



# ОСНОВЫ МАТЕМАТИКИ для ПРИЛОЖЕНИЙ

Эта книга поможет Вам стать экспертом  
в решении математических проблем  
за короткое время.

Михаил Креславский

Михаил Креславский

# Основы математики для приложений

УДК 519.72  
ББК 22.18  
К80



**Михаил Креславский**  
«Основы математики для приложений» – К.:

Общенациональная ассоциация  
молодых музыкантов, поэтов и прозаиков,  
2020. — 82 с.

Данная книга — новая альтернатива традиционным учебным пособиям. Она подойдёт как для начинающих, так и для продолжающих постигать тонкости математической науки. Здесь собраны основные понятия, тождества и теоремы. Элементы алгебры, геометрии и тригонометрии автор дополняет подборками задач с повышением уровня сложности. С этой книгой разобраться в основах математики сможет каждый. Рекомендуется для подготовки к олимпиадам.

ISBN 978-5-907379-16-9  
ББК 22.18

© Михаил Креславский, 2020  
© Общенациональная ассоциация молодых  
музыкантов, поэтов и прозаиков, 2020

## Предисловие

Предлагаемая книга содержит краткое изложение важнейших разделов элементарной математики (алгебры, геометрии, тригонометрии), необходимых для изучения различных наук. Книга требует минимальной предварительной подготовки, хотя все результаты подробно обосновываются. Для физиков, химиков и биологов книга предоставляет необходимые теоремы и формулы, используемые в их дисциплинах. Математики с её помощью могут получить необходимый опыт формулирования результатов и методов доказательств.

В книге подобраны интересные и поучительные упражнения. Их решение необходимо для овладения навыками применения математики. Книга рекомендуется всем желающим получить краткое пособие по основным результатам элементарной математики. В ней содержится большое количество задач повышенной сложности, потому она может быть использована для подготовки к участию в математических олимпиадах.

Автор благодарен доктору Я. Уманскому и доктору М. Стрижевскому за ценные замечания и рекомендации в процессе написания этой книги.



# Алгебра

Производные пропорции  
Формулы сокращенного умножения  
Квадратные уравнения  
Системы уравнений  
Функции и графики  
Прогрессии  
Степени и логарифмы  
Задачи по алгебре

### **Производные пропорции**

Пропорцией называют равенство двух отношений:  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ . Умножая обе части пропорции на  $bd$ , получим основное свойство пропорции:  $ad = bc$ . Прибавляя или вычитая единицу в обеих частях пропорции, получаем следующее:

$$\frac{a}{b} \pm 1 = \frac{c}{d} \pm 1; \quad \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d};$$

Самостоятельно докажете справедливость следующих отношений:

$$\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}; \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}; \quad \frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d};$$

Пример:

$\frac{x+a}{x-a} = b$ ; Вычитаем числитель и знаменатель и делим на знаменатель:  $\frac{2a}{x-a} = b-1$

$$x = a + \frac{2a}{b-1} = a \frac{b+1}{b-1}$$

Задачи на производные пропорции:

Решить уравнения:

$$\frac{a-x}{x} = \frac{a+1}{2a}; \quad \frac{a+x}{b+x} = c; \quad \frac{x+1}{x-1} = \frac{p}{q}; \quad \frac{x+4}{4} = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2;$$

### **Формулы сокращенного умножения**

Разность квадратов:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Прибавьте и вычтите  $ab$  в левой части равенства

Квадрат суммы

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Перемножьте  $a + b$  на  $a + b$

Квадрат разности

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Перемножьте  $a - b$  на  $a - b$

Куб суммы

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Перемножьте  $a + b$  на  $a^2 + 2ab + b^2$

Куб разности

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Перемножьте  $a - b$  на  $a^2 - 2ab + b^2$

Сумма кубов

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Прибавьте и вычтите  $ab^2 - a^2b$  в левой части равенства

Разность кубов

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Прибавьте и вычтите  $ab^2 - a^2b$  в левой части равенства

### **Квадратные уравнения**

Общее решение квадратных уравнений

Найдем корни квадратного уравнения:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = 0$$

$$x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

### Теорема Виетта

Сумма корней приведенного квадратного уравнения  $x^2 + px + q = 0$  равна коэффициенту при  $x$  с противоположным знаком:  $x^1 + x^2 = -p$ , а их произведение — свободному члену:  $x^1 \times x^2 = q$ . Для доказательства решите это уравнение в общем виде, а потом сложите и перемножьте корни.

Пример:  $x^2 + 6x + 5 = 0$ . Число 5 раскладывается на множители единственным способом:  $5 \times 1$ , при этом  $5+1=6$  не годится, нам нужно  $-6$ . Тогда корни будут  $x_1 = -5$  и  $x_2 = -1$ .

### Разложение трехчлена на множители

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ , где  $x_1$  и  $x_2$  — корни трехчлена  $ax^2 + bx + c$ .

Для доказательства этого свойства трехчлена просто подставьте вместо  $x_1$  и  $x_2$  их значения и перемножьте, пользуясь формулой для разности квадратов.

### **Системы уравнений**

Если задано несколько уравнений с одной или несколькими неизвестными, и все эти уравнения должны одновременно выполняться, такую группу уравнений мы называем системой. Уравнения объединяются в систему с помощью фигурной скобки. Простейшим методом решения систем уравнений является метод подстановки. Он состоит в том, что одно из уравнений системы решается относительно одной переменной, а затем полученное значение подставляется в остальные уравнения системы, что приводит к уменьшению числа

неизвестных. Поступаем так до тех пор, пока не останется одно уравнение. В качестве примера рассмотрим систему:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - 2y = 17 \end{cases}$$

Поскольку из первого уравнения следует, что  $y = x - 2$ , из второго уравнения получаем  $3x - 2(x - 2) = 17$ , т. е.  $x = 13$ . Возвращаясь к первому уравнению получаем  $y = 11$ .

Другим методом решения систем уравнений является метод сложения, при котором уравнения системы могут быть сложены (или вычтены), исключая одну из переменных:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 12 \end{cases}$$

Складывая эти уравнения, получаем  $2x = 14$ ,  $x = 7$ . Если же вычесть первое уравнение из второго, получаем  $2y = 10$ ,  $y = 5$ .

Другим методом решения систем уравнений является метод замены переменных, когда комбинации переменных упрощают систему. Пример:

$$\begin{cases} x + xy + y = 11 \\ x^2y + xy^2 = 30 \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ xy(x + y) = 30 \end{cases}$$

Обозначим  $u = x + y$  и  $v = xy$ . Тогда

$$\begin{cases} u + v = 11 \\ uv = 30 \end{cases}$$

По теореме Виетта,  $u=5$ ,  $v=6$  или наоборот. Тогда

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

Либо

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 5 \end{cases}$$

Опять применяя теорему Виетта, получим для первого случая  $x=2$ ,  $y=3$  или наоборот, а для второго случая  $x=1$ ,  $y=5$  или наоборот. Таким образом мы получили 4 решения, удовлетворяющие данную систему.

## **Функции и графики**

- Функция  $x(y)$  называется обратной к функции  $y(x)$ . Графики таких функций симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

- Функция называется четной, если при перемене знака аргумента значение функции не меняется:  $f(-x)=f(x)$ . График такой функции симметричен относительно оси ординат.

- Функция называется нечетной, если при перемене знака аргумента абсолютное значение функции не меняется, а ее знак меняется на противоположный:  $f(-x)=-f(x)$ . График такой функции симметричен относительно начала координат.

- Прибавление (вычитание) числа к аргументу сдвигает график функции влево (вправо) на это число.
- Прибавление (вычитание) числа к функции сдвигает график функции вверх (вниз) на это число.
- Умножение (деление) аргумента на число сжимает (растягивает) масштаб вдоль оси абсцисс.
- Умножение (деление) функции на число растягивает (сжимает) масштаб вдоль оси ординат.

### **Прогрессии**

Рассмотрим ряд натуральных чисел:  $1, 2, \dots, n, \dots$ . Если заменить каждое число  $n$  в этом ряду некоторым числом  $m_n$ , следуя некоторому произвольному правилу, мы получим новый ряд чисел:  $m_1, m_2, \dots, m_n, \dots$ . Такой ряд называется **числовой последовательностью**. Число  $m_n$  называется **общим членом** числовой последовательности. Например, если правило является простым умножением на 2, числовая последовательность примет вид  $2, 4, \dots, 2n, \dots$ .

### **Арифметическая прогрессия**

Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с постоянным для этой последовательности числом  $d$ , называется **арифметической прогрессией**. Число  $d$  называется **разностью прогрессии**. Любой член арифметической прогрессии вычисляется по формуле:  $a_n = a_1 + d(n-1)$ . Сумма  $n$  первых членов

арифметической прогрессии вычисляется как  $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$ . Пользуясь формулой для суммы членов арифметической прогрессии, получаем  $S_{100} = \frac{(1+100)100}{2} = 5050$ .

### **Геометрическая прогрессия**

Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на постоянное для этой последовательности число  $q$ , называется **геометрической прогрессией**. Число  $q$  называется **знаменателем прогрессии**. Любой член геометрической прогрессии вычисляется по формуле:  $a_n = a_1 q^{n-1}$ . Сумма  $n$  первых членов геометрической прогрессии может быть вычислена как:  $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ . Геометрическая прогрессия, у которой  $|q| < 1$  и количество членов не ограничено, называется бесконечно убывающей. Сумма членов такой прогрессии является числом, к которому неограниченно приближается сумма  $n$  первых членов этой прогрессии при неограниченном возрастании числа  $n$ . Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии вычисляется по формуле:  $S = \frac{a_1}{1-q}$ . В качестве примера бесконечно убывающей геометрической прогрессии рассмотрим преобразование периодической десятичной дроби в обыкновенную. Пусть имеем периодическую десятичную дробь  $0.(3)$ , которую необходимо перевести в десятичную. Тогда  $0.(3) = 0.333... = 3/10 + 3/100 + 3/1000 + ...$ , т. е. получили бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, сумма которой согласно формуле равна  $0.(3) = \frac{0.3}{1-0.1} = \frac{1}{3}$ .

## Степени и логарифмы

### Возведение в степень

По определению степень числа  $a$  с натуральным показателем  $n$  равна произведению  $n$  множителей, каждый из которых равен  $a$ , то есть  $a^n = a \times a \times \dots \times a$   $n$  раз. Это означает, что любое число, отличное от нуля, возведенное в первую степень, равно самому этому числу:  $a^1 = a$ . Также имеется договоренность о том, что любое число (кроме нуля), возведенное в нулевую степень, дает 1:  $a^0 = 1$ . Степень числа  $a$  с целым отрицательным показателем  $-n$  определяется как дробь вида  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ . Возведение числа  $a$  в дробную степень  $m/n$  заменяется двумя действиями: возведением в целую степень и извлечением корня  $n$ -ой степени:  $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$ . Из определения возведения в степень вытекают следующие формулы:

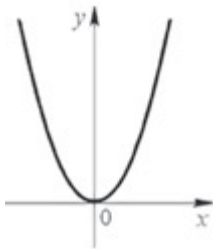
$$a^{m+n} = a^m a^n; \quad a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}; \quad (a^m)^n = a^{mn};$$

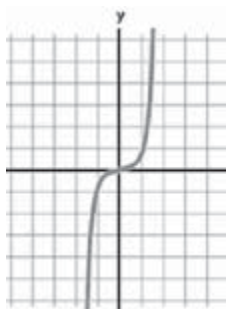
$$(ab)^n = a^n b^n; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

### Степенная функция

Рассмотрим функцию  $y=x^n$  с четным натуральным показателем степени, т. е.  $y=x^{2k}$ . Свойствами такой функции (при  $k=1$  называемой параболой) являются:

- область определения-все действительные числа;
- функция четная;
- функция ограничена снизу и неограничена сверху;



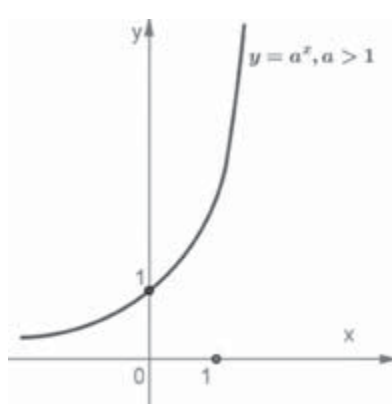
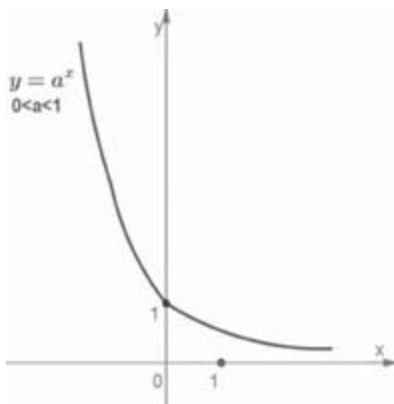


Для функции с нечетным натуральным показателем степени, т.е.  $y=x^{2k+1}$  (при  $k=1$  называемой кубической параболой) свойствами являются:

- область определения — все действительные числа;
- функция нечетная;
- функция неограничена сверху и снизу;

### Показательная функция

Функция, заданная формулой  $y=a^x$  (где  $a>0$ ,  $a\neq 1$ ), называется показательной функцией с основанием  $a$ . Ее график различается в зависимости от величины  $a$ :



- область определения — все действительные числа;
- функция не является ни четной, ни нечетной.
- функция неограничена сверху, но ограничена снизу;
- функция непериодическая;
- график функции пересекает координатную ось  $Oy$  в точке  $(0; 1)$ ;

- функция не имеет нулей;
- функция принимает положительные значения на всей области определения.

### Логарифмы

При сложении оба слагаемых равноправны, и поэтому необходимо иметь лишь одно действие, обратное сложению — вычитание. Это действие по нахождению неизвестного слагаемого по сумме и другому слагаемому. Тем же способом можно вычислить второе слагаемое, поскольку они равноправны. Аналогично обстоит дело с умножением. Поскольку оба сомножителя равноправны, их можно переставлять местами, и только одно обратное действие необходимо. Для возведения в степень основание и показатель степени нельзя менять местами, следовательно, необходимо иметь два обратных действия: действие нахождения основания степени по известной степени и показателю степени — извлечение корня, и действие нахождения показателя степени по известной степени и основанию — логарифмирование (обозначается  $\log_a b$ ). Таким образом, если  $a^x=b$ , то  $x=\log_a b$ , и, следовательно,  $x=\log_a a^x$ . Логарифм числа  $x$  по основанию 10 называется десятичным и обозначается  $\lg x$ , следовательно, если  $10^a=x$ , по определению логарифма  $a=\lg x$ . Логарифм по основанию  $e$  ( $e$  - трансцендентное число, приближенно равное 2.718281828...) называется натуральным логарифмом. Натуральный логарифм числа  $x$  обозначается  $\ln x$ . Значит, если  $\ln x=a$ , то  $x=e^a$ . Натуральные логариф-

мы широко используются в математике, физике и инженерных расчетах.

Основным свойством логарифмов, вытекающим из их определения, является  $a^{\log_a b} = b$ .

Логарифмирование понижает уровень исходного выражения, т. е. превращает возведение в степень в умножение, умножение в сложение, а деление в вычитание:

$$\log_a b^c = c \log_a b;$$

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c;$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c.$$

Отсюда следует

$$\log_a^n b = \frac{1}{n} \log_a b; \log_a^n b^m = \frac{m}{n} \log_a b$$

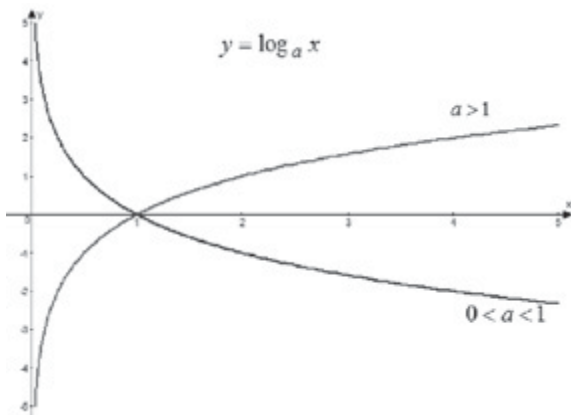
$$\text{или при } m=n \log_a^n b^n = \log_a b.$$

Для перехода к новому основанию необходимо  $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$  или при  $c=b$ , поскольку  $\log_b b=1$ , имеем  $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

### Логарифмическая функция

- область определения —  $(0; +\infty)$ ;
- область значений —  $(-\infty; +\infty)$ ;
- функция общего вида (функция ни четная, ни нечетная);
- нули функции —  $x=1$ ;
- график функции возрастает на  $(0; +\infty)$  при  $a>1$ ; убывает на  $(0; +\infty)$  при  $0<a<1$ ; точек экстремума нет;
- функция выпукла на промежутке  $(0; +\infty)$  при  $a>1$ ; функция вогнута на про-

межутке  $(0; +\infty)$  при  $0 < a < 1$ ; точек перегиба нет;



**Задачи  
по алгебре**

Упростить:

$$A1. x^2 y^2 \left( \frac{1}{(x+y)^2} \cdot \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) + \frac{2}{(x+y)^3} \cdot \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \right)$$

$$A2. \left( \frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}} \right)^2 \cdot \left( \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} \right)$$

$$A3. \frac{a^3 b - ab^2 - \sqrt{ab}(a^2 - b^2)}{1 - ab} - \frac{\sqrt{ab}(b^2 - a^2)}{1 + \sqrt{ab}}$$

$$A4. \left( \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (2\sqrt{2})^2}{a - b} - (a^{1/2} - b^{1/2}) \cdot (a^{1/2} + b^{1/2})^{-1} \right) \div \frac{(4b)^{1/2}}{a^{1/2} + b^{1/2}}$$

$$A5. \frac{a - b}{a + b + 2\sqrt{ab}} \div \frac{a^{-1/2} - b^{-1/2}}{a^{-1/2} + b^{-1/2}}$$

$$A6. \left( \frac{2}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}} \cdot \frac{a - \sqrt{ab} + b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \right) \div 4\sqrt{b}$$

$$A7. \frac{1}{2} (\sqrt{a^3 b^{-3}} - \sqrt{a^{-3} b^3}) \div \left( 1 + \frac{a^2 + b^2}{ab} \right) \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - b}$$

A8. Какова сумма  $\sqrt{24 - t^2}$  и  $\sqrt{8 - t^2}$ , если известно, что их разность равна 2?

Подсказка: Находить  $t$  необязательно.

Доказать, что:

$$A9. \left( \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a-b}} + \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{a-b}} \right) \div \sqrt{1 + \frac{a+b}{a-b}} = \frac{\sqrt{(a-b)^2}}{b}$$

$$A10. \left( \frac{1}{b - \sqrt{a}} + \frac{1}{b + \sqrt{a}} \right) \div \frac{3a^{-2}b^{-1}}{a^{-2} - a^{-1}b^{-2}} = \frac{2}{3}$$

A11. Решить уравнение, не раскрывая скобок:  $(1 - x)^2 + 1 = 2(1 - x)$ .

A12. Задача Бхаскары (XII век):

«Обезьянок резвых стая,

Всласть поевши, развлекалась.

Их в квадрате часть восьмая

Стали прыгать, повисая.

А двенадцать по лианам...

На поляне забавлялась.

Сколько ж было обезьянок,

Ты скажи мне, в этой стае?»

A13. Разложить на множители:

$$2x^2 - 6x - 8$$

Решить уравнения:

$$A14. (x^2 - 9)^2 - 8(x^2 - 9) + 7 = 0$$

$$A15. x(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 15$$

$$A16. \left( x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + \left( x + \frac{1}{x} \right) = 4$$

$$A17. \frac{x^2 - x - 2}{x - 3} = \frac{2x - 4}{x^2 - 3x}$$

$$A18. \frac{x - 2}{x^3} = 2x - x^2$$

A19. Построить график функции  $y = \ln x$ , зная график прямой функции  $y = e^x$ .

A20. Построить графики функций:  $y = |x|$ ;  $y = x^3$ ;  $y = \frac{1}{x+1}$ ;  $y = x^2 + 1$ ;  $y = \ln 2x$ ;  $y = 2e^x$ .

A21. Построить график функции  $|y| = x^3$ .

A22. Найти  $x$ , если числа  $1, 7, \dots, x$  образуют арифметическую прогрессию с  $1 + 7 + \dots + x = 280$ .

A23. Три числа с суммой 78 образуют возрастающую геометрическую прогрессию. Одновременно они являются первым, вторым и пятым членами арифметической прогрессии. Найти наименьшее число.

Решить уравнения:

$$A24. \log_{0.5}(2x - 1) = -4$$

$$A25. \log_4(2x + 1) = \log_2 3$$

A26. Найти  $x$ , если  $\log_3 4$ ,  $\log_3(2^x + 2)$  и  $\log_3(2^{x+2} + 1)$  образуют арифметическую прогрессию.

A27. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^4 + y^2 = 5 \\ x^2 + y = 3 \end{cases}$$



# Геометрия

## Основы планиметрии

Определения

Треугольники

Признаки равенства треугольников

Признаки подобия треугольников

Теорема Пифагора

Окружности

Задачи по геометрии.

## **Определения**

**Постулаты** — набор утверждений, на которых основана та или иная теория.

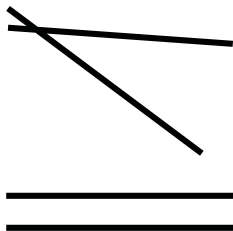
**Аксиома** — утверждение, справедливость которого вытекает из постулатов и не требует доказательств.

**Теорема** — утверждение, которое необходимо доказать.

**Лемма** — вспомогательное утверждение, требующее доказательства, которым пользуются для доказательства теорем.

**Точкой** называется геометрический объект, размерами которого можно пренебречь в данной задаче, например, при определении расстояния от Земли до Луны и Землю и Луну можно считать точками, т. к. их размеры гораздо меньше расстояния между ними. Точки обычно обозначают большими буквами латинского алфавита. Набор точек с одинаковыми свойствами называют **геометрическим местом точек**.

Две несовпадающие точки определяют прямую линию (**прямую**). Прямая определяется двумя несовпадающими точками, т. е. если две прямые имеют две общие точки, то они совпадают. Несовпадающие прямые могут иметь не более одной общей точки.



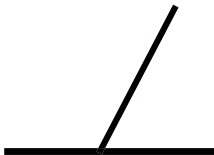
Если 2 прямые имеют лишь одну общую точку, они называются **пересекающимися**.

Если две прямые, лежащие в одной плоскости, не имеют общих точек, они называются **параллельными**.

Три несовпадающие и не лежащие на одной прямой точки определяют **плоскость**. Линия пересечения двух несовпадающих плоскостей является прямой линией.

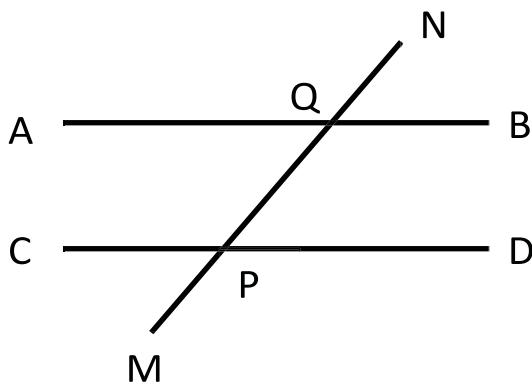
Часть прямой, ограниченная с одной стороны, называется **лучом**. Часть прямой, ограниченная с двух сторон, называется **отрезком**. Отрезки обозначают комбинацией имен их концов. Основной единицей измерения отрезков в геометрии является сантиметр, но возможно также использование других единиц длины, как в геометрии, так и в физике в повседневной жизни (см. приложение 1, стр. 79).

Отрезок короче любой кривой, соединяющей его концы. Два луча, выходящие из одной точки, образуют **угол**. Углы обычно обозначают малыми буквами греческого алфавита. Угол называется **развернутым**, если лучи, его образующие, сливаются в одну прямую. За единицу измерения углов принимают 1 **градус**, равный  $1/180$  части развернутого угла. Пересекающиеся прямые, образующие угол в  $90^\circ$ , называются **взаимно перпендикулярными**, а сам угол в  $90^\circ$  называется **прямым**. Луч, делящий угол пополам, называется биссектрисой.



Два угла, у которых одна сторона общая, а другие стороны образуют развернутый угол, называются **смежными**. Смежные углы по их определению в сумме составляют  $180^\circ$ .

Две пары углов, образованных пересекающимися прямыми, называются вертикальными. Вертикальные углы равны. Докажите это утверждение, пользуясь свойством смежных углов. Две геометрические фигуры называются равными, если они при наложении совпадают.



$\angle AQM$  и  $\angle NPD$ ,  $\angle BQM$  и  $\angle CPN$  — внутренние накрест лежащие

$\angle AQM$  и  $\angle CPN$ ,  $\angle BQM$  и  $\angle DPN$  — внутренние односторонние

$\angle CPM$  и  $\angle BQN$ ,  $\angle MPD$  и  $\angle AQN$  — внешние накрест лежащие

$\angle CPM$  и  $\angle AQN$ ,  $\angle MPD$  и  $\angle NQB$  — внешние односторонние

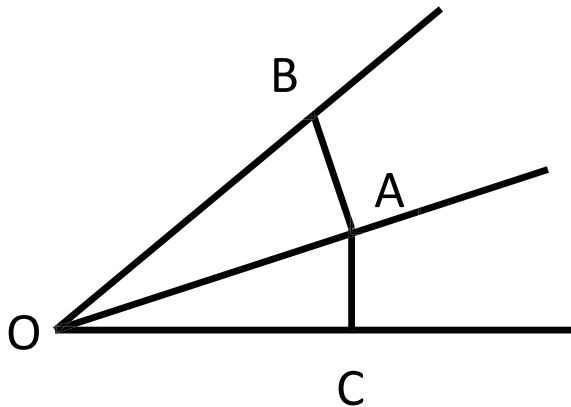
Внутренние (как и внешние) накрест лежащие углы равны, т. к. они при наложении совпадут. Пользуясь свойством внутренних накрест лежащих и смежных углов, докажите, что внутренние (как и внешние) односторонние углы в сумме составляют  $180^\circ$ .

**Пятый постулат Эвклида:** через точку, лежащую вне прямой, можно провести прямую, параллельную данной, и притом только одну. Отменяя этот постулат, приходим к неевклидовой геометрии, что лежит за пределами этой книги.

**Кратчайшее расстояние от точки до прямой** есть длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую. Тогда биссектриса есть геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла.

***Доказательство:***

Выберем на биссектрисе угла произвольную точку  $A$  и из нее опустим перпендикуляры на стороны угла. Сгибая фигуру на рисунке по биссектрисе, увидим, что точки  $B$  и  $C$  совпадают, следовательно,  $AB=AC$ .



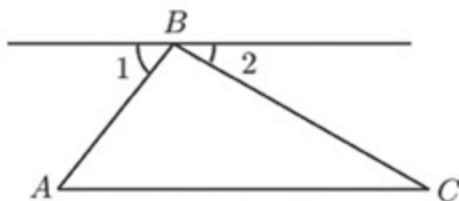
## Треугольники

**Равнобедренным** называется треугольник, у которого боковые стороны равны. **Равносторонним** называется треугольник, у которого все стороны равны. **Высотой** треугольника называется перпендикуляр, проведенный из любой вершины треугольника к противоположной стороне. **Медианой** треугольника называется отрезок, соединяющий любую вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

**Сумма внутренних углов треугольника равна  $180^\circ$**

**Доказательство:**

Пусть имеем произвольный треугольник ABC. Через вершину B проведем прямую, параллельную основанию AC:



Тогда угол 1 равен углу A, а угол 2 равен углу C как внутренние накрест лежащие. Но углы 1, 2 и B составляют развернутый угол, а значит, их сумма равна  $180^\circ$ .

**Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.** Докажите эту теорему, пользуясь свойствами внутренних углов треугольника и смежных углов.

**Площадь треугольника** равна полу-произведению любой его стороны и высоты, опущенной на эту сторону.

**Теорема Фалеса:** Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой стороне угла. Следствие — теорема о пропорциональных отрезках: параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от его сторон пропорциональные отрезки.

**Признаки  
равенства  
треугольников**

**1. По двум сторонам  
и углу между ними**

Совмещая вершины равных углов, видим, что остальные вершины также совместятся, т. е. такие треугольники при наложении совпадают, значит, они равны. Прямым следствием этой теоремы является следующее утверждение: углы при основании равнобедренного треугольника равны.

**Доказательство:**

Пусть имеем равнобедренный треугольник  $ABC$ , у которого  $AB=AC$ . Докажем, что углы  $B$  и  $C$  одинаковы. Проведем биссектрису угла  $A$ .



Тогда треугольники  $ABD$  и  $ACD$  равны по первому признаку: у них  $AB=AC$  (по условию), сторона  $AD$  — общая, а угол 1 равен углу 2 по определению биссектрисы. Следовательно, угол  $B$  равен углу  $C$ . Из равенства этих треугольников также следует, что  $BD=CD$  и  $\angle ADB=\angle ADC$ . Первое утверждение означает, что  $AD$  является также и медианой. Поскольку  $\angle ADB$  и  $\angle ADC$  — смежные, то каждый из них равен  $90^\circ$ , т. е.  $AD$  является также и высотой треугольника. Вывод: высота, медиана и биссектриса, проведенные к основанию равнобедренного или равностороннего треугольника, совпадают.

## **2. По стороне и двум прилежащим углам**

### ***Доказательство:***

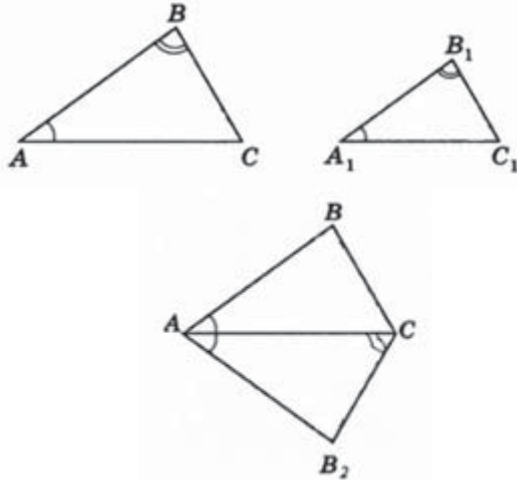
Аналогично предыдущему, только совмещать нужно равные стороны.

## **3. По трем сторонам**

### ***Доказательство:***

Пусть имеем два треугольника:  $ABC$  и  $A'B'C'$  у которых  $AB=A'B'$ ,  $BC=B'C'$  и  $AC=A'C'$ . Наложим эти треугольники так, что стороны  $AC$  и  $A'C'$  совпадут, т. е. треугольник  $A'B'C'$  займет положение  $AB''C$ . Поскольку  $AB''=AB$  и  $B''C=BC$  (по условию), треугольники  $AB''B$  и  $B''BC$  являются равнобедренными, т. е. углы  $B$  и  $B''$  одинаковы. Тогда треугольники  $ABC$  и  $AB''C$  равны по первому признаку, т. е. точки  $B$  и  $B''$  совпадают.

**Подобными** называются треугольники, у которых углы равны, а сходственные стороны (т. е. стороны, лежащие против равных углов) пропорциональны:  $\angle A = \angle A'$ ,  $\angle B = \angle B'$ ,  $\angle C = \angle C'$ ,  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k$ , где  $k$  — коэффициент подобия.



### **Признаки подобия треугольников**

**1. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.**

**Доказательство:** Это утверждение — прямое следствие теоремы Фалеса. Докажите самостоятельно, совмещая углы треугольников.

**Следствие:** Прямая, пересекающая треугольник и параллельная стороне треугольника, отсекает от этого треугольника подобный треугольник.

**2. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам**

**другого треугольника и углы, образованные этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.**

**Доказательство:**

Используя первый признак подобия, видим, что для доказательства этой теоремы достаточно доказать, что  $\angle C = \angle C_1$ .

Построим треугольник  $ACB_2$  так, что  $\angle CAB_2 = \angle A_1$ , а  $\angle B_2CA = \angle C_1$ .

$\triangle ACB_2$  подобен  $\triangle ABC$  (по первому признаку), следовательно,  $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$ .

По условию  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ , следовательно,  $AB = AB_2$ . Тогда  $\triangle ACB_2$  равен  $\triangle ABC$  по двум сторонам и углу между ними. Следовательно,  $\angle B_2CA = \angle C$ , а так как  $\angle B_2CA = \angle C_1$ , то  $\angle C = \angle C_1$ . По первому признаку подобия получаем доказательство теоремы.

**3. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого, то такие треугольники подобны.**

**Доказательство:**

Рассмотрим  $\triangle ABC$  и  $\triangle A_1B_1C_1$ , у которых  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$ . Используя второй признак подобия, видим, что для доказательства этой теоремы достаточно доказать, что  $\angle A = \angle A_1$ . Построим  $\triangle ACB_2$  так, что  $\angle CAB_2 = \angle A_1$ , а  $\angle B_2CA = \angle C_1$ .

Треугольник  $ACB_2$  подобен  $\triangle ABC$  (по теореме 1), следовательно,  $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$ .

Принимая во внимание равенства  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ , получим, что  $CB_2 = CB$ ,

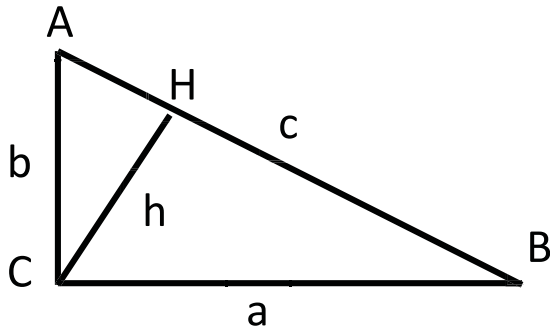
$AB_2=AB$ . Тогда  $\triangle ACB_2=\triangle ABC$  по трем сторонам. Значит,  $\angle A=\angle A_1$ .

**Теорема  
Пифагора**

**В прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов.**

**Доказательство:**

Пусть треугольник  $ABC$  — прямоугольный треугольник с прямым углом  $C$ . Введем обозначения:  $BC=a$ ,  $AC=b$ ,  $AB=c$ . Требуется доказать, что  $a^2+b^2=c^2$ .



Проведём высоту из вершины  $C$  на гипотенузу  $AB$ , основание высоты обозначим как  $H$ . Прямоугольный  $\triangle ACH$  подобен  $\triangle ABC$  по первому признаку подобия

( $\angle ACB=\angle CHA=90^\circ$ ,  $\angle ACB=\angle CHA=90^\circ$ ,  $\angle A$ —общий). Аналогично,  $\triangle CBH$  подобен  $\triangle ABC$ , т. е.  $\frac{a}{c} = \frac{BH}{a}$ ,  $\frac{b}{c} = \frac{AH}{b}$ , или  $a^2=c \cdot HB$ ,  $b^2=c \cdot AH$

Сложив полученные равенства, получаем:

$$a^2 + b^2 = c \cdot HB + c \cdot AH, \text{ или } a^2 + b^2 = c \cdot (HB + AH),$$

т. е.

$$a^2 + b^2 = c \cdot AB, \text{ или } a^2 + b^2 = c^2$$

### Расстояние между двумя точками

Даны две точки на плоскости с координатами  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ . Найти расстояние между ними.

Решение:

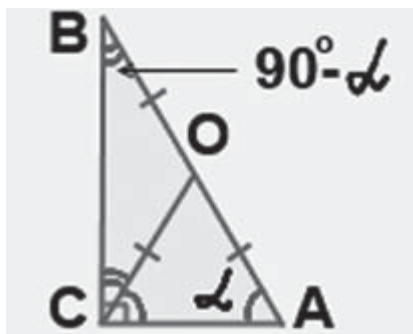
В треугольнике ABC  $AC = y_1 - y_2$ ;  $BC = x_2 - x_1$ . Тогда расстояние AB между точками A и B равно:

$AB^2 = AC^2 + BC^2 = (y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_1)^2$  — по теореме Пифагора.

**Медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы**

*Доказательство:*

В прямоугольном  $\triangle ABC$  из вершины прямого угла C проведем к гипотенузе AB отрезок CO так, чтобы  $CO = OA$ .



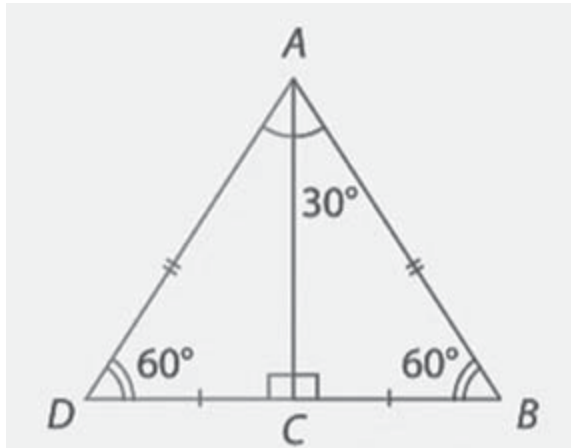
$\triangle AOC$  — равнобедренный с основанием AC (по определению равнобедренного треугольника). Значит, его углы при основании равны:  $\angle OAC = \angle OCA = \alpha$ . Так как сумма острых углов прямоугольного треугольника равна  $90^\circ$ , то в треугольнике ABC  $\angle B = 90^\circ - \alpha$ . Так как  $\angle BCA = 90^\circ$  (по условию), то  $\angle BCO = 90^\circ - \angle OCA = 90^\circ - \alpha$ . Рас-

смотрим треугольник  $ВOC$ :  $\angle BCO = 90^\circ - \alpha$ ,  $\angle B = 90^\circ - \alpha$ , следовательно,  $\angle BCO = \angle B$ . Значит, треугольник  $ВOC$  — равнобедренный с основанием  $BC$  (по признаку равнобедренного треугольника). Отсюда  $BO = CO$ . Так как  $CO = OA$  (по построению) и  $BO = CO$  (по доказанному), то  $CO = OA = BO$ ,  $AB = OA + BO = 2 \cdot OA = 2 \cdot CO$ . Таким образом, точка  $O$  — середина гипотенузы  $AB$ , отрезок  $CO$  соединяет вершину треугольника с серединой противоположной стороны, значит,  $CO$  — медиана, проведенная к гипотенузе, и она равна половине гипотенузы.

**Катет, лежащий против угла  $30^\circ$ , равен половине гипотенузы**

*Доказательство:*

Рассмотрим прямоугольный  $\triangle ABC$ . Пусть  $\angle CAB = 30^\circ$  и  $\angle ACB = 90^\circ$ . Нужно доказать, что  $BC = \frac{AB}{2}$ . Отразим зеркально  $\triangle ABC$  относительно катета  $AC$ , полученную вершину назовем  $D$ .



Раз треугольник полностью «скопирован», то  $\angle DAC = \angle BAC = 30^\circ$ ,  $BC = DC$ . Также заметим, что  $AC$  — высота и медиана образованного  $\triangle DAB$ . Раз высота совпала с медианой, значит,  $\triangle DAB$  — равнобедренный ( $AD = AB$ ). Поскольку  $\triangle DAB$  — равнобедренный, то  $\angle ADB = \angle ABD = \frac{180^\circ - \angle BAD}{2} = 60^\circ$ . Получили, что в  $\triangle DAB$  все углы равны, а значит,  $\triangle DAB$  — равносторонний. Тогда  $BD = AB$ , а, в свою очередь,  $BD = 2 \cdot BC$ , то есть  $AB = 2 \cdot BC$ , откуда  $BC = \frac{AB}{2}$ .

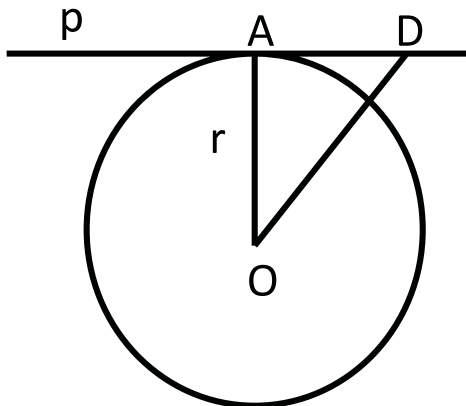
## Окружности

**Окружность** есть геометрическое место точек, равноудаленных от одной точки, называемой центром. Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется **кругом**. Никакая прямая линия не может иметь больше двух общих точек с окружностью. Если прямая имеет одну общую точку с окружностью, она называется **касательной** к этой окружности. Если прямая имеет две общих точки с окружностью, она называется **секущей**. Часть секущей, ограниченная окружностью, называется **хордой**. Часть окружности, ограниченная хордой, называется **дугой**. Любая хорда, проходящая через центр окружности, называется **диаметром** и обозначается буквой  $D$ . Половина диаметра называется **радиусом** и обозначается буквой  $R$ . Угол между двумя радиусами называется **центральный**. Отношение длины окружности к диаметру есть трансцендентное число, приблизительно равное 3.14 и обозначаемое греческой буквой  $\pi$ . Оно постоянно

и не зависит от размеров самой окружности, т. е.  $L = \pi D$ , или  $L = 2\pi R$ . Длина дуги, деленная на радиус, также не зависит от радиуса, а зависит только от величины центрального угла, опирающегося на эту дугу. Таким образом, внутри окружности единичного радиуса длина дуги определяет величину центрального угла и может быть мерой его измерения. Такая мера называется радиан, т. е. один радиан — это величина центрального угла, опирающегося на дугу единичной длины в окружности единичного радиуса. Поскольку длина дуги, на которую опирается развернутый угол, равна половине длины окружности, то для окружности единичного радиуса получаем, что развернутый угол (величина которого  $180^\circ$ ) равен  $\pi$ . Таким образом, получаем соотношение для перевода градусов в радианы и наоборот:  $\pi = 180^\circ$ .

**Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной**

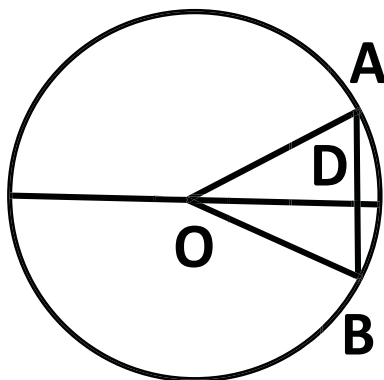
Предположим, что  $OA$  не перпендикулярно прямой  $p$ . В таком случае опустим



из точки  $O$  перпендикуляр на прямую  $p$ , который будет расстоянием от центра окружности до прямой и обозначим через  $D$  точку пересечения этого перпендикуляра с касательной.

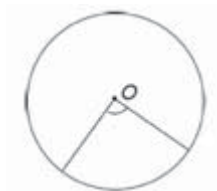
Поскольку касательная имеет с окружностью только одну общую точку, точка  $D$  будет лежать вне круга, т. е.  $OD$  будет больше  $r$ . Вспоминая, что угол  $ADO$  — прямой (по построению), получаем, что в прямоугольном треугольнике  $ADO$ -катет больше гипотенузы, что невозможно. Значит, точки  $D$  и  $A$  совпадают.

**Диаметр, перпендикулярный к хорде делит ее и стягиваемые ей дуги пополам**

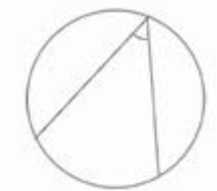


**Доказательство:**

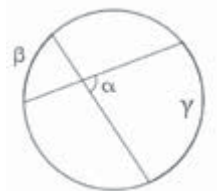
Соединяя концы хорды  $A$  и  $B$  с центром окружности  $O$ , получаем равнобедренный треугольник  $OAB$ , у которого  $OD$  — высота. Значит,  $OD$  также является медианой и биссектрисой. Следовательно,  $AD=BD$  и  $\angle AOD=\angle BOD$ , т. е.  $\cup AC=\cup BC$ .



**Центральный угол** — угол, вершина которого лежит в центре окружности, а стороны являются радиусами. Центральный угол равен дуге, на которую он опирается.

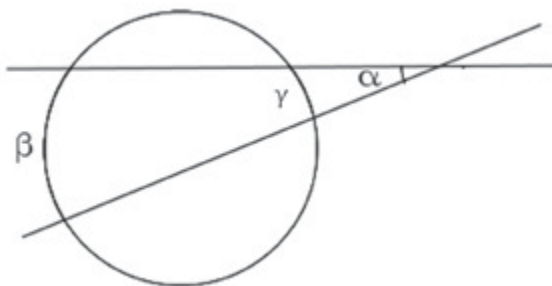


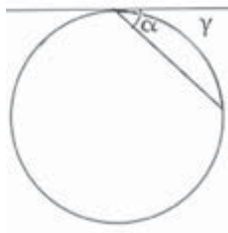
**Вписанный угол** — угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны являются хордами. Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается. Значит, вписанный угол, опирающийся на диаметр, является прямым, т. е. равным  $90^\circ$ . Таким образом, если центральный угол  $\alpha_{\text{ц}}$  и вписанный угол  $\alpha_{\text{в}}$  опираются на одну и ту же дугу, то  $\alpha_{\text{ц}} = 2 \alpha_{\text{в}}$ .



**Величина угла, образованного пересекающимися хордами**, равна половине суммы величин дуг, заключённых между его сторонами.

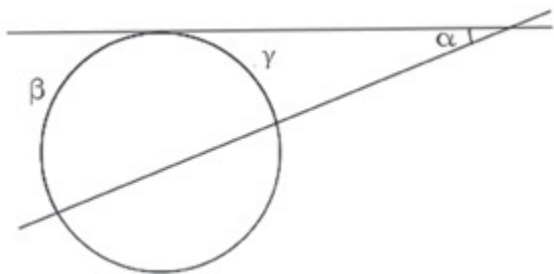
**Величина угла, образованного секущими, пересекающимися вне круга**, равна половине разности величин дуг, заключённых между его сторонами.



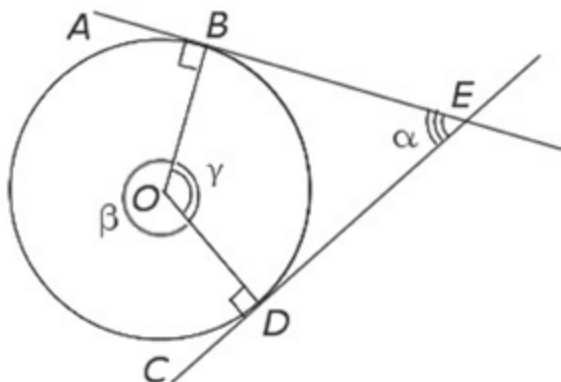


**Величина угла, образованного касательной и хордой, проходящей через точку касания, равна половине величины дуги, заключённой между его сторонами.**

**Величина угла, образованного касательной и секущей, равна половине разности величин дуг, заключённых между его сторонами.**



**Величина угла, образованного двумя касательными к окружности, равна половине разности величин дуг, заключённых между его сторонами.**



**Задачи  
по геометрии**

G1. Доказать, что площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности.

G2. В равнобедренном треугольнике ABC ( $AB=BC$ ),  $\angle ABC=80^\circ$ , выбрана точка O так, что  $\angle OAC=30^\circ$ , а  $\angle OCA=10^\circ$ . Найти  $\angle BOC$ .

G3. Катеты прямоугольного треугольника равны  $a$  и  $b$ , его гипотенуза равна  $c$ , а высота, проведенная к гипотенузе, —  $h$ . Доказать, что треугольник со сторонами  $a + b$ ,  $h$  и  $c + h$  также является прямоугольным.

G4. Окружность радиуса  $R$  катится по прямой. По какой траектории движется ее центр?

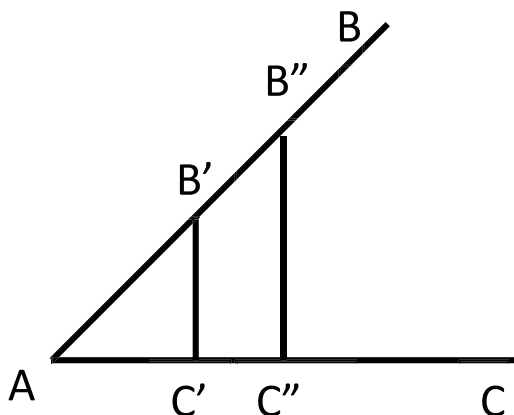


# Введение в тригонометрию

Тригонометрические функции для острых углов  
Тригонометрические функции для произвольного угла  
Измерение углов  
Формулы приведения  
Формулы сложения аргументов  
Графики тригонометрических функций  
Обратные тригонометрические функции  
Тригонометрические уравнения  
Методы решения тригонометрических уравнений  
Тригонометрические неравенства  
Задачи по тригонометрии

**Тригонометрические функции для острых углов**

Пусть  $\angle BAC$  — острый. Из нескольких точек стороны  $AB$  опустим перпендикуляры на сторону  $AC$ . Обозначим точки пересечения перпендикуляров со сторонами угла как  $B'$ ,  $B''$ ,  $C'C''$  и т. д. Все отсекаемые треугольники будут прямоугольными и имеющими общий угол  $BAC$  ( $\alpha$ ). По первому признаку подобия они все подобны, т. е.  $B'C'/AB' = B''C''/AB''$ .



Мы доказали, что для любого острого угла в прямоугольном треугольнике отношение противоположного катета к гипотенузе не зависит от длины сторон, а является только функцией угла. Эта функция в тригонометрии называется синус и записывается как  $\sin \alpha$ .

Таким образом, синусом острого угла  $\alpha$  называется отношение противолежащего катета к гипотенузе. С другой стороны, отношение прилежащих катетов к гипотенузе также является только функцией угла

и не зависит от длины сторон (по той же причине подобия всех треугольников). Эта функция в тригонометрии называется косинус и обозначается  $\cos \alpha$ . Следовательно,  $\cos \alpha$  — это отношение прилежащего катета к гипотенузе. С третьей стороны, следствием подобия всех треугольников является и постоянство отношения катетов. Отношение противолежащего катета к прилежащему называется тангенсом ( $\operatorname{tg} \alpha$ ), а обратное ему отношение прилежащего катета к противолежащему называется котангенсом ( $\operatorname{ctg} \alpha$ ). Кстати, обратное отношение гипотенузы к прилежащему катету называется секансом ( $\sec \alpha$ ), а к противолежащему — косекансом ( $\operatorname{cosec} \alpha$ ). Запишем первые формулы, которые вытекают из наших определений:

$$\sec \alpha = 1/\cos \alpha$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = 1/\sin \alpha$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = 1/\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \cos \alpha / \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

Докажите справедливость всех этих формул.

Т1. Докажите, что площадь треугольника равна полупроизведению двух его любых сторон на синус угла между ними.

Т2. Докажите, что площадь параллелограмма равна произведению двух его сторон на синус угла между ними.

Т3. Докажите, что отношение синуса угла к противоположной стороне любого треугольника есть величина постоянная для данного треугольника (теорема синусов).

Т4. Докажите, что для любого треугольника квадрат одной из его сторон равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними (теорема косинусов).

Т5. Докажите, что площадь четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

**Тригонометрические функции для произвольного угла**

Нарисуем окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Тогда любая точка такой окружности может быть описана при помощи угла между положительным направлением оси абсцисс и радиусом окружности, проведенным в эту точку. Если радиус описывает полный оборот, он создаст полный угол. При этом если из точки А радиуса ОА опустить перпендикуляр на ось абсцисс, то величина этого перпендикуляра будет описывать величину угла поворота радиуса. Если угол острый, а окружность единичная, величина перпендикуляра, т. е. ордината конца радиуса, будет численно равна  $\sin \alpha$ , а абсцисса —  $\cos \alpha$ . Обобщая этот вывод для любого угла, будем считать, что  $\sin \alpha$  — это ордината конца радиуса, а  $\cos \alpha$  — его абсцисса. Теперь предположим, что угол  $\alpha$  — острый. Точку пересечения ординаты конца радиуса с осью абсцисс обозначим через В. Проведем касательную к окруж-

ности в точке конца радиуса, и точку пересечения этой касательной с осью абсцисс обозначим через С. Рассмотрим треугольники ОАВ и ОАС.  $\triangle OAB$  имеет прямой угол (по построению), а  $\triangle OAC$  также имеет прямой угол (радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной). Кроме того, угол  $\alpha$  — общий для обоих треугольников. Тогда эти треугольники подобны по первому признаку, а это значит, что их стороны пропорциональны, т. е.  $\frac{AB}{OB} = \frac{AC}{OA}$ . Но  $\frac{AB}{OB} = \operatorname{tg} \alpha$ , а ОА есть радиус окружности или просто 1. Значит,  $AC = \operatorname{tg} \alpha$ . Обобщая этот вывод для любого угла, будем считать, что тангенс угла численно равен отрезку касательной, проведенной из точки касания до оси абсцисс.

Заметим, что при перемене знака аргумента функция синуса меняет знак, а функция косинуса не меняет своей величины (просто по построению). Следовательно, синус угла — функция нечетная, а косинус — четная.

Докажите, что тангенс и котангенс угла являются нечетными функциями.

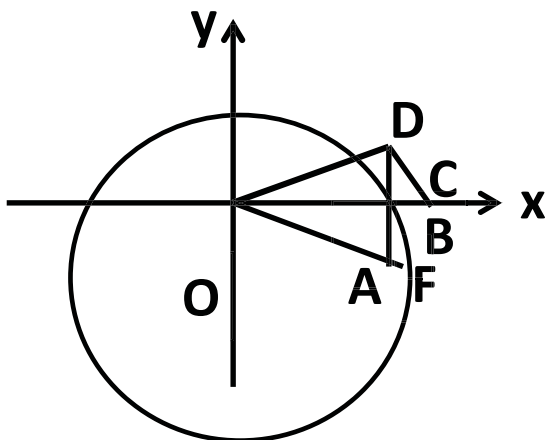
### **Измерение углов**

Поскольку мы договорились определять углы положением радиус-вектора единичной окружности, логично было бы измерять такие углы отношением длины дуги, на которую они опираются к радиусу окружности. Очевидно, что такое отношение не зависит от радиуса, т. е., выбирая окружность единичного радиуса, будем измерять углы численным значением длины

соответствующей дуги. Такая единица угла называется радиан. Вспоминая, что развернутый угол, с одной стороны, равен  $180^\circ$ , а с другой стороны, опирается на половину окружности, получаем  $180^\circ = \pi$ . Это и есть простейшая формула для перевода градусной меры углов в радианную и обратно, т. е. угол  $1^\circ = \pi / 180 = 0.01745$  радиан, а угол 1 радиан  $= 180/\pi = 57,3^\circ$ .

Попробуем решить следующую задачу:

Расположить в порядке возрастания:  $\alpha$ ,  $\sin \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$ .



$$\angle AOD = \alpha, \angle OAD = 90^\circ, \angle ODC = 90^\circ$$

$$AD = \sin \alpha, CD = \operatorname{tg} \alpha, \text{arc } BD = \alpha$$

Поскольку  $\text{arc } DF > DF$  (отрезок короче любой кривой, соединяющей его концы) и  $CD > AD$  (гипотенуза больше катета), имеем  $\sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha$ .

Заметим, что при малых углах можно полагать, что  $\sin \alpha = \alpha = \operatorname{tg} \alpha$ .

Вычислим значения главных тригонометрических функций для некоторых углов:

| $\angle \alpha$ (rad) | $\angle \alpha$ (grad) | $\sin \alpha$ | $\cos \alpha$ | $\operatorname{tg} \alpha$ | Почему?                                                          |
|-----------------------|------------------------|---------------|---------------|----------------------------|------------------------------------------------------------------|
| 0                     | 0°                     | 0             | 1             | 0                          | радиус-вектор совпадает с осью абсцисс                           |
| $\pi/6$               | 30°                    | $1/2$         | $\sqrt{3}/2$  | $\sqrt{3}/3$               | катет, лежащий против угла 30°                                   |
| $\pi/4$               | 45°                    | $\sqrt{2}/2$  | $\sqrt{2}/2$  | 1                          | Теорема Пифагора                                                 |
| $\pi/3$               | 60°                    | $\sqrt{3}/2$  | $1/2$         | $\sqrt{3}$                 | катет, лежащий против угла 30°                                   |
| $\pi/2$               | 90°                    | 1             | 0             | $\infty$                   | радиус-вектор совпадает с осью ординат                           |
| $\pi$                 | 180°                   | 0             | -1            | 0                          | радиус-вектор совпадает с отрицательным направлением оси абсцисс |
| $3\pi/2$              | 270°                   | -1            | 0             | $-\infty$                  | радиус-вектор совпадает с отрицательным направлением оси ординат |

### **Формулы приведения**

Оси координат делят наш единичный круг на 4 части, называемые четвертями. Четверти обычно обозначаются римскими цифрами по ходу вращения радиус-вектора, т. е. против часовой стрелки. Это обозначает, что I четверть содержит углы от 0° до 90°, II — от 90° до 180°, III — от 180° до 270° и IV — от 180° до 360°. Если угол больше 360°, его величину можно разделить на 360, при этом остаток укажет на четверть. Это означает, что все тригонометрические функции периодичны с периодом  $2\pi$ . Пример: Угол 1000° лежит в IV четверти, т. к. остаток от деления 1000° на 360 (280°) больше, чем 270°.

Глядя на направление осей координат, легко определить знак соответствующей функции в каждой из четвертей. Так  $\sin \alpha$  положителен в I и II четвертях, а  $\cos \alpha$  — в I и IV четвертях. Вспоминая, что  $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$ , понимаем, что  $\operatorname{tg} \alpha$  положителен в I и III четвертях.

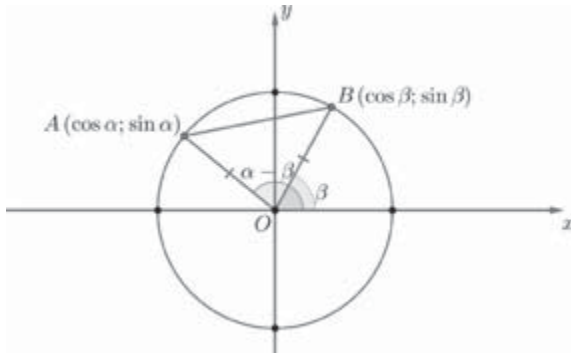
Для острого угла  $\alpha$   $\sin (90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ , а  $\cos (90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$  (противоположные стороны прямоугольника одинаковы), а значит,  $\operatorname{tg} (90^\circ - \alpha) = \sin (90^\circ - \alpha) / \cos (90^\circ - \alpha) = \cos \alpha / \sin \alpha = \operatorname{ctg} \alpha$ . Для углов II четверти имеем:  $\sin (90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$ ,  $\cos (90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$ ,  $\operatorname{tg} (90^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$  или  $\sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ ,  $\cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ ,  $\operatorname{tg} (180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$ . Для углов III четверти имеем:  $\sin (180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$ ,  $\cos (180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$ ,  $\operatorname{tg} (180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$  или  $\sin (270^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ ,  $\cos (270^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$ ,  $\operatorname{tg} (270^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$ . Для углов IV четверти имеем:  $\sin (270^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$ ,  $\cos (270^\circ + \alpha) = \sin \alpha$ ,  $\operatorname{tg} (270^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$  или  $\sin (360^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$ ,  $\cos (360^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ ,  $\operatorname{tg} (360^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$ . Полученные формулы называются формулами приведения. Плохая новость — формул приведения много. Хорошая новость — все эти формулы запоминать не надо. Помнить нужно лишь 3 правила:

- знаки функций по четвертям;
- на горизонтальном диаметре функция не меняется;
- на вертикальном диаметре функция меняется на сходящую.

**Формулы  
сложения  
аргументов**

Рассмотрим тригонометрическую окружность и на ней углы  $\alpha$  и  $\beta$ . Пусть этим углам соответствуют точки А и В соответственно. Тогда координаты этих точек:

$$A(\cos \alpha; \sin \alpha), B(\cos \beta; \sin \beta).$$



Тогда расстояние между ними:

$$\begin{aligned} AB^2 &= (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 = \\ &= \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 2\cos \alpha \cos \beta + \sin^2 \alpha + \\ &+ \sin^2 \beta - 2\sin \alpha \sin \beta = 1 + 1 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \\ &+ \sin \alpha \sin \beta). \end{aligned}$$

В то же время, по теореме косинусов:

$$\begin{aligned} AB^2 &= OA^2 + OB^2 - 2AO \cdot OB \cos(\alpha - \beta) = \\ &= 1 + 1 - 2\cos(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

Поэтому  $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ .

Получим формулу для косинуса суммы двух углов. Меняя  $\beta$  на  $-\beta$  и пользуясь четностью косинуса и нечетностью синуса, получаем:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Для синуса суммы двух углов имеем:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \cos(90^\circ - (\alpha + \beta)) = \cos((90^\circ - \alpha) - \beta) = \\ &= \cos(90^\circ - \alpha) \cos \beta + \sin(90^\circ - \alpha) \sin \beta = \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

Окончательно:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

Для синуса разности двух углов, пользуясь нечетностью синуса имеем:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

Докажите самостоятельно, что:

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

Запишем полученные формулы в более наглядном виде:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

Докажите, что формулы приведения можно получить из формул сложения.

Пользуясь формулами сложения, докажите справедливость формул для двойного угла:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

### Формулы половинного угла

$$1 + \cos \alpha = \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$1 - \cos \alpha = \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

**Формулы сложения функций**

Обозначим  $\alpha + \beta = \tau$ ;  $\alpha - \beta = \varphi$ .

Тогда  $\alpha = \frac{\tau+\varphi}{2}$ ,  $\beta = \frac{\tau-\varphi}{2}$ ,

или

$$\cos \tau + \cos \varphi = 2 \cos \alpha \cos \beta = 2 \cos \frac{\tau+\varphi}{2} \cos \frac{\tau-\varphi}{2}$$

$$\cos \tau - \cos \varphi = 2 \sin \alpha \sin \beta = 2 \sin \frac{\tau+\varphi}{2} \sin \frac{\tau-\varphi}{2}$$

$$\sin \tau + \sin \varphi = 2 \sin \frac{\tau+\varphi}{2} \cos \frac{\tau-\varphi}{2}$$

Подставляя в последнюю формулу  $-\varphi$  вместо  $\varphi$ , получаем формулу разности синусов:

$$\sin \tau - \sin \varphi = 2 \cos \frac{\tau+\varphi}{2} \sin \frac{\tau-\varphi}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \pm \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

Чтобы преобразовать произведение функций в сумму, можно перевернуть полученные нами формулы:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2}$$

**Тангенс половинного угла**

Все тригонометрические функции могут быть выражены через тангенс половинного угла:

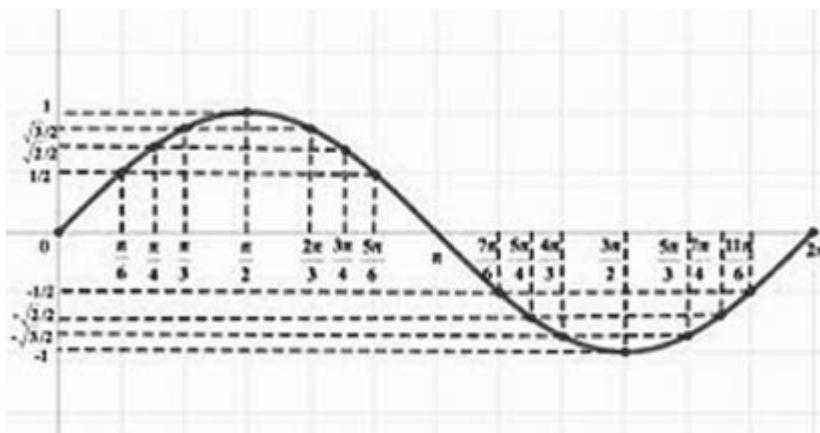
$$\sin \alpha = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\text{и, деля на } \cos^2 \frac{\alpha}{2}, = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + 1}$$

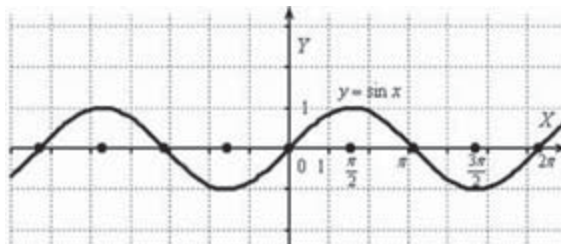
$$\cos \alpha = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

### **Графики тригонометрических функций**

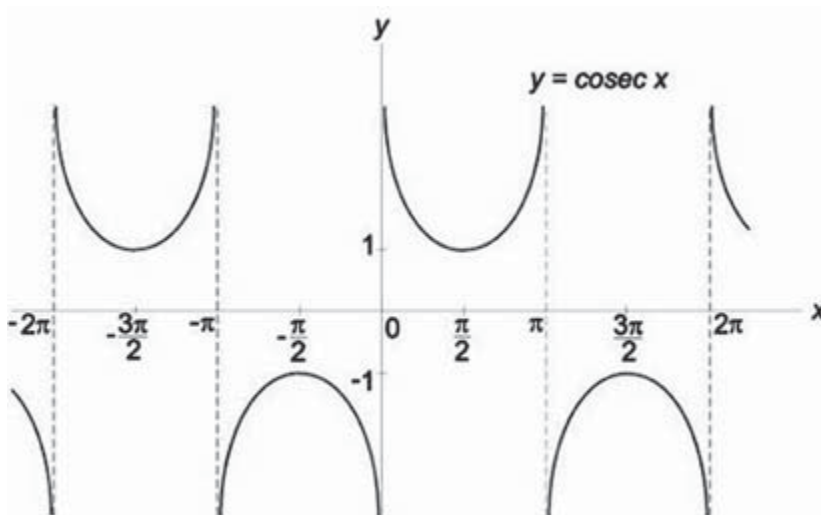
Поскольку функция  $y = \sin x$  периодическая с периодом  $2\pi$ , нам достаточно построить ее лишь на интервале  $[0; 2\pi]$ , а затем использовать симметрию периода. Нам известно, что при увеличении  $x$  от 0 до  $\pi/2$   $\sin x$  увеличивается от 0 до 1, достигает максимума в этой точке и далее начинает убывать от 1 до 0 по мере увеличения  $x$  от  $\pi/2$  до  $\pi$ . При дальнейшем росте аргумента он попадает в III четверть, становится отрицательным и продолжает убывать от 0 до  $-1$ . При значении аргумента  $3\pi/2$   $\sin x$  достигает минимума и далее начинает возрастать от  $-1$  при  $x = 3\pi/2$  до 0 при  $x = 2\pi$ . Нарисуем, что у нас получилось.



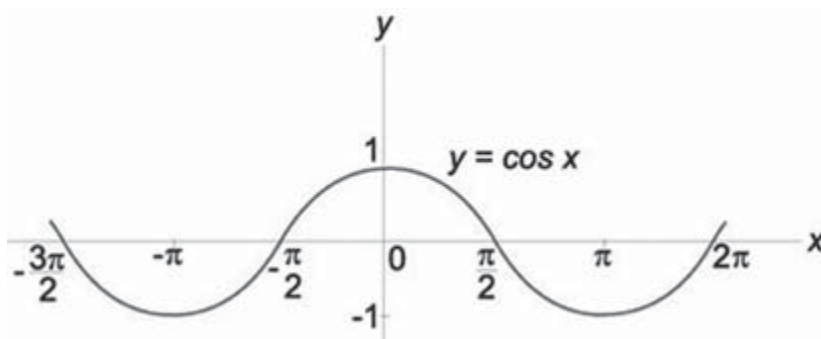
Периодически продолжая данный график влево и вправо вдоль оси  $x$  получаем полный график функции  $y = \sin x$ :



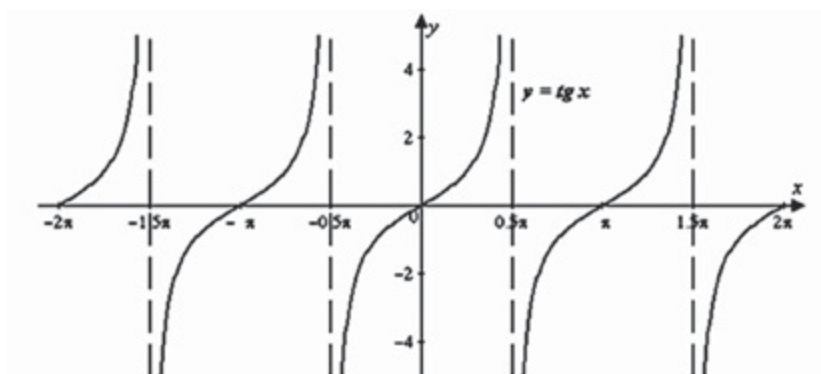
При построении функции  $y = \operatorname{cosec} x$  учтем, что она уходит в бесконечность при  $x$ , стремящемся к нулю справа или к  $\pi$  слева, уходит в минус бесконечность при  $x$ , стремящемся к нулю слева или к  $\pi$  справа, и достигает минимума, равного 1, при  $x = \pi/2$  и максимума, равного  $-1$ , при  $x = 3\pi/2$ :



Вспоминая, что  $y = \cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ , переворачиваем график функции  $y = \sin x$  относительно оси абсцисс и затем сдвигаем его вправо на  $\pi/2$ :



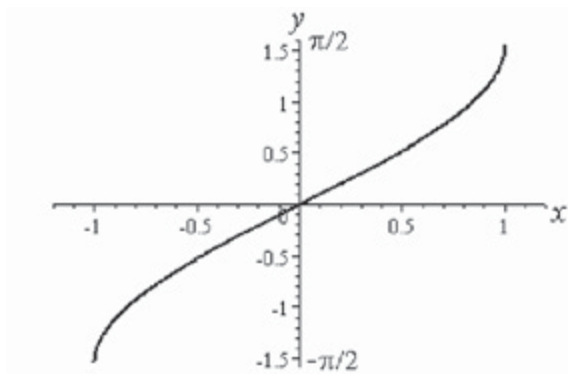
Функция  $y = \operatorname{tg} x$  равна 0 при  $x=0$  и монотонно возрастает до бесконечности при приближении аргумента к  $\pi/2$  слева. При  $x=\pi/2$  имеется точка разрыва, так что при приближении аргумента к  $\pi/2$  справа функция меняет знак, и монотонно возрастает до  $x=\pi$ , где опять терпит точку разрыва:



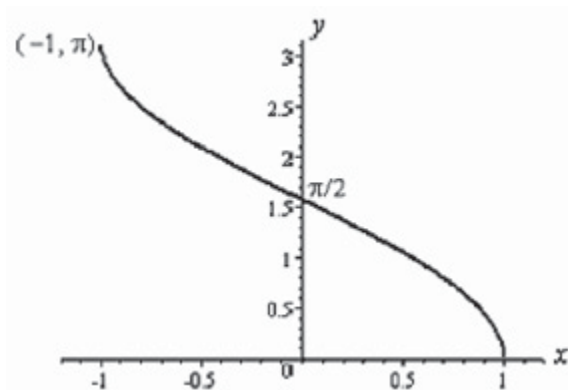
Функции  $y = \operatorname{ctg} x$ ,  $y = \sec x$  постройте самостоятельно. В качестве упражнения постройте функции  $y = \ln \sin x$ ,  $y = \sin \ln x$

### **Обратные тригонометрические функции**

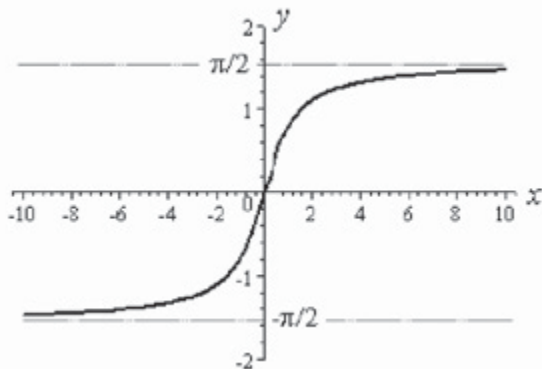
Попробуем решить задачу: как найти величину угла, если известна одна из его тригонометрических функций, например,  $\sin x$ . Такая задача сводится к решению уравнения вида  $f(x)=a$ , где  $f(x)$  — одна из изученных нами тригонометрических функций. Чтобы решить такое уравнение, необходимо ввести понятие обратной функции, т. е. по аналогии с логарифмом вводим функции, обратные тригонометрическим. Поскольку тригонометрических функций 6, то 6 должно быть и обратных функций:  $\arcsin x$  — функция, обратная  $\sin x$ ,  $\arccos x$  — функция, обратная  $\cos x$ ,  $\operatorname{arctg} x$  — функция, обратная  $\operatorname{tg} x$ ,  $\operatorname{arcctg} x$  — функция, обратная  $\operatorname{ctg} x$ ,  $\operatorname{arcsec} x$  — функция, обратная  $\sec x$ ,  $\operatorname{arccosec} x$  — функция, обратная  $\operatorname{cosec} x$ . Поскольку исходные тригонометрические функции периодические, то обратные функции вообще говоря являются многозначными. Чтобы обеспечить однозначное соответствие между двумя переменными, области определения исходных тригонометрических функций ограничивают, рассматривая лишь их главные ветви. Например, функция  $y=\sin x$  рассматривается лишь в промежутке  $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ . На этом интервале обратная функция арксинус определена однозначно.



$\text{Arccos } x$  рассматривается в интервале углов от 0 до  $\pi$ , так что



$\text{Arctg } x$ , как и  $\arcsin x$ , рассматривается в интервале углов от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$ :



$$Y = \operatorname{arctg} x$$

Графики  $\operatorname{arcctg} x$ ,  $\operatorname{arcsec} x$  и  $\operatorname{arccosec} x$  постройте самостоятельно.

### **Тригонометрические уравнения**

Решение тригонометрического уравнения состоит из двух этапов: преобразование уравнения для получения его простейшего вида и решение полученного простейшего тригонометрического уравнения.

#### **Простейшие тригонометрические уравнения.**

$$\sin x = a.$$

- Если  $a = 0$ ,  $x = \pi k$ , где  $k$  — любое целое число.
- Если  $a = 1$ ,  $x = \pi/2 + 2\pi k$ , где  $k$  — любое целое число.
- Если  $a = -1$ ,  $x = -\pi/2 + 2\pi k$ , где  $k$  — любое целое число.
- Если  $|a| > 1$ , уравнение не имеет решений.
- Если  $|a| < 1$ ,  $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$ , где  $k$  — любое целое число.

**$\cos x = a$ .**

- Если  $a = 0$ ,  $x = \pi/2 + \pi k$ , где  $k$  — любое целое число.
- Если  $a = 1$ ,  $x = 2\pi k$ , где  $k$  — любое целое число.
- Если  $a = -1$ ,  $x = \pi + 2\pi k$ , где  $k$  — любое целое число.
- Если  $|a| > 1$ , уравнение не имеет решений.
- Если  $|a| < 1$ ,  $x = \pm \arccos a + 2\pi k$ , где  $k$  — любое целое число.

**$\operatorname{tg} x = a$ .**

- Если  $a = 0$ ,  $x = \pi k$ , где  $k$  — любое целое число.
- Для всех остальных  $a$ :  $x = \operatorname{arctg} a + \pi k$ , где  $k$  — любое целое число.

Проиллюстрируем различные методы решения примерами.

**Алгебраический метод**

Пользуясь этим методом, необходимо произвести замену переменной и решить полученное алгебраическое уравнение. Например,

$$2\sin^2(x + \pi/3) - 3\cos(\pi/6 - x) = -1$$

Применим формулы приведения, чтобы получить одинаковый аргумент у тригонометрических функций:

$$2\sin^2(x + \pi/3) - 3\sin(x + \pi/3) + 1 = 0$$

Проведем замену переменной

$$\sin(x + \pi/3) = y; 2y^2 - 3y + 1 = 0.$$

Решая квадратное уравнение относительно  $y$  получаем два решения:

1.  $Y_1 = 1 \Leftrightarrow \sin(x_1 + \pi/3) = 1$ ;  
 $x_1 + \pi/3 = \pi/2 + 2\pi k$ ;  $x_1 = \pi/6 + 2\pi k$ .
2.  $Y_2 = 0.5 \Leftrightarrow \sin(x_2 + \pi/3) = 0.5$ ;  
 $x_2 + \pi/3 = (-1)^k \pi/6 + \pi k$ ;  
 $x_2 = (-1)^k \pi/6 - \pi/3 + \pi k$ .

**Методы решения тригонометрических уравнений**

**Разложение на множители**

$$\sin x + \cos x = 1$$

$$\sin x - (1 - \cos x) = 0$$

$$2\sin x/2 \cos x/2 - 2\sin^2 x/2 = 0$$

$$\sin x/2 (\cos x/2 - \sin x/2) = 0$$

$$1. \sin x_1/2 = 0; x_1/2 = \pi k; x_1 = 2\pi k.$$

$$2. \cos x_2/2 - \sin x_2/2 = 0; \operatorname{tg} x_2/2 = 1;$$

$$x_2/2 = \pi/4 + \pi k; x_2 = \pi/2 + 2\pi k.$$

**Приведение к однородному уравнению**

Уравнение называется однородным относительно  $\sin x$  и  $\cos x$ , если все его члены одной и той же степени относительно  $\sin x$  и  $\cos x$  одного и того же угла.

$$4\sin^2 x - 5\sin x \cdot \cos x + 7\cos^2 x = 3.$$

Чтобы решить однородное уравнение, надо:

- перенести все его члены в левую часть:  
 $4\sin^2 x - 5\sin x \cdot \cos x + 7\cos^2 x - 3\sin^2 x - 3\cos^2 x = 0; \sin^2 x - 5\sin x \cdot \cos x + 4\cos^2 x = 0$
- вынести все общие множители за скобки;
- приравнять все множители и скобки нулю;
- скобки, приравненные нулю, дают однородное уравнение меньшей степени, которое следует разделить на  $\cos x$  в старшей степени (в данном конкретном случае на  $\cos^2 x$ ):

$$\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x + 4 = 0$$

- решить полученное алгебраическое уравнение относительно  $\operatorname{tg} x$ :

$$\operatorname{tg} x = y; y^2 - 5y + 4 = 0;$$

$$y_1 = 4 \Rightarrow \operatorname{tg} x_1 = 4; x_1 = \operatorname{arctg} 4 + \pi k.$$

$$y_2 = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} x_2 = 1; x_2 = \pi/4 + \pi k.$$

### Введение вспомогательного угла

Решим уравнение вида

$a \cos x + b \sin x = c$ , где  $a, b, c$  — коэффициенты;  $x$  — неизвестное.

Полагая, что  $a$  и  $b$  одновременно не равны нулю (в этом случае уравнение превращается в тождество), разделим обе части уравнения на  $\sqrt{a^2 + b^2}$ :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Обозначая  $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \alpha$

Замечаем, что  $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \alpha$ :

$$\sin \alpha \cos x + \cos \alpha \sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\sin(\alpha + x) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\alpha + x = (-1)^k \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \pi k$$

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \alpha + \pi k,$$

$$\text{где } \alpha = \arcsin \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \arccos \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Заметим, что этим способом могут быть решены также трансцендентные уравнения, решение которых другим методом затруднительно или невозможно:

$$1 + 3^{\frac{x}{2}} = 2^x$$

Разделив обе части на  $2^x$ , получаем:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x = 1, \text{ или}$$

$$\left(\sin \frac{\pi}{6}\right)^x + \left(\cos \frac{\pi}{6}\right)^x = 1; x = 2.$$

**Преобразование произведения в сумму.**

Здесь используются соответствующие формулы.

$$2 \sin 3x \sin 5x = \cos 2x$$

Применяем формулу преобразования произведения:

$$\cos 2x - \cos 8x = \cos 2x$$

$$\cos 8x = 0$$

$$8x = \pi/2 + \pi k$$

$$x = \pi/16 + \pi k/8$$

**Сравнение левой и правой части.**

$$\sin 3x + \sin 7x = 2$$

Поскольку  $\sin 3x \leq 1$  и  $\sin 7x \leq 1$ ,  $\sin 3x = 1$  и  $\sin 7x = 1$ ,

$$\text{Из первого уравнения имеем: } x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$$

На интервале от 0 до  $2\pi$  имеется 3 решения:  $\pi/6$ ;  $5\pi/6$ ;  $3\pi/2$  для  $k = 0, 1, 2$  соответственно. Подставляя эти значения во второе уравнение, получаем:  $\sin 7\pi/6 \neq 1$ ;  $\sin 35\pi/6 \neq 1$ ;  $\sin 21\pi/2 = 1$ . Подставляя  $k = 2$  в первое уравнение, получаем окончательно:  $x = 3\pi/2 + 2\pi k$ .

**Универсальная подстановка через тангенс половинного угла.**

$$5 \sin x - 12 \cos x = 13$$

$$5 \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} - 12 \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = 13$$

$$10tg\frac{x}{2} - 12 + 12tg^2\frac{x}{2} = 13 + 13tg^2\frac{x}{2}$$

$$tg^2 \frac{x}{2} - 10tg \frac{x}{2} + 25 = 0$$

произведем замену:

$$tg \frac{x}{2} = y$$

$$y^2 - 10y + 25 = 0 \quad y_{1,2} = 5$$

$$tg \frac{x}{2} = 5$$

$$\frac{x}{2} = \arctg 5 + k\pi$$

$$x = 2\arctg 5 + 2k\pi$$

### **Тригонометрические неравенства**

Методы решения тригонометрических неравенств не отличаются от методов решения уравнений. В обоих случаях исходное неравенство (уравнение) необходимо привести к элементарному. Рассмотрим список элементарных неравенств.

#### **$\sin x > a$ :**

если  $a \geq 1$ , неравенство не имеет решений;  
если  $a < -1$ , любое действительное число  $x$  удовлетворяет неравенству;  
если  $-1 \leq a < 1$ ,  $\arcsin a + 2\pi k < x < \pi - \arcsin a + 2\pi k$ , где  $k$  — любое целое число.

#### **$\sin x \geq a$ :**

если  $a > 1$ , неравенство не имеет решений;  
если  $a = 1$ ,  $x = \pi/2 + 2\pi k$ ;  
если  $a \leq -1$ , любое действительное число  $x$  удовлетворяет неравенству;  
если  $-1 < a < 1$ ,  $\arcsin a + 2\pi k \leq x \leq \pi - \arcsin a + 2\pi k$ , где  $k$  — любое целое число.

#### **$\sin x < a$ :**

если  $a \leq -1$ , неравенство не имеет решений;  
если  $a > 1$ , любое действительное число  $x$

удовлетворяет неравенству;  
 если  $-1 < a \leq 1$ ,  $-\pi - \arcsin a + 2\pi k < x < \arcsin a + 2\pi k$ , где  $k$  — любое целое число.

**$\sin x \leq a$ :**

если  $a < -1$ , неравенство не имеет решений;  
 если  $a = -1$ ,  $x = -\pi/2 + 2\pi k$ ;  
 если  $a \geq 1$ , любое действительное число  $x$  удовлетворяет неравенству;  
 если  $-1 < a < 1$ ,  $-\pi - \arcsin a + 2\pi k < x < \arcsin a + 2\pi k$ , где  $k$  — любое целое число.

**$\cos x > a$ :**

если  $a \geq 1$ , неравенство не имеет решений;  
 если  $a < -1$ , любое действительное число  $x$  удовлетворяет неравенству;  
 если  $-1 \leq a < 1$ ,  $-\arccos a + 2\pi k < x < \arccos a + 2\pi k$ , где  $k$  — любое целое число.

**$\cos x \geq a$ :**

если  $a > 1$ , неравенство не имеет решений;  
 если  $a = 1$ ,  $x = 2\pi k$ ;  
 если  $a \leq -1$ , любое действительное число  $x$  удовлетворяет неравенству;  
 если  $-1 < a < 1$ ,  $-\arccos a + 2\pi k < x < \arccos a + 2\pi k$ , где  $k$  — любое целое число.

**$\cos x < a$ :**

если  $a \leq -1$ , неравенство не имеет решений;  
 если  $a > 1$ , любое действительное число  $x$  удовлетворяет неравенству;  
 если  $-1 < a \leq 1$ ,  $\arccos a + 2\pi k < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi k$ , где  $k$  — любое целое число.

**$\cos x \leq a$ :**

если  $a < -1$ , неравенство не имеет решений;  
 если  $a = -1$ ,  $x = \pi + 2\pi k$ ;  
 если  $a \geq 1$ , любое действительное число  $x$  удовлетворяет неравенству;  
 если  $-1 < a < 1$ ,  $\arccos a + 2\pi k < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi k$ , где  $k$  — любое целое число.

**$\tan x > a$ :**

$\arctan a + \pi k < x < \pi/2 + \pi k$ , где  $k$  — любое целое число,  $a$  — любое действительное число.

**$\tan x \geq a$ :**

$\arctan a + \pi k \leq x < \pi/2 + \pi k$ , где  $k$  — любое целое число,  $a$  — любое действительное число.

**$\tan x < a$ :**

$-\pi/2 + \pi k < x < \arctan a + \pi k$ , где  $k$  — любое целое число,  $a$  — любое действительное число.

**$\tan x \leq a$ :**

$-\pi/2 + \pi k < x \leq \arctan a + \pi k$ , где  $k$  — любое целое число,  $a$  — любое действительное число.

**Задачи  
по три-  
гонометрии**

Вычислить:

$$T6. \frac{\sin(4x + \frac{5}{2}\pi)}{1 + \cos(4x - \frac{3}{2}\pi)}$$

$$T7. \frac{\operatorname{ctg}^2 30^\circ + 0.5\cos 60^\circ}{\sin^2 150^\circ}$$

$$T8. \frac{2\sin 270^\circ \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{ctg} 60^\circ}{(1 + \cos 270^\circ)(1 - \operatorname{tg}^2 30^\circ)}$$

Упростить:

$$T9. (4\sin 45^\circ - 32^{1/2}\operatorname{tg} 120^\circ) \div (3\cos 90^\circ - \cos 135^\circ)$$

$$T10. \frac{3\sin 210^\circ + \operatorname{tg} 240^\circ - \operatorname{ctg} 30^\circ}{\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ}$$

$$T11. \frac{5\operatorname{tg} 120^\circ + 2\cos 150^\circ}{2\sqrt{3}\sin 30^\circ}$$

$$T12. (1 + \operatorname{tg}^2 x)(1 - \sin^2 x) - \sin^2 x$$

$$T13. \frac{1 - \operatorname{tg}(\pi - 2x)\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}(\frac{3}{2}\pi - x) - \operatorname{tg} x}$$

$$T14. \frac{1 - \sin x}{1 - \cos x} \div \frac{1 + \sec x}{1 + \operatorname{cosec} x}$$

$$T15. \frac{2\cos^2 x - 1}{1 - 2\sin^2 x}$$

$$T16. \frac{1 - \cos(8x - 3\pi)}{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 2x}$$

$$T17. \frac{\sin(4x + \frac{5}{2}\pi)}{1 + \cos(4x - \frac{3}{2}\pi)}$$

$$T18. \frac{1}{\cos x - \cos 3x} - \frac{1}{\cos 3x - \cos 5x}$$

$$T19. \frac{1}{\sin x - \sin 3x} - \frac{1}{\sin 3x - \sin 5x}$$

$$T20. 1 - \sin(\frac{x}{2} + 3\pi) - \cos^2 \frac{x}{4} + \sin^2 \frac{x}{4}$$

$$T21. (\sin 2x + \frac{\sin 4x}{\sin^4 x - \cos^4 x})(\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x)$$

$$T22. \sin^2(30^\circ + x) + \sin^2(30^\circ - x) - \sin^2 x$$

$$T23. \sin^2(x + y) - \sin^2(x - y)$$

$$T24. \frac{\sin 8x + \sin 9x + \sin 10x + \sin 11x + \sin 12x}{\cos 8x + \cos 9x + \cos 10x + \cos 11x + \cos 12x}$$

$$T25. \frac{(1 + \operatorname{tg}^2(\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}\pi))\cos^2(\pi + \frac{x}{4})}{(\operatorname{tg}(\frac{5}{2}\pi - \frac{x}{4}) - \operatorname{tg}^2(\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}\pi))\sin^{-1}(\frac{9}{2}\pi + \frac{x}{2})}$$

$$T26. \frac{\operatorname{ctg}(270^\circ - x)}{1 - \operatorname{tg}^2(x - 180^\circ)} \cdot \frac{\operatorname{ctg}^2(360^\circ - x) - 1}{\operatorname{ctg}(180^\circ + x)}$$

$$T27. \frac{\cos^2 x + 2\sin^2(x - \pi)}{\cos^3(x - 4\pi)} + \frac{\cos^2 x + 4\sin x + \sin^2(x + \pi)}{(1 + 4\sin x)\cos x}$$

$$T28. \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4}) + \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4})$$

$$T29. \frac{\operatorname{tg}(270^\circ - x)\sin 130^\circ\cos 320^\circ\sin 270^\circ}{\operatorname{ctg}(180^\circ - x)\cos 50^\circ\sin 220^\circ\cos 360^\circ}$$

$$T30. \cos(\frac{\pi}{3} - 2x)\sin(\frac{\pi}{6} - 2x) + \sin^2 2x$$

Решить уравнения:

$$T31. \operatorname{ctg} x - 3 \operatorname{tg} x = 0$$

$$T32. \sin^2 x + 2\sin x + 1 = 3\cos^2 x$$

$$T33. 8\cos x - 2\cos 2x = 1$$

$$T34. 3\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 2x$$

$$T35. \operatorname{tg} 2x = 3 \operatorname{ctg} x$$

$$T36. \sin 2x (\sin x + \cos x) = 4\sin x - 2\cos x$$

$$T37. 11\sin x - 2\cos x = 10$$

$$T38. 1 + \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sin x}$$

$$T39. \sin x + \cos x = \cos 2x$$

$$T40. \sin x + \sin^2 x + \cos^3 x = 0$$

$$T41. 2\sin^3 5x + 7\cos 5x = 9$$

$$T42. \sin^{21} x + \cos^{21} x = \frac{\pi}{3}$$

$$T43. \cos 2x \cos^3 x = -1$$

$$T44. 2\cos 4x - \sin 6x = 2$$

Решить неравенства

$$T45. \sin x + \sin 2x + \sin 3x > 0$$

$$T46. -1 < \operatorname{tg} x < 1$$

$$T47. 2 \cos (2x + 100^\circ) \leq -1$$

$$T48. 2\sin^2 x - 5 \sin x + 2 \geq 0$$

$$T49. \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x \geq \sqrt{2}$$

$$T50. 2 \cos x (\cos x - \sqrt{8} \operatorname{tg} x) < 5$$

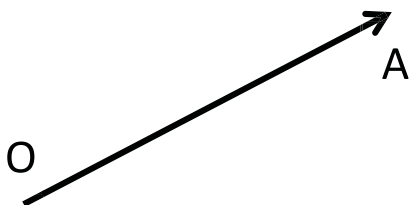
$$T51. \sin 2x \sin 3x - \cos 2x \cos 3x > \sin 10x$$



# Векторы

Сложение свободных векторов  
Умножение вектора на число  
Скалярное произведение векторов  
Проекция вектора на вектор  
Векторное произведение векторов  
Задачи на векторы.

Пусть имеем отрезок  $OA$ . Назовем точку  $O$  началом отрезка, а точку  $A$  его концом. Тогда отрезок станет направленным из точки  $O$  в точку  $A$ . Такой направленный отрезок называется вектором и обозначается  $\overrightarrow{OA}$ . Вектора также можно обозначать малыми латинскими буквами:  $\mathbf{a}$ . Если точки  $O$  и  $A$  совпадают, мы говорим, что имеем дело с нуль-вектором.



При обозначении векторов необходимо учитывать, что первая буква всегда обозначает начало вектора, а вторая — его конец. Таким образом, если отрезки  $OA$  и  $AO$  — один и тот же отрезок, то вектора  $\overrightarrow{OA}$  и  $\overrightarrow{AO}$  — абсолютно разные. Они имеют одинаковую длину, но разное направление. Длиной или модулем вектора называется длина соответствующего отрезка. Таким образом, длина нуль-вектора равна нулю. Длина вектора обозначается  $|\overrightarrow{OA}|$ .

Два вектора  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  считаются равными, если:

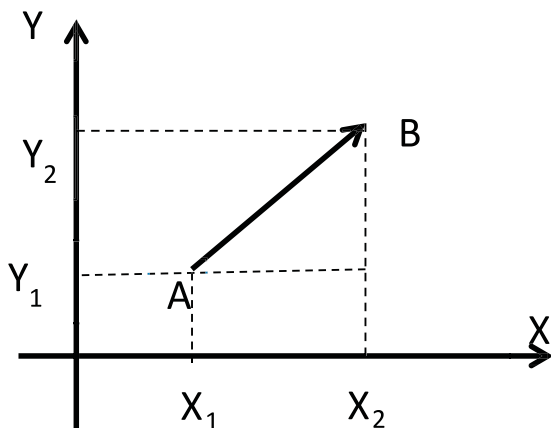
- равны их длины, т. е.  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ ;
- прямые  $AB$  и  $CD$  параллельны (или совпадают);
- вектора  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  направлены в одну сторону.

Это обозначает, что перемещение вектора параллельно самому себе приводит

к образованию равного ему вектора. С математической точки зрения, это тот же самый вектор. С точки зрения физика, однако, это не так, поскольку точка приложения силы имеет значение. Если точка приложения не важна, то такие вектора могут быть перемещены в любую точку пространства и поэтому называются свободными.

Углом между двумя векторами называется угол  $\alpha$  в интервале  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$  между направлениями двух векторов. Угол вектора с самим собой или с другим коллинеарным и однонаправленным вектором равен нулю. Угол между векторами  $a$  и  $-a$  равен  $180^\circ$ .

Предположим теперь, что на плоскости задана система координат. Тогда можно определить, что такое координаты вектора. По определению координаты вектора получаются, если из координат его конца вычесть координаты начала.



Если точка А имеет координаты  $(x_1; y_1)$ , а точка В имеет координаты  $(x_2; y_2)$ , то координатами вектора АВ называется пара чисел  $(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ . Таким образом, координаты вектора показывают, на какие величины нужно сдвинуться вдоль осей координат, чтобы попасть из точки А в точку В.

В частности, если начало вектора ОА совпадает с началом координат, то координатами ОА являются координаты точки А.

Как видно из рисунка, знание координат концов отрезка дает возможность посчитать его длину:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

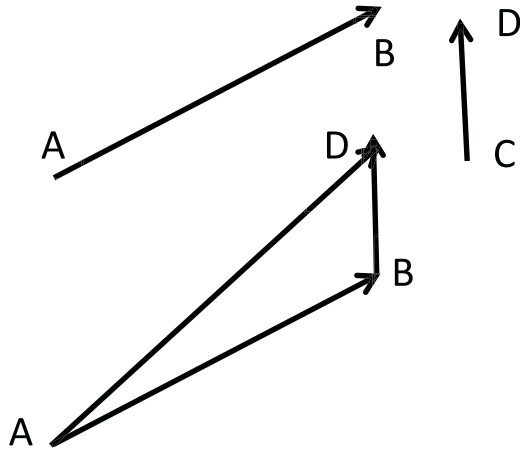
по теореме Пифагора. Для вычисления длины вектора, заданного своими координатами  $AB=(x; y)$ , опять воспользуемся теоремой Пифагора:

$$|AB| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

### ***Сложение свободных векторов***

Пусть нужно сложить вектора АВ и CD. Поскольку вектора свободные, мы можем совместить точки В и С. Соединяя точки А и D, получаем вектор AD, равный сумме векторов АВ и CD, т. е. мы совмещаем начало второго вектора с концом первого, и тогда результирующий вектор соединяет начало первого с концом второго вектора. Для векторов  $a(x_1; y_1)$  и  $b(x_2; y_2)$ , заданных своими координатами, сумма определяется вектором  $c(x_3; y_3)$ , где координаты вектора с определяются по формулам:

$$x_3 = x_1 + x_2; \quad y_3 = y_1 + y_2$$

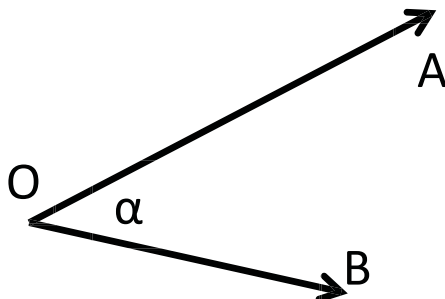


### **Умножение вектора на число**

**Произведением** ненулевого вектора **a** на число  $N$  является такой вектор **b**, длина которого равна  $|N||a|$ , причём векторы **a** и **b** направлены в одну сторону при  $N > 0$  и противоположно направлены при  $N < 0$ . Произведением вектора на нуль считается нуль-вектор. Другими словами, длина вектора умножается на модуль числа, а направление не меняется, когда число положительно, и становится противоположным, когда число отрицательно. Для вектора **a**( $x; y$ ), заданного своими координатами, произведение вектора на число  $N$  определяется вектором **b**( $Nx; Ny$ ), у которого все координаты умножены на это число.

**Скалярное  
произведение  
векторов**

Скалярным называется произведение двух векторов, при котором результат является скаляром. Предположим, необходимо вычислить скалярное произведение двух векторов  $OA$  и  $OB$ .



Перенесем эти вектора параллельно самим себе так, чтобы их начала совпадали в точке  $O$ . Тогда скалярным произведением векторов  $OA$  и  $OB$  будет число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т. е.

$$(OA \times OB) = |OA| \times |OB| \times \cos \alpha.$$

Для обозначения скалярного произведения используются круглые скобки. Заметим, что скалярное произведение вектора на нуль-вектор также, как скалярное произведение ортогональных векторов, равно нулю. Скалярный квадрат вектора очевидно равен квадрату длины вектора:  $a^2 = |a|^2$ . Для векторов  $a(x_1; y_1)$  и  $b(x_2; y_2)$ , заданных своими координатами, скалярное произведение определяется числом  $N = x_1 x_2 + y_1 y_2$ .

Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

**Коммутативный закон** скалярного произведения — скалярное произведение векторов не зависит от порядка их следования, т. е.  $(\vec{OA} \times \vec{OB}) = (\vec{OB} \times \vec{OA})$ , поскольку величина угла между векторами не меняется, а направление не влияет на результат, т.к. косинус — четная функция.

**Дистрибутивный закон** скалярного произведения — для трех векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , и  $\vec{c}$  справедливо равенство

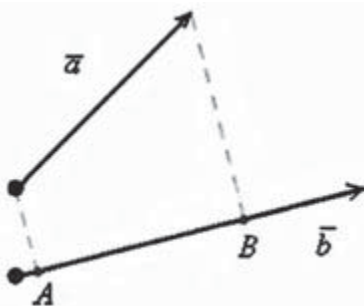
$$((\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c}).$$

**Ассоциативный закон** скалярного произведения — константу можно вынести из скалярного произведения

$$(k\vec{a} \times \vec{b}) = k(\vec{a} \times \vec{b}).$$

### **Проекция вектора на вектор**

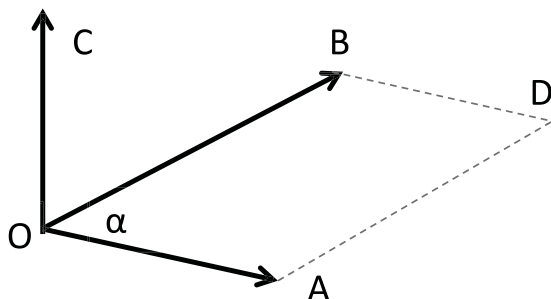
Рассмотрим векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Спроецируем вектор  $\vec{a}$  на вектор  $\vec{b}$ , для этого из начала и конца вектора  $\vec{a}$  опустим перпендикуляры на вектор  $\vec{b}$  (зелёные пунктирные линии). Представьте, что на вектор  $\vec{b}$  перпендикулярно падают лучи света. Тогда отрезок  $AB$  (красная линия) будет «тенью» вектора  $\vec{a}$ . Проекцией вектора  $\vec{a}$  на вектор  $\vec{b}$  является длина отрезка  $AB$ , т. е. проекция — это скаляр.



Совмещая начала векторов  $a$  и  $b$ , видим, что, по определению косинуса, проекция вектора  $a$  на вектор  $b$  равна  $|a| \times \cos \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между векторами  $a$  и  $b$ .

### ***Векторное произведение векторов***

Векторным называется произведение двух векторов, при котором результат является вектором. Предположим, необходимо вычислить векторное произведение двух неколлинеарных (т. е. непараллельных) векторов  $OA$  и  $OB$ .



Перенесем эти вектора параллельно самим себе так, чтобы их начала совпадали в точке  $O$ . Тогда векторным произведением векторов  $OA$  и  $OB$  будет вектор, величина которого равна площади параллелограмма, построенного на этих векторах ( $OBDA$ ), а направление перпендикулярно плоскости векторов  $OA$  и  $OB$  в сторону движения штопора, ручка которого вращается от  $OA$  к  $OB$  (вектор  $OC$ ). Для обозначения векторного произведения используются квадратные скобки. Заметим, что векторное произведение вектора на нуль-вектор, а также векторное произведение параллельных векторов, равно

нуль-вектору. Как мы можем видеть, векторное произведение не обладает свойством коммутативности — при перемещении сомножителей результирующий вектор меняет знак, поскольку вектор  $OC$  будет направлен в противоположную сторону:  $[OA \times OB] = -[OB \times OA] = -OC$ . Свойства ассоциативности (константу можно выносить за пределы векторного произведения) и дистрибутивности (можно раскрывать скобки и приводить подобные) для векторного произведения справедливы также, как и для скалярного.

Вспоминая, что площадь параллелограмма равна произведению двух его сторон на синус угла между ними, получаем для длины векторного произведения:  $||[OA \times OB]|| = |OA| \times |OB| \times \sin \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между векторами  $OA$  и  $OB$ . Векторным произведением коллинеарных векторов является нуль-вектор.

### ***Задачи на векторы***

V1. Даны два вектора  $a(3; 4)$  и  $b(7; 8)$ . Найти длину вектора  $a - b$ .

V2. Можно ли расположить на плоскости три вектора так, чтобы модуль суммы любых двух из них был равен 1, а сумма всех трёх была равна нулевому вектору?

V3. Найти скалярное произведение векторов  $a(2; -4)$  и  $b(-3; -7)$ .

V4. Найти квадрат вектора  $(3; -2)$ .

V5. Найти скалярное произведение векторов  $x(2a-1; a^2)$  и  $y(0; a)$ .

V6. Найти угол между векторами  $a(6; 2)$  и  $b(-1; 3)$ .

V7. Найти угол между векторами  $a(\sin \pi/5; \cos \pi/5)$  и  $b(\sin \pi/30; \cos \pi/30)$ .

V8. Доказать, что если диагонали четырехугольника ABCD перпендикулярны, то и диагонали любого другого четырехугольника с такими же длинами сторон перпендикулярны.

V9. Какую линию описывает середина отрезка между двумя пешеходами, равномерно идущими по прямым дорогам?

## Приложение 1

| Единица измерения | Сокращенное обозначение | Описание                                                                               | Величина               |
|-------------------|-------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| Метр              | м                       | длина пути, проходимого светом в вакууме за интервал времени $1/299\,792\,458$ секунды | Эталон в системе СИ    |
| Дециметр          | дм                      |                                                                                        | $10^{-1}$ м            |
| Сантиметр         | см                      |                                                                                        | $10^{-2}$ м            |
| Миллиметр         | мм                      |                                                                                        | $10^{-3}$ м            |
| Микрон            | мкм                     |                                                                                        | $10^{-6}$ м            |
| Нанометр          | нм                      |                                                                                        | $10^{-9}$ м            |
| Ангстрем          | Å                       |                                                                                        | $10^{-10}$ м           |
| Ферми             | фм                      |                                                                                        | $10^{-15}$ м           |
| Километр          | км                      |                                                                                        | $10^3$ м               |
| Световой год      | ly                      | Расстояние, которое свет проходит за один юлианский год                                | $9,46 \cdot 10^{15}$ м |
| Парсек            | пк                      |                                                                                        | $31 \cdot 10^{15}$ м   |
| Дюйм              | "                       |                                                                                        | 2,54 см                |
| Фут               | '                       |                                                                                        | 12"                    |
| Ярд               | ярд                     |                                                                                        | 3' или 36"             |
| Миля              | мл                      | тысяча двойных шагов римских солдат в полном облачении на марше                        | 5280' или 1609,344 м   |



## Содержание

|                                                        |           |
|--------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Алгебра.....</b>                                    | <b>5</b>  |
| Производные пропорции .....                            | 6         |
| Формулы сокращенного умножения .....                   | 6         |
| Квадратные уравнения .....                             | 7         |
| Системы уравнений.....                                 | 8         |
| Функции и графики .....                                | 10        |
| Прогрессии .....                                       | 11        |
| Степени и логарифмы .....                              | 13        |
| Задачи по алгебре .....                                | 17        |
| <b>Геометрия .....</b>                                 | <b>21</b> |
| Определения .....                                      | 22        |
| Треугольники.....                                      | 26        |
| Признаки равенства треугольников .....                 | 27        |
| Признаки подобия треугольников .....                   | 29        |
| Теорема Пифагора .....                                 | 31        |
| Окружности .....                                       | 34        |
| Задачи по геометрии.....                               | 39        |
| <b>Введение в тригонометрию.....</b>                   | <b>41</b> |
| Тригонометрические функции для острых углов.....       | 42        |
| Тригонометрические функции для произвольного угла..... | 44        |
| Измерение углов.....                                   | 45        |
| Формулы приведения.....                                | 47        |
| Формулы сложения аргументов.....                       | 49        |
| Графики тригонометрических функций .....               | 52        |
| Обратные тригонометрические функции .....              | 55        |
| Тригонометрические уравнения .....                     | 57        |
| Методы решения тригонометрических уравнений.....       | 58        |
| Тригонометрические неравенства .....                   | 62        |
| Задачи по тригонометрии .....                          | 64        |
| <b>Векторы .....</b>                                   | <b>69</b> |
| Сложение свободных векторов.....                       | 72        |
| Умножение вектора на число .....                       | 73        |
| Скалярное произведение векторов.....                   | 74        |
| Проекция вектора на вектор .....                       | 75        |
| Векторное произведение векторов.....                   | 76        |
| Задачи на векторы.....                                 | 77        |

Михаил Креславский

# Основы математики для приложений

Редактор: А. Постромина

Главный редактор: Д. Кожевникова

Компьютерная верстка: Д. Зотов

Корректор: А. Постромина

ISBN 978-5-907379-16-9

Подписано в печать: 8.12.2020

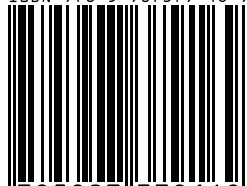
Формат 60х90 1/16. Гарнитура «Literaturnaya».

Печать офсетная. Бумага офсетная.

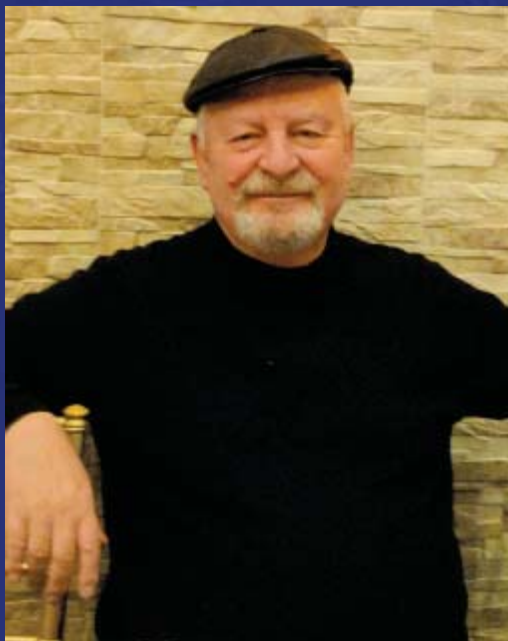
Усл. печ. л. 5. Тираж 2000 экз.

Общенациональная ассоциация молодых  
музыкантов, поэтов и прозаиков  
Отпечатано в типографии  
АО «Т8 Издательские технологии»  
109316, г. Москва, Волгоградский проспект, д. 42,  
корп. 5, к. 6.

ISBN 978-5-907379-16-9



9 785907 379169 >



**Михаил  
Креславский**

Member of 1998  
“Who is who  
in information  
technology”.

## Основы математики для приложений

Эта книга содержит краткое изложение важнейших разделов из элементарной математики (алгебры, геометрии, тригонометрии), необходимых при изучении различных наук. Книга требует минимальную предварительную подготовку, хотя все результаты подробно выводятся и обосновываются.

Для физиков, химиков, биологов книга даёт необходимые теоремы и формулы, используемые в этих дисциплинах. Математики могут получить необходимый опыт формулировки результатов и методов доказательств.

В книге подобраны интересные и поучительные упражнения. Их решение абсолютно необходимо для овладения навыками применения математики. Книга рекомендуется всем желающим получить краткое пособие по основным результатам элементарной математики. Книга содержит большое количество задач повышенной сложности, так что может быть использована при подготовке к участию в математических олимпиадах.



ОБЩЕНАЦИОНАЛЬНАЯ  
АССОЦИАЦИЯ МОЛОДЫХ  
МУЗЫКАНТОВ, ПОЭТОВ И ПРОЗАИКОВ

ISBN 978-5-907379-16-9



9 785907 379169 >