



МИНИСТЕРСТВО
ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ХАРЬКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

КЛЕБАНОВА Т.С., ЗАБРОДСКИЙ В.А.,
ПОЛЯКОВА О.Ю., ПЕТРЕНКО В.Л.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИКИ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИКИ



учебное пособие

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

**ХАРЬКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

Клебанова Т.С.

Забродский В.А.

Полякова О.Ю.

Петренко В.Л.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИКИ

Учебное пособие

Харьков, ХГЭУ, 2001

ББК 65В611я7
М74
УДК 330.4(075.8)

Рецензенты: докт. экон. наук, профессор, зав. кафедрой экономической кибернетики и маркетингового менеджмента Национального технического университета "ХПИ" *Заруба В.Я.*;
докт. экон. наук, профессор кафедры экономико-математических методов Киевского национального экономического университета *Витлинский В.В.*

**Рекомендовано к изданию решением ученого совета
Харьковского государственного экономического университета.
Протокол №11 от 26.06.2000 г.**

Клебанова Т.С., Забродский В.А., Полякова О.Ю., Петренко В.Л.
М74 Моделирование экономики. Учебное пособие. — Харьков:
Изд. ХГЭУ, 2001. — 140 с. Русск. яз.
ISBN 966-676-011-8

Рассматриваются математические модели различных макро- и микроэкономических процессов: балансовые, структурные, оптимизационные, модели равновесия и модели взаимодействия экономических систем. Приведены как теоретические основы моделей и их анализ, так и примеры прикладных моделей.

Предназначено для студентов высших учебных заведений специальности экономическая кибернетика, а также может использоваться для самостоятельного изучения курса студентами других экономических специальностей.

Розглядаються математичні моделі різних макро- та мікроекономічних процесів: балансові, структурні, оптимізаційні, моделі рівноваги і моделі взаємодії економічних систем. Наведені як теоретичні основи моделей та їх аналіз, так і приклади прикладних моделей.

Призначено для студентів вищих навчальних закладів спеціальності економічна кібернетика, а також може використовуватися для самостійного вивчення курсу студентами інших економічних спеціальностей.

ISBN 966-676-011-8

ББК 65В611я7

- © Харьковский государственный
экономический университет, 2001
- © Клебанова Т.С., Забродский В.А.,
Полякова О.Ю., Петренко В.Л.
2001

Существует несколько точек зрения на теорию. Одна из них состоит в том, что теория раскрывает нам глубинную простоту и стройность мироздания. Нетеоретик видит лишь бессмысленное нагромождение явлений. Когда он становится теоретиком, явления укладываются в стройную и исполненную величия систему.

К. Дарроу

ВВЕДЕНИЕ

Моделирование экономики как научное направление является синтезом математических и экономических дисциплин. Если экономика предоставляет объект исследования – экономику, то математика предоставляет методы исследования, которые позволяют изучить различные стороны объекта, выявить количественные взаимосвязи, закономерности, что и составляет предмет этого направления. В свою очередь использование моделей, в особенности математических, является краеугольным камнем науки управления. Ценность такого синтеза математики и экономики подтверждает тот факт, что среди лауреатов Нобелевской премии по экономике 70% – профессиональные математики.

Первая количественная модель национальной экономики была создана Франсуа Кенэ (1694-1774), французским экономистом. Эта модель получила название "Экономическая таблица Кенэ". В XX веке учеными-экономистами было показано, что в этой модели содержались начала таких будущих теорий, как теория рынка, теории экономической динамики, модель мультипликатора. Подробный анализ истории развития математического моделирования в экономике можно найти в некоторых из рекомендуемых пособий [1, 2].

Представляемое нами учебное пособие предназначено в основном для студентов высших учебных заведений. В нем представлены математические модели, позволяющие исследовать различные аспекты экономической деятельности общества, страны, региона, отрасли, а также модели экономического взаимодействия различных субъектов.

Мы сосредоточили свое внимание на тех математических моделях, которые не поддаются исследованию в рамках какого-либо одного метода (как, например, модели эконометрические являются порождением методов математической статистики). Разнообразие подходов и используемых математических методов определяет сложность излагаемого материала. Однако достаточными для понимания являются хорошие знания в рамках курса

"Высшая математика" следующих разделов: математический анализ, линейная алгебра, дифференциальное исчисление, математическое программирование. Необходимые математические факты приведены и в тексте данного пособия, а также в рекомендуемых литературных источниках, где можно получить более подробную информацию.

Весь предлагаемый учебный материал связан в единую систему моделей экономических процессов, базу которой составляют модели, изложенные во второй главе. На наш взгляд такой подход позволит избежать впечатления "лоскутного одеяла" и повысит воспринимаемость. Однако это не означает, что для изучения отдельной темы придется прочитать всю книгу. Отдельные главы, вообще говоря, независимы, самостоятельны, за исключением случаев, когда в одной модели используются результаты предыдущих, или проводится сопоставление различных моделей, понятий и т.д.

Каждая глава, посвященная отдельным моделям, снабжена тестовыми вопросами для самопроверки, а в конце книги даны некоторые правильные ответы. Что касается конкретных числовых примеров, то расчеты на основании реальных данных, как правило, очень громоздки, поэтому в изложении мы сознательно ограничились условными примерами.

При подготовке пособия мы в основном ориентировались на программу курса "Моделирование экономики" для студентов специальности "экономическая кибернетика", разработанную в Харьковском государственном экономическом университете. Отдельные главы пособия могут использоваться и для подготовки студентов других экономических специальностей. Кроме того, изложенные модели могут с успехом использоваться и при изучении курса "Имитационное моделирование" как основа построения имитационных моделей поведения экономики или отдельных экономических субъектов.

Глава 1. МОДЕЛИ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

1.1. Основные понятия моделирования

... плоды науки – это простые плоды,
точнее, плоды упрощения.

Дж. Уейнберг

Один из способов достижения некоторой точности –
не учитывать большую часть имеющейся информации.

П. Хаммер

Основным понятием, используемым в моделировании, является понятие модели. Для него существует множество определений (см. [3]). Наиболее общим является следующее.

Модель – это упрощенное представление или абстракция реальности, условный образ реального объекта, который создается для более глубокого

изучения действительности. Можно сказать, что теоретическое знание о чем-либо представляет собой совокупность различных моделей, отражающих существенные свойства реального объекта.

Под *моделированием* будем понимать процесс построения, использования и совершенствования моделей.

Модель практически всегда является упрощением, поскольку реальность слишком сложна, чтобы ее копировать, и поскольку большая часть этой сложности не относится к изучаемой проблеме. Однако на практике трудно достичь одновременно и простоты, и репрезентативности модели. Например, модель может быть простой, но не отражать действительную ситуацию. И наоборот, очень сложная модель может оказаться неразрешимой и потому бесполезной.

Моделирование включает построение концептуальной основы задачи и представление ее в математическом виде. Выделяются зависимые и независимые переменные и оцениваются выражения, их связывающие. Если необходимо, делаются допущения и упрощающие предположения. Например, соотношение между двумя переменными может предполагаться линейным, что делает возможным применение методов линейного программирования. Необходимо найти разумный баланс между упрощающими предположениями и репрезентативностью модели. Чем проще модель, тем легче ее изучение, экспериментирование с ней, но тем меньше, однако, ее репрезентативность.

В задачи моделирования входят:

- выбор состава модели;
- выбор структуры модели;
- определение математических зависимостей;
- определение степени приемлемости модели;
- использование модели.

Практически все математические модели содержат три типа компонент-переменных:

- результатирующие, или зависимые переменные;
- переменные решения, или независимые переменные;
- неконтролируемые переменные – помехи, внешние возмущения.

Структуру модели можно изобразить так, как показано на рис. 1.1.



Рис. 1.1. Обобщенная структура математической модели

В случае если моделируемая система или объект являются управляемыми, в структуру модели входят также управляющие переменные.

Независимые переменные описывают те элементы задачи, для которых должен быть сделан выбор, они контролируются лицом, принимающим решение (ЛПР), например, количество произведенной продукции, количество продавцов и т.д. Математически они представляют собой неопределенные, неизвестные величины. Задача моделирования состоит в определении наилучших их значений.

Зависимые переменные отражают эффективность работы системы, насколько хорошо система удовлетворяет своим целям (общий доход, удовлетворение потребностей и т.д.).

Неконтролируемые переменные представляют факторы, которые влияют на результаты деятельности системы, но не подвластны управлению в рамках этой системы (конкуренция, технология, регулярность движения). Эти переменные также являются независимыми, так как они влияют на результаты деятельности.

Переменные модели связываются друг с другом математическими уравнениями и неравенствами (ограничениями).

Решением модели называется определение множества значений независимых переменных, которые бы обеспечивали желаемый уровень эффективности системы.

Модель называется **замкнутой**, если она содержит критерий качества функционирования системы, объекта.

1.2. Классификация математических моделей

... какая бы терминология не наличествовала, все равно ни один разумный читатель ей не поверит.

А. и Б. Стругацкие

Единой классификации моделей на сегодня не существует. Модели различаются по нескольким классификационным признакам.

Представление системы или ситуации (задачи) может быть сделано на **различных уровнях абстракции**. В соответствии с этими уровнями можно разделить модели на 3 группы:

физические модели – наименее абстрактные модели, являющиеся физическим представлением системы, обычно в уменьшенном (или каком-то ином) масштабе по сравнению с реальным объектом, например, глобус;

аналоговые модели – отражение реальности в виде схем, карт, графиков, например, организационная диаграмма;

математические модели – представление систем и процессов с помощью математических символов и зависимостей. Это наиболее абстрактные

модели, они, скорее, общие, чем специфичные, могут представлять ситуации целиком, и с ними можно экспериментировать, например, с целью прогноза.

Существует множество критериев классификации математических моделей, в частности математических моделей в экономике. В соответствии с ними мы можем различить следующие классы моделей.

По отношению ко **времени** модели делятся на:

статические (система описана применительно к фиксированному моменту времени);

динамические (система описана в развитии): *дискретные* (время делится на интервалы); *непрерывные* (время считается непрерывным).

По отношению к **управлению** выделяют

а) модели, *не учитывающие* возможность управления объектом или системой: модели теоретической механики, математической физики, балансовые модели, например,

скорость роста популяции животных –

$$\dot{x} = dx,$$

$$x(t) = e^{\alpha t} x_0;$$

закон охлаждения тела –

$$T = T_0(e^{-\alpha t} + 1);$$

модели межотраслевого баланса;

б) *классические* модели – такие, в которых моделируемый процесс или объект предполагается управляемым: задачи оптимального управления, например, вывод спутника на орбиту, достижение максимального темпа роста экономики.

По степени **агрегирования объектов моделирования** различают модели:

микроэкономические;

одно- и двухсекторные (одно-, двухпродуктовые);

многосекторные;

макроэкономические;

глобальные.

По **учету фактора неопределенности** различают модели:

детерминированные (с однозначно определенными результатами);

стохастические (с результатами, зависящими от случайных факторов).

Модели различаются также по типу применяемого в них **математического аппарата**:

модели математического программирования;

корреляционно-регрессионные модели;

матричные;

сетевые;

теории игр;

теории массового обслуживания (ТМО) и т.д.

Изучение свойств моделей математического программирования, сетевых, теории игр и ТМО составляет содержание науки "Исследование операций". Результаты этого составляют модельный базис для применения математических моделей в экономике и других науках.

Корреляционно-регрессионные модели и связанные с ними экономические процессы и явления изучаются в рамках научной дисциплины "Эконометрия". Их математическую основу составляют методы теории вероятностей и математической статистики. Следует заметить, что в иностранной литературе часто под термином "Econometrics" понимаются вообще все количественные методы в экономике.

Особую группу составляют модели, позволяющие имитировать поведение объекта – *имитационные* модели, получившие развитие в последнее время в связи с бурным развитием вычислительной техники. Они также тесно связаны с применением в управлении экспертных систем, баз знаний и т.д.

Модели также разделяются по цели создания и применения. В [3] приводится, например, разделение моделей на *познавательные* и *прагматические*. Познавательные модели являются формой организации и представления знаний, средством соединения новых знаний с имеющимися. Прагматические (прикладные) модели являются средством управления, организации практических действий, способом представления правильных действий или их результатов.

Такое многообразие классификационных признаков не позволяет отнести модель к какому-либо одному классу. Так, модель межотраслевого баланса является математической, многосекторной, статической, неуправляемой, детерминированной, матричной и используется как для анализа, так и для планирования.

1.3. Требования к математическим моделям экономических систем

Если бы делать было бы столь же легко,
как знать, что надо делать, часовни были
бы соборами, хижины – дворами

В. Шекспир

При разработке и использовании математических моделей в экономических исследованиях необходимо, чтобы предлагаемая модель соответствовала некоторыми требованиям. Эти требования вытекают из природы экономических систем и обуславливают тщательную проработку всех компонент модели.

Рассмотрим наиболее существенные из них.

1. *Системный подход к изучению и моделированию экономики.* Экономическая система подобна целостному организму, в ней протекают разнообразные процессы: технологические, процессы обмена, потребления, демографические, социальные и т.д. Одни процессы воздействуют на другие, по-

этому все они должны быть описаны в совокупности. Однако часто приходится выделять для изучения фрагменты системы. Выделение части экономической системы должно опираться на описание ее как целого. Тогда можно ясно понять, что мы теряем, изолируя часть экономической системы для изучения.

2. *Принцип обратной связи.* В управлении процессами, происходящими в экономике, участвует множество людей, образующих общественную иерархию. Способы их взаимодействия выражаются производственными отношениями. Следовательно, производственные отношения определяют структуру обратных связей, действующих в социально-экономической системе. Эти обратные связи представляют собой экономические механизмы регулирования процессов в системе.

3. *Учет влияния государства* на параметры экономических механизмов регулирования.

4. *Баланс между агрегированием и микроописанием.* Особенность социально-экономической системы в том, что это совокупность многочисленных подсистем, управляемых многочисленными экономическими субъектами. Наблюдаются же агрегированные экономические показатели, которые являются результатом деятельности больших групп объектов. Поэтому математическое описание экономики должно содержать макропоказатели. Однако макроописание социально-экономических систем должно быть результатом агрегирования (усреднения) исходного микроописания. Тогда зависимости между макропоказателями могут быть ясно интерпретированы.

5. *Адекватность.* Результаты математического анализа моделей социально-экономических систем необходимо сравнивать с качественными особенностями развития изучаемого типа систем. Модель, не отражающая основных качественных особенностей развития системы в совокупности, не может признаваться хорошей.

Эти требования в основном относятся к макроэкономическим моделям, но они имеют смысл и при рассмотрении микроуровня.

Глава 2. СТРУКТУРНО-ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ОБЩЕСТВА

Тут мы и начали воздвигать свою конструкцию, которая и на этот раз выглядела на порядок крупнее всего, что мы видели до сих пор.

Э. Ферми

Прежде чем приступить к исследованию моделей, применяющихся для различных экономических процессов и явлений, рассмотрим кратко общую кибернетическую модель жизнедеятельности общества [4], которая позволит увидеть место каждой из представленных в книге моделей и связать

их в общую систему. Таким образом, моделирование экономики будет происходить "сверху вниз" – от глобальной модели к частным моделям отдельных процессов и явлений.

Воспроизводственные процессы в обществе осуществляются относительно людей, средств жизнедеятельности и объектов природы, а также с их участием. Следовательно, элементную основу жизнедеятельности общества представляют человек, объекты средств жизнедеятельности (техника) и объекты природы. Таким образом, общественное воспроизводство – это совокупность воспроизводственных процессов, определяющих во времени элементную структуру общества. Каждая из этих трех составляющих в любой момент оперирует с некоторым количеством овеществленного труда в средствах труда, рабочей силе и предметах труда.

Все воспроизводственные процессы по степени важности разбиваются на два уровня: общенациональные и региональные.

Общегосударственный уровень включает объекты, отражающие внутреннюю и внешнюю деятельность:

а) воспроизводственные процессы человека; средств жизнедеятельности и хозяйственной деятельности общества; природы;

б) воспроизводственные процессы межгосударственного взаимодействия, международного разделения труда и т.д.;

в) межрегиональные воспроизводственные процессы.

Региональный уровень включает:

а) воспроизводственные процессы человека; средств жизнедеятельности и хозяйственной деятельности региона; природы;

б) воспроизводственные процессы внутрирегиональных взаимодействий.

Применение принципа системности к исследованию общества требует прежде всего рассмотрения его внутренней организации (строения). Структура как категория характеризует распределение и внутреннюю связь элементов в пространстве по сферам (видам) деятельности. Она является отражением кругооборота потоков в воспроизводственных процессах человека, техники, природы. Отношения между элементами можно представить в виде следующей матрицы (рис. 2.1):

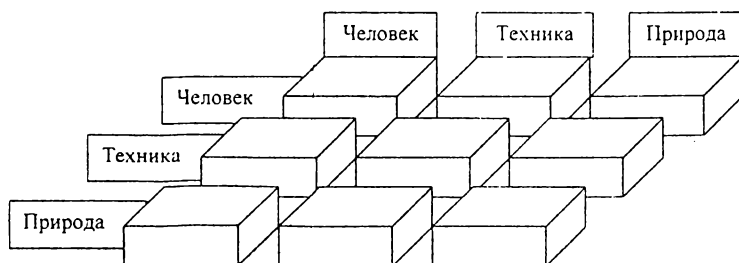


Рис. 2.1. Структурно-функциональная модель общества

Таким образом, можно сказать, что для выявления элементной основы жизнедеятельности общества предметом исследования является кругооборот элементов общественного производства, отражающий превращение одних элементов в другие. При этом для различного уровня исследования должны строиться и различные схемы, отражающие кругооборот элементов.

2.1. Стратификация процессов жизнедеятельности

Содержание воспроизводственных процессов элементов общества составляет сущность жизнедеятельности общества, то есть разнородных по своей природе, но взаимосвязанных процессов, обеспечивающих существование и развитие общества, процессов, объединенных единством общей цели функционирования.

Большое количество и разнородность процессов жизнедеятельности общества не позволяет достаточно полно и детально осуществить их описание. Разнородность процессов является одним из основных сдерживающих факторов формального описания. Разрешить это противоречие предлагается с помощью разделения по вертикали процессов жизнедеятельности, то есть в разноуровневом их представлении.

Как уже упоминалось, пространственное представление общенациональной системы позволяет разграничить процессы и виды деятельности на общегосударственные и региональные. Однако такое членение процессов и видов деятельности отражает только некоторые их свойства. Учет же полного состава свойств предполагает деление множества процессов и видов деятельности и по другому набору свойств.

Процессы жизнедеятельности общества могут быть сгруппированы так, что образуется некая совокупность уровней, содержащих специфические классы процессов. Расположение уровней определяется исходя из степени отражения в них общества как сложной, многофункциональной системы. Таким образом, разделение (стратификация) позволяет распределить процессы жизнедеятельности общества по вертикальным уровням в соответствии со степенью отражения в них функциональных характеристик.

На каждом уровне стратификации имеется свой собственный набор переменных, которые позволяют в значительной степени отразить изучение только одного уровня. Относительная независимость уровней открывает возможность для более глубокого и детального изучения уровня как отдельной системы. Однако это изучение должно производиться с учетом взаимосвязи уровней. Пренебрежение этим может привести к непониманию поведения общества как системы в целом.

Поскольку на каждом из уровней классы процессов различны по своей природе, то для их описания используются различные единицы измерения, различная терминология и т.д. Другими словами, для описания каждого из уровней используются различные информационные языки. Следовательно,

каждый уровень представляется собственной информационной и математической моделью.

В результате стратификации множества процессов жизнедеятельности общества образуется семейство взаимодействующих подсистем:

1-й уровень – система общественного воспроизводства;

2-й уровень – система экономических процессов;

3-й уровень – система социальных процессов.

Взаимосвязь трех выделенных уровней показана на рис. 2.2.

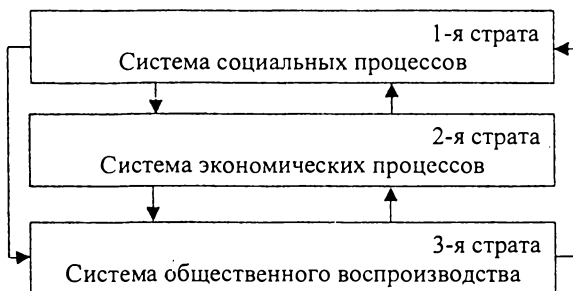


Рис. 2.2. Схема взаимодействия стратифицированных систем

Несмотря на вертикальное расположение стратифицированных систем, взаимодействие происходит не только между соседними уровнями. Вертикальное расположение указывает на приоритет действий и целей системы более высокого уровня.

Каждая из стратифицированных систем имеет свой предмет исследования. Предметом исследования системы общественного воспроизводства является кругооборот вещественных элементов в процессе общественного воспроизводства; предметом системы экономических процессов является кругооборот экономических эквивалентов, отражающих состояние экономики. Наконец, предметом системы социальных процессов являются общественные отношения людей, их отношения к производственным процессам техники и природы.

Стратификация множества процессов жизнедеятельности общества понижает сложность изучаемого множества процессов. Однако каждая стратифицированная система в свою очередь оперирует огромным количеством взаимосвязанных элементов.

¹ Сложность каждой стратифицированной системы зависит не только от разнообразия ее элементов и их связей, но и от взаиморасположения этих элементов, а также от их значимости для конечных результатов жизнедеятельности общества в целом и/или отдельной группы. Таким образом, каждый элемент системы характеризуется еще и пространственными параметра-

ми, во многом определяющими временные и стоимостные характеристики, а также степенью их значимости.

По общности размещения элементов стратифицированных систем в пределах определенной территории и их значимости элементы систем объединяются в территориальные сочетания. Сочетание пространственной структуры процессов жизнедеятельности и стратификации определяет процессно-территориальную структуру (рис. 2.3). Целесообразность территориального представления определяет сбалансированность уровней жизнеобеспечения. Параметры, определяющие уровень жизнеобеспеченности, должны отражать и уровень производительных сил, и общегосударственные интересы.

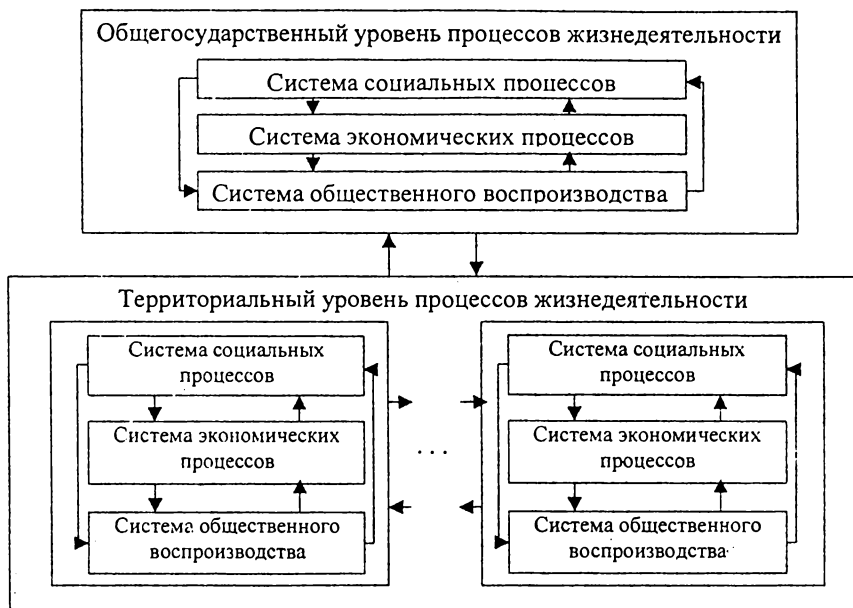


Рис. 2.3. Схема территориально-процессного членения множества процессов жизнедеятельности

Следует отметить также, что территориально-процессное деление процессов жизнедеятельности общества позволяет в большей степени, чем общая стратификация, снизить порядок сложности.

2.2. Состав процессов и видов деятельности в стратифицированных системах

Кроме выделенных систем процессов жизнедеятельности, на общегосударственном и региональном уровнях существуют также процессы, свя-

занные с открытостью систем. Внешние отношения системы общегосударственного уровня определяют появление таких видов деятельности, как обеспечение безопасности, внешняя торговля, миграция. Для стратифицированной системы регионального уровня внешние отношения отражаются в межрегиональной торговле, миграции населения, совместной деятельности.

Разбиение множества процессов жизнедеятельности на страты позволяет разграничить все процессы относительно природы этих процессов. Выявление полной структуры требует дальнейшего разбиения множества процессов для каждой из страт. При этом будем учитывать отношения элементов "человек", "техника", "природа".

Рассмотрим разбиение процессов для общегосударственного уровня. Все процессы определяются относительно взаимодействия элементов системы.

В табл. 2.1–2.3 приведены классы процессов для каждой из страт.

Каждый класс процессов включает в себя несколько подклассов, в которые в свою очередь входят несколько (быть может, достаточно большое количество) процессов. Так, класс "Общественные отношения" (табл. 2.1) содержит подклассы: общественный порядок и воспитание; культура, спорт, туризм и отдых; образование; наука; здравоохранение; производственные отношения; услуги; трудовые отношения; оборона; эмиграция и иммиграция; внешние торговые отношения; международные отношения. Процессы класса "Отношения собственности" подразделяются на подклассы в соответствии с объектами собственности и т.д.

Таблица 2.1

Состав процессов социальной страты

Элементы системы	Человек	Техника	Природа
Человек	Общественные отношения	Отношения собственности на средства производства и конечный продукт	Отношения собственности на природные ресурсы и конечный продукт
Техника	Обслуживание, автоматизация	Совершенствование	Экологическое воздействие
Природа	Уровень обеспечения	Техническое потребление	Восстановление

В страте экономических процессов и отношений отражаются экономические процессы, поддерживающие процессы социальных отношений. В частности, класс "Экономика воспроизводства техники" подразделяется на подклассы, отражающие экономику отдельных отраслей и межотраслевых отношений. Класс процессов "Экономика воспроизводства человека" содержит экономические процессы, обеспечивающие физические и духовные потребности человека.

Таблица 2.2

Состав процессов страты экономический процессов и отношений

Элементы системы	Человек	Техника	Природа
Человек	Экономика воспроизводства человека	Стоимость обслуживания техники	Стоимость обслуживания природы
Техника	Стоимость потребления техники	Экономика воспроизводства техники	Стоимость экологического воздействия
Природа	Стоимость потребления природы	Стоимость природного потребления техники	Экономика воспроизводства природы

В табл. 2.3. отражены воспроизводственные процессы и виды деятельности, которые включают как движение социальных групп (населения), воспроизводство техники (в частности, процессы развития отдельных отраслей, НТП, стоимостные потоки и др.), так и процессы пользования и восстановления объектов природы.

Процессы, аналогичные перечисленным выше, протекают и на региональном уровне. Разница в составе процессов и видов деятельности определяется положением самого регионального уровня и характером внешних отношений.

Таблица 2.3

Состав процессов страты воспроизводственных процессов и отношений

Элементы системы	Человек	Техника	Природа
Человек	Воспроизводство человека	Степень обслуживания техники (обеспечения)	Степень обслуживания природы
Техника	Степень обслуживания техники	Воспроизводство техники	Степень экологического воздействия
Природа	Степень обслуживания природы	Степень потребления техники	Воспроизводство объектов природы

Построенная выше модель отражает статические (функциональные) характеристики процессов жизнедеятельности общества. Однако для сложных систем, какой является общество, характерно развитие. Процесс развития – это последовательность циклов существенного преобразования. Внутри каждого цикла осуществляется процесс жизнедеятельности, характеризуемый условиями сохранения целостности структуры объекта и ее относительной устойчивости в процессе непрерывных изменений.

Под *развитием общества* будем понимать целенаправленный процесс количественных, структурных и качественных изменений системных объектов, соотношений и связей системных объектов, а также самих структур, не нарушающих целостности системы. Развитие обусловлено изменяющимися потребностями общества, возникновением новых условий внешней и внутренней среды, влиянием совершенствования собственных элементов общества как объекта развития. Общей целью развития системного объекта (общества) является обеспечение его эффективности при постоянно изменяющихся потребностях и условиях.

Общество, выступая как целостная система, в свою очередь должно выступать как системный объект развития. В качестве объектов управления выступает каждый элемент системного объекта (его управляющая и управляемая части). В соответствии с пространственной структурой общества выделяются процессы развития общества в целом и процессы развития регионов.

Стратификация процессов позволяет рассматривать в качестве объектов развития согласованные с системой жизнедеятельности страты социального развития общества/региона, экономического развития общества/региона, производственно-технического развития общества/региона. В свою очередь в каждой страте развития рассматриваются собственные объекты развития, соответствующие элементам жизнедеятельности.

Очевидно, что внутри каждого блока стратифицированной модели должен содержаться целый комплекс моделей отдельных процессов и отношений. При этом могут использоваться математические модели разнообразных типов: балансовые, эконометрические, оптимизационные, статические (для процессов жизнедеятельности), динамические (для процессов развития). Кроме того, используемые модели могут, вообще говоря, относиться к разным наукам (социологии, экономике, психологии, экологии и т.д.). Таким образом, для моделирования всего множества процессов жизнедеятельности общества необходимо построить целую систему моделей, в которой модели будут подчинены некоторой иерархии: на высшем уровне – объединяющая структурно-функциональная модель, на нижних – локальные модели частных процессов и отношений.

Приведенная структурно-функциональная модель жизнедеятельности общества позволяет нам определить место такого научного направления, как "Моделирование экономики". Поскольку объектом исследования является экономика, то большая часть моделей будет принадлежать стратам экономических и воспроизводственных процессов и отношений. Однако будет затронута и социальная страта, а именно, основа экономики – отношения собственности.

Чтобы понять место каждой модели в системе моделей жизнедеятельности общества, мы будем в начале каждой главы воспроизводить рис. 2.1 с указанием места рассматриваемой модели (моделей).

Глава 3. МОДЕЛЬ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА

Они там все это производят, и там же, видимо, все это и потребляют.

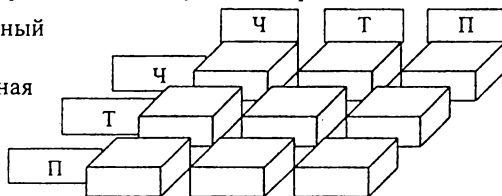
М. Жванецкий

Балансовые или матричные модели применяются для анализа и планирования производства и распределения продукции на различных уровнях иерархии – от предприятия до макроэкономической системы в целом.

К матричным моделям относятся: модели межотраслевого баланса производства и распределения продукции (МБ), матричные модели планов развития отраслей, межрегиональные межотраслевые балансы. Все модели этого класса объединяет единый принцип построения и аналогичность экономических характеристик.

Место модели межотраслевого баланса в структурно-функциональной модели общества можно представить следующим образом:

общегосударственный
уровень;
воспроизводственная
страта



Впервые межотраслевой баланс был разработан как составная часть баланса народного хозяйства СССР за 1923/24 гг. и включал баланс 11 основных отраслей. Большой вклад в создание модели МБ внес В.В. Леонтьев (1906-1999), совместив баланс производства и распределения с национальным доходом. Предложенный им метод экономического анализа и прогнозирования "затраты – выпуск" используется в учреждениях ООН и более чем в 50 развитых странах мира. В 1973 г. за развитие этого метода Леонтьев был удостоен Нобелевской премии.

3.1. Схема межотраслевого баланса в натуральном выражении

Межотраслевой баланс может быть разработан как в денежном, так и в натуральном выражении. Схема МБ представляет собой синтез двух таблиц, одна из которых характеризует детальную структуру затрат на производство в разрезе отдельных видов продукции, а другая – структуру распределения продукции в экономической системе.

Структура затрат определяется по источникам формирования ресурсов продукции:

$$R_i = Q_i + S_i, (i=1, \dots, n),$$

где n – число видов продукции;

R_i – объем ресурсов i -го вида продукции;

Q_i – производство продукции i – го вида;

S_i – прочие ресурсы продукции i -го вида.

Второй раздел характеризует направление использования ресурсов на текущее производственное потребление (в разрезе тех же видов продукции) и на конечное потребление:

$$\sum_{j=1}^n Q_{ij}^* + G_i = R_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

где Q_{ij}^* – потребление продукции вида i на производство продукции j -го вида;

G_i – конечное потребление продукции i -го вида.

Общая схема МБ в натуральном выражении представлена в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Структура межотраслевого баланса в натуральном выражении

Наименование продукции	Поступление ресурсов			Использование ресурсов						
	всего	в том числе		на производство продукции (по видам)					на конечное потребление	итого использовано ресурсов
		произведено	прочие ресурсы (импорт, запасы и резервы на начало периода)	1	2	...	n	итого		
1	R_1	Q_1	S_1	Q_{11}^*	Q_{12}^*	...	Q_{1n}^*	$\sum_{j=1}^n Q_{1j}^*$	G_1	R_1
2	R_2	Q_2	S_2	Q_{21}^*	Q_{22}^*	...	Q_{2n}^*	$\sum_{j=1}^n Q_{2j}^*$	G_2	R_2
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
n	R_n	Q_n	S_n	Q_{n1}^*	Q_{n2}^*	...	Q_{nn}^*	$\sum_{j=1}^n Q_{nj}^*$	G_n	R_n

3.2. Межотраслевой баланс в денежном выражении

Межотраслевой баланс в денежном выражении отражает производство и распределение валового общественного продукта в отраслевом разрезе, межотраслевые производственные связи, использование материальных и трудовых ресурсов, создание и распределение национального дохода (НД).

МБ в денежном выражении состоит из четырех квадрантов (табл. 3.2).

Каждая отрасль в балансе рассматривается дважды – как потребитель и как производитель. Это и определяет матричную структуру баланса. В балансе

рассматриваются как отрасли, так и подотрасли. В отдельных случаях баланс может включать до нескольких сотен позиций.

Таблица 3.2

Структура межотраслевого баланса в денежном выражении

		Потребляющие отрасли				Конечная продукция	Валовая продукция
		1	2	...	n		
Производящие отрасли	1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	y_1	X_1
	2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	y_2	X_2
	...	...	...	...	...	...	...
	n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nn}	y_n	X_n
Оплата труда		v_1	v_2	...	v_n	$v_{кон}$	
Чистый доход		m_1	m_2	...	m_n	$m_{кон}$	
Валовая продукция		X_1	X_2	...	X_n		X

☐ 1-й квадрант; ☐ 2-й квадрант; ☐ 3-й квадрант; ☐ 4-й квадрант

Первый квадрант отражает распределение и потребление продукции отраслей в сфере материального производства. Пусть i – номер отрасли-производителя, j – номер отрасли-потребителя. Тогда величина x_{ij} – стоимость продукции, произведенной в i -ой отрасли и потребленной в j -ой. Эта величина носит название *межотраслевой поток*. В столбцах МБ отражается структура материальных затрат ($x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}$) и чистой продукции ($v_j + m_j$) j -ой отрасли. Следовательно, можно записать следующую систему уравнений производства продукции

$$X_j = \sum_{i=1}^n x_{ij} + v_j + m_j, \quad j = \overline{1, n}. \quad (3.1)$$

Система уравнений (3.1) отражают стоимостной состав продукции всех отраслей материальной сферы.

Строки МБ содержат данные о распределении годового объема продукции каждой отрасли материального производства. Так, элементы, стоящие на диагонали первого квадранта, означают количество продукции, израсходованное внутри самой отрасли, а величина x_{12} отражает количество продукции, произведенной в первой отрасли и израсходованной в производстве второй отрасли. Величины y_i – затраты продукции отрасли вне сферы материального производства, то есть для целей конечного потребления (личного и общественного), в них, в частности входит и сальдо ввоза-вывоза продукции отрасли. Сумма всего произведенного за год в стоимостном выражении

$$X_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i, \quad i = \overline{1, n} \quad (3.2)$$

образует валовую продукцию отраслей.

Уравнения (3.2) отражает процесс распределения продукции отраслей.

Данные первого квадранта играют решающую роль в анализе структуры материальных затрат отраслей, межотраслевых пропорций и связей.

Во втором квадранте представлена продукция всех отраслей материального производства, то есть продукция, выходящая из сферы производства в область конечного использования – на потребление и накопление, амортизационные отчисления и сальдо экспорта – импорта. В развернутой схеме баланса конечная продукция дифференцирована. Данные этого квадранта характеризуют отраслевую материальную структуру НД, его распределение, структуру потребления и накопления по отраслям.

Показатели третьего квадранта также характеризуют национальный доход, но со стороны его стоимостного состава – как сумму оплаты труда и чистого дохода всех отраслей материального производства. Эти данные необходимы для анализа соотношений между вновь созданной и переменной стоимостью.

Общие итоги второго и третьего квадранта равны между собой. Действительно, просуммировав уравнения все (3.1) по j и уравнения (3.2) по i , получим

$$\sum_{j=1}^n X_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_{ij} + \sum_{j=1}^n v_j + \sum_{j=1}^n m_j,$$

$$\sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} + \sum_{i=1}^n y_i.$$

Левые части обоих уравнений равны и представляют собой валовой общественный продукт, а первые слагаемые правых частей есть общий итог первого квадранта. Таким образом, должно выполняться равенство

$$\sum_{j=1}^n v_j + \sum_{j=1}^n m_j = \sum_{i=1}^n y_i,$$

где в левой части сумма третьего квадранта, то есть общий чистый продукт, а в правой – сумма второго квадранта (национальный доход).

Наконец, четвертый квадрант отражает конечное распределение и использование НД в результате перераспределения.

Различают два вида МБ: отчетные и плановые. Отчетные балансы строятся на основе агрегирования результатов деятельности отдельных предприятий. Плановые балансы являются основой для разработки сбалансированных планов развития.

Математической основой моделей межотраслевого баланса является матричная алгебра, теория конечно-разностных уравнений.

3.3. Система коэффициентов межотраслевого баланса

При построении модели межотраслевого баланса с коэффициентами делаются следующие предположения:

- 1) в каждой отрасли (или подотрасли) имеется единственная технология производства;
- 2) нормы производственных затрат не зависят от объема выпускаемой продукции;
- 3) не допускается замещение в производстве одних видов продукции другими.

При этих предположениях величина межотраслевого потока x_{ij} оказывается связанной с валовой продукцией отрасли следующим образом

$$\begin{aligned} x_{ij} &= a_{ij} X_j, \\ a_{ij} &= \frac{x_{ij}}{X_j}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где a_{ij} – коэффициент прямых материальных затрат, с помощью которого измеряются технологические связи между отраслями.

Коэффициент a_{ij} показывает, сколько единиц продукции i -ой отрасли непосредственно затрачивается на выпуск единицы валовой продукции j -ой отрасли. Так, при $i=j$ имеем коэффициент затрат собственной продукции отрасли на единицу ее валового выпуска. Все коэффициенты прямых материальных затрат образуют квадратную матрицу $A_{n \times n}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = [a_{ij}] \quad (3.4)$$

Замечание. Эта матрица в общем случае не симметрична, поскольку элементы ее, симметричные относительно главной диагонали, отражают два противоположно направленных потока продукции.

Учитывая соотношения (3.3), из уравнений распределения (3.2) получим

$$X_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j + y_i, \quad i=1, \dots, n, \quad (3.5)$$

или в матричном виде

$$X = AX + Y, \quad (3.6)$$

где A – матрица коэффициентов прямых материальных затрат;

X – вектор-столбец валовых объемов выпуска;

Y – вектор-столбец конечного продукта.

Система уравнений (3.5)–(3.6) представляет собой системы линейных алгебраических уравнений с неотрицательными коэффициентами и значениями

переменных. Последнее требование следует непосредственно из экономического смысла включенных в модель величин.

При использовании уравнений (3.5), (3.6) технологические коэффициенты a_{ij} считаются известными. Некоторые методы определения коэффициентов прямых материальных затрат приведены в [5].

Анализ соотношения (3.6) позволяет выделить три варианта расчетов:

1) в модели заданы валовые выпуски всех отраслей, и необходимо определить конечную продукцию отраслей;

2) заданы плановые значения конечной продукции по всем отраслям, решая систему уравнений (3.5) или матричное уравнение (3.6) получить валовые выпуски всех отраслей;

3) относительно части отраслей заданы уровни валовой продукции, а для остальных – конечной продукции, необходимо восстановить недостающие значения по всем отраслям.

Чаще всего применяется третий вариант, в этом случае валовый выпуск задается по фундаментальным отраслям производства, а уровни конечной продукции – по отраслям, удовлетворяющим общественные и личные потребности.

Решим матричное уравнение (3.6) относительно неизвестного X .

$$X = AX + Y \Rightarrow X - AX = Y \Rightarrow$$

$$EX - AX = Y \Rightarrow (E - A)X = Y \Rightarrow$$

$$X = (E - A)^{-1} Y,$$

(3.7)

где $(E-A)^{-1}$ – матрица, обратная к $(E-A)$; E – единичная матрица размера $n \times n$.

Обозначим матрицу $(E-A)^{-1}$ через B , тогда уравнение (3.7) примет вид

$$X = BY$$

или в развернутой форме –

$$X_i = \sum_{j=1}^n B_{ij} Y_j.$$

Таким образом, баланс продукции на основе коэффициентов прямых материальных затрат дает возможность определить по конечному продукту валовые выпуски продукции по отраслям.

Валовая продукция выступает как взвешенная сумма конечных продуктов, причем весами являются коэффициенты B_{ij} . Они показывают, сколько необходимо произвести продукции i -ой отрасли для выпуска в сферу конечного потребления единицы продукции j -ой отрасли.

Требование неотрицательности всех составляющих МБ приводит к необходимости рассмотреть дополнительные свойства матрицы A .

Определение. Матрица A (и соответствующая модель) называется *продуктивной*, если для любого неотрицательного вектора конечной продукции Y результат решения матричного уравнения (3.7) также целиком неотрицателен.

Условие продуктивности системы (3.5) равносильно следующим эквивалентным условиям:

1) система (3.5) имеет неотрицательное решение $X \geq 0$ при некотором положительном векторе $Y \geq 0$;

2) у матрицы $(E-A)$ все главные миноры положительны.

Доказательство этого факта и связанных с ним результатов можно найти, например, в [6].

Простейший критерий продуктивности модели МБ является частным случаем условия Брауэра-Солоу, которое формулируется в терминах сумм коэффициентов матрицы A . Обозначим

$$r_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}, \quad s_j = \sum_{i=1}^n a_{ij},$$

тогда условие принимает вид: для продуктивности системы (3.5) достаточно выполнения одного из утверждений:

1) $r_i < 1, i = 1, \dots, n$;

2) $s_j < 1, j = 1, \dots, n$.

Другим важным свойством матрицы коэффициентов прямых материальных затрат, связанным также и со свойством продуктивности, является ее неразложимость.

Определение. Пусть $N = \{1, \dots, n\}$ – множество всех отраслей. Подмножество отраслей $S \subset N$ *изолировано*, если $a_{ij} = 0$, при всех $i \notin S$ и $j \in S$. Это означает, что отрасли из S не нуждаются в продукции, производимой другими отраслями даже косвенно.

Если во множестве отраслей существует изолированное подмножество, то с помощью перестановок строк и столбцов матрица A можно привести к виду

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Определение. Матрица A называется *неразложимой*, если ее нельзя привести к виду (3.8) только перестановкой строк и столбцов.

Свойства неразложимых матриц приведены в [7].

Одно из основных свойств неразложимых матриц описывается **теоремой Фробениуса-Перрона** (доказательство см. в [6]):

1. *Неразложимая матрица A имеет положительное собственное число $\lambda_1 > 0$, которое превосходит по модулю все другие ее собственные числа.*

2. *Собственному числу λ_1 соответствует единственный (с точностью до ненулевого множителя) целиком положительный собственный вектор x_1 .*

Из этой теоремы следует важный вывод о продуктивности модели (3.5).

Теорема.

Модель межотраслевого баланса продуктивна тогда и только тогда, когда $\lambda_1 < 1$.

Доказательство. Докажем достаточность условия. Поскольку по определению $\lambda_A X_A = A X_A$, то имеет место цепочка равенств

$$A^k X_A = A^{k-1} (A X_A) = \lambda_A (A^{k-1} X_A) = \dots = \lambda_A^k X_A. \quad (3.9)$$

Из теоремы Фробениуса-Перрона и условия теоремы $X_A > 0$ и $0 < \lambda_A < 1$, а также из последнего равенства следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k X_A = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_A^k X_A = 0.$$

Но так как $A^k \geq 0$ и $X_A > 0$, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0. \quad (3.10)$$

Рассмотрим очевидное равенство

$$(E - A)(E + A + A^2 + \dots + A^{k-1}) = E - A^k.$$

Предел правой части при $k \rightarrow \infty$ в силу (3.10) равен E . Следовательно, существует и предел левой части, причем

$$\begin{aligned} (E - A) \sum_{k=0}^{\infty} A^k &= E \Rightarrow \\ (E - A)^{-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} A^k. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Кроме того, все степени A^k матрицы A неотрицательны (так как сама матрица A неотрицательна) и, следовательно, $(E - A)^{-1} \geq 0$. Поэтому для произвольного $Y \geq 0$ существует $X = (E - A)^{-1} Y \geq 0$, то есть матрица A (и система МБ) продуктивна.

Для доказательства необходимости следует заметить, что у неразложимой матрицы A существует и левосторонний собственный вектор-строка p_A , отвечающий собственному числу λ_A . Из продуктивности модели следует, что для произвольного вектора $Y > 0$ существует вектор $X \geq 0$, для которого

$$X - AX = Y > 0$$

или

$$X > AX \geq 0,$$

следовательно, $X > 0$. Умножая последнее неравенство слева на вектор-строку p_A , получаем

$$p_A X > p_A A X = \lambda_A p_A X.$$

Поскольку $p_A > 0$, то последнее утверждение возможно только при условии: $\lambda_A < 1$.

Теорема доказана.

Из разложения (3.11) следует экономический смысл матрицы $B = (E - A)^{-1}$.

Коэффициенты матрицы B называются *коэффициентами полных материальных затрат*. Действительно, полные материальные затраты включают в себя как прямые затраты продукции, так и косвенные затраты всех порядков.

Если прямые затраты отражают количества средств производства, израсходованные непосредственно при изготовлении данного продукта (A), то косвенные относятся к предшествующим стадиям производства и входят в продукт через другие средства производства. Так, косвенные затраты первого порядка составляют $A(A)=A^2$, второго порядка – $A(A^2)=A^3$ и т.д. Очевидно, что наращивание порядка косвенных затрат можно продолжать неограниченно, поэтому полные материальные затраты описываются бесконечной суммой вида (3.11). Валовый продукт в таком случае описывается бесконечной суммой вида

$$X = Y + AY + A^2Y + \dots$$

Коэффициенты полных затрат в одних случаях не намного превышают величины коэффициентов прямых затрат или даже равны им, а в других – отличаются очень резко. Это зависит от характера, назначения продукции и других факторов. Отклонение сравнительно невелико в базовых отраслях (сырьевых, топливных) и весьма существенно в отраслях, завершающих процесс производства. В матрицах коэффициентов прямых и полных материальных затрат резко отличаются диагональные элементы, поскольку в матрице полных затрат они всегда в силу соотношения (3.11) больше 1.

Коэффициенты полных затрат можно вычислить приближенно, ограничившись рассмотрением нескольких ближайших порядков.

Наконец отметим, что коэффициенты прямых и полных затрат могут быть определены и по данным межотраслевых натуральных балансов:

$$a_{ij} = \frac{Q_{ij}^*}{Q_j}.$$

Коэффициенты прямых и полных материальных затрат широко используются для анализа производственных связей и расчета показателей межотраслевого баланса.

3.4. Модификации основной схемы межотраслевого баланса

Существуют различные модификации основной схемы. Здесь будут рассмотрены схемы, включающие дополнительно балансы трудовых ресурсов и фондов.

Исходной моделью является межпродуктовый баланс в натуральном выражении. Предположим, что трудовые затраты выражены в единицах труда одинаковой степени сложности. Пусть L_j - затраты живого труда в производстве продукта j -й отрасли. Тогда прямые затраты труда в этой отрасли составят

$$t_j = \frac{L_j}{X_j}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Аналогично формированию полных материальных затрат введем понятие полных затрат труда как живого, так и затрат, перенесенных на продукт через израсходованные средства производства. Формирование полных затрат

труда в модели осуществляется в столбцах межотраслевого баланса и, следовательно, происходит по следующей схеме:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}T_1 & a_{12}T_1 & \dots & a_{1n}T_1 \\ a_{21}T_2 & a_{22}T_2 & \dots & a_{2n}T_2 \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1}T_n & a_{n2}T_n & \dots & a_{nn}T_n \\ \hline t_1 & t_2 & \dots & t_n \\ \hline T_1 & T_2 & \dots & T_n \end{array},$$

где T_j – полные затраты труда на производство единицы j -го продукта;

a_{ij} – коэффициент прямых материальных затрат, выраженный в натуральных единицах;

$a_{ij}T_i$ – затраты труда, перенесенные на j -й продукт через i -е средство производства.

Таким образом, полные трудовые затраты равны:

$$T_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}T_i + t_j, \quad j = \overline{1, n}. \quad (3.12)$$

Обозначим через t вектор-строку прямых затрат труда, а через T – вектор-строку полных затрат труда. Тогда систему уравнений (3.12) можно представить в матричном виде как

$$T = TA + t, \quad (3.13)$$

откуда, поступив аналогично (3.7), получаем

$$\begin{aligned} T - TA &= t \Rightarrow T(E - A) = t \Rightarrow \\ T &= t(E - A)^{-1} = tB. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Таким образом, для любого j -го продукта величина полных затрат труда определяется как взвешенная сумма прямых затрат труда на все виды продукции, где в качестве весов выступают коэффициенты прямых материальных затрат, то есть

$$T_j = \sum_{i=1}^n B_{ij}t_i, \quad j = \overline{1, n}.$$

На основе коэффициентов прямой и полной трудоемкости строятся балансы затрат труда и использования трудовых ресурсов, обеспечивается расчет необходимых трудовых ресурсов при планировании объемов производства. Общая потребность затрат труда при плановых валовых объема X_j составит

$$L = \sum_{j=1}^n t_j X_j + L^*,$$

где L^* – дополнительные затраты труда в материальном производстве и нематериальной сфере.

Расчеты необходимого уровня трудовых ресурсов могут вестись не только в целом, но и по категориям работающих.

Аналогично проводится расширение основной схемы МБ за счет включения балансов фондов и показателей фондоемкости продукции. А именно, пусть Φ_j – объем фондов, задействованных в производстве j -ой отрасли, f_j , F_j – коэффициенты прямой и полной фондоемкости соответственно. Тогда соотношения для нахождения неизвестной фондоемкости имеют вид

$$F_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} F_i + f_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (3.15)$$

$$F = FA + f, \quad (3.16)$$

$$F = f(E - A)^{-1} = fB. \quad (3.17)$$

Замечание. Обратите внимание на два важных обстоятельства. Во-первых, при составлении расширенных схем используются только данные баланса в натуральном выражении. Во-вторых, в силу непрерывности матричного умножения коэффициенты прямой и полной трудоемкости (и аналогично – прямой и полной фондоемкости) образуют вектор-строки, и при решении матричного уравнения (3.11) умножение на матрицу коэффициентов полных материальных затрат должно производиться справа, а не слева, как это делалось при определении валовой продукции.

Возможны и другие модификации схемы МБ. Например, за счет включения баланса цен, рассмотрения динамических разностных уравнений и межотраслевых потоков производственных капиталовложений (лаговых и не учитывающих лаги капиталовложений). В следующей главе будут рассмотрены пространственные межотраслевые модели, учитывающие региональное деление.

Пример. Пусть в отчетном периоде известны межотраслевые потоки и конечная продукция в условной экономике, состоящей из трех отраслей (промышленность, сельское хозяйство и прочие отрасли) и составлен межотраслевой баланс. Данные заданы в табл. 3.3. Предполагая, что структура взаимосвязей отраслей в будущем периоде не изменится, определить параметры планового межотраслевого баланса и общую потребность в фондах, если плановый объем конечной продукции по отраслям должен составить $Y_{пл} = (30; 45; 20)$.

В соответствии с основными соотношениями модели межотраслевого баланса (3.1), (3.2) определим валовую продукцию отраслей в отчетном балансе:

$$X_1 = 24 + 10 + 6 + 40 = 80 = 24 + 12 + 16 + 28;$$

$$X_2 = 50;$$

$$X_3 = 30.$$

Согласно определению (3.3) на основании данных примера получаем матрицу коэффициентов прямых материальных затрат

Таблица 3.3

Отчетный межотраслевой баланс (нат. ед.)

Отрасли	1-я	2-я	3-я	Конечный продукт	Валовый продукт
1-я	24	10	6	40	?
2-я	12	5	9	24	?
3-я	16	5	6	3	?
Чистый продукт	28	30	9	?	
Затраты фондов	1800	1200	900		
Валовый продукт	?	?	?		?

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,15 & 0,1 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Матрица является продуктивной, поскольку для нее выполнены условия Брауэра-Солоу. Поэтому можно сказать, что для $Y_{пл}$ решение модели $X_{пл}$ будет также положительным. Воспользуемся соотношением (3.7) для нахождения планового объема валовой продукции. Матрица полных материальных затрат имеет вид

$$B = (E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,69 & 0,44 & 0,59 \\ 0,44 & 1,27 & 0,59 \\ 0,48 & 0,27 & 1,47 \end{pmatrix}$$

Следовательно, решением модели будет

$$X_{пл} = (E - A)^{-1} Y_{пл} = \begin{pmatrix} 1,69 & 0,44 & 0,59 \\ 0,44 & 1,27 & 0,59 \\ 0,48 & 0,27 & 1,47 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 45 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82,4 \\ 82,4 \\ 55,9 \end{pmatrix}$$

Для расчета необходимого объема фондов определим прямую и полную фондоемкость продукции по отраслям в отчетном периоде. Она составит

$$f_1 = 1800 / 80 = 22,5;$$

$$f_2 = 1200 / 50 = 24;$$

$$f_3 = 900 / 30 = 30.$$

Полная фондоемкость по отраслям составит

$$F = f(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 22,5 & 24 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,69 & 0,44 & 0,59 \\ 0,44 & 1,27 & 0,59 \\ 0,48 & 0,27 & 1,47 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 62,99 & 48,48 & 71,54 \end{pmatrix}.$$

Предполагая, что структура фондемости в плановом периоде не изменится, получаем плановый объем необходимых фондов

$$\Phi_1 = 22,5 \cdot 82,4 = 1854 \text{ (ед.)};$$

$$\Phi_2 = 1977 \text{ (ед.)};$$

$$\Phi_3 = 1677 \text{ (ед.)}.$$

Общий межотраслевой баланс в плановом периоде имеет вид, представленный в табл. 3.4.

Таблица 3.4

Плановый межотраслевой баланс

Отрасли	1-я	2-я	3-я	Конечный продукт	Валовый продукт
1-я	24,72	16,48	11,18	30	82,4
2-я	16,48	8,24	16,77	45	82,4
3-я	16,48	8,24	11,18	20	55,9
Чистый продукт	24,72	49,44	16,77	95	
Валовый продукт	82,4	82,4	55,9		220,7
Затраты фондов	1854	1977	1677	5508	

Вопросы для самопроверки

1. Модель межотраслевого баланса имеет вид $X=AX+Y$, где X – вектор валового выпуска, Y – вектор конечного продукта, A – матрица коэффициентов прямых материальных затрат. В каком случае матрица A продуктивна:
 - 1.1. $a_{ij} < 1$
 - 1.2. $\sum_j a_{ij} > 1$
 - 1.3. $\sum_j a_{ij} < 1$?
2. Коэффициенты прямых материальных затрат модели межотраслевого баланса определяются путем какого деления:
 - 2.1. межотраслевого потока на объем валового продукта отрасли-производителя;
 - 2.2. межотраслевого потока на объем конечного продукта отрасли-потребителя;
 - 2.3. межотраслевого потока на объем валового продукта отрасли-потребителя;
 - 2.4. валового продукта отрасли-потребителя на валовый продукт отрасли-производителя?

3. Могут ли быть отрицательными элементы вектора конечной продукции при продуктивной матрице коэффициентов прямых затрат:
 - 3.1. да
 - 3.2. нет?
4. Каковы коэффициенты прямых материальных затрат:
 - 4.1. больше коэффициентов полных материальных затрат;
 - 4.2. меньше коэффициентов полных материальных затрат;
 - 4.3. отличаются от коэффициентов полных материальных затрат только для некоторых отраслей?
5. Является ли симметричной матрица коэффициентов прямых материальных затрат:
 - 5.1. да;
 - 5.2. нет?
6. Как может быть найдена матрица коэффициентов полных материальных затрат
 - 6.1. $(E+A)$;
 - 6.2. $(E+A)^{-1}$;
 - 6.3. $(E-A)$;
 - 6.4. $(E-A)^{-1}$?
7. Коэффициенты полных материальных затрат показывают, сколько единиц продукции одной отрасли будет затрачено на:
 - 7.1. производство всей валовой продукции другой отрасли;
 - 7.2. производство единицы валовой продукции другой отрасли;
 - 7.3. производство единицы конечной продукции другой отрасли?
8. Верно ли, что сумма конечной продукции всех отраслей равна сумме чистой продукции всех отраслей:
 - 8.1. да;
 - 8.2. нет?
9. Коэффициенты прямых затрат труда определяются:
 - 9.1. делением величины валового продукта отрасли-потребителя на величину затрат живого труда в отрасли-производителе;
 - 9.2. делением величины затрат живого труда в отрасли на валовую продукцию этой отрасли;
 - 9.3. делением затрат живого труда в отрасли на конечную продукцию отрасли?
10. Что выполнено для полных затрат труда (T_i)
 - 10.1.
$$T_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}T_j + t_i;$$
 - 10.2.
$$T_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}t_i;$$

$$10.3. \quad T_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}T_i + t_j,$$

где t_i – прямые затраты труда?

11. При расчете балансов с учетом труда и фондов используют балансы

11.1. в денежном выражении;

11.2. в натуральном выражении;

11.3. как в денежном, так и в натуральном выражении?

12. Какой вид имеет решение матричного уравнения относительно полных затрат фондов (F) (A – матрицы прямых материальных затрат, f – прямые затраты):

12.1. $F=Af$;

12.2. $F=fa$;

12.3. $F=(E-A)^{-1}f$;

12.4. $F=f(E-A)^{-1}$?

13. Чему равна конечная продукция второй отрасли в балансе вида

Отрасли	1-я	2-я	3-я	Кон. прод.	Вал. прод.
1-я	15	23	32		140
2-я	20	16	34		250
3-я	25	19	7		300
Чист. прод.					

13.1. 100;

13.2. 70;

13.3. 180?

14. Чему равна чистая продукция отраслей в условиях предыдущего вопроса:

14.1. (60; 58; 73);

14.2. (80; 192; 227);

14.3. (70; 180; 249)?

15. Какая из отраслей более трудоемкая, если в условиях вопроса 13 затраты живого труда по отраслям составили соответственно (1000; 1500; 2500) чел.-час.:

15.1. первая;

15.2. вторая;

15.3. третья?

16. В какой из отраслей выше фондоотдача, если в условиях вопроса 13 годовые затраты фондов по отраслям составили соответственно (5000; 6500; 9500):

16.1. в первой;

16.2. во второй;

16.3. в третьей?

17. В модели межотраслевого баланса

17.1. учитывается эффект масштаба;

- 17.2. производственные затраты пропорциональны валовому выпуску;
 - 17.3. производственные затраты пропорциональны конечному выпуску?
 - 18. Верно ли, что с физической моделью объекта можно производить любые эксперименты:
 - 18.1. да;
 - 18.2. нет?
 - 19. Какой тип моделей наиболее подходит для моделирования экономики?
-
- 20. В модели системы (объекта) эффективность работы отражают:
 - 20.1. независимые переменные;
 - 20.2. зависимые переменные;
 - 20.3. неконтролируемые переменные?
 - 21. Основная модель межотраслевого баланса является:
 - 21.1. статической управляемой;
 - 21.2. статической неуправляемой;
 - 21.3. непрерывной управляемой;
 - 21.4. дискретной неуправляемой;
 - 21.5. игровой;
 - 21.6. имитационной?
 - 22. В межотраслевом балансе в натуральном выражении ресурсы разделяются
 - 22.1. по источникам формирования;
 - 22.2. по потребителям;
 - 22.3. по воспроизводимости?
 - 23. Чем определяется матричная структура межотраслевого баланса
 - 23.1. двойной подчиненностью отраслей;
 - 23.2. различными направлениям потребления продукции отраслей;
 - 23.3. рассмотрением отрасли как потребителя и производителя?
 - 24. Межотраслевой поток x_{ij} есть
 - 24.1. стоимость продукции, произведенной в i -ой отрасли и потребленной в j -ой;
 - 24.2. стоимость продукции, произведенной в j -ой отрасли и потребленной в i -ой;
 - 24.3. стоимость продукции, произведенной в i -ой и в j -ой отраслях?
 - 25. В модели межотраслевого баланса
 - 25.1. допускается замещение в производстве одних видов продукции другими;
 - 25.2. не допускается замещение в производстве одних видов продукции другими;
 - 25.3. не допускается замещение в потреблении одних видов продукции другими;
 - 25.4. допускается замещение в потреблении одних видов продукции другими?

Глава 4. МЕЖРЕГИОНАЛЬНЫЕ МЕЖОТРАСЛЕВЫЕ БАЛАНСЫ

– Контрабандный? Всю контрабанду
делают в Одессе, на Малой Арнаутской улице.
И. Ильф, Е. Петров

В этой главе рассматриваются межрегиональные межотраслевые балансы, при построении которых рассматривается пространственная структура производимой продукции. Модели этого класса используются при анализе межрегиональных пропорций, внешних связей страны в целом и отдельных регионов, влияния изменений в структуре экспорта-импорта на производство и распределение продукции. Таким образом, место моделей этого класса можно представить так:



4.1. Схема синтеза региональных балансов

Статическая модель межотраслевого баланса, представленная в предыдущей главе, описывает взаимосвязи отраслей по производству и распределению продукции и использованию ресурсов страны. Однако между отдельными регионами страны есть существенные различия как в производимой ими продукции, так и в составе имеющихся ресурсов. В качестве иллюстрации этого положения в табл. 4.1–4.2 приведены данные о распределении валового продукта в динамике и по отраслям по различным регионам Украины. Данные взяты из [8]. Приведенные цифры свидетельствуют, что распределение валового общественного продукта по регионам далеко неравномерно. Кроме того, существует определенная, сложившаяся традиционно или в силу специфических природных условий отраслевая специализация регионов. Следовательно, для анализа пропорций и уровня развития отдельных регионов необходима разработка моделей, учитывающих не только отраслевое деление экономики, но и региональное, то есть рассмотрение пространственной структуры общества.

Модели этой главы, как и предыдущей, являются матричными (балансовыми). Сохраняются все введенные обозначения и понятия.

Таблица 4.1

Удельный вес экономических регионов и областей в валовом общественном продукте Украины за 1991-1995 гг. (в %, в действующих ценах соответствующих лет)

Экономические регионы и области	1991	1992	1993	1994	1995
Всего по Украине	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0
Автономная республика Крым	3,8	3,2	3,3	3,0	2,6
Подольский	8,0	6,5	7,6	7,1	7,4
Полесский	9,7	7,3	7,7	7,1	7,5
Приднепровский	16,5	19,9	19,2	19,1	19,7
Донецкий	15,6	24,8	18,1	22,8	22,4
Карпатский	10,8	7,9	8,4	8,5	8,1
Центральный	12,0	9,4	11,3	11,7	11,4
Причерноморский	10,0	9,5	10,3	8,5	8,3
Восточный	13,6	11,6	14,0	12,3	12,7

Таблица 4.2

Удельный вес отдельных отраслей промышленности в производстве валовой продукции (в %) за 1995 г.

Отрасли промышленного производства	Всего по Украине	По областям		
		Одесская	Николаевская	Херсонская
Энергетика	11,8	5,7	30,1	5,4
Машиностроение и металлообработка	15,0	16,2	21,4	36,1
Лесная и деревообрабатывающая	2,0	3,6	0,2	5,6
Пищевая	14,7	34,6	13,6	22,5
Легкая	2,7	1,9	5,3	10,3
Стройматериалов	3,1	4,7	2,7	2,5

Пусть, как и раньше,

i, j - индексы отраслей материального производства ($i, j = 1 \dots n$);

k - индекс ресурсов в сфере материального производства ($k = 1 \dots l$);

x_i - объем производства продукции в i -ой отрасли;

y_i - объем конечной продукции в i -ой отрасли (сумма непроемственного потребления, накопления, возмещения выбытия основных фондов и затраты на капремонт, прочие расходы, сальдо экспорта - импорта);

a_{ij} - затраты i -ой отрасли на производство единицы продукции j -ой отрасли;

f_{kj} - затраты k -го вида ресурса (основных фондов, труда) на производство единицы продукции j -ой отрасли;

q_k - общий объем k -го вида ресурса.

Для описания межотраслевого взаимодействия воспользуемся результатами предыдущей главы: уравнениями потребления и распределения (4.1)-(4.2). Условия баланса затрат ресурсов для сферы производства имеют вид

$$\sum_{j=1}^n f_{kj} x_j = q_k, \quad k = \overline{1, l}$$

$$fX = Q$$

В *межрегиональных моделях* особенное внимание уделяется доли экспорта и импорта каждого региона. Из состава конечного продукта y_i выделяется объем *вывоза* v_i^r и *ввоза* w_i^r продукции отраслей. Тогда, если

r - индекс региона,

y_i^r - конечное использование продукции j -ой отрасли в r -м регионе за вычетом сальдо экспорта – импорта, то модель принимает вид:

$$x_i^r = \sum_{j=1}^n a_{ij}^r x_j^r + y_i^r + v_i^r - w_i^r, \quad i = \overline{1, n}$$

$$X^r = A^r X^r + Y^r + V^r - W^r,$$

(4.1)

а баланс затрат ресурсов для производственной сферы –

$$\sum_{j=1}^n f_{kj}^r x_j^r = q_k^r, \quad k = \overline{1, l},$$

$$f^r X^r = Q^r.$$

(4.2)

Особенностью модели (4.1) является то, что потоки материальных затрат и объемы конечного потребления продукции образуются из суммарных ресурсов собственного производства и ввоза, т.о. в модели допускается полная заменяемость используемой продукции независимо от места ее производства.

Основной задачей исследования развития региона в рамках единой системы является определение воздействия региона на темпы и динамику развития общих показателей, влияние на другие регионы. В модели (4.1) векторы ввоза-вывоза формально не отличаются от других частей конечного продукта. Однако, если изменение личного потребления сказывается в основном на экономических характеристиках данного региона, то изменения ввоза-вывоза сказывается на остальных регионах. Следовательно, необходимо объединение (синтез) региональных моделей в единую систему.

Можно рассмотреть 3 схемы объединения региональных балансов.

1-я схема: сведение региональных балансов в точечную модель, при этом все балансы и ограничения складываются, коэффициенты усредняются. В

результате все межрегиональные связи уничтожаются. Такая схема применяется при расчетах отчетных сводных балансов.

2-я схема: объединение региональных балансов продукции и ресурсов с сохранением объемов производства, коэффициентов затрат, но с потерей конечной продукции регионов, в том числе ввоза-вывоза регионов, региональных ресурсов. Эта схема приводит к избытку переменных.

3-я схема: сохраняются все условия региональных моделей и дополнительно включаются условия баланса межрегиональных отношений. Модель синтеза приобретает вид:

$$X^r = A^r X^r + Y^r + V^r - W^r, \quad r = \overline{1, m};$$

$$\sum_{r=1}^m V^r - \sum_{r=1}^m W^r = 0;$$

$$f^r X^r = Q^r, \quad r = \overline{1, m},$$

(4.3)

где m – число регионов.

Если в балансе отражается и география межрегиональных связей, то схема модифицируется следующим образом:

$$X^r = A^r X^r + \sum_{s \neq r} X^{rs} - \sum_{s \neq r} X^{sr} + Y^r,$$

$$f^r X^r = Q^r, \quad r = \overline{1, m},$$

(4.4)

где X^{rs} – вектор вывоза продукции из r -го региона в s -й.

Общие объемы вывоза и ввоза продукции определяются так:

$$V^r = \sum_{s \neq r} X^{rs}, \quad W^r = \sum_{s \neq r} X^{sr}, \quad r = \overline{1, m}.$$

(4.5)

Структура межрегиональной модели (4.4) для случая трех регионов:

X^1	X^2	X^3	X^{12}	X^{21}	X^{13}	X^{31}	X^{23}	X^{32}	
$E-A^1$			$-E$	E	$-E$	E			Y^1
f^1									Q^1
	$E-A^2$		E	$-E$			$-E$	E	Y^2
	f^2								Q^2
		$E-A^3$			E	$-E$	E	$-E$	Y^3
		f^3							Q^3

4.2. Основная схема межрегионального межотраслевого баланса

Основная схема представляет собой блочную таблицу (табл. 4.3). Горизонтальное рассмотрение блоков отражает распределение валовой продукции каждого региона на собственные внутрирегиональные нужды и на нужды других регионов. Столбцы каждого блока отражают источники формирования потребленной в регионе продукции, которые складываются из внутренних затрат и затрат других регионов.

В оптимизационных моделях объемы ввоза-вывоза являются эндогенно заданными переменными, в балансовых моделях они отсутствуют в явном виде, вместо этого рассматриваются экзогенные структурные характеристики межрегионального обмена.

Пусть

X_{Π}^r - объем потребленной в r -м регионе продукции;

X^{rs} - объем вывоза продукции из r -го в s -й регион;

X^{rr} - объем внутреннего самопотребления,

тогда имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} X_{\Pi}^r &= A^r X^r + Y^r, \\ V^r &= \sum_{s \neq r} X^{rs}, \\ W^r &= \sum_{s \neq r} X^{sr}, \\ X_{\Pi}^r &= X^r - \sum_{s \neq r} X^{rs} + \sum_{s \neq r} X^{sr}, \\ X^{rr} &= X^r - \sum_{s \neq r} X^{rs}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Система региональных межотраслевых балансов имеет вид:

$$X^r = A^r X^r + \sum_{s \neq r} X^{rs} - \sum_{s \neq r} X^{sr} + Y^r, \quad r = \overline{1, m}. \tag{4.7}$$

Объем валовой продукции равен

$$X^r = X^{rr} + \sum_{s \neq r} X^{rs} = \sum_{s=1}^m X^{rs}. \tag{4.8}$$

Объем потребления в r -м регионе:

$$X_{\Pi}^r = X^{rr} + \sum_{s \neq r} X^{sr} = \sum_{s=1}^m X^{sr}. \tag{4.9}$$

Таблица 4.3

Основная схема межрегионального межотраслевого баланса

Регионы-потребители													Итого валовая продукция региона		
m															
1															
Регионы-производители	Отрасли	1	...	n	Итого	Кон. пр-ция	Всего	...	1	...	n	Итого	Кон. пр-ция	Всего	x_i^1
	1	x_{ij}^1			Σ	y_i^1	$x_{i\Pi}^1$		Σ	x_{ij}^1			y_i^1	$x_{i\Pi}^1$	
	...				...				...						
	n				Σ				Σ						
	Итого	Σ	...	Σ	Σ	Σ			Σ	...	Σ	Σ	Σ	Σ	
m	1	x_{ij}^{m1}			Σ	y_i^{m1}	$x_{i\Pi}^{m1}$	Σ	x_{ij}^{m1}			y_i^{m1}	$x_{i\Pi}^{m1}$	x_i^m	
	...				...			...							
	n				Σ			Σ							
	Итого	Σ	...	Σ	Σ	Σ		Σ	...	Σ	Σ	Σ	Σ		
	Итого	Σ	...	Σ	Σ	Σ		Σ	...	Σ	Σ	Σ	Σ		
Итого	Итого	Σ	...	Σ	Σ	Σ	Σ	...	Σ	...	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ
	Итого	Σ	...	Σ	Σ	Σ	Σ	...	Σ	...	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ
	Итого	Σ	...	Σ	Σ	Σ	Σ	...	Σ	...	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ
Условно-чистая продукция	Условно-чистая продукция	z_j^1		Σ											
	Валовая продукция	x_j^1		Σ											
	Валовая продукция региона	f_j^1		Σ											
Условно-чистая продукция	Условно-чистая продукция	z_j^m		Σ											
	Валовая продукция	x_j^m		Σ											
	Валовая продукция региона	f_j^m		Σ											

4.3. Межрегиональный межотраслевой баланс Мозеса-Ченери (Moses L., Chenery H.)

Межрегиональный межотраслевой баланс Мозеса-Ченери (середина 1950-х годов) строится на основе взаимосвязей межрегиональных поставок продукции с объемами потребления во ввозящих регионах.

Пусть

x_i^r – объем производства продукции i -ой отрасли в r -м регионе;

x_{ij}^{rs} – объем производства i -ой отрасли, поставляемой из региона r в регион s для производства продукции j -ой отрасли;

y_i^{rs} – объем продукции i -ой отрасли, поставляемой из региона r в регион s для конечного потребления.

Тогда результат синтеза региональных балансов в единую систему выражается системой равенств:

$$X_i^r = \sum_{s=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^{rs} + \sum_{s=1}^m y_i^{rs},$$

$$i=1, \dots, n; \quad r=1, \dots, m.$$
(4.10)

Пусть также g_i^{rs} – доля r -ого региона в общем потреблении (производственном и непроизводственном) продукции i -ой отрасли s -м регионом (x_{ni}^s), так называемый "торговый коэффициент", тогда

$$x_i^{rs} = g_i^{rs} x_{ni}^s,$$
(4.11)

где x_i^{rs} – объем ввоза продукции i -ой отрасли из региона r в регион s .

Соотношения (4.11) фиксируют структуру распределения потребленной продукции по регионам поставщикам. В силу (4.9) выполняется тождество

$$\sum_{r=1}^m g_i^{rs} = 1.$$

Если структура снабжения каждого региона устойчива по всем отраслям, то получаем следующий вид ММБ:

$$x_i^r = \sum_{s=1}^m g_i^{rs} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^s x_j^s + y_i^s \right) = \sum_{s=1}^m \sum_{j=1}^n g_i^{rs} a_{ij}^s x_j^s + \sum_{s=1}^m g_i^{rs} y_i^s,$$

$$i = \overline{1, n}; \quad r = \overline{1, m}.$$
(4.12)

Два вида коэффициентов объединяются в один

$$q_{ij}^{rs} = g_i^{rs} a_{ij}^s,$$
(4.13)

который характеризует затраты продукции i -ой отрасли в регионе r , необходимые для выпуска единицы продукции j -ой отрасли в регионе s . Подставляя (4.13) в (4.12), получаем

$$x_i^r = \sum_{s=1}^m \sum_{j=1}^n q_{ij}^{rs} x_j^s + \sum_{s=1}^m g_i^{rs} y_i^s, \\ X = QX + GY \quad (4.14)$$

Отличительной чертой основной модели регионального МБ является то, что потоки материальных затрат и объемы конечного использования продукции образуются из суммарных ресурсов собственного производства и ввоза. При синтезе региональных моделей в межрегиональный баланс эти ресурсы разделяются в явном виде:

$$x_{ij}^s = x_{ij}^{ss} + \sum_{s \neq r} x_{ij}^{rs} = q_{ij}^{ss} x_j^s + \sum_{s \neq r} q_{ij}^{rs} x_j^s. \quad (4.15)$$

Поскольку $x_{ij}^s = a_{ij}^s x_j^s$, получаем

$$a_{ij}^s = \sum_{r=1}^m q_{ij}^{rs}.$$

Таким образом, в межрегиональном балансе, построенном в предположении зависимости межрегиональных потоков и объемов потребления во ввозящих регионах, происходит разделение всех региональных затрат на собственно внутрорегиональные и на затраты других регионов.

4.4. Региональные модели с коэффициентами ввоза

Модель с коэффициентами ввоза является модификацией предыдущей. Коэффициенты ввоза продукции в регион γ_i определяют долю ввоза в общем объеме используемой продукции: $W_i = \gamma_i(X_i - V_i + W_i)$. Поскольку объем использования продукции в регионе равен $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_i$, то выражение для ввоза можно записать в виде:

$$W_i = \gamma_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_i \right) - \quad (4.16)$$

и рассматривать это уравнение в качестве самостоятельного в региональной модели. В результате получаем модификацию регионального МБ с выделением балансов ввоза:

$$\begin{aligned}
x_i &= (1 - \gamma_i) \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_i \right) + v_i, \quad i = \overline{1, n}; \\
w_i &= \gamma_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_i \right) \quad i = \overline{1, n};
\end{aligned}
\tag{4.17}$$

или

$$\begin{aligned}
x_i &= \sum_{j=1}^n q'_{ij} x_j + (1 - \gamma_i) y_i + v_i, \quad i = \overline{1, n}; \\
w_i &= \sum_{j=1}^n q''_{ij} x_j + \gamma_i y_i, \quad i = \overline{1, n},
\end{aligned}
\tag{4.18}$$

где

$$q'_{ij} = (1 - \gamma_i) a_{ij}, \quad q''_{ij} = \gamma_i a_{ij}.$$

Если принять дополнительно предположение об устойчивости географической структуры ввоза, т.е. ввести коэффициенты γ_i^{rs} , то модель для r -го региона будет включать уравнения распределения произведенной продукции и систему балансов ввоза:

$$\begin{aligned}
x_i^r &= \sum_{j=1}^n q_{ij}^{rr} x_j^r + \gamma_i^{rr} y_i^r + v_i^r, \quad i = \overline{1, n}; \\
w_i^{sr} &= \sum_{j=1}^n q_{ij}^{sr} x_j^r + \gamma_i^{sr} y_i^r, \quad i = \overline{1, n}; \quad s = \overline{1, m}; \quad s \neq r.
\end{aligned}
\tag{4.19}$$

В свою очередь

$$v_i^r = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^m \gamma_j^{rs} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^s x_j^s + y_i^s \right) = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^m q_{ij}^{rs} x_j^s + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^m \gamma_i^{rs} y_i^s.
\tag{4.20}$$

Для моделей других регионов вывоз v_i^r воспринимается как ввоз w_i^{rs} , т.е.

$v_i^r = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^m w_i^{rs}$. Подставляя (4.20) в (4.19), получаем ранее рассмотренную систему уравнений ММБ вида (4.14).

4.5. Коэффициенты полных материальных затрат продукции

Система уравнений межрегионального баланса вида (4.19)

$$X = GaX + GY = QX + Y$$

имеет единственное решение при заданных объемах конечного использования продукции, коэффициентах прямых материальных затрат и торговых коэффициента. Решение системы уравнений может быть получено непосредственно через вектор конечного использования продукции:

$$X = (E - Ga)^{-1} GY = (E - Q)^{-1} GY, \quad (4.21)$$

или в эквивалентной форме решение межрегионального баланса имеет вид

$$X = G(aX + Y) = (G^{-1} - a)^{-1} Y. \quad (4.22)$$

Матрица $B = (E - Q)^{-1} G = (G^{-1} - a)^{-1}$ состоит из коэффициентов b_{ij}^{rs} , характеризующих объемы производства продукции i -ой отрасли в регионе r , необходимые для конечного использования единицы конечной продукции отрасли j в регионе s , т.е. коэффициенты полных материальных затрат продукции межрегионального межотраслевого баланса.

Сумма затрат по столбцу $\sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij}^{rs}$ определяет потребность в валовом

продукте всех регионов для получения единицы продукции i -ой отрасли, предназначенной для конечного использования в регионе s . При $r=s$ соответствующая сумма есть потребность во внутрирегиональных ресурсах валового продукта s -го региона, а остальная (при $s \neq r$) – затраты валового продукта остальных регионов.

Продуктивность в межрегиональных межотраслевых балансовых моделях.

Понятие продуктивности матрицы имеет тот же смысл, что и для межотраслевой модели предыдущей главы. Однако продуктивность для межрегиональной модели имеет ряд особенностей. В частности, если строго положительными могут быть лишь некоторые элементы вектора конечной продукции, матрицу модели называют *полупродуктивной*.

1. Понятие продуктивности связывается не с понятием конечного продукта, а с понятием конечного использования продукции. Конечный продукт включает в себя сальдо экспорта-импорта, поэтому требование неотрицательности значений конечного продукта для пространственной (то есть межрегиональной) модели привело бы к неоправданному сужению области возможных вариантов межрегиональных связей.

2. Возможность получения неотрицательных значений зависит не только от коэффициентов материальных затрат, но и от параметров структуры межрегиональных связей (матрица G). Поэтому правильнее говорить о продуктивности всей межрегиональной экономической системы.

3. Региональные матрицы коэффициентов материальных затрат могут быть по отдельности либо продуктивными, либо непродуктивными (в дальнейшем предполагается, что матрицы неразложимы, т.е. нет полупродуктивности). Для пространственных межрегиональных моделей вариантов больше: а) система вполне продуктивна; б) продуктивна; в) полупродуктивна; г) непродуктивна.

Определение. Пространственная экономическая система *вполне продуктивна*, если при любой структуре межрегиональных связей допустим любой вектор конечного использования в неотрицательной области (для любого $Y > 0$ существует $X > 0$, такой, что выполняются соотношения модели). Это понятие есть точный аналог точечной продуктивности.

Определение. *Продуктивной* является такая пространственная система, в которой при любом варианте структуры межрегиональных связей найдется допустимый вектор конечного использования. *Вполне продуктивная* система является продуктивной, обратное неверно.

Определение. Пространственная система является *полупродуктивной*, если в ней существуют такие варианты межрегиональных связей, что некоторые векторы конечного использования в неотрицательной области допустимы. Для полупродуктивных систем, не являющихся продуктивными, существуют такие структуры межрегиональных связей, при которых все варианты конечного использования продукции в неотрицательной области недопустимы.

Определение. Наконец, *непродуктивной* является система, в которой не существует таких вариантов межрегиональных связей, при которых допустим хотя бы один вектор конечного использования в неотрицательной области.

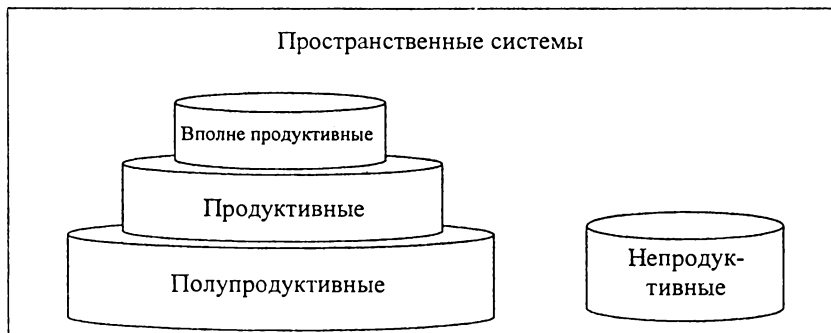


Рис. 4.1. Распределение пространственных систем по продуктивности

Задача последующего анализа заключается в определении продуктивности системы в зависимости от продуктивности матриц коэффициентов материальных затрат входящих в нее регионов.

Определение. Матрицы коэффициентов материальных затрат a^r , $r=1, \dots, m$ называются *взаимно продуктивными*, если существует такой одинаковый для

всех этих матриц неотрицательный вектор цен p^c , что $p^c(E-a^r) > 0$, $r=1, \dots, m$. Таким образом, взаимно продуктивные матрицы, во-первых, сами являются продуктивными, во-вторых, мало различаются между собой. В противном случае не существовало бы единого для всех матриц вектора цен, приводящих их к неубыточной форме.

Утверждение 1. Пространственная экономическая система в рамках W -модели (21) является вполне продуктивной в том и только том случае, если матрицы коэффициентов материальных затрат входящих в нее регионов взаимно продуктивны.

Определение. Матрицы коэффициентов материальных затрат a^r , $r=1, \dots, m$ называются *взаимно непродуктивными*, если существует такой одинаковый для всех этих матриц неотрицательный вектор цен p^c , что $p^c(E-a^r) < 0$, $r=1, \dots, m$. Таким образом, взаимно непродуктивные матрицы, во-первых, сами являются непродуктивными, во-вторых, мало различаются между собой. В противном случае не существовало бы единого для всех матриц вектора цен, приводящих их к убыточной форме.

Утверждение 2. Пространственная экономическая система в рамках W -модели (21) является непродуктивной в том и только том случае, если матрицы коэффициентов материальных затрат входящих в нее регионов взаимно непродуктивны.

Утверждение 3. Пространственная экономическая система в рамках W -модели (21) является полупродуктивной в том и только том случае, если матрицы коэффициентов материальных затрат входящих в нее регионов взаимно непродуктивны.

Следствие 1. Пространственная система не может быть только продуктивной. Если система не является вполне продуктивной, то всегда найдутся такие структуры межрегиональных связей, при которых все неотрицательные векторы конечного использования являются недопустимыми.

Следствие 2. Средняя матрица материальных затрат является продуктивной тогда и только тогда, когда все региональные матрицы являются взаимно продуктивными, а непродуктивной — если все матрицы являются взаимно непродуктивными.

4.6. Межрегиональный баланс открытой системы регионов

В рассмотренных выше моделях предполагалось, что анализируемая территориальная экономическая система является внешне закрытой, т.е. внешние связи каждого региона замыкаются на регионах той же системы. Таким образом, сальдо экспорта-импорта, а также сальдо межрайонных связей с регионами, не входящими в систему, включалось в показатели конечного использования и объемы регионального потребления Y^r , X^r п. Это оправдано для стран, в которых внешнеторговые связи не имеют большого значения. В этом случае показателями экзогенного (внешнего) вывоза и ввоза регионов являются харак-

теристики ввоза-вывоза, абсолютные объемы которых много меньше объемов внутрисистемного вывоза и ввоза.

Для стран с сильным влиянием внешнеторговых связей (либо при построении межрегиональной модели части страны) в формировании показателей Y^r , X^r_{Π} заметную роль начинает играть сальдо экзогенных связей. Если объем экзогенного ввоза значительно превышает объем вывоза, то названные показатели могут оказаться отрицательными. В силу этого они теряют свой первоначальный смысл.

Пусть

$\bar{V}^r$ и $\bar{W}^r$ – векторы экзогенного вывоза и ввоза в r -м регионе;

$\bar{V}$ и $\bar{W}$ – общесистемные векторы, являющиеся композициями $\bar{V}^r$ и $\bar{W}^r$ соответственно. Соотношения для объемов потребления и валового продукта записываются в виде:

$$\begin{aligned} X^r_{\Pi} &= \sum_{s=1}^m X^{sr} + \bar{W}^r; \\ X^r &= \sum_{s=1}^m X^{rs} + \bar{V}^r. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Из соотношений (4.23), кроме матрицы G^{rs} , определяется матрица G^{0s} так, чтобы $\bar{W}^s = G^{0s} X^s_{\Pi}$. Тогда $\sum_{r=0}^m G^{rs} = E$. Искомая модель строится из соотношений (4.23) подстановкой в них выражения X^{rs} через X^s_{Π} :

$$X^r - \sum_{s=1}^m G^{rs} a^s X^s = \sum_{s=1}^m G^{rs} \bar{Y}^s + \bar{V}^r, \quad r = 1, \dots, m \quad (4.24)$$

или в матричной форме

$$(E - Ga)X = G\bar{Y} + \bar{V}. \quad (4.25)$$

В матрице G сумма по столбцам меньше единицы на величину элементов матрицы G^{0s} . В модель включаются также соотношения по экзогенному ввозу:

$$G^{0s} a^s X^s = -G^{0s} \bar{Y}^s + \bar{W}^s, \quad s = 1, \dots, m. \quad (4.26)$$

В построении модели используются две матрицы коэффициентов полных материальных затрат: $B = (E - Ga)^{-1}G$ для $\bar{Y}$ и $\tilde{B} = (E - Ga)^{-1}$ для $\bar{V}$. Структура открытой модели межрегионального баланса двух регионов представлена

следующей схемой:

$\bar{Y}^1$	$\bar{Y}^2$	$\bar{V}^1$	$\bar{V}^2$	
$B^{11} \dots$	B^{12}	$\tilde{B}^{11}$	$\tilde{B}^{12}$	X^1
B^{21}	B^{22}	$\tilde{B}^{21}$	$\tilde{B}^{22}$	X^2
$G^{01}(a^1 B^{11} + E)$	$G^{01} a^1 B^{12}$	$G^{01} a^1 \tilde{B}^{11}$	$G^{01} a^1 \tilde{B}^{12}$	$\bar{W}^1$
$G^{02} a^2 B^{21}$	$G^{02}(a^2 B^{22} + E)$	$G^{02} a^2 \tilde{B}^{21}$	$G^{02} a^2 \tilde{B}^{22}$	$\bar{W}^2$

Решение подобной модели может производиться в несколько этапов:

1) обращение матрицы $(E - Ga)$ и определение расхода продукции в каждом регионе на экзогенный вывоз: $(E - Ga)^{-1} \bar{V}$;

2) перемножение матриц $\tilde{B} = (E - Ga)^{-1}$ и G и определение объемов продукции, используемой на внутрисистемные цели: $(E - Ga)^{-1} G \bar{Y}$;

3) перемножение матриц G^0 , a , B , $\tilde{B}$ и определение потребностей в экзогенном ввозе.

Таким образом, объемы производства в каждом регионе распадаются на продукцию, произведенную в данном регионе и используемую на конечное потребление в данном регионе и во всех остальных регионах

$\left(\sum_{s=1}^m B^{rs} \bar{Y}^s, r = \dots, m \right)$, и произведенную в r -м регионе продукция, которая расходуется на экзогенный вывоз как самого региона, так и других регионов

системы $\left(\sum_{s=1}^m \tilde{B}^{rs} \bar{V}^s, r = \dots, m \right)$.

Аналогично распределяются объемы экзогенного ввоза: часть прямо и косвенно идет на конечное использование в том регионе, в котором осуществляется ввоз $(G^{0r} \{a^r B^{rr} + E\} \bar{Y}^r)$, часть – на производство такой продукции, которая затем вывозится в другие регионы и используется там на конечные цели

$\left(G^{0r} a^r \sum_{s=1}^m B^{rs} \bar{Y}^s \right)$. Кроме того, продукция экзогенного ввоза в конечном итоге

участвует в производстве такой продукции, которая затем вывозится за пределы

данной системы (экзогенный вывоз $\sum_{s=1}^m G^{0r} a^r \tilde{B}^{rs} \bar{V}^s$).

В данном случае полные затраты на производство продукции, идущей на конечное использование в каждом регионе, включают в себя как полные меж-

региональные материальные затраты $\sum_{r=1}^m B^{rs}$, так и полные затраты экзогенного ввоза $\left(G^{0s} [a^s B^s + E] + \sum_{r \neq s} G^{0r} a^r B^{rs} \right)$. Такой расчет позволяет проследить все источники формирования и распределения продукции.

В основной модели ММБ предполагалась возможность развития любой отрасли в каждом регионе. Это, очевидно, может не иметь места для произвольных систем.

Разделим для каждого региона все множество отраслей на подмножество отраслей, имеющих в регионе ($j_1 \in I_1$), и подмножество отраслей, отсутствующих в данном регионе ($j_2 \in I_2$). Принципиальная разница между этими отраслями проявляется при рассмотрении внешних связей региона. Только отрасли первой группы могут осуществлять вывоз продукции, а ввозимая продукция этих отраслей дополняет собственные ресурсы (дополняющий или конкурирующий ввоз). Для второй группы отраслей потребность в продукции этих отраслей удовлетворяется полностью только за счет ввоза: такой ввоз называют недополняющим (неконкурирующим).

В этом случае общая система балансов разбивается на две подсистемы: балансы производимой в регионе продукции

$$x_{j_1} = \sum_{j_1 \in I_1} a_{ij_1} x_{j_1} + \bar{y}_{j_1} - v_{j_1} + w_{j_1}, \quad i_1 \in I_1, \quad (4.27)$$

балансы продукции, не производимой в регионе, потребности в которой удовлетворяются полностью за счет ввоза (объемы недополняющего ввоза)

$$\sum_{j_1 \in I_1} a_{i_2 j_1} x_{j_1} + \bar{y}_{i_2} = w_{i_2}, \quad i_2 \in I_2. \quad (4.28)$$

Уравнения балансов ресурсов:

$$\sum_{j_1 \in I_1} f_{kj_1} x_{j_1} + y_k = Q_k, \quad k \in K. \quad (4.29)$$

В матричном виде модель межотраслевых связей представляется в виде:

$$X_1 = A_{11} X_1 + \bar{Y}_1 + V_1 - W_1, \quad (4.30)$$

$$A_{21} X_1 + \bar{Y}_2 = W_2, \quad (4.31)$$

$$f_1 X_1 + \bar{Y}_f = Q. \quad (4.32)$$

Разбиение отраслей на два подмножества изменяет структуру и значения матрицы полных региональных затрат. Из (4.30)-(4.31) следует:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ W_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 - A_{11} & 0 \\ -A_{21} & E_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}, \quad (4.33)$$

где $Y_1 = \bar{Y}_1 + V_1 - W_1$.

Матрица коэффициентов полных материальных затрат, характеризующая потребности в продукции, производимой в регионе (по первой группе отраслей) и ввозимой из других регионов (вторая группа), для обеспечения конечной потребности данного региона представляется в виде

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} E_1 - A_{11} & 0 \\ -A_{21} & E_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{B}_{11} & \hat{B}_{12} \\ \hat{B}_{21} & \hat{B}_{22} \end{bmatrix}. \quad (4.34)$$

Разделение дополняющего и недодолняющего ввоза требует раздельного определения торговых коэффициентов по группам отраслей. Положим:

$$\begin{aligned} g_i^{rs} &= \frac{w_i^{rs}}{x_{\Pi i}^s}, \quad i \in I_1^r, \quad r, s = 1, \dots, m; \\ \tilde{g}_i^{rs} &= \frac{\tilde{w}_i^{rs}}{\tilde{w}_i^s}, \quad i \in I_2^r, \quad r, s = 1, \dots, m; \end{aligned} \quad (4.35)$$

где g_i^{rs} – доля поставки производимой продукции r -го региона в потребляемых ресурсах продукции i -й отрасли в s -м регионе;

$\tilde{g}_i^{rs}$ – доля поставки недодолняющей продукции из r -го региона в общем объеме недодолняющего ввоза продукции i -й отрасли s -м регионом;

$w_i^{rs}, \tilde{w}_i^{rs}$ – объем поставок производимой продукции и недодолняющего ввоза продукции i -й отрасли из r -го региона в s -й соответственно;

$x_{\Pi i}^s$ – объем потребленной продукции i -й отрасли в s -м регионе;

$\tilde{w}_i^s$ – объем недодолняющего ввоза продукции i -й отрасли в s -м регионе.

Матрица торговых коэффициентов G состоит из прямоугольных блоков G^s , в которых фиксируется структура поставок взаимозаменяемой продукции и недодолняющего ввоза. Диагональные блоки имеют вид $[G^{rr} : 0]$. Коэффициенты межрегиональных межотраслевых затрат определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} q_{ij}^{rs} &= g_i^{rs} a_{ij}^s, \quad r = s, \quad r, s = 1, \dots, m; \\ q_{ij}^{rs} &= g_i^{rs} a_{ij}^s + \tilde{g}_i^{rs} \tilde{a}_{ij}^s, \quad r \neq s, \quad r, s = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Модель с недодолняющим ввозом имеет вид

$$X = GaX + G\bar{Y}.$$

Зональный межрегиональный межотраслевой баланс. Множество продуктов недодолняющего ввоза зоны формируется из продуктов, не производимых ни одним регионом, входящим в эту зону. Матрица торговых коэффициентов открытой зональной модели с недодолняющим ввозом отличается введением $m+1$ -го построчного блока, в котором фиксируется доля поставок продукции из-за пределов зоны недодолняющего ввоза:

$$\tilde{G}_{m+1} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_1^{m+1,1} & \tilde{g}_1^{m+1,m} \\ 0 & \tilde{g}_2^{m+1,1} & 0 & \tilde{g}_2^{m+1,m} \\ & \dots & & \dots \\ & \tilde{g}_n^{m+1,1} & & \tilde{g}_n^{m+1,m} \end{bmatrix}.$$

В матричной записи появляется строка распределения продукции недополняющего ввоза, формируемого зоной:

$$W_2 = \tilde{G}_{m+1} aX + \tilde{G}_{m+1} \bar{Y},$$

где подматрица $\tilde{G}_{m+1}$ фиксирует структуру внешних поставок недополняющей продукции (элементы, соответствующие множествам I_1^r , равны нулю).

Особенностью коэффициентов полных затрат производимой продукции является то, что они не включают затраты на производство продукции недополняющего ввоза, поскольку последние осуществляются вне региона. Коэффициенты полных затрат недополняющего ввоза (матрица $\tilde{G}_{m+1}(E - Ga)^{-1}G$) устанавливает связь между объемами используемой конечной продукции региона и полными потребностями во ввозе невзаимозаменяемой продукции.

Рассмотрение модели недополняющего ввоза позволяет получить ряд показателей, характеризующих внешние связи регионов: полные затраты недополняющей продукции на вывоз (реэкспорт недополняющей продукции), "полную экономию" недополняющего ввоза за счет дополняющих поставок.

ММБ позволяет также производить модификацию за счет включения в рассмотрение взаимосвязей производство, потребления и доходов населения.

Более полное рассмотрение моделей этого класса можно найти в [9].

Пример. Данные межотраслевых балансов для закрытой системы двух регионов заданы в табл. 4.4.

Определим структурные коэффициенты этой пространственной системы в рамках модели Мозеса-Ченери. Для этого вначале рассчитаем региональные коэффициенты прямых материальных затрат, они вычисляются аналогично коэффициентам межотраслевого баланса и составят

$$a^1 = \left(\frac{x_{ij}^1}{x_j^1} \right)_{i,j} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,12 \\ 0,13 & 0,06 \end{pmatrix}; \quad a^2 = \left(\frac{x_{ij}^2}{x_j^2} \right)_{i,j} = \begin{pmatrix} 0,53 & 0,1 \\ 0,32 & 0,25 \end{pmatrix}.$$

Далее рассчитываем матрицу торговых коэффициентов. При этом предположим, что весь ввоз продукции какой-либо отрасли в регион потребляется той же отраслью ввозящего региона, поэтому для торговых коэффициентов имеет место соотношение

$$g_i^{rs} = \frac{w_i^{rs}}{x_i^s - S_i^s},$$

где w_i^{rs} – объем ввоза из r -го региона в s -ый продукции i -ой отрасли;

S_i^s – сальдо вывоза ввоза ввозящего региона.

Таблица 4.4

Данные межрегионального межотраслевого баланса

Межотраслевой баланс региона 1									
Текущее производственное потребление				Конечное использо- вание	Фонд потребле- ния	Вывоз, v	Ввоз, w	Сальдо вывоза- ввоза, S	Валовая продукция
Отрасль	1	2	Итого						
1	30	20	50	60	10	50	10	40	150
2	20	10	30	150	100	20	30	-10	170
Итого	50	30	80	210	110	70	40	30	320
Межотраслевой баланс региона 2									
Текущее производственное потребление				Конечное использо- вание	Фонд потребле- ния	Вывоз, v	Ввоз, w	Сальдо вывоза- ввоза, S	Валовая продукция
Отрасль	1	2	Итого						
1	40	25	65	50	25	10	50	-40	75
2	24	60	84	145	110	30	20	10	239
Итого	64	85	149	195	135	40	70	-30	314
Условно-чистая продукция	11	154	165						
Валовая продукция	75	239	314						
Трудовые ресурсы	25	35	60						

Кроме того, поскольку торговые коэффициенты отражают доли ввоза в общем объеме потребления, то для них выполняется условие

$$\sum_r g_i^{rs} = 1,$$

из которого следует, что

$$g_i^{ss} = 1 - \sum_{r \neq s} g_i^{rs}.$$

Исходя из этих соображений, получаем, например,

$$g_1^{21} = 50/(75 - (-40)) = 0,091,$$

$$g_1^{11} = 1 - 0,091 = 0,909.$$

Таким образом, матрица торговых коэффициентов имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} g_i^{11} & g_i^{12} \\ g_i^{21} & g_i^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,909 & 0 & 0,435 & 0 \\ 0 & 0,833 & 0 & 0,087 \\ 0,091 & 0 & 0,565 & \\ 0 & 0,167 & 0 & 0,913 \end{pmatrix}$$

На основании матрицы торговых коэффициентов и региональных матриц материальных затрат определим коэффициенты матрицы Q :

$$Q = Ga,$$

где a – блочная матрица, составленная из региональных (a') матриц коэффициентов материальных затрат вида

$\begin{pmatrix} a^1 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$. Таким образом, получим

$$Q = (g_{ij}^{rs}) = \begin{pmatrix} 0,909 & 0 & 0,435 & 0 \\ 0 & 0,833 & 0 & 0,087 \\ 0,091 & 0 & 0,565 & \\ 0 & 0,167 & 0 & 0,913 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,2 & 0,12 & 0 & 0 \\ 0,13 & 0,06 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,53 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0,32 & 0,25 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,1818 & 0,1070 & 0,2319 & 0,0455 \\ 0,1111 & 0,0279 & 0,0219 & 0,0182 \\ 0,0182 & 0,0107 & 0,3014 & 0,0591 \\ 0,0222 & 0,0098 & 0,2921 & 0,2291 \end{pmatrix}$$

Можно убедиться, что выполняется основное соотношение межрегионального баланса $X = QX + GY$, где X , Y являются композициями региональных векторов валовой продукции и конечного использования соответственно.

Для расчетов матрицы полных материальных затрат межрегиональной модели воспользуемся соотношением

$$B = (E - Q)^{-1}G.$$

Получаем последовательно

$$E - Q = \begin{pmatrix} 0,8182 & -0,1070 & -0,2319 & -0,0455 \\ -0,1111 & 0,9510 & -0,0279 & -0,0219 \\ -0,0182 & -0,0107 & 0,6986 & -0,0591 \\ -0,0222 & -0,0098 & -0,2921 & 0,7709 \end{pmatrix},$$

$$(E - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,2558 & 0,1477 & 0,4706 & 0,1144 \\ 0,1491 & 1,0701 & 0,1123 & 0,0478 \\ 0,0395 & 0,0225 & 1,4947 & 0,1176 \\ 0,053 & 0,0264 & 0,5813 & 1,3457 \end{pmatrix},$$

и наконец,

$$B = \begin{pmatrix} 1,1845 & 0,1422 & 0,8120 & 0,1173 \\ 0,1458 & 0,8997 & 0,1283 & 0,1371 \\ 0,1718 & 0,0383 & 0,8620 & 0,1093 \\ 0,1011 & 0,2463 & 0,3516 & 1,2305 \end{pmatrix}$$

Заметим, что региональные матрицы материальных затрат были продуктивны. Кроме того, матрица коэффициентов полных материальных затрат целиком положительна, поэтому при данной структуре межрегиональных потоков любой положительный вектор конечного использования является допустимым.

Приведенные в данной главе модели используются как базовые при построении динамических межрегиональных межотраслевых балансов, а также при оптимизации межрегиональных пропорций. Оптимизационным моделям посвящена, например, книга [9], в которой также приведена подробная хронология развития межрегиональных межотраслевых моделей.

В заключение стоит отметить, что практическое применение моделей данного класса возможно только с использованием средств вычислительной техники, поскольку с ростом числа отраслей, рассматриваемых в каждом регионе, и числа регионов размерность задачи существенно увеличивается. Поэтому рекомендуется при изучении данной главы и решении задач воспользоваться пакетами прикладных программ, позволяющими производить обработку (в частности, обращение) матриц большой размерности. Среди таких пакетов выделим Mathlab, Mathcad, Mathematica. Эти пакеты будут полезны и при изучении следующих глав.

Вопросы для самопроверки

1. Что используется в моделях ММБ
 - 1.1. валовой продукт, конечное потребление и сальдо ввоза-вывоза;
 - 1.2. валовой продукт, конечное использование, ввоз и вывоз;
 - 1.3. валовой продукт, сальдо ввоза – вывоза?
2. Уравнение баланса межрегиональных связей имеет вид:

$$2.1. \sum_{r=1}^m V^r + \sum_{r=1}^m W^r = \sum_{r=1}^m X^r;$$

$$2.2. \sum_{r=1}^m V^r + \sum_{r=1}^m Y^r = \sum_{r=1}^m W^r;$$

$$2.3. \sum_{r=1}^m V^r - \sum_{r=1}^m W^r = 0;$$

где W – ввоз, V – вывоз, X – валовой продукт, Y – конечный продукт?

3. Величина X^s в модели ММБ показывает

3.1. ввоз продукции в r -й регион из s -го;

3.2. вывоз продукции из r -го региона в s -й;

3.3. вывоз продукции из r -го региона и из s -го?

4. Торговые коэффициенты различаются

4.1. по отраслям;

4.2. по регионам;

4.3. и по отраслям, и по регионам?

5. Торговый коэффициент показывает:

5.1. долю r -го региона в общем объеме экспорта s -го (g^{rs});

5.2. долю r -го региона в общем объеме импорта s -го (g^{rs});

5.3. долю r -го региона в общем потреблении продукции i -й отрасли s -м регионом (g_i^{rs});

5.4. долю i -й отрасли в общем объеме экспорта-импорта между s -м и r -м регионами (g_i^{rs})?

6. Для торговых коэффициентов выполняется соотношение:

$$6.1. \sum_{r=1}^m g_i^{rs} = 1; \quad 6.2. \sum_{s=1}^m g_i^{rs} = 1;$$

$$6.3. \sum_{i=1}^n g_i^{rs} = 1; \quad 6.4. \sum_{r,s=1}^m \sum_{i=1}^n g_i^{rs} = 1?$$

7. Коэффициенты ввоза определяют

7.1. долю ввоза в объеме конечного использования;

7.2. долю ввоза в общем объеме используемой продукции;

7.3. долю ввоза в объеме валовой продукции?

8. Валовой продукт отрасли региона с учетом коэффициентов ввоза принимает вид

$$8.1. x_i = \gamma_i \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_i + v_i, i = \overline{1, n};$$

$$8.2. x_i = \gamma_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_i \right) + v_i, i = \overline{1, n};$$

$$8.3. \quad x_i = (1 - \gamma_i) \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_i \right) + v_i, i = \overline{1, n} ?$$

9. Коэффициенты полных материальных затрат продукции в моделях ММБ вычисляются как

$$9.1. \quad B = (E - Q)^{-1}; \quad 9.2. \quad B = (G^{-1} - A)^{-1}; \quad 9.3. \quad B = (E - GA)^{-1} G?$$

10. Для пространственных систем имеет место следующее включение:
 10.1. полупродуктивные $\subseteq$ продуктивные $\subseteq$ вполне продуктивные;
 10.2. продуктивные $\subseteq$ полупродуктивные $\subseteq$ вполне продуктивные;
 10.3. вполне продуктивные $\subseteq$ продуктивные $\subseteq$ полупродуктивные?
 11. Средняя матрица материальных затрат является продуктивной, когда
 11.1. все региональные матрицы продуктивны;
 11.2. все региональные матрицы взаимно продуктивны;
 11.3. не все региональные матрицы непродуктивны?
 12. В модели открытой системы регионов используется матрица полных материальных затрат вида
 12.1. $(E - GA)^{-1} G$;
 12.2. $(E - GA)^{-1}$;
 12.3. обоих видов?
 13. Определите торговые коэффициенты взаимодействия регионов (первого со вторым), если известны данные региональных балансов

От- расль	Регион 1				Регион 2			
	К.И.	Вывоз	Ввоз	ВП	К.И.	Вы- воз	Ввоз	ВП
1	50	10	50	200	50	50	10	300
2	100	100	20	400	80	20	100	250

14. Известна матрица коэффициентов полных материальных затрат и конечное использование двух регионов в разрезе двух отраслей $Y^1 = (30, 100)$, $Y^2 = (180, 50)$. Определите величину продукции 1-й отрасли 1-го региона, идущую на его внутренне потребление и на нужды второго региона,

$$B = \left(\begin{array}{cc|cc} 1,39 & 0,11 & 0,68 & 0,08 \\ 0,47 & 1,12 & 0,23 & 0,54 \\ \hline 0,32 & 0,05 & 1,17 & 0,44 \\ 0,33 & 0,47 & 0,12 & 1,39 \end{array} \right).$$

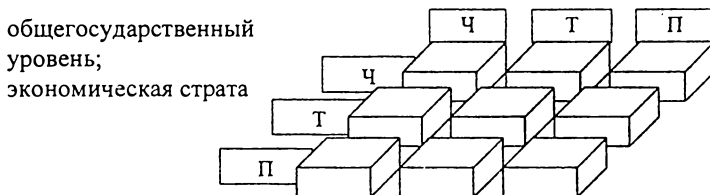
15. В условиях вопроса 14 определить, что больше внутренне конечное использование продукции 2-й отрасли во втором регионе или в первом?

Глава 5. ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ

...существует оптимальное расстояние,
на котором женское лицо выглядит
привлекательнее всего...

П.А.М. Дирак

В моделях данного класса рассматривается динамика валового общественного продукта (ВОП) и национального дохода (НД), зависимость их роста от распределения на фонд потребления и накопления в каждый момент времени. Оптимизационные модели строятся в предположении о непрерывности времени и мгновенном эффекте от вложений. Математической основой решения моделей являются методы решения задач оптимального управления. Модели данного класса являются точечными, то есть агрегированы до одного показателя, и их следует отнести к общегосударственному уровню, а все включенные в модель переменные являются стоимостными. Место моделей данной главы в системе моделей общества можно представить следующим образом:



5.1. Оптимизация фонда потребления

Основная задача управления экономической динамикой – оптимизация распределения национального дохода на накопление и потребление.

НД может быть представлен в виде суммы двух составляющих:

$$y(t) = u(t) + c(t), \quad (5.1)$$

где $y(t)$ – национальный доход,
 $u(t)$ – накопление,
 $c(t)$ – потребление.

В основе модели лежит предположение о пропорциональности между накоплением и приростом ВОП:

$$u(t) = b \frac{dx}{dt}, \quad (5.2)$$

где b – капиталоемкость валового продукта.

Далее аналогично соотношениям межотраслевого баланса в точечной модели валовой общественный продукт $x(t)$ и национальный доход $y(t)$ связаны соотношением

$$x(t) = ax(t) + y(t),$$

где $a(t)$ – агрегированный показатель прямых материальных затрат.

Из последнего соотношения получаем, что

$$x(t) = \frac{1}{1-a} y(t).$$

С учетом соотношений (5.1)-(5.2) получаем для национального дохода уравнение

$$y(t) = B \frac{dy}{dt} + c(t), \quad (5.3)$$

где $c(t)$ – экзогенно задаваемая траектория потребления;

$x(t)$ – валовой общественный продукт;

B – капиталоемкость национального дохода, равная $B = \frac{b}{1-a}$, эта величина

носит название *акселератор*.

В простейших вариантах рассматриваются значения $c(t)=0$, $c(t)=\text{const}$, $c(t)=C_0 e^{rt}$, где r – темп прироста потребления. В то же время $c(t)$ может быть задано исходя из целей развития экономической системы.

Возможность оптимизации обеспечивается тем, что экономическая система, развивающаяся во времени, является управляемой. В каждый момент времени эта система характеризуется *переменной состояния* $x(t)$, а существующая возможность управления системой задается *переменной управления* $v(t)$. В каждый момент времени t можно выбрать переменную управления из некоторого множества, также зависящего от t , то есть $v(t) \in V(t)$. Под управлением в макроэкономической системе может подразумеваться распределение экзогенных ресурсов.

Прежде чем приступить к решению задачи оптимизации, напомним некоторые факты из теории оптимального управления.

Предположим, что состояние системы и управление определяют скорость изменения состояния системы, а именно

$$\dot{x} = F[x(t), v(t), t].$$

Уравнение такого вида называется *уравнением перехода*. Переменная времени t вводится в явном виде для учета изменения переходных связей, так как зависимость от x , v может меняться со временем.

Следовательно, зная состояние системы в начальный момент времени и выбрав траекторию управления, мы можем полностью определить траекторию системы $x(t)$.

Выбор управления осуществляется исходя из целей функционирования системы (цели развития могут быть социально-экономическими, демографическими и др.). Эти цели формализуются в критерий – *функционал полезности* $\varphi(x(t), v(t), t)$, который зависит от состояния системы и от управления системой. В задачах экономической динамики обычно предполагается, что функционал

аддитивен во времени, то есть отражает совокупный эффект функционирования экономической системы.

В целом задача состоит в том, чтобы максимизировать функционал полезности при ограничениях, налагаемых уравнением перехода, условиями на переменные управления, и начальном состоянии системы.

В общем виде задача выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \int_0^T \varphi(x(t), v(t), t) dt \rightarrow \max \\ \dot{x} = F[x(t), v(t), t] \\ v(t) \in V(t), t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (5.4)$$

Задача (5.4) представляет собой задачу оптимального управления, решение которой может быть найдено с помощью *принципа максимума Понтрягина*.

Принцип максимума Понтрягина

Если $v^*(t)$ – оптимальное управление, то есть управление, которое максимизирует функционал полезности в задаче (5.4), то существуют такой вектор переменных $\psi(t)$ (его размерность равна размерности вектора состояния $x(t)$), что для любого момента времени t функция Гамильтона

$$H(x, v, \psi, t) = \varphi(x, v, t) + (\psi(t), F(x, v, t))$$

достигает максимума на управлении $v^*(t)$, то есть

$$\max_{v \in V(t)} H(x, v, \psi, t) = H(x, v^*, \psi, t).$$

При этом функции $\psi(t)$ удовлетворяют сопряженной системе и условию трансверсальности

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \\ \psi(T) = 0 \end{cases}$$

Полезность в задаче оптимального управления распределением национального дохода измеряется фондом потребления $c(t)$. Таким образом, функционал полезности имеет вид:

$$c(T) = \int_0^T c(t) dt \rightarrow \max, \quad (5.5)$$

где T – горизонт планирования.

Состояние макросистемы описывается переменной $y(t)$ – национальный доход, а переменная управления $u(t)$ – производственное накопление.

С учетом (5.1) получаем:

$$c(T) = \int_0^T (y - u) dt \rightarrow \max. \quad (5.6)$$

Оптимизируем траекторию национального дохода при отсутствии ограничений на потребление. Исходя из (5.3) запишем уравнение перехода в виде:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{B} u \quad (5.7)$$

Ограничения на управление в модели имеют вид

$$0 \leq u(t) \leq y(t), \quad (5.8)$$

а начальное условие при $t=0$

$$y(0)=y_0. \quad (5.9)$$

Соотношение (5.9) определяет начальный уровень потребления.

Применяя принцип максимума, получим решение. Функция Гамильтона имеет вид

$$H = (y - u) + \psi \frac{1}{B} u,$$

а сопряженная система и условие трансверсальности –

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} \Rightarrow \frac{d\psi}{dt} = -1, \\ \psi(T) = 0. \end{cases}$$

Из двух последних соотношений получаем:

$$\psi(t) = -t + T = T - t,$$

$$H = (y - u) + \frac{T - t}{B} u = y + \left(\frac{T - t}{B} - 1 \right) u.$$

Функция $H(t, y, u, T)$ будет принимать максимальное значение на каком-то из концов интервала изменения u , так как H — линейная функция от u .

Рассмотрим два варианта.

1) $(T-t)/B - 1 > 0$ или $t < T-B$. Тогда H достигает максимального значения при $u = y(t)$. В этом случае норма производственного накопления $\alpha=1$, что означает рост экономики с максимально возможным технологически темпом.

2) $t > T-B$. В этом случае H принимает максимальное значение при $u = 0$, что означает отсутствие накопления.

Графически траектория движения экономической системы и соответствующее управление представлены на рис. 5.1.

При $t < T-B$ решение задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= \dot{y}(t) = y_0 e^{(t/B)}, \\ y(T-B) &= y_0 e^{(T-B)/B}, \end{aligned}$$

а при $t > T-B$ имеем

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= 0, \\ \dot{y}(t) &= \dot{y}(T-B). \end{aligned}$$

Такая модель называется моделью с релейным переключением. Переключение, то есть изменение значения переменной управления, происходит дважды:

1-й раз – в момент $t_0 = 0$ переключение нормы производственного накопле-

ния на 1 (с 0); 2-й – в момент $t=T-B$ переключение нормы производственного накопления с 1 на 0.

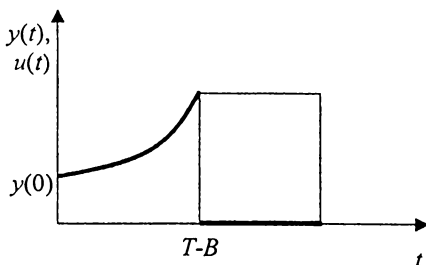


Рис. 5.1. Траектория развития НД. Площадь заштрихованной области равна общему фонду потребления, а жирной линией выделено оптимальное управление

Рассмотрение технологических возможностей системы позволяет сделать следующие выводы о качественных свойствах модели.

1. При краткосрочном планировании, когда $T < B$, оптимизировать распределение НД между потреблением и накоплением не имеет смысла. Поэтому норму производственного накопления необходимо задавать экзогенно.

2. При среднем или дальнем горизонте планирования, то есть когда $T > B$, оптимальная траектория накопления является с содержательной точки зрения недостижимой, так как она предполагает на первом этапе нулевое потребление, что невозможно. Кроме того, в конце планового периода создается ситуация типа "конец света", то есть потребляется весь объем НД и тем самым не создаются основы для развития за горизонтом планирования.

Недостаток модели связан с тем, что все моменты времени рассматриваются как равноценные с точки зрения потребления, что неверно. Введем гипотезу о существовании потребительских предпочтений во времени: эффективность благ настоящего выше эффективности благ будущего. Эта гипотеза позволяет рассматривать взвешенную функцию потребления с дисконтом – *функционал дисконтирующего потребления*:

$$c(T) = \int_0^T e^{-\omega t} c(t) dt, \quad \omega > 0, \quad (5.10)$$

где $\omega > 0$ - дисконт потребления, причем $0,05 < \omega < 0,1$.

Задача имеет тот же вид (5.7)-(5.9).

Применение метода максимума Понтрягина к новой задаче дает решение:

$$\begin{aligned} \dot{H} &= e^{-\omega t} (y - u) + \psi \frac{1}{B} u, \\ \frac{d\psi}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y} = -e^{-\omega t}, \end{aligned}$$

$$\psi(t) = \frac{1}{\omega} e^{-\omega t} + v, \quad v = \text{const},$$

$$\psi(T) = 0 = \frac{1}{\omega} e^{-\omega T} + v,$$

где функции v , H , ψ имеют вид

$$v = -\frac{1}{\omega} e^{-\omega T},$$

$$\psi(t) = \frac{1}{\omega} e^{-\omega t} - \frac{1}{\omega} e^{-\omega T},$$

$$\begin{aligned} H &= e^{-\omega t} (y - u) + \frac{1}{B\omega} (e^{-\omega t} - e^{-\omega T}) \mu = \\ &= ye^{-\omega t} + \left[\frac{e^{-\omega t} - e^{-\omega T}}{B\omega} - e^{-\omega t} \right] u. \end{aligned}$$

Функция H , как и раньше, линейно зависит от u . Следовательно, необходимо рассмотреть два случая.

1. Если

$$\left[\frac{e^{-\omega t} - e^{-\omega T}}{B\omega} - e^{-\omega t} \right] > 0. \text{ Тогда } u^*(t) = y^*(t).$$

$$e^{-\omega t} \left(\frac{1}{B\omega} - 1 \right) - \frac{1}{B\omega} e^{-\omega T} > 0 \Rightarrow e^{-\omega(t-T)} (1 - B\omega) > 1.$$

$$\text{Если } B\omega < 1, \text{ то } \omega(T-t) > \ln \left(\frac{1}{1-B\omega} \right) \Rightarrow$$

$$t < T - \frac{1}{\omega} \ln \left(\frac{1}{1-B\omega} \right).$$

$$2. \text{ Если } t > T - \frac{1}{\omega} \ln \left(\frac{1}{1-B\omega} \right), \text{ то } u^*(t) = 0.$$

Итак, при $t < T - \tilde{B}$ оптимальное управление $u^*(t) = y^*(t) = y_0 e^{t/B}$,

а при $t > T - \tilde{B}$ $u^*(t) = 0$, $y^*(t) = y_0 e^{\frac{1}{B}(T-\tilde{B})}$, где $\tilde{B} = \frac{1}{\omega} \ln \left(\frac{1}{1-B\omega} \right)$ - скорректированная капиталоемкость.

Оптимальная траектория (рис. 5.2) имеет релейное переключение в точке $t = T - \tilde{B}$. Суммарный фонд потребления $C^* = \tilde{B} y^*(T - \tilde{B})$.

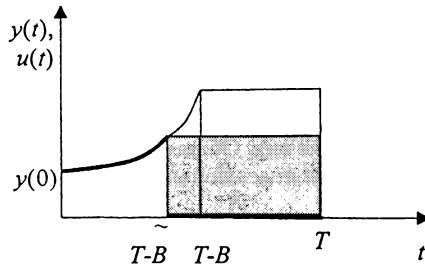


Рис. 5.2. Траектория НД при функционале дисконтирующего потребления. Более светлым показан график для предыдущего случая

Как следует из рис. 5.2, момент начала потребления приближен к $t=0$, однако по-прежнему на первом этапе потребления нулевое, следовательно, введение дисконта потребления не позволяет устранить этот недостаток модели.

5.2. Сглаживание в задачах оптимизации фонда потребления

Предыдущие результаты имеют не прикладной характер, но позволяют решить весьма важную задачу: выявить достижимый максимум (технологически возможный).

Существует несколько подходов к тому, чтобы усилить прикладное значение оптимальных траекторий с релейным переключением. Для этого необходимо сгладить скачки темпов и структуры НД.

Первый способ заключается во включении условия обеспечения минимального уровня потребления. Основное предположение: потребление в течение всего периода не может быть меньше некоторой экзогенно заданной величины $\bar{c} = c_0$. С его учетом задача запишется так:

$$\begin{cases} \int_0^T (y - u) dt \rightarrow \max, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{B} u \\ 0 \leq u(t) \leq y(t) - \bar{c} \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (5.11)$$

Замечание. При задании величины c_0 необходимо иметь в виду, что она не должна превышать начальный уровень НД, в противном случае возможность развития будет уничтожена еще в самом начале.

Решение задачи (5.11) будет отличаться от решения основной задачи (5.6)-(5.9) на первом этапе. А именно, при $t < T-B$ оптимальное управление

$$u^*(t) = y(t) - \bar{c}$$

а оптимальная траектория НД –

$$y(t) = (y_0 - \bar{c})e^{\frac{1}{B}t} + \bar{c}.$$

На втором этапе (при $t > T-B$) и оптимальное управление и оптимальная траектория имеют тот же вид. Общая траектория представлена на рис. 5.3. Точка $t=T-B$ является точкой переключения управления.

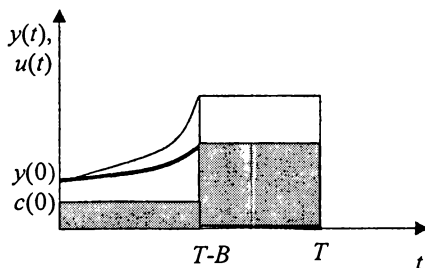


Рис. 5.3. Траектория НД при первом варианте сглаживания. Более светлым показан график для простейшего случая.

Задаваемое экзогенно потребление c может быть равно существующему в системе c_0 или отличаться от него.

Недостаток этого способа сглаживания заключается в том, что с течением времени при росте населения с известным темпом доля национального дохода, приходящаяся на одного человека, будет падать при $t < T-B$.

Второй способ подразумевает включение условия обеспечения необходимого темпа прироста потребления на 1-ом этапе развития.

Разделим фонд потребления на 2 части:

$$c(t) = c_1(t) + c_2(t),$$

где $c_1(t) = c_0 e^{rt}$ – экзогенная, растущая с постоянным темпом r ,

$c_2(t) = y(t) - u(t) - c_1(t)$ – эндогенная, оптимизируемая часть.

В данном случае условие задачи выйдет следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int_0^T (y - u) dt \rightarrow \max, \\ & \begin{cases} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{B} u, \\ 0 \leq u(t) \leq y(t) - c_1(t), \\ y(0) = y_0. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Оптимальное управление отличается от всех предыдущих вариантов также только на первом этапе.

При $t < T-B$ оптимальное управление $u^*(t) = y(t) - c_1(t)$, а оптимальная траектория национального дохода имеет вид

$$y^*(t) = \left(y_0 - \frac{c_0}{1-Br} \right) e^{\frac{1}{B}t} + \frac{c_0}{1-Br} e^{rt}.$$

Таким образом, на накопление выделяется максимально допустимая часть НД, а потребление растет с минимальным необходимым темпом r .

Оптимальное управление на втором этапе ($t > T-B$) $u^*(t) = 0$, а оптимальная траектория

$$y^*(t) = \left(y_0 - \frac{c_0}{1-Br} \right) e^{\frac{1}{B}(T-B)} + \frac{c_0}{1-Br} e^{r(T-B)},$$

следовательно, весь объем НД остается неизменным и используется на потребление (рис. 5.4).

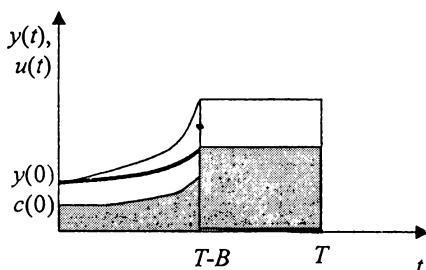


Рис. 5.4. Траектория НД с минимальным темпом роста потребления

Итак, этот способ сглаживания позволяет избежать снижения потребления на душу населения, выбрав соответствующий темп роста на первом этапе. Однако второй существенный недостаток остается: в конце планового периода возможностей для развития нет.

Третий способ предназначен для учета возможностей послепланового развития. Все рассмотренные до сих пор варианты исключают возможности дальнейшего развития системы за пределами горизонта планирования. Рассмотрим вопрос о том, как избежать этого.

По-прежнему будем считать, что

$$c(t) = c_1(t) + c_2(t),$$

где $c_1(t) = c_0 e^{rt}$,

$c_2(t) = y(t) - u(t) - c_1(t)$ — оптимизируемая часть.

Кроме того, в течение второго периода будем отпускать на накопление

некую фиксированную величину, то есть при $t > T - B$ управление ограничено снизу $u(t) = \bar{u}$. Тогда задача принимает вид:

$$\begin{cases} \int_0^T (y - u) dt \rightarrow \max, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{B} u, \\ \bar{u} \leq u(t) \leq y(t) - \bar{c}_1(t), \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (5.13)$$

Решение на первом интервале остается без изменений по сравнению со вторым случаем сглаживания, а на втором интервале получаем:

$$y^*(t) = \frac{\bar{u}}{B} t + v, \quad v = \text{const} = y^*(T - B) - \frac{\bar{u}}{B}(T - B),$$

$$u^*(t) = \bar{u},$$

$$c^*(t) = \frac{\bar{u}}{B} t + y^*(T - B) - \frac{\bar{u}}{B}(T - B) - \bar{u}.$$

В то же время $c^*(T - B) = c_0 e^{r(T-B)}$.

Итак, общая траектория имеет вид, представленный на рис. 5.5.

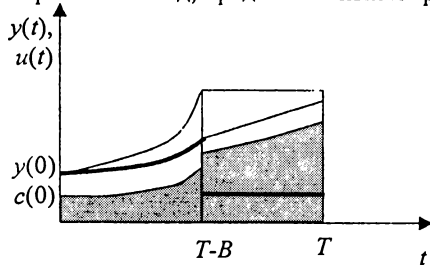


Рис. 5.5. Траектория НД с минимальным темпом роста потребления и минимальным уровнем накопления

Замечание. Если накопление на втором участке задается экзогенно, то в момент $T - B$ возможно скачкообразное изменение фонда потребления. Но уровень накопления может быть подобран так, чтобы скачка не происходило.

Рассмотренные выше модели позволяют ликвидировать недостатки первой (простейшей) модели и обеспечить необходимый рост потребления и накопления.

Замечание. При применении сглаживания общий фонд потребления за

весь рассматриваемый период может уменьшиться, поскольку ненулевое потребление на первом этапе ограничивает рост НД.

5.3. Оптимизация нормы производственного накопления

Оптимизация нормы производственного накопления – еще один подход к решению задачи максимизации общего фонда потребления. При исследовании модели норма производственного накопления принимается постоянной на планируемом периоде. В этом случае динамика НД описывается моделью Харрода-Домара:

$$y(t) = y_0 e^{\frac{\alpha_0}{B} t}, \quad (5.14)$$

где α_0 – начальная (постоянная) норма накопления.

Критерий оптимальности принимает вид:

$$\int_0^T c(t) dt = \int_0^T (1 - \alpha_0) y_0 e^{\frac{\alpha_0}{B} t} dt = y_0 \left(\frac{1 - \alpha_0}{\alpha_0} \right) B \left(e^{\frac{\alpha_0}{B} T} - 1 \right) \rightarrow \max. \quad (5.15)$$

Задача сводится к максимизации функционала полезности (5.15) по α_0 . Определение оптимальной нормы α^* означает и определение также постоянного темпа прироста ρ^* .

Результат решения задачи максимизации α_0 является функцией от длины планового периода T . Следовательно, функционал полезности также является функцией от T . Оптимальная норма накопления обладает следующими свойствами:

1. При $T \leq 2B$ оптимальная норма накопления $\alpha^*(t) = 0$. Критическое значение длины планового периода изменилось с B на $2B$ по сравнению со случаем оптимизации нормы потребления. НД в этом случае не растет и остается на первоначальном уровне. Следовательно, при малой длительности планового периода (меньше $2B$) оптимизация нормы накопления не имеет смысла.

2. При $T > 2B$ оптимальное значение $\alpha^*(T)$ находится в пределах

$$1 - \frac{2B}{T} \leq \alpha^*(T) \leq 1 - \frac{B}{T}.$$

Следовательно, темп роста НД ρ^* лежит в диапазоне:

$$\frac{1}{B} - \frac{2}{T} \leq \rho^*(T) \leq \frac{1}{B} - \frac{1}{T}.$$

Кроме того, справедливо следующее предельное соотношение:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \alpha^*(T) = 1.$$

Оптимальный темп прироста НД при постоянной норме накопления также является возрастающей функцией от продолжительности планового периода:

$$\rho^*(T) = \frac{\alpha^*(T)}{B},$$

следовательно, и для оптимального темпа прироста имеет место предельное соотношение

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \rho^*(T) = \frac{1}{B}.$$

Выявленные зависимости показаны на рис. 5.6.

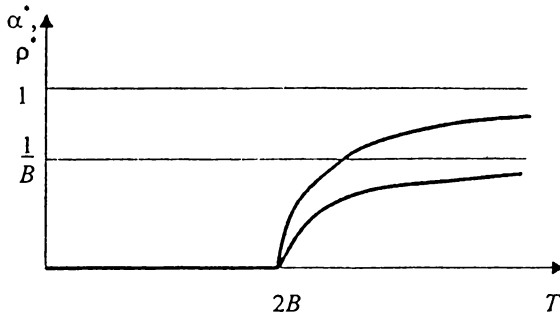


Рис. 5.6. Функциональная зависимость оптимальной нормы накопления и темпа прироста НД от длины планового периода T

Недостатком этой модели является сильная зависимость от длины планового периода T . Этот недостаток можно частично устранить, рассматривая функционал дисконтирующего потребления. В таком случае длительность периода эффективного накопления увеличивается.

В связи с оптимизацией нормы накопления возникает задача о выходе на постоянную или оптимальную норму накопления.

Пусть экономика функционирует с нормой накопления α_0 , и необходимо перейти к норме накопления α_1 и в дальнейшем поддерживать эту норму постоянной. При этом выбрана траектория потребления $c(t) = c_0 e^{rt}$. Считаем, что $r < r_0 = (\alpha_0/B)$ и система может выдержать такой рост потребления. К решению этой задачи можно подходить с двух разных позиций: нахождения времени выхода на заданную норму накопления и нахождения такого темпа роста, который позволит через заданное время выйти на оптимальную норму накопления.

При экзогенно заданном темпе роста r задача состоит в определении времени выхода системы на заданную (также экзогенно) норму накопления α_1 . Далее эта норма накопления поддерживается на заданном уровне (рис. 5.7).

Задача сводится к решению следующего уравнения относительно переменной t_1

$$1 - \alpha_1 = \frac{c_0 e^{rt_1}}{y_0 \left(1 - \frac{\alpha_0}{1 - Br} \right) e^{\frac{1}{B} t_1} + \frac{c_0}{1 - Br} e^{rt_1}}.$$

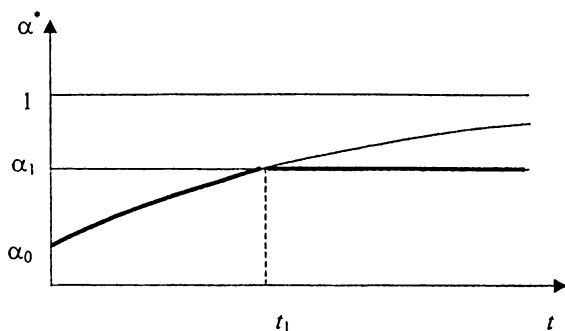


Рис. 5.7. Нахождение времени выхода на заданную норму накопления. Выделенная горизонтальная линия соответствует поддерживаемому в дальнейшем значению.

В частном случае в качестве α_1 можно использовать α^* , то есть оптимальную норму накопления для данного горизонта планирования. При этом необходимо задать период, для которого вычисляется α^* .

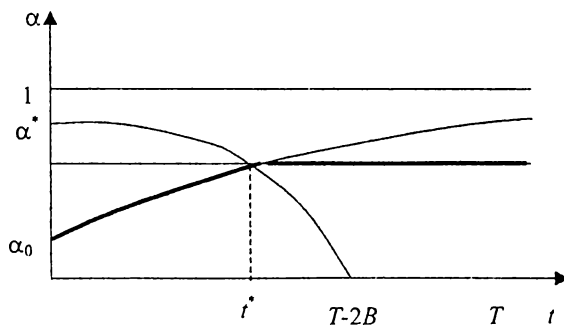


Рис. 5.8. Выход на оптимальную норму накопления: восходящая линия – рост нормы накопления при заданном r ; нисходящая линия – оптимальная норма накопления для оставшегося периода

Однако по мере продвижения от α_0 к α^* будет проходить время, и для оставшегося периода α^* будет уже другим (рис. 5.8). Окончательная траектория нормы производственного накопления имеет следующий вид:

при $0 \leq t \leq t^*$ – рост нормы накопления,
в дальнейшем поддержание ее на уровне $\alpha^*(t^*)$.

Вопросы для самопроверки

1. Чему равна норма накопления на первом этапе, если в модели оптимизации фонда потребления задана траектория потребления $C(t)=0$:
 - 1.1. 0;
 - 1.2. 1;
 - 1.3. 0,5?
2. При применении сглаживания оптимальной траектории потребления общий объем потребления за весь рассматриваемый период:
 - 2.1. остается неизменным;
 - 2.2. увеличивается;
 - 2.3. уменьшается?
3. Какой принцип применяется при решении задач оптимизации фонда потребления:
 - 3.1. принцип оптимальности Беллмана;
 - 3.2. принцип Самуэльсона;
 - 3.3. принцип максимума Понтрягина?
4. Как происходит изменение управления в модели с релейным переключением:
 - 4.1. непрерывно;
 - 4.2. в дискретные моменты времени;
 - 4.3. не происходит?
5. Какие из недостатков призвано устранить сглаживание оптимальной траектории:
 - 1) нулевой уровень потребления на начальном этапе;
 - 2) отсутствие ресурсов в конце планового периода;
 - 3) неравномерный рост потребления на различных этапах –
 - 5.1. 1 и 2;
 - 5.2. 1 и 3;
 - 5.3. 2 и 3?
6. В модели Харрода-Домара норма производственного накопления
 - 6.1. равна единице;
 - 6.2. постоянна в течение планового периода;
 - 6.3. изменяется с течением времени?

Глава 6. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРНЫЕ МОДЕЛИ

Нет ничего более практичного,
чем хорошая теория

Научный фольклор

В этой главе рассматриваются теоретические модели, позволяющие исследовать технологические возможности экономической системы с точки зрения обеспечения темпа роста (прироста) в разрезе отраслей. Они являются развитием статической модели Леонтьева и ее модификаций. В моделях данного класса экономика рассматривается как отраслевая (многосекторная) структура. Несмотря на очевидно теоретический характер моделей, они, во-первых, являются методологической базой построения прикладных динамических моделей, а во-вторых, позволяют выявить общие закономерности экономической динамики

В этой главе будут рассмотрены три модели:

динамическая модель Леонтьева;

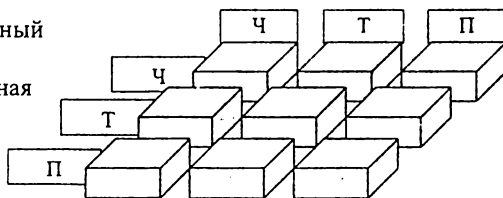
модель Неймана;

динамическая модель Канторовича.

Математической основой решения моделей данного класса является теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.

Место структурных моделей аналогично положению модели межотраслевого баланса:

общегосударственный
уровень
воспроизводственная
страта



6.1. Динамическая модель Леонтьева

Динамическая модель Леонтьева является детализированной моделью роста валового общественного продукта и национального дохода.

В основе модели лежит предположение о взаимосвязи между накоплением и приростом ВОП. Эта взаимосвязь реализуется с помощью матрицы капиталоемкости приростов производства. Кроме того, предполагается мгновенность превращения капиталовложений в прирост основных фондов и мгновенность отдачи этих фондов в объемы производства (что, вообще говоря, неверно). Время предполагается непрерывным, что и определяет применение дифференциальных уравнений.

Основное соотношение модели имеет вид

$$\dot{X}(t) = AX(t) + B \frac{dX}{dt} + C(t), \quad (6.1)$$

где $X(t)$ – вектор объемов валового выпуска продукции по отраслям в момент времени t ;

$\frac{dX}{dt}$ – вектор абсолютных приростов за малую единицу времени;

A – матрица коэффициентов прямых затрат, включая затраты на возмещение выбытия основных фондов;

$AX(t)$ – производственное потребление, обеспечивающее простое воспроизводство;

B – матрица коэффициентов капиталоемкости приростов производства (b_{ij} есть затраты производственного накопления i -го вида продукции на единицу прироста j -го вида продукции);

$C(t)$ – вектор-столбец, характеризующий потребление по отраслям.

Уравнение модели (6.1) записано в векторно-матричной форме относительно ВОП.

Относительно участвующих в уравнении (6.1) величин предполагается выполнение следующих условий.

1. Матрица A продуктивна и неразложима. Следовательно (см. теоремы п. 3.3.), матрица коэффициентов полных затрат строго положительна: $(E - A)^{-1} > 0$, $\det(B) \neq 0$. Матрицы A и B постоянны во времени.

2. Капиталовложения (инвестиции) выступают единственным источником роста производства. То есть ни в одной отрасли нет резервных производственных мощностей. Содержательно интерпретируемыми в рамках данной модели могут быть только траектории, для которых $\frac{dX}{dt} \geq 0$. Такие состояния системы будем называть *допустимыми*. А траектории, не выводящие систему из области допустимых состояний, будем также называть *допустимыми*.

Используя взаимосвязь между ВОП и НД

$$X(t) = (E - A)^{-1} Y(t),$$

где вектор $Y(t)$ характеризует отраслевую структуру НД, получим уравнение модели Леонтьева относительно НД:

$$Y(t) = B(E - A)^{-1} \frac{dY}{dt} + C(t). \quad (6.2)$$

Обозначим $B(E - A)^{-1} = \tilde{B}$. Коэффициент этой матрицы – $\tilde{b}_{ij}$ – характеризует величину производственного накопления продукции i -го вида на единицу прироста j -го элемента НД, а сама она называется матрицей коэффициентов *полной приростной капиталоемкости*.

Для выяснения возможностей системы исследуем модель (6.2) при различных траекториях потребления.

Определим технологические возможности системы, которые определя-

ются параметрами A и B . Для этого положим $C(t) = 0$. В этом случае (6.2) примет вид

$$Y(t) = B(E - A)^{-1} \frac{dY}{dt}. \quad (6.3)$$

Выражение (6.3) есть система линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами первого порядка. Общее решение этой системы согласно теории дифференциальных уравнений имеет вид

$$Y(t) = \sum_i d_i K_i e^{s_i t}, \quad (6.4)$$

где s_i – собственные числа матрицы полной приростной капиталоемкости;
 K_i – соответствующие им собственные вектора;
 d_i – коэффициенты, которые определяются из начального условия

$$Y(0) = \sum_i d_i K_i.$$

Траектория, выходящая из $Y(0)$, представляет собой комбинацию экспонент с различными темпами прироста ($1/s_i$). Следовательно, в общем случае развитие по траектории $Y(t) = Y_0 e^{kt}$, то есть с единым для всех отраслей темпом, невозможно, а происходит с постоянными структурными изменениями. Однако существует определенное сходство между решением макроэкономической модели (агрегированной до 1 показателя, такой, как использовалась в предыдущей главе) и решением структурной модели. Это сходство обусловлено наличием у матрицы коэффициентов полной приростной капиталоемкости собственного числа *Фробениуса-Перрона*.

Вследствие допущений модели, матрица $\tilde{B} = B(E - A)^{-1} > 0$, следовательно, у нее существует корень Фробениуса – Перрона, s . Величина этого корня заключена в пределах:

$$\min_j \sum_i \tilde{b}_{ij} \leq s \leq \max_j \sum_i \tilde{b}_{ij}.$$

Величина $\tilde{b}_j = \sum_i \tilde{b}_{ij}$ ($j = 1, \dots, n$) называется *полной приростной капиталоемкостью j-й отрасли*.

Возможны два случая поведения траектории (6.4).

В первом случае в траектории (6.4) доминирует (преобладает) экспонента с показателем степени, который связан с корнем Фробениуса-Перрона. В этом случае со временем темп прироста каждого элемента НД начинает приближаться к темпу, определяемому данной экспонентой, то есть $1/s$. Таким образом, на бесконечном периоде времени каждый из элементов НД начинает развиваться с темпом $1/s$. Таким образом, *технологический темп прироста* имеет вид: $\dot{\rho} = \frac{1}{s}$. Структура НД стремится в том случае к собственному вектору, соответствующему K_s (рис. 6.1).

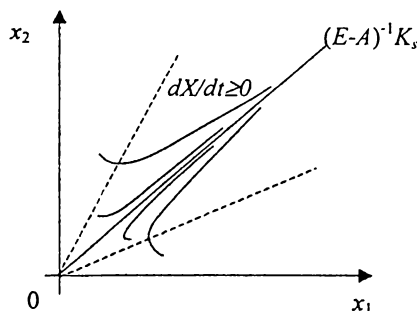


Рис. 6.1. Допустимые траектории развития

Во втором случае в (6.4) доминирует экспонента с показателем степени, отличным от $1/s$. Это происходит, когда существует положительное собственное число, отличное от s . Обозначим доминирующий показатель $1/s_0$. В этом случае собственный вектор, соответствующий s_0 , обязательно имеет отрицательные компоненты и, так как

$$s_0 K_{s_0} = \tilde{B} K_{s_0} = B(E-A)^{-1} K_{s_0},$$

столбец $(E-A)^{-1} K_{s_0}$ также содержит отрицательные компоненты. Учитывая (6.4), запишем $X(t)$ следующим образом:

$$X(t) = \sum_i d_i (E-A)^{-1} K_i e^{\frac{1}{s_i} t}.$$

В последнем равенстве в правой части присутствуют отрицательные компоненты, причем с увеличением t они увеличиваются по абсолютной величине. Следовательно, с течением времени они появятся и в левой части равенства. Таким образом, траектория выходит в недопустимую зону (рис. 6.2).

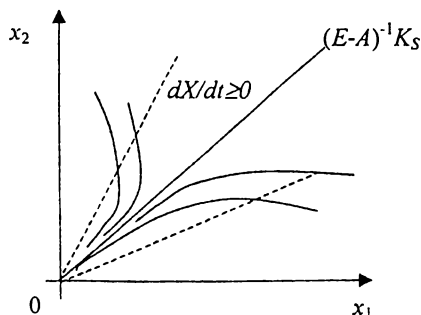


Рис. 6.2. Недопустимые траектории развития

Замечание. Траектория системы в первом случае является допустимой, хотя начальное состояние системы может быть и недопустимым. И, наоборот, во втором случае, хотя начальное состояние системы является допустимым, траектория развития может выходить за границы допустимой области.

Пример. Рассмотрим условный пример для модели Леонтьева. Пусть экономика состоит из двух отраслей, известны матрицы прямых материальных затрат, приростной капиталоемкости и начальное состояние системы:

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,9 \\ 0,5 & 0,4 \end{pmatrix},$$

$$X(0) = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix}, \quad Y(0) = \begin{pmatrix} 25 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Определим траекторию развития системы. Для этого вычислим матрицу полной приростной капиталоемкости:

$$(E - A) = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,2 \\ -0,2 & 0,7 \end{pmatrix},$$

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,19 & 0,34 \\ 0,34 & 1,53 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{B} = B(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,25 & 1,64 \\ 0,73 & 0,78 \end{pmatrix}.$$

Находим собственные числа этой матрицы, решая характеристическое уравнение

$$|E - \lambda A| = \lambda^2 - 2,03\lambda - 0,22 = 0, \\ \lambda_1 = 2,14; \lambda_2 = -0,10.$$

Следовательно, показатели экспонент в решении равны

$$\rho = \frac{1}{\lambda_1} = 0,47, \quad \frac{1}{\lambda_2} = -9,69.$$

Соответствующие собственные вектора с точность до множителя равны

$$K_{s1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,54 \end{pmatrix}, \quad K_{s2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,83 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что траектория системы является допустимой, поскольку единственное слагаемое с положительным показателем степени состоит из положительных компонент.

Определим, исходя из начальных условий, коэффициенты d_i :

$$d_1 K_1 + d_2 K_2 = Y(0) \Leftrightarrow \begin{cases} d_1 + d_2 = 25 \\ 0,54d_1 - 0,83d_2 = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 = 26,09 \\ d_2 = 1,09 \end{cases}$$

Окончательно траектория развития системы имеет вид

$$Y(t) = 26,09 * \begin{pmatrix} 1 \\ 0,54 \end{pmatrix} e^{0,475t} - 1,09 * \begin{pmatrix} 1 \\ -0,83 \end{pmatrix} e^{-9,69t}.$$

Графически изменение структуры ВОП можно представить так, как изображено на рис. 6.1. Наклонная выделенная линия соответствует структуре ВОП при бесконечном r : $(E - A)^{-1} K_{\lambda_1}$.

Замечание. Изменение структурных параметров может привести к качественно другому развитию системы, хотя параметры макромоделей сохраняются.

Исследование модели Леонтьева позволяет сделать следующий вывод: в отличие от макроэкономической модели, которая при нулевом потреблении всегда имеет допустимую траекторию, траектория структурной модели даже при нулевом потреблении может быть недопустимой вследствие определенных структурных параметров.

Пусть теперь экзогенно задана траектория потребления $C(t) = C_0 e^{rt}$. В этом случае решение системы (6.2) представляет собой сумму общего решения однородной системы (6.4) и частного решения неоднородной и имеет вид:

$$Y(t) = \sum_I d_I K_I e^{\frac{1}{s} t} + (E - rB(E - A)^{-1})^{-1} C_0 e^{rt}, \quad (6.5)$$

где коэффициенты d_I определяются исходя из начального условия:

$$Y(0) = \sum_I d_I K_I + (E - rB(E - A)^{-1})^{-1} C_0.$$

Матрица $(E - rB(E - A)^{-1})^{-1}$ представляет собой структурный аналог коэффициента скалярной модели $\frac{1}{1 - Br} = \frac{1}{1 - \left(\frac{br}{1 - a} \right)}$.

Исследуем, возможен ли в модели при заданной траектории потребления рост без ограничения, другими словами, существуют ли ограничения на темп r . (В макроэкономической модели ограничение было связано с технологическим темпом и начальной нормой накопления.)

Пусть в первом слагаемом доминирует темп, соответствующий корню Фробениуса-Перрона: $\hat{p} = \frac{1}{s}$. Пусть $r > 1/s$. Тогда с течением времени второе слагаемое (6.5) начинает доминировать, так как первое тяготеет к темпу $1/s$. Следовательно, $Y(t)$ все в большей степени начинает определяться вектором $(E - rB(E - A)^{-1})^{-1} C_0 e^{rt}$.

Обозначим $B^* = rB(E - A)^{-1}$.

Обобщая условие продуктивности, обеспечиваемое теоремой Фробениуса – Перрона, для матрицы B^* получаем

$$r < \frac{1}{s}. \quad (6.6)$$

В рассматриваемом случае B^* непродуктивна. Так как $C_0 > 0$, то получаем,

что вектор $(E - B^*)^{-1} C_0$ содержит отрицательные компоненты. Это значит, что рано или поздно в $Y(t)$ появятся отрицательные компоненты и траектория выйдет в недопустимую с содержательной точки зрения область.

Таким образом, при наличии экзогенно заданной траектории потребления вида $C_0 e^{rt}$ в структурной модели существование допустимой траектории определяется соотношением (6.6).

Если доминирует экспонента с темпом, не соответствующим темпу Фробениуса-Перрона, то по результатам анализа при $C(t)=0$ траектория все равно выйдет в недопустимую с содержательной точки зрения область.

Выясним, возможен ли в структурной модели такой рост, при котором все составляющие элементы НД растут с одинаковым темпом аналогично тому, как это происходит в макромоделли Харрода-Домара (то есть в модели развития с постоянной нормой накопления и постоянным темпом прироста).

Пусть потребление задано в виде $C(t)=C_0 e^{rt}$. В модели (6.3) первое слагаемое представляет собой сумму экспонент, растущих с разными темпами, поэтому единый темп роста возможен только в случае, если первое слагаемое тождественно равно нулю. Это возможно только, если все $d_i=0$. Запишем (6.5) в таком виде:

$$\sum_i d_i K_i = Y(0) - (E - r\tilde{B})^{-1} C_0 = 0.$$

Отсюда получаем систему уравнений относительно r :

$$(E - r\tilde{B})Y(0) = C_0. \quad (6.7)$$

В общем случае эта система переопределенная. Таким образом, если известно начальное заданное состояние экономики Y_0 , C_0 и заданные технологические параметры, то не всегда возможен рост с постоянным темпом всех отраслей. Однако можно задать r_0 и из системы (6.7) определить C_0 так, чтобы развитие шло с заданным темпом.

6.2. Модификации динамической модели Леонтьева

Модификация модели обычно проводится в направлении снятия исходных допущений и приближения модели к реальному поведению системы.

Модификация 1. Эта модификация связана с отменой ограничения необратимости капиталовложений. Ограничение было задано в допущениях модели в виде

$\frac{dX}{dt} \geq 0$. Для снятия наложенного ограничения необходимо связать инвестиции только с положительными приростами. Введем следующее обозначение:

$$\left[\frac{dX}{dt} \right]_+ = \begin{cases} \frac{dX}{dt}, & \frac{dX}{dt} \geq 0 \\ 0, & \frac{dX}{dt} < 0 \end{cases}.$$

С его учетом модель преобразуется следующим образом

$$X(t) = AX(t) + B \left[\frac{dX}{dt} \right]_+ + C(t). \quad (6.8)$$

В таком виде модель может не иметь допустимых траекторий в ряде случаев, в частности если начальное состояние недопустимо (находится за пределами допустимого конуса при $C(0)=0$). Тогда имеем: $X(0)=AX(0)+0+0=0$.

Чтобы избежать этого, модель должна быть модифицирована

$$X(t) \geq AX(t) + B \left[\frac{dX}{dt} \right]_+ + C(t). \quad (6.9)$$

Исследуем полученную модель. Для выяснения максимальных возможностей системы положим $C(t)=0$. Результаты анализа качественно отличаются от результатов для исходной модели, полученных при том же предположении относительно потребления. Это отличие заключается в том, что в модифицированной модели возможен рост всех отраслей с одинаковым темпом $X(t) = X(0)e^{\rho t}$, где ρ находится из условия:

$$\rho = \min_i \frac{x_i(0) - \sum_j a_{ij}x_j(0)}{\sum_j b_{ij}x_j(0)}.$$

Модификация 2. Учет производственных мощностей. *Производственные мощности* (ПМ) вводятся в модель с тем, чтобы сделать возможным рост производства без инвестиций. Поскольку в экономике всегда существует резерв производственных мощностей, то инвестиции следует связать с приростом ПМ.

Обозначим M_j ПМ j -й отрасли, под которыми будем понимать максимально возможный объем выпуска j -го продукта на имеющихся фондах в момент времени t . Пусть матрица D характеризует объем инвестиций на единицу прироста мощности в каждой отрасли. Тогда модель с учетом прироста производственных мощностей будет иметь вид

$$X(t) \geq AX(t) + D \frac{dM}{dt} + C(t), \quad (6.10)$$

$$X(t) \leq M(t).$$

Модификация 3. Введение лагов между приростом мощностей и приростом валового продукта диктует необходимость перехода к дискретной постановке задачи.

В достаточно общем виде уравнения этой модели выглядят так:

$$\begin{aligned}
 AX_t + D\eta_t + L_t C &\leq X_t, \\
 X_t &\leq \xi_{t-1}, \\
 \xi_t &\leq \xi_{t-1} + \eta_t, \\
 \langle l, X_t \rangle &\leq L_t,
 \end{aligned}
 \tag{6.11}$$

где D имеет тот же смысл, что и в предыдущей модели (6.10);

η_t - вектор, характеризующий прирост мощностей;

ξ_t - вектор, характеризующий ПМ;

l - вектор, характеризующий трудозатраты на выпуск единицы продукции соответствующей отрасли;

C - вектор потребления в расчете на единицу труда;

L_t - суммарное количество труда.

Левую часть первого уравнения можно рассматривать как 3 блока: блок производства, блок производственных мощностей, блок труда, оно определяет условие развития системы.

Второе уравнение говорит о том, что выпуск в следующий момент времени не может превышать максимальные возможности системы, достигнутые в предыдущий момент.

Третье уравнение модели (6.11) называют *уравнением перехода* или *уравнением связи*, оно отражает прирост ПМ. Связь между двумя последовательными моментами времени может быть выражена через мощности, капвложения, фонды.

Наконец четвертое уравнение отражает взаимосвязь необходимого уровня валового продукта и трудозатрат.

Модификация 4. Следующая постановка модели Леонтьева является также дискретной и отражает наличие запасов. Рассматривать экономику с запасами весьма характерно для зарубежных школ. При этом само слово "запасы" понимается очень широко.

Предположим, что матрица производственных затрат A продуктивна и неразложима. Чтобы произвести в периоде t валовый объем продукции $X(t)$, необходимо $AX(t)$ производственных затрат. Таким образом, вектор $AX(t)$ характеризует производственное потребление.

Пусть $S(t)$ – вектор запасов, и предположим, что запасы связаны с производственным потреблением через коэффициенты диагональной матрицы K :

$$K = \begin{pmatrix} k_1 & .. & 0 \\ .. & k_i & .. \\ 0 & .. & k_n \end{pmatrix}.$$

Чтобы иметь возможность потребить в производстве $AX(t)$, необходимо иметь $KAX(t)$ запасов, то есть

$$KAX(t) \leq S(t). \tag{6.12}$$

Допустим, что хотя бы по одной компоненте достигается строгое равенство.

Из модели межотраслевого баланса получаем

$$X(t) = (E - A)^{-1} Y(t).$$

Подставляя это выражение в (6.12), получаем новую модель:

$$KA(E - A)^{-1} Y(t) \leq S(t). \quad (6.13)$$

Следовательно, для роста НД необходимо возрастание запасов.

Представим $Y(t)$ в виде суммы двух компонент – потребления и изменения запасов:

$$Y(t) = C(t) + \Delta S(t). \quad (6.14)$$

Предположим также, что $C(t)$ задано через коэффициенты склонности к потреблению:

$$C(t) = HY(t),$$

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & \dots & 0 \\ \dots & h_i & \dots \\ 0 & \dots & h_n \end{pmatrix}.$$

С учетом этого уравнение (6.14) принимает вид

$$Y(t) = (E - H)^{-1} \Delta S(t). \quad (6.15)$$

Подставим полученное выражение (6.15) в (6.13) и получим

$$KA(E - A)^{-1} (E - H)^{-1} \Delta S(t) \leq S(t). \quad (6.16)$$

Введем обозначение

$$K^* = KA(E - A)^{-1} (E - H)^{-1}$$

и зададим уравнение перехода

$$S(t+1) = S(t) + \Delta S(t). \quad (6.17)$$

Тогда сама модель запишется в следующем виде:

$$S(t+1) = S(t) + \Delta S(t),$$

$$K^* \Delta S(t) \leq S(t). \quad (6.18)$$

Определим темп прироста запасов¹, как $\rho_i = \frac{\Delta S_i(t)}{S_i(t)}$. Исследуем, существует ли единый для всех отраслей и постоянный во времени темп прироста запасов ρ . Из второго уравнения модели (6.18) получаем

$$K^* \Delta S(t) \leq \frac{1}{\rho} \Delta S(t), \quad (6.19)$$

где K^* положительна и неразложима, поскольку этими свойствами обладают ее составляющие.

Матрица K^* имеет корень Фробениуса-Перрона. Поэтому если $s = \frac{1}{\rho}$ является этим корнем, а вектор прироста запасов – собственный вектор, соот-

¹ В зарубежной литературе эта величина часто называется темпом роста.

ветствующий корню Фробениуса-Перрона, то (6.19) обращается в строгое равенство.

У матрицы K^* есть и другие собственные числа, обращающие (6.19) в равенство, но соответствующие им собственные вектора имеют компоненты разных знаков. Таким образом, только корень Фробениуса-Перрона обеспечивает развитие с постоянным, равным для всех отраслей темпом прироста запасов.

Из соотношений (6.18)-(6.19) можно получить следующее:

$$S(t) = (1 + \rho)^t S(0). \quad (6.20)$$

Это означает, что для роста с постоянным темпом всех запасов необходимо, чтобы вектор начальных запасов в системе был собственным вектором, соответствующим корню Фробениуса-Перрона s .

6.3. Модель Неймана

Автором данной модели является Джон фон Нейман. Сама модель считается основополагающей в теории *магистральных моделей* (*магистральная теория*). Было сделано много обобщений данной модели. Одно из них сделал Гейл, поэтому в литературе модель часто называют *моделью Неймана-Гейла*. Именно эти модели называются моделями расширяющейся экономики. Модель была опубликована в середине 1930 гг. в математическом журнале, была посвящена рассмотрению вопросов о накоплении капитала в многосекторной экономике, но не привлекла к себе внимания экономистов.

Джон фон Нейман (1903-1957) – американский математик – родился в Будапеште. Основные работы посвящены функциональному анализу, математической логике, теории групп. В последние годы жизни занимался вопросами теории игр, теории автоматов. (*Теория игр и экономическое поведение*. – М., 1970 – *совм. с О. Моргенштерном*).

Основой модели является понятие технологии. Пусть $X(t)$ – n -мерный вектор затрат в момент времени t , $Y(t)$ – вектор выпуска в момент времени $t+1$. Пара (X, Y) образуют *технологический процесс (технология)*, если, используя технологию периода t , можно получить из затрачиваемых в момент времени t ресурсов X вектор выпуска Y в момент времени $t+1$. Все технологические процессы $\{(X, Y)\}$ образуют производственно-технологическое множество. Если $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$ – пара технологий, то говорят, что (X_1, Y_1) *более эффективна*, чем (X_2, Y_2) , если $X_1 \leq X_2$ и $Y_1 \geq Y_2$. Технология (X^*, Y^*) является *эффективной (оптимальной по Парето)*, если не существует более эффективной технологии.

В отличие от динамической модели Леонтьева (в этой модели время считается дискретным). Модель задается парой матриц: A и B . С помощью этих матриц описывается производственно-технологическое множество модели (ПТММ) Неймана. Оно задается с помощью конечного набора производственных процессов. Каждый производственный процесс задается парой векторов (a_j, b_j) , где a_j – вектор затрат продуктов; b_j – вектор выпуска продукции j -м тех-

нологическим процессом при единичной интенсивности его функционирования.

Предположим, что m процессов производят n продуктов. Пусть заданы некоторые технологические процессы, назовем их *базисными*. A – матрица затрат, в которой столбцы являются векторами a_j базисных процессов, состоящими из элементов a_{ij} – затрат i -го продукта в j -м производственном способе при единичной интенсивности функционирования. Соответственно столбцы матрицы выпуска B – вектора b_j базисных производственных процессов, следовательно, b_{ij} – выпуск i -го продукта j -м производственным процессом при единичной интенсивности его функционирования. Матрицы A и B постоянны во времени и отражают уровень производственной технологии в системе.

На матрицы затрат и выпуска накладываются следующие естественные ограничения:

$$1. a_{ij} \geq 0, b_{ij} \geq 0, \quad i=\overline{1, n}, j=\overline{1, m}.$$

2. Каждый производственный способ использует хотя бы один вид затрат

$$\sum_i a_{ij} > 0, \quad j=\overline{1, m}.$$

3. Каждый продукт выпускается хотя бы одним способом

$$\sum_j b_{ij} > 0, \quad i=\overline{1, n}.$$

Если в строке матрицы B более одного элемента, отличных от 0, то продукт может быть произведен более чем одним способом и, наоборот, производственный способ может характеризоваться выпуском нескольких продуктов. В этом заключается существенное отличие модели Неймана от модели Леонтьева.

Содержательность модели и ее разрешимость обеспечиваются следующими предположениями.

1. В данной модели рассматривается только производственное потребление. Коэффициенты матрицы $A=(a_{ij})$ отличаются от коэффициентов модели Леонтьева тем, что в них включено не только потребление i -го продукта j -м производственным способом, но и потребление i -го продукта, необходимое для функционирования труда в этом производственном процессе. Таким образом, в модель Неймана включаются затраты на воспроизводство труда.

2. Все доходы капиталистов инвестируются.

3. Оплата труда поддерживается на уровне прожиточного минимума, который определяется из производственной необходимости.

4. В модели Неймана все ресурсы считаются воспроизводимыми.

Для описания модели введем следующие обозначения:

$X(t)$ – вектор интенсивностей базисных процессов на интервале времени $[t-1, t]$;

$AX(t)$ – вектор затрат в t -й период;

$BX(t)$ – вектор выпуска в t -й период;

p – постоянный во времени вектор цен на продукцию;

$v(t) = p +$ норма ренты за i -ый продукт в периоде t .

Основные соотношения модели получаются в результате следующих рассуждений.

Пусть величины $x_j(t)$, $v_i(t)$ уже определены. Тогда величина запаса i -го продукта в конце периода t , готового к производственному потреблению в период $t+1$, составит

$$b_i(t) = \sum_{j=1}^n b_{ij} x_j(t), \quad i = \overline{1, m}.$$

Поэтому получаем, что интенсивности $x_j(t)$ в период $t+1$ должны удовлетворять ограничениям

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j(t+1) \leq b_i(t), & i = \overline{1, m}, \\ x_j(t+1) \geq 0, & j = \overline{1, n}, \end{cases}$$

или в матричной форме:

$$BX(t) \geq AX(t+1). \quad (6.21)$$

Полная стоимость выпуска j -го процесса при единичной интенсивности его функционирования равна

$$c_j = \sum_{i=1}^m b_{ij} p_i, \quad j = \overline{1, n}.$$

Оценки $v_i(t)$ всех потребленных продуктов в денежном выражении в $(t+1)$ -ом периоде должны удовлетворять ограничениям

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m a_{ij} v_i(t+1) \geq c_j, & j = \overline{1, n}, \\ v_i(t+1) \geq 0, & i = \overline{1, m}, \end{cases}$$

или

$$v(t+1)A \geq pB, \quad (6.22)$$

где $v(t+1)$, p – вектор-строки.

Основной предмет исследования Неймана в данной модели экономики – возможность существования ситуации динамического равновесия в системе. В связи с этим среди траекторий развития системы, описываемой соотношениями (6.21)–(6.22), можно выделить класс *стационарных траекторий*, т.е. таких, на которых происходит рост с постоянным темпом, и, следовательно, траектория может быть представлена в виде

$$X(t) = \alpha X(t-1) = \alpha^t X(0), \quad (6.23)$$

а

$$v(t) = \beta p. \quad (6.24)$$

В рамках этих соотношений и на основании условий (6.21)–(6.22) рассматриваются две взаимно двойственные задачи оптимизации темпов роста:

$$\begin{cases} \alpha \rightarrow \max, \\ \alpha AX \leq BX, \\ X \geq 0, \\ X \neq 0; \end{cases} \quad (6.25)$$

где α – темп роста системы;

$$\begin{cases} \beta \rightarrow \min, \\ \beta pA \geq pB, \\ p \geq 0, \\ p \neq 0. \end{cases} \quad (6.26)$$

В задаче (6.25) требуется найти максимально возможный *технологический темп системы*, постоянный во времени (α^*), и соответствующий ему вектор интенсивности. Технологический темп системы, описываемой моделью Неймана, определяется как

$$\alpha^* = \max_x \min_i \frac{\sum_j b_{ij} x_j}{\sum_j a_{ij} x_j}.$$

Те траектории, на которых все компоненты вектора X растут с темпом, большим или равным заданному, называются *равновесными траекториями*. Таким образом, стационарные траектории являются равновесными, а задача (5.22) состоит в поиске максимально возможного темпа роста для равновесной траектории.

В задаче (5.23) рассматриваются коэффициенты рентабельности способов вида

$$\beta_j = \frac{\sum_i p_i b_{ij}}{\sum_i p_i a_{ij}}, \quad j = \overline{1, m},$$

которые характеризует эффективность j -го базисного процесса при ценах p . β_j также показывает, во сколько раз могут быть увеличены затраты, чтобы процесс остался неубыточным. Решение задачи (5.23) определяется соотношением

$$\beta^* = \min_p \max_j \beta_j,$$

где β^* носит название *экономического темпа системы*.

Заметим, что β_j характеризует процентную ставку на капитал или накопление капитала в экономике, определяемое этой процентной ставкой, а темп накопления капитала характеризуется величиной этой ставки. Действительно,

вложение p_i средств в покупку единицы i -го товара приносит доход $v_i(t) \cdot p_i$ в качестве ренты за производство услуг, оказанных этой единицей в периоде t . Следовательно, величина $\frac{v_i(t)}{p_i} - 1$ есть норма процента на капитал, вложенный в i -й

продукт. Условие (6.24) соответствует ситуации, когда норма процента является константой $\beta - 1$ и едина для всех продуктов во все моменты времени.

Особый интерес представляет вопрос о том, возможно ли равновесие в системе и каков будет в ней темп роста при постоянных ценах и постоянной ставке на капитал. Такие модели получили название *моделей с нулевой прибылью*, а условие $\beta pA \geq pB$ называют *условием нулевой прибыли*.

Нейманом было доказано существование решений задач (6.25), (6.26) при достаточно сильных условиях

$$A \geq 0, B \geq 0, A + B > 0,$$

причем темп роста единственный и соблюдается условие $\alpha^* = \beta^*$.

Равновесные траектории с максимальным темпом роста называются *магистралями*.

Если на матрицы A и B наложены менее сильные ограничения, то может существовать несколько равновесных траекторий (с различными темпами роста), среди которых одна является магистралью. Луч, который проходит через равновесный вектор интенсивности, называется *лучом Неймана*.

Состоянием невырожденного равновесия модели Неймана называется тройка (X, p, α) , удовлетворяющая системе неравенств

$$\begin{cases} \alpha pA \geq pB, \\ \alpha AX \leq BX, \\ pAX > 0, \end{cases} \quad (6.27)$$

где $\alpha > 0, X \in R_+^n, p \in R_+^n$.

Последнее неравенство в (6.27) означает, что стоимость затрат больше 0. Вместо него можно использовать условие $pBX > 0$, это означает, что стоимость конечного продукта больше 0.

Единственность темпа роста системы обеспечивается свойством, которое называется *неразложимостью* (*неприводимостью*). Модель Неймана *разложима*, если существует пара подмножеств (S, T) таких, что $S \subset M$ (где M – множество процессов), $T \subset N$ (где N – множество продуктов). При этом если $j \in S, i \in T$, то $a_{ij} = 0, b_{ij} = 0$, то есть процессы из S не производят и не потребляют продукты из множества T . В противном случае модель неразложима. Множества (S, T) представляет собой так называемую изолированную пару.

Утверждение. Если модель неразложима, то она обладает единственным темпом роста. Темпов роста у модели столько, на сколько независимых подсистем распадается система.

В зависимости от найденного темпа роста системы можно разделить на следующие классы:

$\alpha > 1$ соответствует расширенному воспроизводству;

$\alpha = 1$ – простому воспроизводству;

$\alpha < 1$ – суженное воспроизводство.

Если в системе имеет место расширенное воспроизводство, то это означает, что модель *продуктивна*, а именно, существует такой $X > 0$, что $(B - A)X > 0$.

Следующие два результата показывают структурные свойства магистралей¹. Пусть выполняется условия 1-3 для матриц A и B (стр.82), тогда существует равновесное решение системы (6.27), в котором:

1) если выпуск превосходит затраты более чем в α раз, т.е. продукт производится в избытке, то ценность такого продукта равна 0:

$$p_i = 0 \Leftrightarrow \alpha \sum_j a_{ij} x_j < \sum_j b_{ij} x_j;$$

2) если способ неэффективен с учетом коэффициента роста (или процента на капитал), то он не должен использоваться в состоянии равновесия:

$$x_j = 0 \Leftrightarrow \sum_i p_i a_{ij} > \sum_i p_i b_{ij}.$$

Модель Леонтьева может рассматриваться как частный случай модели Неймана. Действительно, если положить в модели Неймана $B = E$ и $n = m$, то получим модель Леонтьева. Производственная структура и технологический темп в модели Неймана находится как решение задачи:

$$\alpha \rightarrow \max,$$

$$\alpha AX \leq X,$$

$$X \geq 0,$$

$$X \neq 0.$$

(6.27)

Решение задачи (6.27) имеет вид

$$AX^* = \frac{1}{\alpha^*} X^*,$$

где $1/\alpha^*$ – корень Фробениуса-Перрона матрицы A , а X^* – соответствующий собственный вектор.

Технологическим темпом является величина, обратная корню Фробениуса-Перрона матрицы A . Вектор X^* характеризует равновесную структуру производства этой модели. Луч, проходящий через X^* , является лучом Неймана. Таким образом, если исходная производственная структура совпадает со структурой вектора X^* , то система может сколь угодно долго развиваться по траектории максимального пропорционального роста с темпом α^* , то есть по магистрали.

Обобщением модели Неймана является *модель Гейла*. В отличие от модели Неймана, производственно-технологическое множество модели Гейла не обязательно задается линейными ограничениями, оно является произвольным выпуклым замкнутым конусом, обладающим дополнительными свойствами.

¹ Эти результаты непосредственно следуют из теории двойственности.

Пусть имеется n продуктов и задано Z - ПТММ Гейла. Каждый элемент этого множества Z имеет вид $z=(x, y)$, то есть состоит из пары векторов размерности n , а размерность множества – $2n$. x -вектор затрат, y -вектор выпуска продуктов. Будем считать, что $x \geq 0, y \geq 0$. На множество Z налагаются три условия:

1. Z - выпуклый замкнутый конус.
2. Если вектор $(0, y) \in Z$, то $y=0$, другими словами, ничего не затратив, нельзя ничего произвести.
3. Каждый вид продукта производится хотя бы одним способом, то есть $\forall i \exists (x, y) \in Z : y_i > 0$.

Последовательность пар n -мерных векторов $z_t=(x_t, y_t)$, $t=1, 2, \dots$ называется *траекторией* модели Гейла с началом в точке y_0 , если $z_t \in Z$ и соблюдается условие, что $x_t \leq y_{t-1}$, т.е. затраты последующего периода не должны превышать выпуска предыдущего.

Модель Неймана является частным случаем модели Гейла. Если модель Гейла задается конусом M и ограничением $A\xi_t \leq B\xi_{t-1}$, то она превращается в модель Неймана. Всякой траектории такой модели Гейла соответствует траектория интенсивностей модели Неймана: $x_{t-1}=A\xi_{t-1}$, $y_t=B\xi_t$.

Состояние равновесия модели Гейла определяется тройкой (α, p, z) , где α – положительный скаляр, $z \in Z$, $p \geq 0$ – вектор цен (считая, что существует отличная от нуля цена), для которой выполнены условия

1. $\alpha x \leq y$;
2. $\alpha(p, x) \geq (p, y)$,

где α – темп роста модели Гейла, а условие 2 называется условием нулевого дохода. Если при этом $(p, y) > 0$, то имеет место *невырожденное* состояние равновесия.

6.4. Принцип Самуэльсона

Основным результатом анализа моделей этого класса является доказательство существования магистральной, которая характеризуется неизменной структурой производства. Однако не всегда возможно развитие системы по магистральной, то есть магистраль не всегда является допустимой траекторией при заданном начальном состоянии. Несмотря на это, нормативное значение магистралей очень велико.

Вопрос о выборе оптимальной траектории развития при заданном начальном и конечном состояниях разрабатывался Самуэльсоном, который и сформулировал основной принцип. В основе этого принципа лежит следующая гипотеза:

эффективные траектории на промежуточных этапах перед достижением конечного состояния имеют тенденцию выходить на луч Неймана, и чем длиннее интервал времени, отведенный для достижения конечного состояния, тем в большей степени эффективная траектория совпадает с этим лучом.

Принцип Самуэльсона: стратегия эффективного долгосрочного экономического роста такова, что система, выйдя из сложившегося начального состояния, должна достигнуть луча максимального сбалансированного роста, далее функционировать в течение как можно большего числа плановых периодов в режиме этого роста, то есть скользнуть по этому лучу или вблизи его, а затем свернуть к заданному конечному состоянию (рис. 6.3).

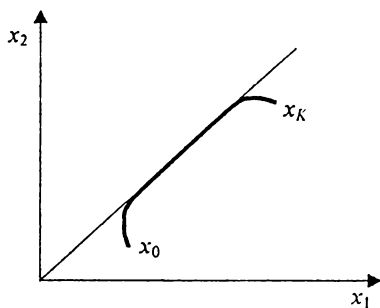


Рис. 6.3. Эффективная траектория системы

Справедливость этого принципа доказывается в теоремах о магистрали. Теоремы о магистралях утверждают, что при достаточной продолжительности расчетного периода оптимальная траектория динамической модели независимо от начального состояния и заданного конечного состояния (или целевой функции) близка в том или ином смысле к магистрали. Модели, для которых справедливы эти теоремы, называются магистральными. Теоремы о магистрали подразделяют на 3 группы:

1. Теоремы о магистрали в слабой форме, которые устанавливают факт близости большинства точек траектории к точкам магистрали.
2. Теоремы о магистрали в сильной форме, в которых доказывается, что точки, далекие от магистрали, могут принадлежать только хвосту или началу эффективной траектории.
3. Теоремы о магистрали в сильнейшей форме, утверждающие, что большинство состояний траектории лежит на магистрали.

Из теорем о магистрали можно сделать следующий вывод: продолжительность стартового и финального участка в траектории не зависит от длительности планового периода, а, следовательно, при увеличении планового периода увеличивается та часть траектории, которая лежит на магистрали или близ нее.

Эффективная траектория при продолжительном плановом периоде зависит главным образом от структурных параметров модели и в меньшей степени – от начального и конечного состояния.

Принцип Самуэльсона позволяет упростить и решить задачу выбора целевой функции, а также задачу выбора конечных условий в динамических зада-

ках перспективного планирования, облегчить расчет и анализ оптимальных траекторий развития экономики, так как на большем участке этих траекторий они близки или совпадают с траекторией максимального роста.

6.5. Динамическая модель Канторовича

Динамическая модель Канторовича также является структурной моделью. Производственно-технологическое множество есть множество производственных способов, включающих выпуск и затраты по нескольким ингредиентам. Эта модель является универсальной, ее можно применять для моделирования объектов различного уровня, начиная с уровня предприятия и заканчивая экономикой в целом. Однако ее универсальность мешает практическому применению этой модели. Поэтому она и относится к классу теоретических. В классе математических моделей она является оптимизационной, а по отношению к фактору времени – дискретной. В качестве такта модели могут быть взяты различные промежутки времени.

Канторович Л.В. (1912-1986) Род. в Санкт-Петербурге. В 1939-1940 гг. положил начало теории линейного программирования. Исследования в области оптимальных экономических моделей обусловили создание теории оптимального планирования и управления.

Модель Канторовича объединяет сферу производства и сферу потребления, т.е. различные виды деятельности по производству продуктов и использование произведенных продуктов. Производственно-технологическое множество модели состоит из конечного числа сквозных динамических производственных способов.

Рассмотрим T временных тактов. Тогда *сквозной динамический производственный способ* является композицией

$$A_{\psi} = \begin{pmatrix} A_{\psi_1} \\ \dots \\ A_{\psi_t} \\ \dots \\ A_{\psi_T} \end{pmatrix}, \quad A_{\psi_t} = \begin{pmatrix} a_{1\psi_t} \\ \dots \\ a_{s\psi_t} \\ \dots \\ a_{n\psi_t} \end{pmatrix}, \quad (6.28)$$

где s – номер ингредиента;

$a_{s\psi_t}$ – количество затрат s -го ингредиента в t -ом временном такте при единичной интенсивности использования способа ψ , или выпуск s -го ингредиента в t -ом периоде при единичной интенсивности использования способа ψ . Затраты при этом имеют знак "–", а выпуск – знак "+";

n – число ингредиентов.

Матрица модели составлена из столбцов, каждый из которых является сквозным динамическим производственным способом. Предполагается, что сквозные способы удовлетворяют условиям аддитивности и автономности.

...*Аддитивность* – возможно совместное использование различных произ-

водственных способов с различной интенсивностью.

Автономность – ингредиенты каждого сквозного способа не зависят от функционирования других способов.

Обозначим через x_ψ интенсивность использования производственного способа ψ .

Множество ингредиентов динамической модели Канторовича делится на 2 подмножества: S и R . S – подмножество воспроизводимых продуктов. R – подмножество невозпроизводимых ресурсов. Коэффициенты производственных способов, относящиеся к воспроизводимым продуктам, обозначим $a_{s\psi t}$, а к невозпроизводимым – $a_{r\psi t}$. Множества S, R могут быть зависящие от времени (S', R').

Ограничениями модели являются две группы балансов:

по воспроизводимым продуктам –

$$\sum_t \sum_\psi a_{s\psi t} x_\psi - y_s \geq 0, \quad s \in S, \quad t \in [1, T], \quad (6.29)$$

по невозпроизводимым ресурсам –

$$\sum_\psi a_{r\psi t} x_\psi \leq Q_{rt}, \quad r \in R, \quad t \in [1, T], \quad (6.30)$$

где y_{st} – объем непроизводственного потребления s -го продукта в t -ом периоде;

y_s – суммарное потребление за весь период;

Q_{rt} – наличие r -го ресурса в t -ом периоде.

Объем непроизводственного потребления в t -ом периоде разделяется на две части (подобно тому, как это было сделано в главе 5):

$$\begin{aligned} y_{st} &= \bar{y}_{st} + q_{st}, \\ \bar{y}_{st} &= \alpha_{st} z_t, \end{aligned} \quad (6.31)$$

где q_{st} – фиксированная заданная экзогенно величина;

y_{st} – оптимизируемая часть;

α_{st} – структурные коэффициенты;

z_t – число комплектов потребительских благ в t -ом периоде.

Целевая функция модели отражает непроизводственное потребление в течение всего периода планирования:

$$\varphi(z_1, \dots, z_T) \rightarrow \max.$$

В качестве φ в зависимости от цели исследования могут выступать следующие функции:

оптимизация конечного результата –

$$z_T \rightarrow \max;$$

оптимизация суммарного результата –

$$\sum_t z_t \rightarrow \max;$$

оптимизация взвешенного суммарного результата (например, с помощью дис-

контрирующих множителей) –

$$\sum_i \lambda_i z_i \rightarrow \max.$$

Следующие два условия являются условиями разрешимости модели:

1. Матрица производственных способов, составленная из столбцов A_{ψ} , укороченных и содержащих ингредиенты только из множества S , является продуктивной, то есть существует такой вектор $x_{\psi} \geq 0$, который позволяет получить положительное значение воспроизводимой продукции, то есть $\alpha_s z_i + q_{si} > 0$, $s \in S, i=1, \dots, T$.

2. Вектор, состоящий из элементов q_{si} , должен быть таким, чтобы при $z_i=0$ обеспечивал бы выполнение неравенства по ресурсам: $\sum_{\psi} a_{r\psi} x_{\psi} \leq Q_r$.

Очевидно, что динамическая модель Канторовича, по сути, является задачей линейного программирования. Поэтому к ней применимы все методы анализа и решения таких задач. Оптимальный план модели может содержать столько дополнительных переменных, сколько ограничений в модели. Число ограничений определяется как $\sum_i s_i$, где s_i – число ингредиентов, относящихся

к i -му периоду. Число положительных основных переменных равно числу ограничений, которые на оптимальном решении обращаются в равенство. Общее число переменных модели равно $n \cdot T$ (n переменных x_{ψ} , соответствующих производственным способам, T переменных z_i , соответствующих временным периодам). Нас интересуют лишь те решения, в которых $z_i > 0$. Тогда максимальное число производственных способов, вошедших в оптимальный план, составит $\sum_i s_i - T$. Таким образом, при построении динамической модели Канторовича

важное значение имеет соотношение числа ингредиентов, производственных способов и временных тактов. Проведенный анализ позволяет сделать ряд выводов.

1. Если в модели содержится малое количество ингредиентов и рассматривается небольшая длина расчетного периода (количество временных тактов), но при этом сформировано большое количество производственных способов, то лишь небольшая часть информации о производственных способах может быть полезной – другими словами, лишь небольшая часть производственных способов будет использоваться.

2. Если число производственных способов, образующих технологическое множество модели, мало по сравнению с числом ингредиентов модели, то в оптимальном плане лишь небольшая часть ограничений превратится в равенство. Следовательно, многие виды продуктов будут производиться в избытке, а многие ресурсы будут недоиспользоваться.

Замечание. Если рассматривать один и тот же ингредиент, относящийся

к разным периодам, как различные ингредиенты, то динамическую постановку можно свести к статической.

Как и для всякой задачи линейного программирования, для динамической модели Канторовича можно построить двойственную. Переменные этой двойственной задачи называют оптимальными динамическими оценками.

6.6. Основные элементы прикладных динамических моделей

Теория, мой друг, суха,
Но древо жизни зеленеет.
И.В. Гете

Теоретической базой прикладных динамических моделей являются структурные модели: динамическая модель Леонтьева, модель Неймана и модель Канторовича. В отличие от теоретических, прикладные модели предназначены для разрешения конкретных практических задач. Для каждой задачи строится своя специфическая модель, учитывающая особенности этой задачи. При моделировании в рамках конкретной задачи вначале выбирается теоретическая (концептуальная) модель, а затем на ее основе строится прикладная модель. Роль модели из нормативной преобразуется в описательную. Прикладные динамические модели всегда должны быть хорошо увязаны с действующей системой статистических показателей. Многие особенности прикладного моделирования обусловлены той системой показателей, в рамках которой они конструировались.

Прикладные динамические модели конструируются, как правило, из ограниченного числа элементов, описывающих различные блоки экономики, а также связи между этими блоками. Они составляют элементную базу прикладной динамической модели.

Большинство моделей дискретны по времени. Длина такта различна в зависимости от длины расчетного периода. На каждом такте прикладная модель более или менее полно описывает воспроизводственный процесс и включает блоки, отражающие различные стороны этого процесса.

В укрупненном виде прикладная модель состоит из трех основных блоков (рис. 6.4). Также обязательно учитывается воспроизводство трудовых ресурсов и невозпроизводимые природные ресурсы. Однако часто демографические и природопользовательские модели выносятся за рамки прикладной межотраслевой модели и увязываются с ней в систему так, чтобы демографические и природопользовательские показатели, определяющиеся на выходах соответствующих моделей, являлись экзогенными в межотраслевой модели. Одна и та же модель может быть использована для решения разных задач путем реализации ее в различных режимах, изменяющих состав экзогенных и эндогенных переменных.

Рассмотрим основные (типичные) элементы прикладных межотраслевых моделей.

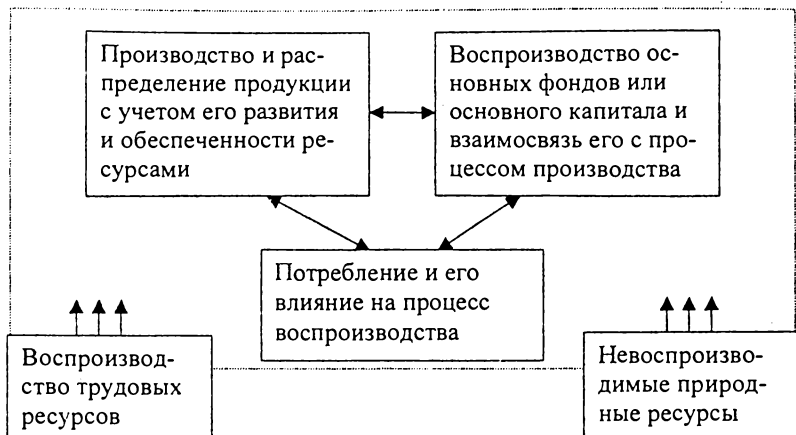


Рис. 6.4. Упрощенная схема прикладной динамической модели

Блок производства и распределения продукции отражает межотраслевые связи модели. В нем моделируются зависимости между затратами и выпуском, которые являются обязательными элементами. Основные способы задания этих зависимостей следующие:

- с помощью производственных функций;
- с помощью функций производственных затрат;
- в виде множества производственных способов.

В случае, когда теоретической основой прикладной модели является модель Леонтьева, прикладная отличается от базовой двумя особенностями. Во-первых, матрица производственных затрат не считается постоянной во времени, а рассчитывается для каждого такта времени. Во-вторых, производственные затраты обычно группируются по функциональному признаку, и для каждой группы используется своя методика расчета.

При построении прикладных моделей используются два представления производственных способов:

- 1) для каждого такта вводится свой производственный способ;
- 2) вводится сквозной производственный способ (если теоретической базой является модель Канторовича).

Более распространенной является первая форма. В таком случае технологическое множество прикладной динамической модели представляет собой динамический ряд матриц "затраты – выпуск". В прикладных моделях отрасль может представляться как одним, так и несколькими производственными способами. Распространенным является описание отрасли по крайней мере двумя производственными способами для каждого такта:

производство на старых мощностях;
 производство на новых мощностях, созданных в течение производственного периода.

Параметры модели для каждого такта описываются тремя матрицами:

матрица материалоемкости продукции A^t ;

матрица фондоемкости продукции D^t (включает в качестве строк не все отрасли, а только фондообразующие);

матрица трудоемкости продукции L^t , она может вырождаться в строку, если рассматривается один вид трудовых ресурсов. В общем случае в этой матрице столько строк, сколько видов трудовых ресурсов включается в модель.

Для описания сферы производства используются производственные функции, как правило, двухфакторные – зависимость выпуска от объемов задействованных фондов и привлеченного труда. Производственные функции активно используются при моделировании отдельных отраслей¹.

Таким образом, модели этого блока включают производственные функции для описания производства отдельных отраслей и расширенные межотраслевые модели для описания взаимодействия отраслей.

Второй блок предназначен для моделирования воспроизводства основных фондов. Прикладные межотраслевые модели, как правило, содержат как отдельный блок балансы основных производственных фондов или мощностей. Взятые совместно с балансами производства и распределения продукции, они описывают взаимосвязи между капиталовложениями, основными фондами и производством. Динамика капиталовложений связана с будущей динамикой производств через основные фонды (ОФ) или основной капитал.

При моделировании в этом блоке учитывается воспроизводственная направленность капиталовложений или инвестиций: как для простого воспроизводства, так и для расширенного воспроизводства ОФ. Для простого воспроизводства они выделяются на основе доли затрат на возмещение выбытия ОФ в общем объеме фондов:

$$u_i^0(t) = \sum_j \gamma_{ij}^t \Phi_{ij}(t), \quad (6.32)$$

где u_i^0 – капвложения i -го вида в t -м году, направленные на простое воспроизводство ОФ;

j – индекс отрасли;

γ_{ij}^t – доля затрат на возмещение выбытия ОФ i -го вида в j -й отрасли в величине ОФ t -го периода;

$\Phi_{ij}(t)$ – объем фондов i -го вида, действующих в j -й отрасли на начало t -го периода.

¹ Вопросы построения и использования производственных функций подробно рассматриваются в курсе "Эконометрия".

Капиталовложения для расширенного воспроизводства определяются на основе удельных капвложений, приростов ОФ и величин инвестиционных лагов:

$$u_i^{\Delta}(t) = \sum_j b_{ij}' \Delta \Phi_j(t + \tau_j), \quad (6.33)$$

где u_i^{Δ} – капвложения на расширение фондов i -го вида в t -м году;
 b_{ij} – коэффициент приростной фондоемкости, то есть затраты капвложений i -го вида для прироста единицы ОФ в j -й отрасли;
 $\Delta \Phi_j$ – прирост ОФ в j -й отрасли в году $(t + \tau_j)$;
 τ_j – инвестиционный лаг в j -й отрасли.

Замечание. В (6.32) и (6.33) вместо величины основных фондов могут быть использованы показатели производственной мощности.

Соотношения (6.32) и (6.33) описывают спрос на капвложения соответствующего вида. Они включаются в балансы производства и распределения продукции как экзогенные переменные. Приросты ОФ, используемые при определении спроса на капвложения, задаются в виде балансов фондов или мощностей. Баланс ОФ представляет собой соотношение, сопоставляющее в каждом такте ресурсы ОФ и потребности. Ресурсы ОФ определяются на основании достигнутого уровня на начало года (периода), объема ввода и выбытия:

$$\bar{\Phi}(t) = \Phi(t) + \bar{\beta}' \Delta \Phi(t) - W(t), \quad (6.34)$$

где $\Phi(t)$ – объем ОФ на начало год;
 $\bar{\beta}' \Delta \Phi(t)$ – ввод фондов в течение такта;
 $W(t)$ – выбытие фондов в течение такта.

Величина выбытия также определяется на основании фондов на начало года и доли выбытия. Абсолютное выбытие $W(t)$ определяется по формуле:

$$W(t) = \gamma_w' \Phi(t), \quad (6.35)$$

где γ_w' – доля выбытия ОФ в такте времени по отношению к их величине на начало года.

Баланс основных фондов i -го вида в j -й отрасли задается ограничением:

$$d_{ij}(t) x_j(t) \leq \bar{\Phi}_{ij}(t), \quad (6.36)$$

где d_{ij} – соответствующий коэффициент матрицы фондоемкости D' ;
 x_j – объем выпуска в j -й отрасли;
 $\bar{\Phi}_{ij}(t)$ – наличие ОФ i -го вида в j -й отрасли, согласно (6.34).

6.7. Классификация межотраслевых прикладных моделей

Прикладные динамические межотраслевые модели могут быть классифицированы по нескольким признакам.

По длительности периода, охватываемого моделью, модели делятся на краткосрочные, среднесрочные и долгосрочные.

Поскольку большая часть моделей является дискретными, то возникает вопрос о согласовании результатов различных ременных тактов. В соответствии с различными способами связи между интервалами времени выделяют модели с прямой рекурсией, модели с обратной рекурсией (и как частный вариант – квазидинамические модели) и модели с двусторонней связью интервалов времени или полностью динамические модели.

Логическая структура модели, как правило, не меняется в зависимости от горизонта планирования, то есть методологическая модель сохраняется. Адаптация ее к горизонту планирования выражается в подготовке исходной информации, в степени детализации показателей и соотношений модели. Проблемы, возникающие при адаптации модели к определенным горизонтам планирования, связаны с проблемами определения тех или иных показателей и увязки статистической отчетности с тактами модели.

Замечание. При выборе горизонта планирования могут меняться и цели моделирования, что может повлечь изменения в структуре модели.

В моделях с прямой рекурсией расчеты ведутся последовательно для каждого такта, начиная с первого. В результате решение модели на каждом такте оказывает влияние на последующие такты. Отсутствие обратной связи является недостатком этой модели и ведет к тому, что в таких моделях слабо учитываются конечные цели и перспективы развития. Поэтому такие модели обычно используются для краткосрочного планирования.

Модели с обратной рекурсией предполагают обратный порядок расчетов и ориентированы на достижение конечных целей. Сначала решается модель для последнего периода и затем последовательно – для промежуточных тактов. Таким образом, модели с обратной рекурсией состоят из двух блоков: блока последнего года и блока развертки решения по годам¹. Условием развертки решения по годам может выступать условие, связывающее капвложения и прирост фондов для разных интервалов, при этом задается закон динамики капвложений. Кроме того, могут строиться оптимизационные задачи, в рамках которых оптимизируются и параметры роста капвложений. Недостаток таких моделей в том, что в них не учитывается влияние предыдущего временного отрезка на последующий. В них часто появляются неприемлемые решения на промежуточных интервалах, например, скачкообразная структура производства по годам, темп роста капвложений внутри периода может быть очень напряженный². Эти модели обычно используются для среднесрочного планирования.

Особая разновидность – квазидинамические модели. В них строятся соотношения только для последнего такта и определяются показатели для по-

¹ По сути своей модели с обратной рекурсией являются задачами динамического программирования.

² Недопустимые решения на промежуточных этапах можно исключить или смягчить подобно тому, как это было сделано в главе 5.

следнего интервала. При этом связь между интервалами осуществляется с помощью балансов капвложений или основных фондов за весь расчетный период.

Структура моделей с прямой или обратной рекурсией такова, что они распадаются на ряд статических задач, решаемых последовательно либо в прямом, либо в обратном порядке, связанных условиями перехода между тактами. Связь временных отрезков и в том, и в другом случае односторонняя.

Полностью динамические модели имеют двустороннюю связь отрезков времени, и они не распадаются на ряд статических задач.

Рассмотрим укрупненную модель межотраслевого баланса с прямой рекурсией. Схема модели состоит из трех групп балансов:

балансы производства и распределения продукции;

балансы фондов по отраслям потребления;

балансы по труду.

1. Балансы производства и распределения продукции, построенные на основе модели Леонтьева, имеют вид

$$x_i(t) = \sum_j a'_{ij} x_j(t) + \sum_j b'_{ij} u_j(t) + y_i(t) + q_i(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad (6.37)$$

где $x_i(t)$ – объем производства i -й отрасли;

u_j – объем капвложений в j -й отрасли;

b_{ij} – коэффициенты материально-вещественной структуры капвложений;

a_{ij} – коэффициенты материалоемкости продукции;

$\sum_j a'_{ij} x_j(t)$ – производственное потребление продукции i -й отрасли всеми отраслями;

$\sum_j b'_{ij} u_j(t)$ – капвложения i -го вида во все отрасли;

y_i – непроизводственное накопление;

q_i – конечный продукт.

Индексы t в первом и втором слагаемых означают, что для каждого периода существует своя параметрическая база.

2. Балансы основных фондов по отраслям потребления:

$$d'_j x_j(t) = \Phi_j(t-1) + \Delta\Phi_j(t) - W_j(t), \quad j = \overline{1, n}, \quad (6.38)$$

где Φ_j – общий объем фондов в j -й отрасли;

$\Delta\Phi_j$ – необходимый ввод фондов в этой отрасли;

$W_j = \gamma'_w \Phi_j(t-1)$ – выбытие фондов в соответствии с (6.35);

d_j – коэффициенты фондоемкости продукции.

Объем основных фондов должны быть сбалансированы по отраслям-потребителям. Фонды не приводятся к среднегодовым, а рассчитываются на конец такта.

3. Баланс трудовых ресурсов определяется на основании коэффициентов трудоемкости:

$$L(t) = \sum_j l'_j x_j(t), \quad (6.39)$$

где l'_j – коэффициенты трудоемкости.

Кроме соотношений (6.37) – (6.39) вводится также ограничение на долю, которую может составлять производственное накопление в общей величине конечного продукта.

6.8. Модели экономического цикла

Теоретические модели экономического цикла возникли в 30-х годах после кризиса, второй импульс к развитию получили в послевоенный период. Модели основываются на конструкциях, описывающих взаимодействие мультипликатора и акселератора. Базой для них служат кейнсианские методы. Эти модели дали развитие эконометрическому направлению в моделировании динамики экономических систем. Эконометрические модели 60-70 гг. пытаются моделировать цикл экономического развития и выявлять основные параметры этого цикла (длительность, размах колебаний).

Рассмотрим модель экономического цикла Дж. Хикса. Это теоретическая модель. Основные ее соотношения следующие:

1. Национальный доход Y – это сумма личного потребления C , индуцированных инвестиций I и автономных инвестиций A . При этом под индуцированными инвестициями понимаются частные инвестиции, а под автономными – государственные (задаваемые экзогенно).

$$Y = C + I + A.$$

Частные инвестиции зависят от состояния экономики в определенный период t :

$$I_t = v(Y_{t-1} - Y_{t-2}).$$

2. $C_t = C_1 Y_{t-1} + C_2 Y_{t-2}$ – для определения уровня дохода в текущем периоде используются 2 предшествующих.

3. Сбережения в период t совпадают с инвестициями.

Исходя из сделанных предположений, запишем уравнение для Y .

$$Y_t = (v + C_1)Y_{t-1} - (v - C_2)Y_{t-2} + A_t$$

Предполагаем, что $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, $C_1 + C_2 < 1$, $v > 1$. Выписываем характеристическое уравнение для:

$$\lambda^2 - (v + C_1)\lambda + (v - C_2) = 0$$

Пусть $\omega = v - C_2$ и $C = C_1 + C_2$. Запишем решение этого квадратного уравнения, применив новые обозначения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{v + C_1}{2} \pm \left(\frac{v + C_1}{2} \right)^2 - (v + C_2) = \frac{\omega + C}{2} \pm \left(\frac{\omega + C}{2} \right)^2 - \omega$$

Введем обозначение: $S = 1 - C$. Решение не будет иметь колебательных составляющих при условии, что λ_1, λ_2 – действительные числа. Выясним, при каких ω и λ это достигается:

$$\left(\frac{\omega+C}{2}\right)^2 - \omega \geq 0 \quad (\omega+C)^2 \geq 4\omega \quad \omega > 0 \quad (\omega+1-s) \geq 2 \quad \omega \quad (\omega-1)^2 \geq s$$

На рис. 6.5 показана область колебаний (заштрихована).

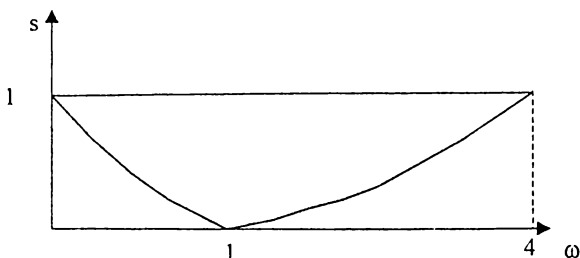


Рис. 6.5. Область колебаний

Если присутствует колебательная составляющая, то λ представимо в виде: $\lambda_{12} = \alpha + i\beta$. При этом $\alpha = \frac{\omega+C}{2}$, $\beta = \omega - \left(\frac{\omega+C}{2}\right)^2$.

Коэффициент затухания колебаний r будет определяться формулой $r = \alpha^2 + \beta^2$. Период колебаний θ определяется как $\theta = \arctg\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$.

Преобразуем выражение для r :

$$r = \alpha^2 + \beta^2 = \left(\frac{\omega+C}{2}\right)^2 + \omega - \left(\frac{\omega+C}{2}\right)^2 = \frac{\omega}{2}.$$

Теперь можно указать характер колебаний в зависимости от значения ω :

- $\omega > 1, r > 1$ – взрывные колебания;
- $\omega = 1, r = 1$ – равномерные колебания;
- $\omega < 1, r < 1$ – затухающие колебания.

Следует обратить внимание, что $\omega = \nu - C_2$ и не зависит от C_1 .

По предположению Хикса в реальной экономике $\omega > 1$, следовательно, ей присущи взрывные процессы. Но они должны натолкнуться на дефицит ресурсов, в первую очередь рабочей силы, поэтому при построении прикладных конструкций вводится верхнее и нижнее ограничение.

Таким образом, экономика совершает циклическое движение: экономика получает первоначальный импульс в виде впрыскивания автономных инвестиций. Они вызывают рост производства и доходов, что включает механизм акселератора, включаются индуцированные инвестиции и начинает работать схема циклического развития с взрывными колебаниями. Амплитуда нарастает до тех пор, пока не достигнет ограничений по ресурсам или производственным мощностям. Нижние границы отключают механизм акселератора из-за избытка производственных мощностей. $\downarrow$

Авторегрессионное уравнение представляет собой уравнение, в которое входят текущие и лаговые значения лишь одной эндогенной переменной. Общая форма уравнения такова

$$y_t + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \dots + \alpha_k y_{t-k} = f(t).$$

Положим $f(t)=0$. Таким образом мы абстрагируемся от влияния экзогенных переменных и помех для исследования внутренних свойств системы. Решение уравнения записывается в следующем виде:

$$y_t = D_1 \lambda_1^t + D_2 \lambda_2^t + \dots + D_k \lambda_k^t,$$

где λ_j – корни характеристического уравнения.

Для существования циклической компоненты необходимо, чтобы характеристическое уравнение было не менее чем 2-го порядка. Действительные корни определяют тенденцию роста нашей эндогенной переменной (при $\lambda > 1$ эндогенная переменная возрастает, при $\lambda < 1$ – убывает). Характер колебательных движений определяется коэффициентом затухания и периодом колебаний. На бесконечно длинном интервале в решении будут доминировать две компоненты, соответствующие действительному максимальному корню характеристического уравнения и корням, дающим максимальный r .

Требования адекватности модели реальной динамики накладывают некоторые условия на корни нашего уравнения:

- 1) доминирующий действительный корень должен быть больше 1. Это значит, что модель воспроизводит эндогенный рост экономики;
- 2) доминирующая гармоника должна быть не затухающей и не взрывной, т.е. ее r должен быть близок к 1;
- 3) период доминирующих экзогенных колебаний должен быть близок к периоду реального экономического цикла.

Примером прикладной динамической модели с прямой рекурсией является модель Шатилова, в которой строятся специальные балансы для фондообразующих и прочих отраслей, а сфера потребления моделируется с помощью шкалы потребления.

В заключение главы следует сказать, что экономические системы не являются закрытыми, они постоянно взаимодействуют между собой. Взаимодействие систем уже обсуждалось в главе 4 для статических моделей. Аналогично можно рассмотреть и взаимодействие моделей экономической динамики.

При моделировании взаимодействий экономических систем рассматривают два основных типа взаимодействия: кооперативное, основанное на взаимной торговле, и конфликтное или конкурентное. Для решения задач взаимодействия для моделирования экономических систем используются, как правило, модели Неймана и Гейла.

Моделирование кооперативного взаимодействия позволяет выяснить те условия, при которых взаимодействие (в простейшем случае в виде торговли) выгодно всем системам. Эти условия включаются в понятие *кооперативности* систем, связанное с технологическими темпами роста каждой отдельной системы и кооперативной модели в целом. Большее значение кооперативного темпа

роста по сравнению с темпами роста отдельных систем обеспечивается за счет использования наиболее эффективных технологий и специализации экономических систем.

Моделирование конфликтного взаимодействия в динамике предусматривает использование теории игр, в частности, многошаговых. Основное внимание при этом уделяется определению выигрышных позиций игроков и соответствующих стратегий, которые бы позволили им достичь в некотором смысле выигрышного состояния за определенное число шагов независимо от того, какие действия будут предприниматься другими сторонами. Множества выигрышных позиций и стратегий оказываются зависящими в основном от темпов экономического развития систем, а также от параметров, задающих взаимодействие систем.

Рассмотренные в этой главе модели обсуждаются также в [6, 7, 11, 12].

Вопросы для самопроверки

1. Технологический темп прироста в динамической модели Леонтьева находится среди величин, обратных собственным числам матрицы
 - 1.1. $(E-A)^{-1}$, где A – матрица коэффициентов прямых затрат;
 - 1.2. B – матрицы приростной материалоемкости;
 - 1.3. $B(E-A)^{-1}$.
2. Если минимальному положительному собственному числу матрицы $B(E-a)^{-1}$ соответствует собственный вектор, имеющий отрицательную компоненту, то такая траектория является:
 - 2.1. нулевой;
 - 2.2. допустимой;
 - 2.3. недопустимой?
3. Модель Леонтьева связывает
 - 3.1. объем выпуска по отраслям с приростом валового выпуска;
 - 3.2. объем конечного потребления с увеличением цен;
 - 3.3. прирост выпуска с изменением затрат.
4. Коэффициенты капиталоемкости в модели Леонтьева отражают
 - 4.1. затраты на возмещение выбытия основных фондов;
 - 4.2. затраты производственного накопления одного вида продукции на единицу прироста другого вида;
 - 4.3. потребление капитала в количестве необходимом для конечного использования.
5. В рамках основной модели Леонтьева допустимыми являются только траектории, для которых
 - 5.1. $dX/dt \geq 0$;
 - 5.2. $dX/dt \leq 0$;
 - 5.3. $dX/dt = 0$.
6. Всегда ли возможен в модели Леонтьева рост всех отраслей с постоянным темпом:

- 6.1. да;
- 6.2. нет?
- 7. Учет производственных мощностей в модели Леонтьева позволяет
 - 7.1. увеличить объем капиталовложений;
 - 7.2. уменьшить размерность задачи;
 - 7.3. сделать возможным рост производства без инвестиций.
- 8. В модели Неймана рассматриваются
 - 8.1. инвестирование и выпуск;
 - 8.2. производство и конечное потребление;
 - 8.3. затраты и выпуск.
- 9. Стационарной траекторией развития экономической системы является траектория
 - 9.1. с постоянным темпом роста;
 - 9.2. переменным темпом роста;
 - 9.3. постоянным выпуском;
 - 9.4. постоянными затратами.
- 10. Магистралью называется
 - 10.1. траектория с убывающим темпом роста;
 - 10.2. траектория с максимально возможным темпом роста;
 - 10.3. любая траектория с постоянным темпом роста.
- 11. Согласно принципу Самуэльсона, эффективная стратегия роста обеспечивается на траектории, которая, выйдя из начального состояния,
 - 11.1. устремляется к заданному конечному по кратчайшему пути;
 - 11.2. касается луча максимального сбалансированного роста и далее движется к конечному состоянию по кратчайшему пути;
 - 11.3. достигает луча максимального сбалансированного роста и движется по нему как можно дольше, а затем сворачивает к конечному состоянию.
- 12. Если в динамической модели Канторовича содержится малое количество ингредиентов и рассматривается малая длина планируемого периода, но производственных способов много, то
 - 12.1. лишь некоторые способы будут задействованы;
 - 12.2. все способы будут использоваться с равной интенсивностью;
 - 12.3. все способы будут использоваться с ненулевой, но неравной интенсивностью.
- 13. Какой принцип применяется при решении задач оптимизации фонда потребления:
 - 13.1. принцип оптимальности Беллмана;
 - 13.2. принцип Самуэльсона;
 - 13.3. принцип максимума Понтрягина?
- 14. Динамическая модель Леонтьева является
 - 14.1. непрерывной;
 - 14.2. дискретной;
 - 14.3. кусочно-непрерывной.
- 15. В модели Неймана участвуют

- 15.1. отрасли;
- 15.2. регионы;
- 15.3. технологические процессы;
- 15.4. динамические производственные способы.

16. Технологический темп системы в модели Неймана равен:

$$16.1. \alpha^* = \min_x \max_i \frac{\sum_j b_{ij} x_j}{\sum_j a_{ij} x_j}; \quad 16.3. \alpha^* = \max_x \min_i \frac{\sum_j b_{ij} x_j}{\sum_j a_{ij} x_j};$$

$$16.2. \alpha^* = \max_x \min_i \frac{\sum_j a_{ij} x_j}{\sum_j b_{ij} x_j},$$

где $A=(a_{ij})$ – матрица затрат, $B=(b_{ij})$ – матрица выпуска?

17. Модель Неймана разложима, если существует пара подмножеств S из множества процессов и T из множества продуктов, что

- 17.1. $j \in S, i \notin T \Rightarrow a_{ij}=b_{ij}=0$;
- 17.2. $j \in S, i \in T \Rightarrow a_{ij}=b_{ij}=0$;
- 17.3. $j \notin S, i \in T \Rightarrow a_{ij}=b_{ij}=0$;
- 17.4. $j \notin S, i \notin T \Rightarrow a_{ij}=b_{ij}=0$.

18. Чему равен технологический темп системы, если матрица полной приростной капиталоемкости имеет собственные числа $-0,15$; $2,7$; $0,46$

- 18.1. $-6,67$;
- 18.2. $0,37$;
- 18.3. $2,17$;
- 18.4. $1,24$?

19. Модель Канторовича может рассматриваться, как

- 19.1. задача линейного программирования;
- 19.2. задача многокритериальной оптимизации;
- 19.3. задача безусловной оптимизации.

20. В моделях с прямой рекурсией

- 20.1. не учитывается влияние начальных этапов развития;
- 20.2. плохо видны конечные цели развития;
- 20.3. имеется двусторонняя связь интервалов.

21. Производственно-технологическое множество модели Гейла представляет собой

- 21.1. выпуклое множество;
- 21.2. линейное многообразие;
- 21.3. выпуклое замкнутое множество.

22. Теоретические структурные модели не различают затраты ресурсов и выпуск

- 22.1. по отраслям;
- 22.2. по технологическим способам;

- 22.3. по регионам;
- 22.4. по видам продукции.
- 23. Какой из приведенных видов моделей не сводится к решению нескольких статических задач
 - 23.1. модели с прямой рекурсией;
 - 23.2. модели с обратной рекурсией;
 - 23.3. квазидинамические модели;
 - 23.4. модели с двусторонней связью интервалов?
- 24. В динамической модели Канторовича множество ингредиентов включает
 - 24.1. только воспроизводимые продукты;
 - 24.2. только невоспроизводимые продукты;
 - 24.3. и воспроизводимые, и невоспроизводимые продукты.
- 25. Целевая функция в модели Канторовича зависит от
 - 25.1. объема непроизводственного потребления;
 - 25.2. числа задействованных производственных способов;
 - 25.3. числа комплектов потребительских благ;
 - 25.4. интенсивности использования производственных способов.
- 26. В прикладной модели, построенной на основе модели Леонтьева, матрица производственных затрат
 - 26.1. постоянна во времени;
 - 26.2. рассчитывается для каждого этапа;
 - 26.3. оптимизируется по времени.
- 27. Отличие прикладных моделей от теоретических состоит в том, что в них
 - 27.1. выпуск продукции разделяется по отраслям;
 - 27.2. включается прирост основных фондов;
 - 27.3. включается инвестиционный лаг.
- 28. В модель экономического цикла Дж. Хикса включаются
 - 28.1. валовый продукт и сальдо ввоза-вывоза;
 - 28.2. валовый продукт и национальный доход;
 - 28.3. национальный доход и личное потребление;
 - 28.4. национальный доход, личное потребление, индуцированные и автономные инвестиции.
- 29. В прикладные динамические модели межотраслевого баланса включаются
 - 29.1. балансы производства и распределения продукции;
 - 29.2. балансы фондов по отраслям потребления;
 - 29.3. балансы трудовых ресурсов;
 - 29.4. все виды балансов.
- 30. В модели Дж. Хикса характер колебаний определяется
 - 30.1. соотношением коэффициентов модели для текущего этапа;
 - 30.2. соотношением коэффициентов модели для предыдущего этапа;
 - 30.3. соотношением коэффициентов модели для предпредыдущего этапа?

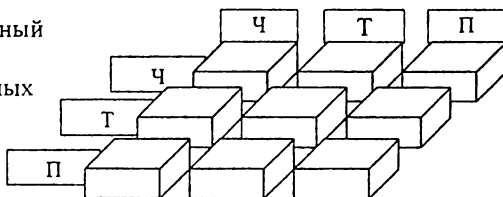
Глава 7. МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТНОШЕНИЙ СОБСТВЕННОСТИ

В современных условиях перехода к рыночной экономике возникают проблемы, связанные с процессом трансформации форм собственности, которые приводят к необходимости исследования новых организационных схем управления в экономике.

В силу того, что на отношения собственности влияет целый ряд макро- и микроэкономических факторов, необходимо исследовать различные программы экономического поведения с учетом влияния изменяющихся экономических отношений, вызванных изменениями структуры собственности, и т.д.

Материал этой главы представляет результаты работы авторов над проблемой моделирования отношений собственности и отражен в [12-14]. Место приведенных в главе моделей определяется следующим образом:

общегосударственный
уровень
страта общественных
отношений



7.1. Эволюционная модель собственности

Чтобы правильно оценить создавшееся положение, следует рассматривать различные по своему характеру эволюционные процессы. Прежде всего, предлагается изучить ситуацию с позиций абсолютно пассивного управления, ограничиваясь наблюдением и косвенным управлением.

С целью проведения такого исследования строится так называемая "эволюционная модель" (модель носит теоретический характер) изменения отношений собственности.

При создании модели сделаем следующие предположения и допущения:

1. Исследуется гипотетическая система собственности, включающая четыре вида собственности – государственную, частную, коллективную и общественную.

2. Полагаем, что общественная собственность не является синонимом коллективной или государственной собственности. Это не используемая в качестве товара персонифицированная собственность, призванная производить минимально необходимые материальные блага в соответствии с потребностями граждан, общества в целом или отдельных регионов (областей, районов, сел).

3. Поскольку структура и физические размеры той или иной формы соб-

ственности изменяются во времени, то каждая из форм собственности рассматривается как динамическая система, отражающая воспроизводственные процессы и развитие собственности. Изменение физических размеров и структуры той или иной формы собственности может происходить за счет "перелива" собственности из одной формы в другую. Т.е. существует некоторая структура обмена капиталов между динамическими системами, входящими в состав множества форм собственности. Такая структура характеризуется списком обменивающихся динамических систем, уровнем и интенсивностью обмена.

4. Система собственности, с учетом наличия переходов из одной ее формы в другую, представляется в виде графа состояний (рис. 7.1). Переходы отражают возможное движение собственности.

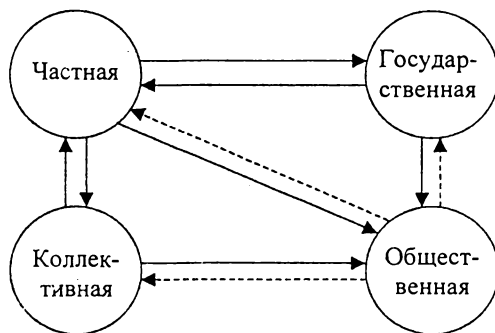


Рис. 7.1. Граф состояний системы собственности

Выделяется набор факторов, влияющих непосредственно или опосредованно на "перелив" собственности из одной ее формы в другую. В качестве факторов будем использовать показатели, отражающие жизнедеятельность общества.

Выделим, среди прочих, следующие факторы:

- политика международного валютного фонда (кредиты, займы, прочее);
- иностранные инвестиции;
- экономическая политика государства (налогообложение, бюджет);
- инфляция;
- экономический цикл;
- международная конкуренция;
- демографическая ситуация;
- научно-технический прогресс.

Поскольку обмен собственностью рассматривается в рамках общей национальной системы собственности, то имеет место соотношение, характеризующее закон сохранения.

5. Объем той или иной формы собственности зависит от интенсивности перехода, то есть привлекательности данного вида собственности по отношению к другим. Измерять объемы собственности будем в процентах от стоимо-

сти капитала каждого вида собственности на начальный момент времени, чтобы избежать разноразмерности.

Эволюционная модель отношений собственности включает следующую систему уравнений (в векторном виде):

$$\begin{cases} \dot{\lambda} \in \Lambda(t, \varphi) & (7.1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda(t, \varphi)x & (7.2) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Движение собственности происходит непрерывно. Однако, факторы, влияющие на интенсивность переходов, являются либо постоянными на коротких интервалах, либо медленно изменяющимися. Поэтому можно разбить все время рассмотрения модели на подинтервалы, в рамках которых интенсивности переходов постоянны. Динамика интенсивностей переходов определяется включением (7.1) в зависимости от динамики рассматриваемых факторов.

Заметим, что (7.1) решается методом дискретизации для дифференциальных включений. Множество $\Lambda(t, \varphi)$ представляет собой множество допустимых интенсивностей.

Матрица $\lambda(t, \varphi)$ и вектор-столбец $x(t_0)$, x_0 из (7.2) имеют размерность равную количеству форм собственности, участвующих в рассмотрении.

Для пояснения некоторых возникающих при решении задачи (7.1)-(7.2) эффектов рассмотрим условный пример двух форм собственности. Движение собственности в таком случае иллюстрируется схемой на рис. 7.2.

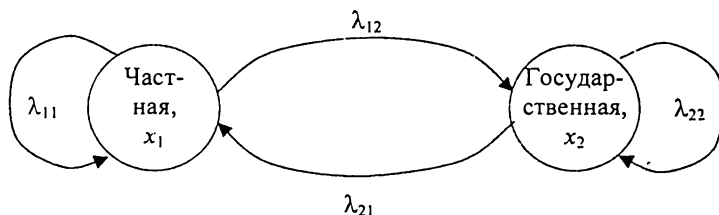


Рис. 7.2. Эволюционная схема движения собственности

λ_{ij} ($i, j=1, 2$) представляют собой следующее:

λ_{11} -рост собственности первого вида (частной);

λ_{22} -рост собственности второго вида (государственной);

λ_{12} , λ_{21} -интенсивности переходов собственности из первого вида во второй и из второго вида в первый соответственно.

Решением дифференциального включения является некоторая функция $\lambda(t, \varphi)$, предположим, что она кусочно-постоянна.

Изменение структуры собственности описывается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\lambda_{12}x_1 + \lambda_{21}x_2 + \lambda_{11}x_1 \\ \dot{x}_2 = \lambda_{12}x_1 - \lambda_{21}x_2 + \lambda_{22}x_2 \end{cases}.$$

В начальный момент времени объем собственности равен x_0 . Пусть матрица A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} - \lambda_{12} & \lambda_{21} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} - \lambda_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

тогда система, описывающая движение собственности, может быть записана так:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Эта система решается методами классического дифференциального исчисления.

Элементы λ_{21} и λ_{12} , в силу того что они являются интенсивностями перехода собственности, могут быть положительны или равны нулю. Нулевые интенсивности означают, что переходы собственности отсутствуют.

Диагональные элементы матрицы A отрицательны или положительны. Знак минус означает, что отток собственности из определенного вида собственности превышает ее внутренний рост.

Рассмотрим результаты численных расчетов для несколько случаев, различающихся соотношениями интенсивностей переходов.

Случай 1.

Этот случай отражает вариант полного бездействия со стороны управляющих органов, то есть элементы матрицы A постоянны на всем периоде рассмотрения.

Зададим на интервале $[t_0, t_1]$ интенсивности переходов собственности следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &= 0 & \lambda_{12} &= 0,02 \\ \lambda_{21} &= 0,05 & \lambda_{22} &= -0,1, \end{aligned}$$

то есть рост собственности внутри первого вида собственности отсутствует.

Матрица A в этом случае имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} -0,02 & 0,05 \\ 0,02 & -0,15 \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что оба вида собственности первоначально имеют по 100% стоимости капитала. Рассматривая движение собственности на трех временных интервалах с шагом 1 при полном бездействии получим траекторию изменения объемов стоимости капитала, изображенную на рис. 7.3.

Случай 2.

Рассматривая случай нулевого роста внутри каждого вида собственности и небольших или медленных изменений интенсивностей переходов и темпов роста собственности, получим траекторию изменения объемов стоимости капитала, показанную на рис. 7. 4.

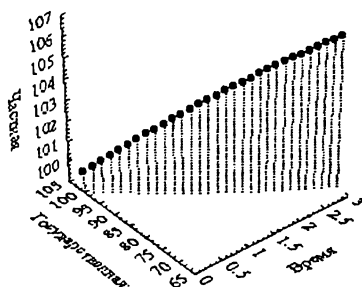


Рис. 7.3. Изменение объемов собственности в случае отсутствия внешнего воздействия

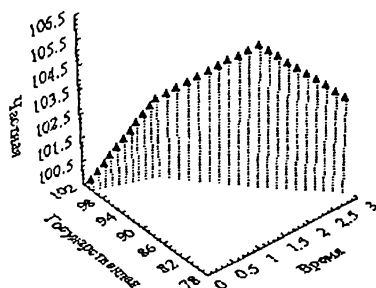


Рис. 7.4. Траектория "перелива" собственности в случае малых внешних возмущений

Эта траектория отражает "перелив" одной собственности в другую, что указывает на необходимость введения ограничивающих или регулирующих факторов, а также более полного учета факторов, которые подчеркивают не только привлекательность той или иной формы собственности, но и влияние ее на экономическую безопасность.

Случай 3.

Исследуем вариант, наиболее близкий к современным условиям развития собственности. Он характеризуется нулевым ростом внутри государственной собственности и активным ростом частного капитала. Медленные изменения, накапливающиеся к концу периода, но не оказывающие заметного влияния на коротких промежутках времени, приводят к резкому изменению траектории движения всех видов собственности. Состояния, соответствующие точкам из-

лома траектории, являются неустойчивыми, и, более того, им могут соответствовать катастрофические скачки (рис. 7.5).

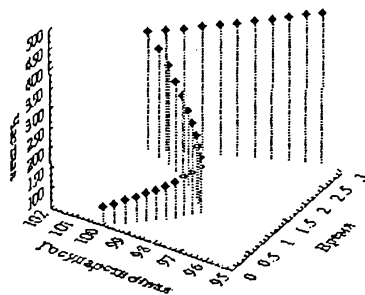


Рис. 7.5. Катастрофические явления в динамике собственности

Случай 4.

В последнем случае диагональные элементы матрицы A ненулевые и разного знака, а именно, рост частной собственности больше оттока собственности из этого вида, а государственной – наоборот.

На рис. 7.6 и 7.7 показаны изменения объемов собственности по видам (рис. 7.6.) и общая траектория собственности (рис. 7.7).

На рис. 7.6, видно, что даже при полном бездействии с течением времени объем государственной собственности все же начинает расти. Это можно объяснить тем, что при условии успешного развития частной собственности и эффективного налогообложения, государство может либо инвестировать бюджетные средства в свои предприятия, либо скупать частные, что позволяет увеличить объем государственной собственности.

Рассмотрение даже этого простого примера наглядно показывает, что с течением времени собственность подвержена существенным изменениям, и они могут иметь катастрофический характер.

Динамичность собственности, ее огромная роль в решении вопросов стабильности общества, национальной и экономической безопасности государства приводят к необходимости не только простого контроля за развитием капитала, но и регулирования изменений собственности.

Экономическая безопасность определяется совокупностью факторов, обеспечивающих независимость, устойчивость, способность национальной экономики к прогрессу, создающих защиту жизненно важных интересов личности, общества (государства), а также экономической и социальной стабильности общества в условиях влияния дестабилизирующих факторов.

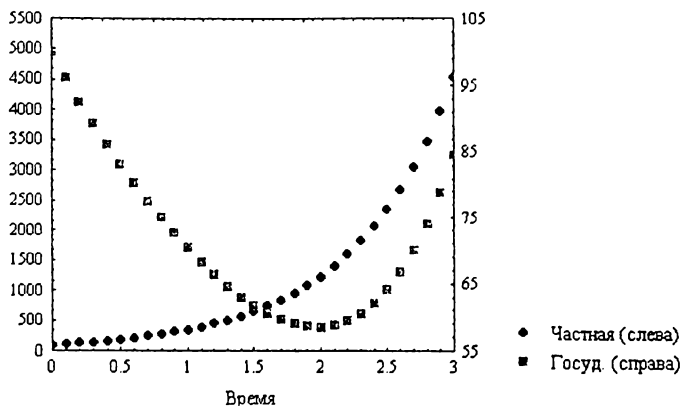


Рис. 7.6. Динамика объемов частной и государственной форм собственности

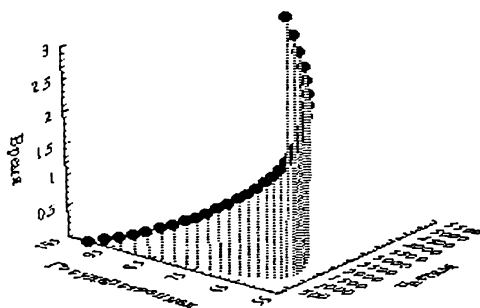


Рис. 7.7. Общая траектория динамики собственности

Эта совокупность факторов определяет некий "коридор", в котором находится траектория отношений собственности. Выход траектории за границы этого "коридора" означает угрозу экономической, а, значит, и национальной безопасности. Поэтому возникает необходимость (проблема) удерживания траектории в "коридоре" безопасности, т.е. управления. Управление носит опосредованный характер, так как осуществляется путем изменения значений параметров, основанных на факторах, которые влияют на интенсивности переходов, а следовательно, и на движение собственности.

Роль государства состоит не только в том, чтобы быть арбитром между представителями конфликтующих форм собственности. Государство становится субъектом управления собственностью. Мобильность при этом – важнейший фактор, который позволяет отслеживать и устранять социальную напряженность в обществе. Регулирование отношений собственности должно осуществ-

ляться на всех уровнях иерархии пространственной системы управления, причем на основе правил, нацеленных на эффективное использование собственности, недопущение нежелательных последствий в силу несоответствия структуры собственности и степени удовлетворения первоочередных потребностей граждан.

7.2. Отношения собственности в моделировании производственных процессов

Процесс перехода в экономике Украины от государственной формы собственности к коллективной и частной не открывает сам по себе перспектив стабильного социально-экономического развития страны. Проблемы, возникающие в процессе трансформации форм собственности реформируемой экономики Украины, приводят к необходимости создания адекватных им новых организационных структур управления крупномасштабными производственно-экономическими системами.

В этом разделе представлена модель создания общественного продукта в отраслевом разрезе по формам собственности на основе модификации модели Леонтьева с учётом доходов и потребления населения в зависимости от следующих факторов:

- технологических способов производства,
- наличия трудовых и природных ресурсов,
- политики ценообразования в производственной сфере,
- распределения капитальных вложений,
- состояния потребительского рынка.

При включении в систему баланса межотраслевых связей необходимо согласовать результаты решений относительно одних и тех же показателей, полученных разными способами в модели и отдельно в блоке межотраслевых связей.

На основе оценки динамики компонентов конечного спроса рассчитывается отраслевое распределение конечного спроса, валовых выпусков, трудовых ресурсов, промежуточных потоков, добавленной стоимости, цен.

При постоянной матрице коэффициентов прямых затрат использование её в среднесрочных и долгосрочных прогнозах затруднительно, поскольку приводит к существенным расхождениям расчётных и фактических значений исследуемых величин. Структурные сдвиги коэффициентов затрат в некоторых отраслях промышленности могут происходить под влиянием изменения цен, технологий, затрат на охрану окружающей среды. Сложность изучения структурных изменений в зависимости от прогресса технологии заключается в том, что «внутренние» для каждой отрасли технологические изменения влияют в основном на ассортимент выпуска, в то время как «внешние» для данной отрасли технологические изменения воздействуют на структурные коэффициенты преимущественно через издержки производства, т.е. через цены, при неиз-

менной структуре выпуска. С точки зрения сложности описания структурных сдвигов в межотраслевых коэффициентах наибольший интерес представляют «внутренние» технологические сдвиги, в частности такие, как улучшение старой технологии и внедрение принципиально новой.

Очевидно, что технологии производства, а также их динамика, производительность труда и потребность в ресурсах, объём фондов и их динамика, фондоотдача различны в зависимости от формы собственности, на которой осуществляется производство. Поэтому анализ производства будет производиться в разрезе по формам собственности.

Таким образом, на основе модификации модели Леонтьева с учётом доходов и потребления населения определяются валовые выпуски отраслей и потребление населения на базе показателей фиксированного конечного продукта, нетрудовых доходов населения и технологической матрицы коэффициентов затрат. Путём согласования полученных значений выпусков с результатами расчётов наличных лимитов основного капитала и потребности в труде определяются отраслевые цены.

Расчёты производятся в натуральной и стоимостной формах.

В основу данной модели были положены следующие предположения:

- 1) технологические и ресурсные возможности различны для одной и той же отрасли в зависимости от формы собственности;
- 2) продукты, создаваемые предприятиями различных форм собственности, являются взаимозаменяемыми;
- 3) доходы населения различаются в зависимости от формы собственности, в которой они получены;
- 4) время является дискретным. Индекс периода времени t опущен. Переменные последующего периода обозначаются с помощью нижнего индекса $+j$, предыдущего – $-j$.

Сделанные предположения предопределяют вид матриц, входящих в состав модели, они являются блочно-диагональными, количество блоков определяется рассматриваемыми формами собственности.

1. Блок моделирования потребности в трудовых, природных ресурсах и фондах

1.1. На основе демографического прогноза оценивается численность занятых в производстве для текущего периода

$$L = L(t),$$

где $L = (L^1 \dots L^M)$ – вектор ограничения по труду (экзогенная переменная).

1.2. На основании корректирующих коэффициентов определяются ограничения по труду для различных видов собственности

$$L^m = \kappa(\delta L^m) L,$$

где $\kappa(\delta L) = (\kappa(\delta L^1) \dots \kappa(\delta L^M))$ – корректирующие по уровню безработицы коэффициенты.

1.3. На основе прогноза оценивается количество ресурсов, поступаю-

ших в производство для текущего периода

$$R = R(t),$$

где $R = (R^1 \dots R^M)$ - вектор ограничения по ресурсам (экзогенная переменная).

1.4. С помощью корректирующих коэффициентов вычисляются ограничения по ресурсам для различных видов собственности

$$R^m = \kappa(\delta R^m) R,$$

где $\kappa(\delta R) = (\kappa(\delta R^1) \dots \kappa(\delta R^M))$ - корректирующие по излишку ресурсов коэффициенты.

1.5. На основании рассчитанных объёмов основных фондов для текущего и предыдущего периодов, а также валовых выпусков определяются коэффициенты матрицы фондоёмкости

$$b_{j,-1}^m = \frac{O\Phi_j^m}{X_{j,-1}^m},$$

где $B = \begin{pmatrix} B^1 & 0 \\ 0 & B^M \end{pmatrix}$ - матрица фондоёмкости. Так как для моделирования

целесообразно использовать суммарные по видам во всех отраслях фонды, матрицы B^m вырождаются в вектор-строку (экзогенная переменная); $O\Phi = (O\Phi_1^1 \dots O\Phi_n^M)$ - основные фонды на начало t -го периода (эндогенная переменная);

$X = (x_1^1 \dots x_n^M)$ - вектор валового выпуска (эндогенная переменная).

2. Блок межотраслевых связей

2.1. Учитывая потребности в различного рода ресурсах, определяется максимальный допустимый уровень производства

$$\begin{cases} X \rightarrow \max, \\ lX \leq L, \\ rX \leq R, \\ B_{-1}X \leq O\Phi, \end{cases}$$

где $l = \begin{pmatrix} l_1^1 & \dots & l_n^M & & & 0 \\ & 0 & & \ddots & & 0 \\ 0 & & & & l_1^1 & \dots & l_n^M \end{pmatrix}$ - матрица коэффициентов трудоёмкости;

$r = \begin{pmatrix} r_1^1 & \dots & r_n^M & & & 0 \\ & 0 & & \ddots & & 0 \\ 0 & & & & r_1^1 & \dots & r_n^M \end{pmatrix}$ - матрица коэффициентов затрат ре-

сурсов. Матрицы l, r заданы экзогенно.

2.2. Коэффициенты матрицы прямых затрат с учетом амортизационный отчислений принимают вид

$$\tilde{a}_{ij}^m = a_{ij}^m (1 + n_{ai}^m),$$

где $A = \begin{pmatrix} A^I & 0 \\ 0 & A^M \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов прямых затрат (экзогенная

переменная, которая вычисляется на каждом шаге моделирования, изменяется под влиянием НТП и производственных инвестиций в зависимости от формы собственности);

$\tilde{A}$ – матрица коэффициентов прямых затрат с учётом затрат по возмещению выбытия фондов (эндогенная переменная);

$$n_a = \begin{pmatrix} n_{a1}^I & \dots & n_{an}^M & & 0 \\ & 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & & & n_{a1}^I & \dots & n_{an}^M \end{pmatrix} \text{ – матрица коэффициентов амортизационных отчислений (экзогенная переменная).}$$

тизационных отчислений (экзогенная переменная).

2.3. Коэффициенты матрицы прямых затрат рассчитываются с учетом прироста оборотных фондов

$$\bar{a}_{ij}^m = \tilde{a}_{ij}^m + \frac{\Delta \text{Об}\Phi_i^m}{\sum_j \tilde{a}_{ij}^m x_j^m},$$

где $\bar{A}$ – матрица коэффициентов прямых затрат строится с учётом того факта, что отрасли, создающие прирост оборотных фондов, выведены из состава фондообразующих, а коэффициенты затрат по ним включены в матрицу (эндогенная переменная);

$\Delta \text{Об}\Phi = (\Delta \text{Об}\Phi_1^I \dots \Delta \text{Об}\Phi_n^M)$ – прирост оборотных фондов (экзогенная переменная).

2.4. Матрица коэффициентов прямых материальных затрат отраслей с учетом форм собственности

$$G = \begin{pmatrix} g_1^{II} & 0 & g_1^{IM} & 0 \\ 0 & g_n^{II} & 0 & g_1^{IM} \\ g_1^{MI} & 0 & g_1^{MM} & 0 \\ 0 & g_1^{MI} & 0 & g_n^{MM} \end{pmatrix},$$

$$g_{\varepsilon l}^{mk} = \begin{cases} \frac{\sum_j a_{ij}^m x_j^m + y_i^m - \sum_n w_i^{mn}}{\sum_j a_{ij}^m x_j^m + y_i^m}, m = k, \varepsilon = 1 \\ 0, \varepsilon \neq 1 \\ \frac{y_i^{mk}}{\sum_j a_{ij}^m x_j^m + y_i^m}, m \neq k, \varepsilon = 1 \end{cases},$$

g_i^{mk} фиксирует долю, которую составляет поток из отраслей, имеющих k -ю форму собственности в отрасли, имеющие m -ю форму собственности в общем потреблении продукции отраслей, имеющих m -ю форму собственности (экзогенная переменная).

2.5. На основе заказа на потребление и возможностей производства определяется размер вложений в основные и оборотные фонды

$$\bar{Y} = G^{-1} (E - G_{-1} \bar{A}_{-1}) X - \alpha Z,$$

где $\bar{Y} = (\bar{y}_1^1 \dots \bar{y}_n^M)$ - фиксированный конечный продукт (эндогенная переменная);

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & & & 0 \\ \vdots & & & \\ \alpha_n^1 & & & \\ \vdots & & & \\ \alpha_1^M & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \alpha_n^M \end{pmatrix} - \text{матрица, расщепляющий доход по видам продуктов}$$

(экзогенная переменная);

$Z = (Z^1 \dots Z^M)$ - часть доходов населения, которая идёт на потребление (эндогенная переменная).

$$2.6. Y = \alpha Z + \bar{Y}$$

где $Y = (y_1^1 \dots y_n^M)$ - вектор конечного использования продукции (эндогенная переменная);

$$2.7. \bar{Y} = \Delta O \Phi + \Delta O \phi \Phi + q$$

где $\Delta O \Phi = (\Delta O \Phi_1^1 \dots \Delta O \Phi_n^M)$ - капитальные вложения (эндогенная переменная);

$q = (q_1^1 \dots q_n^M)$ - вектор прочего конечного продукта (экзогенная переменная).

3. Блок «Прирост основных фондов»

3.1. Предполагается сохранение соотношения приростов основных и оборотных фондов

$$\Delta Ob\Phi = \phi \Delta O\Phi,$$

где $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1^I & \dots & \phi_n^M & & 0 \\ & 0 & & & 0 \\ 0 & & & \phi_1^I & \dots & \phi_n^M \end{pmatrix}$ - матрица, определяющая соотношение приростов основных и оборотных фондов.

$$3.2. O\Phi_{t+1} = O\Phi + \zeta^m \zeta^m \Delta O\Phi,$$

где $O\Phi = (O\Phi_1^I \dots O\Phi_n^M)$ - основные фонды на начало t -го периода (эндогенная переменная);

$$\zeta = \begin{pmatrix} \zeta_1^I & & 0 & & 0 \\ & \ddots & & & \\ 0 & & \zeta_n^I & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \zeta_1^M & 0 \\ 0 & & & & 0 & \zeta_n^M \end{pmatrix} - \text{матрица коэффициентов перевода ин-}$$

вестиций в абсолютные приросты фондов (экзогенная переменная);

$$\zeta = \begin{pmatrix} \zeta_1^I & 0 & & 0 \\ 0 & \zeta_n^I & & \\ & & \ddots & \\ & & & \zeta_1^M & 0 \\ 0 & & & 0 & \zeta_n^M \end{pmatrix} - \text{матрица коэффициентов перевода аб-}$$

солютных приростов фондов (экзогенная переменная).

Преимуществом данной модели является то, что создание общественного продукта в отраслевом разрезе производится с учетом различий условий производства по видам собственности. Предложенная модель позволяет:

- оценить структуру собственности в отраслевом разрезе;
- оценить уровень безработицы по видам собственности;
- оценить дефицит ресурсов по видам собственности;
- оценить потребность в основных фондах по видам собственности.

Данная модель может быть использована на макроэкономическом уровне при моделировании процессов производства и динамики собственности с учетом ресурсных возможностей.

Глава 8. МОДЕЛИ МИКРОЭКОНОМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

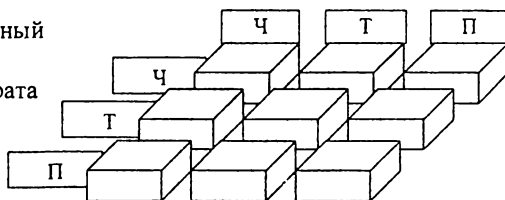
Свет держится равновесием.

Это равновесие во всем...

А. Валентинов

В этой главе рассматриваются модели равновесия в экономике. Интерес к ним повысился в последнее время в различных научных школах. Большое количество работ в этом направлении можно найти и в Internet [16, 17]. Особенностью моделей равновесия является то, что все они содержат очень большое количество элементов, в них исследуется поведение микроэкономических объектов – отдельных предприятий и потребителей. Модели являются статическими, их место в экономической страте можно изобразить таким образом:

общегосударственный
уровень;
экономическая страта



8.1. Оптимальность в микроэкономическом анализе

Понятие равновесия тесно связано с понятием оптимальности, то есть с проблемой наилучшего выбора производства и потребления в заданном сообществе участников экономического процесса.

Будем предполагать, что состояние экономики определяется вектором потребления x_i и вектором чистой продукции y_i . Назовем состояние экономики возможным, если выполняются следующие ограничения.

1. Состояние не противоречит физическим или технологическим условиям, ограничивающим деятельность каждого участника экономического процесса, то есть:

$x_i \in X, i = 1, m$ - потребители;

$y_j \in Y, j = 1, n$ - производители.

(8.1)

2. Удовлетворяет условию общего баланса

$$\sum_{i=1}^m x_{ih} = \sum_{j=1}^n y_{jh} + \omega_h, \quad h=1, \dots, l, \quad (8.2)$$

где ω_h - начальный запас h -того блага.

Вопрос состоит в том, как осуществить наилучший выбор между всеми возможными состояниями.

При выборе наилучшего состояния можно руководствоваться двумя принципами:

1-й принцип: выбор между двумя состояниями зависит только от потребления x_{ih} , соответствующего этим состояниям, а не непосредственно от производства y_{ih} , то есть целью производства является потребление индивидов.

2-й принцип: выбор между состояниями должен определяться предпочтениями самих потребителей, то есть каждый потребитель лучше кого бы то ни было знает, какое из двух состояний для него предпочтительнее.

Замечание. Возможна ситуация, когда общество осуществляет некоторое вмешательство, чтобы предостеречь индивидуумов от неудачного выбора, например, путем запрещения наркотиков, повышения цен на спиртные напитки и т.д. То есть коллективный выбор не всегда считается с индивидуальными предпочтениями.

Определение. Состояние E^0 называется *оптимумом Парето*, если оно возможно и если не существует никакого другого возможного состояния E^1 :

$$S_i(x_i^1) \geq S_i(x_i^0), i = 1, m$$

$(S_i(x_i))$ - функция полезности i -го потребителя),

со строгим неравенством ($>$), по крайней мере, для одного потребителя, то есть если невозможно увеличить удовлетворение некоторого потребителя, не уменьшив для всех остальных.

Обычно существует множество оптимумов по Парето.

Теория оптимума устанавливает соответствие между оптимальными по Парето состояниями и теми возможными состояниями, которыми является результатом деятельности различных участников экономического процесса при определенной системе цен. Это состояние будем называть "рыночным равновесием". То есть рыночное равновесие определяется векторами потребления x , ($i=1, m$), производства y , ($j=1, n$), цен P , доходами R_i , для которых выполняется соотношение (8.2) и при котором каждый потребитель максимизирует свое удовлетворение в пределах своего бюджета, а каждое предприятие – свою прибыль. Вектор цен считается единым для всех участников.

Для решения задачи рассмотрим 2 частных случая:

1) экономика без производства – распределение начальных запасов между потребителями;

2) экономика без потребления – организация производства.

Для определения оптимальной системы необходимо решить эти проблемы одновременно.

Рассмотрим первый случай – оптимум распределения.

Необходимо распределить начальные запасы ω_k между потребителями, если известны их возможности x_i и функции удовлетворения $S_i(x_i)$ (полезность).

Состояние E^0 определяется числами $x_{ih}^0, i=1, m; h=1, l$.

Предположим, что $x_i^0 \in \text{int}(X_i) \subset R^l, S_i \in D^2(R^l)$,

$S_i' \geq 0$ и не обращающиеся в 0 одновременно,

$S_i^0 = S_i(x_i^0)$.

Для того, чтобы E^0 было оптимумом, оно должно, в частности, максимизировать S_i на множестве возможных состояний при ограничении:

$$S_i = S_i^0, i = \overline{2, m} - \quad (8.3)$$

и быть локальным максимумом при тех же ограничениях.

Т.к. точка $x_i^0 \in \text{int}(X_i)$, ограничения на возможные состояния в окрестности E^0 сводятся к условиям баланса вида (8.2), который преобразовывается следующим образом:

$$\sum_{i=1}^m x_{ih} = \omega_h, \quad h = \overline{1, l}. \quad (8.4)$$

Чтобы состояние E^0 было локальным максимумом S_i при ограничении (8.4) и (8.3), необходимо, чтобы существовали множители Лагранжа - σ_h ($h=1, \dots, l$), λ_i ($i=1, \dots, m$) такие, что

$$\frac{\partial}{\partial x_{ih}} \left[\sum_{i=1}^m \lambda_i S_i(x_i) - \sum_{k=1}^l \sigma_k \sum_{i=1}^m x_{ih} \right]_{x_{ih}=x_{ih}^0} = 0, \quad (8.5)$$

причем $\lambda_1 \neq 0$, следовательно,

$$\exists \lambda_i, \sigma_k : \lambda_i S_{ih}' = \sigma_k, \quad h=1, \dots, l; \quad i=1, \dots, m, \quad (8.6)$$

где

$$S_{ih}' = \frac{\partial S_i}{\partial x_{ih}}(x_i^0) \quad (8.7)$$

Из соотношений (8.6) следует, что

$$\frac{S_{is}'}{S_{ir}'} = \frac{S_{\alpha s}'}{S_{\alpha r}'} \quad r, s=1, \dots, l; \quad i, \alpha=1, \dots, m. \quad (8.8)$$

Таким образом, в оптимальном состоянии предельная норма замещения блага s на благо r должна быть одинаковой для всех потребителей, и это должно выполняться для любой пары (s, r) . В противном случае состояние E^0 можно улучшить, изменяя распределения благ, таким образом, оно не является оптимальным.

Если рассматривать σ_h на цену блага h , то из уравнений (8.7), (8.8) следует, что для любого потребителя предельная норма замещения блага s на благо r равно отношению их цен.

Утверждение 1. Если E^0 – оптимум распределения такой, что для любого i вектор x_i^0 лежит внутри X_i и функции удовлетворения S_i , x_i удовлетворяют условиям:

- 1) множество X_i выпуклое, замкнутое и ограничено снизу, содержит 0 и для любого $x^1 \in X_1 \Rightarrow x^2 : x_h^2 \geq x_h^1, x^2 \in X_1$;
- 2) S – непрерывная, возрастает, то есть
- 3) если $x_h^1 > x_h^2$, то $S(x^1) > S(x^2)$;
- 4) существует S_i'' , такое, что $\sum S_i' \neq 0$;
- 5) S – строго квазивогнута, то есть если $S(x^2) \geq S(x^1)$
 $\forall x^1, x^2 \Rightarrow S(x) \geq S(x^1) \quad \forall x = \alpha x^1 + (1-\alpha)x^2 \quad \alpha \in (0,1)$,

то существуют цены p_h и доходы R_i такие, что x_i^0 максимизирует $S_i(x_i)$ при бюджетном ограничении $p x_i \leq R_i$ для всех i . Состояние E^0 , цены p_h и доходы R_i определяют рыночное равновесие.

Утверждение 2 (достаточные условия). Если E^0 – возможное состояние и существуют $p_h > 0$ ($h=1, l$): x_i^0 максимизирует $S_i(x_i)$ в X_i при ограничениях $p x_i \leq p x_i^0$ и выполняются условия 1)-2) утверждения 1, то E^0 является оптимальным распределением.

Доказательство проводится от противного.

Рассмотрим теперь второй случай - оптимум производства.

Задача состоит в определении ситуаций, в которых производственная деятельность множества предприятий приводит к наибольшему выпуску конечной продукции. Результатом производства является суммарный вектор чистой продукции:

$$y_h = \sum_{j=1}^n y_{jh}, \quad h=1, \dots, l.$$

Замечание. y_{jh} может быть больше 0, это соответствует производству блага h , если y_{jh} меньше 0, то это соответствует потреблению блага в качестве ресурса.

Определения. Состояние E^0 , определяемое векторами y_i^0 , возможно, если $y_i^0 \in Y_i, \forall j = 1, n$.

Состояние E^0 является *оптимумом производства или эффективным*, если оно возможно и если не существует E^1 такого, что $y_h^1 \geq y_h^0, h=1, \dots, l$ со строгим неравенством по крайней мере для одного h .

Замечание. Часто блага подразделяются на 3 категории: первичные, промежуточные, конечные. Тогда для первичных имеет место

$$\sum_j y_r^0 \geq \omega_r;$$

для промежуточных $-\sum_j y_r \geq 0$;

а для конечных $\sum_j y_r$ может быть разделена между потребителями так,

чтобы предоставить каждому из них возможный вектор потребления.

Предположим, что выпуск продукции y_j удовлетворяет ограничению

$$f_j(y_j)=0, \quad (8.9)$$

причем f_j - дифференцируемая производственная функция.

Найдем необходимые условия.

Если E^0 оптимум производства, то оно максимизирует y_l при ограничениях

$$\begin{cases} y_h = y_h^0, & h = 2, \dots, l, \\ f_j(y_j) = 0, & j = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (8.10)$$

Тогда существуют множители Лагранжа $\sigma_l = 1, \sigma_h, -\mu_j, h = 2, l; j = 1, n$:

$$\frac{\partial}{\partial y_{jh}} \left[\sum_{h=1}^l \sigma_h \sum_{j=1}^n y_{jh} - \sum_{j=1}^n \mu_j f_j(y_j) \right]_{y_{jh}=y_{jh}^0} = 0 \quad (8.11)$$

Из последних соотношений следует, что

$$\sigma_h = \mu_j f'_{jh}, \quad (8.12)$$

$$f'_{jh} = \frac{\partial f_j}{\partial y_{jh}}(y_j^0). \quad (8.13)$$

Система (8.12)-(8.13) дает соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{f'_{js}}{f'_{jr}} &= \frac{f'_{\beta s}}{f'_{\beta r}}, \quad r, s = 1, l; \quad j, \beta = 1, n, \\ f'_{jr} &\neq 0, \quad f'_{\beta r} \neq 0. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Таким образом, если E^0 - оптимум производства, то предельная норма замещения блага r благом s должна быть одной и той же на всех предприятиях, для всех (r, s) . Если, как и раньше интерпретировать σ_h как цену блага h , то, следовательно, для каждого предприятия относительная эффективность равна отношению соответствующих цен.

Утверждение 3 (необходимые условия). Пусть E^0 является оптимумом производства и для всех j технологические ограничения, удовлетворяющие предположению выпуклости имеют вид $f_j(y_j) \leq 0, \sum \mathcal{F}_j'(y_j^0) \neq 0, f_j$ — дифференцируемая. Тогда существуют цены p_h такие, что y_j^0 максимизирует $p y_j$ на множестве Y_j всех технологически возможных y_j .

Утверждение 4 (достаточные условия). Пусть y_j^0 технологически возможны и существуют цены $p_h : y_j^0$ максимизирует $p y_j$ на множестве Y_j . Тогда состояние E^0 , определяемое вектором y_j^0 является оптимумом производства.

Теперь можно объединить результаты исследования и перейти к оптимальности по Парето.

Предположим, что состояние E^0 является оптимумом по Парето и x_i^0 являются внутренними точками соответственно множеств X_i . В этом состоянии должен достигаться локальный максимум S_1 на множестве возможных состояний при условиях:

$$S_i(x_i) = S_i(x_i^0), i = 2, m, \quad (8.15)$$

$$f_j(y_j) = 0, j = 1, n, \quad (8.16)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ih} = \sum_{j=1}^n y_{jh} + \omega_h, \quad h = 1, l. \quad (8.17)$$

Тогда существует множители Лагранжа

$$\lambda_1 = 1, \lambda_i(i = \overline{2, m}), -\mu_j(j = \overline{1, n}), -\sigma_h(h = \overline{1, l}):$$

такие, что

$$\left. \frac{\partial L}{\partial x_{ih}} \right|_{E^0} = \left. \frac{\partial L}{\partial y_{jh}} \right|_{E^0} = 0, \quad (8.18)$$

$$\text{где } L = \sum_{i=1}^m \lambda_i S_i(x_i) - \sum_{j=1}^n \mu_j f_j(y_j) - \sum_{h=1}^l \sigma_h \left[\sum_{i=1}^m x_{ih} - \sum_{j=1}^n y_{jh} \right].$$

Из соотношений (8.18) следует, что

$$\lambda_i S'_{ih} = \sigma_h, \mu_j f'_{jh} = \sigma_h, \quad (8.19)$$

или

$$\frac{S'_{is}}{S'_{ir}} = \frac{S'_{\alpha s}}{S'_{\alpha r}} = \frac{f'_{js}}{f'_{jr}} = \frac{f'_{\beta s}}{f'_{\beta r}}; \left(\begin{matrix} r, s = \overline{1, l} \\ i, \alpha = \overline{1, m} \\ j, \beta = \overline{1, n} \end{matrix} \right). \quad (8.20)$$

Система равенств (8.20) показывает, что в состоянии оптимума предельная норма замещения блага s на благо r одинакова для всех потребителей и равна предельной норме преобразования, единой для всех предприятий.

Рассматривая σ_h как цену блага h , уравнения (8.19) можно интерпретировать как необходимые условия равновесия для различных потребителей и производителей.

Таким образом, имеет место следующее.

Утверждение 5. Пусть E^0 – состояние оптимума по Парето и таково, что для любого потребителя i вектор $x_i^0 \in \text{in}(x_i)$, функции удовлетворения S_i, x_i отвечают условиям 1)-4) утверждения 1 и для любого предприятия j технологические ограничения удовлетворяют предположению выпуклости и имеют вид $f_j(y_j) \leq 0$, f_j – дифференцируемая функция, все производные которой одновременно не обращаются в 0.

Тогда существуют цены p_h всех благ и доходы R_i всех потребителей:

- 1) x_i^0 максимизирует $S_i(x_i)$ при условии $px_i \leq R_i, i = 1, m$;
- 2) y_j^0 максимизирует pu_j при условии $f_j(y_j) \leq 0, j = 1, n$.

Полученные результаты поддаются простой геометрической интерпретации.

Рассмотрим случай одного предприятия и одного производителя, и пусть x_1, x_2 – количества благ, потребляемых потребителем (рис. 8.1).

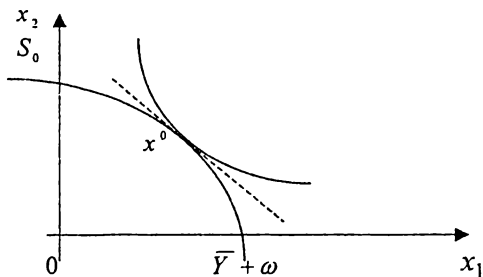


Рис. 8.1. Геометрическая интерпретация рыночного равновесия

Пусть линия $\bar{Y} + \omega$ представляет границу множества реализуемых векторов потребления, то есть векторов вида $y + \omega, y \in Y$.

Точка x^0 представляет вектор потребления в состоянии оптимума. Кривая безразличия S^0 , которая не должна содержать точек, расположенных слева от $\bar{Y} + \omega$, проходит через точку x^0 . Если, согласно утверждению 5, S^0 обращена вогнутостью вверх, а $\bar{Y} + \omega$ – вогнутостью вниз, то эти кривые имеют в точ-

ке x^0 общую касательную. Вектор цен в таком случае есть нормаль к касательной и доход потребителя равный px^0 .

Имеет место и обратное утверждение, синтез утверждений 2 и 4.

Утверждение 6 (достаточные условия оптимальности по Парето). Пусть E^0 – возможное состояние и существуют цены $p_h \geq 0, (h=1, l): \forall i=1, m$ вектор x_i^0 максимизирует $S_i(x_i)$ на множестве X_i при условии, что $px_i \leq px_i^0, \forall j=1, n$ y_j^0 максимизирует py_j на множестве Y_j . Также S_i, x_i удовлетворяют условиям 1)-2) утверждения 1. Тогда E^0 является оптимумом по Парето.

Особый интерес представляет исследование равновесия для случая заданной функции общественной полезности.

Обычно имеется множество оптимальных состояний, что связано с наличием частичного упорядочения. Чтобы устранить неопределенность, необходимо ввести полное упорядочение, причем таким образом, чтобы оно не противоречило имевшемуся частичному.

Будем предполагать, что состояния можно классифицировать согласно значениям, которые принимает функция общественной полезности, аргументами которой являются m значений полезности потребителей.

$$U = U(S_1, \dots, S_M) \quad (8.21)$$

Обычно считают, что U дифференцируема. Обозначим $u_i' = \frac{\partial U}{\partial S_i}$. Непро-

тиворечивость полного и частичного упорядочения приводит к $u_i' > 0 \quad \forall S_i$.

Замечания.

1. Чтобы определить такую функцию общественной полезности, необходимо вначале приписать каждому потребителю определенную функцию удовлетворения, то есть выбрать ее форму.

2. Общественная полезность устанавливает арбитраж для выбора между выигрышами в удовлетворении различных потребителей. То есть общественная полезность предполагает существование на коллективном уровне нормы предельного замещения между различными потребителями. Выбор, осуществляемый на основании такой полезности, зависит не только от сопоставления эффективности производства и распределения производства, он отражает также принятые этические нормы распределения.

Рассмотрим условия, которые должны удовлетворять состоянию, являющемуся оптимумом, соответствующему значению функции общественной полезности. Как и раньше будем считать, что $x_i \in \text{int}(X_i)$. Необходимо отыскать условия максимума функции (8.21) при условиях (8.16), (8.17). Если $-\mu_i, -\sigma_h$ соответствующие множители Лагранжа, то получаем:

$$\begin{aligned} u_i' S_{ih}' &= \sigma_h, \\ \mu_j f_{jh}' &= \sigma_h, (h = 1, l; i = 1, m; j = 1, n) \end{aligned} \quad (8.22)$$

Для того, чтобы состояние было оптимумом, соответствующим максимуму функции U , необходимо не только выполнение равенства по нормам замещения (8.20), но также для каждого блага $u_i' S_{ih}' = Const$ для любого i -го потребителя. Достаточно, чтобы это равенство выполнялось для одного блага, например l -го, принятого в качестве единицы счета, то есть выполнять функцию денег, тогда оно выполнено и для всех остальных в силу (8.20).

Произведение $u_i' S_{ih}'$ может интерпретироваться как цена p_h блага h . Тогда имеем:

$$dU = \sum_{i=1}^m u_i' dS_i = \sum_{i,h} u_i' S_{ih}' dx_{ih} = \sum_{i,h} p_h dx_{ih}. \quad (8.23)$$

Таким образом, приращения общественной полезности при любом малом смещении из точки оптимума равно приращению общественного потребления, причем вычисленного на основе цен, связанных с оптимумом.

Замечание. В прикладных экономических исследованиях сравнивают различные варианты планов по величине прироста потребления национального дохода, выраженного в постоянных ценах. Это справедливо, если эталонное (исходное) состояние, по отношению к которому производятся изменения, является приблизительно оптимальным с точки зрения распределения благ между потребителями.

Проведенные исследования моделей равновесия позволяют сделать следующие выводы.

1. Утверждения 2, 4, 6 устанавливают, что рыночное равновесие является оптимумом Парето. Такое равновесие представляет собой эффективное решение проблемы организации производства и распределения благ.

2. Можно сознательно отказаться от состояния рыночного равновесия в пользу другого состояния, если с точки зрения социальной справедливости это другое распределение более предпочтительно. То есть не существует причин, по которым состояние равновесия рынка совпадает с максимумом общественной полезности E^1 .

3. Утверждения 1, 3, 5 говорят, что любое состояние оптимума по Парето является равновесием некоторого рынка, если ему сопоставить цены p_h и доходы R_i , но для осуществления состояния E^1 может оказаться необходимым произвести перераспределение начальных ресурсов, что приводит к возникновению проблем, связанных с налогообложением.

8.2. Конкурентное равновесие

Здесь рассматриваются вопросы о том, как в сложных сообществах реализуется разделение труда, производство, обмен и потребление благ без какого-либо внешнего воздействия. Целью является также объяснить, как устанавливаются цены, по которым блага обмениваются на рынках.

Теория конкурентного равновесия пренебрегает ситуациями несовершенной конкуренции, согласованности индивидуальных решений, описывающими экономику без денег и неполной занятости.

Как и раньше будем предполагать, что цены едины для всех участников (но здесь они являются экзогенными, то есть определяемыми величинами), каждый участник рассматривает их независимо от собственных решений.

Рассмотрим уравнение равновесия для экономики распределения

Пусть имеется m потребителей, (x_{ih}) - потребление i -го потребителя. Согласованность между индивидуальными выборами обеспечивается выполнением:

$$\sum_{i=1}^m x_{ih} = \omega_h, h = 1, 2, \dots, l. \quad (8.24)$$

где ω_h – начальные запасы, которые доступны к использованию в данной экономике.

Рыночное равновесие будет иметь место, если цены p_i и количества x_{ih} удовлетворяют уравнениям (8.24), и каждый потребитель, рассматривающий данные цены, максимизирует свое удовлетворение $S_i(x_i)$ в пределах бюджетного ограничения. Необходимо определить p_h, x_{ih} .

Пусть каждый потребитель обладает экзогенно (внешним образом) заданным доходом R_i и максимизирует свое удовлетворение $S_i(x_i)$ при условиях:

$$x_i \in X_i, \quad (8.25)$$

$$(p, x_i) \leq R_i. \quad (8.26)$$

Предположим, что существует l агентов – распределителей благ, обладающих исходными ресурсами ω_h , которые они уступают по таким ценам, что потребители могут все их раскупить. Каждый агент распределяет только одно благо. Пусть $\xi_{ih}(p, R_i)$ – функция спроса потребителя, которая определяется однозначно. Тогда функция спроса на благо h есть:

$$\xi_h(p) = \sum_{i=1}^m \xi_{ih}(p, R_i). \quad (8.27)$$

Условия равновесия (8.24) принимают вид:

$$\xi_h(p) = \omega_h, h = 1, l. \quad (8.28)$$

Решением системы (8.28) являются равновесные цены, а соответствующие значения x_{ih} определяются по ним с помощью функций $\xi_{ih}(p, R_i)$. Система (8.28) выражает требование, что цены должны выбираться так, чтобы обеспе-

чить равновесие одновременно на l рынках.

Замечания.

1. Если принять, что функция спроса однородная 0-го порядка, то изменение единицы, с помощью которой измеряются R_i , p_h , не затрагивает равновесия.

2. Гипотеза, согласно которой агенты-распределители не зависят от потребителей, может быть принята только для ситуаций, в которых существует центральный орган управления производством. В общем случае доходы R_i зависят от цен p_h , так как потребители одновременно являются обладателями исходных ресурсов ω_h .

Перейдем к равновесию в экономике обмена.

Предположим, что потребитель i обладает изначально количеством ω_{ih} блага h , и все вместе они владеют всем количеством исходных ресурсов, то есть:

$$\sum_{i=1}^m \omega_{ih} = \omega_h, h = \overline{1, l}. \quad (8.29)$$

Определение x_{ih} сводится к определению количеств различных благ, приобретенных ($x_{ih} - \omega_{ih} > 0$) или уступленных ($x_{ih} - \omega_{ih} < 0$). Доходы R_i определяются следующим образом:

$$R_i = \sum_{h=1}^l p_h \omega_{ih}, i = \overline{1, m}, \quad (8.30)$$

где величины ω_{ih} заданы экзогенно.

Спрос потребителя зависит от цен — $\xi_{ih}(p; p\omega_i)$, где ω_i являются экзогенно заданными величинами $\omega_i = (\omega_{ih})$. Этот спрос является однородной функцией p_h нулевого порядка. Уравнения равновесия имеют вид:

$$\begin{aligned} x_{ih} &= \xi_{ih}(p; p\omega_i), \\ \xi_h(p) &= \sum_{i=1}^m \xi_{ih}(p; p\omega_i) = \omega_h, \\ i &= \overline{1, m}, \quad h = \overline{1, l}. \end{aligned} \quad (8.31)$$

Система (8.31) определяет лишь относительные цены p_h / p_l , одна из которых p_l может быть задана произвольно.

Из уравнений (8.31) следует задача Вальраса:

$$\sum_{h=1}^l p_h [\xi_h(p) - \omega_h] \equiv 0. \quad (8.32)$$

Равновесие в экономике распределения и в экономике обмена является примерами рыночного равновесия.

Замечание. Цены общего равновесия зависят от трех факторов:

большей или меньшей редкости, выражаемой величиной ресурсов ω_{ih} ;
 большей или меньшей полезности, определяемой функциями спроса ξ_{ih} ;
 распределения прав на общий запас ресурсов, которыми различные потребители обладают непосредственно в силу обладания количествами ω_{ih} или косвенно благодаря наличию доходов R_i .

Относительно влияния этих факторов на цены справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. Цена блага растет, если оно становится более редким.

Утверждение 2. Цена блага растет, если оно становится более полезным.

Утверждение 3. Цена блага увеличивается, если потребители, оказавшиеся в выгоде при изменении распределения прав, имеют особо большую склонность тратить прирост своих ресурсов на это благо.

Вместе эти утверждения рассматриваются как "законы рынка".

Теория оптимума не указывает, как могут быть достигнуты конструктивные состояния оптимума, выбираемого сообществом. Разработанные теоретические методы трудно применить на практике. Управляющая система, которая использует методы теории оптимума, должна знать не только функцию общественной полезности U , но и начальные запасы ω_h , все производственные функции f_j и все функции удовлетворения S_i , а в силу большой размерности задачи это практически невозможно. Одним из выходов здесь может явиться предварительное разбиение потребителей и производителей на относительно однородные группы, например, с помощью методов кластерного анализа, предполагая, что их действия в ответ на управления будут одинаковы.

Общие принципы определения оптимума таковы.

Будем предполагать, что различные участники готовы действовать совместно и соблюдать правила, направленные к осуществлению предприятия. Они составляют единое звено и не преследуют собственной цели. Есть еще один участник – управляющая система. Каждый участник обладает априори определенной информацией. Предприятие j знает свою f_j и технологическое множество Y_j . Потребитель i знает, какому множеству должен принадлежать его вектор потребления X_i и свои предпочтения S_i , а также начальное количество каждого блага ω_{ih} . Управляющая система знает лишь количества ω_h начальных запасов, если они находятся в общественной собственности, и обладает критерием, в соответствии с которым выбирается план.

Целью является определение или прогнозирование состояния, которое должно установиться в обществе, то есть наборы x_i, y_j каждого участника.

Действия управляющей системы заключаются в том, что она передаст участникам информацию о подготавливаемом плане – уточняемые показатели. На базе общих показателей каждый участник формирует ответ–предположение.

Пусть P^S – план, A^S – ответы участников, B^S – уточняемые показатели, тогда схема процедуры выглядит следующим образом:

$$B^1 \rightarrow A^1 \rightarrow \dots \rightarrow B^S \rightarrow A^S \rightarrow \dots \rightarrow B^{S-1} \rightarrow A^{S-1} \rightarrow P^S.$$

Чтобы полностью определить такую процедуру, необходимо решить следующие вопросы:

какими величинами являются уточняемые показатели, предположения и с чего начинается процедура?

по каким правилам составляются ответы участников?

как вычисляются уточняемые показатели на каждом этапе?

как определяется план и является ли план P^S – оптимальным?

Существует множество процедур, которые могут использоваться с целью определения равновесия: процедура "нащупывания", процедура, учитывающая количественные цели потребителя, процедура, включающая моделирование деятельности предприятий.

В первой процедуре ("нащупывание") уточняемыми показателями являются цены, а ответами индивидуумов – наборы потребительских векторов, а доходы R_i потребителей заданы и им известны. Если на каком-то этапе спрос полностью совпадает с предложением, то процедура заканчивается. Полученный план является оптимумом Парето и согласуется с заданным распределением доходов. Эта процедура обладает низкой скоростью сходимости к решению.

В процедуре с количественными целями применяется противоположный подход, при котором задаются не цены, а количество блага, выделяемое каждому потребителю. Уточняемыми показателями являются векторы потребления x_i^s , а ответами – векторы относительных цен π_i^s , компоненты которого π_{ih}^s предоставляют собой предельную норму замещения блага h на благо l , принятого за единицу счета. Критерием оптимума является условие равенства предельных норм замещения между различными благами для всех потребителей. Эта процедура требует значительно больших усилий по подготовке решения, поскольку уточняемые показатели должны быть адресованы каждому потребителю, число которых велико.

Рассмотренные процессы предусматривали только проведение прямых расчетов без попытки представить условия, в которых протекает деятельность каждого участника. В третьей процедуре используется упрощенная модель баланса спроса и предложения и технологические ограничения. Обмен информацией служит для уточнения модели и плана. Целью является максимизация функции общественной полезности. В таком случае задача представляет собой задачу нелинейного программирования, которую можно решить методом множителей Лагранжа. Уточняемыми показателями являются цены, а ответами – технологии, предоставленные предприятиями.

Замечания. 1. Потребители и производители, изучив процедуру в целом, могут оказаться заинтересованными в преднамеренном искажении своих ответов с целью получить на следующем этапе наиболее выгодные для них цены или программы. Таким образом, чтобы рассмотреть процедуру в целом, необходимо охарактеризовать ее исход в условиях, когда участники не обязаны давать корректные ответы.

2. В экономике обмена с конечным числом потребителей **не существует** процедуры, приводящей к оптимуму Парето, и при этом гарантирующей, что участники дают корректные ответы. Однако существуют процедуры, приводящие к оптимуму независимо от искажения информации.

8.3. Коллективные решения

В использовавшихся до сих пор моделях взаимосвязи между участниками сведены к минимуму. Физические ограничения потребителей и технологические множества производителей считались не зависящими от других участников. Общими считались только ограничения, связанные с балансом производства и потребления.

Однако существуют ситуации, к которым эта модель неприменима – ситуации внешнего воздействия. Например, "внешнее благоприятное воздействие" – существование производства на одном предприятии снижает издержки на другом предприятии (фруктовые посадки и пчеловод). Предприятие, деятельность которого идет на пользу другому, не имеет возможности лишить его получаемой выгоды или продать свою услугу. Возможна и обратная ситуация, когда деятельность какого-либо предприятия наносит вред соседним (загрязнение окружающей среды), а страдающие предприятия не могут потребовать возмещения издержек.

Другой тип взаимодействия порождается существованием сферы общественных (коллективных) услуг (оборона, охрана окружающей среды, искусство).

Рассмотрим, как необходимо дополнить теорию оптимума и равновесия, если учитывать ситуации, при которых деятельность одного предприятия оказывает внешнее воздействие на условия производства другого.

Пусть имеется всего 2 предприятия ($j=1, 2$) и один потребитель. Имеется три блага, первые два из которых производятся предприятиями, а второе потребляется ими в качестве ресурса ("живой труд"), но может также использоваться потребителем в форме свободного времени. Максимальное количество, которое может обеспечить потребитель – ω_3 . Пусть x_1, x_2 – производимые количества первых благ, x_3 – количество третьего блага, потребляемого потребителем, и его функция удовлетворения – $S(x_1, x_2, x_3)$.

Будем предполагать, что внешние воздействия одного предприятия на другое тем больше, чем выше уровень его производственной деятельности, т.е. в нашей модели зависит только от объема выпускаемой продукции.

Первое предприятие выпускает продукцию в количестве x_1 , затрачивая при этом труд (ресурс) в количестве a_{13} , т.е.

$$x_1 = g_1(a_{13}, x_2), \quad (8.33)$$

где $g_1(\cdot)$ – производственная функция первого предприятия.

Аналогично для второго предприятия

$$x_2 = g_2(a_{23}, x_1). \quad (8.34)$$

Пусть g'_{13} , g'_{23} – производные производственных функций по аргументам ресурса a_{13} , a_{23} , а g'_{12} , g'_{21} – производные производственных функций по x_2 , x_1 соответственно. Производная $g'_{12} > 0$, если в результате действия второго предприятия первое получает благоприятное внешнее воздействие, и отрицательна – в противном случае.

Условие равновесия между спросом и предложением имеет вид:

$$a_{13} + a_{23} + x_3 = \omega_3. \quad (8.35)$$

Состояние системы определяется пятью числами: x_1 , x_2 , x_3 , a_{13} , a_{23} и, в конце концов, представляет распределение третьего блага для использования на предприятиях, и на свободное время.

Состояние системы является равновесием, если имеющиеся пять чисел его определяющие максимизируют функцию удовлетворения S при ограничениях (8.33)–(8.35). Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид:

$$L = S(x_1, x_2, x_3) + \lambda_1 \{x_1 - g_1(a_{13}, x_2)\} + \lambda_2 \{x_2 - g_2(a_{23}, x_1)\} + \lambda_3 \{a_{13} + a_{23} + x_3 - \omega_3\}.$$

Приравнявая к нулю частные производные и исключая множители Лагранжа, получаем

$$\frac{S'_1}{S'_3} = \frac{1}{g_{13}} - \frac{g'_{21}}{g_{23}}, - \frac{S'_2}{S'_3} = \frac{1}{g_{23}} - \frac{g'_{12}}{g_{13}}. \quad (8.36)$$

Рассматривая третье благо в качестве единицы счета, обозначим p_1 отношение предельной нормы замещения между первым и третьим благом $\frac{S'_1}{S'_3}$ и

аналогично p_2 – между вторым и третьим. Тогда для предприятий, на которые оказываются внешние воздействия, условия оптимума имеют вид:

$$p_1 g'_{13} = 1 - g'_{21} g'_{13} / g'_{23}, \quad (8.37)$$

$$p_2 g'_{23} = 1 - g'_{12} g'_{23} / g'_{13}. \quad (8.38)$$

Замечание. Полученный оптимум не соответствует рыночному равновесию как было ранее. Необходимо выяснить, чем они отличаются и какие формы организации позволили бы осуществить хорошее распределение ресурса между тремя пользователями.

В соотношении (8.37) добавочный член обращается в нуль, если $g'_{21} = 0$, это соответствует ситуации, когда первое предприятие не оказывает влияния на второе. Точнее, величина $g'_{21} g'_{13}$ описывает приращение производства блага 2, вызванное внешним воздействием дополнительной единицы труда, использованной первым предприятием. Вся дробь есть количество труда, которое предприятие 2 может сэкономить, не сокращая производства своей продукции, когда на предприятии 1 используется дополнительная единица труда. Для осуществления состояния необходимо, чтобы дроби в соотношениях (8.37)–(8.38) были меньше единицы.

Будем теперь предполагать, что только первое предприятие оказывает внешнее воздействие. В идеале следовало бы установить плату за услугу, которую одно предприятие оказывает другому. Тогда можно рассмотреть 4-е благо,

которое производится первым предприятием в количестве x_1 и поглощается целиком вторым предприятием в виде затрат a_{21} . Оно имеет цену p_4 . Тогда прибыль первого предприятия составит $(p_1 + p_4)x_1 - a_{13}$, отсюда получаем предельное равенство

$$(p_1 + p_4)g'_{13} = 1. \quad (8.39)$$

Второе предприятие имеет прибыль $p_2x_2 - a_{23} - p_4a_{24}$, отсюда получаем

$$p_2g'_{23} = 1, \quad p_4g'_{24} = p_2g'_{21} = p_4. \quad (8.40)$$

Подставляя в (8.39) значение p_4 , найденное из (8.40), получаем аналогичное (8.37).

Такое рыночное равновесие не имеет смысла, поскольку первое предприятие не имеет возможности лишить второе права пользоваться услугой, а следовательно, не может и брать плату за нее. Для разрешения этой трудности можно предположить, что предприятия приходят к соглашению, имеющему своей целью максимизировать совокупный доход обоих предприятий, то есть определить a_{13} , a_{23} , максимизирующие

$$p_1x_1 + p_2x_2 - a_{13} - a_{23} = p_1g_1(a_{13}) + p_2g_2(a_{23}, g_1(a_{13})) - a_{13} - a_{23}.$$

Эти значения удовлетворяют двум равенствам

$$p_1g'_{13} + p_2g'_{21}g'_{13} - 1 = 0, \quad p_2g'_{23} - 1 = 0,$$

откуда вытекают равенства (8.37)-(8.38).

Замечания.

1. Полученный результат показывает, что наличие внешнего воздействия на предприятия не является препятствием к определению цен, которые правильно оценивают предельные нормы замещения для общества, но это будет препятствием к децентрализации решений, связанных с производством.

2. В случае внешних экономических воздействий заключение соглашения может осуществляться и без давления на партнера. Например, если возрастание выпуска первого предприятия дает второму большую выгоду, чем оно стоит первому.

3. На практике, если деятельность одного участника причиняет ущерб другому, то попытки второго приплатить ему, чтобы он снизил свою деятельность, как правило, осуждаются общественным мнением, что и приводит к ограничениям права собственности и возмещения ущерба.

Альтернатива соглашению между предприятиями состоит в том, что общество оказывает помощь производствам, которые порождают внешнее благоприятное воздействие, и облагает налогами деятельность, вызывающую внешние неблагоприятные воздействия. Эта помощь и налоги могут планироваться так, чтобы скорректировать распределение ресурсов.

Допустим, что второе предприятие не осуществляет внешних воздействий (т.е. $g'_{12} = 0$), а первое получает субсидию или платит налоги пропорционально своему выпуску. Пусть β - размер субсидии ($\beta > 0$) или $(-\beta)$ - размер налога ($\beta < 0$). Прибыль $(p_1 + \beta)x_1 - a_{12}$ максимальна, когда

$$p_1g'_{13} = 1 - \beta g'_{13}.$$

Это уравнение совпадает с (8.37), если β выбрано из условия

$$\beta = g'_{21} / g'_{23}. \quad (8.41)$$

В случае благоприятного внешнего воздействия величина (8.41) строго положительна. Тогда равновесие приводит к хорошему (оптимальному) распределению ресурсов.

В общем случае условия оптимальности могут быть реализованы посредством ведения субсидий и налогов достаточно разнообразных для того, чтобы способствовать деятельности, порождающей внешне благоприятные воздействия и снижать деятельность, вызывающую неблагоприятные.

Замечания.

1. Распыленность внешних воздействий сильно усложняет задачу определения величины налога или субсидии.

2. Если средства от налогообложения (или получение субсидии) поступают потребителю, то сумма этих платежей должна определяться независимо от решений, которые принимает потребитель.

Аналогичные проблемы возникают, когда на потребности или вкусы одного потребителя влияет поведение других. Например, если забота о благе окружающих или стремление подражать своему окружению приводит к предпочтениям, зависящим не только от собственного выбора, но также и от выборов других.

Рассмотрим случай двух потребителей и двух благ. Состояние экономики описывается 4 числами: x_{11} , x_{12} , x_{21} , x_{22} . Физические ограничения представлены в виде

$$x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} = \omega.$$

Пусть первое благо соответствует товару широкого потребления, а второе – предметам роскоши. Если оба индивида завистливы, то функция удовлетворения первого $S_1(x_{11}, x_{12}, x_{22})$ уменьшается с ростом x_{22} , аналогично для второго $S_2(x_{21}, x_{22}, x_{12})$ уменьшается с ростом x_{12} . Пусть

$$Q'_1 = \frac{\partial S_1}{\partial x_{22}}, \quad Q'_2 = \frac{\partial S_2}{\partial x_{12}}.$$

Состояние, являющееся оптимумом Парето, удовлетворяет соотношениям

$$\frac{S'_{12}}{S'_{11}} = 1 + \frac{Q'_2}{S'_{21}}, \quad -\frac{S'_{22}}{S'_{21}} = 1 + \frac{Q'_1}{S'_{11}}.$$

С другой стороны, если цены обоих благ одинаковы (вследствие равновесия в производстве) и потребители не завистливы, то потребление второго блага слишком высоко, так как уровень полезности обоих потребителей повысится, если одновременно повысить и потребление блага 1 за счет уменьшения потребления блага 2.

Взаимодействие потребителей проявляется и в случае, когда одно благо является общественным.

Предположим, что существует три блага, и первое является общественным, которое производит единственное предприятие, но которое используют

два других в качестве ресурсов. Производственная функция $y_1 = g_1(y_2, y_3)$. Для i -ого потребителя $S_i(x_1, x_2, x_3)$ – функция удовлетворения.

Общее количество потребляется всеми индивидами так, что каждый из них использует его целиком, не затрагивая потребление других.

Найдем необходимые условия оптимума. Если E^0 – состояние оптимума, то оно максимизирует $S_i(x_1, x_2, x_3)$ при ограничениях:

$$\begin{aligned} S_i(x_1, x_2, x_3) &= S_i^0, \quad i = \overline{2, m}; \\ y_1 &= g_1(y_2, y_3), \quad x_1 = y + \omega_1; \\ \sum_{i=1}^m x_{ih} &= y_h + \omega_h, \quad h = 2, 3. \end{aligned} \quad (8.42)$$

Составляем функцию Лагранжа и в соответствии с необходимым условием максимума после исключения множителя Лагранжа получаем:

$$\sum_{i=1}^m \frac{S'_{i1}}{S'_{i2}} = - \frac{1}{g_2}; \quad (8.43)$$

$$\frac{S'_{i2}}{S'_{i3}} = \frac{g_2}{g_3}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (8.44)$$

Условие (8.44) такое же, как было раньше, оно выражает тот факт, что предыдущие нормы замещения между благами 2 и 3 одинаковые для всех участников.

Условие (8.43) касается общественного блага и означает, что в точке оптимума сумма предельной нормы замещения общественного блага 1 по отношению к благу 2 (предположим, для личного потребления) должна быть равна предельной норме замещения между блоками при производстве.

Возникает вопрос, является ли оптимум рыночным равновесием, то есть существуют ли подходящие цены. В отличие от благ 2 и 3, предложенных для личного потребления, которые имеют единую цену для всех участников – p_2 , p_3 , общественное благо имеет столько цен, сколько рассматривается участников: p_1 – для предприятия производителя, p_{i1} – для i -ого потребителя. Очевидно, что должно быть выполнено

$$\sum_{i=1}^m p_{i1} = p_1. \quad (8.45)$$

Другими словами, организация, регулирующая использование общественных благ получает взносы потребителей, компенсирует предприятию стоимость блага и имеет сбалансированный бюджет. Если предприятия максимизируют свою прибыль в состоянии E^0 при технологических ограничениях функций g_2 , g_3 , то необходимо выполнение следующих равенств:

$$\frac{p_1}{p_2} = - \frac{1}{g_2}, \quad \frac{p_2}{p_3} = \frac{g_2}{g_3}. \quad (8.46)$$

Если потребитель максимизирует свое удовольствие в состоянии E^0 при бюджетных ограничениях:

$$p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 \leq p_1x_1^0 + p_2x_2^0 + p_3x_3^0,$$

то выполняются равенства

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{S'_{11}}{S'_{12}}; \quad \frac{p_2}{p_3} = \frac{S'_{12}}{S'_{13}}. \quad (8.47)$$

Таким образом, для состояния оптимума E^0 существует равновесная цена, если выполняются условия (8.43)-(8.44). Верно и обратное.

Замечание. Полученное состояние оптимума можно считать лишь "Псевдоравновесием рынка", поскольку потребитель, зная, что благо 1 является общественным, не заинтересован в обнаружении своего спроса, чтобы пользоваться им, не неся затрат. То есть величина финансирования i -м потребителем блага 1 не будет выплачена добровольно. Её можно рассматривать как налог. Основная задача – определить величину этого налога.

В случае финансирования общественного блага по подписке при отсутствии централизованного регулирования или предварительного соглашения между участниками единственным вариантом, обеспечивающим автономию участников, является финансирование общественного блага по модели, когда каждый потребитель делает взнос с целью обеспечить увеличение производства общественного блага. Но поскольку каждый исходит только из собственных интересов, его вклад (S_i) будет наименьшим. В таком случае реализуется низкий уровень потребления общественного блага.

Во втором варианте используется общественное регулирование. Необходимо установить процедуры коллективного решения для определения общего уровня потребления x_1 общественного блага, и определить взносы t_i всех участников. Коллективное решение состоит в выборе бюджета из $m+1$ числа $(x_1, t_1, \dots, t_m)$. В таком случае всякое равновесие является оптимумом, так как бюджет устанавливается одновременно в результате совместных действий потребителей и общественной власти. Единственное ограничение заключается в том, что этот бюджет не должен быть отвергнут единогласно всеми участниками.

Возможен еще один вариант потребления общественного блага, оно представляют собой благо, предназначенное для личного потребления, но его качество зависит от величины общего спроса (дороги – чем меньше автомобилей, тем больше качество). В этом случае предприятия общественного обслуживания принимают решение о выпуске с учетом того, что социальная значимость дополнительной единицы равна не цене, которую платят потребители, а меньше. Следовательно, уровень общественного потребления должен быть установлен так, чтобы величина социальной значимости была равна предельным издержкам.

Вопросы для самопроверки

1. Пусть предпочтения потребителей описываются функциями $S_1(x_1)=x_1$, $S_2(x_2)=1-x_2$, $x_1, x_2 \in [0; 1]$. Какие из приведенных состояний (x_1, x_2) являются оптимумами Парето в экономике распределения:
 - 1.1. $(0, 1)$;
 - 1.2. $(1, 0)$;
 - 1.3. $(1/2, 1/2)$;
 - 1.4. $(0, 0)$?
2. Какие из функций предпочтения недопустимы:
 - 2.1. $S(x)=3x_1+5x_2-6x_3$;
 - 2.2. $S(x)=(x_1-x_2)^2$;
 - 2.3. $S(x)=(x_1+x_2+2x_3)^{1/2}$;
 - 2.4. все ?
3. Какие из вариантов цен на блага не соответствуют никакому оптимуму распределения, если предпочтение потребителя описывается функцией $S(x)=2x_1+3x_2+4x_3$:
 - 3.1. $(4, 6, 8)$;
 - 3.2. $(2, 1, 3)$;
 - 3.3. $(1, 2, 3)$;
 - 3.4. все?
4. Какие из состояний являются оптимумом Парето для системы с одним потребителем и одним производителем, если производственная функция производителя $f(x)=x_1^2+x_2^2-1$, а предпочтения потребителя описываются функцией $S(x)=x_1+x_2$:
 - 4.1. $(1/2, 1/2)$;
 - 4.2. $(0.2, 0.2)$;
 - 4.3. $(1, 1)$;
 - 4.4. $(0.7, 0.7)$?
5. Пусть предпочтения потребителей описываются функциями $S_1(x_1)=x_1^2$, $S_2(x_2)=x_2^3$, $x_1, x_2 \in [0; 1]$. Какие из приведенных состояний (x_1, x_2) являются оптимумами Парето в экономике распределения:
 - 5.1. $(0, 0)$;
 - 5.2. $(1, 1)$;
 - 5.3. $(1/2, 1/2)$;
 - 5.4. не существует?
6. Какие из функций предпочтения недопустимы:
 - 6.1. $S(x)=x_1+x_2+x_3$;
 - 6.2. $S(x)=9x_1-x_2^2+x_3$;
 - 6.3. $S(x)=6x_1+x_2^2+\ln(x_3)$;
 - 6.4. все?

7. Какие из вариантов цен на блага не соответствуют никакому оптимуму распределения, если предпочтение потребителя описывается функцией $S(x) = 5x_1 + 8x_2 + 2x_3$:
- 7.1. (50, 80, 20);
 - 7.2. (2, 8, 5);
 - 7.3. (25, 40, 10);
 - 7.4. все?
8. Какие из состояний являются оптимумом Парето для системы с одним потребителем и одним производителем, если производственная функция производителя $f(x) = x_1 + x_2 - 1$, а предпочтения потребителя описываются функцией $S(x) = (x_1 - 1)^2 \cdot x_2 + 2/9$:
- 8.1. (0, 0);
 - 8.2. (1, 1);
 - 8.3. (2/3, 1/3);
 - 8.4. (1/3, 2/3)?

Рекомендованная литература

1. Багриновский К.А., Матюшок В.М. Экономико-математические методы и модели (микроэкономика): Уч. пособие. – М.: Изд-во РУДН, 1999. – 184 с.
2. Крушевский А.В. Справочник по экономико-математическим моделям и методам. – К.: Техніка, 1982. – 208 с.
3. Перегудов Ф.И., Тарасенко Ф.П. Введение в системный анализ: Учебн. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 1989. – 368 с.
4. Забродский В.А. Структурно-функциональные модели общества. – Харьков: Бизнес Информ, 1999. – 48 с.
5. Математическое моделирование экономических процессов / Под ред. Е.Г. Белоусова, Ю.Н. Черемных, Х. Кёрта, К. Отто. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 232 с.
6. Никайдо Х Выпуклые структуры и математическая экономика. – М.: Мир, 1972. – 520 .
7. Колемаев В.А. Математическая экономика: Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 240 с.
8. Симоненко В.К. Регионы Украины. Проблемы развития. – К.: Наукова думка, 1997. – 264 с.
9. Гранберг А.Г., Селиверстов В.Е., Суслов В.И. и др. Оптимизационные межрегиональные межотраслевые модели. – Новосибирск: Наука, Сиб. отделение, 1989. – 256 с.
10. Гранберг А.Г. Динамические модели народного хозяйства. – М.: Экономика, 1985. – 240 с.
11. Красс И.А. Математические модели экономической динамики. – М.: Сов. радио, 1985. – 280 с.
12. Забродский В.А., Кизим Н.А. Собственность, экономическая безопасность и государство. – Харьков: АО "Бизнес Информ", 1997. – 96 с.
13. Забродский В.А., Полякова О.Ю., Пирогова С.Е. Эволюционная модель собственности // Вісник Харківського національного університету. Економічна серія. – № 457. – 1999. – С. 145-151.
14. Забродский В.А., Кононова Е.Ю., Полякова О.Ю., Пирогова С.Е. Отношения собственности в моделировании производственных процессов // Бизнес Информ. - № 11-12. – 1999. – С. 74-76.
15. Полякова О.Ю., Пирогова С.Е. Моделирование процессов управления собственностью // Вісник Харківського національного університету. - № 456. – 2000. – С. 77-80.
16. Маленко Э. Лекции по микроэкономическому анализу. – М.: Наука. – 1985. – 390 с.
17. <http://econwpa.wustl.edu>

Ответы и решения

Глава 3

1.3; 3.2; 5.2; 7.3; 9.2; 11.2; 13.3 *Решение:* из уравнения распределения продукции получаем для второй отрасли $Y_2 = X_2 - \sum_{j=1}^3 X_{2j}$, следовательно, $Y_2 = 250 - 20 - 16 - 34 = 180$; 14.2 *Решение:* из уравнения потребления получаем для чистой продукции выражение $X_j - \sum_{i=1}^3 X_{ij}$, поэтому, например, для первой отрасли чистая продукция составит $140 - (15 + 2 + 25) = 80$; 15.3 *Решение:* трудоемкость отраслей определяется коэффициентами затрат труда, то есть отношением затрат живого труда к валовому выпуску отрасли, поэтому для первой отрасли получаем $t_1 = 1000/140 = 7,14$, для второй – $t_2 = 1500/250 = 6$, для третьей – $t_3 = 2500/300 = 8,33$, следовательно, наиболее трудоемкой является третья отрасль; 17.3; 19 – математические; 21.2; 23.3; 25.3.

Глава 4

1.2; 3.2; 5.3; 7.2; 9.2; 11.2; 13 *Решение:* Для определения торговых коэффициентов воспользуемся соотношением $g_i^{12} = \frac{w_i^{12}}{x_i^2 - S_i^2}$, $i=1, 2$. Из условия задачи имеем $w_1^{12} = 10$, $x_1^2 = 200$, $S_1^2 = 50 - 10 = 40$, следовательно, $g_1^{12} = 10 / (200 - 40) = 0,0625$. Аналогично и для второй отрасли.

Глава 5

1.2; 3.3; 5.1.

Глава 6

1.3; 3.1; 5.1; 7.3; 9.1; 11.3; 13.3; 15.3; 17.2; 19.1; 21.3; 23.4; 25.3; 27.3; 29.4.

Глава 8

1.3; 3.2, 3.3; 5.2; 7.2.

Содержание

ВВЕДЕНИЕ	3
Глава 1. МОДЕЛИ И МОДЕЛИРОВАНИЕ	4
1.1. Основные понятия моделирования	4
1.2. Классификация математических моделей	6
1.3. Требования к математическим моделям экономических систем	8
Глава 2. СТРУКТУРНО-ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ОБЩЕСТВА	9
2.1. Стратификация процессов жизнедеятельности	11
2.2. Состав процессов и видов деятельности в стратифицированных системах	13
Глава 3. МОДЕЛЬ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА	17
3.1. Схема межотраслевого баланса в натуральном выражении	17
3.2. Межотраслевой баланс в денежном выражении	18
3.3. Система коэффициентов межотраслевого баланса	21
3.4. Модификации основной схемы межотраслевого баланса	25
Вопросы для самопроверки	29
Глава 4. МЕЖРЕГИОНАЛЬНЫЕ МЕЖОТРАСЛЕВЫЕ БАЛАНСЫ	33
4.1. Схема синтеза региональных балансов	33
4.2. Основная схема межрегионального межотраслевого баланса	37
4.3. Межрегиональный межотраслевой баланс Мозеса-Ченери (Moses L., Chenery H.)	39
4.4. Региональные модели с коэффициентами ввоза	40
4.5. Коэффициенты полных материальных затрат продукции	42
4.6. Межрегиональный баланс открытой системы регионов	44
Вопросы для самопроверки	52
Глава 5. ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ	55
5.1. Оптимизация фонда потребления	55
5.2. Сглаживание в задачах оптимизации фонда потребления	61
5.3. Оптимизация нормы производственного накопления	65
Вопросы для самопроверки	68
Глава 6. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРНЫЕ МОДЕЛИ	69
6.1. Динамическая модель Леонтьева	69
6.2. Модификации динамической модели Леонтьева	75
6.3. Модель Неймана	79
6.4. Принцип Самуэльсона	85
6.5. Динамическая модель Канторовича	87
6.6. Основные элементы прикладных динамических моделей	90
6.7. Классификация межотраслевых прикладных моделей	93
6.8. Модели экономического цикла	96
Вопросы для самопроверки	99
Глава 7. МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТНОШЕНИЙ СОБСТВЕННОСТИ	103
7.1. Эволюционная модель собственности	103
7.2. Отношения собственности в моделировании производственных процессов	110
Глава 8. МОДЕЛИ МИКРОЭКОНОМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ	116
8.1. Оптимальность в микроэкономическом анализе	116
8.2. Конкурентное равновесие	125
8.3. Коллективные решения	129
Вопросы для самопроверки	135
Рекомендованная литература	137
Ответы и решения	138
Содержание	139

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИКИ

Учебное пособие

Авторы: Клебанова Тамара Семеновна
Забродский Вячеслав Адамович
Полякова Ольга Юрьевна
Петренко Владимир Леонидович

Ответственный за выпуск Клебанова Т.С.

Ответственный редактор Седова Л.Н.

Редактор Демченко Н.И.

Корректор Флоринская Е.Ю.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІКИ

Навчальний посібник

Автори: Клебанова Тамара Семенівна
Забродський В'ячеслав Адамович
Полякова Ольга Юріївна
Петренко Володимир Леонідович

ISBN 966-676-011-8

План 2001 г. Поз. № 28-П.

Подп. к печ. *10.08.2001* Формат 60 × 90 1/16. Бумага ТАТРА. Печать офсетная.
Усл.-печ. л. 8,75. Уч.-изд. л. 10,0. Тираж *400* экз. Зак. № *448*

Свидетельство о внесении в Государственный реестр субъектов изда-
тельского дела Дк №481 от 13.06.2001 г.

Издатель и изготовитель — издательство ХГЭУ, 61001, г. Харьков, просп. Ленина, 9а

