весьма важное значение.

Это понятие приобрело еще большее значение в последние годы, когда начала развиваться «небесная баллистика» и когда стали осуществляться полеты ракет и космических кораблей в далекие от Земли области космического пространства.

В этой области, как известно, для того, чтобы иметь возможность неограниченно удаляться от Земли, нужно сообщить летательному аппарату начальную скорость, б о л ь ш у ю п а р а б о л и ч е с к о й. Наоборот, если мы желаем, чтобы наша ракета вернулась (без затраты дополнительного горючего) обратно к Земле, то мы должны сообщить ей начальную скорость, м е н ь ш у ю п а р а б о л и ч е с к о й.

Параболическое движение, как предельное движение, играет также важную роль в общетеоретических исследованиях свойств движений систем многих материальных точек, например, в исследованиях, относящихся к знаменитой задаче трех тел.

3. Прямолинейное движение. Перейдем, в заключение, к третьему случаю невозмущенного движения, т. е. к движению прямолинейному.

Пусть начальные значения координат и составляющих скорости таковы, что мы имеем

$$y_0 \dot{z}_0 - z_0 \dot{y}_0 = 0, \quad z_0 \dot{x}_0 - x_0 \dot{z}_0 = 0, \quad x_0 \dot{y}_0 - y_0 \dot{x}_0 = 0. \quad (5.72)$$

Тогда все три постоянные площадей c_1, c_2, c_3 равны одновременно нулю, а значит и $c = 0$.

В этом случае, как уже отмечалось, постоянная f не может быть равна нулю, а постоянная h может иметь любое значение.

Плоскость орбиты в этом случае становится неопределенной, параметр p обращается в нуль, а эксцентриситет e равен единице.

Мы уже знаем, что при условиях (5.72) движение точки происходит по прямой линии, проходящей через начало координат (центр силы притяжения).

Условия (5.72) являются не только достаточными для прямолинейного движения, но и необходимыми, так что если все три постоянные площадей не равны одновременно нулю, то траектория заведомо будет кривой линии.

Чтобы убедиться в этом, вычислим кривизну линии, по которой происходит движение, определяемое дифференциальными уравнениями (4.6). Обозначая кривизну пространственной кривой буквой K , имеем из дифференциальной геометрии общую формулу:

$$K^2 = \frac{(\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y})^2 + (\dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{z})^2 + (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})^2}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^3}.$$

Но из уравнений движения (4.6) находим

$$\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y} = \frac{\mu}{r^3} (y\dot{z} - z\dot{y}) = \frac{\mu c_1}{r^3}$$

и аналогично

$$\dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{z} = \frac{\mu c_2}{r^3}, \quad \dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} = \frac{\mu c_3}{r^3},$$

вследствие чего выражение для кривизны траектории в невозмущенном движении принимает вид

$$K = \frac{\mu c}{r^3 V^3},$$

откуда следует, что K тождественно равно нулю только в случае, когда $c = 0$, т. е. когда $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

Заметим теперь, что в рассматриваемом случае, т. е. когда все три постоянные площадей равны нулю, интегралы площадей принимают вид

$$y\dot{z} - z\dot{y} = 0, \quad z\dot{x} - x\dot{z} = 0, \quad x\dot{y} - y\dot{x} = 0$$

или

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{z}{y} \right) = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{x}{z} \right) = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{y}{x} \right) = 0.$$

Интегрируя последние уравнения, получаем три новых интеграла

$$\frac{z}{y} = \frac{z_0}{y_0}, \quad \frac{x}{z} = \frac{x_0}{z_0}, \quad \frac{y}{x} = \frac{y_0}{x_0},$$

откуда, в свою очередь, следуют уравнения

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}, \quad (5.73)$$

являющиеся уравнениями прямой линии, проходящей через начало координат и через начальное положение движущейся точки.

Из уравнений (5.73) выводим также

$$x = \frac{x_0}{r_0} r, \quad y = \frac{y_0}{r_0} r, \quad z = \frac{z_0}{r_0} r, \quad (5.73')$$

откуда следует, что окончательное решение задачи приводится к нахождению единственной неизвестной — радиуса-вектора движущейся точки r как функции времени.

Уравнения (5.73) дают также, очевидно,

$$\dot{x} = \frac{x_0}{r_0} \dot{r}, \quad \dot{y} = \frac{y_0}{r_0} \dot{r}, \quad \dot{z} = \frac{z_0}{r_0} \dot{r},$$

откуда следует, что

$$V = \dot{r},$$

вследствие чего получим из интеграла живой силы следующее уравнение:

$$\dot{r}^2 = \frac{2\mu}{r} + h, \quad (5.74)$$

интегрирование которого дает

$$\int_{r_0}^r \frac{\sqrt{r} \, dr}{V^2 \mu + h r} = \pm (t - t_0).$$

Интеграл, входящий в это равенство, — элементарный, но его вычисление зависит от знака постоянной h , т. е. от типа движения.

Проще всего вычисляется интеграл в случае $h = 0$, т. е. когда мы имеем параболическое (вырожденное) движение.

В этом случае из предыдущего равенства находим

$$r = \left[r_0^{3/2} \pm \frac{3\sqrt{2}}{V^2 \mu} (t - t_0) \right]^{2/3}, \quad (5.75)$$

откуда заключаем, что при $\dot{r}_0 > 0$ r неограниченно растет со временем, а при $\dot{r}_0 < 0$ r постоянно убывает от начального значения r_0 до нуля, обращаясь в нуль при

$$t = t_0 + \frac{\sqrt{\mu}}{3V^2} r_0^{3/2}. \quad (5.75')$$

Если $h > 0$, т. е. если мы имеем гиперболическое (вырожденное) движение, то из уравнения (5.74') находим *):

$$\pm(t - t_0) = \left[\frac{2\sqrt{r}}{h} - \frac{2\sqrt{2\mu}}{h\sqrt{h}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{hr}{2\mu}} \right]_{r_0}^r, \quad (5.76)$$

а при $h < 0$, т. е. в случае эллиптического (вырожденного) движения, имеем *)

$$\pm(t - t_0) = \left[\frac{2\sqrt{r}}{h} - \frac{2\sqrt{2\mu}}{h\sqrt{-h}} \ln \frac{2\mu - hr + 2\sqrt{-2\mu h}}{\sqrt{2\mu + hr}} \right]_{r_0}^r. \quad (5.77)$$

За произвольные постоянные прямолинейного движения можно принять начальные координаты x_0, y_0, z_0 и начальную скорость $V_0 = \dot{r}_0$. Координаты и составляющие скорости в любой момент времени выразятся тогда в зависимости от времени и четырех произвольных постоянных.

Заметим, что определить r как функцию времени из уравнений (5.76) и (5.77) в конечном виде невозможно, так как каждое из этих уравнений трансцендентно относительно радиуса-вектора r .

Но вырожденное эллиптическое и гиперболическое движения можно рассматривать как предельные случаи соответствующего невырожденного движения, откуда следует, что для прямолинейного движения в случае $h \neq 0$ можно сохранить те же формулы, которые мы получили в предыдущем параграфе.

Поэтому в случае $h < 0$ мы можем положить $h = -\frac{\mu}{a}$ и определить радиус-вектор r из уравнения эллиптической орбиты (5.28), полагая в последнем $e = 1$, что дает для r следующее уравнение:

$$r = a(1 - \cos E) = 2a \sin^2 \frac{E}{2}, \quad (5.76')$$

где вспомогательная переменная E определяется из уравнения Кеплера (при $e = 1$):

$$E - \sin E = n(t - \tau). \quad (5.76'')$$

*) См. Рыжик И. М. и Градштейн И. С., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Гостехиздат, 1951.

Нетрудно убедиться, что в вырожденном случае (который получается из случая эллиптического движения при $c = 0$) величина E сохраняет свое геометрическое значение, т. е. E есть угол, который образует радиус-вектор проекции движущейся точки на окружность радиуса a с центром в точке c с прямой, по которой происходит движение.

Свойства вырожденного эллиптического движения легко обнаруживаются из уравнений (5.77), (5.76') и (5.76'').

Если $h > 0$, то положим $h = \frac{\mu}{a}$ и определим радиус-вектор r формулой

$$r = a(\sec F - 1), \quad (5.77')$$

или формулой

$$r = a(\operatorname{ch} H - 1),$$

где вспомогательная переменная определяется уравнением

$$\operatorname{tg} F - \ln \operatorname{tg} \left(\frac{F}{2} + 45^\circ \right) = n(t - \tau) \quad (5.77'')$$

или соответственно уравнением

$$\operatorname{sh} H - H = n(t - \tau),$$

а свойства движения легко выводятся из приведенных формул.

Нетрудно убедиться, что вспомогательная переменная F также сохраняет свое геометрическое значение, почти такое же, как и в случае невырожденного гиперболического движения.

§ 4. Зависимость элементов невозмущенного кеплеровского движения от начальных условий

1. Определение кеплеровских элементов для любого типа орбиты. Пусть произвольно заданы вещественные числа

$$x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, \quad (5.78)$$

представляющие собой начальные значения прямоугольных пространственных координат и их первых производных по времени, соответствующие произвольно выбранному начальному моменту времени t_0 (*начальная эпоха* или просто *эпоха*).

Требуется определить соответствующие значения общих для всякого типа движения элементов

$$\Omega, l, p, e, \omega, \tau \quad (5.79)$$

и некоторые другие, зависящие от этих элементов, величины.

Прежде всего находим

$$\begin{aligned} r_0 &= \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}, \\ V_0 &= \sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2}, \\ \cos \delta_0 &= \frac{x_0 \dot{x}_0 + y_0 \dot{y}_0 + z_0 \dot{z}_0}{r_0 V_0}, \end{aligned}$$

после чего вычисляем соответствующие значения произвольных постоянных первых интегралов, как это указано в § 2 главы четвертой. Мы имеем для этого следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= y_0 \dot{z}_0 - z_0 \dot{y}_0, \\ c_2 &= z_0 \dot{x}_0 - x_0 \dot{z}_0, \\ c_3 &= x_0 \dot{y}_0 - y_0 \dot{x}_0, \\ c &= + \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}, \end{aligned} \right\} \quad (5.80)$$

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= -\frac{\mu x_0}{r_0} + c_3 \dot{y}_0 - c_2 \dot{z}_0, \\ f_2 &= -\frac{\mu y_0}{r_0} + c_1 \dot{z}_0 - c_3 \dot{x}_0, \\ f_3 &= -\frac{\mu z_0}{r_0} + c_2 \dot{x}_0 - c_1 \dot{y}_0, \\ f &= + \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}, \end{aligned} \right\} \quad (5.80')$$

$$h = V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}, \quad (5.80'')$$

причем должны выполняться соотношения

$$\begin{aligned} c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 &= 0, \\ f^2 &= \mu^2 + hc^2. \end{aligned}$$

Из соотношений

$$\sin i \sin \Omega = \frac{c_1}{c},$$

$$\sin i \cos \Omega = -\frac{c_2}{c},$$

$$\cos i = \frac{c_3}{c}$$

имеем

$$\operatorname{tg} \Omega = -\frac{c_1}{c_2}, \quad \operatorname{tg} i = \frac{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}{c_3}.$$

Так как знаки синуса и косинуса долготы узла известны, то однозначно определяем угол

$$\Omega = \operatorname{arctg}\left(-\frac{c_1}{c_2}\right). \quad (5.81)$$

По условию $0 \leq i \leq 180^\circ$. Поэтому четверть, в которой заключен угол i , определяется знаком постоянной c_3 . Отсюда однозначно определяется наклонность

$$i = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}{c_3}. \quad (5.81')$$

Полезно отметить, что мы имеем, в частности,

$$i = 0, \quad \text{если} \quad c_1 = c_2 = 0 \quad \text{и} \quad c_3 > 0,$$

$$i = 180^\circ, \quad \text{если} \quad c_1 = c_2 = 0 \quad \text{и} \quad c_3 < 0,$$

$$i = 90^\circ, \quad \text{если} \quad c_1^2 + c_2^2 \neq 0 \quad \text{и} \quad c_3 = 0.$$

Далее находим

$$p = \frac{c^2}{\mu} = \frac{1}{\mu} r_0^2 V_0^2 \sin^2 \delta_0 \quad (5.82)$$

и

$$e = \frac{f}{\mu} = \sqrt{1 + \frac{1}{\mu^2} r_0 V_0^2 (r_0 V_0^2 - 2\mu) \sin^2 \delta_0}. \quad (5.82')$$

Для определения углового расстояния перигентра от узла ω можно использовать формулы (4.51) или (4.51').

Возьмем, например, формулы (4.51). Если $\cos i \neq 0$, то из первых двух формул (4.51) имеем следующие:

$$\left. \begin{aligned} \sin \omega &= \frac{-f_1 \sin \Omega + f_2 \cos \Omega}{f \cos i}, \\ \cos \omega &= \frac{f_1 \cos \Omega + f_2 \sin \Omega}{f}, \end{aligned} \right\} \quad (5.83)$$

которые дают $\sin \omega$ и $\cos \omega$ по величине и по знаку, так как Ω и i уже определены. Таким образом, известна четверть, в которой содержится угол ω , а для самой величины ω можем получить из предыдущих формул следующую

$$\omega = \arctg \left(\frac{cf_3}{c_1 f_2 - c_2 f_1} \right). \quad (5.83')$$

Если $\cos i = 0$, то возьмем, например, вторую и третью из формул (4.51'), которые дают

$$\begin{aligned} \sin \omega &= \frac{f_3}{f}, \\ \cos \omega &= \frac{f_2}{f \sin \Omega}, \end{aligned}$$

откуда, так же как и выше, получим

$$\omega = \arctg \left(\frac{f_3 \sin \Omega}{f_2} \right). \quad (5.83'')$$

Остается определить τ — момент прохождения через перигеицентр, для чего используем формулы (4.52). Полагая в этих формулах $t = t_0$, т. е. $u = u_0$, мы выводим, если $\cos i \neq 0$,

$$\left. \begin{aligned} \sin u_0 &= \frac{-x_0 \sin \Omega + y_0 \cos \Omega}{r_0 \cos i}, \\ \cos u_0 &= \frac{x_0 \cos \Omega + y_0 \sin \Omega}{r_0}. \end{aligned} \right\} \quad (5.84)$$

Эти соотношения определяют величины и знаки $\sin u_0$ и $\cos u_0$, т. е. дают возможность определить четверть, в которой лежит угол u_0 , величина которого может быть получена также из формулы

$$u_0 = \arctg \left(\frac{cz_0}{c_1 y_0 - c_2 x_0} \right). \quad (5.84')$$

Если $\cos i = 0$, то второе и третье равенства (4.52) примут вид

$$\sin u_0 = \frac{z_0}{r_0},$$

$$\cos u_0 = \frac{y_0}{r_0 \sin \Omega},$$

откуда

$$u_0 = \operatorname{arctg} \left(\frac{z_0 \sin \Omega}{y_0} \right).$$

Зная u_0 , получим также начальное значение истинной аномалии

$$v_0 = u_0 - \omega,$$

и, наконец, величину τ из формулы (4.45):

$$\tau = t_0 - \frac{p^2}{c} \int_0^{v_0} \frac{dv}{(1 + e \cos v)^2}. \quad (5.85)$$

Но для фактического нахождения величины τ нужно прежде вычислить интеграл в формуле (4.45), а это делается, как мы уже знаем, по-разному для различных случаев кеплеровского движения.

Поэтому нужно рассмотреть различные типы движения в отдельности.

2. Определение эллиптических элементов. Для эллиптического движения $h < 0$ и $e < 1$.

Большая полуось эллиптической орбиты a определяется уже известной формулой

$$a = \frac{\mu r_0}{2\mu - V_0^2}, \quad (5.86)$$

с помощью которой находим также среднее движение

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{2\mu}{r_0} - V_0^2 \right)^{3/2}. \quad (5.86')$$

Теперь, зная v_0 , найдем также начальное значение эксцентрической аномалии E_0 из формулы

$$E_0 = 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{v_0}{2} \right), \quad (5.87)$$

причем нужно отметить, что $E_0/2$ и $v_0/2$ лежат в одной четверти, так что предыдущая формула определяет E_0 однозначно.

Найдя E_0 , сразу получим среднюю аномалию эпохи M_0 , т. е. среднюю аномалию в начальный момент

$$M_0 = E_0 - e \sin E_0, \quad (5.87')$$

что и принимают обычно за шестой элемент эллиптического движения.

Зная M_0 , определим, наконец, величину τ :

$$\tau = t_0 - \frac{1}{n} M_0 \quad (5.87'')$$

и, если угодно, среднюю долготу эпохи

$$\varepsilon = M_0 + \Omega + \omega, \quad (5.87''')$$

чем и завершается определение элементов в случае эллиптического движения.

Если мы имеем случай гиперболического движения, то по найденному значению v_0 определим сначала начальное значение вспомогательной переменной F или H по формулам:

$$\left. \begin{aligned} F_0 &= 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \operatorname{tg} \frac{v_0}{2} \right), \\ H_0 &= 2 \operatorname{Arth} \left(\sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \operatorname{tg} \frac{v_0}{2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (5.88)$$

после чего немедленно получим величину τ по одной из двух следующих формул:

$$\left. \begin{aligned} \tau &= t_0 - \frac{1}{n} \left[e \operatorname{tg} F_0 - \ln \operatorname{tg} \left(\frac{F_0}{2} + 45^\circ \right) \right], \\ \tau &= t_0 - \frac{1}{n} [e \operatorname{sh} H_0 - H_0]. \end{aligned} \right\} \quad (5.88')$$

Наконец, если $h=0$ и $e=1$, что соответствует параболическому движению, то, найдя сначала для начального момента значение переменной σ по формуле

$$\sigma_0 = \operatorname{tg} \frac{v_0}{2}, \quad (5.89)$$

мы получим затем и величину τ :

$$\tau = t_0 - \frac{1}{n} \left(\sigma_0 + \frac{1}{3} \sigma_0^3 \right). \quad (5.89')$$

Если начальные условия таковы, что мы имеем $\delta_0 = 90^\circ$ и $V_0^2 = \frac{\mu}{r_0}$, то движение точки является круговым и определение элементов еще более упрощается.

Элементы Ω , i , $p = a$ находятся так же, как и в общем случае. Затем формула (5.82') дает $e = 0$, а формулы (5.83) показывают, что ω есть величина неопределенная и ее можно взять равной нулю или просто исключить из рассмотрения, так как этот элемент в формулы кругового движения все равно не входит.

Тогда, определяя по формулам (5.84), которые сохраняются и для кругового движения, величину u_0 , мы будем иметь

$$M_0 = u_0. \quad (5.90)$$

что и завершает определение элементов для кругового движения.

Что касается прямолинейного движения, то для него, как уже указывалось, за элементы можно принять начальные координаты и начальную радиальную скорость $\dot{r}_0$, которая по заданным величинам (5.78) определится очевидной формулой

$$\dot{r}_0 = V_0 = \sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2}. \quad (5.91)$$

Зная r_0 , мы можем найти величину a (вырожденную большую или действительную полуось) по формулам (5.29) или (5.43), что дает

$$a = \frac{\pm \mu r_0}{2\mu - r_0 \dot{r}_0^2} \quad (5.91')$$

и величину n по формуле

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}.$$

Теперь найдем момент прохождения через перигеум τ . Действительно, формулы (5.76') и (5.77') дают

$$E_0 = \arccos \left(\frac{a - r_0}{a} \right), \quad F_0 = \arccos \left(\frac{a}{a + r_0} \right),$$

после чего из формул (5.76'') и (5.77'') получим

$$\tau = t_0 - \frac{1}{n} (E_0 - \sin E_0), \quad (h < 0)$$

$$\tau = t_0 - \frac{1}{n} \left[\operatorname{tg} F_0 - \ln \operatorname{tg} \left(\frac{F_0}{2} + 45^\circ \right) \right]. \quad (h > 0)$$

Для прямолинейного движения представляет еще интерес определить время, за которое радиус-вектор r обращается в нуль (*время падения*). Для прямолинейного параболического движения эта задача уже решена: время падения, дается формулой (5.75').

Для прямолинейного эллиптического движения этот момент найдется из формулы (5.76''). Действительно, в момент падения, очевидно, $E = \pi$, и мы найдем

$$t_{\text{над}} = \tau + \frac{\pi}{n}.$$

Для прямолинейного гиперболического движения «падение» возможно только при условии $\dot{r}_0 < 0$ и совпадает с прохождением через перигеум вырожденной гиперболы, который совпадает с центром силы притяжения.

3. Изменение элементов орбиты при изменении начальных условий. Мы предполагали до сих пор, что начальные значения (5.78) заданы и известны с абсолютной точностью.

Но обыкновенно точные значения величин (5.78) неизвестны, а заданные их числовые значения являются приближенными и содержат какие-то ошибки. Тогда возникает вопрос о том, какие ошибки будут содержать элементы орбиты, которые в конечном счете суть некоторые функции величин (5.78)?

С другой стороны, считая даже начальные условия (5.78) абсолютно точными, мы можем поставить имеющую определенный интерес для приложений задачу об определении изменений элементов, когда величины (5.78) мы желаем несколько изменить.

И тот и другой подходы к проблеме изменения начальных условий приводят нас к следующей задаче: *величины (5.78) получают некоторые приращения (положительные или отрицательные); требуется определить соответствующие приращения элементов невозмущенной орбиты.*

Мы рассмотрим эту задачу только для того случая, когда приращения начальных значений величин (5.78) суть величины достаточно малые, так что вторыми и высшими степенями этих величин можно полностью пренебречь. Тогда соответствующие приращения элементов определяются при помощи правил дифференциального исчисления. Действительно, пусть Φ есть заданная функция величин (5.78). Если приращения начальных значений координат и составляющих скорости обозначим соответственно через Δx_0 , Δy_0 , Δz_0 , $\Delta \dot{x}_0$, $\Delta \dot{y}_0$, $\Delta \dot{z}_0$, то полное приращение величины Φ определится по формуле

$$\Delta \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_0} \Delta x_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial y_0} \Delta y_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial z_0} \Delta z_0 + \\ + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_0} \Delta \dot{x}_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}_0} \Delta \dot{y}_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{z}_0} \Delta \dot{z}_0. \quad (5.92)$$

Мы будем называть для сокращения величины

$$\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0, \Delta \dot{x}_0, \Delta \dot{y}_0, \Delta \dot{z}_0 \quad (5.93)$$

возмущениями начальных значений (5.78), а величину $\Delta \Phi$, определяемую формулой (5.92) — *возмущением величины Φ* .

Найти непосредственно по формуле (5.92) возмущения элементов орбиты (5.79) довольно затруднительно, так как нужные формулы получаются длинными и громоздкими. Поэтому мы будем определять возмущения элементов орбиты через возмущения промежуточных величин, которыми являются постоянные первых интегралов и некоторые удобные комбинации величин (5.78).

Прежде всего определим возмущения радиуса-вектора, начальной скорости и начального значения угла, образуемого вектором начальной скорости с начальным радиусом-вектором. Мы имеем, очевидно,

$$\left. \begin{aligned} \Delta r_0 &= \frac{x_0}{r_0} \Delta x_0 + \frac{y_0}{r_0} \Delta y_0 + \frac{z_0}{r_0} \Delta z_0, \\ \Delta V_0 &= \frac{\dot{x}_0}{V_0} \Delta \dot{x}_0 + \frac{\dot{y}_0}{V_0} \Delta \dot{y}_0 + \frac{\dot{z}_0}{V_0} \Delta \dot{z}_0, \\ \Delta r'_0 &= \dot{x}_0 \Delta x_0 + \dot{y}_0 \Delta y_0 + \dot{z}_0 \Delta z_0 + x_0 \Delta \dot{x}_0 + y_0 \Delta \dot{y}_0 + z_0 \Delta \dot{z}_0, \\ \Delta \delta_0 &= \frac{\operatorname{ctg} \delta_0}{r_0 V_0} (V_0 \Delta r_0 + r_0 \Delta V_0) - \frac{\operatorname{csc} \delta_0}{r_0 V_0} \Delta r'_0. \end{aligned} \right\} \quad (5.94)$$

В дальнейшем будем считать возмущения Δr_0 , ΔW_0 и $\Delta \delta_0$ величинами известными.

Теперь формулы (5.80) дают соответственно

$$\left. \begin{aligned} \Delta c_1 &= \dot{z}_0 \Delta y_0 - \dot{y}_0 \Delta z_0 - z_0 \Delta \dot{y}_0 + y_0 \Delta \dot{z}_0, \\ \Delta c_2 &= \dot{x}_0 \Delta z_0 - \dot{z}_0 \Delta x_0 + z_0 \Delta \dot{x}_0 - x_0 \Delta \dot{z}_0, \\ \Delta c_3 &= \dot{y}_0 \Delta x_0 - \dot{x}_0 \Delta y_0 - y_0 \Delta \dot{x}_0 + x_0 \Delta \dot{y}_0, \\ \Delta c &= \frac{c_1}{c} \Delta c_1 + \frac{c_2}{c} \Delta c_2 + \frac{c_3}{c} \Delta c_3, \end{aligned} \right\} \quad (5.95)$$

а из формул (5.80') соответственно получаем

$$\left. \begin{aligned} \Delta f_1 &= \mu \frac{x_0 \Delta r_0 - r_0 \Delta x_0}{r_0^2} + c_3 \Delta \dot{y}_0 - c_2 \Delta \dot{z}_0 + \dot{y}_0 \Delta c_3 - \dot{z}_0 \Delta c_2, \\ \Delta f_2 &= \mu \frac{y_0 \Delta r_0 - r_0 \Delta y_0}{r_0^2} + c_1 \Delta \dot{z}_0 - c_3 \Delta \dot{x}_0 + \dot{z}_0 \Delta c_1 - \dot{x}_0 \Delta c_3, \\ \Delta f_3 &= \mu \frac{z_0 \Delta r_0 - r_0 \Delta z_0}{r_0^2} + c_2 \Delta \dot{x}_0 - c_1 \Delta \dot{y}_0 + \dot{x}_0 \Delta c_2 - \dot{y}_0 \Delta c_1, \\ \Delta f &= \frac{f_1}{f} \Delta f_1 + \frac{f_2}{f} \Delta f_2 + \frac{f_3}{f} \Delta f_3. \end{aligned} \right\} \quad (5.95')$$

Затем формула (5.80'') дает

$$\Delta h = 2 \left(V_0 \Delta V_0 + \frac{\mu \Delta r_0}{r_0^2} \right). \quad (5.96)$$

Теперь с помощью формулы (5.81) находим соответствующее возмущение долготы узла

$$\Delta \Omega = \frac{c_1 \Delta c_2 - c_2 \Delta c_1}{c_1^2 + c_2^2}, \quad (5.97)$$

а из формулы (5.81') выводим возмущение наклонности

$$\Delta i = \frac{(c_1 \Delta c_1 + c_2 \Delta c_2) c_3 - (c_1^2 + c_2^2) \Delta c_3}{c^2 \sqrt{c_1^2 + c_2^2}}. \quad (5.97')$$

Далее, формулы (5.82) и (5.82') дают (после дифференцирования) возмущения параметра и эксцентриситета:

$$\Delta p = \frac{2c}{\mu} \Delta c = 2p \left(\frac{\Delta r_0}{r_0} + \frac{\Delta V_0}{V_0} + \operatorname{tg} \delta_0 \cdot \Delta \delta_0 \right), \quad (5.98)$$

$$\Delta e = \frac{\Delta f}{\mu}, \quad (5.98')$$

а из формул (5.83) выведем возмущение углового расстояния перигея от узла в виде

$$\Delta \omega = \frac{\cos \omega \cdot \Delta f - \cos \Omega \cdot \Delta f_1 - \sin \Omega \cdot \Delta f_2 - \sin \omega \cos i \cdot \Delta \Omega}{f \sin \omega}. \quad (5.99)$$

Аналогичным образом из формул (5.84) выведем возмущение начального значения аргумента широты

$$\Delta u_0 = \frac{\cos u_0 \cdot \Delta r_0 - \cos \Omega \cdot \Delta x_0 - \sin \Omega \cdot \Delta y_0 - \sin u_0 \cos i \cdot \Delta \Omega}{r_0 \sin u_0}, \quad (5.99')$$

после чего найдем возмущение начального значения истинной аномалии

$$\Delta v_0 = \Delta u_0 - \Delta \omega$$

и, наконец, из формулы (5.85) выведем возмущение момента прохождения через перигей в следующей форме:

$$\Delta \tau = \frac{2c \Delta p - p \Delta c}{pc} (\tau - t_0) - \frac{r_0^2}{c} \Delta v_0 + \frac{2p^2 \Delta e}{c} \int_0^{\tau} \frac{\cos v \, dv}{(1 + e \cos v)^3}. \quad (5.100)$$

Зная возмущения величин (5.79), мы без труда получим также возмущения величин, зависящих от общих элементов.

Так, например, в случае эллиптического движения с помощью формулы (5.96) найдем возмущение большой полуоси орбиты

$$\Delta a = \frac{\mu \Delta h}{h^2} = \frac{a^2}{\mu} \Delta h, \quad (5.101)$$

а затем возмущение среднего движения

$$\Delta n = - \frac{3n \Delta a}{2a} \quad (5.101')$$

и периода обращения

$$\Delta T = - \frac{2\pi}{n^2} \Delta n = - \frac{T}{n} \Delta n. \quad (5.101'')$$

Теперь из формулы (5.87) находим возмущение начального значения эксцентрической аномалии в виде

$$\Delta E_0 = \frac{r_0 \sqrt{1-e^2}}{p} \left(\Delta v_0 - \frac{\sin v_0}{1-e^2} \Delta e \right), \quad (5.102)$$

после чего формула (5.87') дает возмущение средней аномалии эпохи

$$\Delta M_0 = \frac{r_0}{a} \Delta E_0 - e \cos E_0 \cdot \Delta e, \quad (5.102')$$

а формула (5.87'') — возмущение средней долготы эпохи

$$\Delta \epsilon = \Delta M_0 + \Delta \Omega + \Delta \omega. \quad (5.102'')$$

Наконец, формула (5.87''') даст более простое выражение для возмущения момента прохождения через перигеум в виде

$$\Delta \tau = \frac{1}{n^2} (M_0 \Delta n - n \Delta M_0).$$

Аналогичным образом из формул (5.88') можно получить подобные же формулы для $\Delta \tau$ и в случае гиперболического (а также и параболического) движения.

4. Производные от координат по элементам. После того, как найдены возмущения элементов орбиты, вызываемые возмущениями начальных условий (5.78), естественно перейти к определению соответствующих возмущений координат и составляющих скорости движущейся точки.

Действительно, обозначим через χ любую из величин невозмущенного движения*). Эта величина является функцией времени t и начальных значений (5.78), так что

$$\chi = \chi(t; x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0).$$

Если начальные значения суть определенные, неизменные числа, то из предыдущей формулы мы можем получить числовое значение величины χ для любого момента времени.

*) Здесь буква χ является общим обозначением для любой зависящей от времени величины невозмущенного движения.

Таким образом, χ обозначает любую координату и любую ее производную по времени, а также радиус-вектор, аргумент широты, скорость и т. д.

Допустим теперь, что величины (5.78) изменились (или изменены по нашему желанию) так, что они получили соответственно малые приращения (5.93). Тогда изменится также и соответствующее текущему моменту t значение величины χ , которая получит некоторое приращение $\Delta\chi$, определяемое очевидной формулой

$$\Delta\chi = \frac{\partial\chi}{\partial x_0} \Delta x_0 + \frac{\partial\chi}{\partial y_0} \Delta y_0 + \frac{\partial\chi}{\partial z_0} \Delta z_0 + \\ + \frac{\partial\chi}{\partial \dot{x}_0} \Delta \dot{x}_0 + \frac{\partial\chi}{\partial \dot{y}_0} \Delta \dot{y}_0 + \frac{\partial\chi}{\partial \dot{z}_0} \Delta \dot{z}_0.$$

Таким образом, для нахождения возмущения величины χ , вызываемого возмущениями начальных условий, нам остается найти выражения для всех частных производных функции χ по переменным (5.78), имея в виду, что при всех этих дифференцированиях время t остается неизменным.

Но выражения величин невозмущенного движения в зависимости от начальных условий оказываются чересчур сложными и громоздкими, а поэтому мы будем рассматривать всякую величину χ как функцию времени и элементов орбиты, т. е. будем представлять ее формулой вида

$$\chi = \chi(t; \Omega, i, \omega, p, e, \tau). \quad (5.103)$$

Когда начальные условия получают возмущения (5.93), то все элементы орбиты также получают соответствующие возмущения, определяемые формулами предыдущего раздела.

Поэтому возмущения элементов

$$\Delta\Omega, \Delta i, \Delta\omega, \Delta p, \Delta e, \Delta\tau$$

мы можем теперь считать известными и данными, вследствие чего возмущение любой величины χ определится формулой

$$\Delta\chi = \frac{\partial\chi}{\partial\Omega} \Delta\Omega + \frac{\partial\chi}{\partial i} \Delta i + \frac{\partial\chi}{\partial\omega} \Delta\omega + \frac{\partial\chi}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial\chi}{\partial e} \Delta e + \frac{\partial\chi}{\partial\tau} \Delta\tau, \quad (5.104)$$

и наша задача заключается теперь в вычислении частных производных от величины χ по независимым переменным (5.103), считая при этом время t неизменным.

Для нахождения частных производных от координат и составляющих скорости по величинам (5.103) удобнее всего воспользоваться общими формулами (4.59) главы четвертой.

В самом деле, первые множители в этих формулах, т. е. направляющие косинусы линии апсид и прямой, к ней перпендикулярной (в плоскости орбиты), зависят, как показывают формулы (4.58) и (4.58'), только от элементов положения Ω , i , ω , а вторые множители, т. е. орбитальные координаты и их производные, зависят только от элементов p , e , τ .

Обозначим любой из элементов первой группы через L , а любой из элементов второй группы через P . Тогда формулы (4.59) дают

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial L} &= \frac{\partial x_\tau}{\partial L} \xi + \frac{\partial x'_\tau}{\partial L} \eta, & \frac{\partial \dot{x}}{\partial L} &= \frac{\partial \alpha_\tau}{\partial L} \dot{\xi} + \frac{\partial \alpha'_\tau}{\partial L} \dot{\eta}, \\ \frac{\partial x}{\partial P} &= \alpha_\tau \frac{\partial \xi}{\partial P} + \alpha'_\tau \frac{\partial \eta}{\partial P}, & \frac{\partial \dot{x}}{\partial P} &= \alpha_\tau \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial P} + \alpha'_\tau \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial P} \end{aligned}$$

и аналогичные выражения для производных от остальных координат и составляющих скорости.

Таким образом, нужно найти в отдельности производные от направляющих косинусов по элементам первой группы и производные от орбитальных координат и составляющих скорости по элементам второй группы.

Прежде всего из формул (4.58) и (4.58') находим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \alpha_\tau}{\partial \omega} &= \alpha'_\tau, & \frac{\partial \beta_\tau}{\partial \omega} &= \beta'_\tau, & \frac{\partial \gamma_\tau}{\partial \omega} &= \gamma'_\tau, \\ \frac{\partial \alpha'_\tau}{\partial \omega} &= -\alpha_\tau, & \frac{\partial \beta'_\tau}{\partial \omega} &= -\beta_\tau, & \frac{\partial \gamma'_\tau}{\partial \omega} &= -\gamma_\tau \end{aligned} \right\} \quad (5.105)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \alpha_\tau}{\partial \Omega} &= -\beta_\tau, & \frac{\partial \beta_\tau}{\partial \Omega} &= +\alpha_\tau, & \frac{\partial \gamma_\tau}{\partial \Omega} &= 0, \\ \frac{\partial \alpha'_\tau}{\partial \Omega} &= -\beta'_\tau, & \frac{\partial \beta'_\tau}{\partial \Omega} &= +\alpha'_\tau, & \frac{\partial \gamma'_\tau}{\partial \Omega} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.105')$$

Затем, обозначая для простоты направляющие косинусы перпендикуляра к плоскости орбиты через α'' , β'' , γ'' , т. е. полагая

$$\alpha'' = \sin \Omega \sin i, \quad \beta'' = -\cos \Omega \sin i, \quad \gamma'' = \cos i,$$

мы получим еще из формул (4.58) и (4.58')

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \alpha_{\tau}}{\partial i} &= \alpha'' \sin \omega, & \frac{\partial \beta_{\tau}}{\partial i} &= \beta'' \sin \omega, & \frac{\partial \gamma_{\tau}}{\partial i} &= \gamma'' \sin \omega, \\ \frac{\partial \alpha'_{\tau}}{\partial i} &= \alpha'' \cos \omega, & \frac{\partial \beta'_{\tau}}{\partial i} &= \beta'' \cos \omega, & \frac{\partial \gamma'_{\tau}}{\partial i} &= \gamma'' \cos \omega. \end{aligned} \right\} (5.105'')$$

Перейдем к нахождению производных по элементам P от орбитальных координат и составляющих скорости. Для этого, как показывают формулы (4.41) и (4.48), нужно сначала найти соответствующие производные от радиуса-вектора r и истинной аномалии v .

Чтобы найти производные от v по элементам P , возьмем формулу (4.45), которую напомним здесь в виде

$$\int_0^v \frac{dv'}{(1 + e \cos v')^2} = \frac{V \sqrt{\mu}}{p^{3/2}} (t - \tau),$$

где через v' обозначена переменная интегрирования.

Дифференцируя равенство (5.106) по элементам P и определяя затем из получившихся уравнений нужные нам производные от v по элементам P , мы найдем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial p} &= -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{(t - \tau)}{r^2}, & \frac{\partial v}{\partial \tau} &= -\frac{V \sqrt{\mu p}}{r^2} = -\dot{v}, \\ \frac{\partial v}{\partial e} &= \frac{2p^2}{r^2} \int_0^v \frac{\cos v' dv'}{(1 + e \cos v')^3}. \end{aligned} \right\} (5.106)$$

Дифференцируя теперь по элементам P уравнение орбиты общего вида

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v},$$

мы найдем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial p} &= \frac{r}{p}, & \frac{\partial r}{\partial \tau} &= -\sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin v = -\dot{r}, \\ \frac{\partial r}{\partial e} &= \frac{r^2}{p} \left(\sin v \frac{\partial v}{\partial e} - \cos v \right). \end{aligned} \right\} (5.106')$$

Теперь дифференцируем выражения (4.41) для орбитальных координат по элементу P , что дает

$$\frac{\partial \xi}{\partial P} = \frac{\xi}{r} \frac{\partial r}{\partial P} - \eta \frac{\partial v}{\partial P}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial P} = \frac{\eta}{r} \frac{\partial r}{\partial P} + \xi \frac{\partial v}{\partial P}, \quad (5.107)$$

где производные от r и v известны из формул (5.106) и (5.106'). Для нахождения производных от ξ и η проще всего

использовать формулы (4.48), которые напомним здесь следующим образом:

$$\dot{\xi} = -\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{p}} \sin v, \quad \dot{\eta} = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{p}} (e + \cos v), \quad (5.108)$$

откуда находим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial p} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left(-\frac{\sin v}{2p} + \cos v \frac{\partial v}{\partial p} \right); & \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial e} &= -\sqrt{\frac{\mu}{p}} \cos v \frac{\partial v}{\partial e}; \\ \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \tau} &= -\sqrt{\frac{\mu}{p}} \cos v \frac{\partial v}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial p} &= -\sqrt{\frac{\mu}{p}} \left(\frac{e + \cos v}{2p} + \sin v \frac{\partial v}{\partial p} \right); \\ \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial e} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left(1 - \sin v \frac{\partial v}{\partial e} \right); & \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \tau} &= -\sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin v \frac{\partial v}{\partial \tau}. \end{aligned} \right\} \quad (5.108')$$

Таким образом, все нужные производные получены, и мы можем составить теперь выражения для производных от координат и составляющих скорости. Эти окончательные выражения мы здесь выписывать не будем. Точно также не будем выписывать окончательные выражения для возмущений пространственных координат.

В заключение выпишем выражения для частных производных по элементам орбиты от проекций скорости, определяемых формулами (4.48'), и от самой скорости, определяемой интегралом живой силы или формулой (4.49). Мы имеем из (4.48'):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial p} = \frac{\partial \dot{r}}{\partial p} &= e \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left(-\frac{\sin v}{2p} + \cos v \frac{\partial v}{\partial p} \right), \\ \frac{\partial V_r}{\partial e} = \frac{\partial \dot{r}}{\partial e} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left(\sin v + e \cos v \frac{\partial v}{\partial e} \right), \\ \frac{\partial V_r}{\partial \tau} = \frac{\partial \dot{r}}{\partial \tau} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \cos v \frac{\partial v}{\partial \tau}; \end{aligned} \right\} \quad (5.109)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V_n}{\partial p} = \frac{\partial (r\dot{v})}{\partial p} &= -\sqrt{\frac{\mu}{p}} \left(\frac{1 + e \cos v}{2p} + \sin v \frac{\partial v}{\partial p} \right), \\ \frac{\partial V_n}{\partial e} = \frac{\partial (r\dot{v})}{\partial e} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left(\cos v - e \sin v \frac{\partial v}{\partial e} \right), \\ \frac{\partial V_n}{\partial \tau} = \frac{\partial (r\dot{v})}{\partial \tau} &= -\sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin v \frac{\partial v}{\partial \tau}. \end{aligned} \right\} \quad (5.109')$$

Из формулы (4.49) получаем следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial p} &= -\frac{\mu}{pV} \left(\frac{V^2}{2\mu} - e \sin v \frac{\partial v}{\partial p} \right), \\ \frac{\partial V}{\partial e} &= \frac{\mu}{pV} \left(\cos v + e - e \sin v \frac{\partial v}{\partial e} \right), \\ \frac{\partial V}{\partial \tau} &= -\frac{\mu}{pV} e \sin v \frac{\partial v}{\partial \tau}, \end{aligned} \right\} \quad (5.110)$$

в которые нужно подставить вместо производных от истинной аномалии их выражения (5.106).

Примечание. Выведенные формулы используются в теории и практике задачи об улучшении первоначальной орбиты *), а также в различных вопросах теории возмущений.

Заметим еще, что полученными формулами можно воспользоваться также и для решения обратной задачи, т. е. задачи об определении начальных возмущений (5.93), если известны возмущения координат и составляющих скорости для какого-либо момента времени t , отличного от t_0 .

*) См., например, С у б б о т и н М. Ф., Курс небесной механики, т. I, изд. 2-е, ОГИЗ, 1941.

ГЛАВА VI

РЯДЫ НЕВОЗМУЩЕННОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ

В главе пятой было показано, что общее решение дифференциальных уравнений невозмущенного кеплеровского движения не может быть представлено в конечной форме, так как связь между истинной аномалией и временем устанавливается при помощи трансцендентного соотношения.

Только в двух частных случаях, а именно в случае кругового движения и в случае прямолинейного параболического движения мы могли получить для координат движущейся точки (планеты или спутника) простые выражения в виде явных функций времени.

Однако для рассмотрения общих методов теории возмущенного движения необходимо иметь выражения для координат и их первых производных в виде явных функций времени, а поскольку получить эти явные выражения в конечном виде невозможно, то естественно возникает задача о представлении величин невозмущенного движения в виде бесконечных рядов.

Рассмотрение этой важной задачи для невозмущенного эллиптического движения и является предметом настоящей главы.

§ 1. Разложения координат эллиптического движения по степеням эксцентриситета

1. Ряд Лагранжа. Так как координаты и их первые производные в эллиптическом (невыврожденном) движении могут быть представлены как явные функции эксцентрической аномалии E , то, найдя E как явную функцию времени, мы тем самым получим и явные выражения в зависимости от времени и всех других величин этого типа движения.

Эксцентрическая аномалия связана с временем уравнением Кеплера

$$E - e \sin E = M, \quad (6.1)$$

где M есть средняя аномалия, определяемая формулой

$$M = n(t - \tau), \quad (6.2)$$

а e — эксцентриситет эллиптической орбиты, т. е. величина, удовлетворяющая неравенству

$$0 \leq e < 1. \quad (6.3)$$

Для каждого значения t , а следовательно и M , уравнение (6.1) имеет единственное действительное решение. Действительно, дифференцируя уравнение (6.1) по средней аномалии M , мы получим

$$(1 - e \cos E) \frac{dE}{dM} = 1,$$

откуда найдем

$$\frac{dE}{dM} = \frac{1}{1 - e \cos E} = \frac{a}{r}. \quad (6.4)$$

Из (6.4) непосредственно видно, что производная от E по M всегда положительна и, следовательно, E есть монотонно возрастающая функция от M . Поэтому каждому действительному значению M соответствует одно единственное действительное значение E .

Если M равно нулю, 180° , 360° , то и эксцентрическая аномалия равна соответственно нулю, 180° , 360° . Обычно в астрономии все аномалии и долготы измеряются в градусной мере от нуля до 360° (или в радианах от 0 до 2π). Но в небесной механике часто представляет интерес рассматривать аномалии и долготы как величины, неограниченно растущие вместе с временем t .

Поэтому будем рассматривать здесь M и E как величины, могущие принимать любые действительные значения.

Тогда, если M заключено в промежутке между $k\pi$ и $(k+1)\pi$ (k — любое целое число), то значение E , удовлетворяющее уравнению (6.1), также заключено в промежутке от $k\pi$ до $(k+1)\pi$.

В самом деле, напомним уравнение (6.1) в виде

$$F(E) = E - e \sin E - M = 0 \quad (6.1')$$

и пусть

$$k\pi < M < (k+1)\pi.$$

Мы имеем тогда из (6.1')

$$F(k\pi) = k\pi - M < 0,$$

$$F[(k+1)\pi] = (k+1)\pi - M > 0.$$

Так как функция $F(E)$ непрерывна при любом конечном E и имеет значения противоположных знаков на концах промежутка $[k\pi, (k+1)\pi]$, то она necessarily обращается в нуль, по крайней мере для одного значения E , содержащегося в этом промежутке. Но мы уже видели, что каждому значению M соответствует единственное значение E . Поэтому уравнение (6.1') имеет единственный действительный корень, заключающийся в промежутке $[k\pi, (k+1)\pi]$. Если же $M = k\pi$, то единственным решением уравнения (6.1') будет $E = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Мы уже указывали, что корень уравнения (6.1) всегда может быть найден приближенно с любой степенью точности любым из многочисленных способов приближенного решения трансцендентных уравнений. Рассмотрение этих способов не входит в задачи этой книги и может быть найдено в различных руководствах по численным методам небесной механики.

Нашей задачей является аналитическое представление величины E , удовлетворяющей уравнению Кеплера в виде бесконечного ряда того или иного вида.

В этом параграфе мы займемся нахождением решения уравнения (6.1) в виде бесконечного ряда, расположенного по возрастающим, целым, положительным степеням эксцентриситета e , который играет роль параметра в этом уравнении.

Для этого заметим прежде всего, что при $e = 0$ мы имеем очевидное решение уравнения (6.1)

$$E = M, \tag{6.5}$$

что соответствует, как известно, случаю круговой орбиты.

Во многих случаях, с которыми приходится иметь дело астроному-теоретику, эксцентриситет орбиты имеет малое числовое значение, что наводит нас на мысль, что соответствующее решение уравнения Кеплера будет (при малом e)

близко к решению (6.5), которое представляет первый член бесконечного ряда, все остальные члены которого обращаются в нуль вместе с ϵ .

Поэтому будем стараться найти такое решение уравнения Кеплера, которое обращается в M при $\epsilon = 0$.

Нетрудно получить ряд, расположенный по степеням ϵ и удовлетворяющий уравнению (6.1), совершенно элементарным путем, используя формулу Маклорена.

Однако таким способом весьма затруднительно исследовать вопрос о сходимости полученного ряда, и мы для нахождения нужного разложения используем другой способ, основанный на применении методов теории функций комплексного переменного *).

Этот способ заключается в применении знаменитой *формулы Лагранжа*, дающей решение *уравнения Лагранжа*, которое в обычных обозначениях комплексного анализа имеет вид

$$F(z) = z - a - \alpha f(z) = 0, \quad (6.6)$$

где z , a и параметр α могут иметь любые комплексные значения, здесь $f(z)$ есть заданная функция, голоморфная внутри некоторого замкнутого контура S , содержащего точку a , и удовлетворяющая на самом контуре условию

$$\left| \frac{\alpha f(z)}{z - a} \right| < 1. \quad (6.7)$$

В анализе доказывается, что при этих условиях уравнение Лагранжа (6.6) имеет внутри контура S единственный корень, являющийся голоморфной функцией параметра α и обращающийся в a при $\alpha = 0$.

Этот корень определяется рядом

$$\begin{aligned} z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{da^{k-1}} [f^k(a)] = \\ &= a + \alpha f(a) + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} \frac{d}{da} [f^2(a)] + \dots, \end{aligned} \quad (6.8)$$

абсолютно сходящимся при условии (6.7) для любого значения a в области, ограниченной контуром S .

*) См., например, Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, Физматгиз, 1958,

Формула (6.8) и есть *формула Лагранжа*. При тех же условиях имеет место и более общая формула *).

Пусть $\Phi(z)$ есть заданная функция комплексной переменной z , голоморфная в области, ограниченной контуром S . Тогда имеет место обобщенная формула Лагранжа

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{da^{k-1}} [\Phi'(a) f^k(a)] = \\ &= \Phi(a) + \alpha \Phi'(a) f(a) + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} \frac{d}{da} [\Phi'(a) f^2(a)] + \dots, \quad (6.8')\end{aligned}$$

представляющая разложение заданной функции от корня z уравнения (6.6), абсолютно сходящееся при выполнении неравенства (6.7) при любом a в области S .

Условие (6.7) определяет верхний предел тех значений модуля $|\alpha|$, для которых ряды (6.8) и (6.8'), наверное, остаются сходящимися. Действительно, из неравенства (6.7) следует, что мы должны иметь неравенство

$$|\alpha| < \left| \frac{z-a}{f(z)} \right|, \quad (6.7')$$

справедливое в каждой точке контура S , внутри которого функция $f(z)$ по условию голоморфна.

Рассмотрим наиболее интересный для нас частный случай, когда $f(z)$ есть целая функция, т. е. функция голоморфная во всей комплексной плоскости переменного z .

Тогда ряд Лагранжа будет абсолютно сходящимся внутри всякого круга C с центром в точке a , на окружности которого выполняется условие (6.7), и мы можем поставить задачу об отыскании такого круга, для которого правая часть неравенства (6.7') имеет наибольшее значение.

Действительно, обозначим расстояние от точки z до точки a через r , так что $r = |z - a|$; тогда для абсолютной сходимости ряда Лагранжа на окружности круга C должно выполняться неравенство

$$|\alpha| < \frac{r}{|f(z)|}, \quad (6.7'')$$

*) Гурса Э., Курс математического анализа, т. 1, § 186 и т. 2, § 302, перев. с франц., ГТТИ, 1933. В указанной книге М. А. Лаврентьева и Б. В. Шабата рассмотрена более общая формула, из которой формула Лагранжа получается как частный случай.

которое при данном r заведомо выполняется, если взять $\alpha = 0$. Следовательно, так как функция $f(z)$ непрерывна, условие (6.7'') будет также выполняться при данном r , если $|\alpha|$ достаточно мало. Изменяя теперь радиус r круга C , мы будем изменять также правую часть неравенства (6.7''), т. е. верхний предел тех значений $|\alpha|$, при которых ряд Лагранжа остается сходящимся, и нам остается теперь найти такое значение r , при котором правая часть неравенства (6.7) максимальна.

Обозначим через $M(r)$ наибольшее значение модуля $|f(z)|$ на окружности C . Тогда условие (6.7'') можно написать в виде

$$|\alpha| < \frac{r}{M(r)}, \quad (6.7''')$$

и наша задача сводится к нахождению наибольшего значения отношения $r/M(r)$, когда r изменяется от нуля до $+\infty$ *).

Это отношение равно нулю при $r=0$, так как если бы $M(r)$ стремилось к нулю вместе с r , то точка $z=a$ была бы нулем функции $f(z)$ и $F(z)$ делилась бы на $z-a$.

То же отношение равно нулю и при $r=+\infty$, так как в противном случае $f(z)$ было бы многочленом первой степени и уравнение (6.6) решалось бы элементарно.

Отсюда следует, что отношение $r/M(r)$ имеет максимум при некотором значении $\bar{r}$ радиуса $\bar{r}$.

Обозначим этот максимум через $\bar{\alpha}$, так что

$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{r}}{M(\bar{r})}. \quad (6.9)$$

Тогда из предыдущего рассуждения следует, что уравнение (6.6) имеет один и только один корень, модуль которого меньше $\bar{r}$, если

$$|\alpha| < \bar{\alpha}. \quad (6.9')$$

Следовательно, разложения (6.8) и (6.8') имеют место и сходятся абсолютно, если $|\alpha|$ не превосходит $\bar{\alpha}$ и функция $\Phi(z)$ голоморфна по крайней мере внутри круга $\bar{C}$ с центром в точке a и радиуса $\bar{r}$.

*) См. Гурса Э., Курс математического анализа, т. 2, перевод с франц., ГТТИ, 1933.

2. Применение ряда Лагранжа к уравнению Кеплера. Предел Лапласа для эксцентриситета. Рассмотрим частный случай уравнения Лагранжа, когда

$$f(z) = \sin z,$$

т. е. когда уравнение (6.6) есть уравнение Кеплера

$$z - a - \alpha \sin z = 0, \quad (6.10)$$

написанное в других обозначениях.

Общая формула Лагранжа (6.8') напишется в этом случае следующим образом:

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{da^{k-1}} [\Phi'(a) \sin^k a], \quad (6.11)$$

где $\Phi(z)$ есть произвольно заданная голоморфная функция от z , и нам остается только найти верхний предел значений $|\alpha|$, при котором ряд (6.11) остается абсолютно сходящимся.

Так как в нашем случае $f(z)$ есть целая функция, то мы можем применить для нахождения $\bar{\alpha}$ формулу (6.9), для чего нужно найти сначала $M(r)$, а потом решить элементарную задачу на нахождение максимума функции.

Возьмем в комплексной плоскости какую-нибудь систему декартовых координат, причем ось абсцисс проведем через точку a . Тогда координаты точки z , лежащей на окружности C радиуса r с центром в точке a , будут

$$x = a + r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

где φ есть угол, образуемый радиусом-вектором точки z с положительным направлением оси абсцисс.

На окружности C будем иметь

$$z = x + iy = a + r \cos \varphi + ir \sin \varphi \quad (i = \sqrt{-1})$$

и

$$\begin{aligned} |\sin z|^2 &= |\sin(a + r \cos \varphi + ir \sin \varphi)|^2 = \\ &= \sin(a + r \cos \varphi + ir \sin \varphi) \sin(a + r \cos \varphi - ir \sin \varphi) = \\ &= \cos^2(ir \sin \varphi) - \cos^2(a + r \cos \varphi), \end{aligned}$$

откуда, обозначая буквой e неперово число ($e = 2,7182 \dots$), имеем

$$|\sin z| = \sqrt{\left(\frac{e^{r \sin \varphi} + e^{-r \sin \varphi}}{2}\right)^2 - \cos^2(a + r \cos \varphi)}.$$

Поэтому

$$M(r) = \frac{e^r + e^{-r}}{2}.$$

Теперь нужно найти максимум функции

$$\bar{M}(r) = \frac{r}{M(r)} = \frac{2r}{e^r + e^{-r}}. \quad (6.12)$$

Следуя общему правилу дифференциального исчисления, находим сначала производную

$$\bar{M}'(r) = 2 \frac{(e^r + e^{-r}) - r(e^r - e^{-r})}{(e^r + e^{-r})^2},$$

приравнивая которую нулю, получаем уравнение для определения критического значения r в виде

$$R(r) = (1 - r)e^r + (1 + r)e^{-r} = 0. \quad (6.12')$$

Покажем, что это уравнение имеет единственный действительный корень, заключающийся в промежутке между единицей и двойкой.

В самом деле,

$$R'(r) = e(e^r + e^{-r}),$$

т. е. всегда положительно. Поэтому $R(r)$ есть монотонно возрастающая функция от r . Но

$$R(1) = -2e^{-1} < 0,$$

$$R(2) = e^2 - 3e^{-2} > 0,$$

а следовательно, $R(r)$ обращается в нуль при некотором значении r , лежащем между 1 и 2.

Приближенное решение уравнения (6.12') дает его корень $\bar{r}$, который равен

$$\bar{r} = 1,199678640257734 \dots$$

Найденное критическое значение $\bar{r}$ действительно дает максимум для функции $\bar{M}(r)$, так как, как легко проверить,

$$\bar{M}''(\bar{r}) = -\frac{2R'(\bar{r})}{(e^{\bar{r}} + e^{\bar{r}})^2} < 0.$$

Теперь формула (6.12) дает $\bar{\alpha}$:

$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{r}}{\bar{M}(\bar{r})} = \frac{2\bar{r}}{e^{\bar{r}} + e^{\bar{r}}}.$$

Подставляя вместо $\bar{r}$ его значение, мы получим

$$\bar{\alpha} = 0,6627434193492 \dots \quad (6.13)$$

Таким образом, ряд (6.11) сходится абсолютно при любом комплексном значении α , если параметр α удовлетворяет неравенству

$$|\alpha| < \bar{\alpha}.$$

В интересующем нас случае уравнения Кеплера (6.1) параметром служит эксцентриситет орбиты e , который имеет действительное значение, заключающееся между нулем и единицей, а формула Лагранжа напишется в обычных астрономических обозначениях следующим образом:

$$\Phi(E) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{dM^{k-1}} [\Phi'(M) \sin^k M], \quad (6.14)$$

где $\Phi(E)$ обозначает заданную функцию от эксцентрической аномалии E .

Таким образом, формула (6.14) дает разложение любой целой функции от эксцентрической аномалии в ряд, расположенный по целым, возрастающим степеням эксцентриситета e , абсолютно сходящийся при любом значении средней аномалии M , если эксцентриситет орбиты удовлетворяет условию

$$e < \bar{e} = 0,6627434193492 \dots \quad (6.15)$$

Величина $\bar{e}$ впервые была найдена иным путем при помощи весьма искусного расчета Лапласом, а поэтому

число $\bar{e}$, определенное в (6.15), называется *пределом Лапласа для сходимости рядов эллиптического движения*, или более кратко *пределом Лапласа*.

В большинстве случаев астрономической практики эксцентриситет орбиты интересующего нас небесного тела не превышает предела Лапласа и даже значительно меньше его, так что ряды типа (6.14) обычно сходятся достаточно быстро и бывает достаточно взять несколько первых членов этих рядов, чтобы получить их суммы с весьма высокой точностью.

Если $\bar{e} \leq e < 1$, то ряды типа (6.14) могут оказаться расходящимися для некоторых значений M и тогда они, конечно, неприменимы для определения функции $\Phi(E)$. Такие случаи встречаются на самом деле у некоторых малых планет, комет, искусственных спутников Земли и космических кораблей. Если $e > 1$, то ряды типа (6.14) безусловно расходятся.

3. Разложения координат по степеням эксцентриситета. Применим ряд Лагранжа (6.14) для разложения некоторых важных величин невозмущенного эллиптического движения.

Прежде всего, рассмотрим случай, когда $\Phi(E) = E$. Тогда $\Phi(M) = M$, $\Phi'(M) = 1$ и мы находим разложение по степеням эксцентриситета e самой эксцентрической аномалии в следующем виде:

$$E = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^k}{k!} \frac{d^{k-1}(\sin^k M)}{dM^{k-1}}, \quad (6.16)$$

что можно записать также более удобно следующим образом:

$$E = \sum_{k=0}^{\infty} e^k E_k(M), \quad (6.16')$$

где положено

$$E_k(M) = \frac{1}{k!} \frac{d^{k-1}(\sin^k M)}{dM^{k-1}}. \quad (6.16'')$$

Формула (6.16) дает аналитическое решение уравнения Кеплера, конечно, при условии, что эксцентриситет орбиты не превышает предела Лапласа.

Вычисляя по формуле (6.16'') первые коэффициенты ряда (6.16'), мы найдем следующее выражение для эксцентриситетической аномалии с точностью до квадрата эксцентриситета:

$$E = M + e \sin M + \frac{1}{2} e^2 \sin 2M + \dots \quad (6.16''')$$

Положим теперь в формуле (6.14) $\Phi(E) = \cos E$, так что $\Phi'(M) = -\sin M$; тогда имеем следующее разложение:

$$\cos E = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{dM^{k-1}} [-\sin^{k+1} M], \quad (6.17)$$

которое также запишем более кратко в виде

$$\cos E = \sum_{k=0}^{\infty} e^k C_k(M), \quad (6.17')$$

где положено

$$C_k(M) = \frac{1}{k!} \frac{d^{k-1}}{dM^{k-1}} [-\sin^{k+1} M]; \quad (6.17'')$$

приближенное выражение $\cos E$ с точностью до квадрата эксцентриситета имеет вид

$$\cos E = \cos M + \frac{e}{2} (\cos 2M - 1) + \frac{3e^2}{8} (\cos 3M - \cos M) + \dots \quad (6.17''')$$

Величины $E_k(M)$ и $C_k(M)$, являющиеся тригонометрическими многочленами относительно синусов и косинусов, кратных средней аномалии M , суть периодические функции от M с общим периодом 2π , общие выражения для которых будут приведены несколько ниже.

Теперь нетрудно получить разложения по степеням e и для других величин эллиптического движения, причем оказывается, что коэффициенты этих других разложений весьма просто выражаются через $E_k(M)$ и $C_k(M)$, являющихся поэтому основными тригонометрическими многочленами для рядов эллиптического движения.

В самом деле, из самого уравнения Кеплера мы имеем прежде всего

$$\sin E = \frac{1}{e} (E - M),$$

откуда с помощью формулы (6.16') получим *)

$$\sin E = \sum_{k=0}^{\infty} e^k S_k(M), \quad S_k(M) = E_{k+1}(M). \quad (6.18)$$

Далее, из уравнения эллиптической орбиты (5.28) имеем

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos E,$$

откуда с помощью формулы (6.17') находим следующее разложение:

$$\frac{r}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} e^k R_k(M), \quad (6.19)$$

коэффициенты которого определяются формулами

$$R_0(M) = 1, \quad R_k(M) = -C_{k-1}(M) \quad (k \neq 0). \quad (6.19')$$

Затем формулы (5.34) дают выражения для орбитальных координат ξ и η :

$$\frac{\xi}{a} = -e + \cos E, \quad \frac{\eta}{a} = \sqrt{1-e^2} \sin M.$$

Первая из этих формул дает разложение

$$\frac{\xi}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} e^k \Xi_k(M) \quad (6.20)$$

с коэффициентами, определяемыми формулами

$$\Xi_1(M) = C_1(M) - 1, \quad \Xi_k(M) = C_k(M) \quad (k \neq 1). \quad (6.20')$$

Переходя ко второй орбитальной координате, заметим сначала, что мы можем написать следующее разложение.

$$\frac{\eta}{a} = \sqrt{1-e^2} \sum_{k=0}^{\infty} e^k S_k(M). \quad (6.21)$$

*) Мы уже видели, что $E_0(M) = M$, и это есть единственная из величин $E_k(M)$ и $C_k(M)$, не являющаяся тригонометрическим многочленом. При вычислении $E_0(M)$ (а также $C_0(M)$) по формулам (6.16''), (6.17'') нужно учесть, что производная порядка -1 есть неопределенный интеграл.

Правую часть этого равенства нетрудно представить в виде ряда, расположенного по степеням e . Действительно, из курса анализа мы имеем следующий ряд:

$$\sqrt{1-e^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k e^k, \quad (6.21')$$

числовые коэффициенты которого находятся по формулам

$$\alpha_{2k+1} = 0, \quad \alpha_0 = 1, \quad \alpha_{2k} = -\frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \dots (2k)}$$

и который сходится абсолютно для всякого значения e , меньшего единицы. Так как ряд (6.18) также сходится абсолютно в промежутке $0 \leq e < \bar{e}$, то его можно помножить по обычным правилам на ряд (6.21), в результате чего получим ряд, сходящийся абсолютно в промежутке $0 \leq e < \bar{e}$:

$$\frac{\eta}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} e^k H_k(M), \quad (6.21'')$$

где

$$H_k(M) = \sum_{s=0}^k \alpha_s S_{k-s}(M) \quad (6.21''')$$

также, очевидно, суть некоторые тригонометрические многочлены.

Зная разложения орбитальных координат, получим по формулам (5.39) разложения пространственных координат в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{a} &= \sum_{k=0}^{\infty} e^k X_k(M), \\ \frac{y}{a} &= \sum_{k=0}^{\infty} e^k Y_k(M), \\ \frac{z}{a} &= \sum_{k=0}^{\infty} e^k Z_k(M), \end{aligned} \right\} \quad (6.22)$$

коэффициенты которых определяются следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} X_k(M) &= \alpha_\tau \Xi_k(M) + \alpha'_\tau H_k(M), \\ Y_k(M) &= \beta_\tau \Xi_k(M) + \beta'_\tau H_k(M), \\ Z_k(M) &= \gamma_\tau \Xi_k(M) + \gamma'_\tau H_k(M), \end{aligned} \right\} \quad (6.22')$$

причем из предыдущего ясно, что ряды (6.22) сходятся абсолютно для всякого значения M , если эксцентриситет e не превышает Лапласова предела $\bar{e}$.

4. Разложения скорости и ее составляющих. Выведем теперь разложения для скорости и ее составляющих в эллиптическом движении. Так как абсолютно сходящийся ряд можно дифференцировать почленно, то из формулы (6.4) мы получим разложение обратной величины радиуса-вектора в виде

$$\frac{a}{r} = \sum_{k=0}^{\infty} e^k \bar{R}_k(M), \quad (6.23)$$

где

$$\bar{R}_k(M) = \frac{dE_k(M)}{dM},$$

после чего из интеграла живой силы для эллиптического движения получим разложение квадрата скорости, которое напомним в следующем виде:

$$\left(\frac{V}{na}\right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} e^k V_k^{(2)}(M), \quad (6.24')$$

где, как легко убедиться,

$$V_0^{(2)}(M) = 1, \quad V_k^{(2)}(M) = 2\bar{R}_k(M) \quad (k \neq 0). \quad (6.24'')$$

Разложения прямоугольных составляющих скорости проще всего получить дифференцированием соответствующих разложений координат. Поэтому из формул (6.20), (6.21'') и

(6.22) мы получим следующие разложения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\dot{\xi}}{na} &= \sum_{k=0}^{\infty} e^k \Xi'_k(M), \\ \frac{\dot{\eta}}{na} &= \sum_{k=0}^{\infty} e^k H'_k(M), \end{aligned} \right\} \quad (6.25)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \frac{\dot{x}}{na} &= \sum_{k=0}^{\infty} e^k X'_k(M), \\ \frac{\dot{y}}{na} &= \sum_{k=0}^{\infty} e^k Y'_k(M), \\ \frac{\dot{z}}{na} &= \sum_{k=0}^{\infty} e^k Z'_k(M), \end{aligned} \right\} \quad (6.25')$$

где штрих обозначает производную по средней аномалии M .

Разложение радиальной составляющей скорости легко найти, замечая, что

$$V_r = \dot{r} = na \frac{d}{dM} \left(\frac{r}{a} \right),$$

откуда с помощью формулы (6.19) получим:

$$\frac{V_r}{na} = \sum_{k=0}^{\infty} e^k R'_k(M). \quad (6.26)$$

Чтобы разложить «поперечную» составляющую скорости V_n , замечаем, что

$$V_n = r\dot{\nu} = \frac{V_{\bar{\nu}} V_{\bar{p}}}{r} = \frac{na^2 \sqrt{1-e^2}}{r}, \quad (6.26')$$

откуда с помощью (6.21') и (6.23) находим

$$\frac{V_n}{na} = \sum_{k=0}^{\infty} e^k V_k^{(n)}(M), \quad (6.26'')$$

где положено

$$V_k^{(n)}(M) = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s \bar{R}_{k-s}(M). \quad (6.26''')$$

В заключение выведем разложение истинной аномалии v . Из формулы (6.26') мы имеем

$$\dot{v} = \frac{V_n}{r} = \frac{a}{r} \frac{V_n}{a},$$

откуда

$$\frac{dv}{dM} = \frac{a}{r} \frac{V_n}{na}. \quad (6.27)$$

Перемножая абсолютно сходящиеся (при $e < \bar{e}$) ряды (6.23) и (6.26), мы получим также абсолютно сходящийся ряд

$$\frac{dv}{dM} = \sum_{k=0}^{\infty} e^k \bar{v}_k(M), \quad (6.27')$$

коэффициенты которого определяются формулой

$$\bar{v}_k(M) = \sum_{s=0}^k \bar{R}_s(M) V_{k-s}^{(n)}(M). \quad (6.27'')$$

Интегрируя почленно ряд (6.27''), на что мы имеем право в силу его абсолютной сходимости, и имея в виду, что при $M=0$ истинная аномалия v также равна нулю, мы получим следующее разложение

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} e^k \int_0^M \bar{v}_k(M) dM, \quad (6.28)$$

которое можно написать более кратко:

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} e^k v_k(M), \quad (6.28')$$

где положено

$$v_k(M) = \int_0^M \bar{v}_k(M) dM. \quad (6.28'')$$

Нетрудно убедиться, что $v_0(M) = M$, а поэтому из (6.28) имеем разложение разности $v - M$, называемой в астрономии *уравнением центра*, в виде

$$v - M = \sum_{k=1}^{\infty} e^k v_k(M), \quad (6.29)$$

откуда с точностью до квадрата эксцентриситета имеем

$$v - M = 2e \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M + \dots \quad (6.29')$$

Таким образом, мы получили разложения по степеням эксцентриситета всех важнейших величин теории эллиптического движения и вместе с тем разрешили поставленную в начале главы задачу о представлении координат и составляющих скорости в виде явных функций времени.

Из полученных разложений можно вывести множество других. Напишем, например, разложения для направляющих косинусов радиуса-вектора в эллиптическом движении. Так как

$$\frac{x}{r} = \frac{x}{a} \cdot \frac{a}{r}, \quad \frac{y}{r} = \frac{y}{a} \cdot \frac{a}{r}, \quad \frac{z}{r} = \frac{z}{a} \cdot \frac{a}{r},$$

то, перемножая абсолютно сходящиеся (при $e < \bar{e}$) ряды (6.22) на абсолютно сходящийся ряд (6.23), мы получим также абсолютно сходящиеся ряды

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{r} &= \sum_{k=0}^{\infty} e^k \bar{X}_k(M), \\ \frac{y}{r} &= \sum_{k=0}^{\infty} e^k \bar{Y}_k(M), \\ \frac{z}{a} &= \sum_{k=0}^{\infty} e^k \bar{Z}_k(M), \end{aligned} \right\} \quad (6.30)$$

коэффициенты которых определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} \bar{X}_k(M) &= \sum_{s=0}^k X_s(M) \bar{R}_{k-s}(M), \\ \bar{Y}_k(M) &= \sum_{s=0}^k Y_s(M) \bar{R}_{k-s}(M), \\ \bar{Z}_k(M) &= \sum_{s=0}^k Z_s(M) \bar{R}_{k-s}(M). \end{aligned} \right\} \quad (6.30')$$

Точно также, умножая ряд (6.23) сам на себя, мы имеем

$$\frac{a^2}{r^2} = \sum_{k=0}^{\infty} e^k \bar{R}_k^{(2)}(M), \quad (6.31)$$

где

$$\bar{R}_k^{(2)}(M) = \sum_{s=0}^k \bar{R}_s(M) \bar{R}_{k-s}(M). \quad (6.31')$$

Наконец, имея в виду, что

$$\cos v = \frac{\xi}{a} \cdot \frac{a}{r}, \quad \sin v = \frac{\eta}{a} \cdot \frac{a}{r},$$

мы получим, умножая ряды (6.20) и (6.21'') соответственно на ряд (6.23),

$$\left. \begin{aligned} \cos v &= \sum_{k=0}^{\infty} e^k \bar{C}_k(M), \\ \sin v &= \sum_{k=0}^{\infty} e^k \bar{S}_k(M), \end{aligned} \right\} \quad (6.32)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \bar{C}_k(M) &= \sum_{s=0}^k \Xi_s(M) \cdot \bar{R}_{k-s}(M), \\ \bar{S}_k(M) &= \sum_{s=0}^k \mathrm{H}_s(M) \cdot \bar{R}_{k-s}(M) \end{aligned} \right\} \quad (6.32')$$

и так далее.

5. Формулы для основных коэффициентов. Выведем теперь общие формулы для коэффициентов $E_k(M)$ и $C_k(M)$, из которых получаются в конечном счете коэффициенты всех остальных разложений.

Для этого отметим прежде всего следующую тригонометрическую формулу *) (ν — целое, положительное число):

$$\sin^{\nu} M = \frac{(-1)^{\frac{\nu}{2}}}{2^{\nu-1}} \sum_{s=0}^{\frac{\nu}{2}} (-1)^s \bar{C}_s^{\cos} \cos [(\nu - 2s) M], \quad (6.33)$$

*) См., например, Рыжик И. М. и Градштейн И. С., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Гостехиздат, 1951.

где $\bar{\nu}$ есть наибольшее целое число, заключающееся в $\nu/2$, и нужно взять знак косинуса, если ν есть число четное и знак синуса, если ν нечетное. Коэффициенты в формуле (6.33) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\bar{C}_{\nu}^s &= C_{\nu}^s, \\ \bar{C}_{\nu}^{\bar{\nu}} &= \frac{1}{2} C_{\nu}^{\bar{\nu}}, \text{ если } \nu \text{ четное,}\end{aligned}$$

а C_{ν}^s суть обычные биномиальные коэффициенты, т. е.

$$C_{\nu}^s = \frac{\nu!}{s!(\nu-s)!}.$$

Положим в общей формуле (6.33) $\nu = k$ и продифференцируем $k-1$ раз, что даст

$$\begin{aligned}\frac{d^{k-1} \sin^k M}{dM^{k-1}} &= \frac{(-1)^{\bar{k}}}{2^{k-1}} \sum_{s=0}^{\bar{k}} (-1)^s C_k^s (k-2s)^{k-1} \frac{\cos}{\sin} \times \\ &\times \left[(k-2s) M + (k-1) \frac{\pi}{2} \right],\end{aligned}$$

где через $\bar{k}$ обозначено наибольшее целое число, содержащееся в $k/2$ *).

Производя здесь очевидные упрощения и деля результат на $k!$, мы получим по формуле (6.16'')

$$E_k(M) = \frac{1}{2^{k-1}} \sum_{s=0}^{\bar{k}} (-1)^s \frac{(k-2s)^{k-1}}{s!(k-s)!} \sin(k-2s)M. \quad (6.34)$$

Мы уже знаем, что $E_0(M) = M$, а из формулы (6.16'') имеем

$$\begin{aligned}E_1(M) &= \sin M, \\ E_2(M) &= \frac{1}{2} \sin 2M.\end{aligned}$$

*) Заметим, что единственный член формулы (6.33), содержащий коэффициент $\bar{C}_k^{\bar{k}}$ (для k четного), исчезает при первом же дифференцировании.

Полагая теперь в формуле (6.34) $k = 3, 4, 5, 6, 7, 8$, получаем

$$E_3(M) = \frac{1}{2^2 \cdot 3!} (3^2 \sin 3M - 3 \sin M),$$

$$E_4(M) = \frac{1}{2^3 \cdot 4!} (4^3 \sin 4M - 4 \cdot 2^3 \cdot \sin 2M),$$

$$E_5(M) = \frac{1}{2^4 \cdot 5!} (5^4 \sin 5M - 5 \cdot 3^4 \cdot \sin 3M + 10 \sin M),$$

$$E_6(M) = \frac{1}{2^5 \cdot 6!} (6^5 \sin 6M - 6 \cdot 4^5 \cdot \sin 4M + 15 \cdot 2^5 \cdot \sin 2M),$$

$$E_7(M) = \frac{1}{2^7 \cdot 7!} (7^6 \sin 7M - 7 \cdot 5^6 \cdot \sin 5M + \\ + 21 \cdot 3^6 \cdot \sin 3M - 35 \sin M),$$

$$E_8(M) = \frac{1}{2^8 \cdot 8!} (8^7 \sin 8M - 8 \cdot 6^7 \sin 6M + \\ + 28 \cdot 4^7 \cdot \sin 4M - 56 \cdot 2^7 \cdot \sin 2M).$$

Положим теперь в общей формуле (6.33) $\nu = k + 1$ и опять продифференцируем $k - 1$ раз, что даст

$$\frac{d^{k-1} \sin^{k+1} M}{dM^{k-1}} = \frac{(-1)^{\overline{k+1}}}{2^k} \sum_{s=0}^{\overline{k+1}} (-1)^s C_{k+1}^s (k+1-2s)^{k-1} \times \\ \times \frac{\cos}{\sin} \left[(k+1-2s)M + (k-1) \frac{\pi}{2} \right],$$

а из формулы (6.17'') после упрощений получим

$$C_k(M) = \frac{1}{2^k} \sum_{s=0}^{\overline{k+1}} (-1)^s \frac{(k+1)(k+1-2s)^{k-1}}{s!(k+1-s)!} \cos(k+1-2s)M. \quad (6.34')$$

Нам уже известны первые коэффициенты $C_k(M)$, а именно:

$$C_0(M) = \cos M,$$

$$C_1(M) = \frac{1}{2} (\cos 2M - 1).$$

Полагая еще в формуле (6.34) $k = 2, 3, 4, 5, 6, 7$, мы получим

$$C_2(M) = \frac{1}{2^2 \cdot 2!} (3 \cos 3M - 3 \cos M),$$

$$C_3(M) = \frac{1}{2^3 \cdot 3!} (4^2 \cos 4M - 4 \cdot 2^2 \cdot \cos 2M),$$

$$C_4(M) = \frac{1}{2^4 \cdot 4!} (5^3 \cos 5M - 5 \cdot 3^3 \cdot \cos 3M + 10 \cos M),$$

$$C_5(M) = \frac{1}{2^5 \cdot 5!} (6^4 \cos 6M - 6 \cdot 4^4 \cdot \cos 4M + 60 \cdot 2^4 \cdot \cos 2M),$$

$$C_6(M) = \frac{1}{2^6 \cdot 6!} (7^5 \cos 7M - 7 \cdot 5^5 \cdot \cos 5M + \\ + 21 \cdot 3^5 \cdot \cos 3M - 35 \cos M),$$

$$C_7(M) = \frac{1}{2^7 \cdot 7!} (8^6 \cos 8M - 8 \cdot 6^6 \cdot \cos 6M + \\ + 28 \cdot 4^6 \cdot \cos 4M - 56 \cdot 2^6 \cdot \cos 2M).$$

Из приведенных выражений нетрудно получить и коэффициенты всех других нужных нам разложений, формулы для которых приведены выше.

Подобным же образом получим, в случае надобности, разложения для множества других величин эллиптического движения, которые здесь приводить не будем.

§ 2. Разложения координат эллиптического движения в ряды Фурье

1. Ряд Фурье и теорема Дирихле. Разложения координат эллиптического движения по возрастающим степеням эксцентриситета орбиты, полученные нами в предыдущем параграфе, сходятся и притом абсолютно для всех действительных значений средней аномалии M , если только $e < \bar{e} = 0,6627 \dots$

Мы уже указывали, что если эксцентриситет превышает предел Лапласа, то ряды не будут сходящимися для всех значений M в промежутке от нуля до 360° , а если $e = 1$, то ряды вообще расходятся.

Таким образом, полученные ряды не могут представлять решение уравнений невозмущенного движения для всех значений эксцентриситета, заключенных между нулем и единицей.

Однако и для допустимых значений e эти ряды далеко не всегда оказываются пригодными для вычислений. Действительно, как хорошо известно, бесконечный ряд пригоден для вычислений только в том случае, когда он сходится достаточно быстро, т. е. когда для получения суммы этого ряда с необходимой степенью точности достаточно взять некоторое, не очень большое, число первых его членов.

Наоборот, если для вычисления суммы сходящегося ряда с нужной степенью точности оказывается нужным взять большое число его первых членов (т. е. если ряд сходится медленно), то такой ряд непригоден для практических приложений, так как вычисление его сумм требует чересчур большой и громоздкой работы.

Правда, в настоящее время во многих местах имеются вычислительные станции, оборудованные быстродействующими счетными машинами, во много раз ускоряющими даже весьма сложные вычисления, а поэтому могущими считать и суммы медленно сходящихся рядов.

Но и самые совершенные машины делаются бесполезными, если ряд, представляющий нужную нам величину, оказывается расходящимся.

Поэтому, желая получить формулы, дающие решение дифференциальных уравнений невозмущенного, эллиптического движения и пригодные для всех значений эксцентриситета в промежутке от 0 до 1, мы должны получить какие-то другие ряды, которые были бы сходящимися для всех действительных значений M и для всякого e в промежутке от нуля до единицы.

Такого рода ряды могут быть получены при помощи известной теоремы Лежена — Дирихле^{*}), дающей необходимые и достаточные условия разложимости функции $f(z)$, заданной в промежутке $(0, 2\pi)$ (или в промежутке $(-\pi, +\pi)$), в ряд Фурье, расположенный по синусам и косинусам кратных z .

^{*}) См., например, Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 3, изд. 5-е, Гостехиздат, 1951 (1953).

Ряд Фурье имеет вид

$$f(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kz + b_k \sin kz), \quad (6.35)$$

где коэффициенты определяются формулами Фурье

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(z) \cos kz \, dz, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(z) \sin kz \, dz. \end{aligned} \right\} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (6.35')$$

В силу теоремы Дирихле разложение (6.35) единственно и ряд сходится (но не абсолютно!) для всякого значения z в промежутке $(0, 2\pi)$ и представляет в этом промежутке заданную функцию $f(z)$.

Если, кроме того, функция $f(z)$ есть периодическая функция z с периодом 2π , то ряд (6.35) сходится для всякого действительного значения z и представляет функцию $f(z)$ на всей действительной оси.

Полезно заметить еще, что если функция $f(z)$ — четная, т. е. если мы имеем $f(-z) = f(z)$, то формула (6.35) несколько упрощается, так как все коэффициенты b_k в этом случае равны нулю. Таким образом, для четной функции мы имеем следующее разложение:

$$f(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kz, \quad (6.36)$$

коэффициенты которого определяются формулой

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(z) \cos kz \, dz. \quad (6.36')$$

Если же функция $f(z)$ — нечетная, т. е. если мы имеем $f(-z) = -f(z)$, то равны нулю все коэффициенты a_k ,

и разложение принимает вид

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kz, \quad (6.37)$$

где

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(z) \sin kz \, dz. \quad (6.37')$$

Эти общие формулы мы можем применить теперь для разложения координат эллиптического движения в ряды, сходящиеся для всех действительных значений средней аномалии и при всяком значении e в промежутке от 0 до 1.

2. Разложения координат в ряды Фурье. Так же, как и в предыдущем параграфе, основными разложениями здесь будут разложения самой эксцентрической аномалии E и ее косинуса.

Напишем уравнение Кеплера в виде

$$E - M = e \sin E, \quad (6.38)$$

откуда видно, что разность $E - M$ удовлетворяет условиям Дирихле при любом значении эксцентриситета и есть нечетная, периодическая функция от средней аномалии M с периодом 2π *).

Поэтому функция $E - M$ может быть представлена рядом Фурье, расположенным по синусам кратных M , и мы можем написать

$$E - M = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kM, \quad (6.39)$$

причем этот ряд заведомо будет сходящимся (но не абсолютно!) для всех действительных значений M и для всех значений эксцентриситета, удовлетворяющих условию

$$0 \leq e \leq 1.$$

*) В самом деле, когда M пробегает все значения от нуля до 2π , эксцентрическая аномалия также пробегает все значения от нуля до 2π и, следовательно, $e \sin E$ есть периодическая функция не только от E , но и от M .

Займемся определением коэффициентов b_k ряда (6.39). По общей формуле (6.37') мы можем написать

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (E - M) \sin kM \, dM. \quad (6.40)$$

Интегрирование по M в формуле (6.40) удобно заменить интегрированием по E , для чего достаточно проинтегрировать один раз по частям, что дает

$$\frac{k\pi}{2} b_k = - \int_0^{\pi} (E - M) \cos kM + \int_0^{\pi} \cos kM (dE - dM),$$

но $E - M$ равно нулю при $M = 0$ и $M = \pi$, и мы имеем

$$\frac{k\pi}{2} b_k = \int_0^{\pi} \cos kM \cdot dE - \int_0^{\pi} \cos kM \cdot dM = \int_0^{\pi} \cos kM \cdot dE,$$

а заменяя здесь M ее значением из уравнения Кеплера, будем иметь

$$\frac{k\pi}{2} b_k = \int_0^{\pi} \cos (kE - ke \sin E) dE.$$

Полагая еще для сокращения $ke = x$, мы получим следующую формулу:

$$b_k = \frac{2}{k\pi} \int_0^{\pi} \cos (kE - x \sin E) dE, \quad (6.40')$$

которая показывает, что всякий коэффициент b_k есть некоторая функция величины x , которую мы будем рассматривать как вспомогательный параметр.

Введем теперь в рассмотрение функцию от параметра x

$$I_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos (kE - x \sin E) dE, \quad (6.41)$$

называемую в математике *функцией Бесселя k -го порядка*.

Тогда

$$b_k = \frac{2}{k} I_k(x) = \frac{2}{k} I_k(ke), \quad (6.42)$$

а формула (6.39) может быть написана в следующем виде:

$$E - M = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_k(ke)}{k} \sin kM. \quad (6.43)$$

Таким образом, решение уравнения Кеплера приводится к вычислению функций Бесселя, основные свойства которых мы рассмотрим несколько ниже.

Рассмотрим теперь разложение в ряд Фурье косинуса эксцентрической аномалии. Так как $\cos E$ есть, очевидно, периодическая четная функция от средней аномалии M , удовлетворяющая в промежутке $(0, 2\pi)$ условиям Дирихле, то мы можем написать следующее разложение:

$$\cos E = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kM, \quad (6.44)$$

которое заведомо будет сходящимся (также не абсолютно) при всех действительных значениях M и для всякого значения e в промежутке $(0, 1)$.

Коэффициенты ряда (6.44), в силу общей формулы (6.36'), определяются следующей формулой:

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos E \cos kM \, dM. \quad (6.45)$$

Рассмотрим сначала коэффициент a_0 , т. е. свободный член ряда (6.44). Так как из уравнения Кеплера следует, что

$$dM = (1 - e \cos E) dE,$$

то из формулы (6.45) выводим

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos E (1 - e \cos E) dE = -e.$$

Переходя теперь к случаю, когда $k \neq 0$, применим к интегралу (6.45) формулу интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} a_k &= -\frac{2}{\pi k} \int_0^\pi \cos E \sin kM + \frac{2}{k\pi} \int_0^\pi \sin kM \cdot \sin E dE = \\ &= \frac{2}{k\pi} \int_0^\pi \sin (kE - x \sin E) \sin E dE, \end{aligned}$$

а заменяя здесь произведение синусов полуразностью косинусов, получим

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{k\pi} \int_0^\pi \cos [(k-1)E - x \sin E] dE - \\ &\quad - \frac{1}{k\pi} \int_0^\pi \cos [(x+1)E - x \sin E] dE, \quad (6.45') \end{aligned}$$

что с помощью формулы (6.41) может быть написано еще в виде

$$a_k = \frac{1}{k} [I_{k-1}(ke) - I_{k+1}(ke)]. \quad (6.45'')$$

Теперь разложение $\cos E$ представится в следующей форме:

$$\cos E = -\frac{e}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_{k-1}(ke) - I_{k+1}(ke)}{k} \cos kM. \quad (6.46)$$

Имея разложения (6.43) и (6.46), получим уже без всяких вычислений разложения координат в эллиптическом движении.

Действительно, формула (5.28) дает сразу разложение в ряд Фурье радиуса-вектора эллиптической орбиты в виде

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e \frac{I_{k+1}(ke) - I_{k-1}(ke)}{k} \cos kM, \quad (6.47)$$

а формулы (5.34) позволяют написать разложения для орбитальных координат:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\xi}{a} &= \frac{e}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_{k-1}(ke) - I_{k+1}(ke)}{k} \cos kM, \\ \frac{\eta}{a} &= \frac{2\sqrt{1-e^2}}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_k(ke)}{k} \sin kM. \end{aligned} \right\} \quad (6.48)$$

Наконец, формулы (5.39) позволяют составить разложения пространственных координат. Эти разложения мы напишем следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{a} &= \sum_{k=0}^{\infty} (A_x^{(k)} \cos kM + B_x^{(k)} \sin kM), \\ \frac{y}{a} &= \sum_{k=0}^{\infty} (A_y^{(k)} \cos kM + B_y^{(k)} \sin kM), \\ \frac{z}{a} &= \sum_{k=0}^{\infty} (A_z^{(k)} \cos kM + B_z^{(k)} \sin kM), \end{aligned} \right\} \quad (6.49)$$

коэффициенты которых определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} A_x^{(k)} &= \alpha_{\tau} A_{\xi}^{(k)}, & B_x^{(k)} &= \alpha'_{\tau} B_{\eta}^{(k)}, \\ A_y^{(k)} &= \beta_{\tau} A_{\xi}^{(\tau)}, & B_y^{(k)} &= \beta'_{\tau} B_{\eta}^{(k)}, \\ A_z^{(k)} &= \gamma_{\tau} A_{\xi}^{(\tau)}, & B_z^{(k)} &= \gamma'_{\tau} B_{\eta}^{(k)}, \end{aligned} \right\} \quad (6.49')$$

где положено

$$\left. \begin{aligned} A_{\xi}^{(0)} &= \frac{e}{2}, & A_{\xi}^{(k)} &= \frac{I_{k-1}(ke) - I_{k+1}(ke)}{k}, & (k \neq 0) \\ B_{\eta}^{(0)} &= 0, & B_{\eta}^{(k)} &= \frac{2\sqrt{1-e^2}}{e} \frac{I_k(ke)}{k}, & (k \neq 0). \end{aligned} \right\} \quad (6.49'')$$

3. Разложения скорости и ее составляющих. Чтобы получить разложения в ряды Фурье скорости

и ее проекций, отметим прежде всего, что из формул (6.4), (6.43) мы имеем сразу

$$\frac{a}{r} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} I_k(ke) \cos kM, \quad (6.50)$$

что дает также разложение квадрата скорости

$$\left(\frac{V}{na}\right)^2 = 1 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} I_k(ke) \cos kM. \quad (6.51)$$

Проекции скорости на орбитальные и пространственные оси координат найдем непосредственным дифференцированием формул (6.48) и (6.49), так что можем написать:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\dot{\xi}}{na} &= - \sum_{k=1}^{\infty} k A_{\xi}^{(k)} \sin kM, \\ \frac{\dot{\eta}}{na} &= \sum_{k=1}^{\infty} k B_{\eta}^{(k)} \cos kM, \end{aligned} \right\} \quad (6.51')$$

и соответственно

$$\left. \begin{aligned} \frac{\dot{x}}{na} &= \sum_{k=1}^{\infty} (kB_x^{(k)} \cos kM - kA_x^{(k)} \sin kM), \\ \frac{\dot{y}}{na} &= \sum_{k=1}^{\infty} (kB_y^{(k)} \cos kM - kA_y^{(k)} \sin kM), \\ \frac{\dot{z}}{na} &= \sum_{k=1}^{\infty} (kB_z^{(k)} \cos kM - kA_z^{(k)} \sin kM). \end{aligned} \right\} \quad (6.51'')$$

Точно также получаем разложение радиальной и поперечной составляющих скорости, пользуясь формулами

$$\frac{V_r}{na} = \frac{d}{dM} \frac{r}{a}, \quad \frac{V_n}{na} = \sqrt{1 - e^2} \frac{a}{r},$$

из которых с помощью (6.47) и (6.50) находим

$$\left. \begin{aligned} \frac{V_r}{na} &= \sum_{k=1}^{\infty} e [I_{k-1}(ke) - I_{k+1}(ke)] \sin kM, \\ \frac{V_n}{na} &= \sqrt{1-e^2} \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} I_k(ke) \cos kM \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (6.51''')$$

Остается получить разложение истинной аномалии v . Для этой цели мы не можем воспользоваться формулой (6.27), как в предыдущем разделе, так как эта формула содержит произведение двух рядов. Но ряды Фурье, которые мы получили в этом разделе, не являются абсолютно сходящимися, а поэтому перемножать их мы не имеем права.

Следовательно, здесь мы должны применить другой прием. Из формул (6.26') и (6.27) мы имеем

$$\frac{dv}{dM} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e \cos E)^2}. \quad (6.52)$$

Правая часть последнего равенства есть четная периодическая функция E , а следовательно, является также четной периодической функцией от M . Эта функция удовлетворяет условиям Дирихле, если $e \neq 1$, а поэтому мы можем разложить ее в ряд Фурье по косинусам кратных M .

Это разложение напомним следующим образом:

$$\frac{dv}{dM} = \frac{1}{2} \bar{a}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{a}_k \cos kM, \quad (6.53)$$

где коэффициенты определяются формулами

$$\bar{a}_k = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos kM dM}{(1-e \cos E)^2}, \quad (6.54)$$

или (если принять за переменную интегрирования E вместо средней аномалии M)

$$\bar{a}_k = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos (kE - x \sin E) dE}{1-e \cos E}. \quad (6.54')$$

Эти величины могут быть разложены в ряды, расположенные по возрастающим степеням e , абсолютно сходящиеся при $0 < e < 1$.

Интегрируя теперь равенство (6.53), мы имеем

$$v = \frac{\bar{a}_0}{2} M + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_k}{k} \sin kM, \quad (6.55)$$

Вычислим коэффициент $\bar{a}_0$. Общая формула (6.54') дает

$$\bar{a}_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{1-e^2} dE}{1-e \cos E}.$$

Интеграл вычислить легко, так как формула (5.20) позволяет перейти к переменной интегрирования v вместо E , что дает

$$\bar{a}_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} dv = 2$$

и разложение (6.55) напишется в виде

$$v - M = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_k}{k} \sin kM. \quad (6.55')$$

Остальные коэффициенты могут быть выражены через функции Бесселя. Действительно, разлагая функцию $(1 - e \cos E)^{-1}$ в абсолютно сходящийся при $e < 1$ ряд

$$\frac{1}{1 - e \cos E} = \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{\nu} \cos^{\nu} E,$$

мы получим из формулы (6.54') следующую:

$$\bar{a}_k = 2 \sqrt{1-e^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{a}_k^{(\nu)} e^{\nu}, \quad (6.56)$$

где

$$\bar{a}_k^{(\nu)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^{\nu} E \cdot \cos(kE - x \sin E) dE. \quad (6.56')$$

Но для степени косинуса имеем формулу, совершенно подобную формуле (6.33) для степени синуса

$$\cos^{\nu} E = \frac{1}{2^{\nu-1}} \sum_{s=0}^{\nu} \bar{C}_{\nu}^s \cos(\nu - 2s) E \quad (6.57)$$

с такими же коэффициентами*), вследствие чего формула (6.56') напишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{a}_k^{(\nu)} &= \frac{1}{2^{\nu-1}} \sum_{s=0}^{\nu} \bar{C}_{\nu}^s \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(kE - x \sin E) \cos(\nu - 2s) E \, dE = \\ &= \frac{1}{2^{\nu}} \sum_{s=0}^{\nu} \bar{C}_{\nu}^s \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos[(k + \nu - 2s)E - x \sin E] \, dE + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos[(k - \nu + 2s)E - x \sin E] \, dE \right\}, \end{aligned}$$

откуда, в силу определения функций Бесселя (6.41), имеем окончательно

$$\bar{a}_k^{(\nu)} = \frac{1}{2^{\nu}} \sum_{s=0}^{\nu} \bar{C}_{\nu}^s [I_{k+\nu-2s}(ke) + I_{k-\nu+2s}(ke)]. \quad (6.58)$$

Чтобы представить коэффициенты полученных рядов Фурье в виде рядов, расположенных только по степеням эксцентриситета, нужно еще найти разложения в степенные ряды функций Бесселя.

4. Основные свойства функций Бесселя. Рассмотрим теперь основные свойства функций Бесселя, определенных формулой (6.41), которую мы напомним, меняя обозначение переменной интегрирования, в виде

$$I_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(kt - x \sin t) \, dt. \quad (6.59)$$

Из этой общей формулы, где под x будем подразумевать любое вещественное число, имеем прежде всего

$$|I_k(x)| \leq 1. \quad (6.59')$$

*) См. сноску на стр. 326.

Теперь покажем, что величина $I_k(x)$ может быть рассматриваема как коэффициент разложения некоторой функции по степеням независимой переменной, которую обозначим через z . Напишем для этого формулу (6.59) в таком виде:

$$I_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos kt \cos(x \sin t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kt \sin(x \sin t) dt.$$

откуда, полагая для сокращения

$$\left. \begin{aligned} \alpha_k(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos kt \cos(x \sin t) dt, \\ \beta_k(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kt \sin(x \sin t) dt, \end{aligned} \right\} \quad (6.59'')$$

имеем также

$$I_k(x) = \frac{1}{2} [\alpha_k(x) + \beta_k(x)]. \quad (6.59''')$$

Введем теперь новую переменную, полагая

$$e^{it} = z, \quad (6.60)$$

где e обозначает здесь неперово число ($e = 2.7182\dots$), а $i = \sqrt{-1}$.

Тогда

$$\sin t = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}$$

и, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \cos(x \sin t) &= \cos \left[\frac{x \left(z - \frac{1}{z} \right)}{2i} \right] = \frac{e^{\frac{x}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right)} + e^{-\frac{x}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right)}}{2}, \\ \sin(x \sin t) &= \sin \left[\frac{x \left(z - \frac{1}{z} \right)}{2i} \right] = \frac{e^{\frac{x}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right)} - e^{-\frac{x}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right)}}{2i}, \end{aligned} \right\} \quad (6.60)$$

откуда

$$\cos(x \sin t) + i \sin(x \sin t) = e^{\frac{x}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right)}. \quad (6.61)$$

Положим теперь

$$\Phi(z, x) = e^{\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)} \quad (6.62)$$

и будем рассматривать z как независимую переменную, а x — как произвольный вещественный параметр.

Функция $\Phi(z, x)$ легко может быть разложена в ряд, расположенный по целым степеням переменной z .

Действительно, мы имеем известные разложения

$$e^{\frac{xz}{2}} = 1 + \frac{\frac{x}{2}}{1!}z + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2!}z^2 + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{3!}z^3 + \dots$$

$$e^{-\frac{x}{2z}} = 1 - \frac{\frac{x}{2}}{1!} \cdot \frac{1}{z} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2!} \cdot \frac{1}{z^2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{3!} \cdot \frac{1}{z^3} + \dots,$$

абсолютно сходящиеся для всех значений z и x .

Перемножая эти два абсолютно сходящихся ряда, мы получим ряд, также абсолютно сходящийся при всех значениях z и x , который напомним в виде ряда, расположенного по степеням z следующим образом:

$$\Phi(z, x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi_k(x) \cdot z^k. \quad (6.63)$$

Коэффициенты ряда (6.63), как нетрудно проверить, определяются следующими формулами:

$$\Phi_{-k}(x) = (-1)^k \Phi_k(x) \quad (6.64)$$

и

$$\Phi_k(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(s+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2s}, \quad (6.65)$$

причем очевидно, что ряд (6.65) сходится абсолютно при всех значениях параметра x .

Теперь легко найти также $\alpha_k(x)$ и $\beta_k(x)$. Из формулы (6.61) мы, имея в виду (6.64), находим

$$\cos(x \sin t) + i \sin(x \sin t) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \Phi_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k z^{-k} \Phi_k(x),$$

но

$$z^k = e^{ikt} = \cos kt + i \sin kt,$$

$$z^{-k} = e^{-ikt} = \cos kt - i \sin kt,$$

так что получаем

$$\begin{aligned} & \cos(x \sin t) + i \sin(x \sin t) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [1 + (-1)^k] \Phi_k(x) \cos kt + i \sum_{k=0}^{\infty} [1 - (-1)^k] \Phi_k(x) \sin kt, \end{aligned}$$

откуда, приравнивая действительные и мнимые части в левой и правой частях предыдущего равенства, имеем

$$\left. \begin{aligned} \cos(x \sin t) &= \sum_{k=0}^{\infty} [1 + (-1)^k] \Phi_k(x) \cos kt, \\ \sin(x \sin t) &= \sum_{k=1}^{\infty} [1 - (-1)^k] \Phi_k(x) \sin kt. \end{aligned} \right\} \quad (6.66)$$

Таким образом, мы получили окольным путем разложение функций $\cos(x \sin t)$ и $\sin(x \sin t)$ в ряды Фурье.

Но, с другой стороны, формулы (6.59'') дают выражения коэффициентов Фурье для этих функций, а так как последние заведомо удовлетворяют условиям Дирихле в промежутке $0 \leq t \leq 2\pi$, то выражения (6.59'') должны быть тождественны с коэффициентами рядов (6.66). Поэтому мы имеем

$$\left. \begin{aligned} \alpha_k(x) &= [1 + (-1)^k] \Phi_k(x), \\ \beta_k(x) &= [1 - (-1)^k] \Phi_k(x), \end{aligned} \right\} \quad (6.66')$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots)$$

откуда

$$\alpha_k(x) + \beta_k(x) = 2\Phi_k(x).$$

Сравнивая этот результат с формулой (6.59'''), получим

$$I_k(x) \equiv \Phi_k(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2s}}{s!(s+k)!}, \quad (6.67)$$

т. е. разложение функции Бесселя k -го порядка в абсолютно сходящийся ряд, расположенный по возрастающим степеням параметра x .

Если формулу (6.67) написать в виде

$$I_k(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^k \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s}}{s!(s+k)!}, \quad (6.67')$$

то станет ясно, что при малом значении x функция Бесселя k -го порядка есть величина k -го порядка относительно x .

Возвращаясь теперь к формулам (6.62) и (6.63), мы можем, очевидно, написать следующее равенство:

$$e^{\frac{x}{2}} \left(z - \frac{1}{z} \right) = \Phi(z, x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_k(x) \cdot z^k, \quad (6.68)$$

показывающее, что функции Бесселя являются коэффициентами разложения функции $\Phi(z, x)$ в ряд, расположенный по степеням независимой переменной z .

Поэтому функция $\Phi(z, x)$, определяемая формулой (6.62), называется *производящей функцией* функций Бесселя.

Полученные формулы позволяют вывести множество различных свойств функций Бесселя. Мы ограничимся рассмотрением только некоторых важнейших из этих свойств.

Прежде всего из формулы (6.67') непосредственно видно, что

$$I_k(-x) = (-1)^k I_k(x), \quad (6.69)$$

т. е. функция Бесселя четного порядка есть четная функция от x , а функция Бесселя нечетного порядка есть нечетная функция от x .

Рассмотрим далее равенство (6.68), которое является тождеством как относительно z , так и относительно параметра x . Поэтому мы имеем право дифференцировать это равенство по любой из двух величин z и x , в результате чего опять получим тождество.

Дифференцируя равенство (6.68) по переменной z , мы имеем следующее тождество:

$$\frac{x}{2} \left(1 + \frac{1}{z^2} \right) \Phi(z, x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k I_k(x) \cdot z^{k-1},$$

из которого снова, заменяя $\Phi(z, x)$ его разложением, получим

$$\frac{x}{2} (z^2 + 1) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_k(x) \cdot z^k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k I_k(x) \cdot z^{k+1}.$$

Так как это равенство есть тождество относительно переменной z , то коэффициенты при одинаковых степенях z в левой и правой частях равенства должны быть одинаковы,

Приравнивая коэффициенты при z^{k+1} , мы найдем следующее соотношение:

$$kI_k(x) = \frac{x}{2} [I_{k-1}(x) + I_{k+1}(x)], \quad (6.70)$$

которое является рекуррентным соотношением для функций Бесселя, так как позволяет, зная две из трех последовательных функций Бесселя, найти третью. В самом деле, равенство (6.70) дает, например,

$$I_{k+1}(x) = \frac{2k}{x} I_k(x) - I_{k-1}(x). \quad (6.70')$$

Дифференцируя затем равенство (6.68) по параметру x , получим тождество

$$\frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right) \Phi(z, x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I'_k(x) \cdot z^k,$$

исключая из которого функцию $\Phi(z, x)$, имеем следующее тождество:

$$\frac{1}{2} (z^2 - 1) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_k(x) \cdot z^k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I'_k(x) \cdot z^{k+1},$$

откуда, приравнивая коэффициенты при z^{k+1} в обеих частях равенства, найдем следующее соотношение:

$$I'_k(x) = \frac{1}{2} [I_{k-1}(x) - I_{k+1}(x)], \quad (6.71)$$

которое позволяет выразить любую производную от функции Бесселя в виде линейной комбинации этих функций.

Например, дифференцируя соотношение (6.71), получим

$$I''_k(x) = \frac{1}{2} [I'_{k-1}(x) - I'_{k+1}(x)].$$

Но из той же формулы (6.71) имеем

$$I'_{k-1}(x) = \frac{1}{2} [I_{k-2}(x) - I_k(x)],$$

$$I'_{k+1}(x) = \frac{1}{2} [I_k(x) - I_{k+2}(x)],$$

а поэтому предыдущее равенство преобразуется к виду

$$I''_k(x) = \frac{1}{4} [I_{k-2}(x) - 2I_k(x) + I_{k+2}(x)]. \quad (6.72)$$

Из полученных соотношений можно вывести дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя.

Действительно, из формулы (6.70) имеем

$$(k-1)I_{k-1}(x) = \frac{x}{2}[I_{k-2}(x) + I_k(x)],$$

$$(k+1)I_{k+1}(x) = \frac{x}{2}[I_k(x) + I_{k+2}(x)],$$

откуда находим

$$\begin{aligned} k[I_{k-1}(x) + I_{k+1}(x)] - [I_{k-1}(x) - I_{k+1}(x)] = \\ = \frac{x}{2}[I_{k-2}(x) + 2I_k(x) + I_{k+2}(x)]. \end{aligned}$$

Исключая отсюда все функции, порядок которых не равен k , с помощью равенств (6.70), (6.71) и (6.72) мы получим следующее равенство, которое также есть тождество:

$$I_k''(x) + \frac{1}{x}I_k'(x) + \left(1 - \frac{k^2}{x^2}\right)I_k(x) = 0. \quad (6.73)$$

Рассмотрим теперь следующее линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{k^2}{x^2}\right)y = 0, \quad (6.73')$$

где y есть неизвестная функция, x — независимая переменная, а k — числовой параметр.

Тождество (6.73) показывает, что если k — целое число, то функция Бесселя k -го порядка является решением этого уравнения (частным!), а, следовательно, общее решение уравнения (6.73') может быть получено с помощью квадратур.

Уравнение (6.73') называется в математике также *уравнением Бесселя*. Это уравнение встречается во многих разделах математики, а поэтому функции, которые ему удовлетворяют, имеют большое значение.

Эти функции подробно изучаются в математике, а числовые их значения даются в специальных таблицах.

Для функций Бесселя, которые имеют приложения в небесной механике, достаточно знать числовые значения только двух функций Бесселя $I_0(x)$ и $I_1(x)$, так как соотношение (6.70) позволяет после этого найти и все остальные.

Действительно, из формулы (6.70) имеем:

$$I_2(x) = \frac{2}{x} I_1(x) - I_0(x),$$

$$I_3(x) = \frac{4}{x} I_2(x) - I_1(x),$$

$$I_4(x) = \frac{6}{x} I_3(x) - I_2(x),$$

• • • • •

5. Дополнительные замечания о сходимости рядов. Возвращаясь к разложениям координат эллиптического движения, мы видим теперь, что все коэффициенты этих разложений можно представить в виде рядов, расположенных по возрастающим степеням эксцентриситета e орбиты, абсолютно сходящихся для всякого значения e в промежутке от нуля до единицы.

Действительно, все эти коэффициенты выражаются через функции Бесселя и их первые производные от аргумента $x = ke$.

Но формула (6.67') дает

$$I_k(ke) = \left(\frac{ke}{2}\right)^k \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{ke}{2}\right)^{2s}}{s!(s+k)!} =$$

$$= \frac{1}{k!} \left(\frac{ke}{2}\right)^k \left\{ 1 - \frac{\left(\frac{ke}{2}\right)^k}{1 \cdot (k+1)} + \frac{\left(\frac{ke}{2}\right)^4}{1 \cdot 2 \cdot (k+1)(k+2)} - + \dots \right\}. \quad (6.74)$$

При $0 \leq e < 1$ эта величина имеет k -й порядок относительно эксцентриситета e .

Далее, дифференцируя ряд (6.67) по x и заменяя затем x на ke , мы получим также

$$I'_k(ke) = \frac{1}{2} \left(\frac{ke}{2}\right)^{k-1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (k+2s) \left(\frac{ke}{2}\right)^{2s}}{s!(s+k)!} =$$

$$= \frac{1}{2(k-1)!} \left(\frac{ke}{2}\right)^{k-1} \left\{ 1 - \frac{(k+2) \left(\frac{ke}{2}\right)^2}{1 \cdot k \cdot (k+1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{(k+4) \left(\frac{ke}{2}\right)^4}{1 \cdot 2 \cdot k(k+1)(k+2)} - + \dots \right\}. \quad (6.74')$$

Эта величина имеет $(k-1)$ -й порядок относительно e .

Формулы (6.42) и (6.45''), дающие выражения для коэффициентов двух основных разложений эллиптического движения, напишутся теперь следующим образом:

$$b_k = \frac{2}{k} \left(\frac{ke}{2} \right)^k \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{ke}{2} \right)^{2s}}{s! (s+k)!} \quad (6.75)$$

и

$$a_k = \frac{2}{k} I'_k(ke) = \frac{1}{k} \left(\frac{ke}{2} \right)^{k-1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (k+2s) \left(\frac{ke}{2} \right)^{2s}}{s! (s+k)!}, \quad (6.75')$$

откуда следует, что коэффициенты b_k и a_k суть величины k -го и $(k-1)$ -го порядков относительно эксцентриситета соответственно.

Рассмотрим еще коэффициенты разложения (6.55') уравнения центра $v - M$. Из формулы (6.58) легко видно, что величина $\bar{a}_k^{(v)}$ имеет порядок $k + v$ относительно эксцентриситета, а формула (6.56) устанавливает, что $\bar{a}_k$ есть величина k -го порядка относительно e . Следовательно, коэффициент при $\sin kM$ в разложении уравнения центра есть также величина k -го порядка относительно e , и этот коэффициент может быть представлен рядом, расположенным по степеням e , первый член которого содержит множителем e^k . Нетрудно также видеть, что этот ряд сходится абсолютно при всяком значении эксцентриситета, меньшем единицы.

Обратим теперь внимание на следующее обстоятельство. Как показано, координаты эллиптического движения могут быть представлены в виде рядов Фурье (т. е. рядов, расположенных по синусам и косинусам целых кратных средней аномалии M), коэффициенты которых суть ряды с числовыми коэффициентами, расположенные по целым, возрастающим степеням эксцентриситета орбиты e .

С другой стороны, в предыдущем параграфе показано, что те же координаты могут быть представлены в виде рядов, расположенных по целым, возрастающим степеням эксцентриситета, коэффициенты которых суть тригонометрические многочлены относительно синусов и косинусов целых кратностей M .

Имея в виду, что и те и другие ряды определяют координаты единственным образом, мы можем, очевидно, пре-

образовать ряд одного типа в ряд другого типа простой перестановкой членов. Однако ряды, полученные в первом параграфе, сходятся (и притом абсолютно) только для значений эксцентриситета, не превышающих лапласова предела $\bar{e}$, а ряды, рассмотренные в этом параграфе, сходятся (но не абсолютно) для всякого значения эксцентриситета, не превышающего единицы.

Кажущееся противоречие объясняется замечательными свойствами абсолютно и условно сходящихся рядов.

Действительно, мы знаем, что если бесконечный ряд сходится абсолютно, то его сумма не зависит от порядка членов ряда, которые можно, следовательно, как угодно переставлять, и после каждой такой перестановки опять получается ряд, сходящийся абсолютно.

Наоборот, если ряд сходится не абсолютно, или условно, то перестановка бесчисленного множества его членов может превратить просто сходящийся ряд в абсолютно сходящийся, или даже в расходящийся.

Поэтому, превращая разложение какой-нибудь координаты в ряд по степеням эксцентриситета перестановкой членов в ряд Фурье, мы получим по свойству абсолютно сходящихся рядов ряд, также сходящийся абсолютно для всякого значения M , пока e не превышает предела Лапласа $\bar{e}$.

Превращая ряд Фурье для какой-либо координаты путем перестановки членов в ряд, расположенный по степеням эксцентриситета, мы, вообще говоря, получаем ряд, о сходимости которого без специального исследования ничего сказать нельзя. Но мы уже знаем (вследствие единственности получаемых разложений), что после такой перестановки получается ряд, сходящийся абсолютно, если $e < \bar{e}$, но о сходимости которого ничего нельзя сказать, если $\bar{e} \leq e \leq 1$.

Приведенное только что рассуждение показывает, что все ряды, полученные в этом параграфе, т. е. ряды типа Фурье, являются сходящимися абсолютно для всякого M , если $0 \leq e < \bar{e}$, и просто сходящимися, если $\bar{e} \leq e \leq 1$.

Поэтому ряды типа Фурье, представляющие величины невозмущенного эллиптического движения, можно без опасения дифференцировать, интегрировать, перемножать, делить,

возводить в степень при любом значении средней аномалии M , но только для значений эксцентриситета, не превышающих предела Лапласа $\bar{e}$.

Если же $\bar{e} < e \leq 1$, то оперировать с рядами типа Фурье следует с сугубой осторожностью, помня, что действия над ними могут превратить сходящийся ряд в расходящийся.

Впрочем для вычислений сумм любого конечного числа членов эти предосторожности излишни, так как перестановка конечного числа членов ряда не изменяет характера его сходимости и его суммы.

В этом смысле пригодны даже и расходящиеся ряды, так как сумма любого конечного числа членов такого ряда также всегда есть величина конечная и может представлять с достаточной точностью числовое значение рассматриваемой функции.

Примечание. Мы рассмотрели в этой главе только некоторые основные разложения величин эллиптического движения, необходимые для представления общего решения уравнений невозмущенного движения (для случая, когда $0 < e < 1$) в явном относительно времени t виде.

Из полученных разложений можно вывести (при помощи алгебраических операций) множество других, которые могут представить интерес для общей теории возмущений.

Точно также не представляет принципиальных затруднений получить заново разложения и для ряда других величин эллиптического движения. Эти разложения можно найти в более подробных руководствах или в специальных таблицах *).

*) См., например, Субботин М. Ф., Курс небесной механики, т. 2, ОНТИ, 1937, а также Tisserand F., Traité de mécanique céleste, т. 1, Paris, 1889. Cayley A., Tables of Developments of Functions in the Theory of Elliptic Motion. Memories of the R. Astr. Society, 29, 1859.

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

ГЛАВА VII

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

§ 1. Метод Лагранжа изменения произвольных постоянных

1. Общая задача о движении точки с произвольной возмущающей силой. Рассмотрим сначала общую задачу о движении материальной точки (планеты или спутника) под действием ньютоновского притяжения некоторого центрального тела (Солнца или Земли, рассматриваемых также как материальные точки) и добавочной *возмущающей силы*, произвольным образом зависящей от времени, положения и скорости движущейся точки.

Обозначим через x, y, z прямоугольные, декартовские координаты движущейся точки в системе осей, имеющих неизменные направления и начало в центральном теле. Тогда, как было отмечено в § 1 главы четвертой, уравнения движения могут быть написаны в следующем общем виде:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= X_0 + X, \\ \ddot{y} &= Y_0 + Y, \\ \ddot{z} &= Z_0 + Z. \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

Здесь X_0, Y_0, Z_0 обозначают проекции ускорения (относительного), вызываемого действием притяжения центрального тела — точки, а X, Y, Z — проекции возмущающего ускорения, вызываемого действием добавочной возмущающей силы.

Проекции основного ускорения определяются известными формулами

$$X_0 = -\frac{\mu x}{r^3}, \quad Y_0 = -\frac{\mu y}{r^3}, \quad Z_0 = -\frac{\mu z}{r^3}, \quad (7.2)$$

где r есть некоторая, зависящая от масс обеих точек, постоянная, а

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

обозначает как всегда радиус-вектор движущейся точки.

Проекции возмущающего ускорения будем считать известными и заданными функциями от времени t , координат движущейся точки x , y , z и составляющих ее скорости (относительной) V , т. е. величин $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$.

Функции

$$\left. \begin{aligned} X &= X(t; x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ Y &= Y(t; x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ Z &= Z(t; x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \end{aligned} \right\} \quad (7.2')$$

могут быть какими угодно функциями указанных аргументов, лишь бы дифференциальные уравнения движения (7.1) имели, при произвольно заданных начальных условиях

$$x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0 \quad (7.3)$$

единственное непрерывное и дифференцируемое решение, определенное для всех значений времени, заключающихся в некотором промежутке $(t_0 - \bar{t}', t_0 + \bar{t})$, содержащем в себе начальный момент t_0 ; промежуток этот может быть бесконечным в ту или в другую сторону (или даже в обе стороны).

Наша задача заключается в интегрировании системы (7.1), т. е. в нахождении общего решения или общего интеграла дифференциальных уравнений возмущенного движения.

Однако точное интегрирование уравнений (7.1) в громадном большинстве случаев оказывается невозможным и мы вынуждены прибегнуть к методу последовательных приближений.

Разумеется, можно придумать множество различных методов последовательных приближений, отличающихся друг

от друга или употребляемыми переменными, или характером производимых операций.

Мы рассмотрим сначала метод приближений, наиболее привычный и удобный для астрономов, опирающийся на общий метод изменения произвольных постоянных, основы которого были заложены еще Ньютоном в его знаменитом сочинении «Математические начала натуральной философии» *) и который был затем детально разработан Лагранжем в ряде замечательных мемуаров и в его «Аналитической механике» **).

В применении к рассматриваемой нами задаче метод Лагранжа может быть охарактеризован следующим образом:

Отбросим в правых частях уравнений (7.1) проекции возмущающего ускорения X, Y, Z .

Тогда мы получим новую систему дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{\mu x}{r^3}, \\ \ddot{y} &= -\frac{\mu y}{r^3}, \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu z}{r^3}, \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

отличную от системы (7.1), но легко интегрируемую.

Действительно, уравнения (7.4) являются уравнениями невозмущенного кеплеровского движения и интегрирование этих уравнений было выполнено (и притом разными способами) в главе четвертой этой книги.

Общее решение системы (7.4) здесь удобнее всего записать в виде (4.57), т. е. следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} x &= r\alpha, & \dot{x} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} [ae \sin v + \alpha' (1 + e \cos v)], \\ y &= r\beta, & \dot{y} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} [\beta e \sin v + \beta' (1 + e \cos v)], \\ z &= r\gamma, & \dot{z} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} [\gamma e \sin v + \gamma' (1 + e \cos v)], \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

*) См. «Приложение».

где

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}, \quad (7.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i, & \alpha' &= \frac{d\alpha}{du}, \\ \beta &= \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i, & \beta' &= \frac{d\beta}{du}, \\ \gamma &= \sin u \sin i, & \gamma' &= \frac{d\gamma}{du}. \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

Аргумент широты u определяется формулой

$$u = v + \omega, \quad (7.8)$$

а истинная аномалия v связана с временем t следующим соотношением:

$$t - \tau = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \int_0^v \frac{dv'}{(1 + e \cos v')^2}. \quad (7.9)$$

Произвольными постоянными в этих формулах являются элементы кеплеровой орбиты

$$\Omega, i, \omega, p, e, \tau, \quad (7.10)$$

однозначно определяемые начальными условиями (7.3).

Если рассматривать как неизвестные величины не только координаты x, y, z , но и их первые производные — составляющие скорости $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, то формулы (7.5) представят общее решение системы шести дифференциальных уравнений первого порядка, которая напишется в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \dot{x}, & \frac{dy}{dt} &= \dot{y}, & \frac{dz}{dt} &= \dot{z}, \\ \frac{d\dot{x}}{dt} &= X_0, & \frac{d\dot{y}}{dt} &= Y_0, & \frac{d\dot{z}}{dt} &= Z_0. \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

Это означает, что функции, определенные формулами (7.5), удовлетворяют уравнениям (7.11) каковы бы ни были числовые значения произвольных постоянных (7.10).

Но если выражения (7.5) подставить в уравнения возмущенного движения (7.1), которые также удобно написать

в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка, т. е. в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \dot{x}, & \frac{dy}{dt} &= \dot{y}, & \frac{dz}{dt} &= \dot{z}, \\ \frac{d\dot{x}}{dt} &= X_0 + X, & \frac{d\dot{y}}{dt} &= Y_0 + Y, & \frac{d\dot{z}}{dt} &= Z_0 + Z, \end{aligned} \right\} (7.12)$$

то последние уравнения не удовлетворятся ни при каких значениях произвольных постоянных.

Однако в том случае, когда возмущающая сила мала по сравнению с основной силой притяжения центрального тела, абсолютные значения величин X , Y , Z останутся малыми, когда в этих выражениях мы заменим координаты и составляющие скорости выражениями (7.5).

Следовательно, в этом случае (т. е. когда возмущающая сила мала) выражения (7.5) почти удовлетворяют уравнениям возмущенного движения, что наводит нас на мысль о таком «незначительном изменении» формул (7.5), после которого уравнения (7.12) будут удовлетворены совершенно строго.

«Незначительно изменить» формулы (7.5) мы можем, конечно, разными способами. Например, мы можем прибавить к правым частям формул (7.5) малые добавки δx , δy , δz , $\delta \dot{x}$, $\delta \dot{y}$, $\delta \dot{z}$, которые можно назвать возмущениями координат и составляющих скорости*), и поставить задачу об определении этих малых добавок так, чтобы уравнения (7.12) удовлетворялись строго или, по крайней мере, чтобы эти уравнения удовлетворялись бы лучше, чем формулами (7.5).

Или можно попытаться, не изменяя внешнего вида формул (7.5), изменить как-то незначительно произвольные постоянные (7.10), входящие в формулы (7.5).

Но ясно, что если мы придадим произвольным постоянным малые постоянные добавки, то мы просто получим некоторое другое решение тех же уравнений возмущенного движения (7.11) и не продвинемся ни на шаг на

*) Способ нахождения поправок к прямоугольным координатам и их производным, который подробнее мы рассмотрим ниже, можно назвать *методом Эйлера — Хилла*. Нужно иметь при этом в виду, что возмущения δx , ... отличны от возмущений Δx , ..., которые рассматривались в главе пятой

пути нахождения решения уравнений возмущенного движения (7.1) или (7.12). Это другое решение может быть получено из первоначального как результат возмущений начальных условий (7.3), так что возмущения координат для любого t получаются как следствия их начальных возмущений, а не как следствия воздействия постоянно действующей возмущающей силы.

Поэтому, если мы желаем получить решение уравнений возмущенного движения (7.12) путем некоторого изменения произвольных постоянных (7.10), то должны придавать этим величинам добавки, зависящие от времени, т. е. должны рассматривать элементы орбиты (постоянные в невозмущенном движении) как величины переменные, как некоторые функции времени.

2. Основная идея метода Лагранжа изменения (вариации) произвольных постоянных заключается в следующем.

Решение уравнений возмущенного движения определяется теми же формулами (7.5), как и решение уравнений невозмущенного движения, но величины Ω , I , ω , p , e и τ рассматриваются в этих формулах не как постоянные, а как некоторые функции времени, определяемые так, чтобы уравнения возмущенного движения удовлетворялись.

Эта основная идея может быть использована не только в случае задачи с малой возмущающей силой, но и в любом другом случае, когда дифференциальные уравнения задачи могут быть приведены к виду (7.1), и независимо от характера возмущающей силы.

В самом деле, с чисто математической точки зрения осуществление идеи Лагранжа сводится просто к преобразованию переменных в уравнениях (7.12), причем формулами преобразования служат известные формулы невозмущенного движения.

Действительно, будем рассматривать формулы невозмущенного движения*) как формулы преобразования, связывающие первоначальные, или старые, зависящие перемен-

*) Здесь имеются в виду как формулы (7.5), так и последующие формулы (7.6), (7.7), (7.8) и (7.9), а также любые следствия основных формул.

ные, т. е. величины $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, с новыми зависимыми переменными, за которые принимаются элементы кеплеровой орбиты $\Omega, i, \omega, p, e, \tau$.

Тогда, производя в уравнениях (7.12) подстановку, определяемую формулами (7.5), мы получим для новых неизвестных систему дифференциальных уравнений вида

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= F_1(t; \Omega, i, \omega, p, e, \tau), \\ \frac{di}{dt} &= F_2(i; \Omega, i, \omega, p, e, \tau), \\ \frac{d\omega}{dt} &= F_3(i; \Omega, i, \omega, p, e, \tau), \\ \frac{dp}{dt} &= F_4(t; \Omega, i, \omega, p, e, \tau), \\ \frac{de}{dt} &= F_5(t; \Omega, i, \omega, p, e, \tau), \\ \frac{d\tau}{dt} &= F_6(t; \Omega, i, \omega, p, e, \tau), \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

где правые части будут известными функциями времени и всех элементов орбиты.

Таким образом, идея Лагранжа приводит задачу интегрирования уравнений (7.1) (или (7.12)) к задаче интегрирования системы (7.13).

Допустим, что уравнения (7.13) проинтегрированы так, что получены формулы, выражающие неизвестные величины, определяемые этими уравнениями, в функции времени и шести произвольных постоянных интегрирования C_s ($s = 1, 2, \dots, 6$).

Эти формулы, представляющие общее решение системы (7.13), могут быть написаны в следующей общей форме:

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= f_1(t | C_s) = \\ &= f_1(t; C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ i &= f_2(i | C_s), \\ \omega &= f_3(i | C_s), \\ p &= f_4(t | C_s), \\ e &= f_5(t | C_s), \\ \tau &= f_6(t | C_s). \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

Произвольные постоянные C_s , входящие в общее решение (7.14), могут быть выражены; если угодно, через начальные значения неизвестных функций

$$\Omega_0, i_0, \omega_0, p_0, e_0, \tau_0, \quad (7.15)$$

представляющих элементы кеплеровой орбиты для начальной эпохи, или начального момента, t_0 .

Для этого достаточно положить в уравнениях (7.14), которые должны выполняться для всякого момента времени, $t = t_0$ и соответственно заменить неизвестные функции их начальными значениями (7.15). В результате мы получим шесть уравнений, в которых величины C_s можно рассматривать как неизвестные, а величины (7.15) как данные.

Если исходные формулы (7.14) представляют общее решение уравнений (7.13), то, полагая в (7.14) $t = t_0$, получим независимые равенства, из которых (принципиально, по крайней мере) определим все произвольные постоянные в зависимости от начальных условий (7.15). Таким образом мы придем к формулам следующего вида:

$$C_s = \Psi_s(t_0; \Omega_0, i_0, \omega_0, p_0, e_0, \tau_0) \quad (s = 1, 2, \dots, 6). \quad (7.16)$$

Эти же уравнения (7.16) можно также получить, разрешая сначала уравнения (7.14) относительно произвольных постоянных C_s , что даст решение системы (7.13) в виде общего интеграла:

$$\Psi_s(t; \Omega, i, \omega, p, e, \tau) = C_s. \quad (7.16')$$

Полагая в последних формулах $t = t_0$, мы опять получим равенства (7.16).

Подставляя, наконец, выражения для C_s через начальные элементы в общее решение (7.14), мы можем представить последнее в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= \varphi_1(t; t_0, \Omega_0, i_0, \omega_0, p_0, e_0, \tau_0), \\ i &= \varphi_2(t; t_0, \Omega_0, i_0, \omega_0, p_0, e_0, \tau_0), \\ \omega &= \varphi_3(t; t_0, \Omega_0, i_0, \omega_0, p_0, e_0, \tau_0), \\ p &= \varphi_4(t; t_0, \Omega_0, i_0, \omega_0, p_0, e_0, \tau_0), \\ e &= \varphi_5(t; t_0, \Omega_0, i_0, \omega_0, p_0, e_0, \tau_0), \\ \tau &= \varphi_6(t; t_0, \Omega_0, i_0, \omega_0, p_0, e_0, \tau_0). \end{aligned} \right\} \quad (7.14')$$

Если формулы (7.14) или (7.14') получены, то задача решена, так как, подставляя в формулы (7.5) вместо элементов орбиты функции времени, определяемые формулами (7.14) или (7.14'), мы найдем координаты и составляющие скорости движущейся точки в возмущенном движении как функции времени и шести произвольных постоянных C_s или (7.15).

Эти формулы, дающие общее решение уравнений возмущенного движения (7.1), можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} x &= \chi_1(t | C_s) = \bar{\chi}_1(t; t_0, \Omega_0, i_0, \omega_0, p_0, e_0, \tau_0), \\ y &= \chi_2(t | C_s) = \bar{\chi}_2(t; t_0, \Omega_0, i_0, \omega_0, p_0, e_0, \tau_0), \\ z &= \chi_3(t | C_s) = \bar{\chi}_3(t; t_0, \Omega_0, i_0, \omega_0, p_0, e_0, \tau_0), \\ \dot{x} &= \chi_4(t | C_s) = \bar{\chi}_4(t; t_0, \Omega_0, i_0, \omega_0, p_0, e_0, \tau_0), \\ \dot{y} &= \chi_5(t | C_s) = \bar{\chi}_5(t; t_0, \Omega_0, i_0, \omega_0, p_0, e_0, \tau_0), \\ \dot{z} &= \chi_6(t | C_s) = \bar{\chi}_6(t; t_0, \Omega_0, i_0, \omega_0, p_0, e_0, \tau_0). \end{aligned} \right\} \quad (7.17)$$

Полагая в этих формулах $t = t_0$, разрешая полученные уравнения относительно произвольных постоянных C_s или относительно начальных элементов орбиты (7.15), подставляя затем найденные выражения опять в формулы (7.17), мы выразим координаты и составляющие скорости в функции времени и начальных значений (7.3), т. е. получим общее решение уравнений возмущенного движения в обычном виде.

Полезно заметить, что для нахождения связи между начальными значениями (7.3) и начальными элементами (7.15) вовсе не требуется знать общее решение уравнений возмущенного движения. Действительно, это общее решение дается формулами (7.5), в которых все элементы суть некоторые функции времени.

Но для получения нужных соотношений мы должны положить в уравнениях (7.5) $t = t_0$, вследствие чего элементы орбиты превращаются в свои начальные значения (7.15), а координаты и составляющие скорости — в свои начальные значения (7.3). Ясно, что те же соотношения мы получим непосредственно из формул невозмущенного движения с элементами (7.15), полагая в них $t = t_0$ и заменяя координаты и составляющие скорости начальными значениями (7.3).

Поэтому, например, начальные элементы (7.15) получаются из заданных начальных условий (7.3) совершенно так же, как это изложено в § 4 главы пятой.

3. Геометрический и механический смысл метода Лагранжа. Остановимся теперь на рассмотрении механического, а также геометрического смысла метода Лагранжа изменения произвольных постоянных.

Из сказанного в предыдущем разделе явствует, что по методу Лагранжа и возмущенное и невозмущенное движения определяются одними и теми же формулами (7.5), а также всеми формулами, которые являются следствиями этих основных формул и выводятся в теории невозмущенного движения.

Разница заключается только в том, что входящие в эти формулы элементы Ω , i , ω , p , e , τ (и все другие величины, зависящие от этих элементов) для невозмущенного движения сохраняют свои начальные значения (7.15), т. е. остаются постоянными, а для возмущенного движения все эти элементы изменяются вместе со временем, т. е. являются величинами переменными.

В начальный момент времени t_0 координаты и составляющие скорости имеют и в невозмущенном и в возмущенном движении одни и те же значения (7.3). Поэтому оба движения — невозмущенное и возмущенное — начинаются совершенно одинаково, т. е. начинаются из одной и той же точки с одной и той же начальной скоростью. При этом обе траектории имеют в начальной точке одну и ту же касательную, т. е. соприкасаются в начальный момент t_0 .

Рассмотрим произвольный момент времени, отличный от начального. Этому моменту времени соответствуют определенные числовые значения элементов орбиты, отличные, вообще говоря, от начальных значений (7.15). Вообразим, что, начиная с момента t , элементы перестали изменяться, или, лучше сказать, представим некоторое невозмущенное движение, которому в момент t соответствуют элементы, найденные по формулам (7.14). Так как, принципиально говоря, текущий момент времени t ничем не отличается от начального момента t_0 , то сказанное выше можно повторить почти без изменения. А именно, в момент t , как начальный, можно опять рассмотреть два движения — невозмущенное и

возмущенное, траектории которых выходят из одной и той же точки пространства, обладая в этой точке одной и той же касательной, т. е. одной и той же скоростью по величине и по направлению.

Но ясно, что траектория возмущенного движения одинакова и для начального, и для текущего момента, а траектории соответствующего невозмущенного движения, вообще говоря отличны друг от друга в эти же моменты.

Поэтому, изменяя время t непрерывным образом начиная с начального момента t_0 , мы будем иметь бесчисленное множество невозмущенных движений, отличных друг от друга и единственное возмущенное движение, состояние которого совпадает в каждый момент с состоянием соответствующего невозмущенного движения.

Так как траектория возмущенного движения в каждый момент соприкасается с траекторией соответствующего невозмущенного движения, то можно сказать, что траектория возмущенного движения есть огибающая семейства траекторий невозмущенных движений.

Все эти траектории семейства, вообще говоря, отличны друг от друга, но они имеют также и нечто общее. Действительно, любая траектория семейства есть какая-то кривая второго порядка, один из фокусов которой находится в начале координат, и движение по которой совершается в согласии с законами Кеплера.

В астрономии соприкасающиеся кривые называются *оскулирующими*, а поэтому указанные выше траектории семейства невозмущенных движений называются *оскулирующими орбитами*, а их элементы — *оскулирующими элементами*.

Таким образом, в методе Лагранжа истинное (возмущенное) движение рассматривается как постоянно и непрерывно изменяющееся кеплеровское движение, а истинная орбита (или траектория) — как постоянно и непрерывно изменяющаяся оскулирующая орбита.

Посмотрим теперь на метод Лагранжа с точки зрения динамики. Представим себе, что в начальный момент времени на точку, движущуюся под действием силы притяжения центральной массы, подействовала дополнительная мгновенная возмущающая сила, величина которой весьма мала по сравнению с главной силой притяжения. Эффект действия

этой мгновенной силы скажется тогда только на изменении начальных условий, так что начальные координаты и составляющие скорости получают в начальный момент весьма малые приращения (начальные возмущения!). Тогда «возмущенное движение» будет, очевидно, совпадать с некоторым кеплеровским движением, отличающимся от невозмущенного движения только начальными условиями. Поэтому последующие возмущения координат и составляющих скорости будут обусловлены только изменением начальных условий и могут быть рассчитаны так, как это указано в главе пятой. Разумеется, что и элементы кеплеровой орбиты такого возмущенного движения будут отличаться от элементов первоначального, ничем не возмущенного движения. Мы можем сказать также, что мгновенно действовавшая возмущающая сила сообщила элементам орбиты некоторые возмущения (начальные возмущения элементов), которые также определяются по правилам, выведенным в главе пятой.

Представим теперь опять невозмущенное движение, определяемое заданными начальными условиями и протекающее под действием одной только силы притяжения центрального тела. Пусть в некоторый момент времени, отличный от начального, движущаяся материальная точка испытала действие мгновенной малой возмущающей силы. Тогда эффект этой силы будет совершенно аналогичен эффекту действия мгновенной силы в начальный момент. Таким образом, в рассматриваемый момент времени координаты и составляющие скорости получают малые приращения (возмущения), а следовательно, изменятся также мгновенно и элементы орбиты. В дальнейшем движение точки опять будет происходить в полном согласии с законами Кеплера, по кеплеровой орбите, но с возмущенными элементами.

Подобные рассуждения можно повторять для каждого момента времени. Следовательно, если мы вообразим бесконечный ряд моментов времени, отделенных друг от друга бесконечно малыми промежутками, и будем считать, что в каждый из этих моментов действует мгновенная, возмущающая сила (равная нулю в промежутках между указанными моментами), то мы получим примерную схему возмущенного движения. Истинное или возмущенное движение точки можно будет рассматривать в этой схеме как некоторое кеплеровское движение, элементы которого изменяются

скачкообразно в каждый из моментов действия мгновенной возмущающей силы. Притом ясно, что измененное (возмущенное) и неизменное (невозмущенное) в момент t движения исходят в этот момент из одной и той же точки пространства и их траектории имеют в этой точке общую касательную.

Увеличивая мысленно число таких моментов времени и одновременно уменьшая неограниченно промежутки между ними, мы придем в пределе к движению, которое можно рассматривать, как непрерывно изменяющееся кеплеровское движение с непрерывно изменяющимися элементами. Отсюда следует, что для определения такого (истинного или возмущенного) движения мы можем пользоваться всеми формулами невозмущенного движения, рассматривая в последних все элементы орбиты (и величины, от них зависящие) как некоторые, непрерывные функции времени, которые должны быть соответственным образом определены.

Из приведенного рассмотрения вытекает также, что если во время истинного движения в какой-то момент времени внезапно исчезнет возмущающая сила, то начиная с этого момента точка будет двигаться по невозмущенной орбите, в согласии с законами Кеплера. Элементы такой невозмущенной орбиты определятся теми значениями координат и составляющих скорости, которые получили эти величины в момент прекращения действия возмущающей силы.

Выяснив, так сказать, «механизм» возмущенного движения, мы можем перейти теперь к рассмотрению аналитических формул, определяющих это движение, для чего необходимо прежде всего получить дифференциальные уравнения (7.13), которым удовлетворяют постоянно изменяющиеся оскулирующие элементы.

Вывод этих уравнений мы рассмотрим в следующем параграфе.

Примечание 1. Мы рассмотрели основы метода Лагранжа для системы (7.1), предполагая, что X_0 , Y_0 , Z_0 определяются формулами (7.2), т. е. представляют собой проекции ускорения, вызываемого действием притяжения (по закону Ньютона) центрального тела — точки.

Однако метод Лагранжа может быть распространен и на случаи более общие. В самом деле, пусть величины X_0 ,

Y_0, Z_0 суть какие-то заданные функции времени, координат и составляющих скорости, но притом такие, что дифференциальные уравнения (7.11) возможно проинтегрировать, т. е. можно получить формулы вида

$$\left. \begin{aligned} x &= \chi_1(t | C_s), & y &= \chi_2(t | C_s), & z &= \chi_3(t | C_s), \\ \dot{x} &= \chi_4(t | C_s), & \dot{y} &= \chi_5(t | C_s), & \dot{z} &= \chi_6(t | C_s), \end{aligned} \right\} \quad (7.18)$$

где C_s суть произвольные постоянные.

Возвращаясь теперь к истинному движению, определяемому дифференциальными уравнениями (7.12), мы можем, применяя метод Лагранжа, общее решение этих уравнений опять определять формулами (7.18), рассматривая в последних величины C_s уже не как постоянные, а как некоторые функции времени. Иными словами, мы можем преобразовать уравнения (7.12) к новым переменным C_s , используя как формулы преобразования формулы общего решения уравнений (7.11).

Поэтому движение, определяемое формулами (7.11), мы также можем назвать *невозмущенным движением* (но не кеплеровским!), уравнения (7.11) — уравнениями невозмущенного движения, а постоянные C_s — *элементами невозмущенного движения*. Иногда этим элементам C_s можно придать некоторый геометрический или механический смысл, но, разумеется, отличный от того, какой они имеют в невозмущенном кеплеровском движении.

Точно также, нет никаких принципиальных затруднений распространить метод Лагранжа *) и на систему дифференциальных уравнений любого порядка, определяющих движение системы конечного числа материальных точек, или даже системы тел, на которые действуют известные заданные силы.

Для случая, когда невозмущенное движение каждой из точек системы (или центра инерции каждого из тел системы) есть невозмущенное кеплеровское движение, такое обобщение метода Лагранжа будет рассмотрено в следующей главе, а общий случай был в основном рассмотрен в первой главе (метод Гамильтона — Якоби).

*) В самом общем виде метод Лагранжа разработан самим Лагранжем в его книге «Аналитическая механика» (см. Приложение).

Примечание 2. Метод Лагранжа, принципиальная сторона которого изложена в этом параграфе, рассматривает истинное или возмущенное движение, как непрерывно изменяющееся невозмущенное, кеплеровское движение. Но мы знаем, что невозмущенное кеплеровское движение может быть эллиптическим и гиперболическим (а в вырожденных случаях — круговым, параболическим и прямолинейным), в зависимости от величины начальной скорости. Поэтому оскулирующая орбита в каждый данный момент времени может быть и эллипсом и гиперболой, в зависимости от величины скорости, которую она имеет в этот момент. Непрерывно изменяясь с течением времени, оскулирующая орбита может некоторое время оставаться эллипсом, а потом превратиться в гиперболу и оставаться некоторое время гиперболой и т. д. Может случиться также (как это обычно бывает в астрономических задачах), что движение всегда остается эллиптическим. Тип оскулирующей орбиты в каждый момент времени немедленно распознается по величине оскулирующего эксцентриситета орбиты, в соответствии с чем и применяются формулы эллиптического или гиперболического движения для нахождения координат и составляющих скорости.

Однако делать заключения о свойствах возмущенного движения, основываясь на свойствах соответствующего оскулирующего движения, не следует без специального исследования.

В самом деле, можно привести простые примеры, в которых движение остается, например, эллиптическим в каждый момент времени, но движущаяся точка неограниченно удаляется от главного тела. И наоборот, есть примеры, в которых оскулирующая орбита есть гипербола в каждый момент времени, а истинная орбита (огнибающая семейства гипербол) есть окружность с центром в центре притяжения.

§ 2. Вывод дифференциальных уравнений метода Лагранжа

1. Основная операция. Проекция возмущающего ускорения. В предыдущем параграфе было показано, что возмущенное движение, происходящее под совместным действием притяжения центрального тела — точки

и произвольной возмущающей силы, можно рассматривать как такое кеплеровское движение, все элементы которого суть некоторые непрерывные функции времени. Эти неизвестные заранее функции удовлетворяют некоторой системе дифференциальных уравнений первого порядка и наша задача заключается теперь в выводе этих уравнений.

Основой для вывода указанных уравнений являются следующие общие соображения. Пусть

$$F(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \Omega, l, \dots, \tau) = 0 \quad (7.19)$$

есть какой-нибудь из первых интегралов невозмущенного движения, или соотношение, являющееся следствием этих первых интегралов *), где $\Omega, l, \dots, \tau$ суть элементы орбиты, сохраняющие в невозмущенном движении постоянные значения.

Тогда, в силу уравнений (7.11), мы можем написать следующее тождество:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial F}{\partial z} \dot{z} + \\ + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} X_0 + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} Y_0 + \frac{\partial F}{\partial \dot{z}} Z_0 \equiv 0, \end{aligned} \quad (7.20)$$

где составляющие основного ускорения определяются формулами (7.2).

По основной идее метода Лагранжа всякая формула невозмущенного движения остается справедливой и для возмущенного движения, но все элементы орбиты (и любые величины, зависящие от элементов) должны рассматриваться как некоторые функции времени.

При этом условии соотношение вида (7.19) является также интегралом системы (7.12), а поэтому, в силу уравнений возмущенного движения, мы будем иметь также следующее тождество:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial F}{\partial z} \dot{z} = \frac{\partial F}{\partial \Omega} \frac{d\Omega}{dt} + \dots + \frac{\partial F}{\partial \tau} \frac{d\tau}{dt} + \\ + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} (X_0 + X) + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} (Y_0 + Y) + \frac{\partial F}{\partial \dot{z}} (Z_0 + Z) \equiv 0. \end{aligned} \quad (7.20')$$

*) Под первым интегралом уравнений невозмущенного движения мы можем понимать любую из формул (7.5), (7.6), (7.7), (7.8), (7.9), а также любые комбинации этих формул.

Но во всякий момент времени t координаты и составляющие скорости движущейся точки имеют одинаковые значения и для невозмущенного и для возмущенного движения, а следовательно, в момент t величины

$$\frac{\partial F}{\partial t}, \quad \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z}, \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}, \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}, \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{z}}, \quad X_0, \quad Y_0, \quad Z_0$$

имеют в равенствах (7.20) и (7.20') одинаковые числовые значения, вследствие чего мы получаем следующее тождество:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} X + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} Y + \frac{\partial F}{\partial \dot{z}} Z + \frac{\partial F}{\partial \Omega} \frac{d\Omega}{dt} + \\ + \frac{\partial F}{\partial i} \frac{di}{dt} + \dots + \frac{\partial F}{\partial \tau} \frac{d\tau}{dt} \equiv 0, \quad (7.21) \end{aligned}$$

которое представляет собой соотношение между производными от оскулирующих элементов, самими этими элементами, координатами, составляющими скорости и временем.

Координаты и составляющие скорости можно исключить из полученного соотношения при помощи формул невозмущенного движения (7.5), так что в результате (7.21) будет представлять собой соотношение только между временем, оскулирующими элементами и их первыми производными.

Каждое такое соотношение линейно относительно производных от оскулирующих элементов. Поэтому, получив достаточное количество формул вида (7.21), мы можем выразить из них все шесть производных $\frac{d\Omega}{dt}$, $\frac{di}{dt}$, $\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{dp}{dt}$, $\frac{de}{dt}$, $\frac{d\tau}{dt}$ в зависимости от времени и самих элементов, что и даст нам систему дифференциальных уравнений вида (7.13)

Заметим, что левую часть равенства (7.21) можно рассматривать как некоторую, особым образом вычисленную, полную производную от функции F .

Действительно, будем дифференцировать функцию F , в равенстве (7.19), предполагая, что при этом дифференцировании время t и координаты x , y , z рассматриваются как величины постоянные, все элементы орбиты — как функции времени, а производные от составляющих скорости

равны соответствующим составляющим возмущающего ускорения.

В результате такого дифференцирования мы и получим, как легко видеть левую часть равенства (7.21).

Будем обозначать полную производную функции F , вычисленную таким особым образом, через $\left(\frac{dF}{dt}\right)$, т. е. положим

$$\begin{aligned} \left(\frac{dF}{dt}\right) = & \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} X + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} Y + \frac{\partial F}{\partial \dot{z}} Z + \frac{\partial F}{\partial \Omega} \frac{d\Omega}{dt} + \\ & + \frac{\partial F}{\partial i} \frac{di}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \omega} \frac{d\omega}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial F}{\partial e} \frac{de}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \tau} \frac{d\tau}{dt}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Тогда всякое тождество вида (7.21) запишется кратко следующим образом:

$$\left(\frac{dF}{dt}\right) \equiv 0. \quad (7.21')$$

Составление всякого равенства вида (7.21) будем называть для краткости *основной операцией*.

Таким образом, для составления дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют оскулирующие элементы возмущенного движения, нужно применить основную операцию к некоторому набору формул невозмущенного движения и разрешить затем полученные уравнения относительно производных $\frac{d\Omega}{dt}$, ...

В полученных уравнениях нужно еще будет заменить координаты и составляющие скорости их выражениями из формул невозмущенного движения, после чего мы сможем заняться вопросом об интегрировании полученных уравнений вида (7.13).

Заметим еще следующее: так как всякая комбинация из формул невозмущенного движения также является формулой такого же характера, то можно написать сколько угодно различных формул невозмущенного движения и к каждой такой формуле мы можем применить описанную выше основную операцию.

Поэтому мы будем стараться выбирать для применения основной операции такие формулы невозмущенного движения, чтобы выкладки были по возможности проще и короче, так чтобы составление уравнений (7.13) не заняло бы слишком

много труда и времени. Для этого естественно подбирать такие соотношения из теории невозмущенного движения, которые содержат наименьшее число из тринадцати величин — времени, координат, составляющих скорости и элементов.

Кроме того, для большей простоты и наглядности получающихся формул и уравнений, введем в рассмотрение, кроме составляющих X , Y , Z возмущающего ускорения на неподвижные оси координат $Oxyz$, составляющие того же возмущающего ускорения на три подвижные оси, неизменно связанные с движущейся точкой.

Эти подвижные оси выберем следующим образом. Вообразим плоскость, проходящую через текущий радиус-вектор движущейся точки и через вектор скорости, соответствующий этому же моменту времени. Если бы в момент t возмущающая сила прекратила свое действие, то для последующих моментов времени точка продолжала бы двигаться в указанной плоскости по законам Кеплера. В возмущенном движении эта плоскость, разумеется, не остается неизменной а непрерывно изменяет свое положение в пространстве, являясь плоскостью мгновенной орбиты (т. е. плоскостью оскучивающей орбиты, соответствующей моменту t). Рассмотрим теперь подвижной триедр с началом в движущейся точке. Одну из осей этого триедра направим по радиусу-вектору движущейся точки и назовем ее «направлением S »; другую ось триедра выберем в плоскости мгновенной орбиты, перпендикулярно к радиусу-вектору так, чтобы ее можно было совместить надлежащим вращением с осью Oy , и назовем ее «направлением T »; наконец, третью ось подвижного триедра направим перпендикулярно плоскости мгновенной орбиты так, чтобы ее можно было совместить надлежащим вращением с осью Oz , и назовем ее «направлением W ».

Тогда направляющие косинусы этих трех направлений в неподвижной системе координат $Oxyz$ определятся, очевидно, следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} \cos(Sx) &= \alpha, & \cos(Sy) &= \beta, & \cos(Sz) &= \gamma, \\ \cos(Tx) &= \alpha', & \cos(Ty) &= \beta', & \cos(Tz) &= \gamma', \\ \cos(Wx) &= \alpha'', & \cos(Wy) &= \beta'', & \cos(Wz) &= \gamma'', \end{aligned} \right\} \quad (7.23)$$

где α , β , γ , α' , β' , γ' нужно взять из формул (7.7), а

$$\left. \begin{aligned} \alpha'' &= \frac{c_1}{c} = \sin \Omega \sin i, \\ \beta'' &= \frac{c_2}{c} = -\cos \Omega \sin i, \\ \gamma'' &= \frac{c_3}{c} = \cos i. \end{aligned} \right\} \quad (7.23')$$

Обозначим теперь проекции возмущающего ускорения на три введенные только что направления соответственно S , T , W . Тогда будем иметь следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} S &= \alpha X + \beta Y + \gamma Z, \\ T &= \alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z, \\ W &= \alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'' Z \end{aligned} \right\} \quad (7.24)$$

и

$$\left. \begin{aligned} X &= \alpha S + \alpha' T + \alpha'' W, \\ Y &= \beta S + \beta' T + \beta'' W, \\ Z &= \gamma S + \gamma' T + \gamma'' W. \end{aligned} \right\} \quad (7.24')$$

Кроме того, для дальнейшего упрощения формул полезно будет положить:

$$\tilde{S} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} S, \quad \tilde{T} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} T, \quad \tilde{W} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} W, \quad (7.25)$$

так что $\tilde{S}$, $\tilde{T}$, $\tilde{W}$ суть величины, пропорциональные проекциям возмущающего ускорения на подвижные оси.

2. Вывод дифференциальных уравнений для оскулирующих элементов. Переходим теперь к непосредственному выводу дифференциальных уравнений, которым должны удовлетворять оскулирующие элементы возмущенного движения.

Возьмем сперва интегралы площадей невозмущенного движения

$$y\dot{z} - z\dot{y} = c_1, \quad z\dot{x} - x\dot{z} = c_2, \quad x\dot{y} - y\dot{x} = c_3. \quad (7.26)$$

Подставляя сюда выражения для постоянных площадей из формул (7.23') и заменяя величину вектора момента ско-

рости с ее значением $\sqrt{\mu p}$, мы напишем интегралы площадей в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\mu} \sqrt{p} \sin \Omega \sin i &= y\dot{z} - z\dot{y}, \\ \sqrt{\mu} \sqrt{p} \cos \Omega \sin i &= x\dot{z} - z\dot{x}, \\ \sqrt{\mu} \sqrt{p} \cos i &= x\dot{y} - y\dot{x}. \end{aligned} \right\} \quad (7.26')$$

Применяя к каждому из соотношений (7.26') основную операцию *), мы получим следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{p}} \frac{dp}{dt} \sin \Omega \sin i + \sqrt{\mu} \sqrt{p} \frac{d\Omega}{dt} \cos \Omega \sin i + \\ + \sqrt{\mu} \sqrt{p} \frac{di}{dt} \sin \Omega \cos i &= yZ - zY, \\ \frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{p}} \frac{dp}{dt} \cos \Omega \sin i - \sqrt{\mu} \sqrt{p} \frac{d\Omega}{dt} \sin \Omega \sin i + \\ + \sqrt{\mu} \sqrt{p} \frac{di}{dt} \cos \Omega \cos i &= xZ - zX, \\ \frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{p}} \frac{dp}{dt} \cos i - \sqrt{\mu} \sqrt{p} \frac{di}{dt} \sin i &= xY - yX, \end{aligned} \right\} \quad (7.27)$$

разрешая которые относительно производных от оскулирующих элементов (параметра, долготы узла и наклонности), мы найдем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{p}} \frac{dp}{dt} &= (yZ - zY) \sin \Omega \sin i + \\ &+ (yZ - zY) \cos \Omega \sin i + (xY - yX) \cos i, \\ \sqrt{\mu} \sqrt{p} \sin i \frac{d\Omega}{dt} &= (yZ - zY) \cos \Omega - \\ &- (xZ - zX) \sin \Omega, \\ \sqrt{\mu} \sqrt{p} \frac{di}{dt} &= (yZ - zY) \sin \Omega \cos i + \\ &+ (xZ - zX) \cos \Omega \cos i + (yX - xY) \sin i. \end{aligned} \right\} \quad (7.27')$$

*) Уравнения (7.26') написаны не совсем так, как общее соотношение (7.19), но приведутся сейчас же к нужному виду, если в каждом равенстве перенести все члены в одну сторону. Очевидно, что этот перенос не является необходимым и мы можем просто применять основную операцию к каждой части равенства.

Заменяя здесь x, y, z их выражениями из формул (7.5) и (7.7), а величины X, Y, Z их выражениями (7.24') и имея в виду обозначения (7.25), мы получим после всех упрощений уравнения, определяющие скорости изменения параметра, долготы узла и наклонности

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= 2r\tilde{T}, \\ \sin i \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r}{p} \sin u \cdot \tilde{W}, \\ \frac{di}{dt} &= \frac{r}{p} \cos u \cdot \tilde{W}. \end{aligned} \right\} \quad (7.28)$$

Чтобы определить скорость изменения углового расстояния перигентра от узла, возьмем следующее соотношение:

$$r \cos(v + \omega) = x \cos \Omega + y \sin \Omega, \quad (7.29)$$

являющееся очевидным следствием формул (7.5), (7.7) и (7.8), и применим к нему основную операцию.

Но при этом нужно иметь в виду, что истинная аномалия v не может быть рассматриваема как величина такого же характера, как прямоугольные координаты или радиус-вектор.

Действительно, формула (4.47') четвертой главы, которая может быть переписана в виде

$$\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{p}} e \sin v = \dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{r},$$

показывает, что истинная аномалия v зависит не только от x, y, z , которые при применении основной операции рассматриваются как величины постоянные, но также от $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, по которым дифференцирование производится. Поэтому, применяя к соотношению (7.29) основную операцию, мы получим результат дифференцирования в следующем виде:

$$-r \sin(v + \omega) \left[\left(\frac{dv}{dt} \right) + \frac{d\omega}{dt} \right] = (-x \sin \Omega + y \cos \Omega) \frac{d\Omega}{dt}.$$

В последнем равенстве через $\left(\frac{dv}{dt} \right)$ обозначена производная от v , вычисляемая по формуле (7.22), т. е. производная, взятая по t , входящему только через посредство оскулирующих элементов.

Но формулы (7.5), (7.7) и (7.8) дают

$$-x \sin \Omega + y \cos \Omega = r \sin(v + \omega) \cos i,$$

вследствие чего последнее соотношение примет следующий вид:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right) + \frac{d\omega}{dt} = -\cos i \frac{d\Omega}{dt}, \quad (7.30)$$

откуда

$$\frac{d\omega}{dt} = -\left(\frac{dv}{dt}\right) - \cos i \frac{d\Omega}{dt}. \quad (7.30')$$

Так как выражение для скорости изменения долготы узла нами уже получено, то из последнего равенства остается еще исключить производную $\left(\frac{dv}{dt}\right)$. Из формулы (4.48') имеем

$$\left. \begin{aligned} e \sin v &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} V_r, \\ e \cos v &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} V_n - 1. \end{aligned} \right\} \quad (7.31)$$

Применяя к каждому из этих равенств основную операцию, мы получим следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \sin v \frac{de}{dt} + e \cos v \left(\frac{dv}{dt}\right) &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[\left(\frac{dV_r}{dt}\right) + \frac{V_r}{2p} \frac{dp}{dt} \right], \\ \cos v \frac{de}{dt} - e \sin v \left(\frac{dv}{dt}\right) &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[\left(\frac{dV_n}{dt}\right) + \frac{V_n}{2p} \frac{dp}{dt} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (7.32)$$

Обозначим вообще через V_l проекцию вектора скорости на некоторую ось Ol , проходящую через начало координат. Если α_l , β_l , γ_l — направляющие косинусы прямой Ol , то мы имеем

$$V_l = \alpha_l \dot{x} + \beta_l \dot{y} + \gamma_l \dot{z}.$$

Применяя к этому равенству основную операцию, получим

$$\left(\frac{dV_l}{dt}\right) = (\alpha_l X + \beta_l Y + \gamma_l Z) + \left[\dot{x} \left(\frac{d\alpha_l}{dt}\right) + \dot{y} \left(\frac{d\beta_l}{dt}\right) + \dot{z} \left(\frac{d\gamma_l}{dt}\right) \right],$$

где выражение, стоящее в первой скобке, очевидно, представляет проекцию возмущающего ускорения на ось Ol .

Возьмем теперь, в частности, за ось проекций Ol направление S . Тогда

$$\alpha_l = \alpha = \frac{x}{r}, \quad \beta_l = \beta = \frac{y}{r}, \quad \gamma_l = \gamma = \frac{z}{r}$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right) = 0, \quad \left(\frac{d\beta}{dt}\right) = 0, \quad \left(\frac{d\gamma}{dt}\right) = 0;$$

поэтому

$$\left(\frac{dV_r}{dt}\right) = \alpha X + \beta Y + \gamma Z = S.$$

Далее возьмем за ось проекций Ol прямую, перпендикулярную к радиусу-вектору в плоскости мгновенной орбиты, т. е. возьмем за Ol направление T .

Тогда

$$\alpha_l = \alpha', \quad \beta_l = \beta', \quad \gamma_l = \gamma'.$$

Применяя к формулам (4.56'), определяющим направляющие косинусы α' , β' , γ' направления T , основную операцию, мы найдем

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\alpha'}{dt}\right) &= -\alpha \left(\frac{du}{dt}\right) - \beta' \frac{d\Omega}{dt} + \alpha'' \cos u \frac{di}{dt}, \\ \left(\frac{d\beta'}{dt}\right) &= -\beta \left(\frac{du}{dt}\right) + \alpha' \frac{d\Omega}{dt} + \beta'' \cos u \frac{di}{dt}, \\ \left(\frac{d\gamma'}{dt}\right) &= -\gamma \left(\frac{du}{dt}\right) + \gamma'' \cos u \frac{di}{dt}, \end{aligned}$$

откуда получаем *)

$$\dot{x} \left(\frac{d\alpha'}{dt}\right) + \dot{y} \left(\frac{d\beta'}{dt}\right) + \dot{z} \left(\frac{d\gamma'}{dt}\right) = -V_r \left(\frac{du}{dt}\right) + (\alpha' \dot{y} - \beta' \dot{x}) \frac{d\Omega}{dt}.$$

Но в силу (4.57) мы имеем

$$\alpha' \dot{y} - \beta' \dot{x} = \frac{c}{p} e \sin \vartheta (\alpha' \beta - \beta' \alpha) = -V_r \cos i,$$

а поэтому

$$\dot{x} \left(\frac{d\alpha'}{dt}\right) + \dot{y} \left(\frac{d\beta'}{dt}\right) + \dot{z} \left(\frac{d\gamma'}{dt}\right) = -V_r \left[\left(\frac{du}{dt}\right) + \cos i \frac{d\Omega}{dt} \right].$$

*) $\alpha'' \dot{x} + \beta'' \dot{y} + \gamma'' \dot{z} = 0$, так как α'' , β'' , γ'' суть направляющие косинусы прямой, перпендикулярной плоскости орбиты, а вектор скорости лежит в этой плоскости.

Так как

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = \left(\frac{dv}{dt}\right) + \frac{d\omega}{dt},$$

то последнее выражение равно нулю в силу соотношения (7.30).

Таким образом, имеем окончательно

$$\left(\frac{dV_n}{dt}\right) = \alpha'X + \beta'Y + \gamma'Z = T.$$

Подставляя теперь выражения для V_r , V_n и их производных $\left(\frac{dV_r}{dt}\right)$ и $\left(\frac{dV_n}{dt}\right)$ в уравнения (7.32), мы получим следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \sin v \frac{de}{dt} + e \cos v \left(\frac{dv}{dt}\right) &= \tilde{S} + \frac{r}{p} e \sin v \cdot \tilde{T}, \\ \cos v \frac{de}{dt} - e \sin v \left(\frac{dv}{dt}\right) &= \left(1 + \frac{r}{p}\right) \tilde{T} + \frac{r}{p} e \cos v \cdot \tilde{T}. \end{aligned} \right\} (7.32')$$

Решая полученные уравнения (7.32') относительно неизвестных производных $\frac{de}{dt}$ и $\left(\frac{dv}{dt}\right)$, мы легко найдем

$$\frac{de}{dt} = \tilde{S} \sin v + \left[\cos v + (\cos v + e) \frac{r}{p} \right] \tilde{T} \quad (7.33)$$

и

$$e \left(\frac{dv}{dt}\right) = \tilde{S} \cos v - \left(1 + \frac{r}{p}\right) \tilde{T} \sin v. \quad (7.34)$$

Равенство (7.33) дает скорость изменения оскулирующего эксцентриситета, Исклучение производной $\left(\frac{dv}{dt}\right)$ из соотношения (7.30') приводит к следующему уравнению:

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\cos v}{e} \tilde{S} + \frac{\sin v}{e} \left(1 + \frac{r}{p}\right) \tilde{T} - \frac{r}{p} \sin u \operatorname{ctg} i \cdot \tilde{W}, \quad (7.35)$$

определяющему скорость изменения углового расстояния перигентра от узла.

3. Уравнения Ньютона. Остается еще найти уравнение, определяющее скорость изменения последнего элемента — τ .

Для этого рассмотрим уравнение (7.9), которое перепишем, полагая для сокращения

$$I = \int_0^v \frac{dv'}{(1 + e \cos v')^2}, \quad (7.36)$$

в следующем виде:

$$\sqrt{\mu} p^{-3/2} (t - \tau) = I. \quad (7.37)$$

Применяя к уравнению (7.37) основную операцию, мы имеем

$$-\frac{3}{2} \sqrt{\mu} p^{-3/2} (t - \tau) \frac{dp}{dt} - \sqrt{\mu} p^{-3/2} \frac{d\tau}{dt} = \left(\frac{dI}{dt} \right),$$

откуда выводим

$$\sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{d\tau}{dt} = -\frac{3}{2} I \frac{dp}{dt} - p \left(\frac{dI}{dt} \right). \quad (7.38)$$

Теперь нужно найти производную $\left(\frac{dI}{dt} \right)$. Но I зависит от времени двояким образом — через посредство верхнего предела интеграла v и через посредство e .

Поэтому, мы имеем

$$\left(\frac{dI}{dt} \right) = \frac{\partial I}{\partial e} \frac{de}{dt} + \frac{\partial I}{\partial v} \left(\frac{dv}{dt} \right).$$

Из формулы (7.36) имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial e} &= -2 \int_0^v \frac{\cos v' dv'}{(1 + e \cos v')^3} = -I_1, \\ \frac{\partial I}{\partial v} &= \frac{1}{(1 + e \cos v)^2} = \frac{r^2}{p^2}, \end{aligned} \right\} \quad (7.39)$$

поэтому соотношение (7.38) можно написать в виде

$$\sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{d\tau}{dt} = -\frac{3}{2} I \frac{dp}{dt} + p I_1 \frac{de}{dt} - p \frac{r^2}{p^2} \left(\frac{dv}{dt} \right).$$

Подставляя сюда вместо производных $\frac{dp}{dt}$, $\frac{de}{dt}$ и $\left(\frac{dv}{dt}\right)$ их выражения и полагая еще

$$N = \frac{p^2}{r^2} I_1, \quad (7.40)$$

мы будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{e}{p} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{d\tau}{dt} = & (eN \sin v - \cos v) \frac{r^2}{p^2} \tilde{S} + \\ & + \left\{ -3e \frac{p}{r} I + e \left[\cos v + (\cos v + e) \frac{r}{p} \right] N + \right. \\ & \left. + \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin v \right\} \frac{r^2}{p^2} \tilde{T}. \end{aligned} \quad (7.38')$$

Правую часть последнего равенства можно значительно упростить. Для этого заметим, что имеет место следующее тождество, которое легко непосредственно проверить:

$$\frac{d}{dv} \left[\frac{r}{p} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin v \right] = 3e \frac{r^2}{p^2} + 2(1 - e^2) \frac{r^3}{p^3} \cos v.$$

Интегрируя это тождество в пределах от нуля до v , мы находим с помощью формул (7.36) и (7.39)

$$\frac{r}{p} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin v = 3eI + (1 - e^2) I_1, \quad (7.40')$$

откуда

$$-3e \frac{p}{r} I = - \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin v + (1 - e^2) \frac{r}{p} N$$

и выражение, стоящее в фигурных скобках в правой части формулы (7.38'), приведет, как легко видеть, к $\frac{p}{r} N$.

Таким образом, уравнение (7.38') примет следующий вид:

$$\frac{e}{p} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{d\tau}{dt} = \left[(eN \sin v - \cos v) \tilde{S} + \frac{p}{r} N \tilde{T} \right] \frac{r^2}{p^2}. \quad (7.41)$$

Итак, мы получили все шесть уравнений, определяющих скорости изменения оскулирующих элементов.

Выписывая все полученные уравнения вместе, мы будем иметь следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r}{p} \sin u \operatorname{cosec} i \cdot \tilde{W}, \\ \frac{dl}{dt} &= \frac{r}{p} \cos u \cdot \tilde{W}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\cos v}{e} \cdot \tilde{S} + \frac{\sin v}{e} \left(1 + \frac{r}{p}\right) \tilde{T} - \\ &\quad - \frac{r}{p} \sin u \operatorname{ctg} i \cdot \tilde{W}, \\ \frac{dp}{dt} &= 2r\tilde{T}, \\ \frac{de}{dt} &= \sin v \cdot \tilde{S} + \left[\cos v + (\cos v + e) \cdot \frac{r}{p}\right] \tilde{T}, \\ \frac{d\tau}{dt} &= \frac{p}{e} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[(eN \sin v - \cos v) \tilde{S} + \frac{p}{r} N \cdot \tilde{T}\right] \frac{r^2}{p^2}, \end{aligned} \right\} \quad (7.42)$$

причем полезно напомнить, что в этих уравнениях

$$\tilde{S} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} S, \quad \tilde{T} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} T, \quad \tilde{W} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} W,$$

$$u = v + \omega, \quad \frac{r}{p} = (1 + e \cos v)^{-1},$$

величина N определяется формулой

$$N = 2 \frac{p^2}{r^2} \int_0^v \frac{\cos v' dv'}{(1 + e \cos v')^3}$$

и истинная аномалия v связана с временем t уравнением

$$\frac{\sqrt{\frac{p}{\mu}}}{p^{3/2}} (t - \tau) = \int_0^v \frac{dv'}{(1 + e \cos v')^2}. \quad (7.42')$$

Величины S , T , W определяются формулами (7.24) и, следовательно, являются функциями времени, координат x , y , z , их первых производных $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ и направляющих косинусов, которые в свою очередь зависят от аргумента широты $u = v + \omega$, от Ω и от i .

Заменяя координаты и составляющие скорости по формулам невозмущенного движения (7.5) их выражениями, мы сделаем правые части уравнений (7.42) известными функциями времени, элементов орбиты и истинной аномалии ν , которая также зависит от времени через посредство уравнения (7.42).

Таким образом, уравнения вида (7.13) фактически получены, причем выведенные уравнения справедливы для любого типа движения и при любой возмущающей силе.

Уравнения (7.42), определяющие изменения оскулирующих элементов Ω , i , ω , p , e , τ при произвольно заданной возмущающей силе, приводятся в том или ином виде во всех классических сочинениях по небесной механике и в большинстве современных курсов. Эти уравнения не имеют особого названия, хотя с достаточным основанием их можно было бы назвать *уравнениями Ньютона*.

Действительно, как указывает академик А. Н. Крылов в примечании, сделанном в своем переводе сочинения Ньютона *), все уравнения (7.42) «могут быть выведены весьма просто, прямым и непосредственным образом, на основании указания Ньютона, совершенно независимо от общей теории изменения произвольных постоянных. Вместе с тем вывод этот требует нахождения приращений или дифференцирования лишь самых простых функций и применения таких правил, которые все имеются в «Methodus Fluxionum»; поэтому надо думать, что Тиссеран был вполне прав, утверждая, что Ньютону эти формулы были известны».

Утверждение Тиссерана, на которое ссылается акад. А. Н. Крылов, приведено в третьем томе его фундаментального трактата по небесной механике при изложении Ньютоновой теории движения Луны. В «Аналитической механике» Лагранжа тоже можно найти высказывания, указывающие, что знаменитому автору «Начал» были известны не только идея метода изменения произвольных постоянных, но и основные уравнения, вытекающие из применения этого метода.

Примечание. Если компоненты возмущающей силы не зависят явно от времени t , то правые части уравнений

*) См. Акад. Крылов А. Н., Собрание трудов, т. VII, где помещен перевод сочинения Ньютона «Математические начала натуральной философии» с многочисленными примечаниями и разъяснениями. См. также «Приложение» в этой книге.

(7.42) будут функциями только от истинной аномалии v и, разумеется, от элементов орбиты. Поэтому из уравнений Ньютона можно исключить время, приняв за независимую переменную величину v . Связь между новой независимой переменной v и временем t определится соотношением

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \left(\frac{dv}{dt} \right), \quad (7.42')$$

где $\frac{\partial v}{\partial t}$ обозначает производную от v по времени, вычисленную в предположении, что все элементы орбиты суть величины постоянные, а $\left(\frac{dv}{dt} \right)$ определяется выведенной выше формулой (7.34). Поэтому мы имеем

$$\frac{dv}{dt} = \frac{V_{\mu}^{-} V_{\rho}^{-}}{r^2} + \frac{\cos v}{e} \tilde{S} - \frac{\sin v}{e} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \tilde{T}, \quad (7.42'')$$

и правая часть последнего равенства также не содержит явно t .

Исключая из уравнений (7.42) dt при помощи (7.42''), мы получим, например,

$$\frac{d\Omega}{dv} = \frac{\frac{r}{p} \sin u \operatorname{cosec} i \cdot \tilde{W}}{\frac{V_{\mu}^{-} V_{\rho}^{-}}{r^2} + \frac{\cos v}{e} \tilde{S} - \frac{\sin v}{e} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \tilde{T}},$$

Аналогично преобразуются и остальные уравнения (7.42).

Определив элементы оскулирующей орбиты в зависимости от переменной v и шести произвольных постоянных, мы получим затем из (7.42'')

$$t - t_0 = \int_{v_0}^v \frac{dv}{\frac{V_{\mu}^{-} V_{\rho}^{-}}{r^2} + \frac{\cos v}{e} \tilde{S} - \frac{\sin v}{e} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \tilde{T}},$$

где v_0 — не является произвольной постоянной, так как связано с t_0 формулой, выводимой из (7.37).

§ 3. Частные случаи уравнений Ньютона

Уравнения (7.42), определяющие изменения оскулирующих элементов и названные нами здесь для краткости *уравнения Ньютона*, имеют силу при любом характере возмущающей силы, а поэтому являются совершенно общими.

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые важные частные случаи, в которых эти уравнения принимают более простой вид и в которых одновременно более отчетливо выявляется действие возмущающей силы на отдельные элементы оскулирующей орбиты.

Предварительно заметим, что первые два уравнения содержат только составляющую W возмущающей силы, перпендикулярную к плоскости оскулирующей орбиты; последние три уравнения, наоборот, не содержат составляющей W ; наконец, только одно третье уравнение содержит все три составляющие возмущающей силы.

Теперь перейдем к рассмотрению частных случаев.

1. Случай центральной возмущающей силы. Сначала рассмотрим важный случай *центральной возмущающей силы*, когда линия действия последней всегда совпадает с прямой, проходящей через движущуюся точку и начало координат (главный центр притяжения).

В этом случае проекция S возмущающей силы или равна величине самой силы (когда направление последней совпадает с направлением S), или равна величине силы, взятой с обратным знаком (когда направление силы противоположно направлению S).

Две другие проекции возмущающей силы всегда равны нулю, т. е. в рассматриваемом случае мы имеем

$$T = W = 0,$$

а S есть некоторая известная функция от времени, радиуса-вектора r и радиальной составляющей скорости V_r .

Уравнения Ньютона принимают в этом случае следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= 0, & \frac{di}{dt} &= 0, & \frac{dp}{dt} &= 0, \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\cos v}{e} \tilde{S}, & \frac{de}{dt} &= \sin v \cdot \tilde{S}, \\ \frac{d\tau}{dt} &= \frac{p}{e} \sqrt{\frac{p}{\mu}} (eN \sin v - \cos v) \frac{r^2}{p^2} \tilde{S}. \end{aligned} \right\} \quad (7.43)$$

Сразу же находим:

$$\Omega = \Omega_0 = \text{const}, \quad i = i_0 = \text{const}, \quad p = p_0 = \text{const}. \quad (7.44)$$

Мы получили три первые интеграла уравнений Ньютона, показывающие, что положение плоскости орбиты не изменяется с течением времени и что размеры орбиты (характеризуемые ее параметром) также остаются неизменными.

Но если Ω , i , p остаются постоянными, то проекции момента количества движения (момента скорости) c_1 , c_2 , c_3 также остаются постоянными, т. е. равенства (7.44) просто суть интегралы площадей, которые, как нам известно, имеют место во всякой задаче о движении под действием центральной силы.

Уравнения (7.43) приводятся в рассматриваемом случае к системе только трех уравнений с тремя неизвестными функциями и напишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= -\sqrt{\frac{p_0}{\mu}} \frac{\cos v}{e} \cdot S, \\ \frac{de}{dt} &= \sqrt{\frac{p_0}{\mu}} \sin v \cdot S, \\ \frac{d\tau}{dt} &= \frac{r^2}{e\mu} (eN \sin v - \cos v) S, \end{aligned} \right\} \quad (7.43')$$

поэтому исследование возмущенного движения в этом случае значительно упрощается.

Случай центральной возмущающей силы может встретиться в различных астрономических задачах.

Пусть, например, рассматривается задача о движении материальной точки в экваториальной плоскости тела вращения, поверхности равной плотности которого суть поверхности вращения вокруг оси вращения тела, симметричные относительно некоторой плоскости, перпендикулярной общей оси вращения (плоскость экватора тела). Тогда силовая функция притяжения такого тела на точку, находящуюся в плоскости экватора, определяется следующей формулой *):

$$U(r) = -\frac{fm}{r} + f \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{2k}}{r^{2k+1}}, \quad (7.44)$$

где m — масса тела и A_{2k} — постоянные коэффициенты, определяемые его структурой.

*) См. Д у б о ш и ц Г. Н., Теория притяжения, Физматгиз, 1961, глава V, § 3.

Сила притяжения, действующая на материальную точку, определится формулой

$$F(r) = \frac{dU(r)}{dr} = -\frac{f m}{r^2} - f \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+1) A_{2k}}{r^{2k+2}}, \quad (7.45)$$

которую можно написать в следующем виде:

$$F(r) = -\frac{\mu}{r^2} + S(r), \quad (7.45')$$

где положено

$$\mu = f m, \quad S(r) = -f \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+1) A_{2k}}{r^{2k+2}}.$$

Если начало координат мы возьмем в центре симметрии тела и за плоскость xOy примем его экваториальную плоскость, то движение точки (в плоскости экватора) определится уравнениями (7.1), в которых проекции основного ускорения даются формулами (7.2), а проекция возмущающего ускорения на направление S есть величина $S(r)$.

Тогда исследование движения точки в плоскости экватора тела сводится к интегрированию и исследованию системы (7.43'). К этой задаче можно привести в первом приближении исследование движения какого-нибудь из спутников больших планет, двигающегося вблизи от экваториальной плоскости планеты, например первых семи спутников Сатурна. Эта же задача возникает при рассмотрении движения экваториального спутника Земли (искусственного, разумеется), двигающегося вне земной атмосферы и т. п.

Другой интересный случай центральной возмущающей силы представляет задача о движении планеты в предположении, что масса Солнца изменяется с течением времени, или также задача об относительном движении в системе двойной звезды в предположении, что одна или даже обе из двух звезд обладают массами, зависящими от времени.

В самом деле, пусть m_0 и m_1 суть массы Солнца и планеты, или массы двух компонентов звездной пары.

Если одна (или обе) из этих двух масс изменяется с течением времени, то величина $\mu = f(m_0 + m_1)$ также будет некоторой функцией времени.

Допустим, что движение планеты относительно Солнца (или движение одной звезды относительно другой) может быть определено уравнениями

$$\ddot{x} = -\frac{\mu x}{r^3}, \quad \ddot{y} = -\frac{\mu y}{r^3}, \quad \ddot{z} = -\frac{\mu z}{r^3}, \quad (7.46)$$

и предположим, что величина μ изменяется таким образом, что ее можно представить в виде суммы

$$\mu = \mu_0 + \tilde{\mu}(t),$$

где μ_0 есть некоторая постоянная, а $\tilde{\mu}(t)$ есть данная функция времени.

Так как уравнения (7.46) можно рассматривать как уравнения движения материальной точки единичной массы под действием притяжения неподвижного центра, масса которого есть $m_0 + m_1$, то ускорение, которое вызывает притяжение этого неподвижного центра, представится в виде

$$F = -\frac{\mu_0}{r^2} - \frac{\tilde{\mu}(t)}{r^2}. \quad (7.46')$$

Первая часть этого ускорения представляет эффект притяжения некоторой постоянной массы, находящейся в начале координат, а вторая часть может быть рассматриваема как возмущающее ускорение, и так как линия действия последнего всегда совпадает с прямой, соединяющей движущуюся точку с началом координат, то мы имеем здесь пример центральной возмущающей силы, так что $T = W = 0$ и

$$S = -\frac{\tilde{\mu}(t)}{r^2}. \quad (7.46'')$$

Поэтому для изучения движения в этой задаче мы можем воспользоваться уравнениями (7.43'). Заметим, что в рассмотренном случае возмущающее ускорение S зависит не только от радиуса-вектора движущейся точки, но также и от времени.

В качестве третьего примера центральной возмущающей силы рассмотрим задачу о движении одиночной звезды внутри шарообразного звездного скопления (или шарообразного газового облака) с массивной центральной массой m_0 .

Тогда одиночная звезда, которую мы рассматриваем как материальную точку постоянной массы m_1 , находится под действием притяжения центральной массы m_0 и под действием притяжения материи, заключенной внутри шара, радиус которого равен расстоянию звезды — точки от центра скопления или облака.

Задача о движении звезды приводится поэтому к задаче о движении с центральной возмущающей силой, и возмущающее ускорение S определится формулой

$$S = -f \frac{m(r)}{r^2}, \quad (7.47)$$

где $m(r)$ есть масса притягивающей материи.

Предполагая, что скопление, или облако, обладает сферическим распределением плотностей, мы определим возмущающую массу следующей формулой:

$$m(r) = 4\pi \int_0^r r'^2 \delta(r') dr', \quad (7.47')$$

где $\delta(r')$ — плотность материи, образующей облако *).

Таким образом, возмущающее ускорение зависит только от радиуса-вектора движущейся звезды — точки, и мы опять приходим к задаче о движении с центральной возмущающей силой.

Можно привести еще множество примеров такого же рода, но мы ограничимся уже рассмотренными.

2. Случай возмущающей силы, возникающей от сопротивления среды. Рассмотрим теперь задачу, где возмущающей силой является сила сопротивления некоторой среды. Такова, например, задача о движении звезды — точки внутри скопления с центральной массой, но при условии, что эффектом притяжения материи, составляющей скопление, мы пренебрегаем и сосредоточиваем внимание исключительно на эффекте сопротивления, которое оказывает скопление движущейся внутри него звезде.

Еще более важным случаем задачи этого рода является задача о движении искусственного спутника Земли внутри земной атмосферы, которая оказывает сопротивление

*) См. нашу книгу «Теория притяжения», гл. 3, Физматгиз, 1961.

движущемуся предмету, подобное тому, какое испытывает артиллерийский снаряд, пуля или баллистическая ракета*).

И та и другая из упомянутых задач (и всякая другая задача такого же рода) могут быть рассматриваемы как задачи о движении материальной точки под действием силы притяжения центрального тела — точки и под действием силы сопротивления атмосферы, плотность которой в каждой ее точке есть определенная функция координат этой точки (например, функция высоты точки над поверхностью Земли).

Тогда опять задача приводится к уравнениям движения вида (7.1), где составляющие основного ускорения определяются формулами (7.2), а X , Y , Z суть составляющие ускорения, вызываемого силой сопротивления.

Из механики (а также из внешней баллистики) известно, что сила сопротивления зависит некоторым образом от плотности среды и от скорости движущейся внутри этой среды точки и всегда направлена по касательной к траектории этой точки в сторону, противоположную движению.

Обозначая через R величину ускорения, вызываемого силой сопротивления, мы будем иметь следующие формулы:

$$X = -R \frac{\dot{x}}{V}, \quad Y = -R \frac{\dot{y}}{V}, \quad Z = -R \frac{\dot{z}}{V}. \quad (7.48)$$

Для определения составляющих возмущающего ускорения на подвижные оси, т. е. на направления S , T и W , воспользуемся общими формулами (7.24) и формулами (7.48). Тогда

$$S = -\frac{R}{V}(\alpha\dot{x} + \beta\dot{y} + \gamma\dot{z}),$$

$$T = -\frac{R}{V}(\alpha'\dot{x} + \beta'\dot{y} + \gamma'\dot{z}),$$

$$W = -\frac{R}{V}(\alpha''\dot{x} + \beta''\dot{y} + \gamma''\dot{z}).$$

*) При изучении движения искусственного спутника в атмосфере Земли необходимо, вообще говоря, учитывать еще влияния сжатия Земли, т. е. рассматривать Землю как определенное тело, а не как материальную точку. Однако, обычно, влияние формы Земли и влияние ее атмосферы рассматриваются по отдельности.

Но, как уже было замечено выше *), мы имеем

$$\alpha''\dot{x} + \beta''\dot{y} + \gamma''\dot{z} = 0$$

и, следовательно, $W = 0$.

Далее, формула (5.7) главы пятой дает

$$\alpha \frac{\dot{x}}{V} + \beta \frac{\dot{y}}{V} + \gamma \frac{\dot{z}}{V} = \cos \delta,$$

где δ есть угол, образуемый направлением скорости V движущейся точки с направлением ее радиуса-вектора.

Затем, так как α' , β' , γ' суть направляющие косинусы прямой, лежащей в плоскости мгновенной орбиты и перпендикулярной радиусу-вектору, то, очевидно,

$$\alpha' \frac{\dot{x}}{V} + \beta' \frac{\dot{y}}{V} + \gamma' \frac{\dot{z}}{V} = \sin \delta.$$

Имея еще в виду выражения для $\cos \delta$ и $\sin \delta$ (формулы (5.7) и (5.10) главы пятой), мы получим для составляющих S и T возмущающего ускорения следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} S &= -R \cos \delta = -R \frac{e \sin v}{\sqrt{1 + 2e \cos v + e^2}}, \\ T &= -R \sin \delta = -R \frac{1 + e \cos v}{\sqrt{1 + 2e \cos v + e^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (7.49)$$

Теперь, обращаясь к уравнениям Ньютона (7.42), мы имеем прежде всего

$$\frac{d\Omega}{dt} = 0, \quad \frac{di}{dt} = 0,$$

т. е. так же, как и в случае центральной возмущающей силы,

$$\Omega = \Omega_0 = \text{const}, \quad i = i_0 = \text{const}.$$

Таким образом, эффект сопротивления атмосферы не изменяет положение плоскости орбиты, так что движение происходит в неизменной плоскости, определяемой начальным радиусом-вектором и направлением начальной скорости.

*) См. сноску на стр. 374.

Поэтому система (7.42) сводится к системе только четырех уравнений, которые после замены S и T их выражениями (7.49) и некоторых упрощений, напишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= -2 \frac{R}{V} \cdot \frac{\sin v}{e}, \\ \frac{de}{dt} &= -2 \frac{R}{V} (\cos v + e), \\ \frac{dp}{dt} &= -2p \frac{R}{V}, \\ \frac{d\tau}{dt} &= -\frac{r^2}{V \mu p} \cdot \frac{R}{V} \left[\frac{1}{e} N(1+2e \cos v + e^2) - \sin v \cos v \right], \end{aligned} \right\} (7.50)$$

где

$$V = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sqrt{1 + 2e \cos v + e^2}.$$

Из полученных уравнений можно сделать некоторые любопытные выводы. Рассмотрим сначала второе из уравнений (7.50) и предположим, что начальное значение оскулирующего эксцентриситета больше единицы, т. е. $e_0 > 1$. Тогда, по непрерывности, оскулирующий эксцентриситет обязательно будет некоторое время оставаться большим единицы, и сумма $\cos v + e$ в течение этого же времени будет оставаться величиной положительной. Так как R всегда положительно, то второе из уравнений (7.50) показывает, что пока $e > 1$, производная $\frac{de}{dt}$ отрицательна, а следовательно, эксцентриситет e есть убывающая функция времени. Поэтому в конце концов эксцентриситет сделается меньшим единицы, но дальнейшее его изменение проследить при помощи одного этого уравнения нельзя, так как множитель $\cos v + e$ при $e < 1$ может принимать и положительные и отрицательные значения.

Более ясно поведение оскулирующего параметра. Действительно, третье из уравнений (7.50) сразу показывает, что всегда $\frac{dp}{dt} < 0$, т. е. что параметр p есть всегда монотонно убывающая функция времени. Таким образом, каковы бы ни были начальные условия, оскулирующая орбита постоянно как бы сжимается к своей фокальной оси,

Заметим, что если сила сопротивления просто пропорциональна скорости движущейся точки, то третье из уравнений (7.50) легко интегрируется. В самом деле, пусть $R = \kappa V$, где κ — некоторая постоянная. Тогда

$$\frac{dp}{dt} = -2\kappa p,$$

откуда находим, обозначая на этот раз буквой e основание натуральных логарифмов, первый интеграл системы (7.50) в рассматриваемом частном случае

$$p = p_0 e^{-2\kappa(t-t_0)}.$$

3. Случай движения эллиптического типа. Общие уравнения (7.42) пригодны для любого типа возмущенного движения.

Однако в большинстве случаев, встречающихся в приложениях, все время (или, по крайней мере, длительное время) сохраняется эллиптический тип движения.

В этом случае постоянно выполняется неравенство

$$V^2 - \frac{2\mu}{r} < 0, \quad (7.51)$$

и оскулирующий эксцентриситет всегда остается меньше единицы. Таким образом, оскулирующая орбита постоянно (или длительное время) остается эллипсом, вследствие чего целесообразно вместо общих оскулирующих элементов рассматривать такие, которые лучше характеризуют эллиптическую орбиту.

Для этого нужно вместо параметра орбиты взять большую полуось оскулирующего эллипса или среднее движение n и вместо момента прохождения через перигентр — среднюю аномалию эпохи M_0 или среднюю долготу эпохи ϵ .

Остальные элементы можно сохранить без изменения, но обычно вместо углового расстояния перигентра от узла рассматривают долготу перигентра π .

Итак, будем считать оскулирующую орбиту эллипсом и вместо элементов (7.10) будем рассматривать следующие:

$$\Omega, i, a, e, \pi, \epsilon. \quad (7.51')$$

Чтобы получить уравнения, определяющие эти эллиптические оскулирующие элементы, нужно в системе (7.42) заменить третье, четвертое и шестое уравнения уравнениями.

определяющими скорости изменения большой полуоси a , долготы перигентра π и средней долготы эпохи M_0 .

Вывести первые два уравнения не представляет труда. Действительно, для эллиптической орбиты

$$p = a(1 - e^2) \quad (7.52)$$

и, кроме того, для всякого типа движения

$$\pi = \Omega + \omega. \quad (7.52')$$

Дифференцируя эти равенства и считая при этом все элементы величинами переменными, имеем

$$\frac{dp}{dt} = \frac{p}{a} \frac{da}{dt} - 2ae \frac{de}{dt}$$

и

$$\frac{d\pi}{dt} = \frac{d\Omega}{dt} + \frac{d\omega}{dt},$$

откуда с помощью уравнений (7.42) найдем

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^2 e \sin v}{p} \tilde{S} + \frac{2a^2}{r} \tilde{T} \quad (7.53)$$

и

$$\frac{d\pi}{dt} = -\frac{\cos v}{e} \tilde{S} + \frac{\sin v}{e} \left(1 + \frac{r}{p}\right) \tilde{T} + \frac{r}{p} \sin u \operatorname{tg} \frac{l}{2} \cdot \tilde{W}. \quad (7.53')$$

Кроме того, из соотношения

$$n = \sqrt{\mu} a^{-3/2} \quad (7.52'')$$

находим еще дополнительно

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{3nae \sin v}{p} \tilde{S} - \frac{3na}{r} \tilde{T}. \quad (7.53'')$$

Заметим еще, что уравнение (7.53) можно вывести и непосредственно, применяя основную операцию к интегралу живых сил эллиптического движения, который можно представить в виде

$$-\frac{\mu}{a} = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2.$$

Применение основной операции дает соотношение

$$\frac{\mu}{a^2} \frac{da}{dt} = 2(\dot{x}X + \dot{y}Y + \dot{z}Z).$$

Подставляя сюда вместо $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ их выражения из формул (7.5) и воспользовавшись затем формулами (7.24), мы легко получим из предыдущего соотношения снова уравнение (7.53).

Кроме того, для случая эллиптического движения уравнение, определяющее скорость изменения эксцентриситета, можно несколько упростить. В самом деле, по формулам эллиптического движения мы имеем

$$r \cos v + er = a(\cos E - e) + ae(1 - e \cos E) = p \cos E,$$

так что пятое из уравнений (7.42) можно переписать в виде

$$\frac{de}{dt} = \sin v \cdot \tilde{S} + (\cos v + \cos E) \cdot \tilde{T}. \quad (7.54)$$

Остается получить уравнение, определяющее скорость изменения средней аномалии эпохи M_0 или средней долготы эпохи ϵ .

Рассмотрим для этого последнее уравнение из системы (7.42), которое для случая эллиптического движения напомним в несколько ином виде. Для этого заменим N его выражением (7.40), а величину I_1 исключим при помощи тождества (7.40'). Заменяя еще p , степень которого входит множителем в правой части, на $a(1 - e^2)$ и имея в виду, что $na^{3/2} = \sqrt{\mu}$, мы получим для скорости изменения величины τ следующее выражение:

$$n \frac{d\tau}{dt} = (1 - e^2)^{3/2} I \left\{ -\frac{3ae \sin v}{p} \cdot \tilde{S} - \frac{3a}{r} \cdot \tilde{T} \right\} + A\tilde{S} + B\tilde{T}, \quad (7.55)$$

где временно для краткости введены следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{e} \left[\frac{e \sin^2 v}{1 - e^2} \cdot \frac{r}{p} \left(1 + \frac{r}{p} \right) - \frac{r^2}{p^2} \cos v \right], \\ B &= \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin v. \end{aligned} \right\} \quad (7.55')$$

Величина I , входящая в уравнение (7.55), легко вычисляется. Действительно, преобразуя формулу (7.36) подстановкой

$$\operatorname{tg} \frac{v'}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2},$$

мы найдем *)

$$I = (1 - e^2)^{-3/2} [E - e \sin E] = (1 - e^2)^{-3/2} M.$$

Используя еще уравнение (7.53''), мы перепишем равенство (7.55) в следующем простом виде:

$$n \frac{d\tau}{dt} = \frac{M}{n} \frac{dn}{dt} + A\tilde{S} + B\tilde{T}. \quad (7.55')$$

Теперь заметим, что средняя аномалия эпохи M_0 связана с элементом τ следующей простой формулой:

$$M_0 = n(t_0 - \tau), \quad (7.56)$$

откуда

$$\frac{dM_0}{dt} = \frac{M_0}{n} \frac{dn}{dt} - n \frac{d\tau}{dt}.$$

Это равенство и уравнения (7.55'') дают

$$\frac{dM_0}{dt} = - \frac{M - M_0}{n} \frac{dn}{dt} - A\tilde{S} - B\tilde{T}, \quad (7.56')$$

где $\frac{dn}{dt}$ определяется формулой (7.53'').

Уравнение (7.56') и есть искомое уравнение, определяющее скорость изменения элемента M_0 — средней долготы эпохи.

Выражение для коэффициента A можно несколько упростить при помощи некоторых искусственных и неочевидных преобразований, которые мы здесь частично приведем.

В самом деле, используя формулы эллиптического движения, мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} A &= e \left(1 + \frac{r}{p} \right) \cdot \frac{r}{p} \sin^2 v - \frac{r}{p} \cdot \frac{r}{a} \cos v = \\ &= e (1 - \cos v \cos E) + \frac{r}{p} [2e - (1 + e \cos v) \cos E] = \\ &= e - \frac{p}{r} \cos E + 2e \frac{r}{p} \end{aligned}$$

так что, в конце концов,

$$A = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \left(2e \frac{r}{p} - \cos v \right).$$

*) Мы повторили здесь то же преобразование к эксцентрической аномалии, которое уже использовалось при выводе уравнения Кеплера в главе пятой.

4. Уравнения для эллиптических оскулирующих элементов. Выведенное в предыдущем разделе уравнение (7.56') неудобно для практического использования, так как в него входит величина

$$\frac{M - M_0}{n} = t - t_0,$$

постоянно растущая вместе с временем. Поэтому даже в случае весьма малой возмущающей силы первое слагаемое в правой части равенства (7.56') может в конце концов сделаться численно очень большим. Для избежания этого неудобства уравнение (7.56') обыкновенно преобразуют, вводя вместо M_0 некоторый новый элемент $\bar{M}_0$, полагая

$$\frac{d\bar{M}_0}{dt} = \frac{dM_0}{dt} + (t - t_0) \frac{dn}{dt}, \quad (7.57)$$

так что вместо уравнения (7.56') будем иметь

$$\frac{d\bar{M}_0}{dt} = -A\tilde{S} - B\tilde{T}. \quad (7.57')$$

Зная для какого-либо момента времени величину $\bar{M}_0$, мы можем вычислить весьма просто для этого же момента и среднюю аномалию M в возмущенном движении.

Действительно, в невозмущенном движении средняя аномалия M определяется формулой

$$M = M_0 + n(t - t_0), \quad (7.58)$$

которая, по смыслу метода Лагранжа, сохраняется также и в возмущенном движении. Дифференцируя формулу (7.58), мы имеем

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dM_0}{dt} + (t - t_0) \frac{dn}{dt} + n, \quad (7.58')$$

или, в силу равенства (7.57),

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d\bar{M}_0}{dt} + n. \quad (7.59)$$

Интегрируя равенство (7.59) в пределах от t_0 до t , мы получим

$$M = \bar{M}_0 + \int_{t_0}^t n dt. \quad (7.59')$$

Если элементы $\bar{M}_0$ и n определены в зависимости от времени, то формула (7.59') даст также и M .

Можно условиться, как это обыкновенно и делают на практике, всегда вычислять среднюю аномалию по формуле (7.59'), которая остается также справедливой и для невозмущенного движения. Действительно, если возмущающая сила отсутствует, то $\tilde{S} = 0$ и $\tilde{T} = 0$, а следовательно, $n = \text{const}$ и $M_0 = \text{const}$, так что из (7.59') имеем опять известную формулу $M = \bar{M}_0 + n(t - t_0)$, где $\bar{M}_0$ есть средняя аномалия эпохи. В силу этого величину $\bar{M}_0$ можно просто обозначать буквой M_0 , как это часто и делают.

Введем теперь в рассмотрение среднюю долготу в орбите l , для которой, имея в виду формулу (7.59'), будем иметь следующее выражение (также пригодное и в возмущенном и в невозмущенном движении):

$$l = \pi + M = \pi + \bar{M}_0 + \int_{t_0}^t n dt, \quad (7.60)$$

где π есть долгота перигентра.

Полагая теперь

$$\epsilon = \pi + \bar{M}_0, \quad (7.60')$$

мы будем иметь для l следующую формулу:

$$l = \epsilon + \int_{t_0}^t n dt, \quad (7.61)$$

которой и пользуются в приложениях.

Беря за шестой элемент вместо средней аномалии эпохи среднюю долготу эпохи ϵ , мы должны заменить шестое уравнение системы (7.42), т. е. уравнение (7.57'), уравнением, определяющим ϵ . Но мы имеем $\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{d\pi}{dt} + \frac{d\bar{M}_0}{dt}$.

Подставляя сюда вместо $\frac{d\pi}{dt}$ и $\frac{d\bar{M}_0}{dt}$ их выражения (7.53') и (7.57'), мы получим, после некоторых упрощений, следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{d\epsilon}{dt} = & -2 \frac{r}{p} \sqrt{1 - e^2} \cdot \tilde{S} + \frac{r}{p} \sin u \operatorname{tg} \frac{i}{2} \cdot \bar{W} + \\ & + \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}} \left[-\tilde{S} \cos v + \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin v \cdot \tilde{T} \right]. \end{aligned} \quad (7.62)$$

Наконец заметим, что вместо элемента $\bar{M}_0$ можно взять за новую неизвестную среднюю аномалию M , для определения которой будем иметь в силу равенства (7.59) следующее уравнение:

$$\frac{dM}{dt} = n + \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \left(\cos v - 2e \frac{r}{p} \right) \tilde{S} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \sin v \left(1 + \frac{r}{p} \right) \cdot \tilde{T}. \quad (7.63)$$

Точно также вместо элемента ϵ можно взять среднюю долготу, для которой будем иметь следующее уравнение, вытекающее из формулы (7.61):

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dt} = n - 2 \frac{r}{p} \sqrt{1-e^2} \cdot \tilde{S} + \frac{r}{p} \sin u \operatorname{tg} \frac{i}{2} \cdot \tilde{W} + \\ + \frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}} \left[-\tilde{S} \cos v + \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin v \cdot \tilde{T} \right]. \end{aligned} \quad (7.63')$$

Итак, если за неизвестные функции приняты элементы (7.51'), то при произвольно заданной возмущающей силе мы будем иметь (для случая, когда выполняется неравенство (7.51), т. е. для случая эллиптического движения) следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r}{p} \sin u \operatorname{cosec} i \cdot \tilde{W}, \\ \frac{di}{dt} &= \frac{r}{p} \cos u \cdot \tilde{W}, \\ \frac{da}{dt} &= \frac{2ea^2 \sin v}{p} \cdot \tilde{S} + \frac{2a}{r} \cdot \tilde{T}, \\ \frac{de}{dt} &= \sin v \cdot \tilde{S} + (\cos v + \cos E) \cdot \tilde{T}, \\ \frac{d\pi}{dt} &= -\frac{\cos v}{e} \cdot \tilde{S} + \frac{\sin v}{e} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \cdot \tilde{T} + \\ &\quad + \frac{r}{p} \sin u \cdot \operatorname{tg} \frac{i}{2} \cdot \tilde{W}, \\ \frac{d\epsilon}{dt} &= -2 \frac{r}{p} \sqrt{1-e^2} \cdot \tilde{S} + \frac{r}{p} \sin u \operatorname{tg} \frac{i}{2} \cdot \tilde{W} + \\ &\quad + \frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}} \left[-\cos v \cdot \tilde{S} + \sin v \left(1 + \frac{r}{p} \right) \cdot \tilde{T} \right], \end{aligned} \right\} \quad (7.64)$$

в которой последнее уравнение может быть заменено также уравнением (7.63) или (7.63').

Полезно заметить еще, что если возмущающая сила не зависит явно от времени, а только от координат и составляющих скорости, то порядок системы (7.64) можно понизить на одну единицу.

Действительно, в этом случае составляющие возмущающего ускорения также зависят только от координат и составляющих скорости, которые, как показано в главе шестой, в эллиптическом движении являются функциями средней аномалии.

Поэтому и правые части всех уравнений (7.64) будут вполне определенными функциями средней аномалии M и элементов Ω, i, a, e, π и, следовательно, за независимую переменную можно принять вместо времени величину M , которая растет одновременно с временем.

Исключая из уравнений (7.64) элемент времени dt , мы получим следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Omega}{dM} &= \frac{r}{p} \sin u \operatorname{cosec} i \cdot W^*, \\ \frac{di}{dM} &= \frac{r}{p} \cos u \cdot W^*, \\ \frac{da}{dM} &= \frac{2ea^2 \sin v}{p} \cdot S^* + \frac{2a}{r} \cdot T^*, \\ \frac{de}{dM} &= \sin v \cdot S^* + (\cos v + \cos E) \cdot T^*, \\ \frac{d\pi}{dM} &= -\frac{\cos v}{e} \cdot S^* + \frac{\sin v}{e} \left(1 + \frac{r}{p}\right) \cdot T^* + \\ &\quad + \frac{r}{p} \sin u \operatorname{tg} \frac{i}{2} \cdot W^*, \end{aligned} \right\} \quad (7.64')$$

где положено для сокращения

$$\left. \begin{aligned} S^* &= \frac{\tilde{S}}{n - A\tilde{S} - B\tilde{T}}, \\ T^* &= \frac{\tilde{T}}{n - A\tilde{S} - B\tilde{T}}, \\ W^* &= \frac{\tilde{W}}{n - A\tilde{S} - B\tilde{T}}. \end{aligned} \right\} \quad (7.64'')$$

Если система (7.64) проинтегрирована, то величины Ω , l , a , e , π будут известными функциями средней аномалии M и пяти произвольных постоянных, за которые можно принять начальные значения элементов, соответствующие моменту t_0 .

Тогда правая часть равенства (7.63) также будет известной функцией от M и пяти произвольных постоянных, и, интегрируя это уравнение, мы получим

$$t - t_0 = \int_{M_0}^M \frac{dM}{n - A\tilde{S} - B\tilde{T}}, \quad (7.64''')$$

т. е. выразим время t также в зависимости от средней аномалии M , причем шестой произвольной постоянной будет M_0 , которая здесь является начальным значением средней аномалии, соответствующим моменту t_0 .

Точно также можно, если угодно, принять за независимую переменную среднюю долготу l , которая определяется уравнением (7.63'), или истинную аномалию u , определяемую формулой (7.42'').

Соответствующие уравнения нетрудно написать. Заметим, наконец, что в (7.64) можно принять также за независимую переменную эксцентрическую аномалию E .

§ 4. Уравнения Лагранжа

1. Производные от полярных координат по элементам. Рассмотрим теперь наиболее важный для приложений случай, когда прямоугольные составляющие возмущающего ускорения являются частными производными по соответствующим координатам от одной и той же функции координат движущейся точки и времени.

Пусть

$$X = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial R}{\partial z}, \quad (7.65)$$

где

$$R = R(x, y, z, t) \quad (7.65')$$

есть заданная функция координат x , y , z и времени t .

Тогда, как показал Лагранж *), дифференциальные уравнения, определяющие изменения оскулирующих элементов,

*) См. «Приложение» к этой книге.

можно преобразовать таким образом, чтобы в эти уравнения вместо составляющих S, T, W возмущающего ускорения на подвижные оси входили частные производные от R по элементам.

Функция R называется *возмущающей* или *пертурбационной функцией*.

Преобразование Лагранжа можно провести для общего случая какого угодно возмущенного движения, но мы ограничимся здесь рассмотрением случая, когда возмущенное движение принадлежит к эллиптическому типу и когда уравнения возмущенного движения определяются формулами (7.64).

Пусть ε есть какой-нибудь из элементов (7.51'). Подставляя в выражение функции R вместо координат их выражения, даваемые формулами невозмущенного эллиптического движения, мы сделаем ее функцией от времени и от элементов (7.51'), а поэтому можем написать

$$\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \varepsilon}, \quad (7.66)$$

откуда, в силу формул (7.65), имеем также

$$\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} = X \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} + Y \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + Z \frac{\partial z}{\partial \varepsilon}. \quad (7.66')$$

Так как X, Y, Z зависят от составляющих S, T, W возмущающего ускорения по формулам (7.24'), то каждое равенство вида (7.66) представляет собой соотношение между этими составляющими (а также между величинами $\tilde{S}, \tilde{T}, \tilde{W}$) и частными производными от возмущающей функции R по элементам возмущенного эллиптического движения.

Займемся составлением формул (7.66'), для чего нужно сначала найти выражения для частных производных от координат по элементам (7.51'). Эти частные производные легко найти совершенно так же, как мы это уже делали в разделе 4 параграфа 4 главы пятой, где была взята система элементов (5.79). Однако мы предпочитаем получить все нужные формулы непосредственно для системы элементов (7.51').

Возьмем для прямоугольных координат невозмущенного движения следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} x &= r (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\ y &= r (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\ z &= r \sin u \sin i. \end{aligned} \right\} \quad (7.67)$$

Эти формулы показывают, что x , y , z зависят от элементов и непосредственно и через посредство полярных координат — радиуса-вектора r и аргумента широты u .

Выпишем частные производные по элементам от этих полярных координат.

Формулы невозмущенного эллиптического движения дают следующие соотношения:

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (7.68)$$

и

$$E - e \sin E = M = n(t - t_0) + \varepsilon - \pi; \quad (7.68')$$

из (7.68) имеем сразу

$$\frac{\partial r}{\partial a} = \frac{r}{a}.$$

Далее, дифференцируя (7.68) и (7.68') по эксцентриситету e , имеем

$$\frac{\partial r}{\partial e} = -a \cos E + ae \sin E \frac{\partial E}{\partial e}, \quad \frac{\partial E}{\partial e} = \frac{a \sin E}{r},$$

откуда найдем

$$\frac{\partial r}{\partial e} = -a \cos v.$$

Дифференцируя затем формулы (7.68) и (7.68') по элементам ε и π , имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \varepsilon} &= ae \sin E \frac{\partial E}{\partial \varepsilon}, & \frac{\partial E}{\partial \varepsilon} &= \frac{a}{r}, \\ \frac{\partial r}{\partial \pi} &= ae \sin E \frac{\partial E}{\partial \pi}, & \frac{\partial E}{\partial \pi} &= -\frac{a}{r}, \end{aligned}$$

откуда с помощью формулы

$$r \sin v = a \sqrt{1 - e^2} \sin E$$

получим

$$\frac{\partial r}{\partial \varepsilon} = \frac{ae \sin v}{\sqrt{1 - e^2}}, \quad \frac{\partial r}{\partial \pi} = -\frac{ae \sin v}{\sqrt{1 - e^2}},$$

Наконец, совершенно ясно, что

$$\frac{\partial r}{\partial \Omega} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial i} = 0.$$

Перейдем к аргументу широты u . Так как

$$u = v + \omega = v + \pi - \Omega, \quad (7.69)$$

то мы имеем прежде всего

$$\frac{\partial u}{\partial \Omega} = -1, \quad \frac{\partial u}{\partial e} = \frac{\partial v}{\partial e}, \quad \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial v}{\partial \varepsilon}, \quad \frac{\partial u}{\partial \pi} = \frac{\partial v}{\partial \pi} + 1.$$

Дифференцируя по e формулу

$$r \cos v = a (\cos E - e),$$

имеем

$$\frac{\partial r}{\partial e} \cos v - r \sin v \frac{\partial v}{\partial e} = -a \sin E \frac{\partial E}{\partial e} - a,$$

откуда, с помощью уже полученных выше выражений для $\frac{\partial r}{\partial e}$ и $\frac{\partial E}{\partial e}$ после упрощений найдем

$$\frac{\partial v}{\partial e} = \frac{a \sin v}{r} \left(1 + \frac{r}{p} \right).$$

Дифференцируя затем соотношение

$$r (1 + e \cos v) = a (1 - e^2)$$

по e и π , найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \varepsilon} \frac{a(1-e^2)}{r} - r e \sin v \frac{\partial v}{\partial \varepsilon} &= 0, \\ \frac{\partial r}{\partial \pi} \frac{a(1-e^2)}{r} - r e \sin v \frac{\partial v}{\partial \pi} &= 0, \end{aligned}$$

откуда, зная уже выражения для $\frac{\partial r}{\partial \varepsilon}$ и $\frac{\partial r}{\partial \pi}$, получим

$$\frac{\partial v}{\partial \varepsilon} = \frac{a^2 \sqrt{1-e^2}}{r^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial \pi} = - \frac{a^2 \sqrt{1-e^2}}{r^2}.$$

Кроме того, очевидно, что

$$\frac{\partial u}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial i} = 0.$$

Собирая все полученные производные вместе, получим следующую группу формул

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \Omega} &= 0, & \frac{\partial u}{\partial \Omega} &= -1, \\ \frac{\partial r}{\partial i} &= 0, & \frac{\partial u}{\partial i} &= 0, \\ \frac{\partial r}{\partial a} &= 0, & \frac{\partial u}{\partial a} &= 0, \\ \frac{\partial r}{\partial e} &= -a \cos v, & \frac{\partial u}{\partial e} &= \frac{a \sin v}{r} \left(1 + \frac{r}{p}\right), \\ \frac{\partial r}{\partial \pi} &= -\frac{ae \sin v}{\sqrt{1-e^2}}, & \frac{\partial u}{\partial \pi} &= -\frac{a^2 \sqrt{1-e^2}}{r^2} + 1, \\ \frac{\partial r}{\partial \varepsilon} &= \frac{ae \sin v}{\sqrt{1-e^2}}, & \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} &= \frac{a^2 \sqrt{1-e^2}}{r^2}, \end{aligned} \right\} (7.70)$$

2. Вывод уравнений Лагранжа. Положим в формуле (7.66') последовательно $\varepsilon = a, e, i, \Omega, \varepsilon, \pi$.

Так как

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{x}{a}, \quad \frac{\partial y}{\partial a} = \frac{y}{a}, \quad \frac{\partial z}{\partial a} = \frac{z}{a},$$

то

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \frac{r}{a} [\alpha X + \beta Y + \gamma Z] = \frac{r}{a} S,$$

откуда, имея в виду, что $na^{3/2} = \sqrt{\mu}$, получим

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \frac{nr}{\sqrt{1-e^2}} \tilde{S}.$$

Далее, из формул (7.67) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial e} &= \alpha \frac{\partial r}{\partial e} + r\alpha' \frac{\partial u}{\partial e}, & \frac{\partial y}{\partial e} &= \beta \frac{\partial r}{\partial e} + r\beta' \frac{\partial u}{\partial e}, \\ \frac{\partial z}{\partial e} &= \gamma \frac{\partial r}{\partial e} + r\gamma' \frac{\partial u}{\partial e}, \end{aligned}$$

а поэтому

$$\frac{\partial R}{\partial e} = \frac{\partial r}{\partial e} S + r \frac{\partial u}{\partial e} T,$$

откуда с помощью формул (7.70) найдем

$$\frac{\partial R}{\partial e} = \frac{na^2}{\sqrt{1-e^2}} \left[-\cos v \cdot \tilde{S} + \sin v \left(1 + \frac{r}{p}\right) \tilde{T} \right].$$

Теперь имеем

$$\frac{\partial x}{\partial i} = \alpha'' \cdot r \sin u, \quad \frac{\partial y}{\partial i} = \beta'' \cdot r \sin u, \quad \frac{\partial z}{\partial i} = \gamma'' \cdot r \sin u,$$

откуда

$$\frac{\partial R}{\partial i} = r \sin u \cdot W$$

или

$$\frac{\partial R}{\partial i} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} r \sin u \cdot W.$$

Дифференцирование формул (7.70) по Ω дает

$$\frac{\partial x}{\partial \Omega} = -r\alpha' - y, \quad \frac{\partial y}{\partial \Omega} = -r\beta' + x, \quad \frac{\partial z}{\partial \Omega} = -r\gamma',$$

вследствие чего получим

$$\frac{\partial R}{\partial \Omega} = -rT + xY - yX.$$

Заменяя здесь выражение $xY - yX$ его значением из третьего равенства (7.27) и исключая затем $\frac{dp}{dt}$ и $\frac{di}{dt}$ при помощи уравнений (7.28), мы найдем после упрощений

$$\frac{\partial R}{\partial \Omega} = -\frac{nar}{\sqrt{1-e^2}} 2 \sin^2 \frac{i}{2} \cdot \tilde{T} - \frac{nar}{\sqrt{1-e^2}} \sin i \sin u \cdot \tilde{W}.$$

Наконец, дифференцируя формулы (7.67) по ε и по π , мы имеем

$$\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial r}{\partial \varepsilon} \alpha + r \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \alpha', \quad \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial r}{\partial \varepsilon} \beta + r \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \beta',$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial r}{\partial \varepsilon} \gamma + r \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \gamma',$$

$$\frac{\partial x}{\partial \pi} = \frac{\partial r}{\partial \pi} \alpha + r \frac{\partial u}{\partial \pi} \alpha', \quad \frac{\partial y}{\partial \pi} = \frac{\partial r}{\partial \pi} \beta + r \frac{\partial u}{\partial \pi} \beta',$$

$$\frac{\partial z}{\partial \pi} = \frac{\partial r}{\partial \pi} \gamma + r \frac{\partial u}{\partial \pi} \gamma',$$

вследствие чего получаем

$$\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial r}{\partial \varepsilon} S + r \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} T, \quad \frac{\partial R}{\partial \pi} = \frac{\partial r}{\partial \pi} S + r \frac{\partial u}{\partial \pi} T,$$

откуда при помощи формул (7.70) будем иметь следующие выражения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} &= \frac{na^2 e \sin v}{1-e^2} \cdot \tilde{S} + \frac{na^3}{r} \cdot \tilde{T}, \\ \frac{\partial R}{\partial \pi} &= -\frac{na^2 e \sin v}{1-e^2} \cdot \tilde{S} - \frac{na^3}{r} \tilde{T} + \frac{nar}{\sqrt{1-e^2}} \tilde{T}.\end{aligned}$$

Выписывая все полученные выражения для частных производных функции R вместе, будем иметь

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial \Omega} &= -\frac{nar}{\sqrt{1-e^2}} 2 \sin^2 \frac{i}{2} \cdot \tilde{T} - \frac{nar}{\sqrt{1-e^2}} \sin i \cos u \cdot \tilde{W}, \\ \frac{\partial R}{\partial i} &= \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} r \sin u \cdot \tilde{W}, \\ \frac{\partial R}{\partial a} &= \frac{nr}{\sqrt{1-e^2}} \tilde{S}, \\ \frac{\partial R}{\partial e} &= \frac{na^2}{\sqrt{1-e^2}} \left[-\cos v \cdot \tilde{S} + \sin v \left(1 + \frac{r}{p} \right) \cdot \tilde{T} \right], \\ \frac{\partial R}{\partial \pi} &= -\frac{na^2 e \sin v}{1-e^2} \tilde{S} - \frac{na^3}{r} \tilde{T} + \frac{nar}{\sqrt{1-e^2}} \tilde{T}, \\ \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} &= \frac{na^2 e \sin v}{1-e^2} \tilde{S} + \frac{na^3}{r} \tilde{T},\end{aligned} \right\} (7.71)$$

откуда выводим следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned}\frac{nar}{\sqrt{1-e^2}} \tilde{T} &= \frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \\ \frac{a^2 e \sin v}{p} \tilde{S} + \frac{a^2}{r} \tilde{T} &= \frac{1}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \\ \frac{r}{p} \sqrt{1-e^2} \tilde{S} &= \frac{1}{na} \frac{\partial R}{\partial a}, \\ \frac{r}{p} \sin u \cdot \tilde{W} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \frac{r}{p} \cos u \cdot \tilde{W} &= -\frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} - \\ &\quad - \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right), \\ -\cos v \cdot \tilde{S} + \sin v \left(1 + \frac{r}{p} \right) \tilde{T} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \frac{\partial R}{\partial e}.\end{aligned} \right\} (7.71')$$

Подставляя выражения (7.71') в уравнения (7.64), мы получим уравнения для определения оскулирующих эллиптических элементов, называемые уравнениями Лагранжа. Эти уравнения принято писать в следующем порядке:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \pi} - \frac{e \sqrt{1-e^2}}{1 + \sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} - \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right), \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \frac{d\pi}{dt} &= \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e}, \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} + \\ &\quad + \frac{e \sqrt{1-e^2}}{1 + \sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{1}{na^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial e}. \end{aligned} \right\} \quad (7.72)$$

Выпишем еще дополнительно уравнения, вытекающие из первого из уравнений (7.28) и из уравнения (7.53'') и определяющие скорости изменения среднего движения и параметра оскулирующей орбиты. Эти уравнения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= -\frac{3}{a^2} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \\ \frac{dp}{dt} &= \frac{2 \sqrt{1-e^2}}{na} \left(\frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right) \end{aligned} \right\} \quad (7.72')$$

и ими можно заменить, если это угодно, первые два уравнения системы (7.72).

Последнее уравнение системы (7.72) можно также заменить уравнением, определяющим скорость изменения средней аномалии эпохи $\bar{M}_0$. Это уравнение получится из уравнения

(7.57') с помощью формул (7.71') и напишется следующим образом:

$$\frac{d\bar{M}_0}{dt} = -\frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a}. \quad (7.72'')$$

Если вместо $\bar{M}_0$ или e предпочитают взять среднюю аномалию M или среднюю долготу l , то последнее уравнение системы (7.72) должно быть заменено одним из следующих:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= n - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e}, \\ \frac{dl}{dt} &= n - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} + \\ &\quad + \frac{e \sqrt{1-e^2}}{1 + \sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{1}{na^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial e}, \end{aligned} \right\} \quad (7.72''')$$

которые выводятся из уравнений (7.63) и (7.63') соответственно.

3. Общий метод Лагранжа. Уравнения Лагранжа (7.72) получены нами путем преобразования уравнений Ньютона для случая эллиптического движения, т. е. уравнений (7.64). Однако сам Лагранж вывел эти уравнения непосредственно из уравнений вида (7.1) более общим способом.

Так как уравнения Лагранжа являются весьма важными для небесной механики, то полезно рассмотреть и непосредственный их вывод, к которому мы теперь и перейдем.

Следуя Лагранжу, рассмотрим вместо системы (7.1) или (7.12) более общую систему уравнений первого порядка вида

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} - \frac{\partial H}{\partial x'} - X' &= 0, & \frac{dx'}{dt} + \frac{\partial H}{\partial x} + \tilde{X} &= 0, \\ \frac{dy}{dt} - \frac{\partial H}{\partial y'} - Y' &= 0, & \frac{dy'}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y} + \tilde{Y} &= 0, \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (7.73)$$

где $x, x', y, y', \dots$ обозначают неизвестные функции, число которых $2k$ может быть каким угодно.

Величины $X', \tilde{X}, Y', \tilde{Y}, \dots$, а также величина H суть данные функции времени и $2k$ величин $x, x', \dots$

Рассмотрим уравнения, получающиеся из уравнений (7.73) отбрасыванием всех величин X' , $\tilde{X}$, Y' , $\tilde{Y}$, ..., т. е. упрощенные уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} - \frac{\partial H}{\partial x'} &= 0, & \frac{dx'}{dt} + \frac{\partial H}{\partial x} &= 0, \\ \frac{dy}{dt} - \frac{\partial H}{\partial y'} &= 0, & \frac{dy'}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y} &= 0, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{aligned} \right\} \quad (7.73')$$

и допустим, что эти упрощенные уравнения могут быть полностью проинтегрированы.

Тогда мы будем иметь общее решение уравнений (7.73') в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} x &= \Phi_1(t; a, b, \dots, g), & x' &= \Psi_1(t; a, b, \dots, g), \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{aligned} \right\} \quad (7.74)$$

где $a, b, \dots, g$ суть $2k$ произвольных постоянных интегрирования.

Ясно, что функции (7.74) удовлетворяют уравнениям (7.73'), каковы бы ни были произвольные постоянные.

Чтобы получить общее решение первоначальных уравнений (7.73), сохраним те же аналитические выражения (7.74) для функций $x, x', \dots$, но будем рассматривать величины $a, b, \dots, g$ уже не как постоянные, а как некоторые функции времени, подлежащие определению*).

В этом предположении мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial a} \frac{da}{dt} + \frac{\partial x}{\partial b} \frac{db}{dt} + \dots + \frac{\partial x}{\partial g} \frac{dg}{dt}, \\ \frac{dx'}{dt} &= \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial x'}{\partial a} \frac{da}{dt} + \frac{\partial x'}{\partial b} \frac{db}{dt} + \dots + \frac{\partial x'}{\partial g} \frac{dg}{dt}, \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

Внесем эти выражения в уравнения (7.73) и потребуем, чтобы эти последние уравнения удовлетворились. Имея в виду, что при этом

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial H'}{\partial x'} &\equiv 0, & \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial H'}{\partial x} &\equiv 0, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{aligned} \right\} \quad (7.73'')$$

*) Здесь опять излагается в несколько иной форме метод Лагранжа изменения произвольных постоянных.

мы получим следующие уравнения:

[illegible]

которые и нужно затем разрешить относительно производных $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$, ..., $\frac{dg}{dt}$.

Уравнения (7.78) обладают замечательным свойством: коэффициенты этих уравнений не зависят явно от времени, что позволяет значительно упростить вычисление скобок Лагранжа, являющихся этими коэффициентами.

В самом деле, составим выражение для частной производной от любой скобки Лагранжа по времени t и убедимся, что эта производная тождественно равна нулю. Мы имеем, дифференцируя формулу (7.76),

$$\frac{\partial [a, b]}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial a \partial t} \frac{\partial x'}{\partial b} + \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial^2 x'}{\partial b \partial t} - \frac{\partial^2 x}{\partial b \partial t} \frac{\partial x'}{\partial a} - \frac{\partial x}{\partial b} \frac{\partial^2 x'}{\partial a \partial t} + \dots$$

что можно, как нетрудно проверить, представить также в виде

$$\frac{\partial [a, b]}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial x'}{\partial b} - \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial b} \right) - \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial x'}{\partial a} - \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial a} \right) + \dots$$

Принимая во внимание равенства (7.73''), мы напомним последнее равенство следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{\partial [a, b]}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial H}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial b} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial H}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial b} + \dots \right) - \\ & - \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial H}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial a} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial H}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial a} + \dots \right), \end{aligned}$$

откуда, замечая, что H зависит от a или b только через посредство x , x' , ..., выводим

$$\frac{\partial [a, b]}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial a} \frac{\partial H}{\partial b} - \frac{\partial}{\partial b} \frac{\partial H}{\partial a} = \frac{\partial^2 H}{\partial a \partial b} - \frac{\partial^2 H}{\partial b \partial a} = 0.$$

В каждом отдельном частном случае функция H имеет определенное значение и функции Φ_1 , Ψ_1 , ..., входящие в общее решение уравнений (7.73), предполагаются известными функциями времени и произвольных постоянных.

Поэтому величины скобок Лагранжа, входящих в уравнения (7.78), могут быть найдены при помощи совершенно элементарных операций. Вычислив все эти скобки и разре-

шая затем уравнения (7.78) относительно производных $\frac{da}{dt}, \dots, \frac{dg}{dt}$, мы получим, очевидно, $2k$ уравнений вида

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= A(t; a, b, \dots, g), \\ \frac{db}{dt} &= B(t; a, b, \dots, g), \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dg}{dt} &= G(t; a, b, \dots, g), \end{aligned} \right\} \quad (7.78')$$

которые и нужно будет интегрировать.

Найдя величины $a, b, \dots, g$ в зависимости от времени и $2k$ произвольных постоянных, мы получим затем общее решение первоначальных уравнений (7.73) по формулам (7.74).

4. Вывод по методу Лагранжа общих уравнений для оскулирующих элементов. Применим теперь теорию, изложенную в предыдущем разделе, к уравнениям (7.12), где составляющие возмущающего уравнения определяются формулами (7.65).

Тогда $k=3$; x, y, z суть обычные прямоугольные координаты;

$$x' = \dot{x}, \quad y' = \dot{y}, \quad z' = \dot{z}$$

являются составляющими скорости, функция H определится формулой

$$H = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{\mu}{r},$$

величины $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$ будут даны формулами

$$\tilde{X} = -\frac{\partial R}{\partial x}, \quad \tilde{Y} = -\frac{\partial R}{\partial y}, \quad \tilde{Z} = -\frac{\partial R}{\partial z},$$

и могут быть рассматриваемы как известные функции координат x, y, z и времени t , а X', Y', Z' все равны нулю.

Уравнения упрощенной системы (7.73') в данном случае являются обычными уравнениями невозмущенного движения, общее решение которых известно.

Это общее решение мы возьмем здесь в виде (4.59), где ξ и η суть прямоугольные орбитальные координаты.

Произвольными постоянными являются элементы кеплеровой орбиты

$$\Omega, i, \omega, p, e, \tau, \quad (7.79)$$

которая может быть и эллипсом и гиперболой.

Если ε обозначает какой-либо из элементов (7.79), то мы имеем по формулам (7.77)

$$R_\varepsilon = -\frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \varepsilon} = -\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}. \quad (7.79')$$

Теперь, чтобы составить уравнения (7.78), которые в рассматриваемом случае представляют собой систему шести линейных уравнений относительно производных от элементов (7.79), нужно сначала вычислить скобки Лагранжа, число которых вследствие свойств, выражаемых формулами (7.76'), равно, как легко подсчитать, пятнадцать.

Для вычисления этих 15 скобок, которые содержат частные производные от координат и составляющих скорости невозмущенного движения по элементам (7.79), мы можем воспользоваться готовыми формулами, выписанными в конце главы пятой.

Пусть L_1 и L_2 — два различных элемента из группы Ω, i, ω . Тогда мы имеем

$$[L_1, L_2] = \frac{\partial x}{\partial L_1} \frac{\partial \dot{x}}{\partial L_2} - \frac{\partial x}{\partial L_2} \frac{\partial \dot{x}}{\partial L_1} + \dots \quad (7.80)$$

По формулам главы пятой

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial L_1} &= \frac{\partial \alpha_\tau}{\partial L_1} \xi + \frac{\partial \alpha'_\tau}{\partial L_1} \eta, & \frac{\partial \dot{x}}{\partial L_1} &= \frac{\partial \alpha_\tau}{\partial L_1} \dot{\xi} + \frac{\partial \alpha'_\tau}{\partial L_1} \dot{\eta}, \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned}$$

так что мы находим из (7.80)

$$[L_1, L_2] = (\xi \dot{\eta} - \eta \dot{\xi}) \left[\frac{\partial \alpha_\tau}{\partial L_1} \frac{\partial \alpha'_\tau}{\partial L_2} - \frac{\partial \alpha_\tau}{\partial L_2} \frac{\partial \alpha'_\tau}{\partial L_1} + \dots \right].$$

Но в невозмущенном движении

$$\xi \dot{\eta} - \eta \dot{\xi} = c = \sqrt{\mu} \sqrt{p},$$

а поэтому

$$[L_1, L_2] = \sqrt{\mu} \sqrt{p} \left[\frac{\partial x_\tau}{\partial L_1} \frac{\partial x'_\tau}{\partial L_2} - \frac{\partial x_\tau}{\partial L_2} \frac{\partial x'_\tau}{\partial L_1} + \right. \\ \left. + \frac{\partial \beta_\tau}{\partial L_1} \frac{\partial \beta'_\tau}{\partial L_2} - \frac{\partial \beta_\tau}{\partial L_2} \frac{\partial \beta'_\tau}{\partial L_1} + \frac{\partial \gamma_\tau}{\partial L_1} \frac{\partial \gamma'_\tau}{\partial L_2} + \frac{\partial \gamma_\tau}{\partial L_2} \frac{\partial \gamma'_\tau}{\partial L_1} \right]. \quad (7.80')$$

Подставляя сюда вместо производных от направляющих косинусов по элементам первой группы их выражения, даваемые формулами (5.105), (5.105') и (5.105'') главы пятой, мы найдем

$$[\Omega, \omega] = 0, \quad [\Omega, l] = -\sqrt{\mu} \sqrt{p} \sin l, \quad [\omega, l] = 0. \quad (7.80'')$$

Подразумевая далее под L любой из элементов первой группы и под P любой из элементов второй группы, мы имеем

$$[L, P] = \frac{\partial x}{\partial L} \frac{\partial \dot{x}}{\partial P} - \frac{\partial x}{\partial P} \frac{\partial \dot{x}}{\partial L} + \dots \quad (7.81)$$

Но по формулам главы пятой

$$\frac{\partial x}{\partial P} = \alpha_\tau \frac{\partial \xi}{\partial P} + \alpha'_\tau \frac{\partial \eta}{\partial P}, \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial P} = \alpha_\tau \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial P} + \alpha'_\tau \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial P},$$

.

Производные по элементам первой группы написаны выше, и мы получаем

$$[L, P] = \left(\frac{\partial \alpha_\tau}{\partial L} \xi + \frac{\partial \alpha'_\tau}{\partial L} \eta \right) \left(\alpha_\tau \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial P} + \alpha'_\tau \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial P} \right) - \\ - \left(\alpha_\tau \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial P} + \alpha'_\tau \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial P} \right) \left(\frac{\partial \alpha_\tau}{\partial L} \xi + \frac{\partial \alpha'_\tau}{\partial L} \eta \right) + \dots$$

После упрощений получим

$$[L, P] = \left(\alpha'_\tau \frac{\partial \alpha_\tau}{\partial L} + \beta'_\tau \frac{\partial \beta_\tau}{\partial L} + \gamma'_\tau \frac{\partial \gamma_\tau}{\partial L} \right) \frac{\partial (\xi \dot{\eta} - \eta \dot{\xi})}{\partial P},$$

откуда

$$[L, P] = \sqrt{\mu} \left(\alpha'_\tau \frac{\partial \alpha_\tau}{\partial L} + \beta'_\tau \frac{\partial \beta_\tau}{\partial L} + \gamma'_\tau \frac{\partial \gamma_\tau}{\partial L} \right) \frac{\partial \sqrt{p}}{\partial P}. \quad (7.81')$$

Из этой формулы имеем

$$[L, e] = 0, \quad [L, \tau] = 0, \quad (7.81'')$$

и

$$[L, p] = \frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{p}} \left(\alpha'_\tau \frac{\partial \alpha_\tau}{\partial L} + \beta'_\tau \frac{\partial \beta_\tau}{\partial L} + \gamma'_\tau \frac{\partial \gamma_\tau}{\partial L} \right). \quad (7.82)$$

Полагая здесь последовательно $L = \Omega$, l , ω и воспользовавшись опять формулами (5.105), мы получим

$$[\Omega, p] = \frac{V_{\mu}}{2\sqrt{p}} \cos i, \quad [l, p] = 0, \quad [\omega, p] = \frac{V_{\mu}}{2\sqrt{p}}. \quad (7.82')$$

Наконец, пусть P_1 и P_2 — два различных элемента второй группы. Тогда

$$[P_1, P_2] = \frac{\partial x}{\partial P_1} \frac{\partial \dot{x}}{\partial P_2} - \frac{\partial x}{\partial P_2} \frac{\partial \dot{x}}{\partial P_1} + \dots, \quad (7.83)$$

откуда

$$[P_1, P_2] = \left(\alpha_{\tau} \frac{\partial \xi}{\partial P_1} + \alpha'_{\tau} \frac{\partial \eta}{\partial P_1} \right) \left(\alpha_{\tau} \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial P_2} + \alpha'_{\tau} \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial P_2} \right) - \\ - \left(\alpha_{\tau} \frac{\partial \xi}{\partial P_2} + \alpha'_{\tau} \frac{\partial \eta}{\partial P_2} \right) \left(\alpha_{\tau} \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial P_1} + \alpha'_{\tau} \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial P_1} \right) + \dots$$

После упрощений найдем

$$[P_1, P_2] = \frac{\partial \xi}{\partial P_1} \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial P_2} - \frac{\partial \xi}{\partial P_2} \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial P_1} + \frac{\partial \eta}{\partial P_1} \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial P_2} - \frac{\partial \eta}{\partial P_2} \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial P_1}. \quad (7.83')$$

Сюда нужно подставить вместо частных производных от орбитальных координат и орбитальных составляющих скорости их выражения, даваемые формулами (5.107) и (5.108').

При этом для упрощения выкладок мы воспользуемся здесь свойством скобок Лагранжа, выражаемым для нашего случая равенством

$$\frac{\partial [P_1, P_2]}{\partial t} \equiv 0.$$

Таким образом, при вычислении производных, входящих в формулу (7.83), мы можем придать времени t любое значение.

Проще всего положить $t = \tau$, так как для этого значения t истинная аномалия ν равна нулю.

Формулы (5.106'), (5.106''), (5.107), (5.108) и (5.108') при $t = \tau$ дают:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial p} = \frac{1}{1+e}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial p} = -\frac{V_{\mu}(1+e)}{2p\sqrt{p}}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial e} = -\frac{p}{(1+e)^2}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial e} = 0, \quad \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial e} = 0, \quad \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial e} = \frac{V_{\mu}}{\sqrt{p}}, \\ \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \tau} = -\frac{V_{\mu}(1+e)}{\sqrt{p}}, \quad \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \tau} = \frac{\mu(1+e)^2}{p^2}, \quad \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \tau} = 0. \end{aligned}$$

С помощью этих выражений по формуле (7.83') находим

$$[p, e] = 0, \quad [p, \tau] = \frac{\mu(1-e^2)}{2p^2}, \quad [e, \tau] = \frac{\mu e}{p}. \quad (7.83'')$$

Подставляя теперь выражения для скобок Лагранжа (7.80''), (7.81''), (7.82') и (7.83'') в уравнения вида (7.78), мы получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} -\sqrt{\mu} \sqrt{p} \sin i \frac{dt}{dt} + \frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{p}} \cos i \frac{dp}{dt} - \frac{\partial R}{\partial \Omega} &= 0, \\ \sqrt{\mu} \sqrt{p} \sin i \frac{d\Omega}{dt} - \frac{\partial R}{\partial i} &= 0, \\ \frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{p}} \frac{dp}{dt} - \frac{\partial R}{\partial \omega} &= 0, \\ -\frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{p}} \cos i \frac{d\Omega}{dt} - \frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{p}} \frac{d\omega}{dt} + \frac{\mu(1-e^2)}{2p^2} \frac{d\tau}{dt} - \frac{\partial R}{\partial p} &= 0, \\ \frac{\mu e}{p} \frac{d\tau}{dt} - \frac{\partial R}{\partial e} &= 0, \\ -\frac{\mu(1-e^2)}{2p^2} \frac{dp}{dt} - \frac{\mu e}{p} \frac{de}{dt} - \frac{\partial R}{\partial \tau} &= 0. \end{aligned}$$

Разрешая эти уравнения относительно производных от элементов, мы получим окончательные уравнения Лагранжа для системы элементов (7.79) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{\mu} \sqrt{p} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{1}{\sqrt{\mu} \sqrt{p} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} + \frac{\cos i}{\sqrt{\mu} \sqrt{p} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \omega}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\cos i}{\sqrt{\mu} \sqrt{p} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} - \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{\mu}} \frac{\partial R}{\partial p} + \frac{1-e^2}{e \sqrt{\mu} \sqrt{p}} \frac{\partial R}{\partial e}, \\ \frac{dp}{dt} &= \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{\mu}} \frac{\partial R}{\partial \omega}, \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{1-e^2}{e \sqrt{\mu} \sqrt{p}} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{p}{\mu e} \frac{\partial R}{\partial \tau}, \\ \frac{d\tau}{dt} &= \frac{p}{\mu e} \frac{\partial R}{\partial e}. \end{aligned} \right\} \quad (7.84)$$

От этих уравнений нетрудно перейти к уравнениям для какой-либо другой системы элементов и, в частности, к уравнениям (7.72) для элементов эллиптического движения*).

§ 5. Основные методы приближенного интегрирования дифференциальных уравнений возмущенного движения

1. Разложение прямоугольных координат по степеням малого параметра. Мы уже неоднократно отмечали, что дифференциальные уравнения возмущенного движения, например уравнения вида (7.1) или равносильные им уравнения (7.12), при современном состоянии математики не могут быть строго проинтегрированы.

Точно также не могут быть строго проинтегрированы уравнения Ньютона или уравнения Лагранжа, получающиеся из уравнений (7.12) путем замены переменных.

Можно, конечно, поставить математическую задачу об отыскании такого преобразования переменных, чтобы новые уравнения оказались интегрируемыми в строгом смысле слова.

Однако эта задача в громадном большинстве случаев оказывается неразрешимой, а когда она фактически разрешима, то ее решение требует слишком сложных и громоздких выкладок.

Поэтому главное внимание астрономов-теоретиков издавна было обращено на приемы приближенного интегрирования дифференциальных уравнений возмущенного движения, главные из которых мы и рассмотрим в настоящем параграфе**).

Рассмотрим сначала первоначальные уравнения возмущенного движения (7.1) и допустим, что составляющие возмущающего ускорения, являясь заданными функциями от коор-

*) Лагранж в своей «Аналитической механике» выводит сначала уравнения (7.84), но только для случая эллиптического движения, а затем замечает, что из полученных уравнений, используя соотношения (7.66), можно вывести те уравнения, которые мы назвали уравнениями Ньютона.

**) Мы будем рассматривать исключительно аналитические способы приближенного интегрирования уравнений, совершенно не касаясь численных методов интегрирования, о которых см. Субботин М. Ф., Курс небесной механики, т. 2, 1937 или Щиголев Б. М., Численные методы небесной механики (готовится к изданию). (См. также Березин И. С. и Житков Н. П., Методы вычислений, т. 2, Физматгиз, 1960.)

динат, составляющих скорости и времени, зависят еще от некоторого малого параметра σ и могут быть представлены в форме рядов, расположенных по целым положительным степеням этого параметра *):

$$\left. \begin{aligned} X &= \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k X^{(k)}(t; x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ Y &= \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k Y^{(k)}(t; x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ Z &= \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k Z^{(k)}(t; x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \end{aligned} \right\} \quad (7.85)$$

Предположим, что эти ряды абсолютно сходятся для всех значений t , содержащихся в некотором промежутке $(\bar{t}_0 - \bar{t}_1, \bar{t}_0 + \bar{t}_2)$ (который может быть и бесконечным), до тех пор, пока $|\sigma|$ не превосходит некоторого малого предела $\bar{\sigma}$.

Уравнения (7.1) напишем в этом случае следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} &= \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k X^{(k)}, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} &= \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k Y^{(k)}, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\mu z}{r^3} &= \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k Z^{(k)} \end{aligned} \right\} \quad (7.86)$$

и поставим задачу о нахождении общего решения уравнений (7.86) также в виде рядов, расположенных по степеням параметра σ . Для этого положим

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma^k x^{(k)}, \quad y = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma^k y^{(k)}, \quad z = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma^k z^{(k)}, \quad (7.87)$$

где $x^{(k)}$, $y^{(k)}$, $z^{(k)}$ суть неизвестные коэффициенты, которые нужно определить так, чтобы ряды (7.87) удовлетворяли формально уравнениям (7.86).

*) Возможны случаи, когда эти ряды расположены по дробным степеням параметра.

Очевидно, что функции $x^{(0)}$, $y^{(0)}$, $z^{(0)}$, представляющие первое левое приближение, определяются уравнениями, которые получим из (7.86), полагая $\sigma = 0$, и которые, следовательно, имеют вид:

$$\frac{d^2 x^{(0)}}{dt^2} + \frac{\mu x^{(0)}}{r^{(0)^3} = 0; \quad \frac{d^2 y^{(0)}}{dt^2} + \frac{\mu y^{(0)}}{r^{(0)^3} = 0; \quad \frac{d^2 z^{(0)}}{dt^2} + \frac{\mu z^{(0)}}{r^{(0)^3} = 0; \quad (7.87)$$

Но уравнения (7.88), очевидно, суть просто уравнения невозмущенного кеплеровского движения, общее решение которых, содержащее шесть произвольных постоянных, известно и дается формулами глав четвертой и пятой.

Чтобы составить уравнения, определяющие первое приближение, т. е. функции $x^{(1)}$, $y^{(1)}$, $z^{(1)}$, продифференцируем каждое из уравнений (7.86) по параметру σ , имея в виду, что x , y , z суть функции σ , определяемые рядами (7.87).

Мы получим в результате уравнения вида (для краткости выписываем только одно из этих уравнений)

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \sigma} \right) + \frac{\mu}{r^3} \cdot \frac{\partial x}{\partial \sigma} - \frac{3\mu x}{r^5} \left(x \frac{\partial x}{\partial \sigma} + y \frac{\partial y}{\partial \sigma} + z \frac{\partial z}{\partial \sigma} \right) = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} k \sigma^{k-1} X^{(k)} + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k \frac{\partial X^{(k)}}{\partial \sigma}, \end{aligned} \quad (7.89)$$

где $\frac{\partial X^{(k)}}{\partial \sigma}$ есть полная частная производная от функции $X^{(k)}$ по σ , определяемая формулой

$$\frac{\partial X^{(k)}}{\partial \sigma} = \frac{\partial X^{(k)}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \sigma} + \dots + \frac{\partial X^{(k)}}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \sigma} + \dots$$

Полагая теперь в уравнениях типа (7.89) $\sigma = 0$ и имея в виду, что $\left(\frac{\partial x}{\partial \sigma} \right)_{\sigma=0} = x^{(1)}$, ..., мы получим для определения первого приближения уравнения вида

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x^{(1)}}{dt^2} + p_{11} x^{(1)} + p_{12} y^{(1)} + p_{13} z^{(1)} &= X_1, \\ \frac{d^2 y^{(1)}}{dt^2} + p_{21} x^{(1)} + p_{22} y^{(1)} + p_{23} z^{(1)} &= Y_1, \\ \frac{d^2 z^{(1)}}{dt^2} + p_{31} x^{(1)} + p_{32} y^{(1)} + p_{33} z^{(1)} &= Z_1, \end{aligned} \right\} \quad (7.90)$$

где коэффициенты p_{ij} суть известные функции времени, определяемые формулами

$$\left. \begin{aligned} p_{11} &= \frac{\mu}{r^{(0)3}} - \frac{3\mu x^{(0)2}}{r^{(0)5}}, & p_{12} &= -\frac{3\mu x^{(0)} y^{(0)}}{r^{(0)5}}, & p_{13} &= -\frac{3\mu x^{(0)} z^{(0)}}{r^{(0)5}}, \\ p_{21} &= -\frac{3\mu y^{(0)} x^{(0)}}{r^{(0)5}}, & p_{22} &= \frac{\mu}{r^{(0)3}} - \frac{3\mu y^{(0)2}}{r^{(0)5}}, & p_{23} &= -\frac{3\mu y^{(0)} z^{(0)}}{r^{(0)5}}, \\ p_{31} &= -\frac{3\mu z^{(0)} x^{(0)}}{r^{(0)5}}, & p_{32} &= -\frac{3\mu z^{(0)} y^{(0)}}{r^{(0)5}}, & p_{33} &= \frac{\mu}{r^{(0)3}} - \frac{3\mu z^{(0)2}}{r^{(0)5}}, \end{aligned} \right\} \quad (7.91)$$

и где $X_1 = X^{(1)}(t; x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}, \dot{x}^{(0)}, \dot{y}^{(0)}, \dot{z}^{(0)}), \dots$ суть также уже известные функции времени, так как общее решение уравнений нулевого приближения нам известно.

Дифференцируя теперь уравнения вида (7.89) по параметру σ второй, третий, четвертый раз и вообще $(k-1)$ -й раз и полагая после каждого дифференцирования $\sigma = 0$, мы получим, имея в виду, что

$$x^{(s)} = \frac{1}{s!} \left(\frac{\partial^s x}{\partial \sigma^s} \right)_{\sigma=0}, \quad \dot{x}^{(s)} = \frac{1}{s!} \left(\frac{\partial^s \dot{x}}{\partial \sigma^s} \right)_{\sigma=0}, \quad \dots \quad (s = 2, 3, \dots),$$

следующие уравнения, определяющие функции $x^{(k)}, y^{(k)}, z^{(k)}$ или k -е приближение,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x^{(k)}}{dt^2} + p_{11} x^{(k)} + p_{12} y^{(k)} + p_{13} z^{(k)} &= X_k, \\ \frac{d^2 y^{(k)}}{dt^2} + p_{21} x^{(k)} + p_{22} y^{(k)} + p_{23} z^{(k)} &= Y_k, \\ \frac{d^2 z^{(k)}}{dt^2} + p_{31} x^{(k)} + p_{32} y^{(k)} + p_{33} z^{(k)} &= Z_k. \end{aligned} \right\} \quad (7.90')$$

Коэффициенты p_{ij} уравнений (7.90') те же самые, что и в уравнениях (7.90), а правые части X_k, Y_k, Z_k суть некоторые многочлены относительно величин $x^{(1)}, \dot{x}^{(1)}, y^{(1)}, \dot{y}^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}, \dot{x}^{(k-1)}, \dots$, коэффициенты которых суть функции времени и величин $x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}, \dot{x}^{(0)}, \dot{y}^{(0)}, \dot{z}^{(0)}$. Поэтому, если первое, второе, $\dots, (k-1)$ -е приближения уже определены, то правые части уравнений (7.90') будут известными функциями времени.

Таким образом, нахождение каждого приближения приводится к интегрированию системы трех линейных неоднородных уравнений второго порядка, коэффициенты которых и правые части суть известные функции времени.

2. Теорема Пуанкаре об интегрировании уравнений в вариациях. Определение возмущений координат. Для интегрирования системы линейных уравнений вида (7.90'), где $k = 1, 2, \dots$, нужно прежде всего, как хорошо известно, найти фундаментальную систему решений соответствующих однородных уравнений, которые получаются из системы (7.90') заменой всех правых частей нулями.

Вообще нет никакого общего способа для интегрирования системы линейных уравнений с переменными коэффициентами, но в нашем случае это интегрирование может быть полностью выполнено при помощи одной замечательной теоремы, принадлежащей Пуанкаре *). Мы не будем здесь доказывать теорему Пуанкаре в ее общем виде и покажем только ее справедливость для данного случая.

Пусть решение уравнений невозмущенного движения (7.88) определяется следующими формулами:

$$x^{(0)} = f(t|C_s), \quad y^{(0)} = \varphi(t|C_s), \quad z^{(0)} = \psi(t|C_s), \quad (7.92)$$

где $C_s (s = 1, 2, \dots, 6)$ — произвольные постоянные, за которые можно принять либо начальные значения неизвестных функций, либо какие-нибудь элементы кеплеровского движения, либо, вообще, какие-либо произвольно задаваемые постоянные. Тогда теорема Пуанкаре утверждает, что функции, определяемые равенствами

$$x_s = \frac{\partial f}{\partial C_s}, \quad y_s = \frac{\partial \varphi}{\partial C_s}, \quad z_s = \frac{\partial \psi}{\partial C_s}, \quad (7.92')$$

удовлетворяют системе линейных однородных уравнений, получаемых отбрасыванием правых частей в системе (7.90').

Сказанное легко доказать. Действительно, функции (7.92) представляют решение уравнений (7.88), а потому, подставив в эти уравнения выражения (7.92), мы получим тождества, каковы бы ни были значения произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_6$.

*) См., например, Гурса Э., Курс математического анализа, т. 2, перев. с франц., ГТТИ, 1934.

Продифференцируем теперь полученные тождества по какой-либо из величин C_s , в результате чего получим, очевидно, опять тождества. Дифференцирование дает, как легко проверить, следующие тождества:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial f}{\partial C_s} \right) + p_{11} \frac{\partial f}{\partial C_s} + p_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial C_s} + p_{13} \frac{\partial \psi}{\partial C_s} &\equiv 0, \\ \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial C_s} \right) + p_{21} \frac{\partial f}{\partial C_s} + p_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial C_s} + p_{23} \frac{\partial \psi}{\partial C_s} &\equiv 0, \\ \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial C_s} \right) + p_{31} \frac{\partial f}{\partial C_s} + p_{32} \frac{\partial \varphi}{\partial C_s} + p_{33} \frac{\partial \psi}{\partial C_s} &\equiv 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.92'')$$

где коэффициенты p_{ij} определяются опять формулами (7.91).

Полученные тождества и доказывают теорему Пуанкаре для нашего случая.

Теперь заметим, что так как формулы (7.92) содержат шесть произвольных постоянных, то формулы (7.92') дадут такое же количество частных решений линейных однородных уравнений, получаемых из системы (7.90'). Можно убедиться путем вычисления соответствующего определителя Вронского, что эти шесть частных решений линейно независимы и образуют, следовательно, фундаментальную систему решений упомянутых линейных уравнений.

Таким образом, общее решение линейных однородных уравнений может быть написано следующим образом:

$$x^{(k)} = \sum_{s=1}^6 C_s^{(k)} x_s, \quad y^{(k)} = \sum_{s=1}^6 C_s^{(k)} y_s, \quad z^{(k)} = \sum_{s=1}^6 C_s^{(k)} z_s, \quad (7.93)$$

где $C_s^{(k)}$ обозначают произвольные постоянные интегрирования.

Чтобы получить теперь общее решение неоднородной системы (7.90'), нужно применить метод вариации постоянных, требуя, чтобы для неоднородной системы функции $x^{(k)}$, $y^{(k)}$, $z^{(k)}$ и их первые производные по t определялись такими же формулами, как и для однородной системы.

Первое условие приводит нас снова к формулам (7.93), где величины $C_s^{(k)}$ рассматриваются уже как некоторые функции времени. Второе условие дает следующие три соотношения:

$$\sum_{s=1}^6 \dot{C}_s^{(k)} x_s = 0, \quad \sum_{s=1}^6 \dot{C}_s^{(k)} y_s = 0, \quad \sum_{s=1}^6 \dot{C}_s^{(k)} z_s = 0. \quad (7.93')$$

Требуя, чтобы уравнения (7.90') удовлетворялись формулами (7.93) и имея в виду соотношения (7.93'), мы получим в силу тождеств (7.92'') еще три соотношения:

$$\sum_{s=1}^6 \dot{C}_s^{(k)} \dot{x}_s = X_k, \quad \sum_{s=1}^6 \dot{C}_s^{(k)} \dot{y}_s = Y_k, \quad \sum_{s=1}^6 \dot{C}_s^{(k)} \dot{z}_s = Z_k. \quad (7.93'')$$

Соотношения (7.93) и (7.93'') составляют систему шести уравнений относительно производных $\dot{C}_s^{(k)}$, главный определитель которых есть определитель Вронского фундаментальной системы решений, определяемых формулами (7.92'), который, как замечено выше, отличен от нуля.

Пусть этот определитель составлен так, что первые три строки его состоят последовательно из функций x_s, y_s, z_s , а последние три строки из производных $\dot{x}_s, \dot{y}_s, \dot{z}_s$, и обозначим его величину через D .

Обозначим далее через D_{4s}, D_{5s}, D_{6s} алгебраические дополнения элементов четвертой, пятой и шестой строк определителя D . Тогда, решая уравнения (7.93') и (7.93'') относительно $\dot{C}_s^{(k)}$, мы найдем

$$\dot{C}_s^{(k)} = \frac{D_{4s}}{D} X_k + \frac{D_{5s}}{D} Y_k + \frac{D_{6s}}{D} Z_k, \quad (7.94)$$

где правые части будут известными функциями времени.

Интегрируя равенства (7.94), мы получим все величины $C_s^{(k)}$ как известные функции времени, после чего по формулам (7.93) найдем функции $x^{(k)}, y^{(k)}, z^{(k)}$, удовлетворяющие неоднородной системе (7.90').

При интегрировании равенств (7.94) появятся (и притом для каждого значения k !) шесть произвольных постоянных, а поэтому полученные формулы будут содержать бесчисленное множество произвольных постоянных.

После подстановки функций (7.93) в ряды (7.87) мы получим общее решение уравнений (7.86), которое будет содержать, как нетрудно убедиться, всего двенадцать произвольных постоянных, из которых шесть постоянных суть величины C_s , входящие в формулы нулевого приближения, а шесть других являются комбинациями произвольных постоянных, получающихся при интегрировании равенств (7.94).

Так как общее решение уравнений (7.86) должно содержать только шесть произвольных постоянных, то другие

шесть являются лишними и их можно выбирать произвольно.

Этот произвольный выбор шести постоянных (из двенадцати) можно осуществлять бесчисленным множеством способов, лишь бы ряды (7.87) оставались сходящимися.

В частности, можно потребовать, чтобы все функции (7.93) и их первые производные по времени обращались в нуль при $t = t_0$. Тогда все произвольные постоянные, возникающие при интегрировании равенств (7.94), будут равны нулю, и мы получим следующие формулы:

$$C_s^{(k)} = \int_{t_0}^t \left[\frac{D_{4s}}{D} X_k + \frac{D_{5s}}{D} Y_k + \frac{D_{6s}}{D} Z_k \right] dt. \quad (7.94')$$

Подставляя эти выражения для $C_s^{(k)}$ в формулы (7.93), мы будем иметь следующие общие формулы для вычисления последовательных приближений, т. е. для определения коэффициентов рядов (7.87):

$$\left. \begin{aligned} x^{(k)} &= \sum_{s=1}^6 x_s \int_{t_0}^t \left[\frac{D_{4s}}{D} X_k + \frac{D_{5s}}{D} Y_k + \frac{D_{6s}}{D} Z_k \right] dt, \\ y^{(k)} &= \sum_{s=1}^6 y_s \int_{t_0}^t \left[\frac{D_{4s}}{D} X_k + \frac{D_{5s}}{D} Y_k + \frac{D_{6s}}{D} Z_k \right] dt, \\ z^{(k)} &= \sum_{s=1}^6 z_s \int_{t_0}^t \left[\frac{D_{4s}}{D} X_k + \frac{D_{5s}}{D} Y_k + \frac{D_{6s}}{D} Z_k \right] dt. \end{aligned} \right\} \quad (7.95)$$

Можно доказать, что при достаточно общих предположениях относительно величин $X^{(k)}$, $Y^{(k)}$, $Z^{(k)}$, ряды (7.87), коэффициенты которых определяются формулами (7.95), будут абсолютно и равномерно сходящимися для всякого значения t в промежутке $(t_0 - \bar{t}, t_0 + \bar{t})$, где $\bar{t}$ не превосходит наименьшего из двух чисел $\bar{t}_1$ и $\bar{t}_2$ и притом зависит от σ . Этого доказательства, вытекающего из более общей теоремы А. М. Ляпунова, мы приводить не будем *).

*) Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, 1950, а также Дубошин Г. Н., Об интегрировании уравнений с малыми параметрами по способу А. М. Ляпунова, Вестник МГУ, № 12, 1951.

Фактические вычисления последовательных приближений по формулам (7.95), конечно, довольно громоздки, но все же могут быть выполнены по крайней мере для первого приближения, которым во многих случаях можно и ограничиться.

Исходными формулами при этих вычислениях являются формулы (7.92), получаемые дифференцированием формул невозмущенного движения по произвольным постоянным C_s .

Если за произвольные постоянные невозмущенного движения C_s взять кеплеровские элементы оскулирующей орбиты (7.79), то для производных (7.92') мы имеем уже готовые формулы, полученные и выписанные в конце главы пятой (этими формулами мы уже пользовались в предыдущем параграфе для вычисления скобок Лагранжа).

Мы не будем приводить развернутых формул для вычисления последовательных приближений, так как нашей целью было только разъяснить существо изложенного метода.

К тому же изложенный метод редко применяется непосредственно, так как обычно предпочитают пользоваться более простым (с точки зрения выкладок) методом Хилла, развитым знаменитым ученым для вычисления возмущений координат планет солнечной системы *).

Отметим только еще, что формулы (7.87) могут быть написаны в виде

$$x = x^{(0)} + \delta x, \quad y = y^{(0)} + \delta y, \quad z = z^{(0)} + \delta z, \quad (7.96)$$

где, как уже было выяснено, $x^{(0)}$, $y^{(0)}$, $z^{(0)}$ представляют собой невозмущенные значения координат, определяемые общими формулами кеплеровского движения.

Величины

$$\delta x = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k x^{(k)}, \quad \delta y = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k y^{(k)}, \quad \delta z = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k z^{(k)} \quad (7.96')$$

представляют собой *полные возмущения координат*, вызываемые действием возмущающей силы.

Величины

$$\delta^{(k)} x = \sigma^k x^{(k)}, \quad \delta^{(k)} y = \sigma^k y^{(k)}, \quad \delta^{(k)} z = \sigma^k z^{(k)},$$

*) См., например, Субботин М. Ф., Курс небесной механики, т. 2, ОНТИ, 1937, или сочинения Хилла, упоминаемые в «Приложении» к этой книге.

называют *возмущениями k -го порядка* прямоугольных координат относительно параметра σ .

Можно еще заметить, что возможны случаи, когда полная возмущающая сила содержит не один малый параметр σ , а два или несколько. Рассмотренный способ без всякого труда может быть распространен на этот более общий случай *), примером которого может служить движение искусственного спутника Земли в ее атмосфере. Здесь нужно рассматривать, по крайней мере, две возмущающие силы — возмущающую силу, обусловленную отливом формы Земли от сферы, и возмущающую силу, вызванную сопротивлением атмосферы Земли. Нетрудно ввести два параметра для каждой из этих возмущающих сил и вывести формулы для возмущений координат подобно тому, как это сделано для случая одного параметра.

3. Применение метода малого параметра к уравнениям Ньютона. Рассмотрим теперь дифференциальные уравнения возмущенного движения в виде (7.42) или (7.84), определяющие кеплеровские элементы оскулирующей орбиты движущейся точки.

Обозначим для краткости элементы орбиты одной буквой ε_s ($s = 1, 2, \dots, 6$), так что система дифференциальных уравнений для оскулирующих элементов запишется в сжатом виде следующим образом:

$$\frac{d\varepsilon_s}{dt} = F_s(t|\varepsilon_j), \quad (7.97)$$

где правые части суть известные функции времени и всех элементов ε_j . Предположим сначала, что составляющие возмущающего ускорения определяются формулами типа (7.85), т. е. разложимы в ряды, расположенные по целым возрастающим степеням параметра σ . Тогда, очевидно, и величины $\tilde{S}$, $\tilde{T}$, $\tilde{W}$ в силу (7.24) и (7.25) также могут быть представлены в виде рядов, расположенных по степеням σ , а следовательно, и все правые части уравнений (7.42) являются функциями, обладающими тем же свойством.

Поэтому мы можем положить

$$F_s(t|\varepsilon_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k F_s^{(k)}(t|\varepsilon_j), \quad (7.97')$$

*) См. нашу статью, указанную в сноске на стр. 421.

где все коэффициенты суть известные функции времени и элементов $\mathcal{E}_j$. Ряды (7.97'), так же, как и ряды (7.85), будут абсолютно сходящимися в некотором промежутке изменения t и в некоторой области изменения величин $\mathcal{E}_j$, содержащей в себе начальную точку $\mathcal{E}_j^{(0)}$ (начальные значения оскулирующих элементов для $t = t_0$).

Решение системы (7.97) будем также искать в виде рядов, расположенных по возрастающим степеням параметра σ , т. е. положим

$$\mathcal{E}_s = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma^k \mathcal{E}_s^{(k)} = \mathcal{E}_s^{(0)} + \sigma \mathcal{E}_s^{(1)} + \sigma^2 \mathcal{E}_s^{(2)} + \dots \quad (7.98)$$

Легко видеть, что все коэффициенты этих рядов определяются последовательно (в порядке возрастания k) квадратурами и притом гораздо более простыми, чем квадратуры (7.95).

Прежде всего очевидно, что все $\mathcal{E}_s^{(0)}$ суть постоянные, за которые можно принять начальные значения кеплеровских элементов. Далее, дифференцируя уравнения (7.97) по σ , предполагая, что $\mathcal{E}_s$ суть функции σ , определяемые формулами (7.98), и полагая $\sigma = 0$, мы получим уравнения первого приближения

$$\frac{d\mathcal{E}_s^{(1)}}{dt} = F_s^{(1)}(t | \mathcal{E}_s^{(0)}), \quad (7.99)$$

правые части которых суть, очевидно, известные функции времени.

Будем считать для простоты, что в начальный момент t_0 все величины $\mathcal{E}_s^{(1)}$ обращаются в нуль. Тогда из (7.99) имеем

$$\mathcal{E}_s^{(1)} = \int_{t_0}^t F_s^{(1)}(t | \mathcal{E}_s^{(0)}) dt. \quad (7.99')$$

Поэтому в первом приближении выражения для неизвестных функции (оскулирующих элементов) имеют вид

$$\mathcal{E}_s \cong \tilde{\mathcal{E}}_s^{(1)} = \mathcal{E}_s^{(0)} + \mathcal{O}^{(1)} \mathcal{E}_s. \quad (7.99'')$$

Величины

$$\mathcal{O}^{(1)} \mathcal{E}_s = \sigma \mathcal{E}_s^{(1)}$$

называются *возмущениями первого порядка* оскулирующих кеплеровских элементов ϑ_s относительно параметра σ .

Дифференцируя уравнения (7.97) по параметру σ два раза подряд и полагая после дифференцирования опять $\sigma = 0$, мы получим уравнения для второго приближения, которые, как нетрудно видеть, имеют следующий вид:

$$\frac{d\vartheta_s^{(2)}}{dt} = F_s^{(2)}(t|\vartheta_j^{(0)}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \vartheta_i^{(1)} \left[\frac{\partial F_s^{(1)}}{\partial \vartheta_i} \right]_{\sigma=0}. \quad (7.100)$$

Так как величины $\vartheta_i^{(1)}$ уже определены и даются формулами (7.99'), то, считая опять, что в начальный момент все $\vartheta_s^{(2)}$ равны нулю, найдем из уравнений (7.100)

$$\vartheta_s^{(2)} = \int_{t_0}^t \left\{ F_s^{(2)}(t|\vartheta_j^{(0)}) + \sum_{i=1}^6 \vartheta_i^{(1)} \left[\frac{\partial F_s^{(1)}}{\partial \vartheta_i} \right]_{\sigma=0} \right\} dt. \quad (7.100')$$

Поэтому во втором приближении

$$\vartheta_s \cong \tilde{\vartheta}_s^{(2)} = \vartheta_s^{(0)} + \delta^{(1)}\vartheta_s + \delta^{(2)}\vartheta_s. \quad (7.100'')$$

Величины

$$\delta^{(2)}\vartheta_s = \sigma^2 \vartheta_s^{(2)}$$

называются *возмущениями второго порядка* относительно параметра σ .

Подобным же образом можно определить третье, четвертое, и сколько угодно последующих приближений. Легко убедиться, что уравнения какого-либо k -го приближения вообще будут иметь следующую форму:

$$\frac{d\vartheta_s^{(k)}}{dt} = \Phi_s^{(k)}(t|\vartheta_j^{(0)}|\vartheta_j^{(1)}|\dots|\vartheta_j^{(k-1)}). \quad (7.101)$$

Правые части этих уравнений будут многочленами относительно величин $\vartheta_j^{(1)}, \vartheta_j^{(2)}, \dots, \vartheta_j^{(k-1)}$, коэффициенты которых суть известные функции времени.

Поэтому, если предыдущие $k-1$ приближений уже найдены, то правые части уравнений (7.101) являются известными функциями времени, и мы получим, считая опять, что

в начальный момент все величины $\vartheta_s^{(k)}$ суть нули,

$$\vartheta_s^{(k)} = \int_{t_0}^t \Phi_s^{(k)}(t | \vartheta_j^{(0)} | \dots | \vartheta_j^{(k-1)}) dt. \quad (7.101')$$

Таким образом, мы определим k -е приближение формулами

$$\tilde{\vartheta}_s^{(k)} = \vartheta_s^{(0)} + \delta^{(1)} \vartheta_s + \dots + \delta^{(k)} \vartheta_s \quad (7.101'')$$

и величины

$$\delta^{(k)} \vartheta_s = \sigma^k \vartheta_s^{(k)}$$

назовем *возмущениями k -го порядка* относительно σ .

К полученным рядам опять можно будет применить уже упомянутую общую теорему А. М. Ляпунова, вследствие которой ряды (7.98) заведомо будут абсолютно и равномерно сходящимися в некотором промежутке $(t_0 - \bar{t}, t_0 + \bar{t})$, где $\bar{t}$ зависит от $\bar{\sigma}$, вообще увеличиваясь при уменьшении $\bar{\sigma}$.

Но обыкновенно на практике пользуются почти всегда одним только первым приближением, иногда вторым и очень редко третьим, дальше которого никогда не идут.

Это объясняется не только громоздкостью выкладок, сложность которых быстро растет по мере увеличения числа приближений, но также и тем, что в большинстве конкретных случаев уже одно первое приближение дает результаты, достаточно близкие к действительности.

4. Метод последовательных приближений Пикара. Если уравнения (7.97) не содержат никакого малого параметра, то последний всегда можно ввести искусственно.

Но можно также применить для интегрирования уравнений (7.97) метод последовательных приближений Пикара, к рассмотрению которого и переходим *).

Процедура применения метода Пикара может быть вписана следующим образом: заменим в правых частях уравнений (7.97) все неизвестные функции ϑ_s их начальными значениями $\vartheta_s^{(0)}$.

*) См., например, Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, изд. 6-е, Гостехиздат, 1953, Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 3, изд. 5-е, Гостехиздат 1951 (1953).

Тогда уравнения (7.97) превратятся в уравнения первого приближения, которые напомним следующим образом:

$$\frac{d\bar{\vartheta}_s^{(1)}}{dt} = F_s(t|\vartheta_j^{(0)}). \quad (7.102).$$

Так как правые части этих равенств суть известные функции времени, то простое интегрирование дает следующие формулы для вычисления первого приближения:

$$\bar{\vartheta}_s^{(1)} = \vartheta_s^{(0)} + \int_{t_0}^t F_s(t|\vartheta_j^{(0)}) dt. \quad (7.102')$$

Подставляя теперь в правые части уравнений (7.97) вместо ϑ_s их значения $\bar{\vartheta}_s^{(1)}$, полученные в первом приближении, мы будем иметь уравнения второго приближения

$$\frac{d\bar{\vartheta}_s^{(2)}}{dt} = F_s(t|\bar{\vartheta}_j^{(1)}), \quad (7.103)$$

правые части которых опять являются известными функциями времени.

Поэтому, интегрируя эти равенства, мы найдем второе приближение в виде

$$\bar{\vartheta}_s^{(2)} = \vartheta_s^{(0)} + \int_{t_0}^t F_s(t|\bar{\vartheta}_j^{(1)}) dt. \quad (7.103')$$

Таким же образом поступаем и далее. Вообще, зная значения неизвестных функций ϑ_s в $(k-1)$ -м приближении, мы определим k -е приближение по формулам такого же типа, как (7.102') и (7.103'):

$$\bar{\vartheta}_s^{(k)} = \vartheta_s^{(0)} + \int_{t_0}^t F_s(t|\bar{\vartheta}_j^{(k-1)}) dt. \quad (7.104)$$

На практике опять-таки обыкновенно ограничиваются получением только первого приближения (изредка рассматривается также второе), но с принципиальной стороны возможно получить сколько угодно приближений.

На основании теоремы Пикара *) мы можем утверждать, что при достаточно общих предположениях относительно функций $F_s(t|\vartheta_j)$ процесс последовательных приближений, определяемый рекуррентным соотношением (7.104), будет сходящимся при $k \rightarrow \infty$ и предельные функции

$$\vartheta_s = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\vartheta}_s^{(k)},$$

обращаясь при $t = t_0$ в $\vartheta_s^{(0)}$, будут удовлетворять уравнениям (7.97), каковы бы ни были числовые значения величин $\vartheta_s^{(0)}$, играющих роль произвольных постоянных.

Таким образом, метод Пикара даст нам общее решение уравнений возмущенного движения вида (7.97).

Способ Пикара может быть, конечно, применен и в том случае, когда правые части уравнений (7.97) содержат малый параметр, например, когда функции $F_s(t|\vartheta_j)$ определяются рядами вида (7.97').

Но полезно заметить, что приближения одного и того же номера k , полученные двумя рассмотренными способами в одной и той же задаче, вовсе не совпадают, что ясно уже при рассмотрении первого приближения. Действительно, по способу малого параметра первое приближение определится формулами

$$\tilde{\vartheta}_s^{(1)} = \vartheta_s^{(0)} + \sigma \int_{t_0}^t F_s^{(1)}(t|\vartheta_j^{(0)}) dt,$$

правые части которых суть линейные функции параметра σ , а по способу Пикара первое приближение нужно вычислять по формулам

$$\bar{\vartheta}_s^{(1)} = \vartheta_s^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k \int_{t_0}^t F_s^{(k)}(t|\vartheta_j^{(0)}) dt,$$

правые части которых суть бесконечные ряды, расположенные по степеням параметра σ .

Рассмотрим частный случай, когда правые части уравнений (7.97) содержат параметр σ только множителем, т. е.

*) См. Гурса Э., Курс математического анализа, т. 2, перев. с франц., ГТТИ, 1933.

когда в формулах (7.97') все $F_s^{(k)}$ для $k > 1$ равны нулю, так что мы имеем

$$F_s(t | \vartheta_j) = \sigma F_s^*(t | \vartheta_j). \quad (7.105)$$

Тогда по способу малого параметра первое приближение определится формулами ($F_s^{(1)} \equiv F_s^*$)

$$\tilde{\vartheta}_s^{(1)} = \vartheta_s^{(0)} + \sigma \int_{t_0}^t F_s^*(t | \vartheta_j^{(0)}) dt, \quad (7.105')$$

а по способу Пикара мы получим

$$\bar{\vartheta}_s^{(1)} = \vartheta_s^{(0)} + \sigma \int_{t_0}^t F_s^*(t | \vartheta_j^{(0)}). \quad (7.105'')$$

Ясно, что

$$\tilde{\vartheta}_s^{(1)} \equiv \bar{\vartheta}_s^{(1)},$$

так что для первого приближения оба способа дают одинаковые результаты.

Для второго приближения в случае (7.105) имеем из (7.100'') следующие формулы:

$$\tilde{\vartheta}_s^{(2)} = \vartheta_s^{(0)} + \sigma \int_{t_0}^t F_s^*(t | \vartheta_j^{(0)}) dt + \sigma^2 \sum_{i=1}^6 \int_{t_0}^t \vartheta_i^{(1)} \left[\frac{\partial F_s^*}{\partial \vartheta_s} \right]_{\sigma=0} dt, \quad (7.106)$$

а по способу Пикара имеем по формулам (7.103')

$$\bar{\vartheta}_s^{(2)} = \vartheta_s^{(0)} + \sigma \int_{t_0}^t F_s^*(t | \vartheta_j^{(0)} + \sigma \vartheta_j^{(1)}) dt, \quad (7.106')$$

откуда ясно, что уже для второго приближения два способа дают разные результаты.

Если правые части равенств (7.106') разложить в ряды по степеням σ , то мы получим

$$\bar{\vartheta}_s^{(2)} = \vartheta_s^{(0)} + \sigma \int_{t_0}^t F_s^*(t | \vartheta_s^{(0)}) dt + \sigma^2 \sum_{i=1}^6 \int_{t_0}^t \vartheta_i^{(1)} \left[\frac{\partial F_s^*}{\partial \vartheta_s} \right]_{\sigma=0} dt + \dots \quad (7.106'')$$

Таким образом, если мы ограничимся членами первого и второго порядка относительно σ , то опять получим обоими способами одинаковые результаты.

Но вообще нужно иметь в виду, что термин « k -е приближение» в способе малого параметра и в способе Пикара имеет разный смысл, а поэтому и неудивительно, что для приближения одного и того же номера разными способами получаются разные результаты.

Заметим еще, что способ Пикара, конечно, является более общим, чем способ малого параметра, и может быть применен, например, и в том случае, когда возмущающая сила зависит от малого параметра не аналитическим путем, когда первый способ непосредственно не применим.

Кроме того, оба способа применимы, разумеется, и в том случае, когда независимой переменной является не t , а какая-нибудь другая величина, например v .

5. Возмущения элементов движения эллиптического типа. В заключение этого параграфа рассмотрим в общих чертах, какова аналитическая структура функций ε_s в случае (наиболее часто встречающемся), когда возмущенное движение принадлежит к эллиптическому типу, т. е. когда мы имеем постоянно (или, по крайней мере в течение некоторого промежутка времени) неравенство

$$V^2 - \frac{2\mu}{r} < 0.$$

Тогда за величины ε_s удобнее всего взять оскулирующие элементы эллиптической орбиты $\Omega, i, a, e, \pi, \epsilon$, определяемые дифференциальными уравнениями (7.64) или (7.72).

Предположим, что возмущающая сила не зависит явно от времени t и содержит простейшим образом (т. е. в виде множителя) некоторый малый параметр σ .

Тогда составляющие возмущающего ускорения будут функциями только от координат и составляющих скорости движущейся точки, имея множителем малый параметр σ .

Но координаты и составляющие скорости невозмущенного эллиптического движения разложимы, как показано в главе шестой, в ряды Фурье, расположенные по синусам и косинусам кратных средней аномалии M .

Следовательно, и составляющие возмущающего ускорения и возмущающая функция (если последняя существует) также будут разложимы в ряды Фурье с аргументом M .

Поэтому таким же характером будут обладать и функции $F_s^*(t|\vartheta_j)$, и уравнения (7.97) могут быть написаны для рассматриваемого случая в следующем общем виде:

$$\frac{d\vartheta_s}{dt} = \sigma \left\{ A_s^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} [A_s^{(k)} \cos kM + B_s^{(k)} \sin kM] \right\}, \quad (7.107)$$

где величины $A_s^{(0)}$, $A_s^{(k)}$, $B_s^{(k)}$ суть некоторые известные функции (характер которых здесь уточнять не будем) от Ω , i , a , e и π , но не зависят от средней долготы эпохи ϵ , которая входит в правые части уравнений (7.105) только через посредство средней аномалии M .

Рассмотрим получение первого приближения, которое, как замечено выше, в данном случае определяется одними и теми же формулами независимо от применяемого метода.

Итак, заменим в правых частях уравнений (7.107) все элементы их постоянными начальными значениями, вследствие чего все коэффициенты в уравнениях (7.107) сделаются постоянными, которые обозначим через $A_{s0}^{(0)}$, $A_{s0}^{(k)}$, $B_{s0}^{(k)}$; тогда уравнения первого приближения напишутся следующим образом:

$$\frac{d\bar{\vartheta}_s^{(1)}}{dt} = \sigma \left\{ A_{s0}^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} [A_{s0}^{(k)} \cos kM + B_{s0}^{(k)} \sin kM] \right\}, \quad (7.107')$$

где $M = n_0(t - t_0) + \epsilon_0 - \pi_0$.

Интегрируя эти равенства, мы получим, очевидно,

$$\begin{aligned} \bar{\vartheta}_s^{(1)} = \vartheta_s^{(0)} + \delta^{(1)}\vartheta_s = \vartheta_s^{(0)} + \sigma \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{A_{s0}^{(k)}}{kn_0} \sin k(\epsilon_0 - \pi_0) + \right. \\ \left. + \frac{B_{s0}^{(k)}}{kn_0} \cos k(\epsilon_0 - \pi_0) \right] + \sigma A_{s0}^{(0)} \cdot (t - t_0) + \\ + \sigma \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{A_{s0}^{(k)}}{kn_0} \sin kM - \frac{B_{s0}^{(k)}}{kn_0} \cos kM \right]. \quad (7.107'') \end{aligned}$$

Формула (7.107'') показывает, что возмущение первого порядка элемента $-\delta^{(1)}\vartheta_s$ состоит из трех аналитически различных частей.

Первая из этих частей есть величина постоянная, зависящая от начальных значений элементов, и ее можно назвать *постоянной частью возмущения первого порядка*; вторая часть, состоящая из единственного члена $\sigma A_{sv}^{(0)}(t - t_0)$, монотонно возрастает по числовой величине вместе с временем и ее называют *вековой частью возмущения первого порядка* или, короче, *вековым неравенством*; наконец, третья часть, состоящая из бесчисленного множества тригонометрических членов, является периодической функцией от M , а следовательно, и периодической функцией времени, и называется *периодической частью возмущения первого порядка*, или *периодическим возмущением*.

Периодическое возмущение первого порядка состоит, как уже сказано, из бесчисленного множества членов, каждый из которых называется *периодическим неравенством*.

Каждое периодическое неравенство является периодической функцией времени с периодом $2\pi/n_0$ или, если говорить только о наименьшем периоде — с периодом $2\pi/kn_0$.

Иногда называют также каждый член формулы (7.107") *возмущением первого порядка*, и в таком случае говорят, что полное возмущение первого порядка состоит из векового возмущения и из бесчисленного множества периодических возмущений.

Совершенно такая же терминология употребляется и при рассмотрении возмущений первого порядка прямоугольных или полярных координат.

Если мы рассмотрим теперь возмущения второго порядка относительно параметра σ , то легко убедимся, что такое возмущение, кроме вековых и периодических членов такого же характера, как и в первом приближении, будет содержать еще члены вида $(A, B — \text{постоянные})$

$$\sigma^2 A \cdot (t - t_0), \quad \sigma^2 (t - t_0) \left\{ \begin{matrix} A \cos \\ B \sin \end{matrix} (kM) \right\}.$$

Члены первого рода называются *вековыми неравенствами второго порядка и второй степени*, а члены второго рода называют *смешанными неравенствами второго порядка*.

Вообще, при рассмотрении возмущений более высоких порядков мы будем получать, как нетрудно сообразить, исключительно члены вида

$$\sigma^{k_1} (t - t_0)^{k_2} \left\{ \begin{array}{l} A \cos \\ B \sin \end{array} (kM) \right\},$$

где, как и выше, A и B обозначают какие-то постоянные коэффициенты, а k_1 , k_2 , k — целые числа.

Таким образом мы видим, что каждый элемент в возмущенном движении будет состоять из бесчисленного множества вековых, смешанных и периодических членов или неравенств.

Однако, основываясь на рассмотрении отдельных членов рядов, представляющих оскулирующие элементы в возмущенном движении, нельзя делать каких-либо общих заключений о поведении функций, являющихся суммами этих рядов.

Поэтому и наличие вековых членов вовсе не обязательно влечет за собой неограниченное возрастание элемента со временем; последнее ясно также и из того, что сходимость получаемых рядов обеспечивается, вообще говоря, только для некоторого конечного промежутка времени.

Тем не менее рассмотренная классификация отдельных членов рядов типа (7.98) оказывается полезной на практике, ибо позволяет из множества членов всякого рода отбирать наиболее влиятельные в числовом отношении, с чем неизбежно приходится встречаться в практических приложениях теории возмущенного движения.

Отметим еще некоторую интересную особенность случая, когда существует возмущающая функция R , не зависящая явно от времени t .

Тогда изменения оскулирующих эллиптических элементов определяются уравнениями (7.72), а возмущающая функция R может быть также представлена рядом вида

$$R = \sigma \left\{ A^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} [A^{(k)} \cos kM + B^{(k)} \sin kM] \right\}, \quad (7.108)$$

где коэффициенты также не зависят от средней долготы эпохи ϵ .

Поэтому из (7.108) имеем

$$\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} = \sigma \sum_{k=1}^{\infty} [-kA^{(k)} \sin kM + kB^{(k)} \cos kM], \quad (7.108')$$

т. е. эта производная не содержит члена, не зависящего от средней аномалии. Отсюда следует, что для большой полуоси оскулирующего эллипса мы имеем в первом приближении

$$a = a_0 + \frac{2\sigma}{n_0 a_0} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{A_0^{(k)}}{n_0} \cos kM - \frac{B_0^{(k)}}{n_0} \sin kM \right]. \quad (7.108'')$$

Таким образом, мы приходим к важному заключению.

Возмущение первого порядка большой полуоси эллиптической орбиты не содержит в себе векового неравенства.

ГЛАВА VIII

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

§ 1. Дифференциальные уравнения возмущенного движения в основной задаче небесной механики

1. Уравнения возмущенного движения в относительных координатах. Рассмотрим задачу о движении системы, состоящей из $n+1$ абсолютно твердых тел, элементарные частицы которых взаимно притягиваются по закону Ньютона.

Обозначим, как и ранее, координаты центра инерции тела M_i ($i=1, 2, \dots, n$) в системе координат с началом в центре инерции тела M_0 и с неизменными направлениями осей через x_i, y_i, z_i .

Тогда дифференциальные уравнения относительного поступательного движения тел $M_1, \dots, M_n$ будут иметь вид (3.31), где U_{i0} есть силовая функция взаимного притяжения тел M_i и M_0 , а R_i — собственная для каждого тела M_i функция, определяемая формулой (3.30).

Правые части уравнений (3.31) зависят не только от относительных координат точек G_i (центров инерции тел M_i), но и от эйлеровых углов всех $n+1$ тел, а поэтому уравнения (3.31) надлежит рассматривать, строго говоря, совместно с уравнениями (3.21'') и (3.21'''), определяющими вращательные движения тел системы.

Однако во многих случаях, представляющих интерес для астрономической практики, взаимные расстояния между центрами инерции тел системы оказываются достаточно большими по сравнению с наибольшими линейными размерами этих тел.

Таков, например, случай важнейшей задачи небесной механики — задачи о движении больших планет солнечной

системы, в котором, как известно из общего курса астрономии, даже диаметр самого Солнца есть величина достаточно малая по сравнению с расстояниями больших планет от Солнца и с их взаимными расстояниями.

Поэтому, желая сохранить в дифференциальных уравнениях поступательно-вращательного движения тел члены только первого и второго порядка относительно обратных взаимных расстояний, мы можем*) в уравнениях поступательного движения (3.31) отбросить все члены, содержащие в своих выражениях эйлеровы углы. Эта операция приводится просто к замене полного выражения взаимной силовой функции любых двух тел системы U_{ij} одним первым членом ее разложения (3.13'), вследствие чего уравнения (3.31) приведутся к виду (2.23) или (2.23') и могут быть рассматриваемы как уравнения относительного поступательного движения системы материальных точек, взаимно притягивающихся по закону Ньютона.

Для достижения той же точности в уравнениях вращательного движения тел системы нужно сохранить в разложении взаимной силовой функции любых двух тел (3.13') первые три члена, вследствие чего упомянутые уравнения будут содержать не только эйлеровы углы, но и относительные координаты центров инерции тел системы.

Поэтому с указанной степенью приближения общая задача о поступательно-вращательном движении небесных тел (рассматриваемых как абсолютно твердые тела, что также является некоторым приближением к действительности) может быть разложена на две отдельные задачи. Первая из этих двух задач не зависит от второй и представляет собой задачу только о поступательном движении тел, рассматриваемых как материальные точки**).

Вторая задача — задача о вращательных движениях тел вокруг их центров инерции — зависит от первой, но когда первая

*) Все это подробно рассмотрено в моей статье «О дифференциальных уравнениях поступательно-вращательного движения взаимно притягивающихся твердых тел». Астрон. журн., 35, вып. 2, 1958.

**) Мы можем также рассматривать наши тела как идеальные шары, однородные, или обладающие сферическими распределениями плотностей. Действительно, такие тела притягиваются взаимно строго по закону Ньютона. См. нашу книгу «Теория притяжения», Физматгиз, 1961.

задача решена, то вторая задача сводится к определению эйлеровых углов тел системы и может рассматриваться отдельно.

В этой книге будет рассматриваться только первая задача, так как теория вращательного движения небесных тел настолько сложна и обширна, что должна быть изложена в отдельной книге.

Итак, рассмотрим задачу об относительном движении системы взаимно притягивающихся материальных точек в системе координат с неизменными направлениями осей и с началом в центре инерции тела M_0 , т. е. в материальной точке G_0 .

Дифференциальные уравнения относительного движения мы можем написать в следующем общем виде:

$$\ddot{x}_s = -\frac{\mu_s x_s}{r_s^3} + X_s, \quad \ddot{y}_s = -\frac{\mu_s y_s}{r_s^3} + Y_s, \quad \ddot{z}_s = -\frac{\mu_s z_s}{r_s^3} + Z_s$$

$$(s = 1, 2, \dots, n), \quad (8.1)$$

где μ_s — постоянные, определяемые формулой

$$\mu_s = f(m_0 + m_s),$$

причем m_0 есть масса центрального тела, а m_s — массы движущихся тел — точек; $r_s = \sqrt{x_s^2 + y_s^2 + z_s^2}$ есть радиус-вектор точки G_s (центра инерции тела M_s), а величины X_s , Y_s , Z_s , которые будем называть составляющими возмущающего ускорения для точки G_s , определяются формулами *)

$$\left. \begin{aligned} X_s &= f \sum_{j=1}^n m_j \left(\frac{x_j - x_s}{\Delta_{sj}^3} - \frac{x_j}{r_j^3} \right), \\ Y_s &= f \sum_{j=1}^n m_j \left(\frac{y_j - y_s}{\Delta_{sj}^3} - \frac{y_j}{r_j^3} \right), \\ Z_s &= f \sum_{j=1}^n m_j \left(\frac{z_j - z_s}{\Delta_{sj}^3} - \frac{z_j}{r_j^3} \right), \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

*) См. уравнения (2.23) главы второй. Мы заменили только индекс i на s , так как буква i будет в дальнейшем обозначать наклонность оскулирующей орбиты.

где

$$\Delta_{sj} = \sqrt{(x_s - x_j)^2 + (y_s - y_j)^2 + (z_s - z_j)^2}$$

суть взаимное расстояние между точками G_s и G_j .

Как показано в главе второй, составляющие возмущающего ускорения для точки G_s можно рассматривать как частные производные по координатам этой точки от возмущающей функции R_s , которая определяется формулой

$$R_s = f \sum_{j=1}^n m_j R_{sj}, \quad (8.3)$$

где

$$R_{sj} = \frac{1}{\Delta_{sj}} - \frac{x_s x_j + y_s y_j + z_s z_j}{r_j^3}. \quad (8.3')$$

Таким образом, задача о поступательном движении системы тел — точек приводится к интегрированию системы совместных дифференциальных уравнений (8.1) при заданных начальных условиях, которыми являются начальные значения

$$x_s^{(0)}, y_s^{(0)}, z_s^{(0)}, \dot{x}_s^{(0)}, \dot{y}_s^{(0)}, \dot{z}_s^{(0)} \quad (s = 1, 2, \dots, n) \quad (8.4)$$

относительных координат и составляющих относительных скоростей точек G_s .

В главе второй было показано, что уравнения (8.1) имеют только четыре первых интеграла, а поэтому не могут быть полностью интегрированы.

Следовательно, мы можем только ставить вопрос о приближенном интегрировании системы (8.1), основываясь на малости величин X_s , Y_s , Z_s .

Действительно, эти величины в конкретных задачах астрономии будут малы по сравнению с величинами составляющих основных ускорений

$$X_s^{(0)} = -\frac{\mu_s x_s}{r_s^3}, \quad Y_s^{(0)} = -\frac{\mu_s y_s}{r_s^3}, \quad Z_s^{(0)} = -\frac{\mu_s z_s}{r_s^3},$$

либо вследствие чрезвычайной малости масс m_s по сравнению с центральной массой m_0 (как это имеет место для больших планет солнечной системы), либо вследствие весьма больших расстояний между точками системы, либо и по той и по другой причинам одновременно.

Таким образом, к уравнениям (8.1) вполне можно применить общий метод Лагранжа изменения (или вариации)

произвольных постоянных, который был рассмотрен подробно в предыдущей главе.

2. Метод изменения произвольных постоянных для задачи многих тел. Отбросим в правых частях всех уравнений (8.1) составляющие возмущающих ускорений, которые являются численно малыми в конкретных задачах небесной механики.

Тогда мы получим упрощенную систему уравнений, или уравнения первого приближения, в виде

$$\ddot{x}_s = -\frac{\mu_s x_s}{r_s^3}, \quad \ddot{y}_s = -\frac{\mu_s y_s}{r_s^3}, \quad \ddot{z}_s = -\frac{\mu_s z_s}{r_s^3}, \quad (8.1')$$

которая распадается, очевидно, на n независимых друг от друга систем, каждая из которых содержит только три уравнения, определяющие три координаты x_s, y_s, z_s одной из точек $G_1, \dots, G_n$.

Но для каждого значения s ($s = 1, 2, \dots, n$) система (8.1) представляет собой систему дифференциальных уравнений невозмущенного движения точки G_s , определяющих движение этой точки только под действием силы притяжения центрального тела — точки G_0 так, как будто бы во всем пространстве существовали только две точки G_0 и G_s .

Теория невозмущенного движения подробно разобрана в части второй нашей книги, где выведены все необходимые формулы, дающие общее решение системы, которой совершенно подобна каждая из систем (8.1').

Поэтому мы можем воспользоваться всеми формулами части второй, снабжая только все величины, относящиеся к невозмущенному движению точки G_s значком s .

Поэтому, принимая за шесть произвольных постоянных общего решения каждой из систем (8.1') шесть элементов невозмущенного кеплеровского движения точки G_s , т. е. величины

$$\Omega_s, i_s, \omega_s, p_s, e_s, \tau_s, \quad (8.5)$$

мы получим общее решение полной упрощенной системы (8.1'), например, в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} x_s &= r_s [\cos u_s \cos \Omega_s - \sin u_s \sin \Omega_s \cos i_s], \\ y_s &= r_s [\cos u_s \sin \Omega_s + \sin u_s \cos \Omega_s \cos i_s], \\ z_s &= r_s \sin u_s \sin i_s, \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

($s = 1, 2, \dots, n$),

где

$$u_s = v_s + \omega_s, \quad r_s = \frac{p_s}{1 + e_s \cos v_s}, \quad (8.6')$$

и истинная аномалия v_s точки G_s связана с временем t соотношением

$$\frac{V_{\mu_s}}{p_s^{3/2}} (t - \tau_s) = \int_0^{v_s} \frac{dv'}{(1 + e_s \cos v')^2}. \quad (8.6'')$$

Итак, в первом приближении каждая из точек G_s описывает относительно точки G_0 кеплеровскую орбиту, элементы которой (8.5) однозначно определяются начальными значениями (8.4) и которая есть эллипс или гипербола (в частности, окружность, парабола или прямая) в зависимости от знака величины

$$h_s = V_s^{(0)2} - \frac{2\mu_s}{r_s^{(0)}}, \quad (8.7)$$

т. е. начальной (для $t = t_0$) энергии точки G_s в ее относительном движении вокруг точки G_0 , которая является общим фокусом для всех невозмущенных орбит точек G_s .

Может случиться (как это и есть на самом деле для больших планет солнечной системы), что $h_s < 0$ для всякого значения s из ряда $1, 2, \dots, n$.

Тогда невозмущенная орбита каждой из точек G_s есть эллипс, и за элементы невозмущенного движения удобнее взять вместо (8.5) следующие величины:

$$\Omega_s, i_s, a_s, e_s, \pi_s, \varepsilon_s. \quad (8.5')$$

В этом случае истинная аномалия каждой из точек G_s определится в зависимости от времени следующими формулами:

$$\operatorname{tg} \frac{v_s}{2} = \sqrt{\frac{1+e_s}{1-e_s}} \operatorname{tg} \frac{E_s}{2}, \quad (8.8)$$

$$E_s - e_s \sin E_s = M, \quad (8.8')$$

и

$$M_s = n_s(t - t_0) + \varepsilon_s - \pi_s, \quad (8.8'')$$

где

$$n_s = \frac{V_s}{a_s^{3/2}} \quad (8.8''')$$

есть *среднее движение* точки G_s .

Заметим, что вместо формулы (8.8) можно пользоваться эквивалентной ей формулой

$$M_s = \varepsilon_s - \pi_s + \int_{t_0}^t n_s dt, \quad (8.8^*)$$

которая одинаково справедлива и для возмущенного, и для невозмущенного движений.

Если невозмущенное движение точки G_s происходит по эллиптической орбите, то, как было показано в части второй, координаты и составляющие скорости точки G_s суть периодические функции от средней аномалии M_s этой точки *) с периодом 2π (здесь $\pi = 3,141529\dots$) или периодические функции времени t с периодом

$$T_s = \frac{2\pi}{n_s}. \quad (8.9)$$

В главе шестой было показано, что в этом случае координаты и составляющие скорости (а также любые другие величины эллиптического движения) можно разложить в тригонометрические ряды, расположенные по синусам и косинусам кратных средней аномалии M_s , абсолютно сходящиеся для всякого момента времени, если $e_s < \bar{e} = 0,6627\dots$ и неабсолютно сходящиеся, если $\bar{e} \leq e_s < 1$.

Может, конечно, случиться, что для одних точек системы постоянная h_s положительна, а для других отрицательна, так что среди начальных, или невозмущенных, орбит точек системы могут быть, вообще говоря, и эллипсы и гиперболы. Такие случаи могут встретиться в кратных звездных системах, а также в задаче о полете космического корабля к другим планетам солнечной системы.

*) Координаты и вообще величины невозмущенного эллиптического движения являются также периодическими функциями от истинной аномалии, а также от эксцентрической аномалии и от средней долготы.

3. Уравнения Лагранжа для оскулирующих элементов. Возвратимся теперь к уравнениям возмущенного движения (8.1). По основной идее метода изменения произвольных постоянных мы можем сохранить для общего решения системы (8.1) все формулы (8.6), (8.6') и (8.6''), содержащие *6n* произвольных постоянных (8.5) ($s=1, 2, \dots, n$), рассматривая в этих формулах все величины (8.5) как некоторые неизвестные функции времени.

Иными словами, мы можем сделать преобразование переменных, переходя в уравнениях (8.1) от *6n* переменных $x_s, y_s, z_s, \dot{x}_s, \dot{y}_s, \dot{z}_s$ к такому же количеству новых переменных (8.5), связанных со старыми переменными формулами кеплеровского движения, которые и являются в этом случае формулами преобразования переменных.

Так как формулы преобразования распадаются на *n* групп формул, причем каждая группа связывает старые и новые переменные с одним и тем же значком, то дифференциальные уравнения, определяющие новые переменные, могут быть записаны также в виде *n* групп уравнений, каждая из которых выводится при помощи основной операции совершенно так же, как это было сделано в предыдущей главе для преобразования уравнений возмущенного движения одной-единственной точки.

Точно также, для вывода уравнений, определяющих новые переменные, можно воспользоваться методом скобок Лагранжа, в результате чего мы можем получить соответствующие уравнения Лагранжа для системы взаимно притягивающихся материальных точек.

Вследствие сделанных замечаний дифференциальные уравнения, определяющие новые переменные (8.5), могут быть написаны самым общим образом в виде *n* групп уравнений Ньютона ($s=1, 2, \dots, n$):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Omega_s}{dt} &= \frac{r_s}{p_s} \sin u_s \operatorname{cosec} i_s \cdot \tilde{W}_s, \\ \frac{di_s}{dt} &= \frac{r_s}{p_s} \cos u_s \cdot \tilde{W}_s, \\ \frac{d\omega_s}{dt} &= -\frac{\cos v_s}{e_s} \cdot \tilde{S}_s + \frac{\sin v_s}{e_s} \left(1 + \frac{r_s}{p_s} \right) \tilde{T}_s - \\ &\quad - \frac{r_s}{p_s} \sin u_s \operatorname{ctg} i_s \cdot \tilde{W}_s, \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{de_s}{dt} &= \sin v_s \cdot \tilde{S}_s + \left[\cos v_s + (\cos v_s + e_s) \frac{r_s}{p_s} \right] \cdot \tilde{T}_s, \\
 \frac{dp_s}{dt} &= 2r_s \tilde{T}_s, \\
 \frac{d\tau_s}{dt} &= \frac{p_s}{e_s} \sqrt{\frac{p_s}{\mu_s}} \left[(e_s N_s \sin v_s - \cos v_s) \tilde{S}_s + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{p_s}{r_s} N_s \cdot \tilde{T}_s \right] \frac{r_s^2}{p_s^2},
 \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

где

$$\tilde{S}_s = \sqrt{\frac{p_s}{\mu_s}} S_s, \quad \tilde{T}_s = \sqrt{\frac{p_s}{\mu_s}} T_s, \quad \tilde{W}_s = \sqrt{\frac{p_s}{\mu_s}} W_s.$$

Проекции возмущающего ускорения S_s , T_s , W_s на подвижные оси, связанные с точкой G_s , определяются формулами, совершенно аналогичными формулам (7.24), в которых нужно только снабдить все величины значком s .

Поэтому и направляющие косинусы подвижных осей, связанных с точкой G , получатся тоже из формул (7.23) и (7.23'), в которых ко всем величинам нужно приписать значок s .

Величина N_s определится формулой

$$N_s = 2 \frac{p_s^2}{r_s^2} \int_0^{v_s} \frac{\cos v' dv'}{(1 + e_s \cos v')^3},$$

а составляющие возмущающего ускорения X_s , Y_s , Z_s на неподвижные оси координат даются формулами (8.2).

В эти формулы входят координаты всех тел — точек G_1 , G_2 , ..., G_n , и эти координаты должны быть заменены их выражениями (8.6), (8.6') и (8.6'') из формул невозмущенного движения.

Поэтому правые части всех уравнений Ньютона (8.10) будут известными функциями времени и всех $6n$ переменных (8.5), являющихся оскулирующими элементами орбит точек G_s .

Заметим еще, что написанные уравнения останутся справедливыми и в тех случаях, когда на точки G_s действуют, кроме сил взаимных притяжений, и какие-либо другие силы,

например силы сопротивления среды или силы, возникающие вследствие отличий форм рассматриваемых тел от сферических и т. п.

В этих случаях нужно только к составляющим возмущающих ускорений X_s, Y_s, Z_s прибавить члены, соответствующие дополнительным силам, а вид уравнений (8.10) останется без изменения.

В дальнейшем в этой главе мы будем рассматривать исключительно тот случай, когда составляющие возмущающего ускорения определяются формулами (8.2).

Кроме того, будем предполагать, что движение каждой из точек G_s остается (всегда или, по крайней мере, в течение некоторого промежутка времени) движением эллиптического типа, т. е. что постоянно выполняются неравенства

$$V_s^2 - \frac{2\mu_s}{r_s} < 0 \quad (s = 1, 2, \dots, n).$$

Тогда вместо переменных (8.5) мы можем пользоваться переменными (8.5'). Учитывая, что

$$X_s = \frac{\partial R_s}{\partial x_s}, \quad Y_s = \frac{\partial R_s}{\partial y_s}, \quad Z_s = \frac{\partial R_s}{\partial z_s},$$

будем иметь для величин (8.5') вместо уравнений Ньютона — уравнения Лагранжа, которые для нашей задачи получатся из уравнений (7.72) добавлением ко всем величинам значка s :

$$\left. \begin{aligned} \frac{da_s}{dt} &= \frac{2}{n_s a_s} \frac{\partial R_s}{\partial \varepsilon_s}, \\ \frac{de_s}{dt} &= - \frac{\sqrt{1-e_s^2}}{n_s a_s^2 e_s} \frac{\partial R_s}{\partial \pi_s} - \frac{e_s \sqrt{1-e_s^2}}{1 + \sqrt{1-e_s^2}} \cdot \frac{1}{n_s a_s^2} \frac{\partial R_s}{\partial \varepsilon_s}, \\ \frac{d\Omega_s}{dt} &= \frac{1}{n_s a_s^2 \sqrt{1-e_s^2} \sin i_s} \frac{\partial R_s}{\partial i_s}, \\ \frac{di_s}{dt} &= - \frac{1}{n_s a_s^2 \sqrt{1-e_s^2} \sin i_s} \frac{\partial R_s}{\partial \Omega_s} - \\ &\quad - \frac{\operatorname{tg} \frac{i_s}{2}}{n_s a_s^2 \sqrt{1-e_s^2}} \left(\frac{\partial R_s}{\partial \pi_s} + \frac{\partial R_s}{\partial \varepsilon_s} \right), \end{aligned} \right\} \quad (8.11)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d\pi_s}{dt} &= \frac{\operatorname{tg} \frac{i_s}{2}}{n_s a_s^2 \sqrt{1-e_s^2}} \frac{\partial R_s}{\partial i_s} + \frac{\sqrt{1-e_s^2}}{n_s a_s^2 e_s} \frac{\partial R_s}{\partial e_s}, \\
 \frac{d\epsilon_s}{dt} &= -\frac{2}{n_s a_s} \frac{\partial R_s}{\partial a_s} + \frac{\operatorname{tg} \frac{i_s}{2}}{n_s a_s^2 \sqrt{1-e_s^2}} \frac{\partial R_s}{\partial i_s} + \\
 &\quad + \frac{e_s \sqrt{1-e_s^2}}{1+\sqrt{1-e_s^2}} \cdot \frac{1}{n_s a_s^2} \frac{\partial R_s}{\partial e_s}
 \end{aligned} \right\} \quad (8.11)$$

($s = 1, 2, \dots, n$).

В этих уравнениях возмущающие функции R_s определяются формулами (8.3) и (8.3') и являются, следовательно, известными функциями от всех $3n$ координат точек G_s . Подставляя в выражение каждой возмущающей функции вместо координат точек G_s их выражения (8.6), (8.6') и (8.6'') из формул преобразования переменных, мы сделаем каждую из R_s функцией времени t и всех $6n$ переменных (8.5'). Поэтому и все правые части уравнений (8.11) будут известными функциями времени и $6n$ неизвестных функций, которыми являются оскулирующие элементы эллиптических орбит точек G_s .

Таким образом задача об определении движения взаимно притягивающихся тел приводится в первом приближении (т. е. когда каждое из тел рассматривается как материальная точка) к интегрированию совместной системы $6n$ дифференциальных уравнений первого порядка с таким же числом неизвестных функций.

Очевидно, что такое интегрирование может быть выполнено только приближенно, например, по способу последовательных приближений Пикара или при помощи разложения в бесконечные ряды.

Способ Пикара применим при любых значениях масс точек G_s и сходимость последовательных приближений обуславливается исключительно малостью составляющих возмущающих ускорений вследствие, например, больших расстояний между точками системы.

Если же массы всех точек G_s весьма малы по сравнению с массой точки G_0 , то удобнее для интегрирования уравнений (8.11) применять способ малых параметров и предста-

влять неизвестные функции в виде бесконечных рядов, расположенных по целым, возрастающим степеням этих параметров.

Впрочем, если ограничиться рассмотрением только первого приближения*), то оба способа дают одинаковые выражения для приближенных значений неизвестных функций.

§ 2. Интегрирование уравнений возмущенного движения

1. Явная форма уравнений, определяющих оскулирующие элементы. Прежде чем заниматься интегрированием уравнений возмущенного движения в основной задаче небесной механики, рассмотрим структуру какой-либо из возмущающих функций R_s в предположении, что движение каждой из точек Q_s принадлежит к эллиптическому типу. Кроме того, будем предполагать, что все отношения m_s/m_0 суть малые величины одинакового порядка.

Такое предположение для случая задачи о движении больших планет солнечной системы не совсем соответствует действительности, так как из курса общей астрономии нам известно, что массы внутренних планет (Меркурия, Венеры, Земли и Марса) значительно меньше масс внешних планет (Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна). Однако расстояния четырех последних планет от Солнца и их взаимные расстояния значительно больше соответствующих расстояний в системе внутренних планет. Поэтому сравнительно большие массы внешних планет до некоторой степени компенсируются малостью обратных расстояний в системе этих планет. Вследствие этого практически массы всех больших планет солнечной системы действительно можно считать малыми величинами одного и того же порядка.

Рассматривая выражение (8.3) для возмущающей функции $R_s (s = 1, 2, \dots, n)$, заметим прежде всего, что эта функция есть линейная функция $n - 1$ малых параметров, которыми являются $n - 1$ масс из совокупности

$$m_1, m_2, \dots, m_s, \dots, m_{n-1}, m_n, \quad (8.12)$$

за исключением массы m_s .

Таким образом, различные группы уравнений (8.11) (т. е. группы, отличающиеся значком s) содержат различные группы

*) Здесь идет речь о первом приближении в задаче об интегрировании уравнений (8.11). Сама же эта задача является, как уже говорилось, первым приближением задачи о движении n тел.

малых параметров, но вся система (8.11) в целом содержит, очевидно, в качестве параметров все массы (8.12).

Следует заметить, впрочем, что в каждую группу уравнений (8.11) входит неявным образом и своя собственная масса m_s , например, через посредство среднего движения n_s , которое равно $\sqrt{\mu_s a_s^{-3/2}}$, а $\mu_s = f(m_0 + m_s)$.

Однако величину m_s , входящую в уравнения (8.11) через посредство величины μ_s , мы не будем считать параметром, так что все величины $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ будут рассматриваться как некоторые фиксированные постоянные, не зависящие от выбранных нами малых параметров.

Такой прием, когда некоторая величина, входящая в дифференциальное уравнение двояким образом, считается переменным параметром, когда она входит одним способом, и неизменной постоянной, когда она входит другим способом, весьма широко используется и в небесной механике и во многих других дисциплинах и не должен вызывать каких-либо сомнений.

Так как R_s есть линейная функция n — 1 малых параметров, то и всякая ее частная производная по любому из элементов (8.5') также есть линейная функция тех же параметров, а следовательно, и правая часть каждого из уравнений (8.11) имеет точно такую же структуру.

Перепишем уравнения (8.11) в более краткой и удобной форме, обозначая — так же, как это мы делали и в предыдущей главе, — элементы оскулирующей орбиты точки G_s соответственно

$$\vartheta_{s1}, \vartheta_{s2}, \vartheta_{s3}, \vartheta_{s4}, \vartheta_{s5}, \vartheta_{s6}. \quad (8.13)$$

Обратим теперь внимание на множители R_{sj} в формуле (8.3), определяемые формулами (8.3'). Каждая из величин R_{sj} зависит только от координат двух точек: G_s и G_j . После перехода от прямоугольных координат к оскулирующим элементам величина R_{sj} делается, очевидно, некоторой функцией времени и двенадцати оскулирующих элементов ϑ_{sk} и ϑ_{jk} ($k = 1, 2, \dots, 6$), так что мы можем записать выражение для возмущающей функции R_s следующим образом *):

$$R_s = f \sum_{j=1}^n{}' m_j R_{sj} (t | \vartheta_{sk} | \vartheta_{jk}). \quad (8.14')$$

*) Напомним, что штрих при знаке суммы указывает, что при суммировании должен быть пропущен член, для которого $j = s$.

Дифференцируя формулу (8.14) по какому-либо из элементов ϑ_{sk} орбиты точки G_s , мы получим, очевидно, выражение, имеющее такую же структуру, как и (8.14), т. е.

$$\frac{\partial R_s}{\partial \vartheta_{sk}} = f \sum_{j=1}^n m_j R_{sj}^{(k)}(t | \vartheta_{sk} | \vartheta_{jk}). \quad (8.14')$$

В уравнениях (8.11) частные производные от R_s по элементам ϑ_{sk} умножаются на величины, зависящие от $a_s, e_s, \dots$ т. е. от элементов ϑ_{sk} , а поэтому правые части этих уравнений будут иметь такую же структуру, как и (8.14) или (8.14'), мы можем записать всю систему $6n$ уравнений (8.11) следующим образом:

$$\frac{d\vartheta_{sk}}{dt} = \sum_{j=1}^n m_j E_{sj}^{(k)}(t | \vartheta_{sk} | \vartheta_{jk}), \quad (8.15)$$

где каждая из $6n$ ($n - 1$) величин $E_{sj}^{(k)}$ есть некоторая функция времени и двенадцати оскулирующих элементов ϑ_{sk} и ϑ_{jk} ($k = 1, 2, \dots, 6$), но не зависит от параметров m_s ($s = 1, 2, \dots, n$).

Уточним зависимость величин $E_{sj}^{(k)}$ от времени t , для чего нужно опять обратиться к формулам (8.3'), определяющим величины R_{sj} .

Так как мы предполагаем, что движение каждой из точек G принадлежит к эллиптическому типу, то координаты каждой из этих точек являются периодическими функциями от своей средней аномалии M_s и могут быть представлены в виде рядов Фурье, расположенных по синусам и косинусам кратных M_s . Следовательно, величина R_{sj} есть периодическая функция от двух средних аномалий M_s и M_j , а поэтому может быть разложена в двойной ряд Фурье, расположенный по синусам и косинусам аргумента

$$k_s M_s + k_j M_j,$$

где k_s и k_j обозначают целые числа.

Коэффициенты этих рядов зависят, как это выяснено в главе шестой, от всех элементов ϑ_{sk} и ϑ_{jk} , за исключением средних долгот эпохи ϵ_s и ϵ_j , которые входят в разложение координат только через посредство средних аномалий.

Очевидно, что каждая из величин $E_{sj}^{(k)}$ может быть представлена рядом такого же характера, и мы можем написать

$$E_{sj}^{(k)} = \sum_{k_s, k_j = -\infty}^{+\infty} \{ A_{s,j}^{(k, k_s, k_j)} \cos(k_s M_s + k_j M_j) + \\ + B_{s,j}^{(k, k_s, k_j)} \sin(k_s M_s + k_j M_j) \}, \quad (8.15')$$

где коэффициенты не зависят от средних долгот эпохи e_s и e_j .

Величины $E_{sj}^{(k)}$ можно представить еще в несколько ином виде. Действительно, координаты невозмущенного движения, как это видно из формул (8.6), зависят еще тригонометрическим образом от долготы узла и долготы перигея.

Поэтому эти координаты можно рассматривать как периодические функции от трех переменных — M_s , Ω_s и π_s с общим периодом 2π по каждому из этих аргументов.

В силу этого возмущающая функция R_{sj} может быть рассматриваема как периодическая функция от шести аргументов и, следовательно, может быть разложена в шестикратный ряд Фурье по синусам и косинусам сложного аргумента

$$D = k_s M_s + k_j M_j + k'_s \Omega_s + k'_j \Omega_j + k''_s \pi_s + k''_j \pi_j,$$

где k_s , k_j , k'_s , k'_j , k''_s и k''_j обозначают целые числа (положительные, отрицательные или нули).

Поэтому и каждая из $6n(n-1)$ величин $E_{sj}^{(k)}$ также может быть представлена таким шестикратным рядом, и мы можем написать (в сокращенных обозначениях)

$$E_{sj}^{(k)} = \sum_{\bar{k}} \{ A_{s,j}^{(k, \bar{k})} \cos D + B_{s,j}^{(k, \bar{k})} \sin D \}, \quad (8.15'')$$

где коэффициенты зависят только от больших полуосей a_s и a_j , от эксцентриситетов e_s и e_j и от наклонностей i_s и i_j *).

Эти коэффициенты A и B в свою очередь могут быть разложены в степенные ряды, расположенные по целым положительным степеням эксцентриситетов и наклонностей.

*) Буквой $\bar{k}$ обозначена для сокращения вся совокупность шести индексов k_s , k_j , k'_s , k'_j , k''_s , k''_j , и суммирование производится по всем этим индексам, так что каждый из них принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Действительно, из результатов главы шестой прямо следует, что коэффициенты рядов Фурье, представляющих величины эллиптического движения, суть ряды, расположенные по степеням эксцентриситета эллиптической орбиты. Кроме того, координаты эллиптического движения содержат либо косинус, либо синус наклонности, поэтому упомянутые координаты разлагаются в ряды по степеням наклонности.

Таким образом, возмущающая функция R_{sj} может быть разложена в четырехкратный ряд, расположенный по степеням эксцентриситетов и наклонностей двух орбит точек G_s и G_j .

Следовательно, и всякая из величин $E_{sj}^{(k)}$ также разложима в ряд такого же характера, а значит, коэффициенты A и B в формуле (8.15'') могут быть представлены в виде

$$\left. \begin{matrix} A_{s,j}^{(k, \tilde{k})} \\ B_{s,j}^{(k, \tilde{k})} \end{matrix} \right\} = \sum_{\tilde{k}} \frac{A_{s,j}^{(k, \tilde{k}, \tilde{k})}}{B_{s,j}^{(k, \tilde{k}, \tilde{k})}} \times e_s^{\tilde{k}_s} e_j^{\tilde{k}_j} i_s^{\tilde{k}'_s} i_j^{\tilde{k}'_j},$$

где коэффициенты зависят только от полуосей a_s и a_j .*

Так как во многих задачах небесной механики (например, в задаче о движении больших планет солнечной системы) эксцентриситеты и наклонности орбит вообще малы, то ряды, расположенные по степеням этих величин, сходятся достаточно быстро и с ними удобно производить необходимые вычисления.

Для фактического получения всех упомянутых разложений достаточно, как следует из сказанного выше, вывести разложение только одной возмущающей функции для какой-либо пары взаимно возмущающих точек G_s и G_j .

Получив такое разложение, мы будем иметь также разложения всех $n(n-1)$ функций типа R_{sj} , которые получаются из найденного разложения просто заменой значков.

Дифференцируя каждое из $n(n-1)$ разложений функций R_{sj} по всем элементам $\mathcal{E}_{sj}$ и помножая разложения производных на соответствующие коэффициенты, мы будем иметь все нужные для дальнейшего разложения вида (8.15') или (8.15'')

*) Буквой $\tilde{k}$ обозначена вся совокупность четырех индексов $\tilde{k}_s, \tilde{k}_j, \tilde{k}'_s, \tilde{k}'_j$, и суммирование производится по каждому из них от нуля до $+\infty$.

Мы не будем рассматривать технику получения разложения какой-либо функции R_{sj} . Это разложение неоднократно осуществлялось, и соответствующие буквенные выражения для его коэффициентов с точностью, соответствующей точности современных наблюдений, опубликованы и их можно брать для каждой конкретной задачи прямо в готовом виде *).

2. Интегрирование уравнений при помощи рядов, расположенных по степеням возмущающих масс. Обращаясь теперь к интегрированию системы (8.15), будем искать решение этих уравнений в виде рядов, расположенных по целым, положительным степеням малых параметров (возмущающих масс) $m_1, m_2, \dots, m_n$.

Для этого положим

$$\vartheta_{sk} = \vartheta_{sk}^{(0)} + \delta^{(1)} \vartheta_{sk} + \delta^{(2)} \vartheta_{sk} + \dots + \delta^{(r)} \vartheta_{sk} + \dots, \quad (8.16)$$

где $\vartheta_{sk}^{(0)}$ — постоянные за которые можно принять начальные значения элементов ϑ_{sk} , соответствующие начальной эпохе $t = t_0$, а $\delta^{(r)} \vartheta_{sk}$ суть целые, однородные функции степени r величин (8.12), коэффициенты которых суть некоторые, подлежащие определению функции времени, обращающиеся в нуль при $t = t_0$.

Поэтому величины $\delta^{(r)} \vartheta_{sk}$, которые назовем *возмущениями r -го порядка*, представятся в следующем виде:

$$\delta^{(r)} \vartheta_{sk} = \sum \vartheta_{sk}^{(r_1, r_2, \dots, r_n)}(t) m_1^{r_1} m_2^{r_2} \dots m_n^{r_n}, \quad (8.17)$$

где сумма распространяется на все целые неотрицательные значения индексов $r_1, r_2, \dots, r_n$, сумма которых равна r .

Каждый из N_r членов **) суммы (8.17) можно назвать частным возмущением r -го порядка, коэффициент которого

*) Некоторые детали техники подобных разложений изложены в известном «Курсе небесной механики», М. Ф. Субботина, т. 2, 1937. См. также Tisserand F., *Traité de Mécanique Céleste*, t. 1, Leverrier, Annales de l'Observatoire de Paris, t. 1, 1855. Z e i p e l H. v., *Entwicklung der Störungsfunktion*, Encyklopädie der Mathem. Wissenschaften, Bd. VI, 2. 1912, где имеется подробная библиография по этому вопросу.

**) N_r есть число всех членов многочлена (однородного) степени r с n переменными и определяется формулой

$$N_r = \frac{n(n+1)(n+2) \dots (n+r-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r}.$$

по свойству кратных рядов Тэйлора определяется следующей общей формулой:

$$\partial_{sk}^{(r_1, r_2, \dots, r_n)} = \frac{r!}{r_1! r_2! \dots r_n!} \left[\frac{\partial^{r_1 + r_2 + \dots + r_n} \partial_{sk}}{\partial m_1^{r_1} \partial m_2^{r_2} \dots \partial m_n^{r_n}} \right]_{m_1 = \dots = m_n = 0} \quad (8.17')$$

Для определения коэффициентов многочленов (8.17) проще всего применить тот же прием, который мы использовали уже в предыдущей главе при интегрировании любой системы уравнений возмущенного движения. Таким образом, будем дифференцировать уравнения (8.15) по параметрам (8.12), предполагая все ∂_{sk} функциями этих параметров, определяемыми рядами (8.16) и полагая после каждого дифференцирования все параметры равными нулю.

В результате этих операций мы будем получать системы уравнений, из которых последовательно, в порядке возрастания r , сможем определить сколько угодно неизвестных коэффициентов. При этом все коэффициенты одной и той же группы r , т. е. коэффициенты одного и того же многочлена (8.17), определяются независимо друг от друга при помощи простых квадратур. Однако коэффициенты группы r зависят от коэффициентов всех предыдущих групп, т. е. возмущения какого-либо порядка r зависят от возмущений первого, второго, ..., $(r-1)$ -го порядков.

Таким образом, мы построим формальные ряды, расположенные по возрастающим степеням параметров (8.12) и удовлетворяющие дифференциальным уравнениям (8.15).

Применяя теперь теорему А. М. Ляпунова*), мы можем быть уверенными в том, что все полученные ряды будут абсолютно сходящимися в некотором промежутке времени, пока численные значения параметров (8.12) не превосходят некоторого, отличного от нуля и зависящего вообще от упомянутого промежутка времени, предела.

Определение этого предела в задачах небесной механики довольно затруднительно, но еще большие затруднения пред-

*) См. сноску на стр. 421. Подробное доказательство теоремы А. М. Ляпунова будет помещено в следующей нашей книге «Аналитические и качественные методы небесной механики», которая готовится к изданию.

ставляет задача о нахождении решения системы (8.15) в таком виде, в каком оно было бы пригодно для всех значений времени.

В классической небесной механике до работ А. М. Ляпунова и А. Пуанкаре*) вопрос о сходимости получаемых в теории возмущений рядов вообще не ставился, и пригодность получаемых приближенных формул проверялась исключительно путем сравнения результатов вычислений с данными, получаемыми при помощи наблюдений.

О работах А. М. Ляпунова и А. Пуанкаре мы будем говорить в другой книге, а здесь ограничимся приведенным изложением основ общего метода интегрирования уравнений возмущенного движения и несколько более подробно рассмотрим определение первого приближения, т. е. нахождение возмущений первого порядка.

Для того чтобы избавиться от громоздких общих обозначений, принятых в формуле (8.17), представим совокупность членов первой степени относительно параметров (8.12) в рядах (8.16) в следующем виде:

$$\delta^{(1)} \vartheta_{sk} = \sum_{j=1}^n m_j \vartheta_{sk}^{(j)} = \sum_{j=1}^n \delta^{(1, j)} \vartheta_{sk}, \quad (8.18)$$

где

$$\delta^{(1, j)} \vartheta_{sk} = m_j \vartheta_{sk}^{(j)} \quad (8.18')$$

есть частное возмущение первого порядка в элементе ϑ_{sk} , вызываемое действием массы m_j на массу m_s .

Для определения функций $\vartheta_{sk}^{(j)}$ продифференцируем уравнения (8.15) по какому-либо из параметров (8.12), считая все элементы ϑ_{sk} функциями этих параметров, определяемыми рядами (8.16), и положим после дифференцирования все параметры равными нулю. Эта операция даст нам, как легко видеть, следующие уравнения:

$$\frac{d\vartheta_{sk}^{(s)}}{dt} = 0, \quad \frac{d\vartheta_{sk}^{(j)}}{dt} = E_{sj}^{(k)}(t | \vartheta_{sk}^{(0)} | \vartheta_{jk}^{(0)}). \quad (8.19)$$

*) См. «Приложение». Вопросы о сходимости рядов небесной механики будут рассмотрены также в следующей книге, где будет изложено современное состояние этого вопроса.

Интегрируя эти равенства при условии, чтобы все искомые функции обращались в нуль при $t = t_0$, мы имеем *) $\vartheta_{sk}^{(s)} \equiv 0$, что само собой очевидно, и для $j \neq s$ получаем

$$\vartheta_{sk}^{(j)} = \int_{t_0}^t E_{sj}^{(k)}(t | \vartheta_{sk}^{(0)} | \vartheta_{jk}^{(0)}) dt. \quad (8.19')$$

Итак, частные возмущения первого порядка действительно определяются независимо друг от друга, а полное возмущение первого порядка есть просто сумма всех частных возмущений.

Таким образом, в теории возмущений больших планет Солнечной системы возмущения первого порядка элементов оскулирующей орбиты Марса, например, найдутся сложением возмущений первого порядка элементов Марса от каждой из остальных планет в отдельности.

Подобным же образом можно определить и возмущения второго и более высокого порядка, чем мы здесь заниматься не будем.

Заметим только, что в возмущении любого порядка r элемента ϑ_{sk} член, содержащий множителем m_s^r , всегда равен нулю. Действительно, коэффициент этого члена определится из уравнения, получающегося r -кратным дифференцированием уравнения (8.15) по параметру m_s и заменой затем всех параметров (8.12) нулями. Но масса m_s не входит в правые части уравнений (8.15) и поэтому описанная операция всегда даст в результате нуль, т. е.

$$\frac{d\vartheta_{sk}^{(0, \dots, r, \dots, 0)}}{dt} = 0,$$

где индекс r стоит на месте, имеющем порядковый номер s . Отсюда, при принятом условии относительно постоянных интегрирования, мы имеем

$$\vartheta_{sk}^{(0, \dots, r, \dots, 0)} \equiv 0.$$

*) Можно принять и какое-либо другое условие для определения произвольных постоянных, возникающих при нахождении возмущений различных порядков, но мы будем для простоты придерживаться принятого уже условия.

В другие частные возмущения r -го порядка масса m_s обязательно будет входить, но в степенях, не превышающих $r - 1$.

3. Возмущения первого порядка. Вековые и периодические неравенства. Чтобы выполнить квадратуры в формуле (8.19), определяющей возмущения первого порядка кеплеровских элементов оскулирующих орбит точек Q_s , рассмотрим выражения для подынтегральных функций $E_{sj}^{(k)}$, исходя из общих выражений этих функций, даваемых формулами (8.15') или (8.15'').

Для этого нужно заменить в этих формулах все элементы ϑ_{sk} и ϑ_{jk} их постоянными начальными значениями, вследствие чего все коэффициенты A и B этих формул сделаются некоторыми известными постоянными (начальные значения элементов предполагаем заданными числами), а время t будет входить только через средние аномалии M_s и M_j .

В рассматриваемом первом приближении аргумент (или часть аргумента) тригонометрических функций в формулах (8.15') или (8.15'') примет следующий вид:

$$k_s M_s + k_j M_j = (k_s n_s^{(0)} + k_j n_j^{(0)})(t - t_0) + \\ + k_s(\varepsilon_s - \pi_s) + k_j(\varepsilon_j - \pi_j). \quad (8.20)$$

Так как k_s и k_j принимают всевозможные целые значения — положительные, отрицательные и нулевые, — а начальные средние движения $n_s^{(0)}$ и $n_j^{(0)}$ суть известные постоянные, то коэффициент при t в формуле (8.20) (или частота колебания, определяемого тригонометрическим членом) есть действительное число, которое, в частности, может быть равно нулю. Этот коэффициент заведомо равен нулю при $k_s = k_j = 0$, каковы бы ни были $n_s^{(0)}$ и $n_j^{(0)}$, но он может также равняться нулю и в некоторых других случаях.

Эти случаи не будут иметь места, если хотя бы одно из двух чисел $n_s^{(0)}$ и $n_j^{(0)}$ есть число иррациональное, что вообще говоря, и имеет место в действительности.

Если же средние движения $n_s^{(0)}$ и $n_j^{(0)}$ суть оба числа рациональные, то найдется бесчисленное множество пар таких чисел k_s и k_j (не равных одновременно нулю), что будет выполняться следующее равенство:

$$k_s n_s^{(0)} + k_j n_j^{(0)} = 0. \quad (8.20')$$

Таким образом, в разложении (8.15') или (8.15'') найдется, вообще говоря, бесчисленное множество членов, зависящих от времени и являющихся поэтому некоторыми постоянными (в первом приближении!).

Такие члены мы будем называть, согласно установившейся традиции, *вековыми* и будем их выделять заранее из разложения соответствующей функции $E_{sj}^{(k)}$.

Поэтому, принимая для определенности форму разложения (8.15''), мы будем писать в первом приближении

$$E_{sj}^{(k)}(t | \vartheta_{sk}^{(0)} | \vartheta_{jk}^{(0)}) = A_{sj}^{(k, 0)} + \sum_{\bar{k}}^* \{ A_{sj}^{(k, \bar{k})} \cos D^* + B_{sj}^{(k, \bar{k})} \sin D^* \}, \quad (8.21)$$

где звездочка при знаке суммы указывает, что индексы k и k_j принимают при суммировании всевозможные значения за исключением равных нулю и тех значений, которые удовлетворяют условию (8.20'), а аргумент тригонометрических функций определяется формулой

$$D^* = (k_s n_s^{(0)} + k_j n_j^{(0)})(t - t_0) + D_0^*, \quad (8.22)$$

где

$$D_0^* = k_s \varepsilon_s^{(0)} + k_j \varepsilon_j^{(0)} + k'_s \Omega_s^{(0)} + k'_j \Omega_j^{(0)} + \\ + (k_s - k_s'') \pi_s^{(0)} + (k_j - k_j'') \pi_j^{(0)}. \quad (8.22')$$

Коэффициент $A_{sj}^{(k, 0)}$ в общем случае не равен нулю, так что вообще говоря, каждое из равенств (8.19) обязательно будет содержать вековой член.

Но в одном важном частном случае этот коэффициент будет равен нулю. Действительно, расположим элементы (8.5) в том же порядке, в котором написаны дифференциальные уравнения (8.11), так что $\vartheta_{s1} = a_s$ и $\vartheta_{s6} = \varepsilon_s$.

Пусть средние движения $n_1^{(0)}, n_2^{(0)}, \dots, n_n^{(0)}$ таковы, что для любой пары $n_s^{(0)}$ и $n_j^{(0)}$ условие (8.20') выполняется только при $k_s = k_j = 0$.

Тогда в разложении возмущающей функции R_{sj} (которое имеет такую же структуру, как и разложение (8.15'')) совокупность членов, для которых $k_s = k_j = 0$, т. е. вековой член разложения R_{sj} , заведомо не будет зависеть от средних долгот эпохи ε_s и ε_j , т. е. от элементов ϑ_{s1} и ϑ_{j6} .

Поэтому разложения частных производных $\frac{\partial R_s}{\partial \vartheta_{sj}}$ не будут содержать членов, не зависящих явно от времени, а отсюда следует, что в первом приближении все величины $A_{sj}^{(1,0)}$, которые пропорциональны частным производным $\frac{\partial R_s}{\partial \vartheta_{sj}}$, будут равны нулю, т. е.

$$A_{sj}^{(1,0)} = 0. \quad (8.23)$$

Следует иметь в виду, что этот важный результат справедлив только в том случае, когда средние движения удовлетворяют высказанному условию. В противном случае вековой член разложения возмущающей функции R_{sj} , как видно из формулы (8.22'), будет зависеть от ϵ_s и ϵ_j и величины $A_{sj}^{(1,0)}$ не будут равны нулю.

После этих замечаний перейдем к выполнению квадратур в формуле (8.19'), определяющей частные возмущения первого порядка элементов ϑ_{sk} .

Заменяя подынтегральную функцию в этой формуле ее выражением (8.21), где все коэффициенты A и B и величина D_0^* суть величины постоянные, мы найдем:

$$\begin{aligned} \vartheta_{sk}^{(j)}(t) = & A_{sj}^{(k,0)}(t - t_0) + \\ + \sum_{\bar{k}}^* & \frac{A_{sj}^{(k,\bar{k})}(\sin D^* - \sin D_0^*) - B_{sj}^{(k,\bar{k})}(\cos D^* - \cos D_0^*)}{k_s n_s^{(0)} + k_j n_j^{(0)}}. \end{aligned} \quad (8.24)$$

Таким образом, всякое частное возмущение первого порядка любого из элементов (8.5'), как показывают формулы (8.18') и (8.24), состоит из двух частей, из которых первая содержит множителем $t - t_0$ и постоянно растет по абсолютной величине*) вместе с временем, а вторая содержит только тригонометрические члены и является периодической функцией от времени.

Положим

$$\vartheta_{\text{sec}}^{(1,j)} \vartheta_{sk} = m_j A_{sj}^{(k,0)}(t - t_0) \quad (8.25)$$

*) Коэффициент векового неравенства может быть и положительным и отрицательным, так же, как и множитель $t - t_0$.

и назовем эту величину *вековой частью частного возмущения первого порядка* элемента ϑ_{sk} или *вековым неравенством*.

Тогда вековая часть полного возмущения первого порядка определится формулой

$$\delta_{\text{sec}}^{(1)} \vartheta_{sk} = \sum_{j=1}^n{}' \delta_{\text{sec}}^{(1, j)} \vartheta_{sk} = (t - t_0) \sum_{j=1}^n{}' m_j A_{sj}^{(k, 0)}. \quad (8.25')$$

Эта величина называется также часто просто *вековым возмущением элемента* ϑ_{sk} .

Вторую часть частного возмущения первого порядка естественно назвать *периодической частью частного возмущения*, а сумма произведений этих величин на возмущающие массы дает периодическую часть полного возмущения первого порядка, которую называют также часто *периодическим возмущением* элемента ϑ_{sk} .

Как показывает формула (8.24), периодическая часть возмущения первого порядка состоит из бесчисленного множества периодических членов, отличающихся друг от друга величинами амплитуд и периодов.

Каждый отдельный периодический член, амплитуда которого содержит множителем одну из возмущающих масс, а период равен

$$\frac{2\pi}{k_s n_s^{(0)} + k_j n_j^{(0)}}, \quad (8.26)$$

естественно называть *периодическим неравенством* элемента ϑ_{sk} , но его называют также часто *периодическим возмущением*.

Заметим, что знаменатель в формуле (8.26) заведомо не равен нулю, но, независимо от рациональности или иррациональности средних движений $n_s^{(0)}$ и $n_j^{(0)}$ может оказаться величиной весьма малой.

Поэтому периодические неравенства разделяют по величине периода (8.26) на *неравенства короткопериодические*, период которых сравним с периодами обращений в невозмущенных движениях точек G_s и G_j , и на *неравенства долгопериодические*, период которых может быть весьма большим.

Заметим, что амплитуды долгопериодических неравенств могут также оказаться значительными, вследствие того, что

в знаменателе соответствующего периодического члена входит величина $k_s n_s^{(0)} + k_j n_j^{(0)}$.

Таким образом, возмущение первого порядка любого элемента (8.5') состоит из векового неравенства и из бесчисленного множества периодических неравенств, разделяющихся на короткопериодические и долгопериодические.

Разумеется, при практических применениях теории возмущений невозможно вычислять бесчисленное множество членов, образующих возмущения даже только первого порядка.

Поэтому на практике из всего бесчисленного множества неравенств рассматривают только некоторые и представляют возмущение первого порядка каждого элемента в виде суммы векового неравенства и нескольких периодических, амплитуды которых являются наиболее заметными.

Но здесь имеется некоторое затруднение, на которое невозможно не обратить внимания. Дело в том, что амплитуды периодических неравенств (коротко- и долгопериодических) не могут быть определены конечными формулами и мы вынуждены представлять их в свою очередь бесконечными рядами, расположенными, например, как отмечалось выше, по степеням эксцентриситетов и наклонностей.

Мы можем вычислить только некоторые первые члены этих бесконечных рядов и совершенно не можем быть уверенными, что сосчитанные члены дают нам с достаточной точностью сумму всего ряда.

Поэтому, определяя возмущение первого порядка какого-либо элемента в виде суммы некоторого, не очень большого, числа неравенств, мы получаем только некоторую приближенную формулу, об удовлетворительности которой мы можем судить только путем сравнения построенной таким образом аналитической теории с наблюдениями.

Эти соображения показывают, что не следует преувеличивать ценность аналитической теории, как совокупности приближенных формул, определяющих возмущения первого порядка, и во всяком случае не следует делать из этих приближенных формул выводы, касающиеся эволюции рассматриваемой системы небесных тел в весьма далеком будущем.

4. Вековые возмущения. Теорема Лапласа о вековых возмущениях больших полуосей. Сделаем еще несколько замечаний по поводу вековых неравенств в возмущениях первого порядка элементов

оскулирующих орбит движущихся материальных точек, представляющих интересующие нас небесные тела.

Мы уже заметили, что если средние движения $n_s^{(0)}$ и $n_j^{(0)}$ (относящиеся к начальной эпохе) двух точек G_s и G_j таковы, что сумма $k_s n_s^{(0)} + k_j n_j^{(0)}$ может обратиться в нуль только при $k_s = k_j = 0$, то соответствующий коэффициент $A_{sj}^{(1,0)}$ будет равен нулю, вследствие чего вековое неравенство элемента ϑ_{s1} , т. е. большой полуоси a_s оскулирующей орбиты точки G_s , вызываемое возмущающей массой m_j , также равно нулю и возмущение первого порядка полуоси эллиптической орбиты состоит только из периодической части.

Если начальные средние движения всех точек системы обладают попарно таким же свойством, то мы будем иметь по формуле (8.25')

$$\vartheta_{\text{sec} \vartheta_{s1}}^{(1)} = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, n),$$

и возмущения первого порядка полуосей a_s всех орбит точек G_s будут содержать только периодические члены.

Это свойство возмущений первого порядка впервые замечено Лапласом для больших планет солнечной системы, но, очевидно, имеет общее значение и называется обычно *теоремой Лапласа*, хотя во всей общности оно установлено Лагранжем.

Приведем полную формулировку этой теоремы, которую мы будем в дальнейшем называть теоремой Лапласа.

Теорема Лапласа. Если начальные средние движения $n_s^{(0)}$ всех точек G_s таковы, что для любой их пары суммы $k_s n_s^{(0)} + k_j n_j^{(0)}$ обращается в нуль только при $k_s = k_j = 0$, то возмущения первого порядка больших полуосей оскулирующих орбит точек G_s не содержат вековых членов.

Как следствие теоремы Лапласа отметим, что средние движения n_s всех точек G_s , рассматриваемые как функции времени, также обладают этим же свойством, что видно из формулы (8.8''') и из уравнений

$$\frac{dn_s}{dt} = - \frac{3}{a_s^2} \frac{\partial R_s}{\partial e_s},$$

определяющих средние движения как функции времени.

В действительности средние движения $n_s^{(0)}$ определяются из наблюдений, так же, как и большие полуоси $a_s^{(0)}$.

Числовые значения величин $n_s^{(0)}$ и $a_s^{(0)}$ в какой-либо конкретной задаче астрономии (например, в задаче о движении больших планет) выражаются десятичными дробями с определенным числом десятичных знаков^{*}) и, следовательно, практически всегда оказываются рациональными числами.

Поэтому всегда найдутся целые числа k_s и k_j (и притом в бесконечном количестве), для которых сумма $k_s n_s^{(0)} + k_j n_j^{(0)}$ будет равна нулю. Если σ есть число десятичных знаков после запятой в числах $n_s^{(0)}$ и $n_j^{(0)}$, то все целые числа, определяемые формулами

$$k_s = K n_j^{(0)} \cdot 10^\sigma, \quad k_j = -K n_s^{(0)} \cdot 10^\sigma,$$

где $K = \pm 1, \pm 2, \dots$ обратят сумму $k_s n_s^{(0)} + k_j n_j^{(0)}$ в нуль и правые части равенств (8.21) все без исключения будут содержать не равные нулю вековые члены.

Но эти числа k_s и k_j , обуславливающие вековые неравенства всех элементов, не исключая и больших полуосей, оказываются на практике весьма большими, и члены, им соответствующие, просто невозможно вычислить.

Действительно, возьмем, например, средние движения Юпитера и Сатурна, относящиеся к 1,0 января 1900 г. Мы имеем ($n = 9$ — число больших планет солнечной системы)

$$n_5^{(0)} = 299'',1283, \quad n_6^{(0)} = 120'',4547, \quad \sigma = 4;$$

а поэтому числа k_5 и k_6 будут равны соответственно:

$$k_5 = 1204547K, \quad k_6 = -2991283K,$$

и соответствующие им члены даже для $K = \pm 1$ фактически невычислимы.

Поэтому мы можем считать средние движения $n_s^{(0)}$ планет солнечной системы такими, что для любой их пары всякая

^{*}) Число этих десятичных знаков зависит от точности производимых наблюдений, т. е. от качества измерительных астрономических инструментов.

сумма $k_s n_s^{(0)} + k_j n_j^{(0)}$ обращается в нуль только когда $k_s = k_j = 0$.

С другой стороны, мы можем считать исходными данными начальные большие полуоси планетных орбит a_s . Тогда средние движения, определяемые по формуле (8.8'''), заведомо будут все числа иррациональные, отношение любой пары которых не равно отношению двух целых чисел. Поэтому, рассматривая вопрос с этой точки зрения, мы можем быть уверены в отсутствии вековых неравенств в возмущениях первого порядка больших полуосей и средних движений планетных орбит.

Подчеркнем еще раз, что теорема Лапласа говорит только о возмущениях первого порядка. Что касается возмущений высших порядков, то здесь мы о них говорить не будем, заметив только, что в возмущениях третьего порядка вековые члены имеют также и большие полуоси планетных орбит.

Но вопрос об действительном поведении больших полуосей с течением времени не может быть выяснен рассмотрением членов бесконечных рядов и по существу остается открытым.

Возвращаясь к вековым возмущениям первого порядка, обратим внимание на то, что эти возмущения обусловлены свободными членами разложений функций $E_{sj}^{(k)}(t | \vartheta_{sk} | \vartheta_{jk})$ в тригонометрические ряды по кратным двух средних аномалий M_s и M_j .

Поэтому, если нас интересуют по какой-либо причине только вековые возмущения оскулирующих элементов первого порядка, то мы можем с самого начала отбросить в разложениях величины $E_{sj}^{(k)}$ все периодические члены, вследствие чего уравнения (8.15) заменятся следующими:

$$\frac{d\vartheta_{sk}}{dt} = \sum_{j=1}^n m_j A_{sj}^{(k, 0)}(\vartheta_{sk} | \vartheta_{jk}), \quad (8.27)$$

правые части которых не зависят от времени и суть функции только от элементов ϑ_{sk} ($s = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, 6$).

Чтобы получить первое приближение, нужно в правых частях уравнений (8.27) заменить все элементы ϑ_{sk} их постоянными начальными значениями. Тогда все правые части

сделаются величинами постоянными и, производя легкое интегрирование, мы снова получим формулы (8.25'), дающие вековые неравенства возмущений первого порядка.

Отбрасывание всех периодических членов разложений величин $E_{sj}^{(k)}$ равносильно замене этих величин свободными членами их рядов Фурье, которые вычисляются по следующим общим формулам:

$$A_{sj}^{(k, 0)} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} E_{sj}^{(k)} dM_s dM_j \quad (8.28)$$

и называются *средними значениями* функций $E_{sj}^{(k)}$.

Поэтому переход от точных уравнений (8.15) к уравнениям (8.27), правые части которых являются средними значениями правых частей уравнений (8.15), называется *осреднением* уравнений возмущенного движения, а сами уравнения (8.27) называются иногда осредненными уравнениями.

Лагранж заметил, что уравнения (8.27) можно рассматривать сами по себе и их интегрирование как самостоятельную задачу, результаты которой можно назвать *теорией вековых возмущений оскулирующих элементов*.

Мы рассмотрим эту важную теорию в конце книги, перейдя от кеплеровских оскулирующих элементов к некоторым другим, более удобным, которые определяются уравнениями типа Гамильтона — Якоби.

Теперь же заметим только, что задача Лагранжа представляет некоторое новое приближение к действительному решению первоначальных уравнений (8.15), в котором не применяются разложения по степеням возмущающих масс, а совсем другие принципы интегрирования.

Если правые части уравнений (8.27) не зависят от средних долгот эпохи ϵ_s , т. е. от элементов ϑ_{s6} , то, как показано выше, все $A_{sj}^{(1,0)}$ равны нулю, а следовательно, все большие полуоси a_s , или элементы ϑ_{s1} , остаются постоянными. Этот результат представляет некоторое обобщение теоремы Лапласа, которая была сформулирована только для возмущений первого порядка.

Заменяя в остальных уравнениях (8.27) элементы ϑ_{s1} их постоянными начальными значениями и имея в виду, что правые части этих уравнений не зависят от элементов ϑ_{s6} , мы

получим систему уравнений не $6n$ -го порядка, а порядка $4n$, что составляет более простую задачу.

После интегрирования этой системы, дающего элементы $\mathcal{E}_{32}$, $\mathcal{E}_{33}$, $\mathcal{E}_{34}$ и $\mathcal{E}_{35}$ как функции времени, мы определим $\mathcal{E}_{36}$, т. е. ϵ_5 , простыми квадратурами.

§ 3. Теорема Лапласа об устойчивости солнечной системы

1. Необходимое условие устойчивости в смысле Лагранжа. В предыдущем параграфе было показано, что полуоси оскулирующих орбит больших планет в их относительном движении вокруг Солнца в первом приближении можно считать свободными от вековых возмущений. Поэтому мы можем утверждать (по-прежнему оставаясь в рамках первого приближения), что большие полуоси испытывают только малые периодические колебания около их невозмущенных постоянных значений, откуда следует с той же точностью приближения, что большие планеты постоянно обращаются вокруг Солнца на почти неизменных расстояниях с почти неизменными угловыми скоростями.

Было отмечено, что до сих пор неизвестно, обладают ли большие планеты этим свойством в действительности, но если допустить, что это действительно так, то уже почти строго можно доказать, что общее устройство солнечной системы будет всегда оставаться неизменным и таким же, каким оно является в настоящее время.

Это утверждение и составляет знаменитую теорему Лапласа об устойчивости солнечной системы, которую мы рассмотрим в этом параграфе, хотя она и имеет, как следует из сказанного, только условное значение.

Предварительно мы выведем необходимое условие устойчивости в смысле Лагранжа для произвольной системы взаимно притягивающихся материальных точек.

Пусть имеем такую систему материальных точек, взаимные расстояния между которыми имеют в начальный момент времени конечные значения, не равные нулю.

Движение этой системы материальных точек называется *устойчивым в смысле Лагранжа*, если все взаимные расстояния всегда остаются ограниченными, так что ни одна из точек не удаляется неограниченно далеко от всех остальных.

Рассмотрим теперь формулу Лагранжа—Якоби, полученную в главе второй и имеющую следующий простой вид:

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = 2U + 4h', \quad (8.29)$$

где R определяется формулой

$$R = \frac{1}{m} \sum_{i < j} m_i m_j \Delta_{ij}^2 \quad (8.29')$$

и есть величина существенно положительная, а U — полная силовая функция системы, т. е.

$$U = f \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}}, \quad (8.29'')$$

и также существенно положительна.

Так как U обращается в нуль только тогда, когда все взаимные расстояния Δ_{ij} равны бесконечности, то мы можем считать, что во все время движения системы функция U имеет нижнюю границу, не равную нулю. Обозначая эту нижнюю границу через $\underline{U}$, будем иметь неравенство

$$0 < \underline{U} \leq U, \quad (8.30)$$

справедливое для всякого момента времени.

Из (8.29) и (8.30) следует также неравенство

$$\frac{d^2 R}{dt^2} \geq 2\underline{U} + 4h', \quad (8.31)$$

интегрируя которое в пределах от t_0 до t , получим следующее неравенство:

$$\frac{dR}{dt} - \dot{R}_0 \geq (2\underline{U} + 4h')(t - t_0), \quad (8.31')$$

где через $\dot{R}_0$ обозначено начальное значение производной по времени от величины R .

Интегрируя теперь в тех же пределах неравенство (8.31'), мы найдем основное неравенство

$$R \geq R_0 + \dot{R}_0(t - t_0) + (\underline{U} + 2h')(t - t_0)^2, \quad (8.31'')$$

где R_0 есть начальное значение величины R .

Неравенство (8.31'') показывает, что движение системы может быть устойчиво в смысле Лагранжа только при условии

$$h' < 0. \quad (8.32)$$

Действительно, допустим, что $h' \geq 0$ и перепишем неравенство (8.31'') в виде

$$R \geq R_0 + [\dot{R}_0 + (U + 2h')(t - t_0)](t - t_0).$$

Отсюда следует, что, каково бы ни было $\dot{R}_0$, величина, стоящая в квадратных скобках, неограниченно растет при неограниченно возрастающем t , делаясь в конце концов положительной, если $t \rightarrow +\infty$ ($t - t_0 > 0$), и отрицательной, если $t \rightarrow -\infty$ ($t - t_0 < 0$). В обоих случаях правая часть неравенства стремится к положительной бесконечности, когда $|t - t_0| \rightarrow \infty$, а следовательно, величина R и подавно неограниченно растет вместе с $|t - t_0|$.

Но если R неограниченно растет, то обязательно по крайней мере одно из взаимных расстояний также неограниченно растет, и движение системы заведомо неустойчиво в смысле Лагранжа.

Таким образом, условие (8.32) является необходимым условием устойчивости движения системы в смысле Лагранжа, но, разумеется, оно не является достаточным.

Заметим, что h' есть полная энергия системы в ее движении относительно общего центра инерции, и она равна также, как показывает уравнение (2.25), полной энергии системы в ее движении относительно точки m_0 .

Рассмотрим теперь величины h_s , определяемые формулами

$$h_s = V_s^2 - \frac{2\mu_s}{r_s} \quad (s = 1, 2, \dots, n) \quad (8.33)$$

и являющиеся, конечно, некоторыми функциями времени.

Допустим, как это мы и делали выше, что каждая из этих величин h_s остается отрицательной в течение некоторого промежутка времени, включающего в себя начальный момент t_0 .

Тогда имеем также

$$h_s^{(0)} = V_s^{(0)2} - \frac{2f(m_0 + m_s)}{r_s^{(0)}} < 0, \quad (8.33')$$

вследствие чего получим, применяя формулу (2.25) для начального момента t_0 и имея в виду, что по основному предположению все массы m_s ($s = 1, 2, \dots, n$) весьма малы по сравнению с массой m_0 ,

$$h' = \frac{1}{2m} \left\{ \left[\sum_{s=1}^n m_s \dot{x}_s^{(0)} \right]^2 + \left[\sum_{s=1}^n m_s \dot{y}_s^{(0)} \right]^2 + \left[\sum_{s=1}^n m_s \dot{z}_s^{(0)} \right]^2 \right\} + \\ + \sum_{s=1}^n \left[\frac{1}{2} m_s V_s^{(0)2} - \frac{f m_0 m_s}{r_s^{(0)}} \right] - f \sum_{s < j; j \neq 0} \frac{m_s m_j}{\Delta_{sj}^{(0)}} < 0.$$

Для всех больших планет солнечной системы все величины h_s ($s = 1, 2, \dots, 9$) в настоящее время отрицательны. Следовательно, и полная энергия h' всей солнечной системы также отрицательна, и необходимое условие устойчивости в смысле Лагранжа для солнечной системы, очевидно, выполняется.

Но из этого еще не следует заключать, как уже было отмечено, что солнечная система действительно устойчива.

В самом деле, само условие $h' < 0$ не является еще достаточным для устойчивости, да и, кроме того, это условие выведено в задаче о движении взаимно притягивающихся материальных точек, которая сама является только некоторым приближением задачи о движении действительных небесных тел.

2. Теорема Лапласа. Предполагая по-прежнему, что неравенства (8.33') выполняются, рассмотрим интегралы площадей относительного движения (8.25), считая опять, что все массы m_s весьма малы по сравнению с массой m_0 .

Тогда, с точностью до членов первого порядка относительно малых масс, мы можем написать уравнения (2.25) в следующем приближенном виде:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=1}^n m_s (y_s \dot{z}_s - z_s \dot{y}_s) &= c'_1, \\ \sum_{s=1}^n m_s (z_s \dot{x}_s - x_s \dot{z}_s) &= c'_2, \\ \sum_{s=1}^n m_s (x_s \dot{y}_s - y_s \dot{x}_s) &= c'_3. \end{aligned} \right\} \quad (8.34)$$

Перейдем в этих уравнениях от прямоугольных координат к оскулирующим кеплеровским элементам, которыми являются в виду условий (8.33'), элементы эллиптических орбит (8.5')

Так как каждая масса m_s описывает свою орбиту вокруг массы m_0 , то мы имеем из формул эллиптического движения следующие соотношения:

$$\begin{aligned} y_s \dot{z}_s - z_s \dot{y}_s &= \sqrt{\mu_s} \sqrt{p_s} \sin i_s \sin \Omega_s, \\ z_s \dot{x}_s - x_s \dot{z}_s &= -\sqrt{\mu_s} \sqrt{p_s} \sin i_s \cos \Omega_s, \\ x_s \dot{y}_s - y_s \dot{x}_s &= \sqrt{\mu_s} \sqrt{p_s} \cos i_s. \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в уравнения (8.34), мы получим (с точностью до первых степеней возмущающих масс) следующие уравнения, которые являются первыми интегралами уравнений возмущенного движения (8.11):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=1}^n m_s \sqrt{\mu_s} \sqrt{p_s} \sin i_s \sin \Omega_s &= c'_1, \\ \sum_{s=1}^n m_s \sqrt{\mu_s} \sqrt{p_s} \sin i_s \cos \Omega_s &= -c'_2, \\ \sum_{s=1}^n m_s \sqrt{\mu_s} \sqrt{p_s} \cos i_s &= c'_3. \end{aligned} \right\} \quad (8.34')$$

Система прямоугольных координат с началом в m_0 и с неизменными направлениями осей была у нас до сих пор совершенно произвольной, и мы можем выбирать ее как угодно.

Выберем теперь эту систему координат таким образом, чтобы основная координатная плоскость xOy совпадала с неизменяемой плоскостью Лапласа, которая перпендикулярна вектору момента количества движения.

Тогда $c'_1 = 0$, $c'_2 = 0$, $c'_3 = c$ и уравнения (8.34') примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=1}^n m_s \sqrt{\mu_s} \sqrt{p_s} \sin i_s \sin \Omega_s &= 0, \\ \sum_{s=1}^n m_s \sqrt{\mu_s} \sqrt{p_s} \sin i_s \cos \Omega_s &= 0, \\ \sum_{s=1}^n m_s \sqrt{\mu_s} \sqrt{p_s} \cos i_s &= c. \end{aligned} \right\} \quad (8.34'')$$

Последнее из уравнений (8.34'') и позволяет доказать теорему Лапласа, которую мы сформулируем здесь следующим образом.

Теорема Лапласа. Пусть $a_s^{(0)}$, $e_s^{(0)}$, $i_s^{(0)}$ — начальные значения больших полуосей, эксцентриситетов и наклонностей оскулирующих орбит к неизменяемой плоскости.

Тогда, если

- 1) величины $e_s^{(0)}$ и $i_s^{(0)}$ все весьма малы,
- 2) величины a_s в течение некоторого промежутка времени $(t_0, \bar{t})$ весьма мало отличаются от своих начальных значений,

3) величины $m_s \sqrt{p_s} \sqrt{a_s^{(0)}}$ суть величины одного и того же порядка, то для всех значений времени в промежутке $(t_0, \bar{t})$ величины e_s и i_s будут также оставаться весьма малыми.

Доказательство может быть проведено следующим образом. Согласно условиям теоремы, мы можем положить $a_s = a_s^{(0)} + \alpha_s$, где все α_s суть функции времени, имеющие в промежутке $(t_0, \bar{t})$ весьма малые числовые значения. Тогда теорема Тэйлора дает

$$\sqrt{a_s} = \sqrt{a_s^{(0)}} \left(1 + \frac{\alpha_s}{a_s^{(0)}} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a_s^{(0)}} \left(1 + \frac{\alpha_s}{2a_s^{(0)}} + \dots \right)$$

и последнее из уравнений (8.34''), если иметь в виду, что $p_s = a_s(1 - e_s^2)$, может быть написано в виде

$$\sum_{s=1}^n m_s \sqrt{p_s} \sqrt{a_s^{(0)}} \sqrt{1 - e_s^{(0)2}} \cos i_s = c + \alpha, \quad (8.35)$$

где через α обозначена некоторая функция времени, принимающая в промежутке $(t_0, \bar{t})$ весьма малые числовые значения и обращающаяся в нуль при $t = t_0$.

Пусть теперь $\bar{c}$ есть постоянная величина, определяемая формулой

$$\sum_{s=1}^n m_s \sqrt{p_s} \sqrt{a_s^{(0)}} = \bar{c}. \quad (8.35')$$

Вычитая из этого равенства равенство (8.35), мы получим следующее уравнение:

$$\sum_{s=1}^n m_s \sqrt{\mu_s} \sqrt{a_s^{(0)}} [1 - \sqrt{1 - e_s^2} \cos i_s] = \tilde{c} - \alpha$$

(где $\tilde{c}$ — новая постоянная), которое может быть также написано в виде

$$\sum_{s=1}^n m_s \sqrt{\mu_s} \sqrt{a_s^{(0)}} \frac{\sin^2 i_s + e_s^2 \cos^2 i_s}{1 + \sqrt{1 - e_s^2} \cos i_s} = \tilde{c} - \alpha. \quad (8.36)$$

Последнее уравнение имеет место для всех значений t в промежутке $(t_0, \bar{t})$, т. е. пока большие полуоси остаются близкими к своим начальным значениям.

Полагая в уравнении (8.36) $t = t_0$ и имея в виду, что α обращается в нуль в начальный момент, мы найдем:

$$\tilde{c} = \sum_{s=1}^n m_s \sqrt{\mu_s} \sqrt{a_s^{(0)}} \frac{\sin^2 i_s^{(0)} + e_s^{(0)2} \cos^2 i_s^{(0)}}{1 + \sqrt{1 - e_s^{(0)2}} \cos i_s^{(0)}}. \quad (8.36')$$

Так как по условию теоремы Лапласа величины $i_s^{(0)}$, $e_s^{(0)}$ весьма малы и величины $m_s \sqrt{\mu_s} \sqrt{a_s^{(0)}}$ одного и того же порядка, то вычисленное по формуле (8.36) значение постоянной $\tilde{c}$ также будет весьма мало.

Отсюда следует, что левая часть равенства (8.36) будет оставаться весьма малой для всех значений t в промежутке $(t_0, \bar{t})$, а поэтому в этом промежутке величины $\sin i_s$ и $e_s \cos i_s$ должны сохранять весьма малые значения, т. е. наклонности i_s оскулирующих орбит к неизменяемой плоскости и эксцентриситеты e_s этих орбит будут также оставаться малыми в промежутке $(t_0, \bar{t})$, что мы и хотели доказать.

Доказанная теорема имеет весьма большое значение для небесной механики. Действительно, пусть рассматриваемая система материальных точек представляет Солнце (масса m_0) и девять больших планет ($s = 1, 2, \dots, 9$).

В настоящее время эксцентриситеты и наклонности орбит (к неизменяемой плоскости) всех больших планет действительно весьма малы, а величины $m_s \sqrt{\mu_s} \sqrt{a_s^{(0)}}$ для всех больших планет имеют значения приблизительно одинакового

порядка. С другой стороны, благодаря отсутствию вековых неравенств в возмущениях первого порядка больших полуосей величины a_s для всех больших планет будут оставаться близкими (по крайней мере в течение нескольких столетий) к их начальным значениям.

Поэтому мы можем утверждать, что в течение того же промежутка времени эксцентриситеты и наклонности орбит больших планет солнечной системы действительно будут оставаться малыми.

Иначе говоря, в настоящее время орбиты больших планет суть почти круги и лежат почти в одной плоскости. По теореме Лапласа следует, что такое устройство солнечной системы будет сохраняться все время, пока большие полуоси будут оставаться близкими к их начальным значениям.

Однако распространять этот результат на очень большие (космогонические!) промежутки времени мы не имеем никаких оснований, вследствие чего устройство солнечной системы в далеком будущем (а также в далеком прошлом) по существу остается неизвестным.

Отметим еще, что если наряду с большими планетами рассматривать в солнечной системе также и малые планеты, то теорема Лапласа уже не будет справедлива даже в первом приближении. Действительно, массы малых планет суть величины гораздо более высокого порядка (по отношению к массе Солнца), чем массы больших планет, которые все же можно считать величинами одинакового порядка.

Таким образом для солнечной системы, состоящей из больших и малых планет, просто не выполняются условия теоремы, касающиеся порядков величин $m_s \sqrt{\mu_s} \sqrt{a_s^{(0)}}$. Кроме того, не выполняется также и первое условие, так как орбиты многих малых планет обладают заметными эксцентриситетами и наклонностями.

Разумеется, в этом смысле слова нельзя также включать в солнечную систему кометы и метеоры.

3. Теорема Якоби об исключении узлов в задаче трех тел. Возвратимся теперь к соотношениям (8.34") и посмотрим, какие результаты можно извлечь из двух первых уравнений этой группы, которые мы еще никак не использовали.

Очевидно, что два первых равенства системы (8.34) можно рассматривать как два уравнения, связывающие 4 неизвестных $\sqrt{p_s}$, $\sin i_s$, $\sin \Omega_s$, $\cos \Omega_s$, а поэтому из них можно выразить какие-либо две неизвестные в зависимости от всех остальных. Например, можно найти $\sqrt{p_1}$ и $\sqrt{p_2}$ или $\sin i_1$ и $\sin i_2$, что позволит понизить порядок общей системы на две единицы.

Или можно определить, например, $\sin \Omega_1$ и $\cos \Omega_1$, что позволит найти однозначно Ω_1 , и, следовательно, понизит порядок системы на одну единицу.

Однако такое понижение порядка системы уравнений возмущенного движения вообще не доставляет никаких преимуществ и поэтому не производится, а первые два интеграла из системы (8.34) используются обыкновенно как контрольные формулы при определении оскулирующих элементов путем численного интегрирования уравнений.

Можно рассматривать эти два первых соотношения еще и с другой точки зрения. Допустим, что нам известны значения оскулирующих элементов планетных орбит из наблюдений для ряда различных моментов времени.

Тогда в этих уравнениях можно рассматривать как не известные величины массы m_s планет, которые можно определить из этих уравнений, выражая какие-нибудь две через остальные, или пробовать определять все эти массы по методу наименьших квадратов.

Рассмотрим еще первые два уравнения системы (8.34) для частного случая, когда $n = 2$, т. е. для задачи трех тел (например, для задачи «Солнце — Юпитер — Сатурн»).

Тогда напомним эти уравнения в раскрытом виде следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \sqrt{p_1} \sqrt{p_1} \sin i_1 \sin \Omega_1 + m_2 \sqrt{p_2} \sqrt{p_2} \sin i_2 \sin \Omega_2 &= 0, \\ m_1 \sqrt{p_1} \sqrt{p_1} \sin i_1 \cos \Omega_1 + m_2 \sqrt{p_2} \sqrt{p_2} \sin i_2 \cos \Omega_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8.37)$$

откуда имеем

$$\left. \begin{aligned} m_1 \sqrt{p_1} \sqrt{p_1} \sin i_1 \sin \Omega_1 &= -m_2 \sqrt{p_2} \sqrt{p_2} \sin i_2 \sin \Omega_2, \\ m_1 \sqrt{p_1} \sqrt{p_1} \sin i_1 \cos \Omega_1 &= -m_2 \sqrt{p_2} \sqrt{p_2} \sin i_2 \cos \Omega_2. \end{aligned} \right\} \quad (8.37')$$

Разделив первое из равенств (8.37) на второе, мы будем иметь замечательное соотношение, впервые полученное Якоби:

$$\operatorname{tg} \Omega_1 = \operatorname{tg} \Omega_2. \quad (8.38)$$

Из соотношения (8.38) мы заключаем, что либо должны быть $\Omega_1 = \Omega_2$, либо $\Omega_1 = \Omega_2 \pm 180^\circ$.

Но в первом случае оба слагаемых в каждом из уравнений (8.37) будут иметь одинаковые знаки и их сумма не может быть равна нулю. Следовательно, мы должны иметь

$$\Omega_1 = \Omega_2 \pm 180^\circ. \quad (8.38')$$

Таким образом, долгота узла одной планеты выражается через долготу узла другой и число неизвестных на единицу уменьшается.

Из равенства (8.38') следует также свойство движения в задаче трех тел, которое можно сформулировать следующим образом:

Если за основную плоскость взята неизменяемая плоскость Лапласа, то направление на восходящий узел одной планеты всегда совпадает с направлением на нисходящий узел другой планеты.

Полезно напомнить, что это свойство выведено из уравнений (2.25), в которых отброшены члены второго порядка относительно возмущающих масс.

ГЛАВА IX

КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

§ 1. Канонические системы оскулирующих элементов

1. Уравнения возмущенного движения в координатах Якоби. Рассмотрим опять основную задачу небесной механики, т. е. задачу о движении системы $n+1$ взаимно притягивающихся материальных точек G_j ($j=0, 1, 2, \dots, n$), предполагая, что масса m_0 весьма велика по сравнению со всеми остальными массами.

В предыдущей главе мы изучали движения n малых масс относительно массы m_0 , которая в теории движения больших планет представляет Солнце; эти *гелиоцентрические движения планет* представляют наибольший интерес для практических приложений, так как наблюдения, производимые с поверхности Земли, дают *геоцентрические положения*, которые легко пересчитать в гелиоцентрические.

Однако с теоретической точки зрения гелиоцентрические уравнения движения планет не совсем удобны, так как они содержат столько же возмущающих функций, сколько имеется планет, вследствие чего выкладки, связанные с развитием теории интегрирования уравнений движения, оказываются довольно длительными и громоздкими.

С этой точки зрения гораздо удобнее пользоваться каноническими уравнениями движения (уравнениями Гамильтона), содержащими только одну функцию — *характеристическую функцию*, или функцию Гамильтона, представляющую собой полную энергию движущейся системы материальных точек.

Мы будем исходить из уравнений движения системы в координатах Якоби, выведенных в главе второй и имеющих вид:

$$m'_s \ddot{x}'_s = \frac{\partial U}{\partial x'_s}, \quad m'_s \ddot{y}'_s = \frac{\partial U}{\partial y'_s}, \quad m'_s \ddot{z}'_s = \frac{\partial U}{\partial z'_s}, \quad (9.1)$$

где x'_s, y'_s, z'_s — прямоугольные координаты точки G_s ($s = 1, 2, \dots, n$) в системе с началом в центре масс $\bar{G}_{s-1}$ точек $G_0, \dots, G_{s-1}$ и с неизменными направлениями осей *).

Постоянные m'_s , называемые «приведенными массами» точек G_s , зависят только от масс точек системы и определяются формулами

$$m'_s = \frac{m_s \sigma_{s-1}}{\sigma_s} = \frac{m_s (m_0 + m_1 + \dots + m_{s-1})}{m_0 + m_1 + \dots + m_{s-1} + m_s}. \quad (9.2)$$

Таким образом, каждая из этих приведенных масс есть величина того же порядка, что и собственная масса точки m_s , а каждая из величин σ_s имеет тот же порядок, как и масса m_0 главной точки G_0 .

Наконец, U есть полная силовая функция всей системы точек $G_0, G_1, \dots, G_n$ и определяется известной формулой

$$U = f \sum_{j < s} \frac{m_s m_j}{\Delta_{sj}}, \quad (9.3)$$

в которой Δ_{sj} суть взаимные расстояния, вычисляемые следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta_{sj}^2 = & \left(x'_j - x'_s + \sum_{k=1}^{j-1} \frac{m_k x'_k}{\sigma_k} \right)^2 + \\ & + \left(y'_j - y'_s + \sum_{k=1}^{j-1} \frac{m_k y'_k}{\sigma_k} \right)^2 + \left(z'_j - z'_s + \sum_{k=1}^{j-1} \frac{m_k z'_k}{\sigma_k} \right)^2. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Заметим, что для солнечной системы все точки $\bar{G}_{s-1}$ находятся внутри Солнца и координаты Якоби больших планет отличаются от их гелиоцентрических координат на малые величины, имеющие порядок возмущающих масс. Сказанное следует непосредственно из формул (2.34'') второй главы, выражающих относительные координаты через координаты Якоби.

*) Соответственные оси всех этих n систем координат предполагаются параллельными, но общие их направления мы оставим произвольными. Заметим еще, что здесь изменены обозначения индексов и точек системы.

Уравнения (9.1) легко привести к обычному виду уравнений возмущенного движения типа (7.1).

Действительно, положим

$$r'_s = \sqrt{x_s'^2 + y_s'^2 + z_s'^2} \quad (s = 1, 2, \dots, n), \quad (9)$$

причем $r'_1 = \Delta_{01}$, и представим силовую функцию в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} U &= f \sum_{j=1}^n \frac{m_0 m_j}{r'_j} + U', \\ U' &= f \sum_{j=2}^n m_0 m_j \left(\frac{1}{\Delta_{0j}} - \frac{1}{r'_j} \right) + f \sum'_{j < s} \frac{m_s m_j}{\Delta_{sj}}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где штрих при знаке суммы показывает, что значок s не принимает значения нуль и где, согласно (9.4),

$$\Delta_{0j}^2 = \left(x'_j + \sum_{k=1}^{j-1} \frac{m_k x'_k}{\sigma_k} \right)^2 + \left(y'_j + \sum_{k=1}^{j-1} \frac{m_k y'_k}{\sigma_k} \right)^2 + \left(z'_j + \sum_{k=1}^{j-1} \frac{m_k z'_k}{\sigma_k} \right)^2. \quad (9)$$

Отсюда видно, что любая разность

$$\frac{1}{\Delta_{0j}} - \frac{1}{r'_j}$$

есть величина первого порядка относительно возмущающих масс, а функция U' , следовательно, есть величина второго порядка относительно тех же масс.

Теперь уравнения (9.1) можно переписать в виде

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}'_s + \frac{\mu'_s x'_s}{r_s'^3} &= \frac{1}{m'_s} \frac{\partial U'}{\partial x'_s}, \\ \ddot{y}'_s + \frac{\mu'_s y'_s}{r_s'^3} &= \frac{1}{m'_s} \frac{\partial U'}{\partial y'_s}, \\ \ddot{z}'_s + \frac{\mu'_s z'_s}{r_s'^3} &= \frac{1}{m'_s} \frac{\partial U'}{\partial z'_s}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где положено

$$\mu'_s = \frac{fm_0m_s}{m'_s} = \frac{fm_0\sigma_s}{\sigma_{s-1}} \quad (s = 1, 2, \dots, n) \quad (9.6'')$$

и где все правые части суть величины первого порядка относительно масс m_s ($s = 1, 2, \dots, n$).

Пренебрегая в уравнениях (9.6') малыми величинами порядка возмущающих масс, мы получим упрощенные уравнения, или уравнения первого приближения,

$$\ddot{x}'_s + \frac{\mu'_s x'_s}{r'^3_s} = 0, \quad \ddot{y}'_s + \frac{\mu'_s y'_s}{r'^3_s} = 0, \quad \ddot{z}'_s + \frac{\mu'_s z'_s}{r'^3_s} = 0 \quad (9.7)$$

$$(s = 1, 2, \dots, n),$$

которые распадаются, очевидно, на n независимых систем, каждая из которых определяет невозмущенное кеплеровское движение точки G_s относительно точки $\bar{G}_{s-1}$.

Каждое из этих n кеплеровских движений определится формулами, аналогичными формулам второй части книги, но во избежание путаницы все эти формулы следует снабдить знаком «штрих».

В частности, кеплеровские элементы каждой из невозмущенных орбит точек G_s обозначим через

$$\Omega'_s, i'_s, \omega'_s, p'_s, e'_s, \tau'_s, \quad (9.8)$$

а если для каждой из точек G_s выполняется условие

$$V'^2_s - \frac{2\mu'_s}{r'_s} < 0,$$

то будем рассматривать эллиптические элементы

$$\Omega'_s, i'_s, a'_s, e'_s, \pi'_s, \epsilon'_s. \quad (9.8')$$

Полезно иметь в виду, что элементы (9.8) или (9.8') отличны от аналогичных элементов (8.5), соответственно (8.5'), невозмущенных движений точек G_s относительно точки G_0 , но эти отличия, как легко сообразить, также суть малые величины порядка возмущающих масс m_s .

В возмущенном движении точек G_s относительно точек $\bar{G}_{s-1}$ величины (9.8), или (9.8') будут некоторыми функциями времени, которые связаны соотношениями, получающимися из интегралов (2.34) и (2.34') уравнений (9.1).

Рассматривая эти интегралы, мы можем из них вывести — так же, как это было сделано в последнем параграфе предыдущей главы — теорему Лапласа и теорему Якоби для случая трех тел. Здесь этот вывод будет совершенно точным, так как при рассмотрении уравнений (2.34) нам не понадобится пренебрегать какими-либо членами.

Повторять вывод этих теорем мы не будем.

2. Применение метода изменения произвольных постоянных. Элементы Якоби. Как уже было отмечено, удобство координат Якоби заключается в том, что уравнения движения системы в этих координатах могут быть приведены к канонической форме.

Это приведение было выполнено в главе второй. Принимая за канонические переменные первой группы сами координаты x'_s, y'_s, z'_s и определяя сопряженные им канонические переменные x_s^*, y_s^*, z_s^* формулами

$$x_s^* = m'_s \dot{x}'_s, \quad y_s^* = m'_s \dot{y}'_s, \quad z_s^* = m'_s \dot{z}'_s,$$

мы перепишем систему (9.1) в канонической форме

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx'_s}{dt} &= \frac{\partial H'}{\partial x_s^*}, & \frac{dy'_s}{dt} &= \frac{\partial H'}{\partial y_s^*}, & \frac{dz'_s}{dt} &= \frac{\partial H'}{\partial z_s^*}, \\ \frac{dx_s^*}{dt} &= -\frac{\partial H'}{\partial x'_s}, & \frac{dy_s^*}{dt} &= -\frac{\partial H'}{\partial y'_s}, & \frac{dz_s^*}{dt} &= -\frac{\partial H'}{\partial z'_s}, \end{aligned} \right\} \quad (9.9)$$

где характеристическая функция H' определяется следующей формулой:

$$H' = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \frac{1}{m'_s} (x_s^{*2} + y_s^{*2} + z_s^{*2}) - U. \quad (9.10)$$

Для интегрирования системы (9.9) по методу Гамильтона — Якоби нужно, как показано в главе первой, составить уравнение с частными производными, которое для данной задачи

напишется следующим образом:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \frac{1}{m'_s} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x'_s} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y'_s} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z'_s} \right)^2 \right] - U = 0. \quad (9.11)$$

Найдя каким-нибудь способом функцию ψ от независимых переменных t, x'_s, y'_s, z'_s и содержащую $3n$ произвольных постоянных, которые обозначим через $\alpha_{1s}, \alpha_{2s}, \alpha_{3s}$ ($s = 1, 2, \dots, n$), мы будем иметь общий интеграл системы (9.9) в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x'_s} &= x_s^*, & \frac{\partial \psi}{\partial y'_s} &= y_s^*, & \frac{\partial \psi}{\partial z'_s} &= z_s^*, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_{1s}} &= \beta_{1s}, & \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_{2s}} &= \beta_{2s}, & \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_{3s}} &= \beta_{3s}, \end{aligned} \right\} \quad (9.12)$$

где $\beta_{1s}, \beta_{2s}, \beta_{3s}$ ($s = 1, 2, \dots, n$) суть новые произвольные постоянные.

Однако найти нужную функцию ψ из уравнения (9.11) можно только для случая $n = 1$, т. е. для задачи об относительно движении двух тел-точек, а при $n \neq 1$ приходится прибегать к приближенным методам, важнейшим из которых является метод Лагранжа вариации постоянных.

Мы применяли в предыдущих главах этот метод для неканонической системы уравнений возмущенного движения и теперь рассмотрим его для канонической системы (9.11).

Для этого представим характеристическую функцию в виде суммы двух частей, полагая

$$H' = H'_0 + H'_1, \quad (9.13)$$

где

$$H'_0 = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \frac{1}{m'_s} (x_s^{*2} + y_s^{*2} + z_s^{*2}) - f \sum_{s=1}^n \frac{m_0 m_s}{r'_s} \quad (9.13')$$

есть основная часть характеристической функции, а H'_1 , определяемая формулой

$$-H'_1 \equiv U' = f \sum_{j=2}^n m_0 m_j \left(\frac{1}{\Delta_{0j}} - \frac{1}{r'_j} \right) + f \sum'_{j < s; s \neq 1} \frac{m_s m_j}{\Delta_{sj}}, \quad (9.13'')$$

представляет собой *возмущающую функцию*.

Напишем уравнение Гамильтона — Якоби для основной части характеристической функции. Мы имеем

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \frac{1}{m'_s} \left[\left(\frac{\partial \psi_0}{\partial x'_s} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y'_s} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial z'_s} \right)^2 \right] - f \sum_{s=1}^n \frac{m_0 m_s}{r'_s} = 0, \quad (9.14)$$

где через ψ_0 обозначена искомая функция.

Будем искать эту неизвестную функцию в виде суммы n функций, каждая из которых зависит от координат только одной из точек, т. е. положим

$$\psi_0 = \sum_{s=1}^n \psi_{0s}(t, x_s, y_s, z_s). \quad (9.14')$$

Определяя теперь каждое отдельное слагаемое формулы (9.14') так, чтобы оно удовлетворяло уравнению

$$\frac{\partial \psi_{0s}}{\partial t} + \frac{1}{2m'_s} \left[\left(\frac{\partial \psi_{0s}}{\partial x'_s} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_{0s}}{\partial y'_s} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_{0s}}{\partial z'_s} \right)^2 \right] - \frac{f m_0 m_s}{r'_s} = 0, \quad (9.15)$$

мы получим, очевидно, по формуле (9.14') и некоторое решение уравнения (9.14).

Но каждое отдельное уравнение из группы (9.15) есть уравнение Гамильтона — Якоби для случая задачи двух тел, решение которого найдено (в сферических координатах) в разделе 4 § 4 главы четвертой.

Действительно, полагая

$$\psi_{0s} = -\alpha_{1s} t + W_s \quad (9.15')$$

и имея в виду формулу (9.6''), мы приведем уравнение (9.15) к следующей форме:

$$\left(\frac{\partial W_s}{\partial x'_s} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_s}{\partial y'_s} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_s}{\partial z'_s} \right)^2 = \frac{2\mu_s^*}{r'_s} + 2m'_s \alpha_{1s}. \quad (9.16)$$

Это уравнение отличается от уравнения (4.82) только обозначениями; в нем принято $\mu_s^* = f m_0 m_s m'_s$.

Интегрирование уравнения (9.16) равносильно поэтому интегрированию системы уравнений невозмущенного движения (9.7) и дает, как было показано в конце главы четвертой, все формулы невозмущенного кеплеровского движения.

Общий интеграл системы (9.7) напишется с помощью функций W_s , определяемых в полярных координатах формулой

$$W_s = \alpha_{3s} \lambda'_s + \int \sqrt{\alpha_{2s}^2 - \frac{\alpha_{3s}^2}{\cos^2 \varphi'_s}} d\varphi'_s + \\ + \int \sqrt{2m'_s \alpha_{1s} + \frac{2\mu'_s}{r'_s} - \frac{\alpha_{2s}^2}{r_s'^2}} dr'_s, \quad (9.16')$$

в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W_s}{\partial \alpha_{1s}} &= t + \beta_{1s}, & \frac{\partial W_s}{\partial \alpha_{2s}} &= \beta_{2s}, & \frac{\partial W_s}{\partial \alpha_{3s}} &= \beta_{3s}, \\ \frac{\partial W_s}{\partial r'_s} &= r'_s, & \frac{\partial W_s}{\partial \varphi'_s} &= r_s'^2 \dot{\varphi}'_s, & \frac{\partial W_s}{\partial \lambda'_s} &= r_s'^2 \cos^2 \varphi'_s \cdot \lambda'_s, \end{aligned} \right\} \quad (9.16'')$$

где $\beta_{1s}, \beta_{2s}, \beta_{3s}$ — сопряженные произвольные постоянные.

Совокупность уравнений (9.16'') представляет общий интеграл невозмущенного движения точек G_s , и все эти формулы, по основной идее метода изменения произвольных постоянных, сохраняются также и для возмущенного движения, но величины α_{ks} и β_{ks} уже не будут постоянными, но некоторыми функциями времени, определяемыми, согласно результатам § 5 главы первой, следующей канонической системой дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\alpha_{1s}}{dt} &= \frac{\partial U'}{\partial \beta_{1s}}, & \frac{d\alpha_{2s}}{dt} &= \frac{\partial U'}{\partial \beta_{2s}}, & \frac{d\alpha_{3s}}{dt} &= \frac{\partial U'}{\partial \beta_{3s}}, \\ \frac{d\beta_{1s}}{dt} &= -\frac{\partial U'}{\partial \alpha_{1s}}, & \frac{d\beta_{2s}}{dt} &= -\frac{\partial U'}{\partial \alpha_{2s}}, & \frac{d\beta_{3s}}{dt} &= -\frac{\partial U'}{\partial \alpha_{3s}}, \end{aligned} \right\} \quad (9.17)$$

которую можно также написать короче следующим образом:

$$\frac{d\alpha_{ks}}{dt} = \frac{\partial U'}{\partial \beta_{ks}}, \quad \frac{d\beta_{ks}}{dt} = -\frac{\partial U'}{\partial \alpha_{ks}} \quad (9.17') \\ (k = 1, 2, 3; \quad s = 1, 2, \dots, n).$$

Интегрирование этой системы уравнений, в которой U' предполагается выраженной через время и величины α_{ks} и β_{ks} , и составляет каноническую теорию возмущенного движения или, как ее еще называют, каноническую теорию возмущений.

Величины α_{ks} и β_{ks} , называемые каноническими элементами Якоби или *элементами Якоби*, могут быть выражены через обычные кеплеровские элементы (9.8) формулами типа (4.91), в которых нужно только, как видно из уравнения (9.16), заменить α_{1s} на $m'_s \alpha_{1s}$.

Таким образом, мы будем иметь следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{1s} &= \frac{\mu_s^* (e_s'^2 - 1)}{2m'_s p_s'}, & \alpha_{2s} &= \sqrt{\mu_s^*} \sqrt{p_s'}, & \alpha_{3s} &= \sqrt{\mu_s^*} \sqrt{p_s'} \cos i_s', \\ \beta_{1s} &= -\tau_s, & \beta_{2s} &= \omega_s', & \beta_{3s} &= \Omega_s'. \end{aligned} \right\} \quad (9.18)$$

Если же движение каждой из точек G_s принадлежит к эллиптическому типу, то вместо элементов (9.8) будем рассматривать элементы эллиптической орбиты (9.8').

Тогда, имея в виду, что для эллиптической орбиты

$$p_s' = a_s' (1 - e_s'^2), \quad n_s' (t_0 - \tau_s') = \epsilon_s' - \pi_s', \quad \pi_s' = \Omega_s' + \omega_s',$$

мы получим вместо формул (9.18) следующие:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{1s} &= -\frac{\mu_s^*}{2m'_s a_s'}, & \beta_{1s} &= -t_0 + \frac{\epsilon_s' - \pi_s'}{n_s'}, \\ \alpha_{2s} &= \sqrt{\mu_s^*} \sqrt{a_s'} \sqrt{1 - e_s'^2}, & \beta_{2s} &= \pi_s' - \Omega_s', \\ \alpha_{3s} &= \sqrt{\mu_s^*} \sqrt{a_s'} \sqrt{1 - e_s'^2} \cos i_s', & \beta_{3s} &= \Omega_s'. \end{aligned} \right\} \quad (9.19)$$

Величина n_s' есть среднее движение точки G_s , определяемое очевидной формулой

$$n_s' = \frac{\sqrt{\mu_s^*}}{a_s'^{3/2}} = \frac{\sqrt{\mu_s^*}}{m'_s a_s'^{3/2}}. \quad (9.19')$$

Из формул (9.19) можно выразить также кеплеровские элементы через элементы Якоби, что дает следующие

соотношения:

$$\left. \begin{aligned} a'_s &= -\frac{\mu_s^*}{2m'_s \alpha_{1s}}, & e'_s &= \sqrt{1 + \frac{2m'_s \alpha_{1s} \alpha_{2s}^2}{\mu_s^{*2}}} \\ n'_s &= \frac{2\sqrt{2} m_s'^{1/2}}{\mu_s^*} (-\alpha_{1s})^{1/2}, & i'_s &= \arccos\left(\frac{\alpha_{3s}}{\alpha_{2s}}\right), \\ \Omega'_s &= \beta_{3s}, & \pi'_s &= \beta_{2s} + \beta_{3s}, \\ \epsilon'_s &= \beta_{2s} + \beta_{3s} + \frac{2\sqrt{2} m_s'^{1/2}}{\mu_s^*} (-\alpha_{1s})^{3/2} (\beta_{1s} + t_0), \end{aligned} \right\} \quad (9.19'')$$

а формулы (9.18) дают еще дополнительно

$$p'_s = \frac{\alpha_{2s}^2}{\mu_s'}, \quad \tau'_s = -\beta_{1s}, \quad \omega'_s = \beta_{2s}.$$

Таким образом, если для какого-либо момента времени получены числовые значения элементов Якоби α_{ks} и β_{ks} , то формулы (9.19'') позволят вычислить соответствующие значения обычных кеплеровских элементов, после чего найдутся для этого же момента времени и координаты Якоби всех точек G_s , а затем, если угодно, и координаты всех точек системы относительно главной массы.

Можно также непосредственно выразить координаты Якоби каждой из точек G_s через элементы Якоби.

Для этого нужно только исключить из формул кеплеровского движения все кеплеровские элементы при помощи формул (9.19''), но это исключение приведет, как нетрудно убедиться, к более громоздким и к менее удобным формулам, чем те, которые даны в главах четвертой и пятой.

3. Форма разложения возмущающей функции. Элементы Делонэ. Для интегрирования системы уравнений (9.17) нужно, как уже отмечено выше, выразить прежде всего характеристическую функцию U' через время и элементы Якоби α_{ks} и β_{ks} .

Функция U' , как видно из формулы (9.13''), зависит только от расстояний между точками системы, т. е. только от координат Якоби точек G_s ($s = 1, 2, \dots, n$), вместо

которых нужно подставить их выражения из формул невозмущенного движения.

Если допустить, как мы и условились, что движение каждой из точек G_s принадлежит к эллиптическому типу (по крайней мере в течение некоторого промежутка времени), то координаты x'_s , y'_s , z'_s являются периодическими функциями от «собственной» средней аномалии, которую мы обозначим здесь через l_s и которая определяется, следовательно, формулой

$$l_s = n'_s(t - \tau'_s) = n'_s(t + \beta_{1s}). \quad (9.20)$$

Поэтому возмущающая функция U' будет периодической функцией с периодом 2π от каждой из средних аномалий l_s , а поэтому может быть разложена в n -кратный ряд Фурье по синусам и косинусам аргумента

$$k_1 l_1 + k_2 l_2 + \dots + k_n l_n. \quad (9.21)$$

Так как координаты каждой из точек G_s (в невозмущенном движении) являются также периодическими функциями долготы узла Ω'_s и долготы перицентра π'_s тоже с периодом 2π *), то U' будет также периодической функцией от каждой из величин β_{2s} и β_{3s} и может быть разложена в ряд Фурье также и по этим аргументам.

Поэтому, в конечном счете, возмущающая функция может быть представлена в виде многократного ряда Фурье вида

$$U' = \sum (A \cos D + B \sin D), \quad (9.22)$$

коэффициенты которого зависят только от элементов α_{ks} ($s = 1, 2, \dots, n$), а аргументы D имеют форму

$$D = (t - t_0) \sum_{s=1}^n k_s n'_s + D^*, \quad (9.22')$$

где величины D^* зависят только от элементов β_{ks} ($s = 1, 2, \dots, n$), а k_s суть целые числа, каждое из которых способно принимать все значения от $-\infty$ до $+\infty$, включая значение «нуль».

Таким образом, величины α_{ks} и β_{ks} входят в функцию U' несколько различным образом. Величины β_{ks} входят только под знаком тригонометрических функций, а поэтому частные производные от U' по элементам β_{ks} будут представляться рядами такого же вида, как и ряд (9.22).

*) Буква π без всякого значка обозначает, как обычно, отношение длины окружности к ее диаметру, т. е. $\pi = 3,14159 \dots$

Величины α_{2s} и α_{3s} входят только в коэффициенты A и B разложения (9.22) и результаты дифференцирования функции U' по этим переменным также представляются рядами такого же типа, как и (9.22).

Но иначе обстоит дело с переменными α_{1s} . Эти величины входят и в коэффициенты A и B и под знаки синусов и косинусов через посредство средних движений n'_s , которые (см. формулы (9.19'')) зависят от величин α_{1s} . Вследствие этого частные производные от возмущающей функции U' по элементам α_{1s} будут содержать члены, содержащие множители $t - t_0$. Наличие таких членов, неограниченно растущих вместе с временем, крайне затрудняет интегрирование уравнений (9.17), поэтому стараются обычно так преобразовать эти уравнения, чтобы в их правые части не входили члены такого вида.

Такое преобразование в канонических уравнениях возмущенного движения впервые выполнил Делонэ в своей классической работе по теории движения Луны *), который ввел для этой цели новые канонические элементы, называемые теперь обычно *элементами Делонэ*.

Чтобы выполнить это преобразование, введем вместо элементов β_{1s} новые переменные l_s формулами (9.20).

Тогда мы имеем

$$\frac{\partial U'}{\partial \beta_{1s}} = \frac{\partial U'}{\partial l_s} \frac{\partial l_s}{\partial \beta_{1s}} = n'_s \frac{\partial U'}{\partial l_s},$$

и первые из уравнений системы (9.17) напишутся в виде

$$\frac{d\alpha_{1s}}{dt} = n'_s \frac{\partial U'}{\partial l_s} \quad (s = 1, 2, \dots, n). \quad (9.23)$$

Далее мы имеем

$$\frac{dl_s}{dt} = n'_s \left(1 + \frac{d\beta_{1s}}{dt} \right) + (t + \beta_{1s}) \frac{\partial n'_s}{\partial \alpha_{1s}} \frac{d\alpha_{1s}}{dt}. \quad (9.23')$$

Обозначим теперь через $\left(\frac{\partial U'}{\partial \alpha_{1s}} \right)$ частную производную от U' по α_{1s} , входящему явно, т. е. только через

*) См. Tisserand, *Traité de mécanique céleste*, t. 1. Poincaré H., *Leçons de mécanique céleste*, t. 1. По этому же вопросу см. Субботин М. Ф., *Курс небесной механики*, т. 2, ОНТИ, 1937.

посредство коэффициентов A и B (таким образом величины n'_s считаются здесь не зависящими от величин α_{1s}). Тогда мы найдем

$$\frac{\partial U'}{\partial \alpha_{1s}} = \left(\frac{\partial U'}{\partial \alpha_{1s}} \right) + \frac{\partial U'}{\partial I_s} (t + \beta_{1s}) \frac{\partial n'_s}{\partial \alpha_{1s}}.$$

Вставляя теперь в формулу (9.23') вместо $\frac{d\beta_{1s}}{dt}$ его значение, а вместо этой производной ее только что полученное выражение, мы найдем

$$\begin{aligned} \frac{dl_s}{dt} = n'_s - n'_s \left(\frac{\partial U'}{\partial \alpha_{1s}} \right) - n'_s \frac{\partial U'}{\partial I_s} (t + \beta_{1s}) \frac{\partial n'_s}{\partial \alpha_{1s}} + \\ + (t + \beta_{1s}) \frac{\partial n'_s}{\partial \alpha_{1s}} \frac{d\alpha_{1s}}{dt} \end{aligned}$$

или, в силу (9.23),

$$\frac{dl_s}{dt} = n'_s - n'_s \left(\frac{\partial U'}{\partial \alpha_{1s}} \right).$$

Итак, сделанное преобразование заменяет каждую пару уравнений из системы (9.17), для которой $k=1$, следующей парой уравнений:

$$\frac{d\alpha_{1s}}{dt} = n'_s \frac{\partial U'}{\partial I_s}, \quad \frac{dl_s}{dt} = n'_s - n'_s \left(\frac{\partial U'}{\partial \alpha_{1s}} \right). \quad (9.24)$$

Эти уравнения решают поставленную задачу, так как их правые части не содержат t вне знаков тригонометрических функций. Но уравнения (9.24) не имеют канонической формы, как все остальные уравнения системы (9.17).

Чтобы привести опять всю систему к каноническому виду, заменим также переменные α_{1s} новыми переменными, которые обозначим, согласно Делонэ, через L_s , полагая

$$L_s = \sqrt{\mu_s^*} \sqrt{a_s'}. \quad (9.25)$$

Тогда формулы (9.19) дают

$$\alpha_{1s} = - \frac{\mu_s^{*2}}{2m_s' L_s^2}, \quad (9.25')$$

а из (9.19') имеем

$$n'_s = \frac{\mu_s^{*2}}{m_s' L_s^3}. \quad (9.26)$$

Сопоставляя (9.25') и (9.26), получим также

$$\frac{\partial \alpha_{1s}}{\partial L_s} = n'_s. \quad (9.26')$$

Теперь из уравнений (9.24) выводим

$$\frac{dL_s}{dt} = \frac{\partial U'}{\partial l_s}, \quad \frac{dl_s}{dt} = \frac{\mu_s^{*2}}{m'_s L_s^3} - \left(\frac{\partial U'}{\partial L_s} \right). \quad (9.27)$$

Введем новую характеристическую функцию F , полагая

$$F = \sum_{j=1}^n \frac{\mu_j^{*2}}{2m'_j L_j^2} + U', \quad (9.28)$$

вследствие чего уравнения (9.27) напишутся в канонической форме следующим образом:

$$\frac{dL_s}{dt} = \frac{\partial F}{\partial l_s}, \quad \frac{dl_s}{dt} = - \frac{\partial F}{\partial L_s}, \quad (9.27')$$

где частные производные $\frac{\partial F}{\partial L_s}$ вычисляются в предположении, что величины n'_s считаются как бы постоянными.

Остальные уравнения системы (9.17) не изменятся, но в правые их части следует поставить вместо U' новую характеристическую функцию F .

Введем теперь, следуя Делонэ, новые обозначения, полагая

$$\alpha_{2s} = G_s, \quad \alpha_{3s} = H_s, \quad \beta_{2s} = g_s, \quad \beta_{3s} = h_s; \quad (9.29)$$

тогда вместо системы (9.17) мы будем иметь следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL_s}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l_s}, & \frac{dG_s}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g_s}, & \frac{dH_s}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial h_s}, \\ \frac{dl_s}{dt} &= - \frac{\partial F}{\partial L_s}, & \frac{dg_s}{dt} &= - \frac{\partial F}{\partial G_s}, & \frac{dh_s}{dt} &= - \frac{\partial F}{\partial H_s}, \end{aligned} \right\} \quad (9.30)$$

где F определяется формулой (9.28), а производные $\frac{\partial F}{\partial L_s}$ берутся по L_s , только входящим явно.

Новые переменные

$$L_s, \quad G_s, \quad H_s, \quad l_s, \quad g_s, \quad h_s \quad (9.31)$$

называются каноническими переменными Делонэ или, более кратко, *элементами Делонэ*. Эти элементы связаны с элементами Якоби формулами (9.20), (9.25') и (9.29), откуда, имея еще в виду формулы (9.19), получим соотношения, связывающие элементы Делонэ с обычными кеплеровскими элементами эллиптического движения:

$$\left. \begin{aligned} L_s &= \sqrt{\mu_s^*} \sqrt{a_s'}, & l_s &= n_s'(t - \tau_s'), \\ G_s &= \sqrt{\mu_s^*} \sqrt{a_s'(1 - e_s'^2)}, & g_s &= \pi_s' - \Omega_s', \\ H_s &= \sqrt{\mu_s^*} \sqrt{a_s'(1 - e_s'^2)} \cos i_s', & h_s &= \Omega_s'. \end{aligned} \right\} \quad (9.32)$$

Из этих соотношений получим также обратные формулы, выражающие кеплеровские элементы через элементы Делонэ:

$$\left. \begin{aligned} a_s' &= \frac{L_s^2}{\mu_s^*}, & e_s' &= \frac{\sqrt{L_s^2 - G_s^2}}{L_s}, & \cos i_s &= \frac{H_s}{G_s}, \\ \Omega_s' &= h_s, & \pi_s' &= g_s + h_s, & \tau_s' &= t - \frac{1}{n_s'} l_s, \\ \epsilon_s' &= g_s + h_s + l_s, & p_s' &= \frac{G_s^2}{\mu_s^*}, & \omega_s' &= g_s. \end{aligned} \right\} \quad (9.32')$$

Характеристическая функция F здесь также называется возмущающей функцией и состоит, как показывает формула (9.28), из двух частей, из которых вторая, т. е. U' , есть величина второго порядка относительно возмущающих масс.

Первое слагаемое есть величина первого порядка относительно возмущающих масс. В самом деле, мы имеем

$$\frac{\mu_j^{*2}}{2m_j' L_j^2} = \frac{f m_0 m_j}{2a_j'}.$$

Это выражение содержит множителем только одну малую массу.

4. Две системы канонических элементов Пуанкаре. Канонические элементы Делонэ были введены нами для того, чтобы в правых частях дифференциальных

уравнений возмущенного движения не было членов, пропорциональных времени.

Однако уравнения (9.30) еще не являются окончательными для теории движения больших планет солнечной системы.

Дело в том, что для приближенного интегрирования уравнений возмущенного движения мы должны выразить сначала характеристическую функцию F через величины (9.31), что может быть достигнуто только путем разложения F в бесконечный ряд. Этот ряд является тригонометрическим относительно величин l_s, g_s, h_s , а его коэффициенты зависят от величин L_s, G_s, H_s .

Эта зависимость весьма сложная, так что коэффициенты тригонометрического ряда также приходится разлагать в ряды.

Мы уже указывали, что эти ряды представляются как степенные, относительно эксцентриситетов и наклонностей оскулирующих орбит. Но эксцентриситеты и наклонности выражаются через элементы Делонэ формулами (9.32'), а поэтому упомянутые ряды окажутся чересчур сложными и громоздкими.

Пуанкаре указал, что можно ввести новую систему элементов, которые также являются каноническими и среди которых имеются такие, которые остаются малыми при малых эксцентриситетах и наклонностях *).

Эти новые элементы, образующие первую систему канонических элементов Пуанкаре, определяются соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_s &= L_s, & \Gamma_s &= L_s - G_s, & Z_s &= G_s - H_s, \\ \lambda_s &= l_s + g_s + h_s, & \gamma_s &= -g_s - h_s, & z_s &= -h_s \end{aligned} \right\} \quad (9.33)$$

($s = 1, 2, \dots, n$).

Нетрудно проверить, что новые элементы также образуют каноническую систему. Для этого образуем выражение **)

$$d\psi = \sum_{s=1}^n (l_s dL_s + g_s dG_s + h_s dH_s - \lambda_s d\Lambda_s - \gamma_s d\Gamma_s - z_s dZ_s), \quad (9.34)$$

*) См. Poincaré H., Leçons de mécanique celeste, t. I.

**) См. § 4 главы первой.

для которого, в силу формул (9.33), имеем

$$d\psi = \sum_{s=1}^n [l_s dL_s + g_s dG_s + h_s dH_s - (l_s + g_s + h_s) dL_s + \\ + (g_s + h_s)(dL_s - dG_s) + h_s(dG_s - dH_s)] \equiv 0.$$

Таким образом, выражение (9.34) оказывается тождественным нулем, откуда, по теореме Пуанкаре, мы заключаем, что преобразование (9.33) является каноническим и что преобразованные уравнения имеют ту же самую характеристическую функцию.

Поэтому уравнения, определяющие элементы

$$\Lambda_s, \Gamma_s, Z_s, \lambda_s, \gamma_s, z_s, \quad (9.35)$$

напишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Lambda_s}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \lambda_s}, & \frac{d\Gamma_s}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \gamma_s}, & \frac{dZ_s}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial z_s}, \\ \frac{d\lambda_s}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \Lambda_s}, & \frac{d\gamma_s}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \Gamma_s}, & \frac{dz_s}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial Z_s} \end{aligned} \right\} \quad (9.35')$$

($s = 1, 2, \dots, n$),

где характеристическая функция F , согласно (9.28), определится формулой

$$F = \sum_{j=1}^n \frac{\mu_j^{*2}}{2m'_j \Lambda_j^2} + U', \quad (9.35'')$$

а функция U' должна быть выражена через элементы (9.35).

При помощи формул (9.32) мы выразим без труда элементы Пуанкаре через обычные, кеплеровские элементы эллиптического движения формулами

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_s &= \sqrt{\mu_s^*} \sqrt{a'_s}, & \lambda_s &= n'_s(t - \tau'_s) + \pi'_s, \\ \Gamma_s &= \sqrt{\mu_s^*} \sqrt{a'_s} (1 - \sqrt{1 - e'^2_s}), & \gamma_s &= -\pi'_s, \\ Z_s &= \sqrt{\mu_s^*} \sqrt{a'_s (1 - e'^2_s)} (1 - \cos i'_s), & z_s &= -\Omega'_s, \end{aligned} \right\} \quad (9.35''')$$

откуда видно, что $-z_s$ есть долгота восходящего узла, $-\gamma_s$ есть долгота перигентра, а λ_s есть средняя долгота в орбите.

Далее мы имеем

$$\frac{\Gamma_s}{\Lambda_s} = 1 - \sqrt{1 - e_s'^2} = \frac{1}{2} e_s'^2 + \dots,$$

откуда следует, что Γ_s есть величина порядка квадрата эксцентриситета оскулирующей орбиты и, следовательно, весьма мала, если e_s' мало. Наконец,

$$\frac{Z_s}{\Lambda_s \sqrt{1 - e_s'^2}} = 1 - \cos i_s' = \frac{1}{2} i_s'^2 + \dots,$$

откуда следует, что Z_s есть величина порядка квадрата наклонности и также весьма мала, если i_s' мало.

Рассмотрим еще одну систему канонических элементов, также введенную Пуанкаре и называемую второй канонической системой Пуанкаре. Эти элементы Пуанкаре суть

$$\Lambda_s, \lambda_s, \xi_s, \eta_s, p_s, q_s, \quad (9.36)$$

где Λ_s и λ_s — те же элементы, что и в первой канонической системе Пуанкаре, а последние четыре элемента определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} \xi_s &= \sqrt{2\Gamma_s} \cos \gamma_s, & \eta_s &= \sqrt{2\Gamma_s} \sin \gamma_s, \\ p_s &= \sqrt{2Z_s} \cos z_s, & q_s &= \sqrt{2Z_s} \sin z_s. \end{aligned} \right\} \quad (9.36')$$

Элементы (9.36) образуют каноническую систему, так как каждая пара — ξ_s, η_s и p_s, q_s — образует каноническую пару переменных, что показано в § 4 главы первой.

Согласно теореме Якоби в формулировке Пуанкаре новые переменные определяются канонической системой с той же самой характеристической функцией, и мы будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Lambda_s}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \lambda_s}, & \frac{d\xi_s}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \eta_s}, & \frac{dp_s}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial q_s}, \\ \frac{d\lambda_s}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \Lambda_s}, & \frac{d\eta_s}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \xi_s}, & \frac{dq_s}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial p_s}. \end{aligned} \right\} \quad (9.37)$$

При помощи формул (9.35''') и формул преобразования (9.36') мы легко получим следующие соотношения между

элементами Пуанкаре (9.36) и кеплеровскими элементами эллиптического движения:

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_s &= \sqrt{\mu_s^*} \sqrt{a_s'}, \\ \lambda_s &= n_s'(t - \tau_s') + \pi_s', \\ \xi_s &= \sqrt{2\sqrt{\mu_s^*} \sqrt{a_s'} (1 - \sqrt{1 - e_s'^2})} \cos \pi_s', \\ \eta_s &= -\sqrt{2\sqrt{\mu_s^*} \sqrt{a_s'} (1 - \sqrt{1 - e_s'^2})} \sin \pi_s', \\ p_s &= \sqrt{2\sqrt{\mu_s^*} \sqrt{a_s'} (1 - e_s'^2) (1 - \cos i_s')} \cos \Omega_s', \\ q_s &= -\sqrt{2\sqrt{\mu_s^*} \sqrt{a_s'} (1 - e_s'^2) (1 - \cos i_s')} \sin \Omega_s'. \end{aligned} \right\} \quad (9.37')$$

Из этих формул следует, что величины

$$\frac{\xi_s}{\sqrt{\Lambda_s}}, \quad \frac{\eta_s}{\sqrt{\Lambda_s}}$$

суть малые, порядка эксцентриситета e_s' , а величины

$$\frac{p_s}{\sqrt{\Lambda_s}}, \quad \frac{q_s}{\sqrt{\Lambda_s}}$$

суть малые, порядка наклонности i_s^l .

Элементы Пуанкаре (9.36) оказываются по этой причине наиболее удобными из всех возможных систем канонических элементов, которых можно придумать, конечно, еще сколько угодно.

§ 2. Принципы разложения возмущающей функции

1. Разложения элементов Лагранжа по степеням элементов Пуанкаре. Возмущающая функция F , определяемая формулой (9.35''), состоит из двух слагаемых, второе из которых и есть собственно *возмущающая функция*, зависящая только от координат Якоби x'_j, y'_j, z'_j всех движущихся точек.

Поэтому прежде всего нужно выразить эти координаты через переменные Пуанкаре (9.36).

Для этого рассмотрим сначала зависимости между элементами Пуанкаре и привычными кеплеровскими элементами эллиптического движения.

Из формул (9.37') мы имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\xi_j}{\sqrt{\Lambda_j}}\right)^2 + \left(\frac{\eta_j}{\sqrt{\Lambda_j}}\right)^2 &= 2(1 - \sqrt{1 - e_j'^2}) = \\ &= e_j'^2 + \frac{1}{4} e_j'^4 + \dots, \end{aligned} \quad (9.38)$$

причем ряд, стоящий в правой части равенства, содержит только четные степени эксцентриситета и сходится абсолютно при всяком значении e_j' , меньшем единицы.

Обращая ряд (9.38), мы получим разложение $e_j'^2$ по степеням величины

$$\left(\frac{\xi_j}{\sqrt{\Lambda_j}}\right)^2 + \left(\frac{\eta_j}{\sqrt{\Lambda_j}}\right)^2,$$

также абсолютно сходящееся при очевидных условиях

$$\left|\frac{\xi_j}{\sqrt{\Lambda_j}}\right| < 1, \quad \left|\frac{\eta_j}{\sqrt{\Lambda_j}}\right| < 1. \quad (9.38')$$

Это разложение имеет вид

$$e_j'^2 = \left(\frac{\xi_j}{\sqrt{\Lambda_j}}\right)^2 + \left(\frac{\eta_j}{\sqrt{\Lambda_j}}\right)^2 - \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\xi_j}{\sqrt{\Lambda_j}}\right)^2 + \left(\frac{\eta_j}{\sqrt{\Lambda_j}}\right)^2 \right]^2 + \dots \quad (9.38'')$$

и может быть рассматриваемо как двойной ряд, расположенный по степеням величин $\xi_j/\sqrt{\Lambda_j}$ и $\eta_j/\sqrt{\Lambda_j}$.

Далее мы можем написать

$$\begin{aligned} \sqrt{2(1 - \sqrt{1 - e_j'^2})} &= e_j' \sqrt{1 + \frac{1}{4} e_j'^2 + \dots} = \\ &= e_j' \left(1 + \frac{1}{8} e_j'^2 + \dots \right), \end{aligned}$$

где в скобках стоит ряд, расположенный по степеням $e_j'^2$, абсолютно сходящийся при $e_j' < 1$.

Обозначая для сокращения коэффициенты этого ряда через c_{2k} , мы имеем из (9.37')

$$\frac{\xi_j}{\sqrt{\Lambda_j}} = e'_j \cos \pi'_j \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k} e'^{2k}_j \right),$$

$$\frac{\eta_j}{\sqrt{\Lambda_j}} = -e'_j \sin \pi'_j \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k} e'^{2k}_j \right).$$

Но $\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k} e'^{2k}_j \right)^{-1}$, очевидно, может быть разложено в ряд, расположенный по степеням e'^2_j , так что

$$\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k} e'^{2k}_j \right)^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c'_{2k} e'^{2k}_j.$$

Заменяя здесь e'^2_j его разложением (9.38''), мы будем иметь следующие разложения:

$$\left. \begin{aligned} e'_j \cos \pi'_j &= \frac{\xi_j}{\sqrt{\Lambda_j}} \left\{ 1 - \frac{1}{8} \left[\left(\frac{\xi_j}{\sqrt{\Lambda_j}} \right)^2 + \left(\frac{\eta_j}{\sqrt{\Lambda_j}} \right)^2 \right] + \dots \right\}, \\ e'_j \sin \pi'_j &= -\frac{\eta_j}{\sqrt{\Lambda_j}} \left\{ 1 - \frac{1}{8} \left[\left(\frac{\xi_j}{\sqrt{\Lambda_j}} \right)^2 + \left(\frac{\eta_j}{\sqrt{\Lambda_j}} \right)^2 \right] + \dots \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (9.39)$$

Следовательно, величины $e'_j \cos \pi'_j$ и $e'_j \sin \pi'_j$ разложимы в абсолютно сходящиеся при условиях (9.38') ряды, расположенные по степеням (целым и положительным) величин $\xi_j/\sqrt{\Lambda_j}$ и $\eta_j/\sqrt{\Lambda_j}$.

Рассматривая теперь элементы p_j и q_j , мы имеем из (9.37')

$$\begin{aligned} \gamma_j &= \left(\frac{p_j}{\sqrt{\Lambda_j} \sqrt[4]{1 - e'^2_j}} \right)^2 + \left(\frac{q_j}{\sqrt{\Lambda_j} \sqrt[4]{1 - e'^2_j}} \right)^2 = \\ &= 2(1 - \cos l'_j) = 2(1 - \sqrt{1 - \sin^2 l'_j}) = \\ &= \sin^2 l'_j + \frac{1}{4} \sin^4 l'_j + \dots, \end{aligned} \quad (9.40)$$

где ряд сходится абсолютно при $|\sin l'_j| < 1$.

Отсюда так же, как и в предшествующем случае, найдем

$$\sqrt{2(1 - \sqrt{1 - \sin^2 i'_j})} = \sin i'_j \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin^{2k} i'_j \right) \quad (9.40')$$

и

$$\sin^2 i'_j = \gamma_j - \frac{1}{4} \gamma_j^2 + \dots$$

Так как мы можем написать

$$\begin{aligned} \frac{p_j}{\sqrt{\Delta_j}} (1 - e_j'^2)^{-\frac{1}{4}} &= \sin i'_j \cos \Omega'_j \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin^{2k} i'_j \right), \\ \frac{q_j}{\sqrt{\Delta_j}} (1 - e_j'^2)^{-\frac{1}{4}} &= -\sin i'_j \sin \Omega'_j \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin^{2k} i'_j \right), \end{aligned} \quad (9.40'')$$

то отсюда так же, как и выше, следует, что величины

$$\sin i'_j \cos \Omega'_j, \quad \sin i'_j \sin \Omega'_j$$

разложимы в ряды, расположенные по целым положительным степеням величин

$$\frac{p_j}{\sqrt{\Delta_j}} (1 - e_j'^2)^{-\frac{1}{4}}, \quad \frac{q_j}{\sqrt{\Delta_j}} (1 - e_j'^2)^{-\frac{1}{4}},$$

абсолютно сходящиеся, пока числовые значения этих величин остаются меньшими единицы.

Таким образом, мы можем утверждать, что величины

$$\left. \begin{aligned} e'_j \cos \pi'_j, & \quad e'_j \sin \pi'_j, \\ \sin i'_j \cos \Omega'_j, & \quad \sin i'_j \sin \Omega'_j \end{aligned} \right\} \quad (9.41)$$

разложимы в абсолютно сходящиеся ряды, расположенные по целым положительным степеням величин

$$\frac{\xi_j}{\sqrt{\Delta_j}}, \quad \frac{\eta_j}{\sqrt{\Delta_j}}, \quad \frac{p_j}{\sqrt{\Delta_j}}, \quad \frac{q_j}{\sqrt{\Delta_j}}. \quad (9.41')$$

Примечание. Существенно отметить, что все эти ряды уничтожаются при одновременном равенстве нулю всех величин (9.41). Кроме того, очевидно, что, наоборот, вели-

чины (9.41) разложимы в абсолютно сходящиеся ряды, расположенные по целым положительным степеням величин (9.41), уничтожающиеся при одновременном равенстве всех этих величин нулю.

2. Разложения координат Якоби по степеням элементов Лагранжа. Введем следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} r_j &= e'_j \cos \pi'_j & u_j &= \sin l'_j \cos \Omega'_j, \\ s_j &= e'_j \sin \pi'_j, & v_j &= \sin l'_j \sin \Omega'_j. \end{aligned} \right\} \quad (9.42)$$

Величины (9.42) были введены Лагранжем в его теории вековых возмущений и могут быть названы поэтому *элементами Лагранжа*. Эти элементы не являются каноническими, как элементы Пуанкаре, но могут быть разложены, как только что показано, в ряды, расположенные по степеням величин (9.41').

Покажем теперь, что координаты Якоби каждой точки могут быть разложены в ряды, расположенные по степеням элементов Лагранжа (9.42), откуда будет следовать также разложимость тех же координат в ряды, расположенные по степеням величин (9.41').

Заметим сначала, что

$$e_j'^2 = r_j^2 + s_j^2, \quad \sin^2 l'_j = u_j^2 + v_j^2$$

и, следовательно,

$$e_j'^{2k} = (r_j^2 + s_j^2)^k, \quad \sin^{2k} l'_j = (u_j^2 + v_j^2)^k,$$

откуда следует, что все четные степени величин e'_j и $\sin l'_j$ являются целыми рациональными функциями элементов (9.42).

Рассмотрим теперь выражения для координат Якоби какой-либо из движущихся точек в ее невозмущенном эллиптическом движении.

Как показано в главе шестой, эти координаты могут быть представлены рядами типа (6.22), которые расположены по целым возрастающим степеням эксцентриситета и коэффициенты которых суть тригонометрические функции от собственной средней аномалии, которую мы обозначаем в этой главе буквой l_j ($j = 1, 2, \dots, n$).

Эти коэффициенты даются формулами (6.22'), где направляющие косинусы определяются формулами (4.58) и (4.58') главы четвертой.

Выражение для первого из этих направляющих косинусов может быть представлено следующим образом:

$$\begin{aligned}\alpha_{\tau',j} &= \cos(\pi'_j - \Omega'_j) \cos \Omega'_j - \sin(\pi'_j - \Omega'_j) \sin \Omega'_j \cos i'_j = \\ &= \cos(\pi'_j - \Omega'_j) \cos \Omega'_j - \sin(\pi'_j - \Omega'_j) \sin \Omega'_j (1 - \sin^2 i'_j)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \cos \pi'_j + \frac{1}{2} \sin^2 i'_j \sin \Omega'_j (\sin \pi'_j \cos \Omega'_j - \cos \pi'_j \sin \Omega'_j) \times \\ &\times \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 i'_j + \dots\right) = \cos \pi'_j + \\ &+ \left(\frac{1}{2} u_j v_j \sin \pi'_j - \frac{1}{2} v_j^2 \cos \pi'_j\right) \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 i'_j + \dots\right).\end{aligned}$$

Представляя подобным же образом остальные направляющие косинусы и замечая, что выражения, подобные стоящему в последней скобке, разложимы по степеням элементов u и v , мы получим следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned}\alpha_{\tau',j} &= \cos \pi'_j + P_j^{(2)} \sin \pi'_j - P_j^{(3)} \cos \pi'_j, \\ \beta_{\tau',j} &= \sin \pi'_j - P_j^{(1)} \sin \pi'_j + P_j^{(2)} \cos \pi'_j, \\ \gamma_{\tau',j} &= u_j \sin \pi'_j - v_j \cos \pi'_j, \\ \alpha'_{\tau',j} &= -\sin \pi'_j + P_j^{(2)} \cos \pi'_j + P_j^{(3)} \sin \pi'_j, \\ \beta'_{\tau',j} &= \cos \pi'_j - P_j^{(1)} \cos \pi'_j - P_j^{(2)} \sin \pi'_j, \\ \gamma'_{\tau',j} &= u_j \cos \pi'_j + v_j \sin \pi'_j.\end{aligned} \right\} \quad (9.43)$$

где положено

$$\left. \begin{aligned}P_j^{(1)} &= \frac{1}{2} u_j^2 \bar{P}_j, \quad P_j^{(2)} = \frac{1}{2} u_j v_j \bar{P}_j, \quad P_j^{(3)} = \frac{1}{2} v_j^2 \bar{P}_j, \\ \bar{P}_j &= 1 + \frac{1}{4} (u_j^2 + v_j^2) + \dots,\end{aligned} \right\} \quad (9.43')$$

так что $P_j^{(1)}$, $P_j^{(2)}$, $P_j^{(3)}$ суть ряды, расположенные по целым, положительным степеням величин u_j и v_j и не содержащие членов ниже второй степени относительно этих переменных.

Рассматривая теперь формулы (6.22), (6.22'), (6.20) (6.21''') и, наконец, (6.34) и (6.34'), мы можем убедиться, что члены рядов, представляющих координаты Якоби x_j, y_j, z_j , будут содержать бесчисленное множество произведений вида

$$e_j'^k \frac{\cos}{\sin} \pi_j' \times \frac{\cos}{\sin} (k+1-2m) l_j, \quad (9.4)$$

где k — целое, положительное число, а m — другое целое положительное число, не превышающее $k+1/2$ *).

Но

$$l_j = \chi_j - \pi_j',$$

и поэтому

$$\begin{aligned} \cos \nu l_j &= \cos \nu \chi_j \cos \nu \pi_j' + \sin \nu \chi_j \sin \nu \pi_j', \\ \sin \nu l_j &= \sin \nu \chi_j \cos \nu \pi_j' - \cos \nu \chi_j \sin \nu \pi_j'. \end{aligned}$$

Из (9.44) следует, что ряды типа (6.22) будут содержать бесчисленное множество членов вида

$$e_j'^k \frac{\cos}{\sin} \pi_j' \times \frac{\cos}{\sin} (k+1-2m) \pi_j'. \quad (9.44)$$

Но формулы тригонометрии дают нам следующие выражения для косинуса и синуса кратного угла **):

$$\begin{aligned} \cos \nu \pi_j' &= C_1 \cos^{\nu} \pi_j' + C_2 \cos^{\nu-2} \pi_j' + \dots, \\ \sin \nu \pi_j' &= \sin \pi_j' (C_1' \cos^{\nu-1} \pi_j' + C_2' \cos^{\nu-3} \pi_j' + \dots) \end{aligned}$$

(C и C' обозначают числовые коэффициенты).

Заменяя в выражениях типа (9.44) $\cos \nu \pi_j'$ и $\sin \nu \pi_j'$ этими значениями, мы установим без труда, что в выражении

*) Выражение (9.44) включает в себе четыре различных выражения. Такое же замечание относится и к формуле (9.44').

**) См., например, Рыжик И. М. и Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, изд. 3-е, Гостехиздат, 1951 или какой угодно справочник, содержащий формулы элементарной тригонометрии.

координат Якоби x'_j , y'_j , z'_j будут входить члены только следующих типов

$$e_j'^k \cos \pi'_j \times (\cos \pi'_j)^{k+1-2m'}, \quad e_j'^k \sin^2 \pi'_j \times (\cos \pi'_j)^{k-2m'},$$

(9.44'')

где $m' \leq m$.

Но мы можем написать

$$\begin{aligned} e_j'^k \cos \pi'_j (\cos \pi'_j)^{k+1-2m'} &= (e'_j \cos \pi'_j)^{k+2-2m'} e_j'^{2m'-2} = \\ &= r_j^{k+2-2m'} (r_j^2 + s_j^2)^{m'-1}, \\ e_j'^k \sin \pi'_j (\cos \pi'_j)^{k+1-2m'} &= (e'_j \sin \pi'_j) (e'_j \cos \pi'_j)^{k+1-2m'} e_j'^{2m'-2} = \\ &= s_j r_j^{k+1-2m'} (r_j^2 + s_j^2)^{m'-1}, \\ e_j'^k \sin^2 \pi'_j (\cos \pi'_j)^{k-2m'} &= (e'_j \sin \pi'_j)^2 (e'_j \cos \pi'_j)^{k-2m'} e_j'^{2m'-2} = \\ &= s_j^2 r_j^{k-2m'} (r_j^2 + s_j^2)^{m'-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, каждый (из бесчисленного множества) член в каждом из рядов (9.22) является целой рациональной функцией от r_j , s_j , коэффициенты которого есть некоторые ряды, расположенные по степеням u_j и v_j . Из сказанного выше следует также, что эти коэффициенты есть тригонометрические многочлены относительно косинусов и синусов целых кратностей средней долготы λ_j .

Таким образом, мы убеждаемся, что каждая из координат Якоби x'_j , y'_j , z'_j разложима в ряд, расположенный по целым, положительным степеням элементов Лагранжа r_j , s_j , u_j , v_j , коэффициенты которого суть тригонометрические многочлены относительно косинусов и синусов целых кратностей λ_j .

Так как было уже показано, что элементы Лагранжа разложимы в ряды, расположенные по целым, положительным степеням величин (9.41'), то, следовательно, и координаты Якоби каждой из движущихся точек разложимы в ряды, расположенные по целым, положительным степеням величин (9.41'), а коэффициенты этих рядов суть

тригонометрические многочлены относительно косинусов и синусов целых кратностей λ_j .

Нетрудно убедиться, что полученные ряды будут абсолютно сходящимися при любом значении λ_j , пока e'_j не превосходит лапласова предела $\bar{e} = 0,6627 \dots$, а значит когда числовые значения величин (9.41') остаются меньшими некоторого предела, отличного от нуля.

Если угодно, то полученные ряды можно рассматривать также, как тригонометрические, расположенные по косинусам и синусам целых кратностей λ_j , коэффициенты которых суть целые ряды, расположенные по степеням величин (9.41').

Эти ряды можно также вывести из формул (6.49) главы шестой, дающих разложения координат эллиптического движения в ряды Фурье.

Заметим еще, что из доказанного следует также разложимость по степеням величин (9.41) любой целой степени (положительной или отрицательной) радиуса-вектора r'_j каждой из движущихся точек нашей материальной системы.

3. Разложение возмущающей функции. Векловая часть возмущающей функции. Перейдем теперь к рассмотрению разложения характеристической функции F системы (9.37) и к установлению некоторых общих свойств этого разложения.

Из формулы (9.35'') следует, что разложению подлежит только вторая часть характеристической функции, а именно функция U' , которая и является, собственно говоря, возмущающей функцией нашей задачи.

Функция U' , определяемая формулой (9.13''), зависит только от взаимных расстояний между движущимися точками, которые в свою очередь являются функциями координат Якоби x'_j, y'_j, z'_j и вычисляются по формулам (9.4), (9.5) и (9.4').

Поэтому функция U' , а следовательно и функция F , остается конечной и непрерывной для всех значений координат Якоби, кроме тех их значений, которые обращают в нуль какой-либо из радиусов-векторов или какое-либо из взаимных расстояний.

Допустим, что начальные условия для исходной системы (9.1) заданы таким образом, что никакие две из $n+1$

точек системы не могут столкнуться ни для какого значения времени *).

Тогда функция U' всегда будет оставаться конечной, а так как координаты каждой из движущихся точек, как было показано в предыдущем разделе, разложимы в ряды по своим величинам (9.41') и по косинусам и синусам кратных своей средней долготы λ_j , то возмущающая функция U' разложима в ряд, расположенный по целым положительным степеням $4n$ величин (9.41') ($j = 1, 2, \dots, n$), коэффициенты которого суть тригонометрические многочлены относительно косинусов и синусов аргументов вида

$$k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + \dots + k_n\lambda_n \quad (9.45)$$

(где все k_j суть целые числа) и, кроме того, зависят от элементов Λ_j , т. е. от больших полуосей оскулирующих орбит.

Это разложение функции U' можно также рассматривать как n -кратный ряд Фурье, расположенный по синусам и косинусам аргументов вида (9.45), коэффициенты которого будут представлены целыми рядами, расположенными по степеням величин (9.41'), коэффициенты которых в свою очередь зависят от Λ_j .

Совокупность всех членов разложения функции U' , не зависящих от средних долгот λ_j , мы назовем, как принято, *вековой частью возмущающей функции* и обозначим через $[U']$.

Эта вековая часть функции U' будет, очевидно, также $4n$ -кратным рядом, расположенным по степеням величин (9.41'), коэффициенты которого зависят от Λ_j .

Так как, с другой стороны, вековая часть функции U' есть просто свободный член (т. е. член, не содержащий тригонометрических функций) ее n -кратного ряда Фурье, то мы можем определить ее следующей формулой:

$$[U'] = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} U' d\lambda_1 d\lambda_2 \dots d\lambda_n. \quad (9.46)$$

*) Условия столкновения между какими-либо двумя точками системы выражаются некоторыми соотношениями между начальными значениями координат и составляющих скоростей этих точек. Такие условия мы будем рассматривать в книге «Аналитические и качественные методы небесной механики», которая готовится к изданию.

Иными словами, вековая часть функции U' совпадает со средним значением этой функции относительно аргументов $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Поэтому вычисление, или нахождение, вековой части $[U']$ функции U' называется также иногда осреднением этой функции по аргументам $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *).

Мы не будем в этой книге производить фактическое разложение возмущающей функции и отметим только нужные нам для дальнейшего простые свойства этого разложения **).

Прежде всего заметим, что вследствие формул (9.4) и (9.4') обратные взаимные расстояния могут быть разложены в ряды, расположенные по степеням малых возмущающих масс.

Коэффициенты этих разложений будут зависеть, как это легко видно также из формул (9.4) и (9.4'), от целых степеней радиусов-векторов r'_j ($j=1, 2, \dots, n$) и от целых положительных степеней скалярных произведений вида

$$x'_i x'_j + y'_i y'_j + z'_i z'_j \quad (i \neq j).$$

Имея теперь в виду структуру разложения координат каждой из точек по степеням своих величин (9.41') и только что замеченное свойство разложений обратных расстояний, мы можем убедиться, что любой член разложения возмущающей функции U' по степеням всех величин (9.41) будет содержать в своем коэффициенте косинусы и синусы только тех аргументов (9.45), для которых сумма $|k_1| + |k_2| + \dots + |k_n|$ есть число одинаковой четности с суммой показателей всех степеней величин (9.41) в рассматриваемом члене.

Поэтому каждый член четной степени в разложении U' по степеням величин (9.41) обязательно будет содержать в своем коэффициенте члены, для которых $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$, т. е. вековые члены.

*) Заметим, что операцию осреднения можно производить не по всем аргументам, а только по некоторым из них. Результатом такого осреднения будет функция, зависящая от тех средних долгот, по которым не производится осреднение.

**) Первые члены разложения возмущающей функции для $n=2$, приведены в моей книге «Введение в небесную механику», ГОНТИ, 1938.

Наоборот, каждый член нечетной степени относительно всех величин (9.41) в разложении U' будет содержать в своем коэффициенте только такие косинусы и синусы, для которых $|k_1| + |k_2| + \dots + |k_n|$ есть нечетное число, откуда следует, что члены нечетной степени заведомо не содержат в своих коэффициентах вековых членов.

Из этих рассуждений следует, что *вековая часть* $[U']$ *возмущающей функции* U' *содержит члены только четной степени относительно величин* (9.41) ($j = 1, 2, \dots, n$).

Обозначим теперь через $[F]$ вековую часть характеристической функции F системы уравнений возмущенного движения (9.37). Очевидно, что

$$[F] = \sum_{j=1}^n \frac{\mu_j^{*2}}{2m_j \Lambda_j^2} + [U'], \quad (9.47)$$

а поэтому $[F]$ (или среднее значение функции F) есть ряд, расположенный по степеням всех величин (9.41') и содержащий члены только четной степени относительно этих переменных.

Мы можем представить, следовательно, функцию $[F]$ в виде ряда

$$[F] = \Phi_0 + \Phi_2 + \dots + \Phi_{2k} + \dots, \quad (9.47')$$

где Φ_{2k} обозначает целую, рациональную, однородную функцию степени $2k$ от всех величин (9.41), коэффициенты которой зависят только от элементов Λ_j .

В частности, Φ_2 есть квадратичная форма от всех величин (9.41).

Обращая теперь внимание на формулы (9.43) и (9.43'), мы можем утверждать, что квадратичная форма Φ_2 есть сумма двух квадратичных форм, одна из которых содержит только переменные $\xi_j/\sqrt{\Lambda_j}$ и $\eta_j/\sqrt{\Lambda_j}$, а другая — только переменные $p_j/\sqrt{\Lambda_j}$ и $q_j/\sqrt{\Lambda_j}$.

Выпишем окончательные выражения для упомянутых квадратичных форм, вытекающие из подробного разложения возмущающей функции, в котором сверх того отброшены

все члены выше второго порядка относительно возмущающих масс *).

Вводя обозначения

$$\left. \begin{aligned} \Phi'_2(x_i, x_j) &= f m_i m_j \left\{ \frac{1}{8} B_1(a'_i, a'_j) \left[\frac{x_i^2}{\Lambda_i} + \frac{x_j^2}{\Lambda_j} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} B_2(a'_i, a'_j) \frac{x_i x_j}{\sqrt{\Lambda_i \Lambda_j}} \right\}, \\ \Phi''_2(x_i, x_j) &= f m_i m_j \left\{ \frac{1}{8} B_1(a'_i, a'_j) \left[\frac{x_i^2}{\Lambda_i} + \frac{x_j^2}{\Lambda_j} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} B_1(a'_i, a'_j) \frac{x_i x_j}{\sqrt{\Lambda_i \Lambda_j}} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (9.48)$$

где i и j суть какие-либо значения индексов из ряда 1, 2, ..., n ($j \neq i$), а B_1 и B_2 суть положительные числа, определяемые формулами

$$\left. \begin{aligned} B_1(a'_i, a'_j) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{a'_i a'_j \cos \varphi \, d\varphi}{[a_i'^2 + a_j'^2 - 2a'_i a'_j \cos \varphi]^{3/2}}, \\ B_2(a'_i, a'_j) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{a'_i a'_j \cos 2\varphi \, d\varphi}{[a_i'^2 + a_j'^2 - 2a'_i a'_j \cos \varphi]^{3/2}}, \end{aligned} \right\} \quad (9.49)$$

мы будем иметь для квадратичной формы Φ_2 следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Phi_2 = & \left\{ \sum \Phi'_2(\xi_i, \xi_j) + \sum \Phi'_2(\eta_i, \eta_j) \right\} + \\ & + \left\{ - \sum \Phi''_2(p_i, p_j) - \sum \Phi''_2(q_i, q_j) \right\}, \end{aligned} \quad (9.50)$$

*) Мы не можем в этой книге рассматривать все детали техники разложения возмущающей функции и вынуждены ограничиться только изложением общих принципов этих громоздких операций.

где каждая сумма распространена на все различные пары индексов, так что $ij = 12, 13, \dots, (n-1)n^*$.

§ 3. Теория Лагранжа вековых возмущений

1. Уравнения, определяющие вековые возмущения элементов. Применение способа Пикара. Имея разложение характеристической функции F , мы можем получить путем простых дифференцирований выражения для всех правых частей уравнений возмущенного движения (9.37).

Эти выражения представляются, очевидно, в виде рядов такого же характера, как и ряд для функции F , т. е. в виде степенных рядов, расположенных по целым, положительным (возрастающим) степеням всех величин (9.41), коэффициенты которых суть тригонометрические многочлены относительно косинусов и синусов аргументов (9.45), зависящие, кроме того, от величин Λ_j .

Ряды эти будут сходящимися по крайней мере для малых числовых значений элементов (9.41') и для малых значений возмущающих масс, разумеется, при прежнем допущении относительно отсутствия взаимных столкновений между движущимися точками.

Теперь мы можем трактовать уравнения (9.37) совершенно так же, как мы это делали в предыдущей главе с дифференциальными уравнениями возмущенного движения в форме (8.15), и, следовательно, опять построить теорию возмущений, основанную только на уравнениях канонического вида.

Мы не будем повторять для канонических уравнений все рассуждения и выводы главы восьмой и остановим здесь наше внимание исключительно на вопросе о вековых возмущениях.

*) Подробности разложения возмущающей функции см. во 2-м томе «Курса небесной механики» М. Ф. Субботина. Для канонических переменных некоторые детали этого разложения (для случая $n=2$) приведены, как уже указано, в моей книге (см. сноску на стр. 502). Общие свойства разложения возмущающей функции подробно рассмотрены в книге Poincaré H., *Leçons de Mécanique Céleste*, t. I, 1905. См. также Charlier C. L., *Die mechanik des Himmels*, B. I, 1927; Tisserand, *Traité de la mécanique céleste*, t. I; Dziobek O., *Die mathematischen theorien der planeten-bewegungen*, Leipzig, 1888.

В главе восьмой было уже указано, что к этому вопросу можно подойти с двух различных точек зрения, имеющих, впрочем, общую основу, которая заключается в замене полной возмущающей функции ее вековой или осредненной частью.

Сделаем эту замену в уравнениях (9.37). Тогда правые части этих уравнений не будут вовсе зависеть от средних долгот и уравнения возмущенного движения напишутся в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Lambda_s}{dt} &= 0, & \frac{d\xi_s}{dt} &= \frac{\partial [F]}{\partial \eta_s}, & \frac{dp_s}{dt} &= \frac{\partial [F]}{\partial q_s}, \\ \frac{d\lambda_s}{dt} &= -\frac{\partial [F]}{\partial \Lambda_s}, & \frac{d\eta_s}{dt} &= -\frac{\partial [F]}{\partial \xi_s}, & \frac{dq_s}{dt} &= -\frac{\partial [F]}{\partial p_s}, \end{aligned} \right\} \quad (9.51)$$

откуда сейчас же выводим

$$\Lambda_s = \Lambda_s^{(0)} = \text{const} \quad (s = 1, 2, \dots, n). \quad (9.51')$$

Таким образом, величины Λ_s , т. е. *большие полуоси a'_s оскулирующих орбит, остаются постоянными во все время движения*, что и составляет теорему Лапласа о неизменяемости больших полуосей (а значит и средних движений), рассмотренную уже в предыдущей главе.

Подставляя постоянные значения величин Λ_s во все остальные уравнения системы (9.51), мы сделаем правые их части функциями только величин

$$\frac{\xi_s}{\sqrt{\Lambda_s^{(0)}}}, \quad \frac{\eta_s}{\sqrt{\Lambda_s^{(0)}}}, \quad \frac{p_s}{\sqrt{\Lambda_s^{(0)}}}, \quad \frac{q_s}{\sqrt{\Lambda_s^{(0)}}}. \quad (9.52)$$

Поэтому уравнения, определяющие средние долготы λ_s , отщепляются от остальной системы и, когда величины (9.52) уже определены в зависимости от времени и произвольных постоянных, могут быть проинтегрированы отдельно при помощи простых квадратур.

Легко видеть, что возмущенные значения средних долгот определяются следующими формулами:

$$\lambda_s = \lambda_s^{(0)} + n_s'^{(0)} (t - t_0) - \int_{t_0}^t \frac{\partial [U']}{\partial \Lambda_s^{(0)}} dt, \quad (9.51'')$$

где $\lambda_s^{(0)}$ — произвольные постоянные интегрирования (средние долготы эпохи).

Имея теперь в виду формулу (9.47), мы приведем нашу задачу к интегрированию следующей системы $4n$ порядка:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi_s}{dt} &= \frac{\partial [U']}{\partial \eta_s}, & \frac{d\eta_s}{dt} &= -\frac{\partial [U']}{\partial \xi_s}, \\ \frac{dp_s}{dt} &= \frac{\partial [U']}{\partial q_s}, & \frac{dq_s}{dt} &= -\frac{\partial [U']}{\partial p_s}, \end{aligned} \right\} \quad (9.53)$$

правые части которых суть целые ряды, расположенные по степеням величин (9.52) и притом не зависящие от времени.

Поэтому вследствие общих свойств канонических систем уравнения (9.53) имеют первый интеграл

$$[U'] = C = \text{const}, \quad (9.53')$$

при помощи которого порядок системы (9.53) можно понизить на единицу. Кроме того, из уравнений (9.53) можно исключить время t , принимая за независимую переменную какую-либо из величин (9.52), так что в результате порядок системы (9.53) может быть понижен на две единицы.

Однако, как мы уже несколько раз отмечали, такое понижение порядка практически не дает никаких преимуществ и только усложняет правые части уравнений, а поэтому фактически не производится.

Итак, задача теории вековых возмущений заключается в интегрировании системы (9.53) и различные точки зрения на эту теорию отличаются друг от друга только способами приближенного интегрирования уравнений (9.53).

Первый способ интегрирования системы (9.53) заключается в применении к этой системе способа последовательных приближений Пикара, основанного на малости правых частей уравнений (9.53) и, следовательно, на весьма медленном изменении искомых функций.

Как нам уже известно, для получения первого приближения в способе Пикара нужно заменить в правых частях уравнений (9.53) все величины (9.52) их постоянными начальными значениями

$$\frac{\xi_s^{(0)}}{\sqrt{\Lambda_s^{(0)}}}, \quad \frac{\eta_s^{(0)}}{\sqrt{\Lambda_s^{(0)}}}, \quad \frac{p_s^{(0)}}{\sqrt{\Lambda_s^{(0)}}}, \quad \frac{q_s^{(0)}}{\sqrt{\Lambda_s^{(0)}}}, \quad (9.52')$$

которые предполагаются заданными вещественными числами.

Тогда правые части уравнений (9.53) сделаются известными постоянными, численно равными начальным значениям производных от элементов Пуанкаре по времени, т. е. скоростям изменений этих элементов в момент t_0 .

Полагая поэтому

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi}_s^{(0)} &= \frac{\partial [U']_0}{\partial \eta_s^{(0)}}, & \dot{\eta}_s^{(0)} &= -\frac{\partial [U']_0}{\partial \xi_s^{(0)}}, \\ \dot{p}_s^{(0)} &= \frac{\partial [U']_0}{\partial q_s^{(0)}}, & \dot{q}_s^{(0)} &= -\frac{\partial [U']_0}{\partial p_s^{(0)}}, \end{aligned} \right\} \quad (9.54)$$

где $[U']_0$ получается из $[U']$ заменой всех величин (9.52) величинами (9.52'), мы получим в первом приближении решение системы (9.53) в виде

$$\left. \begin{aligned} \xi_s^{(1)} &= \xi_s^{(0)} + \dot{\xi}_s^{(0)}(t - t_0), & \eta_s^{(1)} &= \eta_s^{(0)} + \dot{\eta}_s^{(0)}(t - t_0), \\ p_s^{(1)} &= p_s^{(0)} + \dot{p}_s^{(0)}(t - t_0), & q_s^{(1)} &= q_s^{(0)} + \dot{q}_s^{(0)}(t - t_0). \end{aligned} \right\} \quad (9.54')$$

Величины (9.54') отличаются от начальных значений (9.52') членами весьма медленно, но постоянно растущими вместе с временем t . Эти члены и называются по этой причине *вековыми возмущениями* или *вековыми неравенствами*.

Определение или вычисление этих членов и составляет элементарную теорию вековых возмущений, которой обычно и довольствуются на практике.

Однако не представляет принципиальных затруднений получить и второе приближение в способе Пикара.

Возвращаясь для этого к уравнениям (9.53), правые части которых суть бесконечные ряды, расположенные по степеням величин (9.52), заменим в этих правых частях величины (9.52) выражениями (9.54), поделенными на $\sqrt{\Lambda_s^{(0)}}$.

Тогда правые части уравнений (9.53) сделаются бесконечными рядами, расположенными по целым, возрастающим степеням $t - t_0$, коэффициенты которых будут некоторыми постоянными, которые можно вычислить.

Интегрируя полученные равенства, мы получим второе приближение, в котором элементы Пуанкаре представятся бесконечными рядами, расположенными по степеням $t - t_0$.

Таким же образом можно поступать и далее. Очевидно, в каждом следующем приближении элементы ξ_s , η_s , p_s , q_s

будут представляться подобными же рядами, т. е. рядами, расположенными по степеням $t - t_0$, но коэффициенты этих рядов будут изменяться от одного приближения к другому. В пределе мы получим точное решение системы (9.53) в виде подобных же рядов, но затруднение возникает здесь при исследовании сходимости рядов, которое нужно проводить на каждом шаге процедуры способа Пикара.

Мы ограничимся сделанными замечаниями по этому вопросу и перейдем теперь к другому способу интегрирования системы (9.53), который также является способом последовательных приближений и отличается от выше рассмотренного только выбором первого приближения.

2. Способ Лагранжа в трактовке Ляпунова — Пуанкаре. Способ, о котором будет сейчас идти речь, впервые разработан Лагранжем и поэтому называется *способом Лагранжа вычисления вековых возмущений*.

Заметив, что в элементарном вычислении вековых возмущений оскулирующих элементов участвует только часть возмущающей функции — свободный член ее ряда Фурье, — Лагранж пришел к мысли построить теорию вековых возмущений независимо от общей теории возмущений, рассматривая в дифференциальных уравнениях для оскулирующих элементов вместо полной возмущающей функции только этот свободный член, который он и назвал вековой частью возмущающей функции.

Для этого Лагранж выделил из разложения возмущающей функции все члены не выше второго порядка относительно эксцентриситетов и наклонностей в свободном члене ряда Фурье и составил дифференциальные уравнения, определяющие элементы (9.42), которые мы назвали *элементами Лагранжа*.

В результате он получил систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, интегрируя которую нашел выражения для элементов (9.42) в виде тригонометрических функций.

Эти выражения и называются с тех пор *тригонометрическими выражениями вековых возмущений*, несмотря на противоречие, заключающееся в этом названии.

Способ Лагранжа был несколько дополнен и видоизменен А. Пуанкаре, который ввел вместо элементов Лагранжа свою каноническую систему элементов и применил для определения

этих элементов новый способ интегрирования системы дифференциальных уравнений, разработанный им самим и одновременно и более строго — А. М. Ляпуновым *).

Рассмотрим систему уравнений (9.53), в которой $[U']$ — вековая часть возмущающей функции — есть бесконечный ряд, расположенный по возрастающим степеням величин (9.52), содержащий члены только четного порядка.

Следуя Лагранжу, назовем функции, удовлетворяющие этим уравнениям, вековыми возмущениями элементов Пуанкаре ξ_s, η_s, p_s, q_s и поставим своей задачей приближенное определение этих функций по способу Ляпунова — Пуанкаре.

Заменяя в системе (9.53) функцию $[U']$ ее разложением, мы напишем уравнения, определяющие вековые возмущения в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi_s}{dt} &= \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta_s} + \dots, & \frac{d\eta_s}{dt} &= -\frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi_s} + \dots, \\ \frac{dp_s}{dt} &= \frac{\partial \Phi_2}{\partial q_s} + \dots, & \frac{dq_s}{dt} &= -\frac{\partial \Phi_2}{\partial p_s} + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (9.55)$$

где частные производные от квадратичной формы Φ_2 суть однородные, линейные функции величин (9.52) с постоянными коэффициентами, а невыписанные члены содержат неизвестные функции в степенях выше первой.

Способ Ляпунова — Пуанкаре интегрирования системы нелинейных уравнений (9.55) заключается в нахождении общего решения этих уравнений в виде бесконечных рядов, расположенных по возрастающим степеням произвольных постоянных, за которые можно принять величины (9.52').

Положим для этого, следуя А. М. Ляпунову,

$$\left. \begin{aligned} \xi_s &= \xi_s^{(1)} + \xi_s^{(2)} + \dots + \xi_s^{(m)} + \dots, \\ \eta_s &= \eta_s^{(1)} + \eta_s^{(2)} + \dots + \eta_s^{(m)} + \dots, \\ p_s &= p_s^{(1)} + p_s^{(2)} + \dots + p_s^{(m)} + \dots, \\ q_s &= q_s^{(1)} + q_s^{(2)} + \dots + q_s^{(m)} + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (9.56)$$

*) См. Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, 1893 (см. полное собрание сочинений А. М. Ляпунова, т. 2, изд. АН СССР, 1956 г.).

и, рассматривая в этих рядах величины $\xi_s^{(m)}$, $\eta_s^{(m)}$, $p_s^{(m)}$, $q_s^{(m)}$ и их первые производные по времени, как величины m -го порядка, потребуем, чтобы ряды (9.56) удовлетворяли формально уравнениям (9.55).

Для этого подставим в уравнения (9.55) вместо неизвестных функций ряды (9.56) и приравняем члены одинакового порядка в левых и правых частях получившихся равенств.

В результате мы получим следующие системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi_s^{(1)}}{dt} &= \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta_s^{(1)}}, & \frac{d\eta_s^{(1)}}{dt} &= -\frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi_s^{(1)}}, \\ \frac{dp_s^{(1)}}{dt} &= \frac{\partial \Phi_2}{\partial q_s^{(1)}}, & \frac{dq_s^{(1)}}{dt} &= -\frac{\partial \Phi_2}{\partial p_s^{(1)}} \end{aligned} \right\} \quad (9.57)$$

и для $m > 1$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi_s^{(m)}}{dt} &= \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta_s^{(m)}} + \Xi_s^{(m)}, & \frac{d\eta_s^{(m)}}{dt} &= -\frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi_s^{(m)}} + H_s^{(m)}, \\ \frac{dp_s^{(m)}}{dt} &= \frac{\partial \Phi_2}{\partial q_s^{(m)}} + P_s^{(m)}, & \frac{dq_s^{(m)}}{dt} &= -\frac{\partial \Phi_2}{\partial p_s^{(m)}} + Q_s^{(m)} \end{aligned} \right\} \quad (9.57')$$

($s = 1, 2, \dots, n; \quad m = 2, 3, \dots$).

В уравнениях (9.57) нужно, разумеется, заменить все величины ξ_s , η_s , p_s , q_s первыми членами рядов (9.56), а поэтому уравнения (9.57) можно вывести непосредственно из уравнений (9.55), отбрасывая в последних все члены выше первого порядка.

В уравнениях (9.57') нужно точно так же рассматривать функцию Φ_2 как квадратичную форму от величин $\xi_s^{(m)}$, $\eta_s^{(m)}$, $p_s^{(m)}$, $q_s^{(m)}$, а дополнительные члены в этих уравнениях суть целые многочлены (с постоянными коэффициентами) от величин $\xi_s^{(1)}$, $\eta_s^{(1)}$, $p_s^{(1)}$, $q_s^{(1)}$, $\dots$, $\xi_s^{(m-1)}$, $\eta_s^{(m-1)}$, $p_s^{(m-1)}$, $q_s^{(m-1)}$.

Таким образом, сначала нужно интегрировать уравнения (9.57), после чего последовательно будем находить решения уравнений (9.57'), дополнительные члены которых окажутся известными функциями времени.

А. М. Ляпунов показал, что получающиеся таким образом ряды (9.56), располагающиеся по целым, возрастающим степеням произвольных постоянных, сходятся абсолютно и равномерно при достаточно малых числовых значениях этих постоянных и для всех значений времени в некотором промежутке $(t_0, \bar{t})$.

Мы не будем здесь рассматривать эту задачу подробно и ограничимся только интегрированием уравнений (9.57), определяющих первые члены рядов (9.56), что и составляет, собственно говоря, теорию Лагранжа в ее первоначальном виде.

Иными словами, мы ограничимся рассмотрением только первого приближения полной теории вековых возмущений *).

3. Вычисление в первом приближении вековых возмущений эксцентриситетов и долгот перигентров. Мы уже заметили, что уравнения первого приближения (9.57) получаются также непосредственно из полных уравнений (9.55) отбрасыванием в правых частях последних всех членов выше первой степени.

Для этого нужно только заменить полную характеристическую функцию $[U']$ квадратичной формой Φ_2 , которая есть сумма двух квадратичных форм Φ'_2 и Φ''_2 , из которых первая зависит только от элементов ξ_s, η_s , названных Пуанкаре *эксцентрическими элементами*, а вторая — только от элементов p_s, q_s , которые Пуанкаре назвал *облическими* **).

Отсюда следует, что система уравнений первого приближения, соответствующая системе (9.55), распадается на две независимые системы.

Первая система определяет эксцентрические элементы и напишется в виде

$$\frac{d\xi_s}{dt} = \frac{\partial \Phi'_2}{\partial \eta_s}, \quad \frac{d\eta_s}{dt} = -\frac{\partial \Phi'_2}{\partial \xi_s} \quad (9.58)$$

$$(s = 1, 2, \dots, n).$$

*) См. книгу А. Пуанкаре, указанную в сноске на стр. 505. К полной теории вековых возмущений мы вернемся еще в следующей книге.

**) Мы показали выше, что элементы ξ_s, η_s суть величины порядка эксцентриситетов, откуда и их название. Величины p_s, q_s суть величины порядка наклонности, вследствие чего Пуанкаре и назвал их *облическими* (obliquité — наклонность).

Вторая система, определяющая облические элементы, имеет соответственно вид

$$\frac{dp_s}{dt} = \frac{\partial \Phi_2''}{\partial q_s}, \quad \frac{dq_s}{dt} = -\frac{\partial \Phi_2''}{\partial p_s} \quad (9.59)$$

($s = 1, 2, \dots, n$).

Рассмотрим сначала систему (9.58). По формуле (9.50)

$$\Phi_2' = \sum \Phi_2'(\xi_i, \eta_j) + \sum \Phi_2'(\eta_i, \eta_j),$$

где $\Phi_2'(\xi_i, \eta_j)$ и $\Phi_2'(\eta_i, \eta_j)$ определяются формулами (9.48). Введем для сокращения следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\gamma}_{ij} &= \frac{1}{4} \frac{fm_i m_j}{\Lambda_i^{(0)}} B_1(a_i'^{(0)}, a_j'^{(0)}), \\ \gamma_{ij} &= -\frac{1}{4} \frac{fm_i m_j}{\sqrt{\Lambda_i^{(0)} \Lambda_j^{(0)}}} B_2(a_i'^{(0)}, a_j'^{(0)}), \quad \gamma_{ij} = \gamma_{ji}, \end{aligned} \right\} \quad (9.60)$$

и для $j = l$

$$\gamma_{ii} = \sum_{j=1}^n \bar{\gamma}_{ij}. \quad (9.60')$$

Тогда квадратичная форма Φ_2' примет вид

$$\Phi_2' = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \gamma_{ij} (\xi_i \xi_j + \eta_i \eta_j), \quad (9.60'')$$

и уравнения (9.58), определяющие эксцентрисические элементы, напишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi_s}{dt} &= \gamma_{s1}\eta_1 + \gamma_{s2}\eta_2 + \dots + \gamma_{sn}\eta_n, \\ \frac{d\eta_s}{dt} &= -\gamma_{s1}\xi_1 - \gamma_{s2}\xi_2 - \dots - \gamma_{sn}\xi_n. \end{aligned} \right\} \quad (9.61)$$

Умножая уравнения (9.61) соответственно на $2\xi_s$, $2\eta_s$ и складывая все уравнения, мы имеем, в силу (9.60),

$$\sum_{s=1}^n \left(2\xi_s \frac{d\xi_s}{dt} + 2\eta_s \frac{d\eta_s}{dt} \right) = 0,$$

откуда находим первый интеграл системы (9.61) в виде

$$\sum_{s=1}^n (\xi_s^2 + \eta_s^2) = C. \quad (9.61')$$

Для интегрирования системы линейных однородных уравнений (9.61) с постоянными, вещественными коэффициентами нужно прежде всего составить характеристическое уравнение этой системы. Это уравнение напишется в виде

$$D(z) = \begin{vmatrix} -z & \dots & 0 & \gamma_{11} & \dots & \gamma_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -z & \gamma_{n1} & \dots & \gamma_{nn} \\ -\gamma_{11} & \dots & -\gamma_{1n} & -z & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\gamma_{n1} & \dots & -\gamma_{nn} & 0 & \dots & -z \end{vmatrix} = 0 \quad (9.62)$$

и по свойству канонических систем содержит только четные степени неизвестной z . Это легко доказать, рассматривая определитель $D(-z)$, который после надлежащей перестановки строк и столбцов приводится к первоначальному определителю $D(z)$.

Поэтому корнями уравнения (9.62) будут числа

$$\pm z_1, \pm z_2, \dots, \pm z_n, \quad (9.62')$$

которые не могут быть действительными, отличными от нуля.

В самом деле, так как каждому корню характеристического уравнения соответствует некоторое частное решение системы (9.61), то действительному положительному z_j будет соответствовать решение вида

$$\xi_s = C_s e^{z_j t}, \quad \eta_s = D_s e^{z_j t},$$

где C_s и D_s суть постоянные. Но тогда имеем

$$\sum_{s=1}^n (\xi_s^2 + \eta_s^2) = e^{2z_j t} \sum_{s=1}^n (C_s^2 + D_s^2).$$

Это выражение неограниченно растет вместе с временем, в противоречии с интегралом (9.61'). Следовательно, должно быть $z_j = 0$, что и показывает невозможность действительных корней уравнения (9.62), отличных от нуля.

Покажем теперь, что уравнение (9.62) не может также иметь комплексных корней с неравной нулю вещественной частью.

В самом деле, допустим, что среди корней (9.62) имеется пара комплексных сопряженных $\alpha \pm \beta i$ ($i = \sqrt{-1}$).

Этой паре корней соответствует решение системы (9.61) вида

$$\begin{aligned}\xi_s &= e^{\alpha t} (A_s \cos \beta t + B_s \sin \beta t), \\ \eta_s &= e^{\alpha t} (A'_s \cos \beta t + B'_s \sin \beta t),\end{aligned}$$

где A_s, B_s, A'_s, B'_s — постоянные.

Отсюда находим

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^n (\xi_s^2 + \eta_s^2) &= e^{2\alpha t} \sum_{s=1}^n [(A_s^2 + A_s'^2) \cos^2 \beta t + \\ &+ (B_s^2 + B_s'^2) \sin^2 \beta t + 2(A_s B_s + A'_s B'_s) \cos \beta t \sin \beta t].\end{aligned}$$

Это выражение при $\alpha \neq 0$ неограниченно растет вместе с временем, в противоречии с интегралом (9.61). Таким образом, должно быть $\alpha = 0$, т. е. все корни уравнения (9.62) должны быть чисто мнимыми.

Однако среди корней уравнения (9.62) могут быть, вообще говоря, и кратные и тогда возникает вопрос, не появятся ли среди решений системы (9.61) такие, которые содержат множителем какую-либо степень t .

Пуанкаре доказал, что даже в случае кратных корней такие решения не существуют. Действительно, допустим опять обратное, т. е. что система (9.61) имеет решение вида

$$\begin{aligned}\xi_s &= t^m (A_s \cos \beta t + B_s \sin \beta t), \\ \eta_s &= t^m (A'_s \cos \beta t + B'_s \sin \beta t),\end{aligned}$$

где $m < n$.

Тогда снова находим

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^n (\xi_s^2 + \eta_s^2) &= t^{2m} \sum_{s=1}^n [(A_s^2 + A_s'^2) \cos^2 \beta t + \\ &+ (B_s^2 + B_s'^2) \sin^2 \beta t + 2(A_s B_s + A'_s B'_s) \cos \beta t \sin \beta t].\end{aligned}$$

Это выражение неограниченно растет вместе с t при $m \neq 0$ в противоречии с интегралом (9.61).

Таким образом, все корни характеристического уравнения (9.62) должны быть чисто мнимыми и им соответствуют чисто тригонометрические решения системы (9.61).

Чтобы найти это решение, проще всего поступить следующим образом. Введем вместо каждой пары канонических эксцентрических элементов ξ_s, η_s комплексную переменную ζ_s , полагая

$$\zeta_s = \xi_s + i\eta_s \quad (i = \sqrt{-1}). \quad (9.63)$$

Тогда система (9.61) преобразуется в следующую:

$$\frac{d\zeta_s}{dt} = -i(\gamma_{s1}\zeta_1 + \gamma_{s2}\zeta_2 + \dots + \gamma_{sn}\zeta_n). \quad (9.63')$$

Система (9.63') есть система линейных однородных уравнений порядка n (а не $2n$, как система (9.61)!) с постоянными чисто мнимыми коэффициентами.

Характеристическое уравнение этой системы имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} -i\gamma_{11} - x, & -i\gamma_{12}, & \dots, & -i\gamma_{1n} \\ -i\gamma_{21}, & -i\gamma_{22} - x, & \dots, & -i\gamma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -i\gamma_{n1}, & -i\gamma_{n2}, & \dots, & -i\gamma_{nn} - x \end{vmatrix} = 0 \quad (9.64)$$

и есть уравнение n -й степени.

Полагая

$$x = -\beta i,$$

мы приведем уравнение (9.64) к виду

$$\Delta(\beta) = \begin{vmatrix} \gamma_{11} - \beta, & \gamma_{12}, & \dots, & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21}, & \gamma_{22} - \beta, & \dots, & \gamma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n1}, & \gamma_{n2}, & \dots, & \gamma_{nn} - \beta \end{vmatrix} = 0. \quad (9.64')$$

Это уравнение называется *вековым уравнением*, а определитель, стоящий в левой его части, *вековым определителем*. Так как система (9.63') эквивалентна системе (9.61),

то корни уравнения (9.64) должны совпадать с n корнями уравнения (9.62), т. е. мы должны иметь

$$z_1 = -\beta_1 i, \quad z_2 = -\beta_2 i, \quad \dots, \quad z_n = -\beta_n i,$$

откуда следует, что вековое уравнение имеет только вещественные корни $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$.

Зная корни векового уравнения, мы можем написать общее решение системы (9.63') в виде

$$\zeta_s = \sum_{j=1}^n C_j K_{sj} e^{-\beta_j i t}, \quad (9.65)$$

где K_{sj} суть вещественные постоянные, зависящие от корней векового уравнения (9.64), а C_s суть произвольные постоянные, которые мы должны рассматривать как числа комплексные. Поэтому можем положить

$$C_j = A_j e^{-i g_j},$$

вследствие чего формулы (9.65) приведутся к виду

$$\zeta_s = \xi_s + i \eta_s = \sum_{j=1}^n A_j K_{sj} e^{-i (\beta_j t + g_j)}, \quad (9.65')$$

откуда, приравнявая действительные и мнимые части в обеих частях равенств, найдем решение первоначальной системы (9.61) в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} \xi_s &= \sum_{j=1}^n A_j K_{sj} \cos(\beta_j t + g_j), \\ \eta_s &= - \sum_{j=1}^n A_j K_{sj} \sin(\beta_j t + g_j). \end{aligned} \right\} \quad (9.66)$$

Из этих формул нетрудно найти приближенные значения эксцентриситетов и долгот перицентров. Действительно, на основании (9.39) мы имеем, отбрасывая малые величины выше первого порядка,

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\Lambda_s^{(0)}} e'_s \cos \pi'_s &= \sum_{j=1}^n A_j K_{sj} \cos(\beta_j t + g_j), \\ \sqrt{\Lambda_s^{(0)}} e'_s \sin \pi'_s &= \sum_{j=1}^n A_j K_{sj} \sin(\beta_j t + g_j), \end{aligned} \right\} \quad (9.67)$$

откуда выводим

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_s^{(0)'} e_s^2 &= A_1^2 K_{s1}^2 + A_2^2 K_{s2}^2 + \dots + A_n^2 K_{sn}^2 + \\ &\quad + 2 \sum A_i A_j K_{si} K_{sj} \cos [(\beta_i - \beta_j) t + g_i - g_j], \\ \operatorname{tg} \pi_s' &= \frac{A_1 K_{s1} \sin (\beta_1 t + g_1) + \dots + A_n K_{sn} \sin (\beta_n t + g_n)}{A_1 K_{s1} \cos (\beta_1 t + g_1) + \dots + A_n K_{sn} \cos (\beta_n t + g_n)}, \end{aligned} \right\} \quad (9.67')$$

что позволяет вычислить числовые значения эксцентриситетов и долгот перицентров оскулирующих орбит.

4. Вычисление в первом приближении вековых возмущений наклонностей и долгот узлов. Рассмотрим теперь уравнения (9.59), определяющие вековые возмущения (в первом приближении!) облических переменных, т. е. наклонностей и долгот узлов.

По формуле (9.50) мы имеем

$$\Phi_2'' = - \sum \Phi_2''(p_i, p_j) - \sum \Phi_2''(p_i, q_j),$$

причем вторая из формул (9.48) дает

$$\Phi_2''(x_i, x_j) = \frac{1}{8} f m_i m_j B_1(a_i'^{(0)}, a_j'^{(0)}) \left[\frac{x_i}{V \Lambda_i^{(0)}} - \frac{x_j}{V \Lambda_j^{(0)}} \right]^2,$$

откуда непосредственно следует, что Φ_2'' есть существенно отрицательная квадратичная форма.

Положим теперь, так же, как и в предыдущем разделе,

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{ij} &= \frac{1}{4} \frac{f m_i m_j}{\Lambda_i^{(0)}} B_1(a_i'^{(0)}, a_j'^{(0)}), \\ \gamma'_{ij} &= \frac{1}{4} \frac{f m_i m_j}{V \Lambda_i^{(0)} \Lambda_j^{(0)}} B_1(a_i'^{(0)}, a_j'^{(0)}), \quad \gamma'_{ij} = \gamma'_{ji} \end{aligned} \quad (9.68)$$

и для $j = i$

$$\gamma'_{ii} = - \sum_{j=1}^n \bar{\gamma}_{ij}. \quad (9.68')$$

Тогда форма Φ_2'' напишется в виде

$$\Phi_2'' = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \gamma'_{ij} (p_i p_j + q_i q_j), \quad (9.68'')$$

а уравнения (9.59) для облических переменных будут иметь такой же вид, как и уравнения для эксцентрических переменных, т. е. мы будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_s}{dt} &= \gamma'_{s1}q_1 + \gamma'_{s2}q_2 + \dots + \gamma'_{sn}q_n, \\ \frac{dq_s}{dt} &= -\gamma'_{s1}p_1 - \gamma'_{s2}p_2 - \dots - \gamma'_{sn}p_n. \end{aligned} \right\} \quad (9.69)$$

Из этих уравнений выводим прежде всего в силу (9.68) первый интеграл

$$\sum_{s=1}^n (p_s^2 + q_s^2) = C', \quad (9.69')$$

который позволяет — так же, как и для случая эксцентрических элементов, — сделать выводы о характере корней характеристического уравнения системы (9.69).

Таким образом, если мы рассмотрим уравнение, аналогичное уравнению (9.64')

$$\Delta'(\beta') = \begin{vmatrix} \gamma'_{11} - \beta', & \gamma'_{12}, & \dots, & \gamma'_{1n} \\ \gamma'_{21}, & \gamma'_{22} - \beta', & \dots, & \gamma'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma'_{n1}, & \gamma'_{n2}, & \dots, & \gamma'_{nn} - \beta' \end{vmatrix} = 0, \quad (9.70)$$

то можем утверждать, что оно имеет только вещественные корни $\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_n$.

Но здесь дополнительно можно показать, что по крайней мере один из этих корней равен нулю.

Действительно, из выражения для квадратичной формы Φ''_2 мы видим, что эта форма обращается в нуль, когда мы положим одновременно

$$\frac{p_1}{\sqrt{\Lambda_1^{(0)}}} = \frac{p_2}{\sqrt{\Lambda_2^{(0)}}} = \dots = \frac{p_n}{\sqrt{\Lambda_n^{(0)}}}$$

и

$$\frac{q_1}{\sqrt{\Lambda_1^{(0)}}} = \frac{q_2}{\sqrt{\Lambda_2^{(0)}}} = \dots = \frac{q_n}{\sqrt{\Lambda_n^{(0)}}},$$

откуда следует, что

$$\Delta'(0) = 0,$$

что и доказывает сделанное замечание.

Теперь, считая, что равный нулю корень есть β'_1 , мы получим общее решение системы (9.69) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} p_s &= B_1 K'_{s1} \cos g'_1 + \sum_{j=2}^n B_j K'_{sj} \cos(\beta'_j t + g'_j), \\ q_s &= -B_1 K'_{s1} \sin g'_1 - \sum_{j=2}^n B_j K'_{sj} \sin(\beta'_j t + g'_j), \end{aligned} \right\} \quad (9.71)$$

где B_j и g'_j суть также произвольные постоянные.

Так как приближенно мы имеем

$$p_s = V \overline{\Lambda_s^{(0)}} \sin i'_s \cos \Omega'_s, \quad q'_s = -V \overline{\Lambda_s^{(0)}} \sin i'_s \sin \Omega'_s,$$

то из (9.71) имеем также приближенные формулы ($\beta'_1 = 0$)

$$\left. \begin{aligned} V \overline{\Lambda_s^{(0)}} \sin i'_s \cos \Omega'_s &= \sum_{j=1}^n B_j K'_{sj} \cos(\beta'_j t + g'_j), \\ V \overline{\Lambda_s^{(0)}} \sin i'_s \sin \Omega'_s &= \sum_{j=1}^n B_j K'_{sj} \sin(\beta'_j t + g'_j), \end{aligned} \right\} \quad (9.71')$$

откуда так же, как и выше, находим

$$\Lambda_s^{(0)} \sin^2 i'_s = B_1^2 K_{s1}'^2 + B_2^2 K_{s2}'^2 + \dots + B_n^2 K_{sn}'^2 + \\ + 2 \sum B_i B_j K'_{si} K'_{sj} \cos[(\beta'_i - \beta'_j)t + g'_i - g'_j]$$

и

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}'_s &= \\ &= \frac{B_1 K'_{s1} \sin g'_1 + B_2 K'_{s2} \sin(\beta'_2 t + g'_2) + \dots + B_n K'_{sn} \sin(\beta'_n t + g'_n)}{B_1 K'_{s1} \cos g'_1 + B_2 K'_{s2} \cos(\beta'_2 t + g'_2) + \dots + B_n K'_{sn} \cos(\beta'_n t + g'_n)}, \end{aligned}$$

что позволяет находить числовые значения наклонностей и долгот восходящих узлов оскулирующих орбит.

Заметим еще, что из приближенных формул (9.67) и (9.71'), в силу интегралов (9.61') и (9.69'), следуют также равенства

$$\Lambda_1^{(0)} e_1'^2 + \Lambda_2^{(0)} e_2'^2 + \dots + \Lambda_n^{(0)} e_n'^2 = C \quad (9.72)$$

и

$$\Lambda_1^{(0)} \sin^2 i_1' + \Lambda_2^{(0)} \sin^2 i_2' + \dots + \Lambda_n^{(0)} \sin^2 i_n' = C'. \quad (9.72')$$

Отсюда следует, что если эксцентриситеты и наклонности оскулирующих орбит малы в начальный момент времени, то постоянные C и C' будут положительными малыми величинами, а значит, как видно из (9.72) и (9.72'), эксцентриситеты и наклонности будут всегда оставаться малыми.

Это и есть теорема Лапласа, доказанная несколько иным путем, чем ранее, и притом для осредненных уравнений, в силу которых величины Λ_s , т. е. большие полуоси оскулирующих орбит, остаются постоянными.

Нужно вдобавок иметь в виду, что полученные выше результаты выведены не из полных осредненных уравнений (9.55), а из уравнений первого приближения (9.58) и (9.59), вследствие чего и сделанные заключения также надлежит рассматривать как приближенные.

Чтобы сделать наши выводы более точными, нужно провести еще детальное исследование системы (9.55), что в этой книге мы производить не будем.

5. Некоторые заключительные замечания. Задача о движении системы $n+1$ взаимно притягивающихся материальных точек приведена нами (путем использования интегралов движения центра инерции всей системы) к интегрированию системы (9.1), определяющей относительные движения n точек в координатах Якоби.

Эти уравнения легко приводятся к канонической форме, которая теоретически более удобна, так как соответствующие уравнения содержат только одну единственную возмущающую функцию.

Определив координаты Якоби, мы легко можем найти и координаты n точек относительно точки m_0 , которые, в случае задачи о движении больших планет солнечной системы, и определяются из непосредственных наблюдений.

Таким образом, мы получим некоторое приближение к действительности, т. е. к действительным движениям небесных тел (например больших планет).

Но оказывается, что система (9.1) не может быть проинтегрирована в конечном виде, что заставляет нас и в этой, уже приближенной задаче производить следующие упрощения, заменяя ее еще более приближенной задачей.

Для этого мы заменили неизвестные функции системы (9.1) новыми неизвестными каноническими элементами второй канонической системы Пуанкаре, что привело нашу задачу к интегрированию канонической системы (9.37).

Здесь еще нет дальнейшего упрощения, так как уравнения (9.37) так же строгі, как и первоначальные уравнения (9.1), и определяют движение той же системы материальных точек под действием сил взаимных притяжений.

Далее мы вступаем уже на путь упрощений, который приводит нас к способу последовательных приближений. Для выполнения последнего приходится еще произвести разложение возмущающей функции в ряд Фурье, коэффициентами которого являются ряды, расположенные по целым, возрастающим степеням переменных Пуанкаре ξ_s, η_s, p_s, q_s .

Мы ограничились в этой главе рассмотрением только вековой части возмущающей функции, вследствие чего задача приводится к интегрированию уравнений (9.55) и к ряду квадратур.

Задача об интегрировании уравнений (9.55) и составляет *теорию вековых возмущений*, которую в дальнейшем можно строить или исходя из метода последовательных приближений Пикара, что дает в первом приближении обычные вековые возмущения, или применяя метод Ляпунова — Пуанкаре, который приводит в первом приближении к тригонометрическим выражениям для вековых возмущений.

Но допустим, что уравнения (9.55) проинтегрированы не только в первом приближении, а полностью, что возможно, конечно, осуществить при помощи бесконечных рядов, расположенных или по степеням времени (способ Пикара), или по степеням произвольных постоянных (способ Ляпунова — Пуанкаре).

Это решение заведомо не является решением задачи, т. е. не является решением уравнений (9.37), правые части кото-

рых содержат еще бесчисленное множество периодических членов.

Поступая теперь так же, как и в главе восьмой, мы можем определить из уравнений (9.37) периодические возмущения, по крайней мере первого порядка, прибавляя которые к найденным вековым возмущениям, мы получим полные выражения возмущений в первом приближении, чем на практике и приходится обыкновенно ограничиваться.

Но тогда, конечно, возникает вопрос о том, окажутся ли выведенные нами приближенные формулы способными хоть в какой-либо степени отразить действительные движения настоящих небесных тел (естественных или искусственных) и в случае утвердительного на него ответа возникает второй вопрос о том, какова погрешность, допускаемая нами заменой точных (но неизвестных) формул приближенными.

В настоящее время теоретики не могут полностью ответить на эти важные вопросы, но можно надеяться, что в недалеком будущем новые методы математики позволят решить эти задачи *).

Но если теория пока еще бессильна, мы все же можем быть уверены, что применяемые нами приближенные формулы действительно дают некоторое, приближенное решение задачи.

Действительно, повседневная астрономическая практика обнаруживает, в громадном большинстве случаев, изумительное совпадение между теорией и наблюдениями, и это совпадение убеждает нас, что, несмотря на все математическое несовершенство и недостаточную обоснованность применяемых нами методов, мы действительно изучаем фактические движения настоящих небесных тел.

Сказанное подтверждается вдобавок результатами применения к задачам небесной механики численных методов интегрирования при помощи быстродействующих электронных счетных машин.

Действительно, численное интегрирование дифференциальных уравнений движения можно произвести на таких машинах с весьма высокой точностью на сотни лет вперед и назад.

*) Мы имеем в виду работы последнего десятилетия и прежде всего работы немецкого математика Зигеля. (Зигель К. А., Лекции по небесной механике, перев. с нем., ИЛ, 1959.)

Полученные таким способом числовые значения координат движущихся тел (например, планет солнечной системы или искусственных спутников Земли) сравнивались с числовыми значениями тех же координат, полученными из приближенных аналитических формул теории возмущений.

В результате получается совпадение такого же примерно порядка, как и при сравнении теории с данными наблюдений, что еще раз убеждает нас в том, что полученные приближенные формулы действительно позволяют построить математическую (пусть приближенную!) теорию движения действительных небесных тел.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ИСТОРИКО-БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ ОЧЕРК РАЗВИТИЯ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

В заключение автору кажется полезным окинуть, хотя бы беглым взглядом, историю возникновения и развития той части астрономической науки, которая является предметом нашей книги и которую мы называем, следуя почти двухсотлетней традиции, *небесной механикой*.

К тому же всегда интересно ознакомиться с прошлым той науки, которую мы изучаем, особенно когда эта наука является необыкновенным и величественным созданием человеческого разума с гордым названием — небесная механика.

В приводимом ниже кратком историко-библиографическом очерке автор был вынужден ограничиться перечислением некоторых важнейших для небесной механики исторических дат, упоминанием немногих великих, знаменитых и почитаемых имен, а также краткой характеристикой нескольких классических сочинений, которые были написаны специально с учебными целями или, во всяком случае, могут быть рассматриваемы и использованы как учебные руководства.

§ 1. Возникновение небесной механики

1. Законы Кеплера. Первой датой, имевшей значение для возникновения небесной механики, является 1543 г., когда появилось знаменитое сочинение Николая Коперника (Copernikus Nikolaus, 1473—1543) «Об обращении небесных сфер», раскрывшее истинное строение солнечной системы и произведшее полный переворот в мировоззрении людей.

Коперник показал, что не Земля является «центром мира», как официально считалось ранее, а Солнце, и что все.

планеты, известные в то время, — Меркурий, Венера, Земля, Марс, Юпитер и Сатурн — обращаются вокруг Солнца по почти круговым орбитам, лежащим почти в одной плоскости. Земля, кроме того, вращается вокруг своей оси, а Луна обращается вокруг Земли, являясь ее спутником.

Однако ни причины, приводящие планеты в движение, ни истинные законы этих движений еще не были известны. Лишь через полвека некоторую ясность в эти вопросы внес знаменитый немецкий астроном Кеплер (Kepler Johann, 1571—1630). В результате многолетней обработки наблюдений планеты Марс, сделанных Тихо Браге (Tycho Brahes, 1546—1601), Кеплер вывел следующие законы (1609):

1. *Гелиоцентрическое движение каждой планеты происходит в неподвижной плоскости, проходящей через центр Солнца, и притом так, что площадь сектора, описываемого радиусом-вектором планеты, изменяется пропорционально времени.*

2. *Орбита каждой планеты есть эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце.*

Позднее (1619) Кеплер вывел еще один закон, связывающий всю солнечную систему в одно целое, а именно:

3. *Квадраты времен обращений планет вокруг Солнца относятся, как кубы больших полуосей их орбит.*

Эти законы были затем проверены и для других планет, а также для Луны. Они позволяли значительно проще рассчитывать движения планет, чем это делалось по теории Птолемея.

Сформулированные только что законы, называемые ныне *законами Кеплера* *), достаточно точно отражают истинные свойства движения планеты вокруг Солнца, а также Луны вокруг Земли или какого-нибудь спутника вокруг своей планеты, и являются с тех пор основными законами небесной механики, датой возникновения которой и можно считать время опубликования законов Кеплера, т. е. начало XVII в.

С именем Кеплера связано еще знаменитое уравнение — *уравнение Кеплера*, — позволяющее найти положение пла-

*) Законы Кеплера приведены здесь в том порядке, в каком они были даны самим Кеплером. Позднее этот порядок был изменен: первый закон стали называть вторым, а второй — первым. Кроме того, формулировки законов были впоследствии несколько уточнены.

неты на ее орбите в любой момент времени, выведенное им чисто геометрическим путем. Кеплер ввел также основные величины, или параметры, характеризующие орбиту планеты и называемые *элементами орбиты*.

Заметим, наконец, что движение планеты вокруг Солнца (или спутника вокруг планеты), подчиняющееся законам Кеплера, называется в настоящее время кеплеровским движением.

Сказанного достаточно для того, чтобы стало ясно, как велика роль Кеплера в небесной механике, а если мы примем во внимание, что проницательность Кеплера почти привела его к открытию закона всемирного тяготения, то будем иметь все основания считать этого замечательного ученого одним из первооснователей небесной механики.

2. «Начала» Ньютона. Теперь мы перейдем к рассмотрению работ гениального английского ученого — астронома, механика, математика и физика — И. Ньютона (Newton Isaac, 1643—1727), который заложил прочные основы многих наук, в том числе и небесной механики.

Ньютон, продолжая работы Галилея (Galilei Galileo, 1564—1642) развил и обосновал теоретическую механику; воспользовавшись методом координат Декарта (Descartes Rene, 1596—1650), построил аналитическую геометрию; завершил, наряду с Лейбницем (Leibniz G. W., 1646—1716), но независимо от последнего, разработку дифференциального и интегрального исчисления; и, наконец, навеки прославил свое имя открытием закона всемирного тяготения, на основании которого он впервые создал математическую теорию движения небесных тел.

В 1686 г. впервые был издан на латинском языке главный труд Ньютона, его бессмертное сочинение «Математические начала натуральной философии» (*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*), которое Лагранж назвал позднее «величайшим из произведений человеческого ума» и которое явилось отправным пунктом всех работ по механике и небесной механике в течение последующих двух столетий *).

В предисловии к первому изданию своего труда Ньютон так определяет его назначение: «В этом сочинении имеется

*) Превосходный перевод сочинения Ньютона был выполнен академиком А. Н. Крыловым (1863—1945). А. Н. Крылов сопровождал перевод своими примечаниями и пояснениями. См. собрание трудов А. Н. Крылова, т. VII, изд. АН СССР, 1936.

в виду тщательное развитие приложений математики к физике», а несколько ниже поясняет, что под этим подразумевается: «Мы же, рассуждая не о ремеслах, а об учении о природе*), и следовательно, не об усилиях, производимых руками, а о силах природы, будем главным образом заниматься тем, что относится к тяжести, легкости, силе упругости, сопротивлению жидкостей и к тому подобным притягательным или напирющим силам. Поэтому и сочинение это нами предлагается как математические основания физики. Вся трудность физики, как будет видно, состоит в том, чтобы по явлениям движения распознать силы природы, а затем по этим силам объяснить остальные явления. Для этой цели предназначены общие предложения, изложенные в книгах первой и второй. В третьей же книге мы даем пример вышеупомянутого приложения, объясняя систему мира, ибо здесь из небесных явлений, при помощи предложений, доказанных в предыдущих книгах, математически выводятся силы тяготения тел к Солнцу и отдельным планетам. Затем по этим силам, также при помощи математических предложений, выводятся движения планет, комет, Луны и моря».

Таким образом, сочинение Ньютона можно разделить на две части, относя к первой части первые две книги «Начал», каждая из которых имеет название «О движении тел», а ко второй части — третью книгу: «О системе мира».

К первой части относятся также помещенные отдельно в самом начале книги Ньютона «Определения» и «Аксиомы или законы движения».

«Определения» заключают в себе восемь основных определений механики (определения массы, количества движения, силы и другие) и «Поучение», в котором объясняются основные понятия механики и физики, т. е. понятия *движения* (абсолютного и относительного), *времени*, *пространства* и причин, заставляющих тела природы совершать те или иные движения**).

*) Здесь и далее все подчеркивания принадлежат автору этой книги.

**) В нашем кратком историческом очерке лишь описываются главные события в развитии небесной механики и некоторые основные сочинения по этому вопросу. Поэтому здесь нет комментариев и исторического анализа.

«Аксиомы или законы движения» содержат формулировки трех основных законов движения, ряд следствий из них и «Поучение», в котором содержатся некоторые разъяснения.

Эти три закона Ньютона сформулированы в его сочинении следующим образом:

Закон 1. *Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменить это состояние.*

Закон 2. *Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.*

Закон 3. *Действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе — взаимодействия двух тел друг на друга между собою равны и направлены в противоположные стороны.*

В первой книге «Начал» рассматриваются разнообразные вопросы, касающиеся нахождения сил по заданным движениям, определения движений по заданным силам, геометрических свойств орбит, особенно кеплеровских орбит, притяжений тел и тому подобное.

Для небесной механики особенный интерес представляют отделы XI, XII и XIII первой книги, ибо в них и заключается по существу математическая теория движения небесных тел.

Действительно, в отделе XI «О движении тел, взаимно притягивающихся центростремительными силами» мы находим общие положения задачи двух и задачи многих тел, т. е. задачи о движении системы свободных материальных точек, взаимно притягивающихся с силами, обратно пропорциональными квадратам их взаимных расстояний.

Интересно отметить, что в предложении LXV, ставя задачу о движении многих тел, Ньютон замечает между прочим: «... когда притяжение обратно пропорционально квадрату расстояний, то тела не могут вообще в точности двигаться по эллипсам, разве только когда сохраняется некоторая пропорция между расстояниями».

Это замечание показывает, что Ньютону были уже известны те частные случаи, в которых задача трех тел может быть

точно решена, и которые были открыты примерно через сто лет после этого Лагранжем и Эйлером.

Далее, в предложении LXVI и в его двадцати двух следствиях содержится геометрическая теория возмущенного движения, которую Ньютон применяет в дальнейшем к изучению теории движения Луны.

Отдел XII «О притягательных силах сферических тел» и отдел XIII «О притяжении тел не сферических» содержат элементы теории притяжения. Здесь доказываются знаменитые теоремы Ньютона о притяжении однородных шаров, или шаров, плотности которых изменяются только в зависимости от расстояний до их центров. Рассматриваются также притяжения материальной точки однородными телами вращения, в частности, однородными эллипсоидальными телами и т. д.

Вторая книга «Начал» вся посвящена изучению движения тел в сопротивляющейся среде. Ньютон рассматривает свойства движений в среде, оказывающей сопротивление, пропорциональное первой и второй степени скорости движущегося тела, предполагая притом всегда, что сила сопротивления пропорциональна также плотности среды. Особое внимание привлекает доказательство невозможности круговых движений материальной точки, движущейся в сопротивляющейся среде под действием силы притяжения к неподвижному центру, обратно пропорциональной квадрату расстояния до этого центра. Ньютон показывает, что в этом случае траектории движения суть некоторые спирали. Наконец, Ньютон подробно приводит результаты своих опытов по изучению сопротивления жидкости движущимся в них шарам и некоторым другим телам, например, цилиндрам.

Книга третья «О системе мира» содержит теорию всемирного тяготения, являющуюся основой науки о движении небесных тел. Начинается эта книга с весьма краткого раздела, озаглавленного «Правила умозаключений в физике», после которого помещен также краткий раздел «Явления», где перечисляются некоторые, выводимые из наблюдений, свойства движений тел солнечной системы: спутников Юпитера и Сатурна, шести главных планет и Луны.

Далее идет большой раздел, называемый в сочинении Ньютона «Предложения», в котором и содержится изложение теории всемирного тяготения. Это изложение дано в виде

19 теорем, в которых доказывается последовательно, на основании законов Кеплера, что спутники планет движутся под действием сил, направленных к планете и обратно пропорциональных квадратам их расстояний, что планеты приводятся в движение силами, исходящими от Солнца, также обратно пропорциональными квадратам расстояний, что Луна подвержена действию такой же силы, исходящей от Земли, что такая же сила, исходящая от Солнца, управляет движениями комет. Далее, показывается, что и наоборот, предполагая, что тела движутся под действием сил, обратно пропорциональных квадратам расстояний, мы необходимо находим, что эти движения совершаются по законам Кеплера. Наконец устанавливается, что приливы и отливы моря также происходят под действием притяжений Луны и Солнца.

Собственно сам закон всемирного тяготения сформулирован Ньютоном в Предложении VII в следующем виде:

Тяготение существует ко всем телам вообще и пропорционально массе каждого из них.

Отсюда, на основании предыдущего, выводятся следствия:

Следствие 1. *Тяготение ко всей планете происходит и складывается из тяготений к отдельным частям ее.*

Следствие 2. *Тяготение к отдельным равным частицам тел обратно пропорционально квадратам расстояний мест до частиц *).*

Значительная часть этого раздела и весь следующий посвящены рассмотрению различных свойств движения Луны. Основываясь на установленном им законе всемирного тяготения, Ньютон разбирает различные детали, относящиеся к движению Луны, и показывает, что главнейшие лунные неравенства полностью вытекают из этого общего закона.

Совокупность всех результатов, полученных Ньютоном в этой задаче, составляет первую — динамическую — теорию движения Луны, которая ныне так и называется *ньютоновой теорией движения Луны*.

Заканчивает свою книгу знаменитый ученый фразами, выдержки из которых приводятся ниже.

*) В настоящее время весь закон всемирного тяготения приводится, как известно, в одной формулировке. Об этом нам придется еще говорить в дальнейшем.

«До сих пор я изъяснял небесные явления и приливы наших морей на основании силы тяготения, но я не указывал причины самого тяготения»... «Причину же этих свойств силы тяготения я до сих пор не мог вывести из явлений, гипотез же я не измышляю». ...«Довольно того, что тяготение на самом деле существует и действует согласно изложенным нами законам, и вполне достаточно для объяснения всех движений небесных тел и моря»...

Таково краткое описание содержания знаменитого сочинения, которое составило эпоху в развитии науки вообще, а в частности явилось основанием небесной механики.

Остается отметить, в заключение, что несмотря на то, что сам Ньютон принимал самое деятельное участие в разработке основ высшей математики и являлся, можно сказать, одним из ее творцов, в его «Началах» аналитические методы совершенно не применяются и вся книга изложена чисто геометрически. Это обстоятельство, в связи с тем, что в континентальной Европе ньютонова система механики не получила немедленного признания, а англичане продолжали некоторое время употреблять геометрические методы «Начал», задержало развитие аналитической механики и, в частности, небесной механики, примерно на пятьдесят лет.

§ 2. Развитие небесной механики в XVIII в.

1. Основатели небесной механики. Сочинение Ньютона при жизни великого ученого было издано на латинском языке три раза: в 1686, 1713 и 1725 гг. На английском языке «Начала» изданы в 1727 г., а затем появились переводы этого сочинения и на другие европейские языки.

Все это время ученые разных стран изучали и, можно сказать, осваивали идеи Ньютона, а также изучали и продолжали разрабатывать методы высшей математики — аналитической геометрии, дифференциального и интегрального исчисления и теории дифференциальных уравнений.

В XVIII в. возникла большая потребность в точных таблицах Луны, необходимых для определения положения корабля на море. Для этой же цели могли использоваться также достаточно точные таблицы ярких планет. Кроме того, имелась необходимость в определении истинной формы Земли и установлении законов ее вращения для точного определения

времени. Эти задачи и встали в первую очередь перед продолжателями Ньютона.

Небесная механика получает дальнейшее развитие только с середины XVIII в., в основном благодаря изумительной деятельности пяти ученых: Эйлера (Euler Leonard, 1707—1783), Клеро (Clairaut A. C., 1713—1765), Даламбера (D'Alembert J. L., 1717—1783), Лагранжа (Lagrange J. L., 1736—1813) и Лапласа (Laplace P. S., 1749—1827), которые и являются творцами основных методов классической небесной механики.

Развитие происходило настолько бурно и стремительно, что к концу века эта часть астрономии успела вырасти в самостоятельную науку, получившую и свое собственное название.

Начало работам по классической небесной механике положил Эйлер, опубликовавший в Берлине в 1744 г. мемуар «Теория движения планет и комет», где было дано подробное аналитическое решение задачи двух тел и рассмотрены способы определения орбит планет и комет.

С этих пор в изданиях Парижской, Берлинской и С.-Петербургской академий почти непрерывно начали появляться знаменитые ныне мемуары упомянутых пяти великих ученых, а также и некоторых других, о которых из-за недостатка места мы подробно говорить не будем.

В 1746 г. Эйлер опубликовал довольно несовершенные таблицы Луны. В 1747 г. Клеро и Даламбер в один и тот же день представили в Парижскую академию мемуары по теории движения Луны. Каждый из них имел затруднения при объяснении движения перигея. Клеро нашел источник затруднений в 1749 г., а немного позднее этот источник был также открыт как Эйлером, так и Даламбером.

В 1752 г. Клеро получил премию от Российской академии за свою теорию Луны (Theorie de la Lune...), которая была издана в том же году в С.-Петербурге на французском языке.

В 1754 г. Клеро и Даламбер опубликовали свои теории и числовые таблицы, которые позднее были исправлены и расширены.

В 1753 г. Эйлер опубликовал свою первую теорию движения Луны, в приложении которой была дана также частичная разработка аналитического метода вариации, или изменения, элементов орбиты.

Т. Майер (Mayer T., 1723—1762) сравнил таблицы Эйлера с наблюдениями и исправил их так успешно, что он и Эйлер получили от английского правительства премии.

В 1772 г. в С.-Петербурге, на латинском языке, была опубликована вторая теория движения Луны Эйлера (*Theoria motuum Lunae...*) в огромном томе, содержащем подробно изложенную аналитическую теорию, численное развитие этого метода и составленные самим Эйлером таблицы *).

Лагранж занимался исследованием векового ускорения в движении Луны, опубликовав по этому вопросу мемуары в 1773, 1792 и 1793 гг. Впрочем, он ограничивался главным образом указанием общих методов, а непосредственно теории движения Луны не создал.

Лаплас уделил много внимания теории движения Луны, разработав новую теорию ее движения. Основы теории возмущений в движениях больших планет были заложены также Эйлером, мемуары которого о взаимных возмущениях Юпитера и Сатурна получили премии Парижской академии в 1748 и в 1752 гг. В этих мемуарах был впервые рассмотрен метод изменения произвольных постоянных, но полученные Эйлером уравнения не являются вполне общими. В этих же мемуарах сделаны первые шаги в области разложения возмущающей, или пертурбационной, функции в ряд.

Лагранж, внесший блестящий вклад в небесную механику, опубликовал свой первый мемуар о взаимных возмущениях Юпитера и Сатурна в 1766 г., где он развил дальше метод вариации элементов. По-видимому, Лагранж не знал в то время о работах Эйлера, в которых были заложены основы этого метода, и рассматривал его заново.

Метод изменения произвольных постоянных (или параметров) был полностью развернут Лагранжем в премированном мемуаре о возмущениях комет,двигающихся по эллиптическим орбитам.

В 1773 г. Лаплас представил Парижской академии первый мемуар, в котором доказал свою знаменитую теорему об отсутствии вековых возмущений первого порядка у больших полуосей планетных орбит, а следовательно, и у средних

*) В 1934 г. Академия наук СССР издала сокращенный перевод этого сочинения, выполненный акад. А. Н. Крыловым и снабженный примечаниями и пояснениями переводчика.

движений. Отсюда вытекала, как будто, вековая устойчивость солнечной системы. Впрочем, теорема была доказана Лапласом с точностью до членов второго порядка относительно эксцентриситетов. Эта теорема была расширена Лагранжем в 1774 и 1776 гг. до всех степеней эксцентриситетов и синуса угла взаимной наклонности.

Лагранж опубликовал также замечательный мемуар (примированный Парижской академией в 1772 г.) по общей проблеме трех тел (*Essai sur le problème des trois corps*). В этом мемуаре полная система дифференциальных уравнений приводилась к системе седьмого порядка и исследовались строгие частные решения задачи (некоторые из этих решений угадывал, как уже отмечалось, Ньютон). Эти частные решения, которым сам Лагранж не придавал особого значения, замечая, что они любопытны и только («*Cette recherche n'est à la vérité que de pure curiosité...*»), впоследствии сыграли важную роль в развитии качественных методов небесной механики.

Лагранж и Лаплас развили одновременно, но независимо друг от друга, теорию вековых возмущений. Они показали, что наличие вековых членов в выражениях для возмущенных элементов оскулирующих орбит не является неизбежным.

Новая теория вековых возмущений планет, в которой время не выходит за знаки синусов и косинусов, получила название теории Лагранжа.

Наконец, эти ученые внесли также крупный вклад в теорию разложения координат эллиптического движения в ряды, расположенные по степеням эксцентриситета орбиты, которые играют важную роль в развитии теории возмущений.

Лагранж ввел в рассмотрение уравнение (знаменитое уравнение Лагранжа!), частным случаем которого является уравнение Кеплера, позволяющее почти автоматически находить разложения в ряды нужных величин эллиптического движения.

Лаплас первым рассмотрел вопрос о сходимости этих рядов, доказав при помощи весьма искусных приемов, что они сходятся абсолютно при значениях эксцентриситета, не превышающих 0,6627... (*предел Лапласа*).

Оба этих ученых рассматривали также разложения координат эллиптического движения в тригонометрические ряды,

чем еще раньше занимался и Эйлер, который ввел функции, имеющие ныне огромное значение для многих вопросов астрономии и математики и называемые совершенно несправедливо «функциями Бесселя».

Труды Лагранжа были собраны в конце XIX в. и изданы в Париже в 14 толстых томах. Три тома заполнены мемуарами и статьями по вопросам небесной механики.

Труды Лапласа по небесной механике были собраны им самим и изданы отдельно, о чем будет говориться ниже.

Мы не будем касаться здесь истории исследований по теории фигуры Земли и по теории вращательного движения небесных тел, так как им предполагается посвятить исторические очерки в других книгах, о которых упоминалось в предисловии.

Однако отметим, что исследования по теории фигуры Земли, начатые еще Ньютоном, были продолжены прежде всего Клеро, который опубликовал в 1743 г. свой знаменитый мемуар «Теория фигуры Земли» (*Théorie de la figure de la Terre*).

Исследования Клеро были вскоре дополнены и обобщены Даламбером в его книге «Исследования системы мира» (*Recherches sur le Système du monde*), вышедшей в 1759 г.

Эти работы связаны также с развитием теории притяжения, в которой в XVIII в. наиболее важные результаты были получены опять-таки Лагранжем (1773 и 1775 гг.) и Лапласом в 1782 г.

Трудами Даламбера, Эйлера, Лагранжа и Лапласа была создана теория вращательного движения тел с ее применениями к теории вращательного движения небесных тел. Таким образом были построены теория процессии и нутации земной оси, теория либрации Луны и т. д.

Об этом будет говориться несколько дальше при рассмотрении двух классических сочинений, которые оказали наиболее глубокое влияние на формирование и последующее развитие небесной механики. Автор имеет в виду вышедшие в самом конце XVIII в. «Аналитическую механику» Лагранжа и «Небесную механику» Лапласа, к краткому рассмотрению содержания которых мы и переходим.

2. «Аналитическая механика» Лагранжа. В 1788 г. в Париже, на французском языке, вышло пер-

вое издание трактата Лагранжа в двух томах под названием «Аналитическая механика» (*Mécanique Analytique* *).

В этом классическом труде дано блестящее изложение фундаментальных идей и новых методов в области механики, принесшее существенную пользу и для небесной механики, которую Лагранж рассматривал как часть механики вообще.

Трактат Лагранжа состоит из двух частей: меньшей, называемой «Статика», и большей, носящей название «Динамика».

«Статика» посвящена рассмотрению общих свойств равновесия системы тел и жидкостей, установлению аналитических условий равновесия и разрешению различных проблем статики. Из этого отдела для небесной механики нужными являются только условия равновесия жидкостей, применяемые в теории фигур небесных тел.

Большая же часть отдела «Динамика» имеет непосредственное значение для многих разделов небесной механики.

Действительно, и общие принципы динамики, и общие свойства движений, и вид дифференциальных уравнений движения — все это важно для небесной механики и дает возможность как составлять дифференциальные уравнения движения в различных частных задачах этой науки, так и выводить общие свойства движений небесных тел. Особенно важную роль играют здесь, как и во всех задачах механики вообще, *уравнения Лагранжа второго рода*, с помощью которых весьма легко и удобно составлять уравнения движения в самых разнообразных системах координат.

Еще более непосредственное отношение к небесной механике имеет отдел пятый второй части: «Общий приближенный метод решения задач динамики, основанный на вариации произвольных постоянных». Этот метод, первые применения которого мы видели в зачаточном виде еще у Ньютона и Эйлера, и который, как уже отмечалось, был полностью развит и обоснован Лагранжем в теории возмущенного движения планет, имеет общее значение и для механики и для математики.

*) Имеется перевод этого знаменитого сочинения на русский язык, выполненный В. С. Гохманом и изданный Гостехиздатом в 1950 г.: т. I под редакцией и с примечаниями Л. Г. Лойцянского и А. И. Лурье; т. II, под редакцией и с примечаниями Г. Н. Дубошина.

Сначала Лагранж рассматривает этот метод для произвольной задачи динамики, обладающей силовой функцией. Он выводит общие уравнения, определяющие «произвольные постоянные» как функции времени, и показывает, что этим уравнениям можно придать различную форму. В частности, произвольные постоянные можно выбрать так, что уравнения для них принимают вид, который позднее получил название *канонического*. Затем Лагранж показал, как можно приближенно интегрировать эти уравнения квадратурами, если ограничиться рассмотрением одного только первого приближения.

Отдел седьмой «О движении системы свободных тел, рассматриваемых как точки и находящихся под действием сил притяжения» посвящен рассмотрению основных задач небесной механики и поэтому является для нас наиболее важным отделом из всей книги.

Здесь прежде всего разбирается задача о движении материальной точки под действием силы, зависящей (произвольным образом) от расстояния до неподвижного центра, и выводятся общие свойства такого движения. Затем подробно рассматривается и решается до конца задача о движении под действием центральной силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния до центра, т. е. задача двух тел, или задача о невозмущенном, кеплеровском движении. Приводятся все необходимые формулы кеплеровского движения вместе с разложениями координат в бесконечные ряды. В частности, подробно рассматривается задача о решении уравнения Кеплера при помощи выведенного Лагранжем ряда, называемого теперь *рядом Лагранжа*.

Дальше решается задача об определении элементов невозмущенной орбиты по заданным начальным условиям и из данных наблюдений, после чего Лагранж переходит к рассмотрению *возмущенного движения*, применяя к нему общий метод изменения произвольных постоянных, который приводит к уравнениям для оскулирующих элементов возмущенной орбиты. Здесь выводятся известные ныне «уравнения Лагранжа» для оскулирующих элементов для случая, когда возмущения вызываются притяжениями других планет и когда, следовательно, существует *возмущающая функция*. Потом указывается, что предположение о существовании силовой функции (а, стало быть, и возмущающей) не является

существенным и метод вариации постоянных может быть применен в случае любой возмущающей силы.

В конце этого отдела излагается подробная теория вековых возмущений с приложениями к определению таких возмущений, возникающих от действия весьма разреженной среды.

В книге Лагранжа рассматриваются и некоторые другие вопросы, относящиеся к небесной механике: задача о движении точки, притягиваемой неподвижными центрами, и особенно, задача о вращательном движении, занимающая весь отдел девятый. Последняя задача изложена здесь так, как она обычно трактуется в курсах теоретической механики, а вопросы теории вращения Земли и либрации Луны, рассмотренные Лагранжем со всеми подробностями в мемуарах 1764 и 1780 гг., в «Аналитическую механику» не вошли.

Книга заканчивается тремя отделами, посвященными вопросам гидродинамики.

3. Первая часть «Небесной механики» Лапласа. Конец XVIII в. ознаменовался весьма важным для астрономии событием — небесная механика впервые получила свое имя и точно определила свое содержание.

В 1798 г. вышла в свет первая часть классического ныне сочинения Пьера Лапласа. Лаплас назвал это свое сочинение «Трактат по небесной механике» (*Traité de Mécanique Céleste*) и в предисловии так определил цели и содержание науки, для которой он придумал прекрасное, гордое название: «В конце прошлого столетия Ньютон обнародовал свой закон всемирного тяготения. С тех пор ученые стараются свести все известные явления природы к этому великому закону и дать таким образом теориям и астрономическим таблицам непредвиденную точность. Я поставил своей целью представить эти теории, рассеянные в большом числе сочинений, с одной и той же точки зрения. Эти теории, обнимающие все результаты всемирного тяготения по равновесию и движениям твердых и жидких тел, составляющих солнечную систему и ей подобные, рассеянные во вселенной, образуют *небесную механику*».

Хотя Лаплас и говорит в приведенных словах только о законе тяготения, тем не менее он не ограничивается только силами притяжений при рассмотрении движений небесных тел, но принимает во внимание и некоторые другие силы, например,

силы сопротивления среды, в которой могут двигаться некоторые небесные тела. Поэтому определение предмета небесной механики, сформулированное нами в конце предисловия, не противоречит определению Лапласа, а только несколько его обобщает.

В приведенных словах Лапласа прямо указывается, что предметом небесной механики являются не только тела солнечной системы, но и тела «систем, ей подобных, рассеянных во вселенной». Можно сказать кратко, что по Лапласу *небесная механика есть наука о движениях небесных тел, твердых, жидких или газообразных, находящихся под действием различных сил природы.*

Перейдем теперь к краткому описанию первой части сочинения Лапласа, имеющей название «Общая теория движений и фигур небесных тел» и занимающей тома I и II, вышедшие, как было отмечено, в самом конце XVIII в.

Первый том разделен на две книги. Книга первая — «Об общих законах равновесия и движения» — является вводной и посвящена краткому изложению принципов теоретической механики, а именно — элементов статики, общих принципов и законов динамики, элементов динамики твердого тела и начал гидростатики и гидродинамики.

В книге второй — «О законе всемирного тяготения и о движении центров тяжести небесных тел» — излагается основная задача небесной механики. Рассмотрев вывод закона Ньютона из законов Кеплера (точная формулировка этих законов не приводится), Лаплас переходит далее к составлению общих уравнений движения системы тел, подверженных взаимным притяжениям. Сначала выводятся уравнения в прямоугольных координатах для системы материальных точек и рассматриваются первые интегралы этих уравнений. Затем Лаплас вводит в рассмотрение силовую функцию системы точек и сплошного тела на точку и показывает, что эти функции удовлетворяют уравнению с частными производными (уравнение Лапласа). Это уравнение Лаплас применяет для нахождения силовой функции шарового слоя и сплошного шара, обладающего сферической структурой, и показывает, что такие шары притягиваются как материальные точки. После этого Лаплас составляет уравнения движения тел (материальных точек или шаров, обладающих сферической структурой) в сферических координатах, а также

в особых координатах (можно сказать, цилиндрических). Уравнениями последнего вида (уравнения Клеро — Лапласа) Лаплас и пользуется далее особенно охотно.

Составив уравнения движения, Лаплас рассматривает затем со всеми необходимыми подробностями решение этих уравнений в первом приближении, т. е. излагает теорию невозмущенного кеплеровского движения. Лаплас приводит три разных способа интегрирования уравнений невозмущенного движения, выводит разложения в ряды координат эллиптического и гиперболического движений и рассматривает задачу об определении орбит из начальных условий и из наблюдений (метод Лапласа определения орбит).

Далее Лаплас развивает *теорию возмущений*, рассматривая возмущения полярных координат и кеплеровских элементов орбит. Здесь вычисляются возмущения первого порядка относительно возмущающих масс и излагается способ разложения возмущающей (пертурбационной) функции со всеми необходимыми подробностями. Возмущения элементов рассматриваются на основе метода вариации произвольных постоянных, очевидно, заимствованного у Лагранжа, но изложенного другим способом.

Первый том заканчивается рассмотрением теории вековых возмущений, примерно таким же образом, как это делал и Лагранж, но в собственном изложении и с доказательством знаменитой теоремы об устойчивости солнечной системы.

Второй том включает три следующие книги первой части. Книга третья — «О фигурах небесных тел» — начинается изложением основ теории притяжения, которая была уже затронута частично в первом томе. Здесь рассматриваются притяжения «сфероидов, ограниченных поверхностями второго порядка», т. е. эллипсоидов (однородных). Затем Лаплас переходит к произвольным сфероидам и определяет силовую функцию и составляющие силы притяжения таким телом материальной точки при помощи разложений в ряды по функциям, которые впоследствии были названы *сферическими*.

Полученные в теории притяжения результаты Лаплас применяет к теории фигур планет, определяя прежде всего фигуру равновесия однородной жидкой массы, обладающей вращательным движением. Затем рассматривается вопрос

о фигуре сфероида, очень мало отличающегося от сферы и покрытого слоем жидкости, находящейся в равновесии. Полученные результаты прилагаются к определению фигуры Земли и кольца Сатурна.

Книга четвертая — «О колебаниях моря и атмосферы» — содержит теорию приливов и отливов моря и земной атмосферы.

Книга пятая — «О движениях небесных тел вокруг их собственных центров тяжести» — рассматривает теорию вращательного движения Земли с изложением теории прецессии и нутации, теорию вращательного движения Луны, главным образом теорию либрации, и вопросы движения колец Сатурна, принимаемых за сплошные твердые или жидкие тела.

Таково, в кратких чертах, содержание первой части фундаментального трактата французского ученого. О второй части будет говориться в следующем параграфе, а здесь сделаем еще несколько замечаний.

Во-первых, ни в первом, ни во втором томе лапласова сочинения нет ни одной ссылки на какие-либо предыдущие сочинения и не упоминаются имена современников и сподвижников Лапласа. Первое может быть объяснено тем, что в рассматриваемом сочинении Лаплас излагает только свои собственные работы, опубликованные в большом числе мемуаров за предыдущие двадцать с лишним лет. Что касается второго, то из предисловия Лапласа следует, что некоторые исторические замечания, с указанием имен, он намеревается поместить в конце второй части, и мы увидим далее, что это намерение было осуществлено.

Во-вторых, во всем сочинении Лапласа нет ни одного чертежа, так же, как и в «Аналитической механике» Лагранжа, а изложение довольно сжатое и никаких подробностей выкладок не приводится. Это обстоятельство всегда затрудняло знакомство с трактатом Лапласа широких кругов читателей и послужило причиной позднейших изданий с пояснениями и комментариями.

Нужно еще отметить, что года за два до выхода сочинения из печати Лаплас выпустил популярный пересказ его в книге «Изложение системы мира» (*Exposition du système du monde*, 1796 г. *)), о котором Араго (Arago F., 1786—1853)

*) См. русский перевод М. С. Хотинского, СПб., 1861.

в своей биографии Лапласа сказал так: «Изложение системы мира» есть *кодекс астрономии*. Это та же «Небесная механика», только освобожденная от формул». Кстати сказать, в приложении к упомянутой книге Лаплас высказал свою знаменитую гипотезу о происхождении солнечной системы (гипотеза Лапласа), продержавшуюся в науке более ста лет и не потерявшую значения и в настоящее время.

В заключение этого параграфа, посвященного развитию небесной механики в XVIII в., необходимо указать, что одновременно с трактатом Лапласа вышло фундаментальное сочинение русского академика Федора Ивановича Шуберта, изданное в 1798 г. в С.-Петербурге в трех томах под названием «Трактат по теоретической астрономии» (на немецком языке). Это сочинение, несправедливо забытое, содержит много интересного и любопытного материала и заслуживает подробного изучения. Так как сам автор перенздал его в значительно расширенном и исправленном виде уже в XIX в. (в 1822 г.), то оно будет рассмотрено в следующем параграфе.

§ 3. Небесная механика в первой половине XIX в.

1. Вторая часть «Небесной механики» Лапласа. Начало XIX в. по счастливой случайности ознаменовалось замечательным астрономическим открытием. В первый же день нового века, 1 января 1801 г., итальянский астроном Дж. Пиацци (Piazzi G., 1746—1826) открыл новую планету солнечной системы — Цереру — первую из множества малых планет, известных в настоящее время. Это обстоятельство привело в дальнейшем к важным последствиям в области небесной механики.

Но вернемся к «Небесной механике» Лапласа. В 1802 г. появился третий том этого сочинения, посвященный автором первому консулу Французской республики гражданину Бонапарту. Этот третий том является одновременно первой половиной второй части трактата, содержащей третий и четвертый тома, объединенных общим названием «Частные теории небесных движений».

Третий том состоит из двух книг — шестой и седьмой (счет книг идет от первого тома). Книга шестая — «Теория движения планет» — посвящена определению возмущений планет, вызываемых их взаимными притяжениями. Это нужно,

как отмечает автор, «... как для проверки закона всемирного тяготения, так и для улучшения астрономических таблиц, так, наконец, для выяснения — не смогут ли причины, чуждые планетной системе, изменить ее строение и движение». Сначала Лаплас уточняет общие формулы, полученные в первой части, в теории возмущений. Он рассматривает также неравенства, зависящие от квадрата возмущающей силы, т. е. возмущения второго порядка относительно возмущающих масс, возмущения, производимые эллиптичностью Солнца, и возмущения, производимые в движениях планет действительными спутниками. Показывается, что все эти дополнительные возмущения весьма малы и их можно не рассматривать. Далее приводятся нужные числовые характеристики величин, входящих в выражения планетных неравенств, т. е. значения масс планет, начальные элементы, отнесенные к эпохе 1750 г., и т. п. После этого рассматриваются в отдельности теории движения больших планет: Меркурия, Венеры, Земли, Марса, Юпитера, Сатурна и Урана. Для каждой планеты даются формулы, определяющие ее радиус-вектор, широту и долготу как явные функции времени, в виде тригонометрических многочленов с числовыми коэффициентами.

Конец шестой книги посвящается вопросам прикладной небесной механики, т. е. определениям масс планет, определению неизменной плоскости солнечной системы (плоскость Лапласа), построению астрономических таблиц и оценке влияния звезд на планетную систему.

Седьмая книга — «Теория Луны» — посвящена изложению лапласовой теории движения Луны. Она содержит интегрирование дифференциальных уравнений движения Луны и вывод всех лунных неравенств. Особо рассматриваются возмущения, происходящие от несферичности Земли и Луны.

Из сравнения этой теории с наблюдениями выводится значение сжатия Земли, «которое получается, таким образом, с большей точностью, чем при помощи прямых измерений», — замечает Лаплас. В конце книги рассматриваются вековые изменения в движениях Земли и Луны, которые могут вызываться сопротивлением жидкого эфира, распространенного вокруг Солнца. Хотя Лаплас приходит к отрицательному ответу на вопрос о существовании подобного

«эфира» (что совершенно правильно!), тем не менее примененный им метод оказался впоследствии весьма полезным для определения плотности земной атмосферы по наблюдаемым движениям искусственных спутников Земли.

Четвертый том сочинения Лапласа, изданный в 1805 г., содержит три книги.

Книга восьмая — «Теория спутников Юпитера, Сатурна и Урана» — посвящена главным образом теории движения спутников Юпитера, которая рассматривается весьма подробно для главных четырех спутников этой планеты (Галилеевы спутники), известных в то время. Особое внимание Лаплас уделяет вопросу о либрации первых трех спутников, т. е. объяснению известного замечательного соотношения между средними движениями, или долготами этих спутников. В конце книги кратко рассматривается теория движения спутников Сатурна и Урана.

Книга девятая — «Теория комет» — посвящена вопросам теории возмущенного движения периодических комет.

Книга десятая — «О различных вопросах, относящихся к системе мира» — содержит теорию астрономической рефракции, теорию барометрического нивелирования и некоторые другие вопросы, не относящиеся теперь к небесной механике. Кроме того, в этой же книге Лаплас рассматривает задачу о нахождении точных частных решений задачи трех тел, задачу о движении в сопротивляющейся среде и некоторые добавления к теориям движения Юпитера, Сатурна и Луны. К книге приложено добавление «О капиллярном действии».

Таково содержание второй части трактата Лапласа. Нужно отметить, что эта вторая часть также составлена из работ самого Лапласа, опубликованных в разных мемуарах за предыдущее время.

Только через двадцать лет после опубликования четвертого тома, в 1825 г., появился в свет пятый и последний том этого грандиозного сочинения Лапласа. Он содержит позднейшие работы Лапласа по небесной механике, к которым присоединены «исторические справки о работах геометров по этим предметам». Пятый том разделен на шесть книг, каждая из которых начинается такой исторической справкой. Эти исторические справки представляют большой интерес, так как содержат подробный и, по нашему мнению,

объективный *) очерк развития небесной механики до двадцатых годов XIX в. Книга одиннадцатая — «О фигуре и о вращении Земли» — посвящена теории фигуры Земли. Книга двенадцатая — «О притяжении и отталкивании сфер и о законах равновесия и движения эластичных жидкостей» — не имеет отношения к небесной механике. Книга тринадцатая — «О колебаниях жидкостей, покрывающих планеты» — посвящена новым исследованиям по теории приливов моря и атмосферы. Книга четырнадцатая — «О движениях небесных тел вокруг их центров тяжести» — содержит дополнения Лапласа по этому вопросу к ранее опубликованным исследованиям. Книга пятнадцатая — «О движении планет и комет» — содержит дополнения к теории возмущенного движения, изложенной в первом томе. Последняя, шестнадцатая книга — «О движении спутников» — содержит дополнения к теории движения Луны и спутников больших планет.

Таково, в общих чертах, содержание этого замечательного произведения, оказавшего огромное влияние на развитие небесной механики, особенно в XIX в.

Как мы видим, в этом сочинении Лаплас поставил ряд проблем, которые считаются с тех пор главными задачами небесной механики, и развил основные методы для их приближенного решения.

Эти основные задачи — следующие: задача о движении больших планет солнечной системы под действием притяжения Солнца и их взаимных притяжений; задача о движении Луны под действием притяжений Земли и Солнца с учетом влияний и других планет; задача о движении спутников больших планет под действием притяжения Солнца, главной планеты и взаимных притяжений спутников; задача о движении комет под действием притяжения Солнца и некоторых больших планет; задача о вращательном движении планет, особенно Земли и Луны, вокруг их собственных центров тяжести; теория фигур планет; теория приливов (последняя теперь в небесную механику не входит).

2. Переводы трактата Лапласа. Сочинение Ф. И. Шуберта. «Небесная механика» Лапласа переиздавалась без изменений несколько раз. Последнее, четвертое,

*) Лапласа часто упрекали за замалчивание результатов его современников и учеников. Может быть, это и случалось, но в этих исторических справках Лаплас достаточно справедлив.

издание этого фундаментального сочинения помещено в первых пяти томах полного собрания сочинений Лапласа, изданного французской Академией наук в конце XIX в. (*Oeuvres complètes de Laplace, publiées sous les auspices de l'Académie, des Sciences par mm. les secrétaires perp.*). Четвертое издание «Небесной механики» воспроизведено без изменений с первого издания. Исправлены только опечатки и старинная орфография заменена более современной.

Тома I, II и III полного собрания сочинений Лапласа вышли в 1878 г., том IV — в 1880 г. и том V — в 1882 г.

В этом издании, в конце пятого тома, напечатано «Добавление», в котором помещены работы, найденные в бумагах Лапласа после его смерти в 1827 г. Это добавление содержит следующие статьи:

1. О разложении в ряд радикала, выражающего взаимное расстояние между двумя планетами (содержит вывод асимптотической формулы для многочленов Лежандра).

2. О разложении эллиптических координат (содержит вывод лапласова предела для эксцентриситета орбиты).

3. О приливах и отливах атмосферы.

Кроме упомянутых четырех французских изданий, было еще два иностранных; одно — немецкое и другое — американское.

В Берлине были изданы два первых тома сочинения Лапласа на немецком языке в 1800 г. (т. I) и в 1802 г. (т. II) в переводе и с пояснительными примечаниями Буркхардта (*Burckhardt J. K., 1773—1838* *).

В Бостоне было издано четыре тома в переводе на английский язык и с подробными комментариями Бовдича (*Bowditch N., 1773—1816* **); т. I в 1829 г., т. II в 1832 г., т. III в 1834 г. и т. IV в 1839 г., уже после смерти переводчика. Этот перевод Бовдича замечателен комментариями, в которых переводчик тщательно воспроизводит все промежуточные выкладки и вычисления, снабдив их многочисленными чертежами и рисунками, которых в сочинении Лапласа, как уже было замечено, нет ни одного. Это делает трактат

*) «*Mechanik des Himmels*» von P. S. Laplace. Aus dem Französischen übersetzt und mit erläuternden Anmerkungen versehen.

**) «*Mecanique Celeste*» by the marquis de La Place. Translated with a commentary, by Nathaniel Bowditch.

Лапласа, в подлиннике доступный только немногим специалистам, превосходным учебником, которым свободно может пользоваться всякий студент, или любой человек, знакомый с начатками математики и механики.

Теперь возвратимся к упомянутому уже в предыдущем параграфе сочинению Ф. И. Шуберта (1758—1825). Это сочинение было переведено им самим на французский язык и издано в Петербурге в 1822 г. под названием «Трактат по теоретической астрономии» (*Traité d'Astronomie théorique*) в трех томах.

Первый том под названием «Сферическая астрономия» содержит, собственно говоря, то, что и сейчас составляет содержание сферической астрономии, т. е. изучение видимых движений светил. Автор присоединяет сюда исторический очерк развития астрономии с древнейших времен до Коперника, помещая в нем вдобавок изложение и подробный анализ системы Птолемея, о которой он отзывается с большой похвалой.

Второй том — «Рациональная астрономия» — представляет то, что теперь называют *теоретической астрономией*, т. е. содержит в основном теорию невозмущенного кеплеровского движения и способы определения орбит планет и комет. В этом же томе излагается система Коперника, а далее, весьма подробно и с пояснениями, даются основы теории Кеплера.

Наконец, третий том — «Физическая астрономия» — представляет то, что Лаплас назвал небесной механикой. Здесь автор излагает результаты Лапласа, Лагранжа и других ученых. Есть сведения, что этот трактат Шуберта был известен Лапласу и получил его одобрение. Третий том трактата Шуберта разделен на пять книг, которым предшествует введение, описывающее цели и содержание этого сочинения *).

Книга первая — «Общие законы движения» — посвящена теоретической механике и содержит основные сведения из этой науки.

Книга вторая — «Законы Кеплера» — содержит подробное изложение идей Кеплера, формулировки его трех законов и решение задачи об определении орбиты по данной силе. Примечательно, между прочим, что Шуберт приводит законы

*) Шуберт замечает, что когда он составлял свое сочинение, то трактат Лапласа ему не был известен, но он знал мемуары Лапласа, Лагранжа и др.

Кеплера в том именно порядке, к которому мы привыкли, и формулирует их также привычным для нас образом.

Книга третья — «О всемирном тяготении» — излагает вывод закона Ньютона из законов Кеплера, решение задачи двух тел и сведения о массах и плотностях тел солнечной системы.

Книга четвертая — «О вращении небесных тел» — посвящена теории вращательного движения небесных тел вокруг их центров тяжести. Здесь рассматривается теория вращения Земли с теорией прецессии и нутации, теория либрации Луны и, наконец, теория фигуры Земли с элементами теории притяжения.

Книга пятая — «О возмущениях небесных тел» — содержит теорию возмущений планет, теорию движения Луны, теорию движения спутников Юпитера и рассмотрение вопроса об устойчивости солнечной системы по результатам Лапласа.

3. Дальнейшее развитие небесной механики. Открытие Нептуна. Опубликование первых двух томов «Небесной механики» Лапласа дало новый мощный толчок дальнейшему развитию этой части астрономии, для которой XIX в. явился поистине «золотым веком». Действительно, именно в XIX в. небесная механика получила свое окончательное оформление как самостоятельная дисциплина и разработала основной аппарат для успешного решения главных задач теоретической астрономии. Было сделано столь много и так много выдающихся ученых приложили свои силы и способности к проблемам этой замечательной науки, что в кратком историческом очерке невозможно упомянуть обо всем и трудно даже просто перечислить всех ученых, участвовавших в развитии небесной механики. Поэтому мы вынуждены ограничиться только кратким рассказом о некоторых основных направлениях в развитии небесной механики и изложением содержания нескольких фундаментальных трактатов, вышедших уже после Лапласа.

Прежде всего отметим, что в XIX в. была завершена в основном разработка теории притяжения, этого необходимого вспомогательного раздела небесной механики.

Среди трудов, имеющих значение в этой области, мы находим работы Лежандра (Legendre A. M., 1752—1833), который развил теорию сферических функций (многочлены Лежандра), Пуассона (Poisson S. D., 1781—1840), получившего знаменитое уравнение, которому удовлетворяет силовая функция притяжения тела внутри этого тела (уравнение

Пуассона), Айвори (Ivory, 1765—1842), Шаля (Charles, 1793—1880), завершивших построение теории притяжения эллипсоидов, работы Гаусса (Gauss K. F., 1777—1855) и Дирихле (Lejeune — Dirichlet P., 1805—1859), посвященные также притяжениям эллипсоидов и выяснению общих свойств силовой функции, и много других.

Заметим, что работы Гаусса способствовали отделению от теории притяжения новой ветви, получившей название «Теория потенциала», но которая имеет приложение главным образом в области математической физики. Теория притяжения имела важное значение и в теории фигур равновесия вращающихся жидкостей, которая является основой для теории фигур небесных тел.

Гаусс также занимался вопросами определения орбит небесных тел из наблюдений, опубликовав по этому вопросу в 1809 г. фундаментальное сочинение «Теория движения небесных тел» (*Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*) на латинском языке, переведенное на немецкий в 1865 г.

В аналитической теории возмущений важное значение имели работы Якоби (Jacobi K. G., 1804—1851), который на основе работ Гамильтона (Hamilton W. R., 1805—1865) разработал новый метод решения дифференциальных уравнений задач динамики и, в частности, небесной механики (метод Гамильтона — Якоби). Эти работы Якоби изложены в «Лекциях по динамике» (*Vorlesungen über Dynamik*), изданных после его смерти и имеющих большое значение для дальнейших работ в этой области.

Отметим еще работу Пуассона, который доказал в 1809 г., что большие полуоси планетных орбит не имеют вековых членов не только в первом приближении, как это было выяснено еще раньше Лагранжем и Лапласом, но также и во втором приближении. Однако Пуассон показал, что возмущения второго порядка больших полуосей содержат «смешанные члены», в которые входит произведение времени на синус или на косинус.

После Лапласа продолжалась также разработка теории движения Луны. В 1824—1828 гг. Дамуазо (Damoiseau, 1768—1846) усовершенствовал теорию Лапласа и составил таблицы, бывшие во всеобщем употреблении до 1857 г. В 1832 г. Плана (Plana, 1781—1869) опубликовал теорию

движения Луны, похожую на теорию Лапласа. В 1830—1834 гг. неполная теория была разработана Люббоком (Lubbock, 1803—1865).

Сильно продвинул эту область небесной механики Ганзен (Hansen P., 1795—1874), сначала в 1838 г., а затем в 1862—1864 гг. Его таблицы были опубликованы в 1857 г. и долгое время служили основой при составлении астрономических ежегодников. В 1846 г. теорию движения Луны, похожую на теорию Люббока, опубликовал Понтекулан (De Pontécoulant G., 1795—1874). В 1860—1867 гг. Делоне (Delauney, 1816—1872) опубликовал новую теорию движения Луны, применив для этого метод интегрирования уравнений движения Гамильтона — Якоби. К сожалению, работа Делоне не была закончена, но его метод в дальнейшем неоднократно применялся и для решения других задач. О последующих работах по теории движения Луны будет сказано дальше.

Продолжались исследования по теории движения больших планет, приведшие к необыкновенному открытию новой планеты солнечной системы — Нептуна. Это открытие было сделано в одно и то же время, но совершенно независимо друг от друга, двумя молодыми учеными — англичанином Адамсом (Adams J., 1819—1892) и французом Леверье (Le Verrier U., 1811—1877). История его такова. После открытия Урана в 1781 г. Вильямом Гершелем (Herschel W., 1738—1822) очень скоро были обнаружены значительные отклонения Урана от его первоначальной орбиты. Эту орбиту не удавалось исправить даже с помощью учета возмущений от Юпитера и Сатурна. Адамс и Леверье предположили, что причиной этих отклонений является некоторая неизвестная планета, обращающаяся вокруг Солнца за пределами орбиты Урана.

Путем очень громоздкого и сложного исследования и колоссального количества вычислений *) ученым удалось определить первоначальные элементы орбиты новой планеты и ее массу. Леверье вычислил приблизительное положение планеты и сообщил эти сведения ассистенту Берлинской обсерватории Галле с просьбой поискать ее на небе.

*) Нужно помнить, что в те времена, кроме таблиц логарифмов, не существовало никаких вспомогательных вычислительных средств, вроде нынешних арифмометров. Кроме того, ни у Адамса, ни у Леверье не было помощников, и все вычисления производили они сами.

23 сентября 1846 г. Галле действительно обнаружил планету, о чем немедленно сообщил в Париж.

Открытие нового небесного тела при помощи чисто математических расчетов — «на кончике пера», как говорили тогда — признается всеми величайшим достижением небесной механики со времени Ньютона.

Успехи Леверье и Адамса не ограничились открытием Нептуна. Леверье в дальнейшем провел колоссальную работу по построению точной теории движения больших планет. Он провел разложение возмущающей функции с точностью до седьмых степеней эксцентриситетов включительно, дал подробные формулы для элементов оскулирующих орбит и построил чрезвычайно точные таблицы планетных движений.

Адамс может считаться основателем нового направления в небесной механике, в котором движения небесных тел исследуются при помощи численного интегрирования дифференциальных уравнений движения, а не путем приближенного интегрирования с помощью бесконечных рядов. Адамс разработал свой метод для такого численного интегрирования.

4. Учебник по небесной механике Понтекулана. Остановимся теперь на сочинении, которое может рассматриваться, пожалуй, как первая учебная книга по небесной механике. Автор имеет в виду «Аналитическую систему мира» (*Théorie analytique du système du monde*) Понтекулана в пяти томах, вышедших в Париже в 30—40-х годах XIX в. и позднее переизданных с добавлениями.

В предисловии автор замечает, что замечательный трактат Лапласа мало приспособлен для изучения небесной механики, так как изложен чересчур «ученым образом» («... sous des formes plus savantes»), а поэтому будет полезно дать такое изложение этого предмета, которым могли бы пользоваться без затруднений все желающие углубить свои познания в области небесной механики.

Далее идет «Введение», в котором излагается очерк развития небесной механики (*de l'Astronomie théorique*) от первых астрономов до начала XIX в.

Сочинение Понтекулана также разделено на книги, каждая из которых посвящается какому-нибудь одному определенному вопросу. Первый том содержит две книги. Книга первая «Об общих законах равновесия и движения» представляет собой (так же как и в трактатах Лапласа и Шуберта) изло-

жении необходимых сведений из теоретической механики. Книга вторая — «Поступательное движение небесных тел» — посвящена основной задаче небесной механики. Здесь рассматриваются последовательно и очень методично: закон всемирного тяготения Ньютона, законы Кеплера (Понтекулан приводит их в том же порядке, в каком их дал сам Кеплер), дифференциальные уравнения движения материальных точек и их первые интегралы, теория невозмущенного движения, вычисление орбит из наблюдений, теория возмущений, основанная на способе изменения произвольных постоянных, возмущения полярных координат, вопрос об устойчивости солнечной системы и т. д.

Том второй разделен на три книги. Книга третья — «Теория комет» — содержит определение кометных орбит по наблюдениям, исправление элементов орбит и вычисление возмущений периодических комет. Эта теория применяется к периодическим кометам 1682, 1819 и 1825 гг. Книга четвертая — «О вращательном движении небесных тел» — посвящена общей теории движения небесных тел вокруг их центров тяжести, теории вращения Земли, теории прецессии и нутации и теории либрации Луны. Книга пятая — «О фигуре небесных тел» — содержит общую теорию притяжения, теорию фигуры равновесия вращающейся жидкой массы и теорию фигуры Земли.

Третий том, состоящий из единственной шестой книги — «Продолжение теории планетных движений», содержит углубленную теорию возмущений. Здесь подробно рассматривается разложение возмущающей функции и приводится его окончательная форма до членов шестого порядка относительно эксцентриситетов и взаимных наклонностей планетных орбит. Затем рассматриваются возмущения второго порядка относительно возмущающих масс с приложением этой теории к взаимным возмущениям Юпитера и Сатурна. Отдельные главы посвящены возмущениям, производимым сопротивлением весьма разреженной среды, возмущениям, производимым уменьшением массы Солнца, возмущениям, производимым несферичностью Солнца или Земли, возмущениям, производимым влиянием звезд на планетную систему, возмущениям, производимым влиянием спутников на свою планету и т. п. После этого отдельно и последовательно рассматриваются (так же, как и в трактате Лапласа) теории движения Меркурия, Венеры,

Земли, Марса, Юпитера, Сатурна и Урана *). Том заканчивается рассмотрением вопросов практической небесной механики, т. е. составлением астрономических таблиц, определением основных постоянных и т. д.

Четвертый том также состоит только из одной седьмой книги — «Теория Луны», — посвященной теории движения нашего спутника. Здесь, после исторического обзора этого раздела небесной механики, излагается собственная теория движения Луны Понтекулана, в результате которой даются полные выражения для координат Луны, содержащие большое число членов.

В конце тома теория автора сравнивается с предыдущими теориями движения Луны, а также с наблюдениями.

Наконец, пятый том содержит теорию движений спутников Юпитера, теорию приливов и отливов, теорию астрономической рефракции и некоторые замечания, касающиеся вопросов, изложенных в предыдущих томах. В заключение дается обзор состояния небесной механики в эпоху написания этого сочинения, т. е. в середине XIX в.

Отметим еще, что в конце каждого тома приводятся некоторые приложения, углубляющие или дополняющие изложенное в основном тексте.

Сочинение Понтекулана действительно написано простым и ясным языком и могло служить (а вероятно, и служило на самом деле) учебным пособием для изучения небесной механики по крайней мере до появления (в конце столетия) известного трактата — учебника Тиссерана.

§ 4. Небесная механика во второй половине XIX в.

1. Работы Делонэ, Хилла и Ганзена. Вторая половина XIX в. характеризуется развитием новых методов небесной механики, основывающихся частично на достижениях математики в это же время и появляющихся либо вследствие возникновения новых задач астрономии (например, задачи о движении малых планет), либо из-за необходимости более точного решения задач, поставленных ранее (теория движения Луны).

*) Третий том сочинения Понтекулана был опубликован в 1834 г., т. е. за 12 лет до открытия Нептуна.

Вместе с тем необходимо отметить, что методы, развитые в это время в небесной механике, проникли в свою очередь в математику, что дало толчок новым математическим исследованиям. Из математики некоторые из этих методов перешли и в другие области науки — механику, математическую физику и даже в технику.

Выше уже упоминалось о работе Делонэ по теории движения Луны. Эта работа была опубликована в мемуарах Парижской академии наук в двух томах большого формата под названием «Теория движения Луны» (*Théorie du mouvement de la Lune*, т. 1, 1860; т. 2, 1867). Теория Делонэ, основанная на применении метода Гамильтона — Якоби, доведена до высокой степени точности и представляет собой один из первых примеров применения новых методов для исследования движений небесных тел. Методы, развитые Делонэ в этом сочинении, в дальнейшем породили множество других исследований в других задачах и применяются, с новейшими усовершенствованиями, и в настоящее время.

Дальнейшее развитие теория движения Луны получила в работах знаменитого американского астронома и математика Хилла (*Hill G. W.*, 1838—1914), который, начиная с 1878 г., опубликовал ряд замечательных мемуаров, содержащих новую теорию движения Луны, основанную на совершенно новых математических методах (в большинстве разработанных самим Хиллом) и доведенную до высокой степени совершенства.

Теория Хилла содержится в основном в следующих мемуарах: «Исследования по теории Луны» (*Researches in the Lunar Theory*, *Amer. Journ. of. Math.*, 1878) и «О промежуточной орбите в теории Луны» (*On Intermediary Orbits in the Lunar Theory*, *Astron. Journ.*, 1897), которые помещены также в полном собрании сочинений Хилла (*The collected mathematical works of G. W. Hill*), изданном в четырех колоссальных томах институтом Карнеджи в начале XX в.

Главная идея Хилла заключалась в отказе от кеплеровского эллипса, как первоначальной промежуточной орбиты. За «промежуточную» орбиту Хиллом была принята другая кривая («вариационная орбита»), благодаря чему ему удалось получить решение дифференциальных уравнений движения Луны в виде рядов, члены которых весьма быстро убывают по мере возрастания номера (однако сходимость этих рядов Хиллом не была доказана!).

В другом мемуаре, описывающем часть движения лунного перигея (*On the Part of the Motion of the Lunar Perigee which is a Function of the Mean Motions of the Sun and Moon*), напечатанном сначала в 1877 г. и перепечатанном в *Acta Mathematica*, vol. VIII, 1886 г., содержится первое решение линейного дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами (уравнение Хилла, явившееся источником множества исследований в теории дифференциальных уравнений и ее приложениях) при помощи рядов, для вычисления коэффициентов которых Хилл впервые применяет определители бесконечного порядка.

В собрании сочинений Хилла можно найти еще несколько более мелких статей, посвященных отдельным вопросам теории движения Луны.

Исследования Хилла были продолжены Брауном (*Brown E. W.*, 1866—1938) в работах: «Исследования по теории Луны» (*Investigation in the Lunar Theory*, 1895), «Курс теории Луны» (*Treatise on the Lunar Theory*, 1896) и «Новая теория движения Луны» (*A New Theory of the Moon's Motion*, 1897—1905). Впоследствии (1919 г.) Браун выпустил таблицы, которые и поныне применяются (с некоторыми современными поправками) для вычисления эфемериды Луны в астрономических ежегодниках.

Движение Луны исследовалось и многими другими учеными, из которых упомянем Адамса и Ганзена. Ганзен изложил свой метод, основанный на комбинировании аналитической (т. е. буквенной) и числовой теории, сначала в сочинении «Новые исследования орбиты, по которой движется Луна» (*Fundamenta nova investigationis orbitae verae quam Luna perlustrat*, 1838), опубликованном еще в первой половине столетия. Впоследствии он внес в свою теорию некоторые изменения и дополнения и опубликовал ее в окончательном виде в сочинении «Изложение теории, на которой построены лунные таблицы» (*Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen*, 1862—1864), явившемся основным мемуаром Ганзена по теории движения Луны. Ранее уже отмечалось, что в 1857 г. вышли составленные Ганзеном таблицы, которыми некоторое время пользовались.

Большая работа по теории движения Луны была проделана также американским астрономом Ньюкомом (*Newcomb S.*,

1835—1909), который опубликовал в 1868 г. мемуар «Сравнение теории Луны Ганзена с теорией Делоне» (*A transformation of Hansen's Lunar Theory compared with the Theory of Delaunay*).

2. Работы Линдстедта, Баклунда, Гильдена и др. В теории планетных возмущений нужно прежде всего отметить работы по разложению возмущающей (пертурбационной) функции. Это разложение, приведенное уже в трактатах Лапласа и Понтекулана, а затем в работах Леверье, служило предметом многих других исследований, из которых упомянем работу Ганзена «Исследования взаимных возмущений Юпитера и Сатурна» (*Untersuchungen über die gegenseitigen Störungen des Jupiters und Saturns*, 1831) и работу Ньюкома «Разложение пертурбационной функции по синусам и косинусам кратных средней аномалии и по степеням эксцентриситетов» (*Development of the Perturbative Function and its Derivatives, in sines and cosines of multiple of the eccentric anomalies, and in powers of the eccentricities*, 1891). Укажем еще на работу О. А. Баклунда (1846—1916) «О разложении возмущающей функции» (*Zur Entwicklung der Störungsfunktion*, 1884).

Обширные исследования по теории планетных возмущений провел также Хилл, из многочисленных работ которого отметим «Новую теорию Юпитера и Сатурна» (*A new theory of Jupiter and Saturn*), помещенную в третьем томе собрания его сочинений, напечатанном в 1906 г.

Необходимо отметить и некоторые теоретические работы, целью которых являлось интегрирование дифференциальных уравнений движения планет при помощи чисто периодических рядов, не содержащих вековых членов.

Первая из таких работ принадлежит Линдстедту (*Lindstedt*): «Об интегрировании дифференциальных уравнений теории возмущений» (*Beitrag zur Integration der Differentialgleichungen der Störungstheorie*, Известия Петербургской академии наук, 1890), который построил ряды указанного характера (впоследствии оказалось, что ряды, предложенные Линдстедтом, расходятся, но его метод оказал влияние на ряд других работ в этой же области).

Затем обращают на себя внимание работы шведского астронома Гильдена (*Gylden Hugo*, 1841—1896), главной из которых является «Аналитическая теория абсолютных орбит» (*Traité analytique des orbites absolues des huit planètes prin-*

сипales) в двух томах. Первый том с подзаголовком «Общая теория абсолютных орбит» (*Théorie générale des orbites absolues*) опубликован в 1893 г., а второй том, содержащий применение теории к большим планетам (*Détermination des inégalités des huit planètes principales dépendant de leur configurations*), опубликован О. А. Баклундом в 1908 г. уже после смерти Гильдена. Основой метода Гильдена является введение некоторой новой промежуточной орбиты (периплегматическая кривая) и широкое применение аппарата теории эллиптических функций. Однако совершенные теоретические методы Гильдена оказались весьма сложными и по сути дела, несмотря на усилия его последователей, в первую очередь О. А. Баклунда и А. М. Жданова (1858—1914), применения в небесной механике не нашли.

В заключение упомянем о фундаментальной работе Ньюкома «Об общих интегралах планетных движений» (*On the general integrals of planetary motion*, 1876), в которой даны подробные разложения кеплеровских элементов орбит больших планет, полученные на основе данного им разложения возмущающей функции.

Все новые и новые открытия малых планет, в движениях которых были обнаружены любопытные особенности, потребовали разработки специальных теорий их движения. Эта работа была начата, как уже упоминалось, Гауссом.

Из исследований, появившихся в XIX в., отметим важную работу Ганзена «Изложение метода для вычисления абсолютных возмущений малых планет» (*Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berchnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten*, 1857—1861) и работу Бренделя (*Brendel M.*, 1862—1930) «Теория малых планет» (*Theorie der kleinen Planeten*, 1898).

Наконец, следует остановиться на чисто теоретических работах, связанных с поисками новых интегралов дифференциальных уравнений движения трех и многих тел (материальных точек) и с исследованиями свойств движения.

Брунс (*Bruns K.*, 1848—1919) показал, что кроме десяти классических интегралов задачи многих тел не существует никаких других, которые были бы алгебраическими относительно прямоугольных координат. Это доказательство было дополнено Пуанкаре, а затем и Пенлеве (*Painlevé P.*, 1863—1933), которые показали, что не существуют и транс-

цендентные интегралы, левые части которых были бы однозначными функциями координат или элементов орбит.

Хилл начал работы по исследованию свойств движения, которые можно установить, даже не имея общего решения дифференциальных уравнений движения. Он рассматривал ограниченную (круговую) задачу трех тел (задача о движении материальной точки под действием притяжения двух конечных точечных масс, обращающихся вокруг общего центра инерции по круговым орбитам), дифференциальные уравнения которой обладают первым интегралом (интегралом Якоби). Хилл заметил, что движение точки может происходить только в некоторой области пространства, ограниченной поверхностями (поверхности Хилла), уравнения которых выводятся из интеграла Якоби. Метод исследования геометрических свойств таких поверхностей и составляет знаменитый метод Хилла, явившийся источником многих работ.

Весьма важные исследования по небесной механике проведены знаменитым русским ученым А. М. Ляпуновым (1857—1918), который исследовал устойчивость лагранжевых движений в задаче трех тел, доказал сходимость рядов Хилла в теории движения Луны, обосновал общую теорию устойчивости движения и, наконец, опубликовал фундаментальные исследования по устойчивости фигур равновесия вращающейся жидкости с приложениями к теории фигур небесных тел.

Перейдем теперь к изложению содержания двух сочинений, которыми для небесной механики заканчивается девятнадцатое столетие и одно из которых подводит итоги развития небесной механики, а другое, наоборот, открывает новые возможности и новые перспективы этой науки.

3. Тракта́т по небесной механике Тиссерана. В последнем десятилетии XIX в. (1889—1896) в Париже было опубликовано фундаментальное сочинение известного французского астронома-теоретика Тиссерана (Tisserand F., 1845—1896) под названием «Тракта́т по небесной механике» (*Traité de mécanique céleste*) в четырех больших томах. Это сочинение, содержащее все существенное, что было сделано различными учеными в области небесной механики до начала XX в., является подлинной энциклопедией небесно-механических знаний и изучение его совершенно обязательно и в наше время для всякого, кто желает посвятить себя этой замечательной науке.

Трактат Тиссерана включает в себе последовательное рассмотрение всех основных задач небесной механики с изложением разнообразных методов их решения, сопровождаемое историческими справками и подробной библиографией.

Первый том, имеющий подзаголовок «Теория возмущений, основанная на методе изменения произвольных постоянных» (*Perturbations des planètes d'après la méthode de la variation des constantes arbitraires*), вышел в 1889 г. Этот том начинается «Введением» и разделен на двадцать девять глав, каждая из которых имеет собственное заглавие.

«Введение» — по уже установившейся со времени Лапласа традиции — содержит вспомогательные сведения из теоретической механики, а именно теорию Гамильтона — Якоби интегрирования канонических систем, которая начиная со второй половины XIX в. стала играть преобладающую роль в исследованиях по небесной механике.

Главы 1 и 2 также, по существу, являются вводными, так как посвящены закону всемирного тяготения и некоторым его следствиям. В главе 1 рассматривается, между прочим, знаменитая *задача Бертрана* (Bertrand J., 1832—1900) о нахождении закона силы, управляющей движением планеты, если известна ее орбита. В главе 2 приводятся основные сведения из теории притяжения и показывается, что два произвольные тела, разделенные весьма большим по сравнению с их размерами расстоянием, притягиваются почти как материальные точки. Это позволяет в дальнейшем в ряде основных задач небесной механики рассматривать небесные тела как материальные точки.

В главах 3, 4 и 5 рассматриваются дифференциальные уравнения движения системы взаимно притягивающихся материальных точек в абсолютных и относительных осях координат и устанавливаются классические первые интегралы этих уравнений. В главе 5, кроме того, выводятся уравнения движения в полярных, сферических и в цилиндрических координатах, а также уравнения, известные под названием «уравнения Клеро — Лапласа».

Следующие две главы посвящены подробному рассмотрению невозмущенного, кеплеровского движения с изложением различных способов интегрирования уравнений этой задачи (способы Лапласа, Якоби и др.).

В главе 8 излагаются знаменитые исследования Лагранжа по проблеме трех тел (мемуар *Essai sur le problème de trois corps*).

Главы 9, 10 и 11 содержат основы теории возмущений. В них излагается прежде всего общий метод изменения (вариации) произвольных постоянных, основанный на применении способа Гамильтона — Якоби, затем выводятся дифференциальные уравнения для элементов (канонических и кеплеровых) оскулирующих орбит и устанавливаются основные понятия теории возмущений планет.

Следующие пять глав (главы 12—16) посвящены разложению координат невозмущенного эллиптического движения и некоторых их функций в бесконечные ряды. Здесь приводятся элементы теории бесселевых функций с ее приложениями к разложению координат в ряды Фурье, аргументом которых является одна из аномалий (средняя, эксцентрическая или истинная). Затем рассматриваются разложения величин эллиптического движения в ряды, расположенные по степеням эксцентриситета орбиты, и устанавливается предел Лапласа ($e = 0,6627\dots$) сходимости этих рядов.

Главы 17 и 18 содержат принципы разложения возмущающей функции для случая, когда наклонности и эксцентриситеты орбит остаются малыми, что имеет место для больших планет, спутников и многих малых планет.

В главах 19, 20 рассматриваются возмущения первого порядка (относительно возмущающих масс) кеплеровских элементов и приводятся формулы Леверье для вычисления этих возмущений.

В главах 21 и 22 рассматриваются возмущения первого порядка гелиоцентрических координат — радиуса-вектора, широты и долготы.

Глава 23 посвящена рассказу об открытии Нептуна с подробным изложением работы Леверье и с упоминанием о такой же работе Адамса.

Главы 24 и 25 посвящены возмущениям второго порядка относительно масс и доказательству теоремы Пуассона о неизменности больших полуосей во втором приближении.

В главах 26 и 27 специально рассматриваются вековые возмущения. В главе 26 излагаются исследования Лагранжа и Лапласа и приводятся числовые значения коэффициентов

вековых членов в возмущениях элементов по данным Леверье. В главе 27 приводится изложение Альфана (Halphen G. H., 1844—1899) метода Гаусса вычисления вековых возмущений планетных орбит. Этот метод Гаусс опубликовал в 1818 г. Он показал, что вековые возмущения, называемые действием планеты, движущейся по эллиптической орбите, можно найти, считая, что возмущаемое тело подвергается действию притяжения материального эллиптического кольца, линейная плотность которого в каждой точке определяется законом Кеплера. Метод Гаусса впоследствии использовался в многочисленных работах.

Глава 28 посвящена разложению возмущающей функции для случая, когда взаимная наклонность орбит возмущаемой и возмущающей планет не является малой. Этот случай встречается у многих малых планет.

Наконец, в последней, 29 главе излагается метод Ганзена, который по сути дела является некоторым видоизменением метода, данного впервые еще Лапласом.

Второй том трактата Тиссерана, опубликованный в 1891 г., имеет заглавие «Теория фигур небесных тел и их вращательного движения» (*Théorie de la figure des corps célestes et de leur mouvement de rotation*). Том разделен на 30 глав, из которых главы 1—21 посвящены теории фигур небесных тел, а главы 22—30 — теории их вращательного движения.

Первые пять глав второго тома содержат развитие теории притяжения с изложением общих свойств ньютонова потенциала (силовой функции притяжения) и с выводом основных формул для силовой функции и ее первых производных (т. е. составляющих притяжения) для некоторых простейших тел. Особенно подробно здесь рассматривается вопрос о притяжении однородных эллипсоидов и излагаются способы Лагранжа и Гаусса вывода силовой функции этих тел.

Главы 6, 7 и 8 посвящены теории фигуры однородной вращающейся жидкости. В основном здесь излагается теория эллипсоидов Маклорена (Maclorin, 1698—1746) и Якоби, но отмечаются работы и некоторых других ученых, в частности работы Пуанкаре.

Следующие четыре главы (главы 9—12) посвящены теории колец Сатурна: излагаются исследования Лапласа, Пуанкаре, С. В. Ковалевской (1850—1891) и Максвелла (Max-

well D., 1831 — 1879). Приводится доказательство Максвелла устойчивости колец Сатурна, рассматриваемых как совокупности множества мелких частиц.

Главы 13, 14 и 15 посвящены фигурам равновесия неоднородных жидкостей с изложением основ теории Клеро (в приложениях к теории фигуры Земли).

Главы 16, 17, 18 и 19 заключают в себе теорию сферических функций с ее приложениями к разложениям потенциала сфероида в бесконечный ряд.

В главах 20 и 21 излагаются геодезическая и гравиметрическая теории фигуры Земли.

Главы 22, 23 и 24 содержат основы теории вращательного движения небесных тел вокруг их собственных центров тяжести (центров инерции). Здесь вводятся основные переменные (углы Эйлера), выводятся уравнения вращательного движения и рассматриваются общие приемы их интегрирования (основанные на применении метода Гамильтона — Якоби и вариации произвольных постоянных).

Глава 25 посвящена разложению в ряд возмущающей функции.

Главы 26 и 27 содержат теорию вращения Земли с выводом формул для прецессии и нутации.

В главе 28 рассматривается теория вращения и либрации Луны. Наконец, в двух последних главах (29 и 30) излагаются различные дополнительные вопросы теории вращения Земли.

Третий том небесной механики Тиссерана, вышедший в 1894 г., посвящен исключительно теории движения Луны и имеет заглавие «Изложение теории движения Луны» (*Exposé de l'ensemble des théories relatives au mouvement de la Lune*).

Первые две главы этого тома являются вводными и в них рассматривается вопрос об интегрировании линейного дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами, с изложением методов Линдштедта, Гильдена и Хилла и с подробной библиографией, относящейся к этому вопросу.

В главе 3 излагается теория движения Луны, данная Ньютоном в его «Началах», но с переводом геометрического изложения Ньютона на современный язык аналитических формул.

Глава 4 содержит изложение теорий движения Луны Клеро и Даламбера. Указывается, что Клеро первым построил теорию движения Луны при помощи интегрирования дифференциальных уравнений задачи трех тел бесконечными рядами. Даламбер получил основное уравнение второго порядка с периодическим коэффициентом, которое послужило отправным пунктом для многих последующих работ.

Глава 5 излагает первую теорию Луны Эйлера, в которой, как уже отмечалось выше, впервые применялась идея метода изменения элементов орбиты.

В главе 6 рассматривается вторая теория Эйлера, основанная на применении прямоугольных координат. В этой теории Эйлером развита также идея разделения возмущений на неравенства различных порядков, которые определяются последовательно.

В главе 7 излагаются существенные черты теорий Лапласа, Дамуазо и Плана, а глава 8 посвящена подробному изложению усовершенствования теории Лапласа, выполненному Гильденом.

В главе 9 рассматривается теория Пуассона, в которой содержится дальнейшее развитие метода изменения произвольных постоянных и его применение к теории движения Луны.

Глава 10 посвящена изложению теорий Люббока и Понтекулана, а главы 11 и 12 — подробному изложению метода и теории Делоне и сравнению этой теории с теорией Ганзена (Ньюком).

Вековое ускорение в движении Луны с изложением истории этого вопроса рассматривается в главе 13, теория Хилла — в главах 14 и 15, теория Адамса — в главе 16.

Глава 17 посвящена теории Ганзена, причем опять производится сравнение этой теории с теорией Делоне.

Две последние главы содержат рассмотрение некоторых дополнительных вопросов и изложение современного (для XIX в.) состояния теории движения Луны.

Четвертый, последний, том фундаментального трактата Тиссерана вышел в 1896 г. под заглавием «Теории спутников Юпитера и Сатурна. Возмущения малых планет» (*Théories des satellites de Jupiter et de Saturne. Perturbations des petites planètes*) и состоит из 29 глав.

Первые пять глав содержат теорию движения спутников Юпитера, которых в то время было известно пять — четыре Галлилеевых и пятый, самый близкий к планете, открытый Барнардом в 1892 г. Изложение теории спутников Юпитера ведется здесь на основе классических работ Лагранжа и Лапласа, с некоторыми изменениями, внесенными Суффаром (Souillart), который опубликовал по этому вопросу два больших мемуара.

Главы 6, 7 и 8 посвящены теории движения спутников Сатурна, которые были известны почти все (за исключением Фебы, открытой Пиккерингом в 1898 г., уже после смерти Тиссерана). Изложение теории идет на основе работ Лапласа, Ньюкома и Германа Струве (Struve H.). Упоминаются и некоторые другие работы.

Глава 9 содержит некоторые замечания по поводу теории движения спутников Марса, Урана и Нептуна.

Главы 10 и 11 являются вспомогательными и содержат необходимый аппарат прикладной математики, а именно — формулы интерполирования, формулы квадратур и способ численного интегрирования дифференциальных уравнений небесной механики.

Глава 12 посвящена вопросам теории движения комет и содержит вычисление возмущений кометы, когда она проходит вблизи большой планеты, критерий Тиссерана и проблемы захвата.

Глава 13 рассматривает вопрос о влиянии сопротивляющейся среды на движение планет и комет.

В главе 14 излагается космогоническая теория Лапласа.

Главы 15 и 16 посвящены теории фигур комет.

Главы 17—25 содержат изложение различных вопросов теории движения малых планет. Здесь рассматриваются методы Коши, Ньюкома, Ганзена, Гильдена и Бренделя. В отдельной главе (глава 25) рассматриваются случаи острой соизмеримости средних движений малых планет со средним движением Юпитера.

Глава 26 заключает в себе изложение мемуара Тиссерана, посвященного общей форме разложений в ряды координат в задаче трех тел.

Глава 27 посвящена краткому ознакомлению с работами Пуанкаре, содержащимися в его знаменитом мемуаре «О задаче трех тел и об уравнениях динамики» (Sur le problème

des trois corps et les équations de la Dynamique, 1889) и в его еще более известной книге «Новые методы небесной механики», о которой речь будет идти ниже.

В главе 28 рассматриваются вопрос о конечной скорости распространения тяготения и некоторые обобщения закона всемирного тяготения Ньютона.

В последней, 29 главе закон Ньютона сравнивается с наблюдениями, т. е. исследуется вопрос, насколько теории движений небесных тел, построенные в основном на законе Ньютона, соответствуют результатам наблюдений этих тел. Автор приходит к заключению, что закон Ньютона представляет движения небесных тел с весьма высокой точностью, но остаются некоторые небольшие несогласия теории с наблюдениями, о причинах которых ничего определенного сказать нельзя.

4. А. М. Ляпунов. Пуанкаре и его «Новые методы небесной механики». Последним замечательным событием XIX в. в истории небесной механики явился выход в свет замечательного произведения гениального французского ученого А. Пуанкаре «Новые методы небесной механики» (Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste) в трех томах.

Это сочинение, по его значению для небесной механики, а также для механики вообще, для математики и физики, можно сравнить разве только с другим бессмертным сочинением, о котором уже шла речь, — «Началами» великого Ньютона.

Действительно, необыкновенное богатство новых идей и развитие совершенно новых методов, которые из области небесной механики немедленно перешли и в другие области науки, а также блестящее изложение выделяют «Новые методы» Пуанкаре из всех крупных сочинений математического характера XIX в.

Появившись в самом конце столетия, это сочинение, естественно, начало играть, и притом все возрастающую по значению, роль уже в самом начале XX в., а в настоящее время может соперничать только с другим гениальным сочинением, опубликованным также в конце XIX в., но не сразу привлечшим к себе надлежащее внимание ученых всего мира. Мы имеем в виду «Общую задачу об устойчивости движения» А. М. Ляпунова, напечатанную в Харькове в 1892 г.

на русском языке и также содержащую множество новых идей и методов, часто аналогичных результатам Пуанкаре, но отличающихся от них необыкновенной тщательностью изложения и математической строгостью.

Первый том сочинения Пуанкаре вышел в 1892 г. с подзаголовком: «Периодические решения. Несуществование однозначных интегралов. Асимптотические решения». (Solutions périodiques. Non-existence des integrales uniformes. Solution asymptotiques).

Этот том начинается предисловием, в котором кратко описываются достижения математики в области небесной механики (задачи трех тел) и разъясняются цели сочинения. Здесь Пуанкаре высказывает свой взгляд на содержание и назначение небесной механики: «Конечная цель небесной механики заключается в ответе на великий вопрос — может ли один закон Ньютона объяснить все астрономические явления».

Первый том разделен на семь глав. Первые две главы являются вводными и содержат краткое изложение необходимого для дальнейшего математического аппарата. Сюда входят некоторые обобщения метода Гамильтона — Якоби и рассмотрение вопроса об интегрировании дифференциальных уравнений при помощи бесконечных рядов, основанного на расширении известной теоремы существования Коши.

Следующие две главы (3 и 4) содержат изложение общей теории периодических решений дифференциальных уравнений с приложениями к основным задачам небесной механики.

Эта теория основана на применении *метода малого параметра*, который в настоящее время играет такую большую роль в механике и физике. Теперь установлено, что метод Пуанкаре является некоторым частным случаем более общего метода А. М. Ляпунова, развитого последним в упомянутом выше сочинении, но нужно помнить, что исследования Пуанкаре велись совершенно независимо от работ Ляпунова. Вместе с тем следует указать, что в большинстве случаев Пуанкаре ограничивается рассмотрением канонической системы дифференциальных уравнений, которая у Ляпунова играет роль частного, но весьма важного случая.

Глава 5 посвящена доказательству несуществования новых однозначных интегралов (отличных от классических) в задаче трех тел. Это доказательство, вместе с доказательством Брунса несуществования алгебраических интегралов,

положило конец попыткам нахождения новых интегралов и направило внимание ученых на другие задачи в этой области.

В главе 6 рассматривается вопрос о разложении возмущающей функции, о свойствах этого разложения и о его сходимости.

Глава 7 содержит теорию асимптотических решений, т. е. решений, неограниченно приближающихся к некоторым периодическим и более пригодным для представления истинных движений небесных тел в ряде случаев.

Второй том издан в 1893 г. под названием «Методы Ньюкома, Гильдена, Линдстедта и Болина» (*Méthodes de MM. Newcomb, Gylden, Lindstedt et Bohlín*).

Том разделен на четырнадцать глав. Первая из них (глава 8, так как счет глав начинается с первого тома) посвящена вопросу о значении для небесной механики расходящихся рядов, которыми, как замечает Пуанкаре, и пользуются астрономы большей частью при практических вычислениях.

В главах 9 – 15 излагаются и исследуются методы Ньюкома и Линдстедта и приводится доказательство расходимости рядов Линдстедта.

Главы 16, 17 и 18 посвящены методу Гильдена, а последние три главы 19, 20 и 21 — рассмотрению и исследованию метода Болина.

Рассматривая методы упомянутых ученых, Пуанкаре излагает их вовсе не так, как они были изложены их авторами. Все эти методы рассмотрены с единой точки зрения и изложение авторов совершенно переработано. Можно сказать, что Пуанкаре оставил только основные идеи рассмотренных им методов, развил их все заново, с новыми доказательствами, и получив при этом новые результаты.

Третий том «Новых методов» издан в 1899 г. под заглавием «Интегральные инварианты. Периодические решения второго рода. Двойко-асимптотические решения». (*Invariants intégraux. Solutions périodique du deuxième genre. Solutions doublement asymptotiques*).

Этот том содержит наиболее новые и самые блестящие результаты Пуанкаре, которые явились источником множества работ по небесной механике, по качественной теории дифференциальных уравнений, по теоретической механике и в других областях.

Том разделен на двенадцать глав. Главы 23—26 посвящены изложению теории интегральных инвариантов с ее приложениями к проблемам динамики и небесной механики. Этот раздел заканчивается рассмотрением *устойчивости по Пуассону*, которая играет важную роль в небесной механике.

Главы 27—31 содержат различные вопросы качественной теории дифференциальных уравнений и теорию периодических решений второго рода (периоды этих решений кратны периоду правых частей уравнений движения).

Последние две главы (32 и 33) рассматривают двоякоасимптотические решения, т. е. решения, неограниченно приближающиеся к некоторым периодическим с двух сторон, когда время неограниченно растет и в ту и в другую сторону.

Этим и заканчивается сочинение Пуанкаре, о котором здесь можно было дать только некоторое понятие.

В заключение очерка развития небесной механики в XIX в. вернемся к знаменитому сочинению А. М. Ляпунова «Общая задача об устойчивости движения», которое хотя и посвящено общим проблемам механики, но имеет чрезвычайно важные приложения и в современной небесной механике. В этом сочинении впервые устанавливаются точные понятия и даются строгие определения термина «устойчивость», а также приводятся общие методы для решения задачи об устойчивости. Здесь же развиваются замечательные методы интегрирования дифференциальных уравнений при помощи рядов, расположенных по степеням начальных значений, и даются строгие доказательства сходимости этих рядов. Наконец, значительную часть сочинения А. М. Ляпунова занимает теория периодических решений дифференциальных уравнений, которая имеет более общее значение, чем теория Пуанкаре, и получила в небесной механике значительно больше приложения.

Главной заслугой А. М. Ляпунова и А. Пуанкаре является обоснование, развитие и разработка совершенно новых методов исследования движений, определяемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Эти методы, которые Пуанкаре назвал «качественными методами» (*les méthodes qualifatives*), ставят своей целью изучение характера и поведения функций, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям, без решения самих уравнений (что в большинстве случаев оказывается и невозможным), а тем самым

позволяют исследовать общие важные свойства движений, в частности и движений небесных тел.

Этим «качественные методы» и отличаются от «количественных методов», которые ставят своей целью найти решения дифференциальных уравнений хотя бы в виде рядов и тем самым получить формулы, при помощи которых можно вычислять положения и скорости тел для различных моментов времени.

§ 5. Развитие небесной механики в XX в.

1. Учебники по небесной механике Шарлье, Пуанкаре и Мультона. В 1902 г. вышел первый том лекций известного шведского ученого Шарлье (Charlier C. L.) под названием «Небесная механика» (Die mechanik des Himmels) на немецком языке, а в 1907 г. — второй том этого учебного пособия. Оба тома были переизданы в 1927 г. Все сочинение разбито на одиннадцать глав.

Согласно установившейся традиции первые две главы книги Шарлье являются вводными и посвящены изложению вспомогательных вопросов из областей математики и теоретической механики. В них рассматриваются свойства функциональных определителей, задача о решении системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, теория канонических уравнений с методом Гамильтона — Якоби и теория условно-периодических движений.

В главе 3 содержится задача о движении материальной точки под действием притяжения двух неподвижных центров.

Эта классическая задача, которой было посвящено много мемуаров различных ученых еще в XIX в., впервые появилась в учебнике по небесной механике и с тех пор пользуется неизменным вниманием со стороны астрономов-теоретиков, хотя приложений к конкретным астрономическим проблемам она еще не получила *).

В главе 4 рассматривается задача двух тел, решаемая при помощи метода Гамильтона — Якоби. Здесь, также

*) В самое последнее время благодаря работам Е. А. Гребеникова, В. Г. Демнина и Е. П. Аксенова выяснилась возможность приложения классической задачи двух неподвижных центров к теории движения искусственных спутников Земли.

впервые, исследуется и случай прямолинейного кеплеровского движения, который играет важную роль в последующих теоретических исследованиях. В этой же главе решается задача о движении под действием отталкивательной силы с приложением к теории кометных хвостов.

Глава 5 посвящена задаче трех тел. Здесь выводятся уравнения задачи в различных системах относительных координат, рассматриваются их первые интегралы, устанавливаются некоторые общие свойства движения и, наконец, подробно разбирается применение метода изменения постоянных с точки зрения теории Гамильтона — Якоби.

Глава 6 содержит изложение общих принципов теории возмущений, основанной также на применении метода Гамильтона — Якоби.

Глава 7, заканчивающая первый том, посвящена подробному изложению теории вековых возмущений на основании исследований Лагранжа и Лапласа. Здесь выводится разложение «вековой части» возмущающей функции и рассматриваются затем линейные дифференциальные уравнения первого порядка, определяющие вековые неравенства первого порядка эксцентриситетов, наклонностей, долгот узлов и долгот перигелиев.

При изложении автор пользуется, впрочем, не кеплеровыми элементами, а элементами Делоне и Пуанкаре. Конец главы посвящен вопросу о вековых возмущениях малых планет.

Второй том «Небесной механики» Шарлье начинается главой (глава 8), посвященной вопросу о приближенном численном вычислении определенных интегралов и о численном интегрировании дифференциальных уравнений. Глава заканчивается рассмотрением примера интегрирования дифференциальных уравнений ограниченной задачи трех тел.

В главе 9 излагаются вопросы теории периодических решений задач небесной механики.

Сначала автор рассматривает строгие (лагранжевы) решения задачи трех тел и, в частности, ограниченной задачи трех тел. В последней задаче лагранжевым решениям соответствуют *точки либрации*, являющиеся особыми точками поверхностей Хилла и одновременно особыми точками дифференциальных уравнений движения. Исследуются периодические решения (в первом приближении!) вблизи точек либрации. Очевидно, Шарлье не знал сочинения А. М. Ляпу-

нова «Общая задача об устойчивости движения», где вопрос о периодических решениях вблизи точек либрации решен с полной строгостью до конца.

Затем Шарлье рассматривает периодические решения вблизи конечных масс, излагает основы теории Хилла, который представил такие решения периодическими рядами*) и, в заключение, приводит основные результаты теории периодических решений, данной Пуанкаре, в уже рассмотренном его сочинении «Новые методы небесной механики».

Глава 10 посвящена вопросу о сходимости рядов, употребляемых в небесной механике.

Глава 11, последняя, содержит изложение метода Делоне в применении к теории движения малых планет и рассмотрение общего вопроса о представлении интегралов задачи трех тел чисто тригонометрическими рядами.

Почти одновременно с учебником Шарлье вышли также «Лекции по небесной механике» (*Leçons de Mécanique Céleste (professées a la Sorbonne)*) Пуанкаре в трех томах.

В предисловии к первому тому, вышедшему в 1905 г. под заглавием «Общая теория планетных возмущений» (*Théorie générale des perturbations planétaires*), знаменитый ученый так определяет цели своего сочинения: «Эта книга не должна дублировать ни мое сочинение «Новые методы небесной механики», ни «Трактат по небесной механике» Тиссерана. В «Новых методах» я рассматриваю вопросы с точки зрения математика и исследую их с аналитической строгостью... Здесь, наоборот, я ограничиваюсь изложением лекций, читанных мною в Сорбонне, и подхожу к предмету с самого начала, предполагая известными только принципы Анализа и Механики, так же, как законы Кеплера и закон Ньютона».

Отсюда ясно, что книга Пуанкаре действительно является учебником, но этот учебник, принадлежащий гениальному автору, представляет собой сочинение, в котором с полной математической строгостью и предельной ясностью изложены идеи основных методов небесной механики.

Первый том разделен на тринадцать глав. Глава I и здесь является вводной и посвящена рассмотрению метода Гамиль-

*) Мы уже отмечали, что Хилл не рассматривал вопроса о сходимости своих рядов; эта сходимость была установлена А. М. Ляпуновым в мемуаре «О рядах, предложенных Хиллом для представления движения Луны», 1896.

тона — Якоби, так как все последующее изложение Пуанкаре строит на применении теории канонических уравнений. В главе 2 выводятся дифференциальные уравнения движения общей задачи трех тел и их классические интегралы. Как частный случай, здесь же рассматривается постановка «ограниченной задачи трех тел» *) и исследуются уравнения этой задачи. Глава 3 посвящена невозмущенному, кеплеровому движению с полным выводом всех необходимых формул, главным образом для эллиптического движения. Главы 4, 5 и 6 содержат обоснование метода вариации произвольных постоянных Лагранжа и приложение его к теории возмущенного движения. В главе 7 рассматривается применение метода Лагранжа к ограниченной задаче трех тел.

Главы 8 и 9 посвящены теории вековых возмущений. В главе 10 разбирается общий случай задачи трех тел, а в главе 11 — теорема Пуассона о неизменяемости больших полуосей во втором приближении. Наконец, две последние главы содержат изложение метода Делоне.

Второй том учебника Пуанкаре разделен на две части. Часть I «Разложение пертурбационной функции» вышла в 1907 г. и содержит рассмотрение всех необходимых вопросов, относящихся к этому важнейшему разделу теории возмущений. Сюда входят и основы теории функций Бесселя, и теория коэффициентов Лапласа и операторов Ньюкома, облегчающих вычисление разложения возмущающей функции. Особое внимание автор уделяет вопросам сходимости разложений, применяемых в теории возмущений, и трактует эти вопросы с полной математической строгостью.

Часть II второго тома вышла в 1909 г. под названием «Теория Луны», которую Пуанкаре разделяет на два отдела, относя к первому движение Луны под действием притяжений Земли и Солнца (причем все три тела рассматриваются как материальные точки), а ко второму — изучение влияний притяжений других планет и влияние сжатия Земли. Изложение построено на работах Хилла, Делоне и Брауна.

Третий том «Лекций по небесной механике» Пуанкаре, вышедший в 1910 г., содержит «Теорию приливов», которая теперь не включается в небесную механику и представляет

*) Термин «ограниченная задача» введен Пуанкаре и с тех пор всеми применяется.

собой изложение решения некоторых задач гидродинамики.

Однако последняя, пятая, часть третьего тома имеет отношение к нашей науке, ибо в ней рассматриваются — правда, весьма кратко — вопросы о влиянии приливов на движения небесных тел.

Таково содержание этого последнего произведения Пуанкаре, посвященного небесной механике. Отметим, что кроме рассмотренных книг Пуанкаре написал еще много других, из которых к небесной механике имеют отношение «Теория Ньютоновского потенциала» и «Лекции по космогоническим гипотезам».

Третьим, весьма полезным для изучающих небесную механику, сочинением, из вышедших в начале столетия, явилось «Введение в небесную механику» (*An introduction to celestial mechanics*) известного американского ученого — теоретика Ф. Мультона (*Moulton F.*), вышедшее первым изданием в 1902 г. Второе издание этой книги, переработанное и дополненное, вышло в 1914 г.

Книга Мультона имеет совсем другой характер, чем все до сих пор рассмотренные. Действительно, она представляет собой возможно более простое и доступное изложение основных вопросов небесной механики и предназначена для того, «... чтобы всякий, имеющий необходимую математическую подготовку, мог получить из книги в сравнительно короткое время и наиболее легким образом достаточно широкое и точное понятие о всем предмете».

Книга вполне удовлетворяет этому своему назначению и весьма скоро завоевала себе широкую популярность не только в Новом свете, но и в старой Европе, где она была издана в переводах *). В ней излагаются все важнейшие проблемы небесной механики: элементы теории притяжения, теория невозмущенного движения с вычислением орбит, частные решения задачи трех тел с исследованием устойчивости точек

*) В 1935 г. был издан русский перевод этой книги под редакцией и с некоторыми дополнениями Г. Н. Дубошина. Дополнения содержат краткую теорию канонических уравнений и понятие о теории устойчивости движения, созданной А. М. Ляпуновым. Этот перевод книги Мультона в Советском Союзе также пользуется широкой популярностью и служит хорошим пособием для изучающих небесную механику.

либрации ограниченной задачи, поверхности Хилла и теория возмущений.

Все рассматриваемые в книге вопросы изложены простым, ясным языком и сопровождаются многими искусно подобранными задачами и упражнениями. В книге имеются также библиографические указания, кратко освещающие основные пункты истории небесной механики.

2. Качественные методы. Перейдем к краткому изложению основных научных достижений в области небесной механики, полученных примерно с начала столетия до настоящего времени.

Основные исследования велись по следующим главным направлениям: теория фигур небесных тел, качественные методы небесной механики и аналитические методы небесной механики.

Начало столетия ознаменовано бурным развитием первого из трех отмеченных направлений благодаря работам главным образом А. М. Ляпунова, А. Пуанкаре, Д. Дарвина (Darwin G. H., 1845—1912), К. Шварцшильда, а в более позднее время — Джинса, Лихтенштейна, Вавра и других ученых. Основную роль играл, конечно, А. М. Ляпунов, начавший заниматься вопросами равновесия и устойчивости фигур вращающейся жидкости, частицы которой взаимно притягиваются по закону Ньютона, еще в 1882 г. и продолжавший эти работы до своей смерти, в 1918 г. Все эти фундаментальные работы А. М. Ляпунова изданы в «Известиях Академии Наук», а ныне собраны в полном собрании сочинений А. М. Ляпунова, издаваемых АН СССР.

Для решения задачи, поставленной перед ним впервые его учителем П. Л. Чебышевым (1821—1894), А. М. Ляпунов изобрел совершенно новый, плодотворный метод, с помощью которого он открыл целый ряд новых форм фигур равновесия, отличающихся от классических эллипсоидов Маклорена и Якоби, и смог исследовать вопрос об устойчивости любой фигуры равновесия. Среди новых фигур, открытых А. М. Ляпуновым, оказалась также фигура, названная впоследствии грушевидной (pear-shaped), из-за которой разгорелся знаменитый в истории науки спор между Ляпуновым и Дарвином; победителем из этого спора вышел А. М. Ляпунов.

Почти одновременно с Ляпуновым теорией фигур равновесия начал заниматься и Пуанкаре, который заинтересовался

работой С. В. Ковалевской об устойчивости кольца Сатурна, где впервые было доказано существование кольцеобразных фигур равновесия. Развивая далее результаты Ковалевской, Пуанкаре завершил, в известном смысле, теорию кольцеобразных фигур равновесия. Но Пуанкаре очень хорошо понимал, что для теории фигур небесных тел гораздо большее значение имеют фигуры, похожие на эллипсоидальные, а поэтому в дальнейшем он занялся именно такими фигурами. В мемуаре, опубликованном еще в 1885 г., Пуанкаре строит общую теорию устойчивости (по первому приближению, главным образом) эллипсоидальных фигур равновесия и приходит, так же, как и Ляпунов, к открытию новых фигур, важнейшую из которых он и назвал грушевидной.

Вот из-за устойчивости этих грушевидных фигур и возник упомянутый уже спор. Исследуя вопрос в первом приближении, Пуанкаре пришел к заключению, что грушевидная фигура устойчива. В 1896 г. Шварцшильд показал невозможность решения вопроса об устойчивости, если ограничиваться только первым приближением. Тогда Пуанкаре разработал специальный метод, дающий второе приближение, но ограничился только общими указаниями, а необходимых для решения вопроса громоздких вычислений производить не стал. Вычисления по формулам Пуанкаре произвел Дж. Дарвин (занимавшийся в это время изучением устойчивости фигур равновесия), который пришел к заключению, что грушевидная фигура устойчива.

Окончательное решение вопроса дал А. М. Ляпунов, применивший свои, точные, формулы и установивший, что грушевидная фигура не устойчива. Этот результат был опубликован в 1905 г.

Дарвин не согласился с выводом Ляпунова, что и вызвало между ними длительную полемику (по переписке). Наконец, Ляпунов опубликовал в 1912 г. все свои формулы и вычисления, устанавливающие неустойчивость грушевидной фигуры, но и это не положило конца спору, в котором приняли участие и многие другие ученые. В конце концов, в 1915 г. Джинс показал, что в методе Пуанкаре двух приближений недостаточно, а третье приближение приводит к заключению о неустойчивости грушевидной фигуры, в согласии с результатами Ляпунова, и этим вопрос, вызвавший столько споров, был исчерпан.

Дальнейшее развитие теория фигур равновесия получила уже после смерти Ляпунова в работах Лихтенштейна (см. L. Lichtenstein, Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, Leipzig, 1933) и его школы. Продолжая исследования Ляпунова, Лихтенштейн развил и усовершенствовал его методы и связал проблему фигур равновесия с теорией нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Одновременно с книгой Лихтенштейна по этому же вопросу были опубликованы важные работы Вавра (R. Wavre, Figures planétaires et Géodesie, Paris, 1933).

Затем, начиная примерно с 40 гг. нашего столетия, замечается спад в этой области и за последнее время существенно новых результатов опубликовано не было.

Второе направление, начало которому положено, как уже было сказано, работами А. М. Ляпунова и Пуанкаре, ставило своей целью исследование свойств движения при помощи функций, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям, без общего решения этих уравнений.

Вопросы, разрабатываемые этим направлением и образующие в своей совокупности раздел небесной механики, называемый *качественным исследованием движения*, суть, в основном, следующие: теория периодических и асимптотических решений, теория устойчивости движения по Ляпунову, теория финальных движений и некоторые другие.

За последние полсотни лет в этой области появилось множество разнообразных работ, которые развивали и дополняли результаты, полученные Ляпуновым и Пуанкаре, однако существенно нового установлено по сути дела не было.

Из наиболее важных исследований этого направления можно отметить, пожалуй, работу Бендиксона (О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, 1901), в которой продолжается работа Пуанкаре под таким же заглавием; затем книгу Биркгофа (G. Birkhoff, Dynamical Systems, 1927), но и эти труды имеют общее значение, а не посвящены специально вопросам небесной механики.

Значительный вклад в эту область небесной механики внесли работы Шази (Chazy J.), опубликованные в 30-х годах нашего столетия и посвященные изучению свойств движений в задаче трех тел при неограниченно возрастающем времени.

Впоследствии, уже после второй мировой войны, некоторые теоремы Шази (далеко не все!) были подвергнуты пере-

смотру в связи с так называемой «теорией захвата», игравшей важную роль в космогонической гипотезе О. Ю. Шмидта. В доказательстве одной из теорем Шази, утверждавшей невозможность захвата, были найдены ошибки, что дало повод искать осуществимость захвата. Эти поиски привели к опубликованию весьма большого числа разнообразных работ, главным образом советских ученых, в которых получены многие интересные результаты, но поставленный О. Ю. Шмидтом вопрос еще не решен.

Отметим еще интересную книгу, опубликованную Шази также в 30-х годах под названием «Теория относительности и небесная механика» (*La théorie de la relativité et la mécanique céleste*, т. 1, 2, 1928—1930). Эта книга посвящена рассмотрению вопроса о построении небесной механики не на основе закона Ньютона, а на основе теории тяготения А. Эйнштейна (Einstein A., 1879—1955).

Теория относительности, в приложении к небесной механике, позволила объяснить некоторые расхождения в теории движения планет (главным образом — в движении перигелия Меркурия), которые до тех пор оставались загадочными.

В книге Шази излагается сначала общая теория тяготения (релятивистская), а затем эта общая теория применяется к движениям планет и их спутников. Книга дает хорошее представление об этом вопросе и может служить учебником.

Возвращаясь опять к качественным методам, отметим еще множество работ по теории периодических орбит и периодических решений, продолжающих и развивающих результаты, полученные А. М. Ляпуновым и А. Пуанкаре.

В течение первой трети этого века преимущественно развивались исследования, базирующиеся на теории Пуанкаре, ибо работы Ляпунова были в это время мало известны.

В 1920 г. Ф. Мультон опубликовал (в содружестве с пятью своими учениками) монументальное сочинение «Периодические орбиты» (*Periodic orbits*. Washington), в котором изложен основной метод Пуанкаре (метод малого параметра) и ряд результатов, полученных уже в более позднее время. В отличие от теории Пуанкаре, в этой книге совершенно не употребляются канонические системы и метод Гамильтона — Якоби, и все изложение ведется в прямоугольных и полярных координатах.

В 30-х годах были проведены многочисленные исследования периодических решений в ограниченной задаче трех тел Стремгреном (Stremgren E.) и его школой. Эти исследования основывались на численном интегрировании дифференциальных уравнений движения и хотя привели к некоторым интересным результатам, но настоящей теории составить не могли.

Начиная с 30-х годов получали развитие также работы, основанные на методах Ляпунова. Эти работы проводились преимущественно в Советском Союзе и главной своей целью имели приложение идей Ляпунова к задачам механики и физики (теория колебаний). Однако были также опубликованы работы по применению методов Ляпунова и к проблемам небесной механики.

Третье направление — аналитическая небесная механика, — основывающееся также на работах Пуанкаре, начато финским ученым Зундманом (Sundman K., 1873—1949) в 1912 г., когда впервые был опубликован замечательный мемуар этого ученого, посвященный аналитическому решению задачи трех тел. Это направление характеризуется широким применением к небесной механике (а также к теоретической механике вообще) методов теории функций комплексного переменного, благодаря чему удалось получить решение некоторых задач, которые ранее считались неразрешимыми.

Сам Зундман, в частности, дал общее решение задачи трех тел в виде бесконечных рядов, расположенных по степеням некоторой вспомогательной переменной и абсолютно сходящихся для всех значений времени.

Правда, впоследствии, французский ученый Белоричский показал, что ряды Зундмана не имеют практического значения, ибо сходятся чрезвычайно медленно, но тем не менее результаты Зундмана не потеряли своего значения и послужили источником многих других работ в этой области.

К работам Зундмана примыкают также исследования известного итальянского математика Т. Левингивита (Levi-Civita T.), немецкого ученого, переехавшего впоследствии в США, Винтнера (Wintner A.), Шази и др. В самое последнее время вопросами аналитической небесной механики занялся немецкий математик К. Зигель (Siegel C. L.), получивший новые интересные результаты в этой области, а также советский астроном-теоретик Г. А. Мерман, указавший на

возможность решения задачи трех тел при помощи рядов, сходящихся гораздо быстрее рядов Зундмана.

3. Новые книги по небесной механике. Упомянем еще о некоторых книгах, изданных в текущем столетии. Прежде всего отметим книгу английского ученого Уиттекера (Whittaker E. T.) «Курс аналитической динамики частиц и твердых тел, с введением в задачу трех тел» (A treatise on the Analytical Dynamics of particles and rigid bodies, with an introduction to the problem of three bodies, 1920)*), в которой четыре последние главы посвящены вопросам небесной механики. Особенно нужно отметить главу 14, где помещено доказательство теорем Брунса и Пуанкаре о несуществовании интегралов задачи трех тел, отличных от десяти классических.

В Советском Союзе было издано пока только две книги по небесной механике. Одна из них — «Введение в небесную механику» Г. Н. Дубошина (1938) — представляет собой весьма краткое учебное пособие, а другая — трехтомный «Курс небесной механики» М. Ф. Субботина — широко используется студентами и аспирантами советских университетов в качестве основного учебника.

Первый том курса М. Ф. Субботина, вышедший первым изданием в 1933 г., а затем переизданный в переработанном и значительно дополненном виде в 1941 г., содержит тот отдел небесной механики, который часто называют *теоретической астрономией*. Этот первый том разделен на три части. Часть I — «Гелиоцентрическое и геоцентрическое движение» — содержит введение с кратким историческим очерком, решение задачи двух тел, вычисление эфемерид и некоторые дополнения.

Часть II — «Определение первоначальной орбиты» — посвящена подробной теории этого важного раздела небесной механики со всеми необходимыми формулами и пояснитель-

*) В Советском Союзе эта книга широко известна под названием «Аналитическая динамика» в переводе И. Г. Малкина, изданном в 1937 г. Известен также немецкий перевод этой книги, изданный в 1924 г. в серии «Die grundlehren der mathematischen Wissenschaften» под названием «Analytische dynamik der Punkte und starren Körper, mit einer Einführung in das Dreikörperproblem und mit zahlreichen Übungsaufgaben». В 1927 г. в Кембридже вышло еще третье издание этой книги на английском языке.

ными вычислениями. В части III — «Улучшение первоначальной орбиты» — излагаются методы исправления и улучшения орбит.

К книге приложены многочисленные упражнения, позволяющие изучающим углубить и усовершенствовать свои знания.

Второй том, разбитый на четыре части, вышел в 1937 г. и содержит изложение основных задач и методов небесной механики. Часть I — «Основы теории возмущенного движения» — включает выводы дифференциальных уравнений задач трех и многих тел, изложение метода вариации произвольных постоянных, теорию канонических уравнений и преобразований, частные решения задачи трех тел и теорию ограниченной задачи трех тел. Часть II — «Численное интегрирование дифференциальных уравнений и его применение к изучению движения светил» — рассматривает численные методы небесной механики.

Часть III — «Аналитические методы изучения возмущенного движения» — посвящена изложению классических результатов теории возмущений. Сюда входят вопросы о разложении координат невозмущенного движения и разложение пертурбационной (возмущающей) функции, аналитические методы определения возмущений элементов орбит и методы определения возмущений координат (прямоугольных и полярных).

Часть IV — «Теория движения Луны» — содержит изложение теории Лапласа и теории движения Луны, основанной на работах Хилла.

Третий том, вышедший в 1949 г., состоит из двух частей. Часть I — «Притяжение неподвижных масс» — посвящена изложению теории притяжения. Сюда входят: основные свойства потенциала, притяжение эллипсоидов, элементы теории гармонических функций и теория сферических функций с приложениями к разложениям потенциала в бесконечный ряд. Часть II — «Теория фигур небесных тел» — рассматривает элементы теории фигур равновесия вращающихся жидкостей (однородных и неоднородных) и основы механической теории фигур планет.

Изложение теории фигур равновесия можно найти также в книге П. Аппеля «Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости» (P. Appel, *Figures d'équilibre d'une masse*

liquide homogène en rotation, Paris, 1932), представляющую собой первую часть четвертого тома «Курса рациональной механики» (Traité de mécanique rationnelle, t. 4) этого автора *).

Другой характер имеет книга известного американского теоретика А. Витнера, много работавшего в области развития теории периодических решений, — «Аналитические основания небесной механики» (The analytical foundation of celestial mechanics), изданная в США в 1941 г.

Эта книга написана, главным образом, для математиков, и задачи небесной механики рассматриваются в ней с точки зрения современной математики, как задачи аналитической теории дифференциальных уравнений, с применением функционально-теоретических методов и аппарата матричного исчисления.

В книге затрагиваются только некоторые классические проблемы небесной механики (задачи двух, трех и многих тел, рассматриваемых как материальные точки, и ограниченная задача трех тел), но автор старается выяснить математическую сущность этих проблем и установить все возможные строгие результаты, относящиеся к их разрешимости.

Некоторым продолжением и дальнейшим развитием работы Витнера является книга германского математика К. Зигеля «Лекции по небесной механике» (Vorlesungen über Himmelsmechanik, 1956)**). Эта книга также написана главным образом для математиков и имеет такой же характер, как и книга Витнера, но в ней излагаются более современные результаты, многие из которых принадлежат самому автору.

В книге Зигеля рассматриваются, по существу, некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений, которые можно использовать, в частности, и в небесной механике.

*) В 1936 г. вышел русский перевод этой книги под редакцией и с дополнениями Н. П. Идельсона. Для нас особенный интерес представляет первое дополнение — «Постановка проблемы фигур равновесия в теории А. М. Ляпунова», где дается ясное изложение основ теории фигур равновесия, созданной нашим знаменитым соотечественником.

**) Имеется русский перевод, выполненный М. С. Яров-Яровым под редакцией Г. Н. Дубошина. Изд. иностр. лит., 1959.

В этой книге, имеющей только три главы, рассматриваются соответственно три вопроса, составляющие существо аналитической и качественной небесной механики. Первая глава посвящена решению задачи трех тел по методу Зундмана. Вторая глава охватывает сжатую теорию периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений и третья содержит изложение основ теории устойчивости движения, рассматриваемой как теория устойчивости решений дифференциальных уравнений.

Эти две книги — Винтнера и Зигеля, — несомненно, являются весьма полезными сочинениями не только для математиков, но и для теоретиков-астрономов, особенно для тех из них, которые желают посвятить себя дальнейшему развитию небесной механики.

В заключение упомянем о фундаментальной книге немецкого астронома-теоретика К. Штумпфа (Stumpff K.) под названием «Небесная механика» (Himmelsmechanik), первый том которой вышел в Берлине в 1959 г.

Этот том содержит в себе то, что называют часто *теоретической астрономией*, так как посвящен рассмотрению задачи двух тел и методов определения орбит планет и комет.

В предисловии автора сказано, что второй том будет посвящен задаче трех тел, методам численного интегрирования и методам вычисления возмущений. Третий том будет заключать в себе общую теорию возмущений, теорию спутников, в частности теорию движения искусственных спутников Земли, и другие вопросы. Возможно, что автор напишет еще один том, посвященный теории вращательного движения небесных тел.

Закончим этот раздел краткой характеристикой новейшей книги по небесной механике известных американских специалистов Д. Броуэра и Ж. Клеменса, вышедшей в 1961 г. под названием „Методы небесной механики“ (D. Brouwer, G. Clemence. *Methods of Celestial Mechanics*, New York and London, 1961 г.) Эта книга интересна тем, что, как отмечают ее авторы в предисловии, она написана специально для лиц, не имеющих астрономического образования и занимающихся различными прикладными вопросами космонавтики. Книга написана простым, ясным языком и несомненно будет полезна обширному кругу читателей.

Семнадцать глав рассматриваемой книги можно разделить на несколько частей следующим образом:

Главы I — III посвящены рассмотрению невозмущенного, эллиптического движения, с выводом всех необходимых формул и с разложениями координат в ряды Фурье.

Главы IV — IX содержат вспомогательные вопросы вычислительной математики и сферической астрономии.

Главы X — XI рассматривают общую задачу небесной механики и общий метод вариации постоянных, являющийся основным при изучении движений небесных тел.

Глава XII даст понятие о теории движения Луны.

Главы XIII — XVI содержат общую теорию возмущений координат и элементов, включая понятие о разложении возмущающей функции.

Наконец, последняя глава XVII содержит краткую теорию канонических уравнений и ее применение к задачам небесной механики.

В конце каждой главы книги приводятся краткие сведения исторического характера.

4. Возникновение теории движения искусственных небесных тел. Последний раздел очерка истории развития небесной механики посвящается новому отделу этой замечательной науки — теории движения искусственных небесных тел.

Запущенный 4 октября 1957 г. в Советском Союзе первый искусственный спутник Земли ознаменовал начало новой научной эры, которую с полным правом называют *космической*. С тех пор появилось уже довольно много искусственных небесных тел, запущенных в разное время в Советском Союзе и в США. Помимо десятков искусственных спутников Земли несколько таких тел были отправлены по направлению к Луне и к Венере.

Несомненно, с течением времени число искусственных небесных тел будет возрастать и некоторые из них будут отправляться все в более и более далекие от Земли области космического пространства. Так как во время своего движения в космическом пространстве искусственные небесные тела подвергаются (также, как и естественные небесные тела) действию космических сил, из которых и здесь самой важной является сила ньютоновского притяжения, то естественно, что движения этих тел должны изучаться и рассчиты-

ваться при помощи методов небесной механики. Но движения искусственных небесных тел обладают некоторыми специфическими характерными чертами и кое в чем отличаются от движений тел естественных; поэтому и неудивительно, что классических методов здесь оказалось недостаточно, и ученым пришлось разрабатывать новые методы исследования.

Прежде всего оказалось необходимым уметь рассчитывать движения искусственных небесных тел гораздо более быстро, чем это можно было делать для обычных планет и спутников. Поэтому здесь стала широко применяться новая техника, основанная на использовании быстродействующих электронных счетных машин, позволяющих производить тысячи и десятки тысяч вычислительных операций в секунду.

Впрочем, можно заметить, что за последние годы быстродействующие вычислительные машины стали применяться и для решения классических задач небесной механики, и в этом направлении получены уже важные результаты.

Наряду с разработкой числовой теории движения оказалось необходимым разрабатывать и аналитические теории движения искусственных небесных тел, что и явилось причиной возникновения этого нового раздела, о котором идет речь.

В этом направлении сделано уже довольно много и в научных журналах опубликовано уже несколько сотен статей, посвященных различным проблемам движения искусственных небесных тел. Сначала, конечно, строились аналитические теории движения искусственных спутников Земли и наибольшее количество опубликованных работ относится именно к этой проблеме.

При изучении движения спутников, обращающихся вблизи Земли, оказалось необходимым учитывать влияние притяжения Земли, рассматриваемой как тело (а не как материальная точка!), а также влияние атмосферы Земли, выражающееся в силе сопротивления, тормозящей движение спутника. Предложено множество методов, как заимствованных из классической теории движения спутников планет, так и созданных заново, дающих возможность не только рассчитывать движение искусственного спутника (т. е. вычислять эфемериды), но, что также весьма существенно, позволяющих определять некоторые параметры Земли и ее атмосферы при помощи сравнения построенной аналитической теории с наблюдениями.

Такие методы разработаны, в частности, в Институте теоретической астрономии АН СССР, в Государственном астрономическом институте им. П. К. Штернберга, а также в других учреждениях.

Затем, как известно, понадобилось построить аналитическую теорию движения «лунника», т. е. космической ракеты или автоматической межпланетной станции, направляемой к Луне с заданием либо достичь поверхности Луны, либо обойти вокруг нее, чтобы сфотографировать ее обратную сторону.

При построении такой теории влияние атмосферы и несферичности Земли играют роль только в начале движения, зато в дальнейшем приходится принимать во внимание притяжение Луны, Солнца и некоторых других планет. Поэтому такая теория представляет собой некоторую разновидность задачи многих тел (материальных точек), отличающуюся от классических задач небесной механики главным образом тем, что здесь орбита движущегося тела весьма чувствительно отличается от круговой. Важным пунктом теории является расчет начальных условий, необходимых для осуществления поставленного задания.

Аналогичные задачи возникают и при построении теории движения космической ракеты по направлению к Венере, Марсу и т. д.

Ограничимся этими немногими замечаниями по поводу теории движения искусственных небесных тел, так как этот раздел небесной механики родился совсем недавно и его развитие — дело будущего.

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

«ФИЗМАТГИЗ»

Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

ИМЕЮТСЯ В ПРОДАЖЕ

- Астрономия в СССР за 40 лет, 1917—1957 (Сборник статей). 1960, 728 стр., 3 р. 89 к.
- Барабашов Н. П. и др., Луна. Под ред. доктора физ.-мат. наук А. В. Маркова, 1960, 384 стр., 1 р. 70 к.
- Дубошин Г. Н., Теория притяжения. 1961, 288 стр., 58 коп.
- Куликов К. А., Курс сферической астрономии. 1961, 174 стр., 44 коп.
- Мустель Э. Р., Звездные атмосферы. 1960, 444 стр., 1 р. 37 к.
- Огородников К. Ф., Динамика звездных систем. 1958, 627 стр., 1 р. 74 к.
- Подобед В. В., Фундаментальная астрометрия (Определение координат звезд). 1962, 340 стр., 65 коп.
- Франк-Каменецкий Д. А., Физические процессы внутри звезд. 1959, 543 стр., 1 р. 57 к.
- Шаронов В. В., Природа планет. 1958, 552 стр., 1 р. 91 к.
- Эйгенсон М. С., Внегалактическая астрономия. 1960, 414 стр., 1 р. 26 к.

Книги продаются в книжных магазинах, а также высылаются почтой наложенным платежом без задатка всеми республиканскими, краевыми и областными отделениями «Книга — почтой».

Георгий Николаевич Дубошин

Небесная механика. Основные задачи и методы
М., Физматгиз, 1963 г., 588 стр. с илл.

Редактор *П. Т. Резниковский*

Техн. редактор *Л. Ю. Плакше*

Корректор *Л. О. Сечейко*

Сдано в набор 22/VIII 1962 г. Подписано к печати 7/1 1963 г. Бумага $84 \times 108 \frac{1}{2}$. Физ. печ. л. 18,375. Условн. печ. л. 30,14. Уч.-изд. л. 29,24. Тираж 6500 экз. Т-01503. Цена книги 1 р. 03 к. Заказ № 677.

Государственное издательство
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой
УЦБ и ГПП Ленсоветархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29,