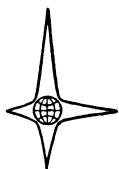


С. Дж. КЛАЙН

ПОДОБИЕ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ





ИЗДАТЕЛЬСТВО
« М И Р »

STEPHEN J. KLINE

Professor of Mechanical Engineering
Stanford University, Stanford, California

SIMILITUDE AND APPROXIMATION THEORY

Mc GRAW-HILL BOOK COMPANY

NEW YORK—St. LOUIS—SAN FRANCISCO—TORONTO — LONDON—SYDNEY

С. Дж. Клайн

ПОДОБИЕ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ

Перевод с английского

Под редакцией

И. Т. АЛАДЬЕВА и К. Д. ВОСКРЕСЕНСКОГО

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР“

Москва 1968

Книга посвящена систематическому изложению методов и техники определения условий подобия и правил моделирования, а также различным другим методам частичных, или приближенных, решений в случаях, когда точные решения получить невозможно, затруднительно или нецелесообразно.

Рассматриваются общие правила этих методов анализа и их применение к конкретным задачам. Некоторые задачи анализируются различными методами и таким образом выясняются достоинства и недостатки методов. Трактуются вопросы о достаточности аналитического описания процесса и наличии единственности решения, а также рассматриваются правила действия с критериями подобия.

Книга представляет собой учебный курс и практическое руководство по упомянутым вопросам. Она предназначена для широкого круга научных работников и инженеров, прежде всего теплотехников, теплофизиков, энергетиков и механиков, а также для студентов и аспирантов соответствующих специальностей.

Редакция литературы по новой технике

Книга С. Клайна является бесспорно оригинальным произведением. Она посвящена средствам научного исследования, их рассмотрению, развитию и совершенствованию. Рассмотренные в книге методы анализа явлений и процессов, точнее их моделей, математических описаний, Клайн объединяет под общим названием фракционный, или частичный, анализ. Под этим автор подразумевает «любой способ получения некоторой информации о решении задачи, когда нет времени или способов нахождения полного решения».

В настоящее время известно довольно много различных методов, приемов и подходов, которые могут быть отнесены с известной и различной степенью условности к фракционному анализу, понимаемому в указанном широком смысле.

На самом деле С. Клайн рассматривает лишь некоторые методы такого анализа, в основном так или иначе связанные с методами анализа размерностей и подобия. Так, вторая глава книги посвящена анализу размерностей физических величин. Ее основное содержание составляет так называемая π -теорема. Она приводится здесь в трактовке, несколько отличной от широко известной. Используя работы Лангхаара [28] и Ван Драйста [50], автор показал, что более общий вывод π -теоремы состоит в том, что число безразмерных комплексов равно или меньше разности между числом всех величин, существенных для процесса, и числом первичных величин, т. е.

$$n \leq m - k.$$

Здесь же кратко излагается и другое важное положение, тоже малоизвестное у нас, — так называемое дополнение Хантли. Оно заключается в уменьшении количества получаемых безразмерных величин

посредством усовершенствования способа пользования π -теоремой. Идея Хантли состоит в увеличении числа параметров с независимыми единицами за счет полной или частичной «ликвидации» однородных по размерности величин (если они имеются в рассматриваемой системе) при сохранении общего количества размерных величин в системе. Это достигается посредством приписывания однородным величинам независимых друг от друга единиц измерения на основании анализа физического смысла этих величин, процедуры их измерения и физической ситуации, характеризующей саму задачу. В частности, три пространственные ортогональные координаты предлагается рассматривать в качестве размерно-неоднородных величин, имеющих три независимые единицы, или три независимых масштаба, вследствие того что процедуры измерения этих величин по существу различны, так как измерения производятся в различных плоскостях. Такой подход представляется интересным и эффективным, так как приводит к сокращению общего количества безразмерных величин, предсказываемых π -теоремой. Здесь уместно заметить, что аналогичные идеи были высказаны А. П. Ваничевым [2*]¹⁾ еще в 1938 г., а также Л. И. Седовым в предисловии к книге Биркгофа «Гидродинамика» [5]. Однако насколько нам известно, эти высказывания не получили развития в отечественной литературе.

Третья глава посвящена методу подобия. Вначале рассматривается «старая теория подобия», в основе которой лежит использование отношений действующих в системе сил, потоков энергий, а также физических свойств и геометрических размеров. Далее на частных примерах и в общем виде показываются преимущества более совершенного метода подобия, основанного на использовании основных уравнений и граничных условий. При этом, как правило, Клайн использует математическое описание процесса для получения решения задачи или его вида, а не только для установления числа и вида критериев подобия. Такой метод пред-

¹⁾ См. список дополнительной литературы на стр. 298.

ставляет собой более совершенное и мощное средство исследования, позволяющее получить более ценную информацию о решении.

Наконец, в основной четвертой главе Клайн рассматривает то, что он называет теорией приближений. Метод подобия, основанный на использовании математического описания процесса, строг в такой же мере, как сами уравнения и наши знания о процессе. Его главные недостатки: а) невозможность получить конкретный вид решения во многих задачах; б) большое число критериев подобия и невозможность соблюдения при моделировании их равенства в модели и образце. Все это существенно уменьшает эффективность метода подобия. Поиски упрощения задачи, ее приближенных формулировки и решения, а также путей сокращения числа критериев подобия — вот основные цели теории приближений. Клайн рассматривает различные методы, приемы, подходы, соображения физического характера, но во всех случаях ищутся пути получения приближенных условий подобия или конкретных решений. В этом смысле книга представляет собой по существу теорию приближенного подобия.

Среди различных методов приближенного анализа, описанных в книге, особое место занимает метод, основанный на сравнении порядка величин членов нормализованного (т. е. определенным образом приведенного к безразмерному виду) уравнения. Такой метод не нов, но здесь предложена определенная стандартная процедура, позволяющая применять его почти автоматически. Другой, еще более эффективный метод, развитый в книге, — использование естественных координат, позволяет существенно сократить число параметров и таким образом довести иногда дело до конкретного решения.

В целом по духу изложения и поставленным задачам книга Клайна частично примыкает к содержанию известных монографий Л. И. Седова «Методы подобия и размерности в механике» (1967 г.) и Г. Биркгофа «Гидродинамика» (1963 г.), хотя и отличается от них как по назначению, так и во многих конкретных особенностях.

К достоинствам книги следует отнести несомненную актуальность и ценность приведенного в ней материала, единое изложение которого на русском языке отсутствует, а в зарубежной практике предпринимается, видимо, впервые.

Отметим некоторые на наш взгляд существенные недостатки книги.

Автор не проводит анализ решений задач математической физики с помощью методов теории групп. Эта теория имеет прямое отношение к фракционному анализу, как он понимается Клайном, так как способствует выработке общего подхода к анализу свойств частных решений.

Методика вывода соотношения Кармана в полуэмпирической теории турбулентности, изложенная Клайном, громоздка и не строга. Изящный и строгий вывод этого соотношения предложен Л. Г. Лойцянским [23*].

Клайн упоминает о приложениях метода ВКБД для решения теплофизических задач и рассматривает этот метод применительно лишь к одномерным задачам; обобщение этого метода на трехмерный случай имеется в монографии Маслова В. П. [24*]. Приближение ВКБД, часто называемое у нас квазиклассическим, наиболее подробно описано в книге Дж. Хединга «Введение в метод фазового интеграла» [29*]. Изложение этого метода смотри также в книге Н. Фрёман, П. Фрёман «ВКБ-приближение» [28*].

Клайн, по-видимому, не знаком с русской и советской литературой по обсуждаемым вопросам и ссылается только на книгу Л. Седова, изданную за рубежом в английском переводе. Для частичного устранения этого недостатка в конце книги приводится краткий список отечественной литературы по соответствующим вопросам.

В ряде мест язык книги очень труден, витиеват и нелегко проследить мысль автора. Имеются многословия, повторения и тривиальные утверждения, что отчасти можно объяснить учебным характером книги. В связи с этим при переводе и редактировании пришлось преодолеть значительные трудности в поисках

наиболее подходящей формы для более точного выражения мыслей автора. В некоторых случаях редакторы пошли на исключение отдельных фраз, по форме и содержанию повторявших уже не раз сказанное ранее.

Не везде редакторы согласны с утверждениями, аргументацией и выводами автора. Некоторые из них являются весьма дискуссионными, тем не менее редакторы отказались от подстрочных примечаний, так как аргументированное рассмотрение многих этих положений требовало обстоятельного разбора, выходящего за пределы возможного в примечаниях.

Мы надеемся, что книга Клайна будет с интересом встречена читателем.

Перевод книги выполнен В. И. Кабаковым, Е. С. Турилиной и А. Ф. Ульяновым.

*И. Аладьев
К. Воскресенский*

В книге рассматриваются приближенные методы, методы подобия и моделирования, а также анализ размерностей, причем все они используются для получения приближенных решений.

Поскольку во многих научно-технических задачах нельзя найти полные решения, то часто следует удовлетворяться частичным анализом. Трудно дать четкое название такого рода анализу; мы будем пользоваться термином *частичный*, или *фракционный*, анализ. Цель книги — дать общее введение в частичный анализ.

Частичный анализ не является синонимом численного анализа. Численный анализ — это метод нахождения полного решения частной задачи в численном виде. Фракционный же анализ — метод нахождения некоторой информации о решении, которая обычно беднее, чем содержащаяся в полном решении. Метод обычно является аналитическим, но часто в нем используются как физические данные, так и математический анализ. Кроме того, он обычно дает информацию о решении всех задач изучаемого класса. Часто с помощью фракционного анализа получают приближенное уравнение, из которого уже можно найти приближенное аналитическое или численное решение. Таким образом, фракционный и численный анализы главным образом дополняют друг друга, но не совпадают.

Почти каждому специалисту в настоящее время приходится иметь дело с одним из методов фракционного анализа — с *анализом размерностей*. Смысл термина «фракционный анализ» с указанным здесь дополнительным значением весьма близок по духу к анализу размерностей, изложенному в книге Бриджмена [6]. На английском языке имеется по меньшей

мере шесть хороших книг по анализу размерностей, в которых полно описаны почти все положения по этому вопросу. Поэтому в данной книге приводятся лишь краткие выводы и везде, где возможно, указывается соответствующая литература.

В дополнение к резюме по анализу размерностей в книге разобраны два других метода фракционного анализа, которыми, как представляется, обычно пренебрегают, — это *метод подобия* и *фракционный анализ основных уравнений*. Эти методы были известны и ранее, но в данной работе приводятся некоторые развития и дополнения к каждому из них.

Первая глава содержит более подробное рассмотрение философии вопроса и применений фракционного анализа, а также классификацию различных типов задач, к которым такие методы обычно применяются. Вторая глава посвящена анализу размерностей. В третьей главе более подробно, чем в других работах, описывается метод подобия. Здесь на примерах с алгебраическими и интегральными уравнениями показано, как следует пользоваться основными уравнениями. В четвертой главе рассматривается фракционный анализ дифференциальных уравнений с граничными условиями. Сюда включены не только общеизвестные задачи анализа размерностей и моделирования, но также приближенные методы, составление оценок, краткое изложение применения представления о пограничном слое, методы разложения в ряды при непрерывном изменении функций и, наконец, развитие идеи о подобии путем использования переменных подобия и сокращения количества параметров. В последней главе проводится сравнение различных методов.

Общий уровень изложения соответствует знаниям студентов последнего курса высших учебных заведений или аспирантов первого года обучения в США. Книга предназначена как для студентов, так и для научных работников, часто имеющих дело с задачами, для которых нельзя найти полного решения. Математический уровень изложения в основном соответствует требованиям высшей школы и предполагает несколько

большее знакомство с дифференциальными уравнениями в частных производных.

Более углубленные математические методы, которые, естественно, могли бы здесь найти применение, подробно не рассматриваются, а лишь представлены кратко вместе со ссылками на соответствующую литературу.

В частности, рассматриваются основы получения решений с использованием понятия о подобии дифференциальных уравнений в частных производных по Моргану, так называемого метода Лайтхилла, а также метода ВКБД (метод Вентцеля — Крамерса — Бриллюэна — Джеффриса) и теории пограничного слоя. Возможно, было бы полезно рассмотреть более общий интегральный подход к этим вопросам и сравнительные методы для интегральных уравнений, но это выходит за рамки и цели данной книги.

Примеры взяты из механики сплошных сред и включают задачи гидромеханики, термодинамики, теплообмена, газовой динамики и теории упругости. Однако сами методы имеют значительно более широкое применение, поэтому внимание в книге акцентируется на методике применения. Не делается попыток полностью изложить какую-то одну область или привести наиболее современные примеры. Примеры даны лишь для иллюстрации методов. Некоторые из них тривиальны, но при этом упрощается изложение; другие же значительно усложнены с целью показать как типы задач, с которыми приходится иметь дело, так и получаемые результаты. В некоторых случаях к решению одной и той же задачи применяются различные методы, что позволяет сравнить результаты; сравнение методов проводится в гл. 5.

В процессе изложения материала в гл. 4 оказалось возможным более детально обсудить физический смысл и структуру дифференциальных (и интегральных) уравнений, а также разобрать и объяснить сущность различных операций, которые можно осуществлять с уравнениями и соответствующими граничными условиями без их решения. В общепринятом смысле эти вопросы, лежащие на стыке физической теории и

математики, обычно не рассматриваются в прикладной математике. Они в значительной степени «элементарны», но весьма важны.

Для теоретиков, вероятно, наибольший интерес представит гл. 4. Единственное систематическое изложение этих вопросов, по-видимому, имеется в работе Биркгофа [5], где рассмотрение ведется на основе формальной теории групп, что может оказаться трудным для инженера. В настоящей книге делается попытка указать более простые, но достаточные основы для применения фракционного анализа к математическому описанию процесса, а также предложить терминологию и методику, при которых методы этого анализа были бы более четкими и ясными.

Я надеюсь, что здесь достигнуты некоторые успехи, но, очевидно, возможны дальнейшие усовершенствования.

Поскольку рассматриваются задачи из различных областей, то трудно дать единый перечень обозначений, так что иногда различные величины обозначаются одинаковыми буквами. Поэтому обозначения в каждой задаче вводятся в процессе изложения материала. Приведем несколько специальных обозначений, которые используются во всей книге.

Δ — равно по определению;

$\hat{A}$ — соответствует размерности; следует читать: «имеет размерность (или единицу измерения) ...»;

$\simeq$ — достаточно точное приближение;

$\approx$ — грубое приближение;

(-) — величины под чертой безразмерны;

$O(1)$ — величина, по порядку равная или меньше единицы;

$U(1)$ — равно приблизительно единице на определенном расстоянии и меньше единицы где-то в другом месте.

С. Клайн

ВВЕДЕНИЕ

Основной целью книги является систематическое изложение методов фракционного анализа. Под фракционным анализом понимается любой способ получения некоторой информации о решении задачи, когда нет времени или способов нахождения полного решения. Такая частичная информация может основываться на нескольких параметрах, содержащихся в соответствующих дифференциальных уравнениях и их полных граничных условиях. В задачах любой сложности почти всегда при фракционном анализе используется как физическая информация, так и математический анализ. Цель частичного анализа — получить возможно больше сведений о процессе, когда нельзя найти полное и точное решение.

Общим для всей книги является стремление получить как можно больше информации о решении задачи, даже если с помощью имеющихся данных и методов невозможно найти полного решения. Такой подход дает нам основной критерий достаточности различных разбираемых методов. Это обстоятельство неоднократно отмечается при последующем изложении.

Наиболее известным и широко используемым из методов частичного анализа является метод, называемый *анализом размерностей*. Поэтому большую часть методов, которые следует изложить, можно было бы рассматривать относящимися к анализу размерностей. Однако сейчас в значительной части литературы принято, что анализ размерностей является в большей или меньшей степени синонимом π -теоремы Бэкингема и всех выводов, которые из нее следуют. Поэтому для определенности мы будем пользоваться понятием анализа размерностей при описании методов,

связанных с π -теоремой, а к фракционному анализу будем относить более широкий класс методов исследования. Анализ размерностей в узком смысле будет описан во второй главе, но до этого полезно более детально обсудить вопросы, на которые с помощью различных способов частичного анализа мы попытаемся ответить.

Перечислим некоторые области приложения анализа размерностей:

1. Выбор единиц измерения для количественных соотношений.

2. Проверка алгебраических соотношений между единицами.

3. Преобразование и систематизация единиц измерения физических величин.

4. Уменьшение числа независимых параметров.

5. Обобщение экспериментальных данных и сравнение с теорией [включая а) использование минимального количества данных, испытаний на моделях и формул; б) определение основных неизвестных коэффициентов и в) оптимальный (по простоте и физическому смыслу) выбор переменных и (или) параметров].

6. Установление законов моделирования.

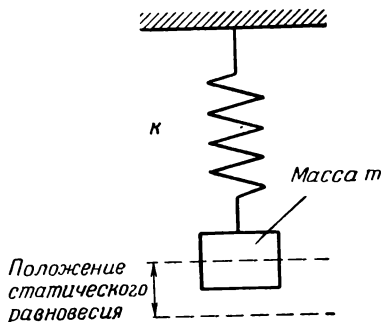
7. Определение основных независимых параметров.

8. Разработка методов математических аналогий.

Во многих работах по анализу размерностей взаимозаменяемо используются два термина: *переменные* и *параметры*. Как уже указывалось выше, в данной книге сделано различие между этими терминами. Для этого есть серьезные причины, которые станут очевидны после описания различных методов. Здесь достаточно привести отдельные примеры.

Рассмотрим первый пример. На фиг. 1.1 показан простой гармонический осциллятор, который состоит из груза, подвешенного с помощью пружины к неподвижному телу. В такой системе переменными являются отклонение массы от положения статического равновесия x и время t , измеряемое от какого-то известного момента времени. Параметрами являются масса груза m и постоянная пружины k (коэффициент упругости). Имея это в виду, определим переменную и

параметр следующим образом. Независимыми переменными являются величины, необходимые для того, чтобы зафиксировать определенное состояние системы. Параметры же — это величины, зафиксированные для одной какой-либо задачи, но имеющие иные значения для другой задачи такого же типа. Вообще зависимая искомая величина является функцией как независимых переменных, так и параметров. Таким образом, в примере фиг. 1.1 независимой переменной будет время;



Ф и г. 1.1.

оно определяет положение груза, поскольку параметры фиксированы. Параметры m и k имеют определенные значения для одной системы такого рода, но если мы хотим изучить все возможные простые осцилляторы, то следует учитывать изменения m и k . Для всех таких систем, рассматриваемых вместе, отклонение x есть функция времени t , а также m и k . Иногда весьма полезно рассмотреть поведение такой системы во времени, т. е. при фиксированных m и k . В других случаях требуется исследовать отклонения системы от другой системы такого же типа, т. е. при изменении m или k . Смысл сделанных замечаний станет яснее, когда мы перейдем к более сложным примерам и методам¹⁾. Если желательно избежать различия между

¹⁾ Отметим, что слово *параметр* имеет иное значение в математике. t называют параметром, когда, например, $y=y(x)$, но пишут $y=y(t)$, $x=x(t)$. Здесь термин *параметр* не используется в таком смысле. В тех же немногих случаях, когда такая форма необходима, t будет называться *параметрической переменной*.

параметром и переменной (например, когда пишется функциональное уравнение, связывающее параметры), то будем называть их *величиной* или *координатой*.

Как было правильно указано Бриджменом [6], анализ размерностей применим не ко всем возможным уравнениям, а только к тем из них, которые однородны в безразмерном виде и связаны с основными системами единиц, в которых структура формулы не зависит от величины единицы, принятой в качестве основной¹⁾. Такие требования не являются причиной практических трудностей. Поэтому при последующем изложении будем считать, что имеем дело с уравнениями, удовлетворяющими этим условиям.

Как отмечалось в предисловии, книга предназначена для научных работников и изложена на уровне знаний аспиранта первого года обучения. Считается поэтому, что читатель хорошо знаком с более простыми приложениями, отмеченными в п. 1, 2 и 3, приведенных на стр. 16. Мы надеемся также, что читателю известно, что выражение результатов в безразмерной форме приводит к снижению числа необходимых независимых координат и что такой процесс не только способствует уменьшению требуемого числа данных, графиков, экспериментов и таблиц, но и облегчает сопоставление и обобщение результатов. Поэтому во второй главе приводится лишь краткое рассмотрение этих положений. Отсутствие детального рассмотрения не свидетельствует о их несущественности; это просто означает, что они обычно необходимы как условие современного теоретического исследования²⁾. Эти положения станут очевиднее, если

1) Положения, высказанные Бриджменом [6], интересны и содержательны. Недавно Ипсен [20] изложил аналогичные положения более полно.

2) Для читателя, желающего глубже ознакомиться с вопросами, указанными в п. 1, 2 или 3, полезны три первые главы работы Бриджмена [6]. На более современном уровне это изложено Лангхааром [28] и Дунканом [13]. Читателям, знакомым с линейной алгеброй, рекомендуется прочитать книгу Лангхаара; более четко с математической точки зрения это дано Дунканом. Ипсен рассмотрел смысл единиц измерения и соотношения между многими используемыми системами единиц.

рассмотреть основные цели фракционного анализа. Не требует доказательств значение фракционного анализа для целей, изложенных в п. 2 и 3, где приходится иметь дело с единицами измерения и размерностями. Еще более ясны преимущества применения безразмерных параметров и переменных для обобщения результатов опытов и как можно большего сокращения числа независимых переменных и параметров. Это относится к п. 4 и 5. Наибольшие трудности встречаются при установлении законов моделирования, при определении основных параметров и разработке соответствующих методов аналогий (п. 6—8), а также при физической (в отличие от математической) трактовке вопросов, указанных в п. 5.

Хотя п. 6—8 кажутся самостоятельными, на самом деле они тесно связаны. Общим является отношение к вопросу: «Какие параметры существенны для данной задачи?» Если ответ известен, то основные независимые параметры и законы моделирования найти легче. Разработка методов аналогий требует некоторой дополнительной информации, но, как будет показано в гл. 3 и 4, такая информация может быть получена так же, как и независимые параметры основных уравнений.

Проведенное обсуждение можно суммировать, объединив приложения анализа размерностей в две группы: 1) определение основных параметров и 2) эффективное управление этими параметрами. Эти две группы могут быть подразделены с включением всех задач, указанных на стр. 16, следующим образом:

- I. Установление и изучение основных параметров. Сюда входят
 6. Установление законов подобия и моделирования.
 7. Определение независимых параметров.
 8. Разработка методов физических и математических аналогий.
- II. Эффективное управление параметрами. Сюда входят две подгруппы.
 - A. Несложные действия с параметрами и проверка их, включающие:

1. Выбор единиц измерения.
2. Проверка алгебраических соотношений между единицами.
3. Систематическое преобразование единиц.
- Б. Преобразование параметров (обычно к безразмерному виду), чтобы обеспечить
4. Уменьшение числа независимых параметров.
5. Обобщение и сопоставление результатов.

Мы уже отмечали, что фракционный анализ прежде всего имеет отношение к группе I; разумеется, он включает группу IIА. Более или менее автоматически обычно он использует группу IIБ. Однако уместно выяснить, почему это так. Эта операция в анализе размерностей, когда он используется как метод фракционного анализа, состоит из двух основных частей: 1) определение существенных параметров; 2) преобразование этих параметров к желаемому виду. Обе части соответствуют двум приведенным ранее основным группам и используются в том порядке, в каком должна решаться задача. Ясно, что невозможно проделать какое-то преобразование параметров данной задачи до тех пор, пока эти параметры неизвестны. Опыт показывает, что нахождение параметров представляет собой наибольшую из всех трудностей в анализе размерностей. Трудности имеют место и при обращении с параметрами, но обычно они преодолимы. Важно, чтобы научный работник или инженер при обращении с существенными параметрами мог быть уверен в том, что они приводятся по крайней мере к некоторому используемому и простому виду. С другой стороны, определение параметров, необходимых для моделирования и методов аналогий, является вопросом, требующим значительно больших усилий. Эти параметры весьма часто являются источником трудностей и ошибок¹⁾. Поэтому ясно, что любые разумные операции в группе II необходимо производить при допущении, что группа I выполнена правильно. Если же принимается ошибочная система параметров, то очень редко пра-

¹⁾ Некоторые данные по этому вопросу приведены в гл. 5.

вильные математические операции¹⁾ смогут исправить положение.

Из приведенного ясно, что сама по себе система безразмерных параметров весьма полезна при отсутствии другой информации. Однако если целью фракционного анализа является получение как можно большей информации по данному вопросу даже при отсутствии полного решения, то по крайней мере в некоторых задачах значительная информация может быть получена дополнительно без использования системы параметров в безразмерной форме. Возможно, что лучше такую информацию искать с помощью следующих вопросов:

1. Каков физический смысл каждого из основных параметров и переменных? Конкретнее, каково качественное влияние увеличения или уменьшения любого данного параметра или переменной?
2. Можно ли найти условия, при которых можно пренебречь влиянием некоторых параметров в рассматриваемой области или в какой-то частной задаче? Не приведет ли это к таким основным уравнениям, которые легче поддаются исследованию и, хотя не позволяют найти решение в общем виде, помогают получить решение для частного случая.
3. Имеются ли какие-либо комбинации из двух или более безразмерных параметров или переменных, а также преобразования переменных, которые приводят к нескольким независимым величинам или упрощают получаемые соотношения?
4. Можно ли найти законы приближенного моделирования? При каких условиях можно упростить законы моделирования путем ограничения полноты некоторых требований?

Ясно, что приведенные четыре вопроса важны, но они выходят за рамки обычного анализа размерностей. В то время как в литературе описывается большое число частных задач, решение которых находится с

¹⁾ В литературе приводятся примеры того, когда удавалось обойти требования соблюдения размерностей.

помощью различных методов, мало говорится о самих методах и отсутствует их общее рассмотрение. Поэтому одной из главных целей данной книги является попытка дать по крайней мере основы такого подхода и сравнение преимуществ различных методов.

Рассматриваются несколько методов, и в каждом примере прежде всего обсуждается соответствие метода поставленным вопросам. Для получения такой информации к некоторым примерам применяются все методы. Выводы приводятся в заключительной главе, в которой на основе необходимой степени точности, простоты и начальных данных сравниваются преимущества и возможности различных методов.

АНАЛИЗ РАЗМЕРНОСТЕЙ И π -ТЕОРЕМА. ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЙ И РАЗМЕРНОСТИ

2.1. Единицы измерений и размерности

Прежде чем начать рассмотрение π -теоремы, являющейся основой анализа размерностей, необходимо кратко уяснить природу уравнений, единиц измерений и размерностей.

Прежде всего, что же понимается под *единицей измерения*? В современном представлении единица измерения является мерой, с помощью которой измеряются величины физических характеристик системы. Как единица, так и процесс измерения должны быть определены с помощью некоторой предварительной рабочей операции. Так, длина бруска равна числу раз, с которым единица данного размера, скажем дюйм, укладывается вдоль стороны бруска. При этом необходимо располагать:

- 1) базовой величиной или началом отсчета;
- 2) единицей измерения, определяемой с помощью рабочей операции;
- 3) правилом интерполяции и экстраполяции.

В случае измерения расстояний базовая величина принимается равной нулю. Единицей измерения является дюйм, определяемый путем сравнения со стандартным дюймом; правило интерполяции задается частями путем маркировки на делительных машинах. Такие операции определения длины хорошо известны, и ими пользуются как само собой разумеющимися.

Размерность отражает качественную определенность, или сущность характеристики, измеряемой с помощью данной единицы. Так, для примера, рассмотренного в предыдущей главе, качественной характеристикой является длина. Единицами измерения

качественного понятия длины, выраженного количественно, могут быть метр, дюйм или миля.

В начале этого века в литературе все еще обсуждался вопрос о том, являются ли основными или относительными размерности (или единицы) по своей сути. Бриджмен [6] детально разбирает этот вопрос и показывает, что единственно логичным является признание того, что размерности (или единицы) — относительные величины. В частности, они должны зависеть от *специфических рабочих операций*, используемых в процессе измерения. Если эти рабочие операции изменяются, то в общем будет изменяться не только величина, но и тип нужных размерностей и единиц. Бриджмен установил также, что не существует «лучшей» или «основной» системы размерностей или единиц. Поэтому мы можем при измерении геометрических размеров использовать единицы площади вместо единиц длины. Это может быть в данном случае более или менее удобным, но по существу равноценно. Можно также в случае «черных» нагретых тел заменить температуру цветом, но это не скажется на окончательных результатах при условии, что используется правильная процедура измерения.

Бриджмен показал, что означают слова — *собственно процесс измерения*. В частности, он обратил внимание на то, что используемые рабочие операции должны быть таковы, чтобы физические уравнения удовлетворялись независимо от выбора единиц. Это будет выполняться при условии, что если единица измерения уменьшается вдвое, то число, полученное в результате измерения, удвоится, или, в более общем виде, число, полученное в результате измерения, обратно пропорционально величине единицы измерения. Так, 1 см равен 10 мм , и длина бруска в сантиметрах составляет одну десятую от его длины в миллиметрах. Большинство из нас благодаря опыту работы с системами единиц принимает это как само собой разумеющееся и не представляющее каких-либо трудностей. Поэтому будем считать, что это условие выполняется во всех системах единиц измерения, которые рассматриваются далее.

2.2. Типы величин, входящих в физические уравнения

Исходя из только что приведенных соображений, входящие в физические уравнения четыре типа характеристик можно подразделить следующим образом:

- а) первичные величины;
- б) вторичные величины;
- в) размерные постоянные;
- г) безразмерные величины.

а. Первичные и вторичные величины

Первичной величиной называется любая величина, размерность которой пропорциональна первой степени единицы измерения, определенной с помощью выбранной рабочей операции. При этом не должны использоваться две рабочие операции или выражение, имеющее размерности в степени, отличной от единицы. Тогда если в приведенном ранее примере принять операцию измерения основанной на обычном масштабе длины, то длина бруса является первичной величиной, так как ее размерность есть только L . Однако площадь сечения этого бруса не первичная величина, так как она выражается квадратом длины. Если мы добавим к нашим рабочим операциям измерение времени, например с помощью секундомера, и будем измерять обычным способом длину, то сможем измерить скорость данной массы, например свободно движущегося под гору автомобиля. Скорость автомобиля при таком измерении не является первичной величиной, так как ее размерность включает в себя и длину и время. Такие величины, как скорость автомобиля или площадь сечения бруса, называем вторичными. Вторичная величина является характеристикой системы с размерностью, выражаемой более чем одной первичной размерностью, или одной размерностью в степени, большей единицы.

Приведем теперь символы, принятые согласно Дункану [13]. Обозначим символом A размерностное соответствие, что заменяет слова «имеет размерность (или единицу измерения)». Следовательно,

Длина AL (первичная),
 Площадь AL^2 (вторичная),
 Время At (первичная),
 Скорость $A \frac{L}{t} = Lt^{-1}$ (вторичная).

Нужно читать: длина имеет размерность L , площадь имеет размерность L^2 и т. д. Про массу говорим, что «масса имеет единицу измерения, выражаемую в килограммах», или «масса выражается в килограммах».

m **A** кг.

Иными словами, различие между первичными и вторичными величинами состоит в том, что первичные величины не могут быть изменены в ходе рабочих операций. Они являются как бы элементарными кирпичиками системы размерностей и приняты уже в первоначальных операциях измерения. Вторичные величины выводятся или составляются с помощью первичных. И те и другие являются основой теоретического исследования.

Необходимо сделать еще два замечания относительно первичных и вторичных величин. Во-первых, как показал Бриджмен [6], размерность любой вторичной величины можно выразить единственной комбинацией размерностей первичных величин в различных степенях (включая отрицательные и дробные). Например, если первичными величинами в некоторой задаче являются только масса, длина, время и температура, то размерность любой вторичной величины q может быть представлена в виде

$$qAM^aL^bt^cT^d, \quad (2.1a)$$

где TA температуры,
 MA массы,
 LA длины,
 tA времени,

а a , b , c и d являются константами, которые могут быть равны любому действительному значению, включая дробное, отрицательное и нуль. Полное доказательство этой теоремы приведено в работах Бриджмена [6] и Вильсона [55]. Размерностью величины q

называют произведение размерностей величин в правой части (2.1a), возведенных в соответствующие степени a, b, c, d . Иногда для краткости размерность вторичной величины просто будем характеризовать, давая значения показателей a, b, c, d . Во-вторых, использование массы, длины и времени в приведенном примере не означает, что имеется что-либо «неприкосновенное» или «неизменное» в самой природе такой системы размерностей. Как уже было показано, первичные величины устанавливаются исследователем путем выбора операций измерения. Однако это определенно выбор, и если он не обоснован, то является предположительным. В приведенном примере, например, в качестве первичных величин можно выбрать массу, время, температуру и скорость. Действительно, для некоторых целей этот выбор весьма удобен. В такой системе длина будет производной величиной, получаемой с помощью времени и скорости. Тогда можно записать:

скорость $A V$ (первичная),

длина $A V t$ (вторичная).

Размерность любой вторичной величины можно выразить как

$$q A M^a V^b t^c T^d.$$

Так как мы привыкли использовать первичную величину, имеющую размерность длины, то с первого взгляда изложенное ниже может показаться странным. Если бы с помощью какой-нибудь операции мы нашли способ непосредственного измерения скорости, аналогичный радиолокационному методу определения этой величины, до того, как был найден прямой метод измерения длины, то принятая сейчас система могла бы быть иной. Действительно, в системе, где используется радиолокационный принцип измерения скорости, эта величина становится первичной.

Седов [32*] в своей книге развил соображения Бриджмена об относительности первичных и вторичных величин и показал, что имеется даже явная зависимость размерностей от принятой рабочей схемы измерения. В качестве примера Седов показал, что обычно углы, измеренные в радианах, рассматриваются

как безразмерные, но имеются и другие возможные способы измерения углов, дающие различные численные значения. Следовательно, численное значение угла зависит от выбора единицы измерения, и в этом смысле его можно считать размерным.

6. Размерные постоянные и независимые размерности

Если выбирать единицы измерения для многих величин произвольно, то может оказаться, что в общем не все они будут соответствовать друг другу. Поэтому соответствующие основным физическим законам уравнения потребуют введения постоянных для того, чтобы величины выбранных единиц соответствовали друг другу. Классическим примером является постоянная, которая появляется во втором законе Ньютона при применении технической системы единиц. При использовании физической системы единиц имеем

$$F = ma, \quad (2.2a)$$

где $m \in \text{г-масса}$,

$a \in \text{см/сек}^2$,

$F \in \text{дн}$.

Однако при использовании английской технической системы единиц

$$F = \frac{W}{g_c} a, \quad (2.26)$$

где $F \in \text{фунт}_f = \text{фунт-сила}$,

$W \in \text{фунт}_m = \text{фунт-масса}$,

$a \in \text{фут/сек}^2$.

Назовем g_c размерной постоянной. Размерные постоянные играют важную роль при использовании π -теоремы. Эти величины имеют размерности в том же смысле, что и вторичные величины. Тогда для приведенного выше уравнения, если взять в качестве первичных величин силу, длину, время и массу и использовать английскую систему единиц: фунт-сила, фут, секунда и фунт-масса, то можно записать

фунт-сила $\in F \in \text{фунт}_f$,

длина $\in L \in \text{фут}$,

время $\in t \in \text{сек}$,

фунт-масса $\in M \in \text{фунт}_m$.

Решая теперь уравнение второго закона Ньютона относительно g_c , получаем

$$MLF^{-1}t^{-2} \text{ А } g_c = 32,17 \text{ фунт}_m \cdot \text{фут}/\text{фунт}_f \cdot \text{сек}^2.$$

Размерную постоянную можно определить как характеристику, численное значение которой однозначно устанавливается выбором операций измерения. Если бы мы выбрали в качестве единицы массы *слаг*, а в качестве единицы силы *фунтал*¹⁾, тогда, очевидно, значение g_c равнялось бы единице, и его можно было бы опустить в уравнении. Однако это не привело бы к использованию единицы массы вместо единицы силы. С точки зрения наших определений, масса и сила имеют различные размерности и невзаимозаменяемы. Тот факт, что в некоторых системах измерения они имеют одинаковые названия единиц (фунт, грамм и т. д.), не должен приводить к физически неправильным действиям. Применение силы вместо массы аналогично применению длины вместо температуры. И если такие действия не всегда приводят к ошибке, то все же они являются причиной путаницы. С точки зрения анализа размерностей заменять массу на силу просто невозможно.

Использование в анализе размерностей размерных постоянных непосредственно связано с вопросом о независимости или избыточности списка размерностей, используемых в первичных величинах. Если среди выбранных в определенных рабочих операциях первичных величин нет таких, размерности которых могли бы быть комбинацией размерностей других первичных величин, то можно считать размерности независимыми. В противном случае выбранный список содержит лишние размерности. Например, из второго закона механики, который устанавливает зависимости между характеристиками системы, видно, что использование четырех независимых размерностей четырех первичных величин (силы, массы, длины, времени), излишне. Сам

¹⁾ *Слаг* — масса, которой сила в 1 фунт сообщает ускорение в 1 фут/сек²; *фунтал* — единица силы в системе фунт-масса, фут, секунда. — Прим. перев.

закон Ньютона всегда дает разрешимое размерное уравнение, связывающее четыре величины: силу, массу, длину и время. Отсюда вытекает, что размерность любой вторичной величины, выражаемая посредством только силы, массы, длины и времени, может быть выражена также через любые три из них при использовании размерного уравнения. Никаких затруднений в проведении такой операции нет. Это вытекает из формы второго закона Ньютона и соотношения (2.1a), которое показывает, что размерность (или единицу измерения) любой вторичной величины можно выразить через размерности первичных величин в соответствующих степенях. [Читатель может убедиться в этом, самостоятельно рассмотрев уравнения (2.1a) и (2.26).]

При рассмотрении вопросов, связанных с анализом размерностей, Седов [32*] считает роль размерных постоянных главенствующей. Он утверждает, что они должны быть включены независимо от их «ценности». Совершенно верны и его ясные замечания по давно поднятым еще Рябушинским [43] и Бриджменом [6] вопросам относительно работы Релея [42]. Однако вопрос о том, когда размерные постоянные существенны, не прост. Он аналогичен вопросу о том, должен ли данный подход применяться для нахождения рассматриваемого параметра или переменной. Ясно, что это снова тот же вопрос о зависимости и (или) избыточности. Более подробно он освещается в гл. 3 и 4.

в. Безразмерные величины

Безразмерной величиной¹⁾ называется любая величина, физическая постоянная или любая их комбинация или комплекс, образованный так, чтобы все размерности²⁾ сократились. У безразмерной величины

1) Часто также пользуются равнозначными понятиями — безразмерный параметр или безразмерный комплекс.

2) Для того чтобы получить постоянные значения безразмерных комбинаций, они должны быть не только безразмерны, но также не иметь единиц измерения. Иначе могут появиться такие произвольные постоянные, как 12 дюйм/фут. Здесь уместно снова обратить внимание на приведенное Седовым замечание, касающееся измерения углов (см. разд. 2.2a).

сумма показателей степеней a , b , c и d равна нулю. Например, отношение удельных теплоемкостей γ имеет следующую размерность:

$$\gamma \triangleq \frac{c_p}{c_v} \text{ A } \frac{EM^{-1}T^{-1}}{EM^{-1}T^{-1}}, \\ E^0 M^0 T^0 \text{ A } 1,$$

где символ $\triangleq$ означает равенство по определению,

$\bar{E}$ A энергии,

M A массы,

$$c_p \triangleq \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p,$$

$$c_v \triangleq \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v,$$

где u — внутренняя тепловая энергия,

h — энтальпия,

T — температура.

Так как любая конечная величина в нулевой степени равна единице, то обычно для краткости говорят, что безразмерный комплекс имеет единицу измерения, равную 1. Безразмерные величины играют существенную роль во всех методах фракционного анализа.

2.3. Однородность размерностей в физических уравнениях

Как отмечалось Бриджменом [6] и др., не все математически корректные уравнения однородны относительно размерностей. Например, можно выбрать для анализа макроскопическую систему определенной массы при отсутствии релятивистских эффектов. Первый закон термодинамики для такой системы может быть записан как

$$Q = \Delta E + W, \quad (2.3)$$

а второй закон Ньютона имеет вид

$$F = ma. \quad (2.4)$$

Сложив уравнения (2.3) и (2.4), получим

$$F - ma = (\Delta E + W) - Q. \quad (2.5)$$

Уравнение (2.5) математически корректно, но не имеет физического смысла. Оно представляет собой два уравнения, так как удовлетворяется тогда и только тогда, когда равны нулю обе его части. Это является следствием того, что размерности обеих его частей всегда различны. Как уже отмечалось, физически это означает, что никогда нельзя сокращать массу и силу или работу (силу, умноженную на длину) и только силу. Следовательно, нельзя объединять любой член правой части с непарным членом левой части уравнения (2.5).

Таким образом, неоднородные по размерностям уравнения с математической точки зрения имеют смысл, но они ничего не дают для решения физических задач. Следовательно, можно считать, что все встречающиеся в науке и технике уравнения являются размернооднородными.

Из приведенного примера видно, что однородность размерностей требует, чтобы размерности всех членов уравнения были одинаковы, т. е. необходимо, чтобы каждый из членов Q , ΔE и W в уравнении (2.3) в отдельности имел размерность энергии, а величина F и произведение ma в уравнении (2.4) имели размерность силы в соответствующих системах единиц. Исходя из идеи однородности размерностей, а также того, что численное значение величины обратно пропорционально размеру принятой единицы измерения, Бриджмен доказал справедливость соотношения (2.1а), т. е. что размерность или единицы измерения любой вторичной величины можно выразить как произведение размерностей или единиц первичных величин в соответствующих степенях. Как мы увидим в следующем разделе, это утверждение приводит нас к π -теореме Бэкингема.

2.4. π -теорема. Формулировка и применение

Для четкой формулировки π -теоремы необходимо дать определение еще одному термину. В этой главе слово *параметр* будет использовано для обозначения любой первичной или вторичной величины, размерной

постоянной и безразмерной величины или любой комбинации из них¹⁾).

π -теорема устанавливает связь между функцией, выраженной через размерные параметры, и функцией в безразмерной форме. Под безразмерными параметрами мы понимаем комплексы размерных параметров, составленные так, что они не имеют размерностей. Полезно напомнить, почему имеет смысл выражать функции в такой безразмерной форме.

Во-первых, использование соответственно выбранных безразмерных параметров дает возможность сопоставлять и обобщать результаты. Таким образом, применение безразмерных комплексов часто позволяет рассматривать вместе явления, которые описываются различными уравнениями в размерной форме. Использование безразмерных параметров обеспечивает лучшее понимание явления в целом, и, следовательно, во многих случаях это путь к полному пониманию. Так как такой процесс позволяет сопоставить группу явлений, то, следовательно, используя безразмерные параметры, можно предсказывать протекание еще неисследованных явлений из этой группы, что нельзя сделать с помощью уравнений в размерной форме.

Во-вторых, применение безразмерных параметров уменьшает число независимых координат. Важность этого легко понять, если вспомнить, что функция одной независимой координаты может быть табулирована на одной строчке, двух независимых координат — на странице; таблица функции трех координат уже потребует книги, а для функции четырех координат нужна будет целая библиотека. Так как для вычисления или измерения каждого числа в этих таблицах может потребо-

¹⁾ В большей части литературы по анализу размерностей для этой цели обычно вместо параметра используется термин *переменная*. Однако слово «переменная» имеет совершенно другое и почти противоположное значение, когда применяется в основных уравнениях, описывающих процессы. Поэтому ради ясности используем другой термин, тем более что далее в этой книге мы рассмотрим более подробно основные уравнения. Как будет видно, такое использование термина «параметр» не противоречит определению, данному в гл. 1, и его использованию в основных уравнениях в гл. 3 и 4.

ваться от нескольких минут до многих месяцев, то польза от такого уменьшения количества координат очевидна даже без рассмотрения тех дополнительных математических трудностей, которые вытекают из необходимости иметь большее число независимых координат.

В любой физической задаче мы имеем один или более зависимых параметров, каждый из которых является функцией некоторых независимых параметров. Обозначим зависимый параметр через q_1 . Пусть число независимых параметров равно $m - 1$. Обозначим их как $q_2, q_3, \dots, q_m$. Тогда

$$q_1 = f_1(q_2, q_3, \dots, q_m), \quad (2.6a)$$

где f_1 — неизвестная функция. Уравнение (2.6a) эквивалентно соотношению

$$f_2(q_1, q_2, q_3, \dots, q_m) = 0, \quad (2.6b)$$

где f_2 — другая неизвестная функция. Теперь сформулируем π -теорему.

π -теорема¹⁾

Если имеется соотношение между m параметрами в виде

$$f_2(q_1, q_2, \dots, q_m) = 0, \quad (2.6b)$$

то можно найти эквивалентное соотношение между n безразмерными параметрами

$$f_3(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n) = 0, \quad (2.7a)$$

где число n определяется как

$$n = m - k. \quad (2.7b)$$

Здесь m — число параметров q в уравнении (2.6b) и k — наибольшее число параметров, содержащихся в первоначальном списке $q_1, q_2, q_3, \dots, q_m$, которые не могут быть объединены в какой-либо безразмерный комплекс.

¹⁾ Эту теорему иногда приписывают Бэкингеу [7] и называют π -теоремой Бэкингема. Однако в действительности она является результатом работы многих исследователей, включая Фурье, Рябушинского и Релея (см., например, [6]).

Следуя общепринятой практике, обратимся к безразмерным комплексам $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$, называемым комплексами π .

В своей первоначальной формулировке π -теоремы Бэкингом [7] установил, что k равно минимальному числу независимых размерностей, необходимых для образования размерностей всех параметров $q_1, q_2, \dots, q_m$. Обозначим это минимальное число через r . Позднее Ван Драйст [50] показал, что хотя обычно k равно r , имеются исключения и более общее правило записывается как

$$k \leq r. \quad (2.8)$$

Чтобы понять смысл исключений, а также некоторые другие вопросы, существенные для правильного использования π -теоремы, полезно остановиться на необходимых условиях применения π -теоремы, а также рассмотреть положения, лежащие в основе теоремы. Но прежде разберем простой пример, что даст нам более конкретную основу для такого рассмотрения. А затем перейдем к условиям применения π -теоремы и, наконец, приведем некоторые другие примеры использования этой теоремы.

Пример 2.1. Предположим, что мы изучаем установившееся, стабилизированное, ламинарное течение несжимаемой ньютоновской жидкости в круглой трубе. Допустим, что нам неизвестно уравнение для перепада давления. Чтобы определить вид уравнения, применим анализ размерностей. Если считать, что перепад давления Δp является функцией скорости V , длины трубы L , диаметра D , плотности ρ и вязкости μ , то можно написать

$$f_2(\Delta p, L, D, V, \mu, \rho) = 0. \quad (2.9)$$

Из рассмотрения размерностей всех шести параметров уравнения (2.9) следует, что минимальное число независимых размерностей, из которых могут быть образованы размерности этих параметров, равно трем, например размерности силы, длины и времени.

Следовательно, имеем $r=3$. Теперь найдем три из шести размерных параметров, которые не образуют безразмерного комплекса. Комбинация только плотности, диаметра и скорости не может быть безразмерной, поскольку из трех этих параметров лишь плотность имеет размерность массы. Поэтому заключаем, что в данном конкретном случае

$$k=3=r.$$

Согласно π -теореме, число необходимых безразмерных параметров равно

$$6-3=3.$$

Если невозможно найти какой-либо комплекс из трех параметров, который не может быть безразмерным, то следует постараться найти комплекс из двух параметров и т. д. до тех пор, пока число k не будет определено.

В нашем простом примере после внимательного исследования можно найти, что одной из безразмерных зависимостей является

$$f_3\left(\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2}, \frac{L}{D}, \frac{\rho V D}{\mu}\right)=0.$$

Так как мы хотим, чтобы перепад давления был зависимой переменной, то можно написать

$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2} = f_4\left(\frac{\rho V D}{\mu}, \frac{L}{D}\right). \quad (2.10)$$

Это соотношение совершенно корректно для рассматриваемой нами задачи. Однако целесообразно привести его к более удобному виду, содержащему тот же объем информации, но включающему меньшее число безразмерных параметров или комплексов π . *Физический смысл* этого следующий. Для полностью установившегося течения в круглом канале постоянного сечения существует определенная симметрия. В частности, перепад давления на единице длины трубы будет постоянным вдоль оси, так как поле скорости

не изменяется по длине трубы. В уравнении (2.10) предполагается, что эта длина измеряется в диаметрах трубы.

Мы должны искать соотношение вида

$$4f \triangleq \frac{\Delta P / (L/D)}{\frac{1}{2} \rho V^2} = f_5 \left(\frac{\rho V D}{\mu} \right) = f_5 (\text{Re}_D), \quad (2.11)$$

где $4f$ по определению есть коэффициент гидравлического трения; Re_D — число Рейнольдса, вычисленное по диаметру. Из большого числа экспериментов известно, что такой подход в данном случае успешен. Уравнение (2.11) хорошо описывает перепад давления вследствие трения для всех круглых труб независимо от специфических условий. Известно, что это один из немногих случаев, когда возможно точное и полное решение уравнений Навье — Стокса, совпадающее с экспериментальными данными.

Из того, что уравнение (2.11) нетрудно проверить, еще не следует, что оно по форме проще, чем (2.10). Мы еще раз вернемся к этому важному обстоятельству. Но сейчас снова обратимся к условиям применения π -теоремы и положенным в ее основу соображениям.

Имея в виду приведенный пример, приведем условия, которые должны быть выполнены при использовании π -теоремы:

- 1) в систему безразмерных параметров должны входить все параметры, имеющие физический смысл, включая все независимые параметры и один зависимый;
- 2) каждый параметр, содержащийся в первоначальном списке, должен входить в безразмерные комплексы π по крайней мере один раз;
- 3) размерности, используемые для образования размерностей физических параметров, должны быть независимыми или же лишние размерности должны быть скомпенсированы.

Во многих случаях указанные условия не выполняются явно, и поэтому желательно кратко их

обсудить. Так как в методе не предусматривается введение на каком-либо этапе дополнительных параметров, то список определяющих параметров должен содержать все параметры, существенные для процесса. Параметры, которые не входят в список, не войдут и в решение; это может привести к ошибке в анализе. Желательно, чтобы зависимый параметр был только в одном комплексе; однако это вопрос удобства, а не необходимости.

Как только что установлено, в конечном безразмерном уравнении не может быть параметров больше, чем в списке определяющих величин, но имеется возможность иметь их меньше. Однако если в безразмерном уравнении содержится меньше параметров, чем в списке, то это свидетельствует о том, что некоторые параметры из этого списка, не вошедшие в безразмерную формулу, несущественны для данной задачи. Если они важны, то должны войти в конечное безразмерное уравнение. В противном случае их не следует включать в список существенных для процесса физических величин, так как это почти всегда увеличивает число безразмерных комплексов π и существенно усложняет решение. Иными словами, включение несущественных параметров в список определяющих хотя в принципе и допустимо, но увеличивает число комплексов π , что нежелательно, так как противоречит основной цели анализа — снижению числа комплексов π до минимума.

Необходимым является также условие о независимых размерностях. Проще всего это можно показать на том же примере. Посмотрим, что произойдет, если будут взяты лишние независимые размерности. Допустим, что мы решили использовать размерности массы, длины, времени и силы. Поскольку в данном случае применим второй закон Ньютона, то, как уже отмечалось, окажутся лишние размерности. Можно найти, что для трубы любой длины имеется лишь два безразмерных комплекса, а если ввести понятие перепада давления на единицу длины, то решение следует искать только в зависимости от одного комплекса. Но таким путем невозможно найти решения, и мы в конце

концов приходим к противоречию. Следует поэтому выполнить одно из двух. Или мы должны иметь только независимые размерности, или как-то скомпенсировать лишние. Такой процесс компенсации осуществляется следующим образом. Для каждой лишней размерности, например для размерности массы в рассматриваемой задаче, вводим в список параметров размерную постоянную, показывающую, что размерность массы является лишней. В нашем примере к параметрам, содержащимся в уравнении (2.9), следует добавить g_c . Конечно, компенсацию можно осуществить и другими способами. Простейшим из них является исключение из списка размерностей лишней. Но в каждом случае способ выбирается самим исследователем.

В приведенном примере удалось перейти от размерного вида к безразмерному без применения алгебраических преобразований. Но имеется несколько формальных алгебраических методов выполнения таких промежуточных преобразований. Они использовались многими авторами и описаны в работах по анализу размерностей (см. [6, 13, 19, 28 и 37]). Книги по гидродинамике также содержат хорошее описание таких методов. Поэтому автор не останавливается на этом вопросе, тем более что для этого имеется еще одна причина.

Алгебраические операции, связанные с π -теоремой, необходимы для начинающего исследователя, но, как видно из примера 1, они значительно сокращаются, когда π -теорему применяет человек, имеющий опыт. Кроме уменьшения объема работы, для такого сокращения имеется и другая причина. Если конечное соотношение безразмерного вида содержит все параметры из списка определяющих параметров и требуемое число безразмерных комплексов, то оно правильно. Всегда имеется неограниченно большое число совершенно правильных безразмерных комплексов. Исследователь должен выбирать, руководствуясь удобством работы с конечным уравнением и договоренностью. Для рассматриваемого примера выбор определялся договоренностью. Действительно, в примере 2.1 безразлично, какие безразмерные комплексы

выбрать, за исключением коэффициента гидравлического трения и числа Рейнольдса, так как они широко применяются в литературе по гидродинамике. Если для получения безразмерных комплексов использовать формальные математические операции, то случайно можно получить и эти стандартные и общепринятые комплексы π . Но так как существует неограниченное число возможностей, то это маловероятно. Скорее в этом случае потребуется согласование ответа со стандартными комплексами. Поэтому обычно более целесообразно просто постараться найти желаемый вид путем внимательного рассмотрения, что и было сделано в приведенном примере. Такая операция даст ответ, столь же корректный, что и любая формальная процедура, если условия применимости π -теоремы выполняются.

Для того же самого примера мы кратко рассмотрели, как обращаться с вторичными величинами и размерными постоянными, которые имеются в заданном списке параметров. Не исключена вероятность того, что некоторые из существенных параметров могут быть первичными или безразмерными. Это не вызывает каких-либо трудностей. Действительно, в уравнении (2.9) две величины L и D являются первичными. Но с ними обращались точно так же, как и с любой вторичной величиной из списка параметров. Полезно отметить, что когда две величины из списка имеют одинаковую размерность, то безразмерный комплекс образуется с помощью их отношения.

Безразмерные величины, содержащиеся в списке существенных для процесса параметров, в окончательное решение входят без изменений.

2.5. Сущность π -теоремы

Обсуждение π -теоремы начнем с ответа на вопрос: как можно с помощью простого преобразования уравнения к безразмерному виду уменьшить число независимых параметров? Ответ может быть следующим. Любое, имеющее смысл соотношение, описывающее физический процесс, может предполагаться размерно

однородным. Как уже отмечалось, это означает, что 1) все члены в уравнении имеют одинаковую размерность; 2) размерности параметров, из которых образуются члены уравнения, представляют собой только произведение независимых размерностей в некоторых степенях. Эти два положения, а также наличие функциональной связи между параметрами составляют дополнительную информацию о данной задаче. С ее помощью можно получить более простой и полезный результат. Математические операции в этой процедуре состоят в следующем. Размерное соотношение имеет вид

$$f_2(q_1, q_2, \dots, q_m) = 0. \quad (2.66)$$

Известно также, что размерности m параметров в этом соотношении могут быть образованы в виде произведения r независимых размерностей в произвольных степенях. Кроме того, все члены суммы должны иметь одинаковые единицы измерения. Если используемые размерности независимы, то отсюда следует, что соответствующие размерности слагаемых уравнения должны иметь одинаковые степени. Это справедливо для каждой размерности независимо. Итак, для размерного уравнения существует одно дополнительное ограничивающее условие для каждой *независимой* размерности, из которых образуются размерности m параметров $q_1, \dots, q_m$. Каждое из этих r ограничивающих условий можно записать в виде алгебраического уравнения. Алгебраические действия таковы. Имеется $r+1$ соотношений между m величинами. Следовательно, если эти $r+1$ уравнений *линейно независимы*, то сразу из основной теоремы алгебры вытекает, что можно использовать r уравнений для исключения этих r величин и в результате получить уравнение, связывающее $m-r$ комплексов. Условие линейной независимости уравнений было использовано Ван Драйстом [50] при усовершенствовании первоначальной теоремы Бэкингема. Итак, если уравнения линейно независимы, то $k=r$; если это не выполняется, то $k < r$ и разность между k и r равна числу степеней избыточности в $r+1$ уравнениях.

Последнее положение легко видеть на примере подхода Лангхаара [28]. Лангхаар не только применил метод Якоби, но также дал способы нахождения k с помощью формальной матричной алгебры. Методы Лангхаара¹⁾ и Ван Драйста устраняют трудность, связанную с линейной независимостью уравнений.

2.6. Дополнение Хантли

Недавно Хантли [19] сделал важное дополнение, касающееся физических основ π -теоремы. В основе дополнения лежит то, что можно использовать большее число независимых размерностей, если четко разграничивать различные операции и понятия, так как в соответствии с π -теоремой чем больше число независимых размерностей, тем меньше число окончательных безразмерных комплексов и тем проще получить решение.

В частности, Хантли отмечает, что имеется различие между длиной, измеряемой в направлении x , и длиной, измеряемой в направлении y . Хантли также различает инерционные свойства массы, ее запас энергии и тепловую функцию.

Таким образом, Хантли не заменяет длину в направлении x длиной в направлении y или z , а рассматривает три независимые размерности, по-разному характеризующие длину. Типичным примером этого положения может служить единица теплопроводности

$$k_D \text{ ккал/час} \cdot \text{м}^2 \cdot (^\circ\text{C/м}).$$

Нельзя сокращать метр в направлении теплового потока и метр, входящий в размерность площади (м^2), нормальной к тепловому потоку. Такая форма стала обычной, поскольку после сокращения в знаменателе результирующего выражения утрачивается физический смысл. Приведенное рассуждение можно было бы провести и для килограмм-силы и килограмм-массы. С точки зрения Хантли, измерение длины в направле-

¹⁾ Метод Ван Драйста уже приведен ранее и используется при дальнейшем изложении. Желающим познакомиться с методом Лангхаара рекомендуется работа [28].

нии x производится с помощью другой рабочей операции, чем в направлении y , потому что эти операции проводятся в различных плоскостях. В векторном уравнении нельзя смешивать составляющую любой векторной величины по оси x с составляющими по осям y или z . Подобные замечания относятся к инерционной и тепловой функциям. Хантли показывает, что одинаковые размерности двух функций нельзя сокращать, если физическая природа этих функций различна.

Учитывая такие различия путем использования индексов, Хантли получил улучшенные результаты для многих известных задач. Там, где это было можно, дополнение Хантли использовано в приводимых ниже примерах. Желаящим детальнее познакомиться с идеей Хантли рекомендуется обратиться к его работе [19].

2.7. Примеры приложений анализа размерностей

Метод анализа, примененный в примере 2.1, а также в примерах, приводимых ниже, имеет несколько названий, но ни одно из них нельзя считать общепринятым. Сюда относятся: анализ размерностей, метод размерностей, метод π -теоремы, метод Бэкингема и метод Бриджмена. Ниже эти названия применяются равнозначно. Так как термин *анализ размерностей* более принят, то он будет применяться чаще.

Пример 2.2. Рассмотрим задачу о теплообмене, используя анализ размерностей. Это задача, полное решение которой при относительно простых граничных условиях известно, и поэтому она является хорошим примером для сопоставления результатов, получаемых с помощью различных методов.

В задаче отыскивается время нагрева однородного твердого тела произвольной формы. Одной из формулировок задачи является следующая.

«Каково минимальное время нагрева тела до такого состояния, когда каждая его частица находится при температуре, большей 80% избыточной температуры печи?»

Прежде чем применить π -теорему, необходимо составить список интересующих нас параметров. В данной задаче мы можем предположить, что соответствующий список параметров имеет вид

$$f(t, L, M, N, \rho, c_p, \lambda) = 0, \quad (2.12)$$

где t — необходимое время; L, M, N — размеры тела в направлении осей x, y и z ; ρ — плотность; c_p — удельная теплоемкость и λ — теплопроводность тела. По-видимому, коэффициент конвективной теплоотдачи на поверхности тела также входит в задачу, но не совсем ясно, когда его следует учитывать. В приведенном списке параметров время считаем зависимым параметром, а температуру не учитываем. Последнее требует обоснования, но при таком методе анализа это принимается без доказательств, так как только в этом случае получается правильное решение; обоснование можно получить с помощью более подробного анализа ¹⁾.

Если далее допустить, что уравнение (2.12) содержит корректные параметры, то можно применять π -теорему. В уравнение (2.12) входят семь параметров. Размерности этих семи параметров могут быть получены с помощью четырех независимых размерностей: массы, времени, температуры и длины. Можно найти четыре параметра (например, t, L, λ и ρ), которые не образуют безразмерного комплекса. Следовательно, $k=r$, и, согласно π -теореме, безразмерная функция должна содержать три безразмерных комплекса π . После детального рассмотрения можно найти

$$\pi_1 = \frac{L}{M},$$

$$\pi_2 = \frac{L}{N},$$

$$\pi_3 = \frac{L^2}{\alpha t} = \text{число Фурье},$$

где $\alpha = \lambda / \rho c_p$ — коэффициент температуропроводности. Чтобы иметь подобное изменение температур, необхо-

¹⁾ См. разд. 4.4.

димо и достаточно иметь геометрическое подобие и одно и то же число Фурье. Однако необходимо, чтобы в течение некоторого определенного времени температура превышала данное значение. Если обозначить это время нагрева через t_0 , а время, необходимое для того, чтобы центр тела достиг требуемой температуры, определяемой данным значением π_3 (число Фурье), через t_f , то решением будет

$$t_{\text{мин}} = t_f + t_0 = t_f + \text{const},$$

а t_f находится из условия $L^2/\alpha t_f = \text{const}$. Можно сделать заключение, что два геометрически подобных тела будут иметь подобное изменение температур во времени, если

$$\frac{L^2}{\alpha} = \text{const}.$$

При фиксированных α величина t_f изменяется как

$$t_f \approx L^2,$$

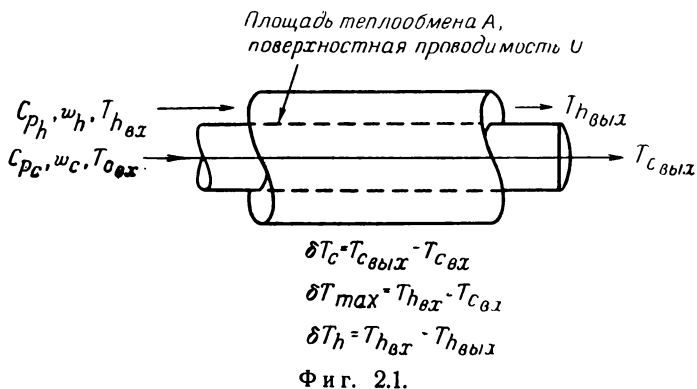
а при фиксированной геометрии

$$t_f \approx \frac{1}{\alpha}.$$

Как известно, это и есть необходимые условия подобия в задачах теплопроводности. Итак, с помощью анализа размерностей получена определенная информация, но многое еще неизвестно. Во-первых, не ясно, когда можно пренебречь π_1 , π_2 или π_3 , или когда нужно учитывать наличие конвекции на поверхности тела. Вопрос о необходимости включения температуры в комплексы π был решен путем обращения к другим источникам информации. И наконец, были получены необходимые физические переменные исходя из того, что мы «в данной задаче можем предположить, что соответствующий список параметров имеет вид...». Очевидно, такой подход является интуитивным для физического обоснования найденного решения. Поскольку эти вопросы представляются существенными, то мы вернемся к ним в гл. 5, после того, как будет приведено много других сведений.

Обратимся вновь к вопросу о том, почему величины в уравнении (2.12) были названы параметрами, а не переменными. Они являются параметрами в смысле определения, приведенного в гл. 1, и не являются переменными, понимаемыми в обычном смысле в задачах теплопроводности. Решение, полученное методом анализа размерностей, также включает безразмерные параметры, а не переменные. Следует отметить, что это относится ко всем примерам, которые приводятся далее. К сожалению, эти величины часто в литературе называются переменными, так как имеется стремление сгладить различие между параметрами и переменными. Это различие станет более ясным после рассмотрения некоторых существенных вопросов в гл. 4.

Пример 2.3. Рассмотрим задачу о простом прямоточном теплообменнике (фиг. 2.1). Требуется установить группу безразмерных комплексов, характеризующих работу всех теплообменников такого типа. Для



простоты считаем, что имеются две концентрические трубы.

Из рассмотрения фиг. 2.1 следует, что определяющими параметрами этой задачи являются

$$f(U, A, \delta T_{max}, \delta T_h, \delta T_c, w_c, w_h, c_{pc}, c_{ph}) = 0. \quad (2.13)$$

Уравнение содержит девять параметров. Их размерности можно представить с помощью четырех независимых размерностей m , L , t и T . Четыре параметра U , A , c_{pc} и δT_h не образуют безразмерного комплекса. Из π -теоремы вытекает, что для списка параметров, содержащихся в уравнении (2.13), должны существовать четыре независимых комплекса π и один зависимый. Но решение этой задачи известно: оно состоит из двух независимых комплексов и одного зависимого (см., например, работы Кэйса и Лондона [23] или Мак-Адамса [32], где приводится полное решение). Поэтому очевидно, что в нашем решении что-то является неправильным. Действительно, неправильны два положения.

Первым затруднением является наличие в соотношении (2.13) не одного, а двух зависимых параметров. Хотя сразу трудно обнаружить, но при внимательном рассмотрении соотношений между параметрами можно найти, что в список определяющих параметров следует включить лишь две разности температур. Это означает, что для любой из трех указанных разностей температур и всех остальных параметров уравнения (2.13) две другие разности температур являются фиксированными. Например, можно исключить δT_c ; тогда получим

$$f(U, A, \delta, T_h, \delta T_{\max}, w_c, w_h, c_{ph}, c_{pc}) = 0. \quad (2.14)$$

Но еще остается восемь параметров, описываемых с помощью четырех независимых размерностей. Тогда в соответствии с π -теоремой необходимы три независимых и один зависимый безразмерный комплекс. Поэтому если бы мы и смогли найти более сложную зависимость между параметрами в данной задаче, то и тогда не получили бы желаемый результат без дополнительной информации. Полученное решение по существу правильно, но много хуже известного решения.

Посмотрим, выполнены ли условия применения π -теоремы. Согласно первому условию, необходимо

включать один зависимый и все независимые параметры. Это выполнено. Согласно второму условию, в безразмерные комплексы должны входить, по крайней мере один раз, все параметры из списка определяющих параметров. В данном случае это не представляет трудности и условие выполняется. Система использованных независимых размерностей массы, длины, температуры и времени является хорошо известной системой независимых параметров, и, следовательно, условие 3 выполнено.

Наиболее сложным в данной задаче является то, что отклонение от π -теоремы необъяснимо на основе дополнений Ван Драйста и Лангхаара к теории линейно независимых уравнений. Дело не только в том, что, как мы установили, список содержит четыре первичные величины, которые не образуют безразмерного комплекса, но и в том, что это отклонение не может быть объяснено линейной зависимостью между размерными уравнениями. В частности, если система уравнений не является линейно независимой, то действительное число необходимых комплексов больше, чем определенное согласно первоначальной формулировке Бэкингом π -теоремы. Но в этом случае действительное число необходимых комплексов меньше их числа, определенного в приведенном решении согласно π -теореме.

Итак, мы нашли исключение в применении π -теоремы, которое оказывается необъяснимым с точки зрения только анализа размерностей. Остается показать, можно ли с помощью других методов выяснить причину возникновения этого исключения. И если объяснение будет найдено, то разумно ли ожидать, что опытный исследователь определит причину затруднения при использовании лишь методов анализа размерностей.

Пример 2.4. Теперь, используя π -теорему, исследуем практическую задачу, решение которой неизвестно. Рассмотрим, как оценивать работу центробежных компрессоров. Такая задача более сложна, чем

ранее рассмотренные. Здесь уже нельзя написать единственную систему дифференциальных уравнений и граничных условий, полностью характеризующих работу всего класса систем, которые мы рассматриваем.

Начнем опять с попытки интуитивно установить список определяющих параметров. Считаем, что для данной задачи имеют значение следующие параметры: расход Q , отношение давлений p_r , скорость N , радиус рабочего колеса на входе r_i , радиус рабочего колеса на выходе r_0 , длина L , характеризующая диффузор, вязкость μ , плотность ρ , скорость звука a и отношение удельных теплоемкостей γ рабочей жидкости.

Тогда можно написать следующее функциональное соотношение:

$$f(Q, p_r, N, r_i, r_0, L, \mu, a, \gamma, \rho) = 0.$$

Размерности десяти параметров записываются с помощью трех независимых размерностей — длины, массы и времени. Однако необходимо знание инерционных свойств массы m_i и функции внутренней энергии массы m . Согласно дополнению Хантли, можно использовать четыре независимые размерности. Однако с учетом ограничения Ван Драйста находим, что нет таких четырех параметров, которые бы не образовывали безразмерный комплекс. Можно найти несколько комбинаций из трех параметров, которые не образуют безразмерный комплекс, например Q , μ и ρ . Следовательно, берем $k=3$, хотя $r=4$. Согласно π -теореме, необходимы $10 - 3 = 7$ комплексов, из которых шесть будут независимыми.

Но ясно, что нельзя работать эффективно с шестью независимыми координатами. Очевидно также, что приведенные геометрические характеристики не совсем полные. В качестве первого шага к возможному решению задачи ограничимся рассмотрением геометрически подобных машин, которые можно характеризовать одной длиной, например D . Тогда число комплексов уменьшится на два. Для упрощенной задачи

решение можно записать в виде следующих комплексов:

$$\pi_1 = p_r,$$

$$\pi_2 = \frac{Q}{ND^3},$$

$$\pi_3 = \text{Re} = \frac{\rho Q}{D\mu} \quad (\text{число Рейнольдса}),$$

$$\pi_4 = M = \frac{Q}{D^2 a} \quad (\text{число Маха}),$$

$$\pi_5 = \gamma.$$

Так получается потому, что применена лишь π -теорема, но в действительности это решение нельзя использовать. Четыре безразмерных комплекса — это все еще слишком много. Чтобы получить решение задачи, которое можно использовать, необходимо уменьшить число независимых комплексов. Реально этого можно достигнуть по крайней мере двумя различными способами.

Первый из них состоит в установлении некоторой комбинации из двух или большего числа независимых параметров, которые являются характеристиками рассматриваемой задачи. Это означает преобразование параметров к некоторому более общему виду. Из анализа размерностей никак не вытекают способы таких преобразований. Для их определения необходимо провести дополнительные экспериментальные или теоретические работы.

Вторым способом является установление определенных интервалов рабочих характеристик, при которых можно пренебречь влиянием одного или более независимых комплексов на интересующий нас зависимый комплекс, например на отношение давлений. Из анализа размерностей не следует, как искать такой интервал. Здесь также необходимы дополнительные теоретические или эмпирические доказательства. В нашей частной задаче можно допустить, исходя из других известных решений, что влиянием числа Маха и γ можно пренебречь, если везде в компрессоре квадрат числа Маха мал по сравнению с единицей, а влияние числа Рейнольдса незначительно, если корень квад-

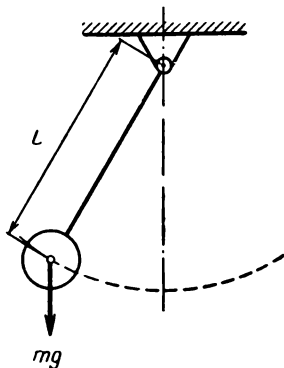
ратный из Re , определяемого по ширине проходного сечения и длине лопаток, велик по сравнению с единицей. Таким образом, для известных и по крайней мере представляющих практический интерес интервалов можно найти подходящие соотношения. В действительности же необходима бóльшая информация такого рода, но такие вопросы выходят за рамки и цели данной книги. Приведенные рассуждения достаточны, чтобы показать, что сам анализ размерностей полезен для данной задачи. Но он должен быть значительно дополнен для определения решения, представляющего практический интерес. В частности, в рассмотренной задаче выяснилась невозможность с помощью анализа размерностей ответить на вопрос такого рода, как: в каком случае можно пренебречь данным безразмерным комплексом?

Пример 2.5. Из разобранных примеров видны некоторые недостатки анализа размерностей, являющегося одним из методов фракционного анализа. Теперь полезно рассмотреть типичную задачу, для которой применение этого метода дает хорошие результаты. Пусть простой математический маятник совершает малые колебания, как показано на фиг. 2.2.

Рассмотрим задачу нахождения параметров, определяющих частоту собственных или свободных колебаний математического маятника. Если рассмотреть, какие из параметров следует использовать при написании уравнений, то можно найти список определяющих параметров

$$f(\omega, L, m, g) = 0,$$

где ω — частота собственных колебаний,
 L — длина маятника,



Фиг. 2.2.

m — масса груза,

g — локальное ускорение силы тяжести.

Соответствующая система независимых размерностей состоит из размерностей массы, длины и времени. Согласно π -теореме, получаем $4-3=1$ независимый комплекс. Применяя метод Ван Драйста, находим, что три величины L , m и g не образуют комплекса, так что $k=r$, и поэтому возможно характеризовать решение одним безразмерным комплексом. Анализируя список определяющих параметров, нетрудно увидеть, что лишь в один из четырех параметров входит масса. Отсюда можно сделать следующий вывод. Масса не может входить в соответствующий безразмерный комплекс, так как она не сокращается при комбинации с другими параметрами. Поэтому нужно исключить массу как из списка параметров, так и из списка независимых размерностей. Можно найти два параметра, которые не образуют безразмерного комплекса, например g и L . А всего в списке параметров их три. Число необходимых комплексов по-прежнему остается равным одному, и тогда можно найти следующий комплекс:

$$\pi_1 = \frac{\omega^2 L}{g}.$$

Так как имеется только один комплекс, то он, очевидно, является постоянной величиной. Следовательно, можно написать

$$\omega^2 = \frac{Cg}{L}.$$

Это и есть решение, в котором неизвестно только значение постоянной C . Для такой простой задачи применение анализа размерностей дает хорошие результаты. Получено, что частота колебаний не зависит от массы маятника, и найдено решение в явном виде.

Рассмотрение приложений анализа размерностей закончим более сложной задачей механики.

Пример 2.6¹⁾. Рассмотрим механическую систему, состоящую из изогнутой под действием данной нагрузки

¹⁾ Пример основан на работе проф. Д. И. Худсона [18] и взят по рекомендации проф. С. Х. Крандала.

ки балки, когда известны граничные условия. Постараемся найти модель, с помощью которой можно было бы определять динамические или вибрационные характеристики любой балки.

В рассматриваемой задаче можно предположить на основании опыта, что частота колебаний ω зависит от следующих параметров:

$$\omega = \omega(E, \mu, \rho, F_j, a_i, g),$$

где E — модуль упругости;

μ — коэффициент Пуассона;

ρ — плотность;

F_j — условия, достаточные для фиксирования нагрузки, всего q условий;

a_i — размеры, достаточные для установления геометрии балки, всего n размеров

g — гравитационная постоянная, вес единицы массы.

Независимыми являются размерности массы, длины и времени. Легко найти три параметра, которые не образуют безразмерного комплекса, например F_1 , a_1 и ρ . Можно также определить отношения сил, отнеся любую из них F_i к F_1 . Обозначим эти отношения через α_j . Аналогично можно образовать отношения длин, деля их на длину a_1 . Такие отношения обозначим через β_i . Применяя π -теорему, получаем

$$\frac{\omega^2 a_1}{g} = f\left(\frac{\rho g a_1}{E}, \mu, \alpha_j, \beta_i\right), \quad (2.15)$$

где j принимает значения от 1 до $q-1$, а i от 1 до $n-1$. Тогда число независимых комплексов π в уравнении (2.15) равно числу сил из первоначальных условий для нагрузок плюс число длин из первоначальных геометрических условий, т. е. $q+n$. [Это лишь совпадение, а не фундаментальный результат, так как он вытекает из того факта, что в уравнении (2.15), кроме α_j и β_j , имеются два других безразмерных комплекса; количество α_j и β_j на единицу меньше, чем определяющих параметров, так как мы разделили параметры соответственно на F_1 и a_1 .]

Из уравнения (2.15) можно получить условия, достаточные для подобия частот колебаний в модели и

образце. Вводя обозначения $(\quad)_m$ для модели и $(\quad)_p$ для образца имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho g l}{E}\right)_m &= \left(\frac{\rho g l}{E}\right)_p, \\ \mu_m &= \mu_p, \\ (\alpha_j)_m &= (\alpha_j)_p, \quad j = 1, 2, \dots, q-1, \\ (\beta_i)_m &= (\beta_i)_p, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Согласно условиям (2.16), необходимо, чтобы используемые материалы имели одинаковые коэффициенты Пуассона и чтобы строго выполнялись все условия геометрического подобия и подобия нагрузок. В общем ограничивающие условия таковы, что проводимое на такой основе моделирование едва ли имеет практическое значение.

Для того чтобы избежать такой трудности, исследуем более простой случай. Допустим, что рассматривается простая прямоугольная балка длиной L , высотой h и шириной b . Предположим также, что это обычная консольная балка и единственной нагрузкой является масса ρ на единицу длины. Тогда список определяющих параметров будет таков:

$$\omega = \omega(E, \mu, \rho, b, h, L, g).$$

Так как снова имеются три независимые размерности и восемь параметров, то, согласно π -теореме, должно быть пять безразмерных комплексов. Решение имеет следующую структуру:

$$\frac{\omega^2 L}{g} = f\left(\frac{\rho g L}{E}, \mu, \frac{b}{L}, \frac{h}{L}\right). \quad (2.17)$$

При этом условиями моделирования являются

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\rho g L}{E}\right)_m &= \left(\frac{\rho g L}{E}\right)_p, \\ \left(\frac{b}{L}\right)_m &= \left(\frac{b}{L}\right)_p, \\ \left(\frac{h}{L}\right)_m &= \left(\frac{h}{L}\right)_p, \\ \mu_m &= \mu_p. \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Но по-прежнему имеется слишком много условий для создания модели, и, таким образом, даже для такой простой задачи при использовании лишь π -теоремы не получаются полезные соотношения. С точки зрения фракционного анализа желательно найти решение, включающее меньше условий, чем (2.18). Это могли бы быть приближенные законы моделирования для данной задачи, или комбинация параметров в усовершенствованном виде, или точные условия, при которых некоторыми комплексами π в уравнении (2.17) можно пренебречь. В основном это те же вопросы, с которыми мы уже столкнулись в примерах 2.2 и 2.4. Отличие состоит в том, что здесь решение проводилось для получения закона моделирования, а не нужных соотношений. На этих вопросах мы вновь остановимся далее после того, как будут даны другие типы решений.

2.8. Выводы

Приведенные примеры показывают, что π -теорема в каждом случае дает некоторую ценную информацию об изучаемой задаче. В ряде простых задач, таких, как задача о математическом маятнике, получаются полные и правильные решения. π -теорема ясно показывает, что использование безразмерных комплексов приводит к уменьшению числа независимых параметров и обеспечивает возможность сопоставления и обобщения результатов.

Кроме того, π -теорема является хорошей основой для понимания природы единиц, размерностей и связанных с ними положений, хотя эти вопросы здесь лишь затрагиваются.

Однако π -теорема как один из методов фракционного анализа имеет четыре недостатка, что видно из приведенных примеров.

1. Отсутствуют прямые способы нахождения определяющих параметров. По существу метод размерностей применяется тогда, когда параметры задачи уже определены. Анализ размерностей дает слишком мало или вообще ничего не дает для исследования

и проверки тех физических данных, которые используются для нахождения параметров, за исключением чисто интуитивного выбора их из системы физических характеристик.

2. Существуют некоторые отклонения от π -теоремы, которые необъяснимы на основе дополнений Ван Драйста и Лангхаара к теории линейно независимых уравнений. В некоторых случаях зависимые переменные должны быть исключены из комплексов π ; в других же в действительности необходимо иметь меньше параметров, чем их получается из π -теоремы. Причина таких расхождений не следует из необходимых условий применения π -теоремы и ее сущности.

3. π -теорема не указывает условий, при которых можно пренебречь одним или несколькими комплексами π . Последнее, однако, является существенным для установления правил приближенного подобия и соотношений для сложных систем.

4. Из π -теоремы не ясны способы определения безразмерных наиболее важных для данной задачи комплексов и нельзя установить, какие из них обеспечат лучшие соотношения для частных задач. Практически же почти всегда существует определенное различие в степени полезности разных π -комплексов, которых может быть очень много.

После этих замечаний перейдем непосредственно к обсуждению других методов фракционного анализа, а затем в гл. 5 рассмотрим отмеченные преимущества, недостатки π -теоремы и исключения в ее применении.

МЕТОД ПОДОБИЯ И ВВЕДЕНИЕ В ФРАКЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ОБЩИХ УРАВНЕНИЙ

3.1. Введение

В XIX столетии многие исследователи, в том числе Релей, решали обычно задачи фракционного анализа путем прямого использования идеи подобия и отношения сил. В XX веке такой метод стал менее популярным и почти полностью был заменен методом, использующим π -теорему, за исключением работ нескольких авторов в области механики жидкости (см., например, [52] гл. 7). В настоящее время этот метод используется столь редко, что не существует общепринятого названия для него; в этой книге мы будем называть его методом подобия.

Попытаемся обсудить причины пренебрежения методом подобия за последнее время. В известных автору исследованиях не разработаны основы метода, позволяющие применять его во всех задачах фракционного анализа. Несмотря на это, метод подобия имеет ряд полезных свойств и очень естественно приводит к использованию во фракционном анализе основных уравнений, описывающих физические процессы. По этим двум причинам уместно попытаться более широко и основательно рассмотреть метод подобия.

3.2. Метод подобия

Метод подобия в своей основе является сравнительно простым. Описанный в литературе XIX столетия и используемый в последующих приложениях в механике жидкости, этот метод включает следующие две операции:

1. Перечисляются силы, которые полагаются наиболее существенными для задачи, включая зависимые

и все независимые силы. (Термин «сила» здесь используется в том же смысле, что и в механике, а не в смысле обобщенной силы, о которой идет речь в некоторых современных работах, например в термодинамике необратимых процессов.) Каждая из этих сил выражается затем через параметры задачи с помощью физических представлений или соображений размерности.

2. Характеризующие задачу безразмерные группы создаются путем образования упомянутых выше отношений сил и линейных размеров, необходимых для обеспечения геометрического подобия.

Число комплексов π , построенных из отношений сил, равно числу независимых сил. Ради удобства принято использовать зависимую силу только в одном комплексе: в этом случае она является явной функцией независимых сил.

Внешне невелика разница между списком сил, характеризующих данный процесс, и перечнем величин, из которых состоят выражения для этих сил. Следовательно, по-видимому, нет существенного различия между методом подобия и методом π -теоремы, рассмотренным в гл. 2. Однако метод подобия имеет определенные неотъемлемые преимущества и, кроме того, приводит к тем же результатам, что и π -теорема.

Обычно метод подобия постулирует следующее: «Две системы ведут себя подобным образом, если выполняется подобие геометрическое, кинематическое и динамическое, а эти условия в системах будут выполняться, если эти две системы геометрически подобны и если отношения всех существенных для данного процесса сил одинаковы в этих системах».

Вероятно, одна из причин того, что этот метод не пользуется популярностью в последнее время, состоит в том, что последняя половина постулата далеко не достаточна, чтобы охватить все явления. В частности, во многих физических процессах можно указать величины, которые вовсе не зависят от сил, например такие, как поток тепла или поток электричества. Действительно, вторая половина постулата основана на

чисто механической точке зрения. Такой взгляд прева-лировал в XIX столетии. Но он не подтверждается современными концепциями термодинамики. Необходи-мо некоторое обобщение основных понятий.

Основы для такого обобщения даны в разд. 3.26. Но прежде чем перейти к нему, рассмотрим пример, в котором используются лишь отношения сил, для того чтобы пояснить детали метода.

а. Использование отношений сил

Силы, встречающиеся в природе, чрезвычайно раз-нообразны, и поэтому невозможно рассмотреть их все. Так как цель этой книги состоит в уяснении метода исследования, то достаточно рассмотреть одну из за-дач. Мы выберем задачу из области механики жид-кости, так как метод, о котором идет речь, хорошо развит именно в этой области. Таблица основных без-размерных параметров, аналогичная той, которая по-лучается при исследовании механики жидкости, мо-жет быть составлена и для других областей. Кроме того, построение таких таблиц является весьма полез-ным как для упражнений, так и для справок. Метод построения таких таблиц вынуждает рассмотреть об-щие факторы, и особенно тщательно факторы, суще-ственные для рассматриваемой задачи; он расширяет возможности физического понимания привычных нам безразмерных параметров и позволяет их стандарти-зировать. Что особенно важно, метод дает прочную основу для уточнения параметров при дальнейшем накоплении экспериментальных данных.

В механике жидкости имеется шесть весьма общих сил. Используя их, можно образовать пятнадцать безразмерных отношений из двух сил. В табл. 3.1 дано определение этих сил, приведены их размерности и пятнадцать независимых отношений между силами.

Из таблицы видно, что первые шесть безразмер-ных чисел содержат наиболее распространенные в ме-ханике жидкости безразмерные группы. Среди них отсутствуют только число Маха, коэффициент тре-ния и отношение теплоемкостей. Легко показать, что

Отношения главных сил в механике жидкости

$F_V A \mu V L$	$F_P A \Delta p L^2$	$F_C A E_s L^2$	$F_S A S L$	$F_G A \rho L^3 g$	
$\frac{F_I}{F_V} = \frac{\rho V L}{\mu}$ Число Рейнольдса	$\frac{F_P}{F_I} = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho V^2}$ Коэффициент давления	$\frac{F_I}{F_C} = \frac{V^2}{E_s} \frac{\rho}{\rho}$ Число Кольби	$\frac{F_I}{F_S} = \frac{\rho V^2 L}{S}$ Число Вебера	$\frac{F_I}{F_G} = \frac{V^2}{g L}$ Число Фруда	$F_I A \rho V^2 L^2$
	$\frac{F_P}{F_V} = \frac{\Delta p L}{\mu V}$ Число Стокса	$\frac{F_C}{F_V} = \frac{E_s L}{\mu V}$	$\frac{F_S}{F_V} = \frac{S}{\mu V}$	$\frac{F_G}{F_V} = \frac{\rho L^2 g}{\mu V}$	F_V
		$\frac{F_C}{F_P} = \frac{E_s}{\Delta p}$	$\frac{F_S}{F_P} = \frac{S}{\Delta p L}$	$\frac{F_G}{F_P} = \frac{\rho L g}{\Delta p}$	F_P
			$\frac{F_S}{F_C} = \frac{S}{E_s L}$	$\frac{F_G}{F_C} = \frac{\rho L g}{E_s}$	F_C
				$\frac{F_G}{F_S} = \frac{\rho L^2 g}{S}$	F_S

Силы, наиболее распространенные в механике жидкости:

Сила инерции $\triangleq F_I$
 Сила вязкости $\triangleq F_V$
 Сила давления $\triangleq F_P$
 Сила упругости $\triangleq F_C$
 Сила поверхностного натяжения $\triangleq F_S$
 Сила гравитации $\triangleq F_G$

Размерности этих сил:

$F_I A \rho V^2 L^2$
 $F_V A \mu V L$
 $F_P A \Delta p L^2$
 $F_C A E_s L^2$
 $F_S A S L$
 $F_G A \rho L^3 g$

Здесь

ρ — массовая плотность;
 L — длина;
 V — скорость;
 μ — вязкость;

E_s — изэнтропическая величина модуля сжатия;
 S — коэффициент поверхностного натяжения;
 g — локальное ускорение гравитации.

число Маха представляет собой корень квадратный из числа Коши, которое входит в состав этой таблицы, а коэффициент трения есть то же самое, что и коэффициент давления, или число Эйлера, т. е. отношение сил давления, действующих на поверхность, к силам инерции¹⁾. Отношение теплостоемкостей из рассмотрения приведенных здесь сил, очевидно, найти нельзя. Заметим, что среди пятнадцати простейших чисел в табл. 3.1 только шесть настолько широко используются, что получили общепринятые названия.

Появление в табл. 3.1 наиболее распространенных групп, по крайней мере для несжимаемого газа, конечно, не является случайным. Эти группы широко используются не только в силу исторических причин, но также и потому, что выраженные непосредственно через отношения сил, существенных для рассматриваемого процесса, они имеют практически полезную, простейшую и легко интерпретируемую форму. В самом деле, хотя число Маха обычно используется в окончательном решении, величина, которая почти всегда появляется в основных уравнениях, описывающих рассматриваемый процесс, есть квадрат числа Маха, или число Коши; последнее приведено в табл. 3.1. Во многих случаях использование M^2 в качестве переменной упрощает уравнение и, кроме того, исторически, вероятно, более оправдано. Однако разница не столь существенна, а обсуждение предпринято, чтобы показать, что использование отношений сил часто позволяет получить более полезную комбинацию величин.

Пример 3.1. Вернемся к задаче о развитом стабилизированном ламинарном потоке внутри трубы, которая была решена путем использования π -теоремы в примере 2.1. В гл. 2 найдено, что коэффициент трения может быть выражен как функция числа Рейнольдса. Однако для того, чтобы получить такой ответ в дополнение к π -теореме оказалось необходимым ввести условие симметрии. Этот ответ является

¹⁾ Различие состоит в направлении действия рассмотренной силы.

точным (корректным) в том смысле, что переменные могут быть отложены на графике зависимости коэффициента трения от числа Рейнольдса, причем в ламинарной области все опытные данные ложатся на одну линию. (См., например, [34] или любой учебник по элементарной механике жидкости.)

Используя метод подобия, попытаемся получить решение для перепада давления в круглой трубе, пользуясь только таблицей 3.1.

Рассматривая наш набор сил, характерный для механики жидкости, допустим, что в этом примере гравитационная сила, сила поверхностного натяжения и сила упругости не имеют существенного значения. Тогда остаются сила инерции, сила давления и сила вязкости. Одна из этих сил является зависимой. Таким образом, получаются два безразмерных комплекса π , один независимый и один зависимый. Из табл. 3.1 этими безразмерными комплексами должны быть число Рейнольдса и коэффициент давления. Коэффициент давления легко преобразуется в коэффициент трения с помощью уравнения, которое служит определением коэффициента трения. Таким образом, оказалось, что при помощи таблицы, построенной для механики жидкости, можно получить ответ для данной задачи, найденный ранее с помощью π -теоремы, при наличии тех же сведений о процессе. Ответ получается автоматически в виде комплексов, составленных из обычных величин, характерных для этого примера, в форме, весьма полезной для использования и легко понимаемой. Уменьшению числа Рейнольдса соответствует увеличение влияния вязкого трения, а, следовательно, и увеличение коэффициента трения.

6. Обобщение метода подобия

В разд. 3.2а показано, что некоторые задачи фракционного анализа, связанные с потоком жидкости, могут быть решены путем рассмотрения сил, существенных для данной задачи. Этот способ решения основан на гипотезе, которая заключается в том, что полное подобие имеет место в потоке жидкости, если соблю-

дается геометрическое, кинематическое и динамическое подобие, а эти три типа подобия будут иметь место, если подобны геометрия и все силы.

Однако, как уже отмечалось, такое определение недостаточно, чтобы решать многие типы задач. Действительно, нельзя решать задачи для сжимаемого потока, так как в этом случае, кроме отношений сил, в список независимых безразмерных комплексов часто необходимо вводить по крайней мере отношение теплоемкостей. Поэтому возникает вопрос: какие условия могут гарантировать подобное поведение двух систем? ¹⁾. Ответ на этот вопрос дает следующий постулат.

Если две системы описываются одинаковыми дифференциальными уравнениями и имеют одинаковые граничные условия и если значения всех параметров в этих уравнениях и граничных условиях равны, то эти две системы должны быть подобными при условии существования единственности решения системы уравнений, удовлетворяющего граничным условиям.

Этот постулат является достаточным, но не необходимым, так как вполне возможно для двух различных систем уравнений иметь одинаковые решения и, таким образом, обеспечить подобие для некоторых физических систем при разных граничных условиях. Такой случай встречается редко; его можно обнаружить, если известны решения. Хотя для фракционного анализа не имеет значения, известно решение или нет, достаточность условий однозначности, о которых речь идет в постулате, совершенно необходима.

Выражение *уравнения и граничные условия* используются чаще, чем просто *уравнения* для того,

¹⁾ Читатель в этом разделе найдет общие замечания, касающиеся связи между основными уравнениями и правилами подобия; при чтении могут возникнуть трудности в понимании, так как в рассмотрение включено большое число различных точек зрения. В этом случае предлагается прочитать четвертую главу, а затем опять вернуться к этому разделу; многие из рассмотренных точек зрения могут стать совершенно ясными только при рассмотрении конкретного примера.

чтобы подчеркнуть, что граничные условия также должны быть одинаковыми, если одно или несколько уравнений входят в систему в дифференциальном виде. Вопросы существования и единственности решений также содержатся в приведенном выше постулате. Однако мы отложим детальное обсуждение этих вопросов до гл. 4, а здесь с помощью некоторых соображений покажем необходимость развития метода подобия.

Существование системы уравнений и граничных условий, которые являются одинаковыми для двух систем, может быть установлено двумя способами. В первом случае две системы с физической точки зрения должны принадлежать к одному и тому же классу, как, например, две трубы с полностью стабилизированным потоком. При этом мы *допускаем* априори, что основные уравнения выражают некоторые законы природы и будут поэтому всегда иметь одну и ту же форму, что свидетельствует о том, что мы имеем достаточную информацию об этих системах.

Во втором случае известно, что основные уравнения получены из предварительно проведенных экспериментов, так что можно, сравнив их непосредственно, определить, являются ли они для двух физических систем одними и теми же. Второй способ оказывается более общим и включает первый, но им можно пользоваться, если только имеются достоверные основные уравнения.

Из сказанного выше следует, что классический метод подобия, основанный на отношениях сил, относится к первому способу. Он определенно допускает существование системы основных уравнений, основанной на некоторых законах природы; предполагается, что члены в этих уравнениях могут быть выражены лишь через силы; это позволяет перейти затем к прямому решению задачи, имея дело лишь с отношением сил, с гарантией, что параметры в основных уравнениях будут иметь одни и те же значения. Так как классический метод подобия не использует основные уравнения в явном виде, применение этого метода в известном смысле предполагает, что хотя основные урав-

нения и имеются, но не в удобном для использования виде¹⁾.

Однако в современной физике весьма редко встречаются задачи, для которых нельзя было бы записать по крайней мере систему феноменологических уравнений или уравнений «черного ящика», основанных на макроскопических законах природы. Это обстоятельство наводит на мысль, что исследование некоторого общего списка основных уравнений подсказало бы нам, что, кроме сил, должны быть постоянными параметры другого типа, если они вообще имеются, для того чтобы выполнялось равенство значений безразмерных параметров в соответствующей системе основных уравнений и граничных условий. В двух исследованиях не может применяться совершенно одинаковый набор фундаментальных уравнений, но достаточно общий их список для задач при исследовании континуума (таких, как движение жидкости, явления упругости, классический электромагнетизм, теплопередача и термодинамика) может быть предложен в следующем виде:

- 1) закон сохранения массы;
- 2) стехиометрический принцип (законы сохранения числа атомов, молекул и т. д.);
- 3) второй закон Ньютона;
- 4) уравнение состояния (принцип состояния);
- 5) первый закон термодинамики;
- 6) второй закон термодинамики;
- 7) уравнения переноса (законы Фурье, Фика, Ома и т. д.);
- 8) максвелловские законы электромагнетизма;
- 9) закон сохранения электрического заряда;
- 10) закон тяготения Ньютона.

Этот список включает только принципы, которые дают возможность вывести рабочие уравнения. Нулевой закон термодинамики опущен, так как он только определяет понятие температуры, но не обеспечивает рабочее уравнение. По этой же причине опущены пер-

¹⁾ Как уже отмечалось в гл. 2, это замечание также относится к анализу разномерностей.

вый и третий законы Ньютона, поскольку они являются аксиомами статики и приводят к определению понятий силы и механического равновесия, которые используются при выводе уравнений движения из второго закона Ньютона. Под уравнением состояния (п. 4) в приведенном списке следует понимать не только общеизвестное соотношение для газов, но также все другие независимые функциональные соотношения, касающиеся свойств физической системы. Этот пункт включает наиболее общую форму уравнения (типа уравнения Гиббса) для незамкнутой системы с химическими реакциями и хорошо известные выражения закона Гука для твердых тел, а также эквивалентные соотношения для более сложных систем¹⁾. Подобным же образом п. 7 включает все уравнения переноса, такие, как законы Фика, Ома и т. д., и обобщение этих законов в виде теоремы взаимности Онзагера из термодинамики необратимых процессов.

¹⁾ Читатель, не знакомый с такой точкой зрения, найдет в работе [24] более подробное рассмотрение. Необходимо отметить, что некоторые современные авторы, особенно в реологии, называют уравнения состояния и уравнения переноса (п. 4 и 7) вместе *составными соотношениями*; этот термин становится понятным, если включить в рассмотрение соотношения для напряжения деформации и градиента (потока) напряжения деформации. Необходимо отметить, что эти соотношения не всегда известны во всей полноте теоретически или эмпирически. Для простейших веществ, таких, как чисто кристаллические твердые тела и идеальные газы, почти все необходимые сведения могут быть получены из расчета кинетических и статистических молекулярных моделей. Для некоторых других систем, таких, например, как самая обычная вода, статистические теории являются неадекватными, но для воды имеются очень точные данные в довольно широком диапазоне. Для более сложных и менее изученных веществ, таких, как полимеры, очень мало известно относительно высокомолекулярных соотношений в интегральной или дифференциальной форме.

По этой причине или, возможно, по другим причинам читатели из различных областей знания попытаются изменить точный список фундаментальных уравнений, чтобы сделать его более полезным для своих целей. Такая модификация является полезной и повышает ценность изучения. Однако список, который здесь приводится, будет вполне достаточным для задач, которые рассматриваются в этой книге, и для большинства задач при исследовании континуума.

Исследуем теперь фундаментальные уравнения, чтобы посмотреть, какие общие выводы могут быть сделаны. Полезно начать с общей формы первого закона термодинамики, применив его к контрольному объему (незамкнутая система). Такое уравнение имеет следующий вид:

$$\underbrace{q}_{\text{Поток тепла в систему}} + \underbrace{\sum (h_F w)_{\text{вх}}}_{\text{Поток энергии, входящий с массой, включая обратимую работу потока}} = \underbrace{\left(\frac{\partial E}{\partial t} \right)_{\text{вн}}}_{\text{Поток внутренней энергии}} + \underbrace{\sum (h_F w)_{\text{внеш}}}_{\text{Поток энергии, который покидает систему вместе с массой, включая обратимую работу потока}} + \underbrace{\frac{dW_x}{dt}}_{\text{Поток полезной работы, за исключением обратимой работы потока}} \quad (3.1)$$

Здесь знак Σ означает суммирование всех протекающих и вытекающих потоков;

q — все виды переноса тепла на границе контрольного объема;

E — все виды энергии, накопленной в контрольном объеме;

$h_F = e + pv$, где $e = E$ на единицу массы потока;

w — массовая скорость;

W_x — вся выполненная механическая работа, за исключением обратимой работы потока.

Из уравнения (3.1) следует, что энергия исследуемой макроскопической системы может изменяться за счет переноса тепла, выполнения работы и переноса массы. В тепловой член необходимо включить все виды передачи тепла, а именно радиацию, конвекцию и теплопроводность. В работу необходимо включить все взаимодействия с окружающей средой, не входящие в члены переноса тепла и массы; здесь следует учесть не только механические эффекты, но и взаимодействия полей, такие, как электромагнитные эффекты, грави-

тационные эффекты и поток электричества. (Электрический ток можно также рассматривать как поток массы заряженных частиц.) В члены переноса массы должны быть включены все виды энергии, связанные с переходом массы через границы нашей системы, в том числе энергия, связанная с химическими превращениями, если таковые имеют место. Если все это сделать, то уравнение (3.1) будет включать все способы, которыми может изменяться энергия макроскопического контрольного объема, и, таким образом, оно окажется достаточным для рассмотрения всех возможных изменений энергии, если только наши современные научные знания не являются менее полными, чем мы считаем.

Теперь напишем аналогичное уравнение для второго закона Ньютона в форме закона сохранения количества движения:

$$\begin{aligned}
 0 = & \underbrace{\int \rho V_i V_R dA}_{\text{Силы, вызванные переносом количества движения через контрольную поверхность}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int \rho V_i dV}_{\text{Силы, вызванные изменением количества движения внутри контрольной поверхности}} + \\
 & + F_{\text{тело}} + \underbrace{\int dA \sigma}_{\text{Поверхностные силы, сдвиг и давление}}, \quad (3.2) \\
 & \text{Силы, вызванные наличием полей, например гравитационных и электромагнитных}
 \end{aligned}$$

где $V_i \triangleq$ скорость в любой произвольно выбранной инерциальной системе координат;
 $V_R \triangleq$ относительная скорость на граничной поверхности контрольного объема;

ρ — плотность;

t — время;

σ — напряжение;

A — площадь;

V — объем.

Уравнение (3.2) применимо к любой макроскопической контрольной поверхности при отсутствии релятивистских эффектов¹⁾).

Исследуя уравнения (3.1) и (3.2), видим, что они содержат частично одинаковую или полностью независимую информацию. Рассмотрение уравнения количества движения (3.2) показывает, что в него входят те же силы, которые имеются в механических членах уравнения (3.1). Такие механические члены отражают результат действия сил, перечисленных в табл. 3.1. Таким образом, пока эти силы не связаны с остальными членами в уравнении энергии, определяющими другой тип действия, эти два типа действия можно считать независимыми и задачи, в которых приходится иметь дело только с членами, включающими силы, можно решать, пользуясь табл. 3.1 и аналогичными таблицами для отношений только сил. Это случай для несжимаемых потоков, и он, вероятно, объясняет широкое использование метода подобия, основанного на отношениях одних только сил, в задачах такого типа. Такие решения известны начиная с работ Релея середины девятнадцатого столетия. Однако для более общих случаев уравнение (3.1) предполагает необходимость введения других типов взаимодействий, даже если ищутся только соотношения для сил, так как другие виды взаимодействия могут влиять на члены, содержащие силы. Очевидно, если поток тепла, тепловая энергия, связанная с переносом массы, или внутренняя тепловая энергия влияют на отыскиваемую переменную, то некоторые подходящие отношения энергий должны использоваться при образовании π -группы. Таким образом, возможно следующее предварительное заключение. Отношения сил входят в уравнение энергии в виде механико-энергетических членов; это уравнение включает члены, соответствующие полезной работе, работе потока и любой механической энергии, такой, как энергия, обусловленная гравитацией, или

¹⁾ Уравнение (3.2) приводится к более удобной форме, когда $V_t = V_R$, т. е. если контрольный объем не ускоряется, а координаты связаны с контрольной поверхностью.

кинетическая энергия (инерция), которые связаны с переносом массы или с движением внутри системы. Однако необходимо избегать включения дважды в данное решение некоторых специфических одиночных эффектов, таких, как изменение гидростатического давления, вызванное движением в поле гравитации. Так как уравнение энергии содержит механические члены, а в уравнение количества движения тепловые члены не входят, то лучше всего можно проверить, какие факторы влияют на процесс, используя уравнение энергии (3.1) или его эквивалент. Однако необходимо помнить, что недостаточно просто объединить действия всех сил в одном члене, как это часто делается в общепринятом термодинамическом анализе, т. е. члены, содержащие механическую энергию, необходимо полностью преобразовать к их элементам путем использования силовой диаграммы, а такая таблица, как 3.1 для движения жидкости, должна быть использована для определения отношений сил, необходимых для установления подобия. После этого результаты необходимо сравнить с результатами, которые получаются, если воспользоваться общим уравнением энергии, чтобы определить, какие отношения потоков энергии и сил требуются для установления подобия двух систем с точки зрения как их внешних связей с окружающей средой, так и более точного энергетического и динамического подобия внутри системы.

Это позволяет определять отношения сил и потоков энергий, требуемых для обеспечения полноты подобия. Тем не менее возникает вопрос: «Есть ли какие-либо другие категории величин или факторов, не принятые во внимание, которые могут иметь место?» Чтобы ответить на него, попытаемся исследовать остальные физические принципы из приведенного выше списка, проверяя в каждом случае, что еще можно добавить к упомянутым отношениям сил и энергий, чтобы получить решение каждого уравнения и таким образом обеспечить подобие.

Рассматривая эти принципы в списке по порядку, в первую очередь сталкиваемся с законами сохранения массы и атомов. Эти законы не приводят к каким-

либо новым требованиям, так как законы сохранения количества движения и энергии в заданной форме уже используют уравнение непрерывности и, следовательно, по существу учитывают постоянство массы.

Понятие о статистическом принципе вводит новую возможную совокупность параметров, основанных на свойствах системы или внешней среды. Безразмерные группы, состоящие из отношений физических свойств системы, должны играть важную роль в некоторых задачах. Эта концепция функционального соотношения между свойствами не зависит от других введенных принципов, и если окажется, что такое уравнение необходимо, чтобы связать переменные или параметры, имеющие место в других уравнениях, то потребуются в общем случае включить один или более комплексов π , состоящих из отношений физических свойств. Эту точку зрения поясним ниже на примере.

Следующий принцип — второй закон термодинамики — не дает новых параметров или переменных в задачах фракционного анализа. Уравнение второго закона в любых исследованиях описывает возможное направление реальных процессов и устанавливает условия стабильности или равновесности в объеме, занятом изучаемым процессом. Это уравнение не вводит каких-либо новых переменных; оно дает лишь дополнительные сведения о членах с энергией, вид которых известен. Это видно из того, что энтропия, вводимая вторым законом, является постоянной величиной, если потоки энергии постоянны и уравнение состояния для системы известно.

Аналогично уравнение переноса тепла и законы электричества, электромагнетизма и гравитации не дают, по-видимому, никаких величин нового типа. Уравнение переноса просто устанавливает связь между некоторыми членами в уравнении энергии и членами, содержащими свойства системы и окружающей среды. Электрическое и гравитационное уравнения касаются связи членов, включающих силы и энергии, которые входят в уравнения количества движения и энергии. Если уравнения для силы и энергии являются полными, то они должны содержать эти члены.

С этой точки зрения необходимо подчеркнуть, что используемые основные уравнения являются избыточными и не единственными. Они содержат частично совпадающую информацию (например, члены в уравнении энергии, в которые входят силы, и принцип сохранения массы в уравнениях сохранения энергии и количества движения). Эти уравнения могут быть заменены другой системой основных уравнений, которая имеет равноценное значение. Вид уравнений в действительности зависит от того, как определена физическая система, которая изучается; в большинстве простейших задач можно отобрать основные уравнения в зависимости от требований исследователя, поскольку в полном наборе их содержится лишняя информация¹⁾.

Вышеупомянутые рассуждения и постулат достаточности для подобия, установленный в разд. 3.2, оказываются адекватными для построения прочной основы методов подобия. Однако некоторые вопросы, касающиеся независимости используемых параметров, будут почти всегда возникать. Эти вопросы могут быть действительно неприятными, и они обусловлены избытком величин в основных уравнениях. Можно игнорировать этот избыток и просто записать все безразмерные параметры, которые можно включить; такой ответ будет правильным, но почти полностью бесполезным, так как будет содержать большое число групп. Только в настоящее время можно решить эти задачи с избытком величин в общей форме. Для этого необходимо записать в наиболее общей форме каждое из основных уравнений и исследовать соотношения между ними. Но этого мы не можем сделать, так как не в состоянии записать некоторые принципы, как, например, принцип состояния, в любой, но конечной функциональной форме. Более того, вид уравнений в некоторых случаях зависит от положения наблюдателя. Тем не менее вполне возможно получить некото-

¹⁾ Эта точка зрения создает трудности для многих исследователей, но не следует забывать, что «природа никогда не противоречит сама себе» и различные подходы должны дать один и тот же ответ.

рые общие результаты, как отмечалось выше, и значительно легче определить частные результаты в любом конкретном случае с помощью основных уравнений.

Интереснее всего то обстоятельство, что использование основных уравнений в рассмотренном здесь виде приводит к логическому парадоксу в отношении основ фракционного анализа, как мы их здесь понимаем. В разрешении этого парадокса лежит основа для значительных дальнейших усовершенствований методологии исследования.

Дискуссия в этом разделе возникла в конечном счете из-за того, что предпочтительнее: применять π -теорему или использовать отношения сил? При этом в неявной форме делается допущение, что имеется лишь информация относительно исходных данных, т. е. список параметров или список сил¹⁾. Однако для того чтобы расширить понятия подобия, используя не только отношения сил, необходимо установить связь между правилами подобия и основными уравнениями. Для этого используем предположение, что эти уравнения, по крайней мере в общей форме, применимы к каждому процессу в отдельности и ко всем макроскопическим процессам при условии отсутствия ядерных и релятивистских эффектов (даже в последних случаях мы не должны отказываться от применения уравнений, но необходимо изменить их и несколько дополнить). Это равносильно утверждению, что можно написать теперь некоторые основные уравнения почти для любой научной и технической задачи. Во многих случаях мы не можем решить эти уравнения. В других случаях даже нельзя предложить вполне достаточное количество уравнений, чтобы теоретически можно было получить полное решение. (Например, в существенно необратимых процессах нельзя даже написать адекватные выражения для необратимых изменений; имеется возможность это сделать для конечных состояний,

¹⁾ Если бы у нас было больше информации, то мы бы ею воспользовались; это в особенности справедливо, если фракционный анализ понимать так, как он определен во введении.

когда прекращается необратимое действие.) Таким образом, кажется ¹⁾, что знания человека о его физическом окружении, довольно далекие от полноты, достигли такого состояния, когда даже этот последний вид трудностей имеет место только в небольшом числе проблем технического значения.

Таким образом, логика ситуации такова, что можно спросить, почему не пользуются весьма значительной информацией, содержащейся в основных уравнениях? Иными словами, почему, кроме использования этих уравнений для выявления характера зависимости в частных задачах, представляющих интерес для применения метода подобия, не пытаются использовать их для исследования того, что можно еще получить из них, даже если эти сведения не полные или мы не можем найти полное решение. С точки зрения фракционного анализа нужно посмотреть, нельзя ли получить какую-либо дополнительную информацию.

Необходимо сделать замечание о типах комплексов π . Как уже было сказано выше, несколько основных уравнений не дают каких-либо новых типов чисел π . Это не означает, что какое-либо из общих уравнений является неуместным в фракционном анализе. Напротив, все в какой-то мере действительно подходящие уравнения необходимо точно записать и исследовать самым детальным образом. Каждое из этих уравнений может дать (но может и не дать) несколько новых параметров или переменных, необходимых для решения, что заранее неизвестно и содержит информацию, относящуюся к полному решению. Однако если приведенные соображения правильны, то можно выразить все нужные комплексы π , из какого бы уравнения или условия они ни вытекали, как отношения сил, энергий, физических свойств, имеющих место в системе или действующих на физическую систему (или как их некоторая комбинация).

¹⁾ Это «кажется» может быть иллюзорным. Такие же ситуации имели место и прежде в истории науки. Но даже если это и так, то поиск систематических методов почти навстречу способствует лучшему пониманию.

В предыдущем разделе были приведены отношения сил, используемые обычно в одной из областей анализа. Прежде чем перейти к обсуждению применения основных уравнений непосредственно в фракционном анализе, уместно несколько расширить метод подобия, включив в рассмотрение отношения энергий и физических свойств.

в. Некоторые отношения энергий в теплопередаче

Число видов энергии, встречающихся в макроскопических проблемах, как и в случае сил, весьма велико, но очень редко приходится иметь дело со всеми видами энергии одновременно. Поэтому здесь уместно рассмотреть более ограниченную область, чтобы проиллюстрировать основные используемые положения и виды параметров. Рассмотрим, например, процесс теплопередачи.

Известны три способа передачи тепла: теплопроводность, радиация и конвекция. К тому же в некоторых задачах теплопередачи имеют значение еще два энергетических члена: внутренняя энергия твердых тел и потоков жидкости. Из пяти видов энергии попарно можно образовать десять безразмерных групп. Эти группы приведены в табл. 3.2.

По поводу табл. 3.2 уместно сделать несколько замечаний. Обычно в задачах теплопередачи учитывают радиацию путем использования эффективного коэффициента конвективной теплоотдачи, так как радиация и конвекция, как правило, действуют параллельно. Это позволяет путем сложения двух групп $h_r L / \lambda$ и $h L / \lambda$ получить число Нуссельта или из групп $h_r L^2 / \omega c_p$ и $h L^2 / \omega c_p$ образовать тепловое число ТЧ. Группа $h L^2 / \omega c_p$ не является числом Стэнтона¹⁾ в общепринятой форме, которое обычно записывается как $h / G c_p$. Однако идентичность легко показать, поскольку G определяется как $G \triangleq \omega / A$ и ωL^2 .

Табл. 3.2 содержит наиболее общие из зависимых групп теплопередачи и должна быть достаточной для

¹⁾ Определения этих групп даны в табл. 3.2.

Отношения общих видов энергии в теплопередаче

$q_c \propto \lambda L T$ Теплопроводность	$q_r \propto h_r L^2 T$ Радиация	$q_v \propto h L^2 T$ Конвекция	$E_s \propto \frac{\rho c_v T L^3}{t}$ Внутренняя энергия твердого тела	
$\frac{\lambda L}{w c_p}$	$\frac{h_r L^2}{w c_p}$	$\frac{h L^2}{w c_p}$ Число Стэнтона или ТЧ	$\frac{\rho L^3 c_v}{w c_p t}$	$E_f \propto w c_p T$ Внутренняя тепловая энергия потоков жидкости
	$\frac{h_r L}{\lambda}$	$\frac{h L}{\lambda}$ Число Био	$\frac{L^2 \rho c_v}{t \lambda} = \frac{L^2}{\alpha t}$ Число Фурье	$q_c \propto \lambda L T$ Теплопроводность
		$\frac{h}{h_r}$	$\frac{\rho L c_v}{h_r t}$	$q_r \propto h_r L^2 T$ Радиация
			$\frac{\rho c_v L}{h t}$	$q_v \propto h L^2 T$ Конвекция

Теплопроводность $q_c \propto \lambda L T$
 Радиация $q_r \propto \epsilon \epsilon L^2 T^4 \propto h_r L^2 T$
 Конвекция $q_r \propto h L^2 T$

Запас тепловой энергии в твердых телах $E_s \propto \frac{\rho V c_v T}{t} = \frac{\rho L^3 c_v T}{t}$

Запас тепловой энергии в жидких потоках $E_f \propto w c_p T$, где

V — объем,

ϵ — излучательная способность,

b — константа Стефана — Больцмана,

λ — теплопроводность твердого тела,

k — теплопроводность жидкости,

w — массовая скорость потока,

C_p, C_v — теплоемкости при постоянном давлении и постоянном объеме,

L — характеристическая длина,

h — коэффициент конвективной теплоотдачи,

h_r — кажущийся коэффициент конвективной теплоотдачи для радиации,

$\alpha = \frac{\lambda}{\rho c_v}$ — температуропроводность,

ТЧ — тепловое число, определяется, как указано выше (см. [23]).

ρ — плотность,

T — температура,

t — время.

Общезвестное число Нуссельта $\Delta h L / k$ не является простым отношением энергий, но можно показать, что оно представляет собой произведение отношения энергий, отношения сил и отношения физических свойств.

решения многих задач. Однако ясно, что некоторые группы, которые обычно используются при рассмотрении конвективного теплообмена, здесь отсутствуют. Эти дополнительные группы включают отношения физических свойств, некоторые из групп, приведенных в табл. 3.1, и комбинации из групп таблиц 3.1 и 3.2. Причины появления этих дополнительных групп легко объясняются при изучении соотношений между уравнениями для конкретного типа задач. Главное здесь заключается в сложности природы кажущегося простым коэффициента конвективной теплоотдачи h .

В отличие от коэффициента теплопроводности λ коэффициент конвективной теплоотдачи не является простым термодинамическим свойством системы. Он является функцией физических свойств жидкости и поля скоростей вблизи поверхности тела. Таким образом, этот коэффициент зависит от решения основных уравнений механики жидкости, а также, возможно, от тепловых и гидродинамических характеристик потока. Следовательно, для получения полного решения необходимо знать гидродинамические и тепловые характеристики.

Как видно из уравнений переноса, в задачах теплопроводности достаточно указать свойства материала, временные и температурные граничные условия. Это определяет теплопроводность и теплоемкость твердого тела; таким образом, достаточно задать два потока энергии — за счет теплопроводности и аккумулярованного тепла. Поэтому из табл. 3.2 в соответствии с решением, найденным в гл. 2, следует, что если имеет место геометрическое подобие, а числа Фурье заданы, то решения этих двух задач будут подобными.

Аналогичные замечания можно сделать относительно задач, в которых мы имеем запас энергии и конвективную передачу тепла, т. е. чтобы обеспечить полное подобие, достаточно получить геометрическое подобие и зафиксировать значение параметра $\rho L c_v / h t$. В задачах теплопроводности достаточно просто указать температуру, временные граничные условия и свойства материала, чтобы определить h , но здесь не-

обходимо также задавать характеристики поля скоростей потока. Это означает, что в дополнение к уравнению энергии необходимо ввести уравнения количества движения и непрерывности. Или, если это выразить через условия подобия, для обеспечения подобия полей скоростей и постоянства параметра $\rho L c_p / h t$, кроме геометрического подобия, необходимо гарантировать подобие свойств жидкости и сил в потоке. Таким образом, видно, что в задачах теплопередачи, связанных с конвекцией и запасом энергии, кроме геометрического подобия тел, необходимо обеспечить подобие отношений свойств материала, сил и энергий. Более подробные сведения для данного случая можно получить, исследуя уравнения, приведенные в следующем примере.

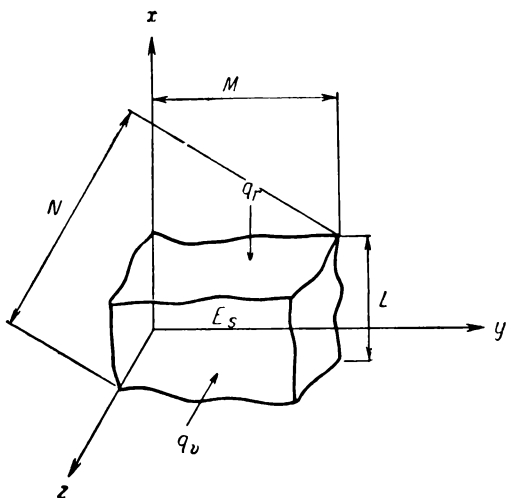
Пример 3.2. Используя табл. 3.2, рассмотрим сначала задачу о передаче тепла чистой теплопроводностью. Возьмем опять задачу о нагреве тела в примере 2.2. Нужно найти условия подобия для времени прогрева твердых тел произвольной формы в печи.

Отметим, что все три вида переноса тепла могут иметь значение. Как показано на фиг. 3.1, радиация и конвекция имеют место на поверхности тела, а теплопроводность — внутри тела. Теперь, чтобы представить эту задачу, построим простейшую тепловую цепь ¹⁾ (фиг. 3.2). Эта цепь недостаточна для получения полного решения задачи, но позволяет определить, какие энергетические потоки действуют независимо.

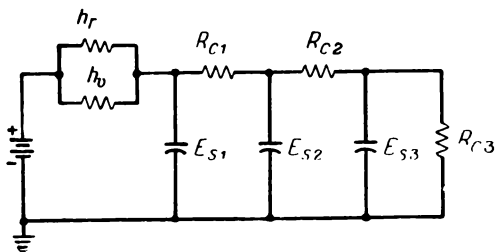
Как видно из рисунка, перенос тепла за счет радиации и конвекции действует как единый поток энергии, как это обычно и имеет место, а теплопроводность — как независимый поток. Следовательно, отношение радиации к конвекции не является существенным; только их сумма имеет важное значение, но от-

¹⁾ Тепловая цепь получается очень удобной, если использовать стандартные обозначения для электрической цепи, в которой по аналогии взяты тепловые элементы.

ношение теплопроводности к сумме конвекции и радиации является важным. Кроме того, мы замечаем,



Ф и г. 3.1.



Ф и г. 3.2.

что в дополнение к факторам, определяющим геометрическое подобие, необходим член, учитывающий аккумулированную телом энергию. Таким образом, из табл. 3.2 следуют π -комплексы теплового характера:

$$\pi_1 = \frac{L^2}{t_c \alpha} = \frac{E_s}{q_c},$$

$$\pi_2 = \frac{(h_v + h_r) L}{\lambda} = \frac{q_v + q_r}{q_c} = \text{число Био.}$$

Необходимо также принять во внимание геометрические характеристики

$$\pi_3 = \frac{L}{M}, \quad \pi_4 = \frac{L}{N}.$$

Таким образом, получается следующий ответ. Безразмерное время прогрева будет одинаковым, если π_1 , π_2 , π_3 и π_4 неизменны. Как и в примере 2.2, необходимо интерпретировать время полного прогрева, используя соотношение $t_{\text{мин}} = t_f + t_0$. Ясно, что мы также можем получить условия подобия для теплопроводности.

Из табл. 3.2 следует, что увеличение π_1 приводит к росту влияния теплопроводности, а с ростом π_2 усиливается подвод тепла к поверхности. Таким образом, если π_1 велико, а π_2 мало, то следует ожидать преобладания теплопроводности; наоборот, если π_1 мало, а π_2 велико, будут превалировать конвекция и радиация. Хотя этот метод и не позволяет представить выводы в количественной форме, тем не менее он дает полезную информацию, которую мы не смогли получить, пользуясь π -теоремой для этой задачи в гл. 2. Для дальнейшего необходимо отметить, что дополнительные заключения получаются не из собственно метода, а из того факта, что он позволяет нам использовать физическую информацию, которой мы не располагали, находясь в рамках методов π -теоремы.

3.3. Непосредственное использование основных общих уравнений

Развивая общий метод подобия в разд. 3.2б, мы столкнулись с необходимостью исследования соотношений зависимости между основными уравнениями, что привело нас к идее использования общих основных уравнений в определенной форме для целей фракционного анализа. Уже было показано как на конкретном примере, так и путем общих рассуждений, что чем больше привлекается физических сведений, тем лучший ответ можно получить из фракционного анализа. Поэтому совершенно очевидно, что более подробные уравнения дадут более полные результаты. Однако ко-

личество информации, получаемой даже из самых простых основных уравнений, часто весьма неожиданно. Кроме того, часто полезно использовать чрезвычайно простые уравнения совместно с таблицами безразмерных чисел, как, например, табл. 3.1 и 3.2. По этим причинам, чтобы пояснить вышесказанное, рассмотрим конкретный пример, используя при этом самые элементарные основные уравнения.

Пример 3.3. Рассмотрим соотношение между трением и теплоотдачей при движении тела в жидкости под действием силы тяжести. Для простоты допустим, что тело имеет форму сферы. Предположим, что тело входит в некоторую среду, такую, как атмосфера какой-либо планеты, с произвольной скоростью. Необходимо определить ускорение, а также скорость, с которой будет нагреваться тело в результате трения.

С целью дальнейшего изучения связи между физическими величинами и представления ее в виде обобщенных уравнений полезно исследовать сначала относительно простую задачу, а именно задачу о трении в случае, когда жидкость несжимаема.

Если среда является несжимаемой и рассматривается только трение, то достаточно ограничиться геометрическим подобием и постоянством отношений всех действующих сил, как отмечалось в разд. 3.2б. Во всех исследованиях такого рода приходится начинать с диаграммы некоторого типа системы, в данном случае с диаграммы сил, действующих на свободное тело.

Из фиг. 3.3 видно, что при падении тела действуют четыре силы: силы тяжести, трения, инерции и подъемная сила. Уравнение динамического равновесия тела имеет вид

$$F_g = F_I + F_B + F_D, \quad (3.3)$$

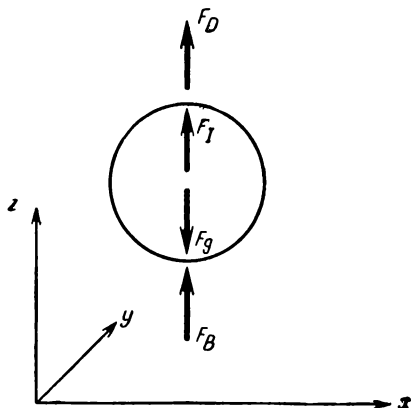
где F_g — сила тяжести,

F_I — сила инерции,

F_B — подъемная сила (сила гидростатического давления),

F_D — сила трения.

Однако если тело имеет плохо обтекаемую форму, то сила трения будет вызываться двумя причинами, а именно силой давления и силой вязкости. Таким образом, в некоторых случаях имеет место по крайней мере пять сил; получается четыре π -комплекса: три



Ф и г. 3.3.

независимых и один зависимый. Три из них можно выбрать из табл. 3.1; соответствующие группы состоят из числа Рейнольдса, числа Фруда ¹⁾ и коэффициента трения. Необходимо добавить группу, представляющую подъемную силу. Эту группу можно составить очень просто следующим образом:

$$F_B = \rho_f V,$$

$$F_g = \rho_B V,$$

$$\frac{F_B}{F_g} = \frac{\rho_f}{\rho_B},$$

где ρ_f — плотность жидкости;

ρ_B — плотность тела;

V — объем тела.

¹⁾ Число Фруда используется здесь в несколько ином смысле, чем обычно в задачах, связанных с системами на земле.

Однако если вместо нахождения правил подобия из этих четырех π -групп, как это было сделано, мы попытаемся выразить их в виде уравнений, то можем получить дополнительную информацию.

Отметим, что числа Фруда и Рейнольдса и коэффициент трения включают силу инерции. Таким образом, можно получить их или обратные им величины путем простого деления уравнения (3.3) на F_I :

$$\frac{F_g}{F_I} = 1 + \frac{F_B}{F_I} + \frac{F_D}{F_I}.$$

Подставляя

$$F_D = F_{\text{давления}} + F_{\text{вязкости}} = F_p + F_v,$$

имеем

$$\frac{F_g}{F_I} = 1 + \frac{F_B}{F_g} \frac{F_g}{F_I} + \frac{F_v}{F_I} + \frac{F_p}{F_I}. \quad (3.4a)$$

После преобразований с учетом того, что $F_B/F_g = \rho_f/\rho_B$, имеем

$$N_p = \frac{1}{N_F \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_B}\right)} - \frac{1}{N_R} - 1, \quad (3.4б)$$

где $N_F = F_I/F_g$ — число Фруда,

$N_R = F_I/F_v$ — число Рейнольдса,

$N_p = F_p/F_I$ — коэффициент давления.

Необходимо отметить, что мы определили коэффициент давления, число Фруда и число Рейнольдса в результате перехода от уравнения (3.4a) к (3.4б), т. е. мы определили их как отношения сил, входящих в уравнение (3.4a). Такая процедура допустима, поскольку, как видно из табл. 3.1, форма отношений вполне приемлема.

Уравнение (3.4б), хотя и основано на элементарном анализе, тем не менее дает значительно больше информации, чем можно получить, используя лишь π -комплексы.

В частности, как это сразу же следует из уравнения (3.4б), если член ρ_f/ρ_B мал по сравнению с еди-

ницей, им можно пренебречь в решении. Подобным же образом можно установить из формулы (3.46), в каком диапазоне изменения можно пренебречь другими параметрами. В алгебраическом уравнении такое сравнение величин является очевидным и всегда целесообразным; в дифференциальном уравнении этот вопрос более сложный, как это будет видно в гл. 4.

Здесь необходимо установить смысл таких членов, как числа Рейнольдса или Фруда. Как уже отмечалось, можно определить параметр, который является отношением двух сил в рассматриваемой задаче, скажем силы инерции к силе вязкости. Это отношение имеет вид числа Рейнольдса, как показано в табл. 3.1; *но это не обязательно стандартный вид*, т. е. нельзя одновременно определять число Рейнольдса некоторым произвольным стандартным образом и как отношение сил инерции к силам вязкости, не проверив того, что эти два определения согласуются для рассматриваемой задачи. Фактически они часто не согласуются. Отсюда следует, что можно пренебрегать членом, который мал, как в указанном выше примере, но отсюда не следует, что данное отношение сил мало, потому что в стандартном виде параметр имеет очень малое (или очень большое) значение. Снова, используя отношение силы инерции к силе вязкости, как в примере, нельзя сделать вывод, что это отношение будет малым просто потому, что значение числа Рейнольдса в некотором произвольном стандартном виде велико. Действительно, некоторые грубейшие ошибки в истории механики жидкости были основаны на неудаче сделать это различие ясным. Этот частный пример (силы инерции и вязкости) общеизвестен в механике жидкости, но затруднения относятся не только к этому примеру или области. Логическая ловушка в двойственном определении безразмерной величины имеется всегда, когда устанавливают стандартный вид безразмерных величин и пытаются приписать им прямой физический смысл для очень широкого круга проблем. Поскольку так поступают почти во всех технических областях при их изучении, то важно иметь очень ясное представление об этом, т. е. никогда

нельзя предполагать, что можно судить о величине критерия по его произвольному стандартному виду независимо от полезности его в прошлом (в других случаях) до тех пор, пока не будет показано, что этот вид критерия действительно дает подходящие отношения энергий, сил или физических свойств для конкретной рассматриваемой задачи.

В случаях, когда стандартный вид критерия и вид, дающий для данного случая наиболее подходящие отношения сил, энергий или свойств, не совпадают, последний является почти всегда более полезным.

Эти замечания вносят дальнейшую ясность в ограничения и использование таблиц безразмерных величин, таких, как табл. 3.1 и 3.2, где приведены критерии, разыскиваемые для данной конкретной задачи. Таким образом, таблицы можно использовать для контроля. Они являются также исходной позицией для отыскания безразмерных величин, которые дадут больше информации о частных задачах. Но необходимо всегда помнить, что критерии, приведенные в табл. 3.1 и 3.2, имеют неопределенность, а именно не установлены конкретные масштабы для физических величин, наиболее существенных в данной задаче; поэтому нельзя пользоваться этими критериями для сравнения без дальнейшей проверки. Кроме того, выбор самих масштабов является предметом исследования; в некоторых случаях эта проблема почти тривиальна, однако в других она является сложной и тонкой.

Возвращаясь к задаче падающего тела, отметим, что применение уравнения для самой элементарной диаграммы сил в случае свободно падающего тела в дополнение к таблице отношений сил позволяет не только найти основные π -критерии простейшим путем, но также определить, когда можно пренебречь в решении одним или более отношением сил. К тому же сразу видно, какими должны быть физическое значение и качественное влияние различных комплексов π . Таким образом, в случае несжимаемых потоков наш общий подход оказался вполне успешным; теперь попытаемся применить такой подход для случая

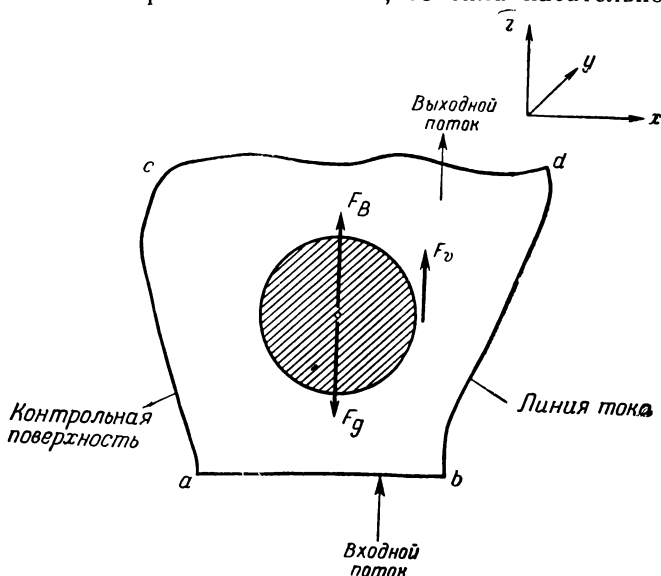
сжимаемой жидкости, который представляет бóльший интерес.

В случае сжимаемой среды имеется значительный соблазн просто ввести член, учитывающий силы сжатия в жидкости, когда она обтекает тело, т. е. сила сопротивления может теперь иметь три составляющие: за счет вязкости, давления и благодаря образованию волн сжатия в жидкой среде. Таким образом, применяя метод подобия, основанный на одних силах, приходим к выводу, что необходимо добавить только одну группу. Образование безразмерных групп с использованием силы инерции дает число Маха или число Коши. Если необходимо получить ответ, пригодный для произвольной сжимаемой среды, то это решение не будет достаточным. Для доказательства необходимо составить основные общие уравнения. Так как мы имеем дело с силами и ускорениями, то разумно начать с уравнения количества движения. Природа сил инерции понятна из самых элементарных основ динамики. Нас интересуют силы трения. Выберем систему координат, связанную с падающим телом; чтобы избежать необходимости рассмотрения ускорения контрольных объемов, предположим, что во время падения тело движется равномерно. Этого достаточно, чтобы пояснить рассматриваемый вопрос. Для такой системы координат в качестве контрольной поверхности может быть взята поверхность некоторого объема жидкости с вырезанной сферой (см. фиг. 3.3а). Уравнение количества движения записывается в виде

$$\begin{aligned}
 & \int_{\text{(по всей поверхности, включая сферу)}} p d\vec{A} + \int_{\text{(по нижней поверхности)}} \rho V^2 d\vec{A} = \\
 & = \vec{g} \int_{\text{(по всему контрольному объему)}} \rho dV - \vec{F}_B - \vec{F}_V + \\
 & + \frac{d}{dt} \int_{\text{(внутри)}} \rho \vec{V} dV + \int_{\text{(по верхней поверхности)}} \rho V^2 d\vec{A}.
 \end{aligned}$$

В уравнение количества движения давление и упругие силы входят в виде четырех интегральных членов.

Эти члены содержат пять зависимых переменных: давление, плотность и три компоненты скорости. Если зафиксировать эти пять величин, то давление и упругие силы будут постоянными. К тому же если известны поле скоростей и вязкость, то сила касательного



Ф и г. 3.3а.

напряжения также задана. Таким образом, оказывается, что приходится иметь дело с пятью зависимыми переменными и параметром вязкости. Но у нас только три уравнения, представляющих три компоненты вектора количества движения. Ясно, что необходимо ввести еще два уравнения:

уравнение неразрывности

$$\begin{aligned}
 \int \rho V dA &= \\
 (\text{по нижней поверхности}) &= \int \rho V dA + \frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV \\
 &\quad (\text{по верхней поверхности}) \quad (\text{внутри})
 \end{aligned}$$

и уравнение энергии

$$\int \rho V h_F dA = \left(\frac{\partial E}{\partial t} \right) + \int \rho V h_F dA.$$

(по нижней поверхности) (внутри) (по верхней поверхности)

Уравнение неразрывности содержит только переменные, которые также входят в уравнение количества движения, но, к сожалению, уравнение энергии, кроме этих переменных, содержит новую зависимую переменную — внутреннюю тепловую энергию¹⁾. Необходимо найти еще одно уравнение, связывающее внутреннюю энергию, плотность и давление. Таким уравнением является уравнение состояния. Для случая ньютоновской жидкости с помощью подходящего преобразования координат всегда можно найти уравнение состояния, которое содержит не более двух главных физических свойств. Поэтому можно записать

$$e = e(p, \rho).$$

Чтобы закончить рассмотрение зависимости, связывающей между собой переменные, полезно использовать более точное уравнение состояния. Поэтому предположим, что рассматриваемая среда удовлетворяет уравнению состояния идеального газа. Для такого вещества мы имеем очень простое соотношение:

$$e = c_v T.$$

Энтальпия h равна

$$h = e + pv = c_p T.$$

Кроме того, для идеального газа

$$\frac{p/\rho}{e} = \frac{pv}{e} = \frac{h - e}{e} = \frac{c_p - c_v}{c_v} = \gamma - 1,$$

где

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}, \quad v = \frac{1}{\rho}.$$

¹⁾ Так как $h = u + p/\rho$, а p, ρ уже встречались, то вводится только одна новая переменная.

Появление отношения свойств в этой задаче есть прямое следствие природы соотношений зависимости между основными уравнениями. Исследуя более конкретно систему четырех приведенных выше уравнений, находим, что силы зависят от плотности; чтобы найти плотность, необходимо решить уравнение энергии, которое в свою очередь включает внутреннюю энергию. Следовательно, необходимо использовать уравнение состояния, которое связывает внутреннюю энергию с другими зависимыми физическими параметрами. Физическое основание для такой математической схемы состоит в следующем. Сжатие жидкости сопровождается не только механической работой переноса, но также накоплением энергии в виде внутренней тепловой энергии. Эту энергию можно выразить из соответствующего уравнения Гиббса

$$de = T ds - p dv,$$

которое применимо к любым чистым жидким веществам такого вида, который рассматривается в этой задаче. Более конкретно, как уже было показано, для идеального газа отношение полученной механической энергии переноса в поле давления к соответствующей накопленной тепловой энергии равно

$$\frac{d(pv)}{de} = \gamma - 1 = \frac{\text{Изменение работы потока}}{\text{Изменение внутренней энергии}}.$$

Таким образом, мы снова видим решающую роль явных соотношений зависимости между основными уравнениями.

Теперь можно дополнить фракционный анализ следующим образом. Система четырех уравнений: количества движения, энергии, неразрывности и состояния, является достаточной, чтобы определить искомую зависимость переменную. Таким образом, если можно обеспечить, чтобы все переменные и параметры в уравнениях были заданы и одинаковы для двух рассматриваемых случаев, то можно утверждать, что подобие будет достигнуто на основе положений, рассмотренных в разд. 3.26, при условии, что единственное решение уравнения существует. Это справедливо

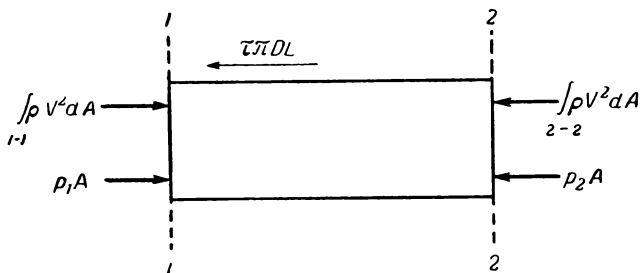
независимо от того, можем ли мы решить уравнения или нет, и в этом случае гарантирование определенных значений переменных легче, чем решение полной системы уравнений, по крайней мере на несколько порядков. Действительно, были уже указаны необходимые силы и показано, что уравнения также включают отношение физических свойств, которое определяет существенные члены с энергией. К фракционному анализу можно приступать одним из двух путей. Или просто считать решением отношения сил, найденные при решении задачи о несжимаемых потоках, число Маха и отношение удельных теплоемкостей, или нормализовать основные уравнения и выделить комплексы π , которые входят в разные члены уравнения. Первый метод легче и является действительно полным после только что сделанных замечаний. Второй метод требует дополнительной работы, но вообще он дает больше информации¹⁾. Так как это довольно сложно, то такой анализ для данного примера не будет проведен, это будет сделано ниже в других примерах.

Следует отметить, что число параметров в этой задаче чрезмерно велико, и более полный анализ основных уравнений для того, чтобы определить, какими членами можно пренебречь, совершенно необходим, если мы пытаемся получить как можно больше информации о задаче, а не иллюстрировать методологию исследования. Подобные же замечания, очевидно, применимы к аспектам этой задачи, связанным с теплопередачей. Читателю предоставляется самому доказать, что общие уравнения являются достаточными, чтобы гарантировать, что полученные выше безразмерные группы и число Прандтля $c_p \mu / \lambda$ являются достаточными для установления условий подобия в задачах теплопередачи.

Пример 3.4. Чтобы показать полезность использования общих уравнений, вернемся снова к задаче о градиенте давления в трубе с ламинарным, полностью

¹⁾ Как уже отмечалось, при формальном использовании табл. 3.1 и 3.2 вообще нельзя получить численных значений.

стабилизированным несжимаемым потоком (пример 2.1). Снова изобразим схему сил, действующих на контрольную поверхность. Из схемы следует, что в уравнение сохранения количества движения входят три типа сил: сила давления, сила касательного напряжения и сила инерции. Решая эту задачу с помощью табл. 3.1 в примере 3.1, а также используя



Ф и г. 3.4.

π -теорему в примере 2.1, мы нашли независимые π -комплексы и таким образом установили, что коэффициент трения является функцией числа Рейнольдса. Это совершенно правильно; напишем теперь действительное уравнение количества движения не пытаясь решить его:

$$\int_{1-1} \underbrace{\rho V^2 dA}_{F_I} + \underbrace{p_1 A}_{F_p} = \underbrace{p_2 A}_{F_p} + \underbrace{\tau \pi DL}_{F_V} + \int_{2-2} \underbrace{\rho V^2 dA}_{F_I}.$$

Если поток *стационарный и полностью стабилизированный*, то два члена, представляющих силы инерции, сокращаются, так как ρ и V одинаковы в любом данном элементе dA на границах контрольной поверхности. Таким образом, получаем

$$\underbrace{(p_1 - p_2) A}_{F_p} = \underbrace{\tau \pi DL}_{F_V}.$$

Это означает, что для стационарного потока можно получить безразмерные группы путем деления на F_p ,

т. е.

$$\frac{\Delta p \alpha^2}{\mu V \beta} = \frac{\Delta p}{\tau} = \frac{F_p}{F_v} = \text{Число Стокса} = \text{const},$$

где α и β — соответствующие масштабы длин. Это действительно очень важное решение для многих целей ¹⁾, хотя оно имеет не тот вид, к которому мы обычно привыкли. Оно легко получается из общеизвестного полного решения ²⁾

$$\frac{\Delta p/(L/D)}{\frac{1}{2} \rho V^2} \Delta 4f = \frac{64}{\text{Re}} = \frac{64\mu}{\rho V D},$$

которое после преобразования дает

$$4f \text{ Re} = \frac{\Delta p/(L/D)}{\frac{1}{2} \rho V^2} \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{\Delta p D^2}{\mu V L} = 64.$$

Заметим, что $\alpha = D$; $\beta = L$; в табл. 3.1 не приведены масштабы. Кроме того, преждевременное сокращение длин приводит к потере информации. Дополнение Хантли (разд. 2.6) здесь вполне приемлемо.

Такое упрощение нельзя сделать для турбулентного режима; число Рейнольдса входит в выражение для коэффициента трения в другой степени, а плотность не исключается из уравнения. Но, по-видимому, этого следовало ожидать, так как силы инерции являются важными при турбулентном режиме, ввиду того что они вызывают дополнительные силы, характеризующиеся напряжениями Рейнольдса ³⁾, даже если поток является стационарным в среднем.

Пример 3.5. Теперь применим тот же самый метод к задаче о теплообменнике, рассмотренной в при-

¹⁾ Например, оно приводит непосредственно к полезному выводу о том, что число Нуссельта является константой в полностью стабилизированном ламинарном потоке в трубе.

²⁾ См. любой учебник по механике жидкости, например Веннарда [52].

³⁾ Соответствующие напряжения Рейнольдса определяются как $\tau = -\overline{\rho u'v'}$, где $(\quad)'$ указывает мгновенное отклонение от средней скорости, а $(-)$ обозначает усреднение по времени.

мере 2.3, где мы встретились с некоторыми непонятными затруднениями в применении π -теоремы.

Обратимся опять к тому же рисунку, как и в примере 2.3.

Допустим, что поведение системы можно определить с помощью уравнений переноса тепла и энергии, не прибегая к решению этих уравнений. Уравнения энергии имеют вид

$$q = (\omega c_p)_h \delta T_h \quad (3.5)$$

и

$$q = (\omega c_p)_c \delta T_c. \quad (3.6)$$

Уравнение переноса тепла записывается в виде

$$q = UA \delta T_m = \int_0^{A_t} U (T_h - T_c) dA, \quad (3.7)$$

где A_t — полная поверхность теплопередачи. Так как величина q рассматривается внутри контрольного объема, исключим ее, пользуясь уравнениями (3.5) и (3.6). К тому же определим безразмерные переменные следующим образом:

$$\delta T_c = \frac{\delta T_c}{(\delta T)_{\max}}, \quad \delta \bar{T}_h = \frac{\delta T_h}{(\delta T)_{\max}},$$

$$\bar{A} = \frac{A}{A_t},$$

где $(\delta T)_{\max}$ — максимальная разность температур горячей и холодной жидкостей в любой точке внутри контрольного объема. Это дает

$$(\omega c_p)_h \delta \bar{T}_h = (\omega c_p)_c \delta \bar{T}_c \quad (3.8)$$

и

$$(\omega c_p)_h \delta \bar{T}_h = A_t \int_0^1 U (\bar{T}_h - \bar{T}_c) d\bar{A}. \quad (3.9)$$

Теперь можно исключить или $\bar{T}_h$ или $\bar{T}_c$ из уравнений (3.8) и (3.9) путем дифференцирования по площади $\bar{A}$

(3.8) один раз, а (3.9) дважды. Будем исключать $\bar{T}_c$; в результате дифференцирования имеем

$$\frac{(\omega c_p)_h}{A_t} \frac{d^2 \bar{T}_h}{d\bar{A}^2} = U \left(\frac{d\bar{T}_h}{d\bar{A}} - \frac{d\bar{T}_c}{d\bar{A}} \right) = U \left(1 - \frac{d\bar{T}_c}{d\bar{A}} \frac{d\bar{A}}{d\bar{T}_h} \right) \frac{d\bar{T}_h}{d\bar{A}}$$

и

$$(\omega c_p)_h \frac{d\bar{T}_h}{d\bar{A}} = (\omega c_p)_c \frac{d\bar{T}_c}{d\bar{A}},$$

$$\frac{d\bar{T}_c}{d\bar{A}} \frac{d\bar{A}}{d\bar{T}_h} = \frac{(\omega c_p)_h}{(\omega c_p)_c}.$$

После преобразований и деления на $(\omega c_p)_h/A_t$ получаем

$$\frac{d^2 \bar{T}_h}{d\bar{A}^2} = \frac{U A_t}{(\omega c_p)_h} \left[1 - \frac{(\omega c_p)_h}{(\omega c_p)_c} \right] \frac{d\bar{T}_h}{d\bar{A}}. \quad (3.10a)$$

Исключение $\bar{T}_h$ подобным же образом дает

$$\frac{d^2 \bar{T}_c}{d\bar{A}^2} = \frac{U A_t}{(\omega c_p)_c} \left[\frac{(\omega c_p)_c}{(\omega c_p)_h} - 1 \right] \frac{d\bar{T}_c}{d\bar{A}}. \quad (3.10б)$$

Интегрирование уравнения (3.10a) или (3.10б) выполнимо, если известна U как функция A . Однако U чрезвычайно сложная функция геометрических факторов и гидродинамических условий. Кроме того, можно получить значительную информацию из уравнений (3.10), даже если неизвестна U как функция A , и поэтому нельзя просто проинтегрировать.

Прежде всего мы видим, что любую задачу такого типа можно описать уравнениями в форме (3.10); в такой форме переменные $\bar{T}_h$, $\bar{T}_c$ и $\bar{A}$ будут всегда одними и теми же. Задачи будут различаться значениями двух параметров $A_t U / (\omega c_p)_h$ и $(\omega c_p)_h / (\omega c_p)_c$. Таким образом, если зафиксировать значения этих двух параметров, единственное решение для зависимых параметров $\delta T_c / (\delta T)_{\max}$ и $\delta T_h / (\delta T)_{\max}$ должно существовать в следующем виде:

$$\frac{\delta T_c}{\delta T_{\max}} = f \left[\frac{U A_t}{(\omega c_p)_c}, \frac{(\omega c_p)_h}{(\omega c_p)_c} \right]$$

и

$$\frac{\delta T_h}{\delta T_{\text{макс}}} = f \left[\frac{UA_t}{(\omega c_p)_h}, \frac{(\omega c_p)_h}{(\omega c_p)_c} \right].$$

Это решение в явном виде для безразмерных групп в отличие от решения, полученного с помощью анализа размерностей в примере 2.3, дает правильное количество безразмерных групп.

Дальнейшее исследование уравнений (3.10) показывает, почему возникла трудность в примере 2.3. В этой задаче значения c_p и ω порознь не существенны; важно только их произведение. Действительно, в наиболее современных работах по теплообменникам (таких, как [23]) произведение ωc_p обозначается одним символом. Таким образом, несмотря на то что физически можно менять ω и c_p независимо и как ω , так и c_p являются существенными вторичными величинами, форма основных уравнений такова, что две величины никогда не входят в них иначе как в виде произведения. Если бы ω и c_p входили в некоторые члены уравнений порознь или если бы ω и c_p встречались в любых других комбинациях наряду с произведением, то каждая из них в анализе размерностей должна была бы рассматриваться как независимая величина. Так как это относится как к нагретой, так и к холодной жидкостям, то четыре величины ω_c , c_{p_c} , ω_h и c_{p_h} дали бы две группы, что много. Отложим рассмотрение выводов, следующих из этих замечаний, до гл. 5, где сравниваются различные методы.

Из уравнений (3.10) можно также получить значительно больше информации. Например, если отношение $(\omega c_p)_h/(\omega c_p)_c$ мало по сравнению с единицей, из уравнения (3.10а) следует, что решение зависит только от параметра $UA_t/(\omega c_p)_h$. Подобным же образом из уравнения (3.10б) видно, что, если $(\omega c_p)_h/(\omega c_p)_c$ очень велико по сравнению с единицей, решение будет зависеть только от параметра $UA_t/(\omega c_p)_c$. Рассматривая совместно эти результаты, прямо придем к двойственному определению параметров, использованному Кэйсом и Лондоном [23] как

средство получения компактных решений в графической форме для всех возможных задач этого класса. Таким образом, определение безразмерных параметров из основных уравнений дает не только корректную, но и пригодную для практического использования систему параметров.

3.4. Заключительные замечания

Приведенных примеров достаточно, чтобы проиллюстрировать метод подобия как способ нахождения основных безразмерных параметров данной задачи. Построение удобных таблиц является наиболее эффективным способом систематизации и отбора безразмерных параметров. Хотя развитие этих методов было основано на слишком ограниченном круге задач, оказывается, что этот круг можно расширить, включив по крайней мере любую макроскопическую систему, если уравнения состояния известны и нет релятивистских или квантовых эффектов. Вероятно, возможно дальнейшее обобщение этих методов, но это здесь не было сделано.

Слабое место в методе подобия состоит в том, что он дает только стандартный вид безразмерных параметров и не позволяет непосредственно выбрать подходящие масштабы; таким образом, без дополнительных исследований нельзя сказать, существенны или нет эти стандартные параметры для данной конкретной задачи.

При более подробном рассмотрении метода подобия непосредственно приходим к более важным заключениям относительно задач фракционного анализа. В частности, как при общем обсуждении, так и на конкретных примерах показана весьма значительная роль фракционного анализа, использующего основные уравнения. Для того чтобы получить более широкую и более полную основу для установления условий подобия, полезно допустить существование основных уравнений; применение основных уравнений даже в весьма элементарной форме приводит к получению большей информации, к более полезным безразмер-

ным параметрам и к более общим решениям задач подобия. Все это совершенно очевидно из приведенных выше примеров. Из них также следует, что уравнения являются полезными независимо от того, полные они или не полные, алгебраические, интегральные, дифференциальные или представляют собой комбинации всех трех видов. Исследуя приведенные здесь конкретные примеры, можно прийти к трем важнейшим заключениям относительно непосредственного использования основных уравнений в фракционном анализе.

1. Более полные и точные уравнения и граничные условия позволяют получить большую информацию о решении.

2. Непосредственное применение основных уравнений в фракционном анализе приводит к более четкому пониманию физической информации, содержащейся в этих уравнениях. Чтобы использовать метод эффективно, необходимо понимать физический смысл и ограничения, содержащиеся в математических моделях физической реальности.

3. В последнем примере предложен способ преобразования переменных к безразмерному общепринятому виду. Как мы увидим, такие преобразования являются основой для многих важных исследований.

В гл. 4 будут более подробно рассмотрены выводы, следующие из этих замечаний.

После подготовки первоначального варианта этой книги появилась книга Седова [46] в английском переводе. Седов защищает применение анализа размерностей совместно с основными уравнениями. Он утверждает, что для того, чтобы применить надлежащим образом анализ размерностей, необходимо составить схему задачи, как если бы вы хотели получить полное решение задачи, и затем определить, какие параметры и переменные ¹⁾ необходимы для решения. Седов ясно показал, что можно получить важную информацию, используя одновременно основные уравнения

¹⁾ Седов использует термины параметр и переменная как взаимозаменяемые; мы же следуем определениям, приведенным в этой книге.

и анализ размерностей, но на метод накладываются значительные ограничения. Его работа весьма рекомендуется читателям, желающим узнать, чего можно достигнуть с помощью анализа размерностей в более широком смысле, чем тот, который обычно используется в технической литературе на английском языке. Седов приводит много превосходных примеров, аналогичных примерам 3.2—3.5 в этой книге; с этой точки зрения работа Седова совершенно близка по духу данной работе, однако имеется одно существенное отличие.

Как уже указывалось выше и отмечалось Седовым, основные уравнения содержат более подробную информацию, чем та, которая может быть использована в рамках анализа размерностей. Таким образом, нет действительной необходимости в дальнейшем усовершенствовании и развитии анализа размерностей. Следует сформулировать систематические методы для получения информации непосредственно из основных уравнений без конкретного решения их. Логическая ситуация такого рода уже рассматривалась в разд. 3.2; определенные предложения для подобной методологии даны в примерах и сформулированы в указанных выше п. 1—3. В соответствии с этим перейдем теперь непосредственно к построению систематических методов фракционного анализа, используя основные уравнения.

ФРАКЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ И ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

4.1. Введение

В этой главе описывается главным образом техника (т. е. последовательность операций) использования основных уравнений и граничных условий как основа метода подобия и фракционного анализа. Предшествующее обсуждение и примеры, приведенные в предыдущей главе, позволяют сделать следующие важные замечания относительно этих операций.

Во-первых, чем полнее и подробнее основные уравнения и граничные условия, тем больше информации можно получить об изучаемом процессе. Наиболее подробными основными уравнениями являются обычно дифференциальные уравнения. Более того, большинство задач, для которых мы не можем найти полные аналитические решения, описывается одним или несколькими дифференциальными уравнениями в частных производных. Таким образом, к задачам такого рода более всего подходит фракционный анализ. Подчеркнем важность исследования всех уравнений и граничных условий для получения единственного решения.

Во-вторых, используя фракционный анализ основных уравнений, следует ясно представлять физическую сущность основных уравнений и ограничения, содержащиеся в математической модели рассматриваемого явления. Мы будем обращать внимание на физическое содержание основных уравнений, которому в литературе уделяется меньше внимания, чем математическим аспектам решения уравнений, содержащих необходимую физическую информацию.

Наконец, в-третьих, удобно использовать стандартный способ преобразования переменных к безразмер-

ному виду и стандартной величине. Как отмечалось в заключении гл. 3, во многих случаях недостаточно привести основные уравнения к безразмерному виду любым произвольным образом. Если необходимо получить максимум информации, то вид и величина безразмерных переменных должны быть тщательно исследованы. Если не рассматривать величин переменных или параметров, то в некоторых случаях можно прийти к ошибочным выводам. Следовательно, часто необходимо систематически рассматривать численные значения переменных (хотя это и является наиболее трудной задачей в анализе явления). При этом важен также вид безразмерных величин. Количество полученной информации всегда непосредственно зависит от тщательности и интуиции при выборе вида безразмерных переменных; изучение нескольких различных их видов часто дает больше информации, чем рассмотрение лишь одного.

При преобразовании к различным безразмерным переменным используются три разные, но связанные между собой операции. Каждая операция имеет определенный физический смысл. К сожалению, различные авторы называют их по-разному; часто разные операции называются одинаково и наоборот. Условимся в дальнейшем называть эти три операции следующим образом:

- 1) нормализация, или преобразование уравнений к безразмерному виду;
- 2) отбор параметров;
- 3) комбинирование безразмерных переменных.

Термины *отбор параметров* и *комбинирование переменных* понятны читателю. Определения этих операций приведены ниже. *Нормализацией* в научной литературе называют весьма различные понятия. Будем подразумевать под этим термином операцию преобразования уравнений и граничных условий к безразмерному виду, содержащему безразмерные переменные стандартной величины. Нормализация — наиболее важная из трех операций фракционного анализа. Выводы, следующие из физической информации, содержащейся в нормализованных основных уравне-

ниях и граничных условиях, являются основой для почти всех последующих методов. Обсуждение соответственно начинается с подробного рассмотрения стандартного метода нормализации, хотя его значение сразу не очевидно. Прежде чем приступить к обсуждению этого метода, необходимо сделать следующее замечание.

Некоторые методы, в которых используются нормализованные уравнения, являются строгими и точными; во многих случаях они строги и точны настолько, насколько отражена физическая сущность явления основными уравнениями и граничными условиями. Другие обсуждаемые методы являются приближенными и должны рассматриваться как пробные; их результаты следует проверять опытным путем. В каждом случае необходимо установить степень приближения. Однако здесь не делается попыток защиты пробных методов; слишком часто они являются единственно возможными в трудных задачах.

4.2. Нормализация основных уравнений

а. Техника нормализации

Мы уже определили нормализацию как операцию преобразования уравнений и граничных условий к безразмерному виду, содержащему безразмерные переменные стандартной величины. В некоторых задачах достаточно лишь одной нормализации для дальнейшего исследования процесса методами подобия и теории приближений; в других же задачах одной нормализации недостаточно — необходимо несколько операций, чтобы получить нужную информацию о всех задачах данного класса и (или) о рассматриваемой области данной задачи. Так как методология, предлагаемая в этой книге, в некоторой степени нова, этот раздел начинается с изучения задачи, где достаточно лишь нормализации а более трудные задачи, в которых применяется более чем одно преобразование переменных, рассматриваются в следующем разделе.

Нормализацию необходимо проводить в два этапа.

1) Преобразовать все переменные к безразмерному виду, выбрав соответствующие масштабы; более подробно эта процедура обсуждается ниже.

2) Разделить все уравнение на величину одного из коэффициентов уравнения, чтобы сделать каждый его член безразмерным¹⁾.

Как отмечалось в разд. 4.1, точный выбор масштаба весьма важен. Ниже излагается метод выбора масштабов, который более или менее автоматически обеспечивает получение всей требуемой информации о подобии в тех задачах, где достаточно одной нормализации; этот метод является хорошим отправным пунктом в задачах, в которых в конечном счете требуется дальнейшее преобразование переменных. Мы используем его поэтому как стандартную процедуру; он образует основу почти для всего дальнейшего обсуждения. Метод состоит в следующем.

1. Определяются все зависимые безразмерные переменные таким образом, чтобы они равнялись приблизительно единице в некотором конечном интервале и нигде в рассматриваемой области не превышали единицу.

2. Все независимые безразмерные переменные определяются таким образом, чтобы их приращения были равны приблизительно единице в рассматриваемой области. (Это означает, что размер области изменяется от 0 до 1, от 1 до 2 и т. д. в новых переменных.)

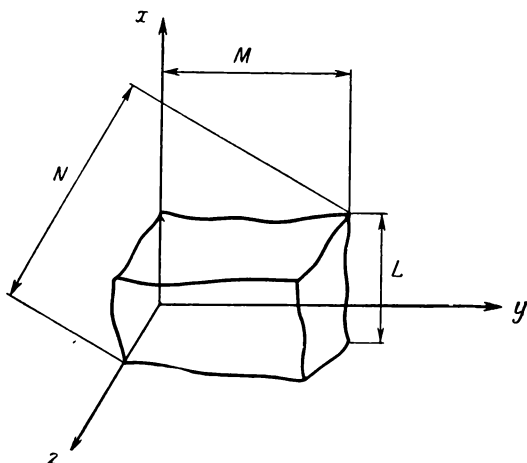
Слово «приблизительный» обычно используется здесь в техническом смысле, т. е. как ближайшая оценка, которая может быть получена при умеренных усилиях. Обычно это означает, что оценка отличается от истинной величины в два раза или менее; недопустимо, чтобы различие было более чем в десять раз.

Приведем пример для пояснения идей метода.

Пример 4.1. Иллюстрация метода нормализации. Задача, которая рассматривалась в примере 2.2, гра-

¹⁾ В действительности делают уравнение свободным от единиц измерения, как отмечалось в разд. 2.2в; но обычно используют термин «безразмерный».

фически представлена на фиг. 4.1. Снова требуется найти правило подобия для прогрева твердого тела.



Ф и г. 4.1.

Основное дифференциальное уравнение теплопроводности в теле — хорошо известное «тепловое» уравнение

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (4.1a)$$

где T — разность температур,

x, y, z — декартовы координаты,

t — время,

α — коэффициент температуропроводности;

граничные условия:

$$\text{при } t = -0 \quad T = T_i,$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } t = +0 \quad x = 0, L \\ \quad \quad \quad y = 0, M \\ \quad \quad \quad z = 0, N \end{array} \right\} \text{ на поверхности } T = T_a.$$

Этих граничных условий достаточно для решения задачи из примера 2.2, но недостаточно для более сложной задачи из примера 3.2.

Зависимой переменной в дифференциальном уравнении является разность температур. В соответствии с методом нормализации попытаемся преобразовать зависимую переменную к безразмерному виду таким образом, чтобы она приблизительно равнялась единице в некотором конечном интервале и нигде не превышала приблизительно единицу в границах области. В этом примере мы должны определить безразмерную температуру следующим образом¹⁾:

$$\bar{T} = \frac{T}{T_i},$$

где T и T_i измеряются от T_a как величины заданной.

Для выполнения нормализации следует также независимые переменные, содержащиеся в граничных условиях, преобразовывать к безразмерному виду в границах области таким образом, чтобы каждый член изменялся от нуля приблизительно до единицы в области интегрирования. Определим безразмерные переменные линейных размеров системы x , y и z следующим образом:

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{y} = \frac{y}{M}, \quad \bar{z} = \frac{z}{N}.$$

Для тел сложных геометрических форм могут потребоваться другие характерные линейные размеры для удовлетворения требуемым условиям; число их может быть или меньше или больше трех. Однако для большинства тел размеры L , M и N достаточны, если это наибольшие размеры по трем осям координат. Тело почти любой формы можно разделить на части, которые характеризуются тремя размерами такого рода.

Преобразование времени к безразмерному виду более сложно. Так как время изменяется от нуля до бесконечности, то не сразу очевидна процедура его нормализации. Однако если вспомнить, что изучаемое явление длится конечное время, то последнее можно преобразовать следующим образом. Определим постоянную времени тела t_c как время, необходимое для того, чтобы температура каждой частицы тела измени-

¹⁾ Ниже безразмерные переменные обозначаются как $(-)$.

лась по крайней мере на величину, равную $2/3$ ¹⁾ разности между начальной температурой тела и температурой печи. Определим безразмерное время относительно этой временной постоянной, а необходимые временные граничные условия выберем в пределах лишь одной постоянной времени²⁾. Если необходимо, можно повторить анализ и для других постоянных времени, но так как уравнение будет то же самое, то мы не получим новых результатов. Следовательно, достаточно определить безразмерную переменную времени как

$$\bar{t} = \frac{t}{t_c}.$$

На первом этапе нормализации теперь достаточно просто подставить безразмерные переменные в дифференциальное уравнение. Это равнозначно преобразованию переменных T, x, y, z и t к безразмерному виду $\bar{T}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ и $\bar{t}$. Такое преобразование дает

$$\frac{T_a}{L^2} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{T_a}{M^2} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{T_a}{N^2} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{z}^2} = \frac{T_a}{at_c} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}}.$$

На втором этапе разделим обе части уравнения на T_a/L^2 ; это дает безразмерное уравнение

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \left(\frac{L}{M}\right)^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} + \left(\frac{L}{N}\right)^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{z}^2} = \left(\frac{L^2}{t_c \alpha}\right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}}. \quad (4.16)$$

Граничные условия уравнения (4.16) имеют следующий вид:

$$\begin{array}{ll} \text{при } \bar{t} = -0 & \bar{T} = 1 \\ \text{при } \bar{t} = +0 & \left. \begin{array}{l} \bar{x} = 0, 1 \\ \bar{y} = 0, 1 \\ \bar{z} = 0, 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \bar{T} = T_a/T_i = 0 \\ (\text{так как } T_a \text{ является} \\ \text{опорной температурой}). \end{array} \end{array}$$

Нормализация, описанная выше для случая дифференциального уравнения, не изменяется существенно

¹⁾ Или, более точно, $1 - 1/e = 0,628$.

²⁾ Это равносильно утверждению, что рассматриваемое явление ограничено во времени величиной порядка постоянной времени.

для интегральных или алгебраических выражений. Необходимо лишь отметить, что те же операции можно выполнить под знаком интеграла при условии, что произведена соответствующая оценка пределов интегрирования. Затем параметры можно вынести из-под знака интеграла, так как они являются постоянными величинами.

6. Смысл нормализации основных уравнений

Нормализованное уравнение типа (4.1б) обычно содержит два рода величин: безразмерные *переменные* и безразмерные *параметры*. Ниже параметры будут снова иногда называться безразмерными числами или π -комплексами. Безразмерные переменные обозначаются чертой сверху; это переменные исходного уравнения в нормализованном виде. Например, в уравнении (4.1б) четыре безразмерные независимые переменные $\bar{t}$, $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ и безразмерная зависимая переменная $\bar{T}$. Безразмерные параметры уравнения (4.1б) заключены в скобки для лучшего их распознавания¹⁾. Они включают граничные условия²⁾, характерные размеры или масштабы тела, а также физические параметры исходного уравнения. Эти физические параметры могут быть свойствами системы, физическими константами или их комбинацией. В случае уравнения (4.1б) комплексы π содержат

$$\left(\frac{L}{M}\right)^2, \left(\frac{L}{N}\right)^2 \text{ и } \frac{L^2}{t_c \alpha}.$$

Следует заметить, что хотя в эти комплексы π входят масштабы системы, граничные условия и физические параметры, их *вид* явно определяется структурой переменных и параметров основного уравнения и граничными условиями.

1) Скобки используются для ясности лишь в этом первом примере, далее они не применяются.

2) В данном случае граничное значение T_a исключается, но это обычно не всегда осуществимо. Такое исключение имеет определенный физический смысл, который будет пояснен в дальнейшем.

Очень важно хорошо понимать различие между изменением одной или нескольких переменных и изменением величины параметров. Чтобы полностью выяснить этот вопрос, определим *класс задач* следующим образом.

Любая группа задач, которая сводится к одинаковым безразмерным уравнениям и граничным условиям, называется *классом задач*. Следует специально подчеркнуть, что это понятие не обязательно подразумевает идентичные или геометрически подобные системы; как физические условия, так и общая природа систем могут изменяться, поскольку они могут быть адекватно представлены идентичными безразмерными уравнениями и граничными условиями. Также ясно, что геометрически подобные или даже физически идентичные системы не удовлетворяют указанным требованиям, если граничные условия не будут представлены одинаковым образом. Так как обозначения в нормализованном уравнении не относятся к конкретным явлениям, то любые задачи, для которых можно записать идентичные безразмерные уравнения и граничные условия с помощью обычного преобразования переменных (например, $\bar{T} = \bar{S}$), принадлежат к тому же классу. Наконец, две задачи можно свести к одному классу, даже если они принадлежали к разным классам, если можно найти такое преобразование переменных, которое приводит *безразмерные уравнения и граничные условия* к идентичному виду.

При рассмотрении конкретной задачи из данного класса задач безразмерные параметры¹⁾ обычно имеют определенное численное значение, так как они составлены из величин, входящих в граничные условия, свойств системы, размеров и физических констант. Задавая значения параметров, можно изменять значения безразмерных переменных. *Такие изменения переменных, следовательно, соответствуют изменениям в границах области, рассматриваемой в задаче.* Например, если $\bar{x}$ изменяется от 0 до 1 в уравнении (4.16), это означает, что мы перемещаемся сквозь тело

¹⁾ Исключения могут быть в том случае, когда граничные условия являются неявными функциями переменных.

с одной его стороны на другую, в направлении оси x . В этом явлении параметры, которые содержат характерный размер по оси x (т. е. те, которые содержат величину L), не меняются, так как L является общим масштабом, заданным размером тела. Чтобы изменить величину параметров для данного класса задач, следует изменить либо некоторые свойства системы, такие, как α , либо размеры системы L , M или N . Таким образом, изменение величины параметров означает переход от одной системы к другой в пределах данного класса задач. Например, увеличивая L при постоянном M , можно перейти к новой задаче с другой геометрической формой.

Здесь полезно вспомнить методику вывода основных уравнений. В качестве примера вновь рассмотрим уравнение теплопроводности. Наиболее важные стадии и предположения, которые делаются при выводе уравнения (4.1a):

- 1) установление геометрической формы системы — в данном случае бесконечно малый куб;
- 2) запись основных уравнений; здесь требуются уравнения теплового баланса и уравнение Фурье для случая теплопроводности;
- 3) необходимая идеализация системы; в данном случае предполагается отсутствие внутренних источников тепла и изотропность вещества, т. е. теплопроводность одинакова во всех направлениях;
- 4) объединение и упрощение уравнений на основе предыдущих соображений; это приводит к уравнению (4.1a).

Целью применения этих операций к бесконечно малому элементу является получение наиболее общих результатов, когда уравнения справедливы для любой точки системы. Решение таких дифференциальных уравнений часто весьма сложно, но это не изменяет того факта, что полученное уравнение является математической моделью определенной физической задачи и что обычно каждый член или ряд членов уравнения соответствуют определенному физическому эффекту¹⁾.

¹⁾ Иногда один член представляет несколько эффектов.

В данном примере четыре члена уравнения (4.1a) обозначают соответственно приток тепла вследствие теплопроводности по трем направлениям x , y , z и изменение тепловой энергии внутри элементарного куба в единицу времени.

Кроме того, если мы надеемся получить полное решение на основе этой математической модели, то все соответствующие переменные и параметры должны входить в основные уравнения и граничные условия. Новые переменные или параметры не вводятся в процессе интегрирования, и в окончательном ответе могут появиться только те величины, которые входят в основные уравнения и граничные условия. Процесс интегрирования не приводит к появлению новых физических эффектов, т. е. недостающих членов или граничных условий. Математическими методами можно показать недостаточность имеющихся граничных условий и тип граничных условий, которые должны быть, однако они непригодны для установления недостающих граничных условий и членов уравнения, отражающих какой-либо физический эффект. Лишь сравнение решения уравнения с поведением реальной системы, т. е. с опытными данными, позволяет сделать это.

На следующем этапе обсуждения метода подобия с использованием основных уравнений предположим, что уравнения и граничные условия полные и корректные, т. е. являются достаточно разумной моделью физического явления и математически совместимы. Такое предположение позволяет сделать необходимые выводы, а подробное рассмотрение вопроса о полноте и корректности уравнений и граничных условий перенести в следующий раздел.

Исследование вывода уравнения (4.1б) из (4.1a) показывает, что преобразование к безразмерному виду не изменяет физический смысл уравнений и граничных условий. В процессе нормализации каждая группа членов, представляющая определенный физический эффект¹⁾, делится на один параметр.

¹⁾ В уравнении (4.1б) каждая группа состоит только из одного члена, но, как будет показано ниже, это не обязательно.

Нормализованные уравнения и граничные условия содержат все основные параметры, если используется полная и корректная система основных уравнений и граничных условий. Как уже указывалось, при этих условиях все переменные, параметры и соответствующая физическая информация, необходимая для решения задачи, должны содержаться в уравнениях и граничных условиях, т. е. безразмерные зависимые переменные могут быть выражены как функции *безразмерных независимых переменных и параметров*. Эти функции мы рассматриваем как решения задач. Например, решение уравнения (4.1б) в функциональной форме имеет вид

$$\bar{T} = \bar{T} \left[\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}; \left(\frac{L}{M} \right)^2, \left(\frac{L}{N} \right)^2, \frac{L^2}{t_c a} \right]. \quad (4.1в)$$

Это уравнение выражает лишь общую форму решения, но не его конкретный вид. Чтобы записать решение уравнения (4.1б) в виде (4.1в), нет необходимости его решать. Тем не менее по виду соотношения (4.1в) можно сделать вывод о том, что параметры нормализованных основных уравнений те же, что и параметры решения. Наконец если приведенные выше рассуждения верны, то такой же вывод можно сделать и для всех таких уравнений. Таким образом, не нужно каждый раз выписывать соотношения, аналогичные (4.1в). *Достаточно нормализовать основные уравнения и граничные условия и выделить путем «инспекции» безразмерные параметры¹⁾. Если используемые основные уравнения и граничные условия полные и корректные, то найденные параметры образуют систему, необходимую и достаточную для моделирования. Для*

¹⁾ Многие исследователи использовали этот или близкие к нему методы для решения частных задач. Первым из известных автору формальных методов является метод Руарка [44], который назвал его *инспекционным анализом*. Метод Руарка далее развил Биркгоф [5]. Однако Руарк получил лишь небольшую часть результатов из числа возможных, и Биркгоф считает его метод скорее «предположительным». Ни Руарк, ни Биркгоф не указали условий, когда этот метод является строгим; метод ими не был систематизирован с использованием граничных условий или рассмотрением величины членов уравнения.

пояснения этого утверждения рассмотрим его приложения к излагаемой задаче. Уравнение (4.16) было специально составлено так, что оно имеет общую форму для всех задач данного класса. Так как граничные условия в нормализованных координатах не содержат каких-либо параметров, решение зависит лишь от следующих параметров:

$$\left(\frac{L}{M}\right)^2 \quad \left(\frac{L}{N}\right)^2 \quad \text{и} \quad \frac{L^2}{t_c \alpha}$$

и безразмерных переменных $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ и $\bar{t}$. При исследовании фиксированной точки в некоторой системе (задаваемой фиксированными величинами $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ и $\bar{t}$) нужно получить единственное значение $\bar{T}$ при принятых граничных условиях, если $(L/M)^2$, $(L/N)^2$ и $L^2/t_c \alpha$ являются фиксированными величинами. Таким образом, определим *сходственные точки* в двух системах данного класса как точки, которые характеризуются одинаковыми величинами безразмерных переменных $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ и $\bar{t}$. Отсюда следует, что в сходственных точках двух систем одного и того же класса явления развиваются подобным образом при условии равенства величин

$$\left(\frac{L}{M}\right)^2 \quad \left(\frac{L}{N}\right)^2 \quad \text{и} \quad \frac{L^2}{t_c \alpha}$$

для обеих систем. Обозначив безразмерную температуру в любой точке тела через $\bar{T}_j$, можно выразить этот результат в виде

$$\bar{T}_j = \bar{T}_j \left(\frac{L^2}{M^2}, \frac{L^2}{N^2}, \frac{L^2}{t_c \alpha} \right). \quad (4.2)$$

Так как соотношение (4.2) справедливо для любой точки тела, можно получить решение в явном виде, анализируя безразмерное уравнение методами подобия и анализа размерностей. Для решения задачи методом анализа размерностей необходимо лишь выписать параметры из нормализованного основного уравнения и граничных условий. Таким образом, из уравнения

(4.16) можно найти следующие комплексы π :

$$\pi_1 = \frac{L^2}{M^2},$$

$$\pi_2 = \frac{L^2}{N^2},$$

$$\pi_3 = \frac{L^2}{t_c \alpha}.$$

Чтобы получить условие подобия, вспомним, что в задаче о прогреве тела принято, что все точки тела к определенному моменту времени должны иметь температуру выше некоторой минимальной температуры, чтобы был обеспечен необходимый прогрев. Из формул (4.1) и (4.2) следует, что $\bar{T}_j$ для любых двух тел такого вида достигнет одинаковой величины, если комплексы π_1 , π_2 и π_3 попарно одинаковы для модели и образца. Так как наихудшие условия нагрева реализуются в центре тела, запишем соотношение (4.2) для центральной точки. Можно опять заметить, что для геометрически подобных тел полное время нагрева может быть представлено в виде двух членов — члена, обеспечивающего заданное значение π_3 , и постоянного времени нагрева t_0 . Так же, как в примере (2.2), здесь $t_{\min} = t_f + t_0$; t_f получено из условия $\pi_3 = \text{const}$ и величин L и α для тела. Как уже отмечалось, рассматриваемые тела необязательно должны быть точно геометрически подобны. Полученные безразмерные комплексы π достаточны для любой задачи данного класса и, следовательно, для любого тела, размеры которого можно определить лишь величинами L , M и N . Это замечание существенно, так как решение уравнения (4.1) в явном виде можно получить лишь в случае, когда граничные условия могут быть выражены в весьма простом виде. Если поверхность тела лишь слегка неровная, определение полного хода температурной зависимости от времени обычно требует значительного времени. В таких случаях свойства подобия, указанные выше (в отличие от свойств, полученных в гл. 2 и 3), достаточны для выяснения многих вопросов без выполнения полного решения.

Как уже подчеркивалось, форма безразмерных переменных, выбранных для нормализации уравнения, является важной. Поучительно в связи с этим продолжить исследование задачи о прогреве тела, используя другую форму переменных. Предположим, что мы внесли лишь простейшее изменение в переменные, сместив опорную температуру до величины, отличной от T_a . Обозначим новую опорную температуру через T_d . Если сохранить прежние определения $\bar{T}$, $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ и $\bar{t}$, то дифференциальное уравнение (4.16) не изменится, так как оно содержит лишь производные $\bar{T}$ и, следовательно, не зависит от уровня отсчета температуры. Это можно проверить прямой подстановкой. Граничные условия принимают вид

$$\begin{aligned} \text{при } t = -0: \quad \bar{T} &= 1, \\ \text{при } t = +0: \quad \left. \begin{aligned} \bar{x} &= 0, 1 \\ \bar{y} &= 0, 1 \\ \bar{z} &= 0, 1 \end{aligned} \right\} \text{ на поверхности} \end{aligned}$$

$$\bar{T} = \frac{T_a - T_d}{T_i - T_d}.$$

Решение уравнения теперь зависит от параметра $(T_a - T_d)/(T_i - T_d)$, а также от трех параметров, найденных ранее. Таким образом, простое смещение нулевой точки усложняет решение задачи о подобии явлений; лишь тщательный выбор системы координат дает оптимальный ответ. Обычно для такого выбора имеется определенное физическое основание. В этом примере температура отсчитывается от равновесной, или установившейся, ее величины T_d . Однако общих правил нет и во многих случаях следует испытать разные системы координат, чтобы найти наиболее удобную.

В приведенном выше примере было показано, что нормализация уравнений может обеспечить строгое решение канонической задачи анализа размерностей или подобия, если известна полная и корректная система основных уравнений и граничных условий. Нормализация обеспечивает более ясные формы параметров; кроме того, она дает основу для одного вида искаженной модели и позволяет найти возможные искажения. Это никоим образом не исчерпывает воз-

возможности, заложенные в изучении основных уравнений без их точного решения. Однако до обсуждения дополнительных методов важно уяснить смысл таких понятий, как *полнота* и *корректность* основных уравнений и граничных условий. Этот вопрос обсуждается в следующем разделе.

4.3. Условия, необходимые для строгого решения канонической задачи подобия и анализа размерностей с использованием нормализованных основных уравнений

В разд. 4.2 было дано «строгое» решение задачи о прогреве тела; однако это решение основано на предположении о том, что основные уравнения и граничные условия являются полными и корректными. Будем использовать термин *полнота* для описания требуемых физических условий и термин *корректность* для описания необходимых математических условий. Каждый термин можно рассматривать с двух сторон. Математические и физические условия должны соответствовать друг другу во многом, и они часто дают сведения друг о друге. Несмотря на это, удобно рассматривать их раздельно.

Слово «полный», во-первых, означает, что имеется достаточное число независимых уравнений для того, чтобы решение для зависимых переменных было возможно. Следовательно, число независимых уравнений должно вообще равняться числу зависимых переменных.

Слово «полный» также означает, что математическая модель, описываемая используемыми уравнениями, соответствует физической задаче с достаточной точностью в исследуемой области. Следует подчеркнуть, что уравнения отражают математическую модель явления, а не реальное явление; одни модели лучше, чем другие, но все они обладают некоторой степенью неопределенности и неточности. Принимаемая степень неточности в различных случаях разная; таким образом, слово «полный» означает, что все действительно важные физические эффекты отражены в

математической модели. Например, эффекты, указанные в связи с соотношением (4.1a) в разд. 4.2, должны быть представлены членами, связанными с переносом энергии, и математическая запись этих членов должна точно отражать эти эффекты. На первый взгляд может показаться, что вопрос таким образом решен, но дело обстоит не так, поскольку нужно проверить справедливость научного метода. Научный метод предполагает, что последним судьей является природа, а не человек. При проверке любой научной гипотезы — является ли она логическим предположением, понятием или математическим уравнением — научный метод допускает лишь одно действие. Необходимо сравнить гипотезу или ее дедуктивные следствия с измеренной характеристикой реального явления, к которому она относится. Таким образом, если уравнение, которое мы используем, только что выведено, всегда есть сомнение в его адекватности рассматриваемому явлению. Если же, с другой стороны, оно используется в научной литературе уже длительное время и подтверждено многими исследователями в рассматриваемой области, то лишь тогда можно иметь относительную уверенность в его надежности. Так как метод индуктивный, то никогда нельзя достичь полной уверенности, но можно почти всегда различить, имеется ли высокая или низкая степень точности предсказания. Действительно, в относительно хорошо исследованных областях основные уравнения и граничные условия содержат большое количество информации. Рассмотрим уравнение теплопроводности из примера 4.1; это уравнение имеет длительную историю, идущую от Фурье. Сразу же после опубликования оно подверглось научной критике, но в течение многих лет условия, при которых оно справедливо, систематически уточнялись и проверялись многими независимыми исследователями сравнением с опытными данными. Так как метод индуктивный, всегда можно найти исключения, и область применимости уравнения (4.1a) будет соответственно переоцениваться и сужаться. Но это долго не может продолжаться. В настоящее время с достаточной точностью известен тип системы, для которой справедливо

уравнение (4.1a); известна даже точность, с которой мы можем измерить физические параметры и, следовательно, точность, с которой можно сравнивать теоретическое решение с экспериментальными данными.

Термин «корректность» использовался в разд. 4.2 в смысле «правильно поставленной» математической задачи; он, в частности, относится к граничным условиям. Хорошо известно, что для получения единственного решения определенных типов уравнений требуются граничные условия определенного вида. Можно сказать, что задача поставлена корректно, если существует единственное решение уравнения с системой граничных условий и решение непрерывно зависит от граничных условий, т. е. небольшие изменения граничных условий вызывают лишь малые изменения в решении.

Требование существования решения является важным, так как в случае отсутствия решения для уравнений и граничных условий как единой системы нельзя сделать вывод о корректности используемых параметров. Это замечание не связано с существованием физического решения. Имеется физическая задача, приводящая к некоторому физическому результату; таким образом, есть уверенность, что физическое решение существует. Но если *уравнение* с граничными условиями не имеет решения, оно не может описывать реальную физическую задачу, для которой существует решение (т. е. характер поведения зависимой переменной). Если известно, что уравнения полные в указанном выше смысле, мы обычно ожидаем, что имеется решение, которое представляет собой зависимые переменные в функции лишь одних независимых переменных¹⁾. Основной вопрос, который следует решить, касается правильности выбора граничных условий.

К сожалению, вопросы существования решений в наиболее интересном случае (нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных) отнюдь не просты. В рамках этой книги не представляется возможным привести необходимые теоремы. Читатели,

¹⁾ В значительной мере это ожидание основано на опыте; это ни в коей мере не является доказательством.

встречающиеся с задачами такого рода, должны обращаться к литературе, в которой рассматриваются решения уравнений в частных производных¹⁾, или консультироваться с учеными в области прикладной математики. Однако, где это необходимо, в тексте будут приводиться нужные доказательства.

Например, в случае уравнения теплопроводности (4.1a) с граничными условиями типа (4.1б) теорема существования известна.

Уместно вспомнить, что в некоторых примерах гл. 3 использовались линейные алгебраические основные уравнения. В этих случаях существует единственное решение, если 1) число уравнений равно числу неизвестных и 2) эти уравнения не зависят друг от друга. Второе условие просто соответствует неравенству нулю якобиана системы уравнений. Можно ожидать, что уравнения, описывающие физически независимые явления, независимы, но физическая независимость явлений не доказывает независимость этих уравнений.

Следует отметить еще один фактор: полные уравнения для макроскопических систем в общем случае содержат члены, включающие силы, энергии и свойства. Эти величины почти всегда непрерывны и дифференцируемы; поэтому можно считать, что полные математические модели обладают этими же свойствами. Ясно, что этот довод носит характер предположения, а не доказательства, так как полнота уравнения всегда относительна. Более того, это предположение часто нельзя сделать, так как при упрощении полных уравнений отбрасываются некоторые члены уравнения (это будет показано в разд. 4.6 и 4.7).

Тем не менее практикой показано, что наихудшие виды «патологического поведения» в математическом смысле встречаются редко в полных уравнениях, описывающих макроскопические явления природы. Это делает их весьма удобными для исследователя, когда

¹⁾ См., например, книгу Куранта и Гильберта [11] или R. V. Churchill, *Fourier Series and Boundary Value Problems*, Ch. 6, McGraw-Hill Book Company, New York, 1941.

он ищет решения уравнений, предполагая, что математические условия выполняются, и затем проверяет свои предположения. В нашем случае это означает, что мы можем найти законы моделирования с помощью нормализации, даже когда теоремы существования неизвестны, в предположении, что метод даст правильные результаты в большинстве случаев, если уравнения полные.

В таких случаях следует иметь в виду, что найденные таким образом законы должны подтверждаться экспериментом до окончательного их принятия (в качестве расчетных формул).

Такие же замечания можно сделать и относительно вопроса о единственности решения. Чтобы гарантировать с точки зрения математики подобное поведение двух систем (явлений), следует показать, что решение не только существует, но и единственно. Однако в большинстве случаев это трудно осуществимо, так как для нелинейных уравнений в частных производных известно ограниченное число доказанных теорем существования. Более того, если существуют более чем два решения, то следует определить, какое решение более устойчиво (стабильно) и какие начальные условия необходимы для того, чтобы обеспечить подобие.

Опять часто желательно обращаться к физическим сведениям о процессе. В вопросе о единственности следует иметь в виду тесную связь между устойчивостью физических явлений и единственностью математических решений. В частности, существуют два особо интересных случая.

Предположим, что математически можно установить возможность получения более чем одного решения. Затем обычно можно допустить, что наиболее устойчивое (стабильное) решение соответствует действительному явлению природы. В самом деле, можно специально внести возмущение в явление, чтобы убедиться, что это так. Если известны действительные решения или лишь их общая форма, то, используя ряд принципов минимума, основанных непосредственно на втором законе термодинамики, можно показать, какое решение наиболее устойчиво. Однако в фракционном

анализе решение обычно неизвестно и вновь остается предположить, что наиболее устойчивое решение почти всегда соответствует встречающимся в природе явлениям.

Теперь рассмотрим случай, когда единственность решения нельзя установить математически. Однако, если известно, что уравнения полные, можно ожидать существования решения, и вопрос о единственности может быть решен посредством эксперимента, т. е. можно непосредственно наблюдать, одинаково ли протекают два явления. Это, в частности, важно, когда сравниваются два явления одного и того же класса, но различной физической природы. Обычно количество необходимых физических данных весьма мало, так как явления, соответствующие двум решениям, весьма различны. Рассмотрим, например, вопрос о стабильности фаз чистой жидкости; необходим лишь минимум наблюдений, чтобы определить, какая из фаз (жидкость или газ) более стабильна и действительно существует при данных температуре и давлении. Таким образом, часто достаточно грубых наблюдений. Как мы увидим в разд. 4.6, такие наблюдения часто имеют решающее значение по тем же причинам в теории приближений.

Итак, основные уравнения будут гарантировать подобие систем лишь в случае, когда они физически полны и математически корректны. Так как установление физической полноты выполняется индуктивным методом, никогда нельзя быть полностью уверенным в этом; уверенность здесь точно такая же, как и в вопросе предсказания вообще какого-либо решения задач рассматриваемого класса. Во многих случаях результат все же можно предсказать с достаточно высокой степенью уверенности. Действительно, все, о чем здесь говорилось, означает лишь, что в науке отсутствует полная уверенность; в конечном счете все выводы должны подвергаться опытной проверке. В некоторых случаях такая проверка является более важной, чем в других, так как степень уверенности, основанная на предыдущих опытах и общих теоремах математики, не одинакова в разных случаях.

Когда физическое явление и его математическое описание хорошо известны, законы моделирования устанавливаются на основе безразмерных уравнений с той степенью точности, которую вообще можно достичь при их выводе. В случаях, когда полнота системы уравнений находится под сомнением или когда доказательства необходимых теорем отсутствуют, законы моделирования все же ищутся в надежде, что они будут точными, но потребуют большей экспериментальной проверки. В любом случае, когда используются наилучшие уравнения, по-видимому, можно получить более достоверные ответы на основе имеющихся данных.

Таким образом, наиболее важным действием является преобразование уравнений и граничных условий к безразмерному виду для обеспечения правильной постановки математической задачи. Как мы увидим, этот метод имеет несколько важных преимуществ. Он требует, чтобы ученый рассмотрел то, что необходимо для получения строгого закона подобия или моделирования; нужно определить, какая дополнительная информация должна быть найдена, и выяснить необходимость опытной проверки. Кроме того, этот метод автоматически раскрывает другие важные сведения о физической и математической сторонах задачи и дает основу для ряда других полезных методик в фракционном анализе. Ниже мы вернемся к изучению этих вопросов.

4.4. Улучшение соотношений

а. Общие основы

В качестве первого применения положений, развитых в разд. 4.2 и 4.3, рассмотрим общую задачу об улучшении соотношений путем изучения основных уравнений и граничных условий, а затем применим эти положения к особому случаю однородных уравнений.

В примере разд. 4.2 уже было показано, что различный выбор безразмерных переменных приводит к результатам различной ценности. Заранее трудно знать, какой выбор переменных наиболее удачен. Од-

нако очевидно, что, чем меньше параметров требуется для описания явления, тем более полезны результаты (см. разд. 2.4). Из обсуждения в разд. 4.2 и 4.3 известно, что параметров, содержащихся в системе полных и корректных основных уравнений в стандартном нормализованном виде, достаточно для описания класса подобных явлений в интересующей нас области. В действительности не имеет значения, каким образом преобразуются переменные уравнения; этот факт приводит к весьма важному выводу, который будет использован во многих последующих операциях.

Если можно преобразовать основные уравнения к стандартному безразмерному виду, что уменьшает число параметров в уравнениях и граничных условиях, то можно получить более удобные условия подобия.

Действительно, после того как найдено преобразование переменных, уменьшающее число переменных или общее число переменных и параметров в уравнениях и граничных условиях, можно заметить полезные упрощения, которые следует использовать для других видов подобия (см. разд. 4.10).

Для выяснения всех этих вопросов вернемся к примеру, уже рассмотренному в разд. 4.2.

6. Однородные уравнения

При решении задачи о нагреве тела с помощью π -теоремы мы сталкиваемся со следующим затруднением. Было найдено, что нет необходимости иметь параметр, представляющий зависимую переменную — температуру, хотя общий метод с использованием π -теоремы утверждает обратное. Исследование методики, использованной для решения этой же задачи в разд. 4.2, показывает причину этого и приводит к полезным теоремам, справедливым и для других случаев.

Нормализация уравнений и граничных условий в разд. 4.2 включает особый случай улучшения соотношений путем уменьшения числа параметров. Параметр T_i входит в граничные условия исходного физического уравнения (4.1a). Однако если провести нормализацию при помощи соответствующего выбора системы

координат, то T_i не будет входить ни в уравнение, ни в граничные условия, представленные в безразмерном виде; это ясно видно из уравнения (4.1б). Как показано в примере, такой случай соответствует лишь одной системе координат, где решение может быть выражено независимо от величины T_i ; такая система дается уравнением (4.2) и прямо ведет к установлению условий подобия.

Рассмотрение этапов приведения к безразмерному виду уравнения (4.1а) показывает, что параметр, представляющий зависимую переменную, в действительности исчезает из уравнения в процессе нормализации, когда уравнение однородно относительно зависимой переменной. Этот факт и является проверкой однородности в математическом смысле¹⁾. Полезно представить установленный результат в виде теоремы.

Теорема 1

Если основные уравнения однородны относительно данной переменной и если граничные условия могут быть представлены в стандартном безразмерном виде и не будут содержать ее, то могут быть найдены условия подобия, не включающие масштаба этой переменной.

Доказательство этой теоремы уже было дано в разд. 4.4а и в определении однородности. Подобная теорема может быть установлена для физических параметров и зависимых переменных, ее доказательство фактически было также дано.

Теорема 2

Если данный параметр имеет одинаковую степень в каждом члене основных уравнений и не входит в граничные условия нормализованных уравнений стандартного вида, то решение для зависимой переменной не зависит от этого параметра, и он может быть исключен из условий подобия, выраженных в соответствующей системе координат.

¹⁾ Однородность обычно определяется следующим образом. Если при подстановке λx вместо x величина λ сокращается, то считается, что уравнение однородно относительно x . В нашем примере для доказательства однородности уравнения (4.1а) относительно T достаточно подставить $\lambda = 1/T_i$.

Сделаем несколько замечаний относительно этих теорем.

Однородность является наиболее общим свойством зависимых, а не независимых переменных вследствие обычно используемой формы дифференциальных уравнений (см., например, форму x , y , z и t в уравнении (4.1a)). Как уже специально отмечалось, однородность, а не линейность является достаточным условием в теоремах 1 и 2. Например, при добавлении постоянного члена, не зависящего от температуры, в уравнение (4.1a) требования теоремы 1 не выполняются и нельзя найти условия подобия, независимые от масштаба. С другой стороны, теорема 1 справедлива для нелинейных уравнений, если, например, каждый член содержит произведение зависимых переменных во второй или большей степени.

Теорема 2, в частности, касается вопроса о сокращении массы в уравнениях маятника из примера 2.5. В этой задаче масса входит в первой степени в каждый член уравнения, так как восстанавливающая сила, т. е. сила тяжести, пропорциональна массе маятника. Следует также отметить, что теорема 2 охватывает такие случаи, которые нельзя рассмотреть лишь на основе π -теоремы. Это может быть всякий раз, когда все размерности данного параметра входят в размерности других параметров и (или) переменных основных уравнений или граничных условий. Параметр может еще сократиться благодаря удобной форме уравнений и граничных условий, но это сокращение не предусмотрено π -теоремой.

Содержание разд. 4.4a и теоремы 1 и 2 ясно подчеркивают преимущество проведения нормализации основных уравнений и граничных условий для решения задач подобия по сравнению с методом простого анализа исходного физического уравнения. При использовании исходных физических уравнений улучшения, т. е. уменьшения числа параметров и (или) переменных, возможного при определенных обстоятельствах, например при однородности этих уравнений, обычно не происходит. Результаты, полученные таким образом, являются верными, но они будут содержать

больше параметров, чем это необходимо. Это сильно затрудняет сопоставление данных и использование безразмерных переменных. Выполнив несколько операций нормализации, можно оценить преимущество одной системы координат перед другой.

4.5. Соотношения между простыми процессами

а. Законы моделирования, подобия и аналогий

Из разд. 4.3 и 4.4 видно, что основные уравнения и граничные условия можно использовать для определения основных параметров и условий подобия. Хотя нельзя гарантировать, что найденные таким образом решения всегда строгие, они обычно имеют частное значение, но являются относительно полными и лучшими решениями, которые можно получить на современном уровне знаний. Кроме того, такой подход позволяет прояснить природу законов подобия и моделирования. Помимо того, полезно указать соотношения между законами моделирования, подобия, основными параметрами и аналогиями, имея в виду, что все эти методы используют основные уравнения.

Решение задачи о подобии явлений близко к задаче нахождения основных параметров. Единственным различием является окончательная форма результатов. Нахождение основных параметров в общем требует следующего подхода.

Основными независимыми параметрами π в этой задаче являются π_2 , π_3 и π_4 . Величина этих параметров достаточна для нахождения зависимой величины π_1 для любой точки в интересующей нас области решения.

Условие подобия можно сформулировать следующим образом.

Для того чтобы решения двух задач одного и того же класса были одинаковы (подобны), достаточно, чтобы величины независимых параметров π_2 , π_3 и π_4 были одинаковы в обеих задачах.

Это утверждение правильно, если выполнены условия, перечисленные в разд. 4.3. Кроме того, относительно легко выяснить, какие действия следует про-

известии и с параметрами, чтобы обеспечить подобие явлений при известной структуре параметров π , в частности для любого из изложенных выше положений.

Моделирование и аналоговые методы относятся к той же группе проблем, но поставлены несколько в другом виде. При моделировании обычно пытаются предсказать характеристики некоторой основной системы, называемой *образцом*, на основе опытных характеристик другой действительной системы, называемой *моделью*. Чтобы такие работы были полезны, необходимо выполнение двух условий: 1) чтобы требуемые результаты на моделях можно было получить легче и (или) дешевле, чем на образце; 2) должна быть обеспечена возможность точного предсказания характеристик образца на основе характеристик модели. Первое условие обычно выполняется, так как иначе нет смысла использовать модель. Однако второе условие требует дальнейших разъяснений.

Модель может быть измененным видом системы, но в уменьшенном масштабе. Например, в задаче о нагреве тела можно использовать тело меньших размеров с малой тепловой инерцией, что облегчает проведение опыта. Однако модель может быть системой совершенно другого типа. В этом случае она обычно называется *аналогом*. Например, для решения некоторых задач о нагреве тела можно использовать электрическую цепь. Существует много различных методов построения таких моделей, или аналогов; однако сейчас следует рассмотреть вопрос о том, можно ли использовать нормализованные уравнения для установления правил определения характеристики образца на основе характеристик модели или аналога. Как уже было показано, это легко можно сделать; ниже приводится более подробное рассмотрение.

Если уравнения и граничные условия являются полными и корректными в смысле, указанном в разд. 4.3, нормализованные основные уравнения и граничные условия должны содержать решения, которые точно предсказывают поведение системы для всех интересующих задач.

Так как разные задачи одного класса различаются лишь величиной π , то любые две задачи с одинаковыми величинами π в нормализованных уравнениях и граничных условиях обладают сходными характеристиками. Таким образом, при использовании модели достаточно найти подходящую задачу в рассматриваемом классе явлений, которая описывается теми же величинами π в полной и корректной системе основных уравнений и граничных условий в безразмерном виде. Естественно, что это означает не полное тождество всех переменных в каждом параметре π , а лишь равенство соответствующих π , так как решение может быть получено как комбинация последних. В предыдущей задаче это означает, что модель и образец должны по крайней мере иметь одинаковый порядок числа Фурье, а также $(L/M)^2$ и $(L/N)^2$ (если эти отношения достаточны для описания процесса).

Такой закон моделирования включает те же факторы, что и задача о подобии, и, следовательно, может быть той же степени строгости, что и сведения о полноте уравнений и граничных условий задачи. Таким образом, замечания в разд. 4.3 о строгости и точности решения снова непосредственно применимы. Такие законы моделирования не ограничиваются лишь геометрическим подобием систем или другими требованиями такого рода. Если можно найти средства для доказательства того, что два явления описываются одними и теми же нормализованными уравнениями и граничными условиями с одинаковыми величинами π , то подобие простирается до той степени, как указано в разд. 4.3.

6. Альтернативный метод

Ряд авторов используют обычно «метод масштабов»¹⁾ для вывода законов подобия на основе дифференциальных уравнений. Можно показать, что этот метод позволяет получить те же результаты, однако он, как будет показано ниже, слабее метода, предложенного в разд. 4.2.

¹⁾ См., например, [18, 20, 37].

При использовании метода масштабов обычно делается попытка найти такие масштабные множители, которые обеспечивают одинаковые характеристики двух систем в данном классе задач. Предполагается, что каждая переменная в одной системе должна быть равна масштабному коэффициенту, умноженному на ту же переменную во второй системе. Каждый масштабный коэффициент вначале принимается в качестве независимой величины. Необходимые отношения между ними определяются затем на основе требования о том, что подстановка в дифференциальное уравнение для первой системы переменных для второй системы не изменяет это уравнение. Например, в задаче о нагреве тела, которая уже обсуждалась в примерах 2.2 и 3.3, можно записать

$$\begin{aligned}\lambda_T T_1 &= T_2, & \lambda_y y_1 &= y_2, \\ \lambda_t t_1 &= t_2, & \lambda_z z_1 &= z_2, \\ \lambda_x x_1 &= x_2,\end{aligned}$$

где индекс 1 относится к первой системе, 2 — ко второй, а λ являются масштабными множителями. Дифференциальное уравнение для первой системы имеет вид

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial z_1^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T_1}{\partial t_1}.$$

Формальная подстановка переменных для второй системы в уравнение приводит к следующему уравнению:

$$\frac{\lambda_T}{\lambda_x^2} \frac{\partial^2 T_2}{\partial x_2^2} + \frac{\lambda_T}{\lambda_y^2} \frac{\partial^2 T_2}{\partial y_2^2} + \frac{\lambda_T}{\lambda_z^2} \frac{\partial^2 T_2}{\partial z_2^2} = \frac{\lambda_T}{\alpha \lambda_t} \frac{\partial T_2}{\partial t_2},$$

а деление на λ_T/λ_x^2 дает

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial x_2^2} + \frac{\lambda_x^2}{\lambda_y^2} \frac{\partial^2 T_2}{\partial y_2^2} + \frac{\lambda_x^2}{\lambda_z^2} \frac{\partial^2 T_2}{\partial z_2^2} = \frac{\lambda_x^2}{\alpha \lambda_t} \frac{\partial T_2}{\partial t_2}.$$

Условия подобия определяются следующим образом:

$$\left(\frac{\lambda_x}{\lambda_y}\right)^2 = 1, \quad (4.3a)$$

$$\left(\frac{\lambda_x}{\lambda_z}\right)^2 = 1, \quad (4.3б)$$

$$\left(\frac{\lambda_x^2}{\alpha\lambda_t}\right) = 1. \quad (4.3в)$$

Метод преобразования масштабов обычно заканчивается на этом этапе. Однако коэффициенты λ представляют собой масштабные множители для систем 1 и 2, и если вспомнить, что масштабы для каждой из них должны быть выбраны с учетом граничных условий и размеров систем, то уравнения (4.3) следует записать в виде

$$\left(\frac{L_1}{L_2} \frac{M_2}{M_1}\right)^2 = 1 \quad \text{или} \quad \pi_1 = \text{const},$$

$$\left(\frac{L_1}{L_2} \frac{N_2}{N_1}\right)^2 = 1 \quad \text{или} \quad \pi_2 = \text{const}$$

и

$$\left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2 \frac{t_{c2}(\alpha)}{t_{c1}(\alpha)} \quad \text{или} \quad \pi_3 = \text{const}.$$

Таким образом, уравнения (4.3) приводят к тем же результатам, что и нормализация уравнений, но в менее полной форме, так как масштабные множители остаются не определенными. Чтобы преобразовать полученные результаты к виду, удобному для применения к данной системе, масштабные множители должны быть определены. Более того, масштабные коэффициенты должны действительно характеризовать систему; при использовании произвольных масштабов (даже если они встречаются в задаче) все задачи данного класса нельзя представить одинаковым образом. В этом случае нет уверенности, что подобие действительно будет получено.

В примерах, встречающихся в литературе и относящихся к использованию метода преобразования мас-

штабов, встречается затруднение, связанное с тем, что во многих случаях этот метод применяется к основным уравнениям, а не к граничным условиям. Как уже неоднократно указывалось, граничные условия следует также преобразовывать к стандартному виду, а параметры, иногда содержащиеся в граничных условиях, добавлять к параметрам уравнений¹⁾. В ряде важных технических задач были допущены серьезные ошибки из-за использования метода преобразования масштабов к основным уравнениям без соответствующего изучения изменений в граничных условиях задачи. Возможно, конечно, изучать граничные условия с помощью метода преобразования масштабов, однако сам метод не предполагает это в противоположность методу нормализации.

Хотя выбор одной из двух возможностей — метода из разд. 4.2 или проверки инвариантности уравнений и граничных условий — является в какой-то мере произвольным, нормализация уравнений дает дополнительные сведения о возможности сокращения однородных параметров. Автор предпочитает нормализацию, так как она обеспечивает форму основных уравнений, которая может использоваться для некоторых других целей, как будет показано ниже.

в. Замечание об отношениях сил

Ряд исследователей поднимали уже вопрос об интерпретации основных параметров как отношений сил (см. гл. 3). Например, Смит [48] правильно возражал против интерпретации обычного числа Рейнольдса как отношения силы инерции к силе внутреннего трения²⁾. При обсуждении этих замечаний Вислиценус приписывал Прандтлю [40] следующее мнение: число Рей-

¹⁾ Важность этого вопроса показана на примере 4.7, где рассматриваются более сложные граничные условия.

²⁾ Число Рейнольдса является типичным примером; аналогичные замечания справедливы вообще для основных параметров.

нольдса не всегда равно отношению силы инерции к силе внутреннего трения; следовательно, правильное говорить, что если две системы геометрически подобны и их числа Рейнольдса равны, то отношение силы инерции к силе внутреннего трения для обоих потоков одинаково.

Смит поставил вопрос, можно ли сделать более строгое утверждение. Как уже указывалось в гл. 3 (стр. 83, 84), это возможно при соответствующих условиях, которые следуют из результатов, изложенных в разд. 4.2 и 4.3.

Здесь уместно сделать два замечания. Во-первых, как подчеркивалось в гл. 3, если число Рейнольдса образовано неправильно, оно, несомненно, не будет представлять собой отношения силы инерции к силе внутреннего трения, и то, что справедливо для одной задачи, может не быть справедливым для другой. Как указывал Вислиценус, один лишь выбор соответствующих единиц измерения не может еще обеспечить подобие. Если, взяв для наглядности абсурдный пример, образовать число Рейнольдса на основе размера левой ноги короля Генриха VIII, то вид безразмерного комплекса будет соответствовать числу Рейнольдса, однако это не сделает яснее ни одну из задач гидромеханики.

Во-вторых, если, следуя методу, изложенному в разд. 4.2, или какому-либо эквивалентному методу, сделать члены, содержащие переменные из основных уравнений, приблизительно равными единице и разделить уравнение на коэффициент одного из членов, то параметры будут представлять собой отношения наиболее важных эффектов — действующих сил, энергий или других величин. Это следует из вида исходных основных уравнений. Кроме того, если величины справедливы для всех точек рассматриваемой области, то параметры должны представлять собой отношение сил или других соответствующих величин во всех точках области. Заметим, что образованные таким образом параметры включают определенные граничные условия и размеры системы, поэтому для раз-

личных задач они будут иметь разный вид. Полученные при помощи нормализации параметры необычного вида определяют данную задачу более полно, чем параметры в обычном виде. Другие параметры и обсуждение справедливости определения величин приводятся в разд. 4.6 и 4.9.

г. Соотношения между анализом размерностей, основными уравнениями и граничными условиями; внутреннее и внешнее подобие

Уже не раз указывалось на необходимость использования не только дифференциальных уравнений, но также граничных условий и размеров системы для получения полных и строгих решений задач подобия. Также подчеркивалось, что некоторые виды основных комплексов могут быть найдены путем использования любых характеристических величин для приведения основных уравнений к безразмерному виду, но ценность результатов решающим образом зависит от конкретного выбора характеристических величин. Чем более точно выбранные величины характеризуют систему качественно и количественно, тем лучше полученные результаты. С этой точки зрения не удивительно, что граничные условия задачи и размеры определенной области системы являются отправной точкой для поисков характеристических величин для нормализации.

Исследование примера из разд. 4.2 показывает, что безразмерные параметры составлены не из переменных в том смысле, как это здесь указывалось, а из размеров системы, величин, входящих в граничные условия, и физических констант системы. Так как именно эти параметры рассматриваются в анализе размерностей, то ясно, что анализ размерностей, приведенный в гл. 2, тесно связан со значениями переменных на границе и размерами системы, и любой метод, в котором эти данные не используются, не может быть достаточно полезен в задачах подобия. От-

сюда видна причина, по которой не использовалось слово «переменные» при обсуждении π -теоремы. При употреблении слова «переменный» в π -теореме невозможно избежать семантической путаницы, сравнивая метод π -теоремы с методами, основанными на анализе основных уравнений.

Важность граничных условий также очевидна с чисто математической точки зрения. При использовании дифференциальных уравнений в частных производных изменение в граничных условиях означает изменение в форме решения и может также привести к изменению численной величины решения. В этом случае нормализация уравнений, уместная в данной задаче, может оказаться некорректной для другой задачи с измененными граничными условиями. Действительно, если невозможно свести все задачи данного класса к стандартным величинам, нельзя гарантировать подобие явлений, основываясь на параметрах, найденных из уравнения. Более того, во многих случаях изменение граничных условий позволяет найти новые критерии, так как параметры, полученные при нормализации граничных условий, должны рассматриваться наряду с параметрами основных уравнений.

Эти замечания снова подчеркивают, что изучение основных уравнений без соответственного рассмотрения граничных условий весьма сужает задачу о подобии явлений. К сожалению, такая точка зрения не учитывается во многих исследованиях. Это приводит к неправильной оценке методов, основанных на использовании основных уравнений. Заметным исключением в этом смысле является работа Седова [46], который получил ряд важных и новых результатов, полагая, в частности, что необходимое и достаточное число параметров всегда определяется числом требуемых зависимых переменных и параметров; следовательно, он устанавливает соответствующие начальные и (или) граничные значения величин обычным способом, так, как показано в разд. 4.3.

Здесь полезно обсудить разницу между *внутренним* и *внешним* подобием. Все методы, рассмотренные

в гл. 2 и 3, связаны с внешним подобием в том смысле, что они связывают характеристики одной системы с характеристиками другой системы того же класса. Как мы уже видели, внешнее подобие можно установить при помощи лишь одних параметров.

Использование основных уравнений и граничных условий дает основу, пользуясь которой можно выяснить, достаточно ли строго выполняются условия такого внешнего подобия. Кроме того, такой подход всегда позволяет изучать переменные и, следовательно, наиболее полезные комбинации переменных и (или) параметров. Он приводит к ряду более новых методов, включая рассмотрение значений величин (теория приближений) и поиск улучшенных соотношений с помощью отбора параметров и уменьшения числа переменных и (или) параметров. Как будет показано в разд. 4.10, получение основных уравнений и граничных условий с меньшим числом переменных непосредственно обеспечивает связь между определенными величинами внутри системы и, следовательно, приводит к установлению *внутреннего подобия* системы. Уменьшение числа параметров путем комбинирования их с переменными дает строгую основу для построения искаженных моделей, т. е. моделей, не обладающих геометрическим подобием. Разд. 4.6—4.9, посвященные теории приближений, содержат более сложные математические выкладки по сравнению с предыдущими разделами. Читатель, интересующийся главным образом теорией моделирования и методами подобия, может опустить эти сложные математические выкладки и обратиться непосредственно к разд. 4.10, где рассматриваются два других вида подобия и моделирования, которые отличаются от внешнего подобия.

4.6. Теория приближений

В инженерных приложениях часто бывает трудно моделировать все аспекты явлений, происходящих в образце. Здесь важно определить условия, при которых

можно пренебречь некоторыми безразмерными величинами π . Точно так же во многих случаях можно записать основные уравнения и соответствующие граничные условия, но нельзя найти их аналитическое решение. В обеих таких ситуациях весьма полезно использовать нормализованные уравнения для определения порядка величины отдельных членов в данной конкретной задаче или для различных специальных предположений о параметрах явлений.

Возвращаясь к задаче о нагреве тела, следует напомнить, что ранее делалась попытка приравнять каждый член, выраженный в *безразмерном виде* [уравнение (4.16)], приблизительно единице. Затем можно было сравнить величины этих членов, рассматривая безразмерные числа π . Если любой из них мал по сравнению с другими, можно попытаться опустить его из соотношений подобия. Другие члены можно опустить, записав более простое приближенное уравнение, которое все же дает удовлетворительное решение. Эти действия со всеми ограничениями и условиями представляют собой *теорию приближений*. Теория приближений — весьма мощный инструмент исследования многих технических и научных задач; математические аспекты вопроса достаточно изучены для того, чтобы преодолеть многочисленные трудности, которые могут здесь возникнуть. Не рассматривая вначале эти трудности, воспользуемся для иллюстрации примером задачи о нагреве тела. Эта задача не содержит серьезных математических трудностей. После этого примера можно будет уже систематически рассмотреть весь вопрос в целом.

а. Новый вид информации, даваемый теорией приближений

Пример 4.2. Рассмотрим вновь задачу о нагреве тела (фиг. 4.1). Будем искать закон моделирования для времени нагрева после того, как тело помещено в печь. Требуется, чтобы все части тела приняли данную температуру за определенное время. Начальная

температура любой точки тела T_i , а температура печи постоянна и равна T_a . Тело помещается в печь в момент времени $t=0$. Температуру любой точки поверхности тела обозначим через T_s . Основное дифференциальное уравнение распространения тепла в теле хорошо известно. Это уравнение нестационарного процесса теплопроводности Фурье:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Граничные условия здесь следующие:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } t = -0: \quad T = T_i, \\ \text{при } t = +0: \quad \left. \begin{array}{l} x=0, \quad L \\ y=0, \quad M \\ z=0, \quad N \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{на поверхности} \\ T = T_s. \end{array} \end{array} \right\}$$

Но T_s — величина неизвестная и должна быть определена из уравнения для конвективной теплопередачи от воздуха печи к поверхности тела. Так как поверхность не аккумулирует тепло, то количество тепла, переданного путем конвекции, должно быть равно количеству тепла, переданного путем теплопроводности внутрь тела. Таким образом, можно записать

$$hA(T_a - T_s) = kA \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{\text{на поверхности}} \quad (4.5)$$

где n — нормаль к поверхности.
Определим, как и ранее,

$$\bar{x} = \frac{x}{L},$$

$$\bar{y} = \frac{y}{M},$$

$$\bar{z} = \frac{z}{N},$$

$$\bar{T} = \frac{T - T_a}{T_i - T_a},$$

а также

$$\bar{T}_s = \frac{T_s - T_a}{T_s - T_i}, \quad (4.6)$$

$$\bar{n} = \frac{n}{l/2},$$

где l — наименьший размер из L , M и N . После нормализации уравнения получим выражение для безразмерной температуры на поверхности тела:

$$\tau \Delta \frac{T_a - T_s}{T_s - T_i} = \frac{2k}{hl} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{n}} \right)_{\text{на поверхности}}. \quad (4.7)$$

Из этого выражения для τ , отношения температур, можно определить T_s . Кроме того, величину $(\partial \bar{T} / \partial \bar{n})_{\text{на поверхности}}$ мы выбрали одинаковой для всех задач данного класса и равной единице¹⁾. Следовательно, если число Био $= hl/2k \gg 1$, то температура на поверхности мгновенно становится равной T_a и задача сводится к случаю чистой теплопроводности. Если $hl/2k \ll 1$, то это главным образом задача о конвективном теплообмене. Наконец, при $hl/2k \approx 1$ оба процесса играют важную роль. Здесь получены такие же выводы, как и в примере 3.2, но они дают уже численную оценку явлений в зависимости от величины $hl/2k$.

Чтобы продолжить решение дальше, полезно временно принять, что число Био много больше единицы на всей поверхности тела. Задача в этом случае сводится к чистой теплопроводности; соответствующее уравнение и граничные условия следующие:

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \left(\frac{L}{M} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} + \left(\frac{L}{N} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{z}^2} = \left(\frac{L^2}{t_c \alpha} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}}; \quad (4.16)$$

$$\text{при } \bar{t} = -0: \quad \bar{T} = 1,$$

$$\text{при } \bar{t} = +0: \quad \bar{T} = 1,$$

¹⁾ Подтверждение данных замечаний о величине содержится в разд. 4.6б. В данной задаче удалось приравнять все члены приблизительно единице во всей рассматриваемой области, это упрощает задачу.

за исключением поверхности тела, где $\bar{T}=0$, т. е. при

$$\bar{x}=0,1, \quad \bar{y}=0,1, \quad \bar{z}=0,1.$$

Было принято, что уравнение (4.1б) построено таким образом, что каждый его член, содержащий лишь переменные величины, приблизительно равен единице. Если это предположение справедливо, то величина каждого члена определяется исключительно безразмерным параметром. Кроме того, так как каждый член имеет физический смысл и поскольку уравнение приведено к безразмерному виду путем деления на коэффициент одного из членов уравнения, то каждый параметр представляет собой величину отношения двух важных эффектов. Например, $(L/M)^2$ представляет собой отношение чистой теплопроводности в направлении оси y к чистой теплопроводности в направлении оси x ; можно отметить, что L/M возрастает в некоторой степени, но не в степени 2. Таким же образом число Фурье $L^2/t_c\alpha$, входящее в уравнение (4.1б), представляет собой отношение чистой теплопроводности по оси x к запасу тепловой энергии в теле и в данной форме соответствует величине этого отношения в первом приближении.

Если, как уже принималось при выводе уравнения (4.1б), оценки безразмерных переменных и, следовательно, безразмерных членов основных уравнений справедливы во всей рассматриваемой области, следует рассматривать лишь наибольшие члены уравнения. Предположим, во-первых, что в уравнении (4.1) величина L мала по сравнению с M и N , т. е.

$$\left(\frac{L}{M}\right)^2 \ll 1, \quad (4.8a)$$

$$\left(\frac{L}{N}\right)^2 \ll 1. \quad (4.8б)$$

Если вспомнить, что каждый член дифференциального уравнения представляет определенный физиче-

ский эффект или его часть (иначе его бы там не было), становится ясным, что логически величина членов отражает величину соответствующего физического эффекта. В этом случае получаем

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = \left(\frac{L^2}{t_c \alpha} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial t}. \quad (4.9)$$

Это уравнение содержит лишь один параметр $L^2/t_c \alpha$, следовательно, если его значение не меняется, то решение уравнения также будет иметь один и тот же вид. Таким образом, мы заключаем, как и ранее, что это основной параметр. Такое преобразование трехмерной задачи к одномерной нельзя выполнять произвольным образом. С другой стороны, были найдены условия, при которых такое преобразование возможно [(4.8а), (4.8б) и $hl/2k \gg 1$]. По этому поводу можно сделать еще несколько интересных замечаний.

Во-первых, если выполняется лишь одно из условий (4.8а) и (4.8б), то можно отбросить только один член уравнения и задача сводится к двумерной. Во-вторых, если L велико по сравнению с M или N , уравнение (4.1б) можно преобразовать, умножив на $(M/L)^2$ или $(N/L)^2$, так что меньший размер войдет в критерий Фурье вместо L . Это эквивалентно преобразованию к безразмерному виду относительно M^2 или N^2 вместо L^2 ¹⁾.

После умножения уравнения на $(M/L)^2$ или $(N/L)^2$ получается уравнение, подобное (4.1б), но с несколько измененными членами. Читатель может легко прове-

1) Всегда поучительно исследовать различные уравнения, которые получаются после деления на разные параметры на втором этапе нормализации. Часто одно из них оказывается более полезным в данной задаче, а иногда представляют интерес другие уравнения для различных диапазонов изменения параметров. Хороший пример такого рода для процессов в теплообменниках приводят Кэйс и Лондон [23]; в этом случае выбор различных уравнений для определения к. п. д. и отношения теплоемкостей значительно упрощает методику составления диаграмм и расчеты.

рить, что те же рассуждения, которые привели к уравнению (4.16), применимы и к этому модифицированному уравнению. Это означает, что критическое число Фурье во всех случаях равно $l^2/t_c\alpha$, где l — наименьший из трех размеров L , M и N . Таким образом, можно разделить все задачи данного класса на две группы, в одной из которых любой размер L , M , N мал по сравнению с двумя другими, а в другой два или три размера L , M , N приблизительно одинаковы. В каждом случае исследование нормализованного уравнения приводит к числу Фурье $l^2/t_c\alpha$ и, таким образом, дает следующий важный результат относительно подобия задач этого класса:

Время нагрева тела t_f пропорционально квадрату минимального расстояния до центра тела.

Этот вывод следует из уравнения (4.16) и из того факта, что членами с наибольшими размерами можно пренебречь; наличие членов с одинаковыми размерами не изменяет результат. Такой вывод, являющийся достаточно ясным, простым и полезным правилом подобия, полнее, чем ответы, полученные другими методами в гл. 2 и 3.

Полученный результат справедлив лишь для случая, когда теплопроводность является основным фактором, $hl/2k \gg 1$. Физически это предположение означает, что термическое сопротивление тела из-за теплопроводности велико по сравнению с сопротивлением при передаче тепла конвекцией даже на кратчайшем расстоянии от центра, равном $l/2$. Совершенно ясно, что это условие лучше выполняется для больших длин, чем для коротких. Очевидно также, что величина h различна на разных сторонах из-за изоляции или других условий на поверхности. Читателю предоставляется исследовать различные случаи и определить численное значение критерия, выраженного через основные параметры, который показывает, когда можно пренебречь отдельными членами уравнения, а также случаи, когда задача становится одномерной. Эти результаты имеют интересное применение в случае «одномерного потока тепла»,

б. Классификация задач и трудности теории приближений

Как показывают примеры, приведенные в разд. 4.6а, теория приближений является средством, которое дает полезные результаты. Однако, если операции выполняются не очень тщательно, эта теория может давать неверные сведения. Действительно, такие операции иногда называют *экспериментальной математикой*, имея при этом в виду, что получаемые результаты должны проверяться опытным путем. Такое утверждение в целом верно, однако существуют некоторые условия, когда можно получить результаты с высокой степенью уверенности. Цель этого раздела — найти некоторые физические и математические основы для этих условий и показать возникающие при этом трудности.

В разд. 4.6а приводился пример, где можно было произвести точную оценку каждого члена дифференциального уравнения в функции граничных условий и размеров системы в конечной области изменения переменных. Затем можно найти такие безразмерные переменные, которые позволят с помощью теории приближений упростить основные уравнения и получить менее строгие правила подобия. Как будет видно из дальнейшего изложения, существует несколько путей получения этих оценок. В задаче о теплопроводности (разд. 4.6а) была сделана попытка определить безразмерные величины таким образом, чтобы все члены безразмерных основных уравнений, содержащие переменные, в области решения были порядка единицы или менее, а граничные условия были приведены к некоторому единичному размеру. Так как нормализованное уравнение содержит лишь безразмерные переменные и параметры, значение каждого члена можно оценить при помощи величины параметра, который стоит перед членами, содержащими переменные. Эта операция представляется весьма простой; однако пока мы лишь *предполагали*, что необходимые оценки могут быть получены. Попытаемся понять, когда в действительности так можно делать. При этом станет очевидным ряд сложностей и трудностей.

Полезно вспомнить замечания в разд. 4.2б, касающиеся основных уравнений, которые показывают, что каждая группа членов, стоящая перед комплексами π в безразмерных уравнениях, обычно отражает определенный физический эффект. Поэтому, если основные уравнения алгебраические, можно непосредственно сравнить члены; некоторые малые члены могут быть опущены, и в результате должно быть получено хорошее приближение. См., например, вопрос об отношении плотностей в задаче о падении тела (пример 3.3).

Однако дифференциальные основные уравнения справедливы лишь для отдельных частей системы, а не для всей системы в целом.

Если при рассмотрении вопроса о «локальном» эффекте, который описывается дифференциальным уравнением, например сравнение двух сил в данной точке, можно показать, что данные члены действительно малы по сравнению с другими в данной точке, то эти члены можно отбросить без каких-либо затруднений. Однако такая операция редко удается. Обычно мы имеем дело с решением, т. е. с зависимой переменной, и оно представляет глобальный эффект в том смысле, что зависит от дифференциальных членов в некоторой области изменения переменных. В этом случае обоснование возможности отбрасывания членов становится более трудным, так как нужно, чтобы они были одинаково малы в пределах всей рассматриваемой области. Если данный член велик хотя бы в данной точке, это может изменить решение задачи в целом. Более того, даже малый эффект заметно меняет решение, если он действует достаточно длительное время. Таким образом, необходимо показать не то, что эффект мал локально, а что он имеет слабое влияние на интегральный эффект, который мы изучаем. Для математически строгого доказательства необходимо найти связь между величиной членов дифференциального уравнения и величиной соответствующих членов в решении этого уравнения, что представляет значительную трудность.

При использовании интегральных уравнений ситуация сходна с предыдущим случаем использования дифференциальных уравнений. Это происходит по следующей причине. Основные интегральные уравнения можно рассматривать как дифференциальные уравнения, взятые под знак интеграла для исключения всех производных. В ряде мест книги будут использоваться уравнения именно такой формы. Таким образом, изложенные выше замечания относятся в равной мере и к интегральным и к дифференциальным уравнениям.

Удобно изучать математические аспекты теории приближений в два этапа: 1) оценка величины членов в основных уравнениях и 2) связь между такими оценками и интегральным решением для дифференциальных и интегральных уравнений. В обоих случаях следует различать *однородные* и *неоднородные* поведения. Говорят, что задача является однородной, если каждый член основного уравнения, содержащий переменные, приблизительно равен единице в ограниченной рассматриваемой области и равен или меньше единицы в остальной области.

Задачу называют неоднородной, если эти условия не удовлетворяются. Следует заметить, что задача, неоднородная в одной системе координат, может быть однородной в другой системе координат. *Система членов* — это одно или несколько слагаемых в уравнении, умноженных на один параметр в нормализованном уравнении. Задача может быть неоднородной по двум причинам. Во-первых, один или несколько членов уравнения могут быстро изменяться в узкой зоне и мало или совсем не изменяться в других точках. Такая ситуация возникает в задаче о *пограничном слое* (решение этой задачи Прандтлем приведено в примере 4.8). Во-вторых, дифференциальное уравнение может содержать особые точки, в которых один или несколько членов уравнения становятся весьма большими. Поэтому оценка этих членов вблизи особой точки и в других областях может оказаться невозможной. Это две разные ситуации, которые часто связаны между собой; одна может существовать без другой.

Если данная задача однородна и рассматривается область конечных размеров, то операции, описанные в разд. 4.6, не встречают затруднений и теория приближений, безусловно, полезна. Если же данная задача является неоднородной, имеет особые точки или требует бесконечных пределов интегрирования, то следует ожидать затруднений в математическом смысле. Такие задачи требуют дополнительных специальных рассмотрений. В частности, мы всегда должны учитывать возможность неоднородного поведения при очень больших и очень малых значениях параметров, т. е. решение, в котором один или несколько параметров малы, может полностью отличаться от решения, где эти параметры приняты равными нулю¹⁾. Следовательно, необходимо рассмотреть: 1) средства установления неоднородности; 2) подход к задаче для этого случая. Оба эти вопроса являются сложными, и на современном уровне математической теории дифференциальных и интегральных уравнений на них невозможно дать полные ответы. Тем не менее можно привести здесь несколько полезных методов, правил и рекомендаций.

В основном мы касались математических аспектов задач и значительно меньше уделяли внимания физическому содержанию. В дальнейшем большее внимание будет уделено использованию физической информации по двум основным причинам. Во-первых, будет рассматриваться метод фракционного анализа и, следовательно, будут исследоваться случаи, когда полная математическая теория неприменима. Во-вторых, использование физических представлений даже в весьма грубой форме в сочетании с современным математическим анализом является сильным средством и часто действительно применяется. Итак, желательно более подробное обсуждение случаев и путей рассмотрения, где физический анализ необходим.

¹⁾ Уже указывалось, что неоднородное поведение связано с предельными значениями параметров, а не переменных, даже если оно возникает вследствие того, что одна или несколько независимых переменных стремятся к бесконечности.

в. Условия применимости теории приближений

Вначале изложим необходимые математические условия, являющиеся основой теории приближений. Для большей определенности мы используем термин *приблизительно* и символ $\approx$ для обозначения весьма приближенного равенства и слово *порядок* и символ $O(1)$, что означает величину, приближенно равную или меньшую единице. Термин *порядка единицы* будет использоваться для величины, приблизительно равной 1 в ограниченной области и менее 1 в остальной части рассматриваемой области. Термин *порядка единицы* обозначаем символом $U(1)$.

Обычно требуется выполнение следующих условий: функция и ее производные должны быть непрерывны и дифференцируемы вплоть до производных на порядок ниже, чем порядок самого дифференциального уравнения в определенной области. Это означает, что функция может быть нормализована, так как она ограничена, и что область интегрирования путем нормализации может быть сделана равной приблизительно единице. Это достаточные, но не необходимые условия, гарантирующие возможность последовательной аппроксимации. Как будет видно из дальнейшего, часто имеются достаточные основания для выполнения этих условий. Однако этих условий недостаточно для того, чтобы дать представление о требуемых приближениях¹⁾.

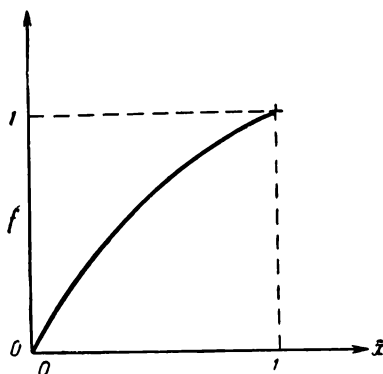
Прежде всего это можно показать на примере. Рассмотрим задачу, где функция f дается обычным дифференциальным уравнением второго порядка относительно x . Исследуем три возможных типа решения (см. фиг. 4.2—4.4).

Так как мы предполагаем, что функция ограничена и область конечна, то можно нормализовать уравнение так, что функция будет порядка единицы в единичной рассматриваемой области при условии, что мы имеем некоторое представление о величине функции.

¹⁾ В первых вариантах этой работы автор пытался использовать более общие и точные математические условия. К несчастью, эти попытки содержат ошибки, на которые мне было указано критикой. В данном случае условия были ослаблены.

Это иллюстрируется на фиг. 4.2—4.4. На фиг. 4.2 наклон функции $\bar{f}$ определяется как

$$\frac{d\bar{f}}{d\bar{x}} \approx \frac{1-0}{1-0} = 1. \quad (4.10a)$$



Фиг. 4.2.

Если $\bar{f}$ характеризуется зависимостью типа приведенной на фиг. 4.2, то вторая производная

$$\left| \frac{d^2\bar{f}}{d\bar{x}^2} \right| \leq \frac{\left| \frac{d\bar{f}}{d\bar{x}} \right| - 0}{1-0} = \frac{1-0}{1-0} = 1,$$

$$\frac{d^2\bar{f}}{d\bar{x}^2} = 0(1).$$

Для производных высших порядков можно получить такие же оценки:

$$\frac{d^n\bar{f}}{d\bar{x}^n} = 0(1),$$

т. е.

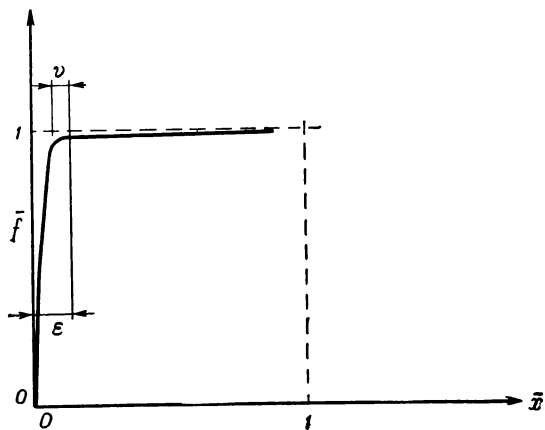
$$\frac{d^n\bar{f}}{d\bar{x}^n} \leq \frac{f_m}{L^n},$$

где

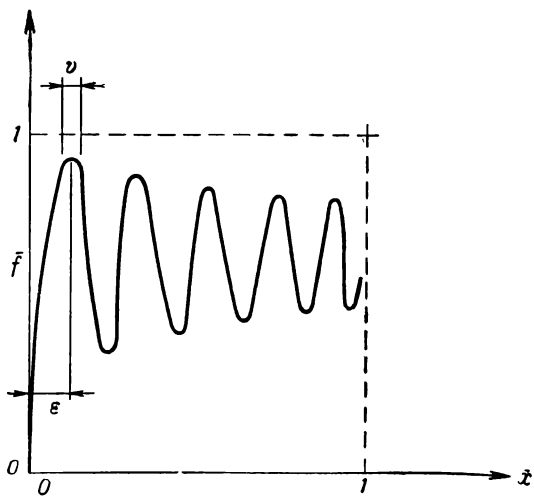
$$\bar{f} = \frac{f}{f_m} \approx (1),$$

$$0 \leq \bar{x} \leq 1,$$

$$\bar{x} = \frac{x}{L}.$$



Ф и г. 4.3.



Ф и г. 4.4.

Оценка, которую мы используем здесь в общем виде, может быть представлена как

$$\frac{d^n f}{dx^n} \approx \frac{f_m}{L^n}. \quad (4.106)$$

Эту оценку будем называть *гладкой*. Оценки такого рода используются часто, например, в разд. 4.6а. Однако такие оценки справедливы в весьма узкой области и, несомненно, не всегда точны. Это можно увидеть, анализируя фиг. 4.3 и 4.4. Предположим, что здесь $\epsilon \ll 1$. В этом случае оценка порядка производной предыдущим методом в диапазоне $0 \leq \bar{x} \leq 1$ не пригодна, так как средняя величина производной в области $0 \leq \bar{x} \leq \epsilon$

$$\frac{d\bar{f}}{d\bar{x}} \approx \frac{1-0}{\epsilon-0} = \frac{1}{\epsilon}$$

и ϵ может быть выбрана сколь угодно малой.

Оценка второй производной $d^2\bar{f}/d\bar{x}^2$ в области $0 < \bar{x} < \epsilon$

$$\left| \frac{d^2\bar{f}}{d\bar{x}^2} \right| \approx \frac{df/d\bar{x} - 0}{\epsilon - 0} = \frac{1}{\epsilon^2}.$$

Действительно, если df/dx изменяется очень быстро в изгибах, даже такая оценка слишком мала. Оценим далее вторую производную для области изгиба. Если, например, область быстрого уменьшения функции простирается от $\bar{x}$ до $\bar{x} + v$, где $v \ll \epsilon$, то

$$\frac{d^2\bar{f}}{d\bar{x}^2} \approx \frac{(df/dx)_{\text{макс}} - 0}{v} = \frac{1}{\epsilon v} \gg \frac{1}{\epsilon^2}.$$

Для функции n -го порядка в области изгиба

$$\frac{d^n \bar{f}}{d\bar{x}^n} \approx \frac{1}{\epsilon^n} \quad \text{или, возможно,} \quad \frac{d^n \bar{f}}{d\bar{x}^n} \approx \frac{1}{\epsilon v^{n-1}}.$$

Следовательно, для функций, подобных показанным на фиг. 4.3 – 4.4 ¹⁾, оценка величины производных менее точна, чем для плавно меняющейся функции

¹⁾ То есть в области сильного изменения. — Прим. ред.

(фиг. 4.2). Оценка тем хуже, чем выше порядок производной.

Полученные результаты можно сформулировать в виде следующего правила.

Правило 3¹⁾

1. *Однородные*²⁾ оценки функции f и ее производных до n -го порядка могут быть получены в конечной области, если функция и ее производные до $(n - 1)$ -го порядка непрерывны и дифференцируемы и если функция гладкая (т. е. ведет себя так, как показано на фиг. 4.2).

2. Если также функция нормализована к $U(1)$ и переменные x_i изменяются от 0 до 1, то

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} \approx 1 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^r \bar{f}}{\partial x^r} = O(1),$$

где $r \leq n$.

Это правило весьма полезно, но имеет несколько лишних требований. Первое условие математически весьма строгое. Второе является весьма неточным и предполагает ответ в некоторой степени заранее известным. Наиболее просто продемонстрировать это на примере. Рассмотрим два типа примеров. Вполне возможно, что два члена с производными в дифференциальном уравнении могут быть значительной величины, но разного знака, и они взаимно уничтожаются в каждой точке. Пример такого рода известен в теории потенциального течения³⁾. Рассмотрим двумерный потенциальный вихрь с компонентами скорости u и v в направлении осей x и y . Вихрь ζ в таком течении по определению равен

$$\zeta = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}.$$

¹⁾ Это именно правило, а не теорема, так как речь идет о «пробном» методе для исследования, а не о доказательстве теоремы.

²⁾ То есть независимые от v и ε . — *Прим. ред.*

³⁾ Течение, которое имеет скалярный потенциал скорости ϕ , удовлетворяющий уравнению Лапласа.

В потенциальном течении сумма двух составляющих вихря ζ везде равна нулю по определению. В логарифмическом вихре течение потенциально везде, за исключением оси вихря. Это легко показать, используя соответствующее выражение для комплексного потенциала $F(z)$:

$$F(z) = iA \ln z,$$

где A — действительная постоянная величина. По определению $F(z)$,

$$u - iv = \frac{dF}{dz} = \frac{iA}{z}.$$

Рассмотрим теперь точку вблизи от оси вихря; здесь du/dy и dv/dx становятся очень большими. Уравнение (4.106) не позволяет дать оценку du/dy и dv/dx , которая была бы справедлива одновременно в области поля потока как вблизи, так и вдали от оси вихря. Тем не менее однородная оценка для вихря ζ может быть произведена; действительно, он равен нулю всюду, за исключением начальной точки, так что его можно отбросить в потенциальном течении. Таким образом, не всегда члены, содержащие производные, должны быть малы.

Второй случай часто имеет место, когда рассматриваются не локальные эффекты, а поведение некоторой величины для всей системы. Один из членов уравнения может быть очень большим в некоторой точке и не удовлетворять уравнению (4.106) в ее окрестности, что, однако, не влияет заметным образом на суммарный эффект. Такой случай возникает в задаче о трении пластины, помещенной в поток жидкости. При обычных предположениях уравнения дают в идеализированном виде бесконечно большой коэффициент трения на передней кромке, но он стремится к бесконечности лишь на нулевом расстоянии от передней кромки и заметным образом не влияет на средний коэффициент трения. Таким образом, даже если уравнения приводят в области передней кромки к ошибке (бесконечная величина трения), они дают правильный результат на участке конечной длины.

Хотя непрерывность и дифференцируемость не всегда требуются, можно показать справедливость таких допущений в задачах механики сплошных сред. Физические представления часто предполагают, что этого следует ожидать. Это ожидание основано на том, что производная n -го порядка (высшего в дифференциальном уравнении) обычно представляет разность сил, энергий и свойств; в механике сплошных сред предполагается, что эти величины непрерывны. Действительно, такие законы, как второй закон термодинамики, часто дают достаточно ясное представление о природе функций. (Здесь читатель может обратиться к разд. 4.6а и выяснить, обеспечивает ли второй закон выполнение 3-го правила применительно к задаче о нагреве тела.) Следует подчеркнуть, что этот вид информации позволяет лишь предполагать, но не заключать, так как никогда нет уверенности в полноте дифференциальных уравнений. Можно ожидать данное физическое явление с весьма высокой степенью уверенности, однако всегда есть некоторое сомнение, что составленное уравнение будет его описывать. Для уравнений теплопроводности такое сомнение минимально, и найденные оценки весьма полезны. В таких случаях физическая информация позволяет предсказать с большой уверенностью определенные типы решения. Таким образом, сделанное предположение остается лишь проверить экспериментально.

Из этого замечания не вытекает, что исключается использование математических методов или что не следует прибегать к дополнительным математическим теоремам. Скорее это означает, что исследователь не должен ссылками на отсутствие математических доказательств уклоняться от попыток получить решение задачи. Полезные сведения для получения таких решений можно найти на основе физических данных о процессе, заключающихся в так называемой «полноте дифференциальных уравнений», в физических законах и в экспериментальных данных.

Такой подход, который можно охарактеризовать фразой: «продвигайся вперед и затем проверяй результаты», будет часто применяться в дальнейших

примерах. Этот подход характеризует различие между прикладной математикой, которая имеет дело с решением задач, и чистой математикой, которая устанавливает соотношения между системами данных условий и определений. Необходимо также сделать замечание о том, что понимается под проверкой. Можно проводить проверку сравнением с опытными данными или с более полной теорией, т. е. с более полным уравнением. Проверка теории сравнением ее с экспериментальными данными — это единственный окончательный критерий правильности теории. Проверка сравнением с более полными уравнениями не является столь определенной, поскольку неизвестна полнота системы уравнений.

В конечном счете 3-е правило предполагает некоторую приблизительную информацию о виде решения. Это характерно для теории приближений, хотя часто ситуация улучшается. Во многих случаях необходимые опытные данные уже имеются и их использование не вызывает затруднений, если они согласуются с математической моделью, представленной в уравнениях. Последнее ясно из замечаний о полноте и об опытной проверке уравнений.

Третье правило дает один путь проведения оценок. Оно показывает, почему полезна нормализация уравнения методом, изложенным в разд. 4.1. Если условия правила 3 удовлетворены (и, возможно, в других случаях), то параметры позволяют оценить величины различных членов. Как уже было показано, точность таких оценок уменьшается с увеличением порядка производной и все производные, кроме первой, должны быть порядка 1 или меньше. Следовательно, можно сохранять члены уравнения, которые в действительности не нужны, но нельзя отбрасывать члены, важные для данной задачи.

Существуют способы, с помощью которых оценки величины членов уравнения могут быть уточнены. Один из наиболее обычных способов — это непосредственное использование физической информации. Это полностью согласуется с нашей методологией; однако для этого необходимы более подробные данные,

нежели те, которые требуются при использовании правила 3. Следовательно, можно использовать оба метода, т. е. имеющиеся опытные данные и необходимые предположения об общей природе решения, которое затем нужно проверить экспериментально. В любом случае используются оценки для выяснения того, какие члены могут быть отброшены из основных уравнений для получения более простых соотношений или решений, когда задача полностью математически неразрешима. Имея это в виду, перейдем к обсуждению соотношений между величиной членов дифференциальных уравнений и результатами интегрирования.

Для иллюстрации рассмотрим вначале обычное дифференциальное уравнение. Пусть, например, $T=T(x)$ и дифференциальное уравнение имеет вид

$$T^2 \left(\frac{dT}{dx} \right) + CT = 0 \quad (4.11a)$$

с граничными условиями

$$\text{при } x=0: \quad T=0.$$

Снова определим $\bar{T}=T/T_a$, $\bar{x}=x/L$.

После подстановки получим

$$\frac{T_a^3}{L} \bar{T}^2 \frac{d\bar{T}}{d\bar{x}} + T_a C \bar{T} = 0$$

или

$$\bar{T}^2 \frac{d\bar{T}}{d\bar{x}} + \pi_1 \bar{T} = 0, \quad \text{где} \quad \pi_1 = \frac{LC}{T_a^2}.$$

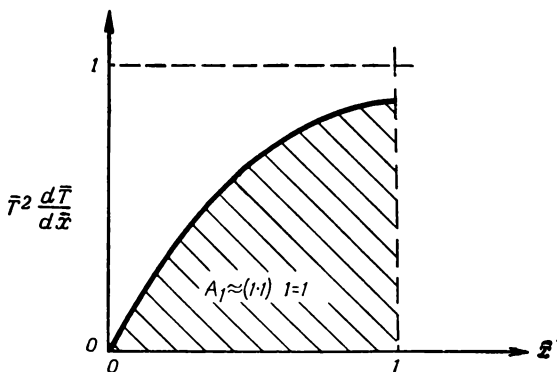
Формальное интегрирование по $\bar{x}$ дает

$$\int_0^{\bar{x}} T^2 \frac{d\bar{T}}{d\bar{x}} d\bar{x} + \pi_1 \int_0^{\bar{x}} \bar{T} d\bar{x} = 0. \quad (4.11b)$$

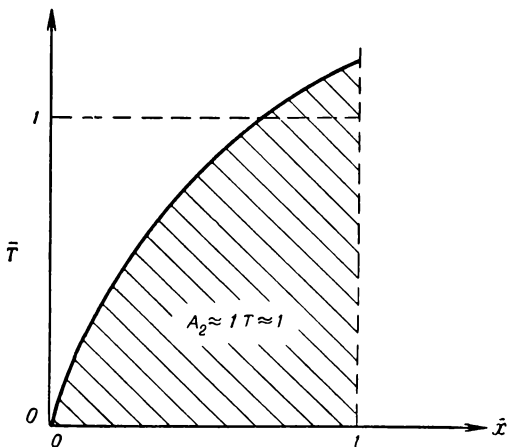
Однако предположим, что $\bar{T}$ удовлетворяет правилу 3, тогда

$$\bar{T} \approx U(1), \quad \bar{T}^2 = U(1), \quad \frac{d\bar{T}}{d\bar{x}} \approx 1.$$

Оценка порядка величины первого интеграла в уравнении (4.11б) показана на фиг. 4.5 заштрихованной областью A_1 . Оценка величины интеграла во



Ф и г. 4.5.



Ф и г. 4.6.

втором члене показана на фиг. 4.6 в виде заштрихованной области A_2 .

Решение уравнения (4.11а) можно записать в виде суммы двух членов:

$$f_1(\bar{T}, \bar{x}) + \pi_1 f_2(\bar{T}, \bar{x}) = 0, \quad (4.12)$$

где функции f_1 и f_2 приблизительно равны или меньше единицы.

Если уравнение содержит производные n -го порядка, процесс можно повторить n раз. Такой же результат будет получен, если уравнение (4.10б) справедливо для производной любого порядка до n включительно или имеется какая-либо другая подходящая оценка. Вывод можно продолжить и получить следующие выражения:

$$T^q x^p \frac{d^n T}{dx^n},$$

где p и q — действительные и конечные числа, и

$$T^q x^p \frac{d^r T}{dx^r} \frac{d^q T}{dx^q}, \quad r < q \leq n,$$

при условии, что заранее можно оценить величину $\partial^r T / \partial x^r$.

Ограниченные функции, например $g(x)$, можно ввести в эти выражения следующим образом:

$$g(x) T^q x^p \frac{\partial^n T}{\partial x^n},$$

так как если предположить, что верхняя граница g есть M_1 , то всегда

$$\bar{g} = \frac{g}{M_1} = O(1).$$

Эти замечания показывают, что можно вводить члены весьма общего вида.

Если можно провести гладкую оценку или какую-либо другую, справедливую для всей области интегрирования, то можно образовать величины π , которые будут соответствовать величине членов рассматриваемого интегрального уравнения.

Подобная, но несколько отличная техника может быть применена для дифференциальных уравнений в частных производных. В этом случае необходимо повторное интегрирование для разных независимых пе-

ременных. Рассмотрим, например, нормализованное дифференциальное уравнение

$$\bar{T} \frac{d^2 \bar{T}}{d\bar{x}^2} + \pi_1 \frac{d\bar{T}}{d\bar{y}} = 0. \quad (4.13)$$

Чтобы получить выражение, зависящее лишь от t , x , y , z и π_1 , необходимо произвести двукратное интегрирование по x и однократное по y . Найденное выражение при наличии соответствующих граничных условий имеет вид

$$\int_{\bar{y}=0}^{\bar{y}} \int_{\bar{x}=0}^{\bar{x}} \int_{\bar{x}=0}^{\bar{x}} \left(\bar{T} \frac{d^2 \bar{T}}{d\bar{x}^2} + \pi_1 \frac{d\bar{T}}{d\bar{y}} \right) d\bar{x} d\bar{x} d\bar{y} = 0. \quad (4.14)$$

Применение соотношений (4.10) к уравнению (4.14) позволяет оценить порядок величины

$$f_1(\bar{T}, \bar{x}, \bar{y}) + \pi_1 f_2(\bar{T}, \bar{x}, \bar{y}) = 0, \quad (4.15)$$

где f_1 и f_2 $O(1)$.

Отметим, что ни (4.12), ни (4.15) не является решением дифференциального уравнения. Они лишь показывают величину отношений между производными и суммарными эффектами.

Теперь можно указать на еще одну важную причину для применения метода нормализации уравнения, предложенного в разд. 4.2. Если нормализация не проведена, то в общем случае порядок величин π может быть различным в дифференциальном уравнении и его решении.

В частности, если область интегрирования независимых переменных не равна единице, то интегрирование может изменить значения множителей π , стоящих перед каждым членом уравнения, когда независимые переменные неоднородны, что бывает почти всегда. Рассмотрим соотношения

$$\int_0^{\bar{x}} \bar{x} d\bar{x} + \pi_1 \int_0^{\bar{x}} \frac{d\bar{T}}{d\bar{x}} d\bar{x} = 0,$$

$$\frac{\bar{x}^2}{2} + \pi_1 [\bar{T} - \bar{T}(0)] = 0.$$

Таким образом, чтобы получить параметры подобия, учитывающие не только локальный, но и интегральный эффекты, следует применять методику нормализации, изложенную в разд. 4.2.

Прежде чем перейти к обобщению этих положений, следует выяснить ситуацию с граничными условиями. В случае использования уравнений, порядок которых выше единицы, может оказаться необходимым нормализовать граничные условия, относящиеся к производным промежуточного порядка, или учесть, что эти граничные условия не нормализованы. Это можно было видеть при первом интегрировании уравнения (4.14). Выполнив интегрирование символически с использованием оценки $\bar{T} \approx 1$, имеем

$$\int_{\bar{y}=0}^{\bar{y}} \int_{\bar{x}=0}^{\bar{x}} \left[\frac{d\bar{T}}{d\bar{x}} + \pi_1 \left(\frac{d\bar{T}}{d\bar{y}} \right)_{\text{средн}} \right] d\bar{x} d\bar{y} + \\ + \int_{\bar{y}=0}^{\bar{y}} \int_{\bar{x}=0}^{\bar{x}} [\bar{\varphi}_A(\bar{y}) + \pi_1 \bar{\varphi}_B(\bar{y})] d\bar{x} d\bar{y},$$

где функциями $\bar{\varphi}_A(\bar{y})$ и $\bar{\varphi}_B(\bar{y})$ являются величины $d\bar{T}/d\bar{x}$ и $d\bar{T}/d\bar{y}$ вдоль границы $\bar{x}=0$, а $(d\bar{T}/d\bar{y})_{\text{средн}}$ — среднее значение $d\bar{T}/d\bar{y}$ по оси $\bar{x}$.

Ясно, что последующее интегрирование уже будет включать и величины $\bar{\varphi}_A$ и $\bar{\varphi}_B$. Эти члены повлияют на соотношение между величиной члена, содержащего π_1 , и оставшимся членом. Таким образом, члены $\bar{\varphi}_A$ и $\bar{\varphi}_B$ в этом случае должны быть также порядка единицы, чтобы можно было судить о величине членов в интегральном решении по величине безразмерных параметров дифференциального уравнения.

Сущность уравнений (4.12) и (4.15) такова: они связывают величины членов в дифференциальном уравнении с членами интегрального решения, если порядок величин этих членов известен. Эти уравнения не дают указаний о направлениях поиска решений, кроме особых случаев, но они показывают, что вели-

чины π в дифференциальных уравнениях могут быть использованы при соответствующих условиях для оценки величины членов решения. Еще раз отметим, что этот метод является не доказательством, а лишь практическим руководством в отдельных случаях, которое необходимо в дальнейшем проверять на опыте. Кроме того, до сих пор не рассматривалась наиболее трудная часть — обеспечение оценок величин в случаях, когда функция не является подобной функции, изображенной на фиг. 4.2; большая часть разд. 4.7—4.9 относится к примерам того, каким образом следует проводить эти оценки в различных случаях, а приведенные материалы представляют собой лишь краткое введение. Однако, поскольку система расчета известна, любой метод оценки для отдельного случая может быть приведен к этой системе.

Суммируем вышесказанное в следующем правиле.

Правило 4

Если основные уравнения могут быть приведены к безразмерному виду, так что каждый член граничных условий, переменные (и функции переменных) будут порядка единицы, и если область интегрирования по тем же переменным можно принять также равной приблизительно единице, то члены в интегральном решении будут того же порядка величины, что и члены дифференциального уравнения; в этом случае можно использовать теорию приближений путем исследования значений параметров в нормализованном основном уравнении.

До сих пор предлагалось три способа оценок: из правила 3 в случае гладкого поведения функции, непосредственно из экспериментальных данных и из соответствующих предположений о форме решения. Можно использовать и комбинации этих способов, но получение точных оценок редко удастся простым методом. Если эти оценки известны, то в нашем распоряжении уже имеется достаточное количество сведений о явлении. Во многих случаях одна и та же оценка членов не может быть использована во всей рассматриваемой области. В случае интегрирования по бесконечной области или в окрестности особой точки уравнения требуется особое рассмотрение этого

вопроса. Как уже отмечалось выше, следует ожидать, что иногда на границах оцениваются величины не только функции, но и некоторых производных.

Наконец, очевидно, что логические предположения о величине или виде решения могут оказаться ошибочными и затруднить поиски действительного решения или связи.

Короче говоря, теория приближений в некотором смысле весьма отлична от методов подобия, основанных на использовании основных уравнений и граничных условий. Методы подобия, основанные на использовании полных дифференциальных уравнений и граничных условий, являются в такой же степени строгими, как и наши знания о полноте и корректности этих уравнений и условий. Однако как только мы переходим к следующему этапу работы, т. е. пытаемся использовать величины параметров и переменных как средство для нахождения более простых решений и правил подобия, возникают дополнительные трудности. Несмотря на эти затруднения, теория приближений весьма важна, так как лишь с ее помощью можно получить решение для многих задач.

Рассмотрим теперь несколько весьма простых примеров для того, чтобы показать, что трудности, о которых уже упоминалось, действительно существуют. Рассмотрим гармонический осциллятор с линейным торможением. Основное уравнение в этом случае имеет вид

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

(Это уравнение соответствует простой системе: массе с пружиной,двигающейся в вязкой среде, либо электрической цепи из последовательно соединенных R , L , C , где R — постоянно. В силу наглядности при обсуждении удобнее использовать первую систему.)

Рассмотрим, во-первых, вопрос о бесконечной области интегрирования. Зададим следующие граничные условия:

$$\text{при } t=0: \quad x=A_0, \quad \frac{dx}{dt}=0. \quad (4.16a)$$

В данном случае преднамеренно выбран пример, где существует полное решение, которое можно затем сравнить с решением, полученным на основе теории приближений. Нормализуем уравнение, используя переменные

$$\bar{x} = \frac{x}{A_0} = U(1), \quad \bar{t} = \frac{t}{\tau},$$

где τ — время, равное четверти периода колебаний. Рассматривая этот промежуток времени, можно видеть, что переменные удовлетворяют правилу 3. После нормализации получим

$$\frac{d^2 \bar{x}}{d\bar{t}^2} + \frac{c\tau}{m} \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} + \frac{k\tau^2}{m} \bar{x} = 0.$$

Допустим далее, что $c\tau/m \ll 1$; если затем, опустив второй член уравнения, проинтегрировать его, получим решение

$$\bar{x} = \cos \beta \bar{t}, \quad \beta = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (4.166)$$

Это незатухающие периодические колебания. Если, с другой стороны, сохранить член $(c\tau/m) d\bar{x}/d\bar{t}$, то получим решение вида

$$x = e^{-ct/2m} \cos \gamma t, \\ \gamma = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}. \quad (4.17)$$

При $c/2m \ll 1$ выражение (4.166) является хорошим приближенным решением уравнения (4.17) для одного периода, но если рассмотреть несколько периодов, т. е. большие величины t , то решения будут значительно различаться. Возникающая трудность связана с тем, что когда член $(c\tau/m) d\bar{x}/d\bar{t}$ мал, он действует на бесконечном отрезке времени и в конце концов оказывает значительное влияние. Перефразируя старую поговорку «капля камень точит», можно сказать, что «даже ничтожное трение в конечном счете уменьшает амплитуду свободных колебаний».

Задачу такого рода можно называть *сингулярной*, так как решение для малого параметра отличается от

решения в случае, когда параметр равен нулю. Сингулярность не идентична неравномерной оценке, но, по-видимому, связана с ней определенным образом, как это будет показано дальше. Когда имеется сингулярность, обычно пытаются преодолеть трудности разложением в ряд по параметрам; некоторые методы такого типа приведены в разд. 4.8.

Рассмотрим теперь простой гармонический осциллятор при отсутствии трения, т. е. $c=0$. Дифференциальное уравнение для такого осциллятора имеет вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0. \quad (4.18)$$

Рассмотрим две системы граничных условий:

$$1) \text{ при } t=0: \quad x=0, \quad \frac{dx}{dt} = V_0,$$

$$2) \text{ при } t=0: \quad x=A_0, \quad \frac{dx}{dt} = V_0.$$

Первое граничное условие нельзя представить в безразмерном виде относительно начального отклонения x , так как оно равно нулю.

Воспользуемся следующим определением:

$$\bar{x} = \frac{x}{V_0/\beta}.$$

Такой метод приведения к безразмерному виду показывает важность граничных данных для производных промежуточных порядков даже в этом весьма простом случае. Полное решение для осциллятора без затухания следующее:

$$x = c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t.$$

Для граничных условий 2 постоянные имеют вид

$$c_1 = A_0, \quad c_2 = \frac{V_0}{\beta}.$$

Здесь также нормализация делением лишь на A_0 не дает хороших оценок величины x при всех возможных

значениях отношения c_1/c_2 . Лучшие результаты дает следующий прием:

$$\bar{x} = \frac{x}{c_0}, \quad c_0 = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{A_0^2 + \left(\frac{V_0}{\beta}\right)^2}.$$

К такой нормализации нельзя прийти сразу, не зная ничего о форме полного решения; здесь показана одна из трудностей получения хороших оценок и необходимость обращать внимание на выбор граничных данных, необходимых для постановки соответствующей задачи. Формально можно получить безразмерное уравнение, потребовав, чтобы нормализованные данные были порядка единицы.

Запишем уравнение в безразмерном виде для более общих граничных условий 2:

$$\frac{d^2 \bar{x}}{d\bar{t}^2} + (\beta\tau)^2 \bar{x} = 0 \quad (4.19)$$

с граничными условиями

$$\text{при } \bar{t} = 0: \quad \bar{x} = \frac{A_0}{c_0}, \quad \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \frac{V_0\tau}{c_0}.$$

Попытаемся теперь применить теорию приближений, т.е. условно примем, что $(\beta\tau)^2 \ll 1$. Далее согласно этой теории получаем

$$\frac{d^2 \bar{x}}{d\bar{t}^2} = 0.$$

Проинтегрировав дважды, находим

$$\bar{x} = c_3 + c_4 \bar{t} = \frac{A_0}{c_0} + \frac{V_0\tau}{c_0} \bar{t}. \quad (4.20)$$

Но полное решение уравнения (4.19) в таких координатах имеет вид

$$\bar{x} = \frac{A_0}{c_0} \cos \beta t + \frac{V_0}{\beta c_0} \sin \beta t. \quad (4.21)$$

Сравнение уравнений (4.20) и (4.21) показывает, что хотя уравнение (4.20) хорошо согласуется с (4.21) при $t=0$, при увеличении t разница становится заметной.

Примем опять условно, что $(\beta\tau)^2 \gg 1$, и попытаемся исключить член $d^2\bar{x}/d\bar{t}^2$. В результате получим лишь следующий результат:

$$\text{при } \bar{x} = 0: \quad x = 0 \quad (4.22)$$

для любого t .

Используя уравнение (4.22), нельзя даже удовлетворить граничным условиям задачи; решения вообще нет, если только граничные условия не имеют следующий тривиальный вид:

$$\text{при } t = 0: \quad \bar{x} = 0, \quad \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = 0.$$

Такое затруднение появляется, когда делается попытка отбросить члены с производными высшего порядка; в таких случаях уже нельзя удовлетворить всем граничным условиям, и поэтому мы можем получить решения лишь для некоторых весьма ограниченных видов граничных условий. Такой вид затруднений иногда можно преодолеть различного рода разложениями в ряд по параметрам или используя *теорию пограничного слоя*. Методы этой теории кратко изложены в разд. 4.8 и 4.9.

Как уже подчеркивалось, отбрасывание членов уравнения в задаче о простом гармоническом осцилляторе связано не с погрешностями теории приближений, а с неверными оценками. Мы определили $\bar{x}$ и $\bar{t}$ таким образом, что члены $d^2\bar{x}/d\bar{t}^2$ и $\bar{x}$ равняются примерно единице, но при этом использовали свободный параметр τ . Так как можно изменять k/m , кажется, что $(k/m)\tau^2$ может принимать любые значения, однако это неверно. Уравнение (4.19) устанавливает связь между $\bar{t}$, $\bar{x}$ и $(k/m)\tau^2$. Если нужно получить любое решение (гармоническое решение), то уравнение (4.19) требует, чтобы оба члена $d^2\bar{x}/d\bar{t}^2$ и $(k/m)\tau^2\bar{x}$ были одного порядка. Физически для поддержания непрерывных колебаний необходимо динамическое равновесие между восстанавливающей и инерционной силами. Так как уравнение полное, оно также отражает это явление, т. е. как физически, так и математически невозможно изменять k/m и τ отдельно; при

увеличении k/m величина τ становится малой и наоборот. Действительно, соотношение между k/m и τ^2 хорошо известно; оно вытекает непосредственно из полного решения:

$$\tau \approx \frac{1}{\sqrt{k/m}} \quad \text{или} \quad (\beta\tau)^2 \approx 1.$$

Следовательно, наши предположения о величине этого параметра неверны. Этот почти абсурдный пример показывает характерный довод, которым иногда пользуются, когда критикуют теорию приближений. Затруднения не заключены в самой теории, а являются следствием принятия неверных оценок.

Здесь следует сделать два дополнительных замечания. Во-первых, мы создали явные трудности из-за выбора оценок относительных величин $\bar{x}$ и $d^2\bar{x}/d\bar{t}^2$ приблизительно равными единице, чтобы ввести их в параметр. В большинстве опубликованных работ это не проводилось, так что плохая оценка относится не к параметру, а к члену, содержащему производные зависимой переменной. Если, как это часто делается, затем пытаются применить теорию приближений, основываясь на величине параметров, к членам, содержащим переменные, то результат будет зависеть от действительных значений производных. В сущности при этом просто надеются, что члены, содержащие переменные, приблизительно равны единице, и далее по возможности проводят проверку этой «гипотезы». Представляется предпочтительным заранее оценивать члены, содержащие переменные, хотя любые методы могут быть использованы, если ясны последствия.

Во-вторых, важно отметить, что ту же аргументацию, т. е. утверждение, что оба члена должны быть величинами одного порядка для того, чтобы уравнение удовлетворялось и решение имело ожидаемый вид, можно часто использовать для оценки величины свободного параметра, такого, как τ . Этот метод будет использован ниже.

Другая трудность, кроме тех, которые уже были показаны на примере использования простого гармонического осциллятора, возникает, когда основные

уравнения или граничные условия не однородны. Согласно теореме 1, зависимая переменная не может быть приведена к безразмерному виду. Отсюда следует, что невозможно дать единую оценку, справедливую для всех задач рассматриваемого класса, т. е. для всех возможных значений параметров. (Здесь речь идет не о неоднородной оценке для данной задачи, а о неоднородной оценке для двух задач.) Это замечание не вызовет удивления у тех, кто хорошо знаком с гидромеханикой или с задачами из теории электромагнетизма. Решения в этих случаях зависят от *параметров*, т. е. общие решения могут значительно отличаться для задач с различными величинами основных параметров, например числа Рейнольдса. Таким образом, при использовании данных для оценок, согласно правилам 3 и 4, мы должны быть уверены, что эти данные лежат в представляющем интерес интервале значений параметров, когда уравнения или граничные условия неоднородны.

Теперь, после того как был приведен полезный пример и выяснены математические западни и ловушки в теории приближений, можно сделать общие выводы о путях их преодоления:

1. Всегда можно попытаться установить величину всех членов в основных уравнениях и граничных условиях. Затем можно исключить малые члены и таким образом найти приближенные основные уравнения и простые законы моделирования для различных интересующих нас интервалов. Если этого нельзя сделать, то нормализованные уравнения будут показывать, какие измерения необходимы для выполнения таких операций, и таким образом непосредственно помогать при планировании эффективной экспериментальной работы.

2. Можно определить параметры, представляющие величины, значения которых неизвестны, и искать условия, при которых соответствующие члены малы (или того же порядка, что и другие члены в основных уравнениях).

3. Условия подобия можно выражать через неопределенные параметры, т. е. следует найти параметры,

которые должны быть постоянными, когда подобие установлено, и затем проверить экспериментально, удовлетворены ли эти условия.

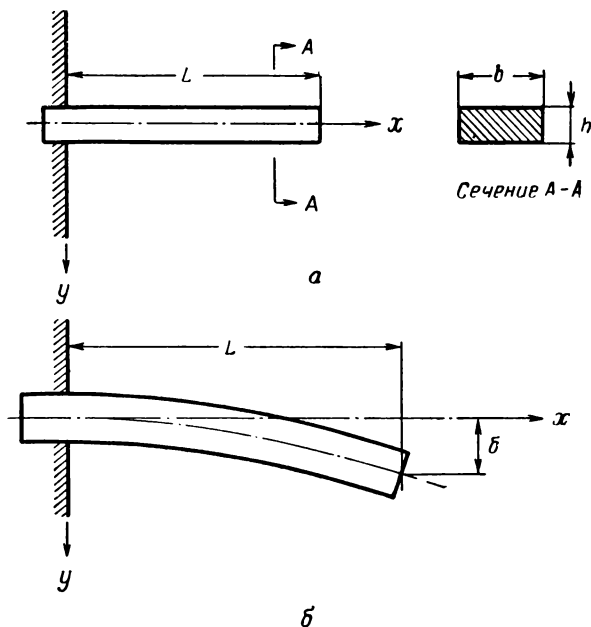
Все эти операции непосредственно зависят от использованного метода нормализации (рассмотренного в разд. 4.2, 4.3 или метода, эквивалентного ему). Во всех случаях решение однородных задач относительно просто; действительно, такие задачи часто удовлетворяют условиям правила 3. Неоднородные задачи значительно сложнее, и в настоящее время для их решения мало приемлемы методы точной математики. Большей частью могут быть рассмотрены лишь частные случаи этих задач. Однако эти трудности не удерживают нас от использования теории приближений. В соответствии с предыдущими соображениями рассмотрим дополнительные примеры и проведем проверку решений путем сравнения с полными уравнениями и экспериментальными данными. Действительно, теперь, выяснив возможные затруднения, мы лучше подготовлены для рассмотрения этих вопросов.

В разд. 4.7 приведены примеры однородных задач. В разд. 4.8 и 4.9 кратко вводятся несколько методов решения неоднородных задач. При этом преимущественно не рассматриваются детали задач, связанных с несобственными интегралами, т. е. задач, имеющих бесконечные области интегрирования, сингулярные функции и необычные виды того, что математики называют «мерой». Мы лишь слегка коснемся этих задач не потому, что они не имеют большого значения, а потому, что они потребуют более высокого уровня математических знаний, чем это необходимо для понимания содержания этой книги.

4.7. Некоторые однородные задачи

Пример 4.3. Рассмотрим случай простого колебания при изгибе жестко закрепленной балки; ранее этот пример приводился в разд. 2.6. Для простоты рассмотрим случай консольной балки прямоугольного сечения длиной L , высотой h , шириной b и массой ρ , отнесенной к единице ее длины. Предположим, что

поперечное сечение A может изменяться вдоль оси балки. Общий вид балки показан на фиг. 4.7, *а*. Будем снова искать закон подобия, на основе которого можно определить частоту ω первой гармоники собственных колебаний балки. Основное дифференциальное



Ф и г. 4.7.

уравнение хорошо известно в теории упругости (теории сопротивления материалов). Например, согласно Хадсону [18], уравнение для основных действующих сил записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (4.23a)$$

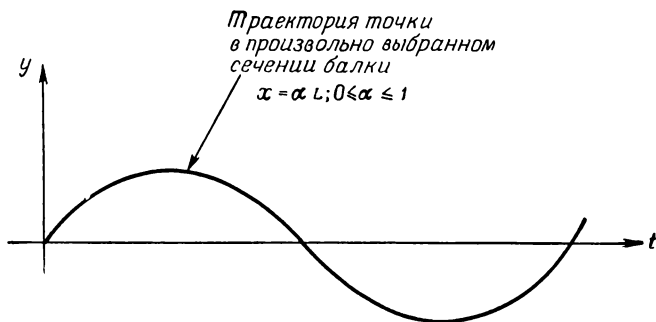
где x — направление вдоль оси балки;

y — направление прогиба;

E — модуль упругости;

I — момент инерции относительно нейтральной оси ($bh^3/12$) для прямоугольной балки;

t — время;
 ρ — масса балки, отнесенная к единице ее длины;
 A — поперечное сечение балки.



Ф и г. 4.8.

Для консольной балки граничные и начальные условия при свободных колебаниях следующие:

$$\text{при } x=0: \quad y=0, \quad \frac{dy}{dx}=0,$$

$$\text{при } x=L: \quad \frac{d^2y}{dx^2}=0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = 0, \quad (4.236)$$

$$\text{при } t=0: \quad y_{x=L} = \delta^1), \quad \left(\frac{dy}{dt} \right)_{x=L} = \dot{y}_{x=L} = 0.$$

Кроме того, возможны колебания, для которых кривая отклонений гладкая. Действительно, для первой гармоники ожидается общая форма колебаний типа, изображенного на фиг. 4.8. Заметим, что точного уравнения этой кривой не требуется, нужны лишь общие сведения о его виде. Большое количество опытов убеждает нас, что уравнения (4.23а) и (4.23б) полные и корректные, если материал балки изотропный и величина прогиба мала. Таким образом, можно ожидать, что при нормализации этих уравнений будет получена полная система безразмерных параметров.

1) Измерено относительно положения балки при статическом равновесии.

Рассматривая $1/4$ периода колебаний, сделаем величины членов, содержащих производные, порядка единицы, определив безразмерные переменные следующим образом:

$$\bar{x} = \frac{x}{L},$$

$$\bar{y} = \frac{y}{\delta},$$

$$\bar{t} = \omega t,$$

где δ — максимальный прогиб конца балки, ω — обратное время, необходимое для одной четверти периода колебаний. В этом случае используется четверть периода, так как балка достигает максимальной скорости приблизительно за четверть периода. Оценка ускорения для любой точки сечения балки имеет вид

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{(dy/dt)_{t=1/\omega} - (dy/dt)_{t=0}}{1/\omega} = \frac{\delta/(1/\omega) - 0}{1/\omega} = \delta\omega^2.$$

Оценку величины $\partial^4 y / \partial x^4$ можно провести согласно уравнению (4.10б), так как кривая зависимости $y=f(x)$ начинается с нулевых прогиба и наклона и должна быть гладкой; следовательно, подстановка $\bar{x}$ и $\bar{y}$, определенных выше, дает $\partial^4 \bar{y} / \partial \bar{x}^4 \approx 1$.

Подстановка безразмерных переменных в соотношение (4.23а) приведет к уравнению

$$\frac{\delta}{L^4} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^2} \left(EI \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \bar{x}^2} \right) + \rho A \delta \omega^2 \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \bar{t}^2} = 0.$$

Формально дифференцируя первый член, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{L^4} \left[EI \frac{\partial^4 \bar{y}}{\partial \bar{x}^4} + 2 \frac{\partial (EI)}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^3 \bar{y}}{\partial \bar{x}^3} + \frac{\partial^2 (EI)}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \bar{x}^2} \right] + \\ + \rho \delta \omega^2 A \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \bar{t}^2} = 0. \quad (4.23в) \end{aligned}$$

Предположим, что $EI = \text{const}$ вдоль оси балки, тогда

$$\frac{\partial (EI)}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial^2 (EI)}{\partial \bar{x}^2} = 0.$$

Используя это равенство и разделив уравнение на $\delta EI/L^4$, получим

$$\frac{\partial^4 \bar{y}}{\partial \bar{x}^4} + \frac{\rho AL^4 \omega^2}{EI} \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \bar{t}^2} = 0. \quad (4.24a)$$

Граничные условия в безразмерных переменных принимают следующий вид:

$$\text{при } \bar{x} = 0: \quad \bar{y} = 0, \quad \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{x}} = 0,$$

$$\text{при } \bar{x} = 1: \quad \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \bar{x}^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 \bar{y}}{\partial \bar{x}^3} = 0, \quad (4.24б)$$

$$\text{при } \bar{t} = 0: \quad \bar{y}_{\bar{x}=1} = 1, \quad \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{t}} \right)_{\bar{x}=1} = 0.$$

Так как основные уравнения однородны относительно y и граничных условий, в которые не входят параметры, величина δ , как и предполагалось, исчезает из уравнений. Уравнение (4.24) справедливо для всех значений прогибов, когда уравнение (4.23) адекватно характеризует систему.

Из уравнений (4.24) можно непосредственно найти результаты двух типов. Во-первых, наиболее просто выделить следующий основной параметр:

$$\pi_1 = \frac{\rho AL^4 \omega^2}{EI} = \left(\frac{L^2 \omega}{Rc} \right)^2, \quad (4.25)$$

где $R = \sqrt{\frac{I}{A}}$ — радиус инерции сечения балки;

$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ — скорость звука в материале балки.

Уравнения (4.24) содержат лишь одну безразмерную группу, а нормализованные граничные условия не содержат параметров. Поэтому π_1 в лучшем случае может быть постоянной величиной. Следовательно, можно найти для ω следующее выражение:

$$\omega = c_1 \frac{Rc}{L^2}, \quad \text{где } c_1 = \text{const.} \quad (4.26)$$

Соотношение (4.26) можно использовать для получения необходимого закона моделирования и правила подобия для первой гармонике собственных колебаний балки. Понятно, что отношение скорости звука к L^2/R постоянно. Исследователь, подбирая частоту, чтобы согласовать теоретические формулы с экспериментальными данными, может получить таким образом точное предсказание поведения балки. В этом смысле уравнение (4.26) дает основу для искаженных и нормальных моделей балок с постоянными параметрами в поперечном сечении.

Если рассматривать ω как параметр, величину которого мы не знаем, но хотим знать, то можно развить решение несколько дальше, рассматривая нормализованное основное уравнение. Второй член в уравнении (4.24а) — это мера сил инерции, возникающих при ускорении элементов массы балки при ее колебании. Первый член представляет собой меру сил упругости, возникающих из-за изгиба балки. Для поддержания колебаний эти две силы должны быть величинами одного порядка. Так как члены уравнения (4.24), содержащие переменные, были сделаны порядка единицы, то параметр ω должен также приблизительно равняться единице, если оба члена имеют величины одного порядка при условии, что наши оценки корректны. Это позволяет оценить величину ω для балки любой заданной формы. В результате получаем

$$\omega = \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}} \text{ рад/сек.} \quad (4.27a)$$

Точное решение этой задачи, даваемое, например, Якобсеном и Айром [21, стр. 80] для прямоугольного поперечного сечения, имеет вид

$$4\omega = 3,5159 \sqrt{\frac{EI}{\rho b h L^4}} \text{ рад/сек}$$

или

$$\omega = 0,879 \sqrt{\frac{EI}{\rho b h L^4}} \text{ рад/сек.} \quad (4.276)$$

Следовательно, весьма простая оценка (4.27а) полностью корректна по форме и дает ошибку 12% по

абсолютной величине. Принимая во внимание неточности используемых оценок, результат можно считать неожиданно хорошим. Кроме того, выражение (4.27а) относится не только к прямоугольному поперечному сечению балки.

Рассмотрим далее уравнение (4.23в) для случая балки с плавно меняющимся по длине поперечным сечением или модулем упругости. Обозначим через $(EI)_0$ наибольшую величину EI для сечения балки. Положим

$$\bar{EI} = \frac{EI}{(EI)_0}.$$

Подставив эту величину в уравнение (4.23в), получим

$$\begin{aligned} \frac{2\delta (EI)_0}{L^4} \frac{\partial (\bar{EI})}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^3 \bar{y}}{\partial \bar{x}^3} + \frac{(EI)_0 \delta}{L^4} \frac{\partial^2 \bar{EI}}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \bar{x}^2} + \\ + \frac{\delta EI}{L^4} \frac{\partial^4 \bar{y}}{\partial \bar{x}^4} + \rho A \delta \omega^2 \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \bar{t}^2} = 0. \end{aligned}$$

Деление на $(EI)_0 \delta / L^4$ дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 (\bar{EI})}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \bar{x}^2} + 2 \frac{\partial (\bar{EI})}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^3 \bar{y}}{\partial \bar{x}^3} + \\ + \frac{EI}{(EI)_0} \frac{\partial^4 \bar{y}}{\partial \bar{x}^4} + \frac{\rho A \omega^2 L^4}{(EI)_0} \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \bar{t}^2} = 0. \quad (4.28a) \end{aligned}$$

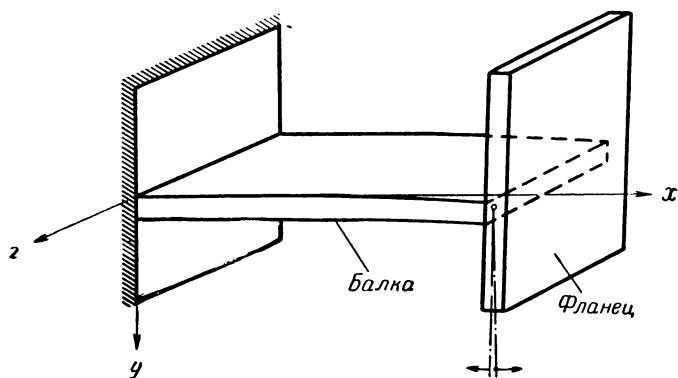
Уравнение (4.28а) позволяет сформулировать числовой критерий, показывающий, когда можно использовать выражение (4.27б) в качестве оценки (первого приближения) характеристик колеблющейся балки с неоднородными свойствами вдоль ее длины. В частности, необходимо, чтобы

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\bar{EI})}{\partial \bar{x}} \ll 1, \quad \frac{\partial^2 (\bar{EI})}{\partial \bar{x}^2} \ll 1, \quad (4.28б) \\ \frac{EI}{(EI)_0} \approx 1. \end{aligned}$$

Если эти условия не выполняются, то должно быть выполнено дополнительное условие моделирования для подобного поведения, а именно

$$\left[\frac{EI(\bar{x})}{(EI)_0} \right]_m = \left[\frac{EI(\bar{x})}{(EI)_0} \right]_p.$$

Это означает, что распределение EI как функции $\bar{x}$ должно быть одинаковым для модели и образца. Обычно можно удовлетворить этим всем трем условиям одновременно; следовательно, практическое моделирование возможно даже в этих относительно



Ф и г. 4.9.

сложных случаях. Так же как и в более простом случае, описываемом уравнением (4.23а), не требуется строгое геометрическое подобие для получения точного моделирования характеристик колеблющейся балки и можно получить хорошие приближения в весьма широком диапазоне условий.

Пример 4.4. Рассмотрим колебание консольной балки постоянного поперечного сечения, нагруженной на конце большим фланцем (фиг. 4.9). Допустим, что колебания балки происходят в вертикальной плоскости и возможно вращение массы фланца относительно центра балки, однако скручивание и колебание по оси z не рассматриваются.

Уравнение для колебаний балки записывается так же, как и раньше, в виде

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (4.29a)$$

Однако граничные условия теперь имеют другой вид:

$$\text{при } x=0: \quad y=0, \quad \frac{dy}{dx}=0, \quad (4.29б)$$

$$\begin{aligned} \text{при } x=L: \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{J_F}{EI} \frac{\partial^2 \theta_F}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} &= \frac{M_F}{EI} \frac{\partial^2 y_F}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (4.29в)$$

$$\text{при } t=0: \quad y_{x=L}=\delta, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_{x=L}=\dot{y}_{x=L}=0, \quad (4.29г)$$

где y_F — отклонение фланца;

θ_F — угловое смещение фланца;

J_F — полярный момент инерции фланца;

M_F — масса фланца;

I — момент инерции сечения балки (см. пример 4.3);

E — модуль Юнга для балки.

Заметим, что граничные условия при $x=L$ сходны с уравнениями для вертикального и углового движений фланца, измеренных от положения статического равновесия. Чтобы получить полную систему уравнений, необходимо добавить условия совместности при $x=L$:

$$\begin{aligned} y_{x=L} &= y_F, \\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=L} &= \operatorname{tg} \theta_F. \end{aligned}$$

Здесь удобно использовать те же самые безразмерные переменные, как и в примере 4.3:

$$\bar{y} = \frac{y}{\delta}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{t} = \omega t.$$

Обозначим также

$$\bar{\theta} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}.$$

Тогда

$$\operatorname{tg} \theta_F = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=L} \approx \frac{\delta}{L}, \quad \bar{\theta}_F \approx 1, \\ y_F \approx \delta, \quad \bar{y}_F \approx 1.$$

После нормализации уравнения (4.29а) получим, как и ранее,

$$\frac{\partial^4 \bar{y}}{\partial \bar{x}^4} + \frac{\rho AL^4 \omega^2}{EI} \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \bar{t}^2} = 0.$$

Формулы (4.29б) — (4.29г) принимают вид:

$$\begin{aligned} \text{при } \bar{x} = 0: \quad \bar{y} = 0, \quad \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = 0, \\ \text{при } \bar{x} = 1: \quad \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \bar{x}^2} = \frac{LJ_F \omega^2}{EI} \frac{\partial^2 \bar{\theta}_F}{\partial \bar{t}^2} \\ \text{и } \frac{\partial^3 \bar{y}}{\partial \bar{x}^3} = L^3 \frac{M_F \omega^2}{EI} \frac{\partial^2 \bar{y}_F}{\partial \bar{t}^2}, \\ \text{при } \bar{t} = 0: \quad \bar{y}_{\bar{x}=1} = 1, \quad \left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} \right)_{\bar{x}=1} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в полные уравнения и граничные условия входят три безразмерных параметра:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{\rho AL^4 \omega^2}{EI}, \\ \pi_2 &= \frac{LJ_F \omega^2}{EI}, \\ \pi_3 &= \frac{L^3 M_F \omega^2}{EI}. \end{aligned}$$

Все три величины π_1 , π_2 и π_3 содержат параметр ω^2 , который обычно считается зависимым параметром

$$\pi_4 = \frac{\pi_2}{\pi_1} = \frac{J_F L}{\rho AL \cdot L^3} \frac{EI \omega^2}{EI \omega^2}.$$

Но

$$\rho AL = \text{Массе балки} \triangleq M_B$$

и

$$J_F = M_F r_F^2,$$

где r_F — радиус инерции фланца.

И, следовательно,

$$\pi_4 = \frac{M_F}{M_B} \frac{r^2}{L^2}.$$

Таким же образом получаем

$$\pi_5 = \frac{\pi_3}{\pi_1} = \frac{M_F}{M_B}.$$

Кроме того, π_4 и π_5 постоянны, если зафиксировать M_F/M_B и r_F^2/L^2 . Следовательно, в качестве основных параметров можно использовать более простые и удобные величины:

$$\pi_1 = \frac{\omega L^2}{Rc},$$

$$\pi_5 = \frac{M_F}{M_B},$$

$$\pi_6 = \frac{r_F^2}{L^2}.$$

Так как известно, что уравнения правильно сформулированы и отражают физические явления достаточно точно для малых отклонений балки, можно надеяться, что эти параметры составляют точную и полную систему, которая может быть использована.

Эту же задачу можно решить, воспользовавшись интегральными уравнениями. Читателю, знакомому с основами расчета таких балок, полезно проверить решение следующим методом. Используя энергетические методы расчета, следует записать одно интегральное уравнение, описывающее поведение системы. Проверьте, что преобразование этого уравнения к безразмерному виду, удовлетворяющему условиям правила 3, позволяет получить только параметры, величина которых не меняется при фиксированных величинах π_1 , π_5 и π_6 , приведенных выше.

4.8. Неоднородные задачи. Методы пограничного слоя

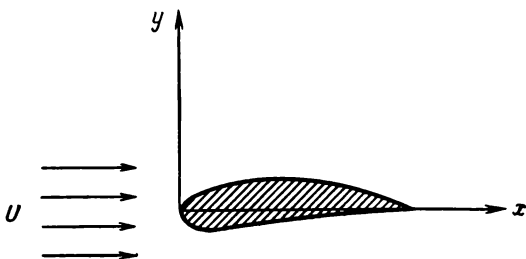
При рассмотрении неоднородных задач используем те же понятия, что и при исследовании однородных задач, но необходимо также ввести дополнительные

положения. Некоторые понятия были специально развиты для неоднородных задач. Впервые понятие пограничного слоя ввел Прандтль. И хотя Прандтль использовал это понятие лишь для решения задач гидромеханики, применимость его значительно шире. Некоторое представление об этом дают три приводимых ниже примера, включая задачу Прандтля о пограничном слое в потоке жидкости и задачу о теплопроводности.

При рассмотрении понятия пограничного слоя Прандтль использовал различные оценки в разных областях исследуемой системы. Это понятие является основой и более позднего метода, который мы будем называть методом *зональных оценок* (см., например, работу [8]). Прандтль использовал данные непосредственно в отдельных членах. Метод зональных оценок позволяет использовать минимальное количество информации об общей форме решения как основу для получения оценок, которые затем могут быть проверены. Метод Прандтля рассматривается в разд. 4.8а, метод зональных оценок — в разд. 4.8б.

а. Использование только физических данных

Пример 4.5. Применение теории приближений к уравнениям Навье—Стокса для потока, обтекающего



Ф и г. 4.10.

тело. Задача заключается в определении различных режимов течения и отыскании корректных основных безразмерных параметров.

На фиг. 4.10 показано обтекание тела потоком жидкости.

Предполагается, что жидкость ньютоновская, а поток — ламинарный, установившийся, несжимаемый и двумерный. Основные дифференциальные уравнения в данном случае хорошо известны. Они выведены из уравнений Навье — Стокса в пренебрежении членами, зависящими от времени, и составляющими по оси z и записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u, \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v, \end{aligned}$$

где u — составляющая скорости по оси x , v — составляющая скорости по оси y , $\nu = \mu/\rho$ — кинематическая вязкость, ρ — плотность, p — давление, ∇^2 — оператор Лапласа.

Должно также удовлетворяться условие неразрывности. В данном случае уравнение неразрывности может быть записано в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Обычно используемые граничные условия таковы:

на поверхности тела: $u=0$, $v=0$,

при $y=\infty$: $u=U$, $v=0$.

Если теперь попытаться определить параметры, удовлетворяющие как правилу 3, так и правилу 4, то столкнемся с несколькими трудностями. Во первых, поскольку поток неограничен в пространстве, то невозможно ограничить область применимости уравнений. Таким образом, правило 4 нельзя непосредственно использовать. Применяя правило 3, найдем, что невозможно определить безразмерные переменные, которые бы удовлетворяли условиям при всех значениях параметров. Действительно, для некоторых значений параметров нельзя определить переменные, которые давали бы подходящие оценки во всех

областях потока. Поэтому необходимо идти другим путем. Будем искать оценки членов, содержащих производные, которые справедливы лишь для заранее установленных пределов изменения параметров и для определенных зон потока. Затем попытаемся найти решения, применимые к каждой зоне в данном интервале изменения параметров, и согласуем решения на границе двух областей.

Но даже при учете различий между отдельными областями в потоке невозможно, исходя лишь из уравнений, гарантировать существование подобия, так как у нас нет необходимых теорем существования и единственности решений уравнений Навье — Стокса. Однако если найти необходимые оценки, используя данные для типичных систем класса, рассмотренного при соответствующих значениях параметров, то можно быть уверенным в том, что получим корректные результаты, но лишь при условии, что действительно существует некоторое единственное устойчивое решение (которое мы можем по крайней мере ожидать) и что мы не выходим за пределы области, удовлетворяющей, согласно измерениям, типичным условиям, поскольку, как известно, уравнения Навье — Стокса являются полной математической моделью для несжимаемых ньютоновских жидкостей. При этом, как и раньше, мы стремимся нормализовать уравнения и получить недостающие оценки из экспериментальных данных.

Пусть

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{y} = \frac{y}{\delta}, \quad \bar{u} = \frac{u}{U}, \quad \bar{v} = \frac{v}{V},$$

$$\bar{p} = \frac{p}{\Delta p_L},$$

где L — длина тела, δ — неизвестная длина, U — составляющая скорости по оси x вверх по потоку на большом удалении от тела, V — неизвестная скорость, Δp_L — наибольший перепад давления между двумя точками на поверхности тела, p — давление, измеренное относительно опорной точки, находящейся вверх по потоку на большом расстоянии от тела.

По определению, $\bar{u}$ и $\bar{p}$ — величины порядка единицы, а $\bar{x}$ изменяется от 0 до 1 вдоль длины тела. Остается показать, что V и δ могут быть найдены такими, чтобы V было порядка единицы, а $\bar{y}$ изменялся от 0 до 1 и чтобы обеспечивались также оценки других членов. Оставим пока эти вопросы нерешенными.

Подставив безразмерные переменные в основные уравнения, получим уравнения сохранения количества движения по оси x :

$$\frac{U^2}{L} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{UV}{\delta} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = - \frac{\Delta p_L}{\rho L} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{U \nu}{L^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right)$$

и по оси y

$$\frac{UV}{L} \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \frac{V^2}{\delta} \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = - \frac{\Delta p_L}{\rho \delta} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{\nu V}{L^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right),$$

а также уравнение неразрывности

$$\frac{U}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{V}{\delta} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0.$$

В безразмерном виде уравнение неразрывности записывается как

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{L}{U} \frac{V}{\delta} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0.$$

По определению, $\partial \bar{u} / \partial \bar{x}$ порядка единицы, за исключением области вблизи лобовой точки, где скорость потока равна нулю; эта область является предметом специальных исследований¹⁾. Желательно также, чтобы $\partial \bar{v} / \partial \bar{y}$ было порядка единицы и чтобы уравнение

¹⁾ Эта задача подробно изучалась. См., например, работы Шлихтинга [45] или Цзяня [49]. В данной книге этот вопрос не исследуется.

неразрывности удовлетворялось в каждой точке. Это возможно лишь при условии

$$\frac{LV}{U\delta} \approx 1. \quad (4.30a)$$

Это соотношение будет выполняться, если

$$V \triangleq \frac{\delta}{L} U. \quad (4.30b)$$

Поскольку последнее соотношение является единственным условием, то величина δ все еще остается неопределенной. Из формулы (4.30b) следует, что в силу уравнения неразрывности $\partial \bar{v} / \partial \bar{y}$ приблизительно равно единице. При этом в уравнение неразрывности не будут входить параметры и его можно не рассматривать, поскольку речь идет о теории приближений или условиях подобия. Можно также использовать уравнение (4.30b) для того, чтобы исключить параметр V из обоих уравнений сохранения количества движения. Прделав это и деля уравнения сохранения количества движения на U^2/L , получим безразмерные уравнения:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = - \frac{\Delta p_L}{\rho U^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{v}{UL} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right), \quad (4.31a)$$

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = & - \frac{\Delta p_L}{\rho U^2} \left(\frac{L}{\delta} \right)^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \\ & + \frac{v}{UL} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right). \end{aligned} \quad (4.31b)$$

Граничные условия

на поверхности тела: $\bar{u} = 0, \quad \bar{v} = 0,$

при $\bar{y} = \infty$: $\bar{u} = 1, \quad \bar{v} = 0. \quad (4.31b)$

Система нормализованных основных уравнений и граничных условий будет содержать три комплекса π :

$$\pi_1 = \left(\frac{L}{\delta}\right)^2,$$

$$\pi_2 = \frac{UL}{\nu} \text{ — число Рейнольдса } \triangleq Re_L,$$

$$\pi_3 = \frac{\Delta p_L}{\rho U^2} \text{ — число Эйлера } \triangleq Eu.$$

Так как уравнения (4.31) неоднородны относительно зависимых переменных u и v , то в них входит параметр U , являющийся зависимой переменной. Они также содержат v , хотя мы и исключали его, заменяя на U , чтобы удовлетворить уравнению неразрывности во всем потоке. Обсудим более подробно смысл зависящего параметра.

Уравнения (4.31) и уравнение неразрывности представляют собой систему трех независимых уравнений для трех зависимых переменных u , v и p . Они устанавливают связь между этими переменными и независимыми переменными и параметрами. Так как уравнения неоднородны относительно u , то мы не можем получить искомые соотношения независимо от величины U , т. е. U явно входит в нормализованные уравнения и, таким образом, относится к независимым параметрам. Другими словами, если мы задаем значения независимых переменных и двух из трех комплексов π_1 , π_2 и π_3 , то третий комплекс определяется уравнением (4.31). Это не имело места в случае с однородными уравнениями, которые ранее исследовались. Таким образом, задавая значения чисел Рейнольдса и Эйлера, можно определить значение зависящего параметра из уравнений или найти его экспериментально. Итак, следует всегда учитывать, что в неоднородные уравнения входят как зависимые, так и независимые параметры.

Мы снова видим, что следует ожидать решений, зависимых от параметров, т. е. можно ожидать различных решений даже совершенно разного типа при различных значениях независимых безразмерных

основных параметров. Такая возможность действительно существует и хорошо подтверждена экспериментально во многих случаях для потоков, описываемых уравнениями (4.31).

В этом случае мы также обычно преобразуем переменные; уравнения записаны так, что δ является независимой, а U — зависимой переменной. Однако для экспериментального исследования это крайне неудобно и обычно предпочтительнее рассматривать U в качестве независимой переменной, а δ — в качестве зависимой.

В данной задаче мы пытаемся так выбрать параметры, чтобы члены, содержащие переменные уравнения (4.31), можно было сделать порядка единицы. Но так как мы рассматриваем δ как зависимую переменную, то она не может быть порядка единицы при всех возможных значениях чисел Рейнольдса и Эйлера. Исследуем природу возможных решений и приближений, когда число Re_L мало по сравнению с 1, когда оно приблизительно равно единице и когда оно велико по сравнению с 1. Сначала рассмотрим случай, когда число Рейнольдса мало по сравнению с 1.

Если Re_L мало по сравнению с единицей, то из уравнений (4.31) видно, что независимо от величины $(L/\delta)^2$ произведение одного или двух членов, учитывающих вязкость, на $1/Re_L$ должно быть велико по сравнению с единицей.

В приведенном ниже уравнении показан порядок величин каждого члена вблизи обтекаемого тела:

$$\underbrace{\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}}_1 + \underbrace{\bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}}_1 = \underbrace{Eu_x \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}}_{\gg 1} + \underbrace{\frac{1}{Re_L} \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \left(\frac{L}{\delta} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right]}_{\gg 1} \quad \begin{matrix} 1 & ? & 1 \end{matrix}$$

Таким образом, если поле течения ограничено (или рассматривается вблизи тела), то можно не учитывать инерционные члены и уравнение сохранения количества движения по оси x примет вид

$$0 = Eu \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{1}{Re_L} \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \left(\frac{L}{\delta} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right]. \quad (4.32a)$$

Если же поле течения не ограничено, то по причинам, указанным в разд. 4.6б, нельзя ожидать справедливости уравнения (4.32а). Действительно, часто оно не дает правильных результатов для потока на бесконечности.

Аналогично для ограниченных потоков или потоков около поверхности тела при малых значениях числа Re_L можно упростить уравнение количества движения по оси y . Имеет смысл умножить его на Re_L ; тогда получим два следующих уравнения сохранения количества движения:

$$\begin{aligned} \frac{L \Delta p_L}{\mu U} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{L^2}{\delta} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{L \Delta p_L}{\mu U} \frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} &= 0. \end{aligned} \quad (4.32б)$$

Первый параметр $L \Delta p_L / \mu U$ известен как число Стокса, которое, как было показано, являлось наиболее подходящим параметром в одной из задач такого рода, приведенной в примере 3.4.

При средних значениях числа Рейнольдса (т. е. при значениях порядка единицы) следует учитывать все члены. Так как в большинстве случаев мы не можем аналитически решить полное уравнение (4.31), то решения для этой области в конечном виде фактически отсутствуют.

Наибольший интерес для практических приложений представляет область, в которой число Re_L велико по сравнению с единицей. Для исследования этого случая преобразуем уравнение сохранения количества движения по оси x (4.31а), вынося за скобки $(L/\delta)^2$. Тогда получим

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = - Eu \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{(L/\delta)^2}{Re_L} \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \left(\frac{\delta}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \right]. \quad (4.31г)$$

Как уже отмечалось, уравнения неоднородны и невозможно задать значение δ независимо от других параметров, поскольку само уравнение устанавливает

связь между значениями параметров, представляющих зависимые и независимые переменные, и мы приняли, что δ является зависимым параметром. Так как мы задали число Re_L , то у нас имеется лишь два источника определения δ : 1) полное аналитическое решение и 2) типичные данные. Поскольку полного аналитического решения пока не получено, то следует использовать данные для отыскания приближенных уравнений или основных параметров.

В большей части литературы XIX в. по гидромеханике это рассматривалось следующим образом. Поскольку $1/Re_L$ мало, то можно опустить все члены, умноженные на этот параметр, т. е. члены, учитывающие вязкость для течения с большим числом Re_L . Это приводит к хорошо известным уравнениям Эйлера для жидкости с нулевой вязкостью. Обычно уравнения Эйлера можно решить. Полученные при этом результаты показывают, что все тела такого рода не имеют лобового сопротивления и во многих технически важных задачах они расходятся с опытными данными по порядку величины.

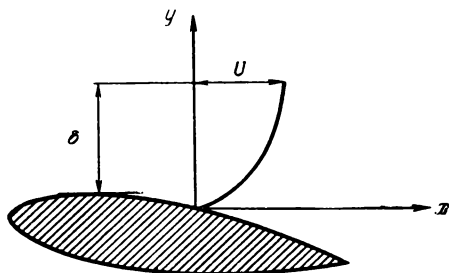
Из приведенного рассуждения ясно, что мы не можем опустить эти члены, если не показано, что группа членов, содержащих безразмерные переменные и связанных с параметром $1/Re_L$, имеет порядок единицы. Очевидно, это зависит от величины δ . Прандтль показал, что δ уменьшается с ростом Re_L , так что при больших Re_L влияние вязкости в основном ограничивается узкой областью, прилегающей к телу. Прандтль назвал эту область *пограничным слоем*. Затем он определил δ как толщину этого слоя, измеренную от поверхности тела до точки, где влияние вязкости мало, например, где скорость отличается на 1% от значения, найденного при решении уравнений Эйлера для невязкого потока. Это определение используется ниже. Как показано на фиг. 4.11, оно обеспечивает такую оценку $\partial^2 \bar{u} / \partial \bar{y}^2$, что в пределах пограничного слоя этот член является величиной порядка единицы.

Следует отметить, что такая нормализация приводит к приближенным граничным условиям, так как

мы заменяем

$$\bar{u} = 1 \quad \text{при} \quad \bar{y} = \infty \quad \text{на} \quad \bar{u} = 1 \quad \text{при} \quad \bar{y} = 1.$$

Это все еще не дает действительного численного значения δ . Однако из уравнения (4.31г) видно, что при $\delta/L=1$ мы опускаем все члены, учитывающие вязкость, а это снова приводит к тем же расхождениям,



$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| &\approx \frac{(\partial u / \partial y)_{y=\delta} - (\partial u / \partial y)_{y=0}}{\delta} \\ &\approx \frac{0 - U/\delta}{\delta} = \frac{U}{\delta^2} \\ \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| &\approx 1 \end{aligned}$$

Ф и г. 4.11.

что и уравнения Эйлера. Некоторые исследователи считают, что следует принять

$$\frac{(\delta/L)^2}{\text{Re}_L} \approx 1$$

или

$$\frac{\delta}{L} \approx \sqrt{\frac{1}{\text{Re}_L}}. \quad (4.33)$$

Это можно получить на основе испытаний; однако поскольку δ — зависимая величина, то единственным убедительным доказательством справедливости соотношения (4.33) является сопоставление с экспериментальными данными. Изучение большого числа

типичных данных показывает, что формула (4.33) удовлетворяется при $Re_L \gg 1$ в случае присоединенных потоков.

Зная величину δ , можно оценить все члены обоих уравнений сохранения количества движения. Поскольку вне пограничного слоя влияние членов, учитывающих вязкость, мало, то опустим их в этой области. Внутри же пограничного слоя порядок величин членов приводимого ниже уравнения будет следующим:

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= -Eu \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{(L/\delta)^2}{Re_L} \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \left(\frac{\delta}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \right]. \\ \approx (1) \quad \approx (1) \quad O(1) \quad \approx 1 \quad \approx (1) \quad \ll 1 \approx (1) \end{aligned}$$

Таким образом, мы опускаем член $\partial^2 \bar{u} / \partial x^2$ в уравнении сохранения количества движения по оси x .

Порядок величин членов в уравнении по оси y следующий:

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} &= -Eu \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \left(\frac{L}{\delta} \right)^2 + \frac{1}{Re_L} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \left(\frac{L^2}{\delta} \right) \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2}. \\ (1) \quad (1) \quad O(1) ? \gg 1 \quad \ll 1 \quad 1 \quad 1 \end{aligned}$$

Наибольший интерес представляет член, учитывающий давление, но лишь до тех пор, пока $Eu = O(1)$. Число Эйлера может быть приблизительно равно единице или очень мало, и разница в результатах может быть значительной. Чтобы сделать оценку более точной, определим перепад давления поперек пограничного слоя, обозначив его через Δp_δ , и также определим

$$p^* = \frac{p}{\Delta p_\delta},$$

где снова началом отсчета будет давление в свободном невозмущенном потоке¹⁾. Составим

$$\frac{\partial p^*}{\partial y} \approx 1.$$

¹⁾ Следует отметить, что трудность в этом выводе связана с различием величин $(L, \Delta p_L)$ и $(\delta, \Delta p_\delta)$ по осям x и y соответственно. См. замечания к дополнению Хантли в гл. 2.

Член, учитывающий давление, в уравнении количества движения по оси y можно тогда переписать в виде

$$+ Eu \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \left(\frac{L}{\delta} \right)^2 = \frac{\Delta p_L}{\rho U^2} \frac{\Delta p_\delta}{\Delta p_L} \frac{\partial p^*}{\partial y} \left(\frac{L}{\delta} \right)^2 \approx 1 \gg 1$$

Таким образом, чтобы нормализованное уравнение было справедливо, нужно, чтобы

$$\frac{\Delta p_\delta}{\rho U^2} \ll 1,$$

т. е. чтобы это отношение было по крайней мере того же порядка, что и

$$\left(\frac{\delta}{L} \right)^2 \ll 1.$$

Это следует из того, что в уравнение не входят члены, большие единицы, и нет другого способа получения равенства, кроме выбора малого значения Δp_δ (Δp_δ может быть еще меньше выбранной величины, но не больше). Следовательно, с точностью приближения пограничного слоя можно положить

$$\Delta p_\delta = 0.$$

Это приводит к хорошо известным уравнениям Прандтля для пограничного слоя. После нормализации эти уравнения имеют вид

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (4.34a)$$

$$\Delta p_\delta \approx 0. \quad (4.34b)$$

Теперь можно получить решения для всего потока, как это предложено Прандтлем. Сначала решим уравнения для невязкой жидкости и предположим, что это решение справедливо вне пограничного слоя. Так как в пограничном слое $\Delta p_\delta = 0$, то в качестве первого приближения для получения значения $\partial p / \partial x$ можно использовать распределение давлений, найденное с помощью уравнений для невязкой жидкости. Затем можно использовать это распределение давлений для

решения уравнения сохранения количества движения по оси x (4.34а). Таким образом, уравнение сохранения количества движения по оси y просто используется для согласования решений в двух областях. Основным приближением является разделение потока на две области: пограничный слой, к которому применимы уравнения (4.34), и область вне пограничного слоя, где справедливы уравнения для невязкой жидкости.

Этот метод широко используется и известен как первое приближение; см., например, книгу Шлихтинга [45], в которой рассмотрено много решений и проведено их сравнение с экспериментальными данными. Однако имеются два случая, когда этот метод применять нельзя. Первый из них хорошо известен: это область вблизи лобовой точки тела. Как уже отмечалось, указанные выше оценки не справедливы в этой области. Здесь $\partial \bar{u} / \partial \bar{x}$ не будет порядка единицы, а Re_L невелико по сравнению с 1. Поэтому данный метод здесь неприменим. Вторым случаем является отрыв потока от тела. Экспериментально установлено, что при этом $(\delta/L)^2$ не удовлетворяет соотношению (4.33), а измерения показывают, что $\Delta p_\delta = 0$ около точки срыва. Не следует ожидать совпадения теоретических и экспериментальных данных, так как экспериментальное значение δ не удовлетворяет уравнениям.

Если снова обратиться к вопросу о гладких оценках (фиг. 4.2), то можно более ясно увидеть, что происходит при наличии пограничного слоя. Вне пограничного слоя изменение происходит медленно и можно использовать гладкую оценку величин. Однако такие оценки не справедливы на всем пути к границе, если не окажется, что значения на границе именно такие, которые получаются из решения, основанного на гладких оценках. Эта ситуация аналогична случаю простого гармонического осциллятора. Граничные условия совсем не подходят, если опустить производные более высокого порядка. В данном случае граничными условиями, которые соответствовали бы гладким оценкам, являются те же условия, что и в решении для невязкой жидкости. Поскольку это не так,

то вблизи границы, около которой возникает пограничный слой, имеет место резкое изменение условий. Такое особое поведение часто возникает, когда мы опускаем члены, содержащие производные по данной переменной более высокого порядка. Итак, часто имеет смысл предполагать, что в таких случаях решение имеет общий вид, представленный на фиг. 4.3, даже при отсутствии экспериментальных данных; и тогда результат следует проверить, сопоставляя с более общим уравнением. Такой подход весьма эффективен, что будет видно при рассмотрении метода зональных оценок в разд. 4.8б. Как уже отмечалось, основным является разделение на ряд областей, в каждой из которых можно использовать гладкие оценки. Такие области не обязательно должны располагаться на границе; например, часто мы рассматриваем ударную волну, распространяющуюся в жидкости, при аналогичных допущениях. Может также потребоваться наличие более двух различных областей.

Сравнение приведенного выше метода с выводом уравнений пограничного слоя, проводимым в большинстве известных работ, также покажет преимущества преобразования членов, содержащих переменные, к значениям, приблизительно равным единице. В частности, преимущества параметра $(L/\delta)^2/Re_L$ по сравнению с Re_L очевидны каждому, кто знаком с решениями и соотношениями теории пограничного слоя. Если вспомнить замечания, сделанные ранее об отношениях сил (разд. 4.5в), то увидим, что число Рейнольдса, которое учитывает отношение сил инерции и вязкости для пограничного слоя такого рода, равно $(L/\delta)^2/Re_L$. Поэтому не удивительно, что оно представляет собой наиболее удобную форму.

В гидромеханике неоднородные задачи встречаются часто. Поскольку с помощью известных в настоящее время математических методов невозможно получить решения полных уравнений, то очень важно использование данных об общих видах течения в типичных случаях. В этом смысле такие данные являются даже более важными в гидромеханике, чем во многих других областях. Как было показано при рассмотрении

уравнений пограничного слоя Прандтля, эти данные не должны быть очень подробными, но должны характеризовать тот типичный общий вид течения, который действительно имеет место. Бóльшая часть действительно важных аналитических ошибок в истории гидромеханики возникла вследствие того, что принимался общий вид течения, который в действительности не имеет места в природе, а поэтому определялись неправильные значения основных безразмерных критериев.

Пример 4.6. Критерий подобия Кармана для турбулентного пограничного слоя. В качестве следующего примера рассмотрим вывод Карманом условий подобия для турбулентного пограничного слоя. Это один из примеров использования уравнений в частных производных и поиска критериев, характеризующих процесс. Несмотря на важность результата, положенного в основу аналитических выражений для профилей средних скоростей, вывод имеет ряд недостатков. Однако они являются весьма поучительными.

Определим функцию тока для двумерного несжимаемого потока как

$$\Psi_1 = \Psi_m + \Psi,$$

где Ψ_1 — общая функция тока, Ψ_m — функция тока осредненного потока, Ψ — функция тока возмущений. Теперь уравнения Навье — Стокса для двумерного потока могут быть записаны в виде ¹⁾

$$\frac{\partial \nabla^2 \Psi_1}{\partial t} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \Psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \Psi_1}{\partial y} = \nu \nabla^4 \Psi_1.$$

Выберем такое направление осей, чтобы

$$u = u_m(y), \quad v_m = 0.$$

Тогда

$$u = u_m + \frac{\partial \Psi}{\partial y},$$

$$v = 0 - \frac{\partial \Psi}{\partial x},$$

¹⁾ См., например, [45].

u — составляющая скорости по оси x ,

$()_m$ — усреднение по времени,

v — составляющая скорости по оси y .

Теперь уравнение для возмущения (флуктуации) можно получить лишь путем преобразования исходного уравнения и подстановки приведенных выше соотношений. В результате имеем

$$\frac{\partial(\nabla^2\Psi)}{\partial t} + \left(u_m + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\right) \frac{\partial\nabla^2\Psi}{\partial x} - \left(\frac{\partial^2 u_m}{\partial y^2} + \frac{\partial\nabla^2\Psi}{\partial y}\right) \frac{\partial\Psi}{\partial x} = \\ = v \left(\nabla^4\Psi + \frac{\partial^3 u_m}{\partial y^3}\right).$$

Попытаемся теперь определить безразмерные параметры, удовлетворяющие правилу 3, для области, которая находится на некотором расстоянии от стенки. Эта область называется турбулентным ядром или логарифмической областью. Карман использовал определения, эквивалентные

$$\bar{x} = \frac{x}{l},$$

$$\bar{y} = \frac{y}{l},$$

$$\bar{\Psi} = \frac{\Psi}{Bl},$$

$$\bar{t} = \omega t,$$

$$\bar{u} = \frac{u_m}{B},$$

где l — наибольшая характеристическая длина возмущения скорости, возникающего вследствие турбулентных флуктуаций, которая принимается одинаковой в направлениях x и y ;

B — неизвестная скорость, удовлетворяющая условию $\Psi \approx 1$;

ω — неизвестная характеристическая частота.

Преобразование дифференциального уравнения к безразмерному виду дает

$$\frac{\omega Bl}{l^2} \frac{\partial\nabla^2\bar{\Psi}}{\partial\bar{t}} + B \left(\bar{u} + \frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial\bar{y}}\right) \frac{B}{l^2} \frac{\partial\nabla^2\bar{\Psi}}{\partial\bar{x}} - \\ - B \frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial\bar{x}} \frac{B}{l^2} \left(\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{y}^2} + \frac{\partial\nabla^2\bar{\Psi}}{\partial\bar{y}}\right) = \frac{vB}{l^3} \left(\nabla^4\bar{\Psi} + \frac{\partial^3\bar{u}}{\partial\bar{y}^3}\right).$$

После деления обеих частей на B^2/l^2 получаем

$$\frac{\omega l}{B} \frac{\partial \nabla^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{t}} + \left(\bar{u} + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{y}} \right) \frac{\partial \nabla^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial \nabla^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{y}} \right) = \\ = \frac{\nu}{Bl} \left(\nabla^4 \bar{\Psi} + \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{y}^3} \right). \quad (4.35)$$

В своем выводе Карман опустил члены, учитывающие изменение во времени и влияние вязкости, т. е. первый и последний члены уравнения (4.35). Чтобы ответ был правильным, необходимо, чтобы по крайней мере

$$\frac{\omega l}{B} \ll 1 \quad (4.36a)$$

и

$$\frac{Bl}{\nu} \gg 1. \quad (4.36b)$$

Карман предложил следующее физическое объяснение этим допущениям: при большом градиенте скорости касательные силы, возникающие вследствие поперечных флуктуаций, велики по сравнению с силами, создаваемыми временными флуктуациями и вязкостью.

Сделаем еще два замечания.

Попробуем опустить члены более высокого порядка. Тогда следует ожидать, что полученное решение будет не применимо для всего потока. Действительно, из рассмотрения физического механизма следует, что на стенке $l \rightarrow 0$. Таким образом, действительно существует некоторая область, очень близкая к стенке, в которой не может удовлетворяться условие (4.36б).

Соотношение (4.36a) имеет смысл лишь когда ω мала. Отсюда следует, что турбулентное трение создается низкочастотными флуктуациями. В первоначальном выводе условия (4.36a) и (4.36б) не были записаны в явной форме. В частности, насколько известно автору, условие (4.36a) в этом смысле никогда не проверялось.

Для того чтобы закончить вывод, следуя Карману, предположим, что условия (4.36) выполняются. Тогда, используя разложение в ряд Тэйлора около произ-

вольной точки, отмечаемой как $(\quad)_0$, представим u в виде

$$u_m = u_{m_0} + \left(\frac{du_m}{dy}\right)_0 (y - y_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2u_m}{dy^2}\right)_0 (y - y_0)^2 + \dots$$

Принимая точку $(\quad)_0$ в качестве начала отсчета и рассматривая движение возмущения, получим следующее уравнение, являющееся *линейной* аппроксимацией для возмущения

$$(y - y_0) \left(\frac{du_m}{dy}\right)_0 \frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial x} - \left(\frac{\partial^2 u_m}{\partial y^2}\right)_0 \frac{d\Psi}{dx} + \\ + \frac{d\Psi}{dy} \frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial y} = 0.$$

Перенесем теперь систему координат так, чтобы можно было использовать точку $(\quad)_0$ в качестве начала отсчета для x и y .

Тогда

$$\bar{x} = \frac{x - x_0}{l},$$

$$\bar{y} = \frac{y - y_0}{l}$$

и, как и ранее,

$$\bar{\Psi} = \frac{\Psi}{Bl}.$$

В такой системе координат дифференциальное уравнение принимает следующий вид:

$$\frac{y - y_0}{l} \frac{\partial u_n}{\partial y} \frac{B}{l} \frac{\partial \nabla^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{x}} - \left(\frac{\partial^2 u_m}{\partial y^2}\right)_0 \frac{Bl}{l} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{x}} + \\ + \frac{Bl}{l} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{y}} \frac{Bl}{l^3} \frac{\partial \nabla^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{x}} - \frac{Bl}{l} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{x}} \frac{Bl}{l^3 l} \frac{\partial \nabla^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{y}} = 0.$$

Разделим обе части на $(B/l) (du_m/dy)_0$. [Отметим, что $(du_m/dy)_0$ и $(\partial^2 u_m/\partial y^2)_0$ являются постоянными параметрами, которые зависят от профиля средних скоростей и величина которых не изменяется при

таком подходе.] В результате получаем нормализованное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{y}}{y} \frac{\partial \nabla^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{x}} - \frac{l (\partial^2 u_m / \partial y^2)_o}{(\partial u_m / \partial y)_o} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{x}} + \\ + \frac{B}{l (\partial u_m / \partial y)_o} \frac{\partial \nabla^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{y}} - \frac{B}{l (\partial u_m / \partial y)_o} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \bar{\Psi}}{\partial y} = 0, \end{aligned}$$

из которого следует, что подобие двух турбулентных потоков может быть достигнуто, если два безразмерных параметра

$$\frac{l (\partial^2 u_m / \partial y^2)_o}{(\partial u_m / \partial y)_o} = \pi_1 \quad \text{и} \quad \frac{B}{l (\partial u_m / \partial y)_o} = \pi_2$$

попарно одинаковы в обоих потоках. При установлении основного закона подобия, т. е. закона, который справедлив для всех задач данного класса, следует исходить из того, что такой закон может существовать лишь при постоянстве обоих этих параметров во всех потоках такого типа. Таким образом, с определенной степенью приближения условия, необходимые для существования возможного закона подобия, можно сформулировать следующим образом:

$$\pi_1 = \frac{l (\partial^2 u_m / \partial y^2)_o}{(\partial u_m / \partial y)_o} = C_1 = \kappa \quad (4.37a)$$

и

$$\pi_2 = \frac{B}{l (\partial u_m / \partial y)_o} = C_2. \quad (4.37b)$$

Но так как B представляет собой зависимую переменную, то лишь одно из этих уравнений является независимым. Отсюда следует, что необходимо лишь одно из условий (4.37a) или (4.37b). Если выбрать (4.37a), то получим закон подобия, предложенный Карманом.

Используя выражение Рейнольдса для касательного напряжения и второе условие, можно оценить неизвестную скорость B следующим образом:

$$\tau = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \rho l^2 \frac{B^2}{l^2} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{y}}.$$

Желательно иметь такую величину B , чтобы во всех случаях $\partial \bar{\Psi} / \partial \bar{x} = O(1)$ и $\partial \bar{\Psi} / \partial \bar{y} = O(1)$. Поэтому величина B^2 должна удовлетворять равенству $\tau / \rho = B^2 O(1)$. Таким образом, можно определить B^2 как

$$B^2 = \frac{\tau_w}{\rho}, \quad B = v^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}.$$

Итак, видим, что по определению величина B , которая удовлетворяет условиям правила 4, является динамической скоростью, или «скоростью трения». При таком определении соотношение (4.36б) принимает вид

$$\tau = \rho B^2 = \rho C_2 l^2 \left(\frac{\partial u_m}{\partial y} \right)_0^2.$$

Из этого результата следует, что для полного совпадения с теорией Прандтля о пути перемешивания необходимо иметь лишь такое l , чтобы

$$C_2 = 1.$$

Так как путь перемешивания l является определенной величиной, то можно использовать известные данные (см., например, [45], гл. 10) для подтверждения того, что величина l удовлетворяет правилу 3.

С первого взгляда может показаться, что в таком выводе отсутствуют какие-либо физические допущения. Но если бы это было так, то можно было бы надеяться получить общие условия подобия для потоков такого типа, а затем это подобие (или его отсутствие) непосредственно проверить, подставляя данные в требуемые условия, как это только что указывалось. В некотором смысле это оказывается правильным. Так, известные данные показывают, что подобие действительно имеет место для потоков в трубах, для потоков около плоской пластины и, вероятно, также для потоков, которые Клаузер [9] назвал «равновесными потоками», хотя в последнем случае это полностью не подтверждено. Но более внимательная проверка вывода Кармана показывает, что в нем предполагается зависимость флуктуаций в данной точке потока от местных условий в ней. Это подразумевается

при разложении флуктуаций скорости в ряд Тэйлора, члены которого зависят от параметров усредненного потока. Недавние работы по гидродинамике и теплообмену для турбулентного пограничного слоя ([25] и др.) показывают, что это не имеет места. Из этих работ следует, что большие показатели турбулентности, в частности большие завихрения, определяющие трение, происходят в узкой области, прилегающей к стенке. Различные аспекты этой модели по-прежнему разрабатываются многими исследователями. Параметры, определяющие этот процесс, таковы, что в известном смысле они дают простой и общий закон подобия для только что упомянутых случаев. Но оказывается, что известное динамическое подобие более сложной природы существует даже и в других случаях. Кроме того, наблюдаемая динамика делает допущение о равенстве масштабов длин в различных направлениях и об отсутствии временной зависимости весьма сомнительным.

По этим причинам хорошие результаты, которые получаются с помощью теории Кармана, являются в основном случайными и связаны с тем, что почти любое разумное допущение приводит к хорошим оценкам профиля средних скоростей. Такие случайные данные являются типичными результатами для первых исследований этих трудных вопросов. Однако приведенный пример показывает, что получение соответствующих оценок ни в коей мере не является простым. Действительно, в задаче, связанной с турбулентностью, не вполне ясно, каковы правильные оценки, хотя некоторые масштабы длин, которые должны использоваться, теперь известны. Необходимо многое узнать о физической природе явления, прежде чем станет ясно, какие преобразования приведут к хорошим оценкам.

Пример 4.7. Тепловой пограничный слой. Как уже указывалось, понятие о пограничном слое, которое впервые было введено Прандтлем, можно применять и к другим физическим явлениям, не связанным с гидродинамическим пограничным слоем. Применим это

понятие к тепловой системе или к той задаче о нагреве, которая уже рассматривалась. Этот пример лучше всего выявит влияние изменения только граничных условий.

Предположим, что решение задачи из разд. 4.6а известно и что число Био велико по сравнению с единицей. Тогда необходимо учитывать лишь теплообмен за счет теплопроводности. Будем рассматривать такое изменение температуры в печи, чтобы температура окружающей тело среды изменялась периодически во времени. В целях упрощения считаем, что это изменение температуры является гармоническим колебанием с одной частотой, которое описывается уравнением

$$T_{\text{печи}} = T_0 \sin \frac{t}{\tau} + T_a. \quad (4.38)$$

Из разд. 4.6а следует, что нормализованное основное уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{L^2}{M^2} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{L^2}{N^2} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{z}^2} = \frac{L^2}{t_c \alpha} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}}, \quad (4.39)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{t} &\triangleq \frac{t}{t_c}, & \bar{z} &= \frac{z}{N}, \\ \bar{x} &= \frac{x}{L}, & \bar{T} &= \frac{T - T_a}{T_s - T_a}, \\ \bar{y} &= \frac{y}{M}, \end{aligned}$$

и t_c — постоянная времени для тела;
 L, M, N — характерные размеры тела в направлениях x, y, z соответственно;

l — наименьшее значение из L, M, N ;

T_s — температура на поверхности тела.

Поскольку уравнение линейное, можно использовать принцип суперпозиции. Поэтому можно отдельно рассмотреть установившийся и неуставившийся режимы в этой задаче. Первоначально средняя температура может отличаться от T_a . Однако анализ, приведенный в разд. 4.6а, показывает, что средняя (установившаяся) температура тела стремится к T_a по мере

того, как время достигает значения, определяемого соотношением

$$\bar{t} = \frac{t}{t_c} > 1. \quad (4.40a)$$

Из разд. 4.6а также следует, что $t_c \approx l^2/\alpha$. Подстановка этого значения в соотношение (4.40а) дает

$$t \gg \frac{l^2}{\alpha}. \quad (4.40б)$$

Поскольку нас теперь не интересует начальный неустановившийся режим, то предположим, что соотношение (4.40б) удовлетворяется, и рассмотрим только установившийся режим при периодическом изменении.

Так как число Био велико, то граничными условиями для этого режима в задаче будут

$$T_s = T_{\text{поверхности}} = T_0 \sin \frac{t}{\tau},$$

когда все температуры T измеряются от T_a , являющейся началом отсчета. Для простоты будем также считать, что тело имеет сферическую форму, так что $L \approx M \approx N \approx l$. В данном случае это упрощает, но не ограничивает исследования. Уравнение (4.39) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{z}^2} = \frac{l^2}{t_c \alpha} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}},$$

а граничные условия

$$\bar{T}_s = \frac{T_s}{T_0} = \sin \left(\frac{t_c}{\tau} \bar{t} \right).$$

Итак, как и ранее, мы получили число Фурье $l^2/t_c \alpha$ и из граничных условий нашли также дополнительный безразмерный параметр t_c/τ .

Рассмотрим теперь влияние изменений в параметре t_c/τ . Во-первых, предположим, что

$$\frac{t_c}{\tau} \ll 1.$$

Решение, приведенное в разд. 4.6а, показывает, что за время приблизительно $3t_c$ все тело примет темпе-

ратуру, с точностью до 1% равную любой новой температуре поверхности. Отсюда вытекает, что для $t_c/\tau \ll 1$ температура в теле будет по существу «следовать» за приложенными пульсациями. С другой стороны, предположим, что

$$\frac{t_c}{\tau} \gg 1.$$

Тогда пульсации будут слишком быстрыми, чтобы температура всего тела «следовала» за ними. Типичную глубину проникновения температуры, которую обозначим через δ , можно прямо оценить из соотношения (4.40б), что объясняется следующим образом. Влияние неустановившегося режима существенно лишь при числе Фурье $l^2/\alpha\tau \geq 1$. Следовательно, чтобы определить глубину, на которой температура изменится приблизительно на 1% от приложенного значения (T_s), необходимо найти место, где $l^2/\alpha\tau \approx 3^1$; значение l в этой точке определит δ . Поскольку нам известно соответствующее время [время одной четвертой периода равно $(\pi/2)\tau$], то можно найти δ

$$\delta = \sqrt{3t_c} = \sqrt{\frac{3\pi}{2}} \alpha\tau. \quad (4.40в)$$

С уменьшением τ (с увеличением частоты) глубина проникновения δ уменьшается и увеличивается центральная часть тела, имеющая приблизительно постоянную температуру T_a .

С другой стороны, можно рассчитать случай, когда колебания температуры на поверхности имеют определенную частоту, а толщина тела l увеличивается; тогда для достаточно больших l мы получим *тепловой пограничный слой*, ограниченный областью, близкой к поверхности, глубина которого определяется формулой (4.40в). Это соотношение оценивает толщину 99%-ного пограничного слоя, т. е. области, где

¹) Использование $3t_c$ дает оценку, основанную на экспоненциальном изменении, что соответствует линейным уравнениям.

пульсация снижается до 1% от T_0 (в действительности можно оценивать до любого желаемого значения). Итак, если $t_c/\tau \gg 1$, то в пограничном слое происходит почти все изменение температуры. Чтобы удовлетворялись условия правил 3 или 4, необходимо иметь различные оценки для этого пограничного слоя и остальной части тела.

Так как тепловые постоянные времени сравнительно велики, то очень часто такой тепловой пограничный слой важен как в процессах природы, так и в технических устройствах. Примерами служат суточные изменения в радиационном переносе тепла от Солнца к Земле и циклические изменения температуры, возникающие благодаря сгоранию в цилиндрах четырехтактных двигателей внутреннего сгорания. В последнем случае малое по сравнению с толщиной стенки цилиндра значение δ позволяет работать с температурами газа, намного превышающими те температуры, которые имеют место, например, в газовых турбинах.

Этот пример ясно показывает, что 1) изменение только граничных условий может полностью изменить необходимые параметры и 2) пограничный слой может иметь место даже при линейных однородных уравнениях. Однородность уравнений позволяет проверить результат решения независимо от величины T_0 , если измерение осуществляется в $\bar{T}$ координатах. Можно воспользоваться свойством линейности основного уравнения для доказательства следующего. Наложение, или суперпозиция, позволяет рассматривать температурную волну $T_0 \cos(t/\tau)$ как одну из составляющих ряда Фурье более сложной формы пульсаций. И простые и более сложные пульсации можно рассматривать как отклонения от средней основной кривой, дающей решение при установившемся режиме. Такое решение является функцией только среднего подводимого тепла, или поля температуры, когда подвод тепла к поверхности осуществляется в течение большого промежутка времени. Полная картина наиболее важных свойств процесса теплопроводности при этом может быть получена из дифференциального

уравнения и соответствующих граничных условий без его решения. Такие же результаты можно получить и для тел сложной формы. При этом можно избежать громоздких и трудоемких расчетов.

6. Метод зональных оценок

Систематизация идей теории пограничного слоя была проведена недавно несколькими исследователями. Хороший обзор дан в работе [8]. Теория пограничного слоя позволяет получить оценки для каждой области неоднородных задач при использовании минимальной информации об ожидаемом виде решения. Как было показано, задача о пограничном слое может возникнуть, когда малый параметр в дифференциальном уравнении определяет член с производной данной переменной высшего порядка; это зависит в основном от характера граничных условий. Доказательств этого правила нет, но, по-видимому, оно справедливо. Когда возникает такая ситуация, следует ожидать неоднородных оценок в различных областях.

Тогда можно поступать следующим образом:

1. Сделать оценку всего решения в целом. Это можно выполнить с помощью известных результатов или путем допущения, основанного на опыте работы с подобными системами или уравнениями. Важно только знать, в каком случае следует ожидать возникновения пограничного слоя.

2. Не учитывать члена с производной высшего порядка и искать решение более простого результирующего уравнения. Если решение можно найти, то сразу предполагаем, что оно применимо в области, где кривая плавная, т. е. вне пограничного слоя.

3. В области пограничного слоя изменить масштаб; произвольно ввести в решение неопределенный показатель степени. Использовать полное дифференциальное уравнение для определения значения показателя степени, при котором все члены будут одного и того же порядка в пограничном слое и, как мы полагаем, в области, расположенной между пограничным слоем и зоной с гладкими оценками.

4. После этого решить новое уравнение пограничного слоя, предполагая, что оно справедливо только в области пограничного слоя и в области между пограничным слоем и зоной с гладкими оценками.

Так как нет теорем, касающихся указанных операций, то каждая задача будет иметь свои особенности. По возможности следует проверять полученные решения, сравнивая их с имеющимися данными, поскольку решения зависят не только от уравнений, но и от первоначального допущения об их общем виде, и обычно при использовании таких методов сведения о единственности решений отсутствуют. Тем не менее метод зональных оценок оказывается весьма эффективным; это установлено в ряде задач, к которым он применялся. Приведем простой пример¹⁾.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\varepsilon \frac{d^2 \bar{u}}{d\bar{x}^2} + (1 - \bar{x}^2) \bar{u} + \bar{u} = 0, \quad 0 \leq \bar{x} \leq 1,$$

с граничными условиями:

$$\text{при } \bar{x} = -1: \quad \bar{u} = 0,$$

$$\text{при } \bar{x} = +1: \quad \bar{u} = 0.$$

Полагаем, что переменные $\bar{u}$ и $\bar{x}$ уже нормализованы. Рассмотрим частную задачу, для которой $0 < \varepsilon \leq 1$. При таких условиях возможно наличие пограничного слоя. На основании опыта считаем, что решение будет гладким, за исключением областей вблизи $\bar{x} = +1$ и $\bar{x} = -1$, где может быть пограничный слой. Найдем сначала решение во внутренней области (вдали от границ), считая его гладким. Опуская член $\varepsilon d^2 \bar{u} / d\bar{x}^2$, получаем

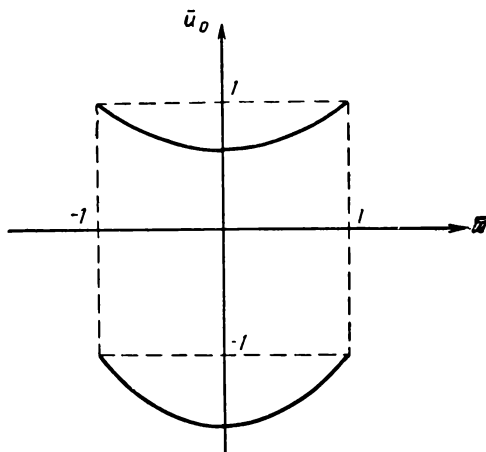
$$(1 - \bar{x}^2) \bar{u} + \bar{u} = 0.$$

Это квадратное алгебраическое уравнение для $\bar{u}$ в функции от $\bar{x}$. Решая его обычным методом, получаем

$$2\bar{u}_0 = (1 - \bar{x}^2) = \sqrt{(1 - \bar{x}^2)^2 + 4},$$

¹⁾ Из неопубликованной работы Дж. Ф. Карриера.

$\bar{u}_0$ симметрична относительно $\bar{x}=0$ и имеет две ветви, что показано на рисунке.



Заметим, что ни одна из этих ветвей не удовлетворяет граничным условиям. При $x = \pm 1$ получаем $+1$ для верхней ветви и -1 для нижней.

Введем новую переменную $\bar{\eta}$:

$$\bar{\eta} = (\bar{x} + 1) \varepsilon^\beta,$$

где ε является параметром исходного дифференциального уравнения, а β — величина, которую требуется найти. Возьмем $+1$, так как желательно, чтобы решение было гладким вблизи точки $\bar{x} = -1$, т. е. ищем пограничный слой вблизи $\bar{x} = -1$. Замена $\bar{x}$ на $\bar{\eta}$ в полных дифференциальных уравнениях дает

$$\varepsilon^{1+2\beta} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{\eta}^2} + \varepsilon^{-\beta} \bar{\eta} (2 - \varepsilon^{-\beta} \bar{\eta}) \bar{u} + \bar{u}^2 = 1.$$

Желательно, чтобы производная $\partial^2 \bar{u} / \partial \bar{\eta}^2$ была отлична от нуля в пограничном слое и в угле, так как мы ожидаем, что вторая производная должна быть велика вблизи угла (см. рассмотрение фиг. 4.2—4.4 на стр. 145—148)

Поэтому принимаем $\beta = -1/2$; это дает

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \varepsilon^{1/2} \bar{\eta} (2 - \varepsilon^{1/2} \bar{\eta}) \bar{u} + \bar{u}^2 = 1.$$

Исследование этого уравнения представляет несомненные трудности. Для удобства найдем решение для $\bar{u}$, которое непосредственно переходит в u_0 . Определим новую функцию $\bar{\omega}(\bar{\eta})$:

$$\bar{u} = \bar{u}_0(\bar{x}) + \bar{\omega}(\bar{\eta}).$$

Подставляя эту функцию в дифференциальное уравнение, получаем

$$\varepsilon^{1+2\beta} \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial \bar{\eta}^2} + \varepsilon^{-\beta} \bar{\eta} (2 - \varepsilon^{-\beta} \bar{\eta}) \bar{\omega} + 2\bar{u}_0 \bar{\omega} + \bar{\omega}^2 + \\ + [\varepsilon^{-\beta} \bar{\eta} (2 - \varepsilon^{-\beta} \bar{\eta}) \bar{u}_0 + \bar{u}_0^2 - 1] = 0.$$

Согласно определению $\bar{u}_0$, три последних члена, заключенные в квадратные скобки, равны нулю. По указанным выше причинам желательно оставить $\partial^2 \bar{\omega} / \partial \bar{\eta}^2$. Поэтому снова берем $\beta = -1/2$; это дает

$$\frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial \bar{\eta}^2} + 2\bar{u}_0 \bar{\omega} + \bar{\omega}^2 + 2\varepsilon^{1/2} \bar{\eta} \bar{\omega} - \varepsilon \bar{\eta}^2 \bar{\omega} = 0.$$

Так как $\varepsilon \ll 1$, то опускаем два последних члена. Окончательное уравнение можно сразу проинтегрировать, умножив его на $\partial \bar{\omega} / \partial \bar{\eta}$. Это дает

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{\eta}} \right)^2 + 2\bar{u}_0 \bar{\omega}^2 + \frac{\bar{\omega}^3}{3} = C_1.$$

Так как желательно, чтобы при больших $\bar{\eta}$ решение плавно стремилось к $\bar{u}_0$, необходимо, чтобы как $\bar{\omega}$, так и $\partial \bar{\omega} / \partial \bar{\eta}$ стремились к нулю. Если удовлетворить это требование, то при больших $\bar{\eta}$ решение существует, лишь если $C_1 = 0$. Применение дополнительного граничного условия ($\partial \bar{\omega} / \partial \bar{\eta} = 0$ для больших $\bar{\eta}$) типично для согласования зон при использовании методов пограничного слоя. Кроме того, необходимо лишь решение для $\bar{\omega}$ вблизи $\bar{x} = 1$. В этой области $\bar{u} = 1 + H$, где

H содержит члены порядка $\varepsilon^{1/2}$ и выше. Покажем это путем введения $\bar{\eta}$ в решение для $\bar{u}_0$:

$$\bar{\eta} = (1 + \bar{x}) \varepsilon^{-1/2},$$

$$\bar{x} = \bar{\eta} \varepsilon^{1/2} - 1,$$

$$\bar{x}^2 = \bar{\eta}^2 \varepsilon - 2\bar{\eta} \varepsilon^{1/2} + 1,$$

$$\begin{aligned} 2\bar{u}_0 &= \pm \sqrt{4 + (1 - \bar{x}^2)^2} - (1 - \bar{x}^2) = \\ &= \pm \sqrt{4 + (2\bar{\eta} \varepsilon^{1/2} - \bar{\eta}^2 \varepsilon) - (2\bar{\eta} \varepsilon^{1/2} - \bar{\eta}^2 \varepsilon)}. \end{aligned}$$

Последний член содержит лишь члены с ε в степени одна вторая и выше. Наименьшая степень ε в члене под квадратным корнем составляет $\varepsilon^{1/2}$. Так как мы пренебрегли такими членами при нахождении $\bar{u}_0$, то имеет смысл в уравнении для $\bar{\omega}$ использовать

$$2\bar{u}_0 = \pm \sqrt{4}, \quad \bar{u}_0 = \pm 1.$$

Кроме того, необходимо, чтобы $(\partial^2 \bar{\omega} / \partial \bar{\eta}^2)^2 > 0$, и если $\bar{u}_0 + 1$, то $\bar{\omega} = -1$ для $\bar{\eta} = 0$. Но тогда уравнение для $\bar{\omega}$ примет вид

$$1/2 \text{ (положительная величина)} + 2(-1)^2 - 1/3 \neq 0,$$

т. е. невозможно одновременно удовлетворить дифференциальному уравнению для $\bar{\omega}$, а также граничному условию при $\bar{\eta} = 0$, если $\bar{u}_0 = +1$. Поэтому берем $\bar{u}_0 = -1$. Граничные условия тогда таковы:

$$\text{при } \bar{\eta} = 0: \quad \bar{\omega} = +1, \quad \bar{u} = 0,$$

$$\text{при } \bar{\eta} \rightarrow \infty: \quad \bar{\omega} \rightarrow 0, \quad \bar{u} \rightarrow \bar{u}_0.$$

Решение уравнения при этих граничных условиях будет иметь вид

$$\bar{\omega} = 3 \left[1 - \text{th}^2 \left(\frac{\bar{\eta}}{\sqrt{2}} + A \right) \right],$$

где

$$A = \text{Arth} \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Это дает пограничный слой вблизи $x = -1$. Поскольку решение симметрично, то можно после анализа написать зависимость для пограничного слоя около $x = +1$:

$$\bar{v} = 3 \left[1 - \operatorname{th}^2 \left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + A \right) \right],$$

где

$$\xi = (\bar{x} - 1) \varepsilon^{1/2}.$$

Решение для u в трех областях имеет следующий вид:

$$\text{при } -1 \leq x \leq -1 + \xi:$$

$$\bar{u} = -1 + \bar{\omega},$$

$$\text{при } -1 + \xi \leq x \leq 1 - \xi:$$

$$\bar{u} = -\bar{u}_0,$$

$$\text{при } 1 - \xi \leq x \leq 1:$$

$$\bar{u} = -1 + \bar{v}.$$

Для того чтобы решение имело смысл, необходимо показать, что имеется такое $\delta \ll 1$, для которого $\omega \approx 1$, т. е. $\bar{\eta} \gg 1$. Если окажется возможным это сделать, то можно будет составить уравнение пограничного слоя и получить хорошее решение для значений ε , которые определяют свойства только что приведенных значений δ и $\bar{\eta}$. Поскольку данный пример является искусственным, то задачи о физической полноте не возникает, достаточна лишь математическая проверка.

Из приведенного выше следует, что вблизи $x = -1$

$$\bar{u}_0 = -\sqrt{4 + \bar{\eta}\varepsilon(2 - \bar{\eta}\varepsilon^{1/2})} - \bar{\eta}\varepsilon^{1/2}(2 - \bar{\eta}\varepsilon^{1/2}).$$

Итак, при $x = -1$, но больших $\bar{\eta}$ величина $\bar{u}_0$ изменяется как

$$\bar{u}_0 = -1 + a_1 \bar{\eta}\varepsilon^{1/2} + a_2 \bar{\eta}^2 \varepsilon + \dots$$

и

$$\frac{\bar{\omega}}{3} = 1 - \left[\operatorname{th} \left(\frac{\bar{\eta}}{2} + A \right) \right]^2.$$

Кроме того,

$$(\operatorname{th} y)^2 = \left(\frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \right)^2 = \left(\frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} \right)^2,$$

так что $(\operatorname{th} y)^2 \rightarrow 1$, если $e^{2y} \gg 1$. Таким образом, необходимо показать, что имеются такие $x \leq \delta$, при которых как $\eta \varepsilon^{1/2} \ll 1$, так и $\varepsilon^{\sqrt{2}\eta + 2A} \gg 1$. Это легко сделать, если $\varepsilon^{1/2} \ll 1$. Покажем это явно. Рассмотрим область, где $u/u_0 = 0,99$, т. е. $\bar{\omega}/u_0 = 0,01$; $\bar{\omega} \simeq 0,001$. Предполагая, что расстояние от границы равно $1+x$, находим, что толщина пограничного слоя

$$\delta_{0,99} = 1 + x = 2,55 \sqrt{2} \varepsilon^{1/2}.$$

Итак, точность решения во внутренней области $\bar{u}_0$ равна 1% на расстоянии 0,1 от стенок, если $\varepsilon = 1/1300$, и 0,01%, если $\varepsilon = 1/13 \cdot 10^{-4}$.

Понятие пограничного слоя является намного более общим в природе, чем интуитивно можно было бы предположить. Несмотря на отсутствие строгого обоснования метода зональных оценок, сам метод является весьма полезным и эффективным не только при нахождении оценок в неоднородных задачах, но и в случае поисков хороших приближенных решений в задачах, полное решение которых найти весьма трудно. Читателю, желающему более подробно познакомиться с этим методом, рекомендуется обратиться к работе Карриера [8], где рассмотрены четыре более сложных задачи. Приведенное выше дает некоторое представление об основных положениях метода и технике его использования.

4.9. Неоднородные задачи. Методы разложения в ряд и универсализации

В разд. 4.8 был приведен метод исследования неоднородных задач, основанный на понятии о пограничном слое. При этом интересующая нас область разбивается на различные участки, к каждому из которых можно применить гладкие оценки. Полное решение получается путем согласования решений для различных областей, для чего используются условия сравнения на границах.

В данном разделе очень кратко будут рассмотрены несколько методов исследования неоднородных задач, известных как методы Пуанкаре [39] и Лайтхилла [31], а также метод Вентцеля, Крамерса, Бриллюэна и Джефриса [ВКБД]. Все три метода являются попытками получения приближения либо в какой-то части области, либо во всей исследуемой области. Все эти методы основаны на различного рода разложениях параметров в степенные ряды. Отметим, что проведенное здесь рассмотрение носит вводный характер, оно не является исчерпывающим и не охватывает основные теоретические положения. Цель его — дать основные понятия и идеи, причем как можно проще, и показать также, где и когда эти методы можно использовать. Указана литература, в которой более подробно изложены эти вопросы.

Метод Пуанкаре заключается в отыскании решения путем разложения в ряды неизвестных функций, умноженных на степени параметра. Такое разложение имеет смысл, если величина параметра мала, так как мы стремимся не учитывать члены с более высокими степенями параметра. При таком подходе решение иногда может быть найдено с помощью допущения о существовании пограничного слоя, когда оставляют члены порядка единицы, а всеми членами более высокого порядка пренебрегают. В этом смысле может использоваться результат теории приближений, т. е. результат, который получается в пренебрежении всеми членами с малыми параметрами, что является приближением нулевого порядка; по теории пограничного слоя находится приближение первого порядка. Затем можно рассчитать приближения второго порядка, включающие члены, которыми пренебрегают в теории пограничного слоя. Таким образом можно оценить относительную важность различных факторов, которые не учитываются при приближениях более низкого порядка, если ряды сходятся¹⁾. Недавно такие расчеты

¹⁾ Вопрос о сходимости рядов не затрагивается, поскольку это требует более глубокого знакомства с теорией (см. [22], гл. 17).

для гидродинамического пограничного слоя были подробно проведены Ван Дайком [51]. Ван Дайк указал члены, которые при приближениях становятся важными.

Метод Лайтхилла является методом рассмотрения особых точек, которые иногда возникают при разложении в ряд по методу Пуанкаре, причем эти особенности нельзя устранить простым учетом членов более высокого порядка. Метод Лайтхилла состоит в разложении как зависимой, так и независимой переменной в ряд по произвольным функциям и степеням интересующего нас параметра. Это эквивалентно разложению в ряд по методу Пуанкаре и переходу к новым переменным. Затем выбирается произвольная функция, представляющая независимую переменную, чтобы устранить ту нежелательную особенность, о которой говорилось выше. Такую функцию можно рассматривать как новую особую независимую координату, которая может обеспечить гладкие оценки в новых координатах. В некоторых случаях метод Лайтхилла весьма эффективен и дает точные решения одновременно в области пограничного слоя и во внешней области. В других случаях это не удастся, и пока не представляется возможным предсказать успех или неудачу¹⁾. Каждую задачу следует рассматривать отдельно. Описание метода Лайтхилла дано в работе [49].

Метод ВКБД состоит в преобразовании переменных, что является основой для разложений в тех известных задачах, где параметр становится очень большим, а не стремится к нулю (см. работы [2], [27] и приведенную в них литературу, а также [36] и [47]).

Все три метода, как и методы пограничного слоя, являются попытками уточнить решения, получаемые из приближенных уравнений. Эти приближенные уравнения логически основываются на положениях теории приближений. Таким образом, изложенное

¹⁾ Имеющийся опыт показывает, что метод наиболее подходит к гиперболическим дифференциальным уравнениям, но сказать что либо более определенное не представляется возможным.

является связующим звеном между фракционным анализом и полными решениями. Методы являются несомненным развитием наших знаний. Поскольку соответствующая математическая теория отсутствует, то лучше всего рассмотреть эти методы на примерах.

а. Разложение в ряд по методу Пуанкаре

Пример 4.8. Рассмотрим снова свободные колебания массы, подвешенной на пружине, т. е. систему с одной степенью свободы. Основное уравнение имеет вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0. \quad (4.41a)$$

Берем граничные условия

$$\text{при } t=0: \quad x=0, \quad \frac{dx}{dt} = v_0. \quad (4.41б)$$

Как и раньше, введем безразмерные переменные:

$$\bar{x} = \frac{x}{v_0 \tau},$$

$$\bar{t} = \frac{t}{\tau},$$

где τ — время одной четвертой периода колебаний. Нормализованное уравнение имеет вид

$$\frac{d^2 \bar{x}}{d\bar{t}^2} + \frac{k\tau}{m} \bar{x} = 0 \quad (4.41в)$$

с начальными условиями

$$\text{при } \bar{t}=0: \quad \bar{x}=0, \quad \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = 1.$$

Как в разд. 4.6в, найдем приближенное решение при фиктивном допущении, что $k\tau^2/m \rightarrow 0$. После двойного интегрирования члена $d^2 \bar{x}/d\bar{t}^2$ получим

$$\bar{x} = c_1 + c_2 \bar{t}.$$

Использование начальных условий дает

$$c_1 = 0 \quad \text{и} \quad c_2 = 1.$$

Следовательно,

$$\bar{x} = \bar{t}. \quad (4.41г)$$

Таким образом, $\bar{x}$ растет неопределенно во времени, а мы ищем решение для колебаний. Поэтому, как показано в разд. 4.6в, решение (4.41г) неудовлетворительно. Попытаемся найти лучшее решение с помощью разложения в ряд по методу Пуанкаре. Полагаем, что решение имеет вид

$$\bar{x} = \bar{x}^{\textcircled{0}} + \varepsilon \bar{x}^{\textcircled{1}} + \varepsilon^2 \bar{x}^{\textcircled{2}} + \varepsilon^3 \bar{x}^{\textcircled{3}} + \dots, \quad (4.42а)$$

где $\varepsilon = k\tau^2/m$ и цифра в кружочке относится к порядку приближения. Считается, что каждая из величин $\bar{x}^{\textcircled{0}}$, $\bar{x}^{\textcircled{1}}$, $\bar{x}^{\textcircled{2}}$ и т. д. является неизвестной функцией. Формально можно записать $d\bar{x}/d\bar{t}$ и $d^2\bar{x}/d\bar{t}^2$ как

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \frac{d\bar{x}^{\textcircled{0}}}{d\bar{t}} + \varepsilon \frac{d\bar{x}^{\textcircled{1}}}{d\bar{t}} + \varepsilon^2 \frac{d\bar{x}^{\textcircled{2}}}{d\bar{t}} + \varepsilon^3 \frac{d\bar{x}^{\textcircled{3}}}{d\bar{t}} + \dots \quad (4.42б)$$

и

$$\frac{d^2\bar{x}}{d\bar{t}^2} = \frac{d^2\bar{x}^{\textcircled{0}}}{d\bar{t}^2} + \varepsilon \frac{d^2\bar{x}^{\textcircled{1}}}{d\bar{t}^2} + \varepsilon^2 \frac{d^2\bar{x}^{\textcircled{2}}}{d\bar{t}^2} + \varepsilon^3 \frac{d^2\bar{x}^{\textcircled{3}}}{d\bar{t}^2} + \dots \quad (4.42в)$$

Подстановка в дифференциальное уравнение дает

$$\begin{aligned} \frac{d^2\bar{x}^{\textcircled{0}}}{d\bar{t}^2} + \varepsilon \frac{d^2\bar{x}^{\textcircled{1}}}{d\bar{t}^2} + \varepsilon^2 \frac{d^2\bar{x}^{\textcircled{2}}}{d\bar{t}^2} + \varepsilon^3 \frac{d^2\bar{x}^{\textcircled{3}}}{d\bar{t}^2} + \\ + \varepsilon (\bar{x}^{\textcircled{0}} + \varepsilon \bar{x}^{\textcircled{1}} + \varepsilon^2 \bar{x}^{\textcircled{2}} + \varepsilon^3 \bar{x}^{\textcircled{3}} + \dots) = 0. \end{aligned}$$

Получается, что в приближении нулевого порядка обращаются в нуль все члены с ε в нулевой степени, т. е. не содержащие ε .

Это дает

$$\frac{d^2\bar{x}^{\textcircled{0}}}{d\bar{t}^2} = 0,$$

что, как и раньше, приводит к зависимости

$$\bar{x}^{\textcircled{0}} = \bar{t}. \quad (4.43)$$

Таким образом, решение в приближении нулевого порядка дает тот же результат, что и пренебрежение

членом с $\bar{x}$ в исходном уравнении. Образуя уравнение первого порядка путем приравнивания нулю всех членов с коэффициентами ε в первой степени, получаем

$$\frac{d^2 \bar{x}^{\textcircled{1}}}{d\bar{t}^2} = \bar{x}^{\textcircled{0}} = 0. \quad (4.44)$$

Уравнение (4.44) является дифференциальным уравнением для $\bar{x}^{\textcircled{1}}$. Однако из уравнения (4.43) имеем $\bar{x}^{\textcircled{0}} = \bar{t}$. После подстановки (4.43) в уравнение (4.44) и двойного интегрирования получаем

$$\bar{x}^{\textcircled{1}} = -\frac{\bar{t}^3}{3!} + c_3 \bar{t} + c_4. \quad (4.45)$$

Теперь необходимо сформулировать граничные условия для неизвестной функции $x^{\textcircled{1}}$. По определению,

$$\bar{x} = \bar{x}^{\textcircled{0}} + \varepsilon \bar{x}^{\textcircled{1}} + \varepsilon^2 \bar{x}^{\textcircled{2}} + \varepsilon^3 \bar{x}^{\textcircled{3}} + \dots \quad (4.42a)$$

и

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \frac{d\bar{x}^{\textcircled{0}}}{d\bar{t}} + \varepsilon \frac{d\bar{x}^{\textcircled{1}}}{d\bar{t}} + \varepsilon^2 \frac{d\bar{x}^{\textcircled{2}}}{d\bar{t}} + \varepsilon^3 \frac{d\bar{x}^{\textcircled{3}}}{d\bar{t}} + \dots \quad (4.42b)$$

При образовании $\bar{x}^{\textcircled{1}}$ уже были удовлетворены начальные условия для $\bar{x}^{\textcircled{0}}$ и $(d\bar{x}/d\bar{t})_{x=0}$. Поэтому необходимо взять

$$\bar{x}^{\textcircled{1}}(0) = 0, \quad \bar{x}^{\textcircled{2}}(0) = 0 \text{ и т. д.}, \quad (4.46a)$$

$$\left(\frac{d\bar{x}^{\textcircled{1}}}{d\bar{t}}\right)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{d\bar{x}^{\textcircled{2}}}{d\bar{t}}\right)_{x=0} = 0 \text{ и т. д.} \quad (4.46b)$$

Дополнительные условия (4.46a) и (4.46b) будут тогда удовлетворять и начальным условиям (4.41b). Подставляя (4.46) в уравнение (4.45), получаем, что $c_4 = c_3 = 0$. Следовательно,

$$\bar{x}^{\textcircled{1}} = -\frac{\bar{t}^3}{3!}.$$

Продолжая эти операции, находим

$$\bar{x}^{\textcircled{2}} = +\frac{\bar{t}^5}{5!},$$

$$\bar{x}^{\textcircled{3}} = -\frac{\bar{t}^7}{7!},$$

а общий член ряда Пуанкаре имеет вид

$$\bar{x}^B = (-1)^n \frac{\bar{t}^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Таким образом, уравнение (4.2а) принимает вид

$$\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left[\sqrt{\varepsilon} \bar{t} + \frac{(\sqrt{\varepsilon} \bar{t})^3}{3!} + \frac{(\sqrt{\varepsilon} \bar{t})^5}{5!} + \dots \right. \\ \left. \dots \frac{(-1)^n (\sqrt{\varepsilon} \bar{t})^{2n+1}}{(2n+1)!} \right]. \quad (4.47)$$

Обычный вид ряда Тэйлора для синусоидальной функции или обращение к таблицам функций показывает, что пределом ряда в квадратных скобках в уравнении (4.47) при $n \rightarrow \infty$ является $\sin \sqrt{\varepsilon} \bar{t}$. Итак, по методу Пуанкаре в пределе получается точное решение данной задачи. Кроме того, из уравнения (4.47) видно, что приближение нулевого порядка дает соответствующие величины $\bar{x}$ и ее первой производной при $\bar{t}=0$, причем они значительно изменяются с ростом $\bar{t}$. Для получения каждого следующего приближения в ряде Пуанкаре требуется все большее время. Если взять бесконечное число членов, то ряд в пределе приводит к точному решению.

Предположим, что эти операции будут повторены при фиктивном допущении из разд. 4.6в, что параметр $k\tau^2/m \gg 1$. Для удобства введем обозначение $\nu = 1/\varepsilon = m/k\tau^2$. Тогда получим уравнение

$$\nu \frac{d^2 \bar{x}}{d\bar{t}^2} + \bar{x} = 0.$$

Снова берем граничные условия

$$\text{при } t=0: \quad \bar{x}=0, \quad \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}}=1.$$

Если $\nu \rightarrow 0$ и взять приближение нулевого порядка, то получим

$$\bar{x}=0.$$

Тогда

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}}=0$$

и нельзя удовлетворить граничные условия. Применяя разложение в ряд Пуанкаре, находим

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x^{\textcircled{0}} + \nu x^{\textcircled{1}} + \nu^2 x^{\textcircled{2}} + \dots, \\ \frac{d\bar{x}}{dt} &= \frac{d\bar{x}^{\textcircled{0}}}{dt} + \nu \frac{d\bar{x}^{\textcircled{1}}}{dt} + \nu^2 \frac{d\bar{x}^{\textcircled{2}}}{dt} + \dots, \\ \frac{d^2\bar{x}}{dt^2} &= \frac{d^2\bar{x}^{\textcircled{0}}}{dt^2} + \nu \frac{d^2\bar{x}^{\textcircled{1}}}{dt^2} + \nu^2 \frac{d^2\bar{x}^{\textcircled{2}}}{dt^2} + \dots.\end{aligned}$$

Члены с ν^0 приводят, как и ранее, к

$$\begin{aligned}\bar{x}^{\textcircled{0}} &= 0, \\ \frac{d\bar{x}^{\textcircled{0}}}{dt} &= 0, \\ \frac{d^2\bar{x}^{\textcircled{0}}}{dt^2} &= 0.\end{aligned}$$

Члены с ν приводят к

$$\frac{d^2\bar{x}^{\textcircled{1}}}{dt^2} + \bar{x}^{\textcircled{1}} = 0,$$

но

$$\frac{d^2\bar{x}^{\textcircled{0}}}{dt^2} = 0,$$

поэтому

$$\begin{aligned}\bar{x}^{\textcircled{1}} &= 0, \\ \frac{d\bar{x}^{\textcircled{1}}}{dt} &= 0, \\ \frac{d^2\bar{x}^{\textcircled{1}}}{dt^2} &= 0.\end{aligned}$$

Повторяя этот процесс для членов более высокого порядка, находим

$$\begin{aligned}\bar{x}^{\textcircled{0}} = \bar{x}^{\textcircled{1}} = \bar{x}^{\textcircled{2}} \dots = \bar{x}^{\textcircled{n}} &= 0, \\ \frac{d\bar{x}^{\textcircled{0}}}{dt} = \frac{d\bar{x}^{\textcircled{1}}}{dt} = \dots \frac{d\bar{x}^{\textcircled{n}}}{dt} &= 0.\end{aligned}$$

Таким образом, невозможно удовлетворить граничным условиям и вообще получить решение.

Рассмотрим теперь, какие выводы вытекают из этого примера. Во-первых, вспомним, что наша оценка была фиктивной. Очевидно, следует идти другим путем и, приняв, например, что параметр k/m мал, попытаться пренебречь всеми связанными с ним членами (или членом). Но как было отмечено, важна не величина параметра, а величина члена. В этом случае может оказаться, что при малом k/m x станет большим, т. е. такая оценка в действительности не имеет смысла. Здесь мы нашли с помощью соответствующей нормализации явную зависимость от параметров. В указанных операциях может иметь место плохая оценка членов, содержащих переменные.

Пренебрегая x , мы установили, что приближение нулевого порядка, т. е. результат, полученный с помощью теории приближений, действителен только в весьма узкой области, в которой справедливы граничные условия.

Однако учет каждого следующего члена в ряде Пуанкаре требует все больших затрат времени. Итак, в этом смысле метод Пуанкаре можно рассматривать как метод нахождения «компенсации» за начальную ошибку. Поскольку метод итеративный, то он позволяет лишь дать предполагаемую начальную оценку, которую затем можно улучшать.

Очевидно, если дать неправильную начальную оценку, то найденное решение не будет справедливо, независимо от того, пренебрежем ли мы членом с производной высшего порядка или другими членами. Однако если пренебречь только членами с производными меньших порядков, то получим решение, которое удовлетворяет начальным граничным условиям и справедливо при весьма малых $\sqrt{\varepsilon} \bar{t}$.

Это видно из следующего. Если представить точное решение в виде разложенного в степенной ряд синуса по возрастающим степеням $\sqrt{\varepsilon} \bar{t}$, то увидим, что при малом $\sqrt{\varepsilon} \bar{t}$ можно ограничить ряд его первым членом. Этот член был найден из теории приближений. Такое решение асимптотически справедливо при малых значениях $\sqrt{\varepsilon} \bar{t}$. Это решение можно

итеративно улучшить, используя разложение Пуанкаре.

С другой стороны, когда делается попытка пренебречь членом с наивысшим порядком дифференцирования, то не получается даже такого асимптотического решения. При этом вообще нельзя удовлетворить граничным условиям, и положение не улучшается, если провести итерацию с параметрами степенного ряда. Такие задачи, в которых решение при малых значениях параметра полностью отличается от решения при параметре, равном нулю, будем называть задачами с сингулярными возмущениями. Известно, что при решении таких задач обычно стремятся пренебречь членом с производной высшего порядка. Как уже было видно, решение этих задач связано с существованием пограничного слоя. Поэтому можно ожидать, что в таких случаях будет более применим один из методов пограничного слоя, данных в предыдущем разделе.

Следует снова подчеркнуть, что все приведенные замечания не доказаны, а просто являются следствием известного опыта.

После разложения в ряд по методу Пуанкаре необходимо доказать, что оно справедливо во всей интересующей нас области. К сожалению, это не всегда удастся сделать. В некоторых случаях приближенное уравнение может содержать особую точку, которой нет в полном уравнении. Вблизи этой точки аппроксимация должна быть плохой. Метод Лайтхилла, являющийся развитием метода Пуанкаре, иногда устраняет такого рода трудности. Это показано в примере 4.9б.

б. Разложение в ряд по методу Лайтхилла

Пример 4.9. Существо метода состоит в разложении по методу Пуанкаре и переходу к новой переменной. Путем определения новой переменной стараемся делать *однородные* оценки. Рассмотрим уравнение

$$(\bar{t} + \epsilon \bar{x}) \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} + \bar{x} = 0 \quad (4.48a)$$

и граничные условия

$$\text{при } \bar{t} = 1: \quad \bar{x} = 1. \quad (4.486)$$

Предположим, что ε является параметром, и будем искать решение при $\varepsilon \rightarrow 0$. Точным решением такого уравнения будет

$$\bar{x} = -\frac{\bar{t}}{\varepsilon} + \sqrt{\left(\frac{\bar{t}}{\varepsilon}\right)^2 + \frac{2}{\varepsilon} + 1}. \quad (4.49)$$

Решение можно проверить подстановкой (4.49) в уравнения (4.48). При $\varepsilon \rightarrow 0$ из точного решения следует, что $x \rightarrow \infty$. Если в уравнении (4.48а), кроме того, пренебречь членом $\varepsilon \bar{x}$, то найдем

$$\bar{t} \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} + \bar{x} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d(\bar{x}\bar{t})}{d\bar{t}} = 0.$$

Полученное таким образом решение имеет вид

$$\bar{x}\bar{t} = c_1 = 1, \quad (4.50)$$

где 1 находится из условия (4.486). Соотношения (4.50) не дают соответствующего изменения при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому применим разложение по методу Пуанкаре. Пусть снова

$$x = x^{(0)} + \varepsilon x^{(1)} + \varepsilon^2 x^{(2)} + \dots,$$

тогда

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \frac{d\bar{x}^{(0)}}{d\bar{t}} + \varepsilon^2 \frac{d\bar{x}^{(2)}}{d\bar{t}} + \dots$$

Подстановка в уравнение (4.48а) дает

$$(\bar{t} + \varepsilon \bar{x}^{(0)} + \varepsilon^2 \bar{x}^{(1)} + \varepsilon^3 \bar{x}^{(2)} + \dots) \left(\frac{d\bar{x}^{(0)}}{d\bar{t}} + \frac{d\bar{x}^{(1)}}{d\bar{t}} + \varepsilon^2 \frac{d\bar{x}^{(2)}}{d\bar{t}} \right) + \\ + \bar{x}^{(0)} + \varepsilon \bar{x}^{(1)} + \varepsilon^2 \bar{x}^{(2)} + \dots = 0$$

с граничными условиями

$$\text{при } t = 1: \quad \bar{x}^{(0)} = 1, \quad \bar{x}^{(1)} = 0, \quad \bar{x}^{(2)} = 0 \text{ и т. д.}$$

Определяемое из членов, не содержащих ϵ , решение для $\bar{x}^\circ$ будет

$$\bar{t} \frac{d\bar{x}^\circ}{d\bar{t}} + \bar{x}^\circ = 0$$

или, как и раньше,

$$\bar{x}^\circ \bar{t} = 1,$$

$$\bar{x}^\circ = \frac{1}{\bar{t}}.$$

Но это решение не только дает неправильные значения при малых ϵ , но также имеет нежелательную особую точку при $\bar{t}=0$. Найдем поэтому решение для $\bar{x}^\circ$. После приравнивания нулю членов с ϵ в первой степени получаем

$$\bar{x}^\circ \frac{d\bar{x}^\circ}{d\bar{t}} + \bar{x} \frac{d\bar{x}^\circ}{d\bar{t}} + \bar{x}^\circ = 0.$$

Подставляя известное решение для $\bar{x}^\circ$ и $d\bar{x}/d\bar{t}$ и оценивая постоянные с помощью граничных условий, находим

$$\bar{x}^\circ = -\frac{1}{2\bar{t}} \left(1 - \frac{1}{\bar{t}^2} \right).$$

Видим, что $\bar{x}^\circ$ также имеет особую точку при $\bar{t}=0$. Вычисление членов более высокого порядка вносит еще бóльшие трудности, в чем нетрудно убедиться.

После того как появились такие искусственные и нежелательные особые точки, воспользуемся разложением в ряд по методу Лайтхилла. Смысл метода состоит в том, что в ряд по степеням малого параметра разлагается не только зависимая, но также и независимая переменная. Для этого определим новую переменную $\bar{\tau}$, которая заменит $\bar{t}$. Найдем такой вид $\bar{\tau}$, чтобы избавиться от особой точки и чтобы, следовательно, задача стала разрешимой относительно $\bar{\tau}$. Поступаем следующим образом.

Пусть

$$\bar{x} = x^\circ(\bar{\tau}) + \epsilon x^1(\bar{\tau}) + \epsilon x^2(\bar{\tau}) + \dots$$

и

$$\bar{t} = \bar{\tau} + \epsilon \bar{t}^1(\bar{\tau}) + \epsilon^2 \bar{t}^2(\bar{\tau}) + \dots$$

Подставляя эти выражения в уравнение (4.48а), получаем

$$(\bar{t} + \varepsilon \bar{x}) \frac{d\bar{x}}{d\bar{\tau}} \frac{d\bar{\tau}}{d\bar{t}} + \bar{x} = 0$$

или

$$(\bar{t} + \varepsilon \bar{x}) \frac{d\bar{x}}{d\bar{\tau}} + \bar{x} \frac{d\bar{\tau}}{d\bar{t}} = 0.$$

Записывая только члены первого порядка, имеем

$$\begin{aligned} & [\bar{\tau} + \varepsilon \bar{t}^{\oplus}(\bar{\tau}) + \dots + \varepsilon \bar{x}^{\oplus}(\bar{\tau}) + \varepsilon^2 \bar{x}^{\oplus}(\bar{\tau}) + \dots] \times \\ & \times \left[\frac{d\bar{x}^{\oplus}}{d\bar{\tau}} + \varepsilon \frac{d\bar{x}^{\oplus}}{d\bar{\tau}} + \dots \right] + [\bar{x}^{\oplus} + \varepsilon \bar{x}^{\oplus} + \dots] \times \\ & \times \left[1 + \varepsilon \frac{d\bar{t}^{\oplus}}{d\bar{\tau}} + \dots \right] = 0. \end{aligned}$$

Приравнивание нулю членов с ε в нулевой степени дает

$$\bar{\tau} \frac{d\bar{x}^{\oplus}}{d\bar{\tau}} + \bar{x}^{\oplus} = 0,$$

т. е., как и ранее, решением нулевого порядка будет

$$\bar{x}^{\oplus}(\tau) = \frac{1}{\bar{\tau}}. \quad (4.51)$$

Но переменной теперь является $\bar{\tau}$, а не $\bar{t}$; $\bar{\tau}$ все еще необходимо выбрать, поскольку еще не определен его вид. Приравнивание нулю членов с ε в первой степени дает

$$\bar{\tau} \frac{d\bar{x}^{\oplus}}{d\bar{\tau}} + \bar{x}^{\oplus} = -(\bar{t}^{\oplus} + \bar{x}^{\oplus}) \frac{d\bar{x}^{\oplus}}{d\bar{\tau}} - \bar{x}^{\oplus} \frac{d\bar{t}^{\oplus}}{d\bar{\tau}}.$$

Используя уравнение (4.51), получаем

$$\frac{d(\bar{x}^{\oplus} \bar{\tau})}{d\bar{\tau}} = \frac{\bar{t}^{\oplus}}{\bar{\tau}^2} + \frac{1}{\bar{\tau}^3} - \frac{1}{\bar{\tau}} \frac{d\bar{t}^{\oplus}}{d\bar{\tau}}.$$

Но по-прежнему не определена функция $\bar{t}^{\oplus}$. Можно выбрать ее так, чтобы

$$\frac{1}{\bar{\tau}} \frac{d\bar{t}^{\oplus}}{d\bar{\tau}} - \frac{\bar{t}^{\oplus}}{\bar{\tau}^2} = \frac{1}{\bar{\tau}^3}. \quad (4.52)$$

Уравнение (4.52) является дифференциальным уравнением для $\bar{t}^\Phi(\tau)$. Для решения запишем его в виде

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\bar{t}^\Phi}{\tau} \right) = \frac{1}{\tau^3}$$

и, учитывая граничные условия, получаем

$$\bar{t}^\Phi = \frac{\bar{\tau}}{2} \left(1 - \frac{1}{\tau^2} \right).$$

Тогда при таком порядке приближения

$$\bar{x} = \frac{1}{\tau} \quad (4.53a)$$

и

$$\bar{t} = \bar{\tau} + \varepsilon \frac{\bar{\tau}}{2} \left(1 - \frac{1}{\tau^2} \right). \quad (4.53б)$$

Исключая $\bar{\tau}$ из уравнений (4.53a) и (4.53б), получаем

$$x = \frac{\bar{t}}{\varepsilon} \pm \sqrt{\left(\frac{\bar{t}}{\varepsilon} \right)^2 + \frac{2}{\varepsilon} + 1}. \quad (4.53в)$$

Последнее соотношение и является точным решением.

Этот пример приведен специально для иллюстрации метода Лайтхилла, который не всегда оказывается столь эффективным, а иногда он вообще неприменим. Оба метода, Пуанкаре и Лайтхилла, можно использовать для дифференциальных уравнений в частных производных, применяя разложение в ряды, в которые входят соответствующие частные производные. Метод Лайтхилла сложен, желающим им пользоваться рекомендуется познакомиться с работой [49] и указанной там литературой.

в. Метод ВКБД

Этот метод заключается в таком преобразовании, которое позволяет подойти к решению определенных задач, когда величина параметра велика. Первоначально метод был развит в связи с задачами квантовой механики и впервые описан в литературе по физике (см., например, [22], [27] или [36]). Сравнительно

недавно Селларс, Трибус и Клайн [47] применили метод к известной задаче Гретца о теплообмене. Приведем это решение для ознакомления с задачами континуума.

В задаче Гретца получается следующее уравнение ¹⁾:

$$\bar{x} \frac{d^2 \bar{R}_n}{d\bar{x}^2} + \frac{d\bar{R}_n}{d\bar{x}} + \lambda_n^2 \bar{x} (1 - \bar{x}^2) \bar{R}_n = 0,$$

где λ_n — большой по величине параметр. Чтобы найти собственные значения λ_n , необходимо решить задачу путем разложения в ряд вида

$$\bar{R} = \lambda_0 f_0(\bar{x}) + f_1(\bar{r}) + \frac{1}{\lambda} f_2(\bar{r}) + \dots$$

Однако это не приведет к сходящемуся ряду. Если вместо этого преобразовать уравнение посредством подстановки

$$\bar{R} = e^{g(x)},$$

то можно оценить λ с помощью следующего ряда:

$$g(\bar{x}) = \lambda g_0(\bar{x}) + g_1(\bar{x}) + \frac{1}{\lambda} g_2(\bar{x}) + \dots$$

Такой подход эффективен в тех многочисленных задачах, в которых встречаются большие величины параметров. Более детально с методом можно познакомиться в указанной выше литературе.

г. Внутреннее и наружное разложения

В Калифорнийском технологическом институте были проведены работы по развитию методов, учитывающих в задачах пограничного слоя приближения более высокого порядка. Сделаны последовательно расчеты как для внутренней (пограничный слой), так и наружной (плавной) частей интересующей нас области. Согласование результатов для разных зон

¹⁾ W. C. Reynolds, Thermosciences Division, Department of Mechanical Engineering, Stanford University, Calif.

проводилось на каждой стадии расчетов. Автор не нашел простого примера использования этого метода. Читателю, желающему лучше познакомиться с этими методами, рекомендуются работы Лагерстрема и Коля¹⁾ и Ван Дайка [51].

4.10. Методы, связанные с преобразованием переменных

При обсуждении значения нормализованных координат в разд. 4.2б отмечалось, что решение нормализованного уравнения может быть выражено в виде функциональной зависимости от безразмерных переменных и параметров. Например, если нас интересует зависящая переменная $\bar{T}$, а полные нормализованные основные уравнения и граничные условия содержат параметры π_1, π_2, π_3 и независимые переменные $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ и $\bar{t}$, то можно записать решение всех задач такого класса в виде функциональной зависимости

$$\bar{T} = \bar{T}(\pi_1, \pi_2, \pi_3; \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}). \quad (4.54)$$

Изменение величины одного из параметров π приводит к переходу в интересующем нас классе от одной системы к другой, а изменение одной из переменных меняет положение внутри данной системы класса. До сих пор мы имели дело только с законами подобия и моделирования, которые требуют одинаковых значений соответствующих параметров π . Связь между двумя задачами одного класса в любой определенной точке каждой задачи определяется фиксированными значениями безразмерных переменных. Однако вполне возможно искать другие виды подобия с помощью операций, основанных исключительно на основных уравнениях и граничных условиях, не предъявляя никаких требований к виду решения. Такие операции включают преобразование переменных. В частности, при этом ищутся новые координаты, в которых число па-

¹⁾ P. A. Lagerstrom, J. D. Cole, Examples Illustrating Expansion Procedures for the Navier—Stokes Equations, *J. of Rational Mech. Anal.*, 4 (6), 1955.

раметров, число переменных или то и другое вместе уменьшаются в нормализованных основных уравнениях и граничных условиях. Если такие координаты могут быть найдены, то из формулы (4.54) следует, что при этом достигаются более простые зависимости. Уменьшение числа параметров имеет другой физический смысл, чем уменьшение числа переменных. Поэтому рассмотрим каждый случай в отдельности, даже если в приведенных примерах одно преобразование могло бы привести к одновременному уменьшению как числа переменных, так и числа параметров.

а. Сокращение числа параметров и естественные координаты

В ходе процесса, который здесь назван *сокращением числа параметров*, мы пытаемся найти такие новые переменные, чтобы в нормализованные уравнения и *граничные условия* при этих новых переменных совершенно не входили параметры. Переменные, получающиеся после сокращения числа параметров, почти всегда весьма полезны для установления лучших соотношений, а преобразования, с помощью которых получаются эти переменные, обычно имеют важный физический смысл. Наиболее существенными моментами при этом являются следующие. Если можно найти новые координаты, при которых нормализованные основные уравнения и граничные условия не содержат параметров и являются полными и корректными согласно положениям разд. 43.3, то отсюда следует, что

1) имеется только одно возможное решение для зависимой переменной во всех задачах класса, рассматриваемых в новых координатах;

2) такое решение должно быть справедливо при всех значениях как переменных, так и параметров исходного уравнения.

Смысл этих замечаний проиллюстрируем на следующих примерах.

Пример 4.10а. Снова рассмотрим простую систему, состоящую из тела, подвешенного на пружине, без учета трения. Эта система в начальный момент

выведена из состояния равновесия и имеет нулевую скорость. Основное дифференциальное уравнение и граничные условия имеют следующий вид:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0,$$

$$\text{при } t = 0: \quad x = \delta, \quad \frac{dx}{dt} = 0.$$

Нормализуем уравнение с помощью тех переменных, которые были найдены ранее:

$$\bar{x} = \frac{x}{\delta},$$

$$\bar{t} = \frac{t}{\tau},$$

где τ — время $1/4$ -й периода. Как и ранее,

$$\frac{d^2 \bar{x}}{d\bar{t}^2} + \frac{k\tau^2}{m} \bar{x} = 0, \quad (4.55a)$$

$$\text{при } \bar{t} = 0: \quad \bar{x} = 1, \quad \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = 0. \quad (4.55b)$$

В уравнении и граничных условиях содержится только один параметр. Так как уравнение однородно относительно x , а в граничные условия параметры не входят, то, по-видимому, задача однородна при всех значениях δ . Отсюда следует, что можно найти решение, которое зависит от обоих членов нормализованного уравнения, если только параметр постоянный. Таким образом,

$$\frac{k\tau^2}{m} = \text{const} = C_1,$$

$$\frac{1}{\tau} = C_1 \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Возникает вопрос: «Можно ли найти такую систему координат, в которой число параметров может быть уменьшено?» (В данном случае нельзя надеяться на снижение числа независимых переменных, так как имеется лишь одна такая переменная.) Из анализа

уравнения видно, что для этого необходимо провести лишь следующее преобразование:

$$(t^+)^2 = \frac{\bar{t}^2 k \tau^2}{m} = \frac{t^2 k}{m},$$

$$t^+ = \frac{t}{\sqrt{m/k}}.$$

После подстановки новой координаты t^+ уравнения (4.55) принимают вид

$$\frac{d^2 \bar{x}}{(dt^+)^2} + \bar{x} = 0, \quad (4.56a)$$

$$\text{при } t^+ = 0: \quad \bar{x} = 1, \quad \frac{d\bar{x}}{dt^+} = 0. \quad (4.56b)$$

В уравнения (4.56) параметры не входят, т. е. нам удалось сократить число параметров с 1 до 0. Смысл такого сокращения значителен. Решение уравнений (4.56) можно записать в виде функциональной зависимости

$$\bar{x} = \bar{x}(t^+), \quad (4.57)$$

т. е. можно выразить полное решение всех задач данного класса в зависимости от одной координаты t^+ . Так как известно, что уравнения (4.55) являются полными и корректными для задач такого типа, то при данном значении t^+ во всех задачах этого класса будет одно и то же $\bar{x}$. Таким образом, мы получили простое решение в общем виде.

Теперь желательно формально проверить, во всех ли задачах данного класса мы действительно приходим к уравнениям (4.56). Это можно сделать путем рассмотрения двух произвольных систем, отмечаемых, например, индексами 1 и 2, при различных значениях k и m , скажем k_1 и k_2 , m_1 и m_2 . Подстановка этих значений в дифференциальное уравнение и граничные условия (4.56) приводит к тождественным уравнениям и граничным условиям при $\bar{x}_1$, t_1^+ и $\bar{x}_2$, t_2^+ . Читатель может убедиться в этом сам. Итак, получаемые результаты зависят от инвариантности величины

параметров, которые в исходном уравнении не обладают этим свойством.

Переход к уравнениям и граничным условиям, в которые не входят параметры, можно рассматривать как введение новых единиц измерения рассматриваемых координат. В этом случае использование t^+ можно считать отказом от единицы времени, основанной на среднем солнечном дне, и принятием в качестве единицы величины $\sqrt{m/k}$. Единица времени $\sqrt{m/k}$ основывается на свойствах самой системы, состоящей из груза, подвешенного на пружине, и поэтому естественна. Вследствие этого координаты, измеряемые в таких единицах, называем *естественными координатами* и будем отмечать их знаком $(\quad)^+$.

Теперь, после того, как для данной задачи определены естественные координаты, обычно не представляет труда найти и правила подобия. Так как t^+ однозначно определяет величину $\bar{x}$, то, учтив массу при k постоянной, единицу времени следует удвоить для того, чтобы в двух системах получались подобные результаты. Такой вид подобия отличается от рассмотренного выше. Здесь мы даем возможность значению параметра k/m изменяться и компенсировать изменение путем изменения масштаба времени (которое является переменной) для поддержания подобия¹⁾. Эта идея, если ее использовать с пространственными переменными, а не с временными, приводит к созданию основ теории искаженных моделей, что будет показано в примерах 4.11 и 4.12, где рассматриваются правила подобия для околозвуковых и сверхзвуковых условий.

Кроме того, из уравнения (4.56) можно получить оценку параметра, представляющего собой собственное значение (в данном случае величина, обратная частоте τ). Как и в примерах 4.4 и 4.7, считаем, что для того, чтобы оба члена уравнения существенно влияли на решение, они должны быть величинами одного порядка. Однако в данном случае мы преобразо-

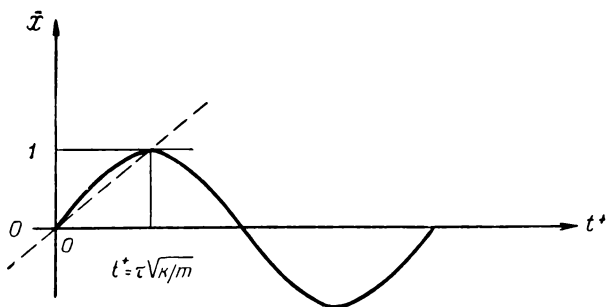
¹⁾ Отметим, что t^+ также сохраняет предыдущий вид подобия, поскольку для фиксированного масштаба времени необходимо, чтобы k и $m = \text{const}$ или $k/m = \text{const}$.

вали уравнение к виду, свободному от параметров, а $\bar{x}$ по определению имеет порядок единицы. Как отмечалось, для того чтобы свободные колебания вообще имели место, необходимо учитывать влияние упругих сил и сил инерции. Тогда члены уравнения должны иметь равную величину, т. е.

$$\frac{d^2 \bar{x}}{d\bar{t}^2} = U(1).$$

Рассматривая любое простое колебание в координатах $\bar{t}^+$, $\bar{x}$, видим, что оценка величины $d^2 \bar{x}/d\bar{t}^{+2}$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^2 \bar{x}}{d\bar{t}^{+2}} \right| &= \frac{1}{\tau \sqrt{k/m}} \left\{ \left(\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}^+} \right)_{\bar{t}^+ = \tau \sqrt{k/m}} - \left(\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}^+} \right)_{\bar{t}^+ = 0} \right\} = \\ &= \frac{0 - \frac{1}{\tau \sqrt{k/m}}}{\tau \sqrt{k/m}} = \frac{m/k}{\tau^2}. \end{aligned}$$



В случае гармонического колебания величина $d^2 \bar{x}/d\bar{t}^{+2}$ должна быть порядка единицы. Следовательно, $\tau \approx \sqrt{m/k}$, а период $4\tau = 4\sqrt{m/k}$. Истинный период, как известно, равен $2\pi\sqrt{m/k}$; оценка занижена на 36%, но период имеет аналогичный вид, а ошибка постоянна.

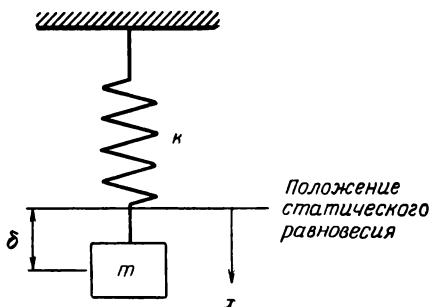
Теперь рассмотрим показанную на фиг. 4.12 систему, состоящую из груза, подвешенного на пружине, когда на тело действует дополнительная сила $F_0 = P_0 \cos \beta t$, где β является параметром. Пусть началь-

ные условия будут такими же, как и ранее. Тогда имеем

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = P_0 \cos \beta t,$$

$$\text{при } t=0: \quad x = \delta_A^1), \quad \frac{dx}{dt} = 0.$$

Чтобы определить решение при установившемся режиме, а не начальное смещение, следует отнести x к



Ф и г. 4.12.

амплитуде δ_A при установившемся режиме. Тогда

$$\bar{x} = \frac{x}{\delta_A}$$

и

$$t^+ = \frac{t}{\sqrt{m/k}}.$$

В результате получаем

$$\frac{d^2 \bar{x}}{dt^{+2}} + \bar{x} = \frac{P_0}{\delta_A k} \cos \left(\frac{\beta}{\sqrt{k/m}} \right) t^+,$$

$$\text{при } t^+ = 0: \quad \bar{x} = 1, \quad \frac{d\bar{x}}{dt^+} = 0. \quad (4.58)$$

В уравнение (4.58) входят два параметра: $\beta/\sqrt{k/m}$ и $P_0/\delta_A k$. Второй из них можно записать в виде характе-

¹⁾ В целях упрощения берем начальное смещение $x = \delta_A$, что устраняет необходимость рассмотрения переходного режима и действия затухания.

ристики системы $\delta_{\text{статич}}/\delta_A$, поскольку $P_0/k = \delta_{\text{статич}}$ по определению. Так как известно, что уравнения являются полными и корректными, то имеется лишь одно решение, и можно ожидать найти единственную функцию вида

$$\frac{\delta_A}{\delta_{\text{статич}}} = f\left(\frac{\beta}{\sqrt{k/m}}\right).$$

Этот результат хорошо известен (см., например, работы [21] или [12]).

Интересно не само решение, а то, что оно было получено без решения дифференциального уравнения. Отсюда следует, что при естественных координатах результат получить проще, чем при координатах, основанных на любой другой единице времени. Очевидно также, что если желательно избежать рассмотрения переходного периода, то необходимо начинать с такого положения, когда в начальные условия не входят параметры. Это, конечно, справедливо для систем, в которых полностью отсутствует затухание, хотя и не обязательно для реальных систем при $t^+ \gg 1$, так как любые определенные результаты при затухании в условиях установившегося режима по истечении значительного времени не зависят от начальных условий. В этом случае, если бы мы взяли $x = \delta \neq \delta_A$ при $t = 0$, то начальные условия имели бы вид

$$\text{при } t^+ = 0: \quad \bar{x} = \frac{\delta}{\delta_A}, \quad \frac{d\bar{x}}{dt^+} = 0.$$

При этих условиях колебания при отсутствии затухания зависят от трех параметров:

$$\frac{\delta_{\text{статич}}}{\delta_A}, \quad \frac{\beta}{\sqrt{k/m}}, \quad \frac{\delta}{\delta_A}.$$

Но такие колебания обычно не рассматриваются, так как в реальных системах имеется затухание.

В этом примере снова интересно отметить действие теоремы 1. При свободных колебаниях в однородное уравнение (4.56) с естественными координатами совершенно не входят параметры, и поэтому решение не

зависит от значения параметров. При вынужденных колебаниях решение неоднородного уравнения (4.58) зависит от значения параметров. Однако и в этом случае уравнение линейно.

Пример 4.10б. Естественные координаты при поперечных колебаниях балки. Уравнения для поперечных колебаний балки, рассмотренные в примере 4.3, также легко можно представить в естественных координатах. Снова рассмотрим уравнения (4.24)

$$\frac{\partial^4 \bar{y}}{\partial \bar{x}^4} + \frac{\rho AL^4 \omega^2}{EI} \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \bar{t}^2} = 0, \quad (4.24a)$$

где

$$\bar{y} = \frac{y}{\delta_{\text{начальн}}}, \quad \bar{t} = t\omega, \quad \bar{x} = \frac{x}{L},$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } \bar{x} = 0: \quad \bar{y} = 0, \quad \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{x}} = 0, \\ \text{при } \bar{x} = 1: \quad \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \bar{x}^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 \bar{y}}{\partial \bar{x}^3} = 0, \\ \text{при } \bar{t} = 0: \quad \bar{y}_{\bar{x}=1} = 1, \quad \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{t}} \right)_{\bar{x}=1} = 0. \end{array} \right\} \quad (4.24б)$$

В граничные условия параметры не входят и

$$\frac{\rho AL^4 \omega^2}{EI} = \frac{L^2 \omega^2}{rc},$$

где L — длина балки;

ω — величина, обратная продолжительности $1/4$ -й периода;

r — радиус инерции сечения балки;

c — скорость звука в балке.

Соответствующее t^+ будет

$$t^+ = \frac{\bar{t}rc}{L^2 \omega} = \frac{t\omega rc}{L^2 \omega} = \frac{t}{L^2/rc}. \quad (4.59)$$

Таким образом, естественная единица времени при свободных колебаниях балки в первой гармонике поперечных колебаний равна L^2/rc .

Из хода кривой, ожидаемой для второй гармоники, видно, что соответствующее время равно $(L/2)'rc$. Таким образом, можно приближенно оценить собственные значения (частоты поперечных свободных колебаний для различных гармоник).

Из уравнения (4.24а) можно получить уравнение, в которое не будут входить параметры, если переменную брать как

$$\bar{x}^+ = \sqrt{\frac{L^2\omega}{rc}} \bar{x} = \sqrt{\frac{\omega}{rc}} \frac{Lx}{L} = \frac{x}{\sqrt{rc/\omega}}. \quad (4.60)$$

Поэтому при свободных поперечных колебаниях естественной единицей длины является $\sqrt{rc/\omega}$. Однако при этом в граничные условия входит параметр при $\bar{x}=1$, так как x^+ становится равным $L^2\omega/rc$. Но обычно вначале ω неизвестно, поэтому координаты уравнения (4.59) оказываются лучше, чем координаты уравнения (4.60). Подставляя (4.59) в (4.28а), находим

$$\frac{\partial^4 \bar{y}}{\partial \bar{x}^4} + \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \bar{t}^2} = 0, \quad (4.61)$$

а граничные условия (4.24б) не меняются. Из уравнения (4.61) легко получаются все результаты примера 4.3. Если имеют место свободные колебания, то члены уравнения (4.24а) должны быть одного порядка. Для плавных кривых колебаний, какие можно ожидать на основе физических представлений, $d^4 \bar{y}/d\bar{x}^4 = U(1)$ и $\bar{y} = U(1)$. Отсюда следует, что $\bar{t}$ должно пробегать от 0 до 1 за $1/4$ -ю периода. Это непосредственно приводит к той оценке, которая уже была найдена ранее в виде уравнения (4.27а):

$$\omega = \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}} = \sqrt{\frac{rc}{L^2}} \text{ рад/сек.} \quad (4.27а)$$

Уравнение (4.61) непосредственно дает всю информацию, необходимую для определения подобного колебательного процесса при *любом* значении параметров. Из формулы (4.24а) видно, что две балки будут вести себя подобным образом, если величины $\bar{x}$, $\bar{t}$ и $L^2\omega/rc$ попарно одинаковы для обеих балок, а из уравнения

(4.61) следует, что тот же результат может быть получен при одинаковых величинах $\bar{x}$ и t^+ . Таким образом, не нужно требовать постоянства величины $L^2\omega/rc$, если в качестве единицы измерения времени принять L^2/rc . Это в свою очередь предполагает связь периода колебаний балки с временной координатой t^+ . Установление такой связи при изучении свободных колебаний не обязательно, но эффективно. Однако оно полезно при вынужденных колебаниях. Рассмотрим действие равномерно приложенной силы на консольную балку, равное F фунтов на единицу длины. Основное уравнение имеет вид

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F_0 \cos \beta t, \quad (4.62)$$

а граничные условия описываются соотношениями (4.246). Нормализуя, как и ранее, x и t и по тем же причинам, что и в примере 4.9, заменяя переменную y на $\bar{y}/\delta_A$, получаем следующее основное уравнение и соответствующие граничные условия:

$$\frac{\partial^4 \bar{y}}{\partial \bar{x}^4} + \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial t^{+2}} = \frac{F_0 L^4}{EI \delta_A} \cos \left(\frac{\beta L^2}{rc} \right) t^+, \quad (4.63a)$$

$$\text{при } \bar{x} = 0: \quad \bar{y} = 0, \quad \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{x}} = 0,$$

$$\text{при } \bar{x} = 1: \quad \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \bar{x}^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 \bar{y}}{\partial \bar{x}^3} = 0, \quad (4.63b)$$

$$\text{при } \bar{t} = 0: \quad \bar{y}_{\bar{x}=1} = 1, \quad \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{t}} = 0.$$

И

$$\frac{\beta L^2}{rc} = \frac{\beta}{\omega} = \frac{\text{Частота вынужденных колебаний}}{\text{Частота собственных колебаний}},$$

$$\frac{F_0 L^4}{EI \delta_A} \text{ А длины.}$$

Таким образом, можно рассматривать эту величину как меру отклонения δ_n и

$$\frac{F_0 L^4}{EI \delta_A} = \frac{\delta_n}{\delta_A}$$

является величиной, обратной решению задачи, измеренному в единицах δ_n .

Поэтому из уравнений (4.63) следует, что решения для всех задач такого типа имеют вид зависимости δ_A/δ_n от β/ω . Такая зависимость аналогична зависимости $\delta/\delta_{\text{статич}}$ от $\beta/\sqrt{k/m}$, которая получалась для простого гармонического осциллятора в примере 4.9, но ее не представляется возможным столь широко использовать. Следовательно, решение для любой задачи такого класса можно выразить через частное решение для каждой гармоника колебаний при заданных нагрузке и концевых условиях.

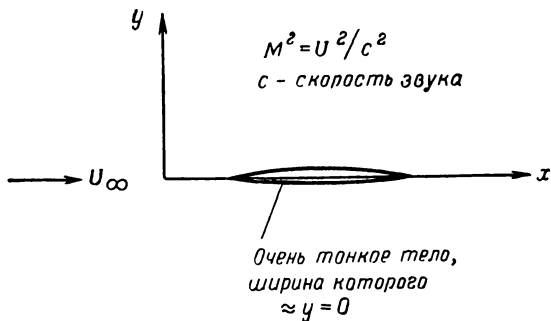
Как подчеркивалось в данном и в предыдущем примерах, выбор естественных координат является еще одним шагом к обобщению, выходящему за пределы простой нормализации, но содержащему результаты, которые имеются в этом преобразовании. Читателю в качестве упражнения предлагается проверить, что: 1) естественные координаты для уравнения теплопроводности можно найти с помощью соответствующего выбора единиц измерения времени, когда $L \approx M \approx N$, 2) использование этого результата совместно с теорией приближений и определением l , данным в разд. 4.6а, приводит к тем же результатам по теплопроводности, что и в разд. 4.6а и в примере 4.7. К тому же это дает основу для использования искаженных моделей.

6. Правила подобия околосвуковых и сверхзвуковых условий

Рассмотрим две задачи, в которых естественные координаты используются для получения правил подобия. Снова покажем, что подобие, основанное на естественных координатах, эквивалентно свойству инвариантности уравнений и граничных условий. Подчеркнем, что в этом случае для получения подобия не требуется, чтобы соответствующие параметры были одинаковы во всех случаях, а вместо этого можно компенсировать изменение значений параметров путем изменений величины переменных. Такой подход представляет интерес в области аэродинамики при

разработке методики проведения испытаний самолетов при числах Маха свыше приблизительно 0,2. Без такого подхода число необходимых испытаний стало бы крайне большим или даже неосуществимым, что значительно задержало бы развитие высокоскоростных самолетов. В примере 4.11 уравнения являются линейными и однородными и решения могут быть найдены. В примере же 4.12 уравнения существенно неоднородны и получаемые с помощью естественных координат правила подобия являются особенно важными.

Пример 4.11. Подобие и естественные координаты для сжимаемого потока, описываемого линеаризованным уравнением. Уравнения для сжимаемого потока, обтекающего тело, хорошо изучены и проверены



Ф и г. 4.13.

экспериментально. В случае обтекания двумерным потоком тела (фиг. 4.13), являющегося источником лишь малых возмущений, при числах Маха, отличных от единицы, уравнения могут быть записаны в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{1 - M^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad (4.64a)$$

где φ является потенциалом скорости возмущения, который определен так, что $\nabla \varphi$ дает отклонение скорости от среднего значения далеко вверх по потоку, x и y являются координатами, что показано на фиг. 4.13,

а M есть число Маха далеко вверх по потоку. Для двумерного потока, описываемого линейризованным уравнением, могут быть взяты следующие граничные условия:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{y=0} = U \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{тело}} \quad (4.64б)$$

$$\text{и при } y \rightarrow \infty: \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \quad (4.64в)$$

Так как нельзя нормализовать или сократить число параметров в (4.64в), то будем иметь дело только с (4.64а) и (4.64б). При аэродинамических испытаниях основной величиной является коэффициент давления c_p , определяемый зависимостью

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2},$$

где индекс ∞ характеризует невозмущенный поток, U — общая скорость, U_1 — скорость потенциального потока и p — местное статическое давление. Первоначально рассмотрим распределение давлений на теле. Для потока, описываемого линейризованным уравнением, коэффициент давления можно записать как

$$(c_p)_{\text{тело}} = -\frac{2}{U} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{y=0}. \quad (4.65)$$

Найдем, в частности, те координаты, при которых $(c_p)_{\text{тело}}$ остается постоянным при разных значениях числа Маха M в невозмущенном потоке.

Заметим, что теория приближений была уже применена к полным уравнениям движения невязкой жидкости для получения уравнения (4.64а). Нас не интересует абсолютная величина. Поэтому для удобства проведем нормализацию следующим образом.

Пусть

$$\bar{\varphi} = \frac{\varphi}{U_1 L},$$

$$\bar{x} = \frac{x}{L},$$

$$\bar{y} = \frac{y}{L},$$

где L — длина тела.

Тогда уравнение (4.64а) примет вид

$$\frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{1}{1-M^2} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \bar{y}^2} = 0, \quad (4.66a)$$

а граничные условия (4.64б) станут

$$\left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{y}} \right)_{\bar{y}=0} = \frac{L}{U_1 L} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{y=0} = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{\text{тело}}. \quad (4.66б)$$

Уравнение (4.65) примет вид

$$(c_p)_{\text{тело}} = - \frac{2UL}{UL} \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{x}} \right)_{\bar{y}=0} = -2 \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{x}} \right)_{\bar{y}=0}. \quad (4.67)$$

Рассматривая уравнение (4.66а), видим, что можно получить уравнение, в которое не входят параметры, если избавиться от параметра $1-M^2$, включив его в $\bar{x}$ или $\bar{y}$ (но не в $\bar{\Phi}$). Однако, чтобы сохранить $(c_p)_{\text{тело}}$, включающее $\bar{\Phi}$ и $\bar{x}$, попытаемся избавиться от $1-M^2$ введением новой переменной

$$y^+ = \sqrt{1-M^2} \bar{y}. \quad (4.68)$$

Уравнение (4.66а) примет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial y^{+2}} = 0, \quad (4.69)$$

а условия (4.66б) будут

$$\left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y^+} \right)_{y^+=0} = \frac{1}{\sqrt{1-M^2}} \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{y}} \right)_{\bar{y}=0} = \frac{1}{\sqrt{1-M^2}} \left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} \right)_{\text{тело}}. \quad (4.70)$$

Таким образом, сокращение числа параметров в дифференциальном уравнении приводит к появлению параметра в граничных условиях. Можно преодолеть эту трудность, если воспользоваться искаженным правилом подобия для тела. Пусть для удобства форма тела описывается следующим образом:

$$\bar{y}_{\text{тело}} = \frac{y_{\text{тело}}}{L} = t f \left(\frac{x}{L} \right) = t f(\bar{x}). \quad (4.71)$$

Будем рассматривать $f(\bar{x})$ как форму семейства тел, а t как коэффициент толщины.

Тогда

$$\left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}\right)_{\text{тело}} = t f'(\bar{x}) \quad (4.72)$$

и уравнение (4.70) можно переписать следующим образом:

$$\left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y^+}\right)_{y^+ \rightarrow 0} = \frac{1}{\sqrt{1-M^2}} t f'(\bar{x}). \quad (4.73)$$

Пусть далее

$$t^+ = \frac{t}{\sqrt{1-M^2}}.$$

Тогда уравнение (4.73) примет вид

$$\left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y^+}\right)_{y^+ \rightarrow 0} = t^+ f'(\bar{x}). \quad (4.74a)$$

Таким образом, два тела, например a и b , будут иметь одни и те же основные уравнения и граничные условия в координатах $\bar{\varphi}$, $\bar{x}$, y^+ , если их коэффициенты толщины будут соответствовать одному и тому же t^+ , т. е. необходимым правилом сохранения $(c_p)_{\text{тело}}$ является

$$t^+ = \text{const} = \frac{t_a}{\sqrt{1-M_a^2}} = \frac{t_b}{\sqrt{1-M_b^2}}, \quad (4.74б)$$

где M_a и M_b — числа Маха в невозмущенном потоке для тел a и b . Следовательно, для получения постоянного значения $(c_p)_{\text{тело}}$ в координатах $\bar{\varphi}$, $\bar{x}$ необходимо, чтобы выполнялось правило (4.74б) и оставалась одинаковой форма, т. е. была одна и та же функция $f(\bar{x})$.

Представляет интерес остановиться еще на некоторых вопросах. Очевидно, что различная нормализация $\bar{\varphi}$ не изменит уравнения (4.69), так как оно однородно относительно $\bar{\varphi}$. Однако это может повлиять

на выражение для c_p . Например, если принять

$$\varphi^* = B \frac{\varphi}{U_1 L} = B \bar{\varphi},$$

где B является произвольной безразмерной постоянной, то уравнение (4.69) не изменится, а граничное условие (4.70) будет иметь вид

$$\left(\frac{\partial \bar{\varphi}^*}{\partial y^+} \right)_{y^+ = 0} = B \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y^+} \right)_{y^+ = 0} = B t^+ f(\bar{x}). \quad (4.75)$$

Так как нас здесь интересует лишь постоянство граничных условий при различных значениях M , то условие (4.75) отвечает этому требованию. Однако выражение для коэффициента давления (4.67) примет вид

$$(c_p)_{\text{тело}} = -2 \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \right)_{y^+ = 0} = -\frac{2}{B} \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial x} \right)_{y^+ = 0}. \quad (4.76)$$

Следовательно, B является свободным параметром, т. е. можно давать ему любое подходящее значение. Путем соответствующего выбора B можно вывести все обычные правила подобия для сжимаемого потока при этих условиях. Такие правила предложены Прандтлем — Глауэртом и Гёттертом. В последних книгах по аэродинамике приводятся эти правила и примеры их использования (см., например, [30]).

Для сверхзвукового потока ($M^2 > 1$) приведенное выше уравнение дает мнимые значения t^+ . Однако более внимательное рассмотрение уравнений показывает, что для того, чтобы правила стали корректными как для околосзвукового, так и сверхзвукового потоков¹⁾, необходимо лишь подставить $\sqrt{|1 - M^2|}$ вместо $\sqrt{1 - M^2}$. Но эти правила не выполняются при $M \approx 1$, так как при этом уравнение (4.64а) не будет полным. Околосзвуковой поток рассматривается в следующем примере.

Липман и Рошко [30] получили результаты, идентичные приведенным выше, с помощью двух систем

¹⁾ Однако отметим, что нельзя проводить сравнение сверхзвукового обтекания с околосзвуковым, и наоборот.

координат, одной — для тела a , а другой — для тела b . Они показали, что уравнения для тела a будут теми же, что и для тела b , при условии, что при выбранных координатах удовлетворяются зависимости для y^+ и t^+ , т. е. (4.68) и (4.746). Читатель может сам убедиться в том, что такое преобразование приводит к инвариантной форме уравнений и граничных условий в координатах $\bar{\varphi}$, $\bar{x}$, $\bar{y}^+$, если граничные условия взяты в зависимости от t^+ .

Отметим, что правило подобия в потоке не будет тем же, что и для граничных условий. Подобные точки в поле потока определяются одинаковыми значениями y^+ , т. е.

$$y^+ = \sqrt{1 - M^2} y = \text{const.} \quad (4.68)$$

Подобные же граничные условия соответствуют одинаковым значениям t^+ , т. е.

$$t^+ = \frac{t}{\sqrt{1 - M^2}} = \text{const.} \quad (4.746)$$

Таким образом, когда, например, M увеличивается в дозвуковом потоке от нуля, мы сохраняем подобие путем использования «более узкого» тела в соответствии с (4.746), но влияние на поле потока становится «шире» в соответствии с (4.68).

Наконец, еще раз подчеркнем, что правила подобия можно непосредственно найти, если в уравнения и соответствующие граничные условия ввести естественные координаты. Приведенный пример весьма поучителен, так как показывает, что метод можно применять для разработки теории искаженного моделирования, где он не только удобен, но просто необходим.

Пример 4.12. Правило подобия для околосзвукового двумерного потока. Распределение давления, полученное при испытаниях тонких крыльев, показывает, что правило, выведенное в примере 4.11, будет выполняться до тех пор, пока число Маха не достигнет где-то на теле значения единицы, после чего наблюдаются

значительные отклонения от него. Трудность состоит не в этом отклонении от правила, а в полноте дифференциального уравнения (4.64а) при околосзвуковом режиме. Данные испытаний, а также теория приближений показывают, что соответствующее приближенное уравнение для моделирования околосзвукового обтекания тонких тел имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{1-M^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{(\gamma+1) M^2}{1-M^2} \frac{1}{U} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad (4.77)$$

где все обозначения те же, что и в примере 4.11, а γ есть отношение удельных теплоемкостей. Граничные условия также можно взять те же, что в примере 4.11.

Снова ищем правило постоянства $(c_p)_{\text{тело}}$. Так как уравнение (4.77) неоднородно относительно φ , то следует ожидать потери свободного параметра B из примера 4.11. На самом деле для нахождения правила подобия необходимо взять определенное значение B . Поэтому проведем нормализацию, используя переменные

$$\varphi^* = \frac{B\varphi}{UL},$$

$$\bar{x} = \frac{x}{L},$$

$$\bar{y} = \frac{y}{L}.$$

Уравнение (4.77) принимает вид

$$\frac{UL}{BL^2} \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial \bar{x}^2} + \frac{1}{1-M^2} \frac{UL}{BL^2} \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial \bar{y}^2} = \frac{(\gamma+1) M^2}{1-M^2} \frac{U^2 L^2}{UL^3 B^2} \frac{\partial \varphi^*}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial \bar{x}^2}.$$

Деление обеих частей на U/BL дает

$$\frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial \bar{x}^2} + \frac{1}{1-M^2} \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial \bar{y}^2} = \frac{(\gamma+1) M^2}{1-M^2} \frac{1}{B} \frac{\partial \varphi^*}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial \bar{x}^2}. \quad (4.78)$$

Можно получить уравнение, в которое не будут входить параметры, если положить

$$B = \frac{(\gamma+1) M^2}{1-M^2} \quad (4.79)$$

и, как и ранее, взять

$$y^+ = \sqrt{1 - M^2} \bar{y}. \quad (4.80)$$

Тогда

$$\Phi^* = \frac{(\gamma + 1) M^2}{1 - M^2} \frac{\Phi}{UL}.$$

Условия на бесконечности после преобразования переменных не изменяются. Эти граничные условия

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{\bar{y}=0} = U \left(\frac{dy}{dx} \right)_{\text{тело}}$$

принимают вид

$$\left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial y^+} \right)_{y^+=0} = \frac{1}{\sqrt{1 - M^2}} \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial \bar{y}} \right)_{\bar{y}=0} = \frac{1}{\sqrt{1 - M^2}} \frac{BL}{UL} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{y}} \right)_{\bar{y}=0}$$

или

$$\left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial y^+} \right)_{y^+=0} = \frac{B}{\sqrt{1 - M^2}} \left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} \right)_{\text{тело}} = \frac{(\gamma + 1) M^2}{(1 - M^2)^{3/2}} \left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} \right)_{\text{тело}}.$$

Снова берем $(\partial \bar{y} / \partial \bar{x})_{\text{тело}}$ в виде

$$\left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} \right)_{\text{тело}} = t f'(\bar{x}). \quad (4.81)$$

Тогда

$$\left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial y^+} \right)_{y^+=0} = \frac{(\gamma + 1) M^2}{(1 - M^2)^{3/2}} t f'(\bar{x}).$$

Можно получить правило подобия, если потребовать

$$t^+ = \frac{(\gamma + 1) M^2 t}{(1 - M^2)^{1/2}} = \text{const}, \quad (4.82a)$$

с тем чтобы

$$\left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial y^+} \right)_{y^+=0} = t^+ f(\bar{x}). \quad (4.82b)$$

Теперь коэффициент давления равен

$$\begin{aligned} c_p &= \frac{-2}{U} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{y=0} = \frac{-2}{\psi} \frac{\psi L}{BL} \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial \bar{x}} \right)_{\bar{y}=0} = \\ &= \frac{-2(1 - M^2)}{(\gamma + 1) M^2} \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial \bar{x}} \right)_{\bar{y}=0}. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Таким образом, в координатах Φ^* , y^+ , $\bar{x}$ не достигается постоянство c_p , как в примере 4.11, а получается

величина, определяемая правилом (4.83). Правило выполняется, если при переходе к координатам φ^* , y^+ , $\bar{x}$ производная $\partial\varphi^*/\partial\bar{x}$ становится постоянной. Это может быть достигнуто для любого тела с одинаковыми кривыми $f(x)$, если выразить форму и толщину тела через

$$t^+ = \frac{(\gamma + 1) M^2}{(1 - M^2)^{3/2}}, \quad t = \text{const.}$$

Отсюда следует, что в любой точке, т. е. при любом данном $\bar{x}$

$$\frac{c_p (\gamma + 1) M^2}{1 - M^2} = \text{const.} \quad (4.84)$$

Правило (4.84) позволяет рассчитать коэффициент давления тела при одном числе Маха из результатов испытаний тела другой толщины при другом числе Маха.

в. Уменьшение числа независимых переменных; разделение переменных и координаты подобия

В разд. 4.10а и 4.10б были разобраны несколько задач увеличивающейся трудности для демонстрации того, что условия подобия могут быть определены путем нахождения естественных координат, при которых в уравнения и соответствующие граничные условия не входят параметры. В данном разделе будет показано, что условия подобия можно найти и другим способом с помощью новых координат, которые уменьшают число независимых переменных в основных уравнениях. Такие координаты обычно называют *переменными подобия*. При этом можно найти также естественные координаты, число которых будет меньше, чем в исходном уравнении, и, таким образом, результат получается сразу двумя способами. Оба процесса часто проводятся одновременно, но здесь мы рассматриваем их в отдельности, чтобы показать значение каждого из них.

Снова, как и ранее, будем искать связь между условиями подобия, инвариантностью при преобразо-

вании координат и уравнениями с переменными подобия. Найдем также их взаимосвязь с *разделением переменных* для дифференциальных уравнений в частных производных. Преобразования переменных рассмотрены Морганом [35] и Майклом [33]. Идея инвариантности была использована Биркгофом [4, 5]. Хансен [17] применил метод разделения переменных. Здесь будет более подробно рассмотрен последний метод, поскольку с математической точки зрения он является простейшим, с его помощью получаются совпадающие результаты и более четко выявляются искомые свойства симметрии. Будут сделаны также некоторые замечания относительно полезности и смысла результатов, полученных Морганом [35].

Переменные подобия возникают по двум определенным причинам, которые можно назвать *внутренней симметрией*. Первая из них является обычной физической симметрией физической системы. Примером служит задача, в которой используется сферическая симметрия, имеющая место при взрывной волне, бегущей от точки в неограниченном пространстве газа. Многие исследователи вполне естественно стремятся использовать координаты, которые учитывали бы эту симметрию. При этом для решения задачи о точечном взрыве вместо прямоугольных выбирают сферические координаты и считают, что решение в этих координатах зависит только от радиуса, а не от углового положения. Такое допущение связано с внутренней симметрией и подобным развитием процесса. Это означает, что при определенном радиусе решение не зависит от углового положения, а следовательно, при одном и том же радиусе одно угловое положение можно моделировать любым другим. Условие подобия будет тогда являться внутренним в том смысле, что оно скорее относится к двум различным точкам внутри данной системы, чем к двум подобным точкам в различных системах. При таком рассмотрении внутреннее подобие больше относится к переменным, чем к параметрам. Конечно, таким образом предполагаемая симметрия не всегда получается при симметричных граничных условиях, и допущение должно быть провере-

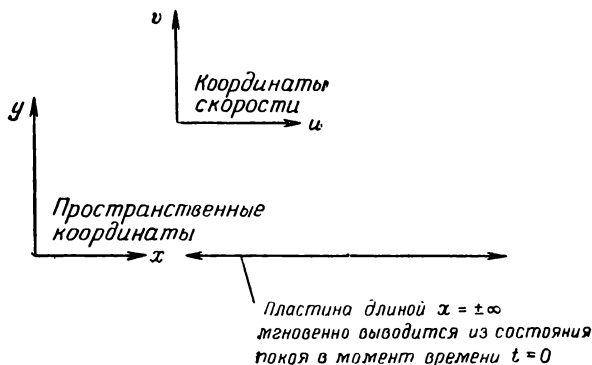
но. Биркгофф [5] рассмотрел этот вопрос применительно к вязким жидкостям с точки зрения инвариантности при преобразовании координат и с точки зрения теории групп. Он дал множество примеров симметрии такого рода. Здесь же мы коснемся лишь внутренней симметрии второго рода, которая менее очевидна.

Второй тип внутренней симметрии вытекает из структуры основных уравнений. Она является внутренней симметрией также потому, что касается переменных, а не параметров. Хотя сначала кажется, что такой процесс дает довольно общие результаты, но найденные до сих пор точные решения ограничены лишь задачами, в которых в *одной из первоначальных координат отсутствует характеристическая длина*. Математическая сторона таких решений не достаточно понятна, и нет каких-либо доказательств необходимости такого ограничения. Однако список таких решений, составленный недавно Янгом, а затем расширенный Абботтом и Клайном [1], показывает, что такое правило не имеет исключений. Изучение граничных условий также подтверждает эффективность правила. Так или иначе, но отсутствие характеристической длины в одной из координат указывает на то, что решение и соотношения следует искать с помощью переменной подобия.

Снова ограничимся рассмотрением методов и дадим только несколько примеров. Читателю, который хотел бы рассмотреть больше примеров, касающихся случаев с более чем двумя независимыми переменными, и более подробно познакомиться с различными методиками и прямыми методами получения переменных подобия, следует обратиться к работам Моргана [35] и Абботта и Клайна [1]. Так как сущность переменных подобия в некоторой степени является сложной и ее лучше понять на примере, то дальнейшие общие замечания будут сделаны в конце данного раздела после рассмотрения примеров.

Пример 4.13. Плоская пластина, внезапно подвергнутая ускорению. Рассмотрим тонкую пластину неопределенной длины, которая первоначально нахо-

дится в состоянии покоя, в координатах, показанных на фиг. 4.14. Пластина окружена несжимаемой вязкой жидкостью, которая также находится в покое. Начиная с момента времени $t=0$ пластина разгоняется до скорости U . Найдём движение слоев жидкости



Фиг. 4.14.

за время, отсчитываемое от $t=0$. В данном случае лишь два члена основного уравнения сохранения количества движения равны нулю, так что уравнение имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (4.85a)$$

где ν — кинематическая вязкость. Вывод этого уравнения можно найти в работе [45], гл. 11. Соответствующие граничные условия таковы:

$$\begin{aligned} \text{при } t=0 (y \geq 0): \quad u &= 0, \\ \text{при } y=0 (t > 0): \quad u &= U, \\ \text{при } y=\infty (\text{все } t): \quad u &= 0. \end{aligned} \quad (4.85b)$$

Так как мы хотим показать действие метода разделения переменных, то представляем решение в обычном для этого метода виде, т. е.

$$u = I(t)Y(y).$$

Тогда

$$T'Y = vTY'',$$

где штрихи означают дифференцирование функции по ее аргументу. Деля на TY , имеем

$$\frac{T'}{T} = v \frac{Y''}{Y} = \text{const} = -\lambda,$$

где λ — постоянная. Получаем простые дифференциальные уравнения, в которых переменные разделены:

$$T' + \lambda T = 0 \quad \text{и} \quad Y'' + \frac{\lambda}{v} Y = 0.$$

Общие решения этих уравнений таковы:

$$T = c_1 e^{-\lambda t},$$

$$Y = c_2 \cos\left(\frac{\lambda}{v} y\right) + c_3 \sin\left(\frac{\lambda}{v} y\right).$$

Таким образом, выражение для скорости имеет вид

$$u = e^{-\lambda t} \left[c_4 \cos\left(\frac{\lambda}{v} y\right) + c_5 \sin\left(\frac{\lambda}{v} y\right) \right]. \quad (4.86)$$

Граничное условие

$$\text{при } y=0 (t > 0): \quad u = \text{const} = u_0 = c_4 e^{-\lambda t}.$$

Поэтому получаем в результате, что λ должно быть равно нулю¹⁾, а уравнение (4.86) дает $u = c_4 = \text{const}$, но это является тривиальным решением. Следовательно, с помощью непосредственного применения классического метода разделения переменных задачу решить нельзя. Существуют методы, с помощью которых можно получить решения линейных уравнений (например, применение интеграла Фурье). Однако здесь задача решается с помощью перехода к новым координатам, когда можно воспользоваться классическим методом разделения переменных, поскольку это приведет нас к искомым условиям подобия; такой переход пригоден и для нелинейных уравнений.

¹⁾ Такой же результат получается и при отрицательном или комплексном λ .

Возникает вопрос: «Существует ли такое преобразование переменных, при котором число независимых переменных в уравнении (4.85а) снижается с двух до одной?» Зависимая переменная u станет при этом функцией одной новой независимой переменной η , т. е.

$$u(y, t) \rightarrow u(\eta),$$

где

$$\eta = \eta(y, t).$$

Результирующее уравнение с новой независимой переменной η будет второго порядка; для такого уравнения потребуются два граничных условия для η , тогда как для исходного уравнения для y и t требуются три граничных условия.

Такое уменьшение числа граничных условий требует, чтобы два из исходных граничных условий были определенным образом связаны для того, чтобы получилось точное решение преобразованного уравнения. В частности, требуется, чтобы

$$u[\eta(\alpha, y)] = u[\eta(t, \beta)]. \quad (4.87)$$

Условие (4.87) появляется вследствие того, что без него невозможно было бы удовлетворить все три первоначальных граничных условия с помощью только двух граничных условий для η .

Таким образом, два первоначальных граничных условия в задаче можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \text{при } t = \alpha: \quad u &= u[\eta(\alpha, y)], \\ \text{при } y = \beta: \quad u &= u[\eta(t, \beta)], \end{aligned} \quad (4.88)$$

где

$$u[\eta(\alpha, y)] = u[\eta(t, \beta)].$$

Требуемые граничные условия находятся путем сравнения правых частей соотношений (4.88) и первоначальных граничных условий (4.85б). Вообще если такие условия нельзя найти, то не следует ожидать и нахождения условий подобия с помощью переменной η . Тем не менее эти условия подтверждают правильность наших предварительных замечаний относительно

отсутствия характеристической длины в одном или нескольких направлениях, так как тогда постоянное граничное условие при нуле и на бесконечности может содержать координату в отрицательной степени. Представляется возможным удовлетворить условия (4.88) другими способами, хотя примеры не известны.

В частной задаче, которую мы рассматриваем, из условий (4.85б) видно, что $u(0, y) = u(t, \infty)$, и поэтому можно получить такое η , чтобы удовлетворялось условие (4.87), если взять $\alpha = 0$, $\beta = \infty$ и $\eta(0, y) = \eta(t, \infty)$. Зависимость, соответствующая этому условию, такова:

$$\eta = a \frac{y^n}{t^m} = a \left(\frac{y}{t^{m/n}} \right)^n,$$

где a является постоянной, а n и m — действительные числа, которые могут быть больше или меньше нуля, а их точные значения необходимо определить.

Для того чтобы новые переменные отличались от старых, введем вторую переменную ζ , равную t , а старая независимая переменная оказывается в знаменателе η ¹⁾. Далее необходимо, чтобы результирующее уравнение после преобразования переменных $t, y \rightarrow \zeta, \eta$ было разделено на функцию только ζ и функцию только η .

Путем цепного правила дифференцирования можно выразить $\partial u / \partial y$ в зависимости от новых координат ζ, η следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 + a n \frac{y^{n-1}}{t^m} \frac{\partial u}{\partial \eta} = a n \frac{y^{n-1}}{\zeta^m} \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Величину n можно выбрать произвольно, поскольку если существует решение в виде $u = u(\eta)$, то должно существовать решение и в виде $u = u(\eta^n)$. В общем результирующий функциональный вид решения зави-

¹⁾ С математической точки зрения такой выбор ζ является простейшим (потому что производная наивысшего порядка от u по t меньше, чем от u по y). Возможность такого выбора должна быть установлена путем анализа. Если он не возможен, то единственным заключением может быть следующее: принятое преобразование не приводит нас к условиям подобия.

сит от величины n . Наилучшим значением n будет такое, при котором получается наиболее легко решаемое дифференциальное уравнение. С такой задачей всегда приходится сталкиваться при решении данного уравнения. Важным здесь является то, что принятие какого-то частного значения n не приводит к потере общности. Из приведенного выражения для du/du видно, что при $n=1$ результаты становятся проще. Поэтому возьмем это значение n .

Подставляя $n=1$ в выражение для du/du , получаем

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{a}{\xi^m} \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Снова применяя цепное правило дифференцирования, находим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{a}{\xi^{2m}} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Аналогично $du/\partial t$ принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - am \frac{y}{t^{m+1}} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - m \frac{\eta}{\xi} \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (4.85а), получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} - m \frac{\eta}{\xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} = v \frac{a^2}{\xi^{2m}} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}. \quad (4.89)$$

Теперь попробуем воспользоваться классическим методом разделения переменных для уравнения (4.89), принимая $u = bg(\xi)f(\eta)$, где b является постоянной. Деля на bgf и преобразуя члены, получаем

$$\frac{g'}{g} \xi^{2m} = m \frac{\eta}{\xi^{1-2m}} \frac{f'}{f} + va^2 \frac{f''}{f}. \quad (4.90)$$

Таким образом, мы имеем теперь, с одной стороны, функцию только от η , а с другой — функцию только от ξ , если $\xi^{1-2m} = \text{const}^1$), т. е. $2m - 1 = 0$, или $m = 1/2$.

¹⁾ Это требование наличия нулевой степени при t (или при ξ) является общим условием, необходимым для определения m . См., например, работы Янга [56] и Хансена [17].

Итак, находим, что необходимой переменной для разделения является $\eta = 2y/\sqrt{t}$. Определяя снова λ как константу разделения и подставляя $m=1/2$, получаем уравнение (4.90) в виде

$$\frac{g'}{g}\zeta = \frac{\eta}{2} \frac{f'}{f} + \nu a^2 \frac{f''}{f} = \lambda. \quad (4.91)$$

Обычно дифференциальное уравнение $g'\zeta/g = \lambda$ можно сразу решить, если принять $g = c_1 \zeta^\lambda$. Решение для g следует согласовать с граничными условиями. Используя граничное условие при $\eta=0$ ($y=0$), получаем

$$u = \text{const} = u_0 = b c_1 \zeta^\lambda f(0).$$

Поскольку b , c_1 и $f(0)$ являются константами, то существует условие, что $\lambda=0$. Тогда определяется функция g ; $g = \text{const} = c_1$. Уравнение (4.91) можно переписать в виде

$$2\nu a^2 f'' + \eta f' = 0. \quad (4.92)$$

Итак, цель достигнута: число независимых переменных снижено с двух до одного. Путем соответствующего выбора константы a можно также представить η как естественную координату. Принимаем $a^2 = 1/4\nu$; тогда

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}$$

и уравнение (4.92) примет вид

$$f'' + 2\eta f' = 0 \quad (4.93a)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \text{при } \eta=0; & \quad f=1, \\ \text{при } \eta=\infty: & \quad f=0. \end{aligned} \quad (4.93b)$$

Решением уравнения (4.93) будет

$$f = 1 - \text{erf} \eta,$$

где erf является сокращенным обозначением табличной функции

$$\operatorname{erf} \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^x e^{-t^2/2} dt.$$

В данном случае исследование условий подобия привело нас к полному решению задачи. Можно также получить решение уравнения (4.85а) с помощью переменных подобия в более общем виде без какого-либо допущения о начальном условии. Затем можно найти начальные условия, при которых решение имеет место (см. работу Абботта и Клайна [1]). Для этого можно использовать и более общее преобразование переменных

$$\eta = \frac{ay}{\gamma(t)},$$

где γ является неизвестной функцией. Не вдаваясь в дальнейшие подробности, мы приведем далее два других примера, затем вернемся к обсуждению таких решений, их свойств подобия и сделаем ряд общих замечаний относительно решений этого типа.

Пример 4.14. Стационарный ламинарный пограничный слой на плоской пластине. Несколько более сложным примером нахождения условий подобия является решение Блазиуса для ламинарного несжимаемого пограничного слоя на плоской пластине. Здесь будет приведено решение, несколько отличное от оригинала. Поскольку распределение давления для потенциального потока вдали от пластины постоянно, то уравнения Прандтля для пограничного слоя в координатах фиг. 4.14 сводятся к

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (4.94)$$

Уравнение (4.94) следует решать совместно с уравнением неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.95)$$

при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} \text{при } y=0: & \quad u=0, \quad v=0, \\ \text{при } \infty: & \quad u=U. \end{aligned}$$

Удобно ввести функцию тока Ψ , определяемую как ¹⁾

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -v, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = u.$$

Оба уравнения (4.94) и (4.95) сводятся к одному относительно Ψ

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} \quad (4.96)$$

с граничными условиями:

$$\begin{aligned} \text{при } y=0 \ (x \geq 0): & \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0, \\ \text{при } y=\infty \ (x \geq 0): & \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = U. \end{aligned}$$

Мы не делаем никаких утверждений о начальных условиях при $x=0$ и используем «пробное» преобразование

$$\eta = \frac{ay}{\gamma(x)}.$$

Формальное дифференцирование дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} - \frac{\gamma'}{\gamma} \eta \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} &= \frac{a}{\gamma} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta \partial \eta} - a \frac{\gamma'}{\gamma^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} - a \frac{\gamma'}{\gamma^2} \eta \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial y} &= \frac{a}{\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} &= \frac{a^2}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} &= \frac{a^3}{\gamma^3} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \eta^3}. \end{aligned}$$

¹⁾ Следует отметить, что переменная Ψ сводит две независимые переменные к одной; это другой вид «естественной координаты», которая дает обобщенные соотношения в некоторых задачах.

После подстановки этих производных в уравнение (4.96) получаем

$$\gamma \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta \partial \xi} - \gamma' \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right)^2 - \gamma \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} = \nu a \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \eta^3}. \quad (4.97)$$

Применяя метод разделения переменных к уравнению (4.97), представим Ψ в виде $\Psi = b g(\xi) f(\eta)$; после подстановки в (4.97) находим

$$(\gamma g' - \gamma' g) f'^2 - \gamma g' f f'' = \frac{\nu a}{b} f'''. \quad (4.98)$$

Деление на f'^2 дает

$$\gamma g' - \gamma' g = \gamma g' \frac{f f''}{f'^2} + \frac{\nu a}{b} \frac{f'''}{f'^2}. \quad (4.99)$$

В уравнении (4.99) переменные можно разделить, если $\gamma g' = \text{const} = c_1$. Это одно из соотношений, связывающее две неизвестные γ и g ; следует найти и второе соотношение¹⁾ для этих неизвестных. Необходимое соотношение для этой частной задачи можно найти из граничных условий. Однако имеются задачи, где из граничных условий этого сделать нельзя; такие случаи рассматриваются ниже.

Чтобы найти второе соотношение между γ и g , рассмотрим граничное условие

$$\begin{aligned} \text{при } \eta = \infty: \quad \frac{\partial \Psi(x, \infty)}{\partial y} &= \frac{a}{\gamma} \frac{\partial \Psi(x, \infty)}{\partial \eta} = \\ &= ab \frac{g}{\gamma} f'(\infty) = u_0. \end{aligned}$$

Так как a , b , $f'(\infty)$ и u_0 — константы, то необходимое соотношение имеет вид $g/\gamma = \text{const} = c_2$. Решая два

¹⁾ Другой член уравнения (4.99), содержащий γ и g , зависит от первого соотношения $\gamma g' = c_1$. Покажем это следующим образом. Пусть $\gamma g' - \gamma' g = c_2$ и $\gamma g' = c_1$. Тогда $\gamma' g = \text{const} = c_3$. Из этих двух равенств можно получить следующее уравнение: $\gamma \gamma'' = (c_1/c_3) \gamma'^2 = 0$, которое имеет решение $\gamma = ax + b^{1/(1+c_1/c_3)}$ для $c_1 \neq -c_3$ и $\gamma = ae^{bx}$ для $c_1 = -c_3$. Это дает «общую» переменную разделения η для уравнений пограничного слоя. Однако нельзя найти переменную подобия конкретной задачи, не зная величин c_1 и c_3 . Следовательно, как и ранее, остается прежний вывод: необходимо дополнительное соотношение между γ и g .

уравнения $\gamma g' = c_1$ и $g/\gamma = c_2$ совместно, получаем

$$g = \sqrt{2c_1c_2(\zeta + \zeta_0)} \quad \text{и} \quad \gamma = \sqrt{2(c_1c_2)(\zeta + \zeta_0)}.$$

Оценка члена $\gamma g' - \gamma' g$ показывает, что он тождественно равен нулю. Следовательно, константа разделения λ равна нулю и уравнение (4.99) принимает вид

$$f''' + \frac{c_1 b}{va} f f'' = 0. \quad (4.100)$$

Вновь выбираем произвольные константы, чтобы η стало естественной координатой. Для этого требуется, чтобы $c_1 = u_0$, $ab = 1/2$, $c_1 b/va = 1/2$ и $f'(\infty) = 1$; следовательно, как и раньше, $a^2 = u_0 v$ и $f'(\infty) = 1$. Таким образом, мы получаем дифференциальное уравнение Блазиуса

$$f f'' + 2 f''' = 0. \quad (4.101)$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} \text{при } \eta = 0: \quad & f(0) = 0, \\ \text{при } \eta = 0: \quad & f'(0) = 0, \\ \text{при } \eta = \infty: \quad & f'(\infty) = 1. \end{aligned} \quad (4.102)$$

Уравнения (4.101) и (4.102) дают переменную подобия

$$\eta = y \sqrt{\frac{U}{v(x + x_0)}}. \quad (4.103)$$

Постоянную интегрирования x_0 нельзя определить из условий задачи. Если воспользоваться обычными начальными условиями $\partial \Psi / \partial y = U$ при $x = 0$ ($y \neq 0$), то можно найти, что $x_0 = 0$. В итоге получается обычная переменная Блазиуса $\eta_B = y \sqrt{U/vx}$.

Как будет видно из следующего примера, дополнительная постоянная x_0 не тривиальна. Аналитическое решение уравнения (4.101) не получено, но оно было найдено Блазиусом численным методом. Резуль-

таты помещены в виде таблиц в монографиях по теории пограничного слоя (см., например, Шлихтинг [45, р. 121]. Получено хорошее совпадение рассчитанных и измеренных профилей скорости.

Кроме того, переменная η из уравнения (4.103) удовлетворяет уравнению и граничным условиям Блазиуса; следовательно, решение Блазиуса корректно относительно этой переменной. Это показывает, что решение Блазиуса может быть предельным решением для больших значений x независимо от начальных условий, так как с увеличением x влияние начальных условий (x_0) уменьшается. Следовательно, более общая переменная подобия уравнения (4.103) до некоторой степени снимает трудности, возникающие из-за некорректности уравнений пограничного слоя Прандтля вблизи $x=0$.

Здесь целесообразно отметить, что переменные подобия, которые позволяют снизить число независимых переменных, могут быть найдены путем простого рассмотрения порядка производных в основных уравнениях. Если бы это было верно, то переменные подобия определялись бы всегда видом параметров в уравнениях, нормализованных по методу, изложенному в разд. 4.2. Их можно было бы также найти с помощью простого рассмотрения уравнения; это было бы эквивалентно применению дополнения Хантли (см. разд. 2.6) для подсчета членов уравнения. Седов [46] показал, что многие переменные подобия можно найти таким путем. Однако эта методика в действительности не дает всех возможных переменных подобия, что будет показано в следующем примере.

Пример 4.15. Ламинарная двумерная струя. Запишем уравнения движения стационарного двумерного несжимаемого ламинарного потока жидкости в бесконечной области той же жидкости (см. [38]):

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (4.104)$$

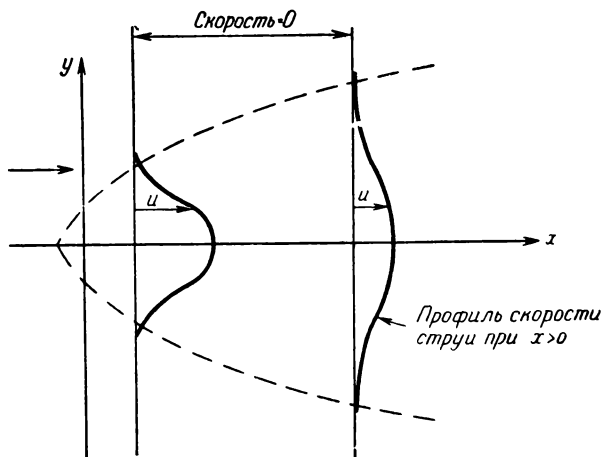
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.105)$$

с граничными условиями:

$$\begin{aligned} \text{при } y=0: \quad v=0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=0, \\ \text{при } y=\infty: \quad u=0. \end{aligned} \quad (4.106)$$

Рассматриваемая система показана на фиг. 4.15.

Так как давление постоянно и движение стационарное, общий поток момента количества движения



Ф и г. 4.15.

через поперечное сечение струи при любом данном x должно быть постоянным, т. е.

$$2\rho \int_0^{\infty} u^2 dy = \text{const.} \quad (4.107)$$

Снова применим функцию тока Ψ :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -v, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = u.$$

Уравнения (4.104) и (4.105) сводятся к

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3}. \quad (4.108)$$

Введем новые переменные $\zeta = x$ и $\eta = ay/\gamma(x)$ и, используя метод разделения переменных, положим $\Psi = bg(\zeta)f(\eta)$. Тогда уравнение (4.108) примет вид

$$\gamma g' - \gamma' g = \gamma g' \frac{ff''}{f'^2} + \frac{\gamma a}{b} \frac{f'''}{f'^2}. \quad (4.109)$$

Это уравнение того же типа, что и уравнение (4.99) для задачи Блазиуса, так как для его получения использовались те же дифференциальные уравнения в частных производных; лишь граничные условия в последнем случае другие. Граничные условия, соответствующие уравнению (4.106), имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{при } \eta = 0: \quad & bg'f(0) = 0, \\ \text{при } \eta = 0: \quad & ba^2 \frac{g}{\gamma^2} f''(0) = 0, \\ \text{при } \eta = \infty: \quad & ba \frac{g}{\gamma} f'(\infty) = 0. \end{aligned} \quad (4.110)$$

Чтобы разделить переменные в уравнении (4.109), необходимо, чтобы

$$\gamma g' = \text{const} = c_1.$$

Второе соотношение между γ и g можно найти, рассматривая уравнение (4.107) (см. примечание на стр. 253), которое можно записать как

$$\int_0^{\infty} u dy = \text{const} = c_2. \quad (4.111)$$

Теперь $u = d\Psi/dy = ab(g/\gamma)f'$ и $dy = (\gamma/a)d\eta$; следовательно, уравнение (4.111) принимает вид

$$\int_0^{\infty} a^2 b^2 \frac{g^2}{\gamma^2} f'^2(\eta) \frac{\gamma}{a} d\eta = b^2 a \frac{g^2}{\gamma} \int_0^{\infty} f'^2(\eta) d\eta = c_2.$$

Таким образом получим второе соотношение $g^2/\gamma = \text{const} = c_3$.

Решая одновременно два уравнения $\gamma g' = c_1$ и $g^2/\gamma = c_3$, получаем

$$g = [3c_1c_3(x + x_0)]^{1/4}$$

и

$$\gamma = \frac{1}{c_3} [3c_1c_3(x + x_0)]^{3/4},$$

где x_0 — постоянная интегрирования. Если выбрать в качестве значений произвольных констант c_1 и c_3 величины $c_1 = \sqrt{va/b}$ и $c_3 = 1/3$, то получим искомые естественные координаты. Уравнения (4.109) и (4.110) можно записать теперь так:

$$f''' + ff'' + f'^2 = 0 \quad (4.112a)$$

с граничными условиями

$$\text{при } f(0) = 0: f''(0) = 0, f'(\infty) = 0, \quad (4.112б)$$

где

$$\eta = \text{const } y/3(x + x_0)^{2/3}.$$

Эти уравнения можно решить (см. [38]).

В процессе решения задачи было показано, каким образом можно использовать интегральное уравнение граничных условий, чтобы получить второе соотношение между γ и g , необходимое для определения соответствующих переменных подобия из семейства возможных переменных, найденных при рассмотрении лишь дифференциального уравнения в частных производных (4.108). В этом решении x_0 называется *потенциальным барьером* или начальной длиной; эта величина может быть найдена из опытных данных¹⁾.

Относительно переменных подобия можно сделать следующие замечания общего характера. Во-первых, выясним их физический смысл. Во всех трех рассмотренных случаях уравнение с двумя независимыми переменными сводилось к уравнению с одной независимой переменной. В примерах 4.13 и 4.14 мы нашли решение, зависящее лишь от одной новой координаты

¹⁾ Отметим, что, согласно фиг. 4.15, граничные условия соответствуют струе, вытекающей из весьма малого отверстия, так что начальная длина $x_0 = 0$ и ею можно пренебречь.

ты η . Однако в примере 4.15 было получено решение для функции тока, зависящее от новой координаты η и также от x , так как функция $g(x)$ не постоянна в этом случае и по определению

$$\Psi = ag(x)f(\eta).$$

Таким образом, имеются по крайней мере два различных случая. На самом деле, поучительно рассмотреть три. Во всех случаях решения находятся в зависимости от новых координат, специально выбранных так, чтобы разделение переменных достигалось обычным образом. Вначале используются координаты x, y , затем новые координаты ζ, η и наконец зависящая переменная Ψ .

1. Наиболее общим видом произведения с разделенными переменными является

$$\Psi = ag(\zeta)f(\eta),$$

где ζ и η — функции от x и y .

2. Другое произведение общего вида:

$$\Psi = ag(\zeta)f(\eta),$$

где ζ является функцией лишь от x или y , а η — функция от x и y .

3. Наиболее ограниченным является произведение

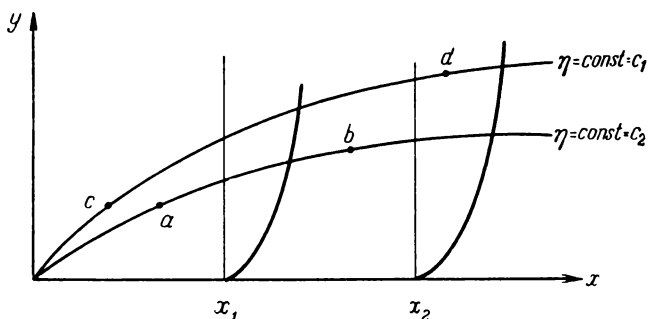
$$\Psi = Bf(\eta),$$

где $g(\zeta) = B = \text{const}$ и не зависит ни от x , ни от y , а η — функция x и y .

Более ограниченные результаты (такие, как ζ — функция только от y и η — функция только от x или $g = \text{const}$ и η — функция только от x) означают, что в первоначальных координатах x и y или переменные разделены, или решение тривиально; эти случаи не требуют рассмотрения.

Исследование показывает, что случай 3 выражает простое свойство симметрии. Действительно, если

считать, что решение можно получить в виде зависимости лишь от η , то, следовательно, точки с постоянными η будут иметь одинаковое решение. Таким образом, две точки с одинаковыми значениями η могут моделировать друг друга, и мы имеем внутреннее подобие, как и предполагалось. Например, в задаче Блазиуса для ламинарного несжимаемого пограничного слоя на плоской пластине линии постоянных η — параболы, проходящие через начало координат; свойства симметрии показаны на фиг. 4.16. Как видно из



Ф и г. 4.16.

фиг. 4.16, формулировка задачи Блазиуса в координатах η позволяет использовать измерение скорости при одном значении x для предсказания (или моделирования) скорости при любом другом значении x .

Так как $\bar{u} = \bar{u}(\eta)$, то

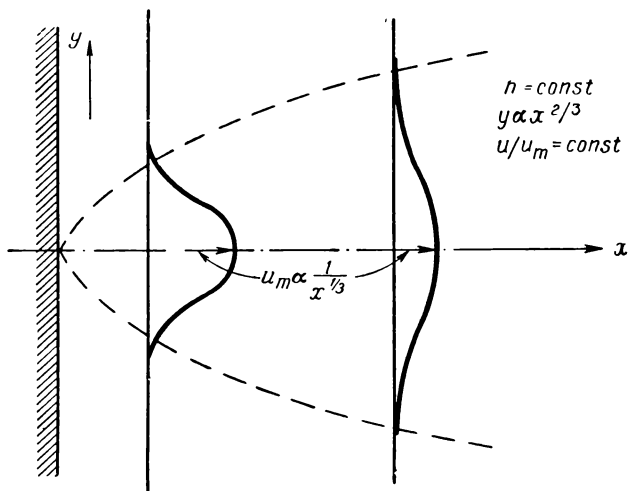
$$\bar{u}(c) = \bar{u}(d), \quad \bar{u}(a) = \bar{u}(b) \text{ и т. д.}$$

Заметим, что симметрия зависит не от x , y , а от постоянства η . Профили скорости при x_1 и x_2 подобны, т. е. величины $\bar{u}$ для данного η одинаковы.

Симметрия одномерная (плоская) и переменные типа η в случае 3 можно назвать *одномерными переменными подобия* или *однородными переменными*.

В случае 2, иллюстрированном примером 4.15, в котором дается решение для ламинарной струи, все

еще сохраняется свойство симметрии, но оно менее общее. В некотором смысле это сопоставимо с правилом подобия околосзвукового потока, полученным в примере 4.12, т. е. подобию соответствует не постоянная величина, а весовая функция, в данном случае $g(x)$. Свойство симметрии решения для ламинарной струи иллюстрируется на фиг. 4.17.



Ф и г. 4.17.

Случай 1 вообще не обладает свойством симметрии; тем не менее он может дать решение для существенно более общих граничных условий, чем случаи 2 или 3, до сих пор ограниченные задачами, в которых отсутствует характеристическая длина в одной из первоначальных координат. Большинство точных решений уравнений пограничного слоя Прандтля относится к случаю 2 или 3. Однако относительно мало исследованный случай может привести к точным решениям при более общих граничных условиях.

Следует подчеркнуть, что нахождение всех возможных подобных решений для данного дифференциального уравнения отнюдь не просто. Ряд авторов,

утверждавших, что это можно сделать для уравнений пограничного слоя Прандтля, только впоследствии поняли, что в действительности они не нашли указанного решения. Для этого имеются две важные причины. Во-первых, в вышеизложенной методике имеется произвол: 1) в определении перехода к новым координатам, т. е. в определении ξ и η , и 2) в определении вида разделения переменных. Из результатов решения, подобных решению примера 4.15, можно сделать выводы лишь о том, что при принятом методе преобразования переменных находятся такие координаты, которые позволяют представить переменную в виде произведения. Другие преобразования могут привести к новым переменным подобия, и вид разделения переменных может быть иным. Действительно, известны примеры, в которых для разделения переменных функцию представляют в виде суммы, но такие примеры редки. Первое замечание применимо равным образом и к методам преобразования Моргана [35], так как и там используется такое же преобразование.

Вторая причина, по которой нельзя найти все возможные переменные, лучше всего иллюстрируется примерами поиска таких переменных. В случае правильно поставленной задачи записывается полное граничное условие и принимается, что существует лишь одно решение. При таких обстоятельствах с помощью данного преобразования можно найти лишь одну переменную подобия (или вообще не найти), так как другие варианты противоречат существованию единственного решения (исключая, конечно, функционально зависимые преобразования, например от η к η^2). Однако, чтобы найти переменные подобия данного уравнения для установления числа условий подобия и (или) нахождения решения следует исключить некоторые или все граничные условия. Для любого принятого преобразования переменных можно найти бесконечное число различных переменных подобия. Последнее замечание относится к преобразованию типа $\eta = ay/\gamma(x)$ в уравнении пограничного слоя, использующему решение в виде произведения. Из примечания, приведенного на стр. 253, следует,

что уравнения пограничного слоя удовлетворяются при подстановке η в виде

$$\eta = \frac{ay}{(ax + b)^p},$$

где p — произвольная величина, связанная с константами разделения c_1 и c_3 необходимых дифференциальных уравнений для γ и g соотношением

$$p = \frac{1}{1 + (c_1/c_3)}.$$

Таким образом, имеется бесконечное число видов η , при которых возможно разделение переменных уравнения (4.108). Уравнения для γ и g относительно просты для пограничного слоя, но в других случаях они могут быть и весьма сложными.

Как следует из предыдущих замечаний, особый вид подходящей переменной подобия зависит как от граничных условий, так и от уравнений. Действительно, во всех трех предыдущих примерах вид переменной подобия подбирается из граничных условий или интуитивно вначале или позднее на основании решений. Возможность нахождения решения соотношения или условия подобия в зависимости от переменной подобия для данного дифференциального уравнения существенно определяется граничными условиями. Это видно из условия (4.87). Рассмотрение условий интегрирования также показывает, что если граничные условия нельзя выразить в зависимости только от переменной подобия η , то одна из первоначальных координат x или y должна войти в пределы интегрирования и нельзя получить решение только в функции от η . Иногда можно найти решение в виде функции от η и весовой функции $g(x)$, но это, по-видимому, маловероятно. Более обещающий подход принят Гёртлером [16], который применил метод разделения координат для сведения задач пограничного слоя в потоке вязкой жидкости к разложению в ряд только по одной из двух переменных. Свойства сходимости разделенных переменных во многих случаях определено

лучше свойств, полученных при использовании прямоугольных координат. Кроме того, решения группируются в классы, которые с помощью высокоскоростных вычислительных машин можно представить в виде таблиц, что позволяет легко получить очень точные решения при весьма произвольных граничных условиях. Подробности этого метода выходят за рамки этой книги; интересующихся отсылаем к работе Гёртлера [16] и указанной в ней литературе. Здесь же мы лишь отметим, что использование идеи разделения координат действительно дает важные преимущества, которые, по-видимому, не использованы еще полностью в фракционном анализе и при решении нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

Следует сделать дополнительно несколько замечаний относительно хорошей работы Моргана [35]. Следуя предположению Майкла, Морган детально исследовал зависимость между преобразованиями основного уравнения с точки зрения теории групп Ли (непрерывные преобразования переменных по одному параметру). На основе теории групп и некоторых весьма оригинальных доказательств Моргану удалось показать, что свойства подобия дифференциального уравнения произвольного порядка с произвольным числом независимых переменных по существу тождественны инвариантности при преобразовании переменных. Кроме того, используя эти методы, Морган нашел способ определения переменных подобия без необходимости преобразования переменных, что, как уже указывалось, может быть очень утомительным и сложным, если даже в принципе методика весьма проста. В рецензии на статью Хансена [17] Морган привел отличный пример для иллюстрации эффективности метода.

Полное описание методов Моргана выходит за рамки этой книги ввиду математической сложности. Читателю, интересующемуся исследованиями переменных подобия и разделения координат в более сложных случаях, следует обратиться к оригинальным работам Моргана [35].

4.11. Основные выводы

а. Классификация видов подобия; информация, получаемая из фракционного анализа основных уравнений

В данной главе рассмотрены три различных вида подобия¹⁾. Первый из них — подобие, основанное на постоянных значениях параметров; оно представляет случай внешнего подобия двух систем одного класса и может быть найдено при соответствующей нормализации основных уравнений и граничных условий. Второй вид эквивалентен снижению числа независимых переменных и основан на постоянных значениях новых переменных. Он представляет чисто внутреннее подобие, связывающее две точки внутри одной системы рассматриваемого класса. Третий вид подобия основан на постоянных значениях естественной координаты, объединяющей параметры и переменные, что исключает один или более параметров. Это эквивалентно введению единиц измерения, основанных на параметрах самой системы. Третий вид подобия часто включает также и первый вид и может применяться для компенсации изменений величины параметров изменения или величины первоначальных переменных. Таким образом, создаются строгие основы для искаженных моделей и обеспечивается получение свойств подобия, которые не могут быть найдены при рассмотрении только параметров. Эти соотношения и сопутствующие им преобразования основных уравнений обеспечивают более общую и более унифицированную картину подобия, чем изучение одних лишь параметров.

Все три вида подобия можно вывести из нормализованных основных уравнений и граничных условий без решения этих уравнений.

Нормализация основных уравнений и граничных условий позволяет получить большое количество информации. Этот процесс включает определение

¹⁾ Термин «подобие» используется в этом разделе в широком смысле, включая законы моделирования, правила подобия, аналоги и т. д.

множества основных безразмерных параметров, которые столь же точны и корректны, как и основные уравнения и граничные условия. Основные параметры, найденные таким путем, почти всегда полезны, и их можно преобразовать так, чтобы они непосредственно представляли отношение величин основных параметров задачи, если имеется достаточная информация. Однако при этом не получают параметры стандартного вида.

Использование информации о величинах позволяет вывести приближенные решения и условия подобия. Таким образом, получается критерий, показывающий, когда можно пренебречь одним или более параметром в данном соотношении. Однако все методы, основанные на анализе величины параметров, являются более тонкими и более сложными, нежели методы подобия, основанные на полных уравнениях и граничных условиях. Следует провести четкое различие между условиями подобия, которые можно сделать такими же строгими и полными, как и уравнения и граничные условия, и методами теории приближений, для которых имеются лишь «относительно слабые правила». Применение теории приближений связано с использованием как многих пробных методов, так и некоторой информации об общем виде ожидаемого решения.

Использование имеющейся информации и предположений, а затем проверка результата сравнением с полным уравнением и физическими данными являются важными этапами исследовательской работы. Действительно, изучение порядка величин нормализованных уравнений, хотя и лишено строгости и изящества, является наилучшим средством нахождения характеристических решений в широкой области изменения параметров и приводит к эффективным методам пограничного слоя и разложения в ряды.

Эти два метода используются при решении нелинейных уравнений. По существу данные о порядке величин членов образуют твердую основу для объединения физической информации и математических ме-

тодов, что дает максимальную информацию в задачах, полное решение которых найти нельзя.

Изучение видов основных уравнений и граничных условий также может быть чрезвычайно полезным, даже если решение уравнений не проводится. Такие свойства, как однородность и линейность уравнений, соотношения зависимости и естественные комбинации физических свойств, константы и граничные условия, могут непосредственно использоваться и быть весьма эффективными. Соотношения зависимости и комбинации физических свойств и констант с граничными условиями позволяют автоматически решить многие вопросы относительно числа требуемых независимых безразмерных параметров.

Изучение различных комбинаций параметров (путем последовательной нормализации различных членов) приводит к построению простейших и весьма показательных параметров для различных целей. Если уравнения однородны и в граничные условия не входят безразмерные параметры, то можно применить соответствующую нормализацию для установления соотношения, не зависящего от граничных условий. В этом случае при наличии в уравнениях только одного параметра можно произвести оценку собственных значений или характеристик. Если уравнения линейны, эти оценки в свою очередь с помощью принципа суперпозиции можно использовать для получения дальнейших оценок характеристик системы с вынуждающими функциями или неоднородными граничными условиями. Общее поведение систем со сложными граничными условиями в таких случаях можно оценить быстро и эффективно, не проводя трудоемких расчетов.

Изучение вида уравнения и граничных условий в зависимости от преобразований переменных приводит к естественным координатам и координатам подобия, которые служат основой построения искаженных моделей. Переменные подобия являются также основой точных решений при некоторых очень простых граничных условиях. Использование естественных координат весьма эффективно при получении правил

подобия и обобщенных зависимостей, а также облегчает понимание физических процессов. Возрастающая общность при использовании таких координат может иногда обеспечить основу для установления условий подобия, общих соотношений и упрощения экспериментальных исследований в случаях, когда изучение одних лишь параметров не приводит к полезным результатам. Такие методы уже использовались в аэродинамике при решении некоторых задач, но, по-видимому, не нашли еще широкого распространения в других областях.

В таких областях, как гидродинамика, где трудно получить точное решение полных основных уравнений, различные, только что указанные методы дают первичную основу для расчетов. Вероятно, следует признать, что все (за исключением некоторых) существующие решения в гидродинамике связаны с одним или несколькими рассмотренными методами.

б. Различные точки зрения. Соотношения между инвариантностью, преобразованиями и подобием

Обзор вышеизложенных методов показывает, что все полученные результаты по подобию можно рассматривать в одном из двух эквивалентных аспектов. Во-первых, как средство описания двух или более различных явлений с помощью единой системы уравнений и соответствующих граничных условий. Во-вторых, как инвариантность при некотором виде преобразования координат. Таким образом, можно сказать, что внешнее подобие в анализе размерностей можно выразить путем сведения уравнений и граничных условий в соответствующей точке каждой из двух определенных задач одного класса к одному нормализованному уравнению с постоянными значениями параметров и переменных. Это аналогично свойству инвариантности уравнений в данной точке системы при переходе от параметров одной системы к параметрам другой системы в нормализованном уравнении. Таким образом, это можно рассматривать либо как сведение всех задач данного класса к единому

уравнению, либо как постоянство в ходе преобразования значений основных параметров. Эти два процесса эквивалентны. Если подстановка значений из одной задачи в нормализованное уравнение дает тот же результат, что и подстановка их из другой, то обе задачи можно описать одинаковым нормализованным уравнением; разница лишь в физическом понимании.

Аналогично симметрию, возникающую вследствие самоподобия (см. разд. 4.10б), можно рассматривать либо как инвариантность при преобразовании определенных координат (что показано Морганом), либо как сведение всех задач данного класса с определенным типом граничного условия к одному простому уравнению в тех же координатах. В конечном счете естественные координаты, рассмотренные в разд. 4.10а, показывают, что задачи с различными величинами параметров можно привести к тому же уравнению, если можно найти такой переход к новым переменным, при котором в уравнениях и граничных условиях исключаются параметры. Это также можно рассматривать как инвариантность при преобразовании координат с данными граничными условиями в естественных координатах. Многие идеи такого рода были высказаны Биркгофом [5]. Он придерживался точки зрения инвариантности и использовал теорию групп. В большинстве случаев в данной книге применялся метод сведения к единому уравнению, так как в настоящее время многие инженеры не знакомы с формальными операциями теории групп. Данный метод, несомненно, менее изящен, чем теория групп, и в некоторых случаях становится еще более громоздким, но, по-видимому, его легче понять. Вышеприведенное обсуждение указывает на различие в подходах, но не в сути дела.

Каждый из методов, изложенных в разд. 4.11а, рассматривается с различных точек зрения, и это, как уже отмечалось ранее, иногда приводит к различным результатам. Например, естественные координаты можно рассматривать как средство обобщения опытных данных, но постоянство величин в естественных координатах можно, несколько изменив рассуждения,

использовать для нахождения законов искаженного моделирования. С помощью полных уравнений можно получить правила подобия (пример 4.12), а с другой стороны, неполные уравнения позволяют установить условия, необходимые для существования подобия, и затем проверить полученные данные (пример 4.6). Путем сравнения порядка величин известных членов можно найти, какими членами следует пренебречь, а изучая величины, можно попытаться выяснить, какие данные необходимы для определения порядка величины данных членов в неоднородном уравнении.

в. Заключительные замечания

Как видно из примеров, приведенных в этой главе, большое количество информации различного рода можно получить из основных уравнений и граничных условий, не решая их. Была сделана попытка показать, что получаемая информация и уверенность в ее правильности увеличиваются, если систематизировать эти процессы. Можно надеяться, что приведенные определения и систематизация помогут исследователям в выборе вида метода, который даст возможность получать необходимую информацию и, следовательно, расширится использование более эффективных методов. Прямое сравнение методов, рассмотренных в предыдущих главах, с методами, основанными на систематическом использовании основных уравнений и граничных условий, будет проведено в гл. 5.

Выражая надежду на то, что данное рассмотрение методов, основанных на использовании основных уравнений, более детально и всесторонне, чем ранее известные, автор хотел бы подчеркнуть, что оно ни в коей мере не является окончательным или полным. Количество примеров и даже типов задач, которые можно решить с помощью такого рода методики, столь велико, что оказалось возможным рассмотреть лишь малую их долю. Вполне вероятно, что пропущены некоторые категории, хотя делалась попытка проиллюстрировать различные основные типы задач. Кроме того, имеются явные пробелы в математиче-

ском обосновании методов. Это относится не только к теоремам существования и единственности для специфических классов уравнений и граничных условий, но также к дополнительным теоремам теории приближений и более точным правилам для анализа неоднородных процессов. В этой книге имеется много мест, где возможно развитие, поскольку здесь рассмотрены лишь основы подхода. Вот некоторые примеры: использование метода естественных координат как основы получения искаженных моделей; развитие исследований решений нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных путем использования разделения координат при более общих граничных условиях, чем те, которые рассматривались¹⁾; более систематизированное исследование других способов преобразований для разделения переменных и получения переменных подобия; применение одновременно идеи пограничного слоя и универсализации как эффективного средства исследования особых точек. Наконец, быстро развивающаяся теория интегральных уравнений и интегральных преобразований, которая почти совсем не рассматривается здесь, может быть успешно использована во фракционном анализе. Возможности, заложенные в методах, основанных на использовании основных уравнений, ни в коей мере не исчерпаны. Напротив, здесь положено лишь начало такой систематизации.

В заключительной главе проводится сравнение различных методов.

¹⁾ Один из примеров такой методики см. в работе Гёртлера [16].

КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ И СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ**5.1. Введение**

В предыдущих четырех главах было представлено несколько методов решения задач фракционного анализа, в том числе метод π -теоремы, метод подобия и метод с использованием основных уравнений. Последний метод можно разделить по крайней мере на две части: использование общих основных уравнений и использование частных основных дифференциальных уравнений с граничными условиями. В обоих случаях используются либо все уравнения, либо часть их. Так как использование дифференциальных уравнений включает все особенности общих и алгебраических основных уравнений, а также дополнительный материал, здесь достаточно сравнить три следующих метода: метод π -теоремы, метод подобия и метод, основанный на использовании основных уравнений.

Для этого вспомним основные этапы метода решения, виды полученной информации и объем информации, необходимой для каждого метода.

5.2. Краткое изложение методов**а. π -теорема**

В этом методе необходимые данные — это список существенных физических величин, включая одну зависимую величину и достаточное число независимых физических величин. Метод, в частности, ясно показывает, чего можно достичь, используя безразмерные комплексы для уменьшения числа независимых параметров. Лишь с помощью этого метода можно весьма эффективно рассмотреть размерности, однородность

размерностей и другие основные понятия, используемые при математическом описании физических процессов. Метод дает список основных комплексов π в чисто произвольной форме, поскольку он является одним из методов фракционного анализа. Лишь в редких случаях можно получить больше информации.

Метод заключается в составлении на основе каких-либо соображений списка наиболее существенных для процесса величин. Применение π -теоремы ведет непосредственно к ряду основных комплексов π . Для применения π -теоремы к списку вторичных величин требуются как формальные алгебраические методы, так и эвристические методы. Математические основы π -теоремы выяснены полностью. Однако сам метод не содержит средств для нахождения или проверки списка необходимых физических величин. Для этих целей следует использовать другие источники, включая в случае необходимости даже физическую интуицию. Эти формальные операции связаны с небольшими, но заметными затратами труда; из области математики для понимания π -теоремы существенна лишь фундаментальная теорема алгебры.

6. Метод подобия

В этом методе необходимыми данными являются действующие силы, а иногда также энергии и физические свойства, которые влияют на зависимую переменную рассматриваемой задачи. Эти силы и энергии могут быть найдены по интуиции, при анализе основных уравнений или с помощью оценок, вытекающих из схематического представления явления. В некоторых случаях возникают трудные вопросы взаимосвязи между переменными. В общем эти вопросы можно решить лишь при тщательном изучении основных уравнений. Метод дает список основных комплексов π . Кроме того, он раскрывает физический смысл каждого комплекса, а также качественно указывает влияние изменений в величине каждого комплекса π .

Метод подобия включает следующие этапы:
1) установление членов, содержащих силы и энергии;

2) определение членов, содержащих энергии, если таковые есть, которые не зависят от членов, содержащих силы; 3) составление отношений необходимого числа независимых сил, энергий и свойств и представление зависимой величины в безразмерном виде как функции независимых безразмерных отношений. В некоторых случаях необходимо также использовать отношение физических свойств, чтобы выразить связь энергий различных видов через уравнение состояния или уравнения переноса. Обычно это является тонкой, а иногда и трудной задачей. Использование метода подобия связано с небольшими затратами труда, а математические операции относительно просты. Точность и эффективность метода можно существенно улучшить, используя диаграммы, схемы, термодинамические соотношения, контрольные объемы и т. п. Такие схемы не только облегчают понимание, но и являются прямыми средствами получения физической информации из общей системы основных уравнений. Метод дает хорошую основу для систематизации и последовательного улучшения стандартных видов основных параметров. Он часто оказывается полезным как основа простых физических объяснений явлений.

в. Использование основных уравнений

Обычно начинают с полной системы основных уравнений и соответствующих граничных условий.

Использование основных уравнений для фракционного анализа в этой книге не основано на одном методе или логическом приеме. Рассмотрено три различных вида преобразований.

Первым видом преобразования является нормализация переменных или преобразование уравнений к безразмерному стандартному виду. При соблюдении условий, указанных в разд. 4.3, нормализация ведет к строгому решению ряда задач, включая 1) каноническую задачу анализа размерностей; 2) правила, определяющие внешнее подобие; 3) обычные законы моделирования. По существу все эти результаты по-

лучаются из рассмотрения параметров нормализованных уравнений и граничных условий¹⁾. Если величины переменных могут быть заданы, метод нормализации дает основу для выражения отношений сил и энергий (см. гл. 3). Полученные параметры зависят от граничных условий, размеров системы и физических постоянных. Эти параметры не обязательно должны быть в произвольном стандартном виде; однако обычно они весьма полезны и дают основу для обобщения зависимостей.

Структура нормализованных основных уравнений приводит к двум другим видам преобразований: отыскание *естественных координат* путем сокращения числа параметров и уменьшение числа независимых координат путем введения новых переменных.

Естественные координаты позволяют выразить правила подобия, которые справедливы не только для двух задач данного класса с одинаковым значением параметров, но также для задач с любыми значениями параметров, для которых можно провести нормализацию. Это создает основу для законов обычного и искаженного моделирования; применение естественных координат может обеспечить установление строгих условий моделирования в случаях, когда это нельзя сделать, рассматривая одни лишь параметры²⁾.

Переменные подобия приводят к точным решениям при ограниченных частных видах граничных условий, когда переменные подобия дают основу для чисто *внутреннего подобия* и позволяют моделировать поведение системы в одной точке поведением ее в другой точке. Если переменные подобия могут быть

¹⁾ Биркгоф отмечает, что результаты в задачах указанных трех типов основаны на предположениях; однако он приводит пример для вязкого течения, когда теоремы существования решения уравнений неизвестны. Здесь рассматриваются случаи, когда уравнения являются полными и корректными Седов [46] и Смит [48] также утверждают, что граничные условия можно сделать строгими, но не точными.

²⁾ См. примеры 4.11 и 4.12 в разд 4 10.

выражены в естественных координатах, появляются более веские основания для подобия и обобщения. Они связывают точку в любой системе данного класса со всеми другими соответствующими точками в задачах этого класса.

Рассмотрение информации, содержащейся в нормализованных основных уравнениях, также приводит к теории приближений; это в свою очередь дает основу для поисков во многих случаях не только приближенных основных уравнений, но также приближенных правил подобия и законов моделирования. Рассмотрение основ теории приближения также обеспечивает информацию о строгости методов подобия, хотя в большинстве случаев теория приближений является лишь пробным методом. Теория приближений, кроме того, устанавливает связь между нормализацией и более эффективными математическими методами: теорией пограничного слоя, разложением параметров в ряды и универсализацией.

Вся такого рода информация может быть получена на основе принципа инвариантности общих уравнений и граничных условий или идеи о преобразовании координат. Эти методы можно также использовать, когда полная система уравнений или соответствующие граничные условия не известны. Количество необходимых сведений и их точность зависят от физической полноты уравнений и от знания математических условий для установления существования единственности решения. Указанные методы дают основу для решения задачи, при которой опытные данные иногда могут заменять недостающее математическое описание процесса. Более того, методы подобия при отсутствии полных или корректных уравнений часто указывают на то, какие дополнительные данные необходимы для обеспечения полноты системы уравнений, и, следовательно, указывают направление для дальнейших теоретических и опытных исследований. Даже если полные и корректные уравнения неизвестны, можно использовать пробные методы и проверить результаты.

5.3. Сравнение методов

Полезно сравнить рассмотренные методы по следующим пяти признакам:

- 1) эффективность — количество получаемой информации;
- 2) строгость — точность, присущая методу;
- 3) точность — процент правильных ответов, получаемых на практике;
- 4) простота — количество труда и знаний, необходимых при использовании метода;
- 5) исходная информация — объем информации, требуемой при использовании метода.

а. Эффективность

Сравнение общего количества информации в выводах разд. 5.2 и в тексте гл. 2—4 показывает, что использование основных уравнений является более эффективным методом по сравнению с любым другим методом. Использование основных дифференциальных уравнений и граничных условий не только обеспечивает всю информацию, которую можно найти другими методами, но и дает возможность рассмотреть следующие вопросы, которые не могут быть исследованы другими методами:

- 1) установление во многих случаях строгих основ для получения системы независимых безразмерных основных параметров, а также других зависимых от них соотношений;
- 2) использование особых свойств основных уравнений для улучшения обобщенных соотношений (однородность зависимых переменных приводит к соотношениям, независимым от граничных условий, и т. д.);
- 3) изучение детальных соотношений зависимости между параметрами и переменными в системе уравнений для данной задачи;
- 4) определение возможности объединения двух или более обычных основных параметров в меньшее число комплексов для данной задачи;

- 5) построение основных параметров, которые отражают в конкретной количественной форме физические отношения в противоположность обычному выражению параметров в произвольной форме;
- 6) нахождение внутренних свойств подобия и точных решений для частных граничных условий, основанных на переменных подобия;
- 7) использование понятия подобия в теории искаженного моделирования путем компенсации в естественных координатах изменения параметров изменениями переменных;
- 8) установление основ решений и моделирования путем использования математических и физических аналогий;
- 9) вывод приближенных основных уравнений и основанных на них приближенных законов моделирования, а также установление связи их с математическими методами, позволяющими использовать улучшение приближения.

Этот список можно продолжить, но дальнейшие комментарии о преимуществах использования основных уравнений по сравнению с более простыми методами кажутся излишними. Сравнение метода подобия и анализа размерностей показывает, что возможности этих методов, грубо говоря, одинаковы, но метод подобия, возможно, обладает некоторым преимуществом. Именно метод подобия дает информацию о физическом смысле найденных комплексов π и о влиянии качественных изменений в этих комплексах, что нельзя непосредственно получить на основе анализа размерностей. Кроме того, метод подобия можно существенно расширить, дополняя его сведениями, полученными из основных общих уравнений.

Эти замечания не являются неожиданными. Все они следуют из факта, утверждавшегося несколько раз: невозможно вообще получить больше физической информации, чем ее содержится в методе анализа. Следовательно, если имеется надежда получить максимальное количество выходной информации, то ясно,

что необходимо стараться использовать всю имеющуюся информацию. Это в свою очередь предполагает использование тщательно выполненных диаграмм и наиболее подробных и полных основных уравнений.

Реальные трудности в применении метода π -теоремы (с точки зрения его возможностей) могут быть в том, что он не позволяет прямым и логическим путем использовать какую-либо физическую информацию, кроме списка зависимых величин. Подобные замечания в меньшей мере относятся и к методу подобия; в этом случае все же имеются средства прямого использования основных общих уравнений, что является существенным преимуществом¹⁾. Следует повторить в этой связи предыдущие замечания относительно величин, используемых для построения чисел π . Для получения лучшего результата методом фракционного анализа нецелесообразно или даже неверно образовывать числа π из всех величин задачи, которые могут казаться существенными. Наоборот, особенно важно использовать те специфические виды параметров, которые наиболее точно определяют физические эффекты. Рассмотрим, например, задачу, связанную с пограничным слоем в примере 4.5. Решение Прандтля основывается на учете различия между двумя длинами δ и L . Смысл анализа будет потерян, если не делать различия между этими длинами. (Кроме того, учет такого различия является ключом к решению и признан одной из главных основ успеха в теории гидромеханики в XX веке.) Без использования количественных данных, содержащихся в основных уравнениях, такие решения трудно или вообще невозможно провести.

6. Строгость

Замечания, вытекающие из сравнения, проведенного выше, в основном справедливы и для строгости.

¹⁾ Биркгоф [5] отметил, что метод Бэкингема ограничен линейным преобразованием переменных, тогда как использование основных уравнений позволяет применять и другие виды преобразований, например аффинные преобразования и конформные отображения. Эта, несомненно, правильная постановка вопроса позволяет расширить понятие подобия, данное в разд. 4.10

Из дифференциальных уравнений можно получить в той же степени строгие решения, в какой строгими являются сами уравнения и математические и физические знания о них. С другой стороны, в методе π -теоремы встречаются исключения, даже если список величин составлен правильно. Действительно, по-видимому, следует отметить, что список величин, существенных для решения с помощью π -теоремы, и список сил и энергий, используемых в методе подобия, являются правдоподобными, но не строгими. Они, в частности, могут содержать ошибки, которые трудно установить без дополнительных исследований. Без сомнения, некоторые из основных дифференциальных уравнений, которые мы используем, в ряде задач некорректны. Однако именно этот вопрос подвергается тщательному исследованию многими авторами и поэтому вызывает наименьшее сомнение. По этой причине накопленные наукой эмпирические данные стимулируют дальнейшее развитие в этом направлении; результаты подвержены непрерывному и контролируемому улучшению.

в. Точность

Под точностью мы понимаем долю действительно правильных получаемых решений в отличие от строгости методов, использованных для нахождения этих решений.

В течение ряда лет автор предлагал аспирантам первого года обучения задачи для решения при помощи каждого из трех рассмотренных здесь методов. Были получены весьма интересные результаты относительно точности, хотя это не являлось целью заданий.

Используя π -теорему, большинство аспирантов было неспособно правильно решить задачи фракционного анализа. Для тех задач, когда ответ не был известен аспирантам или не легко было найти его в литературе, процент правильных¹⁾ ответов в нахож-

¹⁾ Слово «правильный» означает здесь получение минимального количества величин π , включающих соответствующие физические величины в любой форме.

дении списка основных безразмерных величин π составлял 10—30%. Процент правильных ответов при использовании метода подобия составил 25—60%, а при использовании основных дифференциальных уравнений 70—90%. Результаты, найденные студентами при использовании π -теоремы, неизменно давали большой разброс для числа найденных комплексов. На графике частоты появления числа комплексов, полученном аспирантами, не было заметно преобладания какого-либо определенного числа. Графики были типично нерегулярными, случайными и демонстрировали, таким образом, невозможность устойчивого воспроизведения решения задачи при помощи этой методики, а не какую-либо устойчивую ошибку в решении. Возможно, что на эти выводы повлияло предубеждение, но, по-видимому, это маловероятно по трем причинам: 1) после первых же примеров подобных ошибок аспирантов была сделана попытка исключить мнение автора относительно π -теоремы в течение двух последующих лет; при этом никакого заметного изменения не произошло; 2) большинство студентов использовало только π -теорему на предыдущих курсах и некоторые, несомненно, были уверены в ее преимуществах; 3) подобные результаты сообщались автору преподавателями некоторых других университетов; к сожалению, в этих случаях результаты не обрабатывались статистически.

Полезно и дальнейшее обсуждение возможных причин таких результатов по точности для того, чтобы сравнить рациональность различных методов. При поверхностном знакомстве методы подобия и анализа размерностей кажутся в основном точными, хотя здесь часто встречаются некоторые сложные исключения. Однако изучение многих опубликованных примеров показывает, что они не являются новыми решениями при исследовании данной проблемы, скорее это просто формальное представление ранее известной из опытов информации или информации, полученной из более обоснованной теории. Изучение литературы дает относительно мало новых задач фракционного анализа, решенных с помощью π -теоремы. Кроме того,

как уже указывалось, реальные трудности использования π -теоремы для фракционного анализа представляются не просто встречающимися случайно исключениями, а являются следствием неспособности этого метода обеспечить какие-либо средства для использования имеющейся полной физической информации. Недостаточную точность метода можно также увидеть, анализируя вопросы, с которыми сталкиваются при использовании π -теоремы для фракционного анализа. В соответствии с π -теоремой некоторые исследователи непосредственно составляют список вторичных величин, представляющих параметры. Исследователь поэтому пытается ответить на вопрос: «Каковы определяющие физические величины для данной задачи?» Например, в примере 2.2 (ламинарное движение в трубе) он должен выяснить, действительно ли в этой задаче вязкость действует независимо от плотности или следует рассматривать в списке физических величин лишь их отношение, т. е. кинематическую вязкость? В примере 2.3 (при анализе теплообменников) возникает следующий вопрос: «Входят ли теплоемкость и скорость потока в условия задачи независимо или их влияние следует представить совместно в виде произведения или отношения?» Как было показано в примерах, такой тип вопроса не зависит от способности изменить значение одной из этих физических величин и поддерживать неизменными другие, но, напротив, зависит от частной формы, в которой комбинируются параметры в отдельной задаче. *Следовательно, на эти вопросы можно уверенно ответить, лишь когда известна форма соотношений, т. е. уравнения, описывающие явление.*

Таким образом, при анализе с использованием π -теоремы имеются два пути. В одном из них предполагается, что о форме функциональных связей между переменными и параметрами ничего не известно. Так было до последнего времени ¹⁾ и, возможно, еще, что

¹⁾ Во время подготовки рукописи этой книги на английском языке вышла в свет книга Л. И. Седова [46]; в ней изложена явно другая точка зрения.

и сейчас это распространенный взгляд в литературе на английском языке. Если ничего не известно о *форме* связи между переменными и параметрами, то в большинстве случаев нет оснований ожидать даже от способного исследователя ответа на вопросы, подобные тем, которые были поставлены выше. Таким образом, при использовании лишь π -теоремы ответы на такие вопросы не будут входить в сферу нашего рассмотрения так же, как и подробности уже имеющихся знаний; они являются существенно «непознаваемыми».

Читатель может проверить свое отношение к этим вопросам, сравнив решения задачи о колебании балки из примеров 2.6 и 4.3. Пусть он ответит на вопрос: «Можно ли при рассмотрении примера 2.6 установить, что коэффициент Пуассона не связан с поперечными колебаниями балок при небольших прогибах? Как преобразовать *пять групп* примера 2.6 в *одну более сильную группу* примера 4.3?» «Как влияет на метод обобщения переход от однородных граничных условий к неоднородным?» (Ср. пример 4.4.) При работе со студентами в ряде случаев исследовалась задача о колебании балки в общем виде; студенты обычно получали ответы, аналогичные ответу в примере 2.6 (либо такого же смысла), используя π -теорему. С другой стороны, большинство студентов, используя основные уравнения, в конечном счете находили одну группу примера 4.6 и делали соответствующие выводы о подобии, хотя многие из них не могли довести выводы хотя бы об одной группе до логических заключений.

Другой путь применения π -теоремы недавно указал Седов [32*]. При этом используются основные уравнения и граничные условия для нахождения списка вторичных величин для π -теоремы (иногда с учетом дополнительных свойств, например линейности уравнений). Как показал Седов, такой способ определенно эффективнее, чем использование одной лишь π -теоремы, но он имеет, как считает автор, серьезный недостаток. Если известны основные уравнения и граничные условия, то список вторичных величин, полу-

ченный из них, точен лишь настолько, насколько уравнения являются полными и корректными; следовательно, эта полнота и корректность подлежат исследованию. Более важно то, что если уравнения и граничные условия известны, то π -теорема вообще не нужна; методы, обсуждавшиеся в гл. 4, обеспечивают не только результаты, получаемые с использованием π -теоремы, но и многие другие.

В методе подобия ситуация несколько лучше, чем в случае метода π -теоремы. В примере 2.2 у исследователя возникает вопрос: «Важна ли сила инерции в решении данной задачи?» В примере 2.3 он должен ответить на вопрос: «Какой тепловой поток важен для определения значения характерных зависимых переменных и какие величины характеризуют этот тепловой поток?» Вопросы такого рода еще трудны, но обычно решаются интуитивно в отличие от тех, которые возникают при использовании π -теоремы. Они связаны непосредственно с экспериментальным и теоретическим опытом исследователя и заставляют думать о соответствующих физических эффектах, а не о изолированных вторичных величинах. Вопросы независимости переменных могут быть весьма тонкими и трудными, но в случае необходимости в рамках метода подобия возможно найти простые основные уравнения сил и энергий для решения этой задачи.

При использовании основных уравнений большинство сложных вопросов решается простейшими методами. Несомненно, применение основных уравнений не гарантирует нас от ошибок; автор согласен со своим бывшим коллегой Нейманом, который утверждал, что нет ни одной системы, которую нельзя было бы испортить. Тем не менее чем строже проводить математические выкладки при использовании основных уравнений и граничных условий, тем меньше будет ошибок. Этот же вопрос можно рассматривать с другой точки зрения. Как справедливо подчеркивалось многими авторами, *одни лишь* математические операции анализа размерностей дают весьма мало; при анализе существенны ясное понимание и использование физического поведения системы. Непосредствен-

ное применение основных уравнений и граничных условий является методом, при котором используется наибольшее количество физической информации, содержащейся в научной литературе.

г. Простота

Из предыдущего обсуждения ясно, что наиболее простым методом является метод подобия, далее следует метод π -теоремы и наиболее сложным является метод с использованием основных уравнений. Эти замечания относятся к необходимой математической обработке и к количеству операций при решении данной задачи. Однако это сравнение не совсем правомерно в некотором смысле и требует дополнительного уточнения.

Хотя метод с использованием основных уравнений более сложен и содержит больше этапов для окончательного решения, не следует думать, что он всегда требует большего времени; напротив, чаще справедливо прямо противоположное. Так как метод подобия в некоторой степени и в еще большей степени использование π -теоремы дают ответы на относительно простые вопросы, то для получения необходимого ответа может потребоваться больше времени. При использовании основных уравнений сразу же применяется относительно формальный метод и, следовательно, необходимо значительно меньше времени на обдумывание необходимых этапов.

д. Исходная информация

По количеству необходимой информации методы подобия и анализа размерностей имеют преимущество, что отмечено выше. В ряде задач ясно, что нельзя записать одно дифференциальное уравнение с соответствующими граничными условиями или даже систему дифференциальных уравнений, которые бы точно описывали все наиболее важные явления, происходящие в изучаемой системе. Весьма часто нельзя с помощью теорем показать существование единствен-

ного решения для составленных систем уравнений и граничных условий.

Примерами таких случаев, когда нельзя составить полную систему уравнений, являются потоки в сложных аппаратах, например компрессорах и турбинах; существенно необратимые процессы (горение), где сложные частицы находятся в состоянии, весьма далеком от состояния местного равновесия. Имеется еще много других примеров. В таких случаях следует ограничиться более простыми, но менее эффективными методами анализа размерностей и подобия или просто здравым смыслом при попытке построить правила подобия для соотношений, описывающих явление.

Действительно, основным правилом, по-видимому, является то, что чем меньше мы знаем о математических моделях в данной системе, тем более простые методы обобщения следует применять. Так, например, в весьма сложных вопросах турбостроения можно относительно успешно использовать идеи геометрического подобия и отношения сил с основными общими уравнениями. При существенно необратимых процессах можно лишь математически установить определенные ограниченные свойства симметрии. Для отдельных биологических организмов можно лишь утверждать нечто вроде следующего: «процессы рождения млекопитающих в общем подобны».

Когда известны уравнения и граничные условия, но нет доказательств существования единственности решения, почти всегда имеет смысл использовать методы, основанные на применении уравнений. Ряд таких примеров предлагался в гл. 4; они показывают, что чем больше получено информации, тем больше оснований для прямого использования опытных данных и иногда обнаруживается даже информация о недостающих данных или теории. Основные уравнения вязкого потока жидкости относятся к этому классу. Действительно, так как эти уравнения неоднородны и точные решения получены лишь в нескольких случаях, и поскольку зависящие от параметров решения весьма общи и на них существенное влияние оказывают вопросы устойчивости, неудивительно, что

основные успехи гидромеханики в нашем столетии основывались на различных методах фракционного анализа дифференциальных уравнений. Таким образом мы находим основы для теории пограничного слоя, для методов, применяемых при испытании высокоскоростных самолетов, для построения подобных решений и ряда других результатов и методик, являющихся различными аспектами использования фракционного анализа основных дифференциальных уравнений и граничных условий. Эти методы и решения, несомненно, полезны, даже если единственность решения не доказана.

Следует снова подчеркнуть, что прямые опытные данные должны играть определенную роль, когда уравнения неоднородны и полного решения нельзя получить. Для эффективных действий в этих случаях необходимы некоторые знания или догадка об общем виде решения.

5.4. Заключительные замечания

а. Полезность различных методов

В табл. 5.1 представлены результаты сравнения трех методов. Если эти данные верны, то можно сделать важное заключение: с точки зрения фракционного анализа не следует использовать ни метод подобия, ни анализ размерностей, если имеются основные уравнения достаточно подробного вида. На современном уровне знаний это часто встречающийся случай в макроскопических технических системах.

Иногда имеется соблазн для уменьшения объема требуемой начальной информации использовать более простые методы. Анализ размерностей в некоторых случаях представляет такую возможность. Однако во фракционном анализе это не следует делать. Наиболее важно для технического и научного анализа не уменьшение входной информации, а увеличение выходной; последнее требует использования всей исходной информации.

Таблица 5.1

Сравнение трех методов фракционного анализа

Метод	Эффективность	Строгость	Точность	Простота	Исходная информация
Анализ размерностей	Слабая	Слабая	Слабая	Средняя	Слабая
Метод подобия	Средняя	Средняя	Средняя	Наибольшая	Средняя
Систематическое использование дифференциальных уравнений ¹⁾	Значительная по сравнению с другими методами	Значительно лучше, чем в других методах	Наибольшая	Значительная	Наибольшая

¹⁾ Сюда же относится и использование основных общих уравнений в смысле, рассмотренном в гл. 4.

Вспомнив, какое удивительное количество информации можно получить из относительно полных и подробных основных интегральных и (или) алгебраических уравнений и какое существенное количество сведений можно получить даже из весьма приближенных и неполных основных уравнений, можно сделать вывод, что последними следует пользоваться всякий раз, когда это возможно, при отсутствии дифференциальных уравнений и граничных условий. Эти уравнения после нормализации можно использовать в сочетании с методом подобия или с π -теоремой, как указывал Седов [46].

Проф. Кранделл рассматривает инженерный анализ как бы состоящим из трех уровней. Имея в виду известный афоризм лорда Кельвина о том, что о задаче известно мало до тех пор, пока нельзя выразить ее количественно, эти три уровня можно описать следующим образом. Первый — это размерностная структура, основанная в основном на качественном распознавании основных физических величин. Второй —

количественное размерное соотношение между физическими величинами. Третий — некоторый вид численного или аналитического полного решения. В этой системе можно видеть, что π -теорема и связанные с ней процедуры, а также метод подобия относятся к первой группе. Вывод правил подобия и законов моделирования из основных уравнений относится ко второй группе. Теория приближений перекрывает обе группы и связывает методы второй и третьей групп.

Кроме того, постепенно будут получены полные уравнения для разных случаев и решены сравнительно нетрудные задачи в различных областях науки. В этих условиях методы теории приближений и более строгие методы подобия будут становиться все более важными.

Так как никогда не будет достигнуто такое положение, когда для всех задач будут записаны полные и корректные основные уравнения, то всегда будут использоваться качественные методы π -теоремы и метод подобия. Следует иметь в виду, что они являются качественными в исследовательских задачах, где ситуация заранее не ясна. Любой результат, найденный этими методами, следует рассматривать с большой осторожностью до тех пор, пока полученные результаты не будут подтверждены экспериментально.

6. Советы преподавателям

Автор хорошо сознает, что выводы, сделанные в разд. 5.4а, не совпадают с выводами других авторов в этой области. Ряд авторов утверждает, что π -теорема — это начало и конец анализа размерностей, а некоторые авторы под анализом размерностей понимают нечто весьма близкое к тому, что в этой книге названо фракционным анализом. В подавляющем большинстве опубликованных примеров фракционного анализа используется π -теорема и очень мало пишут о методологии фракционного анализа, основанного на использовании основных уравнений. Некоторые авторы доходят до крайности, используя π -теорему для «проверки» результатов, полученных при решении

основных уравнений¹⁾. Во многих современных курсах по традиции излагается лишь π -теорема, а другие методы не упоминаются. Тем не менее если приведенные выше соображения верны или даже частично верны, то следует признать, что научная литература на английском языке слишком полагалась на одни лишь методы анализа размерностей и эти методы часто распространялись далее разумных пределов. Необходимо пересмотр полезности различных методов как в опубликованных работах, так и в учебниках.

Несомненно, что студенты старших курсов знакомы с основными уравнениями во многих областях науки и, конечно, могут разделить переменные с помощью соответствующих параметров, чтобы сделать их безразмерными. Они также, несомненно, способны понять метод подобия, который по сути своей проще, чем π -теорема. Автор надеется, что эта книга заставит некоторых преподавателей пересмотреть достоинства π -теоремы в своих лекциях или по крайней мере позволит включить в лекции и другие методы. Возможно, теперь преподаватели будут более часто отмечать значение метода нормализации.

в. Возможное дальнейшее развитие

Так как в данной книге рассматривается развитие и использование фракционного анализа как метода исследования, то следует сделать несколько замечаний и попытаться определить пути дальнейшего развития.

Использование π -теоремы чрезвычайно распространено в научной литературе. Кроме многочисленных статей, шесть книг на английском языке посвящены почти целиком анализу размерностей. В них можно найти трактовку вопросов разной степени сложности и объема. Большинство этих работ достаточно ясны и содержат много различных тщательно разработанных примеров. Хотя всегда рискованно де-

¹⁾ По мнению автора, это аналогично калибровке микрометра аршином.

лять утверждения такого рода, но тем не менее автор полагает, что метод достаточно хорошо разработан и сенсационные улучшения его в ближайшем будущем мало вероятны. В недалеком прошлом слишком много надежд возлагалось на этот метод как на метод решения задач фракционного анализа. Вероятно, это было связано с отсутствием систематического развития других методов.

г. Метод подобия

С начала XX века этот метод, по-видимому, использовался крайне редко. Как показано на примерах, он весьма прост. Кроме того, этот метод обеспечивает хорошую основу для систематизации и использования физической интуиции и позволяет производить проверку ответов, полученных из анализа размерностей. Чтобы сделать метод более удобным для конкретных специальностей, весьма полезно подготовить дополнительный материал такого вида, который дан в табл. 4.1 и 4.2. Составление таких таблиц является целью анализа размерностей и обеспечивает систематическую основу для лучшего понимания применяемых безразмерных параметров.

Очевидным пробелом в структуре метода подобия является ясная и точная трактовка независимости различных эффектов и фундаментальных основных уравнений во многих общих видах. Этот вопрос мало изучен. Он не прост и требует дальнейшего тщательного рассмотрения.

д. Использование основных уравнений

По-видимому, авторы часто пренебрегают этой техникой как *систематическим методом* решения задач фракционного анализа. Поскольку в литературе опубликовано много решений задач именно этим методом, то такое пренебрежение удивительно. Одним из хороших примеров применения этого метода является рассмотрение вязкого течения жидкости. Тем не менее существование этого метода еще не всеми осознано, и он не имеет общепринятого названия.

В гл. 4 достигнуты некоторые успехи в построении систематической методологии; даны условия применения основных теорем и классифицированы различные типы подобия, но автор уверен, что эта классификация имеет недостатки. Многие вопросы остаются без ответа. Например, можно ли найти более полные критерии, позволяющие определить, поддается ли данная задача упрощению или обобщению путем комбинирования чисел π и отыскания естественных координат? Какие другие менее жесткие условия, чем указанные в правиле 3, но более определенные, чем в правиле 4, можно найти для теории приближений в относительно общем виде? Как и в каких случаях можно собрать физические данные с помощью теории приближений в случае неоднородных дифференциальных уравнений? Какие новые преобразования смогут дать переменные подобия и обеспечить разделение переменных для точного или приближенного решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных? Можно ли использовать идею о *переменных разделения* для нахождения более точных решений нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных при общих граничных условиях. Можно ли найти лучшие признаки, которые бы указывали, когда следует ожидать неоднородного поведения и пограничных слоев? Можно ли идеи о пограничном слое более удачно объединить разложением в ряды по методу Лайтхилла и с другими методами. Как отмечалось в работе [49], на многие вопросы о твердом математическом обосновании этих методов разложения в ряды все еще нет удовлетворительного ответа. То же самое справедливо и для метода зональных оценок. Существует большое число задач, где отыскание естественных координат кажется разумным для упрощения экспериментальных исследований и получения обобщенных соотношений путем замены переменных на параметры. Однако можно привести лишь небольшое число примеров использования этого метода. Возможность применения других методов, когда теория приближений не дает хороших результатов (бесконечные пределы

интегрирования, особое поведение при больших и малых значениях параметров и бесконечные значения подынтегрального выражения), мало изучена, и даже различие между методами подобия и теории приближений установлено нечетко. Аналогично использование неоднородности граничных условий в противоположность *неоднородности* в уравнениях, кажется, не имеет ясной физической интерпретации в обобщенных соотношениях.

Кроме того, теория приближений в случаях, когда имеются несобственные интегралы, не рассматривается в этой книге. Имеется действительная необходимость исследования этих задач методами прикладной математики, т. е. с бóльшим вниманием, чем это обычно делается, когда строгие методы отсутствуют. Типы вопросов, которые естественно возникают, следующие. Можно ли использовать уже накопленные значительные знания о преобразованиях Фурье и других связанных с ним преобразованиях для создания основ теории приближений в задачах с усложненными граничными условиями и бесконечными областями? Можно ли дать разумные сжатые правила сходимости несобственных интегралов и рядов, более доступные для инженера, чем существующие материалы?

Этот список открытых вопросов весьма длинный и включает много трудных проблем; без сомнения, в дальнейшем другие вопросы могут возникнуть у читателей. Так как мы уже сделали вывод о том, что использование основных уравнений в методах подобия и теории приближений весьма перспективно, в дальнейшем следует обратить больше внимания на этот метод.

е. Заключительные замечания

Здесь уместно повторить утверждение, что любое решение задачи методом подобия может быть улучшено выбором новых переменных, новых параметров или новой комбинации параметров и переменных, представляющей более высокий порядок общности

для класса изучаемых задач. Это можно представить в виде теоремы неединственности:

Как правило, можно получить более простые и более общие условия подобия для большинства задач.

Очевидно, не следует забывать эту теорему, так как маловероятно, что наши решения станут точнее, если не будет получена существенно более общая информация об основных уравнениях, соответствующих граничным условиям, о теоремах существования и единственности неоднородных и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и об условиях преобразования дифференциальных уравнений. Таким образом, эта теорема адресована инженеру, ученому и математику. Инженер и ученый должны искать новые координаты, которые позволят упростить решение и обеспечат общность различных классов задач. Математики должны развить теоретические основы теории приближений, методов пограничного слоя и разложения в ряды, а также условий преобразования сложных систем дифференциальных уравнений.

1. Abbott D. M., Kline S. J., Simple Methods for Construction of Similarity Solutions of Partial Differential Equations, AFOSR TN60—1163, Rep. MD—6, Department of Mechanical Engineering, Stanford University, 1960.
2. Bentley B. V., Singular Perturbation Problems of Ordinary Differential Equations, M. S. Thesis, Stanford University, 1955.
3. Bieberbach L., Theorie der gewöhnlichen Differential Gleichungen Auf Funktionen theoretischer Grundlagen dargestellt, Springer-Verlag OHG, Berlin, 1953.
4. Birkhoff G., Dimensional Analysis of Partial Differential Equations, *Elec. Eng.*, **67**, 1185 (1948).
5. Birkhoff G., Hydrodynamics, Ch. III, Princeton University Press, Princeton N. J., 1950.
6. Bridgman P. W., Dimensional Analysis, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1921; есть русский перевод: П. Бриджмен, Анализ размерностей, 1939.
7. Buckingham R., On Physically Similar Systems, Illustrations of the Use of Dimensional Equations, *E. Phys. Rev.*, **4**, 345 (1914).
8. Carrier G. F., Boundary Layer Problems in Applied Mechanics, *Advan. Appl. Mech.*, **3**, 1—19 (1953).
9. Clauser F. H., *Advan. Appl. Mech.*, **4** (1956).
10. Grandall S. H., Engineering Analysis, McGraw-Hill Book Company, N. Y., 1956.
11. Courant R., Hilbert D., Methoden der mathematischen Physik, **2**, Springer-Verlag, OHG, Berlin, 1937.
12. Den Hartog J. P., Mechanical Vibrations, 4th ed., McGraw-Hill Book Company, N. Y., 1956.
13. Duncan W. J., Physical Similarity and Dimensional Analysis, Edward Arnold (Publishers) Ltd., 1853.
14. Einstein H. A., Li H., Shear Transmission from a Turbulent Flow to Its Viscous Boundary Layer, Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, UCLA, 1955.
15. Fourier J. B. J., Theorie Analytique de Chaleur, Paris, 1822.

16. Görtler H., A New Series for the Calculation of Steady Laminar Boundary Layer Flows, *J. Rational Mech.*, **6**, 1—65 (1957).
17. Hansen A. G., Possible Similarity Solutions of the Laminar Incompressible Boundary Layer Equations, *Trans. ASME*, **80** (1958).
18. Hudson D. E., Scale Model Principles in Vibration Analysis, in Harris and Crede (eds.), *Shock and Vibration Handbook*, McGraw-Hill Book Company, N. Y., 1961.
19. Huntley H. E., *Dimensional Analysis*, McDonald and Company, London, 1953.
20. Ipsen D. C., *Units, Dimensions and Dimensionless Numbers*, McGraw-Hill Book Company, N. Y., 1960.
21. Jacobsen L. S., Ayre R. S., *Engineering Vibrations*, McGraw-Hill Book Company, N. Y., 1958.
22. Jeffreys H., Jeffreys B. S., *Methods of Mathematical Physics*, 3d ed., Cambridge University Press, N. Y., 1956.
23. Kays W. M., London A. L., *Compact Heat Exchangers*, McGraw-Hill Book Company, N. Y., 1958.
24. Kline S. J., Koenig F. O., The State Principle, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **24** (March, 1957).
25. Kline S. J., Runstadler P. W., Some Preliminary Results of Visual Studies of the Flow Model of the Wall Layers of the Turbulent Boundary Layer, *J. Appl. Mech.*, **26** (June, 1959).
26. Kraichnan R. H., The Closure Problem of Turbulence Theory, Res. Report HSN-3, Institute of Mathematical Science, New York University, January, 1961.
27. Langer R. E., On the Connection Formulas and the Solutions of the Wave Equation, *Phys. Rev.*, **51**, 8, 669—676 (1937).
28. Langhaar H., *Dimensional Analysis and Theory of Models*, John Wiley & Sons, N. Y., 1951.
29. Latta G., *Singular Perturbations*, Diss. Calif. Inst. Tech., 1951.
30. Liepmann H. W., Roshko A., *Elements of Gasdynamics*, John Wiley & Sons, N. Y., 1957.
31. Lighthill M. J., A Technique for Rendering Approximate Solutions to Physical Problems Uniformly Valid, *Phil. Mag.*, **7**, 40, 1179 (1949).
32. McAdams W. H., *Heat Transmission*, 3d ed., McGraw-Hill Book Company, N. Y., 1954,

33. Michal A. D., Differential Invariants and Invariants Under Continuous Transformation Groups in Normed Linear Spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **37**, 9, 623—627 (September, 1952).
34. Moody L. M. F., Friction Factors for Pipe Flow, *Trans. ASME*, **66**, 671 (1944).
35. Morgan A. J. A., Reduction by One of the Number of Independent Variables in Some Systems of Partial Differential Equations, *Quart. Appl. Math.*, Oxford, **3**, 12, 250—259 (December, 1952).
36. Morse P. M., Feshbach H., Methods of Theoretical Physics, McGraw-Hill Book Company, N. Y., 1953.
37. Murphy G., Similitude in Engineering, The Ronald Press Company, N. Y., 1950.
38. Pai S. I., Viscous Flow Theory, **1**, 62, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1956.
39. Poincaré H., Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste. **1**, Ch. 2, Paris, 1892.
40. Prandtl L., Article on Viscous Flow, in Aerodynamic Theory, Durand W. F. (ed.), **3**, 1934.
41. Prandtl L., Essentials of Fluid Dynamics, with Application to Hydraulics, Aeronautics, Meteorology and Other Subjects (transl.), Hafner, N. Y., 1953.
42. Rayleigh L., *Nature*, **66**, 694 (1915).
43. Riabouchinsky M., *Nature*, 591 (1915).
44. Ruark A. E., Inspectional Analysis, A Method Which Supplements Dimensional Analysis, *J. Elisha Mitchell Sci. Soc.*, **51**, 127—133 (1953).
45. Schlichting H., Boundary Layer Theory, 4th ed., Series in Mechanical Engineering, McGraw-Hill Book Company, N. Y., 1960; есть русский перевод: Г. Шлихтинг, Теория пограничного слоя, пер. с нем., ИЛ, 1956.
46. Sedov L. I., Dimensional and Similarity Methods in Mechanics (transl.), Academic Press Inc., N. Y., 1960.
47. Sellars J. R., Tribus M., Klein J. S., Heat Transfer to Laminar Flow in a Round Tube or Flat Conduit — The Graetz Problem Extended, *Trans. ASME*, **78** (February, 1956). (Следует отметить, что, несмотря на то что методы в этой работе удовлетворительные, табулированные численные результаты ошибочны.)
48. Smith L. H., Dimensionless Reasoning Needs More Emphasis, Prepared by Flight Propulsion Division, General Electric

- Co., Evendale, Ohio, for National Science Foundation Conference on Teaching Fluid Mechanics, Galen Hall. Pa. (September, 1960). (Копии получены от автора.)
49. Tsien H. S., The Poincaré-Lighthill-Kuo Method, *Advan. Appl. Mech.*, 4 (1956).
50. Van Driest E., On Dimensional Analysis and the Presentation of Data in Fluid-Flow Problems, *J. Appl. Mech., Trans. ASME*, 13, A—34 (1946).
51. Van Dyke M., Higher Approximations in Boundary Layer Theory, *J. Fluid Mech.*, part I, 14, 161 (1962); part II, 14, 481 (1962); part III, 19, 145 (1964).
52. Vennard J. K., Elementary Fluid Mechanics, 2d ed., John Wiley & Sons, Inc., N. Y., 1948.
53. von Kármán T., Mechanical Similitude and Turbulence, *NACA TM*, 611, 1931.
54. Wecker N. S., Hayes W. D., Self-Similar Solutions, AFOSR TN, 60—894, Air Force Office of Scientific Research, 1960.
55. Wilson E. B., Introduction to Scientific Research, McGraw-Hill Book Company, N. Y., 1952.
- 56 Yang K. T., Possible Similarity Solutions for Laminar Free Convection on Vertical Plates and Cylinders, *J. Appl. Mech.*, 27, 2 (June, 1960).

Дополнительная литература

- 1*. Афанасьева-Эренфест Т., Принцип размерности, *Журнал Русского физико-химического общества*, XLIV, физический отдел, вып. 7, стр. 245 (1917).
- 2*. Ваничев А. П., О расширении содержания физического подобия, *ЖТФ*, VIII, вып. 2, стр. 198 (1938).
- 3*. Вейник А. И., Приближенный расчет процессов теплопроводности, Госэнергоиздат, 1959.
- 4*. Веников В. А., Применение теории подобия и физического моделирования в электротехнике, ГЭИ, 1949.
- 5*. Гухман А. А., Физические основы теплопередачи, Госэнергоиздат, 1934.
- 6*. Гухман А. А., Введение в теорию подобия, изд-во «Высшая школа», 1963.

- 7*. Гухман А. А., Применение теории подобия к исследованию процессов тепло — массообмена, изд. «Высшая школа», 1967.
- 8*. Гухман А. А., Кирпичев М. В., Теория моделей, Изв. Ленингр. политехнич. ин-та, XXX, 1927.
- 9*. Гутенмахер Л. И., Электрические модели, Изд. АН СССР, 1949.
- 10*. Дьяконов Г. К., Вопросы теории подобия в области физико-химических процессов, Изд. АН СССР, 1959.
- 11*. Загжда, Теория подобия и методика расчета гидротехнических моделей, Госстройиздат, 1938.
- 12*. Кирпичев М. В., Метод размерности, *Изв. АН СССР*, ОТН № 3 (1953).
- 13*. Кирпичев М. В., Теория подобия, Изд. АН СССР, 1953.
- 14*. Конаков П. К., Теория подобия и ее применение в теплотехнике, Госэнергоиздат, 1959.
- 15*. Кудрявцев Е. В., Моделирование вентиляционных систем, Стройиздат, 1950.
- 16*. Кирко И. М., Физическое подобие и аналогия намагничивания ферромагнитных тел, Изд. АН Латв. ССР, Рига, 1955.
- 17*. Кирпичев М. В., Михеев М. А., Моделирование тепловых устройств, Изд. АН СССР, 1936.
- 18*. Кирпичев М. В., Теория подобия как основа эксперимента, *Изв. АН СССР*, ОТН № 4—5, 1945.
- 19*. Лойцянский Л. Г., О некоторых приложениях метода подобия к теории турбулентности, *Прикладная математика и механика*, II, вып. 2 (1934).
- 20*. Лойцянский Л. Г., Аэродинамика пограничного слоя, ОГИЗ, 1941.
- 21*. Лойцянский Л. Г., Турбулентное течение жидкости и внутренняя задача, *Изв. НИИ гидротехники*, IX (1933).
- 22*. Лойцянский Л. Г., О некоторых приложениях метода подобия в теории турбулентности, *Прикладная математика и механика*, II, вып. 2 (1935).
- 23*. Лойцянский Л. Г., Ламинарный пограничный слой, Физматгиз, 1962.
- 24*. Маслов В. П., Теория возмущений и асимптотические методы, Изд. МГУ, 1965.
- 25*. Сунцов Н. Н., Методы аналогий в аэродинамике, ГИФМЛ, 1958.

-
- 26*. Сб. «Теория подобия и моделирование» под ред. М. А. Михеева и П. К. Конакова, Изд. АН СССР, 1951.
- 27*. «Теплопередача и тепловое моделирование», под ред. М. А. Михеева, Изд. АН СССР, 1959.
- 28*. Фрёман Н. и Фрёман П., ВКБ-приближение, «Мир», 1967.
- 29*. Хединг Дж., Введение в метод фазового интеграла, «Мир», 1964.
- 30*. Чеботарев Н. Г., Доказательство π -теоремы, Собр. соч., II, Изд. АН СССР, 1949.
- 31*. Эйгенсон Л. С., Моделирование, Промстройиздат, 1949.
- 32*. Седов Л. И., Методы подобия и размерности в механике, изд. «Наука», 1967.
- 33*. Арсеньев Ю. Д., Теория подобия в инженерных экономических расчетах, «Высшая школа», 1967.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к русскому переводу	5
Предисловие	11
Глава 1. Введение	15
Глава 2. Анализ размерностей и π -теорема. Единицы измерений и размерности	23
2.1. Единицы измерений и размерности	23
2.2. Типы величин, входящих в физические уравнения	25
2.3. Однородность размерностей в физических уравнениях	31
2.4. π -теорема. Формулировка и применение	32
2.5. Сущность π -теоремы	40
2.6. Дополнение Хантли	42
2.7. Примеры приложений анализа размерностей	43
2.8. Выводы	55
Глава 3. Метод подобия и введение в фракционный анализ общих уравнений	57
3.1. Введение	57
3.2. Метод подобия	57
3.3. Непосредственное использование основных общих уравнений	80
3.4. Заключительные замечания	96
Глава 4. Фракционный анализ основных уравнений и граничных условий	99
4.1. Введение	99
4.2. Нормализация основных уравнений	101
4.3. Условия, необходимые для строгого решения канонической задачи подобия и анализа размерностей с использованием нормализованных основных уравнений	114
4.4. Улучшение соотношений	120
4.5. Соотношения между простыми процессами	124
4.6. Теория приближений	133
4.7. Некоторые однородные задачи	165
4.8. Неоднородные задачи. Методы пограничного слоя	175

4.9. Неоднородные задачи. Методы разложения в ряд и универсализации	207
4.10. Методы, связанные с преобразованием переменных	222
4.11. Основные выводы	265
Глава 5. Краткое изложение и сравнение методов	272
5.1. Введение	272
5.2. Краткое изложение методов	272
5.3. Сравнение методов	277
5.4. Заключительные замечания	287
Литература	295
Дополнительная литература	298

С. Дж. Клайн
ПОДОБИЕ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ

Редактор *Л. Якименко*
Художник *Л. Ларский*
Художественный редактор *В. Варлашин*
Технический редактор *Ю. Экке*
Корректор *Т. П. Пашковская*

Сдано в производство 16/II 1968 г.
Подписано к печати 2/VIII 1968 г.
Бумага глуб. печ. $84 \times 108 \frac{1}{32} = 4,75$ бум. л.
15,96 печ. л. Уч.-изд. л. 13,41. Изд. № 20/4219.
Цена 1 р. 07 к. Зак. 1115

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой
Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР.
Измайловский проспект, 29