

2016–2017 уч. г.

Материалы студенческой научной сессии



Математический факультет

Министерство образования и науки Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский педагогический государственный университет»

Математический факультет



Материалы студенческой научной сессии

г. Москва, 03–08 апреля 2017 г.

Сборник статей

Под общей редакцией Е. С. Крупицына

Электронное издание

МПГУ
Москва — 2018

УДК 5(082)
ББК 22.1я43
М341

М341 Материалы студенческой научной сессии. г. Москва, 03–08 апреля 2017 г. : сборник статей / под общ. ред. Крупицына Е. С. ; Московский педагогический государственный университет. Математический факультет [Электронное издание]. — Москва : МПГУ, 2018. — 112 с.

ISBN 978-5-4263-0613-4

Сборник содержит статьи участников студенческой научной сессии, прошедшей в г. Москва 03–08 апреля 2017 г.

Адресован студентам, магистрантам, аспирантам, учителям математики и информатики.

УДК 5(082)
ББК 22.1я43

ISBN 978-5-4263-0613-4

© МПГУ, 2018
© Коллектив авторов, 2018

Содержание

Яковлев С. С. (Москва, МПГУ)

Аппроксимация табличной функции полиномами по методу наименьших квадратов с использованием СКМ Maple 6

Шульгина Д. С. (Москва, МПГУ)

Методика разработки и применения электронного образовательного ресурса при обучении информатике на примере темы «Системы счисления» 12

Федотенко М. А. (Москва, МПГУ)

Мобильное приложение как средство обучения решению задач по программированию школьного курса информатики 20

Кульгускин И. А. (Москва, МПГУ)

О порядках 2×2 матриц с комплексными, действительными и рациональными коэффициентами. Матричные корни квадратных трехчленов над полем $\mathbb{R}$ 26

Петров И. А.

Строение виртуального тензора и формы Ли главного T^1 – расслоения над некоторыми классами почти контактных метрических многообразий 33

Салахова А. А. (Москва, МПГУ)

Формирование инженерной культуры обучающихся средствами робототехнических соревнований FIRST Tech Challenge 38

Тырданова М. С. (Москва, МПГУ)

Применение технологии дополнительной реальности при изучении трехмерных графических моделей 43

Юхнов А. А. (Москва, МПГУ)

Об эндоморфизмах r -локальных групп без кручения 49

Алексеева Н. А. (Москва, МПГУ)

Применение кватернионов к преобразованиям четырехмерного евклидова пространства 51

Александрова А. Д. (Москва, МПГУ)

Инверсия на плоскости 67

Артемов Д. Ю. (Москва, МПГУ)

О нумерации целочисленных многочленов одной переменной 77

Попадьина Е. А. (Москва, МПГУ)

Методика обучения умению правильно рассуждать учащихся 9 класса на курсе по выбору 93

Горгинян Ю. А. (Москва, МПГУ)

Классы почти контактных метрических структур тотального пространства T^1 -расслоения с некоторыми связностями над почти эрмитовыми многообразиями	103
---	-----

Аппроксимация табличной функции полиномами по методу наименьших квадратов с использованием СКМ Maple

Яковлев С. С. (Москва, МПГУ)

ss.yakovlev@mpgu.edu

науч. рук. Горелик В.А. д.ф.-м.н., профессор каф. ТИДМ МПГУ

Аннотация

Рассматривается постановка и решение задачи аппроксимации табличной функции полиномами n -ой степени по методу наименьших квадратов (МНК) с использованием инструментария системы компьютерной математики (СКМ) Maple.

1. Постановка задачи

Приближение данных табличной функции

$$\{(x_i, y_i)\}_{i=1, \dots, N} \quad (1)$$

полиномом n -ной степени вида

$$p^{(n)}(x) = p_1 x^n + p_2 x^{(n-1)} + \dots + p_n x + p_{n+1} \quad (2)$$

по методу наименьших квадратов (МНК) состоит в решении следующей задачи минимизации

$$\min_{p_1, p_2, \dots, p_{n+1}} \sum_{i=1}^N \left(p^{(n)}(x_i) - y_i \right)^2 \quad (3)$$

Это означает, что разыскивается полином $p^{(n)}(x)$, который наименее уклоняется от заданных данных в том смысле, что сумма квадратов расстояний от заданных точек $\{(x_i, y_i)\}_{i=1, \dots, N}$ до точек полинома $\{(x_i, p^{(n)}(x_i))\}_{i=1, \dots, N}$ будет минимальной.

Например, на рисунке 1 приведена аппроксимация табличной функции

$$\{(x_i, y_i)\} = \{(1, 0); (2, -2); (3, 9); (4, -2); (5, -21); (6, 30)\}, \quad (4)$$

где $i = 1, 2, \dots, 6$, полиномом третьей степени, коэффициенты которого найдены по МНК:

$$p^{(3)}(x) = 3,0278 \cdot x^3 - 29,202 \cdot x^2 + 80,198 \cdot x - 58,0 \quad (5)$$

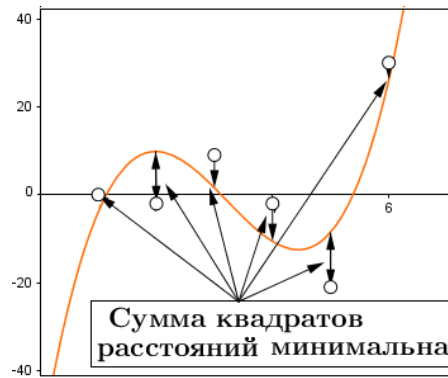


Рис. 1.

При решении задачи полиномиальной аппроксимации степень полинома должна быть меньше количества заданных точек для того, чтобы такой полином был единственным.

Запишем полином (2) в виде

$$p^{(n)}(x) = p_1x^n + p_2x^{(n-1)} + \dots + p_nx + p_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} p_kx^{n-k+1} \quad (6)$$

Тогда задача о построении полиномиального приближения сводится к поиску минимума по переменным $p_1, p_2, \dots, p_{n+1}$ следующей функции

$$F(p_1, p_2, \dots, p_{n+1}) = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{k=1}^{n+1} p_kx_i - y_i \right)^2 \quad (7)$$

Функция $F(p_1, p_2, \dots, p_{n+1})$ является квадратичной функцией (с неотрицательными коэффициентами при квадратах неизвестных), поэтому ее минимум достигается в той точке, где выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} \frac{\partial F(p_1, p_2, \dots, p_{n+1})}{\partial p_1} = 0 \\ \frac{\partial F(p_1, p_2, \dots, p_{n+1})}{\partial p_2} = 0 \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial F(p_1, p_2, \dots, p_{n+1})}{\partial p_{n+1}} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Взяв частные производные от $F(p_1, p_2, \dots, p_{n+1})$ по $p_1, p_2, \dots, p_{n+1}$ и приравняв их к нулю, получаем систему линейных алгебраических уравнений, состоящую из $(n+1)$ -го уравнения для нахождения искомых коэффициентов полинома n -ой степени, наилучшим образом в смысле наименьших квадратов

приближающего данные $\{(x_i, y_i)\}_{i=1, \dots, N}$ и содержит ошибку в среднеквадратичной норме, т.е. значение

$$e = \sqrt{\min_{p_1, p_2, \dots, p_{n+1}} \sum_{i=1}^N (p^{(n)}(x_i) - y_i)^2} \quad (9)$$

Эта система имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \left(\sum_{i=1}^N x_i^{n-j+1} \cdot x_i^{n-k+1} \right)^2 = \sum_{i=1}^N x_i^{n-j+1} \cdot y_i, \quad (10)$$

где $j = 1, 2, \dots, n+1$.

Переходя к матричной форме записи системы уравнений (10), получим

$$\mathbf{A} \cdot \vec{p} = \vec{b}, \quad (11)$$

где вектор $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_{n+1})^T$, а элементы матрицы $\mathbf{A}$ и вектора $\vec{b}$ правой части системы выражаются формулами:

$$a_{jk} = \sum_{i=1}^N x_i^{n-j+1} \cdot x_i^{n-k+1}; \quad b_j = \sum_{i=1}^N x_i^{n-j+1} \cdot y_i, \quad (12)$$

где $j, k = 1, 2, \dots, n+1$.

Таким образом, задача полиномиальной аппроксимации сводится к задаче решения системы линейных уравнений (10).

Данная система имеет единственное решение и может быть решена методами линейной алгебры, например, методом Крамера или методом обратной матрицы, при котором $\mathbf{p} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$.

Например, для поиска значений коэффициентов полинома (5) по формулам (12)) получим систему уравнений

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N x_k^6 & \sum_{k=1}^N x_k^5 & \sum_{k=1}^N x_k^4 & \sum_{k=1}^N x_k^3 \\ \sum_{k=1}^N x_k^5 & \sum_{k=1}^N x_k^4 & \sum_{k=1}^N x_k^3 & \sum_{k=1}^N x_k^2 \\ \sum_{k=1}^N x_k^4 & \sum_{k=1}^N x_k^3 & \sum_{k=1}^N x_k^2 & \sum_{k=1}^N x_k \\ \sum_{k=1}^N x_k^3 & \sum_{k=1}^N x_k^2 & \sum_{k=1}^N x_k & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N x_k^3 \cdot y_k \\ \sum_{k=1}^N x_k^2 \cdot y_k \\ \sum_{k=1}^N x_k \cdot y_k \\ \sum_{k=1}^N y_k \end{bmatrix} \quad (13)$$

ИЛИ

$$\begin{bmatrix} 67171 & 12201 & 2275 & 441 \\ 12201 & 2275 & 441 & 91 \\ 2275 & 441 & 91 & 21 \\ 441 & 91 & 21 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3954 \\ 596 \\ 90 \\ 14 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Находя обратную матрицу системы (14)

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{324} & -\frac{35}{216} & \frac{317}{648} & -\frac{7}{18} \\ -\frac{35}{216} & \frac{871}{504} & -\frac{575}{108} & \frac{13}{3} \\ \frac{317}{648} & -\frac{575}{108} & \frac{76555}{4536} & -\frac{257}{18} \\ -\frac{7}{18} & \frac{13}{3} & -\frac{257}{18} & 13 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

получаем

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} \frac{5}{324} & -\frac{35}{216} & \frac{317}{648} & -\frac{7}{18} \\ -\frac{35}{216} & \frac{871}{504} & -\frac{575}{108} & \frac{13}{3} \\ \frac{317}{648} & -\frac{575}{108} & \frac{76555}{4536} & -\frac{257}{18} \\ -\frac{7}{18} & \frac{13}{3} & -\frac{257}{18} & 13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3954 \\ 596 \\ 90 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{109}{36} \\ -\frac{2453}{84} \\ \frac{10105}{126} \\ -58 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

т.е. точным решением системы (14) является вектор $\vec{p} = \left(\frac{109}{36}; -\frac{2453}{84}; \frac{10105}{126}; -58\right)^T$ или приближенно $\vec{p} = (3, 0278; -29, 202; 80, 198; -58, 0)^T$.

2. Использование системы компьютерной математики Maple

Система компьютерной математики (СКМ) Maple [2,3], как и ряд других, располагает набором функций, которые позволяют автоматизировать вычислительные процедуры при решении задач линейной алгебры и задач полиномиальной аппроксимации табличных функций и статистических данных различными методами оптимизации и регрессивного анализа данных, включая и метод наименьших квадратов (МНК, или LS от англ. Least Squares) [1,4-6].

Для решения задач полиномиальной аппроксимации табличных функций предназначен пакет расширений называемый CurveFitting – аппроксимация (подбор) кривых. Функция LeastSquares() используется в двух формах:

- LeastSquares(xydata, x, opts), где xydata – список пар , x – имя аргумента полинома, opts – список параметров определяющих имя функции полинома, а также возможное наличие весовых коэффициентов и необходимость в поиске линейной комбинации полиномиальных функций.
- LeastSquares(xdata, ydata, x, opts), где xdata и ydata – списки величин для аргумента и значений табличной функции и соответственно, x – имя аргумента полинома, opts – список параметров определяющих имя функции полинома, а также возможное наличие весовых коэффициентов и необходимость в поиске линейной комбинации полиномиальных функций.

Например, для нахождения коэффициентов полинома 3-ей степени (5) составим следующую последовательность команд Maple:

$$\begin{aligned}
 &> \text{restart : with(CurveFitting)} \\
 &> \text{xp} := [1, 2, 3, 4, 5, 6] \\
 &> \text{yp} := [0, -2, 9, -2, -21, 30] \\
 &> f := a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d \\
 &> fx := \text{LeastSquares}(xp, yp, x, \text{curve} = f) \\
 &\quad fx = -58 + \frac{10105}{126}x - \frac{2453}{84}x^2 + \frac{109}{36}x^3 \\
 &> y := \text{evalf}(fx, 5) \\
 &\quad y = -58.0 + 80.198x - 29.202x^2 + 3.0278x^3
 \end{aligned} \tag{17}$$

Пошаговую последовательность определений и вычислений (17) можно прокомментировать следующим образом: подключение пакета CurveFitting; задание списка значений аргумента; задание списка значений табличной функции; запись формулы искомой функции; обращение к функции LeastSquares; вывод функции–результата fx ; округление коэффициентов полинома; вывод результата округления y .

Полученный в Maple полином 3-ей степени (17) совпадает с полиномом, который был найден как решение системы уравнений (16).

Для получения значения оценки продолжим вычисления следующими командами Maple:

$$\begin{aligned}
 &> e = \sqrt{\sum_{i=1}^6 (\text{subs}(x = xp[i], fx) - yp[i])^2} \\
 &\quad e = \frac{1}{14}\sqrt{89558} \\
 &> \text{evalf}(e, 5) \\
 &\quad 21.376
 \end{aligned}$$

Действуя аналогично приведенной выше последовательности команд Maple, можно найти все полиномы степеней с 1 по 5, аппроксимирующих табличную функцию (4).

Запишем их в виде таблицы.

n	Полином $p^{(n)}(x)$	e
1	$p^{(1)}(x) = 2,3429 \cdot x - 5,8667$	36,07
2	$p^{(2)}(x) = 2,5893 \cdot x^2 - 15,782 \cdot x + 18,3$	32,419
3	$p^{(3)}(x) = 3,0278 \cdot x^3 - 29,202 \cdot x^2 + 80,198 \cdot x - 58,0$	21,376
4	$p^{(4)}(x) = 2,3542 \cdot x^4 - 29,931 \cdot x^3 + 127,85 \cdot x^2 - 211,72 \cdot x + 111,50$	0,945
5	$p^{(5)}(x) = 0,125 \cdot x^5 + 0,16667 \cdot x^4 - 15,625 \cdot x^3 + 84,833 \cdot x^2 - 153,50 \cdot x + 84,0$	0

Из приведенных результатов видно, что полином 5-той степени является интерполяционным, т.е значения полинома совпадают со значениями табличной функции в точках её аргумента. Полином 4-ой степени имеет наилучшую аппроксимацию табличной функции (4) по МНК среди полиномов меньшей степени.

Список литературы

1. **Горелик В. А., Муравьева О. В.** Задача аппроксимации с коррекцией всех данных // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов. – М.: ВЦ РАН. –2000. –С.21 — 32.
2. **Дьяконов В.П.** Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. — М.: СОЛОН-Пресс, 2006. – 720 с.
3. **Есаян А.Р.** Алгебра и математический анализ в Maple: Учеб. пособие для студентов и аспирантов / А.Р. Есаян, В.Н. Чубариков, Н.М. Добровольский, В.А. Шулюпов. – Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л.Н. Толстого, –2007. –393с.
4. **Лоусон Ч., Хенсон Р.** Численное решение задач метода наименьших квадратов / Перевод с английского. –М.: Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, –1986. –232с.
5. **Петрянин Д. Л.** Анализ методов повышения точности аппроксимации и новая уточненная модель повышения точности аппроксимации / Д. Л. Петрянин // Надежность и качество сложных систем. –2016. – № 3 (15). –С. 96–102.
DOI 10.21685/2307-4205-2016-3-15.
6. **Шарый С.П.** Курс вычислительных методов. –Новосибирск.: Институт вычислительных технологий СО РАН, –2016. –544 с.

Методика разработки и применения электронного образовательного ресурса при обучении информатике на примере темы «Системы счисления»

Шульгина Д. С. (Москва, МПГУ)

riddle53@mail.ru

науч. рук. Соболева М.Л. к.п.н., доцент каф. ТИДМ МПГУ

Аннотация

В данной работе представлена методика разработки электронного образовательного ресурса, а именно этапы создания ЭОР, описание структуры и содержания электронного образовательного ресурса при обучении информатике на примере темы «Системы счисления»

Технологии нас покорили — теперь они есть во всех или практически во всех областях нашей жизни. Естественно, что где-то это к лучшему, где-то не совсем.

Важно, что какой бы ни была цель курса, ее достижение невозможно простым размещением информации на слайды. Необходимо использование технологий **педагогического дизайна** (instructional design) или **дизайна педагогических систем** (instructional systems design). Именно эти методики позволяют сделать четкую последовательность изучения материалов, прохождения практических заданий, проверки знаний и других учебных событий [1].

Педагогический дизайн, как процесс проектирования учебных материалов, — это ясно описанные процедуры, сгруппированные в ряд последовательных этапов. Производственный цикл по созданию учебных материалов состоит, по существу, из пяти основных этапов:

1. Анализ насколько необходимо проводить обучение (анализ потребностей), каковы требуемые цели учения (анализ целей), каковы средства и условия будущей учебной работы (анализ условий).
2. Проектирование (подготовка планов, разработка прототипов, выбор основных решений, составление сценариев).
3. Разработка (превращение планов, сценариев, прототипов в набор учебных материалов).
4. Применение (учебные материалы используются в учебном процессе).
5. Оценка (результаты учебной работы оцениваются, данные оценки используются для корректировки (доработки) учебных материалов). Каждый из пяти этапов, в свою очередь, разбивается на несколько шагов. Разработчики учебного материала, которые используют процедуры педагогического

дизайна в процессе своей работы, стремятся следовать этим этапам, шагам и соответствующим им процедурам [2].

В рамках данной работы разрабатывается электронный образовательный ресурс, а именно — сайт, по теме «Системы счисления». Электронным образовательным ресурсом (ЭОР) называется часть культурной деятельности, зафиксированной на электронном носителе в виде программы и служащей для удовлетворения информационно образовательных потребностей субъектов образовательного процесса (учащихся, студентов, преподавателей, администрации). ЭОР при проектировании разбивается на следующие этапы, отраженные на диаграмме методологии SADT, основанная на методологии IDEF0, которая дает полное и точное описание системы, имеющее конкретное учебное назначение (рис. 1).

На следующем уровне A0 отображена декомпозиция контекстной диаграммы (рис. 2). На данной диаграмме отображены этапы разработки ЭОР по теме «Системы счисления».

На этой диаграмме декомпозируются две функции, а именно «Анализ предметной области по данной теме» (результат декомпозиции процесса отражён на диаграмме A1 (рис. 3) и «Разработка сценария электронных учебных материалов» (результат декомпозиции отражён на диаграмме A3 (Рис. 4).

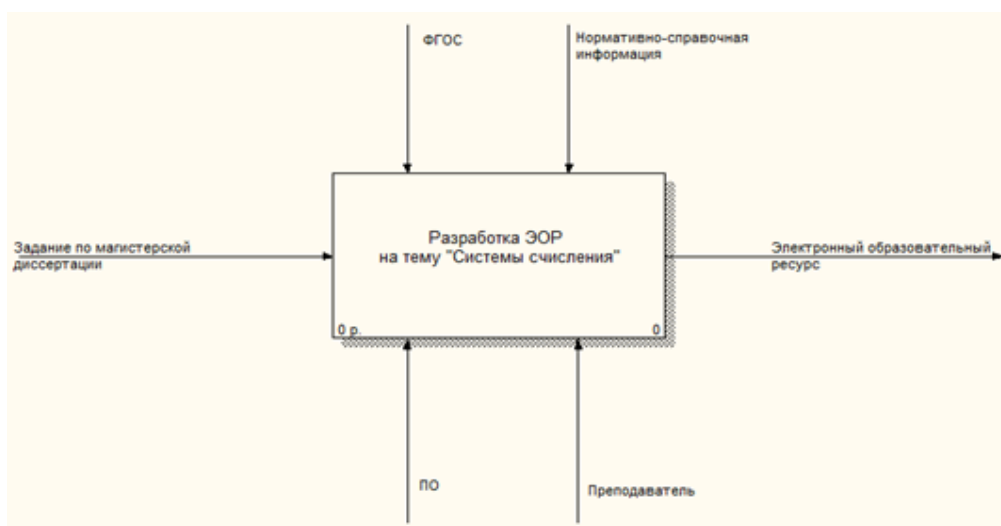


Рис. 1. Контекстная диаграмма «Разработка ЭОР на тему «Системы счисления»

Разработку электронного учебного пособия целесообразнее осуществлять на языке гипертекстовой разметки HTML.

Одним из главных достоинств HTML является то, что учебные пособия, созданные на его основе, не требуют обязательного подключения к сети

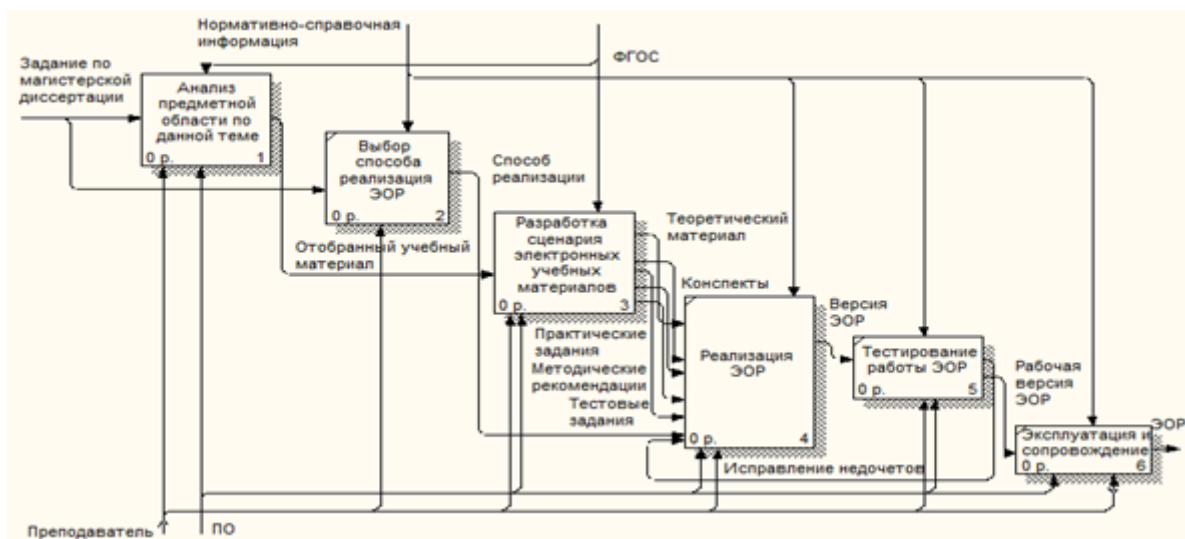


Рис. 2. Детализация контекстной диаграммы «Разработка ЭОР на тему «Системы счисления»»

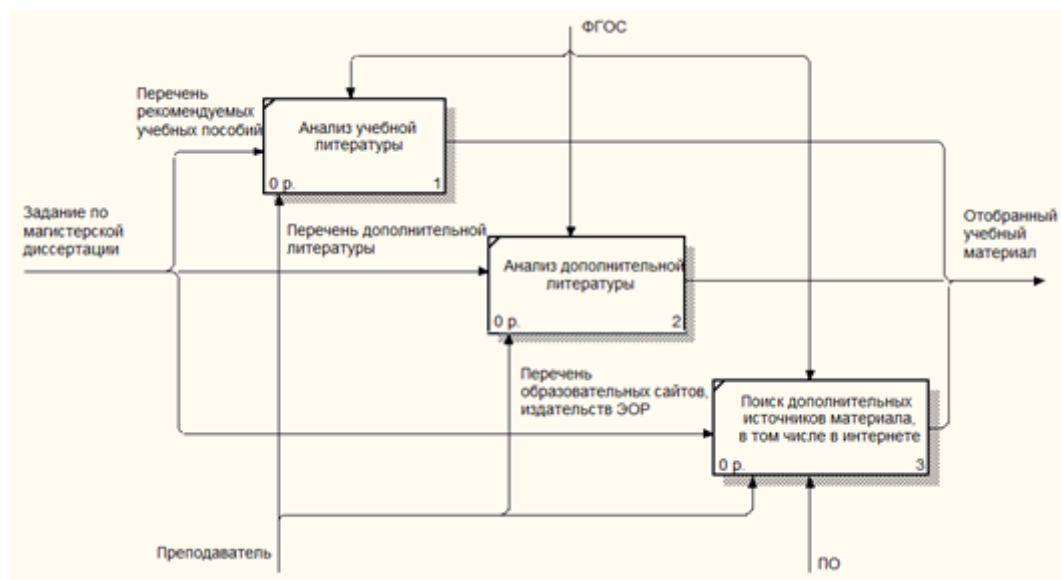


Рис. 3. Детализация процесса «Анализ предметной области по данной теме»

Интернет и могут передаваться в виде файлов на любом носителе, так же возможно использование пособия для организации обучения в локальной сети. Еще одним его несомненным достоинством является широкое распространение и простота реализации. Данный язык интегрирован во все известные Интернет-браузеры. Возможность связывать несколько страниц гиперссылками позволяет перемещаться от одной страницы к другой внутри учебного пособия.

Помимо этого, для разработки электронного учебно-методического пособия должны быть использованы следующие инструменты:

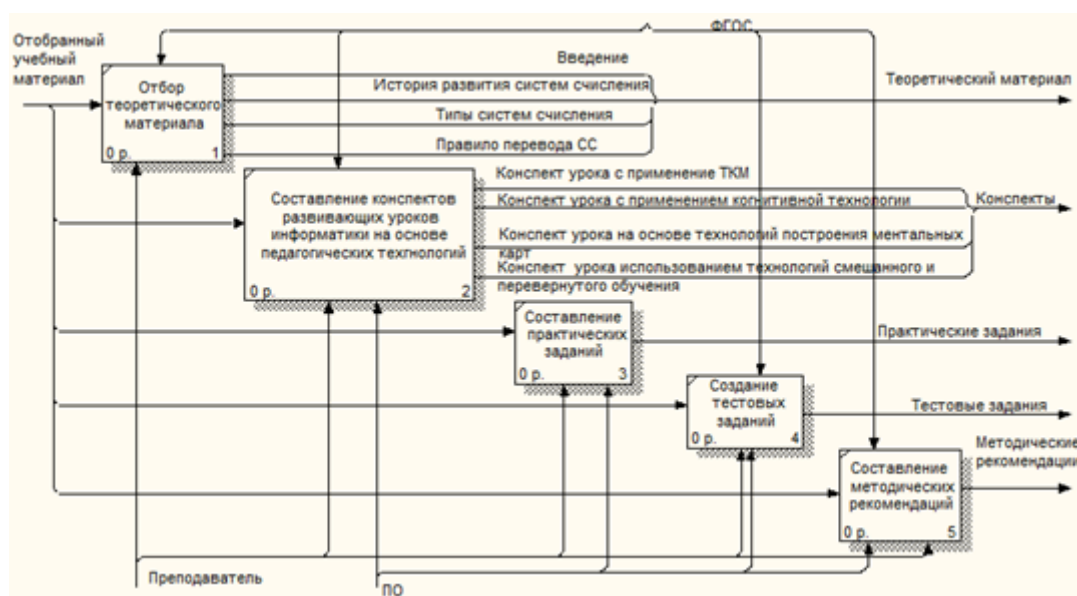


Рис. 4. Детализация процесса «Разработка сценария электронных учебных материалов»

- CSS (CascadingStyleSheets — каскадные таблицы стилей);
- XML (англ. eXtensibleMarkupLanguage — расширяемый язык разметки);
- XSL (eXtensibleStylesheetLanguage);
- JQuery;
- PHP (HypertextPreprocessor — «PHP: препроцессор гипертекста»; первоначально PersonalHomePageTools).

Необходимо создать базу данных (рис. 5) для реализации «Авторизация» с разграничением прав доступа как для учащегося, так и для учителя. Учитель может зайти через свой логин и создать тест. А учащийся соответственно только его пройти.

Интерфейс учебного пособия представлен на следующем рисунке (рис. 6). Страница разбивается на два вертикальных блока. Левый блок занимаем 23% экрана и представлен в виде удобного меню, состоящего из ссылок. Правый блок является областью представления данных. Здесь размещается весь материал по ссылкам из меню.

Фон отображения информации — светло-коричневый для того, чтобы все внимание учащихся было сконцентрировано на заданиях. Текст отображается крупным шрифтом черного цвета.

При реализации теоретической, а также и всех остальных частей, следует использовать блочную верстку, чтобы присутствовало навигационное меню и все страницы были организованы в едином оформлении с использованием таблиц стилей CSS.

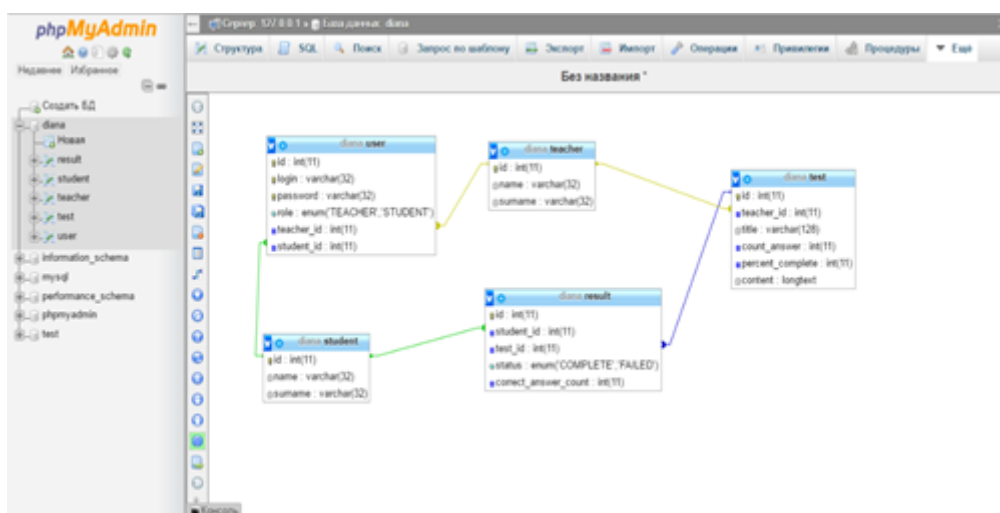


Рис. 5. База данных



Рис. 6. Структура теоретической части сайта

Имеется вкладка «Тестирование», обеспечивающая интерактивную работу с сайтом для учащегося. Если авторизоваться под логином учителя, то возможно создание тестов, а также просмотр результатов пройденных тестов каждым из студентов, чтобы можно было оценить их результаты (рис. 7).

Методические рекомендации предназначены для методического и информационного обеспечения преподавателей и обучаемых. Основная задача разработанного ресурса (ЭОР) — обеспечение учителей учебно-методическим материалом по теме «Системы счисления» школьного курса информатики.

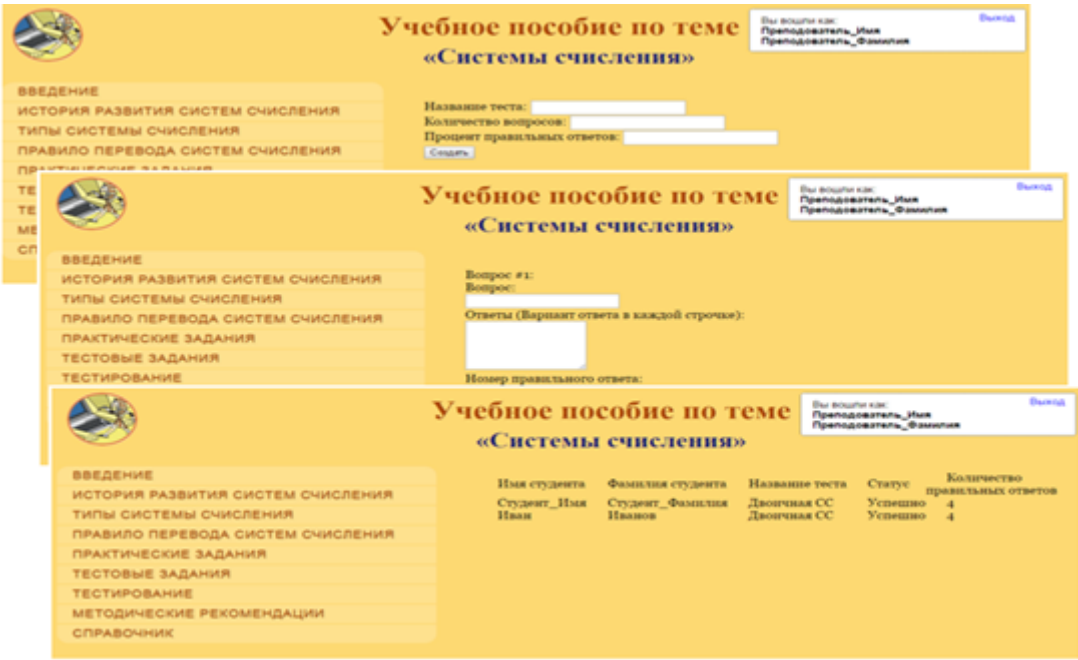


Рис. 7. Структура контролирующей части сайта

Методическая копилка	
Поиск и анализ информации образовательного назначения в сети Интернет	
Анализ качества программных средств учебного назначения	
Анализ качества мультимедийных презентаций учебного назначения	
Анализ учебно-методических комплектов по информатике основной и средней школ	
Методическая система обучения по теме «Системы счисления» школьного курса информатики базового уровня	
Методическая система обучения по теме «Системы счисления» школьного курса информатики профильного уровня	
Разработка проектного задания по теме «Системы счисления» (содержательной линии) школьного курса информатики	
Двухуровневое представление учебной информации	
Традиционное представление учебной информации (структурно-логические схемы)	
Альтернативное представление учебной информации (тематические карты)	
Конспекты развивающих уроков информатики с применением образовательных технологий	
Конспект урока на основе ТРИЗ	

Рис. 8. Перечень методических разработок

Методическая копилка включает себя следующие разработки по теме «Системы счисления» (рис. 8):

- алгоритм поиска и анализа информации образовательного назначения по теме «Системы счисления» в сети Интернет;
- алгоритм анализа качества программных средств, мультимедийных презентаций и учебно-методических комплектов по информатике основной и средней школ;
- структуру и содержание методической системы обучения по теме «Системы счисления» школьного курса информатики базового и профильного уровней;
- алгоритм разработки проектного задания по теме «Системы счисления» (содержательной линии) школьного курса информатики;
- описание двухуровневого представления учебной информации по теме «Системы счисления»;
- традиционное представление учебной информации;
- альтернативное представление учебной информации (структурно-логические схемы и ментальные карты);
- конспекты развивающих уроков информатики с применением образовательных технологий;
- критерии оценивания выполнения заданий различных видов деятельности учащихся школьного курса информатики.

Таким образом, разработанное и представленное в статье учебное пособие по теме «Системы счисления» в виде ЭОР имеет достаточный объем и полное содержание для обучения системам счисления в школьном курсе информатики. ЭОР соответствует эргономическим требованиям, предъявляемым к обучающим компьютерным средствам, что позволяет максимально эффективно использовать его в учебном процессе. А также учебное пособие содержит контрольные задания и вопросы для оценки и самооценки, что несомненно ценно, так как можно осуществлять контролирующую функцию по проверке уровня усвоения учебного материала.

Список литературы

1. **Тихомирова Е.В.** 800 слов про педагогический дизайн — URL: <http://www.trainings.ru/library/articles/?id=11059> (дата обращения 02.04.2017).
2. **Уваров А.Ю.** Педагогический дизайн. //Еженедельная газета издательского дома «Первое сентября» «Информатика». — 2003. — № 30. — С. 32.

3. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (5-9 классы). — URL: <http://xn--80abucjiibhv9a.xn--p1ai/documents/938> (дата обращения 02.04.2017).
4. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования (10-11 классы). — URL: <http://xn--80abucjiibhv9a.xn--p1ai/documents/2365> (дата обращения 02.04.2017).

Мобильное приложение как средство обучения решению задач по программированию школьного курса информатики

Федотенко М. А. (Москва, МПГУ)

email@email.com

Науч. рук. Соболева М.Л., доц. каф. ТИДМ МПГУ

Аннотация

В работе представлено описание контента мобильного приложения, создаваемого для обучения школьников решению задач по программированию.

1. Введение

Смартфоны и планшеты играют все большую роль в нашей жизни, а мобильные приложения уже охватывают все ее сферы, в том числе образование. И если мобильные приложения помогают учить иностранные языки и готовиться к экзаменам по математике, почему они не могут обучать решению школьных задач по информатике?

В результате проведенных исследований и анализа рынка мобильных приложений [1], обучающих решению задач по информатике и программированию, были выявлены актуальность и необходимость разработки качественно нового приложения, сочетающего в себе все достоинства и восполняющего недостатки существующих [2]. Ведь помимо того, что приложение доступно и актуально (у современных школьников смартфоны всегда в руках), оно может сочетать в себе ряд очень важных преимуществ:

- Обеспечивать индивидуальный подход к пользователю;
- Повышать и поддерживать мотивацию к обучению;
- Упрощать и автоматизировать процесс текущего контроля;
- Обеспечивать обучение в игровой форме, систему достижений и поощрений (например, начисление баллов за прохождение разделов и решение задач, и дальнейший их обмен).

2. Задачи по программированию

Что именно в данной работе понимается под «задачами по программированию»? Это класс задач школьного курса информатики повышенной и высокой сложности, которые не только помогают закрепить пройденный материал, но и, что в данном случае важнее, составляют вторую часть экзамена по информатике (задачи 24 – 27) [3].

Это задачи следующих типов:

- Поиск ошибок в программе со сложным условием (задача 24). Для выполнения задания необходимо прочесть фрагмент программы на выбранном языке программирования, определить какое значение выдаст программа при определенном условии, найти и исправить допущенные ошибки, доработать программу.
- Алгоритмы обработки массивов (задача 25). Для выполнения задания необходимо написать короткую (10 – 20 строк программного кода) простую программу на выбранном языке программирования или записать алгоритм на естественном языке.
- Теория игр (задача 26). Для выполнения задания необходимо построить дерево игры по заданному алгоритму и обосновать выигрышную стратегию.
- Обработка массивов, символьных строк и последовательностей (задача 27). Для выполнения задания необходимо создать собственную программу (30 – 50 строк программного кода) для решения задачи средней сложности.

3. Контент мобильного приложения

Что же должен включать контент эффективного обучающего мобильного приложения?

Проведенные исследования и анализ существующих мобильных приложений образовательного назначения показали, что для наиболее эффективного усвоения теоретического и практического материала и подготовки к решению задач по программированию, мобильное приложение должно сочетать в себе следующие компоненты:

- Раздел теории, необходимой для решения задач по программированию;
- Примеры решения рассматриваемых задач;
- Раздел практики — самостоятельного решения задач;
- Дополнительные материалы;

Помимо этого, для обеспечения индивидуально-дифференцированного подхода и основных достоинств обучения в игровой форме, обязательным атрибутом такого приложения является личный Помощник, отображающий подсказки, советы, набранные баллы, индивидуальные настройки и т.д.

Раздел теории. Прежде, чем приступить к решению задач по программированию, пользователю предоставляется возможность ознакомиться с теорией, необходимой и достаточной для решения этих задач.

1. Рассматриваются и рекомендуются к изучению основы нескольких языков программирования: C, Pascal, Python, Java, Basic. Поскольку в экзаменационных заданиях представлены фрагменты кода на разных языках, школьнику в состоянии стресса будет легче не искать и многократно просматривать только тот язык, который изучался на уроках, а просмотреть все фрагменты, сравнить их между собой и, возможно даже, пропустив ошибку в одном коде — заметить ее в другом.
2. Для каждого языка программирования рассматриваются в первую очередь основные понятия (темы), необходимые для решения задач: типы данных, переменные и константы, операторы, циклы, функции, массивы, структуры данных. Более углубленное изучение предлагается дополнительно, в виде ссылок, комментариев и т.д.
3. Для каждого подраздела обязателен мини-вывод — простое и понятное объяснение «зачем это нужно?»

Также, в разделе теории пользователю предлагается прохождение Теста для определения текущего уровня знаний. Тест содержит 3 вопроса по каждой теме раздела теории. Если пользователь отвечает правильно на 0 или 1 вопрос — в результате теста отображается рекомендация обратиться к прохождению (повторному прохождению) этой темы (рис. 1).

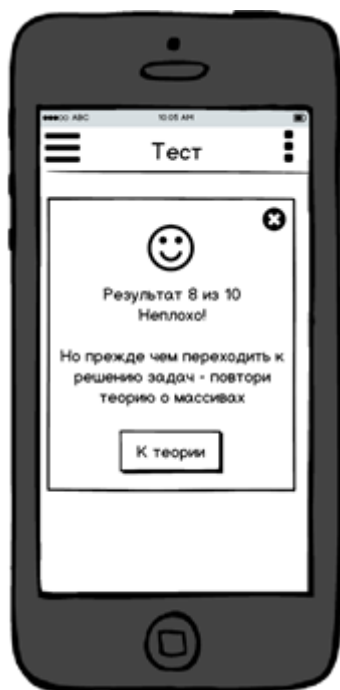


Рис. 1. Пример результата прохождения теста (прототип).

Для осуществления текущего контроля, через 2 недели пользователю предлагается повторное прохождение теста. За прохождение теста начисляются баллы.

Раздел примеров. Данный раздел не только демонстрирует пользователю подробный разбор и алгоритм решений задач по программированию, но и дает ряд полезных советов — с чего следует начинать решение задач каждого типа, как правильно понять задание и на что обратить внимание в формулировках, какие типичные ошибки допускаются при решении таких задач и какие существуют способы наиболее быстрого и простого решения.

Например, для задачи 24 (поиск и исправление ошибки в коде) в дополнение к объяснению даются ссылки на соответствующие разделы теории и совет — в первую очередь обратить внимание на операции присваивания значений, инициализации переменных и вывода результатов, потому что искомая ошибка чаще всего содержится именно в них (рис. 2).



Рис. 2. Прототип раздела примеров для задачи 24.

А для задачи 26 (теория игр) пользователю дополнительно объясняется, как и зачем строить дерево игры и даются советы — внимательно и неоднократно перечитать условие задачи (например, забравший последний камень игрок выиграет или проиграет) и не тратить время на построение дерева целиком, а определить переломные моменты игры (когда игрок наверняка выиграл или проиграл) и строить дерево игры только до них, решив задачу гораздо быстрее.

Раздел практики. В этом разделе пользователю предлагается уже самостоятельно решать задачи по программированию, причем решение возможно в трех уровнях сложности:

- Простой уровень — с отображением подсказок;
- Средний уровень — выбор ответа из предложенных вариантов (тестовая форма);
- Сложный уровень — заполнение полей для ввода ответов (по аналогии с экзаменационными заданиями).

В рамках реализации системы достижений и поощрений, а также осуществления текущего контроля за правильное решение задач начисляются баллы.

Например, для задачи 24, в которой требуется выбрать строку кода с ошибкой и исправить ее, на простом уровне — напротив строк кода отображаются подсказки, помогающие выбрать строку с ошибкой и исправить ее, на среднем уровне — предоставляются 2 – 3 строки кода на выбор (в тестовой форме) и 2 – 3 варианта исправления этой ошибки. На сложном уровне уже нет подсказок, необходимо нажать на строку с ошибкой и ввести исправленную строку в поле для ввода (рис. 3).

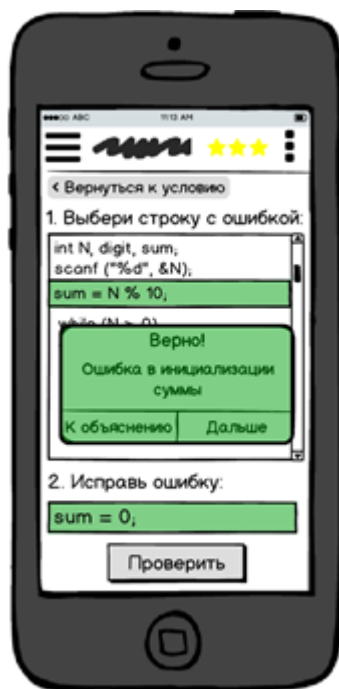


Рис. 3. Пример решения задачи 24 в разделе практики (прототип).

Каждое действие пользователя сопровождается откликом приложения — объяснения, подсказки, уточнения.

Раздел дополнительных материалов. Этот раздел призван не только предоставить пользователю дополнительную полезную информацию, но и, в первую очередь, психологически расслабить его, поднять настроение, показать, что информатика и программирование — это интересно, престижно и увлекательно, а ЕГЭ — не так уж и страшно.

Для этого раздел содержит:

- Ссылки на полезные материалы по программированию и информатике;
- Материалы и статьи, раскрывающие прикладное значение информатики и программирования в современном мире;
- Высказывания известных людей о значении информатики;
- Забавные цитаты школьников о важности изучения информатики и программирования для дальнейшей жизни и профессии;
- Комментарии и советы нынешних студентов, успешно сдавших ЕГЭ по информатике в предыдущие годы.

Вывод: подобранный и представленный именно таким образом контент позволит создать действительно эффективный и качественно новый электронный образовательный ресурс для обучения решению задач по программированию школьного курса информатики и для последующей подготовки к сдаче экзамена по информатике и ИКТ.

Список литературы

1. **Федотенко М.А.** Разработка мобильного приложения для обучения школьников решению задач повышенной сложности по информатике // Современные информационные технологии и ИТ-образование. — М.: Лаборатория Открытых Информационных Технологий факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова, 2016. — с. 262.
2. Магазин приложений Google play. Приложения, найденные по запросу «ЕГЭ информатика». URL: <https://play.google.com>
3. Спецификация контрольных измерительных материалов для проведения в 2017 году единого государственного экзамена по информатике и ИКТ (проект). URL: <http://www.fipi.ru/ege-i-gve-11/demoversii-specifikacii-kodifikatory>
4. **Трайнёв В.А.** Информационные коммуникационные педагогические технологии (обобщения и рекомендации): учеб. пособие// В.А. Трайнёв, И.В. Трайнёв, — 3-изд. — М.: Дашков и К, 2008. — 280 с.

О порядках 2×2 матриц с комплексными, действительными и рациональными коэффициентами. Матричные корни квадратных трехчленов над полем $\mathbb{R}$

Кульгускин И. А. (Москва, МПГУ)

ivan-kull@rambler.ru

Науч. рук. Царев А. В. (проф. каф. алгебры МПГУ)

Аннотация

Получена формула для нахождения матричных корней квадратных трехчленов над полем действительных чисел. Исследованы все возможные порядки 2×2 матриц с комплексными, действительными и рациональными коэффициентами.

1. Введение

В работе приведена схема вывода формулы для нахождения корней уравнения $aX^2 + bX + c = 0$, где $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, X \in M_2(\mathbb{R})$. А так же, используя теорию многочленов, а именно: круговых, характеристических, аннулирующих, минимальных многочленов и многочленов Чебышева. Доказано, что 2×2 матрицы с комплексными и действительными коэффициентами имеют любой конечный порядок. А в $M_2(\mathbb{Q})$ возможны элементы следующих порядков: $\{1;2;3;4;6\}$. Элементов другого порядка нет.

2. Матричные корни квадратных трехчленов над полем $\mathbb{R}$

ЗАДАЧА1: Вывести формулу для нахождения корней уравнения

$$aX^2 + bX + c = 0,$$

где $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, X \in M_2(\mathbb{R})$.

РЕШЕНИЕ: Рассмотрим матрицу $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ — корень многочлена

$$g(X) = aX^2 + bX + c, \text{ где } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

$g(X)$ — аннулирующий многочлен матрицы X , следовательно он делится без остатка на минимальный многочлен матрицы X . Так как минимальными многочленами для матриц $M_2(\mathbb{R})$ могут быть только многочлены первой или второй степени, возможны два случая:

1) По теореме Гамильтона–Кэли любая квадратная матрица является корнем своего характеристического многочлена. Характеристический многочлен матрицы X выглядит следующим образом:

$$\phi(\lambda) = \begin{vmatrix} x_1 - \lambda & x_2 \\ x_3 & x_4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (x_1 + x_4)\lambda + (x_1x_4 - x_3x_2).$$

Если $\phi(\lambda)$ минимальный, то $\phi(\lambda)$ делит без остатка $g(X)$ значит

$$X^2 + pX + q = \lambda^2 - (x_1 + x_4)\lambda + (x_1x_4 - x_3x_2),$$

где $p = \frac{b}{a}, q = \frac{c}{a}$. Это возможно тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = -p \\ x_1x_4 - x_3x_2 = q \end{cases} \quad (1)$$

Система (1) задает бесконечно много матриц, являющихся корнями уравнения $X^2 + pX + q = 0$. Кроме того, если рассмотреть матрицу

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix},$$

для которой

$$\begin{cases} y_1 + y_4 = -p \\ y_1y_4 - y_2y_3 = q \end{cases},$$

то характеристический многочлен матрицы Y будет совпадать с характеристическим многочленом матрицы X :

$$\begin{vmatrix} y_1 - \lambda & y_2 \\ y_3 & y_4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (y_1 + y_4)\lambda + (y_1y_4 - y_2y_3) = \lambda^2 + p\lambda + q.$$

А значит матрицы X и Y подобны (**Критерий подобия матриц.**) (Исключая тот случай, если матрицы X и Y — скалярные)

2) Если минимальным многочленом матрицы X является многочлен первой степени, т.е. $\psi(X) = X + m \cdot E$, где $m \in \mathbb{R}$. В этом случае матрица X является скалярной, а значит может быть корнем многочлена $g(X)$, если:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \end{pmatrix}$$

3. Порядки $M_2(\mathbb{R})$ и $M_2(\mathbb{C})$

Определение 1. Матрица $A \in M_n(\mathbb{F})$ имеет мультипликативный порядок $t \in \mathbb{N}$, если $A^t = E$ и для любого $k \in \mathbb{N}$, меньшего t $A^k \neq E$. Если такого $t \in \mathbb{N}$ нет, то говорят, что порядок A равен бесконечности.

Очевидно, что квадратные матрицы порядка 2×2 с действительными и комплексными коэффициентами имеют любой конечный мультипликативный порядок. Например:

$$\text{ord} \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi k}{n} & \sin \frac{2\pi k}{n} \\ -\sin \frac{2\pi k}{n} & \cos \frac{2\pi k}{n} \end{pmatrix} = n,$$

если n и k — взаимно простые.

4. Порядки $M_2(\mathbb{Q})$

Задача2:

- 1) Существует ли в $M_2(\mathbb{Q})$ элемент порядка 2015?
- 2) Исследовать в $M_2(\mathbb{Q})$ порядки элементов. Определить, если возможно, максимальный порядок.

Решение:

1) Если существует элемент порядка 2015, значит должен существовать элемент порядка 5. Докажем, что элемента порядка 5 в $M_2(\mathbb{Q})$ не существует.

Рассмотрим матрицу $X \in M_2(\mathbb{Q})$. Допустим, что $X^5 = 1$, т.е. $X^5 - 1 = 0$, где 1 — единичная матрица, а 0 — нулевая.

Согласно теореме 7, $X^5 - 1$ раскладывается в $\mathbb{Q}$ только на два множителя:

$$(X - 1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1).$$

Для матрицы $X \in M_2(\mathbb{Q})$ минимальными могут быть многочлены 1-ой или 2-ой степени. Исходя из того, что любой аннулирующий многочлен делится на минимальный без остатка, получаем два случая:

1) Если минимальным является многочлен первой степени, то либо X имеет бесконечный порядок, либо $X = E$.

2) Если минимальным является многочлен второй степени, то $X^5 - 1$ должен делиться на него без остатка, но это не так, так как $X^5 - 1$ раскладывается в $\mathbb{Q}$ только на два множителя:

$$(X - 1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1).$$

Таким образом, элемента порядка 2015 в $M_2(\mathbb{Q})$ не существует.

2) Для решения второго пункта задачи понадобится доказать следующее утверждение:

Лемма 1. *Элементов порядка $p \cdot t$, где $t \in \mathbb{N}$, p – простое и $p \geq 5$ в $M_2(\mathbb{Q})$ – не существует.*

Доказательство. Данное утверждение непосредственно следует из теоремы 7 и определения кругового многочлена. $\square$

Однако, существуют элементы порядков 2,3,4,6:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = E, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^3 = E, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^4 = E, \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ -3 & 1/2 \end{pmatrix}^6 = E.$$

Данные элементы легко находятся при разложении соответствующих многочленов на множители, и используя формулу (1).

Например, рассмотрим многочлен $X^6 - 1$. Разложим его на множители над $\mathbb{Q}$:

$$X^6 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1).$$

Используя систему (1) для многочлена $X^2 - X + 1$, получим:

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 1 \\ x_1 x_4 - x_2 x_3 = 1 \end{cases}$$

Данной системе удовлетворяет набор $x_1 = 1/2, x_2 = 1/4, x_3 = -3, x_4 = 1/2$, т.е. матрица $X = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ -3 & 1/2 \end{pmatrix}$. Возведя данную матрицу в 6 степень, получим единичную матрицу.

Из всего вышеизложенного следует, что в $M_2(\mathbb{Q})$ могут существовать элементы порядка $2^n \cdot 3^k$, где $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Элементов другого порядка нет.

Для ответа на вопрос: «Каков же наибольший порядок?» — потребуется теорема:

Теорема 1. *Если оба числа α и $\cos(\alpha\pi)$ рациональны, то число $2\cos(\alpha\pi)$ целое, т.е. $\cos(\alpha\pi) = 0, \pm 1/2$ или ± 1 .*

Из данной теоремы и формулы (2) следует лемма:

Лемма 2. *В разложение многочлена $X^{2^n \cdot 3^k} - 1$ над $\mathbb{Q}$ могут присутствовать только следующие многочлены второй степени:*

$$X^2 - 1 = 0, \quad X^2 + 1 = 0, \quad X^2 - X + 1 = 0, \quad X^2 + X + 1 = 0.$$

Доказательство. По формуле (2) $X^{2^n \cdot 3^k} - 1$ — произведение круговых многочленов. В свою очередь круговой многочлен — $\prod (x - \varepsilon_k)$, где ε_k — примитивные корни степени n из единицы. Чтобы получился множитель 2-ой степени с действительными коэффициентами, надо взять два сопряженных корня. Получим:

$$X^2 - 2 \cos \left(\frac{2\pi k}{n} \right) X + 1.$$

По теореме 1 коэффициент $-2 \cos \left(\frac{2\pi k}{n} \right)$ может принимать только следующие целые значения: $0, \pm 1, \pm 2$. $\square$

Для окончательного ответа на вопрос рассмотрим четыре случая возможных порядков $M_2(\mathbb{Q})$:

- 1) $2^n \cdot 3^0$;
- 2) $2^0 \cdot 3^k$;
- 3) 12;
- 4) 18.

1) Матричные корни многочлена $X^2 - 1$ могут иметь порядок не выше 2. Многочлена $X^2 + 1$ — не выше 4. В разложении многочлена $X^{2^n \cdot 3^0} - 1$ из многочленов второй степени присутствуют только эти два. Из этого следует, что для степени двойки порядка выше 4 нет.

2) В разложении многочлена $X^{2^0 \cdot 3^k} - 1$ присутствует только один многочлен второй степени — $X^2 + X + 1$. Домножим его на $X - 1$:

$$(X^2 + X + 1)(X - 1) = X^3 - 1.$$

Если X корень многочлена $X^2 + X + 1$, значит X так же корень многочлена $X^3 - 1$. А значит корни многочлена $X^2 + X + 1$ имеют порядок не выше 3.

3) В разложении многочлена $X^{12} - 1$ присутствуют все 4 многочлена второй степени. Осталось рассмотреть только многочлен $X^2 - X + 1$. Домножим его на $X + 1$:

$$(X^2 - X + 1)(X + 1) = X^3 + 1.$$

Аналогично с предыдущим случаем корни многочлена $X^2 - X + 1$ имеют порядок не выше 6.

- 4) Этот случай схож с уже рассмотренными.

Вывод. В $M_2(\mathbb{Q})$ возможны элементы следующих порядков: $\{1; 2; 3; 4; 6\}$. Элементов другого порядка нет.

5. Теория

Определение 2. *Многочлен*

$$\Phi_n(x) = \prod (x - \varepsilon_k),$$

где ε_k — примитивные корни степени n из единицы, называют круговым многочленом или многочленом деления круга порядка n . Например $\Phi_1(x) = x - 1$, $\Phi_2(x) = x + 1$, $\Phi_3(x) = x^2 + x + 1$, $\Phi_4(x) = x^2 + 1$.

Непосредственно из определения кругового многочлена видно, что

$$\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1. \quad (2)$$

Теорема (Гамильтона — Кэли). *Любая квадратная матрица является корнем своего характеристического многочлена, т.е. $\phi(A) = 0$, где под нулём понимается нулевая матрица, а под свободным членом характеристического многочлена — этот свободный член, умноженный на единичную матрицу.*

Теорема 2. *Произвольный аннулирующий многочлен матрицы делится без остатка на ее минимальный многочлен.*

Теорема 3. *Минимальный многочлен существует и единственен для любой квадратной матрицы.*

Теорема 4. *Корнями минимального многочлена служат все характеристические числа матрицы.*

Теорема 5 (Критерий подобия матриц). *Для того чтобы две матрицы A и B были подобны, необходимо и достаточно, чтобы они имели одни и те же инвариантные многочлены.*

Теорема 6. *Коэффициенты многочлена $\Phi_n(x)$ — целые числа.*

Теорема 7. *Многочлен $x^p - 1$, где p — простое число, раскладывается над $\mathbb{Q}$ только на два множителя:*

$$x^p - 1 = (x - 1)(x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + 1).$$

Теорема (Признак Эйзенштейна). *Пусть $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ — многочлен с целыми коэффициентами, причем для некоторого простого числа p коэффициент a_n не делится на p , коэффициенты $a_0, \dots, a_{n-1}$ делятся на p , но коэффициент a_0 не делится на p^2 . Тогда f — неприводимый многочлен.*

Список литературы

1. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1968. — 196 с.
2. Крашенинников, В. Р. Основы теории обработки изображений: Учебное пособие. — Ульяновск: УлГТУ, 2003. — 190 с.
3. Куликов, Л.Я. Алгебра и теория чисел: Учеб. пособие для педагогических институтов. — М.: Высш. школа, 1979. — 559 с., ил.
4. Прасолов, В.В. Многочлены. — 3-е изд, исправленное. — М.: МЦМНО, 2003. — 336 с.
5. Фаддеев, Д. К. Лекции по алгебре. Учебное пособие. 5-е изд, стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2007. — 416 с.

Строение виртуального тензора и формы Ли главного T^1 – расслоения над некоторыми классами почти контактных метрических многообразий

Петров И. А.

vander94@yandex.ru

науч. рук. Игнаточкина Л. А., к.ф.-м.н., доцент каф. геометрии МПГУ

Аннотация

Получены классы почти эрмитовых структур и инвариантный вид формы и векторного поля Ли на тотальном пространстве главного T^1 – расслоения с плоской связностью над контактным, K -контактным и сасакиевым многообразием.

1. Предварительные сведения

Пусть многообразие M имеет размерность $2n + 1$, $\mathfrak{X}(M)$ — его модуль гладких векторных полей. Также, пусть на нем фиксированы четыре тензорных поля: дифференциальная 1-форма η , называемая *контактной формой*, векторное поле ξ , называемое *векторным полем Руба*, эндоморфизм Φ , называемый *структурным эндоморфизмом* и риманова метрика g . При этом должны выполняться условия:

$$1) \eta(\xi) = 1; 2) \eta \circ \Phi = 0; 3) \Phi(\xi) = 0; 4) \Phi^2 = -id + \eta \otimes \xi;$$

$$5) g(\Phi X, \Phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y); X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Тогда четверку (η, ξ, Φ, g) называют *почти контактной метрической структурой* [1].

Ковариантный дифференциал $\nabla\Phi$ в римановой связности метрики g определяет 6 тензорных полей B, C, D, E, F, G , которые называются *структурными тензорами* почти контактной метрической структуры. На пространстве расслоения A –реперов над многообразием M со структурной группой $\{e\} \times U(n)$ их ненулевые компоненты $B = \{C_{ab}^c, C^{ab}_c\}$, $C = \{\tilde{C}^{abc}, \tilde{C}_{abc}\}$, $D = \{C^{ab}, C_{ab}\}$, $E = \{C^a_b, C_a^b\}$, $F = \{D_{ab}, D^{ab}\}$, $G = \{D^a, D_a\}$ выражаются через $\nabla\Phi$ некоторым образом.

Пусть многообразие P имеет размерность $2n + 2$, $\mathfrak{X}(P)$ — его модуль гладких векторных полей. Пусть также на нем фиксированы два тензорных поля: эндоморфизм J , называемый *почти комплексной структурой*, и риманова метрика $\tilde{g}$. При этом должны выполняться условия:

$$1) J \circ J = -id; 2) \tilde{g}(JX, JY) = \tilde{g}(X, Y); X, Y \in \mathfrak{X}(P).$$

Тогда пару $(J, \tilde{g})$ называют *почти эрмитовой структурой*. С помощью почти эрмитовой структуры определяется *келерова форма* F и *форма Ли* α по формулам:

$$F(X, Y) = \tilde{g}(JX, Y); \quad \alpha(X) = -\frac{1}{n}\delta F \circ J(X); \quad X, Y \in \mathfrak{X}(P).$$

Для формы Ли существует двойственное ей векторное поле $\alpha^\#$, называемое *векторным полем Ли*, для которого выполняется [1]:

$$\alpha(X) = \tilde{g}(X, \alpha^\#); \quad X \in \mathfrak{X}(P).$$

Ковариантный дифференциал $\tilde{\nabla}J$ в римановой связности метрики $\tilde{g}$ определяет 2 тензорных поля B и C , одно из которых называется *виртуальным*, а другое *структурным* тензором почти эрмитовой структуры. На пространстве расслоения A —реперов над многообразием P со структурной группой $U(n)$ их ненулевые компоненты $B = \{B^{ab}{}_c, B_{ab}{}^c\}$, $C = \{B^{abc}, B_{abc}\}$ выражаются через $\tilde{\nabla}J$ некоторым образом.

Ковариантный дифференциал $\tilde{\nabla}J$ выражается через виртуальный и структурный тензор, виртуальный зависит от *примитивного* и *бесследного* тензоров, а структурный от *кососимметричного* и *квазисимметричного*. Обнуляя тот или иной тензор, получается 16 классов почти эрмитовых структур [1], которые совпадают с классификацией [3].

Рассмотрим главное расслоение (P, M, π, T^1) , у которого базой расслоения является нечетномерное многообразие M с почти контактной метрической структурой (η, ξ, Φ, g) , а структурной группой является одномерный тор T^1 . Тогда, на тотальном пространстве, которое будет являться четномерным многообразием P , зафиксировав связность и обозначив ее форму связности через ω , задается почти эрмитова структура $(J, \tilde{g})$ по формулам:

$$J = i_H \circ \Phi \circ \pi_* - \omega \otimes \xi + \pi^* \eta \otimes \nu; \quad \tilde{g}(X, Y) = g(\pi_* X, \pi_* Y) \circ \pi + \omega(X)\omega(Y),$$

где $X, Y \in \mathfrak{X}(P)$, i_H — горизонтальный лифт, $\xi = i_H \xi$, $\nu = \lambda(1)$, $\lambda : \mathfrak{g} = \mathbb{R} \rightarrow f$, а $\mathfrak{g}$ — присоединенная алгебра Ли T^1 , которая для одномерного тора является вещественной прямой, а f — векторное пространство фундаментальных векторных полей [2].

В работе [2] получены формулы связи структурных тензоров почти контактной метрической структурой и виртуального и структурного тензоров почти эрмитовой.

Зафиксируем плоскую связность, тогда эти формулы примут вид:

$$B^{ab}{}_c = C^{ab}{}_c, \quad B^{ab}{}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(D^{ab} - C^{[ab]}), \quad B^{a0}{}_b = \frac{1}{\sqrt{2}}C^a{}_b, \quad B^{a0}{}_0 = \frac{1}{2}D^a,$$

$$\begin{aligned}
B^{0a}{}_b &= -\frac{1}{\sqrt{2}}C^a{}_b, \quad B_{ab}{}^c = C_{ab}{}^c, \quad B_{a0}{}^0 = \frac{1}{2}D_a, \\
B_{ab}{}^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(D_{ab} - C_{[ab]}), \quad B_{a0}{}^b = \frac{1}{\sqrt{2}}C_a{}^b, \quad B_{0a}{}^b = -\frac{1}{\sqrt{2}}C_a{}^b, \\
B^{abc} &= C^{abc}, \quad B^{ab0} = \frac{1}{2\sqrt{2}}C^{ab}, \quad B^{0ab} = \frac{1}{\sqrt{2}}D^{ab}, \\
B^{0a0} &= \frac{1}{4}D^a, \quad B_{abc} = C_{abc}, \\
B_{a0b} &= -\frac{1}{2\sqrt{2}}C_{ab}, \quad B_{0ab} = \frac{1}{\sqrt{2}}D_{ab}, \quad B_{00a} = -\frac{1}{4}D_a.
\end{aligned}$$

2. Контактная метрическая и K -контактная структура

В 1953 году китайский математик Чжень Шэньшэнь впервые построил расслоение реперов над нечетномерным многообразием, являющимся дифференцируемым и обладающего контактной формой. Позднее, американский математик Альфред Грей назвал такие многообразия контактными. В 1960 году Сасаки доказал, что на таком многообразии внутренним образом порождается структурный эндоморфизм и векторное поле Роба, а также можно определить риманову метрику, т.е. построил почти контактную метрическую структуру, которая являлась бы контактной.

Почти контактная метрическая структура будет являться контактной тогда и только тогда:

$$d\eta(X, Y) = g(X, \Phi Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Теорема 1. *Виртуальный тензор почти эрмитовой структуры тотального пространства главного T^1 -расслоения с фиксированной плоской связностью с контактной метрической структурой на базе расслоения примитивен, а структурный тензор квазисимметричен.*

Теорема 2. *Форма Ли α почти эрмитовой структуры тотального пространства главного T^1 -расслоения с фиксированной плоской связностью с контактной метрической структурой на базе расслоения отличается от формы связности ω на постоянный множитель, равный -2 . При этом двойственное векторное поле Ли $\alpha^\#$ отличается от векторного поля ν из вертикального распределения на этот же постоянный множитель.*

Теорема 3. *Почти эрмитова структура $W_2 \oplus W_4$ на тотальном пространстве главного T^1 -расслоения с фиксированной плоской связностью над*

контактным многообразием будет являться локально конформно почти келеровой, т.е. для каждой точки такого многообразия с такой структурой существует окрестность и функция f , такие, что структура $(J, e^{2f}\tilde{g})$ будет почти келеровой.

Можно рассмотреть подкласс контактных метрических структур на базе расслоения, таких что:

$$\nabla_X(\eta)Y = g(X, \Phi Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Они называются *K-контактными структурами*. В этом случае виртуальный тензор почти эрмитовой структуры главного T^1 -расслоения будет также являться примитивным, а структурный также квазисимметричным, что говорит о принадлежности почти эрмитовой структуры к классу $W_2 \oplus W_4$. Такая структура также является локально конформно почти келеровой.

Форма Ли α и векторное поле Ли $\alpha^\#$, по аналогии с контактными метрическими структурами, также отличаются от формы связности ω и векторного поля ν из вертикального распределения на постоянный множитель, равный -2 .

3. Сасакиева структура

Многообразие называется *многообразием Сасаки*, если:

$$\nabla_X(\Phi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Примером многообразия Сасаки может являться нечетномерная сфера, снабженная канонической сасакиевой структурой.

Теорема 4. *Виртуальный тензор почти эрмитовой структуры тотального пространства главного T^1 -расслоения с фиксированной плоской связностью с сасакиевой структурой на базе расслоения примитивен, а структурный тензор является тождественно нулевым.*

Следовательно, на тотальном пространстве получается почти эрмитово многообразие класса W_4 .

Теорема 5. *Форма Ли α почти эрмитовой структуры тотального пространства главного T^1 -расслоения с фиксированной плоской связностью с сасакиевой структурой на базе расслоения отличается от формы связности ω на постоянный множитель, равный 2. При этом двойственное векторное поле Ли $\alpha^\#$ отличается от векторного поля ν из вертикального распределения на этот же постоянный множитель.*

Теорема 6. *Почти эрмитова структура класса W_4 на тотальном пространстве главного T^1 -расслоения с фиксированной плоской связностью над сасакиевым многообразием будет являться локально конформно келеровой.*

Список литературы

1. **В. Ф. Кириченко** Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях, 2013, Одесса
2. **А. В. Савинов** Геометрия главных T^1 -расслоений над нечетномерной базой, 2003, Москва
3. **A. Gray, L.M. Hervella** The Sixteen Classes of Almost Hermitian Manifolds and Their Linear Invariants, Annali di Matematica pura ed applicata, CXXIII:IV, 1980

Формирование инженерной культуры обучающихся средствами робототехнических соревнований FIRST Tech Challenge

Салахова А. А. (Москва, МПГУ)

aa.salakhova@yandex.ru

Науч. рук. Самылкина Н.Н. проф. каф. теории методики обучения информатике МПГУ

Аннотация

Создание методического пособия «FIRST Tech Challenge. Путь к победе» в рамках Программы «Робототехника: инженерные кадры России», являющееся официальным сопроводительным документом соревнований в России, позволяющих формировать инженерную культуру обучающихся не только в теории, но и на практике, включающее демонстрацию сильных связей между различными предметами (как естественного, так и гуманитарного циклов) и использующих принципы преемственности.

Большинство соревнований по спортивной робототехнике мотивируют к развитию познавательного интереса в инженерных областях и способствуют профессиональной ориентации, однако слабо опираются на школьный курс и практически не предусматривают реализацию результатов, предусмотренных ФГОС общего образования [4]. Во многом это связано с проблемой недостаточности методических материалов, ориентирующих педагогов не на победу ребёнка в частном случае (конкурсе, фестивале или этапе), а на его развитие. Отдельно следует выделить соревнования по робототехнике в рамках Лиг международной благотворительной организации и движения FIRST, мотивирующего обучающихся разного возраста получать техническое образование и развиваться дальше в освоении естественных наук, технологии, инженерии, программирования и математики, а также получить опыт, знания и навыки, необходимые в их будущей взрослой жизни, в том числе при применении концепции Благородного профессионализма.

В России представлены три Лиги FIRST — Jr. FIRST Lego League (Jr.FLL, подготовительная ступень), FIRST Lego League (FLL, предусматривает создание командами роботов из LEGO и защиту плаката достижений) и FIRST Tech Challenge (FTC). Наиболее интересным и полезным для развития предметных, междпредметных, метапредметных и личностных результатов является FTC. Это соревнование для обучающихся 12 – 18 лет, являющееся игровой моделью процесса создания продукта инжиниринговой компанией. Данное соревнование выходит за рамки идей STE(A)М-образования, значительно расширяя задачи и цели. Совершенствование навыков, применение на себя

конкретных профессиональных ролей в течение сезона, развитие коммуникации (включая межкультурную и на иностранном языке), создание инженерной книги не только позволяют обучающимся достичь определённых личностных и метапредметных результатов, но и применить учебную программу на практике и углубить теорию, учиться на опережение.

Существует острая проблема непонимания обучающимися различий понятий «инженерное дело» и «инжиниринг», как следствие, непонимание необходимости сопровождения созданного продукта, составления бизнес-плана или смет расходов на материалы для продукта и его совершенствование, создания сопроводительной документации для вывода индивидуального продукта в серийное производство.

Школьники и студенты колледжей, участвовавшие в «FTC Russian Open 2017», отметили, что:

- FTC мотивирует изучение учебных тем с опережением школьной программы;
- соревнования позволяют понять взаимосвязь между дисциплинами;
- формируется осознание выбора продолжения обучения в ВУЗе по определенной заранее специальности; более чётко представляются траектории будущей практической и научной деятельности;
- приобретаются компетенции, которые понадобятся в последующей профессиональной деятельности (например, в формате Junior Skills);
- благодаря общению с командами из других стран снимаются культурный и языковой барьеры, развиваются и укрепляются навыки свободной коммуникации;
- происходит переход на новый уровень владения иностранными языками.

Кроме того, необходимые для реализации проектов FTC знания и навыки находят взаимное отображение в темах школьного курса по предметам технология, физика, математика (алгебра и геометрия), информатика, а также экономика, английский язык [2]. Для обучающихся 10 – 11 классов возможно интегрирование участия в соревнованиях и прохождение сезонов с выполнением определённых профессиональных ролей в индивидуальный проект, предусмотренный ФГОС СОО [4]. Для обучающихся на ступени ССО участие в FTC может быть включено в учебный план целого перечня специальностей, касающихся робототехники, автоматизации производства, в качестве вариативных часов [5].

Восполнение пробелов в знаниях в этой области с помощью собственного опыта в значительной мере способствует формированию здорового взгляда на процессы в современном мире. Особую роль в достижении этого играет правильное составление инжиниринговой книги. *Инжиниринговая книга*

(*engineering book*) — обязательный компонент формата FTC, традиционно переводимая на русский язык как «инженерная книга». Не совсем верное толкование смысла оригинала обусловлено определенным историческим различием экономических моделей.

В жестко регламентированной плановой экономике каждый выпускаемый продукт имел собственную нишу потребления: команде инженеров не требовалось думать, как продать или продвигать этот продукт, его нужно было просто создать, имея поставленный руководством запрос-проблему.

В условиях свободного рынка, в котором присутствует сильная конкуренция, разработчикам необходимо не только предложить для потребителей нечто новое и отличающееся от других подобных продуктов, но и, создав новинку, показать ее потенциальным массовым производителям, ярко выделив преимущества.

Данная концепция повлияла и на образование: в США появилась концепция STE(A)M-движения, объединяющего несколько общеобразовательных предметов и подготавливающего детей к созданию новых, реально применимых и полезных устройств (см. рис. 1). Это помогает ориентировать школьников на выбор технических профессий и получение навыков, которые им понадобятся при работе на производствах при создании популярных и, соответственно, покупаемых продуктов. В России это движение только набирает силу.

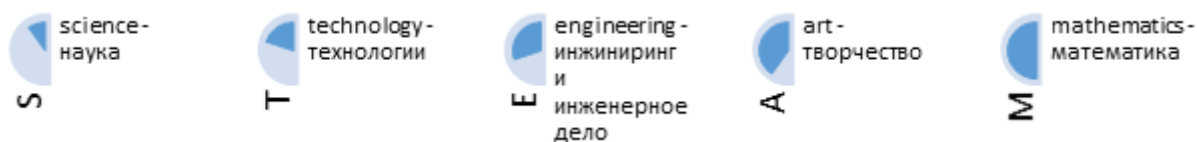


Рис. 1. STEAM

Таким образом, задача участников FIRST Tech Challenge — изучить поставленные цели и сопоставить свои возможности, чтобы создать работа, который не только покажет себя в реальных испытаниях (на соревновательном поле), но и будет иметь достаточную документацию для серийного производства. *FTC* — это намного больше, чем просто соревнование по робототехнике, это модель, готовящая в игровом формате будущих профессионалов, помогающая им понять этапы производства реального технического продукта и роли людей различных профессий, участвующих в разработке. Командам необходимо работать строго в последовательности этапов инжиниринга.

Ещё одним камнем преткновения для российских участников является понимание роли ментора. В России робототехнических и иных школьных соревнованиях учитель сохраняет роль управленца, активно влияющего на процесс участия ребёнка. Модель FTC предусматривает участие ментора — наставника, который обеспечивает комфортное участие ребят, вдохновляет своим примером, но не оказывает активное влияние на творческий технический процесс.

На русском языке опубликован только Регламент соревнований [1], методическая поддержка FTC в России отсутствует, поэтому был создан пакет материалов, состоящий из объяснения затрагиваемых понятий и тем, не освещённых в Регламенте, но важных для осознания целей собственной деятельности в рамках соревнований для обучающихся и рекомендации для преподавателей, а также отдельные рекомендации с примерами по составлению инженерной книги как основной документации, представляющей проект, на основе ключевых понятий инжиниринга и опыта международных победителей. При создании методического пособия были учтены особенности менталитета и российских участников, произведена адаптация американской модели соревнований под данные региональные особенности. Для оценки и сравнения выводов были проведены опросы экспертов регионального этапа FTC Russia Open, инженеров «Группы ГАЗ». В ходе апробации были проведены беседы с участниками FTC Russia Open 2017 и их преподавателями в г. Сочи, а также сопроводительная работа с командой-победителем («КТМ», Санкт-Петербург) для совершенствования инженерной книги перед участием в Чемпионате Европы и Мировом Чемпионате в США. Основным результатом работы стало методическое пособие «FIRST Tech Challenge. Путь к победе» [3] в рамках Программы «Робототехника: инженерные кадры России» (официальный организатор соревнований FTC Russia Open и представитель FIRST в России), являющееся официальным сопроводительным документом соревнований в России, начиная со следующего сезона.

Список литературы

1. Регламент соревнований FIRST Tech Challenge (сезон Velocity Vortex) [Электронный ресурс] Режим доступа: <http://russianrobotics.ru/competition/first/ftc/>
2. Реестр примерных основных общеобразовательных программ [Электронный ресурс] Режим доступа: <http://fgosreestr.ru/>
3. **Салахова А.А.** FIRST Tech Challenge. Путь к победе /А. А. Салахова — М.: Лаборатория знаний, 2017. — 108 с.

4. 4. Федеральные Государственные Образовательные Стандарты Общего Образования [Электронный ресурс] Режим доступа: <http://минобрнауки.рф/документы/543>
5. Федеральные Государственные Образовательные Стандарты Среднего Профессионального Образования [Электронный ресурс] Режим доступа: <http://минобрнауки.рф/документы/923>

Применение технологии дополнительной реальности при изучении трехмерных графических моделей

Тырданова М. С. (Москва, МПГУ)

tyrdanovamari@gmail.com

Науч. рук. Соболева М.Л., доц. каф. ТИДМ МПГУ

Аннотация

В статье представлено описание мобильного приложения разработанного на основе технологии дополненной реальности, которое возможно использовать при изучении трехмерных графических моделей.

В настоящее время осуществляется поиск решений по использованию мобильных средств в образовательном процессе. Многие фирмы предлагают свои программные продукты для реализации современных моделей обучения с применением мобильных устройств. К сожалению, среди достаточно большого многообразия программных средств не удалось найти программу, которая позволяла бы изучать трехмерные графические модели объектов реального времени.

Отсюда, возникла идея создать мобильное приложение отображающее объекты реального времени в виде трехмерных графических моделей дополненной реальности.

Рассмотрим принцип функционирования данного мобильного приложения.

При запуске мобильного приложения, открывается галерея, содержащая варианты моделей (примитивы), из которых необходимо выбрать конкретную модель. Далее через приложение запускается встроенная камера на мобильном устройстве. После чего, необходимо осуществить наведение камеры на соответствующий маркер.

Под маркером будем понимать — объект-мишень или любая фигура (объект), идентифицируя который, приложение может однозначно точно определить какой виртуальный объект, с какими параметрами и где его нужно расположить. Чаще всего маркером назначается черно-белое изображение простой формы прямоугольник или квадрат, с вписанным внутрь идентификатором-образом.

Приложение считывает этот маркер посредством встроенной камеры мобильного устройства. В последствие на считанный маркер выстраивается выбранная трехмерная модель, и на экране мобильного устройства отображается данная трехмерная модель в реальном времени.

Если долго удерживать кнопку «настройки» мобильного приложения, то открывается меню редактирования/изменения модели: перемещение относительно маркера, поворот вокруг вертикальной оси, проходящей через центр модели, а также масштабирование в реальном времени.

В результате получаем интерактивную модель реального объекта, которая посредством различных манипуляций (перемещение, поворот, масштабирование и др.) может помочь исследовать, изучить объект реального времени, его свойства.

Для реализации мобильного приложения с технологией дополненной реальности были выбраны программные языки:

- интерфейс приложения был реализован с помощью языка разметки XML;
- функционал мобильного приложения прописан на языке программирования Java.

Для работы с технологией дополненной реальности была выбрана среда разработки Android Studio, а для метода распознавания маркера — библиотека ARTOOLKIT.

ARTOOLKIT (Augmented Reality — AR) — библиотека программного обеспечения для построения дополненной реальности. Основная задача этой библиотеки — отслеживание в кадре заранее известных квадратных маркеров и реконструкция их расположения в пространстве относительно камеры. Эти данные позволяют рассчитывать трехмерные координаты элементов, отрисовываемых поверх кадра с привязкой к этим самым маркерам.

На основе использования среды Android Studio и библиотеки ARTOOLKIT создается интерфейс дополненной реальности.

Процесс распознавания маркера устройством происходит следующим образом:

1. Перевод цветного изображения в градации серого

Существуют три алгоритма перевода цветного изображения в градации серого:

Алгоритм 1

$$\text{Светлота(Lightness) GS} = \frac{\max(R, G, B) + \min(R, G, B)}{2}$$

Визуализация алгоритма 1 представлена на рис. 1.

Алгоритм 2

$$\text{Светимость(Luminosity) GS} = 0.21 \times R + 0.72 \times G + 0.07 \times B$$

Визуализация алгоритма 2 представлена на рис. 2.



Рис. 1. Визуализация алгоритма 1

Слева — исходное изображение, справа — выделение светлоты



Рис. 2. Визуализация алгоритма 2

Слева — исходное изображение, справа — выделение светлоты

Алгоритм 3

$$\text{Среднее (Average) GS} = \frac{R + G + B}{3}$$

Визуализация алгоритма 3 представлена на рис. 3.



Рис. 3. Визуализация алгоритма 3

Слева — исходное изображение, справа — выделение светлоты

2. Бинаризация изображения (порог)

Для того чтобы перевести изображение в двухцветное состояние, требуется задать определенный порог. Например, если имеется 256 цветов, то зна-

чение порога будет составлять 128. Так же порог можно выбрать при использовании гистограммы цвета.

Довольно часто используют методы бинаризации изображения с заданным, адаптивным порогом, а также метод Оцу (рис. 4).



Рис. 4. Визуализация методов

Слева направо — жестко заданный порог, адаптивный порог, метод Оцу

3. Определение замкнутых областей

Далее требуется определить замкнутые области на белом фоне. Для данного этапа используется комбинация алгоритмов, в общем случае применяются алгоритмы «заливки» белых областей и выделение замкнутых областей (рис. 5).

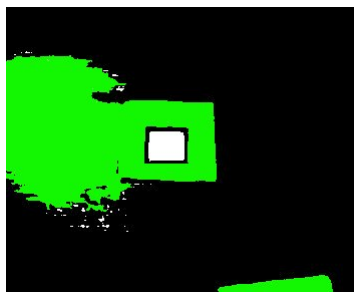


Рис. 5. Визуализация этапа определение замкнутых областей

Либо первоначально выделяются контуры изображения, потом они проверяются на замкнутость (рис. 6).

4. Выделение контуров

На этом этапе используются несколько алгоритмов по выделению контуров на изображении. В данных алгоритмах внутри белых замкнутых областей осуществляется поиск контуров:

- Canny Edge Detector

Визуализация алгоритма Canny представлена на рис. 7.

- Sobel Edge Detector

Визуализация алгоритма Sobel представлена на рис. 8.

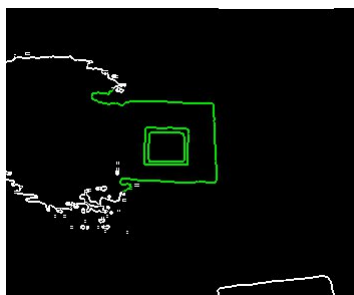


Рис. 6. Визуализация этапа определение замкнутых контуров

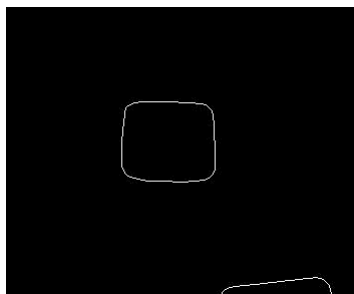


Рис. 7. Визуализация алгоритма Canny

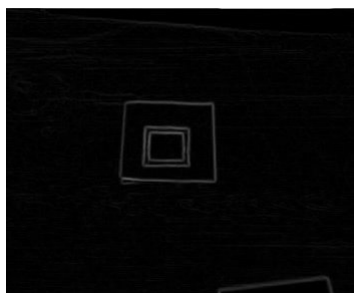


Рис. 8. Визуализация алгоритма Canny

5. Выделение углов маркера

Выделив контур, необходимо его сопоставить с имеющимся маркером. Когда выделен один и более разных контуров на изображении, необходимо найти тот контур, который «похож» на четырехугольник.

Для решения этой задачи применяется алгоритм Дугласа Пекера (Рамера Дугласа Пекера, алгоритм итеративной ближайшей точки, алгоритм разбиения и слияния), который позволяет уменьшить число точек кривой, замененной большей серией точек.

Данный способ позволяет получать координаты углов маркера (рис.9).

6. Преобразование координат

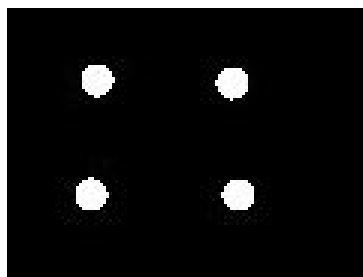


Рис. 9. Визуализация алгоритма Дугласа Пекера

Когда получены координаты углов маркера, в идеале являющиеся перпендикулярами, а в реальности могут располагаться под любым углом, можно определить положение «камеры» относительно объекта, которого нужно построить, и точку отсчета начала координат (стороны квадрата являются осями координат). Таким образом, при изменении угла, с которого смотрит камера, изменяется размер проекции. Зная положение камеры и точки отсчета, есть возможность нарисовать проекцию для трехмерной модели.

Вышеописанное мобильное приложение с технологией дополненной реальностью в ближайшее время планируется внедрять в учебный процесс при изучении трехмерных графических моделей.

Об эндоморфизмах p -локальных групп без кручения

Южнов А. А. (Москва, МПГУ)

lai.t@bk.ru

науч. рук. Царёв А. В. (д.ф.-м.н., проф. каф. алгебры МПГУ)

1. Введение

В монографии [1] кольцам эндоморфизмов абелевых групп посвящена глава, в которой рассматривается взаимосвязь структуры абелевой группы и ее кольца эндоморфизмов. Абелевы p -локальные группы являются важным классом абелевых групп, к ним относятся, например, класс p -примарных групп, изучению которого посвящены работы Л.Я. Куликова. В данной работе рассматриваются абелевы p -локальные группы без кручения. Охарактеризованы кольца эндоморфизмов абелевых p -локальных групп без кручения ранга 1 и p -ранга 1. Заметим, что к группам p -ранга 1 относится аддитивная группа целых p -адических чисел [2], [3].

2. Эндоморфизмы p -локальных абелевых групп без кручения

Пусть p – фиксированное простое число. Группа A называется p -локальной, если $qA = A$ для всех простых чисел $q \neq p$. Эндоморфизмы любой абелевой группы относительно операций сложения эндоморфизмов и их последовательного выполнения (композиции) образуют ассоциативное кольцо с единицей. Данное кольцо не всегда коммутативно.

Предложение 1. *Единственными p -локальными абелевыми группами без кручения ранга 1 являются следующие группы:*

1. аддитивная группа $\mathbb{Q}^+$ поля рациональных чисел;
2. аддитивная группа $\mathbb{Z}_p^+$ рациональных чисел со знаменателями взаимно простыми с простым числом p ;

$$\mathbb{Z}_p^+ = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, (n, p) = 1 \right\};$$

$$\mathbb{Q}^+ = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}.$$

Предложение 2. 1) Кольцо эндоморфизмов редуцированной p -локальной абелевой группы без кручения ранга 1 состоит из умножений на числа кольца $\mathbb{Z}_p$.

$$E(\mathbb{Z}_p^+) \cong \mathbb{Z}_p.$$

2) Кольцо эндоморфизмов делимой p -локальной абелевой группы без кручения ранга 1 состоит из умножений на рациональные числа.

$$E(\mathbb{Q}^+) \cong \mathbb{Q}.$$

Определение. Характеристикой $H(a)$ элемента a абелевой p -локальной группы без кручения A называется множество целых p -адических чисел $\alpha \in \widehat{\mathbb{Z}}_p$ таких, что $\alpha a \in A$.

$$H(a) = \{\alpha \in \widehat{\mathbb{Z}}_p \mid \alpha a \in A\}.$$

Предложение 3. Для любого элемента a абелевой p -локальной группы без кручения A характеристика $H(a)$ также является абелевой p -локальной группой без кручения p -ранга 1.

Теорема. Кольцо эндоморфизмов абелевой p -локальной редуцированной группы A без кручения p -ранга 1 состоит из умножений на целые p -адические числа из множества $\cap H(a)$, где $a \in A$.

$$E(A) \cong \bigcap_{a \in A} H(a).$$

Следствие. Кольцо эндоморфизмов аддитивной группы кольца целых p -адических чисел состоит из умножений на целые p -адические числа.

$$E(\widehat{\mathbb{Z}}_p^+) \cong \widehat{\mathbb{Z}}_p$$

Список литературы

1. **Фукс Л.** Бесконечные абелевы группы / Л. Фукс — М.: Мир, 1974. — Т.1. — 1977. — Т.2.
2. **Боревич З.И., Шафаревич И.Р.** Теория чисел. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы.— 1985.— 504 с., 3-е изд.доп.
3. **Фомин А.А.** Числовые кольца и модули над ними. Учебное пособие. — М.: МПГУ, 2013. — 71 с.

Применение кватернионов к преобразованиям четырехмерного евклидова пространства

Алексеева Н. А. (Москва, МПГУ)

gukovanatalia@gmail.com

науч. рук. Игнаточкина Л.А., к.ф.-м.н., доцент каф. геометрии МПГУ)

Аннотация

В данной работе были выведены формулы некоторых фигур в кватернионах: гипersферы, гиперплоскости, 2-плоскости и прямой. Рассмотрены некоторые примеры преобразований четырехмерного евклидова пространства и выведены формулы в кватернионах. Одним из них является параллельный перенос, пример преобразования, являющегося движением, и рассмотрен еще один пример, отличный от движения, гомотетия. Доказаны свойства этих преобразований. Сформулированы и доказаны: критерий параллельности для гиперплоскости и теоремы о некоторых групповых свойствах множества гомотетий и параллельного переноса 4-мерного евклидова пространства.

1. Введение

Большое значение комплексных чисел в математике и ее приложениях широко известно. Особенно часто применяются функции комплексного переменного. Вместе с тем алгебру комплексных чисел можно успешно использовать в элементарной геометрии, тригонометрии, теории геометрических преобразований, а также в электротехнике и различных задачах с механическим и физическим содержанием. Именно поэтому в рассмотрении вопроса о преобразованиях плоскости обращаются к комплексным числам. Метод комплексных чисел позволяет решать планиметрические задачи по готовым формулам прямым вычислением, элементарными выкладками. Выбор этих формул с очевидностью диктуется условиями задачи и ее требованием. В этом состоит простота данного метода, по сравнению с другими методами, ведь готовое решение может быть очень коротким. Например, в книге Я.П. Понарина при рассмотрении свойств инверсии при помощи комплексных чисел получаются более короткие и легкие выкладки. Так же в книге рассматривается ряд задач на инверсию, которые трудоемко решаются в действительных числах и легко — в комплексных.

Рассматривая евклидово пространство размерности большей двух, хотелось бы в каждом случае иметь свою систему чисел для технического упрощения выкладок при исследовании. Для четырехмерного пространства такими числами являются кватернионы, они были придуманы ирландским математиком Уильямом Гамильтоном.

На плоскости два уравнения, задающие преобразование, можно заменить одним при помощи комплексных чисел. Эта проблема становится актуальнее при рассмотрении преобразований четырехмерного евклидова пространства. Аналогичным образом, четыре уравнения, которые задают преобразование, заменяем на одно, используя кватернионы. Таким образом, можно предположить, что при выводе формул преобразований и при доказательстве свойств и теорем будут получаться короткие выкладки.

2. Кватернионы

2.1. История кватернионов

Уильям Роуэн Гамильтон (1805-1865) ирландский математик, прежде чем открыть кватернионы, долгое время работал с комплексными числами.

Гамильтон был настолько вдохновлен связью комплексных чисел с двумерным евклидовым пространством, что поставил перед собой цель: найти другие числа, которые играли бы аналогичную роль в трехмерном евклидовом пространстве. Он хотел задать числовую систему, представляющую собой тройку чисел (x, y, z) . Проблема была в том, что до тех пор никто не работал с алгеброй, образованной тройками чисел. Однако, Гамильтон решил попробовать. Сложение не представляло сложностей (складываем соответствующие вещественные числа в тройках):

$$(x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2),$$

а вот умножение троек чисел оказалось серьезной проблемой. Операция аналогичная умножению комплексных чисел была невозможна. Не удавалось подобрать правила умножения троек чисел, чтобы существовала тройка чисел (x, y, z) , такая что:

$$(-1, 0, 0) = (x, y, z)(x, y, z)$$

Возникли две сложности:

1. Не будет квадратного корня из минус единицы.
2. При умножении не нулевых чисел можем получить ноль, а значит в алгебре есть делители нуля.

Ошибка Гамильтона состояла в том, что он хотел решить обе проблемы. То есть он был твердо уверен, что алгебра должна обладать всеми свойствами комплексных чисел. И лишь спустя время он понял, что одним из них он может пренебречь. Так к нему пришло осознание, что он не сможет построить алгебру из трех чисел, а из четверки может получиться нужная ему алгебра.

Новая алгебра была построена с сохранением всех свойств, кроме коммутативности. Ей пришлось пожертвовать. Оставался лишь один вопрос: как перемножать четверки чисел.

16 октября 1843 года Гамильтон, прогуливаясь со своей женой, внезапно решил так долго мучивший его вопрос. Это произошло в Дублине по пути на собрание престижной Королевской Ирландской академии. Позже он написал: «Там и тогда я почувствовал гальванизирующий ток от приближающейся мысли, и искры, произведенные им, представляли собой фундаментальные уравнения между i, j, k , причем в точности такие, какие я с той поры всегда и использую». Существует легенда, что Гамильтон сразу же нацарапал формулы на каменной кладке моста Брумбридж. До наших дней эта запись не сохранилась, а вот на самом мосту висит памятная табличка. Эти новые числа Гамильтон назвал *кватернионами*.

Позже Анри Пуанкаре скажет о кватернионах: «Их появление дало мощный толчок развитию алгебры; исходя от них, наука пошла по пути обобщения понятия числа, придя к концепциям матрицы и линейного оператора, пронизывающим современную математику. Это была революция в арифметике, подобная той, которую сделал Лобачевский в геометрии.»

2.2. Определение кватернионов

Перейдем к определению кватернионов.

Определение 1. *Кватернионами или четверными числами будем называть упорядоченную четверку действительных чисел $q = (a, b, c, d)$, которую будем записывать в виде:*

$$q = a + bi + cj + dk.$$

Зададим операции сложения и умножения кватернионов.

Определение 2. *Суммой двух кватернионов $q_1 = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k$ и $q_2 = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k$ будем называть кватернион вида:*

$$q_1 + q_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k. \quad (1)$$

Прежде чем ввести произведение, надо задать правило умножения элементов i, j, k :

$$\begin{aligned} i^2 &= -1, & j^2 &= -1, & k^2 &= -1, \\ ij &= k, & ik &= -j, \\ jk &= i, & ji &= -k, \\ ki &= j, & kj &= -i. \end{aligned} \quad (2)$$

Выведем формулу произведения двух кватернионов, используя свойство дистрибутивности и правило умножения элементов i, j, k :

$$\begin{aligned} q_1 q_2 = (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k)(a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) = \\ a_1 a_2 + a_1(b_2 i) + a_1(c_2 j) + a_1(d_2 k) + \\ + (b_1 i)a_2 + (b_1 i)(b_2 i) + (b_1 i)(c_2 j) + (b_1 i)(d_2 k) + \\ + (c_1 j)a_2 + (c_1 j)(b_2 i) + (c_1 j)(c_2 j) + (c_1 j)(d_2 k) + \\ + (d_1 k)a_2 + (d_1 k)(b_2 i) + (d_1 k)(c_2 j) + (d_1 k)(d_2 k). \end{aligned}$$

Теперь преобразуем полученное выражение, используя формулы умножения (2):

$$\begin{aligned} a_1 a_2 + a_1(b_2 i) + a_1(c_2 j) + a_1(d_2 k) + (b_1 i)a_2 - b_1 b_2 + b_1 c_2 k - b_1 d_2 j + \\ + (c_1 j)a_2 - c_1 b_2 k - c_1 c_2 + c_1 d_2 i + (d_1 k)a_2 + d_1 b_2 j - d_1 c_2 i - d_1 d_2. \end{aligned}$$

Сгруппируем:

$$\begin{aligned} q_1 q_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2)i + \\ + (a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2)j + (a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2)k. \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, получили формулу для произведения кватернионов.

Как видим, что кватернионы не обладают коммутативностью умножения. Это наглядно видно из правил умножения элементов i, j, k . Например, $ij = k$, а $ji = -k$.

3. Аффинное пространство

Пусть дано 4-мерное векторное пространство $\mathbb{V}^4$, непустое множество $\mathcal{A}$ произвольной природы. Зададим отображение:

$$\sigma : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{V}^4,$$

которое будет удовлетворять условиям:

$$1. \quad \forall X \in \mathcal{A} \text{ и } \forall \vec{p} \in \mathbb{V}^4 \exists Y \in \mathcal{A} : \sigma(X, Y) = \vec{p}$$

$$2. \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{A} : \sigma(X, Y) + \sigma(Y, Z) = \sigma(X, Z)$$

Полученное множество $\mathcal{A}$ будем называть *4-мерным аффинным пространством*, элементы этого множества – *точки*, условия 1, 2 – *аксиомы аффинного пространства*. А $\mathbb{V}^4$, будем называть *пространством трансляций аффинного пространства*. Введем обозначени: $\sigma(X, Y) = \overline{XY}$. Тогда второе условие можем переписать в ином виде:

$$\overline{XY} + \overline{YZ} = \overline{XZ}$$

4. Евклидово векторное пространство

Пусть дано $\mathbb{V}^4$ – 4-мерное векторное пространство.

Определение 3. Билинейную форму называется отображение $g : \mathbb{V}^4 \times \mathbb{V}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ линейное по каждому аргументу, то есть:

1. $g(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{z}) = \alpha g(\vec{x}, \vec{z}) + \beta g(\vec{y}, \vec{z})$
2. $g(\vec{x}, \alpha\vec{y} + \beta\vec{z}) = \alpha g(\vec{x}, \vec{y}) + \beta g(\vec{x}, \vec{z})$,
где α, β произвольные действительные числа, а $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{V}^4$.

Определение 4. Билинейной формой g будем называть симметрической, если для любых $\vec{x}, \vec{y}$ из $\mathbb{V}^4$ выполняется равенство: $g(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{y}, \vec{x})$.

Определение 5. Симметрическая билинейная форма g называется положительно определенной, если для любого $\vec{x}$ из $\mathbb{V}^4$ выполняется неравенство: $g(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$, и $g(\vec{x}, \vec{x}) = 0$, тогда и только тогда, когда $\vec{x} = \vec{0}$.

Определение 6. Пара $(\mathbb{V}^4, g)$, где g – положительно определенная билинейная форма, а $\mathbb{V}^4$ – 4-мерное векторное пространство, называется 4-мерным евклидовым пространством.

Определим длину вектора следующим образом:

$$|\vec{x}| = \sqrt{g(\vec{x}, \vec{x})}, \quad (4)$$

где $\vec{x}$ из $\mathbb{V}^4$.

Зададим угол между не нулевыми векторами $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{V}^4$:

$$\cos \angle(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{g(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}||\vec{y}|}. \quad (5)$$

5. Евклидово точечное пространство

Используя введенные понятия аффинного и евклидова векторного пространств, определим евклидово точечное пространство.

Определение 7. Аффинное пространство $\mathcal{A}$ называется 4-мерным евклидовым пространством, если его пространство трансляций является евклидовым векторным пространством.

В 4-мерном евклидовом пространстве можно ввести длину, понятие длины отрезка и величины угла. Имеем $\mathcal{A}$ – евклидово пространство. Возьмем

произвольные точки A, B из $\mathcal{A}$. Определим *расстояние между точками* по формуле:

$$AB = \sqrt{g(\overline{AB}, \overline{AB})}.$$

Длинной отрезка назовем расстояние между его концами.

Возьмем произвольный угол $\angle AOB$, его *величиной* будем называть число:

$$\cos \angle AOB = \cos \angle(\overline{OA}, \overline{OB}) \quad (6)$$

6. Связь кватернионов с 4-мерным евклидовым пространством

Зафиксируем прямоугольную 4-х мерную систему координат. Теперь свяжем кватернионы с точками аффинного пространства. Для этого возьмем произвольную точку 4-х мерного аффинного пространства $\mathcal{A}$. Точка будет иметь координаты (a_1, a_2, a_3, a_4) . Эти числа можем поставить в соответствие координатам кватерниона: $q = a_1 + a_2i + a_3j + a_4k$. Чтобы поставить кватернион в соответствие вектору евклидова пространства зафиксируем две точки в ПДСК: $A(a_1, a_2, a_3, a_4)$ и $B(b_1, b_2, b_3, b_4)$. Тогда вектор $\overline{AB}$ будет иметь координаты: $(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3, b_4 - a_4)$. Получили 4-ку чисел, которую ставим в соответствие кватерниону $q = (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2)i + (b_3 - a_3)j + (b_4 - a_4)k$. Скалярное произведение при помощи кватернионов будет иметь следующий вид:

$$(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(\alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha}) = \frac{1}{2}(\bar{\alpha}\beta + \bar{\beta}\alpha). \quad (7)$$

Покажем, что оно будет аналогичным с ранее заданным, то есть

$$\begin{aligned} g(a, b) &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4. \\ (\alpha, \beta) &= \frac{1}{2}(\alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha}) = \frac{1}{2}((a_1 + a_2i + a_3j + a_4k)(b_1 - b_2i - b_3j - b_4k) + \\ &\quad + (b_1 + b_2i + b_3j + b_4k)(a_1 - a_2i - a_3j - a_4k)). \end{aligned}$$

Вычислим по отдельности, сначала найдем $\alpha\bar{\beta}$:

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2i + a_3j + a_4k)(b_1 - b_2i - b_3j - b_4k) &= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4) + \\ &\quad + (-a_1b_2 + a_2b_1 - a_3b_4 + a_4b_3)i + \\ &\quad + (-a_1b_3 + a_2b_4 + a_3b_1 - a_4b_2)j + (-a_1b_4 - a_2b_3 + a_3b_2 + a_4b_1)k. \end{aligned}$$

Теперь вычислим $\beta\bar{\alpha}$:

$$\begin{aligned} \beta\bar{\alpha} &= (b_1 + b_2i + b_3j + b_4k)(a_1 - a_2i - a_3j - a_4k) = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4) + \\ &\quad + (-b_1a_2 + b_2a_1 - b_3a_4 + b_4a_3)i + \\ &\quad + (-b_1a_3 + b_2a_4 + b_3a_1 - b_4a_2)j + (-b_1a_4 - b_2a_3 + b_3a_2 + b_4a_1)k. \end{aligned}$$

Заметим, что при сложении полученных произведений слагаемые, содержащие множители i, j, k , взаимоуничтожаются, и при умножении оставшейся суммы на $\frac{1}{2}$ получим желаемый результат, а именно:

$$(\alpha, \beta) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 = g(\vec{a}, \vec{b}).$$

За расстояние между двумя кватернионами примем модуль их разности $|\beta - \alpha|$. И покажем, что верно равенство:

$$\overline{AB} = \sqrt{g(\overline{AB}, \overline{AB})} = |\beta - \alpha|.$$

Действительно, с одной стороны имеем:

$$\sqrt{g(\overline{AB}, \overline{AB})} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2 + (b_4 - a_4)^2},$$

с другой:

$$|\beta - \alpha| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2 + (b_4 - a_4)^2},$$

равенство очевидно.

Выведем формулу вычисления длины вектора, используя скалярное произведение для кватернионов (7):

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha)} = \sqrt{\frac{1}{2}((\beta - \alpha)(\overline{\beta - \alpha}) - (\beta - \alpha)(\overline{\beta - \alpha}))} = \\ &= \sqrt{2 \cdot \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(\overline{\beta - \alpha})} = \sqrt{(\beta - \alpha)(\overline{\beta - \alpha})}. \end{aligned} \quad (8)$$

Определение скалярного произведения позволит вычислять углы по ранее известной формуле: $\cos \gamma = \frac{(\alpha, \beta)}{|\alpha||\beta|}$.

7. Вывод уравнений фигур в кватернионах

Для того чтобы изучать свойства преобразований 4-мерного евклидова пространства, выведем уравнения некоторых фигур в кватернионах.

7.1. Сфера

Выведем уравнение 3-мерной сферы в кватернионах. В вещественный числах уравнение имеет вид:

$$(x^1 - a)^2 + (x^2 - b)^2 + (x^3 - c)^2 + (x^4 - d)^2 = R^2.$$

Пусть $q = x^1 + x^2i + x^3j + x^4k$ и $\bar{q} = x^1 - x^2i - x^3j - x^4k$. Зная, что $q\bar{q} = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2$, получим уравнение окружности с центром в начале координат:

$$q\bar{q} = R^2.$$

Если же центр произвольная точка, то уравнение окружности в кватернионах будет иметь вид:

$$(q - q_0)(\bar{q} - \bar{q}_0) = R^2.$$

7.2. Гиперплоскость

Пусть $\vec{n}$ нормальный вектор. Гиперплоскость можно задать с помощью скалярного произведения. Итак, пусть имеем точку $M(x^1, x^2, x^3, x^4)$, поставим ей в соответствие кватернион $q = x^1 + x^2i + x^3j + x^4k$. Эта точка будет принадлежать плоскости тогда и только тогда, когда $\overline{M_0M}$ перпендикулярно $\vec{n}$. Точка M_0 имеет координаты $(x_0^1, x_0^2, x_0^3, x_0^4)$, а вектор нормали к плоскости имеет координаты $\vec{n}(n_1, n_2, n_3, n_4)$. Поставим в соответствие точке M_0 кватернион q_0 , а вектору $\vec{n}$ кватернион q_n . Равенство $\overline{M_0M}$ можем записать как разность координат, получим разность кватернионов, она так же будет являться кватернионом. Тогда условие перпендикулярности примет вид: $(q_n, (q - q_0)) = 0$. Найдем скалярное произведение:

$$\frac{1}{2}(q_n \overline{(q - q_0)} + (q - q_0)\bar{q}_n) = 0,$$

Сократим на $\frac{1}{2}$ и получим уравнение гиперплоскости:

$$q_n \overline{(q - q_0)} + (q - q_0)\bar{q}_n = 0, \quad (9)$$

Полученные уравнения, имеют непривычный вид, попробуем модернизировать их. Возьмем уравнение гиперплоскости (9) и раскроем скобки, получим:

$$q_n \bar{q} + q \bar{q}_n - q_n \bar{q}_0 - q_0 \bar{q}_n = 0.$$

Обозначим $b = -q_n \bar{q}_0 - q_0 \bar{q}_n$, а $q_n = \mu$, получим:

$$\mu \bar{q} + q \bar{\mu} + b = 0. \quad (10)$$

Запишем это уравнение для q_0 :

$$\mu \bar{q}_0 + q_0 \bar{\mu} + b = 0. \quad (11)$$

Проверим, будет ли полученное уравнение задавать гиперплоскость. Для этого выразим q_0 из (11): $q_0 = -\frac{b}{\mu + \bar{\mu}}$, и подставим в уравнение (9), предварительно заменив в нем $q_n = \mu$, итак получим:

$$\mu \left(q + \frac{b}{\mu + \bar{\mu}} \right) + \left(q + \frac{b}{\mu + \bar{\mu}} \right) \bar{\mu} = 0,$$

$$\mu \bar{q} + \frac{\mu b}{\mu + \bar{\mu}} + q \bar{\mu} + \frac{\bar{\mu} b}{\mu + \bar{\mu}} = 0,$$

$$\mu \bar{q} + q \bar{\mu} + \frac{(\bar{\mu} + \mu)b}{(\mu + \bar{\mu})} = 0,$$

$$\mu \bar{q} + q \bar{\mu} + b = 0.$$

Получили в точности такое же уравнение (10), значит уравнение гиперплоскости можно записать в данном виде.

Выведем критерий параллельности гиперплоскостей. Итак, пусть даны две гиперплоскости:

$$\mu \bar{q} + q \bar{\mu} + b = 0, \quad (12)$$

$$\nu \bar{q} + q \bar{\nu} + d = 0. \quad (13)$$

Предположим, что они параллельны, значит $\mu \parallel \nu$. Следовательно можем связать коэффициенты следующим равенством: $\mu = \lambda \nu$, где $\lambda \in \mathbb{R}$ и так как плоскости не совпадают, то: $d \neq \lambda b$.

В обратную сторону: предположим, что $\mu = \lambda \nu$ и $d \neq \lambda b$, тогда $\mu \parallel \nu$, значит гиперплоскости имеют одинаковые направляющие подпространства, но не они совпадают в силу неравенства $d \neq \lambda b$. Из этого следует параллельность гиперплоскостей. Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Гиперплоскости (12) и (13) параллельны тогда и только тогда, когда их коэффициенты связаны следующими условиями: $\mu = \lambda \nu$ и $d \neq \lambda b$, где $\lambda \in \mathbb{R}$.*

7.3. 2-плоскость

Зададим уравнение 2-плоскости в кватернионах, как пересечение двух 3-плоскостей (гиперплоскостей). Получим:

$$\begin{cases} \mu \bar{q} + q \bar{\mu} + b = 0, \\ \nu \bar{q} + q \bar{\nu} + d = 0. \end{cases}$$

7.4. 1-плоскость

Зададим уравнение 1-плоскости параметрически опираясь на то, что если дана прямая с фиксированной точкой M_0 и направляющим вектором $\vec{p}$, то точка M будет принадлежать этой прямой, если M_0M параллельно $\vec{p}$. Иначе это условие можно записать так: $\overline{M_0M} = t\vec{p}$, где t параметр, отличный от нуля. Пусть точка M_0 имеет координаты $(x_0^1, x_0^2, x_0^3, x_0^4)$, точка $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$, а вектор $\vec{p}(p_1, p_2, p_3, p_4)$. Тогда уравнения 1-плоскости, то есть прямой будут иметь вид:

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0^1 + p_1 t, \\x_2 &= x_0^2 + p_2 t, \\x_3 &= x_0^3 + p_3 t, \\x_4 &= x_0^4 + p_4 t.\end{aligned}$$

Теперь поставим в соответствие точке M кватернион q , точке M_0 кватернион q_0 и соответственно вектору $\vec{p}$ кватернион p . Тогда можем записать уравнение 1-плоскости (или прямой) в кватернионах:

$$q = q_0 + pt.$$

8. Применение кватернионов к некоторым видам преобразований 4-мерного евклидова пространства

8.1. Параллельный перенос

По определению: пусть дана точка $M \in \mathcal{A}$, дан вектор $\vec{p} \in \mathbb{V}^4$, тогда существует точка $\tilde{M} \in \mathcal{A}$ такая, что: $\overline{\tilde{M}M} = \vec{p}$ тогда и только тогда, когда $\sigma(M, \tilde{M}) = \vec{p}$.

Свяжем координаты точек и векторов с кватернионами:

$$\begin{aligned}M(x^1, x^2, x^3, x^4) &\leftrightarrow q = x^1 + x^2 i + x^3 j + x^4 k, \\ \tilde{M}(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3, \tilde{x}^4) &\leftrightarrow \tilde{q} = \tilde{x}^1 + \tilde{x}^2 i + \tilde{x}^3 j + \tilde{x}^4 k, \\ p(p^1, p^2, p^3, p^4) &\leftrightarrow q_p = p^1 + p^2 i + p^3 j + p^4 k.\end{aligned}$$

Зная, что $\overline{\tilde{M}M} = \vec{p}$, получим систему уравнений:

$$\begin{aligned}\tilde{x}^1 - x^1 &= p^1, \\ \tilde{x}^2 - x^2 &= p^2, \\ \tilde{x}^3 - x^3 &= p^3, \\ \tilde{x}^4 - x^4 &= p^4.\end{aligned}$$

Первый столбик заменим на $\tilde{q}$, второй на q , а последний на q_p , имеем: $\tilde{q} - q = q_p$, преобразовав эти равенство получим:

$$\tilde{q} = q + q_p.$$

Таким образом, получили формулу параллельного переноса в кватернионах.

Покажем, что параллельный перенос является движением. Итак, поставим в соответствие точке M кватернион μ , точке $M' \rightarrow \tilde{\mu}$, точке $N \rightarrow \nu$, а точке $N' \rightarrow \tilde{\nu}$. Тогда формулы параллельного переноса в кватернионах будут иметь вид:

$$\tilde{\mu} = \mu + \xi, \tilde{\nu} = \nu + \xi.$$

Зная, что движение сохраняет расстояние между точками, и воспользовавшись формулой (8), получим:

$$\begin{aligned} M'N' &= \sqrt{(\tilde{\nu} - \tilde{\mu})(\overline{\tilde{\nu} - \tilde{\mu}})} = \sqrt{(\nu + \xi - \mu - \xi)(\overline{\nu + \xi - \mu - \xi})} = \\ &= \sqrt{(\nu - \mu)(\overline{\nu - \mu})} = MN. \end{aligned}$$

Таким образом, доказано, что параллельный перенос это движение.

8.2. Свойства параллельного переноса

Предложение. При параллельном переносе гиперплоскость переходит в параллельную гиперплоскость.

Доказательство. Для этого выразим q из формулы параллельного переноса и подставим в уравнение гиперплоскости:

$$\mu(\overline{\tilde{q} - q_p}) + (\tilde{q} - q_p)\mu + b = 0,$$

$$\mu\tilde{\bar{q}} + \tilde{q}\mu + b - \mu\bar{q}_p - q_p\bar{\mu} = 0.$$

Обозначим $a = b - \mu\bar{q}_p - q_p\bar{\mu}$, получим:

$$\mu\tilde{\bar{q}} + \tilde{q}\mu + a = 0.$$

Видим, что получили уравнение гиперплоскости, которая параллельна исходной (по критерию параллельности гиперплоскостей). $\square$

Предложение. При параллельном переносе 2-плоскость переходит в 2-плоскость.

Доказательство. Итак имеем 2-плоскость и параллельный перенос. Выразим и подставим q в систему, получим:

$$\begin{cases} \mu(\overline{\tilde{q} - q_p}) + (\tilde{q} - q_p)\bar{\mu} + b = 0, \\ \nu(\overline{\tilde{q} - q_p}) + (\tilde{q} - q_p)\bar{\nu} + d = 0. \end{cases}$$

Полученная система задает 2-плоскость. □

Аналогичным образом можно доказать следующие свойства параллельного переноса.

Предложение. *При параллельном переносе гиперсфера переходит в гиперсферу.*

Предложение. *При параллельном переносе прямая переходит в прямую.*

8.3. Гомотетия

Еще одним примером преобразования 4-мерного евклидова пространства отличным от движения является гомотетия.

Зафиксируем произвольную точку M_0 и число $\lambda \neq 0$. Рассмотрим отображение $M \rightarrow \tilde{M}$ такое, что $\overline{M_0\tilde{M}} = \lambda\overline{M_0M}$. Свяжем координаты точек с кватернионами:

$$M(x^1, x^2, x^3, x^4) \leftrightarrow q = x^1 + x^2i + x^3j + x^4k,$$

$$\tilde{M}(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3, \tilde{x}^4) \leftrightarrow \tilde{q} = \tilde{x}^1 + \tilde{x}^2i + \tilde{x}^3j + \tilde{x}^4k,$$

$$M_0(x_0^1, x_0^2, x_0^3, x_0^4) \leftrightarrow q_0 = x_0^1 + x_0^2i + x_0^3j + x_0^4k.$$

Зная, что $\overline{M_0\tilde{M}} = \lambda\overline{M_0M}$ запишем систему уравнений:

$$\tilde{x}^1 - x_0^1 = \lambda(x^1 - x_0^1),$$

$$\tilde{x}^2 - x_0^2 = \lambda(x^2 - x_0^2),$$

$$\tilde{x}^3 - x_0^3 = \lambda(x^3 - x_0^3),$$

$$\tilde{x}^4 - x_0^4 = \lambda(x^4 - x_0^4).$$

Переобозначим столбцы и получим:

$$\tilde{q} - q_0 = \lambda(q - q_0).$$

Получили формулу гомотетии в кватернионах.

8.4. Свойства гомотетии

Предложение. При гомотетии гиперсфера переходит в гиперсферу.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда центр гомотетии и центр гиперсферы не совпадают. Имеем, гомотетию $\tilde{q} - q_1 = \lambda(q - q_1)$ и сферу $(q - q_0)(\bar{q} - \bar{q}_0) = R^2$. Выразим из формулы гомотетии q и подставим в уравнение сферы:

$$q = \frac{\tilde{q} - q_1}{\lambda} + q_1,$$

$$\left(\frac{\tilde{q} - q_1}{\lambda} + q_1 - q_0\right)\left(\frac{\bar{\tilde{q}} - \bar{q}_1}{\lambda} + \bar{q}_1 - \bar{q}_0\right) = R^2,$$

Преобразуем полученное выражение, домножим обе части равенства на λ^2 :

$$(\tilde{q} - q_1 + \lambda q_1 - \lambda q_0)(\bar{\tilde{q}} - \bar{q}_1 + \lambda \bar{q}_1 - \lambda \bar{q}_0) = \lambda^2 R^2,$$

Таким образом, получили уравнение, задающее гиперсферу с центром $q_1 - \lambda q_1 + \lambda q_0$ и радиусом λR . $\square$

Предложение. При гомотетии гиперплоскость переходит в гиперплоскость.

Доказательство. Рассмотрим два случая.

1) Если гиперплоскость содержит центр гомотетии, то выразив q из формулы гомотетии, и подставив в уравнение гиперплоскости, получим:

$$q_n \left(\frac{\tilde{q} - q_0}{\lambda} + \bar{q}_0 - \bar{q}_0 \right) + \left(\frac{\tilde{q} - q_0}{\lambda} + q_0 - q_0 \right) \bar{q}_n = 0,$$

Домножим равенство на $\lambda \neq 0$:

$$q_n(\tilde{q} - q_0) + (\tilde{q} - q_0)\bar{q}_n = 0.$$

Получили уравнение гиперплоскости.

2) Теперь рассмотрим случай, когда гиперплоскость не содержит центр гомотетии. Итак, формула гомотетии имеет вид: $\tilde{q} - q_1 = \lambda(q - q_1)$, выразим q и подставим в уравнение гиперплоскости:

$$q_n \left(\frac{\tilde{q} - q_1}{\lambda} + \bar{q}_1 - \bar{q}_0 \right) + \left(\frac{\tilde{q} - q_1}{\lambda} + q_1 - q_0 \right) \bar{q}_n = 0,$$

Домножим равенство на $\lambda \neq 0$:

$$q_n(\tilde{q} - q_1 + \lambda \bar{q}_1 - \lambda \bar{q}_0) + (\tilde{q} - q_1 + \lambda q_1 - \lambda q_0)\bar{q}_n = 0.$$

Опять же получили уравнение гиперплоскости. $\square$

Аналогичным образом доказываются следующие свойства:

Предложение. *При гомотетии 2-плоскость переходит в 2-плоскость.*

Предложение. *При гомотетии прямая переходит в прямую.*

9. Композиция гомотетий

Интересные результаты можно получить при рассмотрении композиции гомотетий с различными центрами и различными коэффициентами гомотетии.

Теорема 2. *Композиция двух гомотетий с одинаковым центром будет гомотетией с тем же центром и коэффициентом гомотетии, равным произведению коэффициентов.*

Доказательство. Пусть даны две гомотетии с одинаковым центром:

$$\tilde{q} - q_0 = \lambda(q - q_0),$$

$$\tilde{q} - q_0 = \beta(q - q_0).$$

Найдем композицию гомотетий. Для этого из второго равенства выразим $\tilde{q}$ и подставим в первое, получим:

$$\tilde{q} = \beta(q - q_0) + q_0,$$

$$\tilde{q} - q_0 = \lambda(\beta(q - q_0) + q_0 - q_0),$$

Преобразуем полученное выражение:

$$\tilde{q} - q_0 = \lambda\beta(q - q_0).$$

Получили гомотетию с центром q_0 и коэффициентом $\lambda\beta$. □

Теперь рассмотрим случай композиции гомотетий с разными центрами. Для начала возьмем коэффициенты гомотетий взаимнообратные и посмотрим, что же получится в композиции.

Имеем:

$$\tilde{q} - q_1 = \lambda(q - q_1),$$

$$\tilde{q} - q_2 = \beta(q - q_2).$$

и $\lambda\beta = 1$. Выразим из второго равенства $\tilde{q}$ и подставим в первое. Получим:

$$\tilde{q} = \beta(q - q_2) + q_2,$$

$$\begin{aligned}\tilde{q} - q_1 &= \lambda(\beta(q - q_2) + q_2 - q_1), \\ \tilde{q} &= \lambda\beta(q - q_2) + \lambda q_2 - \lambda q_1 + q_1, \\ \tilde{q} &= q - q_2 + \lambda q_2 - \lambda q_1 + q_1.\end{aligned}$$

Обозначим $\lambda q_2 - \lambda q_1 + q_1 - q_2 = \gamma$:

$$\tilde{q} = q + \gamma.$$

Получили параллельный перенос. Таким образом, доказали следующую теорему.

Теорема 3. *Если гомотетии имеют разные центры, но их коэффициенты взаимнообратны, то в композиции будет параллельный перенос.*

Теперь рассмотрим композицию гомотетий с разными центрами и с разными коэффициентами. Имеем:

$$\tilde{q} = \lambda(q - q_1) + q_1, \quad (14)$$

$$\tilde{q} = \beta(q - q_2) + q_2. \quad (15)$$

Подставим $\tilde{q}$ из второго равенства в первое, получим:

$$\tilde{q} = \lambda(\beta(q - q_2) + q_2 - q_1) + q_1 = \lambda\beta q - \lambda\beta q_2 + \lambda q_2 - \lambda q_1 + q_1. \quad (16)$$

Хотим:

$$\tilde{q} = \lambda\beta(q - q_0) + q_0 = \lambda\beta q - \lambda\beta q_0 + q_0. \quad (17)$$

Видим, что в равенствах (16) и (17) есть общее слагаемое $\lambda\beta q$, хотим, чтобы $-\lambda\beta q_2 + \lambda q_2 - \lambda q_1 + q_1 = -\lambda\beta q_0 + q_0$. Выразим из этого равенства q_0 :

$$q_0 = \frac{-\lambda\beta q_2 + \lambda q_2 - \lambda q_1 + q_1}{1 - \lambda\beta}. \quad (18)$$

Подставим полученное q_0 в (17):

$$\begin{aligned}\tilde{q} &= \lambda\beta q - \lambda\beta \frac{-\lambda\beta q_2 + \lambda q_2 - \lambda q_1 + q_1}{1 - \lambda\beta} + \frac{-\lambda\beta q_2 + \lambda q_2 - \lambda q_1 + q_1}{1 - \lambda\beta} = \\ &= \lambda\beta q + \frac{(-\lambda\beta q_2 + \lambda q_2 - \lambda q_1 + q_1)(1 - \lambda\beta)}{(1 - \lambda\beta)} = \\ &= \lambda\beta q - \lambda\beta q_2 + \lambda q_2 - \lambda q_1 + q_1.\end{aligned}$$

Получили формулу (16), таким образом композиция двух гомотетий имеет вид:

$$\tilde{q} = \lambda\beta(q - q_0) + q_0,$$

где $q_0 = \frac{-\lambda\beta q_2 + \lambda q_2 - \lambda q_1 + q_1}{1 - \lambda\beta}$. Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Композицией двух гомотетий (14) и (15) с разными центрами и с различными коэффициентами гомотетии будет гомотетия с центром (18) и коэффициентом гомотетии, равным произведению коэффициентов.*

Список литературы

1. **Розенфельд Б.А.**, Многомерные пространства. — М.: Наука, 1966.
2. **Кантор И.Л., Солодовников А.С.**, Гиперкомплексные числа. — М.: Наука, 1973.
3. **Конвей Д.Х., Смит Д.А.**, О кватернионы и октавах. — М.:МЦНМО, 2009.
4. **Иэн.С.**, Истина и красота. Всемирная история симметрии. — М.: Астрель, 2010.
5. **Гусева Н.И., Кириченко В.Ф.**, Геометрия том 1. — М.: Академия, 2012.
6. **Игнатьев Ю.Г.**, Аналитическая геометрия. — Казань.: Казанский университет, 2013.

Инверсия на плоскости

Александрова А. Д. (Москва, МПГУ)

email@email.com

Науч. рук. Никифорова А.В., к.ф.-м.н., доцент кафедры каф. геометрии МПГУ

Аннотация

В статье рассмотрены основные свойства инверсии на плоскости и продемонстрированы приложения инверсии к решению некоторых задач элементарной геометрии.

1. Введение

Существенную роль в геометрии играют различные преобразования фигур. Одним из таких преобразований является инверсия, при которой окружностям соответствуют прямые, и наоборот. Цель данной работы заключается в том, чтобы показать, как с помощью инверсии можно упростить решение некоторых задач на построение, вычисление и доказательство.

2. Понятие инверсии на плоскости

Пусть на плоскости π задана окружность ω радиуса R с центром O (рис. 1). Инверсией на плоскости π относительно окружности ω с центром в точке O называется такое преобразование этой плоскости, при котором каждая точка M , отличная от O , отображается на точку M' , лежащую на луче OM и удовлетворяющее условию: $OM \cdot OM' = R^2$.

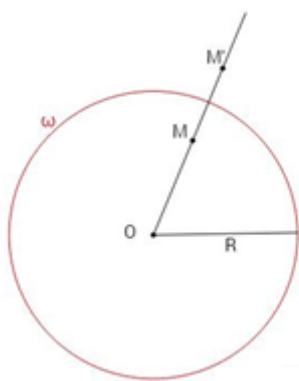


Рис. 1.

Точка O называется центром (полюсом) инверсии, R^2 — степенью (коэффициентом) инверсии.

Из определения следует, что точка M' при инверсии преобразуется в M , то есть композиция двух инверсий является тождественным преобразованием. Центр инверсии не имеет образа.

3. Свойства инверсии

3.1. Инверсия обладает следующими свойствами:

1. Инверсия φ переводит любую прямую, проходящую через центр инверсии, саму на себя (рис. 2).

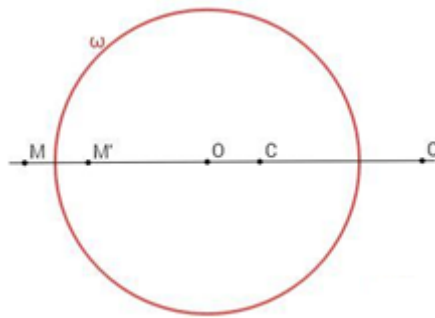


Рис. 2.

2. Инверсия φ преобразует прямую, не проходящую через центр инверсии O , в окружность, проходящую через точку O (рис. 3).

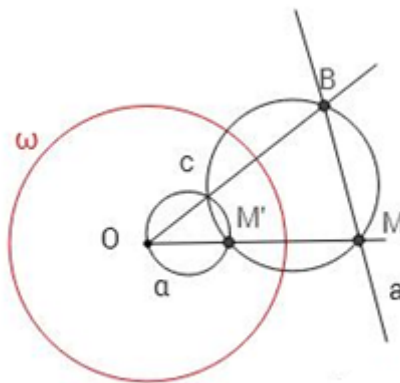


Рис. 3.

3. Инверсия φ преобразует окружность, проходящую через центр инверсии O , в прямую, не проходящую через точку O (рис. 4).
4. Инверсия φ переводит окружность, не проходящую через центр инверсии, в окружность, не проходящую через центр инверсии (рис. 5).

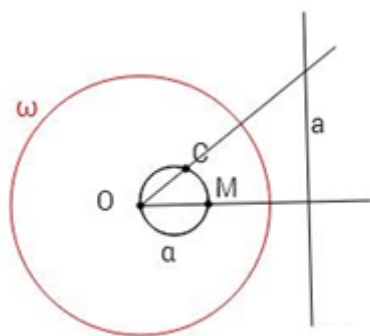


Рис. 4.

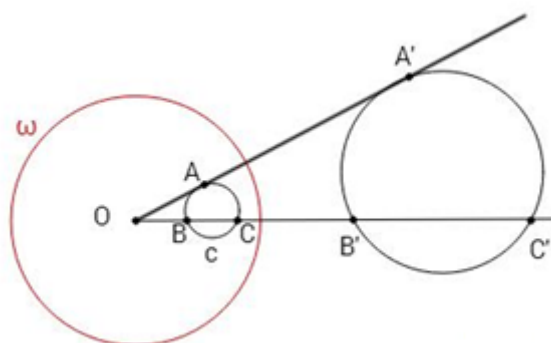


Рис. 5.

5. Угол между двумя линиями равен углу между их образами при инверсии, под линией понимается прямая или окружность (рис. 6).

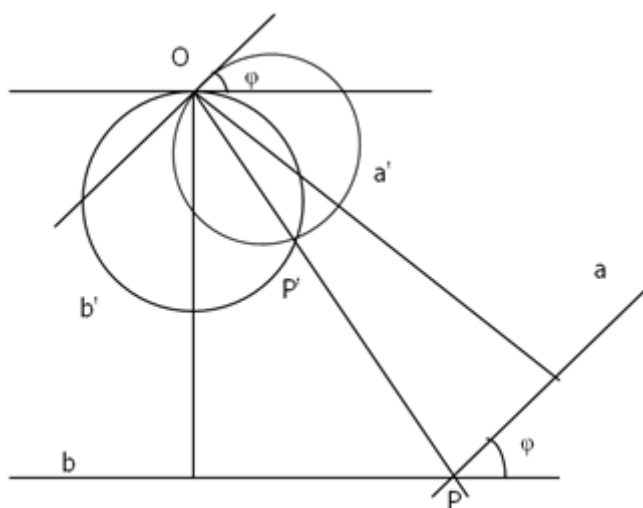


Рис. 6.

6. Ортогональные окружности. Окружность γ , ортогональная окружности инверсии, отображается этой инверсией на себя (рис. 7).

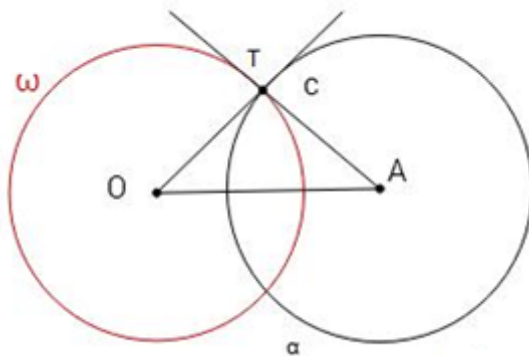


Рис. 7.

Обратное: если окружность γ , отличная от окружности инверсии, отображается на себя, то она ортогональна окружности инверсии.

3.2. Можно связать понятия инверсии и гомотетии относительно двух окружностей

Справедливы следующие утверждения:

1. Если две окружности соответствуют друг другу при инверсии с центром O , то они гомотетичны относительно той же точки O (рис. 8).

Замечание. Центр гомотетии двух окружностей не всегда есть центр инверсии отображающей одну из этих окружностей на другую.

2. Если две неравные окружности пересекаются, то оба центра их гомотетий являются центрами инверсий, каждая из которых отображает одну из данных окружностей на другую. Если данные окружности не имеют общих точек или касаются, то только один из центров гомотетий является центром инверсии, при которой одна из этих инверсий отображается на другую (рис. 9).

3.3. Степень точки относительно окружности

Л. Эйлером было доказано следующее утверждение (рис. 10):

Теорема. Радиус преобразованной окружности δ относится к радиусу данной окружности α , как степень инверсии r^2 к абсолютной величине сте-

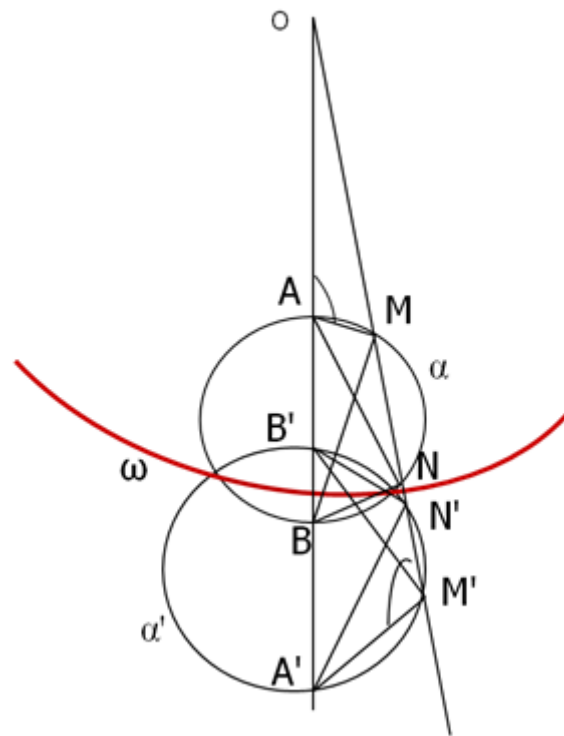


Рис. 8.

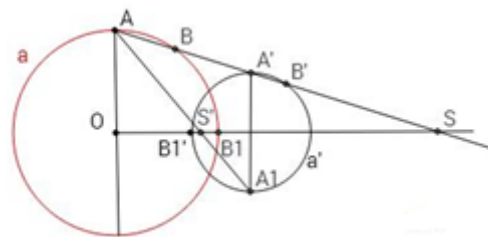


Рис. 9.

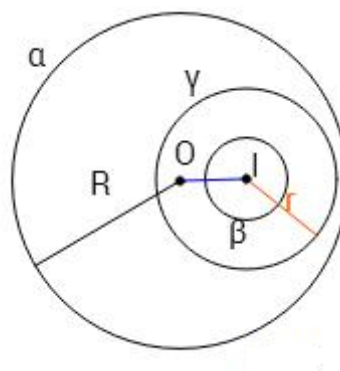


Рис. 10.

пени точки относительно окружности $|OI^2 - R^2|$, то есть

$$\frac{r}{2R} = \frac{r^2}{|OI^2 - R^2|}.$$

Напомним, что степенью точки I относительно окружности $\alpha = O(R)$ называют величину $OI^2 - R^2$.

4. Применение инверсии на плоскости к решению задач

4.1. Применение инверсии к решению задач на построение

Даны окружность α и две точки A и B , не лежащие на ней. Построить окружность, проходящую через точки A и B и касающуюся окружности α (рис. 11).

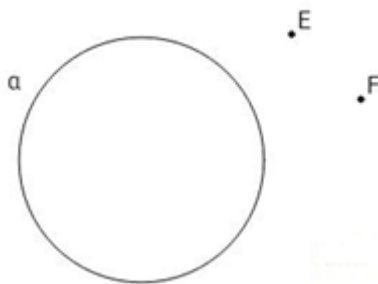


Рис. 11.

Анализ. Пусть задача решена и окружность γ построена. Инверсия $\varphi(A, R)$, где R — произвольный радиус, переведёт точку B в точку B' , окружность γ в прямую γ' и окружность α в окружность α' , причем образ точки B принадлежит γ' , где γ' — касательная к α' . Таким образом, решение сводится к построению касательной из точки B' к α' , а затем применим преобразование, обратное к φ равное φ^{-1} , которое переведет полученную конструкцию в нужную.

Построение (рис. 12):

1. ω — окружность инверсии с центром в точке A , радиуса R ;
2. Строим образ точки B относительно ω : $\varphi(B) = B'$;
3. Строим образ окружности α : $\varphi(\alpha) = \alpha'$;
4. Проведем касательную γ' к α' через точку B' ;
5. Снова применим инверсию к построенным образам (вернемся к исходным данным): $\varphi(B') = B$; $\varphi(\gamma') = \gamma$; $\varphi(\alpha') = \alpha$;
6. γ — искомая окружность.

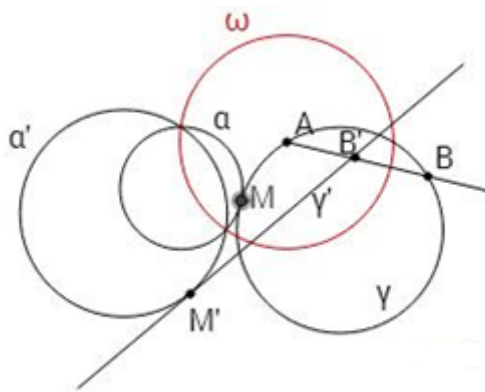


Рис. 12.

Доказательство. Так как B' принадлежит касательной γ' , то B принадлежит окружности γ . Так как точка A — центр инверсии и прямая γ' и окружность α' касались, то A принадлежит окружности γ и γ касается окружности α соответственно.

Исследование. Данная задача может иметь 2 решения либо не иметь решений. Имеет решения в случаях когда две точки A и B находятся по одну сторону относительно окружности α (внутри или вне неё).

4.2. Применение инверсии к решению задачи на вычисление

Задача Эйлера. Расстояние между центрами окружностей, описанной около треугольника и вписанной в него, выражается через их радиусы следующим образом: $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

Решение. Даны: треугольник ABC , окружности α с центром в точке O радиуса R , описанная около треугольника ABC и γ с центром в точке I радиуса r — окружность, вписанная в ABC . Будем считать, что γ — окружность инверсии. Построим образы вершин треугольника ABC ими будут точки D_1, E_1 и F_1 соответственно, причем они также являются серединами отрезков EF, DF и DE . Образом окружности α относительно γ будет окружность β , которая является окружность девяти точек треугольника DEF радиуса $\frac{1}{2}r$ (рис. 13). По определению нам известно, что абсолютная величина степени полюса I инверсии относительно окружности α равна $R^2 - OI^2$.

Далее по утверждению Л. Эйлера получаем: $\frac{r}{2R} = \frac{r^2}{|R^2 - OI^2|}$. Откуда легко выражаем $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

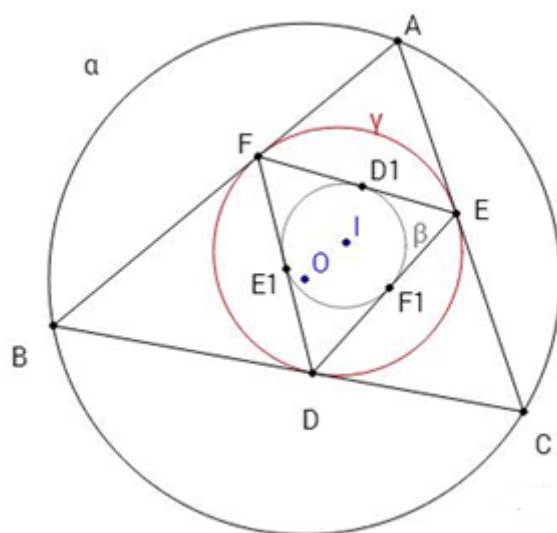


Рис. 13.

4.3. Применение инверсии к решению задач на доказательство

Пусть дана точка C , принадлежащая отрезку AB . Арбелосом называется конструкция, состоящая из полуокружностей построенных на диаметрах AB, BC, AC .

Задача Архимеда. Перпендикуляр MC к отрезку AB делит арбелос на две части. Докажите, что радиусы окружностей, вписанных в эти части арбелоса, равны между собой (рис. 14).

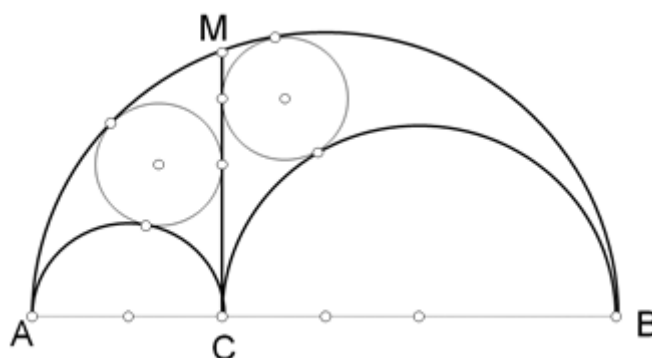


Рис. 14.

Доказательство. Будем считать, что $AC = 2a, BC = 2b$. Пусть ω — окружность инверсии с центром в точке B и радиуса BM . Построим образы данных полуокружностей β, α, γ ими будут соответственно прямая CM , прямая d такая, что её принадлежит точка A и она параллельна прямой CM , и окружность γ' . Далее рассмотрим гомотегию H с центром в точке B (рис. 15),

такую что: образом окружности γ будет окружность γ' , а точке C соответствует точка A . Рассмотрим следующие соотношения: $\frac{r}{a} = \frac{BC}{BA} = \frac{2b}{2(a+b)}$. Откуда получим, что $r = \frac{ab}{a+b}$. Аналогично вычисляется радиус окружности γ^* .

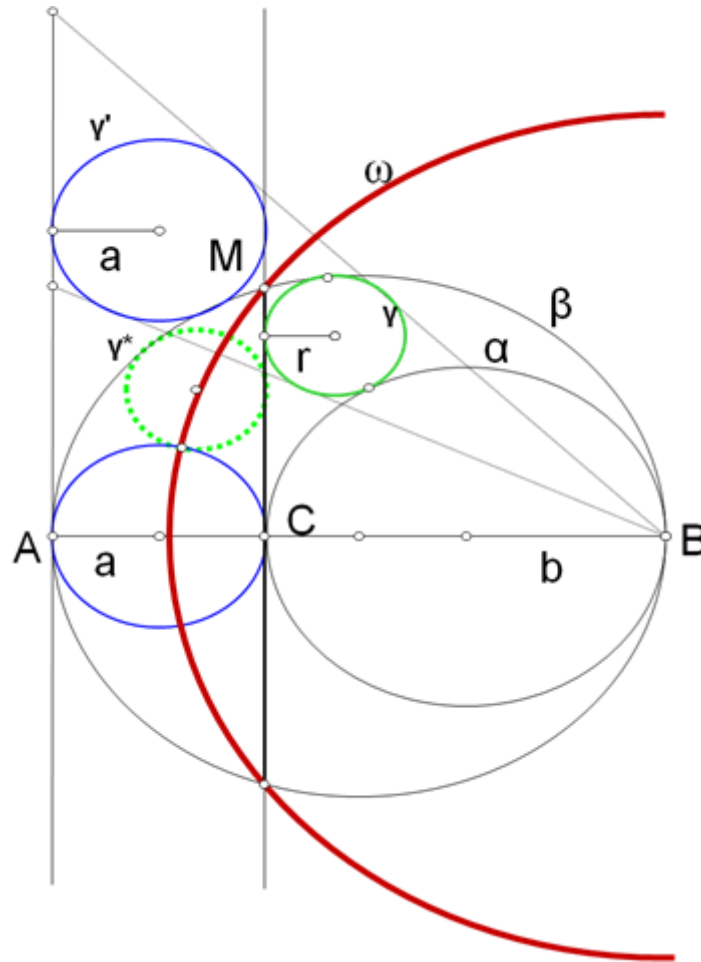


Рис. 15.

5. Заключение

Таким образом, с помощью инверсии чаще всего можно упростить решение некоторых задач на построение, вычисление и доказательство.

Список литературы

1. Перепёлкин Д.П. Курс элементарной геометрии. Ч. 1. Геометрия на плоскости, ОГИЗ, Москва, 1948.
2. Бакельман И.Я. Инверсия, Наука, Москва, 1966.

3. **Жижилкин И.Д.** Инверсия, Изд. МЦНМО, Москва, 2009.
4. **Понарин Я.П.** Элементарная геометрия. Том 1. Планиметрия, преобразования плоскости, Изд. МЦНМО, Москва, 2004.

О нумерации целочисленных многочленов одной переменной

Артемов Д. Ю. (Москва, МПГУ)

dyu.artemov@mail.ru

Науч. рук. Царев А.В., д.ф.-м.н., профессор кафедры каф. алгебры МПГУ

Аннотация

В работе указан способ однозначного представления элементов множества $\mathbb{Z}[x]$ целочисленных многочленов одной переменной положительными рациональными числами; приведена явная формула для биективного отображения множества $\mathbb{Q}^+$ положительных рациональных чисел на множество $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел; построено обратное отображение множества $\mathbb{N}$ на множество $\mathbb{Q}^+$. Как следствие построено отображение множества $\mathbb{N}$ на множество $\mathbb{Z}[x]$, являющееся нумерацией элементов последнего.

1. Введение

Представляющей интерес является задача нумерации элементов множества $\mathbb{Z}[x]$ многочленов одной переменной с целыми коэффициентами.

Всюду ниже приняты следующие обозначения:

$$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \dots\}, \quad \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \mathbb{N}' = \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

через $(a; b)$ обозначена упорядоченная пара, состоящая из элементов a и b , а через (a, b) — наибольший общий делитель натуральных чисел a и b .

Напомним, что *нумерацией* элементов множества E называется [2] всякое отображение некоторого множества натуральных чисел на множество E :

$$\nu: \mathbb{N}_\nu \rightarrow E.$$

Предполагается, что элементы множества E есть конструктивные объекты. Если отображение ν — биекция, то нумерацию ν называют *однозначной*. Если выполняется равенство $\mathbb{N}_\nu = \mathbb{N}$, то нумерацию ν называют *простой*.

В данной работе построен пример простой однозначной нумерации целочисленных многочленов одной переменной

$$\nu: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}[x],$$

указано некоторое его приложение и приведена явная формула для обратного отображения ν^{-1} .

Напомним, что алгебраическая система $\langle A, +, \succ \rangle$ называется [3] *упорядоченной группой*, если выполняются условия:

1. $\langle A, + \rangle$ — группа;
2. $\langle A, \succ \rangle$ — упорядоченное множество;
3. Отношение $\succ$ монотонно относительно операции $+$, то есть

$$\forall a, b, c \in A \quad (a \succ b \rightarrow a + c \succ b + c \ \& \ c + a \succ c + b).$$

Также напомним, что алгебраическая система $\langle A, +, \cdot, \succ \rangle$ называется [3] *упорядоченным кольцом*, если выполняются условия:

1. $\langle A, +, \cdot \rangle$ — кольцо;
2. $\langle A, +, \succ \rangle$ — упорядоченная группа;
3. $A^+ = \{a \in A \mid a + a \neq a \ \& \ a + a \succ a\} \neq \emptyset$;
4. $\forall a, b \in A \quad \forall c \in A^+ \quad (a \succ b \rightarrow a \cdot c \succ b \cdot c \ \& \ c \cdot a = c \cdot b).$

Под *функцией Эйлера* в работе понимается функция φ натурального аргумента n такая, что $\varphi(n)$ есть количество натуральных чисел, не превосходящих n и являющихся взаимно простыми с n , причём $\varphi(1) = 1$ и $(k, 1) = 1$ для всякого $k \in \mathbb{N}$.

2. Представление многочленов рациональными числами

Занумеруем все простые числа в порядке возрастания индексами из множества неотрицательных целых чисел и рассмотрим произвольный многочлен степени n с целыми коэффициентами

$$g = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x] \quad (a_n \neq 0).$$

Зададим отображение $\eta: \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Q}^+$ следующим образом, положим

$$\eta(g) = p_0^{a_0} p_1^{a_1} \dots p_n^{a_n} = \prod_{i=0}^n p_i^{a_i},$$

где p_i есть простые числа и $p_j < p_{j+1}$ для всех $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Несложно заметить, что получившееся число является положительной несократимой дробью, так как основания степеней простых чисел, входящих в числитель и знаменатель, различны. Также очевидно, что построенное отображение η есть биекция.

Пример 1. Пусть $g = 2 + 3x - x^3 + x^5 \in \mathbb{Z}[x]$. Выясним, какая дробь соответствует этому многочлену:

$$2 + x - x^2 - x^5 \xrightarrow{\eta} 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^{-1} \cdot 7^0 \cdot 11^0 \cdot 13^{-1} = \frac{2^2 \cdot 3}{5 \cdot 13} = \frac{12}{65}.$$

Пример 2. Пусть $\frac{22}{45} \in \mathbb{Q}^+$. Выясним, какой многочлен соответствует этой дроби:

$$\frac{22}{45} = \frac{2 \cdot 11}{3^2 \cdot 5} = 2^1 \cdot 3^{-2} \cdot 5^{-1} \cdot 7^0 \cdot 11^1 \xrightarrow{\eta^{-1}} 1 - 2x - x^2 + x^4.$$

Зададим на $\mathbb{Q}^+$ операции. Пусть

$$a = \prod_{i=0}^m p_i^{a_i} \in \mathbb{Q}^+, \quad b = \prod_{i=0}^n p_i^{b_i} \in \mathbb{Q}^+,$$

положим

$$a \oplus b = a \cdot b, \quad a \odot b = \prod_{i=0}^{m+n} p_i^{\sum a_j b_k},$$

где $\cdot$ есть обычное умножение рациональных чисел, а суммирование в показателе степени ведётся по всем парам $(j; k) \in \mathbb{N}_0^2$ таким, что $0 \leq j \leq m$, $0 \leq k \leq n$ и $j + k = i$.

Рассматривая кольцо $\langle \mathbb{Z}[x], +, \cdot \rangle$ как алгебру, несложно убедиться, что отображение η , определённое выше, есть изоморфизм алгебр $\langle \mathbb{Z}[x], +, \cdot \rangle$ и $\langle \mathbb{Q}^+, \oplus, \odot \rangle$, из чего следует, что алгебра $\langle \mathbb{Q}^+, \oplus, \odot \rangle$ есть кольцо.

3. Об одной частичной арифметической функции

Рассмотрим множество

$$M = \{(m; n; k) \in \mathbb{N}^3 \mid m \leq n\}$$

и зададим функцию $h: M \rightarrow \mathbb{N}_0$ следующим образом. Пусть $(m; n; k) \in M$. Тогда $h(m, n, k)$ есть количество натуральных чисел отрезка $[m; n]$, являющихся взаимно простыми с k :

$$h(m, n, k) = \sum_{\substack{m \leq i \leq n \\ (i, k) = 1}} 1.$$

Рассмотрим некоторые свойства функции h , предназначенные для аналитического упрощения формул, которые будут получены в дальнейшем.

Утверждение 1. Функция h обладает следующими свойствами:

1. $\forall m, n, k, s \in \mathbb{N} \quad (m \leq s < n \rightarrow h(m, n, k) = h(m, s, k) + h(s + 1, n, k));$
2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi(n) = h(1, n, n);$
3. $\forall n, k \in \mathbb{N} \quad (n < k \ \& \ k - \text{простое число} \rightarrow h(1, n, k) = n).$

Доказательство. 1. Пусть $m, n, k, s \in \mathbb{N}$ и $m \leq s < n$. По определению функции h ,

$$h(m, n, k) = \sum_{\substack{m \leq i \leq n \\ (i, k)=1}} 1 = \sum_{\substack{m \leq i \leq s \\ (i, k)=1}} 1 + \sum_{\substack{s+1 \leq j \leq n \\ (j, k)=1}} 1 = h(m, s, k) + h(s+1, n, k).$$

2. Пусть $n \in \mathbb{N}$. По определению функции Эйлера,

$$\varphi(n) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ (i, n)=1}} 1 = h(1, n, n).$$

3. Пусть $n, k \in \mathbb{N}$, $n < k$ и k — простое число. Тогда

$$h(1, n, k) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ (j, k)=1}} 1,$$

и так как в силу неравенства $n < k$ любое натуральное число отрезка $[1; n]$ является взаимно простым с k , то $h(1, n, k)$ совпадает с количеством натуральных чисел этого отрезка, $h(1, n, k) = n$. $\square$

4. Нумерация элементов множества $\mathbb{Q}^+$

Рассмотрим семейство подмножеств A_k ($k \in \mathbb{N}$) множества $\mathbb{Q}^+$, которые имеют вид

$$A_k = \left\{ \frac{m}{n} \mid m + n = k \right\}.$$

Несколько первых таких подмножеств представлено в таблице 1.

$A_1 = \emptyset$	$A_6 = \left\{ \frac{1}{5}; \frac{5}{1} \right\}$
$A_2 = \left\{ \frac{1}{1} \right\}$	$A_7 = \left\{ \frac{1}{6}; \frac{2}{5}; \frac{3}{4}; \frac{4}{3}; \frac{5}{2}; \frac{6}{1} \right\}$
$A_3 = \left\{ \frac{1}{2}; \frac{2}{1} \right\}$	$A_8 = \left\{ \frac{1}{7}; \frac{3}{5}; \frac{5}{3}; \frac{7}{1} \right\}$
$A_4 = \left\{ \frac{1}{3}; \frac{3}{1} \right\}$	$A_9 = \left\{ \frac{1}{8}; \frac{2}{7}; \frac{4}{5}; \frac{5}{4}; \frac{7}{2}; \frac{8}{1} \right\}$
$A_5 = \left\{ \frac{1}{4}; \frac{2}{3}; \frac{3}{2}; \frac{4}{1} \right\}$	$A_{10} = \left\{ \frac{1}{9}; \frac{3}{7}; \frac{7}{3}; \frac{9}{1} \right\}$

Таблица 1. Подмножества $A_1 - A_{10}$.

Во-первых, для всех $k \in \mathbb{N}'$ верно $A_k \neq \emptyset$, во-вторых, очевидно, при $i \neq j$ выполняется $A_i \cap A_j = \emptyset$, и, в-третьих, имеет место равенство

$$\mathbb{Q}^+ = \bigcup_{k=2}^{\infty} A_k.$$

Таким образом, построено разбиение множества $\mathbb{Q}^+$. Также несложно заметить, что для всех $k \in \mathbb{N}'$ выполняется $|A_k| = \varphi(k)$.

Определим для каждого $s \in \mathbb{N}'$ множество

$$B_s = \bigcup_{k=2}^s A_k$$

и заметим, что

$$|B_s| = \left| \bigcup_{k=2}^s A_k \right| = \sum_{k=2}^s |A_k| = \sum_{k=2}^s \varphi(k).$$

Теперь можно задать отображение $f: \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{N}$ следующим образом. Пусть $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+$, положим

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = |B_{m+n-1}| + h(1, m, m+n) = \sum_{k=2}^{m+n-1} \varphi(k) + h(1, m, m+n).$$

Истолковать полученную формулу можно следующим образом. Пусть $\frac{m}{n}$ — положительная рациональная несократимая дробь.

Вначале устанавливается, какому множеству типа A_k она принадлежит, для чего нужно вычислить сумму её числителя и знаменателя. Дробь $\frac{m}{n}$ принадлежит множеству A_{m+n} .

Далее требуется вычислить количество номеров, которые уже были использованы для нумерации элементов предшествующих множеств $A_2, A_3, \dots, A_{m+n-1}$. Число этих номеров равно $|B_{m+n-1}|$.

Теперь устанавливается номер дроби $\frac{m}{n}$ внутри множества A_{m+n} . В каждом из A_k дроби строго упорядочены по возрастанию их числителей.

Утверждение 2. Номер дроби $\frac{m}{n}$ внутри множества A_{m+n} , выражаемый величиной

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ (j, m+n-j)=1}} 1,$$

совпадает с величиной

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ (j, m+n)=1}} 1 = h(1, m, m+n).$$

Доказательство. Пусть $1 \leq j \leq m$ и $(j, m+n-j) = 1$. Покажем, что $(j, m+n) = 1$. Воспользуемся соотношением Безу. Из условия $(j, m+n-j) = 1$ следует, что

$$\exists u, v \in \mathbb{Z} \quad ju + (m+n-j)v = 1. \quad (1)$$

Требуется указать такие $x, y \in \mathbb{Z}$, что $jx + (m+n)y = 1$. Рассмотрим равенство (1):

$$ju + (m+n-j)v = 1 \iff j(u-v) + (m+n)v = 1,$$

положим в таком случае $x = u - v$, $y = v$. □

Упростим полученную формулу, пользуясь свойствами функции h . Очевидно, если $m = n$, то $f\left(\frac{m}{n}\right) = 1$. Пусть $m > n$. Пользуясь свойствами 2 и 1 утверждения 1, получим

$$\begin{aligned} f\left(\frac{m}{n}\right) &= \sum_{k=2}^{m+n-1} \varphi(k) + h(1, m, m+n) = \sum_{k=2}^{m+n-1} h(1, k, k) + h(1, m, m+n) = \\ &= \sum_{k=2}^{m+n} h(1, k, k) - h(1, m+n, m+n) + h(1, m, m+n) = \\ &= \sum_{k=2}^{m+n} h(1, k, k) - h(1, m+n, m+n) + h(1, m, m+n) + \\ &\quad + h(m+1, m+n, m+n) - h(m+1, m+n, m+n) = \\ &= \sum_{k=2}^{m+n} h(1, k, k) - h(1, m+n, m+n) + h(1, m+n, m+n) - \\ &\quad - h(m+1, m+n, m+n) = \sum_{k=2}^{m+n} h(1, k, k) - h(m+1, m+n, m+n). \end{aligned}$$

Теперь можно переопределить функцию f следующим образом:

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \begin{cases} h(1, m, m+n) + \sum_{k=2}^{m+n-1} \varphi(k), & \text{если } m < n, \\ \sum_{k=2}^{m+n} \varphi(k) - h(m+1, m+n, m+n), & \text{если } m > n, \\ 1, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

Данная формула проще предыдущей в следующем смысле. В зависимости от взаимного расположения натуральных чисел m и n на числовой прямой

меняется количество натуральных чисел на отрезках $[1; m]$ (для этого отрезка оно равно m) и $[m + 1; m + n]$ (для этого отрезка оно равно n), потому меняется количество арифметических действий, необходимых для вычисления значения функции h . Однако при $m > n$ добавляется слагаемое при вычислении суммы значений функции Эйлера.

Пример 3. Найдём номер дроби $\frac{4}{3}$. Так как $4 > 3$, то

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \sum_{k=2}^7 \varphi(k) - h(5, 7, 7).$$

Имеем:

$$\sum_{k=2}^7 \varphi(k) = 17, \quad h(5, 7, 7) = \sum_{\substack{5 \leq i \leq 7 \\ (i, 7) = 1}} 1 = 2,$$

тогда $f\left(\frac{4}{3}\right) = 17 - 2 = 15$. В самом деле, номер дроби $\frac{4}{3}$ равен 15, в чём можно непосредственно убедиться, обратившись к таблице 1.

Пример 4. Найдём номер дроби $\frac{3}{5}$. Так как $3 < 5$, то

$$f\left(\frac{3}{5}\right) = h(1, 3, 8) + \sum_{k=2}^7 \varphi(k).$$

Непосредственно вычисляем:

$$\sum_{k=2}^7 \varphi(k) = 17, \quad h(1, 3, 8) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ (i, 8) = 1}} 1 = 2,$$

тогда $f\left(\frac{3}{5}\right) = 17 + 2 = 19$. В самом деле, номер дроби $\frac{3}{5}$ равен 19, в чём можно также убедиться, обратив внимание на таблицу 1.

Построим теперь алгоритм, который по произвольному натуральному числу восстановит дробь, ему соответствующую, для чего вначале докажем серию вспомогательных утверждений.

Утверждение 3. *Последовательность величин $|B_n|$ строго возрастает, то есть*

$$\forall n \in \mathbb{N}' \quad |B_{n+1}| > |B_n|.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное число $n \in \mathbb{N}'$. По построению,

$$B_{n+1} = \bigcup_{k=2}^{n+1} A_k = \left(\bigcup_{k=2}^n A_k \right) \cup A_{n+1} = B_n \cup A_{n+1},$$

и, далее, так как $B_n \cap A_{n+1} = \emptyset$, то

$$|B_{n+1}| = |B_n| + |A_{n+1}|.$$

Множество A_{n+1} непусто, то есть $|A_{n+1}| \neq 0$, поэтому $|B_{n+1}| > |B_n|$. $\square$

Следствие 4. *Справедливо соотношение:*

$$\forall n \in \mathbb{N}' \quad \exists! k \in \mathbb{N}' \quad |B_k| < n \leq |B_{k+1}|.$$

Доказательство. Существование тривиальным образом вытекает из свойств порядка и из предыдущего утверждения.

Докажем единственность. Очевидно, дробь с номером n принадлежит некоторому множеству A_t . Покажем, что $t = k + 1$.

1. Если $2 \leq t \leq k$, то есть дробь с номером n принадлежит какому-либо из множеств $A_2, A_3, \dots, A_k$, то величина n строго меньше номера первой дроби множества A_{k+1} , равной $\frac{1}{k}$, чей номер равен

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{k}\right) &= h(1, 1, k+1) + \sum_{i=2}^k \varphi(i) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq 1 \\ (j, k+1)=1}} 1 + \sum_{i=2}^k \varphi(i) = \\ &= 1 + \sum_{i=2}^k \varphi(i) = 1 + |B_k|, \end{aligned}$$

то есть $n < |B_k| + 1$, из чего следует $n \leq |B_k|$, что противоречит неравенству $n > |B_k|$.

2. Пусть теперь $t \geq k + 2$, то есть дробь с номером n принадлежит какому-либо из множеств $A_{k+2}, A_{k+3}, \dots$, что означает, что величина n больше или равна номеру первой дроби множества A_{k+2} , равной $\frac{1}{k+1}$, чей номер равен, аналогично,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{k+1}\right) &= h(1, 1, k+2) + \sum_{i=2}^{k+1} \varphi(i) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq 1 \\ (j, k+2)=1}} 1 + \sum_{i=2}^{k+1} \varphi(i) = \\ &= 1 + \sum_{i=2}^{k+1} \varphi(i) = 1 + |B_{k+1}|, \end{aligned}$$

то есть $n \geq 1 + |B_{k+1}| > |B_{k+1}|$, из чего следует $n > |B_{k+1}|$, что противоречит неравенству $n \leq |B_{k+1}|$.

Таким образом, $t = k + 1$. Мы показали, что дробь с номером n принадлежит множеству A_{k+1} и никакому другому, что равносильно условию единственности в доказываемом утверждении. $\square$

Пусть дано произвольное число $n \in \mathbb{N}$. Если $n = 1$, то поставим числу n в соответствие дробь $\frac{1}{1}$.

Пусть $n \neq 1$, то есть $n \in \mathbb{N}'$. По следствию 4, существует единственное $k \in \mathbb{N}'$ такое, что $|B_k| < n \leq |B_{k+1}|$. Тогда достаточно указать такое $u \in \mathbb{N}$, что

$$f\left(\frac{u}{k+1-u}\right) = |B_k| + h(1, u, k+1) = n.$$

Рассмотрим уравнение

$$h(1, u, k+1) = n - |B_k| \iff \sum_{\substack{1 \leq j \leq u \\ (j, k+1)=1}} 1 = n - \sum_{i=2}^k \varphi(i). \quad (2)$$

Очевидно, тот факт, что оно разрешимо относительно u для данных n и k_0 таких, что $|B_{k_0}| < n \leq |B_{k_0+1}|$, означает, что дробь $\frac{u_0}{k_0+1-u_0}$, где u_0 — решение уравнения (2), принадлежит множеству A_{k_0+1} . И, наоборот, если дробь $\frac{u_0}{k_0+1-u_0}$ принадлежит множеству A_{k_0+1} , то u_0 — решение уравнения (2).

Утверждение 5. Для данных $n, k \in \mathbb{N}'$ таких, что $|B_k| < n \leq |B_{k+1}|$, уравнение (2) имеет единственное решение.

Доказательство. Докажем существование решения. Воспользуемся аксиомой индукции аксиоматической теории натуральных чисел для параметра n . Пусть K есть множество тех и только тех элементов множества $\mathbb{N}'$, для которых разрешимо уравнение (2), и дополнительно $1 \in K$. Покажем, что множество K удовлетворяет условиям аксиомы индукции.

Во-первых, $1 \in K$ по построению.

Во-вторых, пусть $n \in K$. Если $n = 1$, то $n+1 = 2 \in K$, так как для такого n имеем $k = 2$, и, очевидно, $u = 1$ есть решение уравнения (2).

Пусть $n > 1$, для него существует единственное $k_0 \in \mathbb{N}'$ такое, что $|B_{k_0}| < n \leq |B_{k_0+1}|$. Предположим, что для таких n и k_0 уравнение (2) разрешимо и u_0 — его решение.

Покажем, что $n+1 \in K$, то есть для $n+1$ и для некоторого $k \in \mathbb{N}'$ такого, что $|B_k| < n+1 \leq |B_{k+1}|$, уравнение (2) разрешимо.

Рассмотрим два случая и в каждом из них вначале уточним число k , установив связь между ним и k_0 .

1. Для номера $n + 1$ искомая дробь принадлежит уже не множеству A_{k_0+1} , а множеству A_{k_0+2} , то есть $u_0 = k_0$, так как дробь $\frac{u_0}{k_0+1-u_0} = \frac{k_0}{1}$ является «последней» дробью множества A_{k_0+1} в смысле упорядочения дробей по возрастанию числителей, и $k = k_0 + 1$.

Примем $u = 1$ и покажем, что это действительно искомое решение уравнения (2). Левая часть уравнения (2):

$$h(1, u, k + 1) = h(1, 1, k_0 + 2) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq 1 \\ (j, k_0+2)=1}} 1 = 1. \quad (3)$$

Далее,

$$|B_{k_0+1}| = \sum_{i=2}^{k_0+1} \varphi(i) = \varphi(k_0 + 1) + \sum_{i=2}^{k_0} \varphi(i) = \varphi(k_0 + 1) + |B_{k_0}|.$$

По предположению индукции,

$$|B_{k_0}| = n - h(1, u_0, k_0 + 1),$$

поэтому

$$|B_{k_0+1}| = \varphi(k_0 + 1) + n - h(1, u_0, k_0 + 1).$$

Правая часть уравнения (2):

$$\begin{aligned} n + 1 - |B_{k_0+1}| &= n + 1 - (\varphi(k_0 + 1) + n - h(1, u_0, k_0 + 1)) = \\ &= 1 - \varphi(k_0 + 1) + h(1, u_0, k_0 + 1). \end{aligned} \quad (4)$$

Сравнивая между собой выражения (3) и (4), приходим к выводу, что достаточно доказать равенство

$$h(1, u_0, k_0 + 1) = \varphi(k_0 + 1).$$

Так как $1 \leq k_0 < k_0 + 1$ и $u_0 = k_0$, то, по свойствам 2 и 1 утверждения 1,

$$\begin{aligned} \varphi(k_0 + 1) &= h(1, k_0 + 1, k_0 + 1) = h(1, k_0, k_0 + 1) + h(k_0 + 1, k_0 + 1, k_0 + 1) = \\ &= h(1, k_0, k_0 + 1) + \sum_{\substack{k_0+1 \leq j \leq k_0+1 \\ (j, k_0+1)=1}} 1 = h(1, k_0, k_0 + 1) + 0 = h(1, k_0, k_0 + 1). \end{aligned}$$

2. Для номера $n + 1$ искомая дробь по-прежнему принадлежит множеству A_{k_0+1} , то есть искомая дробь $\frac{u}{k_0+1-u}$ является «следующей» за дробью $\frac{u_0}{k_0+1-u_0}$ в смысле определения множества A_{k_0+1} и упорядочения элементов этого множества в порядке возрастания числителей. Тогда $k = k_0$.

Рассмотрим множество

$$T = \{r \in \mathbb{N} \mid u_0 < r \leq k_0 \ \& \ (r, k_0 + 1) = 1\}.$$

$T \neq \emptyset$, так как, например, всегда $k_0 \in T$. Положим в таком случае $u = \min T$ и покажем, что такое u в самом деле является решением уравнения (2). Требуется показать, что

$$n + 1 - |B_{k_0}| = h(1, u, k_0 + 1). \quad (5)$$

Итак,

$$u > u_0 \iff \exists t \in \mathbb{N} \quad u = u_0 + t.$$

Рассмотрим правую часть требуемого равенства (5) и, так как $1 \leq u_0 < u_0 + t$, воспользуемся свойством 1 утверждения 1:

$$h(1, u, k_0 + 1) = h(1, u_0 + t, k_0 + 1) = h(1, u_0, k_0 + 1) + h(u_0 + 1, u_0 + t, k_0 + 1).$$

Воспользуемся предположением индукции, а именно, мы знаем, что

$$n - |B_{k_0}| = h(1, u_0, k_0 + 1),$$

тогда

$$h(1, u, k_0 + 1) = n - |B_{k_0}| + h(u_0 + 1, u_0 + t, k_0 + 1).$$

Приравняв полученное выражение к левой части требуемого равенства (5):

$$\begin{aligned} n + 1 - |B_{k_0}| &= n - |B_{k_0}| + h(u_0 + 1, u_0 + t, k_0 + 1) \iff \\ &\iff h(u_0 + 1, u_0 + t, k_0 + 1) = 1, \end{aligned}$$

и, таким образом, задача свелась к доказательству последнего равенства. Так как $u_0 + t = u = \min T \in T$, то $(u_0 + t, k_0 + 1) = 1$. Далее возможно два случая:

() $t = 1$. Тогда $(u_0 + t, k_0 + 1) = (u_0 + 1, k_0 + 1) = 1$ и

$$h(u_0 + 1, u_0 + t, k_0 + 1) = h(u_0 + 1, u_0 + 1, k_0 + 1) = \sum_{\substack{u_0+1 \leq j \leq u_0+1 \\ (j, k_0+1)=1}} 1 = 1,$$

что и требовалось показать.

() $t > 1$. Тогда, так как $u_0 + 1 \leq u_0 + t - 1 < u_0 + t$, воспользуемся свойством 1 утверждения 1:

$$\begin{aligned} h(u_0 + 1, u_0 + t, k_0 + 1) &= h(u_0 + 1, u_0 + t - 1, k_0 + 1) + \\ + h(u_0 + t, u_0 + t, k_0 + 1) &= h(u_0 + 1, u_0 + t - 1, k_0 + 1) + \sum_{\substack{u_0+t \leq j \leq u_0+t \\ (j, k_0+1)=1}} 1 = \\ &= h(u_0 + 1, u_0 + t - 1, k_0 + 1) + 1, \end{aligned}$$

то есть теперь достаточно показать, что

$$h(u_0 + 1, u_0 + t - 1, k_0 + 1) = 0 \iff \sum_{\substack{u_0+1 \leq j \leq u_0+t-1 \\ (j, k_0+1)=1}} 1 = 0,$$

то есть, другими словами, что ни одно из натуральных чисел отрезка $[u_0 + 1; u_0 + t - 1] = [u_0 + 1; u - 1]$ не является взаимно простым с $k_0 + 1$. Это верно, так как $u_0 + t = u = \min T$ есть минимальное натуральное число, удовлетворяющее условию

$$u_0 < u \leq k_0 \ \& \ (u, k_0 + 1) = 1.$$

Таким образом, уравнение (2) разрешимо для $n + 1$, и $n + 1 \in K$, поэтому, согласно аксиоме индукции, $K = \mathbb{N}$.

Докажем теперь единственность решения. Пусть $n, k \in \mathbb{N}'$, $|B_k| < n \leq |B_{k+1}|$, u_1, u_2 — различные решения уравнения (2) и для определённости $u_1 < u_2$, то есть

$$\exists t \in \mathbb{N} \quad u_2 = u_1 + t.$$

u_1 — решение уравнения (2), следовательно,

$$n - |B_k| = h(1, u_1, k + 1). \quad (6)$$

Аналогично,

$$n - |B_k| = h(1, u_2, k + 1) \iff n - |B_k| = h(1, u_1 + t, k + 1). \quad (7)$$

Вычтем из равенства (6) равенство (7), получим

$$\begin{aligned} 0 &= h(1, u_1, k + 1) - h(1, u_1 + t, k + 1) \iff \\ &\iff h(1, u_1 + t, k + 1) = h(1, u_1, k + 1). \end{aligned} \quad (8)$$

Рассмотрим левую часть. Так как $1 \leq u_1 < u_1 + t$, то, пользуясь свойством 1 утверждения 1,

$$h(1, u_1 + t, k + 1) = h(1, u_1, k + 1) + h(u_1 + 1, u_1 + t, k + 1).$$

Возвращаясь к равенству (8), получим

$$h(u_1 + 1, u_1 + t, k + 1) = 0 \iff \sum_{\substack{u_1+1 \leq j \leq u_1+t \\ (j, k+1)=1}} 1 = 0.$$

Последнее равенство означает, что все натуральные числа отрезка $[u_1 + 1; u_1 + t] = [u_1 + 1; u_2]$ не являются взаимно простыми с $k + 1$, то есть все дроби множества

$$\left\{ \frac{u_1 + 1}{k - u_1}, \frac{u_1 + 2}{k - u_1 - 1}, \dots, \frac{u_2}{k + 1 - u_2} \right\}$$

не являются несократимыми, в том числе дробь $\frac{u_2}{k+1-u_2}$, чего быть не может, так как u_2 есть решение уравнения (2). $\square$

Заметим, что построенный алгоритм носит неконструктивный характер, поскольку в процессе доказательства существования решения уравнения (2) не было указано формулы, по которой можно было бы его найти. Поэтому для его решения подходит метод перебора. Отметим также важный факт: решение уравнения (2) следует искать среди чисел множества $\{1; 2; \dots; k\}$.

Если $k + 1$ — простое число, то можно использовать свойство 3 утверждения 1, что существенно облегчит поиск решения.

Пример 5. Пусть $n = 15 \in \mathbb{N}'$. Выясним, какая дробь соответствует данному номеру. Несложно видеть, что для такого n справедливо $k = 6$, так как

$$11 = |B_6| < 15 \leq |B_7| = 17.$$

Решим уравнение (2) для $n = 15$ и $k = 6$:

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq u \\ (j, 7)=1}} 1 = 15 - \sum_{i=2}^6 \varphi(i) \iff \sum_{\substack{1 \leq j \leq u \\ (j, 7)=1}} 1 = 4.$$

7 — простое число, поэтому, используя свойство 3 утверждения 1, находим $u = 4$, и дробь, соответствующая номеру $n = 15$, имеет вид $\frac{4}{6+1-4} = \frac{4}{3}$. В самом деле, в примере 3 было установлено, что $f\left(\frac{4}{3}\right) = 15$.

Пример 6. Пусть $n = 19 \in \mathbb{N}'$. Выясним, какая дробь соответствует данному номеру. Несложно видеть, что для такого n справедливо $k = 7$, так как

$$17 = |B_7| < 19 \leq |B_8| = 21.$$

Решим уравнение (2) для $n = 19$ и $k = 7$:

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq u \\ (j,8)=1}} 1 = 19 - \sum_{i=2}^7 \varphi(i) \iff \sum_{\substack{1 \leq j \leq u \\ (j,8)=1}} 1 = 2.$$

Методом перебора убеждаемся, что $u = 3$, и дробь, соответствующая номеру $n = 19$, имеет вид $\frac{3}{7+1-3} = \frac{3}{5}$. В самом деле, в примере 4 было установлено, что $f\left(\frac{3}{5}\right) = 19$.

Отметим, что в тех случаях, когда число $k + 1$ не является простым, решение с использованием метода перебора удобно свести в таблицу. Так, в условиях примера 6 построена таблица 2.

Для самопроверки при использовании метода перебора для составных $k + 1$ можно использовать следующее

Утверждение 6. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Последовательность величин $a_n = h(1, n, k)$ нестрого возрастает, то есть

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad h(1, n + 1, k) \geq h(1, n, k).$$

Доказательство. Пусть $n, k \in \mathbb{N}$. Так как $1 \leq n < n + 1$, то, по свойству 1 утверждения 1, получим:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= h(1, n + 1, k) = h(1, n, k) + h(n + 1, n + 1, k) = a_n + \\ &+ h(n + 1, n + 1, k) = a_n + \sum_{\substack{n+1 \leq j \leq n+1 \\ (j,k)=1}} 1 = \begin{cases} a_n + 1, & \text{если } (n + 1, k) = 1, \\ a_n, & \text{если } (n + 1, k) \neq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

В обоих случаях выполняется неравенство $a_{n+1} \geq a_n$. □

u	1	2	3
$h(1, u, 8)$	1	1	2

Таблица 2. Использование метода перебора в примере 6.

Таким образом, было построено отображение $f: \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{N}$ и (неконструктивно) отображение $\psi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}^+$. По построению, $\psi = f^{-1}$, таким образом, ψ является простой однозначной нумерацией элементов множества $\mathbb{Q}^+$.

Композиция $\nu = \eta^{-1} \circ f^{-1}$ есть простая однозначная нумерация элементов множества $\mathbb{Z}[x]$:

$$\nu: \mathbb{N} \xrightarrow{f^{-1}} \mathbb{Q}^+ \xrightarrow{\eta^{-1}} \mathbb{Z}[x].$$

5. Линейный порядок на $\mathbb{Z}[x]$

Полученные результаты можно использовать, например, для введения линейного порядка на множестве $\mathbb{Z}[x]$. Перенесём на множество $\mathbb{Z}[x]$ строгий линейный порядок с множества $\mathbb{N}$:

Определение 1. Пусть $g_1, g_2 \in \mathbb{Z}[x]$. Будем говорить, что многочлен g_1 выше многочлена g_2 и писать $g_1 \succ g_2$, если

$$\nu^{-1}(g_1) > \nu^{-1}(g_2).$$

Выясним, является ли алгебраическая система $\langle \mathbb{Z}[x], +, \cdot, \succ \rangle$ упорядоченным кольцом.

Утверждение 7. Отношение порядка $\succ$ не является монотонным относительно операции $+$, то есть

$$\exists a, b, c \in \mathbb{Z}[x] \quad (a \succ b \ \& \ \neg(a + c \succ b + c)).$$

Доказательство. Пусть, например,

$$a = 1 + x, \quad b = -1 + x^2, \quad c = 1 - x.$$

Убедимся вначале, что $a \succ b$. По определению,

$$a \succ b \iff \nu^{-1}(a) > \nu^{-1}(b).$$

Имеем:

$$\nu^{-1}(a) = (f \circ \eta)(a) = f(\eta(1 + x)) = f\left(\frac{6}{1}\right) = 17,$$

$$\nu^{-1}(b) = (f \circ \eta)(b) = f(\eta(-1 + x^2)) = f\left(\frac{5}{2}\right) = 16,$$

тогда, очевидно, $\nu^{-1}(a) > \nu^{-1}(b)$, то есть $a \succ b$.

Теперь вычислим

$$a + c = 2, \quad b + c = -x + x^2$$

и покажем, что $\neg(a + c \succ b + c)$, то есть что

$$\neg(\nu^{-1}(a + c) > \nu^{-1}(b + c)) \iff \nu^{-1}(a + c) \leq \nu^{-1}(b + c).$$

Имеем:

$$\nu^{-1}(a + c) = f(\eta(2)) = f\left(\frac{4}{1}\right) = 9,$$

$$\nu^{-1}(b + c) = f(\eta(-x + x^2)) = f\left(\frac{5}{3}\right) = 20,$$

тогда, очевидно, $\nu^{-1}(a + c) \leq \nu^{-1}(b + c)$. □

Таким образом, система $\langle \mathbb{Z}[x], +, \succ \rangle$ не является упорядоченной группой, а потому система $\langle \mathbb{Z}[x], +, \cdot, \succ \rangle$ не будет являться упорядоченным кольцом.

С другой стороны, система $\langle \mathbb{Z}[x], \succ \rangle$ есть строго линейно упорядоченное множество.

Список литературы

1. **Куликов Л.Я.** Алгебра и теория чисел: Учеб. пособие для педагогических институтов. – М.: Высш. школа, 1979. – 559 с., ил.
2. **Матросов В.Л.** Теория алгоритмов: Учебник. – М.: Прометей, 1989. – 188 с.
3. **Нечаев В.И.** Числовые системы. Пособие для студентов пед. ин-тов. М.: Просвещение, 1975. – 199 с., ил.

Методика обучения умению правильно рассуждать учащихся 9 класса на курсе по выбору

Попадьина Е. А. (Москва, МПГУ)

popadina.evgeniya@bk.ru

Науч. рук. Тимофеева И.Л., д.п.н., профессор каф. математического анализа МПГУ

Аннотация

Изложена суть методики формирования умения правильно рассуждать у учащихся 9 класса на курсе по выбору. Эта методика основана на использовании средств формальной логики. Рассмотрен пример логической задачи из ЕГЭ по математике и разобрано её решение с применением средств формальной логики. Представлены результаты опытно-экспериментальной проверки эффективности этой методики.

1. Введение

Концепция развития математического образования [1] направлена на повышение качества математического образования в школе. Одной из важнейших задач математического образования является воспитание у учащихся способности понимать смысл поставленной перед ними задачи, умение правильно и логично рассуждать. В федеральных государственных стандартах основного [6] и среднего общего [7] образования отмечено, что учащиеся должны проводить логические обоснования математических утверждений, точно и грамотно выражать свои мысли. Умение правильно рассуждать необходимо учащимся при изучении всех школьных дисциплин. Существует ошибочное мнение, что это умение формируется само по себе при изучении математики. В силу специфики предмета обучение математике предоставляет огромные возможности для формирования у учащихся этого умения. Но в то же время при обучении математике не уделяется должного внимания формированию умения логически правильно рассуждать. В своей статье И.Л. Тимофеева отмечает, что «... если не уделять особого внимания формированию умения рассуждать логически правильно (т.е. рассуждать в соответствии с законами и правилами логики), то спонтанное формирование этого умения не даст должного результата» [5].

Проблемам обучения математике, имеющим логический характер, уделяли внимание крупные математики-педагоги: В.Г. Болтянский, А.В. Гладкий, Л.А. Калужнин, А.Н. Колмогоров, Д. Пойя, А.Я. Хинчин и др. Логическому развитию учащихся в процессе обучения математике посвящены работы известных специалистов в области преподавания математики, таких как А.А.

Столяр, И.Л. Никольская и др. В последние два десятилетия проблемам логической подготовки учащихся большое внимание уделяли И.Л. Тимофеева, С.С. Елифантьева, Е.В. Лукьянова, И.Е. Сергеева и др.

В настоящее время в общеобразовательных школах важную роль играют курсы по выбору и актуальной является разработка учебно-методических материалов для курсов по выбору различной тематики. Поэтому для формирования у учащихся умения правильно рассуждать, целесообразно использовать именно эту форму обучения. Существуют различные разработки курсов, по тематике, близкой к теме разрабатываемого курса, но посвящённых именно формированию умения правильно рассуждать, нами не было найдено.

С 2014 года в ЕГЭ по математике базового уровня появились задания логического характера. Чтобы подготовить учащихся к выполнению этих заданий, необходимы соответствующие учебно-методические материалы для учащихся и учителей. Однако таких материалов явно не хватает.

Таким образом, вышесказанное определяет актуальность темы статьи.

Эта статья написана в рамках исследования, целью которого является разработка методики проведения курса по выбору «Дедуктивные рассуждения в математике» для учащихся 9 класса, целенаправленная на формирование у них умения правильно рассуждать.

2. Курс по выбору «Дедуктивные рассуждения в математике»

Курс по выбору «Дедуктивные рассуждения в математике» предназначен для учащихся 9 класса, планирующих продолжить обучение в 10 классе, где одним из профилирующих предметов является математика. Разработанный нами курс по выбору относится к предметно-ориентированным курсам. Мы считаем, что этот курс будет интересен всем учащимся 9 класса, так как он направлен на развитие познавательных интересов, логического мышления, умения правильно рассуждать.

Курс по выбору рассчитан на 16 занятий по 1 часу в неделю.

Основная цель курса: развитие логического мышления учащихся посредством формирования у них умения правильно рассуждать.

При изучении данного курса по выбору, направленного на развитие логического мышления, учащиеся овладевают умением правильно рассуждать, учатся применять полученные знания при решении задач, связанных с рассуждениями.

В результате изучения курса учащиеся должны **знать**:

- термины и понятия:
 - предложения без переменных (высказывания) и с переменными;

- логические операции над предложениями;
- обратное, противоположное и обратное к противоположному предложению для данного предложения;
- логически равносильные предложения;
- логическое следствие;
- законы и правила логики;
- свойства логической равносильности и логического следования.

В результате изучения курса учащиеся должны **уметь**:

- переходить от предложения в безусловной форме к предложению с тем же смыслом в условной форме;
- выявлять логическую форму предложений;
- записывать символически предложения и рассуждения;
- для данного условного предложения распознавать предложения: обратное исходному, противоположное исходному и обратное к противоположному;
- распознавать/выводить следствия данного предложения;
- распознавать правильные и неправильные рассуждения;
- проводить правильные рассуждения.

Содержание основных разделов **программы** курса по выбору:

- I. Логические операции над предложениями. Равносильность и следование.
 1. *Логические операции над предложениями.* Предложения без переменных (высказывания). Предложения с переменными. Логические операции над высказываниями: конъюнкция, дизъюнкция, импликация, отрицание, эквиваленция. Логические операции над предложениями с переменными. Кванторные слова и кванторы.
 2. Логическое строение предложений. Символическая запись предложений. Условная и безусловная формы предложений.
 3. Предложение обратное данному. Предложение противоположное данному. Предложение обратное к противоположному для данного.
 4. *Следование и равносильность.* Следствие данного предложения. Логическое следование. Свойства логического следования. Правила рассуждения. Равносильные предложения. Логически равносильные предложения. Законы логической равносильности.
- II. Правильные рассуждения.
 1. Индуктивные и дедуктивные рассуждения. Роль индуктивных и дедуктивных рассуждений в разных областях знаний. Значение дедуктивных рассуждений в математике.
 2. *Задачи на распознавание следствий и на выбор предложений, верных при данных условиях.* Пропедевтические задачи. Задачи из ЕГЭ на

распознавание следствий с использованием средств логики. Задачи из ЕГЭ на выбор верных предложений с использованием средств логики.

3. *Другие задачи на распознавание правильных и неправильных рассуждений.* Логическое строение и схема рассуждения. Правильная схема. Правильное рассуждение. Задачи на распознавание правильных рассуждений.

III. Элементы теории множеств.

1. *Элементы теории множеств.* Множество. Элемент множества. Пустое множество. Операции над множествами. Круги Эйлера. Свойства операций над множествами. Связь между операциями над множествами и операциями над предложениями. Задачи из ЕГЭ, связанные с множествами.
2. *Отношение порядка.* Бинарные отношения. Свойства отношений: рефлексивность, симметричность, транзитивность. Отношение порядка. Задачи из ЕГЭ, связанные с отношением порядка.

Комментарий. Основным объектом изучения курса по выбору «Дедуктивные рассуждения в математике» являются дедуктивные рассуждения, т.е. рассуждения, опирающиеся на законы и правила формальной логики. Основной раздел курса — второй, посвящённый распознаванию правильных и неправильных рассуждений. Не менее важным является и первый раздел, в котором представлен необходимый теоретический материал, направленный на выявление формы предложений, их символическую запись, изучение логических законов и правил. После овладения этим материалом (теоретической базой) и соответствующими умениями, учащийся способен распознавать правильные и неправильные рассуждения с использованием средств логики.

3. Методика решения задач на распознавание правильных рассуждений

Разработанная нами методика формирования у школьников умения правильно рассуждать основана на использовании средств формальной логики. Предполагаем, что эта методика позволит повысить эффективность развития логического мышления в целом.

Методические рекомендации по обучению распознаванию правильных и неправильных рассуждений:

1. Если посылки и заключение в рассуждении сформулированы в безусловной форме, то рекомендуется перейти к условной форме «Если ..., то ...».
2. Ввести обозначения элементарных предложений.

3. Выявить форму (логическую структуру) посылок и заключения данного рассуждения и записать их символически.
4. Записать символически схему рассуждения.
5. Сопоставить полученную схему с правилами логики и свойствами логического следования. При несовпадении — привести контрпример.
6. Сделать вывод на основании п.5: является ли это рассуждение правильным или неправильным.

Задачи на распознавание следствий являются частным случаем задач на распознавание правильных и неправильных рассуждений. В нашем курсе задачи на распознавание следствий занимают одно из центральных мест. Изучение правильных и неправильных рассуждений мы начинаем с задач на распознавание следствий.

Отметим, что в задачах логического характера из ЕГЭ по математике обоснование ответа не требуется, а необходимо только указать правильный ответ (выбрать предложения из списка). Считаем, что для того чтобы обучить решать такие задачи, необходимо обучить не только указывать правильный ответ, но ещё и обосновывать его. Предлагаемая нами методика обучения решению таких задач основана на использовании средств логики.

В каждой задаче логического характера на распознавание следствий, представленной в ЕГЭ по математике базового уровня, предложены исходное предложение, которое может быть представлено как в условной форме, так и в безусловной форме, и четыре предложения на выбор, из которых необходимо выбрать предложения, являющиеся следствиями исходного предложения. В качестве предложений на выбор предлагаются следующие предложения: обратное исходному, противоположное исходному, обратное к противоположному.

Во всех предлагаемых задачах «общим является логическая форма рассуждений, точнее, логическая форма исходного предложения и предложений, предлагаемых на выбор. Содержание этих предложений, различное в разных задачах, не влияет на ход решения» [5].

Представленные предложения в задачах на выведение (распознавание) следствий обычно имеют следующую структуру:

$A \rightarrow B$ — исходное предложение;

$B \rightarrow A$ — обратное предложение;

$\neg A \rightarrow \neg B$ — противоположное предложение;

$\neg B \rightarrow \neg A$ — обратное к противоположному (контрапозитивное) предложение.

При решении задач из ЕГЭ на выведение (распознавание) следствий используются следующие законы и правила логики [4]:

$A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$ — закон контрапозиции;

$A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow C$ — правило силлогизма.

Для решения задач использовались следующие свойства логического следования [4]:

$A \rightarrow B \vdash B \rightarrow A$

$A \rightarrow B \vdash \neg A \rightarrow \neg B$.

Приведём пример решения задачи на распознавание следствий из ЕГЭ с использованием средств логики.

Задача [3].

Учитель математики Иван Петрович обязательно отключает свой телефон, когда ведёт урок.

Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных.

1. Если телефон Ивана Петровича включён, значит, он не ведёт урок.
2. Если телефон Ивана Петровича выключен, значит, он ведёт урок.
3. Если Иван Петрович проводит контрольную работу по математике, значит, его телефон выключен.
4. Если Иван Петрович не ведёт урок, значит, его телефон включён.

Решение.

Перейдём от данного предложения к предложению с тем же смыслом в форме «Если ..., то ...»: «Если учитель математики Иван Петрович ведёт урок, то он отключает свой телефон».

Обозначим буквой A предложение «Учитель математики И.П. ведёт урок», буквой B — «И.П. отключает свой телефон» («Телефон И.П. выключен»). Тогда исходное предложение можно символически записать так: $A \rightarrow B$.

Для каждого из предложений на выбор выявим его форму, запишем символически и выясним, является ли оно следствием исходного предложения.

1) Если телефон И.П. включён, значит, он не ведёт урок.

Предложение (1) символически запишем так: $B \rightarrow A$. Оно является предложением, обратным к противоположному для предложения $A \rightarrow B$. Предложение (1) логически следует из исходного предложения, в силу равносильности исходного предложения и предложения, обратного к противоположному.

2) Если телефон И.П. выключен, значит, он ведёт урок.

Предложение (2) символически запишем так: $B \rightarrow A$. Оно является предложением, обратным исходному предложению $A \rightarrow B$. Но обратное предложение логически не следует из исходного предложения. Таким образом, предложение (2) не следует из исходного предложения.

3) Если И.П. проводит контрольную работу по математике, значит, его телефон выключен.

Выявим форму этого предложения.

Обозначим через C предложение «И.П. проводит контрольную работу по математике». Тогда предложение (3) запишем символически так: $C \rightarrow B$. Очевидно, предложение $C \rightarrow A$ верно.

Из предложений $C \rightarrow A$ и $A \rightarrow B$ следует предложение $C \rightarrow B$.

Таким образом, предложение (3) следует из исходного предложения.

4) Если И.П. не ведёт урок, значит, его телефон включён.

Предложение (4) символически запишем так: $A \rightarrow B$. Оно является предложением, противоположным исходному предложению $A \rightarrow B$. Но противоположное предложение не следует из исходного предложения. Таким образом, предложение (4) не следует из исходного предложения.

Ответ: 1, 3.

4. Опытнo-экспериментальная проверка

Опытнo-экспериментальная проверка проходила на базе ГБОУ «Школа с углублённым изучением английского языка № 1359 им. авиаконструктора М.Л. Миля» г. Москвы в феврале 2017 г. В эксперименте участвовали 26 учеников 9 класса.

Проведены занятия по следующим темам:

1. Логические операции.
2. Обратное, противоположное и обратное к противоположному предложения для данного предложения.
3. Предложения в условной и безусловной форме.
4. Выявление формы и символическая запись предложений.
5. Логическое следствие. Задачи на распознавание следствий.
6. Задачи на распознавание правильных рассуждений.

Перед началом проведения занятий учащимся была предложена проверочная работа № 1. Её целью была диагностика умения учащихся решать задачи на распознавание следствий из ЕГЭ по математике базового уровня только на основе логической интуиции, здравого смысла. Было разработано три варианта работы № 1. В каждом варианте предложены три задачи с разным содержанием. Первые две задачи представляют собой фрагменты задачи из ЕГЭ, а третья задача аналогична задачам из ЕГЭ. Мы использовали задачи из [2, 3, 4].

Приведём в качестве примера один вариант проверочной работы № 1.

Вариант 1

1. Известно: Если какая-нибудь кошка идёт по забору, собака Шарик, живущая в будке возле дома, обязательно лает. Выясните, является ли следствием данного предложения следующее предложение, и обоснуйте ответ:

«Если Шарик лает, значит, по забору идёт кошка».

2. Дано предложение: «Если число делится на 8, то оно делится на 4». Выясните, является ли следствием данного предложения следующее предложение, и обоснуйте ответ:

«Если число не делится на 8, то оно не делится на 4».

3. В качестве третьей задачи в каждом из трех вариантов была предложена полностью одна из задач № 18 из ЕГЭ по математике базового уровня, т.е. задача, аналогичная той, что была приведена выше. Однако, как и на ЕГЭ, обосновать ответ не требовалось.

За первые два задания ученик мог получить максимум 3 балла, за третье задание — максимум 4 балла. За всю работу — максимум 10 баллов.

В таблице 1 для каждого из трёх заданий отражено количество учащихся (в процентах), получивших 0, 1, 2, 3 и 4 балла.

Таблица 1:

Номер задания	4 балла	3 балла	2 балла	1 балл	0 баллов
1.	—	0%	58%	0%	42%
2.	—	0%	69%	4%	27%
3.	27%	4%	38%	31%	0%

Результаты показывают, что за первые две задания никто из учащихся не набрал максимальное количество баллов, поскольку учащиеся испытывали трудности с обоснованием ответов. Это можно было предположить заранее. При выполнении этих заданий большинство учащихся давало обоснования, опираясь на здравый смысл и математические знания. Результаты за два первых задания, представленные в таблице 1, показывают, что учащиеся лучше справились со вторым заданием (с математическим сюжетом).

В третьем задании максимальное количество баллов получили 27% учащихся (обосновывать свой выбор не требовалось). При выполнении этого задания большинство учащихся выбирали два верных варианта и один неверный вариант из предлагаемых на выбор.

С целью контроля усвоения учащимися изученного материала, точнее, умения применять изученный материал при решении задач из ЕГЭ по мате-

матике базового уровня на выведение следствий, была проведена проверочная работа № 2. Для нее, как и для проверочной работы № 1, было разработано три варианта. В каждом из них предложены три задачи с различными сюжетами, которые отличны от сюжетов задач в работе № 1. По структуре проверочные работы № 1 и № 2 совпадают, за исключением того, что в третьем задании работы № 2 ответ требовалось обосновать, а в работе № 1 — не требовалось.

На рисунке 1 показаны результаты выполнения проверочных работ № 1 и № 2. Можно заметить, что результаты выполнения проверочной работы № 2 существенно улучшились по сравнению с результатами выполнения проверочной работы № 1.

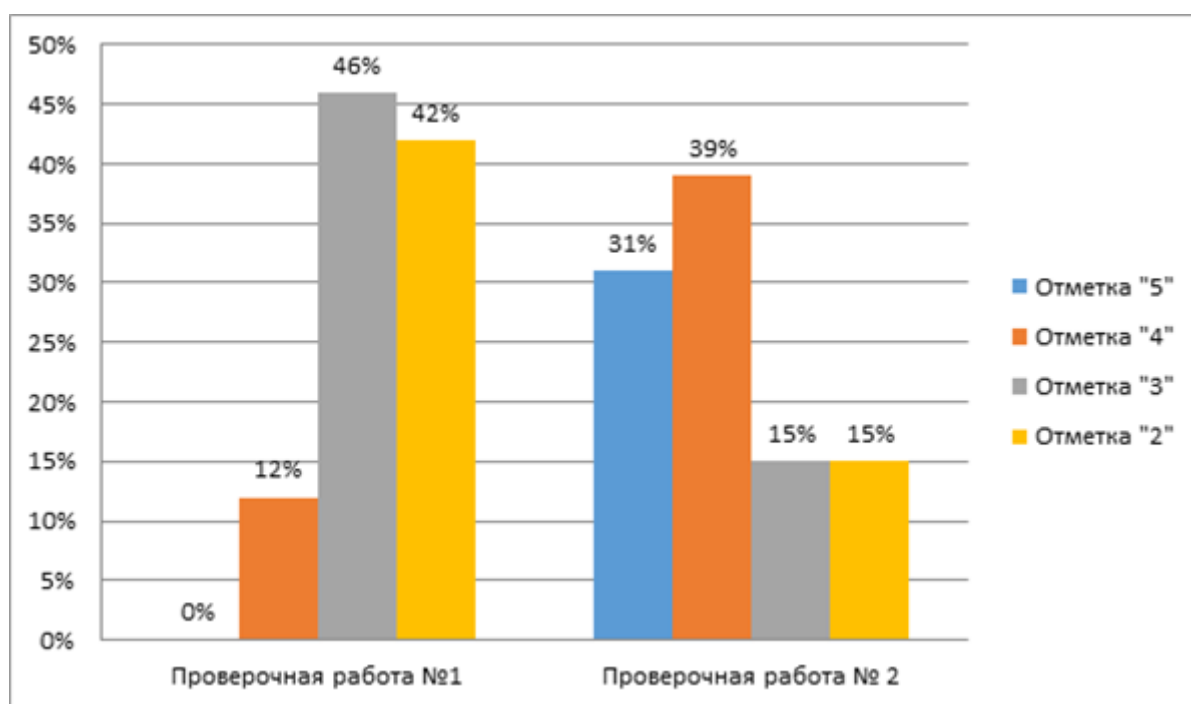


Рис. 1. Результаты проверочных работ № 1 и № 2

Опытно-экспериментальная проверка показала:

- результаты проверочной работой № 2 (на выходе) существенно лучше, чем результаты работы № 1 (на входе);
- в результате обучения повысилась способность учащихся решать задачи на распознавание следствий из ЕГЭ по математике, а также появилась возможность обосновывать своё решение благодаря использованию средств логики, а значит, и в целом повысилась способность правильно рассуждать;

- предложенный для изучения материал доступен учащимся, а значит, способствует повышению познавательной активности и интереса к задачам на дедуктивные рассуждения и доказательства в целом.

Список литературы

1. Концепция развития математического образования в Российской Федерации [Электронный ресурс] //Официальный сайт Министерства образования и науки Российской Федерации. — URL: <http://минобрнауки.рф/документы/3894> (дата обращения: 25.03.2017).
2. Открытый банк задач ЕГЭ по математике базового уровня [Электронный ресурс] //Официальный сайт. — URL: <http://base.mathege.ru> (дата обращения: 25.03.2017).
3. РЕШУ ЕГЭ. МАТЕМАТИКА базовый уровень [Электронный ресурс] //Образовательный портал для подготовки к экзаменам. — URL: <https://mathb-ege.sdangia.ru/test?theme=222> (дата обращения: 25.03.2017).
4. **Тимофеева И.Л.** Вводный курс математики: учеб. пособие для студентов учреждений высш. пед. проф. образования / И.Л. Тимофеева, И.Е. Сергеева, Е.В. Лукьянова. — М.: Издательский центр «Академия», 2011. — 240 с.
5. **Тимофеева И.Л.** О подготовке учащихся к решению задач на распознавание следствий //Проблемы теории и практики обучения математике: Сборник научных работ, представленных на Международную научную конференцию «70-е Герценовские чтения» / Под. ред. В.В. Орлова. — СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2017.
6. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования. — 3-е изд. — М.: Просвещение, 2014. — 48 с.
7. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования //Российская газета. — 2012. — № 5722. — С. 14–18.

Классы почти контактных метрических структур тотального пространства T^1 –расслоения с некоторыми связностями над почти эрмитовыми многообразиями

Горгинян Ю. А. (Москва, МПГУ)

yua.gorginyan@math.mpgu.edu

Науч. рук. Игнаточкина Л.А., доц. каф. геометрии МПГУ

Аннотация

В данной работе были установлены соответствия классов почти эрмитовой структуры с классами почти контактной метрической структуры для плоской связности.

Была взята естественно возникающая на почти эрмитовом многообразии 1-форма, и, с ее помощью, построена новая форма связности. Рассмотрено, как изменилась почти контактная метрическая структура для новой, не плоской связности.

Выражены через компоненты ковариантного дифференциала формы Ли четвертый и пятый структурные тензоры почти контактной метрической структуры, установлено, для каких классов почти эрмитовой структуры эти тензоры являются тождественными нулями.

1. Введение

Сегодня язык дифференциальной геометрии является наиболее удобным и красивым инструментом, позволяющим описывать модели идеального мира, в котором современная физическая теория рассматривает основные взаимодействия. Геометрическая картина актуальна для понимания теории полей Янга-Миллса, гравитационного и магнитного полей, которые представляют собой связности в соответствующих пространствах расслоений. Так же, при изучении групп калибровочных преобразований, невозможно обойтись без обращения к теории расслоенных пространств, вся современная теория взаимодействия элементарных частиц строится на понятии связности, в физике называемой калибровочной связностью.

Почему интересны именно T^1 -расслоения? Во-первых, одномерный тор можно отождествить с унитарной группой $U(1)$, которая является важнейшим объектом в топологии, базовым понятием квантовой механики и электродинамики.

Во-вторых, если рассматривать главные T^1 -расслоения над почти эрмитовыми многообразиями, то при фиксации связности на пространстве расслоения, там естественным образом порождается почти контактная метрическая структура.

Начало активного исследования главных T^1 -расслоений приходится на середину двадцатого века, первой работой, по-видимому, является работа [6] Кобаяши, в которой он рассматривал T^1 -расслоение с позиции дифференциальной геометрии. В. Ф. Кириченко была исследована геометрия главных тороидальных расслоений, им были получены некоторые обобщения, а в кандидатской диссертации И. В. Борисовского рассмотрены главные T^1 -расслоения над почти эрмитовыми многообразиями, был сформулирован и доказан ряд свойств.

Сегодня геометрия расслоений изучается с различных сторон, в том числе, алгебраической геометрией, топологией, теорией представлений.

2. Главные T^1 -расслоения

Пусть $(P, M, \pi, T^1), \pi : P \rightarrow M$, — главное T^1 -расслоение над почти эрмитовым многообразием M с почти эрмитовой структурой $(J, \tilde{g})$, где J — антиинволютивный эндоморфизм, $\tilde{g}$ — риманова метрика, причем $\tilde{g}(JX, JY) = \tilde{g}(X, Y)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\mathfrak{X}(M)$ — модуль гладких векторных полей на M , $\dim M = 2n, \dim P = 2n + 1$.

Если на T^1 -расслоении задать связность формой связности ω , то на нем порождается почти контактная метрическая структура (Φ, g, ξ, η) по формулам [1]:

$$g = \pi^* \tilde{g} + \eta \otimes \eta;$$

$$\Phi = i_H \circ J \circ \pi_*.$$

Здесь i_H — горизонтальный лифт, в качестве η взята форма связности ω , ξ — единичное векторное поле вертикального распределения. Напомним, что почти контактной метрической структурой называется четверка тензорных полей (Φ, g, ξ, η) , где Φ — тензорное поле типа $(1, 1)$, называемое структурным эндоморфизмом, g — риманова метрика, ξ — векторное поле, η — 1-форма, называемая контактной. При этом должны выполняться условия:

1. $\eta(\xi) = 1$;
2. $\eta \circ \Phi = 0$;
3. $\Phi(\xi) = 0$;
4. $\Phi^2 = -id + \eta \otimes \xi$;
5. $g(\Phi X, \Phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$; $X, Y \in \mathfrak{X}(P)$.

Рассмотрим главное расслоение A — реперов $(B^A M, M, \mu, U(n)), \mu : B^A M \rightarrow M$, над многообразием M . С помощью горизонтального лифта i_H поднимем A — реперы многообразия M в горизонтальные площадки многообразия P . Добавим к ним значение векторного поля ξ в точке p и получим расслоение A — реперов $(B^A P, P, \rho, \{e\} \times U(n)), \rho : B^A P \rightarrow P$, для многообразия P .

Пусть $i, j, k, \dots$ пробегают значения от 0 до $2n$, $a, b, c, \dots$ от 0 до n , $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ от 1 до $2n$, причем $\hat{a} = a + n$.

По основной теореме тензорного анализа задание ковариантных дифференциалов тензорных полей $\tilde{\nabla}J$ и $\nabla\Phi$, где $\tilde{\nabla}$ и ∇ — соответствующие связности метрик $\tilde{g}$ и g , на базе M и тотальном пространстве P соответственно, равносильно заданию множества гладких функций $\{J_{\beta,\gamma}^\alpha\}$ и $\{\Phi_{j,k}^i\}$ на пространствах расслоения A — реперов $B^A M$ и $B^A P$.

Их ненулевые компоненты обозначаются следующим образом:

$$\begin{aligned} B_{ab}{}^c &= \frac{i}{2} J_{b,\hat{c}}^{\hat{a}}, \quad B^{ab}{}_c = -\frac{i}{2} J_{\hat{b},c}^a, \quad B^{abc} = \frac{i}{2} J_{[\hat{b},\hat{c}]}^a, \quad B_{abc} = -\frac{i}{2} J_{[b,c]}^{\hat{a}}, \quad \hat{C}_{abc} = -\frac{i}{2} J_{b,c}^{\hat{a}}, \\ C_{ab}{}^c &= \frac{i}{2} \Phi_{b,\hat{c}}^{\hat{a}}, \quad C^{ab}{}_c = -\frac{i}{2} \Phi_{\hat{b},c}^a, \quad \tilde{C}^{abc} = \frac{i}{2} \Phi_{\hat{b},\hat{c}}^a, \quad \tilde{C}_{abc} = -\frac{i}{2} \Phi_{b,c}^{\hat{a}}, \quad C_{abc} = -\frac{i}{2} \Phi_{[b,c]}^{\hat{a}}, \\ C^{ab} &= -i\Phi_{0,\hat{b}}^a + \frac{i}{2} \Phi_{\hat{b},0}^a, \quad C_{ab} = i\Phi_{0,b}^{\hat{a}} - \frac{i}{2} \Phi_{b,0}^{\hat{a}}, \quad C^a{}_b = -i\Phi_{0,b}^a, \quad C_a{}^b = i\Phi_{0,\hat{b}}^{\hat{a}}, \\ D_{ab} &= -i\Phi_{[a,b]}^0, \quad D^{ab} = i\Phi_{[\hat{a},\hat{b}]}^0, \quad D_a{}^b = -i\Phi_{a,\hat{b}}^0 - i\Phi_{\hat{b},a}^0, \quad D^a = i\Phi_{\hat{a},0}^0, \quad D_a = -i\Phi_{a,0}^0. \end{aligned}$$

В работе [1] были получены связи для компонент ковариантных дифференциалов $\tilde{\nabla}J$ и $\nabla\Phi$ в соответствующих римановых связностях. Мы же можем теперь связать их во введенных обозначения следующим образом:

$$C^{abc} = B^{abc} \circ \pi, \quad C_{abc} = B_{abc} \circ \pi, \quad C^{ab}{}_c = B^{ab}{}_c \circ \pi, \quad C_{ab}{}^c = B_{ab}{}^c \circ \pi,$$

$$C^{ab} = C_{ab} = 0, \quad C^a{}_b = -\Omega_{b,\hat{a}}, \quad C_b{}^a = \Omega_{a,\hat{b}}, \quad D_{ab} = \Omega_{a,b},$$

$$D^{ab} = \Omega_{\hat{a},\hat{b}}, \quad D_a{}^b = 2\Omega_{a,\hat{b}}, \quad D^a = D_a = 0,$$

где $\Omega_{\alpha,\beta}$ — компоненты формы кривизны связности ω .

3. Главные T^1 -расслоения с плоской связностью

Системы функций $\{B^{ab}{}_c, B_{ab}{}^c\}$ и $\{\hat{C}^{abc}, \hat{C}_{abc}\}$ на пространстве расслоения A — реперов $B^A M$ определяют два тензорных поля типа $(2, 1)$ на многообразии M , соответственно называемы виртуальным и структурным тензорами.

Виртуальный тензор почти эрмитовой структуры однозначно представим в виде суммы примитивного и бесследного тензоров, структурный — кососимметрического и квазисимметричного тензоров. Классификацию почти эрмитовых структур проводят по принципу обнуления этих тензоров, она, как и классификация Грея-Хервеллы, дает 16 классов и совпадает с ней [4].

Шесть групп функций $\{C^{ab}{}_c, C_{ab}{}^c\}$, $\{\tilde{C}^{abc}, \tilde{C}_{abc}\}$, $\{C^{ab}, C_{ab}\}$, $\{C^a{}_b, C_a{}^b\}$, $\{D^{ab}, D_{ab}\}$, $\{D^a, D_b\}$ на пространстве расслоения A — реперов $B^A P$ определяют тензорные поля на P , называемые первым, вторым, ..., шестым

структурными тензорами. Первый структурный тензор распадается в сумму бесследного и примитивного, второй представим в виде суммы квазисимметричного и абсолютно кососимметричного, третий и четвертый — распадаются на симметричный и кососимметричный, пятый — на бесследный и скалярный. Аналогичный принцип классификации почти контактных метрических структур дает 2048 классов [4].

Вернемся к рассмотрению главного T^1 -расслоения. На базе у нас почти эрмитова структура, на тотальном пространстве, благодаря фиксации формы связности, порождена почти контактная метрическая структура. В случае когда связность плоская, то есть $d\omega = 0$, а по теореме Кобаяши [6] такая всегда есть, наши равенства принимают вид:

$$C^{abc} = B^{abc} \circ \pi, \quad C_{abc} = B_{abc} \circ \pi, \quad C^{ab}_c = B^{ab}_c \circ \pi, \quad C_{ab}^c = B_{ab}^c \circ \pi,$$

$$C^{ab} = C_{ab} = 0, \quad C^a_b = 0, \quad C_b^a = 0, \quad D_{ab} = 0,$$

$$D^{ab} = 0, \quad D_a^b = 0, \quad D^a = D_a = 0$$

и мы получаем соответствие структур на базе и тотальном пространстве расслоения:

Название структуры на базе	Критерий на базе	Название структуры на тотальном пространстве	Полученная структура на тотальном пространстве
Келерова, $\{0\}$	$B^{ab}{}_c = 0,$ $B^{abc} = 0$	$C^{abc} = C_{ab}{}^c = C_{ab} =$ $D_{ab} = D_a = C_a{}^b = D_a^b =$ 0	0-структура (косимпликтическая)
Приближенно келерова, W_1	$B^{ab}{}_c = 0,$ $B^{[abc]} = B^{abc}$	$C_{ab}{}^c = C_{ab} = D_{ab} =$ $D_a = C_a{}^b = D_a^b =$ $0, C^{[abc]} = C^{abc}$	128-структура (точнейше косимпликтическая)
Почти келерова, W_2	$B^{ab}{}_c = 0,$ $B^{[abc]} = 0$	$C_{ab}{}^c = C_{ab} = D_{ab} =$ $D_a = C_a{}^b = D_a^b =$ $C^{[abc]} = 0$	256-структура
W_3	$B^{ac}{}_c = 0,$ $B^{abc} = 0$	$C_{ab} = D_{ab} = D_a =$ $C_a{}^b = D_a^b = C^{abc} =$ $C^{ac}{}_c = 0$	1024-структура
W_4	$B^{ab}{}_c = \xi^{[a}\delta_c^{b]},$ $B^{abc} = 0$	$C_{ab} = D_{ab} = D_a =$ $C_a{}^b = D_a^b = C^{abc} =$ $0, C^{ab}{}_c = \xi^{[a} \circ \pi \delta_c^{b]}$	512-структура
Квазикелерова, $W_1 \oplus W_2$	$B^{ab}{}_c = 0$	$C_{ab}{}^c = C_{ab} = D_{ab} =$ $D_a = C_a{}^b = D_a^b = 0$	384-структура
Структура Вайсмана-Грея, $W_1 \oplus W_4$	$B^{ab}{}_c = \xi^{[a}\delta_c^{b]},$ $B^{[abc]} = B^{abc}$	$C_{ab} = D_{ab} = D_a =$ $C_a{}^b = D_a^b = 0, C^{ab}{}_c =$ $\xi^{[a} \circ \pi \delta_c^{b]}, C^{[abc]} = C^{abc}$	640-структура
Эрмитова, $W_3 \oplus W_4$	$B^{abc} = 0$	$C^{abc} = C_{ab} = D_{ab} =$ $D_a = C_a{}^b = D_a^b = 0$	1536-структура
G_2 -структура, $W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$	$B^{[abc]} = 0$	$C^{[abc]} = C_{ab} = D_{ab} =$ $D_a = C_a{}^b = D_a^b = 0$	1792-структура
G_1 -структура, $W_1 \oplus W_3 \oplus W_4$	$B^{[abc]} = B^{abc}$	$C_{ab} = D_{ab} = D_a =$ $C_a{}^b = D_a^b = 0, C^{[abc]} =$ C^{abc}	1664-структура
Семикелерова, $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$	$B^{ac}{}_c = 0$	$C_{ab} = D_{ab} = D_a =$ $C_a{}^b = D_a^b = C^{ac}{}_c = 0$	1408-структура
$W_1 \oplus W_3$	$B^{ab}{}_c = \xi^{[a}\delta_c^{b]}$	$C_{ab} = D_{ab} = D_a =$ $C_a{}^b = D_a^b = 0, C^{ab}{}_c =$ $\xi^{[a} \circ \pi \delta_c^{b]}$	1152-структура
$W_2 \oplus W_3$	$B^{ac}{}_c = 0,$ $B^{[abc]} = 0$	$C_{ab} = D_{ab} = D_a =$ $C_a{}^b = D_a^b = C^{ac}{}_c =$ $C^{[abc]} = 0$	1280-структура
$W_2 \oplus W_4$	$B^{ab}{}_c = \xi^{[a}\delta_c^{b]},$ $B^{[abc]} = 0$	$C_{ab} = D_{ab} = D_a =$ $C_a{}^b = D_a^b = C^{[abc]} =$ $0, C^{ab}{}_c = \xi^{[a} \circ \pi \delta_c^{b]}$	768-структура
$W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$	$B^{ac}{}_c = 0$	$C_{ab} = D_{ab} = D_a =$ $C_a{}^b = D_a^b = C^{ac}{}_c = 0$	896-структура

Теорема 1. *Свойство примитивности и бесследности на базе расслоения наследуется на тотальном пространстве первым структурным тензором, кососимметричности и квазисимметричности — вторым структурным тензором.*

4. Пример не плоской связности на главном T^1 -расслоении

Если изменить связность на T^1 -расслоении, то изменится и почти контактная метрическая структура на тотальном пространстве расслоения.

На базе расслоения M , которое является почти эрмитовым многообразием, определена 1-форма α , называемая формой Ли и определяемая следующим образом:

$$\alpha(X) = -\frac{1}{n-1}\delta F(JX),$$

где $F(X, Y) = \tilde{g}(JX, Y)$ — келерова форма, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Рассмотрим ее антиувлечение $\pi^*\alpha$ и в качестве новой формы связности возьмем $\omega + \pi^*\alpha$.

Лемма 1. *1-форма $\omega + \pi^*\alpha$ является формой связности.*

1-форма на пространстве T^1 -расслоения задает связность, если выполняются следующие условия:

$$1. (\omega + \pi^*\alpha) \circ \Lambda = id;$$

и диаграмма

2.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}(P) & \xrightarrow{(\varphi_g)_*} & \mathfrak{X}(P) \\ \omega + \pi^*\alpha \downarrow & & \downarrow \omega + \pi^*\alpha \\ C^\infty(P) \otimes \mathfrak{g} & \xrightarrow{Ad(g^{-1})} & C^\infty(P) \otimes \mathfrak{g} \end{array}$$

должна быть коммутативна, то есть

$$Ad(g^{-1}) \circ (\omega + \pi^*\alpha) = (\omega + \pi^*\alpha) \circ (\varphi_g)_*,$$

где $\Lambda : C^\infty(P) \otimes \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(P) \otimes \mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ — присоединенная алгебра Ли группы T^1 , являющаяся вещественной прямой, $\mathfrak{f}$ — алгебра Ли фундаментальных векторных полей, $Ad : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, $\varphi_g : P \rightarrow P$ — правое действие, $(\varphi_g)_* : \mathfrak{X}(P) \rightarrow \mathfrak{X}(P)$.

Напомним, что отображение $Ad(g)$ строилось следующим образом: рассматривался внутренний автоморфизм $A_g : G \rightarrow G$, $A_g(x) = gxg^{-1}$, G — группа Ли. Затем брался его дифференциал в единице группы $e \in G$, то есть мы

получали отображение $((A_g)_*)_e : T_e(G) \rightarrow T_e(G)$. Мы знаем, что существует канонический изоморфизм $\beta : \mathfrak{g} \rightarrow T_e(G)$, откуда мы можем определить отображение $Ad(g) = \beta \circ ((A_g)_*)_e \circ \beta^{-1}$.

Проверяем первое условие:

$$(\omega + \pi^*\alpha) \circ \Lambda(X) = (\omega + \pi^*\alpha)(\Lambda(X)) = (\omega + \pi^*\alpha)(X^\flat),$$

где $X^\flat \in \mathfrak{f}$. Используем линейность:

$$(\omega + \pi^*\alpha)(X^\flat) = \omega(X^\flat) + \pi^*\alpha(X^\flat).$$

Так как $\pi^*\alpha$ — горизонтальная форма, то $\pi^*\alpha(X^\flat) = 0$. По определению формы связности:

$$\omega(X^\flat) = \Lambda^{-1} \circ \Pi(X^\flat) = X = id(X),$$

где Π — вертикальный проектор, инвариантный относительно действия структурной группы.

Так как в качестве структурной группы взят одномерный тор, то есть окружность, а операция умножения на ней коммутативна, то внутренние автоморфизмы на группе становятся тождественными отображениями, а следовательно, и само отображение $Ad(g) = \beta \circ ((A_g)_*)_e \circ \beta^{-1}$, где A_g — внутренний автоморфизм, является тождественным. Другими словами, достаточно проверить

$$(\omega + \pi^*\alpha) = (\omega + \pi^*\alpha) \circ (\varphi_g)_*$$

.

Теперь докажем, что $(\omega + \pi^*\alpha) = (\omega + \pi^*\alpha) \circ (\varphi_g)_*$. Начнем работать с правой частью:

$$(\omega + \pi^*\alpha) \circ (\varphi_g)_*(X) = (\omega + \pi^*\alpha)((\varphi_g)_*(X)).$$

Пользуемся линейностью:

$$(\omega + \pi^*\alpha)((\varphi_g)_*(X)) = \omega((\varphi_g)_*(X)) + (\pi^*\alpha)((\varphi_g)_*(X)).$$

Так как ω — форма связности, то для нее выполняется: $\omega((\varphi_g)_*(X)) = Ad(g^{-1}) \circ \omega(X)$, и так как отображение $Ad(g^{-1})$ у нас тождественное, то $\omega((\varphi_g)_*(X)) = \omega(X)$.

Так как у нас главное расслоение, то $\pi \circ \varphi_g = \pi$, а если мы захотим подействовать на α , то мы получим $\varphi_g^*(\pi^*\alpha) = \pi^*\alpha$. И тогда мы можем записать:

$$(\pi^*\alpha)((\varphi_g)_*(X)) = (\varphi_g)^*(\pi^*\alpha)(X) = (\pi^*\alpha)(X).$$

В итоге,

$$\omega((\varphi_g)_*(X)) + (\pi^*\alpha)((\varphi_g)_*(X)) = \omega(X) + (\pi^*\alpha)(X) = (\omega + \pi^*\alpha)(X).$$

Откуда получаем, что $\omega + \pi^*\alpha$ — новая форма связности. $\square$

Изменив форму связности, мы изменили и структуру на тотальном пространстве. Действительно, теперь она принимает вид:

$$\hat{\eta} = \omega + \pi^*\alpha;$$

$$\hat{g} = \pi^*\tilde{g} + (\omega + \pi^*\alpha) \otimes (\omega + \pi^*\alpha);$$

$$\hat{\Phi} = \hat{i}_H \circ J \circ \pi_*.$$

Возникает вопрос, как изменилось векторное поле ξ ? Обозначим новое векторное поле $\hat{\xi}$.

Предложение 1. $\hat{\xi} = \xi$.

Пусть $\hat{\xi} = f\xi$. Найдем f . Так как у нас фиксирована почти контактная метрическая структура, то должно выполняться:

$$\hat{\eta}(\hat{\xi}) = 1,$$

то есть,

$$(\omega + \pi^*\alpha)(f\xi) = 1.$$

Используем линейность и определение почти контактной метрической структуры:

$$f \cdot 1 + f\alpha(\xi) = 1.$$

Откуда получаем, что $f = 1$, то есть, $\hat{\xi} = \xi$. $\square$

Теперь, используя основную теорему тензорного анализа для формы Ли:

$$d\alpha_j - \alpha_i\omega_j^i = \alpha_{j,i}\omega^i,$$

запишем компоненты ковариантного дифференциала формы Ли $\{\alpha_{\alpha,\beta}\}$ следующим образом:

$$\alpha_{a,c} = \alpha_{ac} - \alpha^b C_{bac}; \quad \alpha^{a,c} = \alpha^{ac} - \alpha_b C^{bac}$$

$$\alpha_{a, \quad c} = \alpha_a^{\quad c} + \alpha^b B_{ba}^{\quad c}; \quad \alpha^a_{\quad ,c} = \alpha^a_{\quad c} + \alpha_b B^{ba}_{\quad c},$$

где система функций $\{\alpha_{a,c}; \alpha^{a,c}; \alpha_{a, \quad c}; \alpha^a_{\quad ,c}\}$ — это компонентны ковариантного дифференциала формы Ли в присоединенной связности.

Если форма Ли замкнута, то есть $d\alpha = 0$, то форма кривизны связности $\omega + \pi^*\alpha$ будет нулевой и соответствие структур на базе и тотальном пространстве останется тем же.

Если же $d\alpha \neq 0$, то есть $d(\omega + \pi^*\alpha) = d\omega + d(\pi^*\alpha) = \pi^*d\alpha$, то формулы связи первого — четвертого структурных тензоров почти контактной метрической структуры и виртуального, структурного тензоров почти эрмитовой остались такими же, как и при плоской связности.

Пятый структурный тензор можем записать следующим образом:

$$\begin{aligned} D_{ab} &= \Omega_{a,b} = -\alpha_{[a,b]} = -\frac{1}{2}(\alpha_{ab} - \alpha^c C_{cab} - \alpha_{ba} - \alpha^c C_{cab}) = \\ &= -\frac{1}{2}(\alpha_{ab} - \alpha_{ba} - 2\alpha^c C_{cab}) = \alpha_{[ab]} + \alpha^c C_{cab}, \end{aligned}$$

то есть

$$D_{ab} = \alpha_{[ab]} + \alpha^c C_{cab}. \quad (*)$$

Предложение 2. Если виртуальный тензор на базе был примитивен, то четвертый структурный тензор на тотальном пространстве выглядит следующим образом: $C^a_b = \frac{1}{2}(\alpha_b^a - \alpha^a_b)$.

Действительно,

$$C^a_b = -\Omega_{b,\hat{a}} = \alpha_{[b,\hat{a}]} = \frac{1}{2}(\alpha_{b,\hat{a}} - \alpha_{\hat{a},b}) = \frac{1}{2}(\alpha_b^a + \alpha^c B_{cb}^a - \alpha^a_b - \alpha_c B^{ca}_b).$$

В силу примитивности виртуального тензора $B_{cb}^a = \alpha_{[c}\delta_{b]}^a$, и тогда:

$$\alpha^c B_{cb}^a - \alpha_c B^{ca}_b = \alpha^c \frac{1}{2}(\alpha_c \delta_b^a - \alpha_b \delta_c^a) - \alpha_c \frac{1}{2}(\alpha^c \delta_b^a - \alpha^a \delta_b^c) = 0.$$

Следовательно,

$$C^a_b = \frac{1}{2}(\alpha_b^a - \alpha^a_b). \quad \square$$

Теорема 2. Для классов $W_1 \oplus W_4$, $W_2 \oplus W_4$ почти эрмитовой структуры на базе расслоения при размерности выше четырех четвертый структурный тензор почти контактной метрической структуры тождественно равен нулю.

Действительно, для классов $W_1 \oplus W_4$ и $W_2 \oplus W_4$ в работах [3] и [2] соответственно было доказано, что имеет место $\alpha_b^a = \alpha^a_b$ в размерности выше четырех. По предложению 2 имеем, что $C^a_b = \frac{1}{2}(\alpha_b^a - \alpha^a_b)$, из чего получаем, что $C^a_b = 0$, то есть четвертый структурный тензор тождественно равен нулю. $\square$

Теорема 3. *Для класса W_4 почти эрмитовой структуры при размерности выше четырех пятый структурный тензор почти контактной метрической структуры тождественно равен нулю.*

Для класса W_4 из классификации почти эрмитовых структур имеет место $B^{abc} = C^{abc} = 0$. В работе [3] было показано, что для класса W_4 $\alpha_{[ab]} = 0$. А используя формулу (*) для пятого структурного тензора, получаем, что $D_{ab} = \alpha_{[ab]} + \alpha^c C_{cab} = 0$, то есть пятый структурный тензор тождественно равен нулю. $\square$

Список литературы

1. **Борисовский И. П.**, Геометрия главных T^1 расслоений над почти эрмитовыми многообразиями: дис. ... канд. физ.-мат. наук / Борисовский Иван Петрович. — М.: МПГУ, 1998.
2. **Игнаточкина Л.А.**, Новые аспекты геометрии многообразий Вайсмана-Грея, дисс. ... канд. физ.-матем. наук, /Игнаточкина Л. А. — М.: МПГУ, 2001, 94 с.
3. **Кириченко В. Ф.**, Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. — М: Прометей, 2003.
4. **Нинуа О. А.**, Конформные преобразования некоторых классов почти эрмитовых многообразий: магистр. дис., /Дудинская О. А. — М.: МПГУ, 2014, 28 с.
5. **A. Gray, L.M. Hervella** The Sixteen Classes of Almost Hermitian Manifolds and Their Linear Invariants, Annali di Matematica pura ed applicata, CXXIII:IV, 1980, 35–58.
6. **S. Kobayashi**, Principal fibre bundles with the 1-dimensional toroidal group, Tohoku Math. J. 8, 1956, 29–45.

Научное издание

Материалы студенческой научной сессии
г. Москва, 03–08 апреля 2017 г.

Сборник статей

Под общей редакцией Е. С. Крупицына

Электронное издание

Статьи публикуются в авторской редакции

Компьютерная верстка Крупицын Е. С.
Оформление обложки Крупицын Е. С.

Управление издательской деятельности
и инновационного проектирования МПГУ
119571, Москва, Вернадского пр-т, д. 88, оф. 446.
Тел.: (499)730-38-61
E-mail: izdat@mpgu.edu

Подписано к публикации: 15.05.2018.
Объем 7 п.л. Заказ № 790.

ISBN 978-5-4263-0613-4

