

И. Ф. Кавинов

ИНЕРЦИАЛЬНАЯ НАВИГАЦИЯ В ОКОЛОЗЕМНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

« МАШИНОСТРОЕНИЕ »

И. Ф. Кавинов

ИНЕРЦИАЛЬНАЯ НАВИГАЦИЯ В ОКОЛОЗЕМНОМ ПРОСТРАНСТВЕ



Москва
«Машиностроение» 1988

ББК 39.62
К12
УДК 629.78.783

Рецензент д-р техн. наук *О.А.Бабич*

Кавинов И.Ф.

К12 Инерциальная навигация в околоземном пространстве. — М.: Машиностроение, 1988. — 144 с: ил.

ISBN 5-217-00139-9

Рассмотрены вопросы ориентации и навигации космических аппаратов (КА) с трех- и четырехосными гиросtabilизаторами, а также с бесплатформенными инерциальными навигационными системами (БИНС) для участка выведения и орбитального полета. Описаны способы астрокоррекции инерциальных систем и восстановление ориентации аппарата после неуправляемого полета.

Для инженерно-технических работников, специализирующихся в области управления КА.

К $\frac{3607000000-129}{038(01) - 88}$ 129-88

ББК 39.62

ISBN-5-217-00139-9

© Издательство "Машиностроение", 1988

ВВЕДЕНИЕ

Навигация и ориентация космического аппарата являются частными задачами в общей задаче автоматического управления его движением.

Систему приборов, позволяющую решать навигационную задачу, называют навигационной системой [2, 6, 7, 25].

К навигационной системе могут относиться также и приборы, позволяющие контролировать угловую ориентацию аппарата (например, информацию, получаемую с гироскопических стабилизаторов, используют не только в задачах угловой ориентации и стабилизации аппарата, но и при решении навигационной задачи).

Различают автономные, неавтономные и полуавтономные навигационные системы.

В автономной системе вся информация о движении вырабатывается на борту аппарата. В неавтономной системе кроме информации, вырабатываемой на борту аппарата, используется информация о движении, передаваемая с Земли или другого пункта управления.

Для одного и того же летательного аппарата на различных участках траектории движения используемый приборный состав навигационной системы может быть существенно различным. Так, например, при выведении КА на орбиту искусственного спутника Земли (ИСЗ) используется главным образом информация, получаемая с помощью гиростабилизированной платформы (ГСП). При спуске аппарата на Землю или Луну могут быть подключены радиовысотомеры больших и малых высот, а также доплеровские измерители скорости.

Инерциальная навигация — метод космической навигации, позволяющий определять движение КА на активном участке полета с помощью установленных на КА акселерометров.

Инерциальная навигационная система является автономной.

Систему приборов, позволяющую в процессе полета аппарата контролировать его угловое положение, в дальнейшем будем называть также системой ориентации. Поэтому к системе ориентации будем относить трехстепенную и четырехстепенную гиростабилизированные платформы, одноосные гироскопические стабилизаторы, а также астродатчики, позволяющие определить ориентацию аппарата относительно выбранных астроориентиров (звезд, Солнца, Луны и планет). К системе ориентации можно отнести также и гироскопические измерители угловой скорости.

Информация об углах ориентации аппарата, получаемая с приборов системы ориентации, содержит погрешности, обусловленные "уходами"

гироскопов. Поэтому отклонения (уходы) гиросtabilизированной платформы, обусловленные различными возмущающими факторами, довольно быстро накапливаются во времени. Вследствие этих отклонений ограничивается время использования ГСП для управления ориентацией летательного аппарата. Для увеличения времени работы ГСП необходимо в процессе полета аппарата определять и исключать накопившиеся погрешности в ее ориентации.

Погрешности в ориентации ГСП определяются с помощью измерения углов линий визирования астроориентиров телескопами (астровизирами).

Одной из задач, решаемой инерциальной системой ориентации, является восстановление требуемой ориентации аппарата после неуправляемого полета. Эта задача также решается с помощью телескопов, позволяющих ориентировать аппарат относительно астроориентиров [20].

Визирование наземных ориентиров позволяет уточнить параметры орбиты, на которой находится КА, а также аргумент широты, определяющий его местоположение на орбите.

Орбиты ИСЗ, а также траектории выведения на орбиту являются сравнительно плоскими. Поэтому основным программным углом на участке выведения является угол тангажа ϑ_0 , который изменяется примерно от 0 до 90° . Отклонения от расчетного значения углов ориентации аппарата (тангажа, рыскания и вращения) в процессе выведения на орбиту сравнительно невелики и не превышают $3 \dots 5^\circ$, и только при отделении последней ступени ракеты-носителя угловые отклонения аппарата вследствие малой эффективности управляющих органов могут достигать значений $10 \dots 15^\circ$.

Трехстепенная ГСП при ориентации наружной оси карданного подвеса вдоль продольной оси аппарата, а оси подвеса платформы — перпендикулярно плоскости траектории выведения не накладывает никаких ограничений на величины углов вращения и тангажа. И только угол рыскания аппарата вследствие ограниченности угла поворота внутренней рамки относительно наружной не должен превышать $15 \dots 20^\circ$, что не позволяет применять трехстепенную ГСП на аппаратах, предназначенных для совершения больших маневров, т.е. для аппаратов с пространственной траекторией выведения. В этом случае может быть применена система ориентации с четырехстепенной ГСП [28] или инерциальная бесплатформенная система ориентации.

Прежде чем перейти к рассмотрению вопросов ориентации, необходимо кратко рассмотреть схемы и принципы действия приборов инерциальных систем ориентации.

1.1. ГИРОСКОПИЧЕСКИЕ ДАТЧИКИ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ

В гироскопических датчиках угловой скорости (ДУС) чувствительным элементом является гироскоп с двумя степенями свободы [2, 23]. Схема прибора, предназначенного для измерения угловой скорости КА ω_y , приведена на рис. 1.1. Быстро вращающийся вокруг оси Z ротор 1 вместе с рамкой 2 (кожух гидродвигателя) может поворачиваться вокруг оси X . При появлении у КА угловой скорости ω_y вокруг оси Y рамка 2 под действием возникающего гироскопического момента

$$\bar{M}_x = \bar{H} \times \bar{\omega}_y, \quad (1.1)$$

где H – кинетический момент ротора гироскопа, определяемый выражением

$$H = J_p \Omega, \quad (1.2)$$

где J_p – момент инерции ротора; Ω – угловая скорость ротора, поворачивается относительно оси X .

Поворот гидродвигателя под действием гироскопического момента будет продолжаться до тех пор пока момент, создаваемый пружиной 3, не уравнивает гироскопический момент

$$M_x = H \omega_1 \cos \beta, \quad (1.3)$$

где β – угол поворота гидродвигателя вокруг оси X .

При малых β , уравнение гироскопического момента можно записать в виде

$$M_x = H \omega_y.$$

Вращение гидродвигателя вокруг оси X описывается уравнением

$$J\ddot{\beta} + D\dot{\beta} + C\beta = H\omega_y + M_T, \quad (1.4)$$

где J – момент инерции гидродвигателя относительно оси X ; D – коэф-

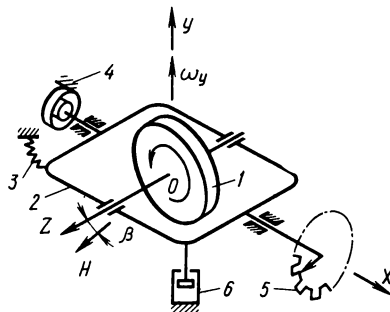


Рис. 1.1

фициент момента, создаваемого демпфером 6; C — коэффициент момента, создаваемого пружиной; M_T — момент сил трения в подшипниках выходной оси гиродвигателя.

В установившемся состоянии ($\dot{\beta} = 0$, $\ddot{\beta} = 0$) и при малых углах имеем

$$\beta_{уст} = (H\omega_y/C) + (M_T/C). \quad (1.5)$$

При малых моментах трения

$$\beta_{уст} = H\omega_y/C, \quad (1.6)$$

т.е. угол поворота гиродвигателя пропорционален угловой скорости КА ω_y .

Для измерения всех трех составляющих угловой скорости на КА устанавливают комплект из трех приборов, выходные оси которых ориентируются ортогонально друг другу.

Для измерения угла поворота гиродвигателя β применяют потенциометрические или индуктивные датчики 5.

Выходное напряжение U , снимаемое с датчика при малых углах β , определяется зависимостью

$$U = k\beta, \quad (1.7)$$

где k — крутизна характеристики датчика.

На выходной оси гиродвигателя кроме датчика угла 5 установлен моментный датчик (задатчик) 4, представляющий собой двигатель, статор которого крепится к корпусу прибора, а ротор — на выходной оси гиродвигателя.

С помощью датчика моментов можно задавать КА программную угловую скорость, что обычно делается при астроориентации [20].

При отклонении гиродвигателя (рамки) на угол β с датчика угла поворота рамки снимается сигнал $U = k\beta$, который после усиления подается на исполнительный орган системы управления (рулевую машину).

Под воздействием момента, создаваемого исполнительным органом, КА начинает вращаться. С началом вращения КА у ротора гиродвигателя появляется гироскопический момент M_G , пропорциональный угловой скорости КА ω . Как только гироскопический момент M_G станет равным моменту M_d , развиваемому датчиком момента, пружина вернет рамку гиродвигателя в нулевое положение ($\beta = 0$), и на исполнительный орган прекратится подача сигнала. КА же будет продолжать вращаться по инерции с угловой скоростью ω до тех пор, пока на датчик момента подается ток I_d . С прекращением подачи тока I_d на датчик моментов, гироскопический момент M_G , возникший в результате вращения КА, отклонит рамку гиродвигателя в другую сторону. Сигнал, снимаемый в этом случае с датчика угла, обусловит отклонение исполнительного органа, под действием которого прекратится вращение КА.

Датчики угловой скорости (ДУС) применяют главным образом в автоматах стабилизации летательных аппаратов. В последнее время были сделаны попытки использовать их также в качестве датчиков первичной информации в бесплатформенных инерциальных системах навигации (БИНС) [6, 9, 16, 26]. При этом возникло ряд проблем:

датчики должны измерять в широком диапазоне угловые скорости КА. Минимальная угловая скорость $\omega_{\min}$, измеряемая прибором, должна быть соизмерима с угловой скоростью Земли $\omega_3 = 0,00007291 \text{ с}^{-1}$, максимальная же угловая скорость КА может достигать $0,1 \dots 0,2 \text{ с}^{-1}$. Осуществление измерений в таком широком диапазоне встречает значительные конструктивные трудности.

На участке выведения аппарата на орбиту имеют место изгибные колебания корпуса аппарата. Вследствие этого на угловую скорость аппарата, рассматриваемого как твердое тело, будут накладываться угловые скорости мест крепления прибора, возникшие в результате изгибных колебаний его корпуса. Кроме того, из-за больших продольных ускорений, создаваемых тягой двигателя, и аэродинамических нагрузок имеют место вибрационные колебания мест крепления приборов. Вследствие этого на сигнал U , снимаемый с датчика угла β , будут наложены помехи от вибрационных колебаний корпуса датчика.

Широкий диапазон частот изгибных и вибрационных колебаний затрудняет выделение без искажения полезного сигнала, характеризующего угловые колебания аппарата как твердого тела. Поэтому на участке выведения КА на орбиту ИСЗ использование ДУСов для определения ориентации аппарата в ближайшее время практически невозможно. ДУСы могут найти применение в бесплатформенных инерциальных системах ориентации, предназначенных для ориентации КА на орбите искусственных спутников Земли, где нет изгибных и продольных колебаний корпуса аппарата.

1.2. ИНТЕГРИРУЮЩИЙ ПОПЛАВКОВЫЙ ГИРОСКОП

Интегрирующий поплавковый гироскоп применяют как чувствительный элемент в ГСП.

Интегрирующий поплавковый гироскоп — гироскоп с двумя степенями свободы относительно основания, снабженный демпфером, который осуществляет интегрирование гироскопического момента, возникающего при вращении основания. Угол поворота гиродвигателя в интегрирующем гироскопе обычно мал и не превышает долей градуса [28].

Схема интегрирующего поплавкового гироскопа (гироблока) показана на рис. 1.2. Ротор 2 находится внутри поплавка 3, который заключен в герметический цилиндрический кожух 4. На оси вращения поплавка находятся датчик угла 5 и датчик момента 1.

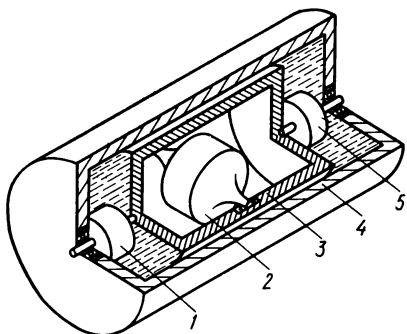


Рис. 1.2

Полость между корпусом прибора и поплавком заполняется жидкостью большой плотности. Жидкость подбирается так, чтобы массы вытесненной жидкости и поплавка были равны. Благодаря этому достигается разгрузка подшипников поплавка, а следовательно, повышается точность прибора. Зазор между цилиндрической поверхностью поплавка и внутренней поверхностью корпуса подбирается так ($\sim 0,2$ мм), чтобы жидкостное трение было строго

пропорционально скорости поворота поплавка.

Свойства жидкости (плотность, объем, вязкость) существенно зависят от ее температуры. Поэтому для поддержания постоянства температуры поплавковый гироскоп снабжают автоматическим регулятором температуры.

Уравнение движения поплавка относительно выходной оси имеет вид

$$J\ddot{\beta} + D\dot{\beta} = H\dot{\alpha} + M_T, \quad (1.8)$$

где J — момент инерции поплавка вокруг выходной оси; D — коэффициент демпфирующего момента; H — кинетический момент ротора; α — угол поворота корпуса; β — угол поворота поплавка; M_T — момент сил трения.

По окончании переходного процесса при малых M_T и J и при большом коэффициенте D

$$\dot{\beta} = H\dot{\alpha}/D. \quad (1.9)$$

Интегрируя выражение (1.9) и полагая, что $\beta(0) = 0$, получаем

$$\beta = H\alpha/D, \quad (1.10)$$

т.е. угол поворота поплавка β пропорционален углу поворота α корпуса гироскопа. Это важное свойство интегрирующего поплавкового гироскопа используется для измерения угловых отклонений ГСП. Кроме того, интегрирующие гироскопы применяются также для разворота платформы при приведении КА к новой требуемой ориентации.

Основным фактором, обуславливающим погрешности поплавковых приборов, является нестабильность температуры жидкости. С изменением температуры плотность и вязкость жидкости изменяются, что при-

водит к нарушению основного условия — взвешивания поплавка. При этом изменяется положение центра масс поплавка относительно его оси вращения, что вызывает увеличение разбаланса, а вследствие этого и появление возмущающего момента от действия на прибор переносных ускорений.

Оценить теоретически влияние всех возмущающих факторов (трения, гистерезиса упругих элементов и др.) на стабильность характеристик гиросузда задача весьма трудная.

Поэтому такие характеристики гиросуздов, как максимальная и минимальная скорости, скорость дрейфа и порог чувствительности датчика получают путем испытаний в наземных условиях.

Вследствие дрейфа чувствительных элементов будут накапливаться во времени угловые отклонения платформ гиросtabilизаторов. Поэтому некорректируемые ГСП используют только в течение сравнительно небольшого промежутка времени, например, при выведении КА на орбиту.

Для того чтобы ГСП использовать в течение более длительного времени, необходимо в процессе полета КА определять, а затем и учитывать в бортовых алгоритмах накопившиеся погрешности в ориентации платформы.

1.3. ОДНООСНЫЙ ГИРОСКОПИЧЕСКИЙ СТАБИЛИЗАТОР

Одноосный гироскопический стабилизатор применяется для удержания платформы от вращения вокруг ее оси подвеса.

Принципы построения одноосного стабилизатора используются также и в трехстепенной ГСП.

Принципиальная схема одноосного гироскопического стабилизатора показана на рис. 1.3.

Принципы работы прибора

При появлении у корпуса прибора 6, а вместе с ним и у платформы 1 угловой скорости ω_y , интегрирующий гироскоп 2 начнет прецессировать вокруг своей выходной оси OX . Напряжение, снимаемое с датчика угла прецессии $U = k\beta$, подается на усилитель 3, а затем и на двигатель 5. Двигатель 5 через редуктор 4 будет поворачивать платформу 1 в обратном направлении.

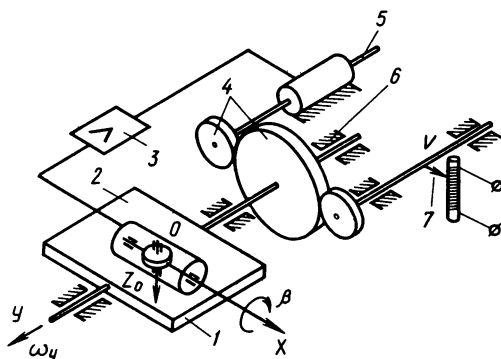


Рис. 1.3

Следящий привод, обладая высокой чувствительностью, все время будет стремиться привести систему в положение равновесия, т.е. $U = 0$, $\beta = 0$, $\alpha = 0$. Таким образом, при появлении у корпуса прибора угловой скорости ω_y платформа будет поворачиваться относительно корпуса так, чтобы ее ориентация в инерциальном пространстве оставалась неизменной. Угол поворота платформы относительно корпуса прибора или поворот корпуса прибора вокруг оси подвеса платформы будет измерен потенциометрическим датчиком 7, с выхода которого снимается командный сигнал $U_{\kappa k\alpha}$.

В том случае, если требуется развернуть платформу для ее ориентации, на датчик момента интегрирующего гироскопа подается ток $I_{\text{д}}$. Под действием момента $M_z = kI_{\text{д}}$, развиваемого датчиком, рамка гироскопа начинает разворачиваться с угловой скоростью

$$\dot{\beta} = kI_{\text{д}}/D. \quad (1.11)$$

Сигнал $U = k\beta$, снимаемый с датчика угла, подается на исполнительный двигатель 5, который через редуктор 4 будет поворачивать платформу. При появлении у платформы угловой скорости ω ротор гироскопа будет развивать относительно выходной оси поплавок гироскопический момент $M_{\Gamma} = -H\omega$, а в установившемся режиме будет иметь место следующее равенство:

$$M_{\text{д}} + M_{\Gamma} = 0 \quad (1.12)$$

или

$$kI_{\text{д}} = H\omega,$$

Следовательно, при выполнении условия (1.12) $\dot{\beta} = 0$, а угол поворота платформы α будет определяться соотношением

$$\alpha = \int_0^t \omega dt = \frac{k}{H} \int_0^t I_{\text{д}} dt. \quad (1.13)$$

Таким образом, пока на датчик момента подается ток $I_{\text{д}}$, платформа будет разворачиваться с угловой скоростью

$$\omega = kI/H. \quad (1.14)$$

Необходимо также отметить, что дрейф поплавкового гироскопа приводит к тому, что платформа начинает разворачиваться вокруг своей оси. После подачи в автомат стабилизации сигнала U_{κ} , снимаемого с датчика сигнала, начнет разворачиваться и КА, изменяя свою ориентацию в инерциальном пространстве.

1.4. ТРЕХСТЕПЕННАЯ ГИРОСТАБИЛИЗИРОВАННАЯ ПЛАТФОРМА

ГСП несет на себе акселерометры или интеграторы линейных ускорений, измеряющие кажущееся ускорение или кажущуюся скорость КА в строго определенных направлениях, задаваемых положением ГСП.

Для исключения влияния угловых колебаний на ГСП устанавливают карданный подвес, который при некоторых ограничениях на углы поворота КА не нарушает первоначальной ориентации платформы (рис. 1.4). Акселерометры 14, установленные на ГСП с карданным подвесом, сохраняют свою ориентацию в инерциальном пространстве. На рис. 1.4 приведена схема системы стабилизации заданной ориентации ГСП, включающей в себя три следящие системы с исполнительными органами, расположенными на осях карданного подвеса. Чувствительные элементы — поплавковые интегрирующие гироскопы, измеряющие угловые скорости

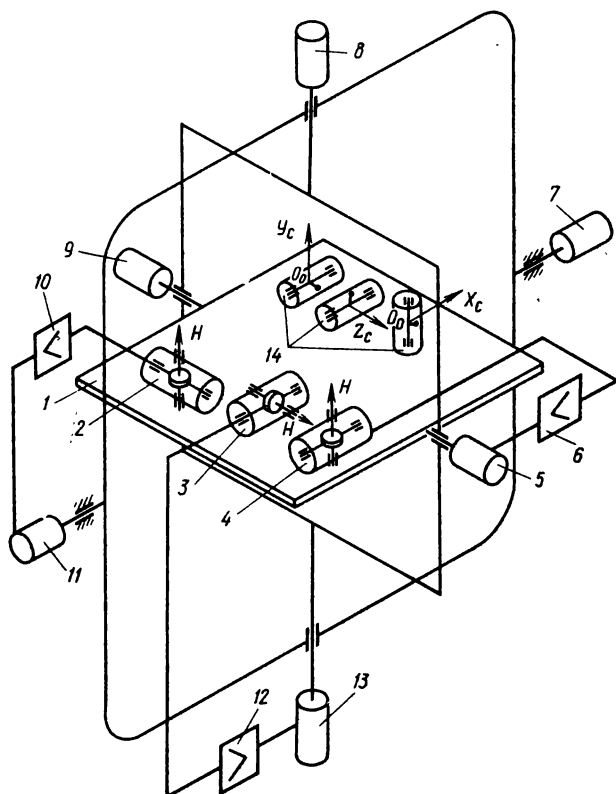


Рис. 1.4

платформы $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, находятся на самой платформе. Здесь же показаны акселерометры, оси которых образуют прямоугольный трехгранник $X_c Y_c Z_c$.

Плоскость платформы $Z_c X_c$ совпадает с плоскостью горизонта старта. Ось $O_0 X_c$ ориентирована по заданному направлению движения, а ось $O_0 Y_c$ совпадает с вертикалью старта. Ось $O_0 Z_c$ ориентируется таким образом, чтобы система была правой.

Для траекторий, расположенных в плоскости $X_0 Y_0$, ось наружной рамки подвеса чаще всего ориентируется по продольной оси аппарата OX . В этом случае с командного датчика 7 снимается сигнал, пропорциональный углу вращения аппарата φ (см. рис. 1.4).

Ось внутренней рамки подвеса платформы на старте ориентируется параллельно оси OZ_0 . С командного датчика 9, расположенного на оси внутренней рамки подвеса платформы, снимается сигнал, пропорциональный углу тангажа ϑ . С датчика 8, расположенного на оси промежуточной рамки подвеса, снимается сигнал, пропорциональный углу рыскания аппарата ψ .

Принцип работы системы стабилизации. При появлении у платформы 1 угловых скоростей $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ интегрирующие гироскопы 2, 3, 4 будут прецессировать вокруг своих осей. Электрические сигналы, пропорциональные углам прецессии β_i , подаются на усилители 6, 10, 12, а затем на исполнительные органы 5, 11, 13, которые разворачивают платформу обратно в исходное положение.

Таким образом, трехступенная ГСП представляет собой приборно реализованную стартовую систему координат $O_0 X_c Y_c Z_c$, относительно которой изменяются углы ориентации аппарата ϑ, ψ, φ и кажущиеся (негравитационные) ускорения $\dot{W}_{x0}, \dot{W}_{y0}, \dot{W}_{z0}$. Учет гравитационного ускорения, а следовательно, определения координат и скоростей КА возможно только в алгоритмах расчета, реализуемых на его борту.

Основное требование, предъявляемое к ГСП, это сохранение в процессе полета ориентации, установленной на старте. При неизменной ориентации платформы оси акселерометров в процессе полета будут ориентированы вдоль осей стартовой системы координат.

Отклонение платформы от требуемой ориентации обуславливается главным образом дрейфом нулей интегрирующих поплавковых гироскопов. Уход нулей giroприборов отслеживается следящими системами ГСП и тем самым создается погрешность в ориентации платформы.

При появлении отклонений (уходов) платформы возникают сигналы рассогласования в командных датчиках платформы, которые обрабатываются системой управления аппарата.

Кроме уходов осей платформы от заданной стартовой ориентации в системе имеются погрешности в начальной стартовой ориентации.

Для того чтобы оси платформы X_n, Y_n, Z_n были ориентированы по осям расчетной стартовой системы $OX_c Y_c Z_c$, платформа должна быть

приведена в горизонтальную плоскость старта, а ось OX_{Π} должна быть ориентирована в плоскости стрельбы.

Чувствительными элементами, контролирующими горизонтальность платформы, являются акселерометры, установленные на платформе. Контроль ориентации платформы по азимуту выполняется специальной оптической системой [28].

Время окончания приведения платформы к требуемой ориентации должно соответствовать назначенному времени старта. На практике всегда имеют место погрешности в начальной ориентации платформы, которые обуславливаются, главным образом, зонами нечувствительности следящих систем.

Отклонение во времени окончания приведения ГСП к требуемой ориентации влечет за собой изменение положения плоскости траектории выведения и орбиты в инерциальном пространстве. Это объясняется тем, что платформа получит дополнительный поворот от вращения Земли.

Таким образом, дрейф нулей чувствительных элементов и погрешности в начальной ориентации платформы приведут к тому, что текущая ориентация платформы будет отличаться от расчетной ориентации. Погрешности в ориентации ГСП приведут к погрешностям в углах ориентации аппарата относительно стартовой системы координат. Кроме того, оси акселерометров, ориентированные по осям платформы $X_{\Pi}, Y_{\Pi}, Z_{\Pi}$, не будут совпадать с осями стартовой системы $O_0 X_c, Y_c, Z_c$, что приведет к ошибкам определения составляющих скорости и координат местоположения КА.

1.5. ЧЕТЫРЕХСТЕПЕННАЯ ГИРОСТАБИЛИЗИРОВАННАЯ ПЛАТФОРМА

Одним из существенных недостатков трехстепенной гиросtabilизированной платформы является ограниченность угла поворота внутренней рамки относительно наружной. Поэтому платформа сохраняет заданную ей ориентацию только в том случае, когда угол рыскания КА не превышает угла поворота внутренней рамки.

В КА, предназначенных для больших пространственных маневров, чтобы исключить складывание рамок, в ГСП вводят третью рамку, позволяющую развернуть всю систему карданного подвеса, не нарушая ориентации платформы [28].

На рис. 1.5 приведена схема подвеса четырехстепенной платформы и показана ориентация осей КА в момент старта. Сигналы, возникающие в результате разворота КА на углы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ (углы разворота), снимаются с датчиков, расположенных соответственно на осях подвеса платформы, внутренних рамок 1 и 2.

Если угол φ_2 становится большим и, следовательно, возможно со-

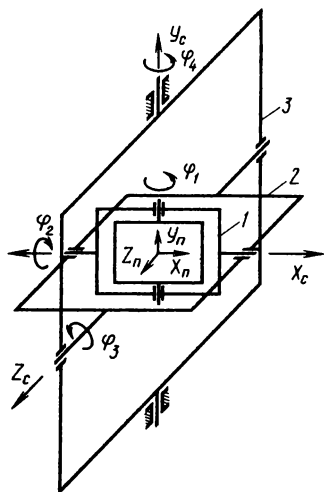


Рис. 1.5

ударение рамок 1 и 2, что недопустимо, то включается следящая система, разворачивающая наружную рамку 3, а вместе с ней и весь карданный подвес. При развороте карданного подвеса увеличивается угол между осью вращения внутренней рамки 1 и осью КА, вокруг которой совершается возмущенное движение КА. С увеличением угла между осями уменьшается проекция вектора конечного поворота [13] на ось вращения внутренней рамки и тем самым предотвращается нарушение рабочего состояния ГСП.

Погрешности в ориентации четырехстепенной платформы будут те же, что и у трехстепенной. Кроме того, обработка информации (углов), поступающей с четырехстепенной платформы, значительно сложнее. При развороте рамки 3 на

угол φ_4 искажаются сигналы, снимаемые с датчиков углов φ_1, φ_2 . Поэтому параметры, характеризующие ориентацию КА, определяются сравнительно сложными алгоритмами.

1.6. АКСЕЛЕРОМЕТРЫ

Акселерометр — бортовой прибор, измеряющий линейное ускорение КА. В системах инерциальной навигации акселерометр является одним из видов чувствительных элементов. Обычно на ракетах-носителях (РН) и космических аппаратах устанавливают три акселерометра, измеряющих линейное ускорение в трех взаимно перпендикулярных направлениях. Особенность акселерометра заключается в том, что он определяет не истинное, а кажущееся ускорение. Акселерометр, установленный в центре масс аппарата, будет измерять только ту составляющую ускорения, которая создается силами негравитационного происхождения — тягой двигателя и силами сопротивления среды, в которой происходит движение аппарата. Ускорение, создаваемое силой земного притяжения, одинаково действует на КА и на подвижную инерционную массу m акселерометра и поэтому не создает смещения чувствительного элемента (маятника) относительно корпуса КА.

Ускорение W_ξ , измеряемое акселерометром, называют кажущимся ускорением.

Перемещение ξ массы m с помощью того или иного датчика преобразуется в электрический сигнал, пропорциональный измеряемому ускорению W_ξ , который подается в бортовую цифровую вычислительную машину (БЦВМ), где и проводятся первое и второе интегрирования ускорения.

Необходимо здесь же заметить следующее. Так как действующее на КА гравитационное ускорение не влияет на отклонение чувствительного элемента акселерометра, то при определении скорости и перемещения КА ее величина должна учитываться в алгоритмах расчета.

1.7. БЕСПЛАТФОРМЕННЫЕ СИСТЕМЫ ОРИЕНТАЦИИ И НАВИГАЦИИ

Инерциальные навигационные системы, построенные на базе ГСП и БЦВМ, к настоящему времени получили весьма широкое распространение. Однако ГСП сложное и дорогое устройство. Поэтому не прекращаются поиски построения навигационных систем платформ [9, 10, 20, 26, 30], у которых габаритные размеры, масса и потребление энергии были бы существенно меньше, чем у систем, построенных на базе ГСП.

В бесплатформенных системах акселерометры и гироскопические приборы монтируются непосредственно на КА и поэтому участвуют во всех его линейных и угловых движениях.

При отсутствии в системе ГСП определение параметров, характеризующих ориентацию и навигацию КА, возлагается на БЦВМ.

Алгоритмы по определению параметров ориентации осей КА существенно зависят от характера первичной информации, получаемой с датчиков углового движения.

В качестве датчиков углового движения аппарата в бесплатформенных инерциальных навигационных системах применяют двухстепенные гироскопы или одноосные гиростабилизаторы.

Бесплатформенные инерциальные системы ориентации, построенные на базе датчиков угловых скоростей, обладают существенными недостатками по сравнению с системами ориентации, построенными на базе одноосных гиростабилизаторов.

В системах ориентации с датчиками угловых скоростей параметры (направляющие косинусы), характеризующие ориентацию аппарата относительно базовой стартовой системы координат, определяются интегрированием девяти уравнений с переменными коэффициентами. Кроме того, конструктивно реализовать датчики, которые измеряли бы широкий диапазон угловых скоростей очень трудно.

В системах ориентации, построенных на базе одноосных гиростабилизаторов, первичная информация — это приращение углов поворота КА на выбранном интервале времени. Причем, никаких ограничений на эти углы не накладывается.

При выяснении условий применения бесплатформенных систем в КА не будем касаться обычных технических требований, предъявляемых к приборам системы управления. Здесь следует обратить внимание на существенно различные условия работы приборов на участке выведения и на орбите ИСЗ. На участке выведения корпус КА под воздействием тяги двигателя и аэродинамических сил совершает изгибные и продольные колебания, чего нет при орбитальном движении. Так как акселерометры и датчики угловых скоростей установлены непосредственно на корпусе КА, то они участвуют вместе с корпусом во всех изгибных колебаниях корпуса и одновременно воспринимают вибрационные колебания мест крепления приборов. Поэтому, снимаемая с приборов информация о движении КА несет в себе погрешности, создаваемые вибрациями мест крепления и изгибными колебаниями корпуса аппарата. Отфильтровать воспринимаемые приборами помехи без искажения основного сигнала, характеризующего движение КА как твердое тело, практически невозможно. К приборам предъявляется требование, чтобы зона нечувствительности была как можно меньше, для того чтобы не накопились погрешности в определении того или иного навигационного параметра. Так, например, минимальная угловая скорость, воспринимаемая поплавковыми интегрирующими приборами, составляет $(10^{-4} \dots 10^{-6})\omega_{\max}$ [23]. Для прибора с $\omega_{\max} = 25^\circ/\text{с}$ $\omega_{\min} \approx 10''/\text{с}$. Порог чувствительности датчика — $6''$. Вибрации и изгибные колебания могут достигать нескольких угловых минут в секунду, что значительно превышает $\omega_{\min}$. Те же помехи будут присутствовать и в сигналах, снимаемых с акселерометров.

Так, например, смещение нуля в акселерометрах может быть доведено до $(10^{-4} \dots 10^{-5})g$, а перегрузки от вибрации могут на порядок и более превышать приведенную величину смещения нуля.

Поэтому БИНС могут найти применение, главным образом, на тех участках полета (орбиты ИСЗ), где нет больших перегрузок.

Следует отметить, что в работе [30] при рассмотрении компоновки БИНС отдается предпочтение системам, построенным на базе интегрирующих поплавковых гироскопов.

ГЛАВА 2.

НАВИГАЦИЯ НА УЧАСТКЕ ВЫВЕДЕНИЯ

2.1. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Вопросы ориентации и навигации аппарата можно рассматривать в любой базовой системе отсчета. Однако алгоритмы, определяющие ориентацию и навигацию аппарата, существенно зависят от принятой системы отсчета. Выведение аппарата в околоземное пространство начинается с точки старта и поэтому вполне естественно основная система отсчета измеряемых на участке выведения параметров движения должна быть привязана к точке старта. Кроме того, ориентация платформы относительно горизонта и меридиана старта предопределяет направление осей основной системы отсчета. Поэтому в качестве основной базовой системы отсчета вводится так называемая начальная, стартовая система $O_0 X_c Y_c Z_c$. Начало системы O_0 совмещено с точкой старта, расположенной на поверхности Земли. Ось $O_0 Y_c$ направлена вверх по местной вертикали старта. Оси $O_0 X_c$ и $O_0 Z_c$ находятся в плоскости горизонта старта. Ось $O_0 X_c$ под азимутальным углом A направлена в сторону движения аппарата. Азимут A отсчитывается от северного направления меридиана старта к востоку. Ось $O_0 Z_c$ направлена в соответствии с правой системой. Система $O_0 X_c Y_c Z_c$, начиная с момента старта КА и далее в процессе движения "заморожена", и, следовательно, не участвует во вращении Земли.

При рассмотрении вопросов ориентации воспользуемся связанной с КА системой $OXYZ$, начало которой находится в центре масс аппарата, ось OX направлена по продольной оси аппарата к головной его части. Ось OY ориентирована в плоскости симметрии и направлена вверх, когда ось OX находится на горизонтальной плоскости. Ось OZ направлена в соответствии с правой системой координат. Ориентация связанной системы координат $OXYZ$ относительно стартовой системы координат $O_0 X_c Y_c Z_c$ в момент старта показана на рис. 2.1. Здесь же показана также система координат $O_0 X_{п} Y_{п} Z_{п}$, связанная с гиросtabilизированной платформой, оси которой $O_0 X_{п} Y_{п} Z_{п}$ направлены соответственно по осям $O_0 X_c Y_c Z_c$.

Углы тангажа ϑ , рыскания ψ и вращения φ , определяющие ориентацию аппарата относительно системы $O_0 X_{п} Y_{п} Z_{п}$, показаны на рис. 2.2. Порядок разворотов аппарата $\vartheta \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$ принят в соответствии с ориентацией осей карданного подвеса.

Стартовая система координат $O_0 X_c Y_c Z_c$, в которой выполняется интегрирование ускорений, измеряемых акселерометрами, плохо приспособлена для определения координат местоположения КА, находящегося в орбитальном движении. Координаты и скорости движения аппарата в орбитальном движении определяют в различных геоцентрических

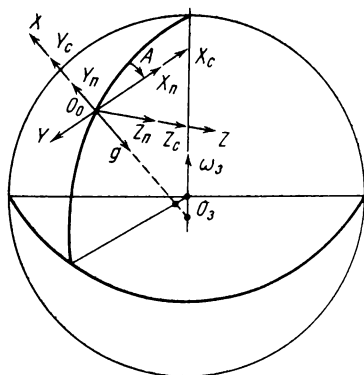


Рис. 2.1

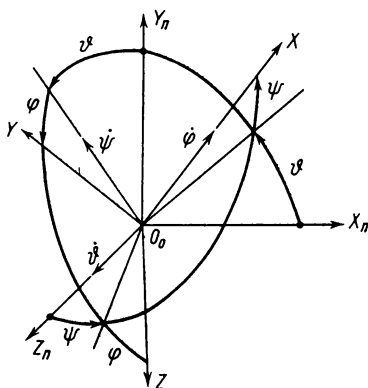


Рис. 2.2

экваториальных системах, начало которых находится в центре Земли O_1 . Для определения параметров движения аппарата введем несколько геоцентрических и экваториальных систем координат.

1. Инерциальная геоцентрическая система координат — $O_1 \xi \eta \zeta$. Начало системы координат O_1 находится в центре Земли. Ось $O_1 \xi$ ориентирована параллельно оси $O_0 Y_c$. Ось $O_1 \xi$ находится в плоскости экватора и направлена параллельно вектору начальной скорости точки старта $\vec{U}_0(0)$. Ось $O_1 \eta$ расположена в плоскости меридиана старта и направлена в соответствии с правой системой. Ориентация осей $O_0 X_c Y_c Z_c$ и $O_1 \xi \eta \zeta$ относительно земного эллипсоида показана на рис. 2.3, где углы φ и B соответственно геоцентрическая и геодезическая широты точки старта. Расхождение между географической и геодезической широтой не превосходит $3''$ [12]. Поэтому в задачах навигации КА географическую и геодезическую широты отождествляют.

Угол A — азимут оси $O_0 X_c$, P — северный полюс земного эллипсоида (см. рис. 2.3). Направляющие косинусы, определяющие взаимную ориентацию осей стартовой и связанной систем координат, приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

	Системы координат	Инерциальная геоцентрическая		
		$O_1 \xi$	$O_1 \eta$	$O_1 \zeta$
Стартовая	$O_0 X_c$	$\sin A$	$\cos A$	0
	$O_0 Y_c$	0	0	1
	$O_0 Z_c$	$\cos A$	$-\sin A$	0

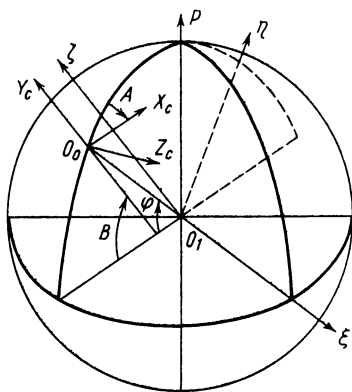


Рис. 2.3

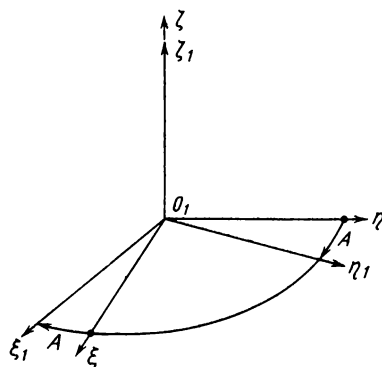


Рис. 2.4

2. Инерциальная геоцентрическая система координат $O_1 \xi_1 \eta_1 \zeta_1$.

Ее начало O_1 находится в центре Земли.

В системе $O_1 \xi_1 \eta_1 \zeta_1$ ось $O_1 \zeta_1$ направлена по оси $O_1 \zeta$. Оси $O_1 \xi_1$ и $O_1 \eta_1$ повернуты вокруг оси $O_1 \zeta_1$ на угол азимута A . Взаимное расположение систем координат $O_1 \xi \eta \zeta$ и $O_1 \xi_1 \eta_1 \zeta_1$ показано на рис. 2.4. Направляющие косинусы, определяющие взаимную ориентацию систем координат $O_1 \xi \eta \zeta$ и $O_1 \xi_1 \eta_1 \zeta_1$, приведены в табл. 2.2. Направляющие косинусы осей стартовой системы $O_0 X_c Y_c Z_c$ относительно осей системы $\xi_1 \eta_1 \zeta_1$ координат приведены в табл. 2.3.

Таблица 2.2

Оси систем координат	$O_1 \xi$	$O_1 \eta$	$O_1 \zeta$
$O_1 \xi_1$	$\cos A$	$-\sin A$	0
$O_1 \eta_1$	$\sin A$	$\cos A$	0
$O_1 \zeta_1$	0	0	1

Таблица 2.3

Системы координат		Инерциальная геоцентрическая		
		$O_1 \xi_1$	$O_1 \eta_1$	$O_1 \zeta_1$
Стартовая	$O_0 X_c$	0	1	0
	$O_0 Y_c$	0	0	1
	$O_0 Z_c$	1	0	0

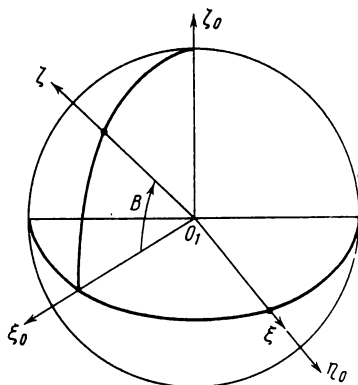


Рис. 2.5

Введенные здесь геоцентрические системы $O_1\xi\eta\zeta$ и $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ могут быть применены при определении параметров движения на участке выведения.

3. Геоцентрическая экваториальная система координат $O_1\xi_0\eta_0\zeta_0$. При рассмотрении вопросов навигации и ориентации аппарата в орбитальном движении потребуются знание координат местоположения КА и составляющих скорости движения в геоцентрической системе $O_1\xi_0\eta_0\zeta_0$. Ось $O\xi_0$ в момент старта находится на пересечении плоскости меридиана старта с плоскостью экватора, ось $O_1\xi_0$ направлена по оси вращения Земли,

ось $O_1\eta_0$ находится в плоскости экватора и направлена в соответствии с правой системой координат по оси $O_1\xi$. Взаимное расположение систем координат $O_1\xi_0\eta_0\zeta_0$ и $O_1\xi\eta\zeta$ показано на рис. 2.5.

Направляющие косинусы, определяющие взаимную ориентацию осей, приведены в табл. 2.4.

Таблица 2.4

Система координат		Геоцентрическая экваториальная		
		$O_1\xi_0$	$O_1\eta_0$	$O_1\zeta_0$
Инерциальная геоцентрическая	$O_1\xi$	0	1	0
	$O_1\eta$	$-\sin B$	0	$\cos B$
	$O_1\zeta$	$\cos B$	0	$\sin B$

В соответствии с табл. 2.2 и 2.4 взаимное расположение систем координат $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$, $O_1\xi_0\eta_0\zeta_0$ определяется следующей матрицей направляющих косинусов:

	ξ_0	η_0	ζ_0
ξ_1	μ_{11}	μ_{12}	μ_{13}
η_1	μ_{21}	μ_{22}	μ_{23}
ζ_1	μ_{31}	μ_{32}	μ_{33}

(2.1)

Величины μ_{ij} , представляющие собой направляющие косинусы осей, определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned}
\mu_{11} &= \sin A \sin B; & \mu_{22} &= \sin A; \\
\mu_{12} &= \cos A; & \mu_{23} &= \cos A \cos B; \\
\mu_{13} &= -\sin A \cos B; & \mu_{31} &= \cos B; \\
\mu_{21} &= -\cos A \sin B; & \mu_{32} &= 0; \\
& & \mu_{33} &= \sin B.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

2.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТ И СОСТАВЛЯЮЩИХ СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ КА

Основная информация при определении координат и составляющих скорости движения центра масс аппарата — это кажущиеся ускорения $\dot{W}_{xп}, \dot{W}_{yп}, \dot{W}_{zп}$, измеряемые акселерометрами, оси чувствительности которых ориентированы по осям ГСП $X_п, Y_п, Z_п$. Полагая, что ГСП на участке выведения сохраняет начально-стартовую ориентацию и, следовательно, оси платформы $X_п, Y_п, Z_п$ будут ориентированы соответственно по осям X_c, Y_c, Z_c стартовой системы координат, то кажущиеся ускорения аппарата $\dot{W}_{x0}, \dot{W}_{y0}, \dot{W}_{z0}$, векторы которых направлены по осям X_c, Y_c, Z_c , будут равны соответственно ускорениям $\dot{W}_{xп}, \dot{W}_{yп}, \dot{W}_{zп}$. При принятом допущении составляющие кажущейся скорости в инерциальной геоцентрической системе $O_1 \xi_1 \eta_1 \zeta_1$ в соответствии с табл. 2.2 и табл. 2.3 направляющих косинусов будут определяться выражениями

$$\begin{aligned}
W_{\xi_1} &= W_{z0} = \int_0^t \dot{W}_{z0} dt; \\
W_{\eta_1} &= W_{x0} = \int_0^t \dot{W}_{x0} dt; \\
W_{\xi_1} &= W_{y0} = \int_0^t \dot{W}_{y0} dt.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Составляющие гравитационного ускорения g'_r, g_{ω° , векторы которых направлены соответственно по радиусу r местоположения аппарата и по оси, параллельной оси вращения Земли, определяются выражениями

$$\begin{aligned}
g'_1 &= -\frac{a_{00}}{r^2} - \frac{3}{2} \frac{a_{20}}{r^4} (5 \sin^2 \varphi - 1); \\
g_{\omega^\circ} &= 3 \frac{a_{20}}{r^4} \sin \varphi.
\end{aligned}$$

Проекции векторов гравитационного ускорения на оси ξ_1, η_1, ζ_1 определяются выражениями

$$\begin{aligned} g_{\xi_1} &= g'_r \frac{\xi_1}{r} + g_{\omega^\circ} \omega^\circ_{\xi_1}; \\ g_{\eta_1} &= g'_r \frac{\eta_1}{r} + g_{\omega^\circ} \omega^\circ_{\eta_1}; \\ g_{\zeta_1} &= g'_r \frac{\zeta_1}{r} + g_{\omega^\circ} \omega^\circ_{\zeta_1}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где ξ_1, η_1, ζ_1 — координаты КА; $\xi_1/r, \eta_1/r, \zeta_1/r$ — направляющие косинусы радиуса-вектора r .

Величины $\omega^\circ_{\xi_1}, \omega^\circ_{\eta_1}, \omega^\circ_{\zeta_1}$ являются проекциями на оси ξ_1, η_1, ζ_1 единичного вектора ω° , направленного по оси вращения Земли:

$$\omega^\circ_{\xi_1} = -\cos B \sin A; \quad \omega^\circ_{\eta_1} = \cos B \cos A; \quad \omega^\circ_{\zeta_1} = \sin B, \quad (2.5)$$

где A — азимут оси $O_0 X_C$; B — угол наклона оси $O_1 \zeta_1$ к плоскости экватора.

В начальный момент движения ($t=0$) величины $\xi_1(0), \eta_1(0), \zeta_1(0)$ соответствуют точке старта. Следовательно, и величины $\varphi(0), r(0)$, соответствующие точке старта, могут быть заранее заложены в ЭВМ и вычислены.

Запишем выражения, показывающие приращение скорости в зависимости от гравитационного ускорения:

$$V_{g\xi_1} = \int_0^t g_{\xi_1} dt; \quad V_{g\eta_1} = \int_0^t g_{\eta_1} dt; \quad V_{g\zeta_1} = \int_0^t g_{\zeta_1} dt. \quad (2.6)$$

Составляющие скорости аппарата на момент t будут определяться выражениями

$$\begin{aligned} V_{\xi_1}(t) &= V_{\xi_1}(0) + W_{\xi_1}(t) + V_{g\xi_1}(t); \\ V_{\eta_1}(t) &= V_{\eta_1}(0) + W_{\eta_1}(t) + V_{g\eta_1}(t); \\ V_{\zeta_1}(t) &= V_{\zeta_1}(0) + W_{\zeta_1}(t) + V_{g\zeta_1}(t). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Начальные скорости аппарата $V_{\xi_1}(0), V_{\eta_1}(0), V_{\zeta_1}(0)$ равны составляющим скорости старта.

Координаты аппарата на момент времени t вычисляются по формулам

$$\xi_1(t) = \xi_1(0) + \int_0^t V_{\xi_1}(t) dt;$$

$$\eta_1(t) = \eta_1(0) + \int_0^t V_{\eta_1}(t) dt; \quad (2.8)$$

$$\xi_1(t) = \xi_1(0) + \int_0^t V_{\xi_1}(t) dt.$$

Начальные значения координат старта КА $\xi_1(0), \eta_1(0), \xi_1(0)$.

Величины $\omega_{\xi_1}^0, \omega_{\eta_1}^0, \omega_{\xi_1}^0$ являются постоянными величинами и, следовательно, могут быть вычислены заранее до начала движения КА и введены в систему в качестве установок.

Так как вычисления ведутся на бортовой вычислительной машине (БВМ), то приращения скоростей и координат за время интегрирования $(0, t)$ можно рассматривать как приращения на шаге интегрирования, и начальные значения есть значения в начале шага, равные значениям в конце предыдущего шага.

По полученным координатам $\xi_1(t), \eta_1(t), \xi_1(t)$ можно определить на момент времени t радиус r и геоцентрическую широту φ местоположения КА:

$$r(t) = \sqrt{\xi_1^2(t) + \eta_1^2(t) + \xi_1^2(t)}; \quad (2.9)$$

$$\sin \varphi(t) = \frac{\xi_1(t) \bar{\omega}_{\xi_1}^0 + \eta_1(t) \bar{\omega}_{\eta_1}^0 + \xi_1(t) \bar{\omega}_{\xi}^0}{\bar{r}}. \quad (2.10)$$

В соответствии с матрицей направляющих косинусов (2.1) экваториальные координаты и скорость КА будут определяться следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \mu_{11} \xi_1 + \mu_{21} \eta_1 + \mu_{31} \xi_1; \\ \eta_0 &= \mu_{12} \xi_1 + \mu_{22} \eta_1 + \mu_{32} \xi_1; \\ \xi_0 &= \mu_{13} \xi_1 + \mu_{23} \eta_1 + \mu_{33} \xi_1. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Аналогичными выражениями будут определяться и составляющие скорости

$$\begin{aligned} V_{\xi_1} &= \mu_{11} V_{\xi_1} + \mu_{21} V_{\eta_1} + \mu_{31} V_{\xi_1}; \\ V_{\eta_0} &= \mu_{12} V_{\xi_1} + \mu_{22} V_{\eta_1} + \mu_{32} V_{\xi_1}; \\ V_{\xi_0} &= \mu_{13} V_{\xi_1} + \mu_{23} V_{\eta_1} + \mu_{33} V_{\xi_1}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Вычислив координаты КА, можно вычислить величину радиуса

$$r = \sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2 + \xi_0^2} \quad (2.13)$$

и направляющие косинусы радиуса-вектора $\vec{r}$

$$\begin{aligned}\cos(\hat{r}, \hat{\xi}_0) &= \xi_0/r; \\ \cos(\hat{r}, \hat{\eta}_0) &= \eta_0/r; \\ \cos(\hat{r}, \hat{\zeta}_0) &= \zeta_0/r.\end{aligned}\tag{2.14}$$

Геоцентрическая широта φ будет определяться выражением

$$\sin \varphi = \zeta_0/r.\tag{2.15}$$

2.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОГРАФИЧЕСКИХ КООРДИНАТ КА

Географические координаты КА, определяющие положение аппарата относительно поверхности земного эллипсоида, в работах [2, 6, 10] определяются с помощью вращающейся ГСП, отслеживающей угловую скорость Земли и угловую скорость движения аппарата относительно Земли. В настоящей книге параметры движения определяются с помощью гиросtabilизатора, платформа которого сохраняет постоянно начально-стартовую ориентацию. Поэтому алгоритмы по определению географических координат аппарата с платформой, сохраняющей начально-стартовую ориентацию, существенно отличаются от алгоритмов с вращающейся платформой.

Под географическими координатами здесь будем понимать долготу λ , геоцентрическую широту φ и геоцентрическую высоту H .

На рис. 2.6 показано положение КА (точка M) в системе координат $O_0 \xi_0 \eta_0 \zeta_0$ и даны сферические координаты Φ, φ, r , соответствующие этому положению.

Исходя из выражения (2.11), можем записать

$$\varphi = \arcsin(\zeta_0/r);\tag{2.16}$$

$$\Phi = \arccos(\xi_0/r \cos \varphi).\tag{2.17}$$

Приращение долготы $\Delta\lambda$ местоположения КА относительно меридиана старта определяется следующим соотношением:

$$\Delta\lambda = \Phi - \omega_3 t,\tag{2.18}$$

где ω_3 — угловая скорость Земли; t — бортовое время полета КА, отсчитываемое от момента старта.

Следовательно, можем определить долготу λ местоположения КА по формуле

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda,\tag{2.19}$$

где λ_0 — долгота меридиана старта.

Зная геоцентрическую широту φ по формуле (1.3), можем определить расстояние R от центра Земли до точки земной поверхности, над которой находится КА.

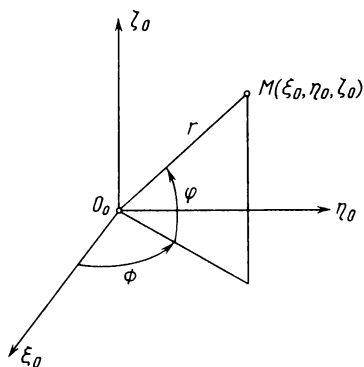


Рис. 2.6

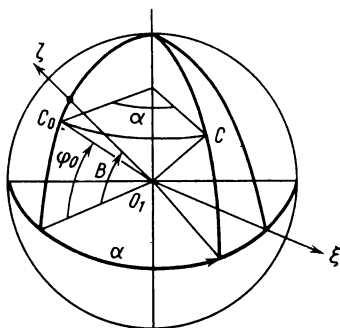


Рис. 2.7

Радиус r текущего местоположения аппарата можно вычислить по формулам (2.13) или (2.9).

Так как величины r и R для высоты H известны, запишем

$$H = r - R. \quad (2.20)$$

В дополнение к изложенному способу определения географических координат аппарата рассмотрим другой способ их определения, который может быть использован на участке выведения КА на орбиту.

На рис. 2.7 показано перемещение точки старта C за время движения КА относительно невращающейся сферы. Начальное положение точки старта — C_0 ; φ_0 — геоцентрическая широта точки старта; B — угол наклона оси ζ к плоскости экватора; $\alpha = \omega_3 t$ — угол поворота меридиана старта за время движения КА.

Обозначим R_0 радиус точки старта и γ разность углов $B - \varphi_0$. Запишем координаты точки C в геоцентрической системе $\xi\eta\zeta$, равные проекциям радиуса R_0 :

$$\begin{aligned} \xi_c &= R_0 - \cos \varphi_0 \sin \alpha; \\ \eta_c &= R_0 (\sin \varphi_0 \cos B - \cos \varphi_0 \sin B \cos \alpha); \\ \zeta_c &= R_0 (\sin \varphi_0 \sin B + \cos \varphi_0 \cos B \cos \alpha). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Начальные значения координат (положив $\alpha(0) = 0$) будут иметь следующие значения:

$$\begin{aligned} \xi_c(0) &= 0; \\ \eta_c(0) &= R_0 \sin(\varphi_0 - B) = -R_0 \sin \gamma; \\ \zeta_c(0) &= R_0 \cos(B - \varphi_0) = R_0 \cos \gamma. \end{aligned} \quad (2.22)$$

За время движения аппарата положение точки C изменяется только

на угол α . Поэтому составляющие скорости точки C будут определяться выражениями

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_c &= V_0 \cos \alpha; \quad \dot{\eta}_c = V_0 \sin B \sin \alpha; \\ \dot{\zeta}_c &= -V_0 \cos B \sin \alpha; \quad V_0 = R_0 \omega_3 \cos \varphi_0.\end{aligned}\quad (2.23)$$

Начальные значения составляющих скорости можно записать в виде

$$\dot{\xi}_c(0) = V_0; \quad \dot{\eta}_c(0) = 0; \quad \dot{\zeta}_c(0) = 0. \quad (2.24)$$

Координаты точки C в системе $\xi_1 \eta_1 \zeta_1$ в соответствии с табл. 2.2 определяются из соотношения

$$\begin{bmatrix} \xi_{1c} \\ \eta_{1c} \\ \zeta_{1c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos A - \sin A & 0 \\ \sin A & \cos A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_c \\ \eta_c \\ \zeta_c \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

откуда

$$\begin{aligned}\xi_{1c} &= \xi_c \cos A - \eta_c \sin A; \\ \eta_{1c} &= \xi_c \sin A + \eta_c \cos A; \\ \zeta_{1c} &= \zeta_c.\end{aligned}\quad (2.26)$$

Скорость перемещения точки C можно определить по формулам

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_{1c} &= \dot{\xi}_c \cos A - \dot{\eta}_c \sin A; \\ \dot{\eta}_{1c} &= \dot{\xi}_c \sin A + \dot{\eta}_c \cos A; \\ \dot{\zeta}_{1c} &= \dot{\zeta}_c.\end{aligned}\quad (2.27)$$

Начальные значения координат с учетом (2.22) вычисляются из выражений

$$\begin{aligned}\xi_{1c}(0) &= R_0 \sin \gamma \sin A; \\ \eta_{1c}(0) &= -R_0 \sin \gamma \cos A; \\ \zeta_{1c}(0) &= R_0 \cos \gamma.\end{aligned}\quad (2.28)$$

Начальные значения скоростей с учетом (2.24) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_{1c}(0) &= V_0 \cos A; \\ \dot{\eta}_{1c}(0) &= V_0 \sin A; \\ \dot{\zeta}_{1c}(0) &= 0.\end{aligned}\quad (2.29)$$

На рис. 2.8 показаны текущее положение точки старта C и текущее положение КА (точка M) относительно невращающейся сферы. Точка M' находится на поверхности сферы под точкой M . Таким образом, угол $\Delta\lambda$ может быть определен как двухгранный угол между меридиональными плоскостями, проходящими через точки M' и C .

Рассмотрев сферический треугольник CNM' , заметим, что дуги NC и NM' , которые обозначим соответственно Z_c и Z_M , будут определяться выражениями

$$Z_c = 90^\circ - \varphi_0; \quad (2.30)$$

$$Z_M = 90^\circ - \varphi. \quad (2.31)$$

Дуга CM' может быть определена, как угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{R}_0$.

Используя формулу косинуса угла между векторами, запишем

$$\cos(\widehat{CM'}) = \frac{1}{rR_0} (\xi_1 \xi_{1c} + \eta_1 \eta_{1c} + \zeta_1 \zeta_{1c}). \quad (2.32)$$

Для определения угла $\Delta\lambda$ запишем формулу для косинуса дуги сферического треугольника:

$$\cos(\widehat{CM'}) = \cos Z_c \cos Z_M + \sin Z_c \sin Z_M \cos \Delta\lambda, \quad (2.33)$$

откуда

$$\cos \Delta\lambda = \frac{\cos(\widehat{CM'}) - \cos Z_c \cos Z_M}{\sin Z_c \sin Z_M}. \quad (2.34)$$

Следовательно,

$$\Delta\lambda = \arccos \left(\frac{\cos(\widehat{CM'}) - \cos Z_c \cos Z_M}{\sin Z_c \sin Z_M} \right), \quad (2.35)$$

где $\cos(\widehat{CM'})$ — определяется выражением (2.32), а дуги Z_c и Z_M — выражениями (2.30), (2.31).

Определив приращение долготы $\Delta\lambda$, далее можем записать

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda.$$

Геоцентрическая широта КА φ в данном случае может быть вычислена по выражению (2.10).

Располагая геоцентрической широтой φ , радиус R точки M' будет определяться выражением

$$R = a(1 - \alpha \sin^2 \varphi).$$

Вычислив величины r и R , получим значение высоты

$$H = r - R.$$

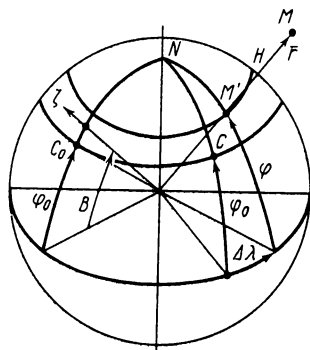


Рис. 2.8

ГЛАВА 3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ОРИЕНТАЦИИ КА НА ОРБИТЕ ИСЗ С ПОМОЩЬЮ ГСП, ОРИЕНТИРОВАННОЙ В СТАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

3.1. ОРИЕНТАЦИЯ КА НА ОРБИТЕ

Одной из задач, которая ставится перед навигационной системой при движении аппарата по орбите ИСЗ, является задача ориентации аппарата в плоскости орбиты.

Выполнить данную задачу с помощью некорректируемой ГСП можно только в течение короткого времени, соизмеримого с длительностью участка выведения. При более длительном времени полета будут накапливаться погрешности в ориентации платформы, обусловленные уходами платформы и ошибками выведения аппарата на орбиту. Поэтому ориентировать аппарат при более длительном полете по орбите с помощью некорректируемой ГСП практически невозможно. Для того чтобы с помощью ГСП можно было ориентировать аппарат в требуемое положение при более длительном полете на орбите необходимо в процессе полета определять и корректировать накопившиеся погрешности в ориентации ГСП.

Определение погрешностей в ориентации платформы возможно путем измерения углов линий визирования астроориентиров, что и рассматривается в гл. 4.

В данном разделе в базовой стартовой системе дан способ расчета углов, определяющих ориентацию аппарата относительно плоскости орбиты и местного горизонта в зависимости от аргумента широты u .

Параметры орбиты КА могут быть определены по значениям координат и составляющих скорости, вычисленным по информации, получаемой с ГСП на момент окончания активного участка полета.

Для определения ориентации аппарата на орбите введем следующие системы координат:

1. **Подвижная орбитальная система координат $O_{\text{и}}X_{\text{и}}Y_{\text{и}}Z_{\text{и}}$** , в которой начало координат $O_{\text{и}}$ совмещено с центром Земли, а плоскость $X_{\text{и}}Y_{\text{и}}$ с плоскостью орбиты. Ось $X_{\text{и}}$ направлена по радиусу-вектору r , ось $Y_{\text{и}}$ — в направлении движения КА и ось $Z_{\text{и}}$ направлена в соответствии с правой системой координат. Положение системы координат $X_{\text{и}}, Y_{\text{и}}, Z_{\text{и}}$ относительно экваториальной системы $O_1\xi_0\eta_0\zeta_0$ показано на рис. 3.1, где точка N — восходящий узел орбиты; Ω — долгота восходящего узла, отсчитываемого от оси ξ_0 ; u — аргумент широты местонахождения аппарата M .

2. **Система координат $OX^*Y^*Z^*$** — система, соответствующая программной ориентации аппарата. Точка O — местонахождение аппарата, определяемое аргументом широты u и радиусом-вектором $r(u)$. Ось

Y^* направлена по местной геоцентрической вертикали X_H . Ось X^* находится в плоскости орбиты и направлена в сторону движения аппарата по орбите.

Необходимо отметить, что обычно долготу восходящего узла, как и прямое восхождение светил, отсчитывают от направления на точку весеннего равноденствия. Введенный здесь отсчет долготы восходящего узла от меридиана старта, "замороженного" на момент старта КА, обусловлен тем, что вся первичная информация, поступающая с ГСП, а затем и последующая ее обработка производится в стартовой системе координат $O_0 X_C Y_C Z_C$, начало которой находится на меридиане старта. Вследствие этого перевод навигационной информации из стартовой системы координат в геоцентрическую экваториальную систему координат $O_1 \xi_0 \eta_0 \zeta_0$, где ось ξ_0 лежит в плоскости меридиана старта, является довольно простым. В том случае, когда требуется определить долготу восходящего узла орбиты относительно направления на точку весеннего равноденствия, то по заданным дате и времени старта введенную здесь долготу Ω легко пересчитать в долготу, отсчитываемую от направления на точку весеннего равноденствия γ , не прибегая к пересчету координат аппарата (ξ_0, η_0, ζ_0) .

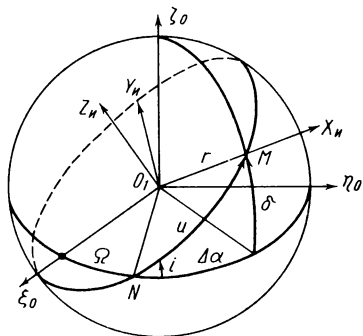


Рис. 3.1

В соответствии с введенными здесь системами координат в табл. 3.1 даны направляющие косинусы осей X_H , Y_H , Z_H относительно экваториальной системы $O_1 \xi_0 \eta_0 \zeta_0$.

Направляющие косинусы осей X^* , Y^* , Z^* относительно системы координат $X_H Y_H Z_H$ будут определяться матрицей

	X_H	Y_H	Z_H
X^*	0	1	0
Y^*	1	0	0
Z^*	0	0	-1

Приведем здесь основные зависимости для определения параметров орбиты Ω и i :

$$\sin \Omega = -\sigma_1 / \sigma \sin i; \quad (3.1)$$

$$\cos \Omega = -\sigma_2 / \sigma \sin i;$$

$$\cos i = \sigma_3 / \sigma, \quad (3.2)$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — компоненты вектора $\bar{\sigma}$, представляющего собой постоян-

Системы координат		Геоцентрическая экваториальная		
		ξ_0	η_0	ζ_0
Подвижная орбитальная	X_H	$\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i$	$\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i$	$\sin u \sin i$
	Y_H	$-\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i$	$-\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i$	$\cos u \sin i$
	Z_H	$\sin \Omega \sin i$	$-\cos u \sin i$	$\cos i$

ную интеграла площадей, и определяются следующими выражениями

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \eta_0(0) V_{\xi_0}(0) - \xi_0(0) V_{\eta_0}(0); \\ \sigma_2 &= \xi_0(0) V_{\xi_0}(0) - \xi_0(0) V_{\xi_0}(0); \\ \sigma_3 &= \xi_0(0) V_{\eta_0}(0) - \eta_0(0) V_{\xi_0}(0); \\ \sigma &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}.\end{aligned}\quad (3.3)$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}.\quad (3.4)$$

Значения координат $\xi_0(0)$, $\eta_0(0)$, $\zeta_0(0)$ и скоростей $V_{\xi_0}(0)$, $V_{\eta_0}(0)$, $V_{\zeta_0}(0)$, соответствующие началу орбитального движения, определяются выражениями (2.11), (2.12).

Для определения аргумента широты u приведем экваториальные координаты КА, выраженные через параметры Ω , i и аргумент широты u .

В соответствии с табл. 3.1 имеем

$$\begin{aligned}\xi_0 &= r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i); \\ \eta_0 &= r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i); \\ \zeta_0 &= r \sin u \sin i.\end{aligned}\quad (3.5)$$

Разрешая выражения для ξ_0 и η_0 относительно $\cos u$ и $\sin u$, получим

$$\begin{aligned}\cos u &= \frac{\xi_0 \cos \Omega + \eta_0 \sin \Omega}{r \cos i}; \\ \sin u &= \frac{\eta_0 \cos \Omega - \xi_0 \sin \Omega}{r \cos i}.\end{aligned}\quad (3.6)$$

Таким образом, по координатам местоположения КА (ξ_0 , η_0 , ζ_0) можно определить положение орбиты (Ω , i) и аргумент широты u .

В последующих главах используются прямое восхождение $\alpha_{КА}$ и склонение $\delta_{КА}$ аппарата в системе $O_1 \xi_0 \eta_0 \zeta_0$.

Приведем выражение для определения $\alpha_{КА}$, $\delta_{КА}$.

В соответствии с рис. 3.1 и принятым отсчетом угла α имеем

$$\alpha_{KA} = \Omega + \Delta\alpha. \quad (3.7)$$

Углы $\Delta\alpha$ и δ_{KA} как дуги сферического треугольника определяются из следующих соотношений:

$$\operatorname{tg} \Delta\alpha = \operatorname{tg} u \cos i; \quad (3.8)$$

$$\sin \delta_{KA} = \sin \varphi = \sin u \sin i,$$

где φ — геоцентрическая широта местонахождения КА.

Заметим, приведенные здесь формулы справедливы и в том случае если отсчет долготы Ω узла прямого восхождения ведется от направления на точку весеннего равноденствия.

Необходимо также заметить, что в случае задержки старта координаты аппарата и параметры орбиты Ω, i в системе $O_1 \xi_0 \eta_0 \zeta_0$ остаются неизменными.

3.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛОВ ОРИЕНТАЦИИ КА ОТНОСИТЕЛЬНО СТАРТОВОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ $O_0 X_c Y_c Z_c$ ПРИ ДВИЖЕНИИ ПО ОРБИТЕ ИСЗ

Программную ориентацию КА $X^* Y^* Z^*$ на орбите относительно стартовой системы координат $O_0 X_c Y_c Z_c$ будем определять углами $\vartheta_0, \psi_0, \varphi_0$. Схема разворотов, определяющих положение системы $X^* Y^* Z^*$ относительно системы $O_0 X_c Y_c Z_c$, показана на рис. 3.2.

При приведении КА к требуемой ориентации будем полагать, что плоскость орбиты мало отклоняется от продольной плоскости $X_c Y_c$ стартовой системы координат, т.е. углы ψ_0 и φ_0 невелики и находятся в области углов, измеряемых ГСП. В этом случае КА можно ориентировать в плоскостях орбиты и местного горизонта с помощью ГСП, сохраняющей стартовую ориентацию. Будем полагать, что программные значения углов $\vartheta_0, \psi_0, \varphi_0$ закладываются в БЦВМ, а текущие значения ϑ, ψ, φ снимаются с датчиков углов ГСП. Организуя в БЦВМ разности $\Delta\vartheta = \vartheta - \vartheta_0, \Delta\psi = \psi - \psi_0, \Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$ и затем введя их для обработки на ноль в автомат стабилизации, КА будет приведен к требуемой ориентации.

Необходимо заметить следующее. Карданный подвес платформы допускает неограниченные повороты платформы только относительно

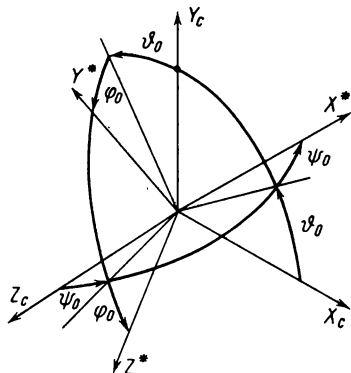


Рис. 3.2

осей наружной и внутренней рамок подвеса. Угол поворота внутренней рамки относительно наружной из-за конструктивных ограничений сравнительно невелик и не превышает $30 \dots 45^\circ$. Поэтому платформа может сохранять приданную ей ориентацию на старте только в том случае, если угол рыскания аппарата находится в пределах угла поворота внутренней рамки. Для баллистических ракет и ракет-носителей, для космических объектов это требование всегда выполняется, так как траектория движения на участке выведения плоская и основной разворот КА производится только по углу тангажа. Изменение угла ψ_0 (u) на орбите, обусловленное скоростью точки старта и азимутом стрельбы A , не превышает 3° . Поэтому ориентацию КА на орбите, если нет маневра по углу ψ , можно будет выполнить с помощью ГСП, сохраняющей стартовую ориентацию.

В том случае, когда от КА требуется переориентация по углу ψ , превышающему угол поворота внутренней рамки, то это можно будет выполнить или путем переориентации платформы в процессе полета, или вместо трехстепенной ГСП использовать четырехстепенную, допускающую разворот карданного подвеса без нарушения ориентации платформы. Заметим также, вопросы ориентации и навигации аппарата, выполняющего большой маневр, можно решать также с помощью бесплатформенной системы, построенной на базе трех одноосных гиросtabilизаторов и акселерометрах, жестко ориентированных по осям КА.

В данном разделе будем полагать, что искомые углы ϑ_0 , ψ_0 , φ_0 , определяющие программную ориентацию $X^*Y^*Z^*$ КА таковы, что переориентации платформы не требуется.

В соответствии с принятым допущением в табл. 3.2 приведены направляющие косинусы осей X^* , Y^* , Z^* в системе $O_1 X_c Y_c Z_c$.

Углы ϑ_0 , ψ_0 , φ_0 , определяющие текущую ориентацию $X^*Y^*Z^*$ аппарата на орбите, должны быть выражены как функции аргумента широты u . Для этого запишем следующие соотношения между системами координат:

$$\begin{bmatrix} \bar{\xi}_1 \\ \bar{\eta}_1 \\ \bar{\xi}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\xi}_0 \\ \bar{\eta}_0 \\ \bar{\xi}_0 \end{bmatrix}; \quad (3.9)$$

$$\begin{bmatrix} X_{\text{и}} \\ Y_{\text{и}} \\ Z_{\text{и}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\xi}_0 \\ \bar{\eta}_0 \\ \bar{\xi}_0 \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

где черта над символом обозначает орты соответствующих осей. Элементы μ_{ij} определяются выражениями (2.2), а элементы l_{ij} соответствуют направляющим косинусам, представленным в табл. 3.1.

Таблица 3.2

Системы координат		Стартовая		
		X_c	Y_c	Z_c
Программной ориентации	X^*	$\cos \vartheta_0 \cos \psi_0$	$\sin \vartheta_0 \cos \psi_0$	$-\sin \psi_0$
	Y^*	$-\cos \varphi_0 \sin \vartheta_0 + \sin \varphi_0 \cos \vartheta_0 \sin \psi_0$	$\cos \varphi_0 \cos \vartheta_0 + \sin \varphi_0 \sin \vartheta_0 \sin \psi_0$	$\sin \varphi_0 \cos \psi_0$
	Z^*	$\sin \varphi_0 \sin \vartheta_0 + \cos \varphi_0 \cos \vartheta_0 \sin \psi_0$	$-\sin \varphi_0 \cos \vartheta_0 + \cos \varphi_0 \sin \vartheta_0 \sin \psi_0$	$\cos \varphi_0 \cos \psi_0$

Из соотношений (3.9) и (3.10) получаем

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_и \\ \bar{Y}_и \\ \bar{Z}_и \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\xi}_1 \\ \bar{\eta}_1 \\ \bar{\zeta}_1 \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

где

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{21} & \mu_{31} \\ \mu_{12} & \mu_{22} & \mu_{32} \\ \mu_{13} & \mu_{23} & \mu_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Ориентация системы координат $O_1 \xi_1 \eta_1 \zeta_1$ относительно стартовой системы координат $O_0 X_c Y_c Z_c$ определяется следующим соотношением:

$$\begin{bmatrix} \bar{\xi}_1 \\ \bar{\eta}_1 \\ \bar{\zeta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{y}_0 \\ \bar{z}_0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Подставив (3.13) в (3.11), получим

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_и \\ \bar{y}_и \\ \bar{z}_и \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{11} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{21} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{y}_0 \\ \bar{z}_0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Программная ориентация аппарата $X^* Y^* Z^*$ относительно орбитальной системы $X_и Y_и Z_и$ определяется соотношением

$$\begin{bmatrix} \bar{x}^* \\ \bar{y}^* \\ \bar{z}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_и \\ \bar{y}_и \\ \bar{z}_и \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Подставив (3.14) в (3.15), получим

$$\begin{bmatrix} \bar{x}^* \\ \bar{y}^* \\ \bar{z}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{11} \\ -\alpha_{32} & -\alpha_{33} & -\alpha_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{y}_0 \\ \bar{z}_0 \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Таким образом, направляющие косинусы между осями систем $X^* Y^* Z^*$ и $X_0 Y_0 Z_0$, выраженные через параметры орбиты, будут определяться матрицей

	X_0	Y_0	Z_0	
X^*	α_{22}	α_{23}	α_{21}	
Y^*	α_{12}	α_{13}	α_{11}	
Z^*	$-\alpha_{32}$	$-\alpha_{33}$	$-\alpha_{31}$	

(3.17)

Сопоставляя направляющие косинусы, представленные в табл. 3.2, с элементами матрицы (3.17), можно написать следующие равенства:

$$\begin{aligned} -\sin \psi_0 &= \alpha_{21}; \\ \sin \varphi_0 \cos \psi_0 &= \alpha_{11}; \\ \cos \varphi_0 \cos \psi_0 &= -\alpha_{31}; \\ \cos \vartheta_0 \cos \psi_0 &= \alpha_{22}; \\ \sin \vartheta_0 \cos \psi_0 &= \alpha_{23}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Отсюда углы ϑ_0 , ψ_0 , φ_0 будут определяться из следующих соотношений:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \alpha_{11} / \alpha_{31}; \quad (3.19)$$

$$\sin \varphi_0 = -\alpha_{21} \quad (3.20)$$

$$\cos \varphi_0 = -\alpha_{31} / \cos \varphi_0 = \alpha_{11} / \sin \varphi_0;$$

$$\begin{aligned} \sin \vartheta_0 &= \alpha_{23} / \cos \psi_0; \\ \cos \vartheta_0 &= \alpha_{22} / \cos \psi_0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Величины α_{ij} , определяемые произведением матриц (3.12), из соображений удобства вычислений запишем в следующем виде:

$$\alpha_{11} = l_{11} \mu_{11} + l_{12} \mu_{12} + l_{13} \mu_{13}.$$

Подставив l_{ij} и μ_{i1} , определяемые соответственно из табл. 3.1 и выражениями (2.2), получим

$$\alpha_{11} = f_1 \cos u + f_2 \sin u, \quad (3.22)$$

где

$$\begin{aligned} f_1 &= \sin \Omega \cos A + \cos \Omega \sin A \sin B; \\ f_2 &= \cos i (\cos \Omega \cos A - \sin \Omega \sin A \sin B) - \\ &\quad - \sin i \sin A \cos B. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Поступая аналогичным образом и с другими величинами, используемыми в выражениях (3.19) ... (3.21), получим

$$\alpha_{21} = f_2 \cos u - f_1 \sin u; \quad (3.24)$$

$$\alpha_{22} = f_3 \cos u + f_4 \sin u; \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} f_3 &= \cos i (\sin \Omega \cos A \sin B + \cos \Omega \sin A) + \\ &\quad + \sin i \cos A \cos B; \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$f_4 = \cos \Omega \cos A \sin B - \sin \Omega \sin A; \quad (3.27)$$

$$\alpha_{23} = f_5 \cos u - f_6 \sin u; \quad (3.28)$$

$$f_5 = \sin i \sin B - \cos i \sin \Omega \cos B; \quad (3.29)$$

$$f_6 = \cos \Omega \cos B;$$

$$\begin{aligned} \alpha_{31} &= \sin i (\sin \Omega \sin A \sin B - \cos \Omega \cos A) - \\ &\quad - \cos i \sin A \cos B. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Приведем выражения для определения величин α_{12} , α_{13} , α_{32} , α_{33} :

$$\alpha_{12} = -f_4 \cos u + f_3 \sin u; \quad (3.31)$$

$$\alpha_{13} = f_6 \cos u + f_5 \sin u; \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{32} &= -\sin i (\sin \Omega \cos A \sin B + \cos \Omega \sin A) + \\ &\quad + \cos i \cos A \cos B; \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\alpha_{33} = \sin i \sin \Omega \cos B + \cos i \sin B. \quad (3.34)$$

Не задаваясь конкретной траекторией выведения аппарата на орбиту, для расчета величин $\alpha_{11}(u)$, $\alpha_{21}(u)$, $\alpha_{22}(u)$, $\alpha_{23}(u)$, $\alpha_{31}(u)$ примем следующие допущения:

1) наклон плоскости орбиты $i = 50^\circ$; 2) угол наклона оси Y_0 к плоскости экватора $B = 47^\circ$; 3) угловая дальность участка выведения (от старта до выхода на орбиту) равна нулю.

Третье допущение в действительности невыполнимо. Но для примерного определения характера изменения величин α_{ij} и углов φ_0 , ψ_0 , ϑ_0 на орбите это допущение может быть принято.

Для определения величин Ω , A рассмотрим сферический треуголь-

Таблица 3.3

u	α_{23}	α_{22}	ϑ_0
0	0,95472	0,29750	$72^\circ 41' 30''$
$72^\circ 41' 30''$	0	1	0
90°	-0,29750	0,95472	$-17^\circ 18' 30''$
$162^\circ 41' 30''$	-1	0	-90°
180°	-0,95472	-0,29750	$-107^\circ 18' 30''$
$252^\circ 41' 30''$	0	-1	$\pm 180^\circ$
270°	0,29750	-0,95472	$162^\circ 41' 30''$
$342^\circ 41' 30''$	1	0	90°
360	0,95472	0,29750	$72^\circ 41' 30''$

Положив в выражении для α_{23} или α_{22} $u = 0$, получаем $\vartheta_0(0) = 72^\circ 41' 30''$.

Значение u , которое соответствует углу $\vartheta_0(u) = 0$, определяется из условия

$$\operatorname{tg} u = f_5/f_6 = 3,2091,$$

откуда $u = 72^\circ 41' 30''$.

Значения угла $\vartheta_0(u)$ для некоторых точек данной орбиты приведены в табл. 3.3.

Полученные числовые значения угла ϑ_0 позволяют в диапазоне изменения аргумента широты $0 \leq u \leq 360^\circ$ выразить угол $\vartheta_0(u)$ следующими соотношениями:

$$\vartheta_0(u) = \vartheta_0(0) - u$$

при $0 \leq u \leq 252^\circ 41' 30''$; $\vartheta_0(u) = 180^\circ - (u - 252^\circ 41' 30'')$ при $252^\circ 41' 30'' \leq u \leq 360^\circ$.

Вторая зависимость для определения угла $\vartheta_0(u)$ может быть действительной для двух участков орбиты при условии, что область изменения u определяется следующими цифрами $252^\circ 41' 30'' \leq u \leq 612^\circ 41' 30''$.

График изменения угла $\vartheta_0(u)$ в соответствии с табл. 3.3 приведен на рис. 3.4.

Из рассмотрения данного случая движения КА по орбите можно сделать следующий вывод.

Если по какому-либо прибору ориентировать аппарат на горизонт, а при помощи показаний ГСП, ориентированной в стартовой системе координат, получить угол ϑ_0 , то сразу простым вычитанием можно будет определить аргумент широты u , характеризующий местоположение КА.

Рассмотрим случай, когда плоскость орбиты не совпадает с продольной плоскостью $X_c Y_c$ стартовой системы координат $O_1 X_c Y_c Z_c$.

При отсутствии маневра по углу рыскания отклонение плоскости ор-

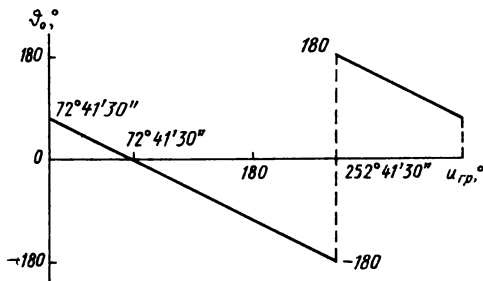


Рис. 3.4

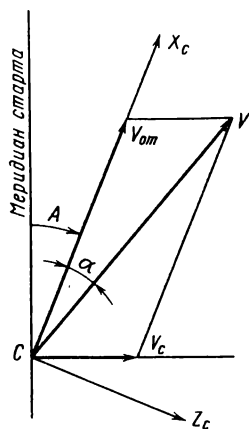


Рис. 3.5

биты от плоскости $X_c Y_c$ обуславливается, главным образом, скоростью точки старта V_c .

На рис. 3.5 показано положение вектора скорости орбитального движения V и ее составляющих $V_{от}$ и V_c . Угол α , характеризующий отклонение вектора скорости V от плоскости $X_c Y_c$, можно определить из следующего соотношения:

$$\sin \alpha = V_c \cos A / V.$$

На широте $B = 47^\circ$ скорость точки старта V_c равна 317,7 м/с. Скорость V для орбиты высотой 250 км равна 7759 м/с. При изменении азимута A от 0 до 90° угол α будет соответственно изменяться от $2^\circ 20' 30''$ до 0.

Для определения характера изменения углов φ_0 , ψ_0 , ϑ_0 рассмотрим крайний случай: $A = 0$ и $\alpha = 2^\circ 20' 30''$.

Таблица 3.4

u	φ_0	ψ_0	ϑ_0
0°	$-1^\circ 43'$	$-1^\circ 36'$	$47^\circ 02' 30''$
$47^\circ 01' 24''$	0°	$-2^\circ 20' 30''$	0°
90°	$1^\circ 36'$	$-1^\circ 43'$	$-43^\circ 00'$
$137^\circ 01' 24''$	$2^\circ 20' 30''$	0°	-90°
180°	$1^\circ 43'$	$1^\circ 36'$	$-132^\circ 57' 30''$
$227^\circ 01' 24''$	0°	$2^\circ 20' 30''$	$\pm 180^\circ$
270°	$-1^\circ 36'$	$1^\circ 43'$	$+ 137^\circ$
$317^\circ 01' 24''$	$-2^\circ 20' 30''$	0°	90°
360°	$-1^\circ 43'$	$-1^\circ 36'$	$47^\circ 02' 30''$

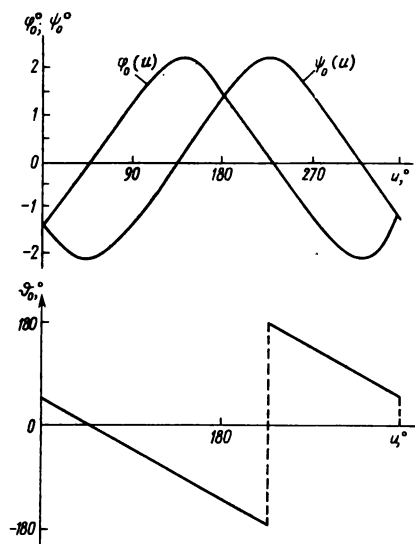


Рис. 3.6

Наклон плоскости орбиты к экватору определяется выражением $\cos i = \cos B \sin \alpha$.

Для $B = 47^\circ$ и $\alpha = 2^\circ 20' 30''$ $i = 88^\circ 24'$. Долгота восходящего узла орбиты $\Omega_N = -1^\circ 43'$. Аргумент широты точки $s_{uc} = 47^\circ 01' 24''$.

Результаты данного расчета приведены в табл. 3.4. По данным табл. 3.4 можно построить графики изменения углов (рис. 3.6).

ГЛАВА 4.

АСТРОНОМИЧЕСКАЯ КОРРЕКЦИЯ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

4.1. ОРИЕНТАЦИЯ АСТРОВИЗИРА НА КА

Инструментальные погрешности гироскопов приводят к тому, что фактическая ориентация ГСП отличается от ориентации, принятой при расчете, причем погрешности в ориентации и обусловленные ими погрешности в определении координат и скоростей КА увеличиваются с течением времени. Поэтому для восстановления точности инерциальной навигационной системы требуется коррекция получаемой информации. Коррекция может быть введена или путем восстановления у ГСП расчетной ориентации или путем введения поправок в информацию об угловой ориентации КА относительно ГСП. Необходимые поправки для коррек-

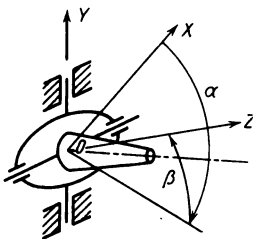


Рис. 4.1

ции системы можно получить, сравнив фактические и расчетные параметры ориентации ГСП относительно небесных ориентиров: звезд, Солнца, планет и Луны.

В настоящее время наиболее предпочтительна и наиболее распространена коррекция системы по двум звездам. Объясняется это, во-первых, тем, что при движении аппарата около Земли направления на звезды относительно инерциальной (невращающейся) системы можно считать неизменными, и, во-вторых, угловые размеры звезд малы и, следовательно, их можно не учитывать при расчете углов ориентации линии визирования.

При длительном полете КА, например по орбите вокруг Земли, невозможно все время наблюдать одни и те же звезды. Это обуславливается и ограниченностью размеров окна, через которое наблюдается звезда, и конструктивными ограничениями карданного подвеса на углы разворотов астровизира. Поэтому в процессе полета аппарата требуется переводить астровизеры с одной пары звезд на другую, и тем чаще, чем больше скорость уходов гироскопов и чем меньше поле обзора астровизира. Астровизиром или просто визиром будем называть устройство, обеспечивающее визирование (пеленгование) небесных светил.

При длительном полете КА, например по орбите вокруг Земли, невозможно все время наблюдать одни и те же звезды. Это обуславливается и ограниченностью размеров окна, через которое наблюдается звезда, и конструктивными ограничениями карданного подвеса на углы разворотов астровизира. Поэтому в процессе полета аппарата требуется переводить астровизеры с одной пары звезд на другую, и тем чаще, чем больше скорость уходов гироскопов и чем меньше поле обзора астровизира. Астровизиром или просто визиром будем называть устройство, обеспечивающее визирование (пеленгование) небесных светил.

Астровизир может быть установлен или непосредственно на аппарате или на ГСП [11, 20, 22]. При установке визира на платформе точность пеленгации светила выше, чем при установке непосредственно на КА. Но тем не менее предпочитают установку визира непосредственно на КА, так как постановка визира на ГСП усложняет и без того довольно сложную конструкцию платформы.

На рис. 4.1 показана кинематическая схема подвеса визира на аппарате. Аппарат представлен трехгранником $OXYZ$ (X — продольная ось КА).

Ось вращения наружной рамки подвеса параллельна оси аппарата Y , α — угол разворота внешней рамки и β — угол прокачки внутренней рамки подвеса. Угол α отсчитывается от продольной оси КА X в сторону оси Z . Угол β отсчитывается от плоскости XZ в сторону оси Y .

В дальнейшем область изменения углов $0 \leq \alpha \leq \alpha_2 \leq 180^\circ$ и $\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$ будем называть областью видимости визира.

4.2. УСЛОВИЯ ВИДИМОСТИ ЗВЕЗД ПРИ ДВИЖЕНИИ КА ПО ОРБИТЕ ИСЗ

Составление алгоритмов коррекции навигационной системы будем вести для случая движения КА по орбите искусственного спутника Земли (ИСЗ). Будем полагать, что расчетная или фактическая орбита известна. Первым вопросом, который требуется выяснить, какие звезды и (сколько времени) будут находиться в области видимости визиера при движении аппарата по орбите ИСЗ.

Список звезд, рекомендуемых для астронавигации, приводится в работах [15, 21].

Для оценки видимости (визирования) звезд при движении аппарата по орбите ИСЗ введем следующие системы координат.

1. Система координат $O\xi_3\eta_3\zeta_3$ – геоцентрическая экваториальная система координат. Ось ξ_3 направлена в точку весеннего равноденствия, ось ζ_3 по оси вращения Земли к северному полюсу и ось η_3 направлена в соответствии с правой системой координат.

2. Подвижная система координат $X_N Y_N Z_N$. Начало – в центре масс Земли. Плоскость $X_N Y_N$ совмещена с плоскостью орбиты. Положение оси X_N определяется аргументом широты u , отсчитываемым от восходящего узла орбиты N . Положение восходящего узла N на небесном экваторе определяется долготой Ω_3 , отсчитываемой от направления на точку весеннего равноденствия γ . Ось Y_N направлена в сторону движения аппарата, а ось Z_N в соответствии с правой системой направлена перпендикулярно к плоскости орбиты. Положение системы координат $X_N Y_N Z_N$ относительно системы координат $\xi_3\eta_3\zeta_3$ показано на рис. 4.2.

3. Система координат $OX^*Y^*Z^*$ – соответствует программной ориентации аппарата. Начало системы координат O – местонахождение аппарата, определяемое аргументом широты u и радиусом-вектором $r(u)$.

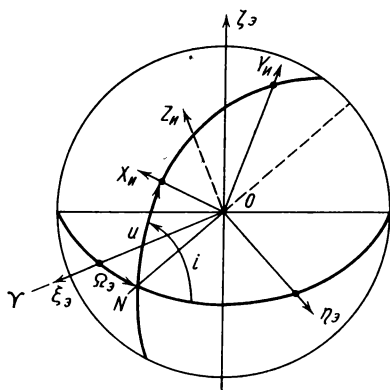


Рис. 4.2

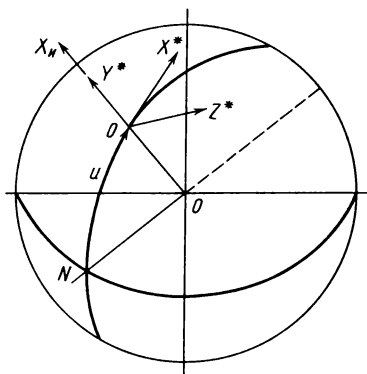


Рис. 4.3

Ось Y^* направлена по местной геоцентрической вертикали X_H . Ось X^* находится в плоскости орбиты и направлена в сторону движения аппарата. Ось Z^* направлена в соответствии с правой системой координат.

Положение системы координат $OX^*Y^*Z^*$ относительно системы координат $OX_HY_HZ_H$ показано на рис. 4.3.

Направляющие косинусы, определяющие взаимную ориентацию осей, приведены в табл. 4.1 и матрице соответствующего преобразования.

Таблица 4.1

Системы координат		Геоцентрическая экваториальная		
		ξ_3	η_3	ζ_3
Подвижная	X_H	$\cos u \cos \Omega_3 - \sin u \sin \Omega_3 \cos i$	$\cos u \sin \Omega_3 + \sin u \cos \Omega_3 \cos i$	$\sin u \sin i$
	Y_H	$-\sin u \cos \Omega_3 - \cos u \sin \Omega_3 \cos i$	$-\sin u \sin \Omega_3 + \cos u \cos \Omega_3 \cos i$	$\cos u \sin i$
	Z_H	$\sin \Omega_3 \sin i$	$-\cos \Omega_3 \sin i$	$\cos i$
		X_H	Y_H	Z_H
	X^*	0	1	0
	Y^*	1	0	0
	Z^*	0	0	-1

Текущая ориентация аппарата XYZ относительно программной $X^*Y^*Z^*$ определяется углами разворотов ϑ , ψ , φ , показанными на рис. 4.4. Направляющие косинусы осей X , Y , Z в системе $X^*Y^*Z^*$ приведены в табл. 4.2.

Таблица 4.2

Система координат		Программного ориентирования		
		X^*	Y^*	Z^*
Текущей ориентации	X	$\cos \vartheta \cos \psi$	$\sin \vartheta \cos \psi$	$-\sin \psi$
	Y	$-\cos \varphi \sin \vartheta + \sin \varphi \cos \vartheta \sin \psi$	$\cos \varphi \cos \vartheta + \sin \varphi \sin \vartheta \sin \psi$	$\sin \varphi \cos \psi$
	Z	$\sin \varphi \sin \vartheta + \cos \varphi \cos \vartheta \sin \psi$	$-\sin \varphi \cos \vartheta + \cos \varphi \sin \vartheta \sin \psi$	$\cos \varphi \cos \psi$

Если положить углы ϑ, ψ, φ малыми, то табл. 4.2 примет вид

	X^*	Y^*	Z^*
X	1	ϑ	$-\psi$
Y	$-\vartheta$	1	φ
Z	φ	$-\varphi$	1

При определении области видимости звезд небольшие отклонения КА от программной ориентации не имеют существенного значения. В соответствии с принятой ориентацией визира при движении аппарата по орбите ИСЗ можно будет наблюдать только те звезды, которые находятся в правой полусфере относительно плоскости орбиты. Звезды, которые находятся в левой полусфере относительно плоскости орбиты, не будут видны. Левая полусфера характеризуется координатами $Z_{\text{и}} > 0$, а правая — координатами $Z_{\text{и}} < 0$. Следовательно, при движении аппарата по орбите ИСЗ можно наблюдать те звезды, координаты которых $Z_{\text{и}} < 0$, и не будут видны те звезды, координаты которых $Z_{\text{и}} \geq 0$.

В дальнейшем под координатами звезды $(x_{\text{и}}, y_{\text{и}}, z_{\text{и}})$ будем понимать проекции $x_{\text{и}}^c, y_{\text{и}}^c, z_{\text{и}}^c$ на оси координат единичного радиуса-вектора $\vec{r}^c$, направленного по лучу визирования звезды. Проекции единичного радиуса-вектора равны направляющим косинусам луча визирования. Следовательно, при движении аппарата по орбите ИСЗ будут видны те звезды, у которых

$$z_{\text{и}}^c = \cos(\vec{r}^c, z_{\text{и}}) < 0.$$

Положения звезд [3, 16, 21] в геоцентрической экваториальной системе задаются прямым восхождением α и склонением δ .

Прямое восхождение α отсчитывается в экваториальной плоскости от направления на точку весеннего равноденствия до пересечения с кругом склонения. Склонение δ отсчитывается по дуге круга склонения

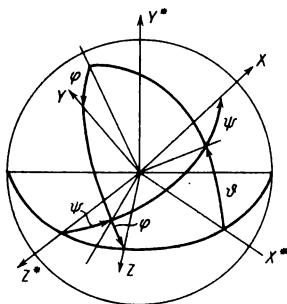


Рис. 4.4

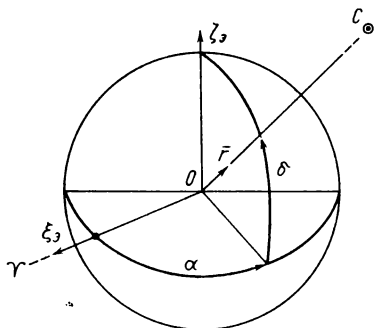


Рис. 4.5

от экватора до светила С. (Прямые восхождения и склонения светил на каждый год приводятся в Астрономическом ежегоднике СССР). На рис. 4.5 показаны координаты α, δ светила С.

Проекции единичного радиуса-вектора $\bar{r}$, направленного по лучу визирования звезды, в экваториальной системе $\xi_3 \eta_3 \zeta_3$ определяются выражениями

$$\begin{aligned} r_\xi &\equiv \cos(\bar{r}, \hat{\xi}_3) = \cos \delta \cos \alpha; \\ r_\eta &\equiv \cos(\bar{r}, \hat{\eta}_3) = \cos \delta \sin \alpha; \\ r_\zeta &\equiv \cos(\bar{r}, \hat{\zeta}_3) = \sin \delta. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Проекции $(x_{\text{и}}^c, y_{\text{и}}^c, z_{\text{и}}^c)$ единичного радиуса-вектора $\bar{r}$ на оси $X_{\text{и}} Y_{\text{и}} Z_{\text{и}}$ определяются из выражения

$$\begin{bmatrix} x_{\text{и}}^c \\ y_{\text{и}}^c \\ z_{\text{и}}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_\xi \\ r_\eta \\ r_\zeta \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Элементы матрицы l_{ij} , представляющие собой косинусы осей $X_{\text{и}} Y_{\text{и}} Z_{\text{и}}$ в системе координат $\xi_3 \eta_3 \zeta_3$, приведены в табл. 4.1.

Координата $z_{\text{и}}$ в соответствии с табл. 4.1 направляющих косинусов будет определяться выражением

$$z_{\text{и}}^c = r_\xi \sin i \sin \Omega_3 - r_\eta \sin i \cos \Omega_3 + r_\zeta \cos i. \quad (4.3)$$

Таким образом, для заданной плоскости орбиты (Ω_3, i) с помощью выражения (4.3) можно вычислить какие звезды могут быть видны ($z_{\text{и}}^c < 0$) и какие не будут видны ($z_{\text{и}}^c > 0$). Заметим, в условии $z_{\text{и}}^c < 0$ не отражены ограничения, накладываемые углами поворота внутренней рамки визира β_1 и β_2 . Поэтому условие $z_{\text{и}}^c < 0$ является первым (необходимым) условием отбора звезд для визирования.

Долгота Ω_3 узла прямого восхождения определяется следующим соотношением:

$$\Omega_3 = \beta_0 + \lambda_c + \Omega, \quad (4.4)$$

где Ω — угол узла прямого восхождения в системе координат $\xi_0 \eta_0 \zeta_0$, определяемый по (3.1); λ_c — долгота точки старта; β_0 — угол между осью ξ_3 и осью $X_{\text{Гр}}$ гринвичской системы координат $OX_{\text{Гр}} Y_{\text{Гр}} Z_{\text{Гр}}$, "замороженной" на момент старта.

Ось $X_{\text{Гр}}$ находится на пересечении плоскости гринвичского меридиана с плоскостью экватора. Ось $Z_{\text{Гр}}$ ориентирована по оси вращения Земли и направлена к северному полюсу. Ось $Y_{\text{Гр}}$ направлена в соответствии с правой системой координат.

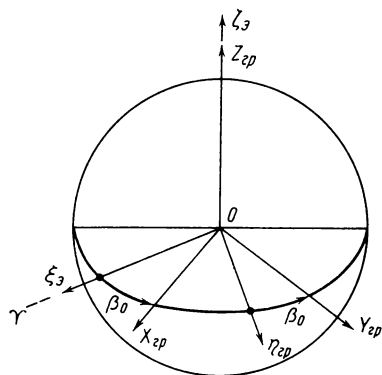


Рис. 4.6

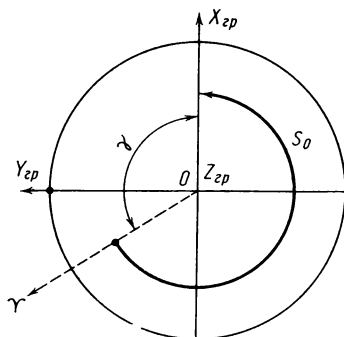


Рис. 4.7

Положение системы координат $OX_{ГР} Y_{ГР} Z_{ГР}$ относительно системы координат $\xi_3 \eta_3 \zeta_3$ показано на рис. 4.6.

Определим угол β_0 .

В Астрономическом календаре [3], на каждую дату на oh всемирного времени задается звездное время s_0 , определяющее положение гринвичского меридиана относительно направления на точку весеннего равноденствия Υ . Схема положения гринвичского меридиана в гринвичскую полночь показана на рис. 4.7.

Из рис. 4.7 видно, дополнительный угол γ определяется следующим соотношением:

$$\gamma = 24^h - s_0. \quad (4.5)$$

Для заданной даты старта положение оси $X_{ГР}$ относительно направления на точку Υ определяется гринвичским временем старта T_0 .

Если время старта t_c задано по московскому летнему времени, то время T_0 будет определяться выражением

$$T_0 = t_c - 4r. \quad (4.6)$$

За время T_0 Земля повернется на угол, равный $\omega_3 T_0$. Следовательно, можно записать

$$\beta_0 = \omega_3 T_0 - \gamma. \quad (4.7)$$

Если время старта известно до старта, то величины β_0 и λ_c могут быть введены в БЦВМ.

Таблица 4.3

Звезда	α	δ	r_ξ	r_η	r_ζ
Канопус	$95^\circ 49'$	$-52^\circ 41'$	$-0,061438$	$0,60311$	$-0,79530$
Сириус	$100^\circ 56'$	$-16^\circ 40'$	$-0,18170$	$0,94060$	$-0,28680$
Вега	$278^\circ 58'$	$+38^\circ 45'$	$0,01215$	$-0,77034$	$0,62592$

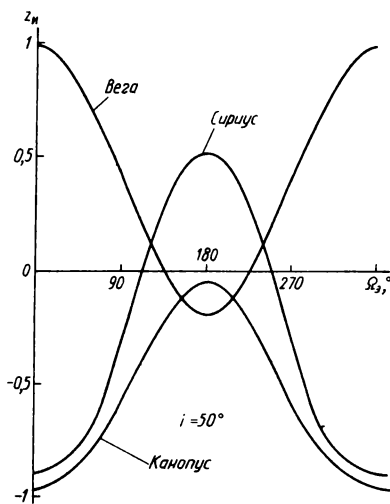


Рис. 4.8

Заметим, варьируя время старта, можно получить любую долготу $\Omega_з$ ($0 \leq \Omega_з \leq 360^\circ$) восходящего узла N .

Изменение величины $z_и$ в зависимости от $\Omega_з$ для звезд Канопус, Сириус и Вега приведено на рис. 4.8. Наклонение орбиты i при расчете $z_и$ было принято равным 50° .

Экваториальные координаты (α, δ) звезд [15, 21] и проекции единичных радиусов-векторов r на оси $\xi_з, \eta_з, \zeta_з$ приведены в табл. 4.3.

4.3. АЗИМУТ И ВЫСОТА ЗВЕЗДЫ ПРИ ДВИЖЕНИИ КА ПО ОРБИТЕ ИСЗ

При подготовке КА к орбитальному полету должны быть заранее выяснены какие звезды и как долго будут находиться в области видимости визира. Это необходимо для того, чтобы в процессе полета на следующие системы визира можно было задавать координаты тех звезд, визирование которых наиболее удобно и надежно.

Положение луча визирования звезды относительно подвижной орбитальной системы $X_и Y_и Z_и$ будем определять азимутом $A_и$ и высотой светила $h_и$. Азимут $A_и$ будем отсчитывать в плоскости $Y_и Z_и$ вправо от направления полета $Y_и$. Высота светила $h > 0$, если луч расположен над плоскостью $Y_и Z_и$.

На рис. 4.9 показано положение луча визирования звезды относительно системы $X_и Y_и Z_и$ и программной ориентации $X^* Y^* Z^*$.

Из рис. 4.9 видно, что азимут $A_{\text{и}}$ и высота светила $h_{\text{и}}$ будут определяться выражениями

$$\operatorname{tg} A_{\text{и}} = \frac{-z_{\text{и}}^c}{Y_{\text{и}}^c}; \quad (4.8)$$

$$\sin h_{\text{и}} = \frac{x_{\text{и}}^c}{r} = x_{\text{и}}^c. \quad (4.9)$$

Проекции $x_{\text{и}}^c$, $y_{\text{и}}^c$, $z_{\text{и}}^c$ единичного радиуса-вектора r_c , направленного по лучу визирования звезды, определяют по формуле (4.2).

Подставив в (4.2) значения величин l_{ij} и группируя члены с $\cos u$ и $\sin u$, получим

$$x_u = f_1 \cos u + f_2 \sin u; \quad (4.10)$$

$$y_u = -f_1 \sin u + f_2 \cos u,$$

где

$$f_1 = r_{\xi} \cos \Omega_3 + r_{\eta} \sin \Omega_3; \quad (4.11)$$

$$f_2 = (-r_{\xi} \sin \Omega_3 + r_{\eta} \cos \Omega_3) \cos i + r_{\zeta} \sin i.$$

Величина $z_{\text{и}}$ не зависит от аргумента широты u и определяется выражением (4.3).

Значения $u = u^*$, соответствующие максимальному значению высоты светила $h_m(u^*)$, определяются из условия

$$\frac{\partial x_{\text{и}}}{\partial u} = -f_1 \sin u^* + f_2 \cos u^* = 0. \quad (4.12)$$

Откуда

$$u^* = \arctg(f_2/f_1). \quad (4.13)$$

При

$$y(u^*) = -f_1 \sin u^* + f_2 \cos u^* = 0,$$

$$\operatorname{tg} A_{\text{и}} = -z_{\text{и}}/y_{\text{и}} = \infty$$

имеем

$$A(u^*) = 90^\circ.$$

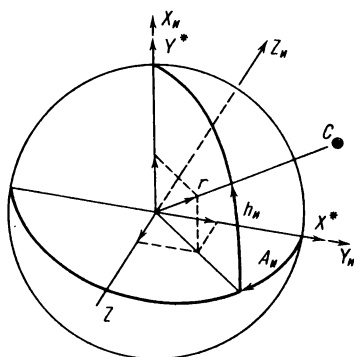


Рис. 4.9

Таким образом для каждой звезды ($r_{\xi}^c, r_{\eta}^c, r_{\zeta}^c$) и для каждой орбиты (Ω_3, i) по формулам (4.7) – (4.10) можно рассчитать как изменяются азимут $A(u)$ и высота светила $h(u)$ с изменением аргумента широты u .

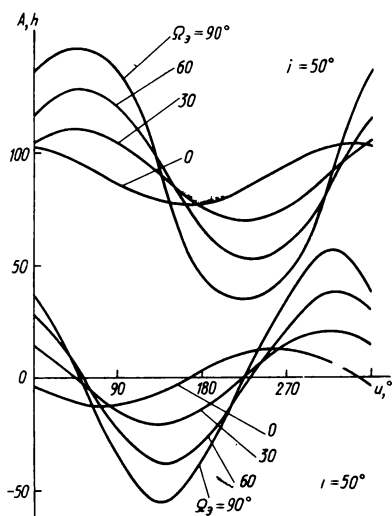


Рис. 4.10

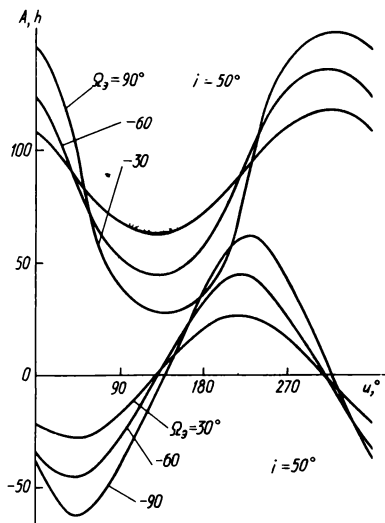


Рис. 4.11

Для программной ориентации КА $X^*Y^*Z^*$ углы ориентации визира α и β будут соответствовать азимуту $A(u)$ и высоте светила $h(u)$.

На рис. 4.10 и 4.11 для орбит с прямым восхождением $\Omega_3 = 0, \pm 30, \pm 60, \pm 90^\circ$ и для $i = 50^\circ$ представлены графики зависимостей $A(u)$ и $h(u)$ от u для звезды Канопус.

Необходимо отметить, что для визирования звезды могут быть использованы только те области изменения аргумента широты u , в которых высота светила $h \geq 0$.

При $h < 0$ звезда может быть закрыта Землей, а при прохождении луча визирования через атмосферу Земли (до высот 100 км) изменяется яркость звезды [24].

Значение аргумента широты $u = \bar{u}$, соответствующие высоте светила $h(\bar{u}) = 0$, определяются из условия

$$x_u(\bar{u}) = f_1 \cos \bar{u} + f_2 \sin \bar{u} = 0.$$

Откуда

$$\operatorname{tg} \bar{u} = -f_1/f_2. \quad (4.14)$$

Так как $\operatorname{tg} u^* \operatorname{tg} \bar{u} = -1$, то для значений $\bar{u}$ можем записать $\bar{u}_{1,2} = u^* \pm \pm 90^\circ$.

Таким образом, звезду будет видно ($h > 0$) при нахождении аргумента широты u в области $u_1 < u < u_2$.

4.4. АЗИМУТ И ВЫСОТА СОЛНЦА ПРИ ДВИЖЕНИИ КА ПО ОРБИТЕ ИСЗ

В качестве одного из небесных ориентиров при космических полетах используется Солнце. Методика восстановления ориентации КА в случае визирования Солнца и звезды приведена в работе. [20]. Определение углов разворота по результатам визирования Солнца в орбитальном полете рассматривается в гл. 5. Так как координаты Солнца (прямое восхождение и склонение) в течение года непрерывно изменяются, то и значения азимутов и высот Солнца на орбите тоже будут изменяться в зависимости от даты полета КА.

Экваториальные координаты Солнца на O^h всемирного времени на каждый день в течение года приводятся в Астрономическом календаре [3]. В табл. 4.4 приведены экваториальные координаты Солнца четырех дат 1981 г., для которых были просчитаны высоты, азимуты и области видимости Солнца при движении КА по орбитам ИСЗ.

Для принятой ориентации визира относительно осей КА Солнце должно находиться справа при движении аппарата по орбите ИСЗ.

Для определения области долгот, в которой можно было бы задавать восходящие узлы орбит (наклонение орбит принимается равным 50°) рассмотрим для случая $\delta > 0$ сферические треугольники ABC и AHC , приведенные на рис. 4.12.

В точке B находится восходящий и в точке H нисходящий узлы орбит. В точке C , координаты которой $\alpha_\odot, \delta_\odot$, пересекаются восходящая и нисходящая ветви орбит. Для того чтобы Солнце находилось справа при движении аппарата по орбите ИСЗ, необходимо чтобы пересечение орбит с кругом склонения Солнца находилось над точкой C . Поэтому на дуге BH не должно быть ни восходящих, ни нисходящих узлов орбит.

Определим величину дуги c в сферическом треугольнике ABC . Двугранный угол при вершине A равен 90° . Для прямоугольных сферических треугольников имеют место следующие соотношения [13]:

$$\begin{aligned}\sin b &= \sin a \sin B; \\ \sin c &= \sin a \sin C; \\ \cos B &= \cos b \sin C;\end{aligned}\tag{4.15}$$

Таблица 4.4

Дата	Прямое восхождение $\alpha_\odot$	Склонение $\delta_\odot$
21 марта	$0^\circ 15' 45''$	$0^\circ 06' 51''$
21 июня	$89^\circ 29' 30''$	$23^\circ 26' 22''$
23 сентября	$179^\circ 53' 00''$	$0^\circ 03' 01''$
22 декабря	$270^\circ 03' 15''$	$-23^\circ 26' 25''$

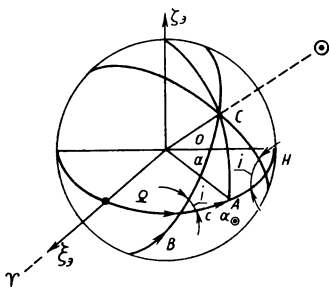


Рис. 4.12

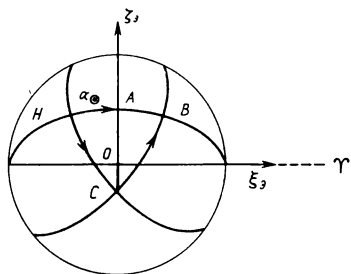


Рис. 4.13

Перепишем первое и третье равенства в виде

$$\sin a = \sin b / \sin B; \quad (4.16)$$

$$\sin c = \cos B / \cos b.$$

Подставив выражения (4.16) в (4.15), получим

$$\sin c = \operatorname{tg} b \operatorname{ctg} B. \quad (4.17)$$

В рассматриваемом нами случае дуга b есть склонение Солнца $\delta_\odot$, а угол B — наклонение орбиты i . Следовательно, равенство (4.17) можно переписать в виде

$$\sin c = \operatorname{tg} \delta \operatorname{ctg} i. \quad (4.18)$$

Определив из соотношения (4.18) дугу c получим, что долгота восходящего узла B орбиты, проходящей через точку C , будет равна $\alpha_\odot - c$. Долгота нисходящего узла H равна $\alpha_\odot + c$, а долгота восходящего узла данной орбиты равна $\alpha_\odot + c - 180^\circ$. Таким образом, долготы восходящих узлов орбит можно задавать в области

$$(\alpha_\odot + c - 180^\circ) < \Omega_3 < \alpha_\odot - c. \quad (4.19)$$

Для 21 июня в соответствии с $\alpha_\odot$, $\delta_\odot$, приведенными в табл. 4.4, величина дуги c равна $21^\circ 20'$. Следовательно, долготы восходящих узлов орбит для данной даты можно задавать в области

$$-69^\circ 10' 30'' < \Omega_3 < 68^\circ 09' 30''.$$

Положение восходящих и нисходящих ветвей орбит для $\delta_\odot < 0$ показано на рис. 4.13. Для того чтобы при движении аппарата по орбите ИСЗ Солнце находилось справа, пересечение орбит с кругом склонения Солнца должно быть тоже над точкой C . Но в случае $\delta < 0$ в отличие от $\delta > 0$ на дуге BH могут быть и восходящие, и нисходящие узлы орбит. Долгота восходящего узла B в этом случае равна $\alpha_\odot + c$. Долгота нисходящего узла $H = \alpha_\odot - c$. Долгота восходящего узла у второй орбиты равна $\alpha_\odot - c - 180^\circ$.

Следовательно, долготу восходящего узла орбиты можно задавать в области

$$(\alpha_{\odot} - c - 180^{\circ}) < \Omega_3 < \alpha_{\odot} + c. \quad (4.20)$$

Для 22 декабря величина дуги c равна $21^{\circ}20'$. Область, в которой можно задать восходящий узел орбиты, определяется следующими величинами: $68^{\circ}43'15'' < \Omega_3 < 291^{\circ}23'15''$. Величина (ширина) данной области равна $222^{\circ}40'$, что значительно больше величины области $137^{\circ}20'$ для 21 июня. Для 21 марта дуга $c = 0^{\circ}05'40''$ (см. рис. 4.14, а). Область допустимых долгот восходящих узлов — $179^{\circ}38'35'' < \Omega_3 < 0^{\circ}10'05''$. Для 23 сентября дуга $c \cong 2'30''$. Область допустимых долгот восходящих узлов $0^{\circ}04'30'' < \Omega_3 < 179^{\circ}50'30''$.

В табл. 4.5 для указанных дат и для различных орбит приведены значения аргументов широты u_1 и u_2 , соответствующие высоте Солнца $h = 0$, $u = u^*$, максимальной для данной орбиты высоте $h_{\max}$. Здесь же для указанных значений аргументов широт и высот h приведены соот-

Таблица 4.5

Ω_3	U	h	A	dh/du	dA/du
21 марта					
	$86^{\circ}52'00''$	0	$3^{\circ}33'40''$	0,99808	0
-175	$176^{\circ}52'00''$	$86^{\circ}27''$	90°	0	16,08
	$266^{\circ}52'00''$	0	$176^{\circ}26'20''$	-0,99808	0
	$69^{\circ}45'05''$		$22^{\circ}15'30''$	0,9255	0
-150	$159^{\circ}45'05''$	$67^{\circ}44'50''$	90°	0	2,44
	$249^{\circ}45'05''$		$157^{\circ}44'30''$	-0,9255	0
	$42^{\circ}09'30''$	0	$41^{\circ}20'$	0,7509	0
-120	$132^{\circ}09'30''$	$48^{\circ}40'$	90°	0	1,137
	$222^{\circ}09'30''$	0	$138^{\circ}40'$	-0,7509	0
	$0^{\circ}24'30''$	0	$49^{\circ}54'$	0,6443	0
-90	$90^{\circ}24'30''$	$40^{\circ}06'$	90°	0	0,842
	$180^{\circ}24'30''$	0	$130^{\circ}06'$	-0,6443	0
	$-41^{\circ}33'10''$	0	$41^{\circ}36'$	0,7478	0
-60	$48^{\circ}26'50''$	$48^{\circ}24'$	90°	0	1,126
	$138^{\circ}26'50''$	0	$138^{\circ}24'$	-0,7478	0
	$-69^{\circ}21'30''$	0	$22^{\circ}38'$	0,9230	0
-30	$20^{\circ}38'30''$	$67^{\circ}22'$	90°	0	2,398
	$110^{\circ}38'30''$	0	$157^{\circ}22'$	-0,923	0
	$-86^{\circ}31'45''$		$3^{\circ}57'30''$	0,9976	0
-5	$3^{\circ}28'15''$	$80^{\circ}59'$	90°	0	14,45
	$93^{\circ}28'15''$		$176^{\circ}02'30''$	-9976	0

Ω_3°	U	h	A	dh/du	dA/du
21 июня					
	55° 59' 45"	0	2° 41' 30"	0,9989	0
-65	145° 59' 45"	87° 19'	90°	0	21,27
	235° 59' 45"	0	177° 18' 30"	-0,9989	0
	52° 36' 40"	0	5° 48' 15"	0,9949	0
-60	142° 36' 40"	84° 13'	90°	0	9,84
	232° 36' 40"	0	174° 11' 45"	-0,9949	0
	28° 54' 20"	0	20° 51' 40"	0,9345	0
-30	118° 54' 20"	69° 08' 40"	90°	0	2,62
	208° 54' 20"	0	159° 08' 20"	-0,9345	0
	-0° 31' 20"		26° 33' 30"	0,8945	0
0	89° 28' 40"	63° 26' 40"	90°	0	2,00
	179° 28' 40"	0	153° 26' 30"	-0,8945	0
	-29° 48' 50"	0	20° 28' 40"	0,9368	0
30	60° 11' 10"	69° 32' 20"	90°	0	2,68
	150° 11' 10"	0	159° 31' 20"	-0,9368	0
	-53° 18' 40"	0	5° 11'	0,9959	0
60	36° 41' 20"	84° 50'	90°	0	11,03
	126° 41' 20"	0	174° 49'	-0,9959	0
	-56° 40'	0	2° 02' 35"	0,9994	0
65	33° 20'	87° 58'	90°	0	28,03
	123° 20'	0	177° 57' 25"	-0,9994	0
23 сентября					
	86° 52' 30"	0	3° 53' 10"	0,9975	0
5	176° 52' 30"	85° 57'	90°	0	14,72
	266° 52' 30"	0	176° 06' 50"	-0,9975	0
	69° 30' 45"	0	22° 34' 15"	0,9234	0
30	159° 30' 45"	67° 25' 10"	90°	0	2,41
	249° 30' 45"	0	157° 25' 10"	-0,9234	0
	41° 46' 40"	0	41° 34' 40"	0,7481	0
60	131° 46' 40"	48° 25' 24"	90°	0	1,12
	221° 46' 40"	0	138° 25' 20"	-0,7481	0
	-0° 11'	0	49° 57'	0,6435	0
90	89° 49' 00"	40° 03'	90°	0	0,841
	179° 49' 00"	0	130° 03'	-0,6435	0
	-42° 02'	0	41° 27' 30"	0,7496	0

Ω_3°	U	h	A	dh/du	dA/du
120	47° 58'	48° 32' 30"	90°	0	1,13
	137° 58'	0	138° 32' 30"	-0,7496	0
	-69° 41' 20"	0	22° 24' 10"	0,9245	0
150	20° 18' 40"	67° 36'	90°	0	2,43
	110° 18' 40"	0	157° 35' 50"	-0,9245	0
	-86° 49' 30"	0	3° 42' 25"	0,9979	0
175	3° 10' 30"	86° 18'	90°	0	15,44
	93° 10' 30"	0	176° 17' 35"	-0,9979	0

22 декабря

75	117° 20'	0	4° 11' 40"	0,9970	0
	207° 20'	85° 49'	90°	0	13,63
	297° 20'	0	175° 48' 20"	-0,9970	
120	90° 44' 40"	0	37° 20' 24"	0,7950	0
	180° 44' 40"	52° 39' 40"	90°	0	1,31
	270° 44' 40"	0	142° 39' 36"	-0,7950	0
150	65° 52' 50"	0	59° 46' 08"	0,503	0
	155° 52' 50"	30° 13' 48"	90°	0	0,583
	245° 52' 50"	0	120° 13' 52"	-0,503	0
180	0° 10' 30"	0	73° 26' 23"	0,285	0
	90° 10' 30"	16° 33' 36"	90°	0	0,297
	180° 10' 30"	0	106° 33' 37"	-0,285	0
210	-65° 45' 12"	0	59° 51' 00"	0,502	0
	24° 14' 48"	30° 09' 07"	90°	0	0,581
	114° 14' 48"	0	120° 09' 00"	-0,502	0
240	-90° 40' 30"	0	37° 25' 20"	0,794	0
	-0° 40' 30"	52° 34' 40"	90°	0	1,31
	89° 19' 30"	0	142° 34' 40"	-0,794	
285	-109° 50' 45"	0	4° 31'	0,942	0
	-19° 50' 45"	70° 27' 30"	90°	0	12,66
	70° 09' 15"	0	175° 29'	-0,942	

ветствующие им значения азимутов Солнца. Таким образом, при $u = u_1 + 0$ Солнце появляется в поле зрения визира, при $u = u_2$ Солнце уходит из поля зрения визира.

Графики $h(u)$ и $A(u)$ при изменении u в области видимости $[u_1 \leq u \leq u_2]$ представлены на рис. 4.14, а, б, в, г, из которых видно, что чем ближе плоскость орбиты к Солнцу, тем больше крутизна кривых $h(u)$ и тем больше высота $h(u^*)$. Наименьшая высота $h(u^*) = 84^\circ 50'$ имеет

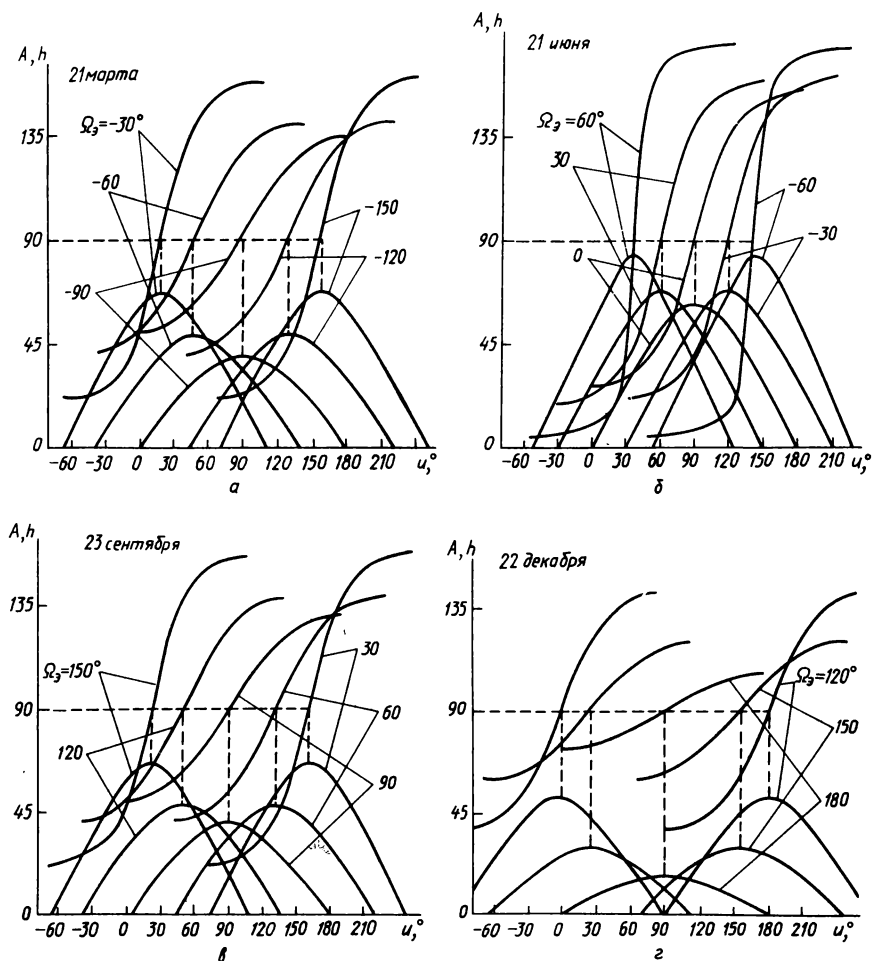


Рис. 4.14

место 21 июня на орбите $\Omega_3 = 60^\circ$ (см. рис. 4.14,б). Наименьшая высота $h(u^*)$ имеет место на орбитах, у которых долгота восходящего узла меньше прямого восхождения Солнца примерно на 90° . Для приведенных дат наиболее низкая крутизна кривых на графике $h(u)$ 22 декабря (см. рис. 4.14,г). Для этой даты $h(u^*) = 16^\circ 33' 36''$.

Необходимо заметить, что чем ближе положение восходящих узлов к крайним точкам области, тем резче должен быть перевод визира по азимуту от малых значений к большим. Наибольшая скорость перемещения визира будет при прохождении аппаратом точки u^* , в которой $A(u^*) = 90^\circ$. Это хорошо видно на орбитах $\Omega_3 = \pm 60^\circ$ 21 июня. В слу-

чае автоматического слежения за Солнцем может оказаться, что следящая система по азимуту не будет успевать следить за Солнцем. Поэтому при автоматическом слежении за светилом следует оценивать также скорости изменения азимута A и высоты h светила.

Эти скорости можно вычислить следующим образом:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{du} \frac{du}{dt};$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{du} \frac{du}{dt}.$$

Скорость изменения аргумента широты u определяется выражением [27]

$$du/dt = c/r^2, \quad (4.21)$$

где c — постоянная интеграла площадей; r — расстояние КА от центра Земли.

Таким образом величина $\dot{u}$ зависит от начальных условий движения аппарата по орбите.

Не варьируя начальными условиями движения, положим, что величина $\dot{u}$ не будет превышать значений $4^\circ/\text{мин}$, что соответствует круговой орбите с периодом обращения 90 мин.

Для определения производной dA/du воспользуемся выражением $A = \arctg (-z_{\text{н}}/y_{\text{н}})$.

$$(4.22)$$

Заметим, что величина $z_{\text{н}}$, определяемая выражением (4.3), не зависит от аргумента широты u , а величины $x_{\text{н}}$ и $y_{\text{н}}$ определяются выражениями (4.10).

Выполнив дифференцирование и учитывая, что

$$dy_{\text{н}}/du = -f_1 \cos u - f_2 \sin u = -x_{\text{н}},$$

получим

$$\frac{dA}{du} = -\frac{z_{\text{н}}x_{\text{н}}}{y_{\text{н}}^2 + z_{\text{н}}^2}. \quad (4.23)$$

Из (4.23) следует, что при $x_{\text{н}} = 0$ $dA/du = 0$ (заметим, $x_{\text{н}} = 0$ при $u = u_1$ и $u = u_2$).

При $y_{\text{н}} = 0$, что имеет место при $u = u^*$,

$$\frac{dA}{du}(u^*) = -x_u/z_u. \quad (4.24)$$

Из (4.24) следует, что чем меньше z_u , т.е. чем ближе светило к плоскости орбиты, тем больше будут максимальные скорости изменения азимута в момент прохождения аппаратом значения u , равного u^* .

Значения максимальных скоростей dA/du для различных долгот восходящих узлов орбит приведены в табл. 4.5.

Скорость изменения высоты h светила в соответствии с (4.9) определяется выражением

$$dh/du = y_u / \sqrt{1 - x_u^2} \quad (4.25)$$

Минимальное значение $dh/du = 0$ при $y_u = 0$, что соответствует $u = u^*$, и максимальное значение $dh/du = y_u$ при $x_u = 0$, что соответствует $u = u_1$ и $u = u_2$.

Значения скоростей dh/du для u , равных u_1 , u^* , u_2 , приведены в табл. 4.5.

Из табл. 4.5 видно, что для всех дат и орбит максимальные значения $dh/du < 1$. Наибольшие значения dA/du имеют место 21 июня. Для приведенных в табл. 4.5 орбит $2 \leq dA/du < 28$. Наименьшие значения $(dA/du)_{\max}$ имеют место 22 декабря. Для орбит, приведенных в табл. 4.5,

$$0,3 \leq \left(\frac{dA}{du} \right)_{\max} \leq 13.$$

4.5. КОРРЕКЦИЯ ПОЛОЖЕНИЯ ГСП ПО АСТРООРИЕНТИРАМ

Пусть известны:

- 1) единичный вектор направлений на первый астроориентир в расчетной идеальной инерциальной системе координат $\bar{r}_1(x_1, y_1, z_1)$;
- 2) единичный вектор направления на второй астроориентир также в расчетной идеальной инерциальной системе координат $\bar{r}_2(x_2, y_2, z_2)$;
- 3) единичный вектор направления на первый астроориентир при фактическом положении инерциальной системы координат $\bar{r}_1^\Phi(x_1^\Phi, y_1^\Phi, z_1^\Phi)$, реализуемой ГСП;
- 4) единичный вектор направления на второй астроориентир при фактическом положении платформы $\bar{r}_2^\Phi(x_2^\Phi, y_2^\Phi, z_2^\Phi)$.

Требуется определить погрешность фактического положения ГСП по отношению к ее расчетному идеальному положению и провести коррекцию. Для того чтобы определить параметры коррекции, введем вспомогательную систему координат (ξ, η, ζ) , связанную с астроориентирами.

Ось $\bar{\xi}$ — единичный вектор в направлении на первый астроориентир; ось $\bar{\zeta}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости обоих астроориентиров. Координаты его определяются векторным произведением $\bar{\zeta} = (\bar{r}_1 \times \bar{r}_2) / |\bar{r}_1 \times \bar{r}_2|$.

Ось $\bar{\eta}$ — дополняет систему до правой: $\bar{\eta} = \bar{\zeta} \times \bar{\xi}$. Введем матрицу $\mathbf{K}$, характеризующую погрешность выставки фактической системы координат, учитывая, что матрица $\mathbf{K}$ характеризует поворот идеальной системы до совмещения ее с фактической, по сути дела, нужно определить

именно эту матрицу, так как, определив погрешность выставки ГСП, можно и откорректировать ее, восстановив положение, соответствующее расчетной инерциальной системе координат. Таким образом, имеем матричное уравнение

$$\mathbf{A}_н = \mathbf{A}_ф \mathbf{K}. \quad (4.26)$$

Слева в уравнении стоит матрица преобразования величин из расчетной инерциальной системы координат в систему координат, связанную с астроориентирами. Справа формируется тот же перевод величин, но выполненный в два этапа: сначала перевод от расчетной к фактической инерциальной системе координат, а затем перевод от фактической системы к системе координат, связанной с астроориентирами. Умножив слева обе части уравнения на обратную матрицу $\mathbf{A}_ф^{-1}$ и, отметив, что $\mathbf{A}_ф^{-1} = \mathbf{A}_ф^T$, получим матрицу погрешности выставки платформы $\mathbf{K}$ в виде

$$\mathbf{K} = \tilde{\mathbf{A}}_ф \mathbf{A}_н. \quad (4.27)$$

Операции обращения матриц и транспортирования не эквивалентны друг другу, подчеркнем, что только для матриц перехода из одного ортонормированного базиса к другому выполняется условие эквивалентности. Действительно, если матрица $\mathbf{M}$ характеризует переход из системы координат $O_0 X_c, Y_c, Z_c$ к системе координат $O_0 X, Y, Z$, то в первой строке матрицы записываются направляющие косинусы оси X в системе X_c, Y_c, Z_c , во второй – направляющие косинусы оси Y , в третьей – направляющие косинусы оси Z :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \cos(x \wedge x_0) & \cos(x \wedge y_0) & \cos(x \wedge z_0) \\ \cos(y \wedge x_0) & \cos(y \wedge y_0) & \cos(y \wedge z_0) \\ \cos(z \wedge x_0) & \cos(z \wedge y_0) & \cos(z \wedge z_0) \end{bmatrix}.$$

Если же матрицу $\mathbf{M}$ транспонировать, т.е. переставить местами строки и столбцы, то в первой строке ее запишутся направляющие косинусы оси X_c в системе координат X, Y, Z , во второй – направляющие косинусы оси Y_c , в третьей – направляющие косинусы оси Z_c .

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \cos(x_0 \wedge x) & \cos(x_0 \wedge y) & \cos(x_0 \wedge z) \\ \cos(y_0 \wedge x) & \cos(y_0 \wedge y) & \cos(y_0 \wedge z) \\ \cos(z_0 \wedge x) & \cos(z_0 \wedge y) & \cos(z_0 \wedge z) \end{bmatrix}.$$

Таким образом, матрица $\tilde{\mathbf{M}}$ описывает переход из системы координат X, Y, Z в систему координат X_c, Y_c, Z_c и является обратной по отношению к матрице $\mathbf{M}$.

Матрица $\mathbf{K}$ характеризует малые углы поворотов (порядка нескольких минут), поэтому при учете первого порядка малости углов ее можно представить в виде

$$K = \begin{bmatrix} 1 & \Delta\vartheta & -\Delta\psi \\ -\Delta\vartheta & 1 & \Delta\varphi \\ \Delta\psi & -\Delta\varphi & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.28)$$

где $\Delta\varphi$, $\Delta\psi$, $\Delta\vartheta$ — углы погрешностей ориентации платформы: повороты вокруг осей X , Y , Z соответственно.

Взяв полуразность элементов матрицы K , найдем эти углы в виде функций элементов матриц a_{ij}^{Φ} и a_{ij}^N

$$\Delta\varphi = \frac{a_{23} - a_{32}}{2};$$

$$\Delta\psi = \frac{a_{31} - a_{13}}{2}; \quad (4.29)$$

$$\Delta\vartheta = \frac{a_{12} - a_{21}}{2};$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2} [(a_{12}^{\Phi} a_{13}^N + a_{22}^{\Phi} a_{23}^N + a_{32}^{\Phi} a_{33}^N) -$$

$$- (a_{13}^{\Phi} a_{12}^N + a_{23}^{\Phi} a_{22}^N + a_{33}^{\Phi} a_{32}^N)];$$

$$\Delta\psi = \frac{1}{2} [(a_{13}^{\Phi} a_{11}^N + a_{23}^{\Phi} a_{21}^N + a_{33}^{\Phi} a_{31}^N) -$$

$$- (a_{11}^{\Phi} a_{13}^N + a_{21}^{\Phi} a_{23}^N + a_{31}^{\Phi} a_{33}^N)]; \quad (4.30)$$

$$\Delta\vartheta = \frac{1}{2} [(a_{11}^{\Phi} a_{12}^N + a_{21}^{\Phi} a_{22}^N + a_{31}^{\Phi} a_{32}^N) -$$

$$- (a_{12}^{\Phi} a_{11}^N + a_{22}^{\Phi} a_{21}^N + a_{32}^{\Phi} a_{31}^N)].$$

Найденные углы погрешности должны быть учтены при коррекции ориентации ГСП. Эта коррекция может осуществляться двумя способами: 1) разворотом самой ГСП в каналах вращения, рыскания, тангажа на углы — $\Delta\varphi$, — $\Delta\psi$, — $\Delta\vartheta$ соответственно. Эта операция осуществляется подачей стабилизированного сигнала в моментные датчики гироскопов; 2) учет в бортовых алгоритмах ориентации и навигации выявленных погрешностей ориентации платформы.

4.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОТКЛОНЕНИЙ В ОРИЕНТАЦИИ ГСП С ПОМОЩЬЮ АСТРОВИЗИРОВ, УСТАНОВЛЕННЫХ НА ПЛАТФОРМЕ

В рассматриваемом здесь случае астровизирь жестко связан с ГСП. Оси платформы $X_{\Pi}, Y_{\Pi}, Z_{\Pi}$ в момент старта аппарата ориентированы соответственно по осям X_c, Y_c, Z_c стартовой системы координат. При идеальном функционировании ГСП ориентация визиров относительно звезд в процессе полета КА будет неизменна. В случае отклонений в ориентации платформы положение звезд в поле зрения астровизиров будет изменяться.

Так как астровизирь должен быть ориентирован в стартовой системе координат $O_0 X_c Y_c Z_c$, а положения звезд на небесной сфере заданы в геоцентрической экваториальной системе координат $O_1 \xi_3 \eta_3 \zeta_3$, то необходимо определить взаимную ориентацию систем $O_0 X_c Y_c Z_c$ и $O_1 \xi_3 \eta_3 \zeta_3$.

Выпишем матричные соотношения между системами координат, с помощью которых совершается переход от системы $O_1 \xi_3 \eta_3 \zeta_3$ к стартовой системе координат $O_0 X_c Y_c Z_c$:

$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \zeta_1 \end{bmatrix} ; \quad (4.31)$$

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \zeta_1 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \\ \zeta_0 \end{bmatrix} ; \quad (4.32)$$

$$\begin{bmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \\ \zeta_0 \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} X_{\Gamma} \\ Y_{\Gamma} \\ Z_{\Gamma} \end{bmatrix} ; \quad (4.33)$$

$$\begin{bmatrix} X_{\Gamma} \\ Y_{\Gamma} \\ Z_{\Gamma} \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \xi_3 \\ \eta_3 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} . \quad (4.34)$$

Матрица N , определяющая ориентацию стартовой системы координат $X_c Y_c Z_c$ в геоцентрической $O_1 \xi_1 \eta_1 \zeta_1$ в соответствии с табл. 2.3, имеет вид

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \quad (4.35)$$

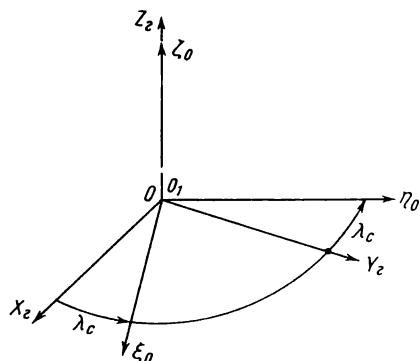


Рис. 4.15

Матрица M , определяющая ориентацию системы $O_1 \xi_1 \eta_1 \zeta_1$ в геоцентрической экваториальной системе $O_1 \xi_0 \eta_0 \zeta_0$,

$$M = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

Элементы матрицы μ_{ij} определяются выражениями (2.2).

Ориентация системы $O_1 \xi_0 \eta_0 \zeta_0$ относительно гринвичской экваториальной системы $OX_\Gamma Y_\Gamma Z_\Gamma$ показана на рис. 4.15. Здесь λ_c — долгота меридиана старта. Обе системы $O_1 \xi_0 \eta_0 \zeta_0$ и $OX_\Gamma Y_\Gamma Z_\Gamma$ "заморожены" на момент старта.

Матрица направляющих косинусов осей $\xi_0 \eta_0 \zeta_0$ в системе $OX_\Gamma Y_\Gamma Z_\Gamma$ в соответствии с рис. 4.15 имеет вид:

$$L = \begin{bmatrix} \cos \lambda_c & \sin \lambda_c & 0 \\ -\sin \lambda_c & \cos \lambda_c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Матрица направляющих косинусов осей гринвичской системы $OX_\Gamma Y_\Gamma Z_\Gamma$ относительно системы $O_1 \xi_3 \eta_3 \zeta_3$ имеет вид

$$P = \begin{bmatrix} \cos \beta_0 & \sin \beta_0 & 0 \\ -\sin \beta_0 & \cos \beta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.38)$$

где β_0 — угол между осями ξ_3 и X_Γ на момент старта.

На основании приведенных соотношений (4.31) ... (4.34) можем написать

$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix} = \Pi \begin{bmatrix} \xi_3 \\ \eta_3 \\ \zeta_3 \end{bmatrix}. \quad (4.39)$$

Матрица Π определяется следующим соотношением:

$$\Pi = NMLP. \quad (4.40)$$

Следует отметить, что все исходные величины, определяющие направляющие косинусы осей (азимут A , угол наклона оси ζ к плоскости

экватора B , долготы меридиана старта λ_c) не зависят от времени старта и, следовательно, могут быть введены в БЦВМ в качестве установок до старта. Угол β_0 , определяющий положение гринвичской системы координат $OX_\Gamma Y_\Gamma Z_\Gamma$ относительно экваториальной $O_1 \xi_3 \eta_3 \zeta_3$, зависит от времени старта.

Если время старта известно до старта, то все элементы матриц M, L, P могут быть вычислены и введены в БЦВМ тоже до старта.

Матрицу Π запишем в виде

$$\Pi = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}. \quad (4.41)$$

Элементы матрицы a_{ij} определяются из матричного произведения (4.40)

$$a_{11} = -\cos A \sin B \cos(\beta_0 + \lambda_c) - \sin A \sin(\beta_0 + \lambda_c);$$

$$a_{12} = -\cos A \sin B \sin(\beta_0 + \lambda_c) + \sin A \cos(\beta_0 + \lambda_c);$$

$$a_{13} = \cos A \cos B;$$

$$a_{21} = \cos B \cos(\beta_0 + \lambda_c);$$

$$a_{22} = \cos B \sin(\beta_0 + \lambda_c);$$

$$a_{31} = \sin A \sin B \cos(\beta_0 + \lambda_c) - \cos A \sin(\beta_0 + \lambda_c);$$

$$a_{32} = \sin A \sin B \sin(\beta_0 + \lambda_c) + \cos A \cos(\beta_0 + \lambda_c);$$

$$a_{33} = -\sin A \cos B.$$

Положения звезд на небесной сфере в системе $O_1 \xi_3 \eta_3 \zeta_3$ определяются прямым восхождением α и склонением δ .

Проекции единичных радиусов-векторов $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$, направленных по лучам визирования звезд $c_1(\alpha_1, \delta_1)$, $c_2(\alpha_2, \delta_2)$ в системе координат $O_1 \xi_3 \eta_3 \zeta_3$ будут определяться следующими выражениями:

$$r_{1\xi} = \cos \delta_1 \cos \alpha_1;$$

$$r_{1\eta} = \cos \delta_1 \sin \alpha_1;$$

$$r_{1\zeta} = \sin \delta_1;$$

$$r_{2\xi} = \cos \delta_2 \cos \alpha_2;$$

$$r_{2\eta} = \cos \delta_2 \sin \alpha_2;$$

$$r_{2\zeta} = \sin \delta_2.$$

(4.42)

Проекция тех же радиусов-векторов $\bar{r}_1, \bar{r}_2$ на оси стартовой системы

координат в соответствии с выражениями (4.39) и (4.41) будут определяться как

$$\begin{aligned} r_{1x_c} &= a_{11} r_{1\xi} + a_{12} r_{1\eta} + a_{13} r_{1\xi}; \\ r_{1y_c} &= a_{21} r_{1\xi} + a_{22} r_{1\eta} + a_{23} r_{1\xi}; \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} r_{1z_c} &= a_{31} r_{1\xi} + a_{32} r_{1\eta} + a_{33} r_{1\xi}; \\ r_{2x_c} &= a_{11} r_{2\xi} + a_{12} r_{2\eta} + a_{13} r_{2\xi}; \\ r_{2y_c} &= a_{21} r_{2\xi} + a_{22} r_{2\eta} + a_{23} r_{2\xi}; \\ r_{2z_c} &= a_{31} r_{2\xi} + a_{32} r_{2\eta} + a_{33} r_{2\xi}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Положения звезд в системе координат $O_1 X_c Y_c Z_c$ будем определять углами Φ и β , показанными на рис. 4.16.

В соответствии с рисунком 4.16 углы Φ и β будут определяться из следующих соотношений:

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{r_{x_c}}{r_{z_c}}; \quad (4.45)$$

$$\sin \beta = \frac{r_{y_c}}{r} = r_{y_c}.$$

Следовательно, углы, определяющие положения линий визирования звезд c_1 и c_2 относительно стартовой системы координат $X_c Y_c Z_c$, находят из следующих выражений:

$$\Phi_1 = \operatorname{arctg} \frac{r_{1x_c}}{r_{1z_c}}; \quad (4.46)$$

$$\beta_1 = \operatorname{arcsin} r_{1y_c};$$

$$\Phi_2 = \operatorname{arctg} \frac{r_{2x_c}}{r_{2z_c}}; \quad (4.47)$$

$$\beta_2 = \operatorname{arcsin} r_{2y_c}.$$

В том случае, когда углы Φ близки к 90° , их значения можно определить из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \sin \Phi &= \frac{r_{x_c}}{\sqrt{r_{x_c}^2 + r_{z_c}^2}}; \\ \cos \Phi &= \frac{r_{z_c}}{\sqrt{r_{x_c}^2 + r_{z_c}^2}} \end{aligned} \quad (4.48)$$

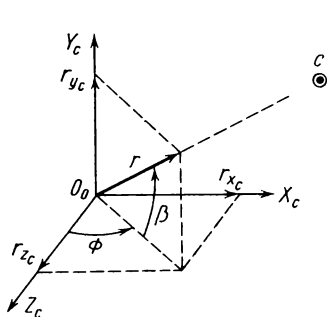


Рис. 4.16

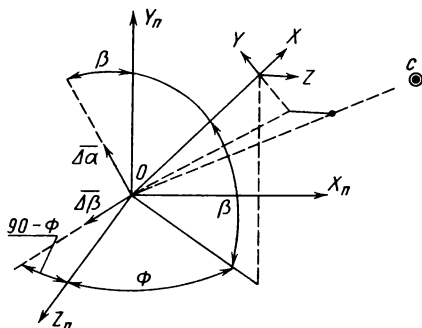


Рис. 4.17

Так как оси платформы X_n, Y_n, Z_n ориентированы параллельно соответствующим осям X_c, Y_c, Z_c стартовой системы, то углы Φ_j, β_j , определяемые соотношениями (4.46) – (4.48), могут быть использованы для ориентирования визиров на ГСП.

Положение звезды в окне астровизира при идеальном функционировании платформы находится на оси визира.

Так как астровизеры жестко связаны с платформой, то при отклонении ГСП от расчетной ориентации точка, соответствующая местоположению звезды в окне визира, смещается с оси визира.

Для определения положения звезды в окне визира принята следующая система координат $OXYZ$. Ось X направлена по оси визира к звезде, ось Z параллельна плоскости платформы $Z_n X_n$ и направлена вправо, если смотреть на звезду. Ось Y направлена в соответствии с правой системой координат. Положение системы $OXYZ$ относительно системы $OX_n Y_n Z_n$, связанной с платформой, показано на рис. 4.17. Здесь же показано положение линии визирования звезды.

Положение звезды в системе $OXYZ$ определяется координатами (Y, Z) . При $Y > 0$ угловое смещение визира или угол поворота ГСП относительно начального положения определяется выражением

$$\Delta\beta = -ky, \quad (4.49)$$

где k – коэффициент пропорциональности. Ось поворота перпендикулярна на оси визира X и находится в плоскости $Z_n X_n$.

При $Z > 0$ угол поворота платформы определяется выражением

$$\Delta\alpha = kz. \quad (4.50)$$

Ось поворота перпендикулярна оси визира X и находится в плоскости угла β .

Так как углы поворота малы, то их можно представить векторами малых поворотов $\Delta\beta, \Delta\alpha$, ориентированных по осям поворотов платформы. Положение векторов $\Delta\alpha, \Delta\beta$ (при $\Delta\alpha > 0$ и $\Delta\beta > 0$) в системе $OX_n Y_n Z_n$ показано на рис. 4.17. Заметим, векторы $\Delta\alpha, \Delta\beta$ взаимно

Векторы	Система координат, связанная с ГСП		
	X_{Π}	Y_{Π}	Z_{Π}
$\Delta \bar{\alpha}$	$-\sin \beta \sin \Phi$	$\cos \beta$	$-\sin \beta \cos \Phi$
$\Delta \bar{\beta}$	$-\cos \Phi$	0	$\sin \Phi$
$\Delta \bar{\gamma}$	$\cos \beta \sin \Phi$	$\sin \beta$	$\cos \beta \cos \Phi$

перпендикулярны и находятся в плоскости, перпендикулярной оси визира X . Следует также заметить, что по координатам (Y, Z) , определяющим положение звезды в окне визира, нельзя определить угла поворота платформы вокруг оси визира X , для этого требуется визирование второй звезды c_2 .

Обозначим неизвестный пока вектор малого поворота платформы вокруг оси визира X через $\Delta \bar{\gamma}$. Заметим вектры $\Delta \bar{\alpha}$, $\Delta \bar{\beta}$ и $\Delta \bar{\gamma}$ образуют правый ортогональный трехгранник, в котором вектор $\Delta \bar{\gamma}$ совпадает с осью X и направлен в сторону положительного направления.

Направляющие косинусы векторов $\Delta \bar{\alpha}$, $\Delta \bar{\beta}$, $\Delta \bar{\gamma}$ относительно системы $O X_{\Pi} Y_{\Pi} Z_{\Pi}$ приведены в табл. 4.6.

Результирующий угол поворота платформы $\bar{\theta}$ можно описать двумя равнозначными выражениями

$$\theta = \Delta \bar{\alpha}_1 + \Delta \bar{\beta}_1 + \Delta \bar{\gamma}_1;$$

$$\theta = \Delta \bar{\alpha}_2 + \Delta \bar{\beta}_2 + \Delta \bar{\gamma}_2. \quad (4.51)$$

Индексы 1 и 2 соответствуют линиям визирования звезд c_1 и c_2 . Запишем проекции вектора $\bar{\theta}$ на оси X_{Π} , Y_{Π} , Z_{Π} :

$$\theta_{x_{\Pi}} = -\Delta \alpha_1 \sin \beta_1 \sin \Phi_1 - \Delta \beta_1 \cos \Phi_1 + \Delta \gamma_1 \cos \beta_1 \sin \Phi_1;$$

$$\theta_{y_{\Pi}} = \Delta \alpha_1 \cos \beta_1 + \Delta \beta_1 \cdot 0 + \Delta \gamma_1 \sin \beta_1; \quad (4.52)$$

$$\theta_{z_{\Pi}} = -\Delta \alpha_1 \sin \beta_1 \cos \Phi_1 + \Delta \beta_1 \sin \Phi_1 + \Delta \gamma_1 \cos \beta_1 \cos \Phi_1;$$

$$\theta_{x_{\Pi}} = -\Delta \alpha_2 \sin \beta_2 \sin \Phi_2 - \Delta \beta_2 \cos \Phi_2 + \Delta \gamma_2 \cos \beta_2 \sin \Phi_2;$$

$$\theta_{y_{\Pi}} = \Delta \alpha_2 \cos \beta_2 + \Delta \beta_2 \cdot 0 + \Delta \gamma_2 \sin \beta_2; \quad (4.53)$$

$$\theta_{z_{\Pi}} = -\Delta \alpha_2 \sin \beta_2 \cos \Phi_2 + \Delta \beta_2 \sin \Phi_2 + \Delta \gamma_2 \cos \beta_2 \cos \Phi_2.$$

Для определения углов поворота платформы $\Delta \gamma_1$ и $\Delta \gamma_2$ приравняем выражения для $\theta_{y_{\Pi}}$, $\theta_{z_{\Pi}}$ из (4.52) выражениям для $\theta_{y_{\Pi}}$, $\theta_{z_{\Pi}}$ из (4.53).

В результате для определения $\Delta\gamma_1$ и $\Delta\gamma_2$ получим уравнения

$$\Delta\gamma_1 \sin \beta_1 - \Delta\gamma_2 \sin \beta_2 = \Delta\alpha_2 \cos \beta_2 - \Delta\alpha_1 \cos \beta_1; \quad (4.54)$$

$$\Delta\gamma_1 \cos \beta_1 \cos \Phi_1 - \Delta\gamma_2 \cos \beta_2 \cos \Phi_2 =$$

$$= -\Delta\alpha_2 \sin \beta_2 \cos \Phi_2 + \Delta\beta_2 \sin \Phi_2 +$$

$$+ \Delta\alpha_1 \sin \beta_1 \cos \Phi_1 - \Delta\beta_1 \sin \Phi_1.$$

Разрешая уравнения (4.54) относительно $\Delta\gamma_1$ и $\Delta\gamma_2$ получим

$$\Delta\gamma_1 = \Delta_1/\Delta_0, \quad \Delta\gamma_2 = \Delta_2/\Delta_0, \quad (4.55)$$

где

$$\Delta_0 = \begin{bmatrix} a_1 & -\sin \beta_1 \\ b_1 & -\cos \beta_2 \cos \Phi_2 \end{bmatrix}; \quad (4.56)$$

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} a_1 & -\sin \beta_2 \\ b_1 & -\cos \beta_2 \cos \Phi_2 \end{bmatrix}; \quad (4.57)$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} \sin \beta_1 & a_1 \\ \cos \beta_1 \cos \Phi_1 & b_1 \end{bmatrix}. \quad (4.58)$$

Здесь

$$a_1 = \Delta\alpha_2 \cos \beta_2 - \Delta\alpha_1 \cos \beta_1;$$

$$b_1 = -\Delta\alpha_2 \sin \beta_2 \cos \Phi_2 + \Delta\beta_2 \sin \Phi_2 +$$

$$+ \Delta\alpha_1 \sin \beta_1 \cos \Phi_1 - \Delta\beta_1 \sin \Phi_1.$$

Определив углы $\Delta\gamma_1$ и $\Delta\gamma_2$ из (4.52) и (4.53), можно будет вычислить величины $\theta_{xп}$, $\theta_{yп}$, $\theta_{zп}$, представляющие углы поворотов ГСП относительно осей X_c , Y_c , Z_c .

Полученные углы уходов ГСП следует либо учесть в алгоритмах расчета навигационных параметров либо восстановить стартовую ориентацию платформы.

Восстановление стартовой ориентации может быть выполнено путем отработки углов $\theta_{zп}$, $\theta_{yп}$, $\theta_{xп}$ следящими системами гиростабилизатора.

Если по каким-либо соображениям восстанавливать ориентацию ГСП нецелесообразно (из-за большого времени переориентации платформы), то по полученным углам уходов платформы следует скорректировать программные углы ориентации аппарата.

ГЛАВА 5.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОРИЕНТАЦИИ КА ПРИ ВИЗИРОВАНИИ СОЛНЦА И ЗВЕЗДЫ

5.1. ОРИЕНТАЦИЯ АППАРАТА ОТНОСИТЕЛЬНО СИСТЕМЫ КООРДИНАТ $OX_{гр} Y_{гр} Z_{гр}$

Задача восстановления ориентации КА возникает тогда, когда после длительного выключения системы управления требуется ориентировать аппарат перед запуском двигателя или для какой-либо другой операции. Требуемая ориентация аппарата на момент времени T_3 может быть задана углами Эйлера – Крылова относительно гринвичской, "замороженной" на момент старта, системы координат.

Для того чтобы выставить КА в требуемое положение, необходимо построить опорную приборно-реализуемую систему координат – систему, связанную с астроориентирами.

Основная плоскость, на базе которой строится опорная система координат, это плоскость, задаваемая линиями визирования Солнца и звезды. Задача восстановления ориентации аппарата в данном случае заключается в том, чтобы для требуемой ориентации найти углы разворотов аппарата относительно системы, задаваемой астроориентирами.

Положение "замороженной" на момент старта системы координат $X_{гр} Y_{гр} Z_{гр}$ относительно геоцентрической экваториальной системы $\xi \eta \zeta$ показано на рис. 4.6. Смещение оси $X_{гр}$ относительно оси ξ , направленной в точку весеннего равноденствия Υ , задается углом β_0 , определяемым выражением (4.7).

На рис. 5.1 показана схема поворотов осей аппарата для приведения их в требуемое положение $X^T Y^T Z^T$. Начальная ориентация осей аппарата X, Y, Z совпадает с соответствующими осями $X_{гр} Y_{гр} Z_{гр}$.

Требуемая ориентация X^T, Y^T, Z^T задается углами поворотов $\vartheta_T, \psi_T, \varphi_T$. Первый поворот на угол ϑ_T производится вокруг оси Z , совпадающей с осью $Z_{гр}$. Положение осей после первого поворота – $X' Y' Z'$. Второй поворот на угол ψ_T производится вокруг оси Y' , и положение осей становится $X'' Y'' Z''$. Третий поворот на угол φ_T производится вокруг оси X'' , и оси займут положение $X^T Y^T Z^T$.

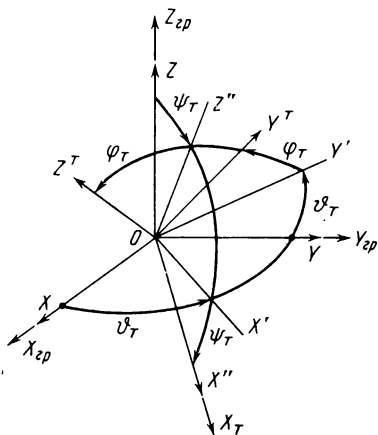


Рис. 5.1

Системы координат		Гринвичская		
		$X_{Гр}$	$Y_{Гр}$	$Z_{Гр}$
Опорная	X^T	$\cos \psi_T \cos \vartheta_T$	$\cos \psi_T \sin \vartheta_T$	$-\sin \psi_T$
	Y^T	$-\cos \varphi_T \sin \vartheta_T + \sin \varphi_T \cos \vartheta_T \sin \psi_T$	$\cos \varphi_T \cos \vartheta_T + \sin \varphi_T \sin \vartheta_T \sin \psi_T$	$\sin \varphi_T \cos \psi_T$
	Z^T	$\sin \varphi_T \sin \vartheta_T + \cos \varphi_T \cos \vartheta_T \sin \psi_T$	$-\sin \varphi_T \cos \vartheta_T + \cos \varphi_T \sin \vartheta_T \sin \psi_T$	$\cos \varphi_T \cos \psi_T$

Направляющие косинусы осей $X^T Y^T Z^T$ относительно $X_{Гр} Y_{Гр} Z_{Гр}$ приведены в табл. 5.1.

Направляющие косинусы осей $X_{Гр}, Y_{Гр}, Z_{Гр}$ в системе координат $\xi_3 \eta_3 \zeta_3$ можно записать в виде

	ξ_3	η_3	ζ_3
$X_{Гр}$	$\cos \beta_0$	$\sin \beta_0$	0
$Y_{Гр}$	$-\sin \beta_0$	$\cos \beta_0$	0
$Z_{Гр}$	0	0	1

Используя табл. 5.1, можем записать соотношение между ортами осей X^T, Y^T, Z^T и $X_{Гр}, Y_{Гр}, Z_{Гр}$:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}^T \\ \bar{y}^T \\ \bar{z}^T \end{bmatrix} = \mathbf{C} \begin{bmatrix} \bar{x}_{Гр} \\ \bar{y}_{Гр} \\ \bar{z}_{Гр} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Элементы матрицы

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

определяются соответствующими элементами табл. 5.1.

Положение ортов системы координат $OX_{Гр} Y_{Гр} Z_{Гр}$ в системе координат $O\xi_3 \eta_3 \zeta_3$ будем записывать в виде

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_{Гр} \\ \bar{Y}_{Гр} \\ \bar{Z}_{Гр} \end{bmatrix} = \mathbf{D} \begin{bmatrix} \xi_3 \\ \eta_3 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Матрица D имеет вид

$$D = \begin{bmatrix} \cos \beta_0 & \sin \beta_0 & 0 \\ -\sin \beta_0 & \cos \beta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Положение ортов осей X^T, Y^T, Z^T в системе координат $O_1 \xi_3 \eta_3 \zeta_3$ определяется следующим соотношением:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}^T \\ \bar{y}^T \\ \bar{z}^T \end{bmatrix} = CD \begin{bmatrix} \bar{\xi}_3 \\ \bar{\eta}_3 \\ \bar{\zeta}_3 \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

В дальнейшем матрицу

$$E = CD \quad (5.6)$$

будем записывать в виде

$$E = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

Элементы e_{ij} определяются из матричного произведения CD .

Таким образом, требуемая ориентация аппарата $X^T Y^T Z^T$, задаваемая на момент T_3 в системе координат $X_{ГР} Y_{ГР} Z_{ГР}$ углами $\vartheta_T, \psi_T, \varphi_T$, в системе координат $\xi_3 \eta_3 \zeta_3$ определяется матрицей (5.6).

В развернутом виде элементы e_{ij} матрицы E определяются следующими выражениями:

$$e_{11} = \cos \psi_T \cos (\vartheta_T + \beta_0);$$

$$e_{12} = \cos \psi_T \sin (\vartheta_T + \beta_0);$$

$$e_{13} = -\sin \psi_T;$$

$$e_{21} = -\cos \varphi_T \sin (\vartheta_T + \beta_0) + \sin \varphi_T \sin \psi_T \cos (\vartheta_T + \beta_0);$$

$$e_{22} = \cos \varphi_T \cos (\vartheta_T + \beta_0) + \sin \varphi_T \sin \psi_T \sin (\vartheta_T + \beta_0);$$

$$e_{23} = \sin \varphi_T \cos \psi_T;$$

$$e_{31} = \sin \varphi_T \sin (\vartheta_T + \beta_0) + \cos \varphi_T \sin \psi_T \cos (\vartheta_T + \beta_0);$$

$$e_{32} = -\sin \varphi_T \cos (\vartheta_T + \beta_0) + \cos \varphi_T \sin \psi_T \sin (\vartheta_T + \beta_0);$$

$$e_{33} = \cos \varphi_T \cos \psi_T.$$

Заметим, значения углов ϑ_T, ψ_T и φ_T определяются из баллистического расчета спуска или какого-либо другого маневра КА.

Если требуемая ориентация осей $X^T Y^T Z^T$ известна до старта, то элементы C_{ij} матрицы C , а следовательно, и элементы e_{ij} матрицы E могут быть заранее вычислены и введены в БЦВМ до старта.

5.2. ПРОЦЕДУРА ПОИСКА АСТРООРИЕНТИРОВ

Построение опорной плоскости, задаваемой астроориентирами, начинается с поиска астроориентиров [4, 20].

Основным ориентиром во всех возможных плоскостях является Солнце. Окно обзора небесной сферы, через которое ведется поиск Солнца, представляет собой выпуклую поверхность (рис. 5.2), длина дуги которой π ($\approx 180^\circ$), что обеспечивает попадание Солнца в окно обзора за один оборот КА вокруг оси OX .

Первое поисковое вращение аппарата вокруг оси OX с угловой скоростью $\dot{\varphi}_{п1}$ задается смещением нуля ДУСа.

При попадании Солнца в окно обзора вращение КА прекращается ($\dot{\varphi}_{п1} = 0$) и начинается процесс выведения Солнца в поле зрения точного датчика. Ось точного датчика располагается в окне обзора и в начале поиска ориентирована по оси объекта Y .

Процесс выведения Солнца в поле зрения точного датчика представляет собой вращение аппарата вокруг оси Z , вследствие чего солнечное пятно движется к центру датчика. В результате процесса выведения ось Y КА будет направлена на Солнце (рис. 5.3).

Процедура поиска второго астроориентира (звезды) зависит от принятой схемы ориентации визиров относительно осей КА. Различные варианты ориентации визиров на КА приведены в [20].

Здесь мы рассмотрим два случая установки астровизиров на аппарате.

1. Оба визира — звезды и Солнца — находятся в плоскости аппарата YZ . Датчик звезды жестко связан с корпусом КА. Ось визира (звезды) составляет с осью $KA Z$ угол $180^\circ - \gamma_1$. Ось визира датчика Солнца можно поворачивать вокруг оси аппарата X , для того чтобы можно было установить требуемый угол γ между звездой и Солнцем.

Ориентация визиров относительно осей КА во время визирования светил показана на рис. 5.4, а.

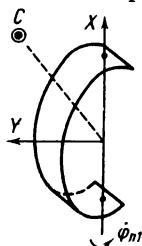


Рис. 5.2

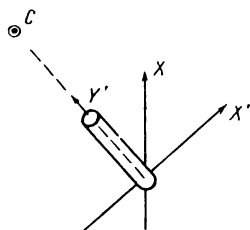


Рис. 5.3

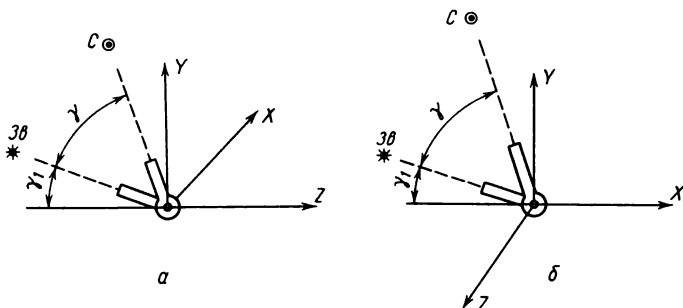


Рис. 5.4

Здесь необходимо заметить следующее. Для того, чтобы датчик Солнца при развороте вокруг оси X не вышел из окна обзора, углы γ_1 и γ должны удовлетворять следующему условию: $\gamma_1 + \gamma \approx 90^\circ$.

2. Оба визира (звезды и Солнца) находятся в окне обзора и, следовательно, угол γ между линиями визирования звезды и Солнца лежит в плоскости аппарата XY . Ось визира звезды с осью аппарата X составляет угол $180^\circ - \gamma_1$. Ось визира Солнца можно поворачивать относительно оси аппарата Z .

Ориентация визиров относительно осей аппарата во время визирования светил показана на рис. 5.4, б.

После окончания процесса приведения Солнца датчик "точного Солнца" разворачивают относительно корпуса КА вокруг оси Z . Так как Солнце удерживается в поле зрения датчика, то аппарат вследствие вращения датчика совершает встречное движение. Датчик разворачивают до тех пор, пока между звездным датчиком и датчиком, жестко связанным с корпусом аппарата, и точным солнечным датчиком не установится требуемый угол γ , равный заданному углу Солнце — КА — звезда.

После того как датчик точного Солнца выставили под углом γ к звездному датчику, начинается разворот КА вокруг оси датчика Солнца. В результате этого вращения луч визирования звезды описывает конус, вершина которого находится в точке пересечения осей датчиков. Вращение продолжается до тех пор, пока звезда не попадет в поле зрения звездного датчика.

Во втором случае ориентации астровизиров на КА (см. рис. 5.4, б) датчик "точного" Солнца после окончания приведения необходимо развернуть относительно корпуса КА вокруг оси Z на угол $\Delta\gamma = 90^\circ - (\gamma_1 + \gamma)$. Заметим, что если датчик "точного" Солнца заранее выставить к оси X под углом $180^\circ - (\gamma_1 + \gamma)$, то разворот вокруг оси Z на угол $\Delta\gamma$ не потребуется.

После того, как астровизир Солнца выставлен относительно оси аппарата X в требуемое положение, аппарат, как и в первом случае, разворачивают вокруг оси датчика Солнца. Разворот продолжается до тех пор, пока звезда не попадет в окно визира.

На этом процесс поиска астроориентиров заканчивается и далее дается некоторое время для гашения колебаний КА.

Во время поиска астроориентиров и гашения колебаний КА ГСП находится в зааретированном относительно корпуса аппарата состоянии. После гашения колебаний аппарата платформа разаретируется, и система управления КА с датчиков астроориентиров переключается на ГСП.

В дальнейшем разворот КА для приведения его к требуемой ориентации $X^T Y^T Z^T$ совершается с помощью ГСП.

5.3. ОРИЕНТАЦИЯ КА ОТНОСИТЕЛЬНО АСТРООРИЕНТИРОВ

При определении ориентации КА относительно астроориентиров будем исходить из схем расположения датчиков Солнца и звезды, приведенных на рис. 5.4, а и б.

На рис. 5.5 приведены координаты Солнца и звезды, определяющие их положение в геоцентрической экваториальной системе $O_1 \xi_3 \eta_3 \zeta_3$.

$\alpha_\odot$ и $\delta_\odot$ обозначены прямое восхождение и склонение Солнца, α_* и δ_* — прямое восхождение и склонение звезды.

При определении угла Солнце — КА — звезда для околоземных траекторий не будем учитывать параллакс Солнца. Для стационарного спутника с периодом обращения 24 ч параллакс Солнца не превышает $1'$. Поэтому угол между линиями визирования Солнца и звезды будем принимать равным углу Солнце — Земля — звезда.

Используя формулу дуги сферического треугольника, можем написать

$$\cos \gamma = \sin \delta_\odot \sin \delta_* + \cos \delta_\odot \cos \delta_* \cos \Delta\alpha, \quad (5.8)$$

где

$$\Delta\alpha = \alpha_* - \alpha_\odot. \quad (5.9)$$

Угол Солнце — КА — звезда не должен превышать предельного угла раствора между визирами. Поэтому угол γ должен быть заранее известен. Так как экваториальные координаты Солнца ($\alpha_\odot$, $\delta_\odot$) в течение года изменяются [3], то и величина угла Солнце — Земля — звезда тоже в течение года будет изменяться. Поэтому максимальное значение угла раствора между визирами $\gamma_{\max}$ может наложить ограничение на дату ориентации или на выбор звезды для ориентации.

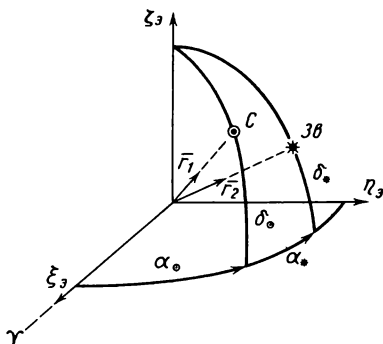


Рис. 5.5

Для построения опорной системы запишем направляющие косинусы линий визирования Солнца и звезды.

$$\begin{aligned}\alpha_{11} &\equiv \cos(\bar{r}_1, \xi_3) = \cos \alpha_{\odot} \cos \delta_{\odot}; \\ \alpha_{12} &\equiv \cos(\bar{r}_1, \eta_3) = \sin \alpha_{\odot} \cos \delta_{\odot}; \\ \alpha_{13} &\equiv \cos(\bar{r}_1, \zeta_3) = \sin \delta_{\odot} = \cos P_{\odot};\end{aligned}\quad (5.10)$$

$$\begin{aligned}\alpha_{21} &\equiv \cos(\bar{r}_2, \xi_3) = \cos \alpha_{*} \cos \delta_{*}; \\ \alpha_{22} &\equiv \cos(\bar{r}_2, \eta_3) = \sin \alpha_{*} \cos \delta_{*}; \\ \alpha_{23} &\equiv \cos(\bar{r}_2, \zeta_3) = \sin \delta_{*} = \cos P_{*},\end{aligned}\quad (5.11)$$

где $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$ — единичные векторы, направленные по линиям визирования Солнца и звезды; P — полярное расстояние, определяемое соотношением

$$P = 90^{\circ} - \delta. \quad (5.12)$$

В дальнейшем нам потребуется вектор $\bar{r}_3^*$, определяемый выражением

$$\bar{r}_3^* = \bar{r}_1 \times \bar{r}_2 = \begin{bmatrix} \bar{\xi}_3 & \bar{\eta}_3 & \bar{\zeta}_3 \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{bmatrix}, \quad (5.13)$$

где $\bar{\xi}_3, \bar{\eta}_3, \bar{\zeta}_3$ — орты осей ξ_3, η_3, ζ_3 .

Запишем $\bar{r}_3^*$ в виде

$$\bar{r}_3^* = \xi_3 \bar{\xi}_3 + \eta_3 \bar{\eta}_3 + \zeta_3 \bar{\zeta}_3, \quad (5.14)$$

где проекции ξ_3, η_3, ζ_3 в соответствии (5.13) определяются выражениями

$$\begin{aligned}\xi_3 &= \alpha_{12} \alpha_{23} - \alpha_{22} \alpha_{13}; \\ \eta_3 &= \alpha_{13} \alpha_{21} - \alpha_{23} \alpha_{11}; \\ \zeta_3 &= \alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{21} \alpha_{12}.\end{aligned}\quad (5.15)$$

Направляющие косинусы вектора $\bar{r}_3^*$ могут быть вычислены по формулам

$$\alpha_{31} = \xi_3 / r_3^*, \quad \alpha_{32} = \eta_3 / r_3^*, \quad \alpha_{33} = \zeta_3 / r_3^*, \quad (5.16)$$

$$\text{где } r_3^* = \sqrt{\xi_3^2 + \eta_3^2 + \zeta_3^2} \quad (5.17)$$

Так как векторы $\bar{r}_1, \bar{r}_2$ неортогональны, то для построения ортогональной системы введем единичный вектор $\bar{r}_4$, определяемый выражением

$$\bar{r}_4 = \bar{r}_2 \times \bar{r}_3 = \begin{vmatrix} \bar{\xi}_3 & \bar{\eta}_3 & \bar{\zeta}_3 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}, \quad (5.18)$$

где $\bar{r}_3$ — единичный вектор, направленный по вектору $\bar{r}_3^*$.

Направляющие косинусы вектора $\bar{r}_4$ в соответствии с (5.18) будут определяться выражениями

$$\begin{aligned} \alpha_{41} &= \alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{32}\alpha_{23}; \\ \alpha_{42} &= \alpha_{23}\alpha_{31} - \alpha_{33}\alpha_{21}; \\ \alpha_{43} &= \alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{31}\alpha_{22}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Таким образом, ориентация ортогональной системы векторов $\bar{r}_2, \bar{r}_3, \bar{r}_4$, построенных на базе линий визирования Солнца и звезды, будут определяться выражением

$$\begin{bmatrix} \bar{r}_2 \\ \bar{r}_3 \\ \bar{r}_4 \end{bmatrix} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} \bar{\xi}_3 \\ \bar{\eta}_3 \\ \bar{\zeta}_3 \end{bmatrix}, \quad (5.20)$$

где $\mathbf{B}$ матрица направляющих косинусов, которая имеет вид

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} \end{bmatrix}. \quad (5.21)$$

Систему ориентации осей аппарата $OXYZ$ при одновременном визировании Солнца и звезды в дальнейшем будем обозначать через $OX^0Y^0Z^0$.

Взаимное положение систем координат $OX^0Y^0Z^0$ и $Or_2r_3r_4$ для рассматриваемых случаев ориентации визиров (см. рис. 5.4, а и 5.4, б) показано на рис. 5.6, а и 5.6, б.

В матричной записи ориентация системы координат $X^0Y^0Z^0$ относительно $r_2r_3r_4$ будет определяться выражением

$$\begin{bmatrix} \bar{x}^0 \\ \bar{y}^0 \\ \bar{z}^0 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \bar{r}_2 \\ \bar{r}_3 \\ \bar{r}_4 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

Матрица $\mathbf{A}$ в том случае, когда оси визиров находятся в плоскости YZ и, следовательно, вектор r_3 направлен по оси $-X$, имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma_1 & 0 & \cos \gamma_1 \\ -\cos \gamma_1 & 0 & \sin \gamma_1 \end{bmatrix}.$$

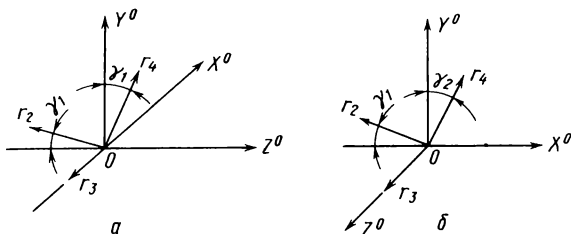


Рис. 5.6

В том случае, когда оси визиров находятся в плоскости X^0Y^0 и, следовательно, вектор $\bar{r}_3$ направлен по оси Z^0 , матрица A принимает вид

$$A = \begin{bmatrix} -\cos \gamma_1 & 0 & \sin \gamma_1 \\ \sin \gamma_1 & 0 & \cos \gamma_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

Заменив в (5.22) столбец $[\bar{r}_2, \bar{r}_3, \bar{r}_4]$ выражением (5.20), получим

$$\begin{bmatrix} \bar{x}^0 \\ \bar{y}^0 \\ \bar{z}^0 \end{bmatrix} = AB \begin{bmatrix} \xi_3 \\ \eta_3 \\ \zeta_3 \end{bmatrix}. \quad (5.24)$$

Таким образом, на базе линий визирования Солнца и звезды ориентация КА относительно экваториальной системы $\xi_3\eta_3\zeta_3$ будет определяться выражением (5.24).

Положение экваториальной системы $O_1\xi_3\eta_3\zeta_3$ относительно положения $OX^0Y^0Z^0$, занимаемого аппаратом при одновременном визировании Солнца и звезды, будет определяться обратным преобразованием матричного равенства (5.24), а именно

$$\begin{bmatrix} \bar{\xi}_3 \\ \bar{\eta}_3 \\ \bar{\zeta}_3 \end{bmatrix} = B'A' \begin{bmatrix} \bar{x}^0 \\ \bar{y}^0 \\ \bar{z}^0 \end{bmatrix}. \quad (5.25)$$

Здесь через B' и A' обозначены транспонированные матрицы от соответствующих им матриц B и A .

5.4. НАПРАВЛЯЮЩИЕ КОСИНУСЫ ОСЕЙ X^T, Y^T, Z^T ТРЕБУЕМОЙ ОРИЕНТАЦИИ КА ОТНОСИТЕЛЬНО ПОЛОЖЕНИЯ, ЗАНИМАЕМОГО ПРИ АСТРООРИЕНТАЦИИ

Требуемая ориентация КА $X^T Y^T Z^T$ относительно экваториальной системы координат ξ_3, η_3, ζ_3 определяется выражением (5.5). Ориентация экваториальной системы $O_1 \xi_3, \eta_3, \zeta_3$ относительно положения аппарата, занимаемого при астроориентации, определяется выражением (5.25).

Заменяя в (5.5) столбец $[\bar{\xi}_3, \bar{\eta}_3, \bar{\zeta}_3]$ выражением (5.25), получим

$$\begin{bmatrix} \bar{x}^T \\ \bar{y}^T \\ \bar{z}^T \end{bmatrix} = (CD) \cdot (B'A') \begin{bmatrix} \bar{x}^o \\ \bar{y}^o \\ \bar{z}^o \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

Таким образом, требуемая ориентация КА относительно положения, задаваемого линиям визирования Солнца и звезды, определяется матрицей косинусов

$$M = (CD) \cdot (B'A'). \quad (5.27)$$

В дальнейшем матрицу M будем записывать в виде

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}. \quad (5.28)$$

Элементы m_{ij} определяются соответствующими произведениями элементов матриц правой части (5.27).

5.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛОВ РАЗВОРОТА, ПРИВОДЯЩИХ КА К ТРЕБУЕМОЙ ОРИЕНТАЦИИ

Развороты КА, переводящие его из положения, занимаемого при астроориентации, в требуемое положение, на момент T_0 выполняются при помощи включенной ГСП. Ориентация платформы относительно осей КА приведена на рис. 5.7. Развороты аппарата выполняются путем подачи соответствующих сигналов в расположенные на платформе гироблоки.

Под действием моментов, возникающих в результате подачи электрических сигналов, гироблоки прецессируют, а вслед за ними разворачивается и ГСП. Вследствие разворота платформы появляется угловое рассогласование между ГСП и КА.

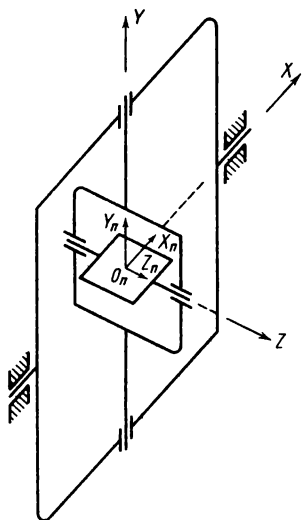


Рис. 5.7

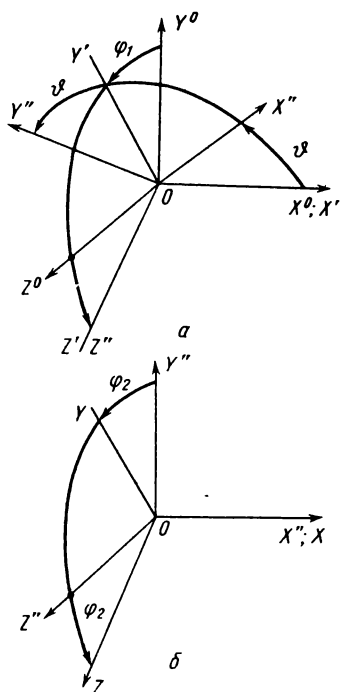


Рис. 5.8

Электрические сигналы, снимаемые с датчиков углов рассогласования, подаются на исполнительные органы системы управления. Под действием моментов, создаваемых управляющими органами, аппарат разворачивается вслед за платформой.

Примем, что развороты аппарата выполняются по схеме: крен — тангаж — крен. На рис. 5.8, а показано положение осей КА после его разворотов на углы φ_1 , ϑ , на рис. 5.8, б после разворота на угол φ_2 .

Начальное положение осей аппарата X^0, Y^0, Z^0 соответствует окончанию астроориентации.

Направляющие косинусы осей X'', Y'', Z'' относительно осей X^0, Y^0, Z^0 после выполнения разворотов на углы φ_1 и ϑ представлены в виде

	X^0	Y^0	Z^0
X''	$\cos \vartheta$	$\cos \varphi_1 \sin \vartheta$	$\sin \varphi_1 \sin \vartheta$
Y''	$-\sin \vartheta$	$\cos \varphi_1 \cos \vartheta$	$\sin \varphi_1 \cos \vartheta$
Z''	0	$-\sin \varphi_1$	$\cos \varphi_1$

При повороте КА на угол φ_2 направляющие косинусы осей X, Y, Z

Оси системы координат	X°	Y°	Z°
X	$\cos \vartheta$	$\cos \varphi_1 \sin \vartheta$	$\sin \varphi_1 \sin \vartheta$
Y	$-\cos \varphi_2 \sin \vartheta$	$\cos \varphi_2 \cos \varphi_1 \cos \vartheta - \sin \varphi_2 \sin \varphi_1$	$\cos \varphi_2 \sin \varphi_1 \cos \vartheta + \sin \varphi_2 \cos \varphi_1$
Z	$\sin \varphi_2 \sin \vartheta$	$-\sin \varphi_2 \cos \varphi_1 \cos \vartheta - \cos \varphi_2 \sin \varphi_1$	$-\sin \varphi_2 \sin \varphi_1 \cos \vartheta + \cos \varphi_2 \cos \varphi_1$

относительно систем координат $OX''Y''Z''$ и $OX^\circ Y^\circ Z^\circ$ представлены в табл. 5.2 и матрицей вида

	X''	Y''	Z''
X	1	0	0
Y	0	$\cos \varphi_2$	$\sin \varphi_2$
Z	0	$-\sin \varphi_2$	$\cos \varphi_2$

Ориентация аппарата в системе координат O_1XYZ после разворотов на углы $\varphi_1, \vartheta, \varphi_2$ должна совпадать с требуемой ориентацией $X^TY^TZ^T$. Поэтому, приравнявая направляющие косинусы табл. 5.2 соответствующим элементам m_{ij} матрицы M , получим соотношения для определения углов разворота аппарата $\varphi_1, \vartheta, \varphi_2$.

Приравнявая элементы первой строки и первого столбца, имеем

$$\cos \vartheta = m_{11}; \quad \cos \varphi_1 \sin \vartheta = m_{12}; \quad \sin \varphi_1 \sin \vartheta = m_{13};$$

$$\sin \varphi_2 \sin \vartheta = m_{31}; \quad -\cos \varphi_2 \sin \vartheta = m_{21}.$$

При помощи равенства (5.29) получаем следующие соотношения

$$\cos \vartheta = m_{11}; \quad \sin \vartheta = \sqrt{m_{12}^2 + m_{13}^2};$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = m_{13}/m_{12}; \quad \sin \varphi_1 = m_{13}/\sqrt{m_{12}^2 + m_{13}^2};$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = -m_{31}/m_{21}; \quad \sin \varphi_2 = m_{31}/\sqrt{m_{12}^2 + m_{13}^2}.$$

5.6. КОНТРОЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ НА УГЛЫ РАЗВОРОТОВ КА

Контрольные условия на углы разворотов КА повышают достоверность их численных значений.

В основу контрольных условий положено требование, чтобы направление оси аппарата X'' после выполнения разворотов на углы φ_1 и ϑ соот-

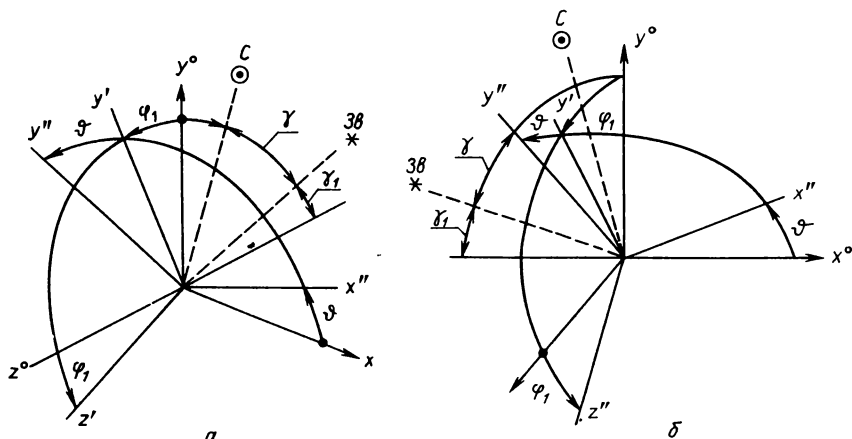


Рис. 5.9

ветствовало требуемому направлению X^T . Угол φ_2 не изменяет ориентации оси X'' , поскольку разворот производится вокруг той же оси X'' .

Учитывая приведенное требование к ориентации оси X'' , контрольные условия сводятся к следующему:

1) косинус угла между направлением оси X'' и направлением на Солнце, выраженный через углы разворотов φ_1 и ϑ должен быть равен косинусу угла между требуемым направлением X^T и направлением на Солнце;

2) аналогичное условие должно быть записано и для направления на звезду.

Взаимное положение осей КА и линий визирования Солнца и звезды на момент астроориентации и после разворотов КА на углы φ_1 и ϑ показано на рис. 5.9, а и 5.9, б.

На рис. 5.9, а показан случай, когда оси визиров находятся в плоскости YZ а на рис. 5.9, б — случай, когда оси визиров находятся в плоскости XY .

Рассмотрим выражения косинусов углов между осью аппарата x'' и направлениями на Солнце и звезду для случая, когда оси визиров находятся в плоскости YZ (рис. 5.9, а).

В начальный момент оси аппарата Y°, Z° находятся в плоскости угла Солнце — КА — звезда. В этой же плоскости находятся и оси Y', Z' после первого разворота на угол φ_1 вокруг оси X° . При развороте на угол ϑ вокруг оси Z' плоскость $X''Y''$, в которой находится угол ϑ , перпендикулярна плоскости Солнце — КА — звезда.

Используя формулу косинуса дуги сферического треугольника, можем написать

$$\cos(X'', C) = \sin \vartheta \cos(Y', C). \quad (5.33)$$

Аналогичное соотношение будет и для линии визирования звезды

$$\cos(\hat{X''}, 3b) = \sin \vartheta \cos(Y', 3b). \quad (5.34)$$

Дуги $\hat{Y'}, C$ и $\hat{Y'}, 3b$ (см. рис. 5.9, а) определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \hat{Y'}, C &= \varphi_1 + 90^\circ - (\gamma + \gamma_1); \\ \hat{Y'}, 3b &= \varphi_1 + 90^\circ - \gamma_1. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Выражения (5.33), (5.34) с учетом соотношений (5.35) принимают вид

$$\cos(\hat{X''}, C) = \sin \vartheta (\cos \varphi_1 \sin(\gamma + \gamma_1) - \sin \varphi_1 \cos(\gamma + \gamma_1)); \quad (5.36)$$

$$\cos(\hat{X''}, 3b) = \sin \vartheta (\cos \varphi_1 \sin \gamma_1 - \sin \varphi_1 \cos \gamma_1). \quad (5.37)$$

Косинус угла между требуемым положением оси X^T и линией визирования Солнца будет определяться следующим соотношением:

$$\cos(\hat{X^T}, C) = e_{11} \alpha_{11} + e_{12} \alpha_{12} + e_{13} \alpha_{13}. \quad (5.38)$$

Здесь e_{11}, e_{12}, e_{13} , определяемые выражением (5.7), суть направляющие косинусы оси X^T в системе $O_1 \xi_3 \eta_3 \zeta_3$; $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}$ — направляющие косинусы линии визирования Солнца в системе координат $O_1 \xi_3 \eta_3 \zeta_3$ — определяются выражением (5.10).

Аналогичное соотношение будет и для косинуса дуги $\hat{X^T}, 3b$:

$$\cos(\hat{X^T}, 3b) = e_{11} \alpha_{21} + e_{12} \alpha_{22} + e_{13} \alpha_{23}, \quad (5.39)$$

где $\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}$ — направляющие косинусы линии визирования звезды определяемые выражениями (5.11).

Сформулированные выше контрольные условия сводятся к выполнению следующих равенств:

$$\cos(\hat{X''}, C) = \cos(\hat{X^T}, C); \quad (5.40)$$

$$\cos(\hat{X''}, 3b) = \cos(\hat{X^T}, 3b). \quad (5.41)$$

Левая часть равенства (5.40) в случае ориентации визиров в плоскости YZ вычисляется по выражению (5.36), а правая — по выражению (5.38).

Левая часть равенства (5.41) вычисляется по выражению (5.37), а правая — по выражению (5.39).

Рассмотрим ориентацию КА и косинусы дуг $\hat{X''}, C$ и $\hat{X''}, 3b$ для случая, когда оси астровизиров ориентированы в плоскости XY (см. рис. 5.9, б).

В начальный момент оси КА X°, Y° находятся в плоскости угла Солнце — КА — звезда. После первого разворота вокруг оси X° на угол φ_1 оси Y', Z' находятся в плоскости, перпендикулярной плоскости Солнце — КА — звезда. Второй разворот на угол ϑ вокруг оси Z' нахо-

дится в плоскости $X^{\circ}Y'$ составляющей с плоскостью Солнце — КА — звезда двугранный угол, равный φ_1 .

Используя формулу косинуса дуги сферического треугольника, косинус угла между направлением оси X'' и направлением на Солнце будет определяться следующим выражением:

$$\cos(X'', \hat{C}) = -\cos \vartheta \cos(\gamma_1 + \gamma) + \sin \vartheta \sin(\gamma_1 + \gamma) \cos \varphi_1. \quad (5.42)$$

Аналогичное соотношение будет и для угла между осью и линией визирования звезды:

$$\cos(X'', \overset{\wedge}{Зв}) = -\cos \vartheta \cos \gamma_1 + \sin \vartheta \sin \gamma_1 \cos \varphi_1. \quad (5.43)$$

Таким образом, левые части равенств (5.40), (5.41) в случае ориентации визиров в плоскости XY должны вычисляться по формулам (5.42), (5.43).

5.7. ОРИЕНТАЦИЯ ПРОДОЛЬНОЙ ОСИ КА

Углы ϑ' , ψ_T , φ_T — характеризующие требуемую ориентацию КА $X^TY^TZ^T$, при исполнении тормозного или корректирующего импульса определяются при расчете траектории спуска КА с орбиты ИСЗ или какого-либо другого маневра. Проведение такого расчета выходит за рамки данной работы. Поэтому для проведения численных расчетов углов разворота КА не будем рассматривать общий случай ориентации КА, характеризуемый углами ϑ_T , ψ_T , φ_T , и ограничимся только рассмотрением ориентации его продольной оси.

Данная задача может возникнуть при подаче корректирующего импульса или при выполнении какой-либо другой операции.

Требуемая ориентация продольной оси КА X определяется углами ϑ_T , ψ_T . Следовательно, для того, чтобы ориентировать продольную ось аппарата, а следовательно, и ось двигателя, достаточно определить только два угла φ_1 и ϑ .

Для определения углов φ_1 и ϑ можно было бы воспользоваться выражениями (5.30) ... (5.32), а затем проверить выполнение контрольных условий (5.40), (5.41). Но такой путь определения углов φ_1 и ϑ влечет за собой большой объем вычислений, что для проведения примерного расчета не является необходимым.

Поэтому для определения углов разворота аппарата φ_1 и ϑ используем контрольные условия (5.40), (5.41).

В том случае, когда астровизирь находится в плоскости YZ условий (5.40) и (5.41) с учетом равенств (5.36), (5.37) можно разрешить относительно $\sin \vartheta$. Так, из условия (5.40) получаем

$$\sin \vartheta = \frac{\cos(X^T, C)}{\cos \varphi_1 \sin(\gamma_1 + \gamma) - \sin \varphi_1 \cos(\gamma_1 + \gamma)}. \quad (5.44)$$

Из условия (5.41)

$$\sin \vartheta = \frac{\cos(\widehat{X^T, 3_B})}{\cos \varphi_1 \sin \gamma_1 - \sin \varphi_1 \cos \gamma_1}. \quad (5.45)$$

Приравнявая друг другу правые части выражений (5.44), (5.45), получим:

$$\frac{\cos \varphi_1 \sin \gamma_1 - \sin \varphi_1 \cos \gamma_1}{\cos \varphi_1 \sin(\gamma + \gamma_1) - \sin \varphi_1 \cos(\gamma + \gamma_1)} = \frac{\cos(\widehat{X^T, 3_B})}{\cos(\widehat{X^T, C})}. \quad (5.46)$$

Если принять, что $\gamma + \gamma_1 = 90^\circ$, то соотношение (5.46) принимает вид

$$\sin \gamma_1 - \operatorname{tg} \varphi_1 \cos \gamma_1 = \cos(\widehat{X^T, 3_B}) / \cos(\widehat{X^T, C}).$$

Откуда

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \gamma_1 - \frac{1}{\cos \gamma_1} \frac{\cos(\widehat{X^T, 3_B})}{\cos(\widehat{X^T, C})} \quad (5.47)$$

Определив из (5.47) величину угла φ_1 , далее из выражения (5.45) или (5.44) можно определить угол ϑ .

В том случае, когда астровизеры находятся в плоскости XU условия (5.40), (5.41) с учетом выражений (5.42), (5.43) можно разрешить относительно $\cos \varphi_1$.

Из условия (5.40) имеем

$$\cos \varphi_1 = \frac{\cos \vartheta \cos(\gamma + \gamma_1) + \cos(\widehat{X^T, C})}{\sin \vartheta + \sin(\gamma + \gamma_1)}. \quad (5.48)$$

Из условия (5.41)

$$\cos \varphi_1 = \frac{\cos \vartheta \cos \gamma_1 + \cos(\widehat{X^T, 3_B})}{\sin \vartheta \sin \gamma_1}. \quad (5.49)$$

Приравнявая правые части выражений (5.48), (5.49) и положив $\gamma + \gamma_1 = 90^\circ$, получим

$$\cos \vartheta = \operatorname{tg} \gamma_1 \cos(\widehat{X^T, C}) - \frac{1}{\cos \gamma_1} \cos(\widehat{X^T, 3_B}). \quad (5.50)$$

Определив из (5.50) угол ϑ далее из выражения (5.49) или (5.48) можно определить угол φ_1 .

Для того чтобы вычислить ϑ , φ_1 , необходимо сначала определить направляющие косинусы линий Земля – Солнце, Земля – звезда, а также и направляющие косинусы оси X^T на момент приведения КА к требуемой ориентации $X^T Y^T Z^T$.

Так как координаты Солнца (прямое восхождение и склонение) в

течение года непрерывно изменяются, то для того, чтобы вычислить направляющие косинусы линии Земля — Солнце должно быть назначено время T_0 , соответствующее моменту приведения КА к требуемой ориентации $X^T Y^T Z^T$. При разработке реальной навигационной системы это время определяется или из расчета траектории спуска КА, или с учетом корректирующего импульса, поэтому углы ориентации $\vartheta_T, \psi_T, \varphi_T$ и время T_0 задаются. Для проведения примерного расчета примем, что процесс приведения КА к требуемой ориентации $X^T Y^T Z^T$ проводился 21 июня 1981 г. и заканчивается в 12 ч по московскому летнему времени. Гринвичское или всемирное время T_0 соответствующее моменту приведения КА в требуемое положение $X^T Y^T Z^T$ было 8 ч.

Прямое восхождение Солнца $\alpha_\odot$ 21 июня 1981 г. на 0 ч всемирного времени 3 равно 5 ч 57 м 58 с или в радиусной мере $89^\circ 29' 30''$. Склонение Солнца в это время равно $23^\circ 26' 22''$.

За 8 ч всемирного времени прямое восхождение Солнца увеличится на $20' 45''$ и, следовательно, будет равно $89^\circ 50' 15''$. Склонение Солнца для выбранной даты практически остается неизменным.

Здесь необходимо заметить, что разворот аппарата на углы φ_1, ϑ может быть выполнен за время, не превышающее 5 ... 6 мин. Следовательно, на момент окончания астроориентации прямое восхождение и склонение Солнца будет меньше по сравнению с моментом приведения КА к ориентации $X^T Y^T Z^T$. За 6 мин прямое восхождение Солнца изменится на $15' 6''$. Следовательно, на момент окончания астроориентации прямое восхождение будет равно $89^\circ 50'$. Склонение Солнца за это время практически неизменно. Естественно, что угол γ между визирами Солнца и звезды должен быть вычислен на момент окончания астроориентации.

В качестве второго астроориентира принимаем звезду Канопус. Прямое восхождение и склонение звезды Канопус имеют значения [21] $\alpha_* = 95^\circ 49', \delta_* = -52^\circ 41'$.

Поскольку определение углов φ_1 и ϑ будет проводиться до получения их числового значения, то приведем здесь значения косинусов и синусов прямых восхождений и склонений Солнца и звезды на момент приведения аппарата ($T_0 = 8$ ч) к ориентации $X^T Y^T Z^T$:

$$\cos \alpha_\odot = \cos 89^\circ 50' 15'' = 0,0028361;$$

$$\sin \alpha_\odot = \sin 89^\circ 50' 15'' = 1,00000;$$

$$\cos \delta_\odot = \cos 23^\circ 26' 22'' = 0,91748;$$

$$\sin \delta_\odot = \sin 23^\circ 26' 22'' = 0,39778;$$

$$\cos \alpha_* = \cos 95^\circ 49' = -0,101346;$$

$$\sin \alpha_* = \sin 95^\circ 49' = 0,99485;$$

$$\cos \delta_* = \cos (-52^\circ 41') = 0,60622;$$

$$\sin \delta_* = \sin (-52^\circ 41') = -0,79530.$$

На момент окончания астроориентации
 $\cos \alpha_{\odot} = \cos 89^{\circ} 50' = 0,0029089$.

Остальные величины не изменяются.

Для определения угла γ вычисляем
 $\cos \gamma = \sin \delta_{\odot} \sin \delta_{*} + \cos \delta_{\odot} \cos \delta_{*} \times$
 $\times \cos (\alpha_{*} - \alpha_{\odot}) = 0,39778 \cdot (-0,79530) +$
 $+ 0,91748 \cdot 0,60622 \cdot 0,99455 = -0,31635 +$
 $+ 0,55316 = 0,23681$, откуда $\gamma = 76^{\circ} 41' 54''$.

Из условия $\gamma + \gamma' = 90^{\circ}$ получаем $\gamma =$
 $= 13^{\circ} 18' 06''$.

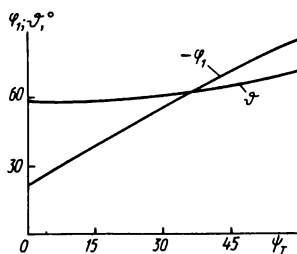


Рис. 5.10

Направляющие косинусы линии Земля – Солнце в системе координат $O_1 \xi_3 \eta_3 \zeta_3$ на момент приведения КА ($T_0 = 8$ ч) к требуемой ориентации $X^T Y^T Z^T$ принимают значения

$$\alpha_{11} = \cos \alpha_{\odot} \cos \delta_{\odot} = 0,0026021; \quad \alpha_{12} = \sin \alpha_{\odot} \cos \delta_{\odot} = 0,91748;$$

$$\alpha_{13} = \sin \delta_{\odot} = 0,39778.$$

Направляющие косинусы линии Земля – звезда Канопус в системе координат $\xi_3 \eta_3 \zeta_3$:

$$\alpha_{21} = -0,061438; \quad \alpha_{22} = 0,60311; \quad \alpha_{23} = -0,79530.$$

Требуемая ориентация оси X^T в системе координат $O_1 \xi_3 \eta_3 \zeta_3$, как это видно из выражений (5.7), определяется углами $\vartheta_T + \beta_0$ и ψ_T . Для примерной оценки величины и характера изменения углов φ_1 и ϑ по сравнению с углами $\vartheta_T + \beta_0$ и ψ_T приведем следующие данные:

$$\vartheta_T + \beta_0 = 60^{\circ}; \quad \psi_T = 0^{\circ}; 15^{\circ}; 30^{\circ}; 45^{\circ}; 60^{\circ}.$$

Относительно ориентации астровизиров будем полагать, что их оси находятся в плоскости YZ .

В соответствии с приведенными данными углов $\vartheta_T + \beta_0$ и ψ_T по формулам (5.7) были вычислены направляющие косинусы e_{11}, e_{12}, e_{13} оси X^T а затем по формулам (5.38), (5.39) были вычислены $\cos (X^T, \hat{C})$ и $\cos (X^T, \hat{Z}_B)$. Далее по формуле (5.47) был вычислен угол φ_1 а затем по (5.45) и (5.44) – (в порядке контроля) был вычислен и угол ϑ . Графики углов $\varphi_1 (\psi_T)$ и $\vartheta (\psi_T)$ приведены на рис. 5.10.

5.8. ИЗМЕНЕНИЕ УГЛА СОЛНЦЕ – ЗЕМЛЯ – КАНОПУС

Угол Солнце – Земля – Канопус (угол γ) необходимо знать не только при поиске звезды при восстановлении ориентации КА, но также и при определении азимута и высоты звезды в орбитальном полете при астрокоррекции навигационной системы. Мы уже отмечали, что угол γ должен быть в пределах максимального угла разворота между визирами. Кроме того, угол γ должен быть выбран таким, чтобы рядом не было

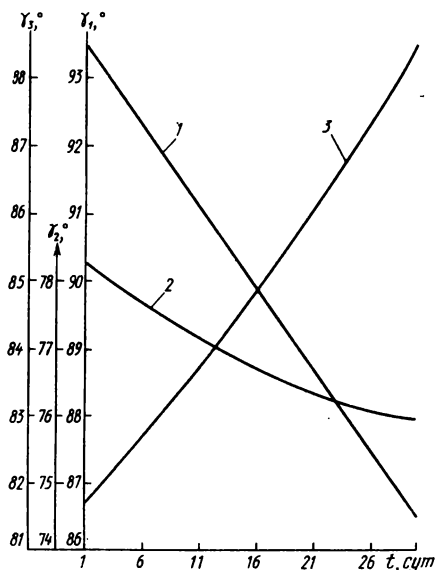


Рис. 5.11

1 июня и заканчивается 30 июня 1981 г. Кривая 3, характеризующая изменение угла γ_3 , начинается 1 сентября и заканчивается 30 сентября 1981 г.

Расчет углов проводился по формуле (5.8). Эфемериды Солнца на O^h всемирного времени принимались по Астрономическому календарю. Наибольшая скорость изменения углов γ_1 и γ_3 примерно $0,25^\circ/\text{сут}$, что меньше одной минуты в час.

5.9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТИ ПОИСКА СВЕТИЛ

Область поиска светил — это область, в которой возможно визирование светил.

Для решения поставленной задачи введем геоцентрическую систему координат $OX_\odot Y_\odot Z_\odot$, в которой ось $Y_\odot$ направлена на Солнце, а ось $X_\odot$ находится в экваториальной плоскости под углом 90° к плоскости круга склонения Солнца. Угол между осью $X_\odot$ и осью ξ_3 , направленной в точку весеннего равноденствия, равен $-(90^\circ - \alpha_\odot)$, где $\alpha_\odot$ — прямое восхождение Солнца. Ось $Z_\odot$ направлена в соответствии с правой системой координат. Угол между осью $Z_\odot$ и осью ξ_3 , направленной по оси вращения Земли, равен склонению Солнца $\delta_\odot$ (рис. 5.12).

Положение системы $OX_\odot Y_\odot Z_\odot$ относительно геоцентрической экваториальной системы $O_1 \xi_3 \eta_3 \zeta_3$ показано на рис. 5.12. Направляющие косинусы осей $X_\odot, Y_\odot, Z_\odot$ в системе $\xi_3 \eta_3 \zeta_3$ приведены в табл. 5.3.

другой звезды или светила, осложняющих визирование выбранной звезды. Вследствие движения Солнца по эклиптике угол Солнце — Земля — звезда не остается постоянным. Характер изменения угла зависит от даты визирования. На рис. 5.11 приведены графики изменения угла Солнце — Земля — Канопус в течение тридцати суток, взятых в различное время года.

Для кривой 1, характеризующей изменение угла γ_1 за начальную дату, было принято 21 марта 1981 г. Конечная дата соответствует 19 апреля 1981 г. Кривая 2, характеризующая изменение угла γ_2 начинается

Таблицу направляющих косинусов 5.3 в дальнейшем будем представлять матрицей

	ξ_3	η_3	ζ_3
$X_\odot$	a_{11}	a_{12}	a_{13}
$Y_\odot$	a_{21}	a_{22}	a_{23}
$Z_\odot$	a_{31}	a_{32}	a_{33}

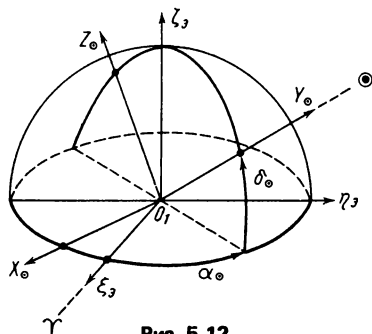


Рис. 5.12

В соответствии с матрицей направляющих косинусов координаты КА ($X_\odot$, $Y_\odot$, $Z_\odot$) будут определяться выражениями

$$X_\odot = a_{11}\xi_3 + a_{12}\eta_3 + a_{13}\zeta_3;$$

$$Y_\odot = a_{21}\xi_3 + a_{22}\eta_3 + a_{23}\zeta_3;$$

$$Z_\odot = a_{31}\xi_3 + a_{32}\eta_3 + a_{33}\zeta_3,$$

в которых ξ_3 , η_3 , ζ_3 геоцентрические экваториальные координаты аппарата.

Заметим, в координатах аппарата (ξ_3 , η_3 , ζ_3), определяемых выражениями (3.5), долгота восходящего узла Ω берется относительно оси ξ_3 , направленной в точку весеннего равноденствия. Соотношение между долготой восходящего узла Ω_3 в системе координат $O_1 \xi_3 \eta_3 \zeta_3$ и долготой Ω_0 в системе $\xi_0 \eta_0 \zeta_0$ определяется выражением (4.4).

Рассмотрев систему координат $OX_\odot Y_\odot Z_\odot$, можно сделать следующее замечание.

Если линия узлов орбиты КА будет совпадать с осью $X_\odot$, а наклон плоскости орбиты будет равен $i_\odot = 90^\circ + \delta_\odot$, то плоскость орбиты будет совпадать с плоскостью $Z_\odot X_\odot$, и движение КА все время будет происходить в освещенной части пространства. Координата $Y_\odot$ в этом случае равна нулю. В общем случае, когда наклонение плоскости орбиты $i \neq i_\odot$ и долгота восходящего узла орбиты Ω_3 не равна долготе оси $X_\odot$, движе-

Таблица 5.3

Системы координат		Экваториальная		
		ξ_3	η_3	ζ_3
Геоцентрическая	$X_\odot$	$\sin \alpha_\odot$	$-\cos \alpha_\odot$	0
	$Y_\odot$	$\cos \delta_\odot \cos \alpha_\odot$	$\cos \delta_\odot \sin \alpha_\odot$	$\sin \delta_\odot$
	$Z_\odot$	$-\sin \delta_\odot \cos \alpha_\odot$	$-\sin \delta_\odot \sin \alpha_\odot$	$\cos \delta_\odot$

ние КА будет происходить в освещенной и теневой частях пространства. Условия попадания КА в теневой цилиндр Земли будет

$$y_{\odot} < 0; x_{\odot}^2 + z_{\odot}^2 \leq R^2,$$

где R — радиус Земли.

Не уточняя границ перехода КА из теневой части пространства в освещенную, условие для движения освещенной части можно записать в виде

$$y_{\odot} \geq 0.$$

Подставив в уравнение для $Y_{\odot}$ значения координат КА (ξ_3, η_3, ζ_3) и значения направляющих косинусов, условие приводится к виду

$$rf(u) \geq 0,$$

где r — радиус местоположения КА, функция $f(u)$ определяется из выражения

$$f(u) = \cos \delta_{\odot} \cos u \cos (\Omega_3 - \alpha_{\odot}) - \cos \delta_{\odot} \sin u \sin (\Omega_3 - \alpha_{\odot}) \cos i + \sin u \sin i.$$

Условие видимости светила будет определяться выражением

$$f(u) \geq 0.$$

Вычислив функцию $f(u)$ для заданных долготы восходящего узла и наклона орбиты можно определить область, в которой можно проводить поиск светила.

На рис. 5.13 приведены графики граничных значений аргументов широты u_1, u_2 в зависимости от угла $(\Omega_3 - \alpha_{\odot})$.

При расчете u_1, u_2 было принято склонение Солнца $\delta_{\odot} = 23^{\circ} 22' 22''$ (на 21 июня 1981 г.) и наклонение орбиты $i = 50^{\circ}$.

Для выяснения возможности построения опорной плоскости Солнце — КА — Канопус надлежит выяснить проекцию единичного радиуса $\vec{r}$ линии визирования звезды Канопус. Проекции единичного радиуса-вектора $\vec{r}$ линии визирования звезды Канопус на оси $O_1 \xi_3, \eta_3, \zeta_3$ имеют значения

$$r_{\xi} = -0,0061438 \quad r_{\eta} = 0,60311; \\ r_{\zeta} = -0,79530.$$

Направляющие косинусы a_{21}, a_{22}, a_{23} зависят от даты и времени астроориентации.

Для 21 июня 1981 г. на момент $T_0 = 8$ ч. $\alpha_{\odot} = 89^{\circ} 50'$ и $\delta_{\odot} = 23^{\circ} 22' 22''$. В соответствии с приведенными значениями углов $\alpha_{\odot}, \delta_{\odot}$ получим

$$a_{21} = \cos \delta_{\odot} \cos \alpha_{\odot} = 0,0026688;$$

$$a_{22} = \cos \delta_{\odot} \sin \alpha_{\odot} = 0,91748;$$

$$a_{23} = \sin \delta_{\odot} = 0,39778.$$

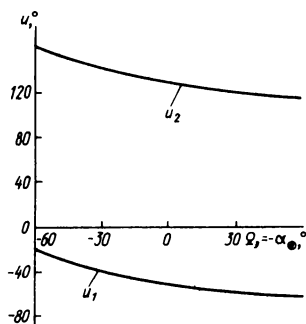


Рис. 5.13

Подставив значения проекций $r_{\xi}, r_{\eta}, r_{\zeta}$ единичного радиуса $\bar{r}$ линии визирования Канопуса и косинусов a_{21}, a_{22}, a_{23} в выражение

$$r_{y\odot} = a_{21} r_{\xi} + a_{22} r_{\eta} + a_{23} r_{\zeta},$$

получим

$$r_{y\odot} = 0,23683 > 0.$$

Таким образом, для принятых параметров орбиты и для намеченной даты и времени астроориентация КА возможна.

Так как величины a_{21}, a_{22}, a_{23} суть проекции на оси ξ_3, η_3, ζ_3 единичного вектора $\bar{r}_1$, направленного по оси $Y_{\odot}$, то вычисленная величина $r_{y\odot}$ представляет собой косинус угла γ между линиями визирования Солнца и звезды Канопус. Для значения $r_{y\odot} = 0,23683$ угол $\gamma = 76^{\circ} 18'$.

Данное значение ($\gamma = 76^{\circ} 18'$) совпадает со значением γ_2 , представленным на рис. 5.11.

5.10. УГОЛ СОЛНЦЕ – КА – ЗЕМЛЯ

При поиске звезды для исключения засветок прибора Землей (или Луной) угол Солнце – КА – звезда должен удовлетворять следующим условиям:

$$\text{СКАЗ}_в \leq \text{СКАЗ} - \Delta; \quad \text{СКАЗ}_в \geq \text{СКАЗ} + \Delta. \quad (5.51)$$

Здесь СКАЗ – угол Солнце – КА – Земля, Δ – угол, равный половине ширины запретной зоны, в которой не должно быть звезды. Величина угла Δ равна сумме углового радиуса Земли и необходимого углового запаса, гарантирующего превышение линии визирования звезды над слоями атмосферы (ионосферы), искажающими цвет и яркость звезды [21].

Запрещенная область и изменение положения области при движении КА по орбите ИСЗ показана на рис. 5.14.

Угол СКАЗ может быть найден как угол между векторами $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$ направленными с КА на Солнце и центр Земли.

Если дата и время ориентации заданы, то координаты Солнца $\alpha_{\odot}$ и $\delta_{\odot}$ могут быть определены или по Астрономическому ежегоднику или по Астрономическому календарю. Координаты аппарата $\delta_{КА}$ и $\alpha_{КА}$ в системе $O_1 \xi_3 \eta_3 \zeta_3$, если известна орбита или траектория выведения, тоже могут быть определены. Координаты Земли при визировании ее с КА (рис. 5.15) будут определяться следующими соотношениями:

$$\alpha_3 = \alpha_{КА} + 180^{\circ}; \quad \delta_3 = -\delta_{КА}. \quad (5.52)$$

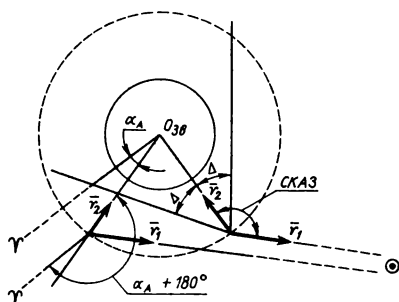


Рис. 5.14

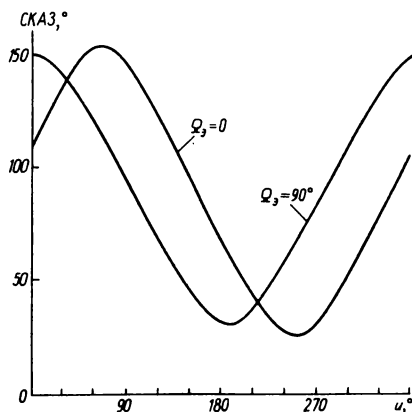


Рис. 5.15

Угол СКАЗ может быть определен по косинусу угла сферического треугольника.

$$\cos(\text{СКАЗ}) = \sin \delta_{\odot} \sin \delta_3 + \cos \delta_{\odot} \cos \delta_3 \cos \Delta \alpha_i \quad (5.53)$$

где

$$\Delta \alpha = \alpha_3 - \alpha_{\odot}.$$

На рис. 5.15 приведены графики изменения угла СКАЗ в зависимости от аргумента широты u для орбит с долготой восходящего угла $\Omega_3 = 0^\circ$, $\Omega = 90^\circ$ и наклонением орбиты $i = 50^\circ$. Координаты Солнца были взяты на O^h всемирного времени на 1 июня 1981 г.

Так как изменение угла $\alpha_{\odot}$ за сутки $\approx 1^\circ$, а склонение $\delta_{\odot}$ за сутки $\approx 8'15''$, то для примерной оценки угла СКАЗ приведенные графики вообще можно распространить на 1 июня 1981 г.

ГЛАВА 6.

НАВИГАЦИЯ С БЕСПЛАТФОРМЕННОЙ СИСТЕМОЙ

6.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛОВ КА ОТНОСИТЕЛЬНО ИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ ПО ИНФОРМАЦИИ, ПОЛУЧАЕМОЙ С ДУСов

Системы навигации, построенные на базе ГСП и БЦВМ, к настоящему времени получили весьма широкое распространение. Однако ГСП довольно сложное и дорогое устройство. Поэтому не прекращаются поиски построения навигационных систем без применения ГСП [9, 10, 16, 20, 26].

В бесплатформенных системах акселерометры и гироскопические приборы монтируются непосредственно на КА и поэтому участвуют во всех линейных и угловых движениях аппарата.

При отсутствии в системе ГСП определение параметров, характеризующих ориентацию и навигацию аппарата в базовой системе координат, возлагается на бортовой вычислитель.

В качестве базовой системы будем применять невращающуюся стартовую систему координат.

Алгоритмы по определению параметров ориентации осей КА существенно зависят от характера первичной информации, получаемой с датчиков углового движения.

В качестве датчиков углового движения КА в бесплатформенных инерциальных навигационных системах применяют двухстепенные гироскопы или одноосные гиросtabilизаторы.

Пусть на борту находятся весьма точные ДУСы, измеряющие все три составляющие вектора угловой скорости $\omega(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ в осях X, Y, Z , связанных с корпусом КА. Пусть на борту находится воображаемая, идеальная ГСП. С помощью трех углов положения ее рамок ϑ, ψ, φ необходимо определить положение связанной системы координат относительно инерциальной $O_0X_0Y_0Z_0$, образуемой ГСП. Очередность поворотов рамок для определенности примем такую же, как и ранее: на угол тангажа (ϑ), угол рыскания (ψ), угол вращения (φ). Напомним, что последовательность поворотов — это повороты рамок от внутренней части ГСП к внешней — к корпусу КА. Так, внутренняя рамка повернута от ГСП на угол ϑ вокруг оси Z_0 , внешняя рамка развернута относительно внутренней (вокруг оси Y внутренней рамки) на угол ψ , а корпус аппарата развернут относительно оси X внешней рамки, совпадающей с осью подвеса платформы, на угол φ .

Известны все три составляющие вектора угловой скорости аппарата $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ и требуется определить скорости изменения углов рамок ГСП $\dot{\vartheta}, \dot{\psi}, \dot{\varphi}$. Получим так называемые кинематические уравнения ГСП. Выведем их.

Угловая скорость внутренней рамки (скорость ее поворота относительно ГСП) — $\dot{\vartheta}$ — вектор, направленный по оси $\bar{Z}_0$, совпадающий с осью Z внутренней рамки подвеса. Угловая скорость внешней рамки образуется сложением двух угловых скоростей (переносной угловой скорости внутренней рамки) и относительной скорости (скорости разворота внешней рамки относительно внутренней $\dot{\psi}$). Отметим, что вектор $\dot{\psi}$ направлен по оси Y внешней рамки. Угловую скорость КА также можно представить как сумму двух скоростей — переносной скорости (скорости разворота рамки $\dot{\vartheta} + \dot{\psi}$) и относительной скорости (скорости разворота КА относительно внешней рамки $\dot{\varphi}$). Отметим, что вектор

относительно угловой скорости φ направлен по оси $\bar{X}$. С другой стороны, угловая скорость КА известна — это вектор $\bar{\omega}(\omega_x \omega_y \omega_z)$. Таким образом, получено векторное уравнение, связывающее угловые скорости, образуемые на рамках, с угловой скоростью аппарата

$$\bar{\vartheta} + \bar{\psi} + \bar{\varphi} = \bar{\omega}. \quad (6.1)$$

где $\bar{\vartheta}$ — вектор в системе координат внутренней рамки с координатами $0, 0, \vartheta$; $\bar{\psi}$ — вектор в системе координат внешней рамки с координатами $0, \psi, 0$;

$\bar{\varphi}$ — вектор в системе координат КА с координатами $\varphi, 0, 0$.

Это векторное уравнение переведем в связанную систему координат (X, Y, Z) с осями i, j, k . Здесь вектор $\bar{\omega}$ записывается в виде

$$\bar{\omega} = \omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k}. \quad (6.2)$$

Запишем три матрицы преобразования координат:

матрицу перехода из системы ГСП к системе координат внутренней рамки

$$A_{\vartheta} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (6.3)$$

матрицу перехода из системы координат внутренней рамки к системе координат внешней рамки

$$A_{\psi} = \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{bmatrix}; \quad (6.4)$$

матрицу перехода из системы координат внешней рамки к связанной системе координат

$$A_{\varphi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad (6.5)$$

Затем векторное уравнение запишем в виде

$$\bar{\omega} = E \bar{\vartheta} + A_{\varphi} \bar{\psi} + A_{\varphi} A_{\psi} \bar{\vartheta}, \quad (6.6)$$

где E — единичная матрица;

$A_{\varphi}, A_{\varphi} A_{\psi}$ — матрица перехода из системы координат внешней рамки к связанной системе координат и матрица перехода из системы координат внутренней рамки также к связанной системе координат соот-

ответственно. В результате приведения уравнения (6.6) к координатной форме получим уравнения (6.7):

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\varphi} - \sin \psi \dot{\vartheta}; \\ \omega_y &= -\sin \varphi \cos \psi \dot{\vartheta} + \cos \varphi \dot{\psi}; \\ \omega_z &= \cos \varphi \cos \psi \dot{\vartheta} + \sin \varphi \dot{\psi}.\end{aligned}\tag{6.7}$$

Обращая систему, т.е. выразив $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$, $\dot{\vartheta}$ через ω_x , ω_y , ω_z получим кинематические уравнения ГСП формы, т.е. формулы, определяющие изменение скорости углов φ , ψ , ϑ во времени:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \omega_x - \operatorname{tg} \psi \sin \varphi \omega_y + \operatorname{tg} \psi \cos \varphi \omega_z; \\ \dot{\psi} &= \cos \varphi \omega_y + \sin \varphi \omega_z; \\ \dot{\vartheta} &= -\frac{\sin \varphi}{\cos \psi} \omega_y + \frac{\cos \varphi}{\cos \psi} \omega_z.\end{aligned}\tag{6.8}$$

Итак, чтобы найти положение связанной системы координат относительно инерциальной, необходимо непрерывно рашать на борту КА систему (6.8). Здесь уже отсутствует конструктивное ограничение на углы поворота рамок, но возникают вычислительные трудности, связанные с вычислением, а именно: необходимость деления 1-го и 3-го уравнений на $\cos \psi$, который обращается в нуль при $\psi = 90^\circ$. Таким образом, при этом условии уравнения (6.8) теряют смысл, и качественный скачок при переходе к бесплатформенной системе здесь не смог осуществиться. Не подтвердился также и вывод о том, что КА может занимать произвольное положение в пространстве, которое всегда можно определить. Причиной этого явилось то, что для определения положения КА был выбран идеальный трехосный гиросtabilизатор, у которого существует неопределенность положения при углах, близких к $90^\circ + n \cdot 180^\circ$ по рысканию. Поэтому при введении бесплатформенных систем следует идти не традиционным путем замещения трехосного гиросtabilизатора вычислителем, а найти новые параметры ориентации, позволяющие полностью исключить недостатки трехосного гиросtabilизатора.

Кроме того, существуют уходы — основной недостаток инерциальных систем. Они влияют на измерения угловых скоростей (смещение нулей датчиков угловых скоростей, пропорциональные ошибки датчиков, вычислительные погрешности). Поэтому в вопросе точности бесплатформенные системы поставлены в более тяжелые условия, чем ГСП.

Положение связанной системы координат относительно инерциальной, задаваемое углами ϑ , ψ , φ , определяется также матрицей A_Σ , полученной в результате произведения матриц трех последовательных разворотов по тангажу, рысканию и вращению:

$$A_\Sigma = A_\varphi A_\psi A_\vartheta.$$

Направляющие косинусы A_{Σ} представлены в виде

	$\leftarrow \uparrow$	X_0	Y_0	Z_0
X		$\cos \psi \cos \vartheta$	$\cos \psi \sin \vartheta$	$-\sin \psi$
Y		$-\cos \varphi \sin \vartheta +$ $+ \sin \varphi \sin \psi \cos \vartheta$	$\cos \psi \cos \psi +$ $+ \sin \varphi \sin \psi \sin \vartheta$	$\sin \varphi \cos \psi$
Z		$\sin \varphi \sin \vartheta +$ $+ \cos \varphi \sin \psi \cos \vartheta$	$-\sin \varphi \cos \vartheta +$ $+ \cos \varphi \sin \psi \sin \vartheta$	$\cos \varphi \cos \psi$

(6.9)

6.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРАВЛЯЮЩИХ КОСИНУСОВ ПОДВИЖНОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ ПО ИНФОРМАЦИИ, ПОЛУЧАЕМОЙ С ДУСОВ

Рассмотрим основы определения положения одной системы координат относительно другой — матрицу направляющих косинусов. Пусть известна начальная матрица ориентации связанной системы координат аппарата относительно инерциальной — A_{Σ} с элементами a_{ij} . Найдем формулы, позволяющие определить изменение во времени каждого из элементов матрицы. Переход КА из начального положения, определяемого матрицей A_{Σ} , в новое положение, определяемое матрицей A_{Σ}^H , может быть получен путем трех элементарных поворотов:

вокруг оси X с угловой скоростью ω_x на угол $\Delta\varphi = \omega_x dt$:

$$A_{\Delta\varphi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \Delta\varphi \\ 0 & -\Delta\varphi & 1 \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

Здесь и далее ввиду малости углов синусы полагаются равными самим углам, а косинусы равны 1;

вокруг оси Y с угловой скоростью ω_y на угол $\Delta\psi = \omega_y dt$:

$$A_{\Delta\psi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\Delta\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \Delta\psi & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad (6.11)$$

вокруг оси Z с угловой скоростью ω_z на угол $\Delta\vartheta = \omega_z dt$:

$$A_{\Delta\vartheta} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta\vartheta & 0 \\ -\Delta\vartheta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.12)$$

Матрица суммарного поворота A_p получается путем перемножения матриц отдельных поворотов:

$$A_p = A_{\Delta\vartheta} A_{\Delta\psi} A_{\Delta\varphi} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta\vartheta & -\Delta\psi \\ -\Delta\vartheta & 1 & \Delta\varphi \\ \Delta\psi & -\Delta\varphi & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.13)$$

Результирующая матрица перехода A_{Σ}^H из инерциальной системы координат к связанной, образованной после разворота, находится умножением матрицы начального положения ориентации системы A_{Σ} на матрицу суммарного поворота A_p (умножение производится слева):

$$A_{\Sigma}^H = A_p \cdot A_{\Sigma}. \quad (6.14)$$

Элементы этой матрицы можно записать в виде

$$\begin{aligned} a_{11}^H &= a_{11} + \Delta\vartheta a_{21} - \Delta\psi a_{31}; \\ a_{12}^H &= a_{12} + \Delta\vartheta a_{22} - \Delta\psi a_{32}; \\ a_{13}^H &= a_{13} + \Delta\vartheta a_{23} - \Delta\psi a_{33}; \\ a_{21}^H &= a_{21} + \Delta\vartheta a_{12} + \Delta\psi a_{31}; \\ a_{22}^H &= a_{22} + \Delta\vartheta a_{12} + \Delta\psi a_{32}; \\ a_{23}^H &= a_{23} + \Delta\vartheta a_{13} + \Delta\varphi a_{33}; \\ a_{31}^H &= a_{31} + \Delta\vartheta a_{11} - \Delta\varphi a_{21}; \\ a_{32}^H &= a_{32} + \Delta\vartheta a_{12} - \Delta\varphi a_{22}; \\ a_{33}^H &= a_{33} + \Delta\psi a_{13} - \Delta\varphi a_{23}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Определяя приращение каждого из элементов матрицы

$$\Delta a_{ij} = a_{ij}^H - a_{ij} \quad (6.16)$$

и поделив их на приращение времени dt , получим кинематические уравнения вида

$$\begin{aligned} \dot{a}_{11} &= \omega_z a_{21} - \omega_y a_{31}; & \dot{a}_{23} &= -\omega_z a_{13} + \omega_x a_{33}; \\ \dot{a}_{12} &= \omega_z a_{22} - \omega_y a_{32}; & \dot{a}_{31} &= \omega_y a_{11} + \omega_x a_{21}; \end{aligned} \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned}\dot{a}_{13} &= \omega_z a_{13} - \omega_y a_{33}; \quad \dot{a}_{32} = \omega_y a_{12} - \omega_x a_{22}; \\ \dot{a}_{21} &= -\omega_z a_{11} + \omega_x a_{31}; \quad \dot{a}_{33} = \omega_y a_{13} - \omega_x a_{23}. \\ \dot{a}_{22} &= -\omega_z a_{12} + \omega_x a_{32};\end{aligned}\tag{6.17}$$

Интегрируя на борту систему уравнений (6.17), можно определять текущие значения элементов матрицы a_{ij} и, таким образом, непрерывно вычислить положение связанной системы координат относительно инерциальной. Здесь уже отсутствуют недостатки предыдущего способа. Но громоздкость вычислений настораживает. Можно несколько сократить объем вычислений, зная, что направляющие косинусы матрицы преобразования зависимы друг от друга. Можно, например, определив 6 элементов матрицы

$$(\overset{*}{a}_{11}, a_{12}, a_{13}) \text{ и } (a_{21}, a_{22}, a_{23})$$

непосредственным интегрированием, найти оставшиеся элементы как результат векторного произведения $\vec{z}(a_{31}, a_{32}, a_{33})$:

$$\vec{Z} = \vec{X} \times \vec{Y}.$$

6.3. ПАРАМЕТРЫ РОДРИГА – ГАМИЛЬТОНА В ТЕОРИИ УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

В рассмотренных ранее разделах показано, что определение ориентации КА при помощи трех параметров (углов ϑ , ψ , φ) недостаточно решает поставленную задачу, а решение задачи с 9-ю параметрами (элементами матрицы A_Σ) слишком громоздко и сложно. Возникает вопрос: нельзя ли найти какие-либо новые параметры, которые не были бы столь многочисленны, как элементы матрицы, и позволяли без ограничений решить задачу определения ориентации тела? Такие параметры существуют. Их четыре. Они называются проекциями (элементами) кватерниона. Кватернионы все чаще и чаще начинают применяться в управлении движением КА. Рассмотрим основные положения теории кватернионов.

Первый вопрос, на который следует дать ответ – это определение матрицы произвольного разворота.

Пусть в исходной системе координат X_0, Y_0, Z_0 задан единичный вектор $\xi(e_x, e_y, e_z)$, вокруг которого происходит разворот тела на угол θ . Единичные орты исходной системы обозначим i_0, j_0, k_0 . Найдем матрицу этого разворота, которая характеризует новое положение связанной системы координат тела (XYZ) в осях старой исходной системы координат.

В первой строке матрицы записываются направляющие косинусы нового положения оси X после разворота, т.е. проекции единичного вектора оси X на оси исходной системы координат.

Во второй строке — направляющие косинусы положения оси Y ; в третьей — оси Z .

Введем систему координат ξ, η, ζ , (рис. 6.1), связанную с осью разворота: $\bar{\xi}$ — единичный вектор, совпадающий с осью разворота; $\bar{\eta}$ — единичный вектор в плоскости X_0 , $\bar{\xi}$ и ортогональный $\bar{\xi}$; ось $\bar{\zeta}$ — дополняет систему векторов $\bar{\xi}$ и $\bar{\eta}$ до ортогональной правой системы $\bar{\xi} = \bar{\xi} \bar{\eta}$.

Ось X , совпадающая до разворота с осью X_0 , описывает конус вокруг направления $\bar{\xi}$. При развороте проекция вектора X на ось разворота остается неизменной. Скалярное произведение $\bar{i}_0 \cdot \bar{\xi}$ определяет длину этой проекции $|\bar{x}_\xi| = (\bar{i}_0 \cdot \bar{\xi}) = e_x$, а сам вектор-проекция оси на ось X в исходной системе координат запишется в виде

$$\bar{X}_\xi = e_x(e_x \bar{i}_0 + e_y \bar{j}_0 + e_z \bar{k}_0). \quad (6.18)$$

Проекция единичного вектора X на ось $\bar{\eta}$ до начала разворота находится как разность

$$\bar{X}_\eta(\theta = 0) = \bar{i}_0 - \bar{X}_\xi = (1 - e_x^2) \bar{i}_0 - e_x e_y \bar{j}_0 - e_x e_z \bar{k}_0. \quad (6.19)$$

Проекция единичного вектора оси $\bar{X}$ на ось $\bar{\zeta}$ до начала разворота равна нулю, так как ось ζ ортогональна плоскости ξ, X_0 . При развороте вокруг осей ξ проекции вектора оси $\bar{\eta}$ и $\bar{\zeta}$ начинают перераспределяться. Проекция вектора на $\bar{\eta}$ уменьшается, пропорционально косинусу угла разворота θ :

$$\bar{X}_\eta(\theta) = \cos \theta [(1 - e_x^2) \bar{i}_0 - e_x e_y \bar{j}_0 - e_x e_z \bar{k}_0], \quad (6.20)$$

а проекция вектора на ось $\bar{\zeta}$ возрастает пропорционально синусу угла θ .

Найдем вектор-пропорцию на ось $\bar{\zeta}$ при развороте тела на 90° :

$$\bar{X}_\zeta(\theta = 90^\circ) = \bar{\xi} \times \bar{X}_\eta(\theta = 0) = e_z \bar{j}_0 - e_y \bar{k}_0. \quad (6.21)$$

При развороте на угол θ величину $\bar{X}_\zeta$ можно записать в виде

$$\bar{X}_\zeta(\theta) = \sin \theta (e_z \bar{j}_0 - e_y \bar{k}_0). \quad (6.22)$$

Теперь вектор $\bar{X}$ найдем как сумму его трех проекций

$$\begin{aligned} \bar{X} = \bar{X}_\xi + \bar{X}_\eta(\theta) + \bar{X}_\zeta(\theta) = & [e_x^2 + (1 - e_x^2) \cos \theta] \bar{i}_0 + \\ & + [e_x e_y (1 - \cos \theta) + e_z \sin \theta] \bar{j}_0 + [e_x e_z (1 - \cos \theta) - e_y \sin \theta] \bar{k}_0. \end{aligned} \quad (6.23)$$

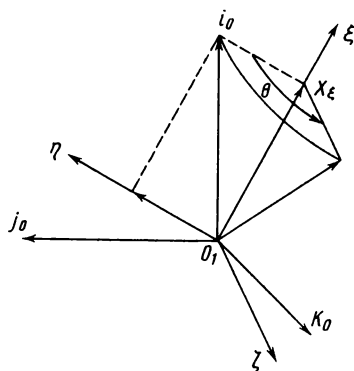


Рис. 6.1

Таким образом, определены три первых элемента матрицы:

$$\begin{aligned} a_{11} &= e_x^2 + (1 - e_x^2) \cos \theta = \cos \theta + e_x^2 (1 - \cos \theta); \\ a_{12} &= e_x e_y (1 - \cos \theta) + e_z \sin \theta; \\ a_{13} &= e_x e_z (1 - \cos \theta) - e_y \sin \theta. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Подобным образом найдем элементы второй и третьей строки матрицы, а результирующая матрица разворота запишется в виде

	X_0	Y_0	Z_0	
X	$\cos \theta + e_x^2 (1 - \cos \theta)$	$e_x e_y (1 - \cos \theta) + e_z \sin \theta$	$e_x e_z (1 - \cos \theta) - e_y \sin \theta$	
Y	$e_x e_y (1 - \cos \theta) - e_z \sin \theta$	$\cos \theta + e_y^2 (1 - \cos \theta)$	$e_y e_z (1 - \cos \theta) + e_x \sin \theta$	
Z	$e_x e_z (1 - \cos \theta) + e_y \sin \theta$	$e_y e_z (1 - \cos \theta) - e_x \sin \theta$	$\cos \theta + e_z^2 (1 - \cos \theta)$	(6.25)

Зная матрицу перехода, можно определить ось разворота и величину угла разворота.

Сложив диагональные элементы матрицы и зная, что

$$e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 = 1,$$

получим

$$S = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 1 + 2 \cos \theta \quad (6.26)$$

Таким образом, след матрицы определяет угол разворота.

Если же вычесть друг из друга элементы матрицы, симметричные относительно главной диагонали, то получим параметры вектора, вокруг которого происходит разворот:

$$\begin{aligned} a_{23} - a_{32} &= 2e_x \sin \theta; \\ a_{31} - a_{13} &= 2e_y \sin \theta; \\ a_{12} - a_{21} &= 2e_z \sin \theta. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Перед нами была поставлена задача найти параметры меньшей размерности, но также характеризующие разворот. Параметры должны быть простыми, позволяющими восстановить с помощью несложных алгебраических формул матрицу преобразования, должны иметь ясный физический смысл.

На первый взгляд кажется, что трехмерный вектор

$$\bar{\Omega}(e_x \sin \theta, e_y \sin \theta, e_z \sin \theta) \quad (6.28)$$

решает эту задачу. Он направлен по оси разворота, длина его пропорциональна синусу угла разворота и он непосредственно участвует в матрице преобразования. Но это благополучие только кажущееся.

Во-первых, для восстановления матрицы необходима функция-косинус, для получения которой необходимо извлечение корня, а, во-вторых, при выборе именно таких параметров нарушается монотонность параметров разворота: с увеличением угла разворота θ длина вектора $\bar{\Omega}$ сначала возрастает до $\theta = 90^\circ$, а далее при $\theta = 90^\circ - 180^\circ$ падает до нуля. В этом смысле более предпочтителен вектор разворота, построенный на половинном угле

$$\bar{\Omega}(e_x \sin \theta/2, e_y \sin \theta/2, e_z \sin \theta/2) \quad (6.29)$$

и дополненный четвертым скалярным параметром $\cos \theta/2$. Отсюда и название кватернион – четырехмерные параметры разворота.

Здесь достигается монотонность (при максимальном угле разворота 180° длина вектора $\bar{\Omega}$ максимальна и равна единице) и уравнения – при восстановлении матрицы простые.

Действительно, если ввести обозначения параметров

$$\begin{aligned} p_0 &= \cos(\theta/2); \quad p_1 = e_x \sin(\theta/2) \\ p_2 &= e_y \sin(\theta/2); \quad p_3 = e_z \sin(\theta/2), \end{aligned} \quad (6.30)$$

то

$$\begin{aligned} \cos \theta &= 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 = 2p_0^2 - 1; \\ e_x^2 (1 - \cos \theta) &= 2e_x^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 2p_1^2; \\ e_y^2 (1 - \cos \theta) &= 2p_2^2; \\ e_z^2 (1 - \cos \theta) &= 2p_3^2; \end{aligned} \quad (6.31)$$

$$e_x \sin \theta = 2 \cos \frac{\theta}{2} e_x \sin \frac{\theta}{2} = 2p_0 p_1;$$

$$e_y \sin \theta = 2p_0 p_2;$$

$$e_z \sin \theta = 2p_0 p_3.$$

Тогда матрица разворота в этих параметрах запишется в виде

	X_0	Y_0	Z_0	
X	$2p_0^2 + 2p_1^2 - 1$	$2p_1p_2 + 2p_0p_3$	$2p_1p_3 - 2p_0p_2$	
Y	$2p_1p_2 - 2p_0p_3$	$2p_0^2 + 2p_2^2 - 1$	$2p_2p_3 + 2p_0p_1$	(6.32)
Z	$2p_1p_3 + 2p_0p_2$	$2p_2p_3 - 2p_0p_1$	$2p_0^2 + 2p_3^2 - 1$	

Параметры p_0, p_1, p_2, p_3 называются параметрами Родрига – Гамильтона. Они, как и направляющие косинусы, связаны друг с другом соотношением

$$p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} (e_x^2 + e_y^2 + e_z^2) = 1.$$

По матрице разворота легко восстанавливается и кватернион:

$$\begin{aligned} S &= a_{11} + a_{22} + a_{33} = 4p_0^2 - 1; \\ \lambda_1 &= a_{23} - a_{32} = 4p_0p_1; \\ \lambda_2 &= a_{31} - a_{13} = 4p_0p_2; \\ \lambda_3 &= a_{12} - a_{21} = 4p_0p_3. \end{aligned} \quad (6.33)$$

6.4. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПАРАМЕТРОВ РОДРИГА – ГАМИЛЬТОНА

Найдем связь скорости изменения параметров Гамильтона в зависимости от угловой скорости разворота тела. След матрицы $S = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 4p_0^2 - 1$ зависит от одного параметра p_0 . Продифференцировав S , получим $\dot{S} = 8p_0\dot{p}_0$. С другой стороны, применив формулы 6.33, найдем

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \dot{a}_{11} + \dot{a}_{22} + \dot{a}_{33} = \omega_x(a_{32} - a_{23}) + \omega_y(a_{13} - a_{31}) + \\ &+ \omega_z(a_{21} - a_{12}) = -4p_0p_1\omega_x - 4p_0p_2\omega_y - 4p_0p_3\omega_z. \end{aligned}$$

Отсюда получим первое уравнение для параметра $\dot{p}_0$:

$$\dot{p}_0 = \frac{1}{2} (-\omega_x p_1 - \omega_y p_2 - \omega_z p_3). \quad (6.34)$$

Вычитая элементы a_{23} и a_{32} , найдем

$$\lambda_1 = a_{23} - a_{32} = 4p_0p_1$$

С другой стороны, применив формулы (6.17),

$$\dot{\lambda}_1 = \dot{a}_{23} - \dot{a}_{32} = \omega_x(a_{33} + a_{22}) + \omega_y(-a_{12}) + \omega_z(-a_{13}).$$

Приравнивая выражения для λ_1 друг другу и подставив значение p_0 формулы (6.34), получим

$$\dot{p}_1 = \frac{1}{2} (\omega_x p_0 + \omega_z p_2 - \omega_y p_3). \quad (6.35)$$

Аналогично находятся уравнения для параметров $\dot{p}_2$ и $\dot{p}_3$.

В результате получаем полную систему кинематических уравнений (6.36) для параметров Родрига – Гамильтона:

$$\begin{aligned} \dot{p}_0 &= \frac{1}{2} [& -\omega_x p_1 & -\omega_y p_2 & -\omega_z p_3]; \\ \dot{p}_1 &= \frac{1}{2} [\omega_x p_0 & & +\omega_z p_2 & -\omega_y p_3]; \\ \dot{p}_2 &= \frac{1}{2} [\omega_y p_0 & -\omega_z p_1 & & +\omega_x p_3]; \\ \dot{p}_3 &= \frac{1}{2} [\omega_z p_0 & +\omega_y p_1 & -\omega_x p_2 &]. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Таким образом, в полете для определения параметров Гамильтона следует непрерывно решать систему четырех линейных дифференциальных уравнений (6.36), коэффициенты которой ω_x , ω_y , ω_z являются переменными функциями времени.

Найдем решение этой системы для стационарного случая, когда вектор ω ($\omega_x \omega_y \omega_z$) постоянен во времени. Тогда ось разворота находится как единичный вектор $\Omega(q_x, q_y, q_z)$, где $q_x = \omega_x / \omega$; $q_y = \omega_y / \omega$; $q_z = \omega_z / \omega$ $\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}$, а угол разворота равен $\varphi = \omega t$. Кватернион этого разворота запишется в виде

$$\begin{aligned} q_0 &= \cos(\omega t/2); \quad q_1 = q_x \sin(\omega t/2); \quad q_2 = q_y \sin(\omega t/2); \\ q_3 &= q_z \sin(\omega t/2). \end{aligned}$$

Система (6.36) становится проще – коэффициенты ее постоянны.

Пусть даны 4 вектора линейно независимых решений для 4-х векторов начальных условий:

- 1) $p_0(0) = 1$; $p_1(0) = 0$; $p_2(0) = 0$; $p_3(0) = 0$;
- 2) $p_0(0) = 0$; $p_1(0) = 1$; $p_2(0) = 0$; $p_3(0) = 0$;
- 3) $p_0(0) = 0$; $p_1(0) = 0$; $p_2(0) = 1$; $p_3(0) = 0$;
- 4) $p_0(0) = 0$; $p_1(0) = 0$; $p_2(0) = 0$; $p_3(0) = 1$.

Найдем решение системы для первого вектора начальных условий. Первый вектор соответствует нулевому углу разворота. Действительно,

$$\begin{aligned} p_0 &= \cos(\theta/2) = 1; \quad p_1 = e_x(\sin \theta/2) = 0; \\ p_2 &= e_y \sin(\theta/2) = 0; \quad p_3 = e_z \sin(\theta/2) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда $\theta = 0$. Затем происходит разворот тела вокруг оси $\bar{\Omega}$ на угол φ . Очевидно, что результирующий кватернион $p_0(t), p_1(t), p_2(t), p_3(t)$ в этом случае будет равен второму кватерниону разворота, так как первый разворот соответствует исходному положению (угол первого разворота равен нулю):

$$\begin{aligned} p_0(t) &= (\cos \varphi/2) = q_0; & p_1(t) &= q_x (\sin \varphi/2) = q_1; \\ p_2(t) &= q_y \sin (\varphi/2) = q_2; & p_3(t) &= q_z \sin (\varphi/2) = q_3. \end{aligned}$$

Это и есть первый вектор фундаментальной системы решений. Найдем частное решение системы (6.36), соответствующее второму вектору начальных условий:

$$\begin{aligned} p_0 &= 0; & p_1 &= 1; & p_2 &= 0; & p_3 &= 0, \text{ или} \\ p_0 &= \cos (\theta/2) = 0; & p_1 &= e_x \sin (\theta/2) = 1; \\ p_2 &= e_y \sin (\theta/2) = 0; & p_3 &= e_z \sin (\theta/2). \end{aligned}$$

Эти параметры кватерниона соответствуют углу $\theta = 180^\circ$, и первоначальному развороту системы вокруг оси X . Следовательно, матрица начальной ориентации имеет вид

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Матрица последующего разворота была определена ранее, см. (6.32). В ней параметры p_0, p_1, p_2, p_3 должны быть заменены на q_0, q_1, q_2, q_3 .

Результирующая матрица определится как произведение матриц $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}_0$:

$$\mathbf{B}\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 2q_0^2 + 2q_1^2 - 1 & -2q_1q_2 - 2q_0q_3 & -2q_1q_3 + 2q_0q_0 \\ 2q_1q_2 - 2q_0q_3 & -2q_0^2 - 2q_2^2 + 1 & -2q_2q_3 - 2q_0q_1 \\ 2q_1q_3 + 2q_0q_2 & -2q_2q_3 + 2q_0q_1 & -2q_0^2 - 2q_3^2 + 1 \end{bmatrix}. \quad (6.37)$$

Сложив диагональные элементы матрицы, найдем зависимость первого элемента результирующего кватерниона ($p_0(t); p_1(t); p_2(t)$) от параметров q_i :

$$S = 4p_0(t)^2 - 1 = 2q_1^2 - 2q_2^2 - 2q_0^2 - 2q_3^2 + 1 = 4q_1^2 - 1.$$

Отсюда найдем, что $p_0(t)^2 = q_1^2$. Если учесть, что начальный угол по вращению θ был 180° , а последующий положительный разворот вокруг оси X должен еще более увеличить угол разворота, то очевидно, что косинус результирующего угла, большего 180° , должен быть числом отрицательным, чтобы не нарушать непрерывность в этой точке.

Итак, $p_0(t) = -q_1$.

Разность элементов a_{23} и a_{32} определит второй параметр результирующего кватерниона

$$4p_0(t)p_1(t) = a_{23} - a_{32} = -4q_0q_1; \quad p_1(t) = q_0.$$

Разность элементов a_{31} и a_{13} , определит третий параметр результирующего кватерниона

$$4p_0(t)p_2(t) = 4q_1q_3; \quad p_2(t) = -q_3.$$

Вычитая из элемента a_{12} элемент a_{21} , получим последний четвертый параметр:

$$4p_0(t)p_3(t) = -4q_1q_2; \quad p_3(t) = q_2.$$

Итак, вектор решений, соответствующий второй строке начальных условий, найден в виде

$$p_0(t) = -q_1; \quad p_1(t) = q_0; \quad p_2(t) = -q_3; \quad p_3(t) = q_2.$$

Подобным же образом найдем вектор решений для третьей строки начальных условий, которые соответствуют начальному развороту системы вокруг оси Y на угол 180° :

$$p_0(t) = -q_2; \quad p_1(t) = q_3; \quad p_2(t) = q_0; \quad p_3(t) = -q_1.$$

Четвертой строке начальных условий $p_0(0) = 0; p_1(0) = 0; p_2(0) = 0; p_3(0) = 1$ соответствует четвертый вектор решений

$$p_0(t) = q_3; \quad p_1(t) = -q_2; \quad p_2(t) = q_1; \quad p_3(t) = q_0.$$

Таким образом, найдена фундаментальная система решений системы линейных уравнений (6.36), которую можно записать в виде матрицы, каждый столбец которой является вектором решений соответственно для первой, второй, третьей и четвертой строк векторы начальных условий:

$$M = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

Найдем значения вектора решений при произвольных начальных условиях $p_0(0) = p_0; p_1(0) = p_1; p_2(0) = p_2; p_3(0) = p_3$.

Этот вектор в связи с тем, что система дифференциальных уравнений (6.36) линейна, найдется как линейная комбинация решений, как произведение матрицы фундаментальных решений на вектор начальных условий:

$$\begin{bmatrix} p_0(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \quad (6.39)$$

формула общего решения системы.

Умножив матрицу на вектор и поменяв порядок слагаемых для последующего анализа, найдем окончательные формулы для результирующего кватерниона:

$$\begin{aligned} p_0(t) &= p_0 q_0 - p_1 q_1 - p_2 q_2 - p_3 q_3; \\ p_1(t) &= p_0 q_1 + p_1 q_0 + p_2 q_3 - p_3 q_2; \\ p_2(t) &= p_0 q_2 + p_2 q_0 - p_1 q_3 + p_3 q_1; \\ p_3(t) &= p_0 q_3 + p_3 q_0 + p_1 q_2 - p_2 q_1. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Обсудим полученные результаты. Был задан начальный разворот тела с кватернионом $p(p_0, p_1, p_2, p_3)$. А потом провели последующий разворот тела с кватернионом $q(q_0, q_1, q_2, q_3)$ и получили формулу кватерниона результирующего поворота. Эти формулы определяют результирующий поворот — вектор и угол разворота после проведения двух последовательных разворотов. Они называются формулами умножения кватернионов. Эти формулы так и остались бы сложными, плохо запоминающимися и малопонятными, если бы не работы английского математика лорда Гамильтона. Читатель наверное уже заметил что в трех последних формулах присутствуют векторное произведение и умножение вектора на число. Действительно, если представить кватернионы в виде суммы скаляра и вектора

$$p = p_0 + p_1 \bar{i} + p_2 \bar{j} + p_3 \bar{k}; \quad (6.41)$$

$$q = q_0 + q_1 \bar{i} + q_2 \bar{j} + q_3 \bar{k}$$

и, приняв за основу правила векторной алгебры

$$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}; \quad \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}; \quad \bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}; \quad \bar{i} \times \bar{i} = 0;$$

$$\bar{j} \times \bar{j} = 0; \quad \bar{k} \times \bar{k} = 0,$$

получим результирующий кватернион r в виде

$$\begin{aligned} r = pq &= p_0 q_0 + \bar{i}(p_0 q_1 + q_0 p_1 + p_2 q_3 - p_3 q_2) + \\ &+ \bar{j}(p_0 q_2 + q_0 p_2 - p_1 q_3 + p_3 q_1) + \bar{k}(p_0 q_3 + q_0 p_3 + \\ &+ p_1 q_2 - p_2 q_1). \end{aligned} \quad (6.42)$$

Векторная часть уравнения полностью совпадает с векторной частью результирующего кватерниона (6.40), а действительная часть, получен-

ная по классическим формулам векторной алгебры не совпадает. Лорд Гамильтон отбросил все догмы векторной алгебры, доопределив умножение векторов нужными формулами:

$$\bar{i} \times \bar{i} = -1; \quad \bar{j} \times \bar{j} = -1; \quad \bar{k} \times \bar{k} = -1, \quad (6.43)$$

где скалярная часть результирующего кватерниона находится по соотношению

$$r_0 = p_0 q_0 - p_1 q_1 - p_2 q_2 - p_3 q_3 \quad (6.44)$$

и полностью совпадает с требуемым результатом.

Еще раз обратим внимание читателя, что результирующий кватернион определяет только один разворот тела, заменяющий сразу два последовательно проведенных разворота. Сделаем два замечания:

1) операция умножения кватернионов некоммутативна, т.е. результат умножения зависит от последовательности сомножителей:

$$pq \neq qp,$$

где p – первый разворот; q – второй разворот.

Это соответствует и физической сущности разворотов тела. Два последовательно проведенных разворота не дают одного и того же конечного положения тела, если изменить их порядок. Аналогичное положение, отражающее этот факт, присутствует и в матричной алгебре. Операция умножения матриц также некоммутативна;

2) если в результате умножения кватернионов получена отрицательная скалярная часть результирующего кватерниона, то результирующий угол поворота θ больше 180° , и поэтому $\cos(\theta/2) < 0$. Но тогда такого же конечного положения тела можно достичь, развернув тело в противоположную сторону на угол, меньший 180° :

$$\theta^* = 360^\circ - \theta.$$

При этом

$$\cos(\theta^*/2) = -\cos(\theta/2); \quad \sin(\theta^*/2) = \sin(\theta/2),$$

а единичный вектор разворота изменил свое направление

$$e_x^* = -e_x; \quad e_y^* = -e_y; \quad e_z^* = e_z.$$

И тогда кватернион

$$p_0^* = -p_0; \quad p_1^* = -p_1; \quad p_2^* = -p_2; \quad p_3^* = -p_3$$

также переведет тело в то же конечное положение. Отсюда ясно, что в кватернионе можно спокойно инвертировать знаки, при этом, конечное положение тела в результате проведения разворота, соответствующего новому значению, кватерниона разворота, не изменится. Подчеркнем еще одну особенность умножения кватернионов. Результирующий ква-

тернион r соответствует умножению кватерниона начального положения тела p на кватернион последующего разворота q (умножение производится справа):

$$r = p \cdot q.$$

В отличие от матричной алгебры, где результирующая матрица после проведения последовательных переходов также формируется как результат произведения матриц, однако каждое последующее преобразование соответствует умножению слева:

$$M_{\Sigma} = M_n \dots M_3 M_2 M_1.$$

6.5. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КВАТЕРНИОНОВ В ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ КА

Рассмотрим такую задачу: в инерциальной системе координат задан кватернион* требуемого положения КА

$$q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3,$$

и измерен также кватернион текущего положения КА относительно той же инерциальной базы

$$p = p_0 + ip_1 + jp_2 + kp_3.$$

Требуется определить кватернион, переводящий КА из текущего положения в требуемое. Этот перевод можно осуществить двумя поворотами.

1. Поворот КА из текущего положения к инерциальной системе координат. Кватернион этого разворота p можно определить по формуле

$$p = p_0 - ip_1 - jp_2 - kp_3.$$

Действительно, если текущее положение КА получено разворотом инерциальной системы координат вокруг какой-либо оси на угол θ , то, чтобы совершить обратный разворот (перейти из текущего положения в исходное), следует развернуть тело вокруг той же оси, но на угол θ противоположного знака. Это значит, что знак векторной составляющей кватерниона изменится на обратный, а скалярная часть $\cos(\theta/2)$ останется без изменений. Такой кватернион называется сопряженным по отношению к кватерниону p и обозначается аналогично операции транспонирования матриц волной над символом кватерниона $\tilde{p}$.

Может возникнуть вопрос: как же так? Ведь кватернион записан в одной системе координат (в инерциальной с осями $\bar{i}_0, \bar{j}_0, \bar{k}_0$), а здесь требуется обратный переход из связанной системы координат с осями

*Как конечный поворот относительно положения, совпадающего с исходной системой координат.

$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ к инерциальной и кватернион, следовательно, должен быть записан именно в этой системе. Здесь автор произвольно меняет знаки, не задумываясь над вопросом о разных системах отсчета. Дело в том, что кватернион и инерциальной и в связанной системах координат записывается одинаково. Действительно, оси связанной системы координат $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ образуются разворотом осей $\bar{i}_0, \bar{j}_0, \bar{k}_0$ вокруг оси $\Omega(e_x, e_y, e_z)$. Каждая из осей описывает конус вокруг Ω , находясь на образующей конуса. И угол между образующей конуса и осью конуса остается при развороте неизменным. Следовательно, и направляющие косинусы оси разворота — косинусы углов, образуемых осью разворота Ω с осями $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ — остаются неизменными в исходном положении системы. Умножение вектора Ω на $\sin(\theta/2)$ и введение скалярной части $\cos(\theta/2)$ не меняет этого вывода. Поэтому кватернион в новой, связанной системе координат, имеет те же составляющие, что и в инерциальной, т.е. по значению не меняется при переходе из одной системы в другую.

2. Поворот КА из инерциальной системы координат в требуемое положение. Тогда результирующий кватернион разворота r найдем как произведение кватернионов

$$r = \tilde{p} \cdot q.$$

Кватернионы при управлении угловым движением удобны тем, что векторная часть кватерниона, характеризующая ось и угол разворота, позволяет непосредственно формировать параметры, связанные с управляющими двигателями КА. Когда двигатели создают требуемую угловую скорость, направленную вдоль векторной части кватерниона, тогда одним разворотом вокруг этой оси КА сможет переместиться из текущего положения в требуемое, совершив разворот по кратчайшему пути. Здесь видна и возможность сокращения энергетических затрат, КА, так как в случае нескольких последовательных разворотов необходимы разгон и торможение КА при выполнении каждого отдельного поворота.

Теперь рассмотрим вопрос о вычислении на борту кватерниона текущего положения КА. Заметим, что вся точность определения ориентации аппарата возложена на бортовой вычислитель. При работе двигателя, как правило, возникают сильные высокочастотные вибрационные колебания корпуса КА, которые, чтобы выдержать требуемые условия по точности и не потерять инерциальную базу, необходимо учитывать в кинематических уравнениях кватернионов. Для этого частота опроса ДУСов и сама динамика следящего контура в датчиках должны на порядок быть выше, чем частота возмущений. Эти технические трудности заставили разработчиков пойти по иному пути: использовать для платформенных систем одноосные гиростабилизаторы. Схема и принцип работы одноосного гиростабилизатора рассмотрены в разд. 1.3. Здесь же напомним читателю, что информация, получаемая с одноосного гиростабилизатора, это интеграл от угловой скорости КА вокруг оси чувствительности стабилизатора. Какие преимущества имеет одноосный

гиростабилизатор по сравнению с датчиком угловых скоростей. Именно те, что он гасит вибрационные воздействия, выдавая пользователю суммарный накопленный угол поворота

$$\varphi = \int_0^t \omega dt.$$

Поэтому при использовании одноосных гиростабилизаторов требования к быстродействию становятся существенно слабее. Рассмотрим как получаются параметры кватерниона при использовании одноосных гиростабилизаторов. Для определения трех углов конечного поворота необходимы три одноосных стабилизатора, оси чувствительности которых ориентированы по осям КА. Если за время dt измерено приращение углов по каждому из гиростабилизаторов

$$\Delta\varphi = \int_0^{t+\Delta t} \omega_x dt; \quad \Delta\psi = \int_t^{t+\Delta t} \omega_y dt; \quad \Delta\vartheta = \int_t^{t+\Delta t} \omega_z dt, \quad (6.45)$$

то, считая угловую скорость на этом интервале постоянной, найдем кватернион одного элементарного поворота

$$\begin{aligned} q_0 &= q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3; & q_2 &= \Delta\psi/\Delta\theta \sin(\Delta\theta/2); \\ q_0 &= \cos(\Delta\theta/2); & q_3 &= \Delta\vartheta/\Delta\theta \sin(\Delta\theta/2); \\ q_1 &= \Delta\varphi/\Delta\theta = \sin(\Delta\theta/2); & \Delta\theta &= \sqrt{\Delta\varphi^2 + \Delta\psi^2 + \Delta\vartheta^2}. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Новый кватернион определяется как произведение кватерниона положения КА до осуществления разворота на кватернион записанного выше элементарного поворота:

$$p(t + \Delta t) = p(t) \cdot q.$$

Часто формулы элементарного поворота упрощают, оставляя лишь члены первого порядка малости:

$$q_0 = 1; \quad q_1 = \Delta\varphi/2; \quad q_2 = \Delta\psi/2; \quad q_3 = \Delta\vartheta/2, \quad (6.47)$$

но при этом повышают частоту опроса в системе, т.е. уменьшают интервал наблюдения Δt .

Конечно, мощный аппарат кватернионов при управлении угловым движением следует использовать также и при наличии ГСП. Например, для трехосного гиростабилизатора при углах тангажа ϑ , рыскания ψ , вращения φ , снимаемых с датчиков углов рамок, результирующий кватернион текущего положения аппарата r определится произведением трех кватернионов $r_\vartheta, r_\psi, r_\varphi$:

$$r = p_\vartheta p_\psi p_\varphi,$$

где

$$\begin{aligned} p_{\vartheta} &= \cos \frac{\vartheta}{2} + \bar{i} \cdot 0 + \bar{j} \cdot 0 + \bar{k} \sin \frac{\vartheta}{2} ; \\ p_{\psi} &= \cos \frac{\psi}{2} + \bar{i} \cdot 0 + \bar{j} \cdot \sin \frac{\psi}{2} + \bar{k} \cdot 0 ; \\ p_{\varphi} &= \cos \frac{\varphi}{2} + \bar{i} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} + \bar{j} \cdot 0 + \bar{k} \cdot 0 . \end{aligned} \quad (6.48)$$

Результат умножения кватернионов

$$\begin{aligned} p_0 &= \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} ; \\ p_1 &= i \left[\cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \right] ; \\ p_2 &= j \left[\cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \right] ; \\ p_3 &= k \left[-\cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \right] . \end{aligned} \quad (6.49)$$

определяет, как и ранее, ось результирующего поворота и угол, на который должна быть развернута инерциальная система для совмещения ее с текущим положением связанной системы координат КА.

Далее, если задано требуемое положение КА в угловых параметрах, ϑ^* , ψ^* , φ^* , то кватернион требуемого положения также находится произведением

$$q = p_{\vartheta^*} * p_{\psi^*} * p_{\varphi^*} .$$

А кватернион необходимого разворота λ (разворота КА из текущего положения в требуемое) определится как произведение кватернионов

$$\lambda = \tilde{r} \cdot q .$$

6.6. СРАВНЕНИЕ БЕСПЛАТФОРМЕННОЙ СИСТЕМЫ С ИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ, ПОСТРОЕННОЙ НА ОСНОВЕ ГСП

На пассивных участках полета, в невесомости, где внешние возмущения, действующие на КА, малы обе системы (инерциальная и построенная на основе ГСП) обеспечивают требуемые точности ориентации. Но по маневренным возможностям бесплатформенные системы имеют некоторые преимущества. Применение их позволяет реализовать произ-

вольные угловые маневры в пространстве, тогда как в системе ориентации, построенной на основе трехстепенной ГСП, присутствуют конструктивные ограничения углов поворота рамок. Реализация большого маневра, выходящего за допустимые значения углов поворота рамок ГСП организуется двумя этапами: первый – поворотом самой ГСП вместе с чувствительными элементами в требуемое положение и второй – постоянное слежение корпуса КА за текущим положением ГСП.

Требования к быстродействию вычислителя для БИНС при работе его на орбитальном участке полета невысоки (частота счета 50 – 100 Гц), так как собственные частоты изгибных колебаний корпуса КА низкие, а вибрации вообще отсутствуют. Малы и угловые скорости КА. Поэтому от измерителей скорости требуется высокая точность только в нулевой точке. При работе с ГСП угловое положение КА вычисляется непосредственно по показаниям датчиков углов. Здесь нет необходимости в каком-либо специальном быстродействующем интегрировании – углы образуются на рамках карданного подвеса аппаратно за счет работы системы силовой стабилизации платформы (системы разгрузки).

Но все преимущества БИНС теряются как только начинается активный участок полета, как только включается в работу двигатель, так как чувствительные элементы БИНС поставлены в более неблагоприятные условия, чем чувствительные элементы ГСП. Специальный подвес, амортизаторы, снимающие влияние виброперегрузок и ударных воздействий, разгрузочная система силовой стабилизации ГСП – все это обеспечивает благоприятные условия для работы ее чувствительных элементов. Кроме того, на ГСП можно заранее подготовиться к активному маневру и сориентировать оси подвесов гироблоков тангажа и рыскания, наиболее сильно влияющих на точность реализации активного маневра, в направлении действия перегрузки, в направлении импульса скорости. Любые угловые колебания КА, если только они не выходят за диапазон углов поворота ГСП, и большие угловые скорости не являются критичными при ее использовании.

Чувствительные же элементы БИНС крепятся прямо на корпусе КА и подвержены влиянию свех внешних возмущений – вибрациям, изгибным и крутильным колебаниям корпуса, ударным воздействиям, частоты воздействий при работе двигателя высокие. И все это необходимо учитывать при интегрировании кинематических уравнений. Поэтому здесь необходим вычислитель с высоким быстродействием (частота интегрирования 500 ... 1000 Гц), кроме того, одноизмеритель угловой скорости должен обеспечивать точность измерения и при больших значениях скоростей, возникающих на активном участке. Поэтому ожидать высокой точности ориентации при использовании БИНС на активных участках не приходится.

6.7. ИЗМЕРЕНИЕ УСКОРЕНИЙ

При отсутствии на КА ГСП акселерометры жестко крепятся к корпусу КА, а оси чувствительности их ориентируются параллельно связанным осям аппарата X, Y, Z . Поэтому акселерометры измеряют кажущееся ускорение в связанных осях. Для ведения навигации необходимо знать вектор кажущейся скорости, возникающей при работе двигателя и создающей воздействия аэродинамических сил на КА. Вектор кажущейся скорости должен быть вычислен в инерциальной системе отсчета X_0, Y_0, Z_0 , в которой решается навигационная задача. Поэтому вектор кажущегося ускорения, измеренный в связанных осях координат $\dot{\tilde{W}}(\dot{\tilde{W}}_x, \dot{\tilde{W}}_y, \dot{\tilde{W}}_z)$ нужно перевести в инерциальную систему отсчета с помощью матрицы A_Σ (6.32). Однако (6.32) матрица перехода от инерциальной системы координат к связанной. Здесь же необходим обратный переход. Поэтому $\dot{\tilde{W}}_0$ находится по соотношению

$$\dot{\tilde{W}}_0 = \tilde{A}_\Sigma \dot{\tilde{W}}, \quad (6.50)$$

где A_Σ – транспонированная матрица, и последующим интегрированием вектора $\dot{\tilde{W}}_0$.

6.8. АСТРОКОРРЕКЦИЯ БИНС

Пусть в результате проведения астрокоррекции (см. разд. 4.6) было определено, что фактическое положение инерциальной системы смещено по отношению к расчетному положению на углы $\delta_\varphi, \delta_\psi, \delta_\vartheta$. Возникает вопрос как учесть выявленную погрешность ориентации? Как изменить кватернион текущей ориентации КА с учетом этой погрешности? Представим ошибку ориентации инерциальной системы как кватернион малого разворота идеальной расчетной системы λ :

$$\lambda_0 = 1; \quad \lambda_1 = \Delta\varphi/2; \quad \lambda_2 = \Delta\psi/2; \quad \lambda_3 = \Delta\vartheta/2.$$

И тогда кватернион текущего положения тела P нужно скорректировать простым умножением его на кватернион погрешности ориентации λ :

$$p_k = \lambda \cdot p,$$

где p – кватернион положения тела до коррекции; λ – кватернион погрешности ориентации; p_k – скорректированный кватернион текущего положения тела.

Действительно, кватернион соответствует развороту расчетной идеальной инерциальной системы в положение, соответствующее фактическому ее положению. А последующий кватернион λ реализует разворот фактической инерциальной системы в текущее положение КА. Результа-

рующий кватернион определяет разворот от идеальной системы координат к текущему угловому положению КА.

Значение откорректированного кватерниона p_k будет учитываться в дальнейшем решении кинематических уравнений (6.36) в виде изменения начальных условий системы на момент астрокоррекции. Откорректировать же вектор кажущейся скорости по найденному кватерниону погрешности не представляется возможным, так как для коррекции вектора кажущейся скорости нужно знать сам процесс накопления погрешности во времени и сам процесс увеличения кажущейся скорости. Нам же известен лишь один момент системы – погрешность выставки инерциальной системы на момент астрокоррекции. Только проведение многократных астрокоррекций, с помощью которых может быть выявлен и процесс изменения погрешности, позволит скорректировать вектор кажущейся скорости.

В заключении раздела автор должен извиниться перед читателем за нестрогость в терминологии. Кватернион – это более общее название гиперкомплексных чисел, длина которых произвольна, а не равна 1, как в нашем случае:

$$p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1.$$

Отнормированные же четыре числа, о которых рассказывалось в этой главе, носят название параметров Родрига – Гамильтона.

ГЛАВА 7.

ОРИЕНТАЦИЯ КА, СОВЕРШАЮЩЕГО ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ МАНЕВР

7.1. ПРИНЦИП РАБОТЫ ЧЕТЫРЕХОСНОГО ГИРОСТАБИЛИЗАТОРА

Бесплатформенные инерциальные системы могут удачно использоваться в орбитальном полете КА, кроме того, у них небольшие потребления энергии и масса, но они становятся несостоятельными на активном участке полета, требующем измерений больших угловых скоростей. В настоящее время уже применяются ГСП, позволяющие обеспечить любую ориентацию КА без потерь инерциальной базы отсчета. Это достигается введением одной, а иногда и двух дополнительных рамок в карданном подвесе платформы и управлением положением рамок таким образом, чтобы исключить складывание внутренней и промежуточной рамок. В этой главе мы рассмотрим управление движением КА при работе ГСП с одной дополнительной внешней рамкой. Для управления движением внешней рамки на корпусе прибора устанавливается двигатель, осуществляющий разворот внешней рамки. ГСП такого

типа обычно называют четырехосным гиросtabilизатором. Применение четырехосных гиросtabilизаторов позволяет КА проводить произвольные угловые маневры без потери ориентации, использовать ГСП на участках, где применение ее прежде считалось невозможным (на участках, где КА подвергается воздействию огромных возмущений, например, на участке ввода парашютной системы, участке разделения и т.п.). Очевидны преимущества систем управления с использованием таких ГСП. Здесь может быть достигнута большая гибкость, автономность и надежность управления, причем сравнительно недорого. Но введение четырехосного стабилизатора требует нового подхода к бортовому вычислителю. Ведь, получив информацию с четырех датчиков углов ГСП, нужно обработать ее, понять каким образом необходимо ориентировать аппарат и выработать команды управления им. В случае применения трехстепенной ГСП это задача сравнительно простая – сигналы, соответствующие углам поворота каждой из рамок, просто передаются в соответствующие каналы управления. В случае же четырехосного гиросtabilизатора бортовые алгоритмы преобразования сигналов, соответствующих четырем углам поворота рамок в команды управления, на порядок сложнее и могут быть выполнены только на достаточно мощной БЦВМ. В настоящее время значительно усложнились задачи, решаемые в полете, ужесточились требования к точности управления и маневрам КА. Системы управления становятся более автономными и гибкими. Значительно возросли и мощности БЦВМ. Появилась возможность создания системы ориентации, допускающей произвольные угловые маневры КА.

На рис. 7.1, а показан четырехосный гиросtabilизатор в исходном положении, когда показания всех четырех датчиков углов равны нулю. Здесь три рамки: внутренняя, промежуточная и внешняя дополнительная. Угол поворота внутренней рамки относительно ГСП неограничен (круговая прокачка). Угол поворота промежуточной рамки относительно внутренней ограничен конструктивно ($\approx 45^\circ$). Угол поворота внешней дополнительной рамки относительно промежуточной неограничен. Разворот КА относительно внешней рамки также не имеет ограничений.

На корпусе КА установлен двигатель, работа которого обеспечивает создание управляющего момента для поворота внешней дополнительной рамки карданного подвеса. Система стабилизации ГСП продолжает работать по-прежнему: сигналы с датчиков прецессии гироскопов преобразуются, усиливаются и поступают на разгрузочные двигатели ГСП, установленные по осям тангажа, рыскания и вращения.

Системой стабилизации ГСП движение дополнительной рамки воспринимается как движение самого КА. И, задавая тот или иной разворот рамки, мы можем создать результирующий разворот (КА + рамка) такой, который легко воспринимается карданным подвесом.

В исходном положении, или близком к нему, нет необходимости и в управлении дополнительной рамкой. Здесь КА свободно вращается во-

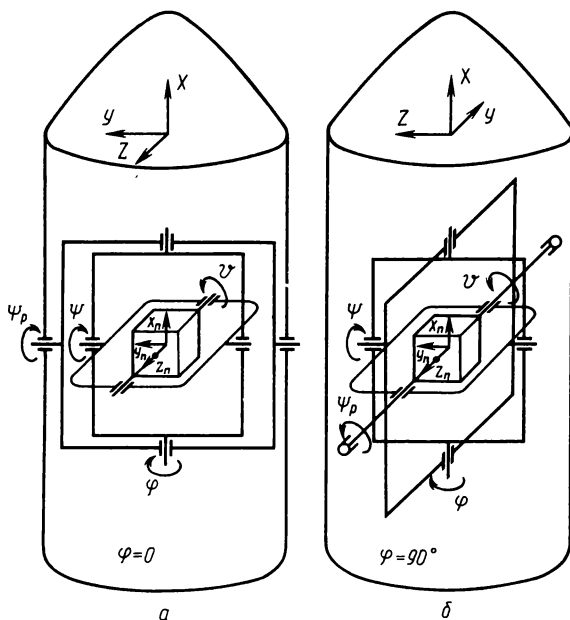


Рис. 7.1

круг оси рыскания, а с оси внешней рамки подается сигнал накапливаемого угла. При этом ортогональность внутренней и промежуточной рамок не нарушается.

Но рассмотрим другое положение аппарата (см. рис. 7.1, б), когда он повернут относительно исходного положения на угол 90° . В этом положении ось дополнительной рамки стала параллельна оси тангажа, любой разворот КА по рысканию, превышающий угол прокачки, приведет к складыванию внутренней и промежуточной рамок (к набеганию на упор). В этот момент дополнительная рамка ГСП быстро разворачивает внешнюю рамку примерно на 90° и вместо оси рыскания аппарат будет разворачиваться вокруг оси вращения. При этом, пока аппарат, достаточно инерционное тело, разворачивается на угол, превышающий угол прокачки ($\approx 45^\circ$), внешняя рамка должна успеть развернуться на угол порядка 90° . Поэтому система управления дополнительной рамкой должна обеспечить скорость разворота рамки раза в два – три превышающую возможные угловые скорости КА. Зная инерционные характеристики ГСП и рамок, можно подобрать двигатель с характеристиками, обеспечивающими требуемую динамику процесса слежения.

Отметим, что система управления рамкой может быть достаточно грубой. Наиболее целесообразно сделать здесь простую следящую систему, использующую угол неортогональности рамок (угол рыскания) в качестве управляющего сигнала в контуре слежения.

Для исключения требований по быстродействию следящего контура внешней рамки в некоторых ГСП вводятся две дополнительные рамки. В этом случае либо одна, либо другая рамка независимо от условий ориентации КА всегда лублируют друг друга. Тогда требования к высоким динамическим характеристикам следящего контура отпадают.

7.2. УГЛЫ РАЗВОРОТА РАМОК ЧЕТЫРЕХОСНОГО ГИРОСТАБИЛИЗАТОРА

Определим связь двух систем координат — инерциальной (положение ГС) и системы координат, связанной с корпусом КА. КА занимает произвольное положение в пространстве, при этом показания датчиков углов ГС равны ϑ , ψ , φ , ψ_p . Это положение может быть достигнуто путем проведения четырех последовательных разворотов аппарата:

- 1) вокруг внутренней оси карданного подвеса — оси тангажа ϑ ;
- 2) вокруг оси подвеса промежуточной рамки — ось рыскания ψ ;
- 3) вокруг оси подвеса внешней рамки — ось вращения φ .
- 4) вокруг оси подвеса внешней рамки ψ_p .

Именно такая последовательность разворотов — от внутренних осей ГС к внешним обеспечивает неизменность углов предыдущих поворотов рамок при проведении последующих.

Действительно, первый разворот аппарата ϑ вокруг внутренней оси ГС осуществляет разворот всего карданного подвеса (внутренней, промежуточной и внешней рамок) как твердого тела, оставляя ортогональными плоскости рамок друг другу. Второй разворот ψ происходит вокруг оси промежуточной рамки карданного подвеса, вокруг оси Y внутренней рамки. Сама внутренняя рамка при развороте КА по рысканию не поворачивается, и поэтому угол ϑ между платформой и внутренней рамкой при проведении второго разворота остается неизменным. Промежуточная, внешняя рамки и корпус КА при этом одновременно разворачиваются как твердое тело, сохраняя ортогональность осей последующих разворотов — оси вращения и оси подвеса внешней рамки. Третий разворот по углу φ происходит вокруг оси промежуточной рамки карданного подвеса, поэтому внутренняя и промежуточная рамки остаются неподвижными (углы ϑ и ψ не меняются), а разворачиваются внешняя рамка и корпус КА. Последний разворот ψ_p происходит вокруг оси подвеса внешней рамки — аппарат просто обкатывается вокруг оси подвеса внешней рамки, не влияя на положение всех уже развернутых рамок ГС. Матрица направляющих косинусов первого разворота имеет вид

$$A_{\vartheta} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.1)$$

Матрица направляющих косинусов второго разворота запишется в виде

$$A_{\psi} = \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

Матрица направляющих косинусов третьего разворота

$$A_{\varphi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad (7.3)$$

Матрица направляющих косинусов четвертого разворота – разворота дополнительной рамки

$$A_{\psi_p} = \begin{bmatrix} \cos \psi_p & 0 & -\sin \psi_p \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi_p & 0 & \cos \psi_p \end{bmatrix}. \quad (7.4)$$

Результирующая матрица направляющих косинусов, после проведения всех четырех разворотов определяется умножением всех матриц последовательных разворотов друг на друга

$$A_{\Sigma} = A_{\psi_p} A_{\varphi} A_{\psi} A_{\vartheta}. \quad (7.5)$$

Матрица определяет переход от системы координат ГС к связанной системе координат КА. Элементы этой матрицы a_{ij} имеют вид

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \vartheta \cos \psi \cos \psi_p - (\sin \vartheta \sin \varphi + \cos \vartheta \sin \psi \cos \varphi) \sin \psi_p; \\ a_{12} &= \sin \vartheta \cos \psi \cos \psi_p - (-\cos \vartheta \sin \varphi + \sin \vartheta \sin \psi \cos \varphi) \sin \psi_p; \\ a_{13} &= -\sin \psi \cos \psi_p - \cos \psi \cos \varphi \sin \psi_p; \\ a_{21} &= -\sin \vartheta \cos \varphi + \cos \vartheta \sin \psi \sin \varphi; \\ a_{22} &= \cos \vartheta \cos \varphi + \sin \vartheta \sin \psi \sin \varphi; \\ a_{23} &= \cos \psi \sin \varphi; \\ a_{31} &= \cos \vartheta \cos \psi \sin \psi_p + (\sin \vartheta \sin \varphi + \cos \vartheta \sin \psi \cos \varphi) \cos \psi_p; \\ a_{32} &= \cos \psi \sin \vartheta \sin \psi_p + (-\cos \vartheta \sin \varphi + \sin \vartheta \sin \psi \cos \varphi) \cos \psi_p; \\ a_{33} &= -\sin \psi \sin \psi_p + \cos \psi \cos \varphi \cos \psi_p. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Введение третьей рамки обеспечивает дополнительную степень свободы системы, т.е. угловое положение КА относительно ГС может быть получено при различных комбинациях положений рамок. При дополнительной степени свободы можно найти такое положение внешней рамки,

при котором сохраняется ортогональность внутренней и промежуточной, т.е. необходимо, чтобы угол $\psi = 0$. Определим необходимые углы разворотов рамок для приходов в это положение. Пусть угловое положение КА характеризуется начальными углами ориентации рамок $\vartheta_0, \psi_0, \varphi_0, \psi_{p0}$. При развороте внешней рамки, так как движение самого КА и ГС отсутствуют, направляющие косинусы в матрице A_Σ должны остаться неизменными при любом угле разворота внешней рамки. Определим показания датчиков углов, когда в результате разворота внешней рамки достигнута ортогональность рамок ($\psi = 0$). Конечные значения углов рамок обозначим через $\vartheta_k, \psi_k, \varphi_k, \psi_k$:

$$a_{23} = \cos \psi_0 \sin \varphi_0 = \sin \varphi_k. \quad (7.7)$$

Из (7.7) следует, что к моменту достижения нулевого значения по углу рыскания ($\psi_k = 0$), угол вращения изменится от φ_0 до φ_k , причем синус конечного значения угла ψ_k по модулю будет меньше начального.

Приведение к ортогональному положению внутренней и промежуточной рамок одновременно приводит к развороту таким образом, чтобы положения промежуточной и дополнительной рамок тоже становились близкими к ортогональному. Это положение ($\varphi = 0$ или $\varphi = 180^\circ$) устойчивое для следящей системы внешней рамки. Рассмотрим два крайних положения:

начальный угол $\varphi_0 = 0$; начальный угол $\varphi_0 = \pi/2$.

В первом случае угол вращения остается неизменным, так как

$$\sin \varphi_k = \sin \varphi_0 \cos \psi_0 = 0.$$

Во втором случае внешняя рамка развернется относительно промежуточной (по вращению) на такую же величину, что и промежуточная при приходе ее в ноль. Промежуточная рамка развернется от ψ_0 до 0, а внешняя — от $\varphi_0 = \pi/2$ до $\varphi_0 = (\pi/2) - \psi_0$. Это следует из соотношения $\sin \varphi_k = \cos \psi_0 = \sin (\pi/2 - \psi_0)$. Начальный угол неортогональности внешней и промежуточной рамок $\varphi_0 = \pi/2$ уменьшится до $\varphi_0 = (\pi/2) - \psi_0$. Для определения угла разворота внутренней рамки относительно ГС $\Delta \vartheta = \vartheta_k - \vartheta_0$ воспользуемся направляющими косинусами a_{21} и a_{22} :

$$a_{21} = -\sin \vartheta \cos \varphi_0 + \cos \vartheta_0 \sin \psi_0 \sin \varphi_0 = -\sin \vartheta_k \cos \varphi_k;$$

$$a_{22} = \cos \vartheta_0 \cos \varphi_0 + \sin \vartheta_0 \sin \psi_0 \sin \varphi_0 = \cos \vartheta_k \cos \varphi_k.$$

Умножив первое уравнение на $-\sin \vartheta_0$, а второе — на $\cos \vartheta_0$ и сложив уравнения, получим

$$\cos \varphi_0 = \cos \varphi_k \cos (\vartheta_k - \vartheta_0), \quad (7.8)$$

Откуда $\cos \Delta \vartheta = \cos \varphi_0 / \cos \varphi_k$.

Так как углы φ_0 и φ_k остаются в той же четверти, то $\cos \Delta\vartheta > 0$, и угол разворота внутренней рамки

$$\Delta\vartheta \leq \pi/2.$$

Теперь, умножив первое уравнение на $\cos \vartheta_0$, а второе на $\sin \vartheta_0$ и сложив их, получим

$$\sin \psi_0 \sin \varphi_0 = -\cos \varphi_k \sin (\vartheta_k - \vartheta_0),$$

откуда

$$\sin \Delta\vartheta = -(\sin \psi_0 \sin \varphi_0) / \cos \varphi_k. \quad (7.9)$$

Поделив $\sin \Delta\vartheta$ на $\cos \Delta\vartheta$, получим уравнение разворота внутренней рамки

$$\operatorname{tg} \Delta\vartheta = -\sin \psi_0 \operatorname{tg} \varphi_0. \quad (7.10)$$

Рассмотрим два крайних случая: $\varphi_0 = 0$ и $\varphi_0 = \pi/2$. В первом случае очевидно, что разворот внутренней рамки отсутствует. Во втором — внутренняя рамка для обеспечения ортогональности промежуточной и внутренней рамок развернется на 90° . Знак разворота противоположен знаку начального угла ψ_0 . Для определения требуемого разворота внешней рамки $\Delta\psi_p = \psi_{pk} - \psi_{p0}$ воспользуемся направляющими косинусами a_{13} и a_{33} :

$$a_{13} = -\sin \psi_0 \cos \psi_p^\circ - \cos \psi_0 \cos \varphi_0 \sin \psi_p^\circ = -\cos \varphi_k \sin \psi_p^k;$$

$$a_{33} = -\sin \psi_0 \sin \psi_p^\circ + \cos \psi_0 \cos \varphi_0 \cos \psi_p^\circ = -\cos \varphi_k \cos \psi_p^k.$$

Умножив первое уравнение на $-\sin \psi_p^\circ$, а второе на $\cos \psi_p^\circ$ и сложив их, получим

$$\cos \psi_0 \cos \varphi_0 = \cos \varphi_k \cos \Delta\psi_p; \quad (7.11)$$

$$\cos \Delta\psi_p = \cos \psi_0 \cos \varphi_0 / \cos \varphi_k.$$

Так как $\cos \varphi_0 / \cos \varphi_k > 0$, то и $\cos \Delta\psi_p \geq 0$. Поэтому требуемый угол разворота внешней рамки всегда меньше или равен 90° . Умножив первое уравнение (7.11) на $-\cos \psi_p^\circ$, а второе — на $-\sin \psi_p^\circ$ и сложив их, получим

$$\sin \psi_0 = \cos \varphi_k \sin \Delta\psi_p; \quad (7.12)$$

$$\sin \psi_p = \sin \psi_0 / \cos \varphi_k.$$

Поделив $\sin \Delta\psi_p$ на $\cos \Delta\psi_p$, получим

$$\operatorname{tg} \Delta\psi_p = \frac{1}{\cos \varphi_0} \operatorname{tg} \psi_0. \quad (7.13)$$

Рассмотрим снова два крайних случая: $\varphi_0 = 0$ и $\varphi_0 = \pi/2$.

В первом случае необходим доворот внешней рамки для того, чтобы угол рыскания был равен нулю. Это соответствует просто свободно-

му вращению КА вокруг оси внешней рамки, дублирующей в этом случае ось рыскания, и не требует никакого управления рамкой.

Во втором случае необходим разворот внешней рамки для того, чтобы угол рыскания был равен 90° . Это соответствует тому случаю, когда ось рыскания дублирует осью вращения, для чего необходим большой поворот дополнительной рамки. Это положение рамок $\varphi_0 = \pi/2$ самое неблагоприятное для работы следящей системы. Видно, что коэффициент усиления контура $\Delta\dot{\psi}_p / \psi_0$ должен возрастать. Таким образом, требуемый угол поворота внешней рамки карданного подвеса для обнуления угла на промежуточной рамке находится из простого соотношения $\operatorname{tg} \Delta\psi_p = \operatorname{tg} \psi_0 (1/\cos \varphi_0)$. Направление вращения внешней рамки для уменьшения угла неортогональности находится как произведение знаков множителей:

$$\operatorname{sign} \Delta\dot{\psi}_p = \operatorname{sign} \psi_0 \cdot \operatorname{sign} \cos \varphi_0.$$

Таким образом, если создать следящую систему, которая управляет скоростью разворота внешней рамки, то в качестве управляющего параметра целесообразно использовать угол неортогональности и формировать скорость разворота внешней рамки линейной функцией от угла неортогональности рамок

$$\dot{\psi}_0 \Delta\psi_p = k \psi_0 \operatorname{sign} \cos \varphi_0,$$

где k — коэффициент добротности следящей системы.

7.3. УПРАВЛЕНИЕ ОРИЕНТАЦИЕЙ КА ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ЧЕТЫРЕХОСНОГО ГИРОСТАБИЛИЗАТОРА

По информации, снимаемой с датчиков углов, найдем кватернион текущего положения КА:

$$p \doteq p_\vartheta \cdot p_\psi \cdot p_\varphi \cdot p_{\psi p}, \text{ где}$$

$$\begin{aligned} p_\vartheta &= \cos \frac{\vartheta}{2} + \bar{k} \sin \left(\frac{\vartheta}{2} \right); & p_\psi &= \cos \frac{\psi}{2} + \bar{j} \sin \left(\frac{\psi}{2} \right); \\ p_\varphi &= \cos \frac{\varphi}{2} + \bar{i} \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right); & p_{\psi p} &= \cos \frac{\psi_p}{2} + \bar{j} \sin \left(\frac{\psi_p}{2} \right). \end{aligned}$$

Пусть нам известен также кватернион требуемого положения КА $q = q_0 + \bar{i}q_1 + \bar{j}q_2 + \bar{k}q_3$. Тогда кватернион разворота КА из текущего в требуемое положение r находится умножением кватернионов

$$r = \tilde{p} \cdot q.$$

Этот кватернион записан в связанных осях КА и составляющие его векторной части могут использоваться в качестве управляющих сигналов в системе стабилизации КА. Напомним еще раз одну вычислительную

тонкость: если в результате умножения кватернионов получена отрицательная скалярная часть результирующего кватерниона $r_0 < 0$, то следует инвертировать знаки и у скалярной и у векторной части результата. Только после этого следует использовать векторную часть кватерниона в управлении (см. разд. 6.5). Это действие обеспечит разворот КА из текущего в требуемое положение. При этом угол разворота всегда будет меньше 180° .

ГЛАВА 8.

ПОГРЕШНОСТИ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ НАВИГАЦИИ

8.1. ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ КАЖУЩЕГОСЯ УСКОРЕНИЯ ОТ ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ АКСЕЛЕРОМЕТРОВ

Как показано в разд. 2.2, координаты и составляющие скорости движения аппарата полностью определяются составляющими кажущегося ускорения. Составляющие кажущегося ускорения непосредственно измеряются акселерометрами ГСП и могут регулироваться системой управления в соответствии с реализуемым законом управления.

При точном выдерживании по времени расчетных составляющих кажущегося ускорения обеспечивается номинальная траектория выведения КА. Таким образом, погрешности выведения обуславливаются ошибками реализации кажущегося ускорения. В свою очередь, ошибки реализации кажущегося ускорения зависят в основном от двух причин:

- 1) от динамических ошибок регулирования кажущегося ускорения по величине и направлению;
- 2) от погрешности измерения проекций кажущегося ускорения инерциальной системой.

Опыт показывает, что влияние динамических ошибок на общую точность выведения невелико и ими при анализе точности выведения КА на орбиту ИСЗ можно пренебречь, учитывая только погрешности системы навигации.

При оценке точности работы инерциальной системы навигации обычно учитывается три вида ошибок:

- 1) собственные ошибки измерения кажущегося ускорения акселерометрами;
- 2) ошибки ориентации акселерометров;
- 3) ошибки ориентации ГСП.

Каждая из упомянутых ошибок приводит к погрешности измерений тех или иных составляющих кажущегося ускорения, что, в свою очередь, вызывает отклонение вычисляемых значений координат и составляющих скорости КА от их истинных значений. Ниже рассматривается влияние погрешностей приборов инерциальной системы на ошибки реализации

кажущегося ускорения и приводится методика оценки разбросов координат и составляющих скоростей в конце выведения на орбиту, а также разбросов параметров орбиты. Предполагается, что в качестве инерциальной системы используется ГСП с расположенными на ней ортогонально тремя акселерометрами. Схема взаимного расположения на платформе гироскопов и акселерометров приведена на рис. 1.4.

Предполагается также, что предстартовое приведение ГСП осуществляется таким образом, чтобы совмещались оси чувствительности акселерометров с осями стартовой системы координат.

Статическая характеристика акселерометра [18]

$$U = f(\dot{W}),$$

где U – выходной сигнал; $\dot{W}$ – измеряемое ускорение, может изменяться во времени из-за нестабильности температурных условий и из-за старения упругих элементов. Кроме того, наличие трения в подшипниках и скользящих парах обуславливает область нечувствительности (петлю гистерезиса), вследствие чего имеет место неоднозначность измерения при увеличении и уменьшении ускорения, а также потеря малых значений ускорений (порог чувствительности). Практически все возмущающие факторы обычно сводятся к смещению нуля $\Delta \dot{W}_0$ и изменению наклона статической характеристики прибора ΔK .

Погрешность измерения ускорения из-за указанных ошибок можно записать в виде:

$$\Delta \dot{W} = \Delta K \dot{W} + \Delta \dot{W}_0. \quad (8.1)$$

Погрешности составляющих кажущегося ускорения по осям стартовой системы координат (обозначим их X, Y, Z) будут определяться выражениями

$$\begin{aligned} \Delta \dot{W}_x &= \Delta K \dot{W}_x + \Delta \dot{W}_0; \\ \Delta \dot{W}_y &= \Delta K \dot{W}_y + \Delta \dot{W}_0; \\ \Delta \dot{W}_z &= \Delta K \dot{W}_z + \Delta \dot{W}_0. \end{aligned} \quad (8.2)$$

8.2. ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ КАЖУЩЕГОСЯ УСКОРЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ИЗ-ЗА ОШИБОК ОРИЕНТАЦИИ АКСЕЛЕРОМЕТРОВ НА ГСП

В рассматриваемой ГСП расчетное положение осей чувствительности акселерометров после предстартового приведения ГСП совпадает по направлению с осями стартовой системы координат. Несовпадение осей чувствительности акселерометров с осями стартовой системы вызывает ошибки измерения кажущегося ускорения. Ошибки ориентации акселе-

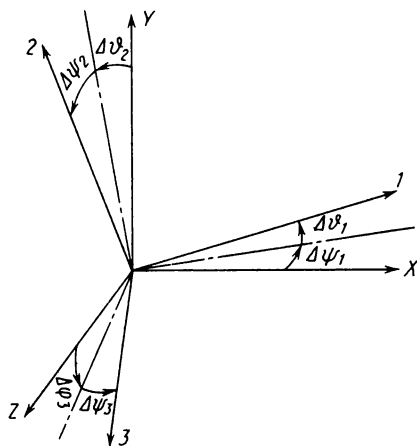


Рис. 8.1

рометров могут быть вызваны с одной стороны, неточностями монтажа акселерометров на ГСП, тепловой деформацией мест крепления, с другой стороны — неточностью приведения ГСП перед стартом, уходами ГСП в процессе полета.

В настоящем разделе рассматривается первая группа ошибок, т.е. погрешности ориентации акселерометров относительно ГСП.

На рис. 8.1 показана взаимная ориентация осей стартовой системы координат X, Y, Z и осей чувствительности акселеро-

метров которые обозначены цифрами 1, 2, 3).

Отклонения осей чувствительности каждого из акселерометров от соответствующих координатных осей обозначены следующим образом:

для акселерометра, измеряющего ускорение по оси X : отклонение от оси $Y - \Delta\psi_1$; от оси $Z - \Delta\vartheta_1$;

для акселерометра, измеряющего ускорение по оси: отклонение от оси $Z - \Delta\vartheta_2$, вокруг оси $X - \Delta\varphi_2$;

для акселерометра, измеряющего ускорение по оси: отклонение от оси $X - \Delta\varphi_3$, от оси $Y - \Delta\psi_3$.

Кажущиеся ускорения, измеряемые акселерометрами, равны проекциям вектора кажущегося ускорения на их оси чувствительности

$$\dot{W}_{X \text{ из}} = \dot{W}_x \cos \Delta\psi_1 \cos \Delta\vartheta_1 + \dot{W}_y \sin \Delta\vartheta_1 - \dot{W}_z \sin \Delta\psi_1 \cos \Delta\vartheta_1;$$

$$\dot{W}_{Y \text{ из}} = -\dot{W}_x \sin \Delta\vartheta_2 \cos \Delta\varphi_2 + \dot{W}_y \cos \Delta\vartheta_2 \cos \varphi_2 + \dot{W}_z \sin \Delta\varphi_2; \quad (8.3)$$

$$\dot{W}_{Z \text{ из}} = \dot{W}_x \sin \Delta\psi_3 - \dot{W}_y \sin \Delta\varphi_3 \cos \Delta\psi_3 + \dot{W}_z \cos \Delta\varphi_3 \cos \Delta\psi_3,$$

где $\dot{W}_x, \dot{W}_y, \dot{W}_z$ — проекции кажущегося ускорения на оси стартовой системы координат. $\dot{W}_{X \text{ из}}, \dot{W}_{Y \text{ из}}, \dot{W}_{Z \text{ из}}$ — измеряемые ускорения.

Учитывая малость углов отклонений, выражение (8.3) можно упростить:

$$\dot{W}_{X \text{ из}} = \dot{W}_x + \dot{W}_y \Delta\vartheta_1 - \dot{W}_z \Delta\psi_1;$$

$$\dot{W}_{Y \text{ из}} = -\dot{W}_x \Delta\vartheta_2 + \dot{W}_y + \dot{W}_z \Delta\varphi_2; \quad (8.4)$$

$$\dot{W}_{Z \text{ из}} = \dot{W}_x \Delta\psi_3 - \dot{W}_y \Delta\varphi_3 + \dot{W}_z.$$

Учитывая зависимости (8.4), легко получить уравнения, определяющие ошибки измерения составляющих кажущегося ускорения:

$$\begin{aligned}\Delta \dot{W}_x &= \dot{W}_{x \text{ из}} - \dot{W}_x = \dot{W}_y \Delta \vartheta_1 - \dot{W}_z \Delta \psi_1; \\ \Delta \dot{W}_y &= \dot{W}_{y \text{ из}} - \dot{W}_y = -\dot{W}_x \Delta \vartheta_2 + \dot{W}_z \Delta \varphi_2; \\ \Delta \dot{W}_z &= \dot{W}_{z \text{ из}} - \dot{W}_z = \dot{W}_x \Delta \psi_3 - \dot{W}_y \Delta \varphi_3.\end{aligned}\tag{8.5}$$

При плоском выведении, когда отсутствует боковой маневр и $\dot{W}_z = 0$

$$\begin{aligned}\Delta \dot{W}_x &= \dot{W}_y \Delta \vartheta_1; \quad \Delta \dot{W}_y = -\dot{W}_x \Delta \vartheta_2; \\ \Delta \dot{W}_z &= \dot{W}_x \Delta \psi_3 - \dot{W}_y \Delta \varphi_3.\end{aligned}\tag{8.6}$$

8.3. ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ КАЖУЩЕГОСЯ УСКОРЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ИЗ-ЗА ОШИБОК ОРИЕНТАЦИИ ГСП

Ошибки ориентации ГСП возникают из-за ошибок ее начального приведения и из-за уходов в процессе полета. Уходы гироскопов пропорциональны возмущающим моментам, действующим вокруг осей прецессии гироскопов (поплавковых интегрирующих гироскопов). Возмущающие моменты обычно подразделяют на постоянные, вызываемые тяжением токоподводов или остаточным магнетизмом гироскопа, и переменные, пропорциональные составляющей кажущегося ускорения, действующей перпендикулярно оси прецессии. Последние возникают при наличии дисбаланса гироскопа относительно оси прецессии.

Соответствующим образом подразделяются и уходы на постоянные и переменные, пропорциональные кажущемуся ускорению.

Углы отклонения осей ГСП от стартовой системы координат при плоском выведении описываются следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta\varphi}{dt} &= K_1 \dot{W}_x + \Delta\dot{\varphi}_0; & \frac{d\Delta\psi}{dt} &= -K_2 \dot{W}_y + \Delta\dot{\psi}_0; \\ \frac{d\Delta\vartheta}{dt} &= K_3 \dot{W}_y + \Delta\dot{\vartheta}_0,\end{aligned}\tag{8.7}$$

где $\Delta\varphi$, $\Delta\psi$, $\Delta\vartheta$ – углы отклонения ГСП вокруг осей X , Y , Z соответственно; $\Delta\dot{\varphi}_0$, $\Delta\dot{\psi}_0$, $\Delta\dot{\vartheta}_0$ – постоянные скорости ухода гироскопов; K_1 , K_2 , K_3 – коэффициенты пропорциональности скорости ухода ускорения для гироскопов 1, 2, 3.

Если в качестве начальных условий для системы принять значения $\Delta\varphi_0$, $\Delta\psi_0$, $\Delta\vartheta_0$, соответствующие ошибкам предстартового приведения ГСП, то эта система уравнений будет описывать влияние всех, рассмотренных нами возмущений.

Проинтегрировав уравнения, получим:

$$\Delta \varphi = K_1 W_x + \Delta \dot{\varphi}_0 t + \Delta \varphi_0;$$

$$\Delta \psi = K_2 W_y + \Delta \dot{\psi}_0 t + \Delta \psi_0; \quad (8.8)$$

$$\Delta \vartheta = K_3 W_z + \Delta \dot{\vartheta}_0 t + \Delta \vartheta_0.$$

Поскольку в рассматриваемом случае акселерометры расположены на ГСП и расчетная ориентация их осей чувствительности перед стартом совпадает с ориентацией осей стартовой системы координат, то полученные зависимости (8.8) выражают и отклонения осей акселерометров от осей стартовой системы координат.

Выражения для погрешностей измерения кажущегося ускорения будут аналогичны (8.6):

$$\Delta \vartheta_1 = \Delta \vartheta_2 = \Delta \vartheta; \quad \Delta \psi_1 = \Delta \psi_3 = \Delta \psi \quad \text{и} \quad \Delta \varphi_2 = \Delta \varphi_3 = \Delta \varphi.$$

Это объясняется тем, что погрешности измерений имеет не каждый акселерометр независимо от других, а весь трехгранник акселерометров как единое целое. Таким образом:

$$\Delta \dot{W}_x = \dot{W}_y \Delta \vartheta; \quad \Delta \dot{W}_y = -W_x \Delta \vartheta; \quad (8.9)$$

$$\Delta \dot{W}_z = \dot{W}_x \Delta \psi - \dot{W}_y \Delta \varphi.$$

8.4. ОТКЛОНЕНИЯ КООРДИНАТ ПОЛОЖЕНИЯ КА ОТ НОМИНАЛЬНОЙ ТРАЕКТОРИИ И СКОРОСТЕЙ КА

Для получения уравнений движения КА в отклонениях от номинальной траектории с точки зрения расчетов вполне допустимо использование модели центрального гравитационного поля Земли.

Уравнения движения в инерциальной геоцентрической прямоугольной системе координат, в частности, стартовой системе могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dV_x}{dt} &= \dot{W}_x - a_{00}/r^2 \cdot X/r; & \frac{dX}{dt} &= V_x; \\ \frac{dV_y}{dt} &= \dot{W}_y - a_{00}/r^2 \cdot Y/r; & \frac{dY}{dt} &= V_y; \\ \frac{dV_z}{dt} &= \dot{W}_z - a_{00}/r^2 \cdot Z/r; & \frac{dZ}{dt} &= V_z; \end{aligned} \quad (8.10)$$

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Предполагается, что рассчитанные параметры номинальной траекто-

рии X_H, Y_H, Z_H ; V_{xH}, V_{yH}, V_{zH} ; $\dot{W}_{xH}, \dot{W}_{yH}, \dot{W}_{zH}$ в любой момент времени удовлетворяют уравнениям (8.10). Параметры возмущенной траектории могут быть представлены как суммы номинальных значений и отклонений

$$(X = X_H + \Delta X, \dots V_x = V_{xH} + \Delta V_x, \dots \dot{W}_x = \dot{W}_{xH} + \Delta \dot{W}_x, \dots).$$

Для получения уравнения движения в отклонениях правые части уравнений (8.10) заменяют их разложением в ряд Тейлора до линейных членов включительно относительно номинальных значений параметров, а в левые части вместо значений координат и скоростей подставляют соответствующие им суммы номинальных значений и отклонений. Затем из левых и правых частей полученных уравнений вычитают левые и правые части соответствующих уравнений (8.10), написанных для номинальных значений параметров. Здесь следует заметить, что при разложении в ряд правых частей уравнений (8.10), необходимо учитывать зависимость расстояния КА от центра Земли и системы прямоугольных координат. Поэтому перед вычислением частных производных по координатам целесообразно в правые части уравнений (8.10) ввести $r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$. Выведенные описанным способом уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta V_x}{dt} &= \Delta \dot{W}_x - \frac{a_{00}}{r_H^3} \left(1 - 3 \frac{X_H^2}{r_H^2}\right) \Delta X + \\ &+ \frac{3a_{00} X_H Y_H}{r_H^5} \Delta Y + \frac{3a_{00} X_H Z_H}{r_H^5} \Delta Z; \\ \frac{d\Delta V_y}{dt} &= \Delta \dot{W}_y + \frac{3a_{00} X_H Y_H}{r_H^5} \Delta X - \frac{a_{00}}{r_H^3} \left(1 - 3 \frac{Y_H^2}{r_H^2}\right) \Delta Y + \\ &+ \frac{3a_{00} Y_H Z_H}{r_H^5} \Delta Z; \\ \frac{d\Delta V_z}{dt} &= \Delta \dot{W}_z + \frac{3a_{00} X_H Z_H}{r_H^5} \Delta X + \frac{3a_{00} Y_H Z_H}{r_H^5} \Delta Y - \\ &- \frac{a_{00}}{r_H^3} \left(1 - 3 \frac{Z_H^2}{r_H^2}\right) \Delta Z; \\ \frac{d\Delta X}{dt} &= \Delta V_x; \quad \frac{d\Delta Y}{dt} = \Delta V_y; \quad \frac{d\Delta Z}{dt} = \Delta V_z. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Вновь полученные уравнения и выведенные ранее для определения погрешностей измерения кажущегося ускорения (8.6), (8.9) позволяют вычислять отклонения координат и проекции скорости в конце выведения КА.

Учитывая линейность уравнений, удобно предварительно рассчитать отклонения кинематических параметров в конце выведения отдельно для каждого независимого возмущения, а величину суммарных отклонений для нескольких возмущений получать путем сложения соответствующих предварительных результатов.

В рассматриваемом случае присутствуют следующие независимые возмущения:

- 1) смещение нуля акселерометра, измеряющего ускорение по оси $X - \Delta W_{x0}$;
- 2) смещение нуля акселерометра, измеряющего ускорение по оси $Y - \Delta W_{y0}$;
- 3) смещение нуля акселерометра, измеряющего ускорение по оси $Z - \Delta W_{z0}$;
- 4) погрешность масштаба акселерометра $X - \Delta K_x$;
- 5) погрешность масштаба акселерометра $Y - \Delta K_y$;
- 6) погрешность масштаба акселерометра $Z - \Delta K_z$;
- 7) ошибка ориентации акселерометра $X - \Delta \varphi_1$;
- 8) ошибка ориентации акселерометра $Y - \Delta \vartheta_2$;
- 9) ошибка ориентации акселерометра $Z - \Delta \psi_3$;
- 10) ошибка ориентации акселерометра $Z - \Delta \varphi_3$;
- 11) постоянный уход ГСП по вращению $-\Delta \varphi_0$;
- 12) постоянный уход ГСП по рысканию $-\Delta \psi_0$;
- 13) постоянный уход ГСП по тангажу $-\Delta \vartheta_0$;
- 14) уход ГСП из-за дебаланса по вращению $-K_1$;
- 15) уход ГСП из-за дебаланса по рысканию $-K_2$;
- 16) уход ГСП из-за дебаланса по тангажу $-K_3$;

8.5. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ НА УЧАСТКЕ ВЫВЕДЕНИЯ КА

При рассмотрении статистических оценок точности инерциальной навигационной системы будем полагать, что погрешность $\Delta \lambda_i$ приборов, входящих в навигационную систему, известны и что соответствующие им погрешности кинематических параметров в конце участка выведения определены и представлены в следующем виде.

	$\Delta \dot{X}$	$\Delta \dot{Y}$	$\Delta \dot{Z}$	ΔX	ΔY	ΔZ
$\Delta \lambda_1$	$\Delta \dot{X}_{\lambda_1}$	$\Delta \dot{Y}_{\lambda_1}$	$\Delta \dot{Z}_{\lambda_1}$	ΔX_{λ_1}	ΔY_{λ_1}	ΔZ_{λ_1}
$\Delta \lambda_2$	$\Delta \dot{X}_{\lambda_2}$	$\Delta \dot{Y}_{\lambda_2}$				
$\Delta \lambda_3$	$\Delta \dot{X}_{\lambda_2}$					
$\Delta \lambda_m$	$\Delta \dot{X}_{\lambda m}$					$\Delta Z_{\lambda m}$

(8.12)

Будем полагать, что ошибки приборов λ_i , по которым определены отклонения кинематических параметров, независимы и, следовательно, взаимно некоррелированы.

Запишем вектор $\Delta \bar{X}$, характеризующий состояние системы в конце участка выведения,

$$\Delta \bar{X} = \{\Delta X_1, \Delta X_2, \Delta X_3, \dots, \Delta X_6\} = \{\Delta \dot{X}, \Delta \dot{Y}, \Delta \dot{Z}, \Delta X, \Delta Y, \Delta Z\}.$$

Суммарное отклонение какого-либо навигационного параметра ΔX_j может быть представлено в виде

$$\Delta X_j = \sum_{i=1}^m \frac{\partial X_j}{\partial \lambda_i} \Delta \lambda_i. \quad (8.13)$$

Погрешности $\Delta \lambda_i$ симметричны относительно нулевого положения и, следовательно, математическое ожидание и дисперсия будут определяться выражениями

$$\mu = (\Delta \lambda_i) = 0; \quad D_{\lambda_i} = \mu(\Delta \lambda_i)^2.$$

В технических условиях на тот или иной прибор обычно оговариваются предельные (максимальные) погрешности этого прибора. Поэтому случайную ошибку $\Delta \lambda_i$ можно представить в виде

$$\Delta \lambda_i = |\Delta \lambda_i| \xi_i,$$

где $|\Delta \lambda_i|$ — максимальное значение ошибки — неслучайная величина; ξ_i — случайная величина с нулевым средним значением, среднеквадратичное значение которой $\sigma_{\xi} = 1$. Значение максимальной ошибки $|\Delta \lambda_i|$ обычно принимают равным трем среднеквадратичным отклонениям.

Составляющая ΔX_j будет определяться выражением

$$\Delta X_j = \sum_{i=1}^m \frac{\partial X_j}{\partial \lambda_i} |\Delta \lambda_i| \xi_i = \sum_{i=1}^m a_{ij} \xi_i, \quad (8.14)$$

где $a_{ij} = \frac{\partial X_j}{\partial \lambda_i} |\Delta \lambda_i|$ — неслучайный коэффициент при случайной величине ξ_i .

Величины a_{ij} равны соответствующим элементам (8.12) отклонений кинематических параметров.

Вектор $\Delta \bar{X}$ с учетом соотношения (8.14) можно определить из соотношения

$$\Delta \bar{X} = A \bar{\xi}, \quad (8.15)$$

где матрица A имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & \dots & a_{6m} \end{bmatrix}. \quad (8.16)$$

Заметим здесь, что в матрице A элементы i -й строки равны элементам j -го столбца таблицы кинематических параметров.

Запишем корреляционную матрицу выведения

$$K_X = \mu(\Delta X \cdot \Delta X^T) = \mu(A \xi \cdot \xi^T A^T) = A \mu(\xi \cdot \xi^T) A^T.$$

Так как величины ξ_i некоррелируемы и, следовательно, $K_{\xi_i \xi_i} = 0$, $D(\xi_i^2) = 1$, то корреляционная матрица K_ξ принимает вид

$$K_\xi = \mu(\xi \cdot \xi^T) = E, \quad (8.17)$$

где E — единичная матрица.

Корреляционная матрица K_X с учетом (8.17) будет иметь вид

$$K_X = A A^T = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \dots & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \dots & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \dots & K_{36} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{61} & \dots & \dots & \dots & K_{66} \end{bmatrix}. \quad (8.18)$$

Дисперсии и средние квадратичные отклонения будут определяться выражениями

$$D_i = K_{ii}/9; \quad \sigma_i = \sqrt{D_i}.$$

8.6. ОЦЕНКА РАЗБРОСОВ ПАРАМЕТРОВ ОРБИТЫ

В предыдущем разделе получена корреляционная матрица отклонений координат и проекций скорости в конце выведения, которая дает достаточно полное представление о точности работы системы управления. Однако помимо этого, часто возникает необходимость дать оценку разбросам параметров орбиты, таким как период обращения T , эксцентриситет e , наклонение i , долгота восходящего узла Ω , аргумент широты U конца выведения и сформировать корреляционную матрицу отклонений указанных параметров.

Получить желаемый результат можно двумя способами. Первый способ — воспользоваться непосредственно результатами, полученными в разд. 8.4, что возможно, если в (8.12) поместить отклонения некинематических параметров (координат и скоростей), а соответствующих

параметров орбиты, заранее рассчитанных для каждой из независимых приборных погрешностей. Использование зависимости (8.18) позволяет получить корреляционную матрицу в орбитальных параметрах.

Второй способ получения корреляционной матрицы в отклонениях орбитальных параметров связан с использованием в качестве исходной информации корреляционной матрицы K_X (8.18) разброса координат и проекций скорости, заданных в стартовой системе координат.

Во всех случаях необходимы частные производные параметров орбиты по координатам и скоростям в стартовой системе координат.

Если номинальная орбита, на которую выводится КА, круговая, то эксцентриситет, вызванный ошибками выведения, обычно разбивают на две составляющие e_1 и e_2 . Первая составляющая e_1 характеризует вытянутость орбиты вдоль оси, соединяющей центр Земли с точкой конца выведения. Вторая составляющая e_2 характеризует вытянутость орбиты вдоль оси, перпендикулярной первой. Такое представление эксцентриситета удобно тем, что каждая его составляющая имеет линейную зависимость от кинематических параметров. Суммарный эксцентриситет при этом выражается зависимостью

$$e = \sqrt{e_1^2 + e_2^2} .$$

Допустим теперь, что имеется матрица частных производных вида

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial \dot{X}} & \frac{\partial T}{\partial \dot{Y}} & \frac{\partial T}{\partial \dot{Z}} & \frac{\partial T}{\partial X} & \frac{\partial T}{\partial Y} & \frac{\partial T}{\partial Z} \\ \frac{\partial e_1}{\partial \dot{X}} & \frac{\partial e_1}{\partial \dot{Y}} & \frac{\partial e_1}{\partial \dot{Z}} & \frac{\partial e_1}{\partial X} & \frac{\partial e_1}{\partial Y} & \frac{\partial e_1}{\partial Z} \\ \frac{\partial e_2}{\partial \dot{X}} & \frac{\partial e_2}{\partial \dot{Y}} & \frac{\partial e_2}{\partial \dot{Z}} & \frac{\partial e_2}{\partial X} & \frac{\partial e_2}{\partial Y} & \frac{\partial e_2}{\partial Z} \\ \frac{\partial i}{\partial \dot{X}} & \frac{\partial i}{\partial \dot{Y}} & \frac{\partial i}{\partial \dot{Z}} & \frac{\partial i}{\partial X} & \frac{\partial i}{\partial Y} & \frac{\partial i}{\partial Z} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{X}} & \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{Y}} & \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{Z}} & \frac{\partial \Omega}{\partial X} & \frac{\partial \Omega}{\partial Y} & \frac{\partial \Omega}{\partial Z} \\ \frac{\partial U}{\partial \dot{X}} & \frac{\partial U}{\partial \dot{Y}} & \frac{\partial U}{\partial \dot{Z}} & \frac{\partial U}{\partial X} & \frac{\partial U}{\partial Y} & \frac{\partial U}{\partial Z} \end{bmatrix} . \quad (8.19)$$

С помощью этой матрицы, умножая ее на матрицу A , получим матрицу C , столбцы которой представляют собой отклонения параметров орбиты, вызванные каждой из приборных ошибок

$$C = B \cdot A . \quad (8.20)$$

Аналогично (8.18) может быть получена корреляционная матрица в орбитальных отклонениях:

$$K_T = C \cdot C^T. \quad (8.21)$$

Теперь несложно выразить матрицу K_T через матрицу K_X , для чего следует в (8.21) вместо C подставить ее выражение (8.20):

$$K_T = BA \cdot (BA)^T = BAA^T B^T = B \cdot K_X \cdot B^T. \quad (8.22)$$

Таким образом, для решения поставленной задачи осталось найти выражения для частных производных. Для этого следует найти перевод величин отклонений кинематических параметров, заданных в стартовой системе координат, в величины отклонений, заданных в орбитальной системе координат, затем перейти к орбитально-цилиндрической системе и выразить отклонения параметров орбиты через значения отклонений в орбитально-цилиндрической системе.

Орбитальная система координат $(r_0, r_0 b_0)$ определяется следующим образом. Ось r направлена по радиусу-вектору номинальной точки конца выведения. Ось τ лежит в плоскости номинальной орбиты, перпендикулярна r и направлена в сторону скорости движения. Ось b перпендикулярна плоскости орбиты, направлена в соответствии с правой системой координат.

Направляющие косинусы матрицы перехода из стартовой системы координат в орбитальную можно выразить через координаты и проекции скорости в конце выведения. Найдем проекции единичных векторов $\bar{r}_0, \bar{b}_0, \bar{\tau}_0$, направленных по соответствующим осям орбитальной системы, на оси стартовой системы координат:

$$\bar{r}_0 = \{X/r, Y/r, Z/r\}; \quad b_0 = \frac{V \times \bar{r}}{|V \times \bar{r}|}; \quad (8.23)$$

$$\bar{\tau}_0 = \bar{r}_0 \times \bar{b}_0,$$

$$\text{где } \bar{r} = \{X, Y, Z\}; \quad \bar{V} = \{\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}\}.$$

Из проекций единичных векторов может быть составлена матрица перехода из стартовой системы координат в орбитальную:

$$M_0 = \begin{bmatrix} \tau_{0x} & \tau_{0y} & \tau_{0z} \\ r_{0x} & r_{0y} & r_{0z} \\ b_{0x} & b_{0y} & b_{0z} \end{bmatrix}. \quad (8.24)$$

Умножив на полученную матрицу вектор отклонения скоростей $\Delta \bar{V} = \{\Delta \dot{X}, \Delta \dot{Y}, \Delta \dot{Z}\}$, а затем вектор отклонений координат $\Delta \bar{r} = \{\Delta X, \Delta Y, \Delta Z\}$, получим отклонения проекций скорости и координат в орбитальной системе координат, т.е. $\Delta V_{\tau_0}, \Delta V_{r_0}, \Delta V_{b_0}, \Delta \tau_0, \Delta r_0, \Delta b_0$. Отклонения в орбитально-цилиндрической системе отличаются от откло-

нений в орбитальной системе только поправкой к отклонению радиальной составляющей скорости

$$\Delta V_r = \Delta V_{r0} + \omega_0 \Delta \tau_0, \quad (8.25)$$

где ΔV_r — отклонение радиальной скорости в орбитально-цилиндрической системе координат; ω_0 — угловая скорость движения по орбите.

Суть этой поправки — получить фактическое отклонение радиальной скорости, так как в выражении для отклонения радиальной скорости в орбитальной системе координат присутствует дополнительная составляющая, вызванная пролетом по орбите на величину $\Delta \tau$. Эта дополнительная составляющая радиальной скорости δV_r показана на рис. 8.2. Здесь

$\bar{V}_{\tau 0}$ — номинальная орбитальная скорость; $\bar{V}_{\tau \phi}$ — фактическая орбитальная скорость; R_{op} — радиус орбиты.

Из всех ошибок выведения рассматривается только пролет по орбите $\Delta \tau$. Из рисунка видно, что

$$\delta V_r = -V_r \cdot \Delta \varphi = -V_r \cdot \frac{\Delta \tau}{R_{op}} = -\omega_0 \cdot \Delta \tau.$$

Эта составляющая δV_r вводится в БЦВМ в качестве поправки с обратным знаком.

Полученные результаты по пересчету отклонений позволяют сформировать матрицу перехода $M1$ величин из стартовой системы координат в орбитально-цилиндрическую.

$$M1 = \begin{bmatrix} \tau_{0x} & \tau_{0y} & \tau_{0z} & 0 & 0 & 0 \\ r_{0x} & r_{0y} & r_{0z} & \omega_0 \tau_{0x} & \omega_0 \tau_{0y} & \omega_0 \tau_{0z} \\ b_{0x} & b_{0y} & b_{0z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_{0x} & \tau_{0y} & \tau_{0z} \\ 0 & 0 & 0 & r_{0x} & r_{0y} & r_{0z} \\ 0 & 0 & 0 & b_{0x} & b_{0y} & b_{0z} \end{bmatrix} \quad (8.26)$$

Если задан вектор отклонений в стартовой системе координат

$$\Delta \bar{X} = \{ \Delta \dot{X}, \Delta \dot{Y}, \Delta \dot{Z}, \Delta X, \Delta Y, \Delta Z \},$$

то вектор отклонений в орбитально-цилиндрической системе

$$\Delta \bar{\tau} = \{ \Delta V_r, \Delta V_r, \Delta V_b, \Delta \tau, \Delta r, \Delta b \}$$

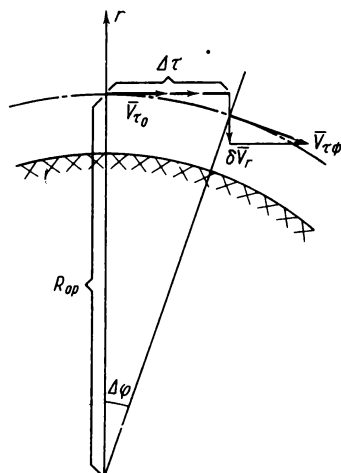


Рис. 8.2

может быть получен из соотношения

$$\Delta \bar{T} = M1 \cdot \Delta X. \quad (8.27)$$

Имея значения отклонений кинематических параметров в орбитально-цилиндрической системе, можно получить отклонения параметров орбиты [27]:

$$\begin{aligned} \Delta T &= K_1 \Delta r + K_2 \Delta V_r; & \Delta e_1 &= K_3 \Delta r + K_4 \Delta V_r; \\ \Delta e_2 &= K_5 \Delta V_r; & \Delta i &= K_6 \Delta V_b + K_7 \Delta b; \\ \Delta \Omega &= K_8 \Delta V_b + K_9 \Delta b; & \Delta U &= K_{10} \Delta \tau, \end{aligned} \quad (8.28)$$

где $K_1 = 3T/r$; $K_2 = 3T/V_r$; $K_3 = 1/r$; $K_4 = 2/V_r$;

$K_5 = -1/V_r$; $K_6 = -\cos U/V_r$; $K_7 = -\sin U/r$;

$K_8 = -\sin U/\sin i$; $K_9 = \cos U/r \sin i$; $K_{10} = 1/r$.

Параметры T , r , V_r , U , i берутся из расчета номинальной траектории.

Приведенные выше коэффициенты можно свести в соответствующую матрицу $M2$, переводящую вектор $\Delta \bar{T}$ в вектор отклонений параметров орбиты $\Delta \bar{T} = \{ \Delta T, \Delta e_1, \Delta e_2, \Delta i, \Delta \Omega, \Delta U \}$:

$$M_2 = \begin{bmatrix} K_2 & 0 & 0 & 0 & K_1 & 0 \\ K_4 & 0 & 0 & 0 & K_3 & 0 \\ 0 & K_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_6 & 0 & 0 & K_7 \\ 0 & 0 & K_8 & 0 & 0 & K_9 \\ 0 & 0 & 0 & K_{10} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.29)$$

Общая матрица B перевода величин отклонений из стартовой системы координат в параметры орбиты может быть получена с помощью матриц $M1$ и $M2$:

$$B = M_1^T \cdot M_2^T. \quad (8.30)$$

С помощью (8.22) может быть рассчитана корреляционная матрица разбросов параметров орбиты.

8.7. ИЗМЕНЕНИЯ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ КА

Проведем оценку изменения кинематических параметров орбитального движения. Пусть КА был выведен на орбиту искусственного спутника Земли. Введем орбитальную вращающуюся систему координат $\bar{r}, \bar{\tau}, b$. Ось $\bar{r}$ направлена из центра Земли на спутник. Ось $\bar{\tau}$ расположена в плоскости орбиты в направлении движения спутника и перпендикулярна радиусу-вектору $\bar{r}$. Ось $\bar{b}$ дополняет систему до правой $\bar{b} = \bar{r} \times \bar{\tau}$.

В этой системе координат уравнения движения КА при его свободном полете (при действии только одной силы гравитации) запишутся в виде

$$\frac{dV_r}{dt} = \mu/r^2 + V_\tau^2/r; \quad \frac{dV_\tau}{dt} = -(V_r V_\tau)/r; \quad \frac{dr}{dt} = V_r. \quad (8.31)$$

Предположим, что расчетное номинальное движение КА по орбите ИСЗ круговое и в дальнейшем параметры номинального движения будем обозначать с индексом звезды. Для данного случая выгодно выбрать именно орбитальную систему отсчета, вращающуюся вместе с КА, все параметры движения остаются постоянными во времени: постоянна скорость V_τ^* , остается постоянным расстояние r^* до КА и радиальная скорость V_r^* . Из условия, что V_r^* остается постоянной и равной нулю при круговом движении, найдем зависимость скорости V_τ^* от радиуса

$$\frac{dV_\tau^*}{dt} = -\frac{\mu}{(r^*)^2} + \frac{(V_\tau^*)^2}{r^*} = 0;$$

$$(V_\tau^*)^2 = \mu/r^*.$$

Найдем угловую скорость движения КА по орбите: $(\omega^*)^2 = (V_\tau^*/r^*)^2 = \mu/(r^*)^3$.

Теперь линеаризуем уравнения движения, т.е. представим параметры фактического движения как сумму параметров номинального движения и отклонений. Отклонения будем обозначать символом Δ и, учитывая только первый порядок, получим линеаризованную систему уравнений относительно отклонений:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta V_r}{dt} &= \frac{2V_\tau^*}{r^*} \Delta V_\tau + \left[\frac{2\mu}{(r^*)^3} - \left(\frac{V_\tau^*}{r^*} \right)^2 \right] \Delta r = \\ &= 2\omega^* \Delta V_\tau + (\omega^*)^2 \Delta r; \end{aligned} \quad (8.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta V_\tau}{dt} &= -\frac{V_\tau}{r^*} \Delta V_r - \frac{V_r^*}{r^*} \Delta V_\tau + \frac{V_r^* \dot{V}_\tau}{(r^*)^2} \Delta r = \\ &= -\omega^* \Delta V_r = \frac{d\Delta r}{dt} = \Delta V_r. \end{aligned}$$

Как видно, система зависит только от одного параметра номинального движения – угловой скорости движения спутника по орбите. Во втором уравнении второе и третье слагаемые исключаются, так как в номинальном движении $V_r^* = 0$. Для определения фактического положения КА вдоль орбиты введем дополнительный параметр $\Delta\theta$ – угловое смещение фактического положения КА относительно его номинального положения:

$$\frac{d\Delta\theta}{dt} = \frac{\Delta V_\tau}{r^*} - \frac{V_\tau}{(r^*)^2} \Delta r = \frac{1}{r^*} [\Delta V_\tau - \omega^* \Delta r]. \quad (8.33)$$

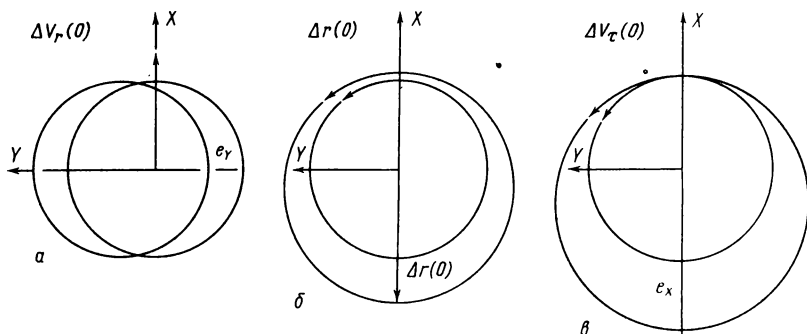


Рис. 8.3

Исключим из системы параметр ΔV_r . Для этого запишем соотношения

$$\Delta V_r(t) = \Delta V_r(0) - \omega^* \int_0^t \Delta V_r(\tau) d\tau;$$

$$\Delta r(t) = \Delta r(0) + \int_0^t \Delta V_r(\tau) d\tau$$

и выразим $\Delta V_r(t)$ в функции $\Delta r(t)$:

$$\Delta V_r(t) = \Delta V_r(0) + \omega^* \Delta r(0) - \omega^* \Delta r(t). \quad (8.34)$$

Подставив выражение (8.34) в (8.31), получим систему двух линейных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} d\Delta V_r/dt &= -(\omega^*)^2 \Delta r + 2\omega^* \Delta V_r(0) + 2(\omega^*)^2 \Delta r(0); \\ d\Delta r/dt &= \Delta V_r. \end{aligned} \quad (8.35)$$

На рис. 8.3 показана структурная схема, где символом $1/p$ обозначается операция интегрирования. Общее решение такой системы имеет вид

$$\Delta r = C_1 \cos \omega^* t + C_2 \sin \omega^* t + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — постоянные, зависящие от начальных условий и воздействия.

Рассмотрим реакции системы при действии различных возмущений:

1) возмущение по вертикальной составляющей скорости. Начальное условие по $\Delta V_r(0)$ вызывает следующую реакцию: системы по параметрам

$$\Delta V_r(t) = \cos \omega^* t \Delta V_r(0);$$

$$\Delta r(t) = \frac{\sin \omega^* t}{\omega^*} \Delta V_r(0).$$

Подставляя выражение для $\Delta r(t)$ в уравнение (8.34), найдем функ-

цию отклонения продольной составляющей скорости в зависимости от времени

$$\Delta V_r(t) = -\sin \omega^* t \Delta V_r(0).$$

Подставив выражения для $\Delta r(t)$ и $\Delta V_r(t)$ в уравнение (8.33) и интегрируя его получим функцию смещения вдоль трассы:

$$\Delta \theta(t) = \frac{2(\cos \omega^* t - 1)}{V_r^*} \Delta V_r(0).$$

На рис. 8.3 показаны возмущенная и номинальная траектория КА при заданных начальных условиях по радиальной скорости. Реакция системы – изменение периодических функций времени по высоте, угловому положению, продольной составляющей скорости. Через интервал времени $T = 2\pi/\omega^*$, (период обращения) КА вернется в исходное положение по высоте и по положению на орбите

$$\Delta r(T) = \Delta r(0); \quad \Delta \theta(T) = \Delta \theta(0).$$

Таким образом, это возмущение не меняет периода обращения спутника $\Delta T = 0$, но происходит смещение орбиты вдоль оси Y , вызываемое эксцентриситетом орбиты e_y (см. рис. 8.3, б)

$$e_y = -\Delta V_r(0)/V_r^*;$$

2) возмущение по высоте.

Начальное условие $\Delta r(0)$ определяет иную реакцию системы. Не повторяя математических выкладок, рассмотренных выше, запишем окончательный результат реакции:

$$\Delta V_r(t) = \omega^* \sin \omega^* t \Delta r(0);$$

$$\Delta r(t) = (2 - \cos \omega^* t) \Delta r(0);$$

$$\Delta V_r(t) = (\cos \omega^* t - 1) \omega^* \Delta r(0);$$

$$\Delta \theta(t) = (2 \sin \omega^* t - 3 \omega^* t) \frac{\Delta r(0)}{r^*}.$$

Если функции $\Delta V_r(t)$, $\dot{\Delta r}(t)$, $\Delta V_r(t)$ по-прежнему остаются периодическими, то функция $\Delta \theta(t)$, кроме гармонических компонент, имеет линейно нарастающую составляющую. Это означает, что отклонение по высоте орбиты обязательно приводит к постоянному равномерному смещению КА вдоль орбиты. За каждый период обращения спутника накапливается угловое смещение вдоль трассы, равное

$$\Delta \theta\left(\frac{2\pi}{\omega^*}\right) = -\frac{6\pi}{r^*} \Delta r(0).$$

Зная угловое смещение за период обращения, можно вычислить и соответствующую ему поправку по времени, когда КА окажется в начальной по положению фазе:

$$\Delta T = - \frac{\Delta \theta \left(\frac{2\pi}{\omega^*} \right)}{\omega^*} = 3 \left(\frac{2\pi}{\omega^*} \right) \frac{\Delta r(0)}{r^*} = 3 T^* \frac{\Delta r(0)}{r^*}.$$

Это соответствует изменению периода обращения спутника. Начальное отклонение по высоте приводит также к изменению среднего радиуса орбиты (появление постоянной составляющей в $\Delta r(t)$, равной $2\Delta r(0)$) и смещению орбиты, но уже в направлении оси X (см. рис. 8.3, б). Эксцентриситет орбиты в этом случае определяется формулой

$$e_x = -\Delta r(0)/r^*.$$

Здесь $\Delta r(0)$ — коэффициент при гармонической составляющей, соответствует смещению всей орбиты вниз на величину $\Delta r(0)$. Отношение смещения к радиусу и есть эксцентриситет орбиты, но уже в направлении оси X ;

3) возмущение по продольной скорости. Начальное условие $\Delta V_\tau(0)$ определяет следующую реакцию системы:

$$\Delta V_r(t) = 2 \sin \omega^* t \Delta V_\tau(0);$$

$$\Delta r(t) = 2(1 - \cos \omega^* t) \frac{\Delta V_\tau(0)}{\omega^*};$$

$$\Delta V_\tau(t) = (2 \cos \omega^* t - 1) \Delta V_\tau(0);$$

$$\Delta \theta(t) = (4 \sin \omega^* t - 3 \omega^* t) \frac{\Delta V_\tau(0)}{V_\tau^*}.$$

Как и в случае возмущения по высоте этот фактор приводит к изменению периода

$$\Delta T = 3 T^* \Delta V_\tau(0) / V_\tau^*,$$

к изменению среднего радиуса орбиты $\Delta r_{\text{ср}} = 2\Delta V_\tau(0)/\omega^*$, к эксцентриситету (смещению) орбиты в направлении оси X (см. рис. 8.3, в):

$$e_x = -2 \frac{\Delta V_\tau(0)}{V_\tau^*}.$$

Таким образом, если на аппарат действуют возмущения, то это приводит к изменению периода обращения спутника, изменению средней высоты орбиты и постоянному росту рассогласования фактического положения КА на орбите с расчетным, номинальным положением. Обсудим с этой позиции ошибки инерциальных систем. Выведение КА на орбиту ИСЗ занимает сравнительно небольшое время (порядка 10 мин), и инструментальные погрешности системы за время выведения не приводят к большим начальным погрешностям кинематических параметров на орбите. При длительном же существовании КА на орбите ИСЗ погрешности по высоте и скорости, являющиеся периодическими функциями,

не растут во времени, зато погрешности положения КА вдоль орбиты будут непрерывно накапливаться и без дополнительных коррекций в орбитальном полете спутника не обойтись.

Коррекция навигационных параметров ведется с помощью радиовысотометра — вертиканта, определяющего высоту полета и положение нормали к подстилающей поверхности, инфракрасной вертикали, также определяющей положение нормали к подстилающей поверхности, по излучению атмосферы Земли, работ по наземным ориентирам и т.д. Это специфические вопросы навигации на орбите, требующие отдельного и обстоятельного обсуждения.

Ответим еще на один вопрос. Как найти результирующие отклонения параметров орбитального движения при действии нескольких возмущений? Если такие кинематические параметры как период, отклонение по высоте, по составляющим скорости можно представить как скалярные величины и получать результирующее отклонение просто как алгебраическую сумму отклонений

$$\Delta T = \sum_{i=1}^n \Delta T_i; \quad \Delta r = \sum_{i=1}^n \Delta r_i,$$

то параметры, характеризующие эксцентриситет (смещение) орбиты следует представить как векторные величины

$$\Delta e_x = \sum_{i=1}^n \Delta e_{xi}; \quad \Delta e_y = \sum_{i=1}^n \Delta e_{yi}; \quad \Delta e = \sqrt{\Delta e_x^2 + \Delta e_y^2}.$$

И последнее. Рассмотрим движение аппарата при выходе из плоскости расчетной орбиты. Уравнения, описывающие изменение скорости и координат в этом направлении, имеют вид

$$dV_b/dt = -\mu/(r^2 + b^2) \cdot b/\sqrt{r^2 + b^2};$$

$$db/dt = V_b.$$

Линеаризуя эту систему и вспоминая, что в расчетном номинальном движении КА b^* и V_b^* равны нулю, получим линеаризованную систему уравнений

$$d\Delta V_b/dt = -\mu\Delta b/(r^*)^3 = -(\omega^*)^2 \Delta b;$$

$$d\Delta b/dt = \Delta V_b.$$

При начальном условии $\Delta V_b(0)$ реакции КА система уравнений запишется в виде

$$\Delta V_b(t) = \Delta V_b(0) \cos \omega^* t; \quad \Delta b(t) = \frac{\Delta V_b(0)}{\omega^*} \sin \omega^* t.$$

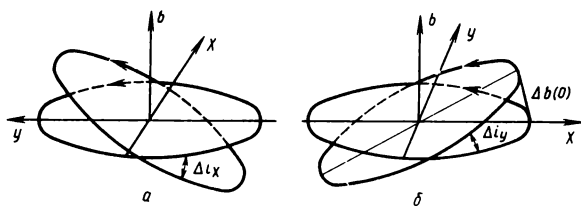


Рис. 8.4

При начальном условии по боковой координате $\Delta b(0)$ — координате выхода спутника из плоскости орбиты — реакция КА такова, что

$$\Delta V_b(t) = -\Delta b(0) \cdot \omega^* \sin \omega^* t; \quad \Delta b(t) = \Delta b(0) \cos \omega^* t.$$

На рис. 8.4 показано влияние этих погрешностей на изменение наклона орбиты. Первое возмущение (см. рис. 8.4, а) разворачивает орбиту вокруг оси на угол

$$\Delta i_x = \frac{\Delta V_b(0)}{\omega^* r^*} = \frac{\Delta V_b(0)}{V_\tau^*}.$$

Угол Δi_x получен как отношение максимального смещения $\Delta r(\frac{\pi}{2\omega^*}) = \frac{\Delta V_b(0)}{\omega^*}$ к радиусу номинальной орбиты r^* . Второе возмущение разворачивает номинальную орбиту вокруг оси плоскости орбиты на угол $\Delta i_y = \frac{\Delta b(0)}{r^*}$ (см. рис. 8.4, б).

Результирующий угол разворота орбиты находится как вектор имеющий составляющие Δi_x и Δi_y . Положение оси разворота плоскости номинальной орбиты находится по соотношению

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta i_y}{\Delta i_x}.$$

Отметим, что погрешности при боковом движении КА не имеют тенденции накопления и носят периодический характер.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев К.Б., Бебенин Г.Г. Управление космическим летательным аппаратом. М.:Машиностроение, 1964. 340 с.
2. Андреев В.Д. Теория инерциальной навигации. В 2 кн. Кн. I: Автономные системы. 579 с. Кн. II: Корректируемые системы. М.:Наука, 1967. 647 с.
3. Астрономический календарь. Переменная часть. М.:Наука, 1980. 349 с.
4. Береснев Н.П., Легостаев В.П.// Космические исследования. 1968. № 4. С. 17.
5. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.:Наука, 1973. 320 с.
6. Бромберг П.В. Теория инерциальных систем навигации. М.:Наука, 1979. 296 с.
7. Горенштейн И.А., Шульман И.А. Инерциальные навигационные системы. М.:Машиностроение, 1970. 231 с.
8. Грушинский Н.П. Теория фигуры Земли. М.:Наука, 1976. 511 с.
9. Дмитроченко Л.А., Лопатин В.И. Особенности алгоритмов бесплатформенных инерциальных навигационных систем // Сб. научн. тр.: / Вопросы управления космических аппаратов. М.:Мир, 1975. 217 с.
10. Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.:Наука, 1976. 670 с.
11. Каменский А.М. Теория астрономической коррекции. М.:Машиностроение, 1974. 220 с.
12. Куликов К.А. Курс сферической астрономии. М.:Наука, 1969. 216 с.
13. Лаптев Г.Ф. Элементы векторного исчисления. М.:Наука, 1975. 336 с.
14. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.:Физматгиз, 1961. 824 с.
15. Основы теории полета космических аппаратов / Под ред. Г.С. Нариманова, М.К. Тихонравова. М.:Машиностроение, 1972. 607 с.
16. Парусников Н.А., Морозов В.М., Борзов В.И. Задачи коррекции в инерциальной навигации. М.:Изд. МГУ, 1982. 176 с.
17. Пельпор Д.С. Теория гироскопических стабилизаторов. М.:Машиностроение, 1965. 348 с.
18. Пельпор Д.С. Гироскопические системы ориентации и стабилизации. М.:Машиностроение, 1982. 168 с.
19. Помыкаев И.И. Инерциальный метод измерения параметров движения летательных аппаратов. М.:Машиностроение, 1969. 215 с.
20. Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н. Управление ориентацией космических аппаратов. М.:Наука, 1974. 600 с.
21. Романтеев Н.Ф., Хрунов Е.В. Астрономическая навигация пилотируемых космических кораблей. М.:Машиностроение, 1976. 231 с.
22. Селезнев В.П. Навигационные устройства. М.:Машиностроение, 1974. 600 с.
23. Сломьянский Г.А., Прядилов Ю.Н. Поплавковые гироскопы и их применение. М.:Обorongиз, 1958. 244 с.
24. Стирнс Э. Космическая навигация. М.:Воениздат, 1966. 291 с.
25. Фридлендер Г.О. Инерциальные системы навигации. М.:Физматгиз, 1961. 154 с.

26. Эвардс. Бесплатформенные инерциальные навигационные системы // Вопросы ракетной техники. 1973. № 5. С. 10.
27. Эльясберг П.Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М.:Наука, 1965. 540 с.
28. Ягодкин В.В., Хлебников Г.А. Гироскопические приборы баллистических ракет. М.:Воениздат, 1967. 216 с.
29. Инерциальные системы управления / Под ред. Д. Питтмана. М.:Воениздат, 1964. 454 с.
30. Навигация, наведение и стабилизация в космосе / Под ред. Дж. Э. Миллера. М.:Машиностроение, 1970. 363 с.
31. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.:Наука, 1973. 366 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Глава 1. Приборы первичной информации	5
1.1. Гироскопические датчики угловой скорости	5
1.2. Интегрирующий поплавковый гироскоп	7
1.3. Одноосный гироскопический стабилизатор	9
1.4. Трехстепенная гиросtabilизированная платформа	11
1.5. Четырехстепенная гиросtabilизированная платформа	13
1.6. Акселерометры	14
1.7. Бесплатформенные системы ориентации и навигации	15
Глава 2. Навигация на участке выведения	17
2.1. Системы координат	17
2.2. Определение координат и составляющих скорости движения КА	21
2.3. Определение географических координат КА	24
Глава 3. Определение параметров ориентации КА на орбите ИСЗ с помощью ГСП, ориентированной в стартовой системе координат	28
3.1. Ориентация КА на орбите	28
3.2. Определение углов ориентации КА относительно стартовой системы координат $O_0 X_0 Y_0 Z_0$ при движении по орбите ИСЗ	31
Глава 4. Астрономическая коррекция навигационной системы	39
4.1. Ориентация астровизира на КА	39
4.2. Условия видимости звезд при движении КА по орбите ИСЗ	41
4.3. Азимут и высота звезды при движении КА по орбите ИСЗ	46
4.4. Азимут и высота Солнца при движении КА по орбите ИСЗ	49
4.5. Коррекция положения ГСП по астроориентирам	56
4.6. Определение отклонений в ориентации ГСП с помощью астровизиров, установленных на платформе	59
Глава 5. Восстановление ориентации КА при визировании Солнца и звезды	66
5.1. Ориентация аппарата относительно системы координат $OX_{гр} Y_{гр} Z_{гр}$	66
5.2. Процедура поиска астроориентиров	69
5.3. Ориентация КА относительно астроориентиров	71
5.4. Направляющие косинусы осей X^T, Y^T, Z^T требуемой ориентации КА относительно положения, занимаемого при астроориентации	75
5.5. Определение углов разворота, приводящих КА к требуемой ориентации	75
5.6. Контрольные условия на углы разворотов КА	77
5.7. Ориентация продольной оси КА	80
5.8. Изменение угла Солнце—Земля—Канопус	83
5.9. Определение области поиска светил	84
5.10. Угол Солнце—КА—Земля	87

Глава 6. Навигация с бесплатформенной системой	88
6.1. Определение углов КА относительно инерциальной системы координат по информации, получаемой с ДУСов	88
6.2. Определение направляющих косинусов подвижной системы координат по информации, получаемой с ДУСов	92
6.3. Параметры Родрига–Гамильтона в теории углового движения твердого тела	94
6.4. Кинематические уравнения для параметров Родрига–Гамильтона	98
6.5. Использование кватернионов в теории управления движением КА	104
6.6. Сравнение бесплатформенной системы с инерциальной системой, построенной на основе ГСП	107
6.7. Измерение ускорений	109
6.8. Астрокоррекция БИНС	109
Глава 7. Ориентация КА, совершающего пространственный маневр	110
7.1. Принцип работы четырехосного гиростабилизатора	110
7.2. Углы разворота рамок четырехосного гиростабилизатора	113
7.3. Управление ориентацией КА при использовании четырехосного гиростабилизатора	117
Глава 8. Погрешности инерциальных систем навигации	118
8.1. Погрешности измерения кажущегося ускорения от инструментальных погрешностей акселерометров	118
8.2. Погрешности измерения кажущегося ускорения, возникающие из-за ошибок ориентации акселерометров на ГСП	119
8.3. Погрешности измерения кажущегося ускорения, возникающие из-за ошибок ориентации ГСП	121
8.4. Отклонения координат положения КА от номинальной траектории и скоростей КА	122
8.5. Статистические оценки точности навигационной системы на участке выведения КА	124
8.6. Оценка разбросов параметров орбиты	126
8.7. Изменения кинематических параметров орбитального движения КА	130
Список литературы	137

Производственное издание

КАВИНОВ ИВАН ФЕДОРОВИЧ

ИНЕРЦИАЛЬНАЯ НАВИГАЦИЯ В ОКОЛОЗЕМНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Редактор *Г.П. Филипповская*
Обложка художника *Л.С. Вендрова*
Художественный редактор *В.В. Лебедев*
Технический редактор *О.В. Чеботарева*
Корректор *Л.В. Тарасова*
Оператор *В.И. Копылова*

ИБ №5742

Сдано в набор 19.10.1987.	Подписано в печать 28.03.88.	Т-04144.
Формат 60×84 1/16.	Бумага офсетная №2.	Гарнитура Пресс Роман.
Печать офсетная.	Усл. печ. л. 8,37.	Усл. кр.-отт. 8,60.
Тираж 1230 экз.	Заказ 1232	Уч.-изд. л. 8,13.
		Цена 40 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство "Машиностроение"
107076, Москва, Стромынский пер., 4

Отпечатано в Московской типографии № 9 НПО "Всесоюзная книжная палата"
Госкомиздата 109033, Москва, Волочаевская ул., 40 с оригинала-макета,
изготовленного в издательстве "Машиностроение" на наборно-пишущих машинах

УВАЖАЕМЫЕ ТОВАРИЩИ!

В 1989 году издательство "Машиностроение" выпустит в свет следующие книги:

Малышев В.В., Красильщиков М.Н., Карлов В.И. Оптимизация наблюдения и управления летательных аппаратов. 18 л.

Рассмотрены задачи оптимизации состава измеряемых параметров и режимов работы навигационных средств, управления летательных аппаратов (в целях влияния на точность навигационных определений), совместной работы средств навигации и управления. Для решения этих задач предложен новый общий подход, основанный на аналитических свойствах уравнения типа Риккати. Сущность этого подхода – в эквивалентном переходе от исходных нелинейных задач оптимизации к линейным по фазовым переменным.

Для научных работников. Будет полезна инженерам, специализирующимся в области оптимизации динамических систем.

Брозгуль Л.И. Динамически настраиваемые гироскопы: Модели погрешностей для систем навигации. 12 л.

Рассмотрена механика динамически настраиваемых гироскопов (ДНГ) с вращающимся и невращающимся упругим подвесом ротора. Подробно рассмотрен ДНГ с вращающимся упругим двухколесным кардановым подвесом. Исследованы методические и инструментальные погрешности. Показаны возможности практического использования ДНГ для измерения угловых скоростей и углов относительно инерциального пространства. Представлены математические модели погрешностей ДНГ.

Для инженеров, занимающихся исследованием и проектированием гироскопических приборов и инерциальных систем навигации.

Рахтенко Е.Р. Гироскопические системы ориентации. 13 л.

Изложены инженерные методы расчета и проектирования гироскопических систем ориентации, используемых в авиационной, ракетной и космической технике. Рассмотрены следующие функционально-кинематические схемы систем ориентации, нашедшие широкое практическое применение: гиросустройство с двумя трехстепенными гироскопами в кардановом подвесе; трехосный гиросtabilизатор; бескарданная система. Большое внимание уделено физической сущности явлений, происходящих в системах ориентации.

Для инженеров, занятых проектированием и применением гироскопических систем ориентации.

Бороздин В.Н. Гироскопические приборы и устройства систем управления: Учеб. пособие для вузов по специальности "Системы управления летательных аппаратов". 17 л.

Изложена прикладная теория гироскопа. Рассмотрены физическая сущность, принцип действия и характеристики гироскопов, применяемых в системах управления, ориентации и навигации: свободные гироскопы, датчики и указатели углов, дифференцирующие и интегрирующие гироскопы, одно-, двух- и трехосные гиросtabilизаторы. Приведены точностные и эксплуатационные характеристики гироскопов при различных режимах работы в реальных условиях.

Динамика ракет: Учебник для вузов по специальностям "Летательные аппараты" и "Производство летательных аппаратов" / К.А. Абгарян, Э.Л. Калязин, В.П. Мишин, И.М. Рапопорт; Под общ. ред. В.П. Мишина. – 2-е изд., перераб. и доп. 30 л.

Изложены основы динамики ракет и космических летательных аппаратов. Рассмотрены методы исследования устойчивости и управляемости движения, выбора динамических характеристик ракет как объектов управления с учетом упругости конструкции и подвижности жидкого топлива в баках.

Второе издание (1-е изд. 1969 г.) дополнено сведениями о способах ориентации и угловой стабилизации космических аппаратов. Изложены проблемы гидростатики и гидродинамики в слабых силовых полях и в условиях невесомости.

Разыграев А.П. Основы управления полетом космических аппаратов и кораблей: Учеб. пособие для втузов. – 2-е изд., перераб. и доп. 30 л.

Изложены принципы построения систем управления движением космических аппаратов (КА) и их элементов. Описаны основы управления движением относительно центра масс – ориентацией и угловой стабилизацией КА на пассивных и активных участках полета. Рассмотрены вопросы навигации и наведения при межорбитальных перелетах, при посадке на Луну, Землю и другие планеты с различной плотностью атмосферы.

Второе издание (1-е изд. 1977 г.) переработано и дополнено материалами по бортовым цифровым вычислительным машинам как одному из основных элементов современных систем управления движением.

Алтухов В.Ю., Стадник В.В. Гироскопические приборы, автоматические бортовые системы управления самолетов и их техническая эксплуатация: Учеб. пособие для средних авиационно-технических училищ гражданской авиации. 20 л.

Изложены элементы прикладной теории гироскопов, принципы построения авиационных гироскопических приборов, бортовых систем управления средних магистральных самолетов гражданской авиации. Рассмотрены кинематические и электрические схемы гироскопических приборов, средства контроля работоспособности авиагоризонтов и гировертикалей в процессе полета. Уделено внимание вопросам эксплуатации, технического обслуживания гироскопических приборов и бортовых систем управления.

Ex 90 (6.5) we go

$$A_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos p & \sin p \\ 0 & -\sin p & \cos p \end{bmatrix}$$

Ex 91 (6.7)

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{\psi} - \sin \psi \dot{\theta} \\ w_x &= \dot{\psi} \cos p + \sin p \cos \psi \dot{\theta} \\ w_z &= -\sin p \dot{\psi} + \cos p \cos \psi \dot{\theta} \end{aligned}$$

(6.8)

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= (v_y \sin p + w_z \cos p) \cdot \frac{1}{\cos \psi} \\ \dot{\psi} &= w_y \cos p - v_z \sin p \\ \dot{p} &= v_x + (w_y \sin p + w_z \cos p) \tan \psi \end{aligned}$$

Ex 114 (7.2) we go

$$A_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 - \sin \psi & \\ 0 & 1 & 0 \\ +\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{bmatrix}$$

Ex 102 summary

40 коп.

ИНЕРЦИАЛЬНАЯ НАВИГАЦИЯ

И. Ф. Кавинов